ELEMENTI
DI
MATEMATICA PURA

AD USO
DELLE UNIVERSITA', E LICEI
DEL REGNO LOMBARDO VENETO

DI
GIOVANNI GORINI
DOTTORE IN FILOSOFIA E MATEMATICA
P. S. DI MATEMATICA PURA
NELL' IMP. R. UNIVERSITA' DI PAVIA.

VOLUME SECONDO

CONTENENTE LA GEOMETRIA, TRIGONOMETRIA E SEZIONI CONICHE.

EDIZIONE SECONDA MIGLIORATA.

PAVIA
DALLA TIPOGRAFIA DI PIETRO BIZZONI
1824.

ELEMENTI DI GEOMETRIA.

LIBRO PRIMO.

Definizioni.

1. I. La *Geometria* è quella parte delle Matematiche, che serve a trovare la misura, o il rapporto di qualunque siasi estensione paragonata ad un' altra della medesima specie. Il suo nome deriva dal greco, e significa misura della terra; forse dalle prime operazioni dalle quali ebbe origine questa scienza.

2. L' estensione o lo spazio occupato dai corpi è dotato di tre dimensioni, *lunghezza* cioè, *larghezza*, ed *altezza* o *profondità*. Nessun corpo può essere privato d' una qualunque di queste dimensioni, poichè tale privazione porterebbe necessariamente seco l' annientamento del corpo medesimo.

3. Lo spazio occupato da un corpo qualunque si distingue dallo spazio indefinito, perchè quello è circoscritto da certi limiti, i quali gli danno la forma, e senza dei quali non si potrebbe nemmeno concepire. Questi limiti, che cadono immediatamente sotto i nostri sensi, e che non hanno profondità alcuna, si dicono *superficie*. Le estremità o i limiti delle superficie, che non hanno nè profondità nè larghezza, si chiamano *linee*. I limiti delle linee, che non hanno nè profondità, nè larghezza, nè

lunghezza, si dicono *punti*; di modo che in senso matematico si può dire, che

4. II. Il *corpo* o *il solido* è quello, che riunisce in se stesso tutte tre le dimensioni.

5. III. La *superficie* è una estensione in semplice lunghezza e larghezza.

6. IV. La *linea* è una estensione in sola lunghezza.

7. V. Il *punto* è un segno indivisibile nella quantità senza dimensione alcuna.

8. Non avendo il punto matematico alcuna dimensione, e quindi essendo percettibile al solo intelletto, e non potendosi d' altronde eseguire nessuna operazione meccanica senza l' intervento di cose corporee, così si è convenuto di rappresentare il punto matematico col punto fisico; come pure si è stabilito di rappresentare la linea matematica colla linea fisica, la quale per quanto sia sottile non può a meno d' avere qualche larghezza, onde rendersi visibile.

9. Le superficie e le linee non possono esistere indipendentemente dal solido, ma è sempre permesso di separarnele col pensiero, e di considerarle isolatamente. Così si parla della lunghezza d' una strada senza occuparsi della sua larghezza; si parla della grandezza d' un lago senza occuparsi della profondità delle sue acque; si discorre dell' altezza di un monte, o della profondità di una voragine, senza imbarazzarsi della rispettiva larghezza, nè della loro lunghezza; lo che non succede della capacità d' un recipiente, ove è necessario d' aver cura di tutte tre le dimensioni.

10. VI. La *linea retta*, o semplicemente la *retta* è il più corto cammino da un punto all' altro.

Siccome poi la strada più breve da un punto all' altro è unica, così fra due punti non si potrà condurre che una sola retta, e conducendone diverse esse necessariamente dovranno tutte confondersi colla prima. Ogni retta si indica con due lettere poste alle sue estremità.

11. VII. La *linea curva* è quella, che non è retta, nè composta da linee rette.

12. AB è una linea retta; ABC una linea spezzata o composta da linee rette; AFG è una curva (fig. 1.). La linea curva AFG considerata nell' attuale sua giacitura, dalla parte superiore è convessa, dalla parte inferiore è concava; se questa curva si capovolgesse, la convessità sarebbe rivolta in basso e la sua concavità in alto.

13. VIII. Il *piano* o *superficie piana* è una superficie nella quale presi dei punti a piacere, e congiunti mediante delle rette, queste rette giacciono tutte, ed in tutta la loro estensione nella superficie medesima.

14. IX. Ogni superficie, che non è piana, nè composta da superficie piane, è una *superficie curva*. La superficie curva osservata dalla parte rilevata o sporgente è *convessa*, veduta dalla parte incavata o rientrante è *concava*.

15. A è una superficie piana (fig. 2.); B è una superficie curva, che nella attuale positura presenta la sua convessità; C è una superficie curva, che presenta la sua concavità.

16. X. L'*angolo piano* è l'inclinazione reciproca di due linee AB, CB (fig. 3.), che si incontrano in un punto B. Il punto del loro incontro B dicesi il *vertice* dell' angolo, e le linee AB, CB ne sono i *lati*.

17. L' angolo può crescere o diminuire, sino ad un determinato punto, a misura che uno de' suoi lati AB ruotandosi intorno al vertice B si

allontana o si avvicina all' altro lato CB supposto immobile.

18. Quando l' angolo è unico si può nominare colla sola lettera B del vertice, ma se diversi angoli hanno il vertice nel medesimo punto, allora bisogna indicarlo con tre lettere ABC, o CBA, di maniera che la lettera di mezzo sia sempre quella del vertice.

19. L'angolo formato dal concorso di due rette dicesi *angolo rettilineo*; quello formato dal concorso di due curve, si nomina *angolo curvilineo*, ed angolo *mistilineo* quello formato da una retta e da una curva.

20. B è un angolo rettilineo; D curvilineo, ed E mistilineo (fig. 3.).

21. Dalla definizione dell' angolo si vede con facilità, che la sua grandezza non dipende in modo alcuno dalla lunghezza de' suoi lati; cosicchè se, p. es., si prolungassero i lati AB, CB dell' angolo rettilineo B verso E e D, quei lati quantunque divenuti più lunghi conserveranno sempre l' uno rispetto all' altro la medesima inclinazione o situazione, e formeranno quindi sempre lo stesso angolo; ciò vale del pari anche per gli angoli curvilinei, e mistilinei.

22. XI. Quando una retta AB (fig. 4.) cade sopra di un' altra CD in maniera di essere egualmente inclinata sì dall' una che dall' altra parte rispetto alla CD, quella linea chiamasi *perpendicolare* alla sottoposta, e gli angoli eguali CBA, DBA si dicono *angoli retti*.

23. XII. L' angolo maggiore dell' angolo retto, come DBE dicesi angolo *ottuso*, e l' angolo minore dell' angolo retto, come CBE, *acuto* (fig. 4.).

24. XIII. Due angoli qualunque formati da una retta, che cade sopra di un' altra, si chiamano an-

goli *adiacenti* o *conseguenti*, o anche angoli di *supplemento*. Gli angoli, per esempio DBE, EBC (fig. 4.) sono angoli adiacenti o conseguenti, come lo sono anche gli angoli DBG, GBC. Se poi un angolo retto, come DBA, viene diviso in due qualunque DBG, GBA, questi angoli si chiamano angoli di *complemento*.

25. XIV. Quelle linee le quali quantunque situate nel medesimo piano per quanto venghino prolungate da qualsivoglia parte, non possono mai incontrarsi si dicono *parallele*. Le rette AB, CD (fig. 5.) possono rappresentare due parallele.

26. XV. *Figura piana* è una superficie piana circoscritta da una o più linee. Se essa è terminata da linee rette dicesi *figura rettilinea*, o semplicemente *figura*; se è terminata da una o più linee tutte curve dicesi *figura curvilinea*; e se da linee alcune rette ed altre curve, chiamasi *figura mistilinea*. La figura ABCDE (fig. 6.) è rettilinea; FHG è curvilinea; MNP è mistilinea.

27. XVI. Il complesso delle linee, che concorrono a formare una figura, dicesi *contorno* o *perimetro*.

28. Per chiudere definitivamente una superficie, sono necessarie almeno tre linee rette, o lati (così si sogliono nominare quelle rette, che formano il contorno delle figure).

29. XVII. Se la figura è rinchiusa da tre lati, essa prende il nome particolare di *figura trilatera* o *triangolo*. Se da quattro lati chiamasi *tetragono* o *quadrilatero*, se da cinque *pentagono*, se da sei lati, *esagono*, ecc.; ed in generale dicesi *poligono* una figura rinchiusa da un numero qualunque di lati.

30. Essendo necessario il concorso di due linee per formare un angolo piano (16), e ciascun lato d' un poligono qualunque servendo di lato a due

angoli contigui, ne viene che il numero degli angoli di un poligono qualunque è sempre eguale al numero de' suoi lati.

31. XVIII. Dicesi *equilatero* quel triangolo, che ha tutti i suoi lati eguali, come A (fig. 7.).

32. XIX. Chiamasi *isoscele* o *equicrure* quello, che ha due lati eguali, come B.

33. XX. *Scaleno* è quel triangolo, il quale ha tutti i suoi lati disuguali, come C.

34. XXI. *Triangolo rettangolo* è quel triangolo, che ha un angolo retto, come è B.

35. XXII. *Triangolo ottusangolo* è quello, che ha un angolo ottuso come C.

36. XXIII. *Triangolo acutangolo* è quello, che ha tutti tre i suoi angoli acuti; come A.

37. XXIV. *Triangolo equiangolo* è quel triangolo, che ha tutti i suoi angoli eguali.

38. XXV. In qualunque triangolo rettangolo B, il lato GD opposto all' angolo retto F prende il nome particolare di *ipotenusa*, ed i due lati GF, FD, che lo comprendono si dicono *cateti*.

39. XXVI. *Parallelogrammo* o *romboide* è quel quadrilatero, che ha i suoi lati opposti paralleli.

Fra i parallelogrammi si distinguono

40. XXVII. Il *quadrato*, che è quello, il quale ha tutti quattro i suoi angoli retti, ed i lati eguali,

41. XXVIII. Il *rombo*, i di cui lati sono eguali, e gli angoli non retti,

42. XXIX. Il *rettangolo*, che ha gli angoli retti, senza avere tutti i lati eguali.

43. XXX. Il *trapezio* è un quadrilatero il quale ha due soli lati paralleli (*a*).

(*a*) Euclide e molti altri danno il nome di trapezio ad un quadrilatero qualunque, che non sia un parallelogrammo.

La figura ABDC (fig. 8.) è un parallelogrammo; B è un quadrato; C un rombo; D un rettangolo; E un trapezio.

44. XXXI. Il lato CD, sopra il quale un parallelogrammo ABDC o un triangolo ACD (fig. 8.) è supposto che si appoggi, si chiama la base del parallelogrammo o del triangolo, e la perpendicolare AF, o BE, che da un angolo cade sopra la base o lato opposto all' angolo medesimo, o sul prolungamento del lato stesso, è l' *altezza* sì dell' uno che dell' altro. Nel parallelogrammo rettangolo l' altezza è il lato stesso, e nel triangolo rettangolo, qualora si consideri per base uno dei cateti, l' altro cateto ne sarà l' altezza.

45. XXXII. *Poligono equilatero* è quello, che ha tutti i suoi lati eguali. *Poligono equiangolo* è poi quello, che ha tutti i suoi angoli eguali.

46. XXXIII. *Poligono regolare* è quello, che è equilatero, e nello stesso tempo anche equiangolo.

47. XXXIV. Due poligoni si dicono *equilateri fra di loro* quando rispettivamente hanno i lati eguali. Così pure si chiamano *equiangoli fra di loro* quei poligoni, che hanno gli angoli rispettivamente eguali.

48. XXXV. Dicesi *diagonale* qualunque retta condotta in un poligono da un angolo ad un altro angolo non adiacente. La retta AD (fig. 8.) è una diagonale del parallelogrammo ABDC.

49. XXXVI. Il *circolo* o *cerchio* è una figura piana curvilinea, determinata da una linea curva rientrante in se stessa, la quale ha la proprietà di avere tutti i suoi punti egualmente distanti da un punto interno.

50. XXXVII. *Circonferenza* o *periferia* è la curva FMHDG, che determina il circolo (fig. 9.).

51. XXXVIII. *Centro* è il punto C che è egualmente distante da tutti i punti F, H, D, ecc. della circonferenza.

52. XXXIX. *Raggio* è una retta qualunque CD, che dal centro C va alla circonferenza.

53. XL. *Diametro* è una retta FD, che passa pel centro, e termina da ambe le parti alla periferia.

Dalla definizione del cerchio e dalle due precedenti si vede chiaramente che tutte le rette CD, CH, CF, ecc., che dal suo centro C vanno alla circonferenza sono eguali. Dunque i raggi dello stesso cerchio o di cerchi eguali sono tutti fra di loro eguali, come lo sono fra di loro i diametri d' uno stesso cerchio, o di cerchi eguali, essendo ciascuno d' essi composto da due raggi.

54. XLI. *Corda* o *sottesa* è una retta qualunque FH, che congiunge due punti della circonferenza senza passare pel centro.

55. XLII. *Arco* è una porzione qualunque HD della periferia.

56. XLIII. *Settore* è una superficie mistilinea HCD chiusa fra due raggi HC, CD e l' arco HD.

57. XLIV. *Segmento* è uno spazio mistilineo FHMF rinchiuso fra una corda FH ed un arco FMH.

58. XLV. *Semicircolo* o *mezzo cerchio* è un segmento di cerchio FDGF contenuto dal diametro FD, e dalla parte di circonferenza FGD da esso segata.

59. Alcuni sogliono dare il nome di circolo alla periferia, nominando *area circolare* lo spazio piano da essa chiuso.

60. Fra le curve la Geometria elementare non si occupa che del cerchio.

Spiegazione dei termini e dei segni.

61. *Proposizione* comprende tutto ciò che si deve dimostrare, o si deve fare.

62. *Assioma* è una proposizione evidente da se stessa.

63. *Teorema* è una verità che diviene evidente per mezzo di un ragionamento chiamato *dimostrazione*.

64. *Problema* è una quistione proposta, la quale esige *soluzione*.

65. *Lemma* è una verità impiegata sussidiariamente per la dimostrazione d' un teorema o per la soluzione d' un problema.

66. *Corollario* è una conseguenza necessaria, che deriva da una o più proposizioni.

67. *Scolio* è una osservazione sopra una o più proposizioni precedenti, diretta a far conoscere il loro legame, la loro utilità, la loro estensione o restrizione.

68. *Ipotesi* è una supposizione fatta o nell' enunciato d' una proposizione, o nel corso d' una dimostrazione.

69. Il segno $=$ è il segno dell' eguaglianza; così $A = B$, indica che A è eguale a B.

70. Il segno $>$ indica che la quantità, che lo precede è maggiore di quella, che lo segue. Così $A > B$, vuol dire che A è più grande di B.

71. Il segno $<$ indica tutto all' opposto.

72. Il segno $+$, che si pronuncia *più* indica l' addizione delle quantità cui è frapposto: il segno $-$ ne indica la sottrazione. Così $A + B$ rappresenta la somma delle due quantità A e B, ed $A - B$ la loro differenza.

73. Il segno $\times$ indica la moltiplicazione. Così $A \times B$ rappresenta il prodotto di A per B. Alle volte a questo segno si sostituisce un punto, di modo che $A \times B = A \cdot B$.

74. L' espressione $A \times (B + C - D)$ indica il prodotto di A per la quantità $B + C - D$; se si dovesse indicare la moltiplicazione di $A + B$ per $A + B - C$, si scriverebbe $(A + B)(A + B - C)$; oppure $(A + B) \times (A + B - C)$.

75. Una cifra numerica posta d' avanti ad una quantità qualunque serve di moltiplicatore a questa quantità, e dicesi il *coefficiente*. Così per esprimere che la linea AB si deve prendere due volte, si scrive $2AB$. Per indicare la metà di un dato angolo A, si scrive $\frac{1}{2}A$.

76. Il quadrato formato sopra una retta MN si indica con $\overline{MN}^2$. Il suo cubo con $\overline{MN}^3$. Si vedrà a suo luogo cosa si deve intendere propriamente pel quadrato, o pel cubo d' una linea.

77. Il segno $\sqrt{}$ posto avanti ad una quantità qualunque indica la radice quadrata della quantità cui sta avanti; così $\sqrt{A \times B}$ è la radice del prodotto di $A \times B$. La radice cubica d' una quantità qualunque $A \times B \times C$ si scrive $\sqrt[3]{A \times B \times C}$.

78. Se diverse quantità si troveranno congiunte insieme col segno di eguaglianza o con qualche altro segno, le conclusioni, che se ne dovranno dedurre varranno dalla prima all' ultima. Così $AC = CD = FG = HK$ significherà che $AC = HK$, come pure $AB > CD > FG > HK$ indicherà essere $AB > HK$; ecc.

Assiomi.

79. I. *Due quantità eguali ad una terza sono eguali fra di loro.*

80. II. *Il tutto è maggiore di qualunque sua parte, ed è eguale alla somma delle parti nelle quali è stato diviso.*

81. III. *Aggiungendo o togliendo a quantità eguali la stessa quantità, oppure quantità eguali, i risultamenti o i residui sono quantità eguali.*

82. IV. *Se a quantità ineguali si aggiunge o si toglie una medesima quantità, o quantità eguali, le somme o le differenze sono ineguali come prima.*

83. V. *Tutti gli angoli retti sono eguali.*

84. VI. *Due grandezze sono eguali allorquando si possono collocare l' una sull' altra in modo che coincidano in tutta la loro estensione. Viceversa due grandezze eguali poste l'una sopra l' altra coincidono esattamente.*

85. VII. *Due rette, che si tagliano non vanno insieme per nessun tratto di lunghezza, ma immediatamente si separano l'una dall' altra.*

Dimande.

86. I. *Che si possa da qualunque punto a qualsivoglia altro tirare una linea retta.*

87. II. *Che si possa prolungare a piacere una retta qualunque, tanto da una che dall' altra parte.*

88. III. *Che da qualunque punto come centro, con un intervallo qualunque, che ne determini il raggio, si possa descrivere una circonferenza.*

DELLE LINEE RETTE E DEI TRIANGOLI.

Proposizione I. Problema.

89. *Date due rette AB, CD (fig. 10.) disuguali, dalla più grande CD tagliarne una parte DF eguale alla più piccola AB.*

Fatto centro in D con raggio DE eguale ad AB (88) si descriva il cerchio FHG, il quale taglierà la DC in F. La DF sarà eguale alla AB, poichè DF = DE per essere raggi dello stesso cerchio FHG (53); ma DE = AB per costruzione; dunque DF = AB (79).

Proposizione II. Problema.

90. *Da un punto dato C (fig. 11.) tirare una retta CD, che sia eguale ad una retta data AB.*

Dal punto C si conduca l' indefinita CF (86), e sopra di essa partendo dal punto C si prenda CD = AB (89).

Proposizione III. Teorema.

91. *In qualunque triangolo ABC (fig. 12.) la somma BA + AC di due de' suoi lati qualunque è maggiore del terzo lato BC.*

Essendo la linea retta BC il più breve cammino da B in C (10), ne viene che BC è minore di BA+AC.

Proposizione IV. Teorema.

92. *Se da un punto D (fig. 12.) preso dentro un triangolo qualunque ABC, si conducono alle estremità di uno de' suoi lati BC le rette DB, DC,*

la somma $DB + DC$ di queste linee sarà minore di quella degli altri due lati $BA + AC$.

Si prolunghi BD sino ad incontrare il lato AC nel punto F, e si avrà $BF < BA + AF$, per la proposizione precedente; aggiungendo ora dall' una e dall' altra parte FC (82), sarà $BF + FC < BA + AF + FC$, cioè $BF + FC < BA + AC$; si ha del pari (91) $DC < DF + FC$, ed aggiungendo da ambe le parti BD, si avrà $BD + DC < DF + FC + BD$, ossia $BD + DC < BF + FC$; ma si è trovato $BF + FC < BA + AC$, dunque a più forte ragione, sarà $DB + DC < BA + AC$.

Proposizione V. Teorema.

93. *Due triangoli BAC, DEF* (fig. 13.) *sono perfettamente eguali* (a) *quando due lati, e l' angolo da essi compreso nell' uno eguagliano rispettivamente due lati, e l' angolo compreso nell' altro.*

Nei triangoli proposti sia l' angolo $A =$ all'angolo E, il lato $AB = ED$, il lato $AC = EF$; dico che il triangolo BAC sarà perfettamente eguale al triangolo DEF.

Si intenda sovrapposto il triangolo DEF al triangolo BAC di maniera che il lato ED si adatti esattamente sopra il suo eguale AB (84), per lo che il punto E cadrà in A, ed il punto D cadrà in B; per essere poi l' angolo $E = A$, per dato del teorema, egli dovrà coprire esattamente l' angolo A, ed il lato EF prendere quindi la direzione del lato AC;

(a) Per *eguaglianza perfetta o completa* di due figure si intende una eguaglianza totale di dimensioni, di lati cioè, di angoli, di superficie. Quando due figure sono eguali senza che gli angoli, nè i lati sieno rispettivamente eguali, una tale eguaglianza chiamasi *eguaglianza incompleta*, o *equivalenza*.

ma per ipotesi $EF = AC$, dunque il punto F cadrà in C, ed il terzo lato DF del triangolo DEF coprirà esattamente il terzo lato BC del triangolo BAC (10); dunque il triangolo DEF sarà perfettamente eguale al triangolo BAC, perchè questi triangoli sovrapposti coincidono esattamente (84).

94. *Corollario.* Si ricava da questo teorema, che anche la base DF del triangolo DEF è eguale alla base BC del triangolo BAC, e che gli angoli D ed F del secondo triangolo sono rispettivamente eguali agli angoli B, C del primo triangolo.

95. *Scolio.* Nei triangoli perfettamente eguali sono eguali quei lati, che si oppongono ad angoli eguali, e viceversa; così nei triangoli BAC, DEF proposti, il lato AB era per dato del teorema eguale ad ED; e si è dimostrato essere eguali gli angoli C ed F opposti a questi lati eguali. Il lato AC era $= EF$, e si è dimostrato essere l'angolo B eguale al suo corrispondente D. I lati BC e DF, che si oppongono agli angoli A, E eguali, si sono dimostrati eguali.

Proposizione VI. Teorema.

96. *Due triangoli DEF, BAC* (fig. 13.) *sono eguali, quando hanno un lato eguale adiacente a due angoli rispettivamente eguali.*

Sia il lato $DF = BC$, e l' angolo $D = B$; l' angolo $F = C$; sarà il triangolo $DEF = BAC$.

Si intenda posto il lato DF sopra il suo eguale BC di maniera che il punto D sia in B, ed il punto F sia in C. Poichè l' angolo D è eguale all' angolo B, il lato DE prenderà necessariamente la direzione di BA, onde il punto E si troverà su qualche punto della BA o del suo prolungamento.

Così per essere l'angolo $F = C$ dovrà la FE prendere la direzione di CA, ed il punto E dovrà trovarsi su qualche punto della CA o del suo prolungamento. Il punto E nel tempo stesso deve trovarsi quindi sulle due rette BA, CA, cadrà dunque nel punto A di loro intersezione (85), per cui i due triangoli DEF, BAC coincideranno l'uno coll'altro, quindi saranno perfettamente eguali.

Proposizione VII. Teorema.

97. *Se il triangolo ABC (fig. 14.) avrà i due lati AB, AC rispettivamente eguali ai due lati DE, DF del triangolo DEF, e se l'angolo CAB del primo triangolo compreso da questi lati, sarà minore dell'angolo FDE del secondo, anche il lato BC del primo triangolo opposto all'angolo minore, sarà minore del lato FE del secondo triangolo opposto all'angolo maggiore.*

Si intenda sovrapposto il triangolo ABC al triangolo DEF, di modo che il lato AB coincida col lato DE, ciò posto il vertice C del triangolo ACB cadrà o dentro il triangolo DEF in un punto qualunque C', o cadrà in C'' sul lato FE del medesimo triangolo, o cadrà fuori del triangolo stesso in C'''.

1.° *Caso.* Se il vertice C cadrà in C' si avrà (92) $DC' + C'E < DF + FE$; ma per essere il triangolo $DC'E$ eguale al triangolo ABC, anzi il medesimo, sarà $DC' = AC$; $C'E = BC$; onde sostituendo si avrà $AC + BC < DF + FE$, e togliendo da una parte AC, e dall'altra DF ad esso eguale per dato del teorema, rimarrà $BC < FE$.

2.° *Caso.* Se il vertice C cadrà in C'' sarà (80) $C''E < FE$; ma $C''E = BC$; dunque $BC < FE$.

3.° *Caso.* Se il vertice C cadrà in C''', in allora si avrà $DF < DC'' + FC''$ (91); come pure sarà

$EC''' < C''E + C''C'''$, e sommando queste disuguaglianze membro per membro, si avrà $DF + EC''' < DC'' + FC'' + C''E + C''C'''$. Ma si ha $DC'' + C''C''' = DC'''$, ed $FC'' + C''E = FE$, dunque sostituendo $DF + EC''' < DC''' + FE$; ma $DF = AC = DC'''$, ed $EC''' = BC$, dunque finalmente $DF + BC < DF + FE$, ossia $BC < FE$.

Proposizione VIII. Teorema.

98. *Due triangoli sono perfettamente eguali quando hanno tutti tre i lati rispettivamente eguali.*

Sia il lato AB (fig. 15.) del triangolo ABC eguale al lato DE del triangolo DEF, il lato $BC = EF$, ed il lato $AC = DF$; sarà anche l'angolo $C = F$, l'angolo $A = D$, e l'angolo $B = E$, e tutto il triangolo ABC eguale al triangolo DEF.

Imperciocchè se l'angolo C fosse maggiore dell'angolo F, siccome i lati BC, AC, sono rispettivamente eguali ai lati EF, DF, ne seguirebbe per la precedente proposizione, che il lato AB sarebbe maggiore di DE; e se l'angolo C fosse minore dell'angolo F, anche il lato AB, che vi si oppone sarebbe minore di DE; ma per dato del teorema $AB = DE$, dunque l'angolo C non può essere nè maggiore nè minore dell'angolo F, dunque egli è ad esso eguale. Nello stesso modo si proverebbe essere l'angolo $A = D$, e l'angolo $B = E$, e per conseguenza il triangolo $ABC = DEF$ (93).

Proposizione IX. Problema.

99. *Da un punto qualunque C preso sopra una retta data AB (fig. 16.) innalzare una perpendicolare alla retta medesima.*

Sopra la data retta AB si prenda un punto qualunque D, e dall' altra parte del punto C, un punto E, di maniera che sia CD=CE; indi dai punti D, ed E, come centri, e con raggi eguali, maggiore ciascuno del segmento CD o CE, si descrivano due archi di cerchio, che si taglino in un punto F; congiunto il punto F col punto C, la FC sarà la perpendicolare richiesta.

Poichè condotte le rette FD, FE i triangoli DCF, ECF saranno eguali, per avere rispettivamente tutti i loro lati eguali; cioè FD=FE perchè raggi di circoli eguali (53); CD=CE per costruzione, ed FC comune ad ambidue i triangoli; onde l' angolo DCF è eguale all' angolo ECF (95): perciò FC, formando nel punto C colla AB dall' una e dall' altra parte angoli eguali, le è perpendicolare (22).

Proposizione X. Problema.

100. *Dividere una retta AB* (fig. 17.) *in due parti eguali mediante una perpendicolare.*

Fatto centro successivamente negli estremi A e B della retta data, con un raggio arbitrario, ma maggiore della metà di AB, si descrivano due archi di cerchio, che si taglino in F al dissopra della AB; cogli stessi centri, e con raggio egualmente arbitrario al dissotto della retta data, si descrivano due archi di cerchio, che si taglino in D; congiunti i punti F, D delle intersezioni mediante la FD, essa dividerà in C per metà la data linea AB, e le sarà perpendicolare.

Imperciocchè tirate le rette FA, FB; DA, DB; i triangoli FAD, FBD, che ne risultano sono eguali, perchè AF=FB, siccome raggi di circoli eguali; AD=DB per la stessa ragione, ed FD comune ad

ambidue i triangoli; dunque anche gli angoli AFD, BFD opposti ai lati BD, AD eguali, sono eguali, come pure lo sono gli angoli ADF, BDF per simile ragione (95). Ora i due triangoli AFC, BFC sono eguali, avendo gli angoli AFC, BFC eguali compresi da lati eguali (93), onde AC=CB, e l' angolo ACF=BCF, per cui FC è perpendicolare sopra la metà di AB.

101. *Corollario.* Essendo FD perpendicolare ad AB, anche AB sarà perpendicolare ad FD. Poichè avendo dimostrato l' eguaglianza dei due angoli ADC, BDC, i triangoli ADC, BDC sono eguali per avere un angolo eguale compreso tra lati rispettivamente eguali, onde gli angoli ACD, BCD sono eguali e retti. Essendo quindi retto l' angolo BCD, e retto pure l' angolo BCF, la retta AB è perpendicolare ad FD (22).

Scolio. Se la retta AB venisse prolungata dall' una o dall' altra parte, essa conserverebbe nulla ostante la medesima posizione rispetto alla FD, e le sarebbe quindi sempre perpendicolare. Ne deriva da ciò che quando una retta qualunque AG (fig. 24.) cada perpendicolarmente sopra un' altra retta CD in un suo punto qualunque B, anche la CD sarà perpendicolare alla AG.

Proposizione XI. Problema.

102. *Da un punto dato C* (fig. 18.) *fuori d' una retta AB abbassare una perpendicolare sopra questa retta.*

Dal punto C come centro, e con raggio abbastanza grande, si descriva un arco di cerchio, che tagli la data retta AB, o il suo prolungamento nei punti D ed E; si divida per metà in F la corda DE (100), e si congiunga il punto F col punto dato C, la FC sarà la perpendicolare richiesta.

Poichè, tirate le rette CD, CE, ne risultano i due triangoli DFC, EFC, che sono eguali, per avere rispettivamente tutti i lati eguali; cioè DF = FE per costruzione; DC = EC perchè raggi dello stesso cerchio. FC comune; per lo che, anche gli angoli DFC, EFC sono eguali, onde CF è perpendicolare ad AB, ed è calata sopra di essa dal punto dato C.

Proposizione XII. Teorema.

103. *Da un punto dato C sopra una data retta AB (fig. 19.), non si può elevare nello stesso piano che una sola perpendicolare CF.*

Poichè, supposto che LC essa pure sia perpendicolare in C sopra la AB nel medesimo piano in cui giace la perpendicolare CF, essa dovrà trovarsi o dentro l' angolo retto FCB o fuori di esso, cioè nell' angolo retto FCA, altrimenti si confonderebbe colla FC contro l' ipotesi; tanto in un caso che nell' altro, l' angolo retto FCB, o FCA sarebbe eguale all' angolo acuto LCB o LCA, ciò che è impossibile (23).

Proposizione XIII. Teorema.

104. *Se da un punto F preso fuori d' una retta AB (fig. 20.) si guidano a diversi punti della medesima varie rette FC, FD, FE, FG, ecc. 1.° Sarà la perpendicolare FC la minima di tutte. 2.° Le oblique FD, FE egualmente distanti dalla perpendicolare sono eguali. 3.° Di due oblique FD, FG inegualmente distanti dalla perpendicolare è maggiore la FG, che più della FD si allontana dalla perpendicolare FC.*

1.° Si prolunghi la perpendicolare FC sino in H di modo che sia FC = CH, e si tirino le rette DH, GH, EH. I triangoli FCD, DCH (93), sono eguali avendo essi i lati FC, CH eguali per costruzione,

DC comune, e gli angoli DCF, DCH retti (101); onde il lato FD = DH; nello stesso modo si dimostra essere anche FG = GH; ma la FH è un lato del triangolo FDH, dunque (91) FH < FD + DH. Ora FH = FC + CH = 2FC ed FD + DH = 2FD, dunque sostituendo, sarà 2FC < 2FD, e per conseguenza FC < FD; dunque la perpendicolare FC è più piccola dell' obliqua FD.

2.° Sia DC = CE, come si è supposto, in tal caso il triangolo FCD sarà eguale al triangolo FCE, avendo ambidue un angolo eguale compreso fra lati rispettivamente eguali, onde anche DF = FE; dunque le due oblique DF, FE equidistanti dalla perpendicolare FC sono eguali.

3.° Nei triangoli FDH, FGH si ha (92) FD + DH < FG + GH; ma FD = DH, come si è dimostrato, ed FG = GH, essendo lati di due triangoli FCG, GCH eguali, dunque 2FD < 2FG, cioè FD < FG; dunque delle due oblique FD, FG è minore quella FD, che meno si scosta dalla perpendicolare FC.

105. *Scolio.* Siccome la perpendicolare è più corta di qualunque retta, che da un punto si possa condurre sopra una retta data, così questa serve a misurare la vera distanza da un punto ad una retta.

106. *Corollario* I. Da qui ne segue che da un punto preso fuori d' una retta non si può sulla medesima abbassare che una sola perpendicolare; e che da un punto non si possono condurre sulla medesima retta più di due rette eguali.

107. *Corollario* II. Se una perpendicolare FC cadrà sulla metà di AB, tutti i suoi punti saranno equidistanti dalle estremità A e B della AB, essendo evidente che quello, che si è detto pel punto F si può applicare a qualunque altro punto della perpendicolare FC.

108. *Corollario* III. Qualunque punto K (fig. 21.)

preso fuori della perpendicolare FC, che cade sulla metà di AB, è disugualmente distante dalle estremità A e B della retta AB. In fatti essendo il punto F egualmente distante dai punti A e B si ha $FA = FB$, e siccome nel triangolo FKB si ha il lato $BK < FK + FB$, così ne nasce $BK < FK + FA$, cioè $BK < AK$.

109. *Corollario* IV. Acciò una retta sia perpendicolare ad un'altra basterà che essa passi per due punti, ciascuno dei quali sia egualmente distante da due punti presi sopra quest'altra.

Proposizione XIV. Teorema.

110. *Due triangoli rettangoli sono eguali quando hanno l'ipotenusa ed un lato rispettivamente eguale.*

Sia l'ipotenusa $AC = DF$ (fig. 22.), il lato $AB = DE$, il triangolo rettangolo ABG sarà eguale al triangolo rettangolo DEF.

Potendo dimostrare che anche il terzo lato BC è eguale al terzo lato EF, sarà dimostrata la proposizione. Supponiamo, se è possibile, che questi lati non sieno eguali; e che sia $BC > EF$. Presa $BG = EF$, e condotta la AG, ne risulterà il triangolo rettangolo ABG, che sarà eguale a DEF; avendo essi gli angoli B, ed E eguali compresi fra i lati AB, BG; DE, EF rispettivamente eguali, dunque anche $AG = DF$; ma DF per ipotesi è eguale ad AC, dunque $AG = AC$, ciò che è impossibile, essendo $AG < AC$ (104); dunque $BC = EF$, dunque il triangolo $ABC = DEF$.

Proposizione XV. Teorema.

111. *Due triangoli rettangoli sono eguali quando hanno l'ipotenusa eguale, ed un angolo ad essa adiacente rispettivamente eguale.*

Sia l'ipotenusa $AC = DF$ (fig. 22.), e l'angolo $C = F$. Si ponga DF sopra AC di modo che il punto D sia nel punto A, ed il punto F in C (84): a cagione dell'angolo $F = C$, la FE si troverà sulla medesima direzione della CB; ciò posto, dico che anche la DE dovrà confondersi colla AB. Poichè essendo il punto D in A, e dovendo essere DE, ossia AE perpendicolare sopra la FE, o CB, per dato del teorema, se essa non si confondesse colla AB, ne verrebbe che da uno stesso punto sopra una medesima retta potrebbero essere abbassate due perpendicolari, ciò che è impossibile (106); onde anche il punto E si troverà in B, e tutto il triangolo FED sopra il triangolo CBA, per lo che essi saranno eguali (84).

Proposizione XVI. Problema.

112. *Dividere un angolo BAC* (fig. 23.) *in due parti eguali.*

Sopra i lati AB, AC dell'angolo dato, partendo dal vertice A, si prendano le rette AH, AO eguali, e dai punti H ed O, come centri e con raggio maggiore della metà della distanza HO, si descrivano due archi di cerchio, i quali si taglieranno in D, si tiri la AD, essa dividerà l'angolo proposto BAC in due eguali HAD, OAD.

Poichè guidate le rette HD, OD ne risultano due triangoli HAD, OAD, i quali hanno per costruzione i lati rispettivamente eguali, onde anche gli angoli HAD, OAD saranno eguali siccome opposti ai lati HD, OD eguali.

Proposizione XVII. Teorema.

113. *Qualunque retta LC (fig. 19.), che ne incontra un' altra AB fa con questa due angoli conseguenti BCL, LCA, la di cui somma è eguale a due angoli retti.*

Dal punto di concorso C si alzi la perpendicolare CF alla AB (90), e sarà l' angolo $BCL = BCF - LCF$; e l' angolo $LCA = FCA + LCF$, per lo che sommando si avrà $BCL + LCA = BCF - LCF + FCA + LCF = BCF + FCA$; ma ciascuno degli angoli BCF, FCA è retto (22) per essere FC perpendicolare sopra AB; dunque la somma dei due angoli conseguenti $BCL + LCA$ è eguale a due retti.

114. *Corollario* I. Tutti gli angoli, che si fanno al punto C da una medesima parte della retta AB, qualunque sia il numero dei medesimi, presi insieme equivalgono a due angoli retti, essendo la loro somma eguale a quella dei due angoli $BCL + LCA$.

115. *Corollario* II. Se una retta LC cade nel punto C di concorso di due rette BC, AC, e che faccia con esse in quel punto due angoli, la di cui somma sia eguale a due angoli retti, queste due linee BC, AC saranno in una medesima direzione, e formeranno una stessa retta continuata. Poichè facciano esse se è possibile due rette diverse; prolungando AC in H; in allora sarebbero gli angoli $HCL + LCA = BCL + LCA$, e togliendo di comune LCA, si avrebbe $HCL = BCL$, cioè il tutto eguale ad una sua parte, ciò che è impossibile.

Proposizione XVIII. Teorema.

116. *Gli angoli ABD, CBE (fig. 25.) opposti al vertice, che formano due rette AC, DE; che si tagliano in B, sono eguali.*

Stando la DB sopra la AC si ha (113) $ABD + DBC =$ a due angoli retti; ma anche la somma dei due angoli $DBC + CBE$ è eguale a due angoli retti, per la stessa ragione; dunque (79) sarà $ABD + DBC = DBC + CBE$, e levando di comune DBC, rimarrà $ABD = CBE$.

Nello stesso modo si dimostra essere l' angolo $DBC = ABE$.

117. *Corollario* Se pel punto B (fig. 26.) si farà passare un numero qualunque di rette AC, FG, DE, LH, ecc., la somma di tutti gli angoli formati intorno a quel punto, sarà eguale a quattro angoli retti; poichè lo spazio da essi occupato è il medesimo di quello occupato da quattro angoli retti, che venissero nel punto B formati da due linee fra di loro perpendicolari.

Proposizione XIX. Teorema.

118. *Gli angoli CBA, CAB (fig. 27.) sopra la base d' un medesimo triangolo isoscele (a) ABC sono eguali fra di loro, come pure lo sono quelli BAD, ABE, che nascono al dissotto della base mediante il prolungamento dei lati eguali CA, CB del triangolo medesimo.*

Si divida l' angolo ACB in due parti eguali mediante la CF, ciò fatto, i due triangoli ACF, BCF risultanti saranno eguali (93), avendo essi gli angoli ACF, BCF eguali per costruzione, i lati AC, CB eguali per dato del teorema, ed FC comune; onde anche l' angolo $CAF = CBF$ (95); ossia $CAB = CBA$. Inoltre poichè la somma degli angoli $CAB + BAD =$ a due retti (113), come lo è del

(a) Per base d' un triangolo isoscele si suol intendere il suo lato disuguale, mentre negli altri triangoli ogni lato può prendersi indifferentemente per base.

pari anche la somma dei due angoli CBA + ABE, sarà anche CAB + BAD = CBA + ABE (79); ma si è dimostrato essere CAB = CBA; sarà dunque (81) BAD = ABE.

119. *Corollario* I. L' eguaglianza dei due triangoli CAF, CBF dà AF = FB (95), e l' angolo CFA = CFB; onde la retta CF, che divide l' angolo opposto C per metà, divide per metà anche la base sopra cui cade, e la incontra ad angoli retti, cioè le è perpendicolare.

120. *Corollario* II. Se dalla metà della base d' un triangolo isoscele si innalzerà una perpendicolare, prolungata quanto bisogna, passerà pel vertice dell' angolo opposto, e dividerà quest' angolo per metà. Così pure una retta, che dal vertice dell' angolo opposto alla base d' un triangolo isoscele cade perpendicolarmente sulla base medesima, divide per metà e l' angolo e la base stessa.

121. *Corollario* III. Un triangolo equilatero è anche equiangolo. Imperciocchè, potendosi prendere qualunque de' suoi lati per base, esso potrà considerarsi come isoscele in ogni verso.

Proposizione XX. Teorema.

122. *Se due angoli CAB, CBA (fig. 28.) d' un triangolo sono eguali, i lati CB, AC, che ad essi si oppongono sono pure eguali, ed il triangolo è isoscele.*

Se i lati CB, AC non saranno eguali, uno di essi AC sarà maggiore o minore dell' altro CB; supponiamolo maggiore; si prenda AD = BC, e si tiri DB. Siccome è l'angolo CAB = CBA per supposizione, il lato AD = BC per costruzione, AB comune, i due triangoli DAB, CBA sarebbero eguali (93), onde

anche l' angolo DBA sarebbe eguale all' angolo CAB; ma CAB è per supposizione eguale all' angolo CBA; dunque sarebbe DBA = CBA, cioè la parte eguale al tutto, ciò che è impossibile. Nello stesso modo si dimostrerebbe che BC non può essere maggiore di AC, dunque i lati AC, BC saranno eguali, ed il triangolo ACB isoscele.

123. *Corollario.* Un triangolo equiangolo è anche equilatero.

Proposizione XXI. Problema.

124. *Date tre rette AB, CD, EF tali che la somma di due qualunque CD + EF sia maggiore della terza AB, (fig. 29.), costruire un triangolo.*

Presa una retta NP = AB, e fatto centro in N estremità della NP, con intervallo NO = CD, si descriva il circolo MOH; indi centro nell' altra estremità P con intervallo PO = EF si descriva il circolo GOH, si congiunga il punto O di loro intersezione cogli estremi N, P della NP; il triangolo NOP sarà il ricercato, poichè NP = AB per costruzione; il lato NO = CD, ed il lato PO = EF (53).

125. *Scolio.* Se fosse CD + EF = AB, i due cerchi si taglierebbero sopra la stessa NP, e non si formerebbe triangolo. E se fosse CD + EF $<$ AB, i due cerchi non si taglierebbero giammai; e sarebbe impossibile formar con le date linee un triangolo. Se le tre linee date AB, CD, EF fossero eguali, il triangolo risultante sarebbe equilatero.

Proposizione XXII. Problema.

126. *In un dato punto A (fig. 30.) della retta AB formare un angolo eguale ad un angolo dato GHL.*

Si taglino i lati HG, HL dell' angolo dato GHL con una retta qualunque DM, per lo che si avrà il triangolo DHM; con tre rette AE, AF, EF rispettivamente eguali ai tre lati HD, HM, DM del triangolo DHM, si costruisca il triangolo AEF, per la precedente proposizione, il quale (98) sarà eguale al triangolo DHM, ed avrà per conseguenza l' angolo EAF = DHM = GHL.

Proposizione XXIII. Teorema.

127. *Dei due lati AB, AC del triangolo ABC* (fig. 31.) *è maggiore quello AB, che si oppone all' angolo C maggiore, e reciprocamente dei due angoli C, B d' un triangolo ABC è maggiore quello C, che si oppone al lato maggiore AB.*

1.° In C si faccia l' angolo DCB = B e si prolunghi la CD ad incontrare AB, nel triangolo CDB si avrà (122) DC = DB. Ma la retta AC < AD + DC (91), ed AD + DC = AD + DB = AB; dunque AC < AB; o ciò che è lo stesso AB > AC.

2.° Se l' angolo C fosse minore dell' angolo B, ne seguirebbe che anche AB sarebbe minore di AC, ciò che è contro l' ipotesi; se poi l' angolo C fosse eguale all' angolo B, i lati AB ed AC sarebbero eguali (122), lo che è pure contro la supposizione; dunque è necessario che l' angolo C opposto al lato maggiore AB sia maggiore dell' angolo B opposto al lato minore AC.

Proposizione XXIV. Teorema.

128. *Se due rette AB, CD* (fig. 32.) *sono perpendicolari ad una terza EF, queste due linee saranno parallele, non potranno cioè mai incontrarsi a qualunque distanza esse si prolunghino.*

Poichè se prolungate si incontrassero in un punto G, si avrebbero due perpendicolari GE, GF abbassate da uno stesso punto G sopra una medesima retta EF, ciò che è impossibile (106).

129. *Scolio.* Sino a che le due rette AB, CD si conserveranno perpendicolari ad una terza EF, cioè sino a tanto che esse formeranno gli angoli BFE, DEF; AFE, CEF interni di qualsivoglia parte retti, esse non potranno mai incontrarsi, essendo nulla la reciproca loro inclinazione, ma se uno degli angoli, per esempio BFE sarà minore di un angolo retto, la retta AB inclinerà verso la CD e tenderà a formare un angolo, anzi lo formerà effettivamente, qualora le due rette CD, AB venghino prolungate bastantemente dalla parte nella quale l' angolo BFE è minore di un angolo retto; per lo che rendesi ora meno difficile da concepirsi il seguente principio di Euclide.

130. *Se due rette venghino segate da una terza in maniera che da una parte ne risultino due angoli interni, che presi insieme sieno minori di due angoli retti, e dall' altra parte maggiori, prolungate quanto occorre dalla parte ove gli angoli sono minori dovranno incontrarsi.*

Proposizione XXV. Teorema.

131. *La retta EF* (fig. 32.) *perpendicolare a CD è perpendicolare anche alle sue parallele.*

Poichè se la EF non fosse perpendicolare anche ad una qualunque sua parallela AB, uno degli angoli EFB, EFA sarebbe acuto e l' altro ottuso (113) dovendo la loro somma eguagliare due retti, e la AB (129) prolungata dalla parte, in cui forma colla EF angolo acuto anderebbe ad incontrare la sottoposta CD; ciò che è impossibile, essendo per supposizione le due rette AB, CD parallele; dunque EF forma colla AB dall' una e dall' altra parte angolo retto, dunque le è perpendicolare.

Proposizione XXVI. Teorema.

132. *Se due linee parallele AB, CD* (fig. 33.) *vengono segate da una terza qualunque LM nei punti E ed F, gli angoli EFD, AEF risultanti*, che *si dicono* alterni interni, *saranno eguali.*

Poichè se la secante LM sarà perpendicolare ad AB, lo sarà anche a CD (131), e gli angoli EFD, AEF essendo retti saranno eguali.

Se poi la LM sarà obliqua rispetto alle due parallele AB, CD; divisa la parte EF intercetta dalle parallele per metà in K, ed abbassata da questo punto la perpendicolare KH sulla CD (102), che prolungata dalla parte opposta sino all' incontro in G della AB, ad essa pure sarà perpendicolare (131), ne risulteranno i due triangoli rettangoli KHF, KGE eguali (111), avendo questi le loro ipotenuse eguali per costruzione, e gli angoli FKH, GKE eguali, perchè opposti al vertice; dunque KFH sarà eguale all' angolo KEG (95); ma KFH = EFD, e KEG = AEF; dunque i due angoli EFD, AEF alterni interni formati da due linee parellele segate da una terza sono eguali fra di loro.

133. *Scolio.* Gli angoli formati intorno ai punti E ed F paragonati a due a due prendono dei nomi particolari in conseguenza della rispettiva loro posizione.

Gli angoli AEF, EFD (fig. 34.) gli abbiamo già nominati *alterni interni*; alterni perchè giacciono uno per parte della secante LM, interni perchè ambidue sono dentro le rette AB, CD. Per la medesima ragione sono alterni interni anche gli angoli FEB, EFC.

Gli angoli DFL, BEL si dicono *interni esterni dalla medesima parte*, perchè giacendo ambidue dalla stessa parte della secante LM, il primo è fra le rette AB, CD, ed il secondo è fuori. Anche gli angoli DFM, BEM; CFL, AEL; CFM, AEM sono rispettivamente per la medesima ragione angoli *interni esterni dalla medesima parte.*

Gli angoli DFE, BEF si dicono *angoli interni dalla medesima parte*, giacendo ambidue dentro le rette AB, CD, e dalla stessa parte della LM. Gli angoli CFE, AEF sono essi pure angoli interni della medesima parte.

Gli angoli LEB, CFM si dicono angoli *alterni esterni*, perchè uno è da una parte e l' altro dall' altra della secante LM, ed ambidue fuori delle rette AB, CD. Anche gli angoli LEA, DFM sono alterni esterni. Finalmente gli angoli LEB, DFM si dicono *esterni dalla stessa parte*; come pure gli angoli LEA, MFC, giacendo dalla stessa parte della secante LM, e fuori delle rette AB, CD.

134. *Corollario* I. Essendo l' angolo AEF eguale al suo opposto al vertice LEB (116), ed avendo dimostrato essere AEF = EFD, sarà anche EFD = LEB, cioè gli angoli interni esterni dalla stessa parte formati da due parallele segate da una terza saranno fra di loro eguali.

135. *Corollario* II. Essendo AEF = DFE (132), ed essendo la somma degli angoli AEF + BEF eguale a due angoli retti, sarà pure eguale a due retti anche la somma dei due angoli DFE + BEF: donde si vede, che due rette parallele AB, CD segate dalla LM formano gli angoli interni da qualsivoglia parte la cui somma è eguale a due retti.

136. *Corollario* III. Essendo AEF = EFD (132), ed essendo AEF = LEB, ed EFD = CFM (116), sarà anche LEB = CFM, cioè gli angoli alterni esterni formati da due parallele segate da una terza saranno eguali.

137. *Corollario* IV. Essendo la somma degli angoli AEF + CFE interni dalla stessa parte eguale a due retti (135), ed essendo l'angolo AEF = LEB (116), e l'angolo CFE = DFM, ne viene che anche la somma LEB + DFM dei due angoli esterni dalla stessa parte formati da due parallele segate da una terza è eguale a due angoli retti.

138. *Scolio.* Quando due parallele vengono segate da un'obliqua qualunque, tutti gli angoli acuti che ne risultano sono fra di loro eguali, come lo sono pure fra di loro gli ottusi.

Proposizione XXVII. Teorema.

139. *Se due rette AB, CD* (fig. 34.) *verranno segate da una terza qualunque LM, in maniera da formare gli angoli DFE, AEF alterni interni eguali, queste rette saranno parallele.*

Poichè, sia se è possibile HG e non AB parallela a CD, allora l'angolo HEF sarebbe eguale a DFE; ma DFE per dato del teorema è eguale ad AEF, dunque sarebbe AEF = HEF, cioè la parte eguale al tutto, ciò che è impossibile; dunque AB è parallella a CD.

140. *Corollario* I. Se gli angoli DFE, LEB interni esterni dalla medesima parte sono eguali, le rette AB, CD segate dalla LM saranno parallele; poichè l'angolo LEB essendo eguale ad AEF (116), saranno eguali anche gli angoli AEF, DFE, e per conseguenza le rette AB, CD parallele (139).

141. *Corollario* II. Se la somma de' due angoli interni BEF + DFE dalla medesima parte è eguale a due angoli retti, le linee AB, CD segate dalla LM saranno parallele. Poichè essendo anche la somma dei due angoli di supplemento BEF + AEF eguale a due angoli retti, si avrà BEF + AEF = BEF + DFE, e togliendo di comune BEF rimarrà AEF = DFE; onde le rette AB, CD (139) saranno parallele.

142. *Corollario* III. Se gli angoli LEB, CFM alterni esterni sono eguali, le rette AB, e CD segate dalla LM saranno parallele. Poichè essendo l'angolo (116) LEB = AEF, e l'angolo CFM = DFE; sarà anche l'angolo DFE = AEF, e le rette AB, CD parallele.

143. *Corollario* IV. Se la somma dei due angoli esterni dalla medesima parte BEL + DFM è eguale a due retti, le rette AB, CD tagliate dalla LM saranno parallele. Poichè essendo BEL = AEF, e DFM = CFE, anche la somma dei due angoli AEF + CFE interni dalla medesima parte è eguale a due angoli retti, e per conseguenza le rette AB, CD segate dalla LM sono parallele (141).

Proposizione XXVIII. Teorema.

144. *Due linee AB, CD* (fig. 35.) *parallele ad una terza EF sono parallele fra di loro.*

Si conduca la secante PQR perpendicolare sopra EF. Essendo AB parallela ad EF per dato del teorema, sarà PR perpendicolare ad AB (131); parimente essendo CD, per ipotesi, parallela ad EF, sarà PR perpendicolare a CD; dunque AB e CD sono perpendicolari alla medesima retta PR, dunque sono parallele (128).

Proposizione XXIX. Problema.

145. *Per un punto dato E fuori della retta data CD* (fig. 34.) *far passare una parallela AB alla retta data.*

Pel punto E si guidi una retta LF che tagli CD in un punto qualunque F sotto un angolo qualunque LFD; ciò posto si faccia in E mediante la AB dall' altra parte della LF un angolo AEF = LFD; la retta AB sarà parallela a CD (139).

146. *Scolio.* Ciascuna delle altre proprietà delle parallele, segate da una retta qualunque, somministra la maniera di condurre una parallela da un punto dato ad una data retta.

Proposizione XXX. Teorema.

147. *Se le due rette AB, CD* (fig. 36.) *sono parallele, presi due punti qualunque P, e Q sulla CD, ed innalzate da essi le due perpendicolari PM, QO sulla AB, queste sono eguali.*

Di fatto, condotta nel quadrilatero PMOQ la diagonale MQ, ne risultano due triangoli MPQ, QOM eguali, perchè hanno il lato MQ comune adiacente ai due angoli rispettivamente eguali, cioè QMP = OQM; ed MQP = OMQ, perchè alterni interni; dunque PM = QO.

148. *Corollario.* Le rette AB, CD parallele conservano fra di loro la medesima distanza.

Proposizione XXXI. Teorema.

149. *Le rette parallele AB, CD* (fig. 37.) *intercette da altre parallele AC, BD sono eguali; e reciprocamente le rette AB, CD eguali e parallele*

se vengono nei loro estremi dalla medesima parte congiunte da altre rette, le congiungenti BD, AC sono desse pure linee eguali e parallele.

1.° Di fatto condotta la diagonale AD, essendo eguali i triangoli ABD, CAD perchè sopra il lato comune AD, hanno gli angoli ADB, DAC; BAD, CDA rispettivamente eguali (96), si ha AB = CD.

2.° Essendo la AB eguale e parallela alla CD; i due triangoli BAD, ADC sono eguali, avendo un angolo eguale compreso da lati eguali; dunque anche BD = AC, e l' angolo BDA = CAD, onde BD parallela ad AC (139).

Proposizione XXXII. Teorema.

150. *Due angoli CAB, EDF* (fig. 38.) *sono eguali se hanno i lati CA, BA; ED, FD rispettivamente paralleli, e posti nella medesima direzione.*

Prolungato il lato ED sino all' incontro in G del lato BA, la EG sarà secante delle due parallele FD, BA, onde l' angolo EDF = EGB (134). Similmente essendo AB secante delle parallele CA, EG, l' angolo EGB = CAB; dunque CAB = EDF (79).

151. *Scolio.* Se gli angoli formati da rette rispettivamente parallele fossero in direzione opposta, essi si servirebbero reciprocamente di supplemento.

Proposizione XXXIII.

152. *La somma BAC + ABC + BCA* (fig. 39.) *dei tre angoli d' un triangolo rettilineo qualunque ABC è eguale a due angoli retti.*

Pel vertice B d' un angolo qualunque si faccia passare la retta DE parallela al lato opposto AC e si avrà l' angolo DBA = BAC (132), come pure l' angolo EBC = BCA; e sommando sarà DBA + EBC = BAC + BCA, ed aggiungendo di comune l' angolo ABC, si avrà DBA + ABC + EBC = BAC + ABC + BCA; ma DBA + ABC + EBC è eguale a due retti (114); dunque anche la somma degli angoli BAC + ABC + BCA d' un triangolo rettilineo qualunque ABC è eguale a due angoli retti.

153. *Corollario* I. Se uno dei lati AC d' un triangolo ABC viene prolungato in F l' angolo BCF esterno, che ne risulta, è eguale alla somma dei due interni opposti BAC, ABC. Poichè l' angolo BCF con BCA è eguale a due retti (113); ma a due retti è eguale anche la somma dei tre angoli del triangolo ABC; sarà dunque BCF + BCA = BCA + BAC + ABC, e levando dall' una e dall' altra parte BCA, si avrà BCF = BAC + ABC.

154. *Corollario* II. L' angolo esterno d' un triangolo rettilineo qualunque è maggiore di qualsiasi dei due interni opposti, poichè egli eguaglia la loro somma.

155. *Corollario* III. La somma di due angoli d' un triangolo qualunque è sempre minore di due angoli retti.

156. *Corollario* IV. Se il triangolo sarà isoscele l' angolo esterno formato da un lato, e dal prolungamento del suo eguale sarà doppio di ciascuno degli interni opposti.

157. *Corollario* V. Se da un punto F preso ovunque sopra un lato AC (fig. 12.) del triangolo BAC si conduce alla estremità della BC la retta FB, l' angolo BFC sarà > BAF, perchè è esterno al triangolo BAF.

A maggior ragione se da un punto D preso dentro il triangolo BAC si conducono le rette DB, DC alle estremità del suo lato BC; l' angolo BDC, che ne risulta, è maggiore dell' angolo BAC; perchè BDC > BFC; ma BFC > BAC; dunque BDC > BAC.

158. *Corollario* VI. Se due angoli d' un triangolo sono eguali a due angoli di un altro triangolo, anche il terzo angolo sarà eguale al terzo, ed i due triangoli saranno fra di loro equiangoli.

159. *Corollario* VII. Due triangoli, i quali hanno rispettivamente due angoli eguali ed un lato opposto ad uno di questi angoli eguale, sono eguali; poichè essendo anche il terzo angolo del primo triangolo eguale al terzo angolo del secondo (158), questo caso si riduce a quello del (96).

160. *Corollario* VIII. Due angoli d' un triangolo essendo dati, o anche solamente la loro somma, si conoscerà il terzo sottraendo la somma loro da due angoli retti.

161. *Corollario* IX. In un triangolo non può esservi che un solo angolo retto, poichè se ve ne fossero due il terzo angolo diverrebbe nullo. A più forte ragione in un triangolo non può esservi che un solo angolo ottuso.

162. *Corollario* X. In un triangolo rettangolo la somma dei due angoli acuti è eguale ad un angolo retto, per lo che uno di questi è sempre complemento dell' altro. Nel triangolo isoscele e rettangolo gli angoli acuti sono semiretti.

163. *Corollario* XI. In ogni triangolo equilatero ciascun angolo è eguale alla terza parte della somma di due angoli retti, o ciò che è lo stesso, a due terze parti d' un solo angolo retto.

Proposizione XXXIV. Teorema.

164. *La somma degli angoli interni di un poligono qualunque è eguale a tante volte due angoli retti, quanti sono i lati del poligono meno quattro retti.*

Da un punto qualunque G preso dentro il poligono ABCDEF (fig. 40.) tirate le rette GA, GB, GC, GD, GE, GF, a tutti gli angoli del poligono medesimo, il poligono proposto verrà diviso in tanti triangoli, quanto è il numero de' suoi lati. Ora la somma dei tre angoli di qualunque triangolo vale due angoli retti (152); la somma adunque di tutti gli angoli dei triangoli, in cui si è scomposto il dato poligono è eguale a quella di due angoli retti ripetuta tante volte quanti sono i triangoli contenuti nel poligono, cioè quanti sono i lati del poligono medesimo; di modo che supponendo n il numero dei lati del poligono, ed indicando con R un angolo retto, la somma di tutti gli angoli dei triangoli, in cui è stato decomposto il poligono, sarà espressa da $n \times 2R$; ora la somma degli angoli interni del poligono eguaglia quella degli angoli sopra la base di tutti i triangoli, onde se da $n \times 2R$ si toglierà il valore di tutti gli angoli dei triangoli che sono intorno al punto G, sempre eguale a quattro angoli retti (117), l'espressione $n \cdot 2R - 4R$ sarà quella della somma degli angoli interni d'un poligono qualunque di un numero n di lati.

165. *Corollario.* La somma dei quattro angoli d'un quadrilatero qualunque è eguale a quattro angoli retti. Quella d'un pentagono è eguale a sei angoli retti; quella di un esagono a otto angoli retti. Ciascun angolo di un pentagono regolare vale sei quinti d'un angolo retto; ed ogni angolo di un esagono regolare vale quattro terzi d'un angolo retto.

166. *Scolio.* Gli angoli dei poligoni si dicono *salienti* quando hanno il loro vertice al di fuori della figura, come è l'angolo ABC (fig. 40.); e quel poligono, che ha tutti i suoi angoli salienti come ABCDEF, dicesi *poligono convesso*. *Rientranti* sono quegli angoli, i di cui vertici sono al di dentro della figura, come è l'angolo PQR (fig. 41.).

Proposizione XXXV. Teorema.

167. *Se i lati di un poligono qualunque convesso si prolungano tutti nello stesso verso, la somma di tutti gli angoli esterni risultanti è costantemente eguale a quattro angoli retti; qualunque sia il numero dei lati del poligono* (fig. 40.).

Poichè ciascun angolo esterno, come HAL, col suo interno adiacente BAF, vale due angoli retti, e tante se ne hanno in un poligono di queste somme, quant'è il numero de' suoi lati; così nominando n il numero dei lati d'un dato poligono, R il volore d'un angolo retto, sarà $n \times 2R$ il valore della somma di tutti gli angoli interni ed esterni del proposto poligono; quindi se da tale somma si toglierà la somma degli angoli interni del poligono medesimo, che è espressa da $n \times 2R - 4R$ (164), il residuo $4R$ sarà l'espressione della somma di tutti gli angoli esterni di un poligono convesso qualunque.

Proposizione XXXVI. Teorema.

168. *Due triangoli della stessa specie, cioè acutangoli ambidue, o ottusangoli saranno eguali se avranno rispettivamente due lati eguali, ed un angolo non compreso eguale.*

Sia il lato AC del triangolo ACB (fig. 42.) eguale al lato DF del triangolo DFE, e sia $CB = FE$, e l'angolo $A = D$; dico che i due triangoli ACB, DFE saranno eguali.

Supponiamo in primo luogo che gli angoli B ed E opposti ai lati eguali AC, DF sieno acuti; calate le perpendicolari CG, FH, sopra AB, DE dai vertici C, F degli angoli opposti, esse cadranno dentro i rispettivi triangoli, poichè gli angoli retti AGC, DHF essendo maggiori degli angoli acuti B ed E quelli devono necessariamente essere angoli esterni ai triangoli BGC, EHF. Ora perchè l'angolo A = D, ed AC = FD, i due triangoli rettangoli AGC, DHF sono eguali (111), onde sarà AG = DH, e GC = FH.

I triangoli rettangoli BGC, EHF sono essi pure eguali, poichè hanno GC = FH; CB = FE (110); dunque GB = HE, e sommando AG + GB = DH + HE, cioè AB = DE; dunque finalmente i triangoli ACB, DFE, essendo equilateri fra di loro, sono eguali (98).

Se gli angoli B ed E fossero ottusi, come nei triangoli A*b*C D*e*F; abbassando sopra i lati A*b*; D*e* prolungati le perpendicolari CG, FH, che cadranno fuori dei triangoli rispettivi (161); i due triangoli rettangoli AGC, DHF saranno eguali avendo le ipotenuse AC, DF eguali, l'angolo A = D; dunque AG = DH, e CG = FH. Ciò posto i triangoli rettangoli CG*b*, FH*e* sono eguali, perchè C*b* = F*e*, CG = FH; dunque *b*G = *e*H, dunque sottraendo AG — *b*G = DH — *e*H; dunque A*b* = D*e*; e perciò il triangolo A*b*C = D*e*F (98).

Proposizione XXXVII. Teorema.

169. *Se sopra un lato AB (fig. 43.) di un triangolo ABC si prendano i punti D, H egualmente distanti da un punto F preso sopra il lato medesimo, e che si tirino le rette DE, FG, HI parallele alla base BC, le parti GE, GI, che esse taglieranno sul lato AC, saranno pure eguali fra di loro.*

Condotta pel punto G una parallela ad AB, ad incontrare in M la retta DE prolungata, e la HI in N; nei triangoli EGM, NGI gli angoli EGM, NGI sono eguali (116), come lo sono anche EMG, GNI (132); inoltre (149) GN = FH = FD = GM, dunque GN = GM; dunque i due triangoli EGM, NGI sono eguali (96), dunque EG = GI.

170. *Corollario* I. Se si divide un lato d'un triangolo in un numero qualunque di parti eguali, e dai punti di divisione si conducono delle rette parallele alla base, esse divideranno l'altro lato in uno stesso numero di parti fra di loro eguali. Così pure se queste rette dividono i due lati di un triangolo in un medesimo numero di parti eguali, esse saranno parallele alla base. Da qui si ricava la maniera di dividere una retta qualunque in qualsivoglia numero di parti tra di loro eguali, o di formare una scala a parti eguali.

171. *Corollario* II. Se due rette parallele FG, HI taglino due lati AB, AC d'un triangolo BAC, condotta la DE di modo che sia DF = FH, e GE = GI, la DE sarà parallela alle due precedenti.

Proposizione XXXVIII. Problema.

172. *Dividere un angolo retto ABC (fig. 44.) in tre parti eguali.*

Sulla BC si prenda a piacere la parte BD, e sopra di essa si costruisca il triangolo equilatero BFD (124); indi si divida l'angolo FBD per metà (112) mediante la KB.

Poichè l'angolo FBD del triangolo equilatero è eguale a due terzi d'un angolo retto (163), il suo complemento ABF sarà la terza parte d'un angolo retto. Ma l'angolo FBD è stato diviso dalla KB per metà, dunque i tre angoli ABF, FBK, KBC nei quali è stato diviso l'angolo retto ABC, sono eguali.

173. *Scolio.* Il problema di dividere un angolo qualunque in tre parti eguali, non è solubile generalmente col solo uso della riga e del compasso; gli antichi ed i moderni Geometri si sono occupati intorno alla soluzione di questo problema, conosciuto sotto il nome di *trisezione dell'angolo*, ma sempre inutilmente.

Proposizione XXXIX. Problema.

174. *Alla estremità A della retta AB* (fig. 45.) *innalzare una perpendicolare senza prolungare la retta data.*

Sulla AB si prenda una parte qualunque AD, e sopra di essa si costruisca il triangolo equilatero AFD (124). Si prolunghi DF sino in G di modo che sia GF = FD = FA; congiungasi il punto G col punto A, la GA sarà la perpendicolare richiesta.

Poichè l'angolo FAD del triangolo equilatero AFD è eguale a due terzi d'un angolo retto, come lo è anche l'angolo AFD; ma AFD esterno al triangolo isoscele GFA è doppio dell'angolo GAF (156), dunque l'angolo GAF è un terzo di un angolo retto, dunque GAD = GAF + FAD = ad un angolo retto; dunque AG è perpendicolare ad AB nel punto A.

Proposizione XL. Problema.

175. *Dato che la somma di due lati qualunque sia eguale alla retta P.* (fig. 46.), *che la base sia eguale ad M, e l'angolo ad essa adiacente eguale all'angolo O, costruire il triangolo.*

Presa una retta AB eguale alla data M, si faccia in B un angolo eguale all'angolo dato O (126), e sulla retta indefinita BR si prenda la parte BE = P somma dei due lati; congiungasi il punto E col punto A mediante la EA, e sopra la metà H della medesima si innalzi la perpendicolare HF, il punto F, nel quale rimane tagliata la BE, si congiunga col punto A; il triangolo BFA quindi risultante sarà il ricercato.

Di fatto il triangolo FHE = AHF, perchè EH = HA per costruzione, FH è comune, e l'angolo retto FHE = AHF; onde FA = FE; ciò posto il triangolo FAB ha per costruzione AB eguale alla data base M, l'angolo adiacente ABF eguale al dato O, e la somma dei due lati BF + FA = BF + FE = BE = P.

Proposizione XLI. Problema.

176. *Dati due punti C, D* (fig. 47.) *dalla medesima parte d'una retta data AR, trovare sopra questa retta un punto M, che congiunto coi punti C, D dati, il cammino, che conduce da C in D toccando la AR, sia il minimo.*

Dal punto C si tiri sopra la AR la perpendicolare CF la quale si prolunghi al di sopra della AR d'una quantità BF = CF; si congiungano i punti B, D mediante la BD, che incontrerà in M la AR; unito il punto M col punto C, il cammino CM + MD sarà il minimo.

Prendasi un altro punto qualunque N dall'una, o dall'altra parte di M, sopra la AR ed a quello si tirino le rette CN, DN, BN. I triangoli BFM, CFM sono eguali, perchè hanno un angolo eguale compreso fra lati rispettivamente eguali; dunque BM = CM. I triangoli BFN, CFN sono per la stessa ragione fra di loro eguali, dunque BN = CN. Ora si ha (91) BD < BN + ND; ma BD = BM + MD = CM + MD; BN + ND = CN + ND, dunque CM + MD < CN + ND. Dunque qualunque altra strada CN + ND, per andare da C in D, toccando la AR è più lunga di quella CM + MD; dunque CM + MD è la minima.

177. *Corollario* I. Preso un altro punto H sopra la AR, tra M ed N, e condotte le rette BH, CH, DH, si ha $BH + HD < BN + ND$ (92), ossia $CH + HD < CN + ND$, onde tanto meno è lunga la strada per andare da C in D, toccando la retta AR, quanto più il punto, che si tocca si avvicina al punto M.

178. *Corollario* II. Essendo il triangolo $BFM = FMC$, l' angolo $BMF = FMC$, ma l' angolo $BMF = DMN$ (116) dunque $FMC = DMN$; donde ne viene che la strada la più breve, che percorre un corpo per andare da C in D toccando la AR, è quella in cui le rette CM, DM formano colla AR angoli eguali.

179. *Scolio*. Dai Fisici l'angolo AMC si dice angolo *d' incidenza*, ed il suo eguale RMD chiamasi angolo di *riflessione*. Se un corpo elastico sarà spinto da una forza qualunque contro l'ostacolo AR nella direzione CM, giunto in M, tornerà indietro per la strada MD formando l' angolo di riflessione RMD eguale a quello d' incidenza AMC.

LIBRO SECONDO

DEI QUADRILATERI.

180. Qualunque rettangolo ABCD (fig. 48.) dicesi *contenuto* o *compreso* dalle rette AB, BC, che sono intorno all'angolo retto B, in quanto che esse ne determinano la sua grandezza. Tale rettangolo si suole esprimere alle volte in questa maniera $AB \times BC$, oppure in quest' altra ABC. Così quando sieno date due rette AC, BC distinte, oppure congiunte insieme, l' espressione $AB \times BC$, o ABC indicherà il rettangolo ABCD, fatto dalle linee, o lati AB, BC congiunti insieme ad angolo retto B (fig. 48.), e compiuto dai due altri lati CD, DA rispettivamente paralleli ai due AB, BC (39). L' espressione $AC \times BC$, o ACB indicherà il rettangolo contenuto da tutta la retta AC e dalla parte BC; e l' espressione $CA \times AB$, o CAB, quello compreso da tutta la linea CA, e dalla parte AB.

Proposizione I. Teorema.

181. *In qualunque parallelogrammo ABCD* (fig. 49.) *i lati opposti sono fra di loro eguali, gli angoli opposti sono pure fra di loro eguali, e la diagonale AC divide il parallelogrammo in due triangoli eguali ABC, DAC.*

Poichè essendo i lati opposti fra loro paralleli (39), sarà l'angolo $BAC = DCA$ (132), e l'angolo $BCA = DAC$; il lato AC è comune ai due triangoli ABC, DAC; dunque questi triangoli sono eguali (96); dunque anche $DC = AB$, e $BC = AD$ (95), e l' angolo

B = D. Ma si è dimostrato l'angolo BAC = DCA, e l'angolo DAC = BCA, dunque sommando sarà anche BAC + DAC = DCA + BCA, cioè BAD = BCD.

182. *Corollario*. Da ciò ne segue, che se in un parallelogrammo vi è un angolo retto B (fig. 48.) gli altri tre saranno pure retti, perchè essendo l'angolo D = B, pel teorema dimostrato, egli è retto; la somma degli altri due A, C essendo eguale a due angoli retti (165), ed essendo l'angolo A = C è evidente, che ciascuno di essi sarà retto.

Proposizione II. Teorema.

183. *Qualunque quadrilatero ABCD* (fig. 49), *che abbia i lati opposti eguali è un parallelogrammo*.

Poichè tirata la diagonale AC, i triangoli DAC, CAB che ne risultano sono fra di loro equilateri, e per conseguenza anche eguali (98); dunque l'angolo D = B, l'angolo DAC = ACB; DCA = CAB, e per conseguenza AD parallela a BC (139), ed AB parallela a CD; dunque ABCD è un parallelogrammo.

Proposizione III. Teorema.

184. *Se due lati opposti AB, DC d'un quadrilatero ABCD* (fig. 49.) *sono eguali e paralleli, gli altri due lati BC, AD saranno parimente eguali e paralleli, ed il quadrilatero ABCD sarà un parallelogrammo.*

Condotta la diagonale AC, essendo AB parallela a DC, gli angoli BAC, DCA alterni interni sono eguali, il lato AC è comune ai due triangoli ABC, ACD; ed il lato AB = DC per dato del teorema; dunque i due triangoli ABC, ACD sono eguali,

dunque AD = BC, e l'angolo DAC = BCA; dunque (139) AD è parallela a BC, dunque ABCD è un parallelogrammo (*a*).

Proposizione IV. Teorema.

185. *I parallelogrammi ABCD, ABEF* (fig. 50.) *costruiti sopra la medesima base AB, e compresi fra le stesse linee parallele AB, DE sono equivalenti.*

Poichè tanto nell'una che nell'altra figura i triangoli BCE, ADF, sono eguali, avendo essi gli angoli CBE, DAF eguali siccome formati dalle rette CB, EB, DA, FA rispettivamente parallele, e dirette nel medesimo verso (150), ed i lati BC, BE, rispettivamente eguali ai lati AD, AF, perchè lati opposti nei parallelogrammi ABCD, ABEF. Ora se dal trapezio ABED si leva il triangolo BCE rimane il parallelogrammo ABCD, e se dallo stesso trapezio ABED si leva il triangolo ADF = BCE, rimane il parallelogrammo ABEF; dunque il parallelogrammo ABCD = ABEF.

Proposizione V. Teorema.

186. *Due triangoli DAB, FAB* (fig. 50.) *posti sulla medesima base AB, e compresi dalle stesse parallele AB, DE, sono equivalenti.*

Poichè dal punto B condotte le rette BC, BE rispettivamente parallele ai lati AD, AF dei triangoli DAB, FAB, ne risultano i due parallelogrammi ABCD, ABEF eguali (185): ma il triangolo DAB

(*a*). Tanto questa proposizione che la I., si sarebbero potute dedurre dalla pagina 33. del 1. libro, ciò che non si è fatto non volendo in quel libro trattare delle proprietà dei quadrilateri.

(181) è la metà del parallegrammo ABCD; ed il triangolo FAB è la metà del parallelogrammo ABEF; dunque (79) i due triangoli DAB, FAB sono equivalenti.

187. *Corollario.* Il parallelogrammo ABCD, che ha la stessa base AB del triangolo FAB, e che è disposto fra le medesime parallele AB, DE è doppio del detto triangolo; poichè esso è doppio del triangolo DAB = FAB.

Proposizione VI. Teorema.

188. *Due parallelogrammi ABCD, GHEF* (fig. 51.), *che, essendo rinchiusi fra le stesse parallele AH, DE, hanno le basi AB, GH eguali, sono equivalenti.*

Condotte le rette AF, BE il quadrilatero ABEF risultante è un parallelogrammo, poichè essendo per dato del teorema AB = GH; GH = FE, perchè lati opposti nel parallelogrammo GHEF, sarà anche AB = FE; ma AB ed FE sono parallele, dunque (184) ABEF è un parallelogrammo. Ora il parallelogrammo ABCD è equivalente al parallelogrammo ABEF (185), ed ABEF è equivalente GHEF; dunque i due parallelogrammi ABCD, GHEF sono equivalenti.

189. *Corollario.* Essendo anche il rettangolo un parallelogrammo, ne viene, che un parallelogrammo qualunque è eguale in superficie ad un rettangolo, che ha la stessa base e la medesima altezza, o che ha una base eguale a quella del parallelogrammo, ed altezza eguale.

Proposizione VII. Teorema.

190. *Due triangoli DAB, EGH* (fig. 51.), *che hanno le basi AB, GH eguali, e che sono rinchiusi fra le medesime parallele AH, DE sono equivalenti.*

Poichè dai punti B, G tirate le linee BC, GF, rispettivamente parallele ai lati AD, HE dei triangoli proposti, risultano i parallelogrammi ABCD, GHEF equivalenti (188); ora il triangolo DAB è la metà del parallelogrammo ABCD, ed il triangolo EGH è la metà di GHEF (181), dunque essendo equivalenti i parallelogrammi ABCD, GHEF, lo saranno anche i triangoli DAB, EGH.

191. *Corollario.* Due parallelogrammi, o due triangoli, che hanno basi eguali, ed altezze eguali sono equivalenti, poichè essi possono essere disposti fra le medesime linee parallele.

Proposizione VIII. Teorema.

192. *Qualunque trapezio ABCD* (fig. 52.) *è equivalente ad un rettangolo, che ha per base una retta eguale alla semisomma dei lati paralleli AB, CD, e per altezza la perpendicolare DM, che misura la distanza dei lati paralleli.*

Pel punto K metà di BC si guidi ON parallela ad AD, e si prolunghi DC sino al suo incontro in N colla ON.

Nei triangoli CKN, OKB si ha, per costruzione, il lato CK = KB, l'angolo CKN = OKB perchè angoli opposti al vertice, l'angolo CNK = KOB, perchè CN, OB sono parallele; dunque questi triangoli sono eguali (96). Ora se al trapezio ABCD si aggiungerà il triangolo CKN, e da esso si leverà nello stesso tempo il triangolo OKB, tale trapezio si cangerà nel parallelogrammo AOND, onde il trapezio ABCD è equivalente al parallelogrammo AOND. Ora si ha DN = AO, perchè lati opposti nel parallelogrammo AOND; e poichè il triangolo CKN = OKB, anche il lato CN = OB. Ma AB = AO + OB, e

$DC = DN - CN$; dunque sommando $AB + DC = AO + OB + DN - NC = AO + OB + AO - OB = 2AO$; dunque AO equivale alla semisomma dei lati paralleli AB, DC.

Ora il parallelogrammo AOND è equivalente ad un rettangolo che ha la medesima base AO, e la medesima altezza DM (189); dunque il trapezio ABCD è eguale ad un rettangolo, che ha per base la retta $AO = \frac{AB + CD}{2}$, e per altezza DM.

193. *Scolio.* Se pel punto K metà di BC si conduce KL parallela alla base AB il punto L sarà pure nella metà di AD; poichè essendo per costruzione tanto ALKO, quanto DLKN un parallelogrammo, si ha $DL = KN$; $AL = OK$. Ma a cagione dell' eguaglianza dei triangoli CKN, OKB, si ha $KN = OK$; dunque anche $DL = KN = OK = AL$.

Ora $KL = AO$ (181); dunque $KL = \frac{AB + CD}{2}$; dunque il trapezio ABCD è equivalente ad un rettangolo avente per base la linea KL, che congiunge i punti di mezzo dei lati non paralleli, e per altezza, l' altezza DM del trapezio medesimo.

Proposizione IX. Teorema.

194. *In qualunque parallelogrammo ABCD* (fig. 53.) *preso un punto qualunque H sopra la sua diagonale BD, e per questo punto condotte le rette EL, GF rispettivamente parallele ai lati BC, AB del parallelogrammo, si hanno quattro parallelogrammi, due dei quali AGHE, LCFH saranno equivalenti.*

Che ciascuno dei quattro quadrilateri AGHE,

EBFH, LCFH, LDGH sia un parallelogrammo è evidente per la costruzione, avendo ciascuno di essi i lati opposti paralleli. Ora siccome tutto il triangolo ABD (181) è $= BDC$, il triangolo $DGH = DLH$, ed il triangolo $BEH = BFH$; sarà anche $ABD - DGH - BEH = BDC - DLH - BFH$, cioè $AGHE = LCFH$.

195. *Scolio.* I due parallelogrammi DGHL, BEHF si dicono *parallelogrammi intorno alla diagonale*, ed i due parallelogrammi AGHE, LCFH sono chiamati *complementi.* I parallelogrammi di complemento pel teorema dimostrato sono equivalenti. In ogni parallelogrammo rettangolo ABCD, preso uno dei rettangoli intorno alla diagonale BEHF con i due complementi AGHE, LCFH, lo spazio ABCLHGA, che ne risulta, dicesi *gnomone.*

Proposizione X. Problema.

196. *Dati i due lati M ed N d' un parallelogrammo e l' angolo O da essi compreso* (fig. 54.) *descrivere il parallelogrammo.*

Condotta la retta $AB = M$, nel punto A, si faccia un angolo $GAB = O$, e sopra AG si prenda $AD = N$; dal punto D si conduca la DF parallela ad AB, e dal punto B si guidi BC parallela ad AD, ad incontrare la indefinita DF in C; il quadrilatero risultante ABCD sarà il parallelogrammo ricercato.

Poichè per costruzione i lati opposti essendo paralleli, sono anche eguali (181); dunque ABCD è un parallelogrammo formato col lato $AB = M$, $AD = N$, e coll' angolo DAB eguale al dato O.

197. *Corollario.* Se l' angolo dato O sarà retto, la figura descritta sarà un rettangolo (42). Se inoltre i lati M ed N saranno eguali, essa sarà un quadrato (40).

Proposizione XI. Problema.

198. *Fare un parallelogrammo equivalente ad un dato triangolo ABC* (fig. 55.) *con un angolo eguale ad un angolo dato O.*

Dal vertice B del triangolo dato si conduca la indefinita BL parallela alla base AC del triangolo ABC (145); divisa la base AC per metà in D (100), si faccia in questo punto l'angolo CDE eguale all'angolo dato O; dal punto C si conduca finalmente CF parallela alla DE, il parallelogrammo EDCF, che ne risulta sarà equivalente al dato triangolo ABC: poichè condotta la BD, essendo eguali le rette AD, DC, i triangoli ABD, DBC (190) sono equivalenti, e perciò tutto il triangolo ABC è doppio di DBC; ma anche il parallelogrammo EDCF è doppio del triangolo DBC (187), sarà dunque il parallelogrammo EDCF, che per costruzione ha l' angolo EDC eguale all' angolo dato O, eguale in superficie al triangolo dato ABC.

Proposizione XII. Problema.

199. *Sopra una data retta AB* (fig. 56.) *costruire un parallelogrammo, il quale abbia un angolo eguale all' angolo dato O, e che sia equivalente ad un triangolo DFE dato.*

Si faccia il parallelogrammo GACF (198) equivalente al triangolo dato DFE coll' angolo GAC = O. Posta la AB per dritto alla GA, si compisca il parallelogrammo CABP, e si tiri la diagonale PA, che prolungata concorrerà col lato FG pure prolungato in H; condotta HM parallela ad FP, si prolunghino le rette CA, PB sino ad incontrare la HM nei punt

L, M; risulterà il parallelogrammo ABML = GACF (195), coll' angolo LAB = GAC; dunque anche ABML è eguale al dato triangolo DFE, coll' angolo LAB = O, ed è costrutto sopra la data retta AB.

Proposizione XIII. Problema.

200. *Sopra una data retta AB* (fig. 57.) *costruire un parallelogrammo eguale ad un dato rettilineo MNPQ, con un angolo eguale all' angolo dato O.*

Si decomponga il dato rettilineo MNPQ, nei triangoli MNP, MQP, indi sopra la AB si costruisca, per la precedente proposizione, il parallelogrammo ABCD equivalente al triangolo MNP con un angolo A eguale all' angolo dato O. Si prolunghi AD, e sopra DC si formi il parallelogrammo DCEF eguale all' altro triangolo MQP (e così di seguito, se il rettilineo fosse composto d' un maggior numero di triangoli). Ora per essere MNP = ABCD, e MPQ = DCEF, sarà anche MNP + MPQ = ABCD + DCEF, cioè il rettilineo MNPQ eguale a tutto il parallelogrammo FABE, il quale ha l' angolo A eguale all' angolo dato O.

Proposizione XIV. Teorema.

201. *Se una retta AB* (fig. 58.) *è divisa in due parti AC, BC, il quadrato fatto sopra l' intera linea AB contiene il quadrato fatto sulla parte AC, più il quadrato fatto sull' altra parte BC, più due volte il rettangolo compreso dalle parti medesime AC, BC.*

Sia ABGI il quadrato costruito sopra la AB (196), e sia ACFN quello costruito sulla parte AC, e si prolunghino le rette CF, NF sino al rispettivo loro incontro colle linee IG, BG nei punti M, E. Ciò fatto si vede, che il quadrato della AB è composto delle quattro parti ACFN, FEGM, CBEF, NFMI. Ora ACFN, per costruzione è il quadrato della parte AC, FEGM è il quadrato fatto sopra BC, perchè AB = AI (40), AC = AN; la differenza AB — AC = AI — AN; cioè BC = NI. Ma a cagione delle parallele, si ha BC = FE, IN = MF, dunque FE = MF; ora tutti gli angoli di questa figura sono retti; dunque FEGM è il quadrato fatto sopra FE = BC. I due rettangoli poi CBEF, NFMI, per avere i lati BC, IN eguali, ed i lati CF, FN pure eguali, e ciascuno di essi eguale ad AC, sono eguali, e contenuti dalle linee AC, BC; dunque

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2AC \times BC.$$

202. *Scolio.* Questa proposizione combina con quella dimostrata in Algebra per la formazione del quadrato di un binomio, poichè fatto nella precedente conclusione AC = a, BC = b, sarà AB = AC + BC = $a + b$, onde $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

203. *Corollario.* I. Si vede da ciò, che il quadrato d' una retta è eguale a quattro volte il quadrato della sua metà, poichè si è dimostrato, che egli è eguale ai quadrati delle due parti, ed a due rettangoli compresi da quelle parti medesime. Ora la linea essendo divisa in due parti eguali, i due quadrati, ed i due rettangoli devono essere tutti fra di loro eguali. Dunque ecc.

204. *Corollario.* II. Da ciò segue ancora, che se due quadrati sono eguali, i loro lati (che si chiamano le *radici*) sono eguali, e *viceversa*, poichè le linee disuguali AC, BC hanno dei quadrati disuguali.

Proposizione XV. Teorema.

205. *Se la linea AB* (fig. 59.) *è la differenza di due rette AC, BC, il quadrato fatto sopra di essa è eguale al quadrato formato sopra tutta la AC, più il quadrato di BC, meno due volte il rettangolo contenuto dalle rette AC, BC.*

Sopra la AC sia formato il quadrato ACDE (196), e sopra la AB il quadrato ABGH, si prolunghi BG sino in F, ed HG sino in L, e sopra EH si faccia il quadrato EHKM.

Essendo AC = AE; ed AB = AH per costruzione, sarà anche BC = EH; ma EH = DL (181); e BC = GL; dunque GL = DL, e GLDF sarà un quadrato eguale a KHEM: ma per essere i rettangoli BCLG, GFEH eguali perchè contenuti da lati rispettivamente eguali, sarà anche BCLG + GLDF = GFEH + KHEM, cioè il rettangolo BCDF = GFMK = CD × BC = AC × BC. Ora se da tutta la figura ACDMKHA composta dei quadrati di AC, e di BC = EH si levano i due rettangoli BCDF, GFMK, rimane ABGH, che è il quadrato di AB, dunque $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2AC \times BC.$

206. *Scolio.* Fatte in questa formola le medesime sostituzioni, che si sono fatte in quella del precedente scolio, si ha $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, come appunto si insegna in Algebra.

Proposizione XVI. Teorema.

207. *Il rettangolo contenuto dalla somma di due rette AB + BC, e dalla loro differenza AB — BC* (fig. 60.) *è eguale alla differenza dei quadrati fatti sopra le linee date AB, BC.*

Sopra AB, ed AC si costruiscano i quadrati ABIF, ACDE, e prolungata AB d'una quantità $BK = BC$, si compia il rettangolo AKLE. Ciò fatto sarà $AK = AB + BK = AB + BC$, ed $AE = AC = AB - BC$; dunque il rettangolo $AKLE = AK \times AE = (AB + BC) \times (AB - BC)$. Ma questo medesimo rettangolo è composto dalle due parti ABHE, BHLK, e la parte $BHLK = EDGF$, perchè $BH = ED$, $BK = EF$; dunque $AKLE = ABHE + EDGF$; ora queste due parti formano il quadrato ABIF, meno il quadrato DHIG, fatto sopra $DH = BC$; dunque finalmente $AKLE = ABIF - DHIG$;

cioè $(AB + BC)(AB - BC) = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2$.

208. *Scolio.* Questa proposizione coincide colla formola d'Algebra $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Proposizione XVII. Teorema.

209. *Il quadrato ABCD* (fig. 61.) *costruito sopra l'ipotenusa di un triangolo rettangolo AGB, è eguale alla somma dei quadrati AGHL, BEFG costruiti sopra i due cateti AG, BG.*

Dall'angolo retto G, sopra l'ipotenusa AB, si abbassi la perpendicolare GM, che prolungata sino all'incontro in N della DC ad essa pure sarà perpendicolare (131), e si tirino le diagonali GD, LB.

L'angolo LAB composto dell'angolo retto LAG, e dell'angolo GAB è eguale all'angolo GAD, pure composto d'un angolo retto BAD, e dell'angolo GAB. La retta $LA = AG$, per essere ambedue lati dello stesso quadrato AGHL; ed $AB = AD$ per la medesima ragione; dunque il triangolo $LAB = GAD$ (93). Ora essendo retto l'angolo AGB, e retto anche l'angolo AGH; le linee BG e GH non fanno che

una sola retta HB (115) parallela ad LA; ed il triangolo LAB è la metà del quadrato AGHL, poichè appoggia sulla medesima base AL del quadrato ed è rinchiuso fra le stesse linee parallele LA, HB (187). Il triangolo GAD è la metà del rettangolo AMND, appoggiando entrambi sulla stessa base AD ed essendo rinchiusi fra le medesime parallele AD, GN. Sarà dunque il quadrato AGHL doppio del triangolo LAB, ed il rettangolo AMND doppio del triangolo GAD. Ma $LAB = GAD$, dunque anche il quadrato AGHL è eguale al rettangolo AMND. Con un simile ragionamento si dimostra che il quadrato BEFG è eguale al rettangolo BMNC; dunque sommando sarà $AMND + BMNC = AGHL + BEFG$; ma $AMND + BMNC = ABCD$ (80); dunque $ABCD = AGHL + BEFG$, ossia $\overline{AB}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2$.

210. *Corollario* I. Dunque il quadrato di uno dei lati AG è eguale al quadrato dell'ipotenusa meno il quadrato dell'altro lato BG, cioè $\overline{AG}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BG}^2$

211. *Corollario* II. Il quadrato formato sopra la diagonale AC (fig. 62.) del quadrato ABCD è doppio del quadrato medesimo, o ciò che è lo stesso è doppio del quadrato formato sopra uno dei lati AB. Poichè il triangolo ABC è rettangolo in B, ed è nello stesso tempo anche isoscele, onde si ha $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AB}^2$.

Proposizione XVIII. Problema.

212. *Fare un quadrato eguale in superficie ad un numero qualunque di quadrati presi insieme.*

Sieno AB, BC, CD (fig. 63.) i lati di tre quadrati dati. Si tirino le due indefinite BM, BN ad angolo retto B, sopra le quali, partendo da B si prenda $BF = AB$, $BE = BC$; congiunti i punti F ed E, sarà (209) $\overline{FE}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$. Si prenda indi sopra BN, la parte $BH = FE$, e $BL = CD$, tirata la LH, sarà $\overline{LH}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{BL}^2 = \overline{FE}^2 + \overline{BL}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2$.

Proposizione XIX. Problema.

213. *Fare un quadrato eguale alla differenza di due quadrati dati.*

Sieno AB, AC (fig. 64.) i lati dei quadrati dati; all' estremità A della retta $AC < AB$, si innalzi la perpendicolare indefinita AZ, indi centro in C con intervallo $= AB$, si tagli la indefinita AZ in D; e sia condotta la CD; essendo CAD un triangolo rettangolo in A, sarà (209) $\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2$; donde $\overline{AD}^2 = \overline{DC}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2$.

214. *Scolio.* Mediante queste due ultime proposizioni si può trovare un quadrato, che sia eguale alla differenza fra la somma di un numero qualunque di quadrati dati, e quella di un altro numero di quadrati egualmente dati.

Proposizione XX. Teorema.

215. *Se il quadrato del lato AB (fig. 65.) eguaglia la somma dei due quadrati degli altri lati AG, BG del triangolo AGB, sarà l' angolo AGB opposto al lato AB necessariamente un angolo retto, e quindi il triangolo AGB rettangolo.*

Poichè condotta dal punto G sopra AG la perpendicolare $GC = GB$, e tirata la retta AC, sarà $\overline{AC}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{GC}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2$; ma per dato del teorema è anche $\overline{AB}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2$; dunque sarà $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2$, e quindi $AC = AB$ (204). I triangoli CGA, AGB saranno eguali, essendo AG comune $GC = GB$, ed $AC = AB$; dunque anche l' angolo AGB opposto al lato AB è eguale all' angolo AGC opposto ad AC; ma AGC è retto per costruzione dunque sarà retto anche l' angolo AGB.

Proposizione XXI. Teorema.

216. *Se sopra due lati AB, BC di un triangolo qualunque ABC (fig. 66.) si costruiscono due parallelogrammi qualunque ABFD, CBGH, e si prolunghino i lati esterni DF, HG dei parallelogrammi sino al loro incontro in O, indi si congiunga il punto O col vertice B del triangolo dato mediante la OB, la somma di quei due parallelogrammi sarà eguale al parallelogrammo formato col terzo lato AC del proposto triangolo, e colla retta OB, con un angolo eguale alla somma dei due angoli BAC, DOB.*

Si prolunghi OB sino in L, e pei punti A, C si tirino le rette AM, CN parallele ad OL, si congiungano mediante la MN i punti M ed N in cui quelle parallele segano le rette DO, HO. Ciò fatto si ha $CN = OB$, per essere queste linee parallele intercette dalle altre parallele CB, NO; così pure $AM = OB$; dunque $AM = CN$. Le rette AM, CN sono anche parallele, essendo ciascuna di esse parallela ad

OL (144); dunque ACNM è un parallelogrammo (184); i due parallelogrammi ABFD, ABOM sono eguali, avendo comune la base AB, ed essendo rinchiusi fra le medesime parallele AG, DO: ma il parallelogrammo ABOM è eguale anche ad ALKM, avendo amendue la medesima base AM ed essendo rinchiusi fra le stesse parallele AM, LO; dunque sarà il parallelogrammo ABFD=ALKM. Nello stesso modo si dimostra, che è il parallelogrammo CBGH=LCNK; dunque sommando si ha ABFD + CBGH=ALKM + LCNK=ACNM (80); ma ACNM è formato dai lati AC, ed AM=OB; e l'angolo MAC=BAC + BAM; ma BAM=DOB (181); dunque MAC=BAC + DOB; dunque il parallelogrammo ACNM fatto coi lati AC, OB, e coll'angolo MAC=BAC + DOB, è eguale ai due parallelogrammi ABFD + CBGH.

217. *Corollario.* Se il triangolo ABC (fig. 67.) sarà rettangolo in B, e se sopra i lati AB, BC saranno costruiti dei quadrati, anche ACGM sarà un quadrato.

Il triangolo rettangolo ABC = BFO, poichè AB=BF, siccome lati del quadrato ABFD; BC=BN, ma BN=FO (181); dunque anche BC=FO; onde AC=OB; ma OB=AM; dunque AC=AM. L'angolo BCA=BOF; ma BOF = MAB; dunque MAB=BCA, per cui BAC + BGA = BAC + MAB=MAC; ma BAC+BCA eguaglia un angolo retto (162), dunque è retto anche MAC, ed il parallelogrammo ACGM è un quadrato: dunque il quadrato formato sopra l'ipotenusa AC d'un triangolo rettangolo ABC è eguale alla somma dei quadrati formati sopra i due cateti AB, BC, come in altro modo fu dimostrato, colla proposizione XVII. di questo libro.

Proposizione XXII. Teorema.

218. *Se l'angolo C di un triangolo BAC* (fig. 68.) *è acuto; il quadrato formato sopra il lato AB ad esso opposto è eguale alla somma dei quadrati formati sopra i lati AC, BC che lo comprendono, meno il doppio rettangolo contenuto da uno dei lati BC, e dalla CD compresa fra il vertice C e la perpendicolare AD calata dall'angolo opposto A.*

Se la perpendicolare AD cadrà dentro il triangolo ABC, si avrà BD=BC—CD, e per conseguenza $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2BC \times CD$; ed aggiungendo da ambe le parti $\overline{AD}^2$, sarà $\overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 - 2BC \times CD$: ma $\overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2$ (209), e $\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2$; dunque sostituendo verrà $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2BC \times CD$.

Se la perpendicolare AD cadrà fuori del triangolo ABC, si avrà BD = CD — BC, e per conseguenza $\overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times CD$, ed aggiungendo da ambe le parti il quadrato della perpendicolare AD, cioè $\overline{AD}^2$, si avrà $\overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 - 2BC \times CD$, cioè $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2BC \times CD$.

Proposizione XXIII. Teorema.

219. *Se l'angolo C di un triangolo ACB* (fig. 69.) *sarà ottuso, il quadrato formato sopra*

il lato opposto AB sarà eguale alla somma dei quadrati dei lati AC, BC che comprendono l' angolo C, più il doppio rettangolo contenuto dal lato BC e dalla retta CD, compresa fra il vertice C e la perpendicolare AD calata dal vertice A dell' angolo opposto.

La perpendicolare AD non può cader dentro il triangolo, perchè se cadesse, per esempio in E, il triangolo ACE avrebbe ad un tempo stesso l'angolo retto E e l' angolo ottuso C, ciò che è impossibile (161); dunque essa cade fuori, e si ha $BD = BC + CD$, quindi $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + 2BC \times CD$, ed aggiungendo da ambe le parti $\overline{AD}^2$, si avrà

$$\overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 + 2BC \times CD,$$

ossia $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2BC \times CD$.

Proposizione XXIV. Teorema.

220. *Se dal vertice di un angolo qualunque A di qualsivoglia triangolo ABC (fig. 70.), si conduce una retta AE alla metà della sua base BC, sarà la somma dei quadrati dei lati AB, AC, che comprendono l' angolo A eguale al doppio quadrato della metà della base CE o BE, più il doppio quadrato della AE.*

Si abbassi la retta AD perpendicolare a BC, e si avrà $\overline{AB}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{AE}^2 + 2BE \times ED$ (219), ed $\overline{AC}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{AE}^2 - 2EC \times ED = \overline{BE}^2 + \overline{AE}^2 - 2BE \times ED$; dunque sommando sarà $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{BE}^2 + 2\overline{AE}^2$.

Proposizione XXV. Teorema.

221. *Le diagonali AC, BD, d' un parallelogrammo qualunque ABCD (fig. 71.) si tagliano reciprocamente per metà nel punto E del loro incontro, e la somma dei loro quadrati, è eguale alla somma dei quadrati dei lati del parallelogrammo stesso.*

Poichè i triangoli AED, BEC sono equiangoli fra di loro, ed hanno i lati AD, BC eguali (181), questi triangoli sono eguali, onde $AE = CE$; $DE = EB$. Ora il triangolo ADC, in virtù del precedente teorema dà $2\overline{AE}^2 + 2\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2$, ed il triangolo ABC dà $2\overline{AE}^2 + 2\overline{EB}^2$, ossia $2\overline{AE}^2 + 2\overline{DE}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2$; dunque sommando sarà $4\overline{AE}^2 + 4\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2$; ma essendo AE la metà di AC, si ha (203) $4\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2$, ed essendo pure DE la metà di BD si ha del pari $4\overline{DE}^2 = \overline{BD}^2$; dunque $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2$.

222. *Corollario.* Se il parallelogrammo ABCD (fig. 72.) avrà tutti quattro i suoi lati eguali, se sarà cioè un rombo o un quadrato, i triangoli AEB, BEC saranno eguali, poichè essi avranno i lati rispettivamente eguali, per lo che gli angoli AEB, BEC saranno eguali, e ciascuno di essi sarà dunque retto; donde si ricava che le diagonali d' un rombo o di un quadrato si tagliano scambievolmente per metà ad angoli retti.

Proposizione XXVI. Teorema.

223. *Se i lati di un quadrilatero qualunque EFGH (fig. 73.) saranno tutti divisi per metà, la figura ABCD formata dalle rette condotte pei punti di divisione sarà un parallelogrammo.*

Condotte le diagonali FH, EG, essendo ciascuna delle rette AD, BC parallela ad FH (170); esse sono parallele fra di loro (144); così pure essendo le rette AB, DC parallele ad EG, sono parallele fra di loro; dunque ABCD è un parallelogrammo (39).

Proposizione XXVII. Teorema.

224. *Di tutti i rettangoli $AC \times BC$, $AD \times BD$ (fig. 74.), che si possono formare con due parti di una linea data AB divisa in C o in D, ecc., quello i di cui lati AC, BC sono eguali sarà il massimo* (a).

Poichè essendo $AD = AC + CD$; e $BD = BC - CD = AC - CD$; sarà il rettangolo $(AC + CD) \times (AC - CD) = AD \times BD$: ma (207) $(AC + CD)(AC - CD) = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2$; dunque $\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2 = AD \times BD$; ed aggiungendo dall' una e dall' altra parte $\overline{CD}^2$, si avrà $\overline{AC}^2 = AD \times BD + \overline{CD}^2$; ora $\overline{AC}^2 = AC \times AC = AC \times BC$; dunque il rettangolo $AC \times BC$ supera qualunque altro rettangolo $AD \times BD$ del quadrato di CD, cioè di $\overline{CD}^2$; dunque egli è il più grande.

225. *Corollario.* Da ciò ne segue, che il quadrato è il più grande di tutti i rettangoli, che si possono costruire sotto il medesimo perimetro.

(a) La quantità più grande di tutte quelle della medesima specie si chiama *massimo*; la più piccola dicesi *minimo*.

LIBRO III.

DELLE PROPORZIONI DELLE RETTE E DELLE FIGURE, E DELLA SOMIGLIANZA DEI TRIANGOLI E DEI POLIGONI.

226. Tutte le grandezze della medesima specie si possono paragonare fra di loro come i numeri, poichè nella stessa maniera che un numero è doppio, triplo, ecc. di un altro numero, una linea può essere doppia, tripla, ecc. di un' altra linea, una superficie può essere doppia, tripla, ecc. di un' altra superficie, un solido doppio, triplo, ecc. d' un altro solido; di modo che la dottrina delle proporzioni pei numeri può applicarsi letteralmente alla Geometria, mentre fissata che siasi una unità di misura, ogni quantità di quella specie potrà essere rappresentata dal numero, che indica a quante di quelle unità la quantità proposta è equivalente.

Per non mandare però i nostri lettori ai trattati ordinarj di Aritmetica e di Algebra per la intelligenza delle proporzioni, e per rendere indipendente da quelle dottrine più che sia possibile lo studio della Geometria, rammenteremo loro le definizioni, che si danno intorno alle proporzioni geometriche: col soccorso delle quali e di alcuni assiomi, dedurremo quelle proprietà delle medesime che sono di una immediata intelligenza; riservandoci di dimostrare nel decorso di questo libro le proprietà più rimarchevoli delle proporzioni, delle quali avremo bisogno nel seguito di quest' opera.

Definizioni.

227. I. *Rapporto geometrico*, o *ragione geometrica* è il numero delle volte che una data quantità contiene o è contenuta in un' altra della medesima specie.

228. II. La prima delle due quantità, che si paragonano dicesi l'*antecedente* del rapporto, la seconda il *conseguente*.

229. III. Due rapporti eguali formano una *proporzione*. Se le due quantità A, B hanno lo stesso rapporto delle due C, D, queste quattro quantità sono in proporzione, e si scrivono nel modo seguente A : B : : C : D, oppure in quest' altro modo A : B = C : D.

230. IV. Le quantità A, C sono gli antecedenti della proporzione; B, D ne sono i conseguenti. Le quantità A, D si dicono gli *estremi*; B, C i *medii* della proporzione. La quantità D chiamasi poi *quarta proporzionale* alle altre tre A, B, C.

231. I termini che formano un medesimo rapporto devono essere della stessa specie; ma non è necessario che in una proporzione i due rapporti sieno fra quantità tutte della stessa specie; anzi una linea può stare ad una linea, come una superficie sta ad una superficie, come un solido ad un solido; mentre tali grandezze devono sempre considerarsi come numeri di quella specie, che a ciascun rapporto conviene.

232. V. Tre grandezze come A, B, C sono in proporzione, quando il rapporto della prima alla seconda eguaglia quello della seconda alla terza. Tale proporzione prende il nome di *proporzione continua*; e si scrive in questa maniera A : B : C,

oppure, secondo il solito, A : B : : B : C. La quantità B chiamasi *media proporzionale* fra la prima A e la terza C; la quantità C prende il nome di *terza continuamente proporzionale* alle due prime A, B.

233. VI. Due quantità sono in *ragione inversa* o *reciproca* di due altre quando la prima sta alla seconda, come la quarta sta alla terza.

234. VII. Due quantità si dicono in *ragione sesquialtera* quando stanno fra di loro come 3 a 2, *sussesquialtera* poi quando stanno come 2 a 3.

235. VIII. Quelle quantità, nelle quali il rapporto della prima alla seconda è lo stesso di quello della seconda alla terza, di quello della terza alla quarta, e così di seguito, si dicono *continuamente proporzionali*, o in *proporzione continua*.

236. IX. In una serie di grandezze continuamente proporzionali A : B : C : D : E : ecc. la ragione della prima A alla terza C dicesi *duplicata* di quella della prima A alla seconda B; la ragione della prima A alla quarta D *triplicata*, ecc.

La ragione poi della prima alla seconda dicesi *sudduplicata* di quella, che esiste fra la prima e la terza, *sutriplicata* della ragione, che vi è fra la prima e la quarta; ecc.

237. X. Una proporzione dicesi *composta* di due o più proporzioni, quando i suoi termini risultano dalla moltiplicazione dei termini di quelle proporzioni.

238. XI. Figure rettilinee *simili* sono quelle, che hanno gli angoli tutti rispettivamente eguali, e che d' intorno agli angoli eguali hanno i lati proporzionali.

239. XII. Diconsi *omologhi* quei lati delle figure simili, i quali sono intercetti da angoli rispettivamente eguali. Sono poi *omologhi* quegli angoli, che si trovano rispettivamente uguali nelle figure simili.

240. XIII. Figure *reciproche* sono quelle nelle quali un lato dell' una sta ad un lato dell' altra, come un lato della seconda sta ad un lato della prima.

241. XIV. Si dicono *commensurabili* fra di loro quelle rette alle quali si può assegnare una comune misura, ed *incommensurabili* quelle delle quali non esiste una misura comune.

Assiomi.

242. I. *Le grandezze, che hanno il medesimo rapporto con una stessa grandezza o con grandezze eguali, sono eguali.*

243. II. *Le grandezze eguali hanno uno stesso rapporto colla medesima grandezza o con grandezze eguali.*

244. III. *Le grandezze, alle quali una sola e medesima grandezza ha uno stesso rapporto, sono eguali.*

245. IV. *Se si paragonano due grandezze ad una terza, sarà maggiore quella delle due, che colla terza avrà un maggior rapporto*, e viceversa.

246. V. *I rapporti eguali ad un medesimo rapporto od a rapporti eguali sono fra di loro eguali. Così se $A : B :: C : D$, e se $C : D :: E : F$, cioè se il rapporto di A a B è eguale a quello di C a D, e che quello di C a D sia eguale a quello di E ad F, in allora il rapporto di A a B sarà eguale a quello di E ad F, si avrà cioè $A : B :: E : F$.*

Da quanto si è detto si può facilmente dedurre

247. I. Che quando in una proporzione vi sono tre termini rispettivamente eguali a tre termini di un' altra proporzione, anche il quarto termine della prima proporzione è eguale al quarto termine della seconda, diversamente in una delle proporzioni vi

sarebbero due rapporti disuguali, ciò che è contrario alla definizione, che abbiamo data (229).

248. II. Se gli antecedenti di una proporzione sono eguali, lo saranno fra di loro anche i conseguenti, e *viceversa*, altrimenti la proporzione sarebbe composta di due rapporti disuguali.

249. III. Se gli antecedenti A e C di una proporzione $A : B :: C : D$ sono rispettivamente eguali agli antecedenti di un' altra proporzione $A : E :: C : F$, i conseguenti delle medesime saranno in proporzione, sarà cioè $B : D :: E : F$. Delle due proporzioni $1 : 2 :: 5 : 10$; $1 : 6 :: 5 : 30$, che hanno comuni gli antecedenti 1 e 5, i conseguenti loro 2, 10; 6, 30 sono in proporzione, poichè il rapporto di 2 a 10 è lo stesso di quello di 6 a 30.

250. IV. Se i termini di un rapporto si moltiplicano o si dividono per una stessa quantità, il rapporto dei prodotti o dei quozienti, che si ottengono è sempre quello delle quantità semplici. Poichè dipendendo il rapporto di due quantità dalla grandezza relativa di una rispetto all' altra, se una di esse diverrà doppia, tripla, ecc., la metà, un terzo, ecc. di quello che era, purchè nello stesso tempo diventi doppia, tripla, ecc., la metà, il terzo, ecc. anche l' altra, una di esse accresciuta o diminuita conterrà o sarà contenuta nell' altra del pari accresciuta o diminuita lo stesso numero di volte di prima. Da ciò ne viene, che i termini dell' uno o dell' altro rapporto di una proporzione qualunque, possono essere moltiplicati o divisi ambidue per una quantità qualunque.

251. V. Se due rapporti si moltiplicano fra di loro antecedente per antecedente, conseguente per conseguente, e se due altri rapporti eguali rispettivamente ai primi si moltiplicano del pari tra di

loro, i due *rapporti composti*, che si ottengono sono fra di loro eguali. Se, per esempio, i rapporti 1 : 2; 3 : 9 vengono moltiplicati fra di loro, i numeri 3 e 18, che si ottengono, hanno il medesimo rapporto dei numeri 10, e 60 risultanti dalla moltiplicazione dei due rapporti 2 : 4, e 5 : 15 rispettivamente eguali ai due primi. Da ciò si ricava, che se due o più proporzioni si moltiplicano termine per termine, i prodotti che si ottengono sono in proporzione: di modo che se 1 : 2 : : 2 : 4, e se 3 : 9 : : 5 : 15, sarà anche 3 : 18 : : 10 : 60.

Proposizione I. Teorema.

252. *I parallelogrammi ABCD, BFEC* (fig. 75.), *che hanno la medesima altezza stanno fra di loro come le basi DC, CE.*

Supponiamo primieramente che le basi DC, CE sieno commensurabili, e che sia, per esempio, la DG l' unità di misura, che si adatti esattamente a ciascuna delle due rette DC, CE, e che nella prima vi stia un numero *m* di volte, e nella seconda un numero *n* di volte. In tal caso la base DC starà alla base CE, come il numero *m* delle unità di misura contenute in DC al numero *n* di unità di misura contenute in CE, sarà cioè DC : CE : : *m* : *n*.

Divisa la DC nelle *m* parti di cui è composta, e la CE in *n* parti, ciascuna eguale all' unità di misura DG, e da ciascuno dei punti di divisione G, K, ecc. guidata una parallela alla DA ad incontrare la AF, il parallelogrammo ABCD conterrà un numero *m* di parallelogrammi DGHA, GKLH, ecc. tutti equivalenti (188), essendo appunto *m* il numero delle unità di misura lineari, che sono contenute nella sua base, e sopra ciascuna delle quali

appoggia uno di quei parallelogrammi; per una simile ragione il parallelogrammo BFEC ne conterrà un numero *n*; onde si avrà ABCD : BFEC : : *m* : *n*; ma ciascuno dei due rapporti DC : CE; ABCD : BFEC è eguale al rapporto *m* : *n*; dunque questi rapporti sono fra di loro eguali (246), dunque si avrà

ABCD : BFEC : : DC : CE.

Supponiamo ora che le basi DC, CE sieno incommensurabili, dico che quei parallelogrammi staranno ancora come le basi. Poichè il parallelogrammo ABCD stia, se è possibile, al parallelogrammo BFEC, non come la base DC alla CE, ma come la base DC ad un' altra linea CX maggiore o minore di CE, abbiasi cioè la proporzione

ABCD : BFEC : : DC : CX.

Sia CX $>$ CE, e si prenda DG $<$ EX, e tale che sia contenuta esattamente in DC. Applicando la DG anche sopra la CX; essendo per supposizione EX $>$ DG, un punto almeno di quelle divisioni dovrà cadere necessariamente fra E ed X, per esempio in Z; ciò posto si compisca il parallelogrammo BYZC. Per avere i due parallelogrammi ABCD, BYZC le loro basi DC, CZ commensurabili, essi staranno come le basi, onde ABCD : BYZC : : DC : CZ; ma, per ipotesi ABCD : BFEC : : DC : CX; dunque (249) sarà anche BYZC : BFEC : : CZ : CX. Ma CZ $<$ CX, dovrebbe essere anche BYZC $<$ BFEC: ma invece è maggiore, dunque la proporzione è impossibile; dunque ABCD non può stare a BFEC come DC sta ad una linea CX $>$ CE. Con un ragionamento affatto simile a questo si proverebbe che il quarto termine della proporzione non può essere neanche minore di CE; dunque esso sarà esattamente eguale a CE, dunque qualunque sia il rapporto delle basi, i parallelogrammi ABCD, BFEC della stessa altezza stanno come le loro basi DC, CE.

253. *Corollario*. I triangoli, che hanno la medesima altezza stanno fra di loro come le basi, essendo rispettivamente la metà dei parallelogrammi, di egual base, e di eguale altezza (250).

Proposizione II. Teorema.

254. *Due parallelogrammi ABCD, FGHK* (fig. 76.), *che hanno le basi AB, FG eguali stanno fra di loro come le rispettive altezze DL, KO.*

Poichè sopra AB prolungata si tiri la perpendicolare CN = DL, sopra della quale si prenda MN = KO, e si compia il parallelogrammo rettangolo LNMP. I due rettangoli LNCD, LNMP, avendo comune l' altezza LN staranno come le loro basi, CN, MN (252), si avrà cioè
LNCD : LNMP :: CN : MN; ma LNCD = ABCD (185); LNMP = FGHK (191), essendo per dato del teorema FG = AB; ma AB = DC = LN; dunque FG = LN; CN = DL; MN = KO, dunque sostituendo sarà ABCD : FGHK :: DL : KO.

255. *Corollario*. I triangoli che hanno la stessa base o basi eguali stanno come le rispettive altezze.

Proposizione III. Teorema.

256. *Due parallelogrammi qualunque ABCD, EFHG* (fig. 77.) *stanno fra di loro in ragione composta delle loro basi e delle rispettive loro altezze, o ciò che è lo stesso come i prodotti delle basi nelle rispettive altezze.*

Si costruisca un terzo parallelogrammo KQPN, il quale abbia la base KQ eguale alla base AB del

primo parallelogrammo, e l' altezza NO eguale all'altezza GM del secondo parallelogrammo. Paragonando ora il parallelogrammo ABCD, col parallelogrammo KQPN, si avrà (254) ABCD : KQPN :: DL : NO; paragonando i parallelogrammi KQPN, EFHG di eguale altezza, si avrà (252) KQPN : EFHG :: KQ : EF, e moltiplicando termine per termine queste due proporzioni, si avrà
ABCD × KQPN : EFHG × KQPN :: KQ × DL : EF × NO; ma KQ = AB; NO = GM, sostituendo questi valori, e dividendo il primo rapporto della proporzione composta per la quantità comune KQPN (250), si otterrà finalmente

ABCD : EFHG :: AB × DL : EF × GM.

257. *Corollario* I. Due triangoli qualunque staranno come i prodotti delle loro basi nelle rispettive altezze (250).

258. *Corollario* II. Siccome l' altezza di un rettangolo, o di un triangolo rettangolo si confonde col rispettivo lato, ne viene, che due rettangoli, o due triangoli rettangoli staranno fra di loro come il prodotto dei lati rispettivi, che sono intorno all' angolo retto.

Proposizione IV. Teorema.

259. *Se in un triangolo qualunque ABC* (fig. 78.) *si conduce la retta DE parallela ad un lato BC, essa taglierà gli altri lati AB, AC nei punti D, E in parti proporzionali; viceversa, se una retta DE taglia i lati AB, AC del triangolo ABC in parti proporzionali, essa è parallela a BC.*

Nel quadrilatero DBCE si guidino le diagonali DC, BE; i triangoli DEB, EDC risultanti sono equivalenti, avendo comune la base DE, ed essendo rinchiusi fra le medesime parallele DE, BC, dunque si potrà istituire la seguente proporzione AED : DEB : : AED : EDC in cui sono eguali fra di loro gli antecedenti, come pure fra di loro anche i conseguenti. Ora i due triangoli AED, DEB, avendo il vertice nello stesso punto E, e le basi sulla stessa linea AB, avranno la medesima altezza, e saranno proporzionali alle loro rispettive basi, starà cioè AED : DEB : : AD : DB, così pure starà AED : EDC : : AE : EC; ma essendo eguali fra di loro i due rapporti AED : DEB; AED : EDC, saranno eguali anche gli altri due (246) AD : DB; AE : EC, starà cioè AD : DB : : AE : EC.

Viceversa. Supponiamo che stando AD:DB::AE:EC la DE non sia parallela alla BC. Sia la DP parallela a BC, e si avrà, AD : DB : : AP : PC, ma per supposizione AD : DB : : AE : EC, dunque anche AP : PC : : AE : EC proporzione impossibile, perchè essendo AP $<$ AE, bisognerebbe che anche PC fosse minore di EC; ma invece è maggiore, dunque DP non è parallela a BC; se la DP fosse tirata al dissotto della DE, si cadrebbe in un simile assurdo; dunque la parallela alla BC condotta dal punto D non può differire dalla DE; dunque DE è parallela alla base BC.

260. *Corollario* I. Sarà anche AB : AD : : AC : AE; poichè se a ciascuno dei due triangoli DEB, EDC eguali si aggiunge il triangolo AED, si avranno i due triangoli AEB, ADC. che saranno equivalenti, per lo che starà AEB : AED : : ADC : AED; ma AEB : AED : : AB : AD, ed ADC : AED : : AC : AE; dunque starà anche AB : AD : : AC : AE.

261. *Corollario* II. Starà del pari AB:DB::AC:EC; perchè AEB : DEB : : ADC : EDC; ma AEB : DEB : : AB : DB; ed ADC : EDC : : AC : EC; dunque starà anche AB : DB : : AC : EC.

Proposizione V. Teorema.

262. *Se l'angolo C del triangolo ACB* (fig. 79.) *si divide per metà mediante la CD, che cade sopra la base AB, i segmenti AD, DB della base saranno proporzionali ai lati adiacenti AC, BC;* e viceversa, *se i segmenti AD, DB della base verranno dalla CD segati in parti proporzionali ai lati adiacenti AC, BC, essa dividerà anche l'angolo C per metà.*

Sopra AC prolungata si prenda CE $=$ CB, e si tiri la EB. Poichè CE $=$ CB, il triangolo BCE sarà isoscele, e l'angolo E $=$ EBC $=\frac{1}{2}$ACB $=$ ACD; dunque CD (140) è parallela ad EB; dunque finalmente (259) AD : DB : : AC : CE; ma CE $=$ CB, dunque AD : DB : : AC : CB.

Se fosse AD : DB : : AC : CB, fatta la medesima costruzione, sarà anche AD : DB : : AC : CE, e la retta DC sarà per conseguenza parallela alla BE, onde l'angolo CEB $=$ ACD (134), e l'angolo CBE $=$ BCD (132); ma l'angolo CEB $=$ CBE; dunque anche l'angolo ACD $=$ BCD.

Proposizione VI. Teorema.

263. *Se i due parallelogrammi ABCD, CPGH* (fig. 80.) *sono equivalenti ed hanno gli angoli BCD, PCH eguali, intorno ad essi i lati saranno reciprocamente proporzionali,* e viceversa *se intorno agli angoli eguali BCD, PCH i lati saranno reciprocamente proporzionali i parallelogrammi saranno equivalenti.*

Poichè essendo per dato del teorema l'angolo BCD $=$ PCH, posto il lato BC per dritto a CH, sarà anche PC per dritto a CD, e le rette AD, GH prolungate concorreranno in I, e ne risulterà il parallelogrammo DCHI (39). Ora siccome per dato del teorema è ABCD = CPGH, si potrà instituire la proporzione ABCD : DCHI : : CPGH : DCHI; ma il rapporto di ABCD : DCHI è quello delle loro basi BC : CH, ed il rapporto di CPGH : DCHI è quello delle loro basi PC : CD, dunque starà

BC : CH : : PC : CD.

Se sarà poi BC : CH : : PC : CD, sarà anche

ABCD : DCHI : : CPGH : DCHI,

onde (248) ABCD = CPGH.

Proposizione VII. Teorema.

264. *I triangoli ABC, DBE eguali in superficie (fig. 81.), che hanno eguali gli angoli ABC, DBE, avranno d' intorno a questi angoli i lati reciprocamente proporzionali*, e viceversa, *se intorno agli angoli eguali, i lati di due triangoli saranno reciprocamente proporzionali, i triangoli saranno equivalenti.*

Poichè posto per dritto il lato AB a BE, a cagione degli angoli ABC, DBE eguali, dovrà essere anche CB per dritto a BD. Tirata la AD, i triangoli ABC, ABD, che hanno la medesima altezza staranno come le loro basi CB, DB, starà cioè ABC : ABD : : CB : DB, i triangoli DBE, ABD, che hanno la stessa altezza, daranno DBE : ABD : : BE : AB, dunque (246) CB : DB : : BE : AB.

Se poi starà CB : DB : : BE : AB, starà anche ABC : ABD : : DBE : ABD, ma i conseguenti di questa proporzione sono eguali, lo saranno anche fra di loro gli antecedenti, cioè ABC = DBE.

265. *Corollario.* Se i due angoli ABC, DBE (fig. 82.) presi insieme saranno eguali a due retti, e se i lati dei triangoli ABC, DBE saranno intorno a quegli angoli reciprocamente proporzionali, se

sarà cioè AB : BE : : BD : BC, i due triangoli saranno ancora eguali in superficie. Poichè presa BF = BC, e condotte le rette FE, AF, AD; nella superiore proporzione posto in luogo di BC la retta BF ad essa eguale, starà AB : BE : : BD : BF onde la FE sarà parallela alla AD (259), ed i triangoli AEF, DEF saranno eguali in superficie (186); aggiungendo a ciascuno di essi il triangolo FEB, sarà il triangolo AFB = DEB; ma AFB = ABC (190), dunque ABC = DEB.

266. *Scolio.* Lo stesso riuscirebbe nei parallelogrammi i quali intorno ad angoli la somma dei quali eguaglia due retti, avessero i lati reciprocamente proporzionali.

Proposizione VIII. Teorema.

267. *Due parallelogrammi, che hanno un angolo eguale, sono in ragione composta dei lati, che stanno d' intorno all' angolo eguale*, o *come il prodotto dei lati stessi.*

Fatta la medesima costruzione, che abbiamo fatta per la proposizione VI. nella (fig. 80.). Si hanno le due seguenti proporzioni ABCD : DCHI : : BC : CH; DCHI : CPGH : : CD : CP; moltiplicando termine per termine, queste due proporzioni, e dividendo i due termini del primo rapporto per la quantità comune DCHI, si ha ABCD : CPGH : : BC $\times$ CD : CH $\times$ CP.

268. *Scolio.* Lo stesso dicasi di due triangoli, che hanno un angolo eguale.

Proposizione IX. Teorema.

269. *Se quattro linee A, B, C, D (fig. 83.) sono in proporzione, il rettangolo delle estreme è eguale a quello delle medie, e viceversa se due ret-*

tangoli sono eguali, i loro lati saranno reciprocamente proporzionali.

Se A : B :: C : D, fatto con A e con D il rettangolo $A \times D$, con B e con C il rettangolo $B \times C$, questi rettangoli, per avere i lati reciprocamente proporzionali intorno agli angoli retti, sono eguali (263); dunque $A \times D = B \times C$. Se poi i rettangoli $A \times D$; $B \times C$ sono eguali, devono avere i lati reciprocamente proporzionali (263); onde A : B : : C : D.

270. *Corollario.* Se tre linee A, B, C saranno continuamente proporzionali, cioè se A : B :: B : C, il rettangolo delle estreme $A \times C$, sarà eguale al quadrato $\overline{B}^2$ della media, e *viceversa* se il rettangolo fatto colle due linee A, C sarà eguale al quadrato formato sulla retta B, quelle tre linee saranno in proporzione continua, onde A : B : : B : C.

Proposizione X. Teorema.

271. *Se quattro linee A, B, C, D* (fig. 84.) *sono proporzionali, esse lo saranno ancora* alternando, *ed* invertendo (*a*).

Se starà A : B : : C : D, starà anche
alternando A : C : : B : D, ed
invertendo B : D : : A : C.

Sopra la prima A, e la terza C, delle quattro rette proporzionali date, si facciano i rettangoli $A \times D$, $C \times D$ aventi la comune altezza D. Sulla seconda B, e sulla quarta D si costruiscano i due rettangoli $B \times C$, $C \times D$ colla comune altezza C. Confrontando

(*a*) Si alternano i termini d'una proporzione quando si cambia di posto ai medii, o agli estremi fra di loro; si invertono poi quando i medii passano ad estremi, e *viceversa*.

fra di loro i rettangoli $A \times D$, $C \times D$ per avere comune l'altezza staranno come le basi, per lo che $A \times D : C \times D$: : A : C; dal paragone degli altri due si avrà poi $B \times C : C \times D$: : B : D. Ma $A \times D = B \times C$ (269), dunque i primi due rapporti delle trovate proporzioni sono eguali, dunque (246) starà anche
A : C : : B : D.

Si ha del pari $B \times C : C \times D$: : B : D,
come pure $A \times D : C \times D$: : A : C;
quindi anche B : D : : A : C.

Proposizione XI. Teorema.

272. *Se quattro linee sono proporzionali, le rette che si otterranno*, componendo, dividendo; componendo e dividendo *nel medesimo tempo saranno in proporzione.*

Se le quattro linee AB, BC, AD, DE (fig. 85.) saranno in proporzione, se starà cioè
AB : BC : : AD : DE, starà anche

componendo $\begin{cases} AB + BC : BC :: AD + DE : DE \\ AB + BC : AB :: AD + DE : AD \end{cases}$

dividendo $\begin{cases} AB - BC : BC :: AD - DE : DE \\ AB - BC : AB :: AD - DE : AD \end{cases}$

componendo e dividendo $AB + BC : AB - BC :: AD + DE : AD - DE.$

Pel punto A si conducano due indefinite AZ, AY, e sopra AZ partendo dal punto A si ponga la AB, indi da B verso Z si porti la BC, e sopra la AY si segnino le rette AD, DE; si prenda BM = BC e DN = DE; e si tirino le rette BD, CE, MN.

Stando per supposizione AB : BC : : AD : DE, la retta BD sarà parallela alla CE (259); starà quindi anche (261) AC : BC : : AE : DE, oppure (260)

AC : AB : : AE : AD; ma AC = AB + BC, ed AE = AD + DE; dunque starà AB + BC : BC : : AD + DE : DE, ed AB + BC : AB : : AD + DE : AD.

Essendo BM = BC, e DN = DE, anche la MN (259) sarà parallela alla DB, onde starà

AM : MB : : AN : ND, ed anche

AM : AB : : AN : AD; ma AM = AB — MB = AB — BC, ed AN = AD — DN = AD — DE, dunque sostituendo starà AB — BC : BC : : AD — DE : DE,

ed AB — BC : AB : : AD — DE : AD.

Essendo finalmente le rette MN e CE ambedue parallele alla BD, saranno parallele fra di loro, per lo che starà

AC : AM : : AE : AN, e sostituendo

AB + BC : AB — BC : : AD + DE : AD — DE.

273. *Corollario.* Se si avrà una serie di linee proporzionali, come A : B : : C : D : : E : F : : G : H : ecc. sarà la somma di tutti gli antecedenti alla somma di tutti i conseguenti, come un antecedente qualunque sta al suo conseguente, di modo che sarà

A + C + E + G + ecc. : B + D + F + H + ecc. : : A : B.

274. *Scolio.* Le proprietà, che si sono dimostrate nelle tre precedenti proposizioni, riguardo a quattro rette proporzionali, o a tre rette continuamente proporzionali, sono applicabili non solo a qualunque siasi specie di grandezze, come superficie e volumi, che sono l'oggetto della Geometria, ma ancora a forze, pesi, ecc., che interessano la fisica ed il commercio, potendosi sempre prendere onde rappresentare tali grandezze delle linee, che abbiano fra di loro lo stesso rapporto, che hanno le grandezze proposte.

Proposizione XII. Teorema.

275. *Due triangoli ABC, DCE* (fig. 87.) *equiangoli fra di loro hanno anche i lati intorno agli angoli eguali proporzionali, e per conseguenza sono simili.*

Nei triangoli ABC, DCE proposti sia l'angolo BAC = CDE; l'angolo ABC = DCE, e l'angolo ACB = DEC, sarà anche BC : CE : : BA : CD : : AC : DE.

Il lato CE del triangolo DCE si ponga per dritto al lato BC del triangolo ABC, e si prolunghino i lati BA, ED sino al loro incontro in F. Poichè BCE è una linea retta, e l'angolo ACB = DEC, ne segue che AC è parallela ad FE (140). Parimente, poichè l'angolo ABC = DCE, la retta CD è parallela a FB; dunque il quadrilatero ACDF è un parallelogrammo (39).

Ora nel triangolo BEF, essendo la AC parallela ad FE, si ha BC : CE : : BA : AF (259). Ma AF = CD (181); onde BC : CE : : BA : CD.

Nel medesimo triangolo BEF la CD è parallela a BF, dunque BC : CE : : FD : DE; ma FD = AC, dunque BC : CE : : AC : DE; per esservi in queste due proporzioni il rapporto comune BC : CE; si ha anche BA : CD : : AC : DE.

276. *Corollario.* Per essere simili due triangoli basterà che abbiano rispettivamente due dei loro angoli eguali, poichè anche il terzo angolo sarà eguale in entrambi (158). Per istabilire poi la somiglianza di due triangoli rettangoli basterà che un angolo acuto dell'uno sia eguale ad un angolo acuto dell'altro (162).

277. *Scolio.* Nei due triangoli simili ABC, CDE si sono trovati proporzionali quei lati, che si oppongono agli angoli rispettivamente eguali.

Proposizione XIII. Teorema.

278. *Se dal punto M della retta MP (fig. 86.) si tirano le rette MN, MR, e se da un altro punto P della retta medesima si tirano le rette PQ, PV, rispettivamente parallele alle rette MN, MR, e tali in grandezza che si abbia la proporzione MN:PQ::MR:PV, le tre linee MP, NQ, RV condotte per le estremità di queste parallele anderanno a convenire in un punto medesimo S.*

Supponiamo che sia S il punto di concorso di MP e di NQ, ed *s*, se è possibile, il punto di concorso di MP ed RV. Per essere PQ parallela ad MN i due triangoli MNS, PQS sono simili (275), quindi SM : SP : : MN : PQ; per simile ragione dai due triangoli MR*s*, PV*s* si ha *s*M : *s*P : : MR : PV; ma per supposizione sta MN : PQ : : MR : PV, starà anche (246) SM : SP : : *s*M : *s*P, dunque *dividendo* SM — SP : SP : : *s*M — *s*P : *s*P cioè MP : SP : : MP : *s*P, dunque a motivo degli antecedenti eguali saranno eguali anche i conseguenti, onde SP = *s*P, per lo che i punti S, *s* si confonderanno, o ciò che è lo stesso le rette MP, NQ, RV prodotte concorreranno in uno stesso punto S.

Proposizione XIV. Teorema.

279. *Due triangoli ABC, DEF (fig. 88.), i quali hanno un angolo eguale compreso fra lati proporzionali sono equiangoli, e per conseguenza simili.*

Sia l' angolo A = D, e stia AB : DE : : AC : DF. Presa AG = DE, e condotta GH parallela a BC, sarà l' angolo AGH = ABC, ed il triangolo ABC sarà equiangolo al triangolo AGH, onde AB : AG : : AC : AH; ma per supposizione AB : DE : : AC : DF,

e per costruzione AG = DE; dunque anche AH = DF (247). I due triangoli AGH, DEF, i quali hanno un angolo eguale compreso fra lati eguali sono eguali, onde anche l' angolo AGH = DEF; ma AGH = ABC; dunque ABC = DEF, ed i triangoli ABC, DEF sono equiangoli, e per conseguenza anche simili.

Proposizione XV. Teorema.

280. *Due triangoli ABC, DEF (fig. 89.), che hanno tutti i lati rispettivamente proporzionali, sono anche equiangoli, e per conseguenza simi ·*

Stia BC : AB : : EF : DE,
BC : AC : : EF : FD, ecc,

Al dissotto della EF facciasi in E un angolo GEF = ABC, ed in F un angolo GFE = BCA. Le rette EG, FG concorreranno in G (130), e formeranno l' angolo G = A (158), ed il triangolo EGF sarà equiangolo al triangolo ABC. Paragonando ora i triangoli simili ABC, EFG si avrà (275) BC : AB : : EF : EG; ma per supposizione sta BC : AB : : EF : DE; dunque EG = DE (247). Dalla stessa somiglianza si ricava anche BC : AC : : EF : FG; ma per ipotesi sta BC : AC : : EF : FD; dunque FG = FD. I due triangoli EGF, DEF sono dunque eguali, avendo la base EF comune e gli altri lati rispettivamente eguali; ma il triangolo EGF è per costruzione equiangolo al triangolo ABC, sarà quindi equiangolo anche il triangolo DEF ad ABC, e per conseguenza essi triangoli saranno simili.

281. *Scolio* I. Nei due triangoli simili ABC, DEF sono eguali quegli angoli, che sono opposti ai lati proporzionali.

282. *Scolio* II. Nei triangoli l' eguaglianza degli angoli è una conseguenza della proporzionalità dei

lati, e reciprocamente, di modo che una sola di queste condizioni basta per assicurarci della somiglianza dei triangoli: non è lo stesso delle figure contenute da più di tre lati, perchè in esse senza cangiare gli angoli si può alterare la proporzione dei lati, o senza alterare i lati si può cangiare la grandezza degli angoli: cosicchè la proporzionalità dei lati non può essere, nelle figure che hanno più di tre lati, una conseguenza dell' eguaglianza degli angoli e *viceversa*.

Proposizione XVI. Teorema.

283. *Due triangoli ABC, DEF* (fig. 90.), *che hanno i lati rispettivamente paralleli, sono equiangoli, e per conseguenza simili.*

Prolungata la EF a tagliare in H e G i lati del triangolo ABC, per essere EF parallela a BC, anche il suo prolungamento GH sarà parallelo a BC, e sarà quindi l'angolo AGH = ABC; ma AGH = DEF (134), dunque l'angolo ABC = DEF. Sarà del pari l'angolo AHG = ACB; ma AHG = DFE; dunque ACB = DFE, ed i triangoli ABC, DEF sono equiangoli e perciò simili.

Proposizione XVII. Teorema.

284. *Due triangoli ABC, DEF* (fig. 91.), *che hanno i lati rispettivamente perpendicolari sono equiangoli, e per conseguenza simili.*

Sia il lato ED perpendicolare ad AB, FE perpendicolare a BC, e DF perpendicolare ad AC. Prolungato ciascun lato del triangolo DEF ad incontrare il lato corrispondente del triangolo ABC, le intersezioni di quei lati si faranno ad angoli retti.

Ciò posto, la somma dei quattro angoli del quadrilatero BGEK è eguale a quattro angoli retti, ma gli angoli EGB, EKB sono retti per costruzione, la somma dunque dei due angoli rimanenti GBK, GEK sarà eguale a due retti; ma a due retti è eguale anche la somma dei due angoli conseguenti GEK, GEF; dunque GBK + GEK = GEK + GEF, e tolto di comune GEK, rimarrà l'angolo GBK = GEF = DEF. Nello stesso modo si dimostra che l'angolo BCA è eguale all' angolo EFD, e che l'angolo BAC = FDE; dunque i due triangoli ABC, DEF i quali hanno i lati rispettivamente perpendicolari sono equiangoli e simili.

285. *Scolio.* Nel caso dei lati paralleli i lati omologhi sono i lati rispettivamente paralleli, ed in quello dei perpendicolari, lo sono i perpendicolari.

Se il triangolo DEF non fosse posto dentro il triangolo ABC, si dimostrerebbe l'eguaglianza degli angoli rispettivi, supponendo che dentro il triangolo ABC si fosse costruito un triangolo i di cui lati fossero paralleli a quelli del triangolo da paragonarsi ad ABC, ed in allora la dimostrazione ricaderebbe nel caso, che si è preso a considerare.

Proposizione XVIII. Teorema.

286. *Se dall' angolo retto A di un triangolo rettangolo BAC* (fig. 92.) *si abbassa la perpendicolare AD sopra l' ipotenusa BC,*

1.° *Ciascuno dei due triangoli parziali BDA, CDA in cui rimane diviso il triangolo totale BAC sarà simile al triangolo totale BAC, ed essi triangoli saranno simili fra di loro;*

2.° *La perpendicolare AD sarà media proporzionale fra i due segmenti BD, DC dell' ipotenusa.*

3.° *Ogni lato AB, o AC sarà medio proporzionale fra l'ipotenusa BC ed il segmento adiacente BD, o DC.*

Poichè 1.° i due triangoli BDA, BAC hanno l'angolo comune B, gli angoli BDA, BAC eguali perchè retti, onde il terzo angolo BAD = BCA; dunque questi triangoli sono simili (275).

Si dimostra parimente che il triangolo CDA è equiangolo e quindi simile al triangolo BAC. Ora essendo ciascuno dei due triangoli BDA, CDA equiangolo e simile al triangolo BAC, essi saranno equiangoli e simili fra di loro.

2.° La somiglianza dei triangoli BDA, CDA dà la proporzione BD : AD : : AD : DC, donde si vede che AD è media proporzionale fra BD e DC.

3.° Dalla somiglianza dei triangoli BDA, BAC si ha BC : AB : : AB : BD, e quella dei triangoli CDA, BAC dà BC : AC : : AC : DC.

287. *Corollario.* Dalla prima di queste proporzioni si ricava (269) $BC \times BD = \overline{AB}^2$, e dalla seconda si ottiene $BC \times DC = \overline{AC}^2$, e sommando $BC \times BD + BC \times DC = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, ossia $BC(BD+DC) = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$; ma $BD + DC = BC$; dunque $BC \times BC$ o $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, dunque il quadrato fatto sopra l' ipotenusa BC del triangolo rettangolo BAC è eguale alla somma dei quadrati fatti sopra i due cateti AB, AC, come fu dimostrato con principj da questi differenti nella proposizione XVII. del secondo libro, ed anche nel Corollario della XXI. proposizione del libro stesso.

288. Questa è una delle prove incontrastabili dell' esattezza dei teoremi di Geometria. In qualunque maniera si combinino le verità geometriche,

purchè si ragioni giustamente si ottengono sempre de' risultamenti esatti. Non avverrebbe lo stesso se qualche proposizione fosse falsa, o non fosse vera che prossimamente, accadrebbe spesse volte che, per mezzo della combinazione di diverse proposizioni fra di loro, l' errore si accrescerebbe e diverrebbe grandissimo.

Proposizione XIX. Teorema.

289. *In qualunque triangolo rettangolo AGB se dall' angolo retto si abbassa una perpendicolare sulla ipotenusa* (Tav. II. fig. 61.); 1.° *il quadrato dell' ipotenusa sta al quadrato di uno dei cateti come l' ipotenusa sta al segmento adiacente al cateto stesso.* 2.° *I quadrati dei due cateti stanno come i segmenti dell' ipotenusa rispettivamente adiacenti ai cateti stessi.*

1.° Poichè essendo MN altezza comune del quadrato ABCD, e del rettangolo AMND, si ha ABCD : AMND : : AB : AM; ma AMND = AGHL (209), dunque sostituendo sarà anche ABCD : AGHL : : AB : AM.

2.° Poichè MN è altezza comune dei due rettangoli AMND, BCNM, si ha AMND : BCNM : : AM : MB; ma AMND = AGHL, e BCNM = BEFG; dunque AGHL : BEFG : : AM : BM.

Proposizione XX. Teorema.

290. *Le rette AD, AF, ecc.* (fig. 93.) *condotte a piacimento dal vertice A d' un triangolo ABC, dividono la base BC e la retta GH ad essa parallela in parti proporzionali.*

Per essere GL parallela a BD, il triangolo AGL è equiangolo ad ABD, e dà la proporzione GL : BD : : AL : AD; parimente essendo LM parallela a DF, si ha LM : DF : : AL : AD, ed a cagione del rapporto comune AL : AD, sarà anche GL : BD : : LM : DF. Si troverà nello stesso modo che sta LM : DF : : MH : FC, ecc.; dunque la retta GH è divisa nei punti L, M, ecc. come lo è la base BC nei punti D, F, ecc.

291. *Corollario.* Se BC sarà divisa in parti eguali nei punti D, F, ecc., la sua parallela GH, sarà pure divisa in parti tra di loro eguali nei punti L, M, ecc.

Proposizione XXI. Teorema.

292. *Se dagli angoli A, D eguali dei due triangoli simili BAC, EDF* (fig. 94.) *si tirano le rette AG, DH sopra i lati opposti BC, EF, in maniera che facciano con essi degli angoli rispettivamente eguali, quelle rette saranno nello stesso rapporto che i lati BC, EF sopra dei quali esse cadono, e li divideranno in parti proporzionali.*

I triangoli BGA, EHD sono equiangoli fra di loro, come lo sono anche i triangoli CGA, FHD. I triangoli BAC, EDF, che sono simili, per dato del teorema, danno la proporzione BC : EF : : BA : ED; dai triangoli simili poi BGA, EHD si ottiene BA : ED : : AG : DH; onde BC : EF : : AG : DH.

Dal paragone dei triangoli simili BGA, EHD si ha BG : EH : : AG : DH; ma dai triangoli simili CGA, FHD si ha CG : FH : : AG : DH, dunque (246) BG : EH : : GC : HF.

Proposizione XXII. Teorema.

293. *I perimetri di due triangoli simili ABC, DEF* (fig. 94.) *stanno fra di loro come i lati omologhi, ed i triangoli stessi stanno come i quadrati dei lati omologhi.*

1.° A cagione della somiglianza dei triangoli ABC, DEF, si ha AB : DE : : BC : EF : : CA : FD, e componendo (273) AB + BC + CA : DE + EF + FD : : AB : DE; ma AB + BC + CA altro non è che il perimetro del triangolo ABC; e DE + EF + FD è il perimetro del triangolo DEF, dunque i perimetri dei triangoli simili sono come i lati omologhi.

2.° Nei triangoli simili ABC, DEF sia l' angolo B = E, e si avrà (268)

$$ABC : DEF : : AB \times BC : DE \times EF;$$

ma a cagione della somiglianza dei triangoli proposti si ha anche AB : DE : : BC : EF, e moltiplicando questa proporzione termine per termine per la proporzione identica BC : EF : : BC : EF si avrà

$$AB \times BC : DE \times EF : : \overline{BC}^2 : \overline{EF}^2,$$

dunque anche ABC : DEF : : $\overline{BC}^2 : \overline{EF}^2$. Dunque i triangoli simili stanno fra di loro come i quadrati rispettivi di due qualunque de' loro lati omologhi.

Proposizione XXIII. Teorema.

294. *Due poligoni simili ABCDE, FGHIK* (fig. 95.) *sono composti di un egual numero di triangoli rispettivamente simili e similmente disposti.* Viceversa. *Due poligoni composti di un egual numero di triangoli rispettivamente simili e similmente disposti, sono simili.*

Da uno stesso angolo A del poligono ABCDE si conducano le diagonali AC, AD, agli altri angoli del poligono medesimo, e nel poligono FGHIK dall' angolo F eguale e corrispondente all' angolo A si conducano le diagonali FH, FI agli altri suoi angoli.

1.° Poichè i poligoni sono simili, sarà l' angolo ABC = FGH, ed i lati AB, BC saranno proporzionali ai lati FG, GH, cioè AB : BC :: FG : GH, onde i triangoli ABC, FGH sono simili (279), e per conseguenza sono anche equiangoli; dunque l' angolo BCA = GHF. Tolti questi angoli rispettivamente dagli angoli eguali BCD, GHI dei poligoni, gli angoli residui ACD, FHI saranno eguali; ma a motivo della somiglianza dei triangoli ABC, FGH, si ha AC : FH :: BC : GH, e per la somiglianza dei poligoni, BC : GH :: CD : HI, dunque (246) AC : FH :: CD : HI; dunque anche i triangoli ACD, FHI, che hanno gli angoli ACD, FHI eguali e d' intorno ad essi i lati proporzionali sono simili. Nello stesso modo si può dimostrare la somiglianza dei triangoli susseguenti qualunque sia il numero dei lati dei poligoni proposti; dunque i poligoni simili sono composti di un numero eguale di triangoli simili, e similmente disposti.

2.° La somiglianza dei triangoli ABC, FGH dà l' angolo B = G, l' angolo BCA = GHF. La somiglianza dei triangoli ACD, FHI dà l' angolo ACD = FHI; sarà anche sommando BCA + ACD = GHF + FHI, cioè l' angolo BCD = GHI. Di più per la somiglianza dei rispettivi triangoli si ha la serie di proporzioni AB : FG :: BC : GH :: CD : HI, ecc. Dunque i due poligoni avendo rispettivamente gli angoli eguali, ed i lati intorno ad essi proporzionali, sono simili.

Proposizione XXIV. Teorema.

295. *I perimetri dei poligoni simili ABCDE, FGHIK (fig. 95.) sono come i loro lati omologhi, ed i poligoni medesimi come i quadrati degli stessi lati omologhi.*

1.° Poichè per la natura delle figure simili sta

AB : FG :: BC : GH :: CD : HI :: DE : IK :: EA : KF, starà anche (273)
AB + BC + CD + DE + EA : FG + GH + HI + IK + KF :: AB : FG; ma il primo termine di questa proporzione non è altro che il perimetro del poligono ABCDE, ed il secondo termine è il perimetro del poligono FGHIK; dunque i perimetri dei poligoni simili stanno come i lati omologhi AB, FG.

2.° Poichè i triangoli ABC, FGH sono simili, si ha (293) ABC : FGH :: $\overline{AC}^2 : \overline{FH}^2$, e per la somiglianza dei triangoli ACD, FHI, si ottiene ACD : FHI :: $\overline{AC}^2 : \overline{FH}^2$; dunque a motivo del rapporto comune $\overline{AC}^2 : \overline{FH}^2$, starà ABC : FGH :: ACD : FHI.

Con un simile ragionamento si proverebbe che ACD : FHI :: ADE : FIK, e così di seguito, se vi fosse un maggior numero di triangoli; dunque paragonando questi rapporti eguali si avrà
ABC : FGH :: ACD : FHI :: ADE : FIK, onde (273)
ABC + ACD + ADE : FGH + FHI + FIK :: ABC : FGH, cioè ABCDE : FGHIK :: ABC : FGH; ma (293)
ABC : FGH :: $\overline{AB}^2 : \overline{FG}^2$; dunque starà anche

$$\text{ABCDE} : \text{FGHIK} :: \overline{AB}^2 : \overline{FG}^2.$$

295. *Corollario.* Tre figure simili costruite sopra lati omologhi, i quali fossero eguali ai tre lati d' un triangolo rettangolo saranno tali, che la figura fatta sul lato maggiore sarà eguale alla somma delle figure fatte sugli altri due lati. Poichè queste figure sono proporzionali ai quadrati dei loro lati omologhi. Ora il quadrato dell' ipotenusa è eguale alla somma dei quadrati degli altri due cateti; dunque la figura fatta sul lato maggiore è eguale alla somma di quelle simili fatte sopra gli altri due lati.

Proposizione XXV. Problema.

297. *Sopra una data retta FG* (fig. 95.) *descrivere un poligono simile e similmente posto al poligono ABCDE.*

Mediante le diagonali AC, AD tirate da uno stesso angolo A si decomponga il dato poligono nei triangoli ABC, ACD, ADE, ed in altri se il numero dei lati fosse maggiore, alla estremità F della retta data FG si faccia l'angolo GFH = BAC, ed all'altra estremità G si formi l'angolo FGH = B; anche il terzo angolo GHF del triangolo FGH sarà eguale al terzo angolo BCA del triangolo ABC. All'estremità H della FH si faccia l'angolo FHI = ACD, ed all'altra estremità si formi l'angolo HFI = CAD. All'estremità I della FI si faccia l'angolo FIK = ADE, e finalmente in F si faccia l'angolo KFI = EAD.

Il poligono FGHIK così costrutto sopra la data retta FG sarà simile al proposto poligono ABCDE. Di fatto questi poligoni per costruzione riescono equiangoli. Per essere poi il triangolo ABC equiangolo ad FGH sta AB : FG : : BC : GH, come pure BC : GH : : AC : FH; e per la somiglianza dei triangoli ACD, FHI si ha AC : FH : : CD : HI, dunque starà anche BC : GH : : CD : HI; e così degli altri; dunque il poligono FGHIK per essere equiangolo al poligono ABCDE, e per avere i lati intorno agli angoli eguali rispettivamente proporzionali a quelli del poligono ABCDE, è ad esso simile.

Proposizione XXVI. Teorema.

298. *Se quattro linee sono proporzionali i rettilinei simili e similmente descritti sopra alle prime due saranno proporzionali ai rettilinei simili fra di*

loro e similmente descritti sopra le altre due rette; e viceversa, se quattro rettilinei simili a due a due e similmente posti saranno in proporzione, ancora le linee sopra le quali sono descritti saranno proporzionali.

Sopra le rette AB, FG (fig. 95.) sieno descritti i due pentagoni ABCDE, FGHIK simili e similmente posti, che per brevità chiameremo P, p; e sopra le due rette EF, LK (fig. 96.), sieno costruiti i due quadrati CDFE, GHKL, che nomineremo Q, q. Essendo simili per costruzione i due pentagoni, essi staranno come i quadrati dei rispettivi loro lati omologhi, onde $P : p : : \overline{AB}^2 : \overline{FG}^2$, e per la somiglianza dei quadrati, starà $Q : q : : \overline{EF}^2 : \overline{LK}^2$; ma si ha per supposizione AB : FG : : EF : LK, dunque moltiplicando questa proporzione per un'altra ad essa eguale, termine per termine, sarà anche (251) $\overline{AB}^2 : \overline{FG}^2 : : \overline{EF}^2 : \overline{LK}^2$, e per conseguenza (246)

$$P : p : : Q : q.$$

Viceversa se starà $P : p : : Q : q$; siccome (295) $P : p : : \overline{AB}^2 : \overline{FG}^2$; e $Q : q : : \overline{EF}^2 : \overline{LK}^2$, sarà anche $\overline{AB}^2 : \overline{FG}^2 : : \overline{EF}^2 : \overline{LK}^2$, e quindi AB : FG : : EF : LK.

299. *Corollario.* Per essere (211) il quadrato della diagonale AC (fig. 62.) del quadrato ABCD doppio del quadrato fatto sopra il lato AB, si ha $\overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 : : 2 : 1$, per lo che $AC : AB : : \sqrt{2} : 1$. Dunque la diagonale d'un quadrato è incommensurabile col suo lato.

Proposizione XXVII. Problema.

300. *Date due figure simili, costruire una figura simile ad esse ed eguale alla loro somma o alla loro differenza.*

Sieno M, ed N i due lati omologhi delle figure proposte; si cerchi un quadrato eguale alla somma, o alla differenza dei quadrati fatti sopra M ed N (212 e 213), e sia Z il lato di questo quadrato; sarà Z nella figura cercata il lato omologo ad M e N rispettivamente nelle figure date. Si costruirà in seguito (297), sopra Z una figura simile alle date, che sarà eguale alla loro somma, o alla loro differenza.

Poichè le figure simili stanno fra di loro come i quadrati dei lati omologhi, ed il quadrato formato sopra la retta Z è eguale alla somma o alla differenza dei quadrati fatti sopra i lati omologhi M ed N; dunque la figura fatta sopra il lato Z è eguale alla somma o alla differenza delle figure simili fatte sui lati M, ed N.

Proposizione XXVIII. Problema.

301. *Trovare la somma, la differenza, e il rapporto di due figure rettilinee qualunque date EPGH, ABC* (fig. 97.).

Sopra la AC si descrivano due parallelogrammi rettangoli ACMN (200), ACLK (199), rispettivamente eguali alle figure EPGH, ABC date, da una stessa parte della AC, se si domanda la differenza, e da parti opposte, se si vuole avere la somma. Nel primo caso KLMN = ACMN — ACLK = EPGH — ABC sarà la differenza, e nel secondo caso KLMN = ACMN + ACLK = EPGH + ABC sarà la loro somma.

Inoltre, per avere i rettangoli ACMN, ACLK la stessa base AC staranno come le loro altezze, onde ACMN : ACLK : : AN : AK, ossia EPGH : ABC : : AN : AK; onde il rapporto delle due figure date è quello di AN : AK.

Proposizione XXIX. Problema.

302. *Trovare una quarta proporzionale alle tre rette date AB, BC, AD* (fig. 98.).

Si tirino due indefinite AZ, AY sotto qualunque angolo A, e sopra la AZ, partendo dal punto A, si prenda AF = AB, indi FG = BC, e sopra la AY si prenda AK = AD; tirata la FK, si guidi dal punto G la GH parallelamente ad FK, la retta KH sarà la quarta proporzionale richiesta. Poichè essendo FK parallela a GH si ha (259) AF : FG : : AK : KH, e sostituendo AB : BC : : AD : KH.

Proposizione XXX. Problema.

303. *Trovare una terza proporzionale alle due rette date AB, BC* (fig. 99.).

Sopra le indefinite AZ, AY, congiunte ad angolo qualunque A, si prenda AD = AB; DF = BC, ed AG = BC; condotta la DG, e guidata la FK ad essa parallela, si avrà (259) AD : DF : : AG : GK, ossia AB : BC : : BC : GK; dunque GK è terza proporzionale alle due rette AB, BC.

Proposizione XXXI. Problema.

304. *Tagliare una retta AB* (fig. 100.) *nei punti P, Q nella stessa proporzione, nella quale è divisa la AC nei punti M, N.*

Congiunte le rette date ad angolo qualunque A, si guidi la BC agli estremi punti B, C; e dai punti M, N si tirino le MP, NQ parallele alla BC, e si avranno le seguenti proporzioni (259) AP : PQ : : AM : MN; AQ : QB : : AN : NC; PQ : QB : : MN : NC;

AP : PB :: AM : MC, dunque la AB è divisa nei punti P e Q nella medesima proporzione in cui è divisa la AC nei punti M ed N.

305. *Corollario.* Se AM sarà una parte aliquota di AC, per esempio la sua terza parte, anche la AP sarà la terza parte di AB. Da qui si ricava la maniera di prendere una qualunque parte aliquota di una retta data. Se poi la AC nei punti M ed N fosse stata divisa in parti fra di loro eguali, anche la AB risulterebbe divisa in parti pure fra di loro eguali; donde si ricava la maniera di formare sopra una data retta una scala divisa in un numero qualunque di parti eguali.

Proposizione XXXII. Teorema.

306. *Il massimo rettangolo EFGH* (fig. 101.), *che si possa inscrivere in un triangolo dato* (a) *ABC è quello la di cui altezza DI è eguale alla metà dell' altezza CD del triangolo dato.*

Nei triangoli simili ABC, HGC formando la perpendicolare CD colle basi AB, HG degli angoli rispettivamente eguali, perchè retti, starà (292) AB : CD :: HG : CI; ma HG : CI :: HG $\times$ DI : CI $\times$ DI (250) dunque HG $\times$ DI : CI $\times$ DI :: AB : CD; ossia EFGH : CI $\times$ DI :: AB : CD, quei rettangoli cioè sono nella ragione costante di AB : CD, donde si vede che il rettangolo EFGH sarà massimo quando CI $\times$ DI sarà pure un massimo; ma CI $\times$ DI è massimo (224) quando CI = DI, dunque il massimo rettangolo, che possa inscriversi in un dato triangolo è quello la di cui altezza è eguale alla metà di quella del dato triangolo.

Proposizione XXXIII. Teorema.

307. *Di tutti i triangoli ABC, ABD* (fig. 102.), *che hanno la medesima base AB, e la somma degli altri lati eguale, il massimo è quello ABC i di cui lati AC, BC sono eguali.*

(a) Una figura dicesi inscritta in un' altra, quando con tutti i suoi angoli tocca i lati della figura che la contiene.

Sia CH perpendicolare ad AB, e DF paralella ad AB, che tagli in E la CH. Condotte le rette AE, BE saranno eguali gli angoli AEF, BED, poichè a motivo delle parallele AB, FD essi sono eguali rispettivamente agli angoli EAB, EBA (132), i quali sono eguali fra di loro (118); dunque la somma (178) AE + EB < AD + DB < AC + BC, ad essa eguale per supposizione, cosicchè il triangolo AEB, è rinchiuso in ABC ed è di questo minore; ma ABD = AEB, perchè sulla stessa base AB, e fra le medesime parallele AB, FD; dunque deve essere anch' esso minore di ABC.

Proposizione XXXIV. Teorema.

308. *Di tutte le figure rettilinee date contenute dal medesimo perimetro e dallo stesso numero di lati la massima è ABCDE* (fig. 103.), *i lati della quale sono fra di loro tutti eguali.*

Poichè se ABCDE è il più gran poligono possibile, il triangolo CDE, deve essere maggiore di qualunque altro triangolo CFE fatto sopra la medesima base CE, e collo stesso perimetro; ma il massimo triangolo, quando la base, e la somma dei lati è la stessa, è appunto quello i di cui lati sono eguali (307); dunque CD = DE; si dimostrerà del pari che DE deve essere eguale ad AE, onde ecc.

LIBRO IV.

DEL CIRCOLO, E DELLA MISURA DEGLI ANGOLI.

Definizioni.

309. I. Si chiama *segante* o *secante* del circolo qualunque retta, che taglia la di lui circonferenza, e che in parte è al di fuori del circolo stesso. La segante prolungata, se occorre, taglia sempre la circonferenza in due punti. La retta AB (fig. 104.) è segante del circolo GFEG.

310. II. Dicesi *tangente* o *toccante* di un circolo qualunque retta MN (fig. 104.), che tocca la circonferenza in un sol punto G, e che prolungata comunque non può segarla.

Il punto G comune alla circonferenza ed alla retta dicesi *punto di contatto*, e l'angolo mistilineo NGE o MGF formato dalla tangente e dall' arco corrispondente chiamasi *angolo del contatto*.

311. III. Due circonferenze AGBA, DGFD (fig. 105.) sono *tangenti* l'una dell'altra allorchè si toccano in un sol punto G, o ciò che è lo stesso, allorchè la retta MN che è tangente di uno dei due circoli nel punto G è tangente anche all' altro nel medesimo punto.

312. IV. Due circoli DGFED, DHFMD (fig. 106.) si segano quando cadono reciprocamente parte al di dentro e parte al di fuori l' uno dell' altro.

313. V. I circoli MNPM, FEGF (fig. 106.) che hanno centro comune O, si chiamano *circoli concentrici*, ed i circoli DGFED, DHFMD, che hanno centri diversi C, O si dicono *circoli eccentrici*.

314. VI. L'angolo ABC (fig. 107.), che ha il suo vertice B alla circonferenza, e che è formato da due corde AB e CB dicesi *inscritto* nel segmento ABCA. Lo stesso angolo si dice che *insiste* sopra l' arco circolare opposto ADC abbracciato da' suoi lati.

315. VII. *Segmenti simili* sono quelli, i quali sono capaci da contenere angoli eguali, formati da rette tirate da qualunque punto dell' arco circolare alle estremità della rispettiva sottesa. Sono simili poi due archi di cerchio e due settori quando corrispondono ad angoli al centro eguali.

316. VIII. *Linea inscritta* nel circolo è qualunque retta o corda AB (fig. 107.), le di cui estremità A, B sono alla circonferenza.

317. IX. La perpendicolare DE al diametro AB (fig. 108.), che da un punto qualunque D del diametro stesso, va alla circonferenza dicesi *ordinata* del circolo rispetto al diametro AB; e le parti AD, DB del diametro stesso sono le *ascisse* corrispondenti all' ordinata DE.

Proposizione I. Teorema.

318. *I circoli ABDA, FGHF* (fig. 109.) *descritti con raggi eguali CA, OF sono eguali, e viceversa i circoli eguali ABDA, FGHF sono descritti con raggi CA, OF eguali.*

Si intenda sovrapposto il circolo FGHF al circolo ABDA di maniera che il centro O sia in C, ed il raggio OF sia sul raggio CA, essendo il punto F sul punto A, anche tutti gli altri punti della periferia del circolo FGHF dovranno trovarsi sulla periferia del circolo ABDA, altrimenti se non vi cadessero, cadrebbero o dentro o fuori di essa, donde ne nascerebbe l' assurdo che i raggi di uno stesso circolo sarebbero disuguali, onde ecc.

Se poi i due circoli saranno eguali, essi dovranno combaciare esattamente (84), e quindi i loro raggi si confonderanno, e saranno perciò eguali.

Proposizione II. Teorema.

319. *Qualunque diametro AB (fig. 108.) divide il circolo e la circonferenza AHBFA in due parti eguali.*

Si supponga che il segmento inferiore AFBA si ponga sopra il superiore AHBA conservando la base comune AB, sarà necessario che l'arco circolare AFB cada esattamente sull'arco AHB, altrimenti vi sarebbero nell'uno o nell'altro arco dei punti disugualmente distanti dal centro, ciò che è contrario alla definizione del cerchio (49).

Proposizione III. Teorema.

320. *Una retta qualunque GK (fig. 108.) non può incontrare una circonferenza in più di due punti G, K.*

Poichè, se la incontrasse in più di due punti, tutti quei punti sarebbero egualmente distanti dal centro C (49); vi sarebbero dunque più di due linee eguali condotte da uno stesso punto C sopra una medesima retta GK, ciò che è impossibile (106).

Proposizione IV. Teorema.

321. *Nello stesso circolo AHBKA (fig. 110.), o in circoli eguali AHBKA, EGFNE gli archi eguali AMD, EIG sottendono corde eguali AD, EG,* e reciprocamente *a corde eguali AD, EG, corrispondono archi eguali AMD, EIG.*

Essendo il diametro AB eguale al diametro EF (319) il semicircolo AHBA potrà essere applicato esattamente sopra il semicircolo EGFE, e la semicirconferenza AHB si adatterà esattamente sopra la semicirconferenza EGF. Ma per supposizione l'arco AMD è eguale all'arco EIG, dunque se il punto A cade in E, anche il punto D cadrà in G, e la corda AD si confonderà colla corda EG e per conseguenza le sarà eguale.

Se poi sarà la corda AD = EG, tirati i raggi CD, OG, i due triangoli ACD, EOG saranno fra di loro equilateri, e per conseguenza anche eguali, onde sarà l'angolo ACD = EOG. Ponendo ora il semicircolo AHBA sopra il suo eguale EGFE di maniera che il punto A cada in E, per essere l'angolo ACD = EOG il raggio CD cadrà sul raggio OG, ed il punto D nel punto G, e l'arco AMD coinciderà coll'arco EIG, e sarà ad esso eguale.

Proposizione V. Teorema.

322. *Nel medesimo circolo AHBKA (fig. 110), o in circoli eguali l'arco AMH maggiore di AMD sottende da una corda AH maggiore di AD, e reciprocamente.*

Condotti i raggi CD, CH. Il triangolo ACH ha i lati AC, CH eguali a quelli AC, CD del triangolo ACD; ma l'angolo ACH del primo triangolo, compreso da quei lati, è maggiore dell'angolo ACD; dunque (97) anche AH > AD; dunque la corda AH, che è sottesa dall'arco maggiore AMH è maggiore della corda AD, che è sottesa dall'arco minore AMD.

Se poi sarà AH > AD, anche l'angolo ACH sarà maggiore di ACD, e perciò l'arco AMH > AMD.

323. *Scolio.* Questa proposizione è sempre vera

quando gli archi che si considerano sono minori della semicirconferenza; quando essi sono maggiori accade tutto il contrario, in tal caso aumentando l' arco, diminuisce la corda e reciprocamente. Così essendo l' arco AKBD > AKBH la corda AD del primo è minore della corda AH del secondo.

Proposizione VI. Teorema.

324. *In qualunque circolo ABDEA* (fig. 111.) *se la retta CE, che passa pel centro C è perpendicolare alla corda AD, dividerà questa corda e l' arco AED ad essa sottoposto per metà; se poi la corda AD sarà divisa per metà dalla retta CE, che passa pel centro, essa sarà divisa ad angoli retti, e l' arco AED sarà diviso per metà in E.*

Condotti i raggi CA, CD; e le corde AE, DE, per essere CA = CD, il punto C della perpendicolare CE è egualmente lontano dai punti A, D, anche tutti gli altri punti della perpendicolare CE godranno della medesima proprietà, sarà quindi AF = FD, cioè la AD, divisa dalla perpendicolare CE per metà in F, e la corda AE = DE, e per conseguenza anche l' arco AGE (321) sarà eguale all' arco DHE, onde l' arco AED sarà diviso dalla CE per mezzo.

Se poi sarà AF = FD, la retta CE avrà i due punti F, C egualmente lontani da A e da D, dunque sarà perpendicolare ad AD (109); di più sarà AE = DE, e quindi anche l' arco AGE = DHE.

Nello stesso modo si proverebbe, che se la retta CE che passa pel centro divide per metà l' arco AED, questa retta è perpendicolare alla corda AD, e la divide per metà.

Proposizione VII. Teorema.

325. *Se la corda AD* (fig. 111.) *è divisa in F per metà dalla perpendicolare EB, questa linea passerà pel centro C.*

In fatti essendo il punto F della perpendicolare EB egualmente distante dai punti A, D, anche tutti gli altri suoi punti devono avere la medesima proprietà; dunque siccome C è equidistante da A e D, la perpendicolare EB deve passare per questo punto (107).

326. *Scolio.* Il centro C, la metà F della corda AD, e la metà E dell' arco AED che la sottende, sono tre punti situati sopra la medesima linea retta perpendicolare alla corda. Ma per determinare la posizione d' una linea retta bastano due punti; dunque ogni linea, che passa per due dei punti nominati, passerà necessariamente anche per il terzo, e sarà perpendicolare alla corda.

327. *Corollario* I. Per dividere in due parti eguali un arco qualunque di circonferenza AED, basterà congiungere i suoi estremi mediante la corda AD, ed alla metà della stessa innalzare la perpendicolare FE.

328. *Corollario* II. Per trovare il centro di un circolo ADGFLA o di un segmento di circolo DALD (fig. 112.) si tirino due corde qualunque DA, AL e sopra le rispettive metà si innalzino le perpendicolari BF, EG, il punto C di loro intersezione sarà il centro ricercato: poichè appartenendo egli alla perpendicolare BF è equidistante da' punti A, D, ed appartenendo anche alla perpendicolare EG è equidistante da A e da L; dunque essendo C l' unico punto, che appartiene nello stesso tempo ad ambedue le perpendicolari BF, EG, ed essendo CA = CD = CL, egli sarà il centro richiesto.

329. *Corollario* III. Per far passare una circonferenza di circolo per tre punti dati D, A, L, che non sieno in linea retta, congiunti questi punti mediante le rette DA, AL, e divise queste rette rispettivamente per metà dalle perpendicolari BF, EG dal punto C di loro intersezione come centro e con raggio CA, la circonferenza così descritta passerà pei tre punti dati D, A, L: poichè CA=CD=CL.

330. *Scolio* I. I tre punti D, A, L non possono mai essere in linea retta, perchè se si potesse far passare una circonferenza di cerchio per tre punti in linea retta, da uno stesso punto C si potrebbero condurre sopra una medesima retta due perpendicolari CB, CE, ciò che è impossibile (106).

331. *Scolio* II. Siccome tre punti D, A, L bastano per determinare la posizione di un cerchio ADGFLA, bisogna conchiudere, che per tre punti dati non si può far passare che una sola circonferenza; onde è impossibile che due circonferenze di cerchio si seghino in più di due punti, perchè se si tagliassero in tre punti, esse si confonderebbero, e non formerebbero che una sola e medesima circonferenza.

Proposizione VIII. Teorema.

332. *La retta CD* (fig. 113.), *che congiunge i centri C, D di due circonferenze AEBA, AFBA, che si tagliano è perpendicolare sulla metà della corda AB, che unisce i punti d' intersezione delle due circonferenze.*

Poichè la linea AB, che unisce i punti d' intersezione è una corda comune ai due circoli AEBA, AFBA, se sopra la metà della medesima si innalza una perpendicolare essa deve passare per ciascuno dei due centri C, D (325); ma per due punti dati

C, D non può passare che una sola retta (10); dunque la linea retta CD sarà perpendicolare sulla metà della corda comune AB.

Proposizione IX. Teorema.

333. *Le corde AB, ED* (fig. 114.) *equidistanti dal centro C sono eguali*; viceversa *le corde eguali sono egualmente distanti dal centro.*

Dal centro C sieno condotte le rette CF, CG rispettivamente perpendicolari alle corde AB, ED; tirati i raggi CB, CD, i due triangoli rettangoli CFB, CGD che ne risultano sono eguali (110), essendo per supposizione la perpendicolare CF=CG; CB=CD perchè raggi dello stesso cerchio; dunque BF=DG; ma AB è doppia di BF, ed ED doppia di DG, dunque anche AB=ED.

Se sarà poi AB=ED, sarà anche BF=DG, ed i triangoli rettangoli CFB, CGD saranno eguali (110) dunque anche CF=CG

Proposizione X. Teorema.

334. *Tra le rette AB, DE, HK, ecc. inscritte nel cerchio* (fig. 115.) *la massima è il diametro AB, e delle altre è maggiore quella DE, che è più vicina al centro C.*

Dal centro C condotte le perpendicolari CM; CL sopra le corde DE, HK si prolunghi CM in I sin che sia CI=CL, e pel punto I si faccia passare la FG parallela a DE, che sarà eguale ad HK (333): condotti i raggi CD, CE, CF, CG, nel triangolo DCE sarà (91) DC+CE>DE, ossia AC+CB>DE; ma AC+CB=AB, dunque AB>DE.

I lati DC, CE del triangolo DCE, sono eguali ai lati FC, CG del triangolo FCG, e l' angolo DCE del primo triangolo è maggiore dell' angolo FCG del secondo triangolo, dunque (97) anche DE>FG; ma FG = HK; dunque DE > HK.

Proposizione XI. Teorema.

335. *La perpendicolare AB* (fig. 116.) *condotta all' estremità D del raggio CD è toccante della circonferenza nel punto D.*

Poichè qualunque obliqua CG, CH, ecc., che dal centro C si conduce sopra la AB è maggiore del raggio CD, il quale è perpendicolare ad AB; dunque ciascuno dei punti, G, H, ecc. è fuori del circolo EDKE; dunque la retta AB ha comune colla circonferenza il solo punto D, e per conseguenza le è toccante in questo punto.

Proposizione XII. Teorema.

336. *Se dal centro C del circolo EDKE si conduce al punto di contatto D il raggio CD, esso sarà perpendicolare alla toccante AB nel punto D.*

Poichè tutte le altre linee CH, CG, ecc. condotte dallo stesso punto C sopra la AB devono uscire dal circolo per arrivare sopra la AB; dunque il raggio CD è la retta più breve di tutte, dunque esso è perpendicolare alla AB (104).

Proposizione XIII. Teorema.

337. *Se dal punto di contatto D si innalzerà alla toccante AB una perpendicolare essa dovrà passare pel centro C del circolo EDKE.*

Poichè se non passasse pel centro C, ma passasse invece per un altro punto F, condotto il raggio

CD, esso pure farebbe angolo retto colla AB (336), e gli angoli retti ADC, ADF sarebbero eguali, onde la parte ADC riuscirebbe eguale al tutto ADF, ciò che è impossibile; dunque la perpendicolare DC alla toccante, AB innalzata dal punto di contatto D, passa pel centro C.

338. *Scolio*. Da un punto qualunque D preso sopra la circonferenza del cerchio EDKE, non si può condurre che una sola toccante AB; poichè se si potesse condurne un' altra da questa diversa, essa non potrebbe essere perpendicolare al raggio CD, dunque per rapporto a questa nuova toccante il raggio CD sarebbe un' obbliqua, e la perpendicolare abbassata dal centro sopra quella toccante sarebbe minore di CD; dunque quella immaginata toccante entrerebbe dentro il circolo e sarebbe invece una segante (309).

339. *Corollario*. Onde tirare una toccante ad un circolo EDKE in un punto qualunque D, si congiungerà il punto dato D col centro del circolo, ed alla estremità D del raggio CD si innalzerà la perpendicolare AB, che sarà la toccante richiesta (335).

Proposizione XIV. Teorema.

340. *La retta CD* (fig. 117.), *che congiunge i centri C, D di due circoli ABFA, FGHF, che si toccano in F al di dentro o al di fuori, passa pel punto di contatto.*

Poichè condotta TV toccante comune in F ai due circoli ABFA, FGHF, essa riesce perpendicolare ai raggi CF, DF condotti al punto di contatto F dei due cerchi, dunque questi raggi formano una sola retta CD, che unisce i centri C, D, e passa necessariamente pel punto di contatto F.

Proposizione XV. Teorema.

341. *Due rette parallele AB, DE; AB, FG; FG, KH* (fig. 118.) *intercettano sulla circonferenza degli archi eguali.*

Possono accadere tre diversi casi.

1.° Se le parallele sono due seganti come AB, DE, si conduca il raggio CM perpendicolare alla corda QS, che sarà nello stesso tempo perpendicolare anche alla sua parallela PR, e dividerà tanto l'arco QMS, quanto l'arco PMR per metà in M (324); sarà dunque l'arco QM = SM, e l'arco PM = RM, e sottraendo sarà l'arco QM -- PM = SM -- RM, cioè QP = SR.

2.° Se delle due parallele una AB sarà segante e l'altra FG tangente, condotto il raggio CM al punto di contatto M esso sarà perpendicolare alla tangente FG in M (336), ed alla sua parallela AB in N. Ora poichè CM è perpendicolare a PR, l'arco PMR sarà diviso in M per metà, dunque gli archi PM, RM, compresi fra le parallele AB, FG, sono eguali.

3.° Se le parallele FG, KH sono ambedue tangenti l'una in M, e l'altra in L; condotta una segante AB parallela alla tangente FG, sarà parallela anche a KH, e tirato il diametro LM perpendicolare ad AB, lo sarà anche alle parallele FG, KH, e passerà pei punti di contatto M, L; sarà perciò l'arco PM = RM, e l'arco PL = RL, e sommando PM + PL = RM + RL, sarà cioè l'arco MPL = MRL, ciascuno dei quali è una mezza circonferenza.

Proposizione XVI. Teorema.

342. *L'angolo ACB* (fig. 119.), *che ha il suo vertice al centro, e che insiste sull'arco AB, è doppio di qualsivoglia angolo AEB, ADB, AFB, che ha il vertice alla circonferenza e che appoggia sull' arco medesimo.*

Condotte pel centro le rette DH, FG

1.° L'angolo ACB esterno del triangolo BCE è eguale alla somma dei due interni opposti CEB, CBE (153); ma gli angoli CEB, CBE sono fra di loro eguali perchè il triangolo BCE è isoscele; dunque l'angolo ACB è doppio dell'angolo AEB = CEB.

2.° L'angolo ACH esterno del triangolo isoscele ACD è doppio dell'angolo ADC; parimente l'angolo BCH è doppio di BDC, sarà sommando, anche l'angolo ACB doppio dell' angolo ADB.

3.° L'angolo GCB è doppio dell'angolo CFB, e l'angolo GCA è doppio dell'angolo CFA, e togliendo l'angolo GCA dall'angolo GCB, e dall'angolo CFB, levando l'angolo CFA, l'angolo residuo ACB sarà doppio del residuo AFB.

343. *Corollario.* Tutti gli angoli, come AEB, ADB, AFB, ecc. che hanno il vertice alla circonferenza, e che insistono sul medesimo arco AB, sono fra di loro eguali, poichè ciascuno di essi è la metà dell'angolo ACB, che ha il vertice al centro, e che appoggia sullo stesso arco AB.

Proposizione XVII. Teorema.

344. *Nello stesso circolo ADBA* (fig. 120.), *o in circoli eguali ADBA, EGFE, gli angoli eguali ACB, EOF, che hanno il vertice al centro, insistono sopra archi AB, EF eguali, e* reciprocamente, *se gli archi AB, EF sono eguali, gli angoli ACB, EOF saranno pure eguali.*

Si immagini sovrapposto l'angolo ACB al suo eguale EOF, di modo che il lato AC copra esattamente il suo eguale EO, ed il lato BC il lato FO, il punto A si troverà quindi in E, ed il punto B in F, e l' arco AB coinciderà coll' arco EF, poichè se i due archi AB, EF non si confondessero, vi sarebbero o nell' uno o nell' altro dei punti disugualmente distanti dal centro, ciò che è impossibile; dunque l' arco AB è eguale all' arco EF.

Se poi sarà l' arco AB = EF, anche l' angolo ACB sarà eguale all' angolo EOF, poichè se questi angoli non saranno eguali, uno sarà maggiore dell' altro, suppongasi dunque ACB > EOF, e si prenda l' angolo ACG = EOF, per quello, che superiormente abbiamo dimostrato, sarà l' arco AG = EF; ma per ipotesi è l' arco AB = EF; dunque l' arco AG = AB, dunque la parte sarebbe eguale al tutto, ciò che è impossibile; dunque l' angolo ACB è eguale all' angolo EOF.

345. *Corollario.* Per essere eguali gli archi AB, FF saranno eguali anche i settori circolari ACBA, EOFE, che sopra di essi appoggiano, poichè condotte le corde AB, EF, esse riescono eguali, e sono pure eguali i segmenti che sopra di esse appoggiano; poichè essendo compresi da archi eguali e da corde eguali, sovrapposti coincidono. I triangoli ACB, EOF sono fra di loro equilateri e quindi eguali; dunque il settore ACBA, che risulta dall' unione del triangolo ACB e del segmento determinato dalla corda AB sarà eguale al settore EOFE composto del triangolo EOF e dal segmento segato dalla corda EF.

346. *Scolio.* La superiore proposizione è estensibile anche agli angoli, che hanno il vertice alla circonferenza, essendo essi rispettivamente la metà di quelli fatti al centro, e che appoggiano sullo stesso arco.

Proposizione XVIII. Teorema.

347. *Nello stesso circolo ABKA* (fig. 121.), *o in circoli eguali ABKA, DEID; gli angoli al centro ACB, DCE stanno come gli archi sopra i quali essi insistono.*

Sieno primieramente i due angoli ACB, DCE fra di loro commensurabili, e supponiamo che l' angolo O serva loro di comune misura, e che sia contenuto nell' angolo ACB un numero *m* di volte, ed un numero *n* di volte nell' angolo DCE, per lo che starà l' angolo ACB all' angolo DCE, come il numero *m* di angoli ACF, FCG, ecc. eguali, contenuti in ACB, al numero *n* di angoli DCP, PCQ, ecc. del pari eguali, contenuti in DCE, starà cioè *angolo* ACB : *angolo* DCE : : *m* : *n*. Gli angoli ACF, FGC, ecc.; DCP, PCQ, ecc. essendo tutti eguali fra di loro, gli archi parziali AF, FG, ecc.; DP, PQ, ecc. saranno pure fra di loro eguali (344); dunque l' arco intero AB starà all' arco intero DE, come il numero *m* di archetti eguali in esso contenuti al numero *n* di archetti pure eguali contenuti in DE, si avrà, cioè *arco* AB : *arco* DE : : *m* : *n*; dunque starà anche

ang. ACB : *ang.* DCE : : *arc.* AB : *arc.* DE.

Se poi i due angoli ACB, DCE fossero fra di loro incommensurabili, nello stesso modo che si è ragionato nella proposizione I. del terzo libro riguardo ai parallelogrammi, che hanno le basi incommensurabili, si dimostrerebbe, che essi stanno nulla di meno come gli archi sopra dei quali appoggiano.

348. *Corollario.* Gli angoli fatti alla circonferenza nello stesso circolo o in circoli eguali stanno come gli archi sopra dei quali insistono, essendo

essi rispettivamente la metà di quelli, che sono al centro, e che appoggiano sullo stesso arco.

349. *Scolio* I. Poichè l'angolo al centro del circolo, e l'arco intercetto fra i suoi lati hanno un tal legame, che quando l'uno aumenta o diminuisce aumenta o diminuisce anche l'altro nello stesso rapporto, così si può prendere una di queste quantità per misurare l'altra. Volendo valersi degli archi per misurare gli angoli, è d'uopo osservare nel paragone degli angoli, che gli archi, che loro servono di misura devono essere descritti con raggi eguali.

350. *Scolio* II. Più naturale sarebbe il riferire gli angoli da misurarsi ad un altro angolo preso per unità di misura, mentre il rapporto in tal caso sarebbe fra quantità della medesima specie, ma questa maniera di esprimere gli angoli non sarebbe la più comoda per l'uso. Se la misura degli angoli per mezzo degli archi di cerchio è in qualche modo indiretta, è però molto semplice, e si può anche da questa dedurre con facilità la misura diretta ed assoluta di qualsivoglia angolo; poichè se si paragona l'arco, che serve di misura ad un dato angolo colla quarta parte della circonferenza, che è l'arco abbracciato da un angolo retto, si avrà il rapporto dell'angolo dato all'angolo retto, che è la sua misura assoluta.

351. *Scolio* III. Quanto abbiamo dimostrato nelle due precedenti proposizioni intorno al rapporto degli angoli cogli archi, vale egualmente pel rapporto dei settori cogli archi; poichè i settori sono eguali quando lo sono gli angoli (345), ed in generale sono proporzionali agli angoli; dunque *due settori presi nel medesimo circolo o in circoli eguali sono proporzionali agli archi, che loro servono rispettivamente di base.* Si vede da ciò che gli archi

di circolo, che servono di misura agli angoli, possono parimente servire di misura ai settori d'un medesimo circolo o di circoli eguali.

352. *Divisione della circonferenza.* La circonferenza di cerchio si suole dividere comunemente in 360 parti eguali chiamate *gradi*; il grado poi si divide in 60 parti eguali dette *minuti primi*, o semplicemente *minuti*; il minuto primo in 60 *minuti secondi*, ecc. Queste quantità si sogliono indicare rispettivamente coi seguenti caratteri $^{\circ}$, $'$, $''$, ecc., messi al luogo degli esponenti, di modo che, l'espressione $35^{\circ}\ 18'\ 54''$ ci indica un angolo di trentacinque gradi, diciotto minuti e cinquantaquattro minuti secondi, o per meglio dire un angolo, il quale co' suoi lati intercetta un arco di circonferenza espresso da quel numero di gradi, minuti, e secondi.

Siccome l'angolo retto, che ha il suo vertice al centro abbraccia fra i suoi lati la quarta parte della circonferenza, così egli sarà misurato da un arco di 90° gradi, essendo appunto 90° la quarta parte di tutta la circonferenza espressa da 360°. L'angolo semiretto sarà espresso da 45°. Un angolo che abbia per misura un arco maggiore di 90° sarà ottuso, ed un angolo la di cui misura sia minore di un arco di 90° gradi sarà acuto.

Proposizione XIX. Teorema.

353. *Qualunque angolo ADB* (fig. 119.) *che ha il vertice alla circonferenza ed è formato da due corde AD, BD, ha per misura la metà dell'arco AB compreso da suoi lati.*

Poichè l'angolo ACB al centro ha per misura l'arco AB compreso da suoi lati, ma esso e doppio dell'angolo ADB, che appoggia sullo stesso arco (342), dunque l'angolo ADB avrà per misura la metà dell'arco AB compreso da' suoi lati.

Proposizione XX. Teorema.

354. *L'angolo ADB* (fig. 122.) *che ha il vertice alla circonferenza, e che è formato dalla tangente AD e dalla corda BD, ha per misura la metà dell'arco BD determinato dalla corda stessa.*

Poichè condotta dall'estremità B della corda BD la BE parallela alla tangente AD, l'angolo proposto ADB sarà eguale all'angolo DBE (132), ma l'angolo DBE ha per misura la metà dell'arco DE (353), e l'arco DE = DB (341); dunque l'angolo ADB avrà per misura la metà dell'arco DB.

Proposizione XXI. Teorema.

355. *L'angolo ADB* (fig. 123.), *formato alla circonferenza da una corda DB e da una segante AD, ha per misura la metà dell'arco BD che sottende la corda, più la metà dell'arco DF determinato dal prolungamento della segante AD.*

Poichè condotta la BF, l'angolo proposto ADB esterno al triangolo DFB è eguale alla somma dei due interni opposti (153) DFB, DBF; ma l'angolo DFB ha per misura la metà dell'arco DB, e l'angolo DBF ha per misura la metà dell'arco DF, dunque l'angolo ADB avrà per misura la metà dell'arco DB più la metà dell'arco DF.

Proposizione XXII. Teorema.

356. *L'angolo ADB* (fig. 124.), *che ha il vertice in un punto qualunque D dentro il circolo*

ha per misura la metà dell'arco AB compreso da' suoi lati, più la metà dell'arco FG compreso dal prolungamento de' lati stessi.

Condotta la AF, l'angolo ADB proposto, essendo esterno al triangolo ADF, è eguale alla somma dei due interni opposti AFD, FAD; ma l'angolo AFD = AFB è misurato dalla metà dell'arco AB, e l'angolo FAD = FAG è misurato dalla metà dell'arco FG; dunque l'angolo ADB, ha per misura la metà dell'arco AB più la metà dell'arco FG.

Proposizione XXIII. Teorema.

357. *L'angolo ADB* (fig. 125.), *che ha il vertice in un punto qualunque D fuori del circolo, ha per misura la metà dell'arco concavo AB, meno la metà dell'arco convesso GF abbracciati da' suoi lati.*

Dal punto F si guidi la corda FH parallela a DA, e l'angolo BFH sarà eguale all'angolo proposto ADB; ma BFH ha per misura la metà dell'arco BH, o ciò che è lo stesso la metà di AB, meno la metà di AH; ed AH = GF (341); dunque l'angolo ADB = BFH, avrà per misura la metà dell'arco concavo AB, meno la metà dell'arco convesso GF.

358. *Scolio.* La stessa dimostrazione vale per far vedere che l'angolo formato da due tangenti ha per misura la metà della differenza dei due archi intercetti dalle tangenti medesime.

359. *Corollario* I. Qualunque angolo ABD, AED (fig. 126.), inscritto nel semicircolo, è retto, poichè ha per misura la metà della semicirconferenza AFD o la quarta parte della circonferenza ABEDFA; da qui si può conchiudere, che i semicircoli sono segmenti simili, poichè sono capaci di contenere angoli eguali (315).

360. *Corollario* II. Qualunque angolo (fig. 126.) ABO inscritto nel segmento ABOA minore del semicircolo HBLH, è ottuso, perchè ha per misura la metà di un arco ADO maggiore della metà della semicirconferenza HDL. Qualunque angolo poi ADO, inscritto in un segmento ADOA maggiore del semicircolo HDLH, è acuto, poichè ha per misura la metà dell'arco ABO minore della semicirconferenza HBL.

Proposizione XXIV. Teorema.

361. *Due corde AB, FG (fig. 127.) di un cerchio, che si tagliano in un punto D, si tagliano in parti reciprocamente proporzionali, di modo che si ha* *DG : AD : : DB : FD.*

Condotte le rette AF, BG, si hanno i due triangoli ADF, BDG che sono simili, poichè gli angoli in D sono eguali, come opposti al vertice, l'angolo A = G, perchè ciascuno di essi è misurato dalla metà dell'arco FB su cui appoggia; per la medesima ragione l'angolo F = B; si avrà dunque la proporzione DG : AD : : DB : FD.

362. *Corollario* I. Sarà anche (269) $AD \times DB = FD \times DG$; dunque il rettangolo delle due parti della corda AB, è eguale al rettangolo delle due parti dell'altra corda FG.

363. *Corollario* II. Se FG diviene un diametro, ed AB diventa perpendicolare a questo diametro, per essere AD = DB (324), la proporzione superiore DG : AD : : DB : FD, si cangerà nella seguente DG : AD : : AD : FD, donde si vede che l'ordinata AD, è media proporzionale fra le due ascisse di quel diametro.

364. Da qui si ricava la maniera di trovare la media proporzionale fra due date linee FD, DG. Posta la DG per dritto alla FD sulla composta FG

come diametro si descriva la semicirconferenza FAG, e dal punto D di riunione si innalzi l'ordinata AD, la quale sarà media proporzionale tra le due rette date FD, DG.

Siccome poi (269) si ha $\overline{AD}^2 = FD \times DG$, così se fosse proposto di formare un quadrato equivalente ad un rettangolo contenuto dai lati FD, DG, si determinerebbe la media proporzionale AD fra i due lati del rettangolo dato, e sopra di essa si formerebbe un quadrato, che sarebbe il ricercato.

365. Se dal punto A alle estremità del diametro FG si conducono le corde AF, AG, il triangolo FAG, che ne risulterà, sarà rettangolo in A (359), e darà le seguenti proporzioni (286)

FG : AF : : AF : FD

FG : AG : : AG : GD

donde si vede che qualunque corda AF o AG è media proporzionale fra il diametro FG, ed il segmento FD o GD ad essa adiacente, determinato dalla perpendicolare calata dall'estremità della corda sul diametro medesimo.

Un'altra maniera di trovare una media proporzionale fra due rette date FG, FD si è quella di prendere sopra la retta maggiore FG la parte FD eguale alla minore, descrivere sulla FG come diametro un semicircolo, elevare in D l'ordinata DA, e congiungere finalmente i punti A, F, la retta AF sarà la media proporzionale fra le due rette date FG, FD.

Proposizione XXV. Teorema.

366. *Se due rette AB, CD (fig. 128.) si segano in un punto qualunque E dentro o fuori del circolo*

ad angolo retto, la somma dei quadrati delle rette AE, ED, CE, EB equivale al quadrato del diametro.

Dal punto C si tiri la corda CF parallela a BA, si guidino le corde AF, BC, e si conducano le rette AD, FD. Per essere l'angolo AED retto, sarà retto anche l'angolo FCD, e per conseguenza FD sarà un diametro (359), e l'angolo FAD inscritto nel semicircolo sarà retto, e perciò $\overline{FD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AF}^2$; ma $\overline{AD}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{ED}^2$, e per essere le corde AF, BC eguali (321), si ha $\overline{AF}^2 = \overline{BC}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{EB}^2$; dunque sommando $\overline{AE}^2 + \overline{ED}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{EB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AF}^2 = \overline{FD}^2$.

Proposizione XXVI. Teorema.

367. *Se da un medesimo punto A (fig. 129.) preso fuori del circolo DBFED si guidano le seganti AB, AF, che terminano all'arco concavo BF, queste seganti saranno reciprocamente proporzionali alle loro parti esterne, di modo che si avrà*

AB : AF : : AE : AD.

Condotte le rette DF, EB i triangoli ABE, AFD sono simili, poichè hanno l'angolo A comune, e gli angoli ABE, AFD eguali perchè insistono sullo stesso arco DE, onde starà AB : AF : : AE : AD.

368. *Corollario.* Sarà anche (269) AB $\times$ AD = AF $\times$ AE, onde il rettangolo di tutta la segante AB nella sua parte esterna AD è eguale al rettangolo della segante AF nella parte esterna AE.

Proposizione XXVII. Problema.

369. *Da un punto dato A (fig. 130.) fuori di un circolo FDEF condurre una tangente al circolo medesimo.*

Si congiunga il punto dato A col centro C del circolo, e si divida la AC per metà in H, dal punto H come centro, con raggio HA si descriva la semicirconferenza ADC, che taglierà in D la circonferenza del circolo dato, si tiri la AD, che sarà la tangente richiesta; poichè condotto il raggio CD, il triangolo ADC sarà rettangolo in D (359), e per conseguenza CD sarà perpendicolare sopra AD; dunque AD sarà la tangente ricercata.

Proposizione XXVIII. Teorema.

370. *Se da uno stesso punto A (fig. 131.) preso fuori del circolo BDTB si conduce una tangente AT, ed una segante AD, la tangente sarà media proporzionale fra tutta la segante AD, e la sua parte esterna AB, di modo che si avrà AD : AT : : AT : AB.*

Condotte le rette DT, BT, i triangoli ADT, ABT, hanno di comune l'angolo A, e gli angoli ADT, ATB eguali, perchè misurati ambidue dalla metà del medesimo arco BT, dunque sono simili, e danno la proporzione seguente AD : AT : : AT : AB.

371. *Corollario* I. Sarà quindi anche $\overline{AT}^2 = AD \times AB$; dunque il quadrato della tangente AT è eguale al rettangolo di tutta la secante AD nella sua parte esterna AB.

372. *Corollario* II. Se dallo stesso punto A si condurrà un'altra tangente AK allo stesso cerchio sarà anche $\overline{AK}^2 = AD \times AB$; dunque $\overline{AK}^2 = \overline{AT}^2$, e quindi anche AK = AT; dunque le tangenti guidate da uno stesso punto ad un dato circolo sono eguali.

Da uno stesso punto A non si possono guidare al circolo che due sole tangenti, poichè condotta la

KT, due sole sono le linee eguali che dal punto A si possono condurre sulla KT (106).

Proposizione XXIX. Teorema.

373. *Se il rettangolo AD × AB d' una segante AD* (fig. 131.) *nella sua parte esterna AB sarà eguale al quadrato della retta AK, che condotta dallo stesso punto arriva alla circonferenza del cerchio, questa retta AK toccherà il cerchio.*

Condotta dal punto A la tangente AT, il di cui quadrato è pure eguale al rettangolo AD × AB, sarà AK=AT; guidata la retta AC, ed i raggi CK, CT, i due triangoli AKC, ATC sono equilateri fra di loro e per conseguenza anche eguali (98), onde anche l' angolo CKA è eguale all' angolo CTA; ma l' angolo CTA è retto (336), dunque sarà retto anche l' angolo CKA, e la AK sarà tangente (335).

Proposizione XXX. Teorema.

374. *In qualunque triangolo ABC* (fig. 132.), *se da uno degli angoli si abbassa una perpendicolare sul lato opposto, starà sempre il lato AC, sopra il quale o sul prolungamento del quale cade la perpendicolare BD, alla somma AB + BC degli altri due, come la differenza AB — BC dei lati stessi, sta alla differenza o alla somma delle rette AD, DC, secondo che la perpendicolare cade dentro o fuori del triangolo ABC.*

Poichè fatto centro in B, con raggio eguale a BC si descriva il cerchio CFEC, e si prolunghi il lato AB sinchè incontri la periferia in E. Ciò fatto si avrà (367) AC : AE :: AG : AF; ma AE=AB+BC; AG=AB—BC; AF=AD—DF=AD—DC, nel caso che la perpendicolare cada dentro il triangolo, ed AF = AD + DF = AD + DC se la perpendicolare cade fuori, dunque nel primo caso sostituendo si avrà AC : AB + BC :: AB — BC : AD — DC, e nel secondo AC : AB + BC :: AB — BC : AD + DC.

Proposizione XXXI. Problema.

375. *Sopra una data retta AB* (fig. 133.), *descrivere un segmento di cerchio capace di un angolo eguale all' angolo dato O.*

Colla retta data AB e colla indefinita AH si faccia in A l' angolo HAB eguale all' angolo dato O (126), e divisa AB per metà in D; si innalzi DC perpendicolare ad essa, e dal punto A, si tiri AF perpendicolare ad AH; dal punto C in cui queste perpendicolari si tagliano con raggio CA si descriva un cerchio, il quale passerà anche per B; poichè condotta CB essa sarà eguale ad AC, essendo queste rette le ipotenuse dei triangoli rettangoli ADC, BDC eguali. Essendo poi AH perpendicolare ad AF, essa sarà tangente del circolo AFBA, e condotta FB l' angolo AFB sarà eguale all' angolo (353, 354) HAB, eguale cioè all' angolo dato O.

Proposizione XXXII. Problema.

376. *In un dato cerchio DFGD* (fig. 134.) *inscrivere una retta DF eguale ad una retta data AB minore del diametro del cerchio.*

Centro in D con intervallo DF eguale alla retta data AB si descriva l' arco di cerchio MFN, che seghi in F la circonferenza del circolo dato, condotta la DF, essa per costruzione sarà eguale alla retta data AB.

Proposizione XXXIII. Problema.

377. *Dividere la retta data AB* (fig. 135.) *in un punto D tale, che il quadrato della parte maggiore BD riesca eguale al rettangolo di tutta la retta AB nella parte minore AD.*

All' estremità A della retta data AB si innalzi la perpendicolare AE eguale alla metà di AB; fatto centro in E con raggio EA si descriva il circolo AFGA, si congiunga il punto B col centro E, e si prolunghi la BE sino in G, finalmente si prenda BD = BF.

Poichè AB è tangente al circolo nel punto A e BG è segante si ha (370) BG : AB : : AB : BF e dividendo, BG — AB : AB : : AB — BF : BF, e siccome per costruzione si ha AB = GF, poichè ciascuna di queste rette è doppia del raggio EA; e BF = BD, si avrà sostituendo BG — GF : AB : : AB — BD : BD, cioè BF : AB : : AD : BD ossia BD : AB : : AD : BD, donde $\overline{BD}^2 = AB \times AD$.

378. *Scolio.* Una retta divisa in questa maniera dicesi *divisa in media ed estrema ragione.*

Proposizione XXXIV. Problema.

379. *Costruire un triangolo isoscele ABC* (fig. 136.) *in cui ciascun angolo alla base ABC, ACB sia doppio di quello al vertice BAC*

Presa una retta AB si divida in D in modo che il quadrato di AD sia eguale al rettangolo AB × BD (377). Centro in A con raggio AB, si descriva l' arco circolare FBCG, nel quale partendo da B si inscriva una retta BC = AD, e si congiungano i punti A, C; il triangolo ABC così formato sarà il ricercato.

Poichè condotta la CD, si faccia passare pei punti A, C, D una circonferenza di cerchio (329), la retta BC le sarà tangente, per essere il suo quadrato, come quello di AD, eguale al rettangolo della secante AB nella parte esterna BD, e l' angolo BCD = DAC (353, 354); aggiunto di comune l' angolo DCA, sarà tutto l' angolo BCA = DAC + DCA; ma BCA = ABC (118), e BDC = DAC + DCA (152); dunque ABC = BDC, dunque il triangolo CBD è isoscele (122), dunque BC = DC; ma BC per costruzione è eguale ad AD, dunque AD = DC, e quindi isoscele anche il triangolo ADC, onde l' angolo esterno BDC, è doppio dell' angolo BAC (156), dunque anche ciascuno degli angoli ABC, ACB, sarà doppio dell' angolo BAC.

Proposizione XXXV. Teorema.

380. *Se nel semicircolo AGBA* (fig. 137.) *si inscriverà il triangolo rettangolo AGB, e sopra i cateti AG, GB, come diametri, si descriveranno i semicircoli AEGA, BNGB, gli spazj circolari AEGHA, BNGMB saranno equivalenti al triangolo rettangolo AGB.*

Poichè i semicircoli sono figure simili (359); il semicircolo descritto sopra l' ipotenusa AB del triangolo rettangolo AGB, sarà eguale alla somma dei semicircoli descritti sopra i cateti AG, BG (296) sarà cioè AGBA = AEGA + BNGB, e togliendo di comune i segmenti circolari AHGA, BMGB rimarrà il triangolo rettangolo AGB eguale in superficie ai due spazj circolari AEGHA + BNGMB.

Quegli spazj circolari si dicono le *lunule* d' Ippocrate, essendo stato Ippocrate da Chio, che scoprì una tale proprietà.

Proposizione XXXVI. Problema.

381. *Formare un rettilineo ABCE* (fig. 138.) *simile al rettilineo dato AGFD, ed eguale al rettilineo pure dato R.*

Sopra AG si costruisca il rettangolo AGHK equivalente al rettilineo dato AGFD (200), e sopra AK si formi il rettangolo AKLM=R. Sopra AG si prenda AB media proporzionale fra AG ed AM (364, 365) sulla quale si descriva il rettilineo ABCE simile al rettilineo AGFD (297), il quale sarà eguale al rettilineo dato R. Poichè sta (252) AGHK : AKLM : : AG : AM, ossia AGFD : R : : AG : AM; ma AG : AM : : $\overline{AG}^2 : \overline{AB}^2$ (236), dunque AGFD : R : : $\overline{AG}^2 : \overline{AB}^2$; i rettilinei simili AGFD, ABCE stanno come i quadrati dei loro lati omologhi, cioè AGFD : ABCE : : $\overline{AG}^2 : \overline{AB}^2$, dunque (246) starà anche AGFD : R : : AGFD : ABCD; dunque (248) R=ABCD.

Proposizione XXXVII. Teorema.

382. *Se da due punti A e B* (fig. 139.) *presi sopra la circonferenza d'un circolo ABCA, si conducono diverse rette AC, BC; AE, BE, di modo che si incontrino a due a due sulla tangente PQ, quelle che si incontreranno nel punto C di contatto comprenderanno il massimo angolo.*

Poichè cadendo la AE fuori del circolo ABCA, essa taglierà la sua circonferenza in qualche punto D; condotta la BD, l'angolo BED = BEA, sarà minore dell'angolo esterno BDA; ma BDA è eguale ACB (343); dunque ACB > BEA.

LIBRO V.

DEI POLIGONI, DELLE FIGURE INSCRITTE E CIRCOSCRITTE AL CERCHIO, E DELLA RETTIFICAZIONE DELLA CIRCONFERENZA, E QUADRATURA DEL CERCHIO.

Definizioni.

383. I. Si dice *simmetrico* quel poligono, che ha i lati opposti eguali e paralleli. Un poligono non può quindi essere simmetrico se non ha un numero pari di lati. Il parallelogrammo è il poligono simmetrico di quattro lati.

384. II. *Poligono regolare* è quello, che è nello stesso tempo equiangolo ed equilatero (46). Vi sono dei poligoni regolari di qualunque numero di lati. Il triangolo equilatero è il poligono regolare di tre lati, il quadrato quello di quattro lati.

385. III. Una figura rettilinea qualunque dicesi *inscritta* in un circolo, quando ciascun suo angolo tocca la circonferenza del circolo stesso, *circoscritta* al circolo quando con ciascun lato tocca la di lui circonferenza.

386. IV. Un circolo dicesi *inscritto* in una figura rettilinea, quando la sua circonferenza è toccata da tutti i lati della figura medesima, *circoscritto* ad una figura quando la sua circonferenza è toccata da tutti gli angoli della figura stessa.

Proposizione I. Teorema.

387. *Se da ciascun angolo di un poligono simmetrico ABDEFG* (fig. 140.) *si conduce la diagonale*

all' angolo opposto, i triangoli ACB, FCE; ACG, DCE, ecc., opposti al vertice sono rispettivamente eguali e simili.

Poichè essendo, per supposizione, il lato AB eguale e parallelo al lato FE, sarà anche (132) l'angolo CBA = CFE, e l'angolo CAB = CEF, ed i due triangoli ACB, FCE saranno eguali e simili (96); dunque AC = CE; BC = CF.

Essendo, per supposizione, il lato AG eguale e parallelo a DE, gli angoli CAG, CGA, saranno rispettivamente eguali agli angoli CED, CDE, ed i triangoli ACG, DCE saranno eguali e simili, dunque anche CG = CD; e così degli altri triangoli BCD, GCF.

388. *Scolio* I. Il punto C nel quale ciascuna delle diagonali AE, BF, DG rimane divisa per metà si chiama il *centro* del poligono simmetrico ABDEFG.

389. *Scolio* II. Onde descrivere un poligono simmetrico di un dato numero di lati, per esempio di sei, per un punto C condotte le rette AE, BF, DG, che facciano fra di loro degli angoli qualunque, si prenda AC = CE; BC = CF; DC = CG, e si congiungano gli estremi di quelle rette mediante le linee AB, BD, DE, ecc., le rette congiungenti saranno i lati del poligono simmetrico richiesto. Poichè i triangoli ACB, FCE, avendo due lati rispettivamente eguali, e gli angoli da essi compresi pure eguali, siccome opposti al vertice, sono eguali e simili, onde AB è eguale e parallela ad FE; e così degli altri.

390. *Corollario* I. Qualunque diagonale AE condotta da un angolo A all' angolo opposto E in un poligono simmetrico qualunque, divide il poligono medesimo in due parti ABDE, AGFE eguali e simili; poichè da ciascuna parte della medesima diagonale vi è un numero eguale di triangoli eguali e simili (294).

391. *Corollario* II. Qualunque retta KH, che passa pel centro C e che termina dall'una e dall'altra parte al perimetro d'un poligono simmetrico, rimane divisa per metà in C, e divide il poligono in due parti KABDH, KGFEH eguali e simili.

Poichè i triangoli ACK, ECH sono eguali e simili, avendo essi gli angoli in C eguali, perchè opposti al vertice, gli angoli CAK, CEH eguali (132), ed i lati AC, CE pure eguali, onde CK = CH. Per le medesime ragioni sono eguali e simili anche i triangoli GCK, DCH: ma è stato dimostrato (387), essere il triangolo ACB = FCE, ed il triangolo BCD = FCG, sarà anche sommando

ACK + ACB + BCD + DCH = ECH + FCE + FCG + GCK, cioè KABDH eguale e simile a KGFEH.

Proposizione II. Teorema.

392. *I poligoni regolari ABCDE, FGHLM* (fig. 141.) *di uno stesso numero di lati sono simili.*

Poichè la somma degli angoli è la medesima sì nell' uno che nell' altro poligono, ed in questo caso essendo i poligoni proposti due pentagoni regolari tale somma è di sei angoli retti (165), e l'angolo A sarà quindi la quinta parte di questa somma, come pure l'angolo F; dunque l'angolo A = F, lo stesso dicasi degli altri angoli. Siccome poi per la natura dei poligoni regolari i lati AB, BC, CD, ecc. sono eguali fra di loro, come lo sono pure fra di loro i lati FG, GH, HL, ecc., lo stesso rapporto, che vi è fra il lato AB ed il lato FG, vi sarà anche fra tutti gli altri lati; dunque i due poligoni proposti ABCDE, FGHLM, hanno gli angoli eguali ed i lati intorno ad essi proporzionali, dunque sono simili.

393. *Corollario.* Dunque i perimetri di due poligoni regolari di un medesimo numero di lati stanno come i loro lati omologhi, ed i poligoni stessi, come i quadrati di questi lati (295).

Proposizione III. Teorema.

394. *Un poligono regolare qualunque ABCDEF* (fig. 142.) *è composto di tanti triangoli isosceli ed eguali, quant' è il numero dei lati del poligono medesimo.*

Mediante le rette AO, BO sieno divisi i due angoli contigui A, B, rispettivamente per metà, e dal punto O d' intersezione di quelle rette a tutti gli altri angoli del poligono proposto sieno condotte rispettivamente le rette OC, OD, OE, OF. Ciò fatto, i triangoli AOF, AOB sono eguali, poichè hanno di comune il lato AO, il lato AF $=$ AB, perchè lati del medesimo poligono regolare, e l'angolo FAO $=$ BAO per costruzione, dunque il lato BO $=$ FO, e l' angolo AFO $=$ ABO. Per una simile ragione il triangolo AOB è eguale al triangolo BOC, dunque anche l' angolo BAO è eguale all' angolo BCO, ed il lato CO $=$ AO; ma l' angolo BAO è la metà dell' angolo BAF del poligono, dunque anche l' angolo BCO è la metà dell' angolo BCD, onde anche l' angolo DCO $=$ BCO, ed il triangolo BCO $=$ DCO, e quindi il lato DO $=$ BO; ma BO $=$ AO, perchè il triangolo AOB ha gli angoli sopra la base AB eguali, essendo ciascuno di essi la metà d' un angolo del poligono regolare, dunque AO $=$ BO $=$ CO $=$ DO $=$ EO $=$ FO; dunque il poligono proposto è composto di tanti triangoli isosceli ed eguali, quant' è il numero de' suoi lati.

395. *Scolio* I. Il punto O in cui tutti quei triangoli si trovano avere i rispettivi loro vertici, si chiama il *centro del poligono regolare.*

396. *Scolio* II Essendo eguali tutti i triangoli che compongono un poligono regolare, se il poligono sarà composto di un numero pari di lati sarà anche simmetrico. In questa sorta di poligoni regolari avranno luogo tutte le proprietà, che appartengono ai poligoni simmetrici.

397. *Corollario* I. Essendo tutti eguali ed isosceli i triangoli AOB, BOC, COD, ecc. di cui è composto un poligono regolare qualunque, ne viene che le perpendicolari OG, OH, ON, ecc. calate dal vertice O di ciascun triangolo sulla propria base, saranno eguali. La perpendicolare calata dal centro O del poligono regolare sopra uno dei lati del poligono stesso si chiama *apotema.*

398. *Corollario* II. Essendo fra di loro eguali le rette OA, OB, OC, OD, ecc. fatto centro in O con intervallo OA descritto un circolo egli passerà per tutti i punti A, B, C, D, ecc., del poligono regolare, e sarà quindi ad esso circoscritto (386).

Per essere poi tutte eguali fra di loro le perpendicolari OG, OH, ON, ecc. fatto centro in O con raggio OG, il circolo così descritto passerà per tutti i punti G, H, N, ecc., e sarà quindi inscritto nel dato poligono regolare. Il punto O centro del poligono regolare, è anche centro comune dei circoli inscritto e circoscritto al poligono medesimo.

399. *Scolio* III. Ad un poligono regolare qualunque si può sempre circoscrivere un circolo, ed inscrivervene un altro; ed un poligono regolare può quindi essere inscritto e circoscritto ad un circolo.

Per circoscrivere ad un dato poligono regolare di un numero qualunque di lati, un cerchio, si divideranno per metà due qualunque de' suoi angoli contigui, per esempio, A e B, mediante le rette AO, BO; indi fatto centro nel punto O di loro intersezione con intervallo AO, il circolo così descritto sarà circoscitto al dato poligono.

Per inscrivere poi un circolo in un dato poligono regolare qualunque, dal punto O in cui si tagliano le rette AO, BO, che dividono due angoli contigui del dato poligono per metà, abbassata la perpendicolare OG sopra un suo lato qualunque AB, e fatto centro in O col raggio OG; il circolo così descritto, sarà inscritto nel poligono proposto.

400. *Scolio* IV. Il lato di un poligono regolare di un numero qualunque n di lati inscritto in un cerchio è la corda di un arco di $\frac{360^\circ}{n}$, così il lato di un triangolo equilatero inscritto in un cerchio è la corda di un arco di circonferenza di $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$, la terza parte cioè della circonferenza.

Il lato d' un quadrato è la corda di un arco di $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$, o della quarta parte della circonferenza; quello di un pentagono è la corda d' un arco di $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$; quello di un esagono è la corda d'un arco di $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$; quello di un ottagono è la corda di un arco di $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$; quello d' un decagono è la corda di un arco di $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$; quello del dodecagono è la corda d' un arco di $\frac{360^\circ}{12} = 30$, ecc.

Per inscrivere quindi un poligono regolare di un dato numero di lati in un circolo dato, basterà dividere la sua circonferenza in tante parti eguali quant' è il numero dei lati del poligono, che in esso si vuole inscrivere, poichè essendo eguali gli archi AB, BC, CD; ecc. sono eguali anche le corde (321) AB, BC, CD, ecc. I triangoli AOB, BOC, COD, ecc. essendo fra di loro equilateri, sono anche eguali, per conseguenza gli angoli ABC, BCD, CDE saranno eguali, risultando ciascuno di essi dalla somma di due angoli eguali sopra le basi di quei triangoli eguali, dunque il poligono ABCDEF è un poligono equilatero ed equiangolo, cioè regolare.

Proposizione IV. Teorema.

401. *I perimetri di due poligoni regolari simili ABCDE, FGHLM* (fig 141.) *stanno come gli apotemi OK, PQ, ed i poligoni sono come i quadrati degli apotemi stessi.*

Poichè condotte dai centri O, P, le rette OA, OB, ecc. PF, PG, ecc.; nei triangoli simili AOB, FPG essendo gli apotemi OK, PQ rispettivamente perpendicolari ai lati AB, FG, si ha (292) AB : FG : : OK : PQ, come pure AB : FG : : OB : PG, e moltiplicando i termini di ciascuna di queste proporzioni, pei termini di un' altra rispettivamente eguale, starà anche $\overline{AB}^2 : \overline{FG}^2 : : \overline{OK}^2 : \overline{PQ}^2$, ed

$$\overline{AB}^2 : \overline{FG}^2 : : \overline{OB}^2 : \overline{PG}^2 .$$

Ora nominando P il perimetro del poligono ABCDE, p quello del poligono FGHLM starà (2[illegible]5) P : p : : AB : FG, e per conseguenza P : p : : OK : PQ, oppure P : p : : OB : PG.

Siccome poi (295) sta $ABCDE : FGHLM :: \overline{AB}^2 : \overline{FG}^2$, così starà anche $ABCDE : FGHLM :: \overline{OK}^2 : \overline{PQ}^2$, oppure $ABCDE : FGHLM :: \overline{OB}^2 : \overline{PG}^2$.

402. *Corollario.* Siccome poi OK, PQ verrebbero ad essere raggi dei circoli, che venissero inscritti rispettivamente nei poligoni ABCDE, FGHLM, e le rette OB, PG i raggi dei circoli, che ad essi si circoscrivessero: così i perimetri di due poligoni regolari simili staranno fra di loro come i raggi dei circoli inscritti o circoscritti, ed i poligoni medesimi staranno come i quadrati dei raggi stessi.

Proposizione V. Teorema.

403. *Qualunque poligono regolare ABCDEF* (fig. 142.) *è equivalente ad un triangolo PRQ, che ha per base la retta PQ eguale al perimetro del poligono, e per altezza una retta RS eguale all' apotema OG del poligono medesimo.*

Di fatto dal centro O del poligono proposto a ciascuno de' suoi angoli si conducano rispettivamente le rette OA, OB, OC, ecc., ed il poligono rimarrà diviso in tanti triangoli eguali, quant' è il numero de' suoi lati (394); ciò fatto, starà il poligono ABCDEF al triangolo AOB, come il numero m di triangoli eguali ad AOB contenuti nel poligono medesimo stà ad 1; starà cioè $ABCDEF : AOB :: m : 1$.

Paragonando ora i triangoli PRQ, AOB, che hanno eguale altezza, (252) si ha $PRQ : AOB :: PQ : AB$; ma PQ contiene m volte AB, dunque starà $PRQ : AOB :: m : 1$, dunque starà anche $ABCDEF : AOB :: PRQ : AOB$, dunque essendo in questa proporzione fra di loro eguali i conseguenti, lo saranno anche gli antecedenti; dunque $ABCDEF = PRQ$.

Proposizione VI. Problema.

404. *In un dato cerchio ABCA* (fig. 143.) *inscrivere un triangolo simile ad un triangolo dato FGH.*

Ad un punto qualunque A della circonferenza del circolo dato si tiri la tangente TV, e si conducano a quel punto le corde BA, CA tali che facciano gli angoli BAT, CAV rispettivamente eguali agli angoli GFH, GHF del triangolo dato, condotta la BC, il triangolo BAC così formato sarà il richiesto.

Di fatto l'angolo $ACB = BAT$, poichè ciascuno è misurato dalla metà dell' arco AB; ma l'angolo BAT è stato formato eguale all' angolo GFH, dunque l'angolo $ACB = GFH$. L'angolo $CAV = ABC$, perchè misurati ambidue dalla metà dell' arco AC; ma $CAV = GHF$; dunque $GHF = ABC$, onde il triangolo ABC così inscritto nel proposto cerchio è equiangolo al triangolo dato FGH, e per conseguenza è ad esso simile (275).

405. *Corollario.* Se il triangolo GFH fosse equilatero sarebbe equilatero anche il triangolo ABC.

Proposizione VII. Problema.

406. *In un dato cerchio ABCDEF* (fig. 144) *inscrivere un esagono regolare.*

Condotto un diametro AD, agli estremi A, D del diametro stesso si inscrivano nel semicerchio ABCDA le corde AB, DC, ciascuna delle quali sia eguale al raggio AO, e dai punti B, C si tirino i diametri BE, CF, condotte finalmente le corde BC, DE, EF, FA, l'esagono ABCDEF risultante sarà il ricercato.

Poichè i triangoli AOB, COD sono equilateri ed eguali per costruzione, gli angoli quindi AOB, COD sono eguali, e ciascuno di essi è la terza parte di due angoli retti (163), dunque l' angolo BOC sarà anch' esso una terza parte di due angoli retti, ed eguale a ciascuno dei due angoli AOB, COD, come lo sono anche gli angoli DOE, EOF, AOF opposti rispettivamente coi loro vertici agli angoli AOB, BOC, COD, dunque tutti gli angoli formati intorno al punto O sono eguali, e per conseguenza sono eguali anche gli archi su dei quali essi appoggiano, e le corde sottese da quegli archi sono pure eguali, onde l' esagono ABCDEF è equilatero: siccome poi ciascun angolo ABC, BCD, ecc. di questo esagono insiste sopra un arco composto da quattro di quegli archi eguali, così egli è anche equiangolo, e per conseguenza è regolare.

407. *Scolio.* Si vede quindi che il lato di un esagono regolare inscritto in un cerchio, o la corda sottesa da un arco di 60° gradi, è eguale al raggio del cerchio in cui è inscritto.

408. *Corollario* I. Se si uniscono alternativamente gli angoli dell' esagono inscritto nel circolo mediante le rette BF, BD, DF ne risulterà il triangolo equilatero inscritto nel circolo medesimo, poichè ciascun suo lato sarà una corda appartenente ad un arco di 120° (400).

Se poi ciascun arco AB, BC, ecc. sarà diviso per metà in M, N, ecc. si avrà il dodecagono regolare inscritto nel cerchio, poichè ciascuna di quelle corde sarà sottesa da un arco di 30°. Continuando a bipartire successivamente gli archi, si avranno i poligoni regolari di 24 lati, di 48 lati, di 96 lati, ecc. inscritti nel dato cerchio.

409. *Corollario* II. Essendo OB=BC=CD=DO il quadrilatero OBCD sarà un rombo; la somma

quindi dei quadrati delle diagonali sarà eguale alla somma dei quadrati dei lati (221), sarà cioè

$$\overline{BD}^2 + \overline{OC}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{OD}^2 = 4\overline{OB}^2 = 4\overline{OC}^2,$$

e quindi togliendo $\overline{OC}^2$ dall' una e dall' altra parte, rimarrà $\overline{BD}^2 = 3\overline{OC}^2$; onde il quadrato del lato del triangolo equilatero inscritto nel cerchio è triplo del quadrato del raggio, o del quadrato del lato dell' esagono regolare inscritto nel cerchio medesimo. Onde starà $\overline{BD}^2 : \overline{OC}^2 :: 3 : 1$, e per conseguenza anche $BD : OC :: \sqrt{3} : 1$; donde si vede che il lato del triangolo equilatero è incommensurabile col raggio o col lato dell' esagono regolare inscritto nello stesso cerchio.

Proposizione VIII. Problema.

410. *In un dato cerchio ABCDA* (fig. 145.) *inscrivere un quadrato.*

Si conducano due diametri AC, BD fra di loro perpendicolari, e si congiungano le loro estremità mediante le corde AB, BC, CD, DA, il quadrilatero così risultante sarà il quadrato richiesto.

Poichè essendo, per costruzione tutti retti gli angoli fatti intorno al punto O, sono eguali gli archi sopra dei quali essi insistono, e per conseguenza anche le corde AB, BC, CD, DA sono eguali; ciascun angolo poi ABC, BCD, ecc. di quel quadrilatero è retto, poichè è inscritto in un semicerchio (359); dunque ABCD è un quadrato inscritto nel cerchio proposto.

411. *Corollario* I. Essendo il triangolo AOB rettangolo ed isoscele, si vede che il lato AB del quadrato inscritto nel circolo è incommensurabile col raggio del circolo stesso, poichè (299) sta

BD : AB : : $\sqrt{2}$: 1 ; ma (365) BD : AB : : AB : BO ; dunque ancora AB : BO : : $\sqrt{2}$: 1.

412. Se si dividerà per metà ciascuno degli archi AB, BC, ecc., e si condurranno le corde AM, MB; BN, NC, ecc., si avrà l'ottagono regolare inscritto, e così di seguito suddividendo, si potranno con questo metodo ottenere i poligoni regolari di 16 di 32, di 64 lati, ecc. inscritti nel cerchio.

Proposizione IX. Teorema.

413. *La somma ADC + ABC degli angoli opposti in un quadrilatero qualunque ABCD* (fig. 146.) *inscritto in un cerchio è eguale a due angoli retti, ed il rettangolo AC × BD delle diagonali è eguale alla somma AD × BC + AB × DC dei rettangoli fatti coi lati opposti.*

1.° Poichè l'angolo ADC, che ha il vertice alla circonferenza è misurato dalla metà dell'arco ABC, e l'angolo ABC, che pure ha il vertice alla circonferenza, è misurato dalla metà dell'arco ADC; ma questi due archi costituiscono la circonferenza; dunque i due angoli ADC, ABC, opposti nel quadrilatero inscritto nel circolo, hanno per misura la metà di tutta la circonferenza, dunque sommati insieme equivalgono a due angoli retti. Lo stesso dicasi degli angoli BAD, BCD.

2.° Dall'angolo B si guidi la retta BF, che faccia col lato BC l'angolo CBF = ABD. I due triangoli CFB, ABD sono simili, poichè hanno per costruzione gli angoli CBF, ABD eguali, gli angoli BCF, BDA pure eguali, perchè appoggiano entrambi sullo stesso arco AB, ed hanno i loro vertici alla circonferenza, starà dunque BC : FC : : BD : AD, e quindi

$$BD \times FC = BC \times AD.$$

I due triangoli BCD, AFB sono pure simili, poichè levando dagli angoli eguali CBF, ABD lo stesso angolo FBD, gli angoli residui CBD, ABF sono eguali, come lo sono fra di loro anche gli angoli BDC, BAF, i quali hanno il vertice alla circonferenza, ed appoggiano sullo stesso arco BC, dunque starà AB : AF : : BD : DC, e quindi BD × AF = AB × DC, e sommando membro per membro le due equazioni ritrovate sarà

$$BD \times FC + BD \times AF = BC \times AD + AB \times DC,$$

ossia $BD\,(FC + AF) = BC \times AD + AB \times DC$,

ma FC + AF = AC, dunque

$$BD \times AC = BC \times AD + AB \times DC.$$

414. *Scolio.* Se la retta BF in luogo di cadere dalla parte sinistra della BD cadesse sulla BD, o cadesse dalla parte destra, avrebbe luogo un simile ragionamento e la medesima conclusione.

Proposizione X. Problema.

415. *In un dato cerchio ABCDEA* (fig. 147.) *inscrivere un pentagono regolare.*

Si faccia un triangolo isoscele FGH, che abbia ciascuno de' suoi angoli alla base doppio di quello al vertice (379), e nel circolo dato si inscriva poi il triangolo EBD ad esso simile (404), il quale avrà pure i suoi angoli alla base eguali, e ciascuno di essi doppio dell'angolo al vertice. Mediante le corde CE, AD si divida ogni angolo BED, BDE, sopra la base di quel triangolo per metà, per lo che gli angoli EBD, BEC, CED, BDA, ADE saranno tutti eguali, e per conseguenza anche gli archi, sopra i quali insistono, saranno eguali, e quindi eguali tutte le corde AB, BC, CD, DE, AE (321), ed il pentagono inscritto sarà equilatero: ma questo pentagono è anche equiangolo, poichè ciascuno de' suoi angoli ABC, BCD, ecc. è misurato dalla metà di un arco composto da tre archi eguali; dunque egli è regolare.

416. *Corollario.* Se ciascun arco AB, BC, ecc., verrà diviso per metà in M, N, ecc., e se dagli estremi delle corde AB, BC, ecc. ai rispettivi punti di divisione, si condurranno le rette AM, BM, BN, CN, ecc., il poligono, che in questa maniera si otterrà, sarà un decagono regolare inscritto nel circolo. Continuando a suddividere, si potranno avere i poligoni regolari di 20, di 40, di 80 lati, ecc. inscritti nel circolo.

Proposizione XI. Teorema.

417. *Il quadrato del lato del pentagono regolare inscritto in un circolo ABFGHA* (fig. 148.) *è eguale al quadrato del lato dell' esagono, regolare più il quadrato del lato del decagono pure regolare inscritti nello stesso cerchio.*

Sia AB il lato del pentagono, ed AO il raggio del cerchio, il quale è eguale al lato dell' esagono inscritto (407). Diviso l' arco AB per metà, in C sarà AC il lato del decagono regolare inscritto. Si divida indi per metà in D la corda AC, e si guidi il raggio OE, che dividerà in E per metà l' arco AEC (324), e sarà perpendicolare ad AC; finalmente dal punto C si conduca la CR al punto R in cui la OE incontra il lato del pentagono. Il triangolo ACR risultante è isoscele, perchè essendo OD perpendicolare sulla metà di AC, il punto R è equidistante dalle estremità A, C della corda AC (107), onde $AR = CR$; ciò posto, il triangolo ARC è simile al triangolo ACB, il quale è pure isoscele per costruzione, ed ha l' angolo RAC sopra la base comune

col triangolo ACB, dunque anche l'angolo $RCA = CBA$; e per conseguenza anche il terzo angolo $CRA = BCA$, e quindi (275) $AB : AC :: AC : AR$,

donde $$AB \times AR = \overline{AC}^2.$$

I triangoli AOB, BRO sono simili, poichè sono isosceli entrambi ed equiangoli. Di fatto nel triangolo AOB è il lato $AO = OB$, perchè raggi dello stesso cerchio, e quindi l' angolo $BAO = ABO$; ma l' angolo BAO è misurato dalla metà dell' arco BFG su cui insiste, anche l' angolo ABO ad esso eguale avrà per misura la metà dello stesso arco BFG; ma BFG è doppio di BCE, perchè egli è composto da tre archi ciascuno eguale a BC, o di sei archi ciascuno eguale a CE, mentre BCE ne contiene tre; dunque l' angolo ABO, che ha per misura la metà di BFG, avrà per misura l' intero arco BCE, ma dall'arco BCE è misurato anche l'angolo $ROB = EOB$; dunque i due angoli ROB, RBO sono eguali, dunque il triangolo BRO è isoscele ed è simile al triangolo isoscele AOB, avendo questi triangoli comune l' angolo sopra le basi ABO, dunque starà $AB : BO :: BO : BR$, onde $AB \times BR = \overline{BO}^2$, e sommando questa equazione colla superiore membro per membro, si avrà

$$AB \times AR + AB \times BR = \overline{AC}^2 + \overline{BO}^2;$$

ed $$AB\,(AR + BR) = \overline{AC}^2 + \overline{BO}^2,$$

ma $AR + BR = AB$; dunque $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BO}^2$.

Proposizione XII. Problema.

418. *In un dato cerchio ABCDA* (fig. 149.) *inscrivere un pentedecagono regolare.*

Si inscriva nel dato cerchio il lato AB dell' esagono regolare, e partendo dal punto A stesso, si inscriva una corda AG, la quale sia eguale al lato del decagono pure regolare, sarà quindi l' arco spettante alla corda AB, la sesta parte di tutta la circonferenza, e l' arco determinato dalla corda AG sarà la decima parte di tutta la circonferenza, onde l' arco GB, differenza fra i due archi AGB ed AG viene ad essere la quindicesima parte della circonferenza medesima, e perciò la corda GB è il lato del pentedecagono regolare o poligono di quindici lati inscritto nel circolo proposto.

Proposizione XIII. Problema.

419. *Dato un poligono regolare ABCDEF* (fig. 150.), *di un numero qualunque di lati, inscritto in un cerchio, circoscrivere al medesimo cerchio un poligono simile all' inscritto.*

Alla metà N dell' arco ANB si conduca una tangente, che sarà parallela alla corda AB (128), essendo ambedue perpendicolari al raggio ON condotto dal centro O al punto di contatto N. Si faccia la stessa costruzione per tutti gli altri archi BKC, CRD, ecc. Le tangenti così condotte formeranno colle loro intersezioni il poligono circoscritto FGHLMQ simile all' inscritto.

Dal centro O a ciascun angolo del poligono circoscritto, siano condotte le rette OG, OH, OL, ecc.

I triangoli rettangoli ONG, OKG sono eguali avendo l' ipotenusa OG comune, ed i lati ON, OK eguali (110), dunque l' angolo NOG = GOK, e per conseguenza la OG divide l' arco NBK per mezzo nel punto B, nel quale si congiungono i lati AB e CB del poligono regolare inscritto, dunque i punti O, B, G sono nella medesima linea retta OBG; per simile ragione il punto C è sulla retta OH, il punto D sulla OL, ecc. Siccome poi FG è parallela ad AB, e GH è parallela a BC, gli angoli FGH, ABC sono eguali (150), e per la stessa ragione sono eguali fra di loro gli angoli GHL, BCD; GFQ, BAF, ecc.; dunque gli angoli del poligono circoscritto sono eguali a quelli del poligono inscritto. Inoltre a motivo delle medesime parallele sta (275) FG : AB : : OG : OB, sta del pari GH : BC : : OG : OB; dunque starà anche FG : AB : : GH : BC; ma AB = BC, perchè lati dello stesso poligono regolare; dunque anche FG = GH, per la stessa ragione FG = FQ, ecc., dunque i lati del poligono FGHLMQ circoscritto sono tutti eguali, dunque è equilatero: ma è anche equiangolo; dunque è regolare e simile all' inscritto.

420. *Scolio I.* Si sarebbe del pari ottenuto un poligono circoscritto simile all' inscritto, se tutte quelle tangenti fossero partite rispettivamente dai punti A, B, C della circonferenza, nei quali essa è toccata internamente dagli angoli del poligono inscritto.

421. *Corollario.* Se fosse dato un poligono FGHLMQ circoscritto ad un circolo, e che si trattasse di inscrivere nel circolo stesso un poligono ad esso simile, congiunti i vertici degli angoli del poligono circoscritto col centro O, mediante le rette FO, GO, HO, ecc., che incontreranno la circonferenza nei punti A, B, C, ecc., ed uniti questi punti mediante le corde AB, BC, ecc., il poligono così formato sarà simile al circoscritto.

Se si unissero invece i punti di contatto P, N, K, ecc., mediante le corde PN, NK, ecc. ne risulterebbe del pari un poligono inscritto simile al circoscritto.

Ad un dato cerchio si vede quindi che si possono circoscrivere tutti i poligoni regolari, che si sanno inscrivere, e viceversa.

422. *Scolio* II. Si credeva, che i poligoni di cui abbiamo parlato fossero i soli, che col mezzo della geometria elementare, o colla risoluzione delle equazioni del primo e secondo grado si potessero inscrivere in un dato cerchio, ma il Sig. Gauss di Brunswik Professore nell' Università di Gottinga in una sua opera intitolata *Disquisitiones arithmeticae Lipsiae* 1801, ha provato che, con dei simili mezzi, si può inscrivere nel circolo un poligono regolare di diecisette, ed in generale quello di 2^n+1 lati, purchè tale numero sia un numero primo.

Proposizione XIV. Problema.

242. *Conoscendo il raggio CA* (fig. 151.) *d'un circolo, ed il lato AB di un poligono regolare in esso inscritto, trovare l' apotema CM del poligono medesimo.*

Siccome l' apotema CM (325) divide per metà la corda AB, si ha $AM=\frac{AB}{2}$, e per conseguenza $\overline{AM}^2=\frac{\overline{AB}^2}{4}$. Il triangolo rettangolo AMC dà (209) $\overline{CM}^2=\overline{AC}^2-\overline{AM}^2=\overline{AC}^2-\frac{\overline{AB}^2}{4}$; onde $CM=\sqrt{\left(\overline{AC}^2-\frac{\overline{AB}^2}{4}\right)}=\sqrt{\left(\frac{4\overline{AC}^2-\overline{AB}^2}{4}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(4\overline{AC}^2-\overline{AB}^2\right)}$.

Se AB sarà il lato d' un esagono regolare, si avrà, $AB=AC$; onde $CM=\frac{1}{2}\sqrt{(4\overline{AB}^2-\overline{AB}^2)}=\frac{1}{2}\sqrt{3\overline{AB}^2}=\frac{AB}{2}\sqrt{3}$. Se poi fosse $AB=1$, si avrebbe $CM=\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Proposizione XV. Problema.

424. *Conoscendo il raggio AC di un circolo, ed il lato AB d' un poligono regolare inscritto, trovare il lato AE d' un poligono regolare pure inscritto di un numero doppio di lati.*

Si prolunghi EC sino in G ad incontrare la circonferenza dalla parte opposta, e si avrà

$EM=EC-CM=EC-\sqrt{\left(\overline{EC}^2-\frac{\overline{AB}^2}{4}\right)}$. Ma si ha (365) $\overline{AE}^2=EG\times EM=2EC\times EM$, onde sostituendo $\overline{AE}^2=2EC\left[EC-\sqrt{\left(\overline{EC}^2-\frac{\overline{AB}^2}{4}\right)}\right]$, ed

$$(a)\ AE=\sqrt{\left[2EC\times\left(EC-\sqrt{\left(\overline{EC}^2-\frac{\overline{AB}^2}{4}\right)}\right)\right]}.$$

Supponiamo, per esempio, che AB sia il lato d' un esagono regolare, sarà $AB=EC$, ed $AE=\sqrt{\left[2AB\left(AB-\sqrt{\frac{3\overline{AB}^2}{4}}\right)\right]}=\sqrt{\left(2\overline{AB}^2-\frac{2\overline{AB}^2}{2}\sqrt{3}\right)}=\sqrt{\left(\overline{AB}^2(2-\sqrt{3})\right)}=AB\sqrt{(2-\sqrt{3})}$; valore del lato del dodecagono inscritto nel medesimo cerchio.

425. *Scolio*. Col mezzo di questo lato si calcolerà nello stesso modo quello del poligono di 24 lati; con quello di 24 lati si troverà quello di 48 lati, e così di seguito.

Trovato poi il valore di un lato, esso si moltiplicherà pel numero dei lati del poligono regolare a cui deve appartenere, e si avrà così il valore del perimetro del poligono stesso.

Suppongasi, per esempio, che il raggio del cerchio sia l'unità, sarà anche il lato AB dell'esagono inscritto eguale all'unità, ed il lato del dodecagono regolare sarà $AE = \sqrt{(2 - \sqrt{3})} = 0{,}517638090205$. Se nella formola (*a*) faremo il raggio $EC = 1$, ed invece di AB porremo AE, chiamando AE' il lato del poligono di 24 lati, avremo

$$AE' = \sqrt{[2 - \sqrt{(4 - \overline{AE}^2)}]} = 0{,}261052384440.$$

Il lato del poligono di 48 lati sarà

$$AE'' = \sqrt{[2 - \sqrt{(4 - \overline{AE'}^2)}]} = 0{,}130806258459.$$

Quello del poligono di 96 lati

$$AE''' = \sqrt{[2 - \sqrt{(4 - \overline{AE''}^2)}]} = 0{,}065438165642.$$

Moltiplicando poi 0,065438165642, che è il valore del lato di un poligono regolare di 96 lati inscritto in un cerchio, il cui raggio è 1 per 96, si ha 6,2820639017, che è il valore di tutto il contorno di quel poligono.

Proposizione XVI. Problema.

426. *Conoscendo il lato AB di un poligono regolare inscritto in un cerchio, trovare il lato DF del poligono simile circoscritto.*

Condotto dal centro C al punto di contatto E il raggio CE, la corda AB, e l'arco AEB saranno divisi per metà. I raggi CA, CB condotti alle estre-

mità del lato AB prolungati passeranno per gli estremi D, F del lato DF (419) del poligono circoscritto; ed i triangoli DEC, ACM saranno simili, essendo ambidue rettangoli ed avendo l'angolo C comune, onde

$$CM : CE : : AM : DE : : \frac{AB}{2} : \frac{DF}{2} : : AB : DF,$$

onde $DF \times CM = AB \times CE$, e quindi

$$DF = AB \times \frac{CE}{CM} = AB \times \frac{AC}{CM}.$$

Il lato del poligono circoscritto è dunque una quarta proporzionale dopo l'apotema CM, il lato AB del poligono inscritto ed il raggio CE o AC del cerchio. Se $AB = CE$, come nell'esagono regolare inscritto, sarà

$DF = \frac{\overline{CE}^2}{CM}$, cioè CM, CE, DF saranno continuamente proporzionali.

427. *Scolio*. Il contorno intero del poligono circoscritto si avrà moltiplicando il valore numerico del suo lato DF pel numero dei lati, che egli deve avere.

Volendo, per esempio, il valore del lato del poligono regolare di 96 lati circoscritto al cerchio, si incomincierà a determinare il valore dell'apotema CM di un tale poligono mediante la formola (423)

$CM = \sqrt{\left(\overline{AC}^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4}\right)}$, la quale diverrà in tale caso

$$CM = \tfrac{1}{2}\sqrt{[4 - (0{,}065438165642)^2]} = 0{,}999464587 5;$$

questo valore poi posto nella formola $DF = AB \times \frac{AC}{CM}$ in luogo di CM, e fatto in essa $AC = 1$, ed $AB = 0{,}065438165642$, si ha

$$DF = \frac{0,0654381656412}{0,9994645875} = 0,0654732220825,$$

che sarà quindi il lato del poligono circoscritto di 96 lati, il di cui perimetro sarà espresso da

$$0,0654732220825 \times 96 = 6,2854291990.$$

Onde trovare approssimatamente la rettificazione della circonferenza e la quadratura del cerchio giova stabilire i seguenti principj.

428. 1.° *Di due linee curve, come ABC, AFC (fig. 152.), o di due linee una curva AFC, e l'altra spezzata ADEC, oppure di due linee spezzate ADEC, AGHC, le quali terminano agli stessi estremi A, C, e rivolgono la loro convessità dalla medesima parte, è maggiore quella, che comprende l'altra.*

Da ciò ne deriva 1.°, che il contorno di un poligono ABCDEFA (fig. 150.) inscritto in un cerchio è minore della circonferenza del cerchio medesimo, poichè ciascun suo lato AB è minore dell'arco ANB da esso sotteso. 2.° che il contorno di un poligono FGHLMQ circoscritto ad un cerchio è maggiore della circonferenza del cerchio medesimo, poichè la somma delle due rette FP + FN è maggiore dell'arco PAN, poichè essa comprende un arco, il quale ha le medesime estremità delle rette stesse. Similmente la somma delle rette NG + GK è maggiore dell'arco NBK, ecc.

429. 2.° *Due quantità A, B, la di cui differenza è minore di qualunque più piccola quantità, che si possa immaginare, sono eguali fra di loro.*

Onde rendere vie più chiaro questo principio giova osservare, che siccome l'idea della disuguaglianza si riduce a quella dell'eccesso di una quantità sopra l'altra, egli è impossibile che si trovi

alcuna disuguaglianza fra quelle quantità delle quali non si può assegnare differenza.

430. *Se da una quantità qualunque AB* (fig. 153.) *si leverà la quantità AF maggiore della sua metà, e dal residuo FB si leverà la quantità FG maggiore della metà del medesimo, e se lo stesso si continuerà a fare con tutti i residui, si arriverà finalmente ad un residuo minore di qualunque data quantità, per quanto piccola essa si possa immaginare.*

Proposizione XVII. Lemma.

431. *In un dato cerchio ABDEFGHLA* (fig. 154.) *si può inscrivere un poligono regolare, che differisca dal circolo di una quantità minore di ogni quantità assegnabile.*

Inscritto nel circolo proposto il quadrato ADFH, si inscriva indi l'ottagono regolare ABDEFGHL, il quale differirà dal circolo di una quantità minore della metà della differenza, che vi è fra il quadrato ed il circolo medesimo; di fatto, se pel punto B metà dell'arco ABD si farà passare una parallela ad AD, e si prolungheranno i lati FD, HA, sino all'incontro in P ed I della retta tirata da B parallelamente ad AD, sarà il triangolo ADB la metà del rettangolo ADPI (187); ma il rettangolo ADPI è maggiore del segmento ABDA, dunque anche il triangolo ADB sarà maggiore della metà del segmento ABDA; nello stesso modo si proverà che ogni triangolo DEF, FGH, ecc. è maggiore della metà del segmento corrispondente, onde anche la somma di tutti i triangoli sarà maggiore della metà della somma di tutti i segmenti circolari, dunque la differenza tra l'ottagono ed il cerchio è minore della metà della differenza fra il cerchio ed il quadrato; onde colla iscrizione dell' ottagono regolare si è levata più della metà della differenza, che passava fra il circolo ed il quadrato inseritto. Nella stessa maniera si dimostrerà, che, inscrivendovi un poligono regolare di sedici lati, si leverà più della metà della differenza, che vi è fra il circolo, e l' ottagono, onde continuando a bipartire gli archi, si inscriveranno nel cerchio dei poligoni regolari, nei quali il numero dei lati anderà sempre raddoppiandosi ad ogni nuova inscrizione, e si leverà sempre più della metà della differenza, che si trovava fra il circolo ed il poligono antecedente, e continuando così, si giungerà ad inscrivere un poligono regolare, il quale differirà dal circolo di una quantità minore di ogni quantità assegnabile.

432. *Scolio* I. Con un simile ragionamento si dimostrerà, che ad un dato cerchio si può sempre circoscrivere un poligono regolare il quale differisca dal circolo stesso di una quantità minore di ogni quantità assegnabile; di modo che il circolo si può chiamare il *limite* dei poligoni inscritti, e ciscoscritti, conservandosi esso sempre maggiore di qualunque poligono inscritto, e minore di ogni poligono circoscritto (428).

Nello stesso modo poi che i poligoni inscritti e circoscritti al cerchio, nella maniera sopra indicata, differiscono dal cerchio stesso di una quantità minore di ogni assegnabile, anche i loro perimetri differiranno dalla circonferenza di una quantità minore di ogni assegnabile, cosicchè la circonferenza sarà il *limite* dei perimetri dei poligoni inscritti e circoscritti al cerchio; mentre essa sarà maggiore del perimetro di ogni poligono inscritto, e minore del perimetro di qualunque poligono circoscritto.

433. *Scolio* II. Il perimetro del poligono regolare di 96 lati inscritto nel circolo supposto il rag-

gio $=1$ (425) si è trovato essere $=6,2820639017$. Quello del poligono circoscritto di un pari numero di lati (427) si è trovato $=6,2854291990$; la circonferenza, che trovasi compresa fra questi due perimetri, può valutarsi prossimamente eguale a $6,2837465 5035$, che è la media aritmetica fra quei due valori. Se il diametro del cerchio si farà eguale ad uno, la sua circonferenza, si troverà prossimamente eguale a $3,1418732 7517$. Da questo valore si deduce il rapporto di Archimede, che è di 7 a 22, cioè se il diametro contiene 7 unità la circonferenza ne contiene prossimamente 22.

Questo rapporto è molto in uso, poichè essendo assai prossimo al vero, ha il vantaggio di essere semplicissimo.

Con questo metodo il Sig. Nicole (*Memoire de l' Academie de France annèe* 1747.) ha trovato, supposto il diametro $=1$, che il contorno di un poligono regolare di 393216 lati inscritto nel circolo è rappresentato dal numero $3,14159265369 2928$, e quello di un poligono regolare circoscritto d' un pari numero di lati, da $3,14159265379 5158$. La media aritmetica fra questi due contorni è $3,14159265374 4043$, valore prossimo della circonferenza del cerchio, ed in cui non solo evvi contenuto il rapporto di Archimede di $7:22$, ma quello di Adriano Mezio di $113:355$; ed altri anche più prossimi. Veggasi la mia Algebra (197 e 198).

434. *Scolio* III. Finora non si è potuto determinare questo rapporto che per approssimazione, ma l' approssimazione è stata portata a tal segno che la cognizione del rapporto esatto non avrebbe alcun vantaggio sul rapporto approssimativo; perciò questa ricerca conosciuta sotto il nome di *rettificazione della circonferenza*, che ha molto occupato i

Geometri, allorchè i metodi di approssimazione erano men conosciuti, attualmente è riposta fra le ricerche infruttuose e di nessuna importanza.

Proposizione XVIII. Teorema.

435. *Le circonferenze dei circoli ABDEFGA, HKLMNIH* (fig. 155.) *stanno come i loro raggi AC, OH, ed i circoli stanno come i quadrati dei raggi medesimi.*

Per brevità si indichi la circonferenza descritta col raggio CA con *circ.* CA, e la circonferenza descritta col raggio OH con *circ.* OH; e dico che si avrà primieramente CA : OH : : *circ.* CA : *circ.* OH. Poichè se questa proporzione non sarà vera, stara CA : OH : : *circ.* CA : ad una circonferenza maggiore o minore di *circ.* OH. Supponiamo che stia, se è possibile, CA : OH : : *circ.* CA : *circ.* RS, essendo *circ.* RS < *circ.* OH, e che sia superata d'una quantità T. Ciò posto, si inscriva nel circolo HKLMNIH un poligono regolare tale, che differisca dal cerchio d'una quantità minore di ogni quantità assegnabile (431), anche il perimetro di quel poligono, che lo nomineremo *p*, differirà dalla *circ.* OH d'una quantità minore d'ogni assegnabile, e per conseguenza esso sarà maggiore di *circ.* RS. Nel circolo ABDEFGA si inscriva indi un poligono simile a quello inscritto nel circolo HKLMNIH, ed il suo perimetro si chiami P. Da ciò si avrà P : *p* : : CA : OH (402); ma per supposizione si ha CA : OH : : *circ.* CA : *circ.* RS; dunque si avrà anche P : *p* : : *circ.* CA : *circ.* RS; ma è *circ.* RS < *p* per costruzione, dunque dovrebbe essere anche *circ.* CA < P; ma invece *circ.* CA > P, poichè la circonferenza di un circolo è sempre maggiore del perimetro di qualunque poligono in esso inscritto

(428), dunque è impossibile, che stia CA : OH : : *circ.* CA sta ad una quantità minore di *circ.* OH; si dimostrerebbe del pari che CA non può stare ad OH, come *circ.* CA ad una quantità maggiore di *circ.* OH, dunque le circonferenze dei circoli sono proporzionali ai raggi coi quali furono descritte.

Con un ragionamento ed una costruzione totalmente simile si giungerà a dimostrare, che i circoli stanno fra di loro come i quadrati dei rispettivi raggi.

436. *Corollario.* Gli archi simili AB, HK (fig. 155.) stanno come i raggi AC, OH; ed i settori simili ACBA, HOKH stanno come i quadrati dei raggi medesimi. Poichè gli archi simili sono proporzionali alle circonferenze intere, a cui appartengono, e le circonferenze stanno come i raggi; dunque anche gli archi simili stanno come i raggi. Siccome i settori simili sono proporzionali ai circoli interi, e questi stanno come i quadrati dei rispettivi raggi, dunque anche i settori simili sono proporzionali ai quadrati dei raggi medesimi.

Proposizione XIX. Teorema.

437. *Il cerchio GHLMNQG* (fig. 156.) *è eguale ad un triangolo PQR, che ha per altezza il raggio, e per base la circonferenza.*

Sia, se è possibile, il circolo maggiore del triangolo PQR, e lo superi d'una quantità Z. Si inscriva in questo cerchio un poligono regolare (431), che differisca dal cerchio di una quantità minore di Z, tale poligono sarà ancora maggiore del triangolo PQR, poichè la differenza fra questo poligono ed il cerchio è minore della differenza Z fra il triangolo PQR, ed il cerchio stesso, la qual cosa è assurda.

Poichè se dal centro O si conduce in quel poligono l'apotema OK, esso sarà minore dell'altezza RS del triangolo PQR, che è eguale al raggio OH: ma il contorno del poligono inscritto è ancora minore della base PQ dello stesso triangolo, poichè tale contorno è minore della circonferenza (428), che si è supposta eguale a PQ; dunque il poligono inscritto (403) è minore del triangolo PQR, e non maggiore come si è trovato, supponendo il circolo maggiore del triangolo PQR.

Sia, se è possibile, il circolo minore del triangolo PQR, e lo sia d'una quantità Z. Circoscritto ad esso un poligono regolare, il quale differisca dal cerchio d'una quantità minore della quantità data Z; questo poligono sarà pure minore del triangolo PQR, che differisce dal circolo della quantità Z, la qual cosa è assurda, perchè quel poligono è maggiore del triangolo PQR. Infatti il suo apotema OH è eguale all'altezza RS del triangolo PQR, ed il suo contorno è maggiore della circonferenza, e quindi anche della base PQ del triangolo medesimo. Non potendo adunque il circolo essere nè maggiore nè minore del triangolo PQR, sarà ad esso eguale.

438. *Corollario.* Da qui ne viene, che un settore di cerchio è eguale ad un triangolo, che ha per base l'arco di cerchio, su cui appoggia, e per altezza il raggio del cerchio medesimo.

439. *Scolio.* Il problema *della quadratura del cerchio* consiste in trovare un quadrato eguale ad un cerchio, di cui è noto il raggio. Ora si è provato, che un circolo è eguale ad un triangolo, che ha per base la circonferenza e per altezza il raggio, e questo triangolo si può convertire in un parallelogrammo (198), ed indi in un quadrato (354), quindi è che il problema della quadratura del circolo si riduce a trovare la circonferenza conoscendone il raggio o il diametro; ma siccome un tale rapporto non si ottiene che per approssimazione (434), così anche la quadratura del circolo non si può ottenere che approssimativamente.

Proposizione XX. Teorema.

440. *Il massimo triangolo ABD (fig. 157.), che possa formarsi con due rette AB, BD date, ed una terza AD, che congiunge le loro estremità, è quello che si forma quando le due rette date sono poste ad angolo retto.*

Si costruisca il triangolo rettangolo ABD, i di cui cateti sieno le rette date AB, BD, indi fatto centro in B con raggio BD, si descriva il semicircolo MDNM, e si conduca un raggio qualunque BD', e da D' una corda D'D'' parallela ad AB, finalmente si guidi il raggio BD''. Essendo le rette BD, BD', BD'' raggi di uno stesso semicerchio MDNM esse sono eguali, la retta data AB poi è comune a ciascuno dei triangoli ABD, ABD', ABD'', dunque ciascuno di essi è formato coi due lati dati.

Si conduca ora AF, i triangoli AFB, AD'B, AD''B sono tutti equivalenti, perchè essi hanno comune la base AB e sono compresi fra le medesime parallele AB, e D'D''; ma il triangolo ADB è maggiore di AFB; dunque esso sarà maggiore anche di ciascuno dei triangoli AD'B, AD''B.

Proposizione XXI. Teorema.

441. *Il massimo di tutti i poligoni formati con dei lati dati, fuori che l'ultimo, è quello, di cui tutti i suoi angoli restano inscritti in una mezza circonferenza, il di cui lato incognito è il diametro.*

Sia ABCDEFA (fig. 158.) il massimo dei poligoni formati coi lati dati AB, BC, CD, DE, EF, e l'ultimo AF indeterminato, che congiunge i punti A ed F: condotte le diagonali AD, DF, se l'angolo ADF non sarà retto, si potrà, conservando intatte le parti ABCDA, DEFD, aumentare il triangolo ADF, e per conseguenza il poligono intero, rendendo l'angolo ADF retto; ma questo poligono non può essere aumentato di più, poichè si suppone giunto al suo *massimo*, dunque l'angolo ADF è già retto. Lo stesso dicasi degli angoli ABF, ACF, AEF, dunque tutti gli angoli A, B, C, D, E, F del poligono *massimo* sono inscritti in una mezza circonferenza, di cui il lato indeterminato è il diametro.

Proposizione XXII. Teorema.

442. *Di tutti i poligoni ABCDEF, PQRSTO* (fig. 159.) *formati con dei lati dati, il massimo è quello, che può essere inscritto in un circolo.*

Si conduca il diametro AI, e si tirino le rette CI, DI, AE, EI, e sopra RS si costruisca il triangolo RMS = CID, e si conduca PM. L'angolo AEI è retto (359), dunque pel teorema precedente il poligono AFEDIA è maggiore del poligono POTSMP.

Si proverà del pari che ABCIA > PQRMP, dunque tutto il poligono ABCIDEF sarà maggiore di tutto il poligono PQRMSTO, e se da questi due poligoni si levano i triangoli eguali CID, RMS, rimarrà il poligono ABCDEF > PQRSTO.

443. *Corollario.* Il poligono regolare è il *massimo* di tutti i poligoni, che avendo lo stesso contorno sono composti d'un eguale numero di lati; poichè, secondo il teorema XXXIV. del 3. libro, il poligono massimo, fra quelli dello stesso contorno, e dello stesso numero di lati è l'equilatero, e secondo il teorema superiore è quello che è inscrivibile nel cerchio, dunque il regolare è il massimo.

Il triangolo equilatero è adunque il massimo di tutti i triangoli dello stesso perimetro.

LIBRO VI.

DEI PIANI E DEGLI ANGOLI POLIEDRI.

444. I. Il *piano*, come già si è detto (13), è una superficie nella quale presi dei punti a piacere, e congiunti mediante delle linee rette, queste rette giacciono in tutta la loro estensione nella superficie medesima. Si vede quindi che una linea retta non può essere parte in un piano, e parte fuori del piano stesso.

445. II. Una linea retta AB dicesi *perpendicolare* ad un piano MN (fig. 160.), quando essa è egualmente inclinata in ogni verso rispetto al piano stesso; onde la retta AB sarà perpendicolare a tutte le rette BC, BD, BE, ecc., che possono condursi nel piano MN dal punto B, nel quale essa incontra il piano medesimo. Il punto B chiamasi poi il *piede* della perpendicolare AB.

446. III. Il piano MN dicesi *perpendicolare* al piano PQ (fig. 161.), quando la sua inclinazione sul piano PQ è eguale in ogni verso.

447. IV. Ritengasi per ora, e si dimostrerà in seguito, che la *comune sezione* PM (fig. 162.) di due piani MN, PQ, che si incontrano è una linea retta.

448. V. *L'inclinazione* di una retta AB al piano PQ è misurata dall'angolo ABF, che la retta AB fa colla BF, che dal punto B va al piede della perpendicolare AF calata dal punto A sul piano PQ.

449. VI. *L'inclinazione* reciproca di due piani PQ, MN è misurata dall'angolo ABC, che fanno fra di loro due perpendicolari BA, BC alla comune intersezione PM condotte da un medesimo punto B nei rispettivi piani MN, PQ.

450. VII. Due piani sono fra di loro *egualmente inclinati*, come lo sono due altri, quando l'angolo, che misura l'inclinazione dei due primi è eguale all'angolo, che misura l'inclinazione degli altri due.

451. VIII. Una linea retta è *parallela* ad un piano, o due piani sono *paralleli fra di loro*, quando la linea non può giammai incontrare il piano, o quando i piani non possono incontrarsi a qualunque distanza si suppongano prolungati.

452. IX. Dicesi angolo *diedro o angolo a due facce* l'inclinazione reciproca di due piani, che si incontrano (*a*). Tale angolo si suole nominare con quattro lettere, delle quali le due di mezzo indicano la comune sezione dei piani o lo *spigolo* dell'angolo diedro. Così l'angolo diedro formato dall'incontro dei due piani MN, PQ (fig. 162.) si indicherà con NPMQ, o con QMPN.

453. X. *Angolo poliedro o angolo solido* è lo spazio angolare compreso fra più piani, che si riuniscono in un medesimo punto. Il più semplice di tutti gli angoli poliedri è quello formato dal concorso di tre angoli piani, oppure dal concorso degli spigoli dei tre angoli diedri. Tale angolo chiamasi angolo *triedro*. L'angolo B (fig. 163.) è un angolo solido triedro, perchè è formato dal concorso dei

(*a*) L'angolo diedro dalla comune degli Scrittori si suole nominare angolo piano; ma tale espressione non mi sembra troppo esatta, offrendo dessa l'idea di un angolo disegnato in un piano, e per conseguenza d'un angolo formato da due linee.

Sarebbe bene quindi, con alcuni moderni Scrittori, di chiamare angolo piano quello, che è formato da due linee (16), e dare il nome di angolo diedro a quello formato da due piani, massime essendo un tale nome derivante da due parole greche, una delle quali significa *due*, l'altra *faccia* o *base*.

tre angoli piani ABD, CBD, ABC; o dalla riunione di tre spigoli il primo dei quali è determinato dall'inclinazione del piano ABD sul piano CBD; il secondo dall'inclinazione del piano DBA col piano CBA, ed il terzo dalla reciproca inclinazione dei due piani ABC, DBC.

Proposizione I. Teorema.

454. *Due piani MN, PQ* (fig. 162.), *che si tagliano, si tagliano in modo, che la loro comune sezione PM è una linea retta.*

La intersezione PM deve essere necessariamente una linea, perchè i due piani MN, PQ non avendo grossezza alcuna la loro sezione non può non essere che una linea; di più essa deve essere anche una linea retta, mentre, se fra i due punti P, M, considerati come appartenenti al piano MN, si conduce nel piano medesimo una retta, e tra i medesimi punti, considerati come appartenenti al piano PQ, si conduce nel piano PQ pure una retta, quelle due linee si devono necessariamente confondere non potendosi fra due punti P, M condurre che una sola retta PM (10); dunque PM comune sezione dei piani MN, PQ, è una linea retta.

Proposizione II. Teorema.

455. *Due rette AB, CD* (fig. 164.), *che si segano in punto qualunque F, sono in un medesimo piano MN, e ne determinano la sua posizione.*

Poichè si può sempre immaginare, che il piano, in cui giace la retta AB, si faccia girare intorno alla AB finchè passi pel punto D, nel qual caso la linea CD avrà due de' suoi punti F, D in quel piano, e per conseguenza sarà in esso totalmente contenuta (444); dunque la posizione di un piano è determinata dalla condizione di passare per due rette AB, CD, che si tagliano in un punto qualunque F.

456. *Corollario* I. Condotta la retta DB; il triangolo DFB risultante, o i tre punti D, F, B non in linea retta sono in uno stesso piano MN, e ne determinano la sua posizione; dunque tre punti non in linea retta non possono essere comuni a due piani differenti; ma due piani, i quali avessero comuni tre punti non in linea retta, dovranno confondersi.

457. *Corollario* II. Anche due rette AB, CD (fig. 165.) parallele sono in uno stesso piano MN, e ne determinano la sua posizione, poichè condotta la retta FG, il piano delle due rette AB, FG è pure quello delle due rette CD, FG, e per conseguenza è anche quello delle due parallele AB, CD.

Proposizione III. Teorema.

458. *Una retta AP (fig. 166.) sarà perpendicolare al piano MN, qualora essa sia nello stesso tempo perpendicolare a due rette BP, CP poste nello stesso piano, che passano pel suo piede P, e che non sono nella medesima direzione.*

Per lo stesso punto P e nel medesimo piano MN si conduca un' altra retta qualunque PF, dico che AP sarà perpendicolare anche alla PF, e per conseguenza perpendicolare al piano MN (445).

Si prenda sulla PF un punto D a piacere; si faccia GD = PD, indi da G si conduca GB parallela a CP, si uniscano i punti B, D e si prolunghi BD sino in C; a motivo dell' eguaglianza dei triangoli BDG, CDP (96) sarà BD = CD: ciò fatto si guidino all' estremità A della perpendicolare AP

le rette BA, DA, CA. Poichè la base BC del triangolo BAC è divisa per metà in D, sarà (220) la somma dei quadrati dei lati AB, AC eguale al doppio quadrato della AD, più il doppio quadrato di BD, che è la metà della base, sarà cioè $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{BD}^2$. Per essere la base BC del triangolo BPC pure divisa per metà in D, si avrà (220) $\overline{BP}^2 + \overline{PC}^2 = 2\overline{PD}^2 + 2\overline{BD}^2$, e sottraendo quest' equazione dalla prima, membro per membro, si avrà $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{BP}^2 - \overline{PC}^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{BD}^2 - 2\overline{PD}^2 - 2\overline{BD}^2 = 2\overline{AD}^2 - 2\overline{PD}^2$. Ma per essere AP perpendicolare a PB, il triangolo rettangolo APB dà (209) $\overline{AP}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BP}^2$, e per la medesima ragione il triangolo rettangolo APC dà $\overline{AP}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{PC}^2$, onde sostituendo, si avrà $\overline{AP}^2 + \overline{AP}^2 = 2\overline{AD}^2 - 2\overline{PD}^2$, ossia $2\overline{AP}^2 = 2\overline{AD}^2 - 2\overline{PD}^2$, cioè $\overline{AP}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{PD}^2$; ed aggiungendo dall' una e dall' altra parte $\overline{PD}^2$, sarà finalmente $\overline{AD}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PD}^2$; dunque anche il triangolo APD sarà rettangolo in P (215), e quindi la AP perpendicolare anche alla PF, e per conseguenza perpendicolare al piano MN (445).

459. *Corollario* I. Da un punto P dato sopra un piano MN (fig. 167.) non si può innalzare sul piano medesimo che una sola perpendicolare PA, poichè se dallo stesso punto P del piano MN si potessero elevare due perpendicolari PA, PC al piano medesimo, la comune sezione del piano MN col piano DG, in cui giacciono le due perpendicolari supposte, sarebbe una retta FG (454), che pas-

serebbe pel punto P, e ne verrebbe per conseguenza, che da uno stesso punto preso sopra la retta FG si potrebbero innalzare nello stesso piano DG due rette PA, PC perpendicolari, ciò che è impossibile (103).

460. *Corollario* II. Da uno stesso punto A dato fuori del piano MN non si possono abbassare sullo stesso piano due perpendicolari; poichè, se AP, ed AH fossero ambedue perpendicolari al piano MN, il triangolo APH verrebbe ad avere due angoli retti la qual cosa è impossibile (161).

461. *Scolio*. Poichè la perpendicolare AP è l'unica, che dal punto A si possa abbassare sopra il piano MN, e poichè la perpendicolare è più corta di qualunque obliqua AB (fig. 166.), essa adunque servirà per misurare la vera distanza dal punto A al piano MN.

Proposizione IV. Teorema.

462. *Le oblique AD, AC, AB* (fig. 168.), *che egualmente si allontanano dalla perpendicolare AP sono eguali fra di loro, e di due oblique AB, AE disugualmente lontane dalla perpendicolare AP, è maggiore quella AE, che più si allontana dalla perpendicolare medesima.*

In fatti, essendo AP perpendicolare al piano MN, essa è perpendicolare a tutte le rette PD, PC, PB, ecc., che nel piano MN passano pel suo piede P (458), onde sono retti tutti gli angoli APD, APC, APB. I triangoli rettangoli APD, APC, APB, che hanno comune il lato AP, ed eguali i lati PD, PC, PB, per costruzione, sono eguali, e per conseguenza le ipotenuse o oblique AD, AC, AB sono eguali. Siccome poi, per supposizione è PE $>$ PB, e le rette AP, AB, AE sono tutte nel piano del

triangolo APE (456), così sarà anche (104) AE $>$ AB, e quindi maggiore anche di qualunque altra retta AD, AC, eguale ad AB.

463. *Corollario*. Essendo le rette PD, PC, PB, tutte fra di loro eguali, ne viene che, fatto centro in P con raggio PD, la circonferenza del cerchio DCBHKD così descritto passerà per tutti i punti D, C, B, ecc.; onde tutte le oblique eguali tirate da uno stesso punto A sopra un piano MN terminano tutte sulla circonferenza di uno stesso cerchio, il di cui centro è nel piede della perpendicolare.

464. *Scolio* I. L'angolo ADP chiamasi *angolo d' inclinazione* dell' obbliqua AD sul piano MN. Tale inclinazione è eguale per tutte le oblique AD, AC, AB, che egualmente si scostano dalla perpendicolare AP; poichè, avendo dimostrato l' eguaglianza di tutti i triangoli rettangoli APD, APC, APB (462), tutti gli angoli ADP, ACP, ABP riescono fra di loro eguali.

465. *Scolio* II. Questa proposizione ci somministra il mezzo di abbassare sopra di un piano MN da un punto A, dato fuori del piano medesimo, una perpendicolare AP. A tale oggetto sul piano MN si determinino tre punti D, C, B, egualmente lontani dal punto dato A, e per essi si faccia passare una circonferenza di cerchio, del quale si trovi il centro P (329), che si congiungerà col punto A. La congiungente AP sarà la perpendicolare richiesta; poichè, prolungato il raggio BP sino in K, ed il raggio DP sino in H, e condotte dal punto A le rette AK, AH, queste rette sono eguali (463). Ora la retta AP divide per metà la base KB del triangolo isoscele AKB, dunque è ad essa perpendicolare, ma è perpendicolare anche alla DH, perchè divide per metà la base DH del triangolo isoscele

DAH, dunque AP è perpendicolare alle due rette KB, DH, che passano pel suo piede P; dunque è perpendicolare al piano MN (458), in cui esse giacciono.

Proposizione V. Teorema.

466. *Se dal piede P* (fig. 169.) *di una retta AP perpendicolare al piano MN si abbassa la PE perpendicolare sulla retta DF situata nel piano medesimo, la retta AE condotta dal punto E al punto A, sarà perpendicolare alla DF.*

Si prenda ED = EF, e si conducano le rette PD, PF, AD, AF, i triangoli rettangoli PED, PEF sono eguali (93), onde PD = PF, e per conseguenza anche le due oblique AD, AF, che egualmente si allontanano dalla perpendicolare AP sono eguali; la retta AE ha dunque due de' suoi punti A, E equidistanti dal punto D e dal punto F, essa è adunque perpendicolare sulla metà della DF (109).

467. *Corollario.* Siccome poi la retta DF è perpendicolare alle due rette PE, AE, che giacciono nel piano APE, e cade nel loro punto d'intersezione E, così essa è perpendicolare al piano medesimo APE (458).

468. *Scolio.* Questa proposizione ci somministra un altro modo di condurre una perpendicolare AP da un punto A dato fuori del piano MN al piano medesimo. A tale oggetto nel piano MN si guidi una retta qualunque DF, e sopra di essa dal punto A si tiri AE perpendicolare, indi dal punto E nel piano MN si innalzi EP perpendicolare a DF, e dal punto A si abbassi la retta AP perpendicolare alla EP, sarà la retta AP perpendicolare al piano MN.

Proposizione VI. Teorema.

469. *Se la retta AB* (fig. 170.) *è perpendicolare a tre rette BC, BD, BF nel punto B di loro comune intersezione, queste tre rette sono tutte nel medesimo piano MN.*

Poichè se esse non fossero in uno stesso piano MN, e si supponesse che una BF fosse in un altro piano, il piano KB, che passa per le due rette AB, BF, segherebbe il piano MN nella retta BE, comune sezione dei piani KB ed MN, ed essendo AB perpendicolare alle rette BC, BD, per supposizione, e per conseguenza al loro piano MN (458), è perpendicolare anche alla comune sezione BE, di modo che l' angolo ABE è retto, ed eguale all' angolo ABF, che pure è retto per supposizione; onde nel piano KB sarebbe l' angolo ABF = ABE, cioè la parte eguale al tutto, ciò che è impossibile; dunque anche la retta BF è nel piano MN, in cui giacciono le rette BC, BD.

Proposizione VII. Teorema.

470. *Se due piani MN, EG,* (fig. 171.), *che si tagliano in LH sono ambidue perpendicolari al piano sottoposto PQ, la comune sezione LH di questi piani, sarà perpendicolare al piano medesimo PQ.*

Poichè la LH sarà perpendicolare alla comune sezione MI dei due piani PQ, MN, ed anche perpendicolare nello stesso tempo alla sezione comune AG dei piani PQ, EG, altrimenti se nel piano MN fosse la HF perpendicolare ad MI, e nel piano EG fosse la HK perpendicolare ad AG, le rette HF, HK giacendo rispettivamente nei piani MN, EG perpendicolari al piano PQ, sarebbero amendue perpendicolari al piano medesimo, nel quale giacciono le rette MI, AG e sarebbero elevate da uno stesso punto H, ciò che è impossibile (459), dunque la comune sezione LH dei piani MN, EG è perpendicolare al piano PQ.

Proposizione VIII. Teorema.

471. *L' angolo diedro NPMQ* (fig. 162.) *formato da due piani PQ, MN, che si incontrano in PM, ha la medesima misura dell' angolo rettilineo ABC formato da due perpendicolari AB, BC, condotte in questi piani dal medesimo punto B, preso a piacere nella comune loro sezione PM.*

Si supponga primieramente che il piano MN giaccia sopra il piano PQ in modo che le rette AB, BC, supposte eguali, non formino che una sola retta perpendicolare alla comune sezione PM nel punto B, si supponga dappoi che il piano PQ rimanga fermo, e che il piano MN si elevi sul piano PQ, aggirandosi sulla comune sezione PM, per formare l' angolo diedro NPMQ. È chiaro che con questo moto le rette AB, BC rimarranno costantemente in uno stesso piano ABC perpendicolare a PM, e che il punto A descriverà un arco di cerchio CDA, il quale indicherà la quantità, di cui il piano MN si è allontanato nella sua rotazione dal piano PQ, onde formare l' angolo diedro NPMQ, e misurerà per conseguenza l' angolo stesso. Ma il medesimo arco CDA è la misura anche dell' angolo rettilineo ABC; dunque l' angolo diedro NPMQ ha la medesima misura dell' angolo rettilineo ABC formato dalle due rette AB, BC condotte nei due piani da un medesimo punto B della loro comune intersezione PM e ad essa perpendicolari.

472. *Corollario.* Ne segue da ciò, che negli angoli diedri avranno luogo tutte le proprietà, che si sono dimostrate per gli angoli rettilinei.

Proposizione IX. Teorema.

473. *La inclinazione di una retta AB* (fig. 162.) *rispetto ad un piano PQ si determina dall' angolo che essa fa colla retta, che congiunge il punto in cui la retta data o il suo prolungamento incontra il piano, col piede della perpendicolare calata da un punto qualunque dell' obliqua AB sul piano medesimo PQ.*

In fatti se da un punto qualunque A della retta AB si abbasserà la perpendicolare AF sul piano PQ (465, 468), e si condurrà la FB, l' angolo ABF determinerà l' inclinazione della retta AB rispetto al piano PQ, poichè da uno stesso punto A preso fuori di un piano PQ, non potendosi abbassare che una sola perpendicolare AF sul piano stesso (460), è chiaro che la retta AF, e quindi l' angolo ABF, essendo unico per la retta AB, sarà quello, che farà distinguere la retta medesima da qualunque altra, che non avrà la medesima posizione riguardo al piano PQ, quello cioè, che misurerà la sua inclinazione.

Proposizione X. Teorema.

474. *Se la retta AB* (fig. 172.) *è perpendicolare al piano MN, qualunque retta DC ad essa parallela sarà perpendicolare al piano medesimo.*

Per le rette AB, DC parallele si faccia passare il piano PQ, la di cui intersezione col piano MN sia PG; e nel piano MN si conduca EF perpendicolare a CP, o a BC, condotta la AC, la retta EF sarà perpendicolare anche alla AC (466), e per conseguenza sarà perpendicolare al piano PQ delle parallele, dunque l'angolo DCE sarà retto, ma è pure retto anche l'angolo DCB, perchè BC è perpendicolare ad AB, e per conseguenza anche alla sua parallela DC; dunque la retta DC è perpendicolare alle due rette BC, CE nel punto C di loro intersezione, dunque essa è perpendicolare al piano MN, nel quale queste rette giacciono (458).

475. *Corollario.* Se le rette AB, DC sono perpendicolari ambedue allo stesso piano MN saranno fra di loro parallele; poichè se DC non fosse parallela ad AB, dal punto C condotta CK parallela ad AB, la CK sarebbe perpendicolare al piano MN (474), e ne verrebbe quindi, che da uno stesso punto C si potrebbero elevare due perpendicolari CD, CK al medesimo piano, ciò che è impossibile (459).

476. *Scolio.* Questa proposizione ci insegna la maniera di innalzare da un dato punto C sopra un piano MN una perpendicolare CD al piano medesimo; poichè da un punto A qualunque abbassata la perpendicolare AB al piano stesso, e congiunto il suo piede B col punto dato C, la retta CD, condotta dal punto C parallelamente alla AB nel piano PQ, che passa per le rette AB, BC sarà la perpendicolare richiesta.

Proposizione XI. Teorema.

477. *Se la retta AB* (fig. 172.) *è perpendicolare al piano MN, qualunque piano PQ, che passa per questa retta, è perpendicolare al medesimo piano MN.*

Sia GP la comune sezione di questi piani; da qualunque punto C della medesima si conduca la retta CD parallela ad AB nel piano PQ, la CD sarà anch'essa perpendicolare al piano MN (474); dunque il piano PQ sarà perpendicolare al piano MN (457).

Proposizione XII. Teorema.

478. *Due rette AB, CD* (fig. 173.) *parallele ad una terza EF fuori del loro piano, sono parallele fra di loro.*

Da un punto qualunque G preso sopra la EF, nel piano delle rette parallele AB, EF, si conduca GH perpendicolare ad EF, la quale sarà perpendicolare anche ad AB (131), e dallo stesso punto G nel piano delle parallele EF, CD, si tiri GI perpendicolare ad EF, che sarà anche perpendicolare a CD. Ora poichè la FE è per costruzione perpendicolare a ciascuna delle due rette GH, GI, essa sarà perpendicolare anche al loro piano HGI (458), a cui sarà perpendicolare anche ciascuna delle sue parallele AB, CD (474). Le rette AB, CD essendo ambedue perpendicolari allo stesso piano HGI sono parallele fra di loro (475).

Proposizione XIII. Teorema.

479. *Se la retta AB* (fig. 174.) *è perpendicolare a due piani MN, PQ, questi piani sono paralleli.*

Poichè, supponiamo che essi non siano paralleli, ma che prolungati si incontrino nella retta PM, preso un punto qualunque C in questa retta, e condotte nei piani rispettivi le rette CA, CB, ne risulterebbe un triangolo CAB, il quale avrebbe i due angoli CAB, CBA retti, ciò che è impossibile; dunque i due piani MN, PQ sono paralleli.

Proposizione XIV. Teorema.

480. *Se la retta AB* (fig. 175.) *è parallela alla retta CG condotta nel piano PQ, essa sarà parallela al piano medesimo.*

Poichè se la AB, che è nel piano AG incontrasse il piano PQ essa non potrebbe incontrarlo che in qualche punto della CG comune sezione dei due piani AG, PQ; ma la retta AB non può incontrare la CG, perchè ad essa è parallela, dunque non incontrerà nemmeno il piano PQ; dunque la AB sarà parallela al piano PQ.

Proposizione XV. Teorema.

481. *Se due piani MN, PQ* (fig. 175.) *paralleli vengono incontrati da un altro piano AG, le intersezioni AB, CG sono parallele.*

Poichè, se non fossero parallele le rette AB, CG, prolungate converrebbero in qualche punto, e per conseguenza converrebbero anche i piani MN, PQ, nei quali esse giacciono, ma tali piani non possono convenire, perchè sono paralleli, dunque non converranno neanche le rette AB, CG; dunque saranno parallele.

Proposizione XVI. Teorema.

482. *La retta AC* (fig. 175.) *perpendicolare al piano MN è perpendicolare anche al piano PQ parallelo ad MN.*

Poichè condotta qualunque retta CG nel piano PQ, e per AC, CG condotto il piano AG, la di cui intersezione col piano MN sia AB, sarà AB parallela alla CG (481); ma la retta AC, perpendicolare al piano MN, è perpendicolare anche alla AB, dunque essa sarà perpendicolare altresì alla sua parallela CG (131), e siccome la retta AC è perpendicolare a qualunque retta CG condotta pel suo piede C nel piano PQ, ne segue che essa è perpendicolare al piano PQ.

Proposizione XVII. Teorema.

483. *Le parallele AC, BG* (fig. 175.) *intercette fra due piani paralleli MN, PQ sono eguali.*

Si faccia passare per le parallele AC, BG il piano AG, e le comuni intersezioni AB, CG dei piani MN, PQ con questo piano saranno parallele (481), ma sono parallele anche le rette AC, BG, per supposizione, dunque ABGC è un parallelogrammo, dunque $AC = BG$.

484. *Corollario.* Se le rette AC, BG saranno perpendicolari ai due piani MN, PQ, saranno fra di loro parallele ed eguali, dunque *la distanza di due piani paralleli è da per tutto eguale.*

Proposizione XVIII. Teorema.

485. *Se due angoli ABC, DEF* (fig. 176.), *non situati nello stesso piano, hanno i lati rispettivamente paralleli, e diretti nel medesimo verso, essi sono eguali, ed i loro piani sono paralleli.*

1.° Poichè presa $AB = DE$; $BC = EF$, e condotte le rette AD, BE, CF, AC, DF; essendo AB eguale e parallela alla DE, il quadrilatero ABED è un parallelogrammo (184); dunque AD è eguale e parallela alla BE; per una simile ragione CF è eguale e parallela alla stessa BE; dunque le rette AD, CF sono eguali e parallele, dunque anche ACFD è un parallelogrammo, e quindi $AC = DF$, dunque i triangoli ABC, DEF, che hanno tutti i lati rispettivamente eguali sono eguali, dunque anche l'angolo $ABC = DEF$.

2.° Se il piano MN dell'angolo ABC non sarà parallelo al piano PQ dell'angolo DEF, si supponga che il piano parallelo a PQ, condotto pel punto A incontri le linee EB, FC in punti diversi da B e da C, per esempio nei punti G, ed H, in tal caso le rette AD, GE, HF saranno eguali (483); ma AD, come abbiamo dimostrato è eguale a BE ed anche a CF; dunque sarebbe BE = GE; CF = HF, ciò che è impossibile, dunque il piano MN dell'angolo ABC è parallelo al piano PQ dell'angolo DEF.

486. *Corollario.* Se i piani paralleli PQ, MN sono incontrati da altri due piani ABED, ACFD tra di loro concorrenti, gli angoli BAC, EDF formati dalle loro intersezioni coi piani paralleli sono eguali, perchè l'intersezione AB è parallela all'intersezione DE, e l'intersezione AC è parallela all'intersezione DF; dunque l'angolo BAC = EDF.

Proposizione XIX. Teorema.

487. *I triangoli ABC, DEF* (fig. 176.) *situati in piani diversi, e formati dalla congiunzione degli estremi delle tre rette AD, BE, CF parallele ed eguali, sono eguali, ed i piani di questi triangoli sono paralleli.*

Di fatto, essendo AD eguale e parallela a BE, il quadrilatero ABED è un parallelogrammo, e quindi AB è eguale e parallela a DE; per una simile ragione i lati BC ed EF sono eguali e paralleli, come lo sono fra di loro anche i lati AC, DF; onde i triangoli ABC, DEF, sono eguali. I piani di quei triangoli si dimostrano paralleli, collo stesso ragionamento tenuto nella precedente proposizione.

Proposizione XX. Teorema.

488. *Le parti di due rette AB, CD* (fig. 177.) *comprese dai piani paralleli PQ, MN, RS sono proporzionali: di modo che starà AE : EB :: CF : FD.*

Poichè, condotta la AD, per essere il piano MN parallelo ad RS, le comuni sezioni EF, BD sono due rette parallele (481), e per conseguenza la EO sega i lati del triangolo ABD in parti proporzionali, per cui si ha AE : EB :: AO : OD; per essere il piano MN parallelo a PQ, i lati del triangolo DAC sono dalla FO segati proporzionalmente, onde CF : FD :: AO : OD, ed a motivo del rapporto comune AO : OD, si ha AE : EB :: CF : FD.

Proposizione XXI. Teorema.

489. *La somma ASC + BSC di due angoli piani qualunque* (fig. 178.), *che compongono un angolo triedro S è sempre maggiore del terzo angolo ASB.*

Nel caso che tutti e tre gli angoli piani, che compongono l'angolo triedro fossero fra di loro eguali, è manifesto, che la somma di quei due angoli supera il terzo. Se poi uno di essi come ASB è maggiore di ciascuno degli altri due, sarà sempre ASB < ASC + BSC.

Poichè condotta la SD di modo che l'angolo BSD sia eguale all'angolo BSC, e presa SD = SC, per due punti B e D si conduca la BD protratta sino in A, e si guidino le rette AC, BC. I triangoli BSC, BSD sono perfettamente eguali, avendo di comune il lato SB, il lato SC = SD, e l'angolo BSC = BSD, per costruzione, onde anche BC = BD. Ora nel triangolo ABC si ha AB < AC + BC, ossia AD + BD < AC + BC, e levando le quantità BD, BC eguali rimarrà AD < AC. I due triangoli ASC, ASD hanno il lato AS comune, ed i lati SC, SD eguali, e la base AD del triangolo ASD minore della base AC del triangolo ASC, dunque anche l'angolo ASD < ASC. Aggiungendo BSD = BSC, sarà ASD + BSD < ASC + BSC, ossia ASB < ASC + BSC.

Proposizione XXII. Teorema.

490. *La somma $ASB + ASE + BSC + ESD + DSC$ (fig. 179.) degli angoli piani, che concorrono a formare un angolo poliedro S è sempre minore di quattro angoli retti.*

Si seghino con un piano qualunque ABCDE i piani concorrenti a formar l' angolo solido S, e da un punto qualunque O preso dentro questo piano a ciascun angolo si conducano rispettivamente le rette OB, OA, OE, OD, OC. La somma di tutti gli angoli dei triangoli ASB, ASE, BSC, ecc., i quali hanno il vertice nel punto comune S, è eguale alla somma di tutti gli angoli dei triangoli AOB, AOE, EOD, ecc., che hanno il vertice rispettivamente nel punto O, essendo il numero di questi triangoli eguale al numero di quelli che vanno al punto S. Ora la somma dei due angoli SAB, SAE, che unitamente all' angolo BAE formano l' angolo triedro A è maggiore dell' angolo BAE (489), così la somma $SEA + SED > AED$, ecc., dunque anche la somma degli angoli sopra le rispettive basi di tutti i triangoli SAB, SAE, ecc., che vanno al punto S, è maggiore della somma degli angoli sopra le rispettive basi di tutti i triangoli AOB, AOE, ecc., che vanno al punto O, dunque è duopo che la somma di tutti gli angoli formati intorno al punto S sia minore della somma di tutti gli angoli formati intorno al punto O; ma la somma degli angoli formati intorno al punto O è sempre eguale a quattro angoli retti (117), la somma quindi di tutti gli angoli formati intorno al punto S, la somma cioè di tutti gli angoli piani $ASB + ASE + BSC + ESD + DSC$, che compongono l' angolo solido S, è minore di quattro angoli retti.

491. *Scolio.* In questa dimostrazione si è supposto che l' angolo solido S sia *convesso*, o *a spigoli saglienti*, tale cioè che il piano d' una faccia prolungato non possa mai tagliare l' angolo solido; se fosse altrimenti la somma degli angoli piani non avrebbe alcun limite, e potrebbe essere di una grandezza qualunque.

Proposizione XXIII. Teorema.

492. *Se due angoli triedri S, s (fig. 180.) sono formati da tre angoli piani rispettivamente eguali, e disposti nel medesimo ordine, essi sono eguali e sovrapponibili.*

Dal punto A preso ad arbitrio sul lato SA, si conducano le rette AB, AC rispettivamente perpendicolari alle rette SB, SC, e dal punto stesso A sul piano BSC si conduca la perpendicolare AP, ed il piede P di questa perpendicolare si congiunga coi punti B, C, si prenda indi $sa = SA$; e si faccia la stessa costruzione per l' angolo *s*, che abbiamo fatto per l' angolo S. I triangoli SBA, *sba* rettangoli sono eguali; per avere $SA = sa$, e gli angoli BSA; *bsa* eguali per supposizione. Sono pure eguali anche i triangoli rettangoli SCA, *sca*, onde $SB = sb$; $SC = sc$; $AB = ab$, $AC = ac$; in oltre gli angoli SBP, *sbp* sono retti; ciò posto sono eguali i due quadrilateri SBPC, *sbpc*; poichè, ponendo l' angolo BSC sull' angolo *bsc* ad esso eguale, a cagione di $SB = sb$, e di $SC = sc$, il punto B cadrà in *b*, ed il punto C in *c*; nello stesso tempo BP perpendicolare ad SB, cadrà sopra *bp* perpendicolare ad *sb*, e parimente PC sopra *pc*; dunque il punto P cadrà nel punto *p*, e si avrà $BP = bp$; ma i triangoli BPA, *bpa* rettangoli in P, *p* sono eguali avendo le ipotenuse AB, *ab* eguali, ed i cateti BP, *bp* pure eguali; dunque l' angolo $ABP = abp$; ma l' angolo ABP misura l' inclinazione dei piani BSA, BSC, parimente l' angolo *abp* misura l' inclinazione dei piani *bsa*, *bsc*, dunque queste due inclinazioni sono eguali; dunque i due angoli triedri sono eguali e sovrapponibili.

493. *Scolio.* Questa coincidenza ha luogo nel solo caso, in cui gli angoli piani sono disposti nella medesima maniera nei due angoli solidi, poichè se gli angoli piani eguali fossero

disposti in un ordine inverso, o ciò che è lo stesso, se le perpendicolari AP, *ap* in vece di essere dirette nello stesso verso per rapporto ai piani BSC, *bsc* fossero dirette in verso contrario, allora sarebbe impossibile di far coincidere i due angoli solidi l'uno coll'altro. Conformemente al teorema dimostrato, i piani nei quali sono gli angoli eguali, sarebbero nulla di meno egualmente fra di loro inclinati; di modo che i due angoli solidi sarebbero eguali in tutte le loro parti costituenti, quantunque non sovrapponibili. Una tale specie di eguaglianza, che non è assoluta, o di sovrapposizione, è stata dal celebre Sig. Legendre detta *eguaglianza per simmetria*. Così i due angoli solidi S, *s* supponendoli formati da tre angoli rispettivamente eguali, ma disposti in un ordine inverso, si nominerebbero angoli *eguali per simmetria*, o solamente angoli *simmetrici*.

LIBRO VII.

DEI POLIEDRI.

Definizioni.

494. I. Il *poliedro* è uno spazio rinchiuso da ogni parte da piani, oppure un solido o *volume* terminato da superficie o *facce* tutte piane.

I poliedri prendono delle denominazioni particolari tanto per riguardo al numero, quanto per rispetto alla forma e disposizione delle facce, dalle quali sono terminati.

495. II. Onde rinchiudere definitivamente uno spazio vi vogliono almeno quattro piani, ed il solido che ne risulta prende il nome di *tetraedro*; tale è SABC (fig. 181.).

Dicesi *pentaedro* il poliedro rinchiuso da cinque facce, *esaedro* quello contenuto da sei facce, *eptaedro* quello da sette facce, *ottaedro* quello da otto, *decaedro* quello da dieci, *dodecaedro* quello da dodici, *icosaedro* quello contenuto da venti facce, ecc.

496. III. Chiamasi *spigolo*, *lato*, o *costa* di un poliedro l'intersezione di due piani contigui del poliedro stesso. L'intersezione SA (fig. 181.) dei due piani SCA, SBA è uno spigolo o lato del tetraedro SABC.

497. IV. Due poliedri sono *eguali* quando sono contenuti da un numero eguale di piani rispettivamente eguali, e disposti col medesimo ordine.

498. V. Due poliedri sono *simili*, quando essi sono contenuti da un numero eguale di piani rispettivamente simili, e similmente disposti *(a)*.

499. VI. Il *poliedro regolare* è quello, di cui tutte le facce sono poligoni regolari eguali, ed i di cui angoli solidi sono tutti eguali.

500. VII. Chiamasi *piramide* ogni poliedro SABCDE (fig. 182.) contenuto da un poligono qualunque ABCDE, e da tanti triangoli quanti sono i lati del poligono aventi tutti il vertice in uno stesso punto S. Il tetraedro SABC (fig. 181.) è adunque una piramide.

501. VIII. Il punto S dicesi il *vertice* della piramide, ed il poligono ABCDE ne è la *base*. L'*altezza* di una piramide è la perpendicolare SG abbassata dal suo vertice S sul piano, su cui appoggia.

502. IX. La piramide dicesi poi *triangolare*, *quadrangolare*, *pentagona*, ecc., secondo che la sua base è un triangolo, un quadrilatero, un pentagono, ecc.

503. X. Il complesso dei triangoli laterali SAB, SAE, SED, SDC, SBC costituisce la superficie *laterale* o *convessa* della piramide.

504. XI. Dicesi *retta* una piramide *(b)*, quando essa ha per base un poligono regolare, e che

(a) Le definizioni IV., e V sono quelle, che Euclide ha date nell' XI. Libro de' suoi Elementi.

Sulla legittimità delle medesime vi sono state diverse quistioni, ed è stata finalmente a tutto rigore dimostrata dall' Illustre Geometra Francese Sig. *Cauchy* in una sua memoria presentata all' Istituto di Francia pochi anni sono. Vedasi a tale uopo la nota XII. posta nell' undecima edizione degli elementi del celebre Sig. Legendre a pag. 322.

(b) Dalla massima parte degli Scrittori di Geometria a tale piramide si dà il nome di piramide *regolare*; ma questa definizione sembrami impropria

nello stesso tempo la perpendicolare SG calata dal suo vertice S sul piano della base cade nel centro del poligono stesso. L' altezza SG in questo caso prende il nome di *asse*. La perpendicolare SK, che dal vertice S va sopra un lato qualunque AE della base della piramide retta dicesi *apotema* della piramide stessa. Qualunque altra piramide è *obliqua*. Quella fra le piramidi rette, che ha tutti i suoi spigoli eguali, dicesi *piramide equilatera*.

È chiaro che tutti i triangoli SAE, SAB, ecc. laterali della piramide retta sono fra di loro eguali ed isosceli; poichè hanno le basi eguali, ed i lati SA, SE, SB, ecc. eguali, per essere tutte rette oblique, che egualmente si allontanano dalla perpendicolare SG (462). È del pari chiaro che tutti gli apotemi appartenenti alla medesima piramide retta sono eguali, essendo essi le altezze appartenenti a dei triangoli eguali ed isosceli.

505. XII. Il *prisma* è un poliedro ABCDEFGHNM (fig. 183.) compreso da più facce parallelogrammiche terminate da una parte e dall' altra da due poligoni ABCDE, FGHNM eguali e paralleli.

506. XIII. I poligoni ABCDE, FGHNM si chiamano le *basi* del prisma, ed il complesso dei parallelogrammi laterali ABGF, BCHG, ecc. si dice la *superficie laterale* o *convessa* del prisma medesimo.

507. XIV. L' *altezza* del prisma è la distanza delle sue basi, essa si misura dalla perpendicolare LG calata da un punto qualunque L della base superiore sul piano della base inferiore.

ed in opposizione diretta a quella (499), che si dà dei poliedri regolari, essa non potrebbe convenire, rigorosamente parlando, che al solo tetraedro contenuto da quattro triangoli equilateri ed eguali.

508. XV. Il *prisma è retto*, quando i suoi spigoli AF, GB, ecc. sono perpendicolari ai piani delle sue basi, in tal caso ciascuno de' suoi spigoli è eguale all' altezza del prisma (507). In qualunque altro caso il prisma dicesi *obliquo*, ed i suoi spigoli sono sempre maggiori della sua altezza.

509. XVI. Anche il prisma, come la piramide è *triangolare*, *quadrangolare*, *pentagono*, ecc., secondo che la sua base è un triangolo, un quadrilatero, un pentagono, ecc.

510. XVII. Fra i prismi si distingue il *parallelepipedo*, che è quello che ha per base un parallelogrammo, e che per conseguenza è terminato da sei facce tutte parallelogrammiche. ABCDGEFH (fig. 184.) è un parallelepipedo.

511. XVIII. Il *parallelepipedo rettangolo* è quello, che è contenuto da sei facce tutte rettangolari.

512. XIX. Dicesi *esaedro regolare* o *cubo* il parallelepipedo contenuto da sei quadrati eguali.

513. XX. La *diagonale di un poliedro* è la retta FC (fig. 183.), che congiunge i vertici di due angoli solidi F, C non adiacenti.

514. XXI. Se una piramide qualunque SABCD (fig. 185.) viene tagliata da un piano qualunque EHOF, la porzione ABCDFEHO chiamasi *tronco di piramide* o *piramide troncata*. Se poi il piano EHOF che sega la piramide SABCD, sarà parallelo alle base ABCD, il solido ABCDFEHO, che ne risulta, dicesi *tronco di piramide a basi parallele*. Lo stesso dicasi d' un prisma segato da un piano qualunque.

Proposizione I. Teorema.

515. *Di poliedri regolari non ve ne sono che cinque.*

Poichè, per la costruzione di un angolo solido non si possono impiegare meno di tre angoli piani (453), e la somma di tutti gli angoli piani, qualunque sia il numero dei medesimi, che concorre a formare un angolo solido deve essere minore di quattro angoli retti (490), ne viene che con tre angoli di un esagono regolare, o di un poligono regolare d' un numero di lati maggiore di cinque, non si potrà mai formare un angolo solido, essendo la somma di tre angoli di ciascuno di quei poligoni maggiore e non minore di quattro angoli retti: onde con soli triangoli equilateri, quadrati, e pentagoni si potranno formare dei poliedri regolari.

Se per formare un angolo solido si impiegheranno tre angoli di triangoli equilateri il solido risultante sarà un *tetraedro regolare*. Se se ne impiegheranno quattro, si avrà l' *ottaedro regolare*, se cinque, l' *icosaedro regolare*. Siccome poi la somma di sei angoli di triangoli equilateri non è minore di quattro angoli retti, così con sei, o più angoli piani appartenenti a triangoli equilateri non si può costruire un angolo solido.

Per formare un angolo solido, non si potranno impiegare che tre angoli di quadrati, ed il poliedro così risultante sarà l' *esaedro regolare*. Un angolo solido non potrà del pari formarsi con più di tre angoli di pentagoni regolari, ed il poliedro risultante sarà il *dodecaedro regolare*.

Proposizione II. Teorema.

516. *In qualunque parallelepipedo ABCDGEFH (fig. 184.) le facce opposte sono eguali e parallele.*

Il parallelogrammo ABCD è eguale e parallelo ad EGHF in virtù della definizione XII. (505). Per essere ABCD un parallelogrammo, si ha AD eguale e parallela a BC, così pure essendo ABFE un parallelogrammo (184) si ha AE eguale e parallela a BF; dunque l' angolo DAE = CBF, poichè questi angoli sono contenuti da linee rispettivamente parallele, dunque anche il piano DAE è parallelo al piano CBF, e in oltre il parallelogrammo DAEG = CBFH. Simile ragionamento servirebbe a dimostrare che il parallelogrammo ABFE è eguale e parallelo a DCHG.

517. *Scolio* I. Siccome il parallelepipedo è contenuto da sei facce, di cui le opposte sono eguali e parallele; così ciascuna faccia del parallelepipedo potrà prendersi per base.

518. *Scolio* II. Per costruire un parallelepipedo sopra tre rette date, che si riuniscono in un medesimo punto ad angoli dati, dall' estremità di ciascuna retta si faccia passare un piano parallelo al piano, che passa per le altre due; questi piani coi rispettivi loro incontri determineranno il parallelepipedo richiesto.

Proposizione III. Teorema.

519. *Il piano BDGF* (fig. 184), *che passa per le diagonali FG, BD di due parallelogrammi qualunque EFHG, ABCD opposti in un parallelepipedo ABCDGHFE, sega il parallelepipedo stesso, in due prismi triangolari BDCHGF, ABDGFE eguali.*

La sezione o faccia comune BDGF, è un parallelogrammo, giacchè sono fra di loro parallele le rette FG, BD, siccome giacenti nei piani ABCD, EGHF paralleli, come lo sono fra di loro le rette GD, FB giacendo esse nei piani paralleli ABFE, DCHG (481). I triangoli BDC, FGH sono eguali e paralleli, avendo i loro lati rispettivamente eguali

le faccie laterali BDGF, BCHF, DCHG sono parallelogrammi, onde il solido BDCHFG è un prisma triangolare; dicasi lo stesso rispetto al solido ABDGFE. Ma i triangoli BCD, ABD sono eguali, essendo ciascuno la metà del parallelogrammo ABCD; il triangolo FGH = EFG per una simile ragione; il parallelogrammo DCHG = ABFE, siccome facce opposte nel parallelepipedo proposto, il parallelogrammo BCHF = ADGE per la stessa ragione, la faccia BDGF è comune ad ambidue i prismi triangolari BDCHFG, ABDGFE, dunque questi due prismi essendo contenuti da un numero eguale di facce rispettivamente eguali e disposte nello stesso ordine sono eguali (497).

520. *Corollario.* Dunque il prisma triangolare BDCHFG è la metà di un parallelepipedo ABCDGHFE che ha la medesima altezza, e la di cui base ABCD è doppia della base BDC del prisma medesimo.

Proposizione IV. Teorema.

521. *In un prisma qualunque ABCDENFGHL* (fig. 186.) *le sezioni PQRSV, XYZKT fatte da piani paralleli sono eguali.*

Poichè i lati PV, XT sono paralleli, essendo sezioni dei due piani paralleli PQRSV, XYZKT, col piano XTVP; per essere AF, EN parallele, siccome opposte nel parallelogrammo AENF, anche le parti PX, VT sono parallele, onde PVTX è un parallelogrammo, per cui PV = XT; nello stesso modo si dimostra, che gli altri lati VS, SR, RQ, QP, del poligono PQRSV sono rispettivamente eguali e paralleli ai lati TK, KZ, ZY, YX del poligono XYZKT. Per essere poi i lati del primo poligono rispettivamente paralleli a quelli del secondo, ne viene che anche gli angoli PVS, VSR, ecc. del primo poligono sono rispettivamente eguali a quelli XTK, TKZ. ecc. del secondo poligono, onde il poligono PQRSV è eguale ad XYZKT.

522. *Corollario.* Se tali sezioni saranno parallele alla base, esse saranno eguali alla base medesima.

Proposizione V. Teorema.

523. *Due parallelepipedi BCHGFADE, BCHGKMNO* (fig. 187.), *che hanno la medesima base BCHG, e che sono contenuti tra i medesimi piani paralleli BH, AM, e che fra le stesse linee parallele AN, FM hanno le loro basi superiori ADEF, ONMK, sono equivalenti.*

Possono accadere tre casi, secondo che FK è maggiore, eguale, o minore di FE, ma la dimostrazione è sempre la stessa in ogni caso.

Essendo GH ed FE lati opposti nel parallelogrammo GHEF, sono eguali, per una simile ragione è GH = KM; dunque FE = KM, ed aggiunto di comune la retta EK, sarà anche FK = EM. Le rette FG, EH sono eguali, perchè lati opposti nel parallelogrammo FEHG; GK = HM per una simile ragione; dunque i triangoli FGK, EHM sono eguali (98). Collo stesso ragionamento si dimostra che è anche il triangolo ABO = DCN. I parallelogrammi ABGF, DCHE sono eguali perchè facce opposte nel parallelepipedo FC (a).

I parallelogrammi BOKG, CNMH sono pure

(a) Per risparmio di scrittura alle volte nomineremo i solidi con sole due lettere poste agli angoli solidi opposti, ponendovi avanti il nome particolare del solido, oppure scrivendo invece di parallelepipedo l'abbreviazione sua *paral.*, in luogo di prisma *pris.*, invece di piramide *pir.*, ed in luogo di poliedro *pol.*

eguali, perchè opposti nel parallelepipedo GN. I parallelogrammi finalmente AOKF, DNME sono eguali, poichè formati sopra basi FK, EM eguali, e contenuti dalle stesse parallele AN, FM; dunque i due prismi triangolari ABOKFG, DCNMEH, essendo contenuti da cinque facce rispettivamente eguali e disposte nel medesimo ordine, sono eguali (497). Ora se da tutto il solido FN, si leva il prisma triangolare DCNMEH: rimane il parallelepipedo FC, e se dal medesimo solido FN si leva il prisma triangolare ABOKFG, rimane il parallelepipedo GN; dunque i due parallelepipedi FC, GN sono equivalenti.

Proposizione VI. Teorema.

524. *Due parallelepipedi BCHGFADE, BCHGKMNO* (fig. 188.), *che hanno comune la base BCHG, e che sono contenuti sotto i medesimi piani paralleli BH, AM, quantunque le basi superiori ADEF, ONMK non sieno comprese fra le medesime linee parallele AS, FP, sono nulladimeno equivalenti.*

Poichè, sopra la base comune BCHG, si innalzi il parallelepipedo BCHGQPSR, che sia contenuto sotto i medesimi piani paralleli BH, AM, e che abbia la base superiore fra le medesime linee parallele KR, MS che contengono anche la base KMNO del parallelepipedo BCHGKMNO, questi due parallelepipedi saranno equivalenti (523); ma il parallelepipedo BCHGQPSR è equivalente anche al parallelepipedo BCHGFADE; dunque i due parallelepipedi BCHGFADE, BCHGKMNO sono equivalenti.

525. *Corollario* I. Se sopra la base ONMK, e fra i medesimi piani paralleli BH, AM si costruisse un altro parallelepipedo, esso sarebbe equivalente

al parallelepipedo BCHGKMNO, e per conseguenza anche equivalente a ciascuno degli altri BCHGFADE, BCHGQPSR; onde i parallelepipedi, che hanno basi eguali, e sono compresi fra i medesimi piani paralleli, sono equivalenti.

526. *Corollario* II. Due parallelepipedi, che hanno basi eguali, ed altezze eguali sono equivalenti, mentre possono sempre disporsi fra i medesimi piani paralleli, i quali da per tutto sono egualmente distanti (484).

527. *Corollario* III. Dunque un parallelepipedo qualunque può essere trasformato in un parallelepipedo rettangolo avente la medesima altezza ed una base equivalente.

528. *Scolio*. Siccome qualunque prisma triangolare è la metà di un parallelepipedo della medesima altezza e di base doppia (520), così tutto quello che si è dimostrato nelle due precedenti proposizioni è applicabile non solo ai prismi triangolari, ma anche ai prismi di base poligona, atteso che tali prismi sono divisibili in tanti prismi triangolari della medesima altezza, quanti triangoli sono contenuti nelle rispettive basi dei prismi stessi.

Proposizione VII. Teorema.

529. *Due parallelepipedi ABCDEFGH, FGHEMNOL* (fig. 189.), *che hanno la medesima altezza stanno fra di loro come le basi BCHG, GHLO.*

Onde dimostrare questo teorema, supponiamo che i due parallelepipedi proposti abbiano le loro basi adiacenti comprese fra le medesime parallele BO, CL; avendo essi la medesima altezza saranno anche contenuti sotto i medesimi piani paralleli BL, AM.

Supponiamo primieramente, che le loro basi

BCHG, GHLO sieno commensurabili, e che sia, per esempio, il parallelogrammo BCPQ, l'unità di misura superficiale, che si adatti esattamente a ciascuna delle due basi medesime, e che nella base BCHG vi stia un numero m di volte, e nella base GHLO, vi sia contenuto un numero n di volte, in tal caso si avrà la proporzione BCHG : GHLO : : $m : n$. Per ciascuna delle divisioni PQ, cb, ecc. si faccia passare un piano PQSR, $bcad$, ecc. parallelo alla faccia ABCD; così il parallelepipedo AH rimarrà diviso in un numero m di parallelepipedi AP, Sb, ecc. tutti fra di loro equivalenti (526), essendo m appunto il numero delle basi. Con una simile costruzione il parallelepipedo FL rimarrà diviso in n parallelepipedi Fg, eq, ecc. tutti fra di loro equivalenti, ed equivalenti rispettivamente a quelli contenuti nel parallelepipedo AH; cosicchè si avrà *paral.* AH : *paral.* FL : : $m : n$, ma a cagione del rapporto comune $m : n$, che vi è fra le due proporzioni trovate, starà anche

paral. AH : *paral.* FL : : BCHG : GHLO.

Si supponga ora che le basi BCHG, GHLO sieno fra di loro incommensurabili, dico che quei parallelepipedi staranno ancora come le basi medesime. Poichè, stia se è possibile *paral.* AH : *paral.* FL : : BCHG : GHTV essendo GHTV $>$ GHLO; ciò posto si prenda BCPQ $<$ OLTV, e tale che sia contenuto esattamente nella base BCHG; applicando questo parallelogrammo anche sopra la base GHTV, una almeno di quelle divisioni cadrà dentro il parallelogrammo OLTV, perchè si è supposto BCPQ $<$ OLTV, cada adunque in XY; per la retta XY parallelamente alla faccia ABCD si tiri il piano XYKZ; i due parallelepipedi AH, FX, avendo le loro basi commensurabili staranno come le basi medesime,

cioè *paral.* AH : *paral.* FX : : BCHG : GHXY; ma, per supposizione, sta anche *paral.* AH : *paral.* FL : : BCHG : GHTV, dunque, a motivo degli antecedenti comuni a queste due proporzioni, starà
paral. FX : *paral.* FL : : GHXY : GHTV, ma GHTV > GHXY; dunque dovrebbe essere anche *paral.* FL > *paral.* FX, ma al contrario esso è minore, dunque la supposta proporzione non può aver luogo; si cadrebbe del pari in assurdo, se si supponesse GHTV < GHLO; dunque due parallelepipedi AH, FL, che hanno la medesima altezza stanno sempre come le rispettive loro basi BCHG, GHLO.

530. *Corollario* I. Siccome poi i parallelogrammi BCHG, GHLO, per essere compresi fra le medesime linee parallele BO, CL, hanno la stessa altezza, così essi staranno come le basi CH, HL (252); dunque i parallelepipedi AH, FL staranno come i loro spigoli CH, HL.

531. *Corollario* II. Due parallelepipedi LMNOCABD, LMNOGEFH (fig. 190.), che hanno la medesima base, o basi eguali, stanno fra di loro come le rispettive altezze AK, IK. Poichè è stato dimostrato (530), che sta *paral.* AN : *paral.* EN : : AL : EL; ma a cagione delle parallele EI, LK, si ha AL : EL : : AK : IK, dunque starà anche

paral. AN : *paral.* EN : : AK : IK.

532. *Corollario* III. Dunque anche i prismi della medesima altezza staranno come le basi, ed i prismi della stessa base staranno come le altezze.

Proposizione VIII. Teorema.

533. *Due parallelepipedi, ed in generale due prismi qualunque LMNOCABD lmnocabd* (fig. 190.) *stanno fra di loro in ragion composta delle loro basi e delle loro altezze.*

Dall' altezza AK del prisma AN si tagli la parte IK = *ak*, che è l' altezza del prisma *an*; e per I si faccia passare il piano EFHG parallelo alla base LMNO, del prisma AN, il prisma EN che ne risulta ha la base LMNO comune col prisma AN, e l' altezza IK eguale a quella *ak* del prisma *an*. Paragonando ora il prisma AN col prisma EN, della medesima base, si avrà (532) *pris.* AN : *pris.* EN : : AK : IK; paragonando i prismi EN ed *an* di eguale altezza, si avrà *pris.* EN : *pris. an* : : LMNO : *lmno*, e moltiplicando fra di loro queste due proporzioni termine per termine, si otterrà *pris.* AN × *pris.* EN : *pris.* EN × *pris. an* : : LMNO × AK : *lmno* × IK, e dividendo il primo rapporto di questa proporzione per la quantità comune *pris.* EN, e ponendo nell' ultimo termine della proporzione medesima *ak* in luogo di IK, si otterrà

pris. AN : *pris. an* : : LMNO × AK : *lmno* × *ak*.

534. *Corollario.* Due parallelepipedi retti e rettangoli, stanno in ragione composta dei tre spigoli rispettivi che stanno intorno agli angoli triedri corrispondenti. Di fatto le basi rettangolari sono fra di loro in ragione composta dei lati rispettivi, che sono intorno agli angoli retti (258), che altro non sono che gli spigoli, che concorrono a formare quegli angoli, le altezze rispettive poi dei parallelepipedi (508) sono il terzo spigolo; onde, ecc.

Proposizione IX. Teorema.

535. *Due prismi equivalenti LMNOCABD, lmnocabd* (fig. 190.), *hanno le loro basi in ragion reciproca delle altezze, e viceversa i prismi, che hanno le basi in ragione reciproca delle loro altezze sono equivalenti.*

Nel prisma AN si faccia la medesima costruzione, che si è fatta pel teorema precedente, e si avrà *pris.* AN : *pris.* EN : : AK : IK : : AK : *ak*. Si avrà del pari *pris. an* : *pris.* EN : : *lmno* : LMNO; ma per supposizione *pris.* AN = *pris. an*; dunque i due primi rapporti delle trovate proporzioni sono eguali, dunque starà anche *lmno* : LMNO : : AK : *ak*. Se poi si avrà *lmno* : LMNO : : AK : *ak*, siccome sta

lmno : LMNO : : *pris. an* : *pris.* EN,

ed AK : IK : : AK : *ak* : : *pris.* AN : *pris.* EN,

starà anche *pris. an* : *pris.* EN : : *pris.* AN : *pris.* EN, ed essendo in questa proporzione eguali i conseguenti, si avrà anche *pris. an* = *pris.* AN.

Proposizione X. Teorema.

536. *Gli spigoli o lati omologhi di due prismi simili* BCDEGAHF, *bcdegahf* (fig. 191.) *sono fra di loro rispettivamente proporzionali, e sono proporzionali anche alle rispettive altezze* AK, *ak dei prismi medesimi.*

1.° In fatti, se si paragonano successivamente le facce omologhe ABCH, *abch*; BCDE, *bcde*; DEGF, *degf*, ecc., si ha la serie di rapporti eguali

AB : *ab* : : BC : *bc* : : CD : *cd* : : DF : *df*, ecc.

2.° Per essere poi simili i prismi proposti, le facce ABCH, BCDE, sono fra di loro egualmente inclinate, di quelle omologhe *abch*, *bcde*, onde se dai vertici dei due angoli solidi A, *a* corrispondenti, sui piani delle rispettive facce omologhe BCDE, *bcde*, si abbasseranno le perpendicolari AK, *ak*, e si condurranno le rette BK, *bk*, i triangoli rettangoli BKA, *bka*, avranno eguali gli angoli ABK, *abk*, e saranno per conseguenza simili (276), per lo che starà AB : *ab* : : AK : *ak*.

Proposizione XI. Teorema.

537. *Le superficie di due prismi simili* BCDEGAHF *bcdegahf* (fig. 191.) *stanno come i quadrati dei lati o spigoli omologhi, o come i quadrati delle altezze, ed i prismi medesimi sono come i cubi dei lati o spigoli omologhi stessi, o come i cubi delle rispettive altezze.*

1.° La somiglianza delle facce omologhe ABCH, *abch*, dà (295) ABCH : *abch* : : $\overline{BC}^2 : \overline{bc}^2$; per la somiglianza delle facce omologhe BCDE, *bcde*, si ha BCDE : *bcde* : : $\overline{BC}^2 : \overline{bc}^2$; onde si ha anche ABCH : *abch* : : BCDE : *bcde* : $\overline{BC}^2 : \overline{bc}^2$; continuando così a paragonare le facce omologhe fra di loro, a cagione dei rapporti comuni, che si avranno nelle proporzioni risultanti, si otterrà la serie di quantità proporzionali ABCH : *abch* : : BCDE : *bcde* : : CDFH : *cdfh* : : DFGE : *dfge* : : FGAH : *fgah* : : ABEG : *abeg* : : $\overline{BC}^2 : \overline{bc}^2$; donde componendo, starà la somma delle facce del primo prisma, alla somma delle facce del secondo prisma, come il quadrato di uno spigolo qualunque BC del primo prisma, al quadrato dello spigolo *bc* corrispondente del secondo prisma; o come $\overline{AK}^2 : \overline{ak}^2$.

2.° Siccome poi si è dimostrato superiormente che sta BCDE : *bcde* : : $\overline{BC}^2 : \overline{bc}^2 : : \overline{AK}^2 : \overline{ak}^2$, e che (536) AK : *ak* : : BC : *bc* : : AK : *ak*, così moltiplicando queste due serie di quantità proporzionali termine per termine si avrà BCDE × AK : *bcde* × *ak* : : $\overline{BC}^3 : \overline{bc}^3 : : \overline{AK}^3 : \overline{ak}^3$; ma si è dimostrato (533), che sta anche BCDE × AK : *bcde* × *ak* : : *pris.* AD : *pris. ad*; dunque starà finalmente *pris.* AD : *pris. ad* : : $\overline{BC}^3 : \overline{bc}^3 : : \overline{AK}^3 : \overline{ak}^3$.

538. *Scolio.* Siccome tutti i cubi sono solidi simili, così se si fosse proposto di fare un cubo doppio di un cubo dato, bisognerebbe che il lato del cubo cercato stasse al lato del cubo dato, come la radice cubica di due, sta all' unità. Se mediante la Geometria elementare si potesse determinare il valore della radice cubica di due, si risolverebbe con essa il problema della *duplicazione del cubo*, che fu tanto celebre fra gli antichi Geometri; problema che sino ad ora non si è potuto risolvere, se non che col soccorso di principj superiori di quelli, che ci somministra la Geometria elementare.

Proposizione XII. Teorema.

539. *La superficie convessa di un prisma qualunque ABCDENFGHL* (fig. 186.) *è equivalente a quella di un rettangolo, che ha per base uno de' suoi spigoli AF, e per altezza il contorno della sezione PQRSV fatta nel prisma medesimo con un piano perpendicolare allo spigolo stesso.*

Poichè il piano PQRSV è perpendicolare, per costruzione, allo spigolo AF, egli sarà perpendicolare anche a tutti gli altri spigoli BG, CH, ecc., del medesimo prisma, essendo questi tutti fra di loro paralleli. Ciò posto, il parallelogrammo AFGB è equivalente ad un rettangolo contenuto dallo spigolo AF, e dalla retta PQ ad esso perpendicolare; il parallelogrammo BGHC è equivalente ad un rettangolo contenuto dallo spigolo BG, e dalla retta QR che le è perpendicolare, ecc., onde la superficie convessa del prisma proposto, che altro non è che la somma di tutti i parallelogrammi laterali, sarà espressa da $AF \times PQ + BG \times QR + CH \times RS + DL \times SV + EN \times VP$, ossia, per essere tutti eguali fra di loro gli spigoli, AF, BG, CH, DL, EN, tale superficie sarà espressa da

$AF\,(PQ + QR + RS + SV + VP)$. Ma $PQ + QR + RS + SV + VP$, non è altro che il contorno della sezione PQRSV, dunque la superficie convessa d' un prisma qualunque è eguale al rettangolo contenuto da uno de' suoi spigoli AF, e dal contorno della sezione PQRSV fatta nel prisma perpendicolarmente allo spigolo medesimo.

540. *Corollario.* Se il prisma sarà retto, la sezione PQRSV sarà eguale, e parallela alla base ABCDE del prisma stesso (522), e lo spigolo AF sarà eguale all' altezza del prisma medesimo; onde la superficie convessa d' un prisma retto è equivalente ad un rettangolo contenuto da due rette, una delle quali sia il contorno della base del prisma medesimo, e l' altra la sua altezza.

Proposizione XIII. Teorema.

541. *Se una piramide SABCD* (fig. 185.) *viene segata da un piano parallelo alla sua base ABCD, la sezione EHOF, che ne risulta è simile alla base medesima.*

Poichè, essendo il piano EHOF parallelo al piano della base ABCD, le comuni sezioni EH, AB col piano ABHE sono rette parallele (481). Per una simile ragione sono fra di loro parallele anche le rette EF, AD ecc., dunque starà (259) AB : EH : : SA : SE; ma sta anche AD : EF : : SA : SE : : SD : SF ed SD : SF : : DC : FO; ecc., dunque a cagione dei rapporti eguali SA, SE; SD, SF, starà AB : EH : : AD : EF : : DC : FO, ecc., e poichè gli angoli BAD, HEF; ADC, EFO, ecc. sono rispettivamente eguali, siccome formati da rette parallele e dirette nello stesso verso (485), dunque i due poligoni ABCD, EHOF, avendo i lati rispettivamente proporzionali, intorno agli angoli eguali, sono simili.

542. *Corollario* I. Siccome sta SA : SE : : SB : SH, e siccome pure sta SA : SE : : SD : SF, così starà anche SA : SE : : SB : SH : : SD : SF ecc., onde i lati o spigoli SA, SB, ecc. della piramide proposta sono tagliati dal piano EHOF parallelo alla base in parti proporzionali nei punti E, H, ecc. Se la perpendicolare SG al piano della base ABCD incontrerà il piano della sezione EFOH nel punto K: essa rimarrà segata in quel punto nella medesima proporzione degli spigoli SA, SE; poichè, essendo AG ed EK parallele, si ha (259) SA : SE : : SG : SK.

543. *Corollario* II. Se sta SA : SE : : SG : SK, starà anche $\overline{SA}^2 : \overline{SE}^2 : : \overline{SG}^2 : \overline{SK}^2 : : \overline{AB}^2 : \overline{EH}^2$; ma sta anche (295) ABCD : EFOH : : $\overline{AB}^2 : \overline{EH}^2$; dunque ABCD : EHOF : : $\overline{SG}^2 : \overline{SK}^2$; donde si ricava, che la sezione EHOF parallela alla base ABCD d' una piramide qualunque sta alla base medesima, come il quadrato della sua distanza dal vertice della piramide, al quadrato della distanza della base al vertice medesimo. Se nella piramide stessa, si immagina fatta un' altra sezione parallela alla base, questa pure avrà colla base lo stesso rapporto dei quadrati delle rispettive distanze dal vertice; onde si può stabilire, che le sezioni parallele alla base fatte in una piramide sono proporzionali ai quadrati delle rispettive distanze dal vertice della piramide medesima.

544. *Corollario* III. Per essere le rette EH, EF, ecc., rispettivamente parallele alle rette AB, AD, ecc., i triangoli SEH, SAB; SEF, SAD; ecc. sono rispettivamente simili; ma anche la sezione EHOF è simile alla base ABCD, dunque la piramide SEHOF è simile alla piramide SABCD (498);

donde si vede, che la piramide SEHOF, che viene determinata segando la piramide SABCD, con un piano parallelo alla base, è simile alla piramide SABCD, dalla quale è stata segata.

545. *Corollario* IV. Se due piramidi avessero comune il vertice, e le basi fossero nello stesso piano, per lo che verrebbero ad avere la medesima altezza, venendo ambedue tagliate da uno stesso piano parallelo al piano su cui appoggiano, le sezioni risultanti da questo piano sarebbero proporzionali alle rispettive basi; poichè (543) la sezione fatta nella prima piramide starebbe alla base della piramide stessa, nello stesso rapporto dei quadrati delle rispettive distanze dal vertice; nel medesimo rapporto starebbe anche la sezione fatta nella seconda piramide colla sua base, poichè le distanze comprese da piani paralleli sono rispettivamente eguali; e quindi eguali anche i loro quadrati; dunque tali sezioni sono proporzionali alle rispettive basi.

Proposizione XIV. Teorema.

546. *Se si sega una piramide triangolare FACZ* (fig. 192.) *con dei piani paralleli alla sua base ed equidistanti fra di loro, in ciascun segmento di questa piramide si potrà inscrivere ed a ciascun segmento circoscrivere un prisma, in modo che la somma di tutti i prismi inscritti nella piramide differisca dalla somma di tutti i prismi circoscritti di una quantità minore di ogni quantità assegnabile Y.*

Si divida l' altezza AF della piramide proposta in un numero qualunque di parti AB, BG, GF fra di loro eguali, e condotte pei punti B, G le sezioni BEP, GDN parallele alla base AZC, si formino sulle sezioni stesse i prismi triangolori BEPMAO, GDNKBQ, i quali saranno inscritti nella piramide FACZ. Prodotte queste sezioni al di fuori della piramide medesima, sopra le basi ACZ, BPE, GDN, si formino i prismi triangolari ACZIBR, BPEXLG, GNDHFS, i quali saranno circoscritti alla piramide medesima. Ciò posto, dico che la differenza fra la somma dei prismi circoscritti, e la somma dei prismi inscritti, è eguale al prisma circoscritto ACZIBR. Di fatto, il prisma HG è equivalente al prisma BD (528), e per conseguenza il prisma HG col solido XK equivale al prisma XB; ma il prisma XB è equivalente al prisma EA; dunque il prisma XB col solido IM equivale al prisma ACZIBR; onde la differenza fra la somma dei prismi circoscritti alla piramide FACZ, e la somma di quelli in essa inscritti è espressa del prisma ACZIBR. Ciò posto, se l'altezza AF si dividerà in un numero estremamente grande di parti tutte fra di loro eguali, in modo che il prisma ACZIBR, formato sulla base AZC della piramide avente per altezza una di quelle parti AB, sia tale da essere minore di ogni quantità assegnabile Y, siccome quel prisma esprimerà sempre la differenza fra la somma de' prismi circoscritti e la somma degli inscritti nella piramide FACZ; così tale differenza sarà minore di ogni quantità assegnabile Y.

547. *Scolio.* Siccome poi la piramide FACZ è contenuta dai prismi circoscritti, e contiene i prismi inscritti, essa sarà minore della somma dei prismi circoscritti, e maggiore della somma dei prismi inscritti, e differirà sì dall'una, che dall'altra di queste somme di una quantità minore di ogni assegnabile. La piramide FACZ sarà quindi il *limite* dei prismi circoscritti ed inscritti nella medesima.

Proposizione XV. Teorema.

548. *Le piramidi triangolari SABC, sabc* (fig. 193.), *le di cui altezze SC, sc sono eguali stanno fra di loro come le basi CAB, cab.*

Si dividano le altezze SC, *sc* in eguale numero di parti eguali e sommamente piccole, e per ciascun punto di divisione si faccia passare un piano parallelo alla base rispettiva di queste piramidi, e si immagini, che in ciascuna porzione risultante da tali sezioni siavi inscritto il corrispondente prisma. Ciò fatto; poichè i prismi triangolari EC, *ec* hanno le altezze CG, *cg* eguali, staranno come le rispettive basi (528) CPQ, *cpq*, o come le basi CAB, *cab*, atteso che, per essere le rette PQ, *pq* rispettivamente parallele alle rette AB, *ab*, i triangoli PCQ; *pcq*, sono simili ai triangoli CAB, *cab*, ed hanno quindi la medesima ragione di questi triangoli. Per lo stesso motivo i prismi DG, *dg* di eguale altezza GK, *gk* stanno fra di loro come le basi GRT, *grt*, o come le basi CAB, *cab*; ed i prismi LK, *lk* stanno anch' essi come le loro basi KXY, *kxy*, o come le basi CAB, *cab*; dunque anche la somma di tutti i prismi inscritti nella piramide SABC, starà alla somma di tutti i prismi inscritti nella piramide *sabc*, come la base CAB della prima piramide, sta alla base *cab* della seconda piramide; e poichè ciascuna di queste piramidi differisce dalla somma dei rispettivi prismi in essa inscritti d'una quantità minore di ogni assegnabile (429), anche le piramidi SABC, *sabc*, di eguale altezza staranno come le rispettive loro basi CAB, *cab*.

549. Se le basi CAB, *cab* di queste piramidi saranno eguali, esse piramidi saranno equivalenti;

onde due piramidi di egual base e di altezza eguale sono equivalenti.

Proposizione XVI. Teorema.

550. *Qualunque prisma triangolare DEFCAB (fig. 194.) è composto di tre piramidi triangolari fra di loro equivalenti.*

Nelle facce parallelogrammiche ABED, CBEF, del prisma proposto si conducano le diagonali BD, BF, e per queste si faccia passare il piano BDF, questo piano segherà il prisma proposto in una piramide triangolare BDEF, ed in una piramide quadrangolare BACFD. La piramide triangolare BDEF ha la stessa base e la stessa altezza del prisma proposto, poichè essa appoggia sul medesimo triangolo DEF, su cui appoggia anche il prisma, ed il suo vertice B è collocato nel piano superiore del prisma medesimo. Si seghi la piramide quadrangolare BACFD col mezzo di un piano condotto dal vertice B della piramide stessa per la diagonale DC del parallelogrammo ACFD, che le serve di base, e ne risulteranno così due piramidi triangolari BACD, BCFD, le quali saranno equivalenti, avendo le basi ACD, CDF eguali, ed i vertici nello stesso punto B. Ma la piramide triangolare BACD è equivalente anche alla piramide triangolare BDEF, poichè si può concepire, che il triangolo ABC sia la base della piramide BACD, e D ne sia il vertice, per lo che le due piramidi BDEF, BACD avranno le basi DEF, ABC eguali, ed eguali anche le altezze, perchè comprese dai piani paralleli DEF, ABC. Onde il prisma triangolare DEFCAB è composto di tre piramidi triangolari equivalenti BDEF, BACD, BCFD, per cui egli è triplo della piramide BDEF, che ha la

medesima base DEF, e la medesima altezza del prisma stesso.

551. *Corollario* I. Dunque una piramide triangolare qualunque è la terza parte di un prisma di egual base e di eguale altezza.

552. *Corollario* II. Anche qualunque piramide poligona, è la terza parte di un prisma della medesima base, e della medesima altezza; poichè si può sempre concepire un prisma qualunque, come composto di tanti prismi triangolari, ed una piramide come composta di altrettante piramidi triangolari, quanti triangoli possono esservi nel poligono, che serve di base sì all'uno, che all'altra; e siccome ciascuna di quelle piramidi triangolari sarà sempre la terza parte del corrispondente prisma triangolare, così anche la piramide totale sarà la terza parte del prisma eretto sopra la sua base alla medesima altezza.

553. *Scolio.* Tutte le proprietà, che abbiamo dimostrate riguardo ai prismi, sono applicabili anche alle piramidi, poichè il rapporto, che regna fra due quantità intere, esiste anche fra le rispettive loro terze parti (250). Dunque

1.° Le piramidi della stessa base, o di basi eguali staranno come le rispettive loro altezze.

2.° Due piramidi qualunque saranno in ragione composta delle rispettive loro basi ed altezze.

3.° Due piramidi equivalenti avranno le loro basi in ragione reciproca delle altezze.

4.° Quelle piramidi, le di cui basi saranno in ragione reciproca delle altezze, saranno equivalenti.

5.° Le piramidi simili staranno come i cubi dei loro lati o spigoli omologhi, o come i cubi delle loro altezze.

Proposizione XVII. Teorema.

554. *Due poliedri simili possono essere divisi in un medesimo numero di piramidi triangolari rispettivamente simili e similmente disposte.*

Poichè, se nelle facce omologhe di ciascuno dei poliedri proposti, si congiungono gli angoli omologhi mediante le diagonali occorrenti, sopra quelle facce, si verrà a formare un medesimo numero di triangoli simili e similmente disposti (294). Ciò posto, tutti i triangoli, che compongono le superficie di quei due poliedri, eccetto quelli, che concorrono a formare due angoli solidi omologhi nei poliedri proposti, possono essere considerati come altrettante basi di piramidi triangolari, aventi i vertici rispettivamente negli angoli solidi omologhi sopra nominati, e siccome il numero de' triangoli rispettivamente simili, che servono di base alle suddette piramidi è lo stesso e nell' una e nell' altra delle superficie dei due poliedri, così il numero delle piramidi è eguale in ambedue i poliedri. Quelle piramidi triangolari sono poi rispettivamente simili, poichè hanno per base dei triangoli simili, ed hanno per facce laterali dei triangoli simili e similmente disposti appartenenti alle superficie dei poliedri, o alle sezioni similmente fatte nei poliedri medesimi.

555. *Corollario.* Dunque i poliedri simili stanno come i cubi dei loro spigoli omologhi.

Proposizione XVIII. Teorema.

556. *Qualunque tronco di piramide ABCDEF* (fig. 195.) *a basi parallele ABC, EFD è equivalente alla somma di tre piramidi, che hanno per comune altezza quella del tronco proposto, una delle quali ha per base, la base inferiore ABC del tronco, l' altra la base superiore EFD, e la terza una media proporzionale fra queste due basi.*

Pei tre punti A, F, C si faccia passare il piano AFC, che taglierà dal tronco, la piramide triangolare FABC. Tale piramide ha per base la base inferiore ABC del tronco, ed ha la stessa sua altezza, poichè il suo vertice F è nel piano della base superiore EFD.

Nella piramide quadrangolare residua FEDCA, pei tre punti E, F, C si faccia passare il piano EFC, il quale dividerà la piramide quadrangolare nelle due piramidi triangolari FAEC, CEDF. La piramide CEDF ha per base la base superiore EFD del tronco, e per altezza l' altezza del tronco medesimo, poichè il suo vertice C è nel piano della base inferiore ABC; cosicchè si hanno di già due delle tre piramidi, delle quali deve essere composto il tronco. Rimane la terza FAEC a compimento del tronco. Ora condotta la FG parallela alla EA, e tirate le rette EG, CG, se si immagina una nuova piramide GAEC, il di cui vertice sia in G, e la base sia AEC, le due piramidi FAEC, GAEC avranno la medesima base AEC, e la stessa altezza, poichè i loro vertici F, G sono posti sopra una stessa linea FG parallela ad EA, e per conseguenza parallela al piano della base, dunque queste piramidi sono equivalenti. Ma la piramide GAEC può essere considerata come avente il suo vertice in E, per cui anch' essa avrà la medesima altezza del tronco. La sua base poi AGC è media proporzionale fra le due basi ABC, EFD; poichè i triangoli AGC, EFD, avendo gli angoli CAG, DEF eguali, danno

(268) AGC : EFD : : AG $\times$ AC : EF $\times$ ED, ed a cagione di AG $=$ EF, per essere queste rette parallele intercette da altre parallele, starà anche AGC : EFD : : AC : ED. Si ha del pari ABC : AGC : : AB : AG : : AB : EF; ma i triangoli simili ABC, EFD danno AB : EF : : AC : ED; dunque, a cagione dei rapporti eguali AC : ED; AB : EF, starà finalmente ABC : AGC : : AGC : EFD; onde si vede che la base AGC è media proporzionale fra le basi ABC, EFD.

557. *Scolio*. Siccome un tronco di piramide qualunque a basi poligone è divisibile in tanti tronchi di piramidi triangolari quanti triangoli sono contenuti nella sua base, così la proprietà dimostrata per il tronco di piramide triangolare è estensibile a qualunque tronco di piramide a basi parallele.

Proposizione XIX. Teorema.

558. *La superficie convessa di una piramide retta SABCDE (fig. 182.) è equivalente al un triangolo, che ha per base il perimetro del poligono regolare che serve di base alla piramide, e per altezza l'apotema SK della piramide medesima.*

In una piramide retta qualunque sono tutti eguali ed isosceli i triangoli laterali, e le altezze dei triangoli medesimi eguagliano l'apotema SK (504). Ciò posto starà il triangolo SAE alla somma di tutti i triangoli laterali, o alla superficie convessa della piramide proposta, che nomineremo S, come 1 : n, supponendo che sia n il numero di quei triangoli eguali, di cui è formata la superficie convessa. Se ora si immagina fatto un triangolo, che nomineremo T, la di cui base sia una retta eguale al contorno del poligono ABCDE, e la di cui altezza sia

eguale all' apotema SK della piramide, si avrà SAE : T : : AE : $n \times$ AE : : 1 : n, onde a cagione del rapporto comune 1 : n, che esiste nelle due trovate proporzioni, starà anche SAE : S : : SAE : T, onde per essere eguali gli antecedenti di questa proporzione, lo sono anche i conseguenti, per cui S $=$ T.

Proposizione XX. Teorema.

559. *La superficie convessa di un tronco CDABEFGH di piramide retta a basi parallele (fig. 196.) è equivalente ad un rettangolo, che ha per base la porzione PQ dell' apotema dell' intera piramide corrispondente al tronco, e per altezza il contorno della sezione LMNO fatta nel tronco medesimo parallelamente alle basi, ed equidistante dalle basi medesime.*

Poichè essendo il tronco di piramide retta proposto terminato da basi parallele ABCD, HGFE, tutte le sue facce laterali sono altrettanti trapezj eguali (504). Le altezze perciò di tutti questi trapezj sono eguali a PQ. La superficie del trapezio ABGH è equivalente al rettangolo PQ $\times$ LM (192); quella del trapezio BGFC è equivalente al rettangolo PQ $\times$ MN, quella del trapezio CFED è equivalente al rettangolo PQ $\times$ NO, e quella finalmente del trapezio DEHA equivale al rettangolo PQ $\times$ OL; quindi la somma PQ$\times$LM$+$PQ$\times$MN$+$PQ$\times$NO$+$PQ$\times$OL di tutti questi rettangoli equivarrà alla superficie convessa del tronco di piramide proposto, ma PQ$\times$LM$+$PQ$\times$MN$+$PQ$\times$NO$+$PQ$\times$OL equivale a PQ(LM $+$ MN $+$ NO $+$ OL); ma LM$+$MN$+$NO$+$OL altro non è che il contorno della sezione LMNO; dunque ecc.

Proposizione XXI. Problema.

560. *Dato un tronco ABCDFEHO (fig. 185.) di piramide retta a basi parallele, trovare l' altezza SK della piramide SEFOH, che manca.*

Tutte le facce laterali di quel tronco di piramide si intendano prolungate sino al loro incontro in S, per cui ne risulterà l' intera piramide SABCD; dal vertice S si intenda abbassata la perpendicolare SG alla base della piramide stessa, che incontrerà la base superiore EFOH nel punto K, e sieno condotte dagli angoli A, E ai punti G, K le rette AG, EK; ciò posto, per essere EK parallela alla base AG, i lati del triangolo SAG saranno segati proporzionalmente nei punti E, K, e saranno proporzionali anche alle loro basi AG, EK, onde starà AG : EK : : SG : SK, e dividendo AG — EK : EK : : SG — SK : SK, ossia AG — EK : EK : : KG : SK, onde si vede che l' altezza SK della piramide mancante SEFOH è quarta proporzionale dopo le tre rette AG — EK, EK, KG, tutte conosciute. Da quella proporzione si può ricavare $SK = \frac{EK \times KG}{AG - EK}$.

561. *Corollario.* L' altezza totale SG della piramide SABCD è pure conosciuta, poichè si ha

$$SG = KG + SK = KG + \frac{EK \times KG}{AG - EK}.$$

LIBRO VIII.

DEL CILINDRO, DEL CONO, E DELLA SFERA.

Definizioni.

562. I. Il *cilindro* è un solido contenuto da due circoli eguali e paralleli ADBEA, GHLMG (fig. 197.), e da una superficie curva ALGB, che si può concepire come generata dalla retta AG appoggiata alle periferie dei due circoli, nel rivolgersi parallelamente a se medesima tutt' all' intorno delle due periferie medesime.

563. II. La superficie così generata da AG dicesi *superficie convessa del cilindro*.

564. III. I circoli ADBEA, GHLMG sono le *basi* del cilindro. La retta FC, che congiunge i centri delle due basi, chiamasi *asse* del cilindro. La retta AG nominasi *generatrice*.

565. IV. Il cilindro è *retto* quando il suo asse FC è perpendicolare alle basi ADBEA, GHLMG ed è *obliquo*, quando l' asse suo non è perpendicolare alle basi stesse.

566. V. L' *altezza* di un cilindro è la perpendicolare FO abbassata dal piano di una delle basi sul piano dell' altra.

Nel cilindro retto l' asse eguaglia l' altezza, e nel cilindro obliquo l' asse è maggiore dell' altezza.

567. VI. Qualunque retta LB, che trovasi nella superficie cilindrica e che congiunge i punti estremi di due raggi paralleli CB, FL delle basi dicesi *lato* del cilindro. La generatrice AG è dunque anch' essa un lato del cilindro.

Il cilindro retto può considerarsi anche come generato dal moto di rivoluzione di un rettangolo ACFG intorno al suo lato immobile FC.

I lati AC, GF eguali, rimanendo sempre perpendicolari al lato FC, descrivono dei circoli eguali e paralleli. Lo stesso succede di qualunque altra retta PT eguale ad AC, e perpendicolare ad FC; donde ne viene che qualunque sezione fatta nel cilindro retto perpendicolarmente al suo asse è un circolo eguale e parallelo a ciascuna delle basi del cilindro medesimo. Qualunque sezione HDEM fatta nel cilindro retto con un piano HE, che passa per l'asse FC, è un rettangolo doppio del rettangolo ACFG generatore, poichè la sua base DE, è doppia di AC, e l'altezza FC è comune.

568. VII. Il *cono* è un solido contenuto da un cerchio ADBEA (fig. 198.), e da una superficie curva, che si può concepire generata dalla retta SA, che con una sua estremità sia fissa nel punto S preso fuori del piano del circolo, e coll'altra vada tutto all'intorno radendo la circonferenza del circolo medesimo ADBEA. La superficie generata da SA dicesi superficie *convessa del cono*, e la retta SA *generatrice*.

569. VIII. Il punto S chiamasi il *vertice del cono*; il circolo ADBEA ne è la *base*.

570. IX. La retta SC, che dal vertice va al centro della base si nomina *asse del cono*.

571. X. L'*altezza* di un cono è la perpendicolare SF calata dal suo vertice sul piano della base.

572. XI. Il cono è *retto* quando l'asse SC è perpendicolare alla base, ed è *obliquo*, o *scaleno*, quando l'asse suo è obliquo alla base.

Nel cono retto l'asse è eguale all'altezza, e nel cono obliquo l'asse è maggiore dell'altezza. Quando

il diametro della base di un cono retto eguaglia il suo lato, il cono dicesi *equilatero*.

573. XII. Qualunque retta SB, che dal vertice va alla circonferenza della base del cono retto dicesi *lato* o *apotema* del cono. La generatrice SA è dunque un lato del cono SADBE; onde tutti i lati del cono retto sono per costruzione eguali.

Il cono retto SADBE può considerarsi anche come generato dalla rivoluzione del triangolo rettangolo SCA intorno al suo lato immobile SC. Il lato AC, rimanendo sempre perpendicolare all'asse SC descriverà un cerchio perpendicolare ad SC, e che per conseguenza sarà la base del cono retto SADBE. Qualunque retta poi GH perpendicolare all'asse SC descriverà un cerchio, che sarà parallelo alla base del cono retto, donde si vede che qualunque piano che sega un cono retto perpendicolarmente al suo asse, è un circolo parallelo alla base del cono medesimo.

574. XIII. Qualunque sezione SDE fatta per l'asse di un cono retto SADBE è un triangolo isoscele doppio del triangolo generatore SCA, e dicesi *triangolo per l'asse*.

575. XIV. Se mediante una sezione GLMNG parallela alla base del cono SADBE si taglia dal cono stesso il cono SGLMN, la parte residua ADBEGLMN prende il nome di *tronco di cono*, o di *cono tronco*. I circoli ADBEA, GLMNG sono le basi del tronco di cono, la retta GA è il *lato*. La retta HC è *l'asse* ed anche *l'altezza* nel tronco di cono retto.

Si può immaginare che il tronco di cono retto siasi generato dalla rivoluzione del trapezio ACHG, i di cui angoli ACH, GHC sieno retti, intorno alla retta HC supposta immobile.

576. XV. Si dicono *simili* i cilindri o i coni, quando avendo gli assi egualmente inclinati hanno i raggi o i diametri delle loro basi proporzionali ai rispettivi assi.

577. XVI. Se nel circolo ABCDA, che serve di base al cilindro ABCDEHGF (fig. 199.) si inscriverà un poligono regolare ABCD, e sopra di esso si innalzerà un prisma avente l'asse comune col cilindro alla medesima altezza del cilindro stesso, il prisma così innalzato dicesi *inscritto nel cilindro*, ed il cilindro dicesi *circoscritto al prisma*. Se il cilindro sarà retto, anche il prisma inscritto sarà retto.

Le linee o spigoli AH, BG, DE, CF del prisma passando per la circonferenza della base, ed essendo paralleli all'asse, sono per costruzione contenuti nella superficie convessa del cilindro, e sono quindi rette *di contatto* del prisma e del cilindro.

578. XVII. Se al circolo LMNOL (fig. 200) base di un cilindro LONMQPSR si circoscriverà un poligono regolare ABCD, e su di esso si innalzerà un prisma alla medesima altezza del cilindro, avente l'asse comune col cilindro, il prisma sarà *circoscritto al cilindro*, e quindi il cilindro resterà *inscritto nel prisma*. Se il cilindro sarà retto, anche il prisma circoscritto sarà retto. Le rette LP, OS, MQ, NR, che uniscono i punti di contatto dei due poligoni ABCD, HGFE coi rispettivi circoli inscritti, passando, per costruzione, per le circonferenze delle basi opposte del cilindro, ed essendo parallele all'asse comune, saranno nello stesso tempo e nella superficie del cilindro inscritto ed in quelle del prisma retto circoscritto, onde esse saranno rette *di contatto* di questi due solidi.

579. XVIII. Se in un circolo, che serve di base ad un cono si inscriverà un poligono ABCD (fig. 201.) e sopra di esso si innalzerà una piramide col mede-

simo vertice del cono, la piramide così formata sarà *inscritta nel cono* stesso, ed il cono sarà *ad essa circoscritto*; gli spigoli poi SA, SB, ecc. della piramide inscritta saranno nella superficie convessa del cono, e serviranno al contatto dei due solidi.

580. XIX. Se sopra un poligono ABCD (fig. 202.) circoscritto alla base d'un cono s'innalzerà una piramide col medesimo vertice del cono, la piramide sarà *circoscritta al cono*, ed il cono sarà *inscritto in quella piramide*. Le rette poi, che dai punti di contatto del poligono col circolo saranno condotte al vertice S, saranno comuni alla superficie convessa del cono e a quella della piramide, ed i due solidi si toccheranno mediante le linee medesime. Tanto in un caso che nell'altro, se il cono sarà retto, anche la piramide inscritta o circoscritta sarà retta, se avrà per base un poligono regolare.

581. XX. La *sfera* è un solido terminato da una superficie curva, che ha la proprietà di avere tutti i suoi punti equidistanti da un punto interno che dicesi il *centro della sfera*.

La sfera può concepirsi come generata dalla rivoluzione di un semicircolo ADBA (fig. 203.) intorno al suo diametro AB, supposto immobile, mentre la superficie così generata dalla semicirconferenza ADBA avrà la proprietà d'avere i suoi punti equidistanti dal punto C, centro comune della sfera e del semicircolo ADBA; questo semicircolo, chiamasi *semicircolo generatore della sfera*, ed il suo diametro AB dicesi *asse* della sfera.

582. XXI. Si dà il nome di *raggio della sfera* a qualunque retta CA, CM, ecc. condotta dal centro C della sfera a qualunque punto della di lei superficie. Ogni retta poi AB, DE, ecc., che da un punto qualunque della superficie va ad un punto opposto passando pel centro, dicesi *diametro della sfera*.

Tutti i raggi di una stessa sfera sono fra di loro eguali; tutti i suoi diametri poi sono anch' essi eguali, e ciascuno è doppio del raggio.

Se sopra il diametro AB del semicircolo generatore ADBA si intendono elevate delle perpendicolari FM, CD, GL, ecc., mentre il semicircolo generatore rivolgendosi sull' asse immobile AB genererà la sfera, ogni retta perpendicolare a questo genererà un circolo; donde ne viene che tutte le sezioni fatte nella sfera perpendicolarmente al diametro AB del circolo generatore sono circoli. Potendosi poi prendere per asse della sfera qualunque altro diametro MO, e quindi per semicircolo generatore il semicircolo MLOM descritto sullo stesso diametro, così si vede chiaro, che, mentre il semicircolo si rivolgerà sull' asse MO, tutte le perpendicolari ad MO descriveranno dei circoli; onde si può stabilire 1.° che tutte le sezioni fatte nella sfera saranno circolari; 2.° che quelle sezioni, che passano pel centro della sfera saranno fra di loro tutte eguali, non essendo che circoli descritti con raggi eguali, siccome appartenenti alla medesima sfera; 3.° che le sezioni fatte ad eguali distanze dal centro della sfera sono eguali, potendosi considerare come circoli descritti con raggi eguali, siccome semicorde di circoli eguali, che egualmente si scostano dal centro (333); 4.° finalmente tanto più grandi sono le sezioni, quanto più si avvicinano al centro della sfera, poichè tanto più grandi sono le semicorde dello stesso circolo o de' circoli eguali, dalle quali possono considerarsi come generate, quanto più si avvicinano al centro (334).

583. XXII. Tutti i circoli, che passano pel centro della sfera si dicono *circoli massimi*; quelli che non passano pel suo centro sono *circoli minori*,

I circoli massimi si tagliano reciprocamente per metà, poichè la loro comune intersezione passando per il centro della sfera è un diametro.

Ogni circolo massimo divide poi la sfera, e la superficie sferica in due parti eguali, poichè se le due parti in cui la sfera si suppone segata da un circolo massimo si intendano applicate sopra la base comune facendo rivolgere la loro convessità dalla medesima parte, le due superficie sferiche dovranno necessariamente coincidere, altrimenti vi sarebbero in esse dei punti più lontani dal centro gli uni degli altri, ciò che è contrario alla definizione della sfera (581).

Il centro di qualunque cerchio minore, e quello della sfera sono in una medesima retta perpendicolare al piano del circolo minore, poichè si può sempre immaginare che esso siasi generato da una semicorda perpendicolare all' asse della sfera.

584. XXIII. Un piano dicesi *tangente* ad una sfera quando egli ha un sol punto comune colla sfera stessa.

585. XXIV. Il *polo* di un cerchio della sfera è un punto della superficie della sfera medesima, che è equidistante da tutti i punti della circonferenza del cerchio stesso.

I poli del circolo massimo AEBDA (fig. 204.) si trovano alle estremità del diametro P*p* perpendicolare al circolo medesimo.

In generale i poli di un circolo qualunque sono sopra una retta perpendicolare al cerchio stesso, e che passa pel suo centro.

I circoli minori hanno i loro poli comuni coi circoli massimi ad essi paralleli.

586. XXV. Il *fuso sferico* è una porzione di superficie sferica PA*p*QP terminata dalle semicir-

conferenze di due circoli massimi, che si tagliano nel diametro comune Pp.

Il solido contenuto dal fuso sferico, e da due semicircoli massimi, che si tagliano nel diametro comune dicesi *unghia*, *cono*, o *spicchio sferico* (*a*).

587. XXVI. Il *triangolo sferico* è una porzione di superficie sferica terminata da tre archi di circoli massimi. Tali archi si dicono *i lati del triangolo sferico.* Questi lati si suppongono sempre minori della semicirconferenza a cui appartengono. Gli angoli, che i loro piani fanno fra di loro, sono *gli angoli del triangolo sferico.*

Il triangolo sferico può essere *equilatero*, *isoscele*, *scaleno*, come il triangolo piano.

588. XXVII. Il *poligono sferico* è una porzione di superficie sferica contenuta da più archi appartenenti a circoli massimi della sfera medesima.

589. XXVIII. La *piramide sferica* è una porzione di sfera contenuta dai piani di un angolo solido, il di cui vertice è nel centro della sfera, e la di cui base è il poligono sferico determinato dai piani medesimi.

590. XXIX. La *zona sferica* è una porzione di superficie sferica determinata da due piani paralleli, che ne sono le *basi.* Uno di questi piani può essere tangente alla sfera, ed allora la zona prende il nome di *berretta* o *calotta sferica.*

591. XXX. Il *segmento sferico* è una porzione di sfera contenuta da due piani paralleli uno dei quali è tangente alla sfera medesima. L'*altezza* poi tanto della zona, che del segmento sferico è la distanza dei due piani paralleli medesimi.

(*a*) Sembrami che ad un tale solido convenga di più il nome di *spicchio sferico* a motivo della sua forma.

592. XXXI. Il *settore sferico* è una porzione di sfera, che può considerarsi come generata dalla rivoluzione di un settore circolare sopra uno de' suoi raggi, ovvero una specie di cono avente il vertice nel centro della sfera, e per base la calotta sferica.

593. XXXII. Un poliedro dicesi *inscritto* nella sfera, quando con tutti i suoi angoli solidi tocca la superficie della sfera, e la sfera in tal caso è *circoscritta* al poliedro. Una sfera poi è *inscritta* in un poliedro, quando la di lei superficie è toccata da tutte le facce del poliedro, il quale dicesi *circoscritto* alla sfera.

Assioma.

594. *Di due superficie curve, o una curva e l'altra composta di superficie piane o di superficie piane e curve, o tutte due composte di superficie piane, tali che rivolgano la loro convessità dalla medesima parte, e che terminino agli stessi estremi, è maggiore quella delle due, che racchiude entro di se l'altra.*

D'onde ne deriva 1.° che la superficie convessa di un cilindro sarà maggiore della superficie convessa del prisma in esso inscritto, e sarà minore di quella del prisma ad esso circoscritto: 2.° che la superficie convessa di un cono sarà maggiore della superficie convessa della piramide inscritta, e minore di quella della piramide circoscritta; 3.° che la superficie di una sfera sarà maggiore di quella di qualunque poliedro in essa inscritto, e minore di quella di qualsiasi poliedro circoscritto.

Proposizione I. Lemma.

595. *Ad un dato cilindro si ponno sempre inscrivere e circoscrivere dei prismi tali che differiscano fra di loro di una quantità minore di ogni assegnabile.*

In fatti sopra il circolo ABDEFA (fig. 206.) si immagini eretto un cilindro, e sopra i poligoni regolari e simili uno de' quali è inscritto e l'altro circoscritto al medesimo, si immaginino eretti alla stessa altezza coll' asse comune, due prismi; avendo questi prismi la medesima altezza saranno proporzionali alle loro basi (532), ossia ai quadrati di CN e CM raggi dei circoli inscritti in quei poligoni (402). Ora coll' inscrivere e circoscrivere continuamente dei poligoni di un numero doppio di lati, le rette CN, CM giungeranno al punto da differire fra di loro di una quantità minore di ogni assegnabile, dunque i loro quadrati, non meno che i due prismi eretti sopra tali poligoni differiranno del pari di una quantità minore di ogni assegnabile.

596. *Corollario* I. Siccome le superficie convesse di quei due prismi di eguale altezza sono proporzionali ai contorni dei poligoni delle rispettive basi, e quei contorni sono proporzionali ai raggi CN, CM (402), così anche le superficie convesse dei medesimi differiranno di una quantità minore di ogni assegnabile.

Lo stesso dicasi di due piramidi, e delle loro superficie convesse, che nel modo sopra indicato venissero inscritte e circoscritte al cono.

597. *Corollario* II. Siccome il cilindro si trova fra il prisma inscritto e quello circoscritto, così si potrà sempre in un dato cilindro inscrivere un prisma, che da esso differisca di una quantità minore

di ogni assegnabile, o circoscrivere ad esso un prisma che differisca dal medesimo di una quantità minore di ogni assegnabile. Lo stesso dicasi di un cono rispetto alle piramidi inscritte o circoscritte. Il cilindro è quindi il *limite* tanto dei prismi in esso inscritti, quanto di quelli ad esso circoscritti, ed il cono è il *limite* delle piramidi inscritte e circoscritte.

Anche le superficie convesse dei solidi inscritti o circoscritti al cilindro, o al cono potranno essere tali di differire rispettivamente da quelle del cilindro o del cono di una quantità minore di ogni assegnabile; dunque la superficie convessa di un cilindro è il *limite* tanto delle superficie convesse dei prismi in esso inscritti, quanto di quelli al medesimo circoscritti; e la superficie convessa di un cono è il *limite* delle superficie convesse delle piramidi inscritte e circoscritte.

Proposizione II. Teorema.

598. *La superficie convessa di un cilindro retto è equivalente ad un rettangolo contenuto da due rette, una delle quali sia eguale alla circonferenza della base del cilindro, e l' altra alla sua altezza.*

Per brevità nomineremo S la superficie convessa del cilindro proposto, A la sua altezza, e C la circonferenza della base del cilindro stesso.

Se la superficie convessa S del cilindro proposto non sarà eguale al rettangolo $C \times A$, sarà maggiore o minore del medesimo. Supponiamola maggiore, e tale che superi il rettangolo $C \times A$ di una quantità data Z. Ciò posto si immagini inscritto nel cilindro dato un prisma retto tale, che la di lui superficie convessa differisca da quella del cilindro di una quantità minore di ogni assegnabile (596), tale superficie sarà anch'essa maggiore del rettangolo $C \times A$, poichè essa differisce da quella del cilindro di una quantità minore di Z; la qual cosa è assurda; di fatto la superficie convessa del prisma così inscritto equivale ad un rettangolo, che ha per base il perimetro del poligono, sopra del quale il prisma appoggia, e per altezza l'altezza del prisma medesimo, o l'altezza A del cilindro ad esso circoscritto (540); ma il perimetro di un tale poligono, che nomineremo P è minore della circonferenza C del circolo nel quale è inscritto, dunque anche il rettangolo $P \times A < C \times A$, e non maggiore, come si era trovato, stando alla fatta supposizione.

Supponiamo, che la superficie convessa S del cilindro, sia minore del rettangolo $C \times A$, e lo sia di una quantità Z. Al cilindro dato si immagini circoscritto un prisma retto tale, che la di lui superficie convessa differisca da quella del cilindro di una quantità minore di ogni assegnabile, anche la superficie di quel prisma sarà minore del rettangolo $C \times A$, ciò che è falso; poichè la superficie di un tale prisma, chiamato P' il perimetro della sua base è equivalente al rettangolo $P' \times A$; ma essendo il perimetro P' del poligono circoscritto ad un cerchio maggiore della circonferenza del cerchio, cui è circoscritto, sarà anche $P' \times A > C \times A$, e non minore, come si era trovato, stando alla fatta supposizione. Non potendo adunque la superficie convessa di un cilindro retto essere nè maggiore, nè minore di un rettangolo contenuto dalla circonferenza del circolo, che gli serve di base, e dalla sua altezza, sarà ad esso eguale.

599. *Scolio.* Le superficie convesse dei cilindri retti, essendo rappresentate da rettangoli, le di cui basi sono le rispettive circonferenze dei circoli, che

servono di base ai cilindri stessi, e le altezze sono le altezze medesime dei cilindri, così le proprietà attinenti ai rettangoli saranno comuni anche a queste superficie, onde

1.° Le superficie convesse dei cilindri retti di eguale altezza saranno proporzionali alle circonferenze dei circoli delle loro basi, e quindi proporzionali anche ai diametri o raggi delle basi medesime (435).

2.° Le superficie de' cilindri retti di basi eguali staranno come le altezze rispettive.

3.° Le superficie dei cilindri retti saranno in ragione composta delle circonferenze delle loro basi, e delle rispettive loro altezze, o anche in ragione composta dei diametri o dei raggi delle basi e delle altezze.

4.° Le superficie eguali dei cilindri retti avranno le altezze in ragione reciproca delle circonferenze delle loro basi, o dei diametri o raggi delle basi medesime, e se le altezze dei cilindri saranno in ragione reciproca delle circonferenze delle loro basi, o dei raggi o diametri delle basi stesse, le superficie convesse dei medesimi saranno eguali.

5.° Le superficie di due cilindri retti e simili, staranno come i quadrati delle periferie delle loro basi, o come i quadrati dei diametri o dei raggi delle basi medesime, o anche come i quadrati delle rispettive altezze o lati.

Proposizione III. Teorema.

600. *Un cilindro retto è equivalente ad un prisma retto, il quale abbia per base un poligono regolare eguale in superficie al circolo che serve di base al cilindro, e per altezza quella del cilindro stesso.*

Sia B la base del cilindro proposto, ed A la sua altezza; il prisma, che devesi dimostrare equivalente al dato cilindro, si nomini P.

Se il cilindro proposto non sarà eguale al prisma P, sarà maggiore o minore del medesimo. Supponiamo che sia maggiore, e che lo superi di una quantità Y. Come nella precedente proposizione, si immagini inscritto nel cilindro dato un prisma retto tale, che differisca dal cilindro di una quantità minore di ogni assegnabile, questo prisma che chiameremo P′ sarà per conseguenza anch'esso maggiore del prisma P, ciò che è assurdo; poichè la base del prisma P′ inscritto nel cilindro, che nomineremo B′, è minore della base B del cilindro, nella quale trovasi inscritto, e per conseguenza è minore anche della base del prisma P, che per supposizione, è equivalente a B. Ora siccome i due prismi P′, P hanno comune l'altezza A, essi sono proporzionali alle loro basi, dunque il prisma P′ è minore del prisma P, e non maggiore, come si era trovato colla assunta ipotesi.

Supponiamo che il cilindro dato sia minore del prisma P: si immagini ad esso circoscritto un prisma retto di eguale altezza, che nomineremo P″, tale che differisca dal medesimo di una quantità minore di ogni assegnabile, anche questo prisma sarà minore del prisma P, ciò che è assurdo manifesto; poichè la base del prisma circoscritto, che nomineremo B″, è maggiore di B, essendo circoscritta al circolo, che serve di base al cilindro, onde il prisma retto P″ è maggiore, e non minore del prisma retto P, come si era trovato; dunque il cilindro proposto non potendo essere nè maggiore nè minore di un prisma retto, il quale ha per base un poligono regolare equivalente al circolo, che serve di base al cilindro, e per altezza quella del cilindro stesso, sarà ad esso eguale.

601. *Scolio.* I cilindri potendosi rappresentare con dei prismi, così ad essi saranno comuni le proprietà dei prismi, onde

1.° I cilindri di eguale altezza saranno proporzionali alle loro basi circolari; ma queste sono come i quadrati dei loro raggi o diametri, dunque i cilindri retti di eguale altezza staranno anche come i quadrati dei raggi, o dei diametri delle rispettive loro basi.

2.° I cilindri di egual base staranno come le rispettive altezze.

3. I cilindri saranno in ragione composta delle loro basi e delle loro altezze o anche in ragione composta dei quadrati dei raggi o dei diametri delle basi e delle loro altezze.

4.° I cilindri equivalenti avranno le basi in ragione reciproca delle altezze; e se le basi di due cilindri saranno in ragione reciproca delle altezze, i cilindri saranno equivalenti.

5.° I cilindri simili staranno come i cubi delle loro altezze, o come i cubi delle circonferenze dei circoli, sui quali appoggiano, o anche come i cubi dei raggi, o diametri dei circoli medesimi.

Proposizione IV. Teorema.

602. *La superficie convessa di un cono retto è equivalente ad un triangolo, che ha per base la circonferenza del circolo, che serve di base al cono, e per altezza l'apotema o lato del cono medesimo.*

Per brevità si nomini C la circonferenza della base del cono, e sia T il triangolo che ha per base C, e per altezza il lato del cono, che nomineremo A.

Se la superficie convessa del cono proposto non sarà eguale al triangolo T, sarà o maggiore o minore del triangolo stesso. Supponiamola maggiore, e tale che superi il triangolo T di una quantità Z. Ciò posto, si immagini inscritta nel cono proposto una piramide retta avente il vertice comune col cono medesimo, tale che la di lei superficie convessa differisca da quella del cono di una quantità minore di ogni assegnabile, la superficie convessa di quella piramide sarà anch' essa maggiore del triangolo T, il quale per supposizione differisce dalla superficie convessa del cono di una quantità Z, ciò che è assurdo; poichè la superficie convessa di quella piramide inscritta è equivalente ad un triangolo, che ha per base il contorno del poligono, sopra del quale essa appoggia, e per altezza l'apotema o lato della piramide stessa (558), ora l'apotema della piramide regolare inscritta nel cono è minore del lato del cono circoscritto, poichè è minore di ciascuno degli spigoli della piramide stessa, che sono eguali ai lati del cono (580); il perimetro del poligono della sua base è pure minore di C (428), dunque anche il triangolo, che ha per base il perimetro di quel poligono e la di cui altezza è minore dell' apotema A, è più piccolo del triangolo T, dunque anche la superficie convessa della piramide inscritta nel cono è minore e non maggiore del triangolo T, come si era trovata.

Supponiamo ora che la superficie convessa del cono retto sia minore del triangolo T di una quantità Z. Si immagini circoscritto al cono una piramide retta avente il vertice comune col cono, e tale che la di lei superficie convessa differisca da quella del cono di una quantità minore di ogni assegnabile; la superficie convessa di quella piramide sarà anch' essa minore del triangolo T, la qual cosa è impossibile; poichè la sua superficie convessa è

equivalente ad un triangolo, che ha per base, il perimetro del poligono, su cui appoggia e per altezza l'apotema della piramide medesima (558), ora l'apotema della piramide circoscritta al cono retto, è eguale al lato o apotema A del cono inscritto (580), ed il perimetro del poligono, che serve di base alla piramide è maggiore della circonferenza C, a cui esso è circoscritto, dunque la superficie convessa della piramide circoscritta è maggiore e non minore del triangolo T, come si era trovata secondo l' ipotesi assunta; dunque non potendo essere la superficie convessa di un cono retto nè maggiore, nè minore del triangolo T, che ha per base la circonferenza del circolo, che serve di base al cono, e per altezza il lato del cono, sarà ad esso eguale.

603. *Scolio.* Potendo le superficie convesse dei coni retti essere rappresentate dai triangoli aventi per base le rispettive circonferenze dei circoli, sopra dei quali appoggiano i coni, e per altezza i lati rispettivi dei coni medesimi, così le superficie di tali coni seguiranno le leggi dei triangoli, onde

1.° Le superficie dei coni retti, che hanno lati eguali saranno proporzionali alle circonferenze delle rispettive basi, o anche ai diametri, o raggi delle basi medesime.

2.° Le superficie dei coni retti, che hanno basi eguali, staranno come i loro rispettivi lati.

3.° La superficie di due coni retti qualunque saranno in ragione composta dei loro apotemi, e delle circonferenze delle rispettive basi, o anche in ragione composta degli apotemi, e dei diametri o raggi delle loro basi.

4.° Le superficie eguali appartenenti a dei coni retti avranno gli apotemi in ragione reciproca delle circonferenze, o dei diametri o raggi delle loro rispettive basi; e se gli apotemi di due coni retti, saranno in ragione reciproca delle circonferenze delle basi dei coni medesimi, o in ragione reciproca dei diametri, o dei raggi delle basi medesime, le loro superficie convesse saranno eguali.

5.° Le superficie simili di due coni retti, staranno come i quadrati dei loro apotemi, o come i quadrati delle circonferenze delle loro basi, o anche come i quadrati dei diametri, o dei raggi delle basi stesse.

Proposizione V. Teorema.

604. *Un cono retto è equivalente ad una piramide retta, che ha per base un poligono regolare equivalente al circolo, che serve di base al cono, e per altezza l' altezza del cono medesimo.*

Si nomini B la base del cono proposto, e sia P la piramide, che ha per base un poligono equivalente a B, e per altezza, l' altezza medesima del cono, che nomineremo A.

Se il cono non sarà equivalente alla piramide P, sarà maggiore o minore della piramide medesima. Supponiamolo maggiore, e tale che la superi di una quantità Y. Come nella precedente proposizione, si immagini inscritta nel cono una piramide retta, tale che differisca dal cono di una quantità minore di ogni assegnabile, questa piramide sarà anch' essa maggiore della piramide P, che differisce dal cono di una quantità Y, la qual cosa è assurda; poichè questa piramide ha comune l' altezza A colla piramide P, ed ha la sua base minore della base B della piramide medesima, onde essa è minore e non maggiore della piramide P.

Supponiamo che il cono sia minore della piramide P, e che da essa sia superato di una quantità Y. Si immagini circoscritta al cono una piramide retta, tale che differisca dal cono di una quantità minore di ogni assegnabile, questa piramide sarà anch' essa minore della piramide P, ciò che è assurdo; perchè avendo essa la medesima altezza della piramide P, ed una base maggiore di quella della piramide medesima; la piramide circoscritta al cono è maggiore e non minore della piramide P, come si era trovato. Non potendo adunque il cono retto proposto essere nè maggiore nè minore della piramide P, che ha per base un poligono regolare equivalente al circolo, che serve di base al cono, e per altezza l' altezza medesima del cono, sarà ad essa eguale.

605. *Corollario.* Il cono retto è la terza parte di un cilindro retto costruito sopra la medesima base e colla medesima altezza; poichè il cono retto è equivalente ad una piramide retta della medesima altezza, e di base equivalente a quella del cono; il cilindro retto è equivalente ad un prisma retto della stessa altezza, e di base equivalente alla base del cilindro; ma la piramide è la terza parte di un prisma di egual base e di eguale altezza; dunque anche il cono retto sarà la terza parte di un cilindro retto della medesima base, e della stessa altezza. Siccome un prisma obliquo qualunque è equivalente ad un prisma retto che ha la medesima base e la medesima altezza, così anche un cilindro obliquo sarà equivalente ad un cilindro retto della stessa base, e della stessa altezza, ed un cono obliquo sarà equivalente ad un cono retto della stessa base e della medesima altezza.

606. *Scolio.* I coni potendo essere rappresen-

tati con delle piramidi, saranno ad essi comuni le proprietà delle piramidi medesime; onde

1.° I coni di eguale altezza staranno come le basi, o come i quadrati dei raggi o dei diametri delle rispettive basi.

2.° I coni di base eguale staranno come le loro altezze.

3.° I coni saranno in ragione composta delle loro basi, e delle altezze, o anche in ragione composta dei quadrati dei raggi o dei diametri delle basi, e delle loro altezze.

4.° I coni equivalenti avranno le basi in ragione reciproca delle altezze; e se le basi loro saranno in ragione reciproca delle altezze saranno equivalenti.

5.° I coni simili staranno come i cubi dei loro assi o altezze, o come i cubi delle circonferenze delle loro basi, o anche come i cubi dei diametri o raggi delle basi medesime.

Proposizione VI. Teorema.

607. *La superficie convessa di un tronco di cono retto AEBDFHGM* (fig. 207.) *a basi parallele è equivalente ad un rettangolo, che ha per altezza il suo lato GB, e per base la semisomma delle circonferenze delle due basi AEBDA, FHGMF del tronco di cono.*

Nel piano SAB, che passa per l' asse SC, perpendicolarmente ad SB si conduca la retta BQ eguale alla circonferenza del circolo AEBDA, si tiri la retta SQ, e dal punto G si guidi GT parallela a BQ. A cagione dei triangoli simili SCB, SLG, starà CB : LG : : SB : SG, ed a motivo della somiglianza dei triangoli SBQ, SGT, si avrà BQ : GT : : SB : SG; dunque CB : LG : : BQ : GT; ma (435)

sta CB : LG : : *circ.* CB : *circ.* LG; dunque starà anche BQ : GT : : *circ.* CB : *circ.* LG. Ma per costruzione si ha *circ.* CB $=$ BQ; dunque sarà anche *circ.* LG $=$ GT; ciò posto il triangolo SBQ è equivalente alla superficie convessa del cono retto SAEBD (602), il triangolo SGT è equivalente alla superficie convessa del cono retto SFHGM, dunque la superficie del tronco di cono proposto, sarà eguale alla differenza SBQ—SGT di questi triangoli, eguale cioè al trapezio BGTQ; ma il trapezio BGTQ (192) è eguale al rettangolo di

$$BG \times \frac{BQ + GT}{2} = BG \times \frac{circ.\,CB + circ.\,LG}{2}.$$

608. *Corollario.* Se pel punto O metà di BG si farà passare un piano ON parallelo alle basi del tronco di cono, la sezione risultante sarà un cerchio (573); condotta la OR parallela a BQ si dimostrerà, come superiormente che è OR $=$ *circ.* PO; ma $OR = \frac{BQ + GT}{2}$ (192); dunque *circ.* PO $=$ $\frac{circ.\,CB + circ.\,LG}{2}$, onde il trapezio BGTQ $=$ BG $\times$ *circ.* PO, donde si ricava che la superficie di un tronco di cono retto a basi parallele, è equivalente ad un rettangolo, che ha per altezza il suo lato BG, e per base la circonferenza di una sezione fatta nel tronco medesimo parallelamente alle sue basi, ed equidistante dalle basi stesse.

609. *Scolio.* Potendosi rappresentare le superficie convesse dei tronchi di cono retti a basi parallele, con dei rettangoli, così le proprietà dei rettangoli saranno comuni anche alle superficie convesse di questi tronchi di cono.

Proposizione VII. Problema.

610. *Dato un tronco di cono retto ADBEFLHG (fig. 208.) a basi parallele trovare l' altezza del cono mancante.*

Si immagini compito il cono SADBE, e condotto il suo asse SC, e tirati i raggi CB, OH dai centri delle due basi del cono tronco, nel piano del triangolo per l' asse SAB. I raggi CB, OH saranno paralleli, perchè giacciono nello stesso piano SAB, e sono entrambi perpendicolari all' asse, ed i triangoli SCB, SOH saranno simili, ed i loro lati omologhi proporzionali, onde starà CB : OH : : SC : SO, e dividendo CB — OH : OH : : SC — SO : SO, cioè CB — OH : OH : : OC : SO, donde si ricava che l' altezza SO del cono mancante è quarta proporzionale, dopo la differenza dei raggi CB, OH delle basi del tronco di cono proposto, il raggio della base superiore, e l' altezza del tronco di cono. Se nomineremo R il raggio della base inferiore, r quello della base superiore, ed a l' altezza del tronco di cono avremo $R - r : r : : a : SO$, onde (269)

$$SO\,(R - r) = a \times r,\ \text{ed}\ SO = \frac{a \times r}{R - r}.$$

611. *Corollario* I. L' altezza SC del cono totale SADBE è pure conosciuta, poichè si ha

$$SC = SO + OC = \frac{a \times r}{R - r} + a = \frac{aR}{R - r}.$$

612. *Corollario* II. Stando CB : OH : : SC : SO, starà anche $\overline{CB}^2 : \overline{OH}^2 : : \overline{SC}^2 : \overline{SO}^2$; ma sta anche (435) $ADBEA : FLHGF : : \overline{CB}^2 : \overline{OH}^2$; dunque starà $ADBEA : FLHGF : : \overline{SC}^2 : \overline{SO}^2$; dunque le basi dei due coni

retti SADBE, SFLHG, sono proporzionali ai quadrati delle rispettive loro distanze dal vertice comune S, o come i quadrati dei loro assi.

Proposizione VIII. Teorema.

613. *Un tronco di cono retto ADBEFLHG (fig. 208.) è equivalente ad un tronco di piramide, le di cui basi sono rispettivamente parallele ed equivalenti a quelle del cono, e l' altezza è eguale a quella del tronco di cono medesimo.*

Sia TMNP una piramide, la di cui altezza TX è eguale all' altezza SC del cono SADBE, e la base MNP sia equivalente alla base ADBEA del cono medesimo. Supponiamo, che queste basi sieno disposte sopra un medesimo piano, per lo che i vertici S, T saranno ad eguale distanza dal piano delle basi. Ciò posto se il piano FLHG, verrà prolungato a tagliare la piramide, farà nella piramide stessa una sezione QRK parallela alla base MNP, ed equivalente al circolo FLHGF. Infatti le basi ADBEA, FLHGF stanno fra di loro come i quadrati delle distanze SC, SO (612), e le basi MNP, QRK stanno fra di loro come i quadrati delle rispettive distanze dal vertice (543), cioè come i quadrati di TX, TZ, o come i quadrati di SC, SO; dunque i circoli ADBEA, FLHGF staranno come le basi MNP, QRK; ma per supposizione la base MNP della piramide è equivalente alla base ADBEA del cono, dunque anche la base QRK è equivalente al circolo FLHGF. Ora il cono SADBE è equivalente alla piramide TMNP, che ha la medesima altezza del cono, ed una base equivalente a quella del cono (604), ed il cono SFLHG per simile ragione è equivalente alla piramide TQRK, dunque il tronco di cono ADBEFLHG è equivalente al tronco di piramide MNPQRK.

614. *Corollario.* Siccome un tronco di piramide a basi parallele è equivalente (556) a tre piramidi aventi tutte la medesima altezza del tronco dato, una delle quali ha per base la base inferiore del tronco stesso, l'altra la base superiore, e la terza una base media proporzionale fra quelle due basi medesime, e siccome poi ciascuna di quelle piramidi eguaglia un cono di base equivalente, e di altezza eguale (604); così si può conchiudere, che un tronco di cono retto a basi parallele è equivalente a tre coni aventi tutti per altezza l'altezza del tronco, e per basi rispettive, la base inferiore del tronco stesso, la base superiore, ed una media proporzionale fra quelle due basi.

615. *Scolio.* Le superficie dei cilindri obliqui, dei coni obliqui e dei tronchi di cono a basi non parallele, non possono essere determinate colle sole cognizioni della geometria elementare, e questo è il motivo per cui non ce ne siamo occupati.

Proposizione IX. Teorema.

616. *Qualunque piano FAD* (fig. 209.) *perpendicolare all' estremità A di un raggio CA della sfera AHBPA è tangente alla sfera stessa.*

Poichè, preso un altro punto N qualunque sopra il piano FAD, e congiunto colle estremità del raggio CA mediante le rette NC, NA, l'angolo CAN sarà retto, e quindi l'ipotenusa CN sarà maggiore del cateto o raggio CA; onde il punto N si troverà al di fuori della sfera; e siccome succede lo stesso per qualunque altro punto preso sul piano medesimo, ne segue che il piano FAD non ha colla sfera di comune, che il solo punto A, dunque egli è tangente alla sfera medesima.

Proposizione X. Teorema.

617. *L' angolo LAM* (fig. 209.), *che formano due archi LA, MA di cerchj massimi, è eguale all' angolo DAF formato dalle rispettive tangenti di questi archi al punto A, ed ha per misura l' arco GH descritto dal punto A come polo fra i lati LA, MA prolungati se occorre.*

Poichè la tangente FA condotta nel piano dell' arco LA è perpendicolare al raggio CA nel punto A; la tangente DA condotta nel piano dell' arco MA è perpendicolare anch' essa al raggio CA nel medesimo punto; dunque quelle rette essendo perpendicolari nello stesso punto A preso sulla comune intersezione dei due piani CAL, CAM, che si segano, l' angolo DAF da esse formato è eguale all' angolo formato dai piani medesimi, cioè all' angolo LAM (471).

Se poi ciascuno dei due archi fosse eguale ad un *quadrante*, cioè alla quarta parte della circonferenza, come GA, HA, le rette CG, CH saranno perpendicolari a CA, e l' angolo GCH sarà eguale all' angolo dei due piani CAL, CAM (471); dunque l' arco GH, che è la misura dell' angolo GCH, sarà la misura anche dell' angolo LAM o dell' angolo formato dai piani CAL, CAM.

Proposizione XI. Teorema.

618. *Il fuso sferico AHBGA* (fig. 209.) *sta alla superficie della sfera, a cui appartiene, come l' angolo HAG di questo fuso sta a quattro angoli retti, o come l' arco GH, che misura quest' angolo sta alla circonferenza HGPEH.*

Si supponga che l' arco GH stia alla circonferenza

HGPEH in un rapporto commensurabile, per esempio come $m : n$. Divisa la circonferenza in n parti eguali, l' arco GH conterrà m di quelle parti; dal polo A a ciascun punto di divisione segnato sulla circonferenza si conduca un quadrante, mediante una tale costruzione la superficie della semisfera sarà divisa in n triangoli sferici eguali fra di loro: m dei quali saranno contenuti nel mezzo fuso GHA, e la superficie quindi di tutta la sfera conterrà $2n$ di quelle parti, mentre il fuso sferico proposto ne conterrà $2m$; onde il fuso AHBGA starà alla superficie della sfera come $2m : 2n$, o come $m : n$; cioè come l' arco GH sta alla circonferenza HGPEH, o come l' angolo GAH del fuso sta a quattro angoli retti.

Se l' arco GH non sarà commensurabile colla circonferenza, si dimostrerà come si è fatto per la proposizione I. del Lib.° III.° (252), che quelle quantità saranno ancora nel medesimo rapporto.

619. *Corollario.* Quindi due fusi appartenenti alla medsima sfera o a sfere eguali stanno fra di loro, come gli angoli rispettivamente formati dai piani dai quali i fusi sono determinati.

620. *Scolio.* L' unghia, o spicchio sferico, compresa dai piani AHB, AGB sta a tutta la sfera AHBPA, come l' angolo HAG, sta a quattro angoli retti; poichè i fusi essendo eguali sono del pari eguali le unghie sferiche, ed essendo eguali le superficie sferiche, sono eguali anche le sfere, dunque l' unghia sferica colla sfera ha lo stesso rapporto del fuso colla superficie sferica, dunque ecc. Due unghie poi appartenenti alla medesima sfera staranno fra di loro come gli angoli formati dai piani dai quali sono comprese.

Proposizione XII. Lemma.

621. ***Essendo dati due circoli concentrici, si può sempre inscrivere nel più grande un poligono regolare, i di cui lati non incontrino la circonferenza del più piccolo, e si può anche circoscrivere al circolo più piccolo un poligono regolare simile all' inscritto nel circolo maggiore, i di cui lati non incontrino la circonferenza del circolo medesimo; di modo che, sì nell' uno che nell' altro caso i lati del poligono descritto saranno rinchiusi fra le due circonferenze.***

Sieno CA, CD (fig. 210.) i raggi dei due circoli dati, al punto A si conduca la tangente FE, che termini alla circonferenza del circolo maggiore; e nel circolo maggiore si inscriva un poligono regolare, si dividano in seguito per metà gli archi determinati dalle corde o lati di quel poligono, e si tirino le corde dei mezzi archi, per cui si avrà un poligono regolare di un doppio numero di lati; si continui a bipartire quegli archi sino a che si giunga ad avere un arco minore di FDE. Sia quest' arco MDN, la di cui metà sia supposta in D, egli è chiaro che la corda MN sarà più lontana dal centro, che FE, e che il poligono regolare di cui MN è un lato non potrà incontrare la circonferenza del circolo, il di cui raggio è CA.

Date le medesime cose, si tirino le rette CM, CN, che incontreranno la tangente FE in P, e Q. La retta PQ sarà il lato del poligono circoscritto al circolo minore simile al poligono inscritto nel circolo maggiore, il di cui lato è MN. Ora il poligono circoscritto, che ha per lato PQ, non potrà incontrare la circonferenza del circolo maggiore, poichè CP è minore di CM. Dunque con questa costruzione si può descrivere un poligono regolare, che sia inscritto nel circolo maggiore, ed un poligono ad esso simile, che sia circoscritto al circolo minore, che avranno i loro lati compresi fra le due circonferenze.

Proposizione XIII. Lemma.

622. *La superficie di un solido circoscritto alla sfera, generato da un mezzo poligono regolare ADEFGB (fig. 205.) nel rivolgersi sopra il suo asse AB, è equivalente al rettangolo contenuto dalla circonferenza di un circolo massimo della sfera inscritta, e dall' asse AB del solido circoscritto.*

Dal centro C al punto di contatto Q del lato DE si conduca il raggio CQ, e dai punti D, Q, E si guidino le perpendicolari Dy, Qr, Ex all' asse AB; finalmente dal punto D si tiri la Dq perpendicolare ad Ex. Ciò fatto si vede che il solido generato dal trapezio DExy è un tronco di cono retto a basi parallele; la superficie convessa di questo solido generata dal lato DE è equivalente al rettangolo DE$\times$*cir.*Qr (607); ma essendo i due triangoli QrC, DqE simili (284), si ha DE:Dq::QC:Qr; ma QC:Qr:: *circ.* QC:*circ.* Qr (435); dunque sarà anche DE:Dq :: *circ.* QC:*circ.* Qr, onde DE $\times$ *circ.* Qr = Dq $\times$ *circ.* QC$=yx\times$*circ.* QC; donde si vede che la superficie descritta da DE è equivalente ad un rettangolo contenuto dalla circonferenza di un circolo massimo della sfera inscritta, e della porzione xy dell'asse del solido circoscritto. Si dimostrerà del pari che la superficie descritta dal lato EF sarà espressa da $xz\times$*circ.*QC, ecc.; dunque la superficie totale del solido circoscritto alla sfera sarà equivalente alla somma dei rettangoli contenuti dalla circonferenza di un circolo massimo della sfera, e da ciascuna delle parti Ay, yx, xz,

zb, bB dell' asse, eguale cioè al rettangolo contenuto dalla circonferenza di un circolo massimo della sfera, e dall'asse del solido circoscritto alla sfera stessa.

623. *Corollario.* Da qui ne segue, che la superficie convessa di una porzione qualunque di quel solido, come quella generata da EDA è equivalente ad un rettangolo contenuto dalla circonferenza di un circolo massimo della sfera; e dalla porzione Ax dell' asse ad esso competente.

Proposizione XIV. Teorema.

624. *La superficie di una sfera di raggio AC (fig. 211.) è equivalente al rettangolo contenuto dalla circonferenza di un circolo massimo della sfera stessa e dal suo diametro AB.*

Se il rettangolo di AB$\times$*circ.* CA non sarà equivalente alla superficie della sfera proposta sarà maggiore o minore.

Sia se è possibile il rettangolo AB $\times$ *circ.* CA equivalente alla superficie di una sfera maggiore, per esempio, della sfera, che ha per raggio CD: al circolo, il di cui raggio è CA si circoscriva un poligono di un numero pari di lati, tale che non incontri la circonferenza di cui CD è il raggio (621). Sieno M ed S due angoli opposti di questo poligono; intorno all' asse MS si faccia girare il semipoligono MNPQRS, e la superficie da esso descritta sarà equivalente al rettangolo di MS $\times$ *circ.* CA (622); ma MS è maggiore di AB; dunque anche la superficie descritta da MNPQRS sarà maggiore di AB $\times$ *circ.* CA, e per conseguenza maggiore della superficie della sfera il di cui raggio è CD. Ora, al contrario, la superficie della sfera di raggio CD è maggiore della superficie descritta dal poligono, poichè la prima rinchiude entro di se la seconda; dunque il rettangolo contenuto dalla circonferenza di un circolo massimo della sfera, e dal suo diametro, non può essere equivalente alla superficie di una sfera maggiore.

Sia, se è possibile, il rettangolo AB $\times$ *circ.* CA, equivalente alla superficie di una sfera minore della sfera, il cui raggio è CA. Al circolo generatore di questa sfera, il di cui raggio sia CF, si circoscriva, come si è fatto superiormente un poligono di un pari numero di lati, e tale che non incontri la circonferenza del circolo il cui raggio è CA. La superficie del solido generato da questo poligono sarà equivalente al rettangolo HL $\times$ *circ.* CF, e quindi HL $\times$ *circ.* CF sarà maggiore di AB $\times$ *circ.* CA; ma AB $>$ HL, e *cir.* CA $>$ *cir.* CF; dunque HL $\times$ *circ.* CF è minore e non maggiore di AB $\times$ *circ.* CA, come si era trovata; dunque AB $\times$ *circ.* CA, non può essere equivalente alla superficie di una sfera nè maggiore nè minore di quella, il di cui raggio è CA; dunque la superficie di una sfera sarà equivalente ad un rettangolo contenuto dalla circonferenza di un circolo massimo della sfera stessa, e dal suo diametro.

625. *Scolio.* Potendosi rappresentare le superficie sferiche con dei rettangoli, così ad esse saranno comuni le proprietà dei rettangoli stessi; le superficie quindi di due sfere staranno come i quadrati dei loro diametri o raggi, o anche come i quadrati delle circonferenze dei rispettivi circoli massimi.

626. *Corollario* I. Siccome poi la superficie di un circolo è equivalente ad un triangolo, la di cui altezza è il raggio, e la base è la circonferenza del circolo medesimo, o ciò che è lo stesso, ad un rettangolo, la di cui altezza è la metà del raggio, e la base è la circonferenza; così la superficie di una

sfera sarà equivalente a quella di quattro circoli massimi appartenenti alla sfera medesima.

627. *Corollario* II. La superficie della sfera è equivalente a quella di un circolo, il di cui raggio è il diametro della sfera. Di fatto stando i cerchj come i quadrati dei raggi, quello che ha raggio doppio sarà quadruplo dell' altro; onde ecc.

628. *Scolio.* Nello stesso modo che abbiamo dimostrato che la superficie di una sfera è equivalente ad un rettangolo contenuto dalla circonferenza di un circolo massimo, e dal suo diametro; si dimostra, che la superficie di una zona sferica, ad una o due basi, è equivalente ad un rettangolo contenuto dalla circonferenza di un circolo massimo della sfera, a cui essa appartiene, e dall' altezza della zona medesima.

Proposizione XV. Teorema.

629. *Una sfera è equivalente ad un cono, la di cui base eguaglia la superficie della sfera, e l' altezza il raggio della sfera medesima.*

Per brevità nominiamo S la sfera di cui si tratta, C il cono, ed R l' altezza del cono o il raggio della sfera.

Se la sfera non sarà equivalente a questo cono sarà minore o maggiore del cono medesimo.

Sia, se è possibile, la sfera S minore del cono C, di una quantità Z. Ciò posto si immagini circoscritto alla sfera un poliedro tale, che differisca dalla sfera di una quantità minore di ogni assegnabile, anche un tale poliedro sarà minore del cono C, poichè la differenza fra esso e la sfera è minore della differenza Z, che passa fra il cono C, e la sfera medesima. Si immagini ora che le facce del poliedro circoscritto alla sfera sieno altrettante basi di piramidi aventi il vertice nel centro della sfera, per lo che avranno tutte l' altezza eguale ad R. Stando le piramidi di eguale altezza come le basi (548), la somma di tutte quelle piramidi, o ciò che è lo stesso, il poliedro circoscritto alla sfera sarà equivalente ad una piramide, che nomineremo P, che avesse per base un poligono equivalente alla superficie del poliedro circoscritto, e per altezza il raggio R della sfera, e questa piramide sarebbe eguale ad un cono C' della stessa altezza R e di base equivalente a quella della piramide P; ma il cono C' è maggiore del cono C, avendo questi coni eguale altezza, ed essendo la base del cono C' maggiore di quella del cono C; dunque il cono C' o il solido circoscritto alla sfera ad esso equivalente, è maggiore e non minore del cono C, come si era trovato, stando alla fatta supposizione; dunque la sfera S non può essere minore del cono C, la di cui base eguaglia la superficie della sfera, e la di cui altezza è il raggio della sfera medesima. Si dimostrerebbe del pari, che la sfera non può essere maggiore del cono C; dunque gli sarà eguale.

630. *Scolio* I. Nello stesso modo si dimostra che un settore sferico è equivalente ad un cono, la di cui base è equivalente alla calotta su cui appoggia, e la di cui altezza è il raggio della sfera.

631. *Scolio* II. Potendosi rappresentare le sfere con dei coni, così ad esse saranno comuni le proprietà dei coni; onde le sfere staranno come i cubi dei loro raggi o dei loro diametri.

Proposizione XVII. Teorema.

632. *Il cilindro retto circoscritto alla sfera sta alla sfera inscritta, come la superficie totale del cilindro medesimo sta alla superficie della sfera.*

Poichè il cilindro retto AEBDFGHM (fig. 212.) è triplo del cono retto LAEBD della medesima base e della stessa altezza; ma il cono LAEBD è doppio del cono CAEBD, il quale ha la medesima base del cono LAEBD, e l' altezza CK eguale alla metà di LK; dunque il cilindro retto circoscritto alla sfera è sestuplo del cono CAEBD. La sfera LNKOL è eguale ad un cono, la di cui base sia quadrupla di un circolo massimo NPOQN, e l' altezza sia il raggio della sfera (626, 629); ma il circolo NPOQN è eguale al circolo AEBDA (567); ed un tale cono è quadruplo del cono CAEBD, poichè ha la medesima altezza ed una base quadrupla di AEBDA; dunque sta il cilindro alla sfera inscritta :: 6 : 4 :: 3 : 2, cioè in ragione sesquilatera.

La superficie convessa del cilindro retto circoscritto è eguale ad un rettangolo contenuto dalla circonferenza AEBDA della sua base, e dal suo asse LK; o ciò che è lo stesso è eguale a quattro circoli ADBEA, o a quattro circoli massimi NPOQN, poichè l' asse LK è eguale al diametro della sfera. Ma a quattro circoli massimi è eguale anche la superficie della sfera, dunque la superficie convessa del cilindro retto circoscritto alla sfera è eguale alla superficie della sfera stessa.

Se alla superficie convessa del cilindro si aggiungono le due basi, ciascuna delle quali è eguale ad un cerchio massimo della sfera, la sua superficie totale sarà eguale a sei circoli massimi, mentre quella della sfera ne eguaglia quattro; onde queste due superficie saranno nel rapporto di 6 : 4, oppure nel rapporto di 3 : 2, cioè sono anch' esse in ragione sesquilatera; ed a cagione del rapporto comune 3 : 2 il cilindro circoscritto starà alla sfera, come la superficie totale del cilindro retto circoscritto alla sfera sta alla superficie della sfera medesima.

LIBRO IX.

DELLA MISURA

DELLE LINEE, DELLE SUPERFICIE, E SOLIDITÀ.

Definizioni.

633. I. Misurare una quantità vuol dire determinare il numero delle volte che la quantità proposta contiene od è contenuta in un'altra quantità della medesima specie. Perciò le misure geometriche sono di tre qualità, cioè di lunghezza, di superficie, e di solidità.

634. II. Dicesi *unità di misura* quel *modulo* o termine di paragone, a cui si riferiscono tutte le altre, onde misurarle.

La distanza che vi è fra due dati punti essendo determinata dalla retta, che li congiunge, essa si misurerà mediante un'altra retta scelta a piacere per unità di misura, ed il numero delle volte che questa retta sarà in quella contenuta ci darà la misura della proposta distanza. Così le linee rette, le linee spezzate, i contorni de' poligoni, gli archi o circonferenze de' cerchj, ed altre linee curve potranno misurarsi per mezzo di un *modulo* lineare o rettilineo, qualora si possa assegnare delle linee rette, che le rappresentino, ciò che si chiama *rettificazione* delle linee curve.

635. III. L'unità di misura, che si impiega ordinariamente per valutare le superficie è un quadrato, e la ragione per cui si preferisce il quadrato a qualunque altra figura, si è che la forma sua è

la più semplice, avendo il quadrato la lunghezza eguale alla sua larghezza, per cui ciascuna di queste dimensioni può essere rappresentata dall' unità lineare, mentre il quadrato esprime l' unità di superficie.

Quando adunque si vuol misurare una superficie, si tratta di trovare quante volte essa contiene un dato quadrato, preso per unità di misura, e perchè appunto è un quadrato la misura a cui d' ordinario si riferiscono le superficie da misurarsi, così la valutazione di una superficie qualunque in quadrati, si chiama *quadratura*.

636. IV. Siccome il cubo è quello tra i solidi, che ha tutte e tre le sue dimensioni eguali; così per essere il più semplice si suol prendere per unità di misura solida; mentre si ha il vantaggio che preso questo solido per unità, ciascuna delle sue facce rappresenta l' unità di misura superficiale, ed ogni suo spigolo esprime l'unità di misura lineare. L'operazione, mediante la quale si trova il numero delle volte, che un solido qualunque contiene il cubo scelto per unità di misura solida, dicesi *cubatura*.

Proposizione I. Teorema.

637. *La quadratura di un rettangolo qualunque ABCD* (fig. 213.) *si ottiene moltiplicando il numero delle unità lineari contenute nella sua base AB, per quello delle unità contenute nella sua altezza AD.*

Poichè i parallelogrammi, che hanno un angolo rispettivamente eguale sono in ragion composta dei lati che stanno intorno all' angolo eguale (267), così starà $ABCD : abcd :: AB \times AD : ab \times ad$; donde $ABCD = \frac{AB \times AD}{ab \times ad} \times abcd = \frac{AB}{ab} \times \frac{AD}{ad} \times abcd$, e siccome

$\frac{AB}{ab}$ è un rapporto numerico, come lo è anche $\frac{AD}{ad}$, così la misura della superficie del rettangolo ABCD sarà espressa da *abcd* moltiplicato pel prodotto di questi numeri. Se poi *abcd* sarà un quadrato, e verrà preso per unità di misura sarà $abcd=1$, la sua base $ab=1$, e la sua altezza $ad=1$; e quindi sarà $ABCD=AB\times AD$; donde si vede che il prodotto $AB\times AD$ è un numero astratto, a cui si intende applicato il fattore $abcd=1$, onde tale prodotto sarà atto ad esprimere il numero delle unità di superficie contenute nel rettangolo proposto ABCD.

638. *Esempio.* Supponiamo che *ab* stia 4 volte in AB, e che *ad* stia 5 volte in AD; siccome tanto *ab*, quanto *ad* è $=1$, così sarà $AB=4$, $AD=5$, e quindi $ABCD=4\times 5=20$. Se l'unità di misura lineare *ab*, di cui ci siamo serviti sarà il braccio, il rettangolo ABCD conterrà 20 quadrati, ciascuno dei quali avrà un braccio di lato.

Qualora da tutte le divisioni fatte nella base AB venghino condotte delle parallele all'altezza AD, e da tutte le divisioni fatte nell'altezza venghino condotte delle parallele alla base, ad incontrare rispettivamente i lati opposti; si vedrà dalla semplice ispezione della figura che il rettangolo proposto ABCD conterrà 20 quadrati tutti eguali all'assunta unità di misura *abcd*.

639. *Scolio* I. Alcune volte giova valersi per unità di misura di un rettangolo; per avere in tal caso la misura della superficie di un rettangolo espressa in rettangoli eguali all'unità di misura proposta, si moltiplicherà il numero delle volte, che la base del rettangolo da misurarsi contiene la base del rettangolo, preso per unità, pel numero delle volte, che l'altezza del rettangolo medesimo contiene l'altezza appartenente all'unità di misura.

640. *Scolio* II. Se ABCD fosse anch'esso un quadrato sarebbe $AB=AD$, onde la valutazione della sua superficie sarebbe espressa da $AB\times AB=\overline{AB}^2$; oppure da $AD\times AD=\overline{AD}^2$, onde essa si otterrebbe, facendo il quadrato delle unità lineari di misura, contenute in uno qualunque de' suoi lati.

641. *Corollario* I. La quadratura di un parallelogrammo qualunque sarà espressa dal prodotto della sua base per la sua altezza; poichè egli è equivalente ad un rettangolo di egual base e di eguale altezza (189).

642. *Corollario* II. La quadratura di un triangolo qualunque ABC (fig. 214.) si ottiene, prendendo la metà del prodotto della sua base AB per la sua altezza CD, oppure moltiplicando la metà della base per tutta l'altezza, o anche facendo il prodotto di tutta la base, per la metà dell'altezza; poichè un triangolo qualunque è sempre la metà di un parallelogrammo di egual base, e di eguale altezza (187).

643. *Esempio.* Supponiamo che la base AB del triangolo ABC sia di 6 metri, e la sua altezza CD sia di 4 metri, la di lui superficie conterrà 12 quadrati, ciascuno dei quali avrà un metro per lato.

Se il triangolo fosse rettangolo, la quadratura della sua superficie sarebbe espressa dalla metà del prodotto de' suoi due cateti; servendo questi uno per base, e l'altro per altezza.

644. *Scolio.* Per base di un triangolo si può scegliere a piacere uno qualunque de' suoi lati,

l' altezza poi del triangolo medesimo è la perpendicolare, che parte dall' angolo opposto alla base, e cade sopra la base, o sul prolungamento della base stessa.

645. *Corollario* III. La quadratura di un trapezio ABCD (fig. 215.) si ha moltiplicando la semisomma dei lati paralleli AB, DC per la distanza DF dei lati stessi; poichè un trapezio qualunque ABCD è equivalente ad un rettangolo contenuto da due rette, una delle quali sia eguale ad $\frac{AB+DC}{2}$, e l' altra sia eguale a DF (192).

646. *Esempio.* Sia $AB=6$ piedi; $DC=4$ piedi; $DF=5$ piedi, sarà $ABCD=\frac{AB+DC}{2}\times DF=\frac{6+4}{2}\times 5=25$ piedi quadrati.

647. *Corollario* IV. La quadratura di un poligono qualunque ABCDE (fig. 216.) si ottiene sommando i valori delle superficie di tutti i triangoli, nei quali il poligono proposto si decompone.

648. *Esempio.* Da uno de' suoi angoli qualunque, per esempio dall' angolo C, a tutti gli altri angoli non adiacenti di quel poligono si tirino le diagonali, per cui il poligono ABCDE verrà in questo caso diviso nei tre triangoli ABC, ACE, CED, e sarà $ABCDE=ABC+ACE+CED$; e la sua quadratura sarà espressa da $\frac{AC\times BF}{2}+\frac{CE\times AH}{2}+\frac{CE\times DG}{2}$. Se sarà poi $AC=5$, $BF=6$; $CE=6$, $AH=4$; $DG=3$, si avrà $ABCDE=\frac{5\times 6}{2}+$

$\frac{6\times 4}{2}+\frac{6\times 3}{2}=15+12+9=36$, il poligono proposto conterrà cioè 36 quadrati, ciascuno dei quali avrà per lato l' unità di misura, assunta per misurare le basi, e le altezze di quei triangoli.

Se il poligono sarà regolare la sua quadratura si otterrà più facilmente, prendendo la metà del prodotto del suo perimetro per l' apotema (403).

649. *Corollario* V. La quadratura di un circolo qualunque AFEA (fig. 217.) si ha moltiplicando la circonferenza per la metà del suo raggio AC; poichè un circolo è equivalente ad un triangolo, la di cui base sia la circonferenza del dato circolo, e l' altezza sia il raggio del circolo medesimo (437).

650. *Esempio.* Sia il raggio AC del circolo proposto di sette braccia, valendosi del rapporto di Archimede, e nominando C la circonferenza di un circolo qualunque, il di cui raggio sia R, si avrà $7:22::2R:C$; onde la circonferenza di un circolo qualunque sarà generalmente espressa da $C=\frac{22}{7}\times 2R$, e nel nostro caso sarà $=\frac{22}{7}\times 2\cdot 7=44$ braccia. La quadratura poi del circolo AFEA sarà di $\frac{44\times 7}{2}=154$ braccia quadrate.

651. *Scolio.* Siccome il rapporto fra la circonferenza ed il diametro non si può avere che per approssimazione, così anche la quadratura del cerchio e delle sue frazioni, non si ha che per approssimazione (439).

652. *Corollario* VI. La quadratura di un settore circolare ADCA si ha dal prodotto della metà del-

l' arco ABD, pel raggio AC; poichè un settore qualunque è equivalente ad un triangolo, che ha per base una retta eguale all' arco sopra del quale egli appoggia, e per altezza il raggio (438) del circolo, a cui appartiene.

653. *Esempio.* Sia, come nel precedente corollario, il raggio del circolo, a cui appartiene il settore proposto, di sette braccia, la circonferenza di quel circolo sarà di 44 braccia, sia l' arco ABD di 60 gradi; onde trovare la grandezza prossima dell'arco ABD espressa in braccia si instituirà la seguente proporzione; come la circonferenza C sta all' arco ABD, così 360° : 60°, cioè C : ABD : : 360° : 60°, donde $ABD = C \times \frac{60^\circ}{360^\circ} = C \times \frac{1}{6} = \frac{44}{6}$. La superficie adunque del settore ADCA espressa in braccia quadrate sarà ....

$$= \frac{44}{6} \times \frac{7}{2} = \frac{11}{3} \times 7 = \frac{77}{3} = 25 + \frac{2}{3} = 25{,}667.$$

654. *Corollario* VII. La quadratura del segmento circolare ABDA, corrispondente al settore ADCA si otterrà sottraendo dalla superficie del settore ridotta a quadrati, quella del triangolo ACD. La quadratura di una porzione di circolo ADFGA determinata da due corde parallele AD, GF, si otterrà sottraendo dal valore del segmento FBGF quello del segmento DBAD.

655. *Scolio.* Qualora fosse proposto un segmento di circolo da misurarsi, e che non si conoscesse la grandezza del raggio del circolo a cui appartiene, bisognerebbe prima di tutto trovare il centro del circolo, di cui il segmento è parte (328), onde poterne conoscere il raggio; dopo di che si potrà valutare facilmente la di lui superficie.

656. *Corollario* VIII. La quadratura della corona ADEFKBGH (fig. 219.) contenuta da due circonferenze concentriche, si ottiene sottraendo dalla superficie del circolo maggiore ADEFA valutata in quadrati, quella del circolo minore BGHKB.

657. *Corollario* IX. La quadratura della superficie convessa di un prisma qualunque ABCDENFGHL (fig. 186.) si ottiene moltiplicando il contorno della sezione PQRSV fatta perpendicolarmente ad uno de' suoi spigoli AF, per lo spigolo medesimo, poichè (539) tale superficie è equivalente ad un rettangolo, contenuto da quelle due rette. Se il prisma proposto fosse retto, si otterrebbe la quadratura della sua superficie convessa, moltiplicando il perimetro della sua base per la sua altezza. Se poi alla superficie convessa si aggiungerà la superficie delle due basi del prisma, o ciò che è lo stesso il doppio del valore della superficie di una delle sue basi, si avrà la quadratura di tutta la superficie del prisma proposto.

658. *Corollario* X. La quadratura della superficie convessa di una piramide retta SABCDE (fig 182.), si ha moltiplicando il contorno del poligono ABCDE, che le serve di base per la metà dell' apotema SK della piramide stessa; poichè (558), tale superficie è equivalente ad un triangolo, la di cui base è il contorno del poligono, su cui appoggia la piramide, e l' altezza è l' apotema della piramide medesima.

Se poi alla superficie convessa della piramide retta proposta valutata in quadrati si aggiungerà la misura della superficie del poligono ABCDE, che le serve di base, si avrà la quadratura della superficie totale della piramide stessa.

659. *Corollario* XI. La quadratura della superficie convessa di un tronco di piramide retta a basi parallele ABCDEFGH (fig. 196.), si ottiene moltiplicando il contorno della sezione LMNO fatta nel tronco parallelamente alle basi, ed equidistante dalle basi medesime, per la porzione PQ dell'apotema corrispondente al tronco, poichè tale superficie è equivalente ad un rettangolo contenuto da quelle linee (559). La quadratura della sua superficie totale risulta dalla somma del valore della superficie convessa, con quello delle due basi.

660. *Corollario* XII. La quadratura della superficie di un poliedro qualunque, si ottiene dalla somma delle quadrature parziali delle facce, che lo contengono. Se il poliedro poi sarà regolare, basterà determinare la quadratura di una delle sue facce, e moltiplicarne il valore pel numero delle facce, di cui la sua superficie è composta.

661. *Corollario* XIII. La quadratura della superficie convessa di un cilindro retto AHED (fig. 220.) si ha moltiplicando la circonferenza del circolo, su cui egli appoggia, pel lato AH del cilindro medesimo, o per la sua altezza; giacchè tale superficie è equivalente ad un rettangolo contenuto da quelle due linee (598).

662. *Esempio.* Sia il raggio AO della sua base di 4 once, il lato AH di 8 once. La circonferenza della sua base sarà espressa da $\frac{22}{7} \times 8 = \frac{176}{7}$, e la superficie convessa del cilindro proposto sarà di

$$\frac{176}{7} \times 8 = \frac{1408}{7} = 201 + \frac{1}{7} = 201{,}143 \text{ once quadrate.}$$

La quadratura delle due basi del cilindro medesimo eguagliando quella di due triangoli, le di cui

basi sono le circonferenze dei circoli medesimi, e l'altezza è il raggio AO, eguaglierà anche quella di un rettangolo, la di cui base è la circonferenza, e l'altezza è AO, onde sarà in questo caso espressa da $\frac{176}{7} \times 4 = 100 + \frac{4}{7} = 100{,}571$. La superficie totale del cilindro proposto essendo composta della sua superficie convessa, e di quella delle basi, la sua misura sarà di

$$201{,}143 + 100{,}571 = 301{,}714 \text{ once quadrate.}$$

663. *Corollario* XIV. La quadratura della superficie convessa di un cono retto SAEBD (fig. 207.) si ottiene prendendo la metà del prodotto della circonferenza della sua base ADBEA per l'apotema SA; poichè essa equivale ad un triangolo, la di cui base è quella circonferenza, e l'altezza è l'apotema SA (602).

664. *Esempio.* Sia il raggio AC = 5 palmi, e sia SA = 10 palmi; la circonferenza sarà eguale a $\frac{22}{7} \times 10 = \frac{220}{7}$. Il prodotto $\frac{220}{7} \times \frac{10}{2} = \frac{1100}{7} = 157 + \frac{1}{7} = 157{,}143$ indicherà il numero dei palmi quadrati contenuti nella superficie convessa del cono proposto. La superficie della base del cono stesso sarà espressa da $\frac{220}{7} \times \frac{5}{2} = 78 + \frac{4}{7} = 78{,}571$ palmi quadrati, e la superficie totale del cono retto SAEBD sarà di

$$157{,}143 + 78{,}571 = 235{,}714 \text{ palmi quadrati.}$$

665. *Corollario* XV. La quadratura della superficie convessa di un tronco di cono retto a basi

parallele ADBEFHGM (fig. 207.), si trova moltiplicando la semisomma delle due circonferenze delle basi ADBEA, FHGMF pel lato AF del tronco di cono, o moltiplicando la circonferenza della sezione NO, fatta parallelamente alle basi ad eguali distanze dalle basi stesse pel lato AF; poichè (607, 608) essa è equivalente ad un rettangolo contenuto da quelle linee.

666. *Corollario* XVI. La quadratura della superficie della sfera si ottiene moltiplicando la circonferenza di un cerchio massimo della sfera stessa pel suo diametro, poichè essa è equivalente ad un rettangolo contenuto da quelle linee (624).

667. *Esempio.* Se il raggio AC della sfera ADBEA, (fig. 203.) è eguale a 7 once; la circonferenza di un circolo massimo della sfera medesima sarà di 44 once (650); la misura della superficie di quella sfera sarà espressa da $44 \times 14 = 616$ once quadrate.

668. *Corollario* XVII. La quadratura di una berretta, o calotta, ed anche di una zona sferica, si otterrà moltiplicando la circonferenza di un cerchio massimo della sfera, a cui la calotta o la zona appartiene, per la sua altezza; poichè una tale superficie è equivalente ad un rettangolo contenuto da quelle linee (628). La superficie poi di un settore sferico risultando dalla somma della superficie della berretta sferica ad esso appartenente, e della superficie convessa del cono, che ha il vertice nel centro della sfera, e per base quella del segmento, cui appartiene la berretta sferica, se ne avrà la quadratura, sommando quella della berretta colla quadratura della superficie convessa del cono.

669. *Corollario* XVIII. La quadratura di un fuso sferico AGBHA (fig. 209.) si ottiene moltiplicando la misura della superficie della sfera APBHA, a cui esso appartiene pel rapporto, che vi è fra la

circonferenza EHGPE, e l' arco GH che misura l' angolo HAG appartenente al fuso medesimo.

670. *Esempio.* Supponiamo che l' angolo HAG del fuso sferico AGBHA sia misurato da un arco GH di 40°, e che la sfera, a cui egli appartiene, abbia 7 once di raggio, per cui avrà (667) 616 once quadrate di superficie. Moltiplicando questo numero pel rapporto di $40^{\circ} : 360^{\circ}$, ossia di $1 : 9$, la misura della superficie del fuso sferico sarà

$$= 616 \times \frac{1}{9} = 68 + \frac{4}{9} = 68{,}444 \text{ once quadrate.}$$

Proposizione II. Teorema.

671. *La misura della solidità di un prisma retto qualunque ABCDEFGH (fig. 218.), o la sua cubatura è eguale al prodotto del numero delle unità di misura superficiali contenute nella sua base ABCD, pel numero delle unità lineari contenute nella sua altezza AF.*

Poichè i prismi sono in ragione composta delle loro basi e delle loro altezze (533), così starà *pris.* FC : *pris.* fc : : ABCD $\times$ AF : $abcd \times af$. Se il prisma fc è un cubo, e che sia l' unità di misura solida, ciascuna delle sue facce esprimerà l' unità di misura di superficie, ed ogni suo spigolo indicherà l' unità di misura lineare, onde sarà *pris.* $fc = 1$; $abcd = 1$; $af = 1$, e quindi starà *pris.* FC : 1 : : ABCD $\times$ AF : 1, donde si ricava *pris.* FC = ABCD $\times$ AF. Con un ragionamento analogo a quello, che si è fatto al (637), si vedrà che il prodotto ABCD $\times$ AF è un numero astratto, a cui si deve intendere applicato il fattore *cubo* . $fc = 1$; onde un tale prodotto è atto ad esprimere il numero dei cubi unitarj contenuti nella solidità, o nel volume del prisma proposto.

672. *Esempio.* Se la base ABCD del prisma proposto conterrà 25 unità di misura superficiali $=$ *abcd*, e la sua altezza AF conterrà 5 unità di misura lineari $=$ *af*, il numero delle unità di misura solide sarà espresso da $25 \times 5 = 125$; il prisma proposto adunque conterrà cento e venticinque cubi tutti eguali al cubo *abcdefgh* assunto per unità di misura.

673. *Scolio.* Se la base del prisma retto fosse un rettangolo, la misura della di lui solidità si otterrà moltiplicando fra di loro i tre spigoli, che concorrono a formare uno qualunque de' suoi angoli solidi. Se poi fosse un cubo, avendo questo tutti i suoi spigoli eguali, la misura della sua solidità si troverebbe moltiplicando due volte per se medesimo il numero delle unità di misura lineari contenute in uno qualunque de' suoi spigoli, o ciò che è lo stesso, facendo il cubo del numero delle unità medesime.

674. *Corollario* I. La misura della solidità di un prisma qualunque obliquo si otterrà moltiplicando la sua base per la sua altezza; poichè un prisma qualunque obliquo è equivalente ad un prisma retto di egual base e di eguale altezza (527).

675. *Corollario* II. La cubatura di una piramide si ottiene prendendo il terzo del prodotto della sua base per la sua altezza; poichè una piramide qualunque è la terza parte di un prisma di egual base e di eguale altezza (552).

676. *Esempio.* Sia la misura della superficie della base ABCD della piramide SABCD (fig. 185.) di 30 piedi quadrati, e la sua altezza SG sia di 9 piedi, la misura della sua solidità sarà di

$$\frac{30 \times 9}{3} = 90 \text{ piedi cubici.}$$

677. *Corollario* III. La misura della solidità di un tronco di piramide ABCDEFGH (fig. 196.) a basi parallele, si otterrà moltiplicando la somma delle misure delle basi ABCD, EFGH, e di una media proporzionale fra le basi medesime, per la terza parte dell'altezza del tronco; poichè un tronco di piramide a basi parallele è equivalente alla somma di tre piramidi una delle quali abbia per base la base inferiore del tronco, l'altra la base superiore, e la terza una base, che sia media proporzionale fra le basi stesse, e ciascuna delle quali abbia poi per altezza l'altezza stessa del tronco (556).

678. *Esempio.* Sia ABCD $= 16$ braccia quadrate ed EFGH$=4$ braccia quadrate; la media proporzionale fra queste due basi è di 8 braccia; l'altezza del tronco di piramide proposto sia di 9 braccia; la misura della solidità del tronco medesimo

sarà espressa dal prodotto $(16 + 4 + 8) \times \frac{9}{3} = 84$

braccia cubiche.

679. *Corollario* IV. La misura della solidità di un poliedro qualunque si otterrà scomponendo il poliedro proposto in piramidi, e sommando le solidità di tutte le piramidi dopo d'averne trovata la rispettiva cubatura.

680. *Corollario* V. La misura della solidità di un cilindro ADEH (fig. 220.), si ottiene moltiplicando la sua base per la sua altezza; poichè (600) un cilindro è equivalente ad un prisma retto, che ha la base equivalente a quella del cilindro, e l'eguale altezza.

681. *Esempio.* Sia il raggio AO della base del cilindro proposto di 7 once, e la sua altezza di 10 once. La circonferenza del circolo, che gli serve

di base sarà di 44 once (656), e la misura della superficie della base medesima sarà 154 once quadrate, e quella della solidità del cilindro ADEH sarà di $154 \times 10 = 1540$ once cubiche.

Sia il raggio BO del cilindro concentrico BCFG di 3 once e mezzo; la di lui solidità valutata come abbiamo fatto superiormente è di 385 once cubiche. Ora se dalla misura della solidità del cilindro ADEH, si sottrarrà quella del cilindro concentrico BCFG di eguale altezza, si avrà la misura della solidità del tubo cilindrico ADEHBCFG, la quale in questo caso sarà di 1155 once cubiche.

682. *Corollario* VI. La misura della solidità di un cono SADBE (fig. 207.) si ottiene moltiplicando la sua base ADBEA per la terza parte dell'altezza SC; poichè un cono è equivalente ad una piramide di egual base e di eguale altezza (604).

683. *Corollario* VII. La misura della solidità di un tronco di cono AEBDFHGM (fig. 207.) a basi parallele, si ha moltiplicando la somma delle basi AEBDA, FHGMF, e di una media proporzionale fra le basi medesime, per la terza parte dell'altezza LC del tronco stesso; poichè egli è equivalente a tre coni, uno dei quali ha per base la base inferiore del tronco, l'altro la base superiore, ed il terzo una media proporzionale fra quelle due basi, avendo tutti l'eguale altezza del tronco di cono (614).

684. *Scolio*. La misura della solidità di un tronco di cono retto a basi parallele si potrebbe ottenere anche calcolando la solidità del cono intero SAEBD, e da essa sottraendo quella del cono mancante SFHGM. Lo stesso dicasi riguardo alla sua superficie convessa.

685. *Corollario* VIII. La misura della solidità

della sfera si ha moltiplicando la di lei superficie per la terza parte del suo raggio; poichè la sfera equivale ad un cono, che ha per base la di lei superficie, e per altezza il raggio della sfera medesima (629).

686. *Esempio*. Abbia la sfera AHBPA (fig. 209.) il raggio $AC = 7$ once; la di lei superficie sarà di 616 once quadrate (667); e la sua solidità sarà di

$$616 \times \frac{7}{3} = \frac{4312}{3} = 1437 + \frac{1}{3} = 1437{,}333 \text{ once cub.}$$

687. *Corollario* IX. La misura della solidità di una crosta sferica, come sarebbe di una bomba, si ottiene sottraendo dalla misura della solidità di tutta la sfera esterna ADEFA (fig. 219.) la misura della solidità della sfera interna concentrica BGHKB.

688. *Corollario* X. La misura della solidità di un settore sferico si ottiene moltiplicando la superficie della calotta sferica, che le serve di base; per la terza parte del raggio della sfera, a cui appartiene, poichè egli è equivalente ad un cono la di cui base è eguale alla superficie della calotta, e l'altezza è il raggio della sfera (630).

689. *Corollario* XI. La misura della solidità di un segmento sferico, si ottiene sottraendo dalla solidità del settore ad esso corrispondente il cono, che ha il suo vertice nel centro della sfera, e che ha per base la base del segmento medesimo. Se il segmento fosse maggiore di un emisfero, la misura della sua solidità si otterrà sottraendo dalla misura della sfera quella del segmento mancante. Se si volesse la misura della solidità di una porzione di essa compresa da due piani paralleli, dalla misura della solidità del segmento maggiore, si sottrarrà la misura della solidità del segmento minore, e la differenza di quelle solidità ridotte a cubi, sarà la misura della solidità cercata.

690. *Corollario* XII. La misura della solidità di un' unghia, o spicchio sferico si ottiene moltiplicando la misura della solidità della sfera, a cui esso appartiene, pel rapporto che vi è tra la circonferenza, e l' arco, che compete allo spicchio medesimo (620).

691. *Scolio.* Nella valutazione della superficie e della solidità, in cui entra il rapporto fra il diametro e la circonferenza, non conoscendosi questo rapporto, che per approssimazione, i valori ottenuti non possono essere che approssimati; ma lo sono in modo, che anche impiegando il rapporto di Archimede di $7 : 22$, cioè il meno esatto fra quanti si conoscono, l' errore è tale che occorre ben di raro di doverne tener conto.

692. *Scolio generale.* Sia R il raggio di un circolo, π il rapporto del diametro alla circonferenza; la circonferenza C di un circolo qualunque sarà espressa da .... $2\pi R$.
La di lui superficie da .... πR^2.
La superficie di un settore circolare, il di cui arco sia di a°, lo sarà da .... $\pi R^2 \times \frac{a^\circ}{360^\circ}$.

Sia R il raggio della base di un cilindro retto, A la sua altezza, o lato; la sua superficie convessa sarà espressa da .... $2\pi R \times A$.
La superficie totale del cilindro medesimo sarà
$$2\pi R \times A + 2\pi R \times R = 2\pi R\,(A + R).$$
La sua solidità .... $\pi R^2 \times A$.
Sia R il raggio della base di un cono retto, A la sua altezza, L il lato, la sua superficie convessa sarà espressa da .... $\pi R \times L$.
La superficie totale da $\pi R \times L + \pi R^2 = \pi R\,(L + R)$.

La solidità da .... $\frac{1}{3}\pi R^2 \times A$.

Nominando R il raggio della base inferiore di un tronco di cono retto a basi parallele, r quello della base superiore, L il lato del tronco di cono, A la sua altezza, la superficie convessa del medesimo sarà espressa da $\frac{2\pi R + 2\pi r}{2} \times L = \pi L(R+r)$; e la superficie totale da $\pi L(R+r) + \pi R^2 + \pi r^2 = \pi[L(R+r) + R^2 + r^2]$; la sua solidità sarà $(\pi R^2 + \pi r^2 + \pi Rr)\frac{A}{3} = \frac{1}{3}\pi A(R^2 + r^2 + Rr)$

Nominando R il raggio della sfera, la sua superficie sarà espressa da .... $4\pi R^2$:
La sua solidità da .... $\frac{4}{3}\pi R^3$:

La solidità di una crosta sferica contenuta fra due sfere concentriche di raggi rispettivamente R, r, sarà $\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\,(R^3 - r^3)$.
La superficie di un fuso sferico, il di cui angolo sia di a°, sarà .... $4\pi R^2 \times \frac{a^\circ}{360^\circ}$.
La solidità dello spicchio sferico o unghia sferica, il cui angolo sia di a°, sarà $\frac{4}{3}\pi R^3 \times \frac{a^\circ}{360^\circ}$.
La superficie di una zona, o di una calotta sferica, nominando A la sua altezza, sarà espressa da $2\pi R \times A$.
La solidità di un settore sferico, nominando s la superficie della sua base, ed S quella della sfera, a cui appartiene, sarà espressa da .... $\frac{4}{3}\pi R^3 \times \frac{s}{S}$.

Fine della Geometria.

ELEMENTI

DI TRIGONOMETRIA

PIANA O RETTILINEA.

Principj generali.

1. Qualunque triangolo è composto di sei parti, di tre lati cioè e di tre angoli.

2. L' oggetto della trigonometria piana è quello di risolvere i triangoli rettilinei; conoscendo in numeri tre delle sei parti, che costituiscono un triangolo, essa insegna a trovare i valori numerici delle altre tre.

Nelle tre parti date è necessario però che vi sia almeno un lato, mentre se fossero conosciuti i soli tre angoli di un triangolo, il problema sarebbe indeterminato, poichè quei dati converrebbero a tutti i triangoli simili al triangolo proposto, ed in quel caso non si potrebbero avere se non i rapporti, che esistono fra i lati del triangolo medesimo, e non l' assoluta loro grandezza.

3. Quando fra le cose date vi è uno o più lati, si può determinare tutto il rimanente del triangolo, e non vi è, che l' unico caso in cui fossero conosciuti due lati e l' angolo opposto ad uno di questi lati, ove rimanga ancora qualche cosa di indeterminato, così se nel triangolo ABC (fig. 1.) fossero conosciuti i lati AB, BC e l' angolo A opposto al lato BC; non si potrà determinare il valore dell' angolo C, nè quelli dell' angolo B e del lato AC, se prima non si saprà, se l' angolo C debba essere acuto o ottuso; di fatto se dal punto B qual centro con raggio BC si descriverà l' arco di cerchio CD a tagliare la AC o il suo prolungamento in D, condotta la BD, si avrà il triangolo BAD, nel quale, per essere BD=BC, siccome raggi dello stesso cerchio, si conosceranno le medesime cose, che erano note nel triangolo ABC; si avranno quindi per determinare l' angolo ADB, i medesimi dati, che si avevano nel triangolo ABC per determinare l' angolo C. In questo caso si può assegnare tanto il valore dell' angolo C, quanto quello di ADB, come avremo occasione di vedere in appresso; la sola cosa, che resta indeterminata è di sapere se l' angolo cercato debba essere acuto o ottuso, onde potervi applicare quello dei due valori, che ad esso conviene.

4. Anche con semplici costruzioni geometriche o *grafiche*, si possono risolvere i medesimi problemi, che si risolvono colla trigonometria, ma queste costruzioni, che sono esatte in teorica, non darebbero che una discreta approssimazione in pratica a motivo della imperfezione degli strumenti, che debbonsi impiegare. Le risoluzioni trigonometriche al contrario, essendo indipendenti da tutte le costruzioni meccaniche, danno delle soluzioni, che sono dotate del massimo grado di esattezza.

5. Le risoluzioni trigonometriche sono fondate sulle proprietà di certe linee, che si dicono *funzioni circolari* o *trigonometriche*, col mezzo delle quali si giunge ad esprimere in modo semplicissimo le relazioni, che vi sono fra i lati e gli angoli di un dato triangolo qualunque.

6. Siccome per misurare gli angoli si adope-

rano gli archi di cerchio intersetti fra i loro lati (349); così d'ora innanzi tanto gli archi che gli angoli verranno indistintamente espressi col numero dei gradi, minuti, e secondi ad essi appartenenti; di modo che l'angolo retto sarà espresso da 90°, due angoli retti da 180°, tre angoli retti da 270°, quattro angoli retti da 360°, o da tutta la circonferenza; l'angolo semiretto da 45°, ecc.

7. Il *complemento* di un angolo o di un arco è ciò che rimane sottraendo quest'angolo da un angolo retto; cosicchè, per esempio, l'angolo di 75° avrà per suo complemento l'angolo di 15°, e l'angolo di 100° avrà per complemento un angolo di -10°. In generale essendo x un angolo qualunque, il suo complemento sarà espresso da $90^\circ - x$.

8. I due angoli acuti di un triangolo rettangolo qualunque, valendo unitamente un angolo retto (162), si serviranno reciprocamente di complemento.

9. Il *supplemento* di un angolo o di un arco è ciò che si ottiene sottraendo quest'angolo da due angoli retti, ossia da 180°. Il supplemento, per esempio, di un angolo di 145° sarà di 35°, quello di un angolo di 200° sarà di -20°. In generale il supplemento di un angolo x sarà espresso da $180^\circ - x$.

10. Siccome poi due angoli conseguenti presi insieme sono eguali a due angoli retti (113), ne viene che essi si serviranno reciprocamente di supplemento; così pure essendo la somma dei tre angoli di un triangolo qualunque eguale a due angoli retti (152) uno de' suoi angoli qualunque sarà supplemento degli altri due presi insieme, e *viceversa*.

Delle funzioni circolari o linee trigonometriche.

11. Supposto che B sia l'*origine* di un arco BD (fig. 2.), o il luogo donde egli incomincia; la perpendicolare DC, abbassata dall'altra estremità dell'arco medesimo sul diametro BM, che passa per l'origine, dicesi *seno retto*, o semplicemente *seno* dell'arco BD o dell'angolo BAD da esso misurato.

12. La parte AC del raggio AB compresa fra il centro ed il seno dicesi *coseno* dell'arco BD, o dell'angolo BAD. La parte BC del medesimo raggio, compresa fra il seno e l'origine, nominasi *senoverso* dell'arco BD, o dell'angolo BAD.

La retta BE, che dall'origine B si innalza perpendicolarmente al raggio AB, protratta sino all'incontro del raggio AD prolungato, che passa per l'altra estremità dell'arco BD dicesi *tangente trigonometrica*, o semplicemente *tangente* dell'arco BD, o dell'angolo BAD. La retta AE, che parte dal centro, passa pel punto D, e va ad incontrare la tangente in E, dicesi *secante trigonometrica* o semplicemente *secante* dell'arco BD, o dell'angolo BAD.

Nella geometria ordinaria, le tangenti e le secanti si considerano solamente per rispetto alla loro posizione, qui si considerano ancora per riguardo alla loro lunghezza.

13. Se dal centro A si innalza il raggio AG perpendicolare ad AB, l'angolo GAB è retto, e per conseguenza l'arco GD, o l'angolo GAD è complemento dell'arco BD, o dell'angolo BAD (7). Sarà dunque $GAD = 90^\circ - BAD$. La retta DH perpendicolare ad AG sarà il seno dell'arco GD, la cui origine si suppone in G; sarà AH il suo coseno; GH il senoverso; GL la tangente, ed AL la secante dell'arco medesimo GD, o dell'angolo $GAD = 90^\circ - BAD$.

14. Le linee trigonometriche si sogliono scrivere per abbreviazione nella seguente maniera.

In luogo di seno si scrive *sen.*, in vece di coseno *cos.*, in cambio di senoverso *senv.*, in luogo di tangente *tang.*, in vece di secante *sec.*, di modo che, nominando, per brevità, x l'angolo BAD, sarà

$DC = sen.\ x \qquad DH = sen.\ GD = sen.\ (90^\circ - x).$

$AC = cos.\ x \qquad AH = cos.\ GD = cos.\ (90^\circ - x).$

$BC = senv.\ x \qquad GH = senv.\ GD = senv.\ (90^\circ - x).$

$BE = tang.\ x \qquad GL = tang.\ GD = tang.\ (90^\circ - x).$

$AE = sec.\ x \qquad AL = sec.\ GD = sec.\ (90^\circ - x).$

15. Per essere poi il quadrilatero ACDH un rettangolo, si ha $DH = AC$, $AH = DC$; donde si ricava $sen.(90^\circ - x) = cos\ x$, e $cos.(90^\circ - x) = sen. x$; onde il coseno di un angolo x non è altro se non che il seno dell'angolo GAD, che serve ad esso di complemento, ed il coseno di un angolo di complemento di un dato angolo x, non è che il seno dell'angolo proposto.

Nello stesso modo, che al seno dell'angolo di complemento si è dato il nome di coseno; così al senoverso, alla tangente, alla secante dell'angolo di complemento, si è convenuto, per brevità di espressione, di dare rispettivamente i nomi di *cosenoverso*, di *cotangente*, di *cosecante*, di modo che sarà

$sen.\ (90^\circ - x) = cos.\ x \qquad sec.\ (90^\circ - x) = cosec. x.$

$cos.\ (90^\circ - x) = sen.\ x \qquad cot.\ (90^\circ - x) = tang.\ x.$

$senv.(90^\circ - x) = cosv. x \qquad cosec.(90^\circ - x) = sec.\ x.$

$tang.(90^\circ - x) = cot.\ x \qquad cosv.\ (90^\circ - x) = senv.\ x.$

16. Il raggio del circolo, in parti del quale si sogliono esprimere tutte le linee trigonometriche; si denomina colla sola lettera iniziale R; onde $AB = AD = AG = R$. Alle volte però si usa eguagliare il raggio all'unità, poichè tale supposizione riesce assai comoda.

17. Potendo gli archi aumentare o diminuire, ed essendo essi pure soggetti a cangiare di posizione e quindi di segno, anche le linee trigonometriche ad essi appartenenti saranno soggette a variazioni.

Onde conoscere tali variazioni, prenderemo i due diametri fissi o *assi* BM, GN, che si segano ad angoli retti, e converremo di far partire tutti gli archi dalla stessa origine B, e considereremo come positivi tutti gli archi, che partendo da B si possono segnare sopra la circonferenza nel verso BGMNB, e come negativi quelli, che si possono prendere sulla circonferenza medesima nel verso BNMGB contrario al primo.

18. Considereremo come positivi, tutti i seni collocati superiormente al diametro BM che passa per l'origine, e come negativi tutti quelli, che sono al disotto del diametro medesimo. Prenderemo poi per positivi tutti i coseni, che sono dalla parte destra del diametro GN, e per negativi quelli, che posti sono dalla parte sinistra del diametro medesimo, di modo che un arco positivo, la di cui origine sia in B, se terminerà dentro il primo quadrante, come in D, avrà positivo il seno ed il coseno; se terminerà dentro il secondo quadrante, come in O', avrà il seno positivo, ed il coseno negativo; se terminerà nel terzo quadrante, come in Q, saranno negativi e il seno ed il coseno; se finalmente terminerà nel quarto quadrante, sarà negativo il seno e positivo il suo coseno.

19. Le tangenti si diranno positive, quando il loro concorso colle secanti accadrà nella direzione di B verso E, e negative quando un tal concorso accadrà nella direzione contraria, cioè da B verso K. Così le cotangenti si prenderanno per positive, quando il loro concorso colle cosecanti si farà nella direzione da G verso L, e negative quando egli accadrà nella direzione contraria da G verso P; cosicchè la tangente dell' arco BD, che termina nel primo quadrante è positiva, come lo è anche la sua cotangente. La tangente dell' arco BGO, che finisce nel secondo quadrante è negativa, come è negativa anche la cotangente dell' arco medesimo. La tangente dell' arco BGQ, che termina nel terzo quadrante è positiva, poichè il suo concorso colla secante si fa in E, come lo è anche la sua cotangente. La tangente dell' arco BGT, che termina nel quarto quadrante è negativa, e la sua cotangente è pure negativa.

20. Prenderemo per positiva la secante, allorchè, ritenuta al solito in B l' origine dell' arco, di cui si tratta, l' altra estremità dell' arco stesso sarà posta fra il centro ed il punto di concorso della secante stessa colla tangente; sarà quindi negativa la secante, quando fra la seconda estremità dell' arco, ed il sopra nominato concorso cade il centro del cerchio. Perciò l' arco BD preso nel primo quadrante, avrà la secante AE positiva, poichè l' estremo D dell' arco BD giace tra A ed E. Per l' arco BGO, che termina nel secondo quadrante la secante è negativa, perchè fra l' estremo O ed il concorso K giace il centro A. Per l' arco BGQ, che termina nel terzo quadrante, la secante è negativa, perchè fra l' estremità Q dell' arco proposto ed il punto di concorso E vi è il centro A. Finalmente per

l' arco BGT, che termina nel quarto quadrante la secante sarà positiva, perchè l' estremità T dell' arco BGT giace fra il centro ed il punto di concorso K della tangente colla secante.

21. Le stesse considerazioni si possono fare riguardo alle cosecanti. In generale la secante segue sempre il segno del coseno, e la cosecante quello del seno dell' arco, a cui quelle rette appartengono.

22. Si supponga che l' estremità B dell' arco BD rimanga fissa in B, e che l' altra estremità D percorra successivamente tutta la circonferenza dal punto B, passando pel punto G, al punto M, e dal punto M al punto N, sinchè ritorni in B, donde partì.

23. Quando il punto D coinciderà col punto B, quando cioè l' arco BD o l' angolo x sarà zero, i tre punti E, D, C si confonderanno col punto B; donde si vede facilmente, che la tangente ed il seno dell' arco zero sono zero, che il coseno dello stesso arco è eguale al raggio, come è eguale al raggio anche la secante; la cotangente e la cosecante dell' arco zero, non potranno mai incontrarsi, poichè, per essere perpendicolari ambedue ad AG, sono parallele; onde queste rette si dicono infinite: sarà dunque

$$\textit{sen.}\ 0^\circ = 0 \qquad \textit{cos.}\ 0^\circ = R \qquad \textit{cot.}\ 0^\circ = \infty$$

$$\textit{tang.}\ 0^\circ = 0 \qquad \textit{sec.}\ 0^\circ = R \qquad \textit{cosec.}\ 0^\circ = \infty$$

24. A misura che il punto D si avanzerà verso G, il suo seno si aumenterà, come anche la tangente e la secante; ma il coseno, la cotangente, e la cosecante diminuiranno, come facilmente si può rilevare dalla ispezione della figura, quando BD diviene BD′, BD″, ecc.

25. Quando il punto D sarà giunto in G, nel qual caso l'angolo x sarà retto o di 90°, in allora il seno e la cosecante si confonderanno col raggio GA; il coseno, e la cotangente diverranno zero; la tangente e la secante saranno infinite; onde si avrà

$$sen.\ 90^\circ = R \quad cos.\ 90^\circ = 0 \quad tang.\ 90^\circ = \infty$$
$$cosec.\ 90^\circ = R \quad cot.\ 90^\circ = 0 \quad sec.\ 90^\circ = \infty$$

Il seno dell' angolo retto o dell' arco di 90° si chiama *seno tutto*, o *totale*, o anche *seno massimo*, per essere il più grande di tutti i seni.

26. Se il punto D continuerà ad avanzarsi da G verso M, i seni diminuiranno ed i coseni aumenteranno in grandezza, di modo che, per esempio, l'arco BGO, o l'angolo ottuso BAO, avrà per seno la retta OI, e per coseno AI; avrà per tangente BK, e per secante AK, per cotangente GP, e per cosecante AP. Ora tutte queste linee appartengono anche all' arco OM supplemento dell' arco BGO. Lo stesso si dimostrerebbe per un altro angolo ottuso qualunque. Si può quindi conchiudere che *le linee trigonometriche, che appartengono ad un angolo ottuso appartengono anche al suo supplemento rispetto alla loro grandezza.* Condotta DO parallela a BM, sarà l'arco $OM = BD = x$, onde il seno e la cosecante hanno lo stesso segno nell' angolo ottuso BAO, e nell' angolo acuto BAD, che può essere preso qual supplemento di BAO; il coseno, la tangente, la cotangente, e la secante, hanno il segno contrario nell' angolo ottuso, atteso che quelle rette giacciono in situazione opposta a quella, in cui sono quelle che appartengono all' angolo x di supplemento; di modo che nominando c la circonferenza di un circolo il di cui raggio sia R, ed x l'angolo acuto GAO, qualunque angolo ottuso minore di 180° sarà espresso da $\frac{c}{4} + x$, e si avranno le seguenti equazioni

$$sen.\left(\frac{c}{4} + x\right) = sen.\left(\frac{c}{4} - x\right) = cos.\ x.$$
$$cos.\left(\frac{c}{4} + x\right) = -cos.\left(\frac{c}{4} - x\right) = -sen.\ x.$$
$$tang.\left(\frac{c}{4} + x\right) = -tang.\left(\frac{c}{4} - x\right) = -cot.\ x.$$
$$cot.\left(\frac{c}{4} + x\right) = -cot.\left(\frac{c}{4} - x\right) = -tang.x.$$
$$sec.\left(\frac{c}{4} + x\right) = -sec.\left(\frac{c}{4} - x\right) = -cosec.x.$$
$$cosec.\left(\frac{c}{4} + x\right) = cosec.\left(\frac{c}{4} - x\right) = sec.\ x.$$

Se poi diverrà $x = 90^\circ$, si avrà

$$sen.\ 180^\circ = cos.\ 90^\circ = 0.$$
$$cos.\ 180^\circ = -sen.\ 90^\circ = -R.$$
$$tang.\ 180^\circ = -cot.\ 90^\circ = -0.$$
$$cot.\ 180^\circ = -tang.\ 90^\circ = -\infty.$$
$$sec.\ 180^\circ = -cosec.\ 90^\circ = -R.$$
$$cosec.\ 180^\circ = sec.\ 90^\circ = \infty.$$

27. Supponiamo che il punto D continui a progredire sinchè giunga in Q. L'arco BGQ, che trovasi fra i limiti di 180° e 270° si potrà generalmente esprimere con $\frac{2c}{4} + x$, essendo come superiormente c la circonferenza ed x un angolo acuto, o l'arco da cui egli è misurato. La retta QI sarà il seno dell' arco BGQ, AI, il suo coseno, BE la tangente, AE la secante, GL la cotangente, ed AL la cosecante. Ma queste medesime linee appartengono

tutte anche all'angolo QAM, o all'arco QM, che si è fatto $=x$, il quale è supplemento negativo dell'arco BGQ; sarà dunque

$$sen.\left(\frac{2c}{4}+x\right)=-sen.\ x.$$

$$cos.\left(\frac{2c}{4}+x\right)=-cos.\ x.$$

$$tang.\left(\frac{2c}{4}+x\right)=\ tang.\ x.$$

$$cot.\left(\frac{2c}{4}+x\right)=\ cot.\ x.$$

$$sec.\left(\frac{2c}{4}+x\right)=-sec.\ x.$$

$$cosec.\left(\frac{2c}{4}+x\right)=-cosec.\ x.$$

Se sarà $x=90^\circ$, si avrà

$$sen.\ 270^\circ=-sen.\ 90^\circ=-R.$$
$$cos.\ 270^\circ=-cos.\ 90^\circ=-o.$$
$$tang.\ 270^\circ=\ tang.\ 90^\circ=\ \infty.$$
$$cot.\ 270^\circ=\ cot.\ 90^\circ=\ o.$$
$$sec.\ 270^\circ=-sec.\ 90^\circ=-\infty.$$
$$cosec.\ 270^\circ=-cosec.\ 90^\circ=-R.$$

28. Continui il punto D ad avanzarsi, sin che giunga nell'ultimo quadrante, per esempio in T. L'arco BGT, essendo maggiore di 270°, e minore di 360°, potrà generalmente essere espresso da $\frac{3c}{4}+x$, ritenuti i medesimi valori di c ed x, come superiormente; il coseno e la secante di

quest'angolo sono rette positive, e le altre linee trigonometriche ad esso appartenenti sono negative, ciò facilmente si può vedere dalla loro posizione rispetto agli assi BM, GN; ma queste medesime linee appartengono anche all'arco negativo BT, che è complemento dell'arco $NT=x$, per cui si avrà

$$sen.\left(\frac{3c}{4}+x\right)=-sen.\left(\frac{c}{4}-x\right)=-cos.\ x.$$

$$cos.\left(\frac{3c}{4}+x\right)=\ cos.\left(\frac{c}{4}-x\right)=\ sen.\ x.$$

$$tang.\left(\frac{3c}{4}+x\right)=-tang.\left(\frac{c}{4}-x\right)=-cot.\ x.$$

$$cot.\left(\frac{3c}{4}+x\right)=-cot.\left(\frac{c}{4}-x\right)=-tang.\ x.$$

$$sec.\left(\frac{3c}{4}+x\right)=\ sec.\left(\frac{c}{4}-x\right)=\ cosec.\ x.$$

$$cosec.\left(\frac{3c}{4}+x\right)=-cosec.\left(\frac{c}{4}-x\right)=-sec.\ x.$$

Se poi sarà $x=90^\circ$, si avrà

$$sen.\ 360^\circ=-cos.\ 90^\circ=-o.$$
$$cos.\ 360^\circ=\ sen.\ 90^\circ=\ R.$$
$$tang.\ 360^\circ=-cot.\ 90^\circ=-o.$$
$$cot.\ 360^\circ=-tang.\ 90^\circ=-\infty.$$
$$sec.\ 360^\circ=\ cosec.\ 90^\circ=\ R.$$
$$cosec.\ 360^\circ=-sec.\ 90^\circ=-\infty.$$

29. Tutti i seni ed i coseni sono sempre compresi fra i limiti di R, e $-$R.

Le tangenti e le cotangenti possono variare da zero sino all'infinito; e le secanti, e cosecanti da R sino all'∞.

Le tangenti, e le cotangenti degli archi 0°, 90°, 180°, 270°, 360°, divengono zero o infinite; le secanti, poi e cosecanti degli archi medesimi sono eguali al raggio, o infinite.

Questi valori però non sono che due limiti, che separano le funzioni trigonometriche positive dalle negative, onde in quel modo che $\pm$ o è sempre $=$o, così anche $\pm\infty$ sarà $=\infty$, onde potremo considerare le funzioni trigonometriche quando acquistano un valore infinito, tanto sotto l' aspetto positivo che sotto il negativo; di fatto la tangente di 90° gradi diventa infinita, perchè diventando questa parallela alla secante di 90°, il concorso ideale di queste rette si considera succedere a distanza infinita. Ma non essendovi ragione per cui si debba considerare il concorso di due rette piuttosto dall' una che dall' altra parte, quando esse divengono parallele, ne viene che la distanza di questo concorso si può considerare tanto positiva che negativa. Ciò posto i valori, delle linee trigonometriche trovati per l' arco o°, coincideranno con quelli trovati per l' arco di 360°, o per l' intera circonferenza. Poichè le linee trigonometriche, che appartengono ad un arco, il di cui valore sia la circonferenza intera si confondono con quelle dell' arco zero; ne viene che se ad un arco qualunque BD si aggiungerà una o più circonferenze si ricadrà ancora sul medesimo punto D, ed all' arco così aumentato apparterranno le medesime linee trigonometriche spettanti all' arco BD; onde sarà, per esempio, $sen.\ x = sen.\ (c+x) = sen.\ (2c+x) \ldots \ldots = sen.\ (nc+x)$, essendo n un numero intero.

30. Da quanto abbiamo esposto si vede chiaramente che le funzioni trigonometriche appartenenti ad angoli ottusi comunque, si possono esprimere con i convenienti segni, col mezzo di funzioni che appartengono ad angoli acuti.

Proposizione I. Teorema.

31. *Il seno DC di un arco BD* (fig. 2.) *è la metà della corda appartenente ad un arco doppio, ed il suo coseno è la metà della corda del supplemento dell' arco doppio medesimo.*

1.° Si prolunghi la retta DC sino al suo incontro in T colla circonferenza, e la corda DT non meno che l' arco DBT da essa determinato rimarranno rispettivamente divisi per metà dal raggio AB perpendicolare alla corda stessa (Geom. 324.); dunque l' arco DBT sarà doppio dell' arco BD, e la corda DT doppia di DC; ma DC è il seno dell' arco BD, dunque il seno d' un arco è la metà della corda dell' arco doppio.

2.° Poichè si ha $cos.\ BD = AC = DH = \frac{DO}{2}$, e DO è la corda dell' arco DGO, il quale coll' arco DBT compisce due retti; ne viene che il coseno AC di un arco BD è la metà della corda del supplemento dell' arco doppio.

32. *Corollario* I. Se si conoscerà adunque la corda di un arco, si avrà il seno della metà di quell' arco prendendo la metà della corda dell' arco conosciuto. Così essendo la corda appartenente ad un arco di 60° eguale al lato dell' esagono regolare inscritto nel cerchio, o eguale al raggio del cerchio medesimo, il seno dell' angolo di 30°, sarà eguale alla metà del raggio, onde $sen.\ 30° = \frac{R}{2}$. La corda di un arco di 90°, essendo l' ipotenusa di un triangolo rettangolo, i di cui cateti sono due raggi dello stesso cerchio, essa sarà espressa da $\sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}$;

e per conseguenza sarà

$$sen.\ 45^\circ = \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{2R}{2\sqrt{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}} = R\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Siccome poi il coseno di un arco eguaglia il seno del suo complemento (15), e siccome il complemento d'un arco di 45° è pure di 45°, così sarà anche

$$cos.\ 45^\circ = \frac{R}{\sqrt{2}} = R\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

33. *Corollario* II. Quando l'angolo BAD è di 45° i punti E, ed L si confondono ed i triangoli ABE, GAL divengono isosceli ed eguali; onde la tangente BE dell'angolo di 45° è eguale alla cotangente GL dell'angolo medesimo, e ambedue eguagliano il raggio; la secante si confonde colla cosecante; onde $tang.\ 45^\circ = cot.\ 45^\circ = R$

$$sec.\ 45^\circ = cosec.\ 45^\circ = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}.$$

Proposizione II. Teorema.

34. *Il quadrato del raggio AD, appartenente ad un arco qualunque BD (fig. 2.) è eguale al quadrato del seno più il quadrato del coseno dell' arco stesso.*

Poichè il triangolo DCA rettangolo in C dà $\overline{AD}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{AC}^2$; ma DC è il seno dell' arco BD o dell' angolo x, AC è il suo coseno; dunque nominando al solito R il raggio AD del circolo a cui appartiene l' arco BD, sarà $R^2 = sen.^2 x + cos.^2 x$.

35. *Corollario.* Estraendo la radice quadrata da ambi i membri della trovata equazione, si ha 1.ª $R = \sqrt{(sen.^2 x + cos.^2 x)}$. Liberando in quell' equazione $sen.^2 x$, ed estraendovi la radice quadrata, si ottiene 2.ª $sen. x = \sqrt{(R^2 - cos.^2 x)}$; donde si ricava che *il seno di un angolo è eguale alla radice quadrata, del quadrato del raggio, meno il quadrato del coseno dell' angolo medesimo.* Operando in una maniera a questa analoga, si trova essere 3.ª $cos. x = \sqrt{(R^2 - sen.^2 x)}$. Onde *il coseno di un angolo qualunque è eguale alla radice quadrata del quadrato del raggio, meno il quadrato del seno dell' angolo stesso.*

36. *Scolio.* Quando saranno conosciute due delle tre quantità, che costituiscono l' equazione $R^2 = sen.^2 x + cos.^2 x$, si potrà sempre trovare la terza, poichè col mezzo di una equazione si può sempre determinare il valore di un' incognita.

Proposizione III. Problema.

37. *Dato il seno ed il coseno di un arco BD* (fig. 2.) *trovare la tangente, la secante, la cotangente, e la cosecante dell' arco medesimo.*

Siccome le due rette DC, BE sono parallele, perchè amendue perpendicolari ad AB, i triangoli CAD, BAE sono simili, e danno AC : DC :: AB : BE, ossia

$$cos. x : sen. x :: R : tang. x, \text{ donde } 1.^a\ tang. x = \frac{R \times sen. x}{cos. x};$$

di modo che *la tangente di un arco qualunque x è eguale al raggio moltiplicato pel seno, e diviso pel coseno dell' arco medesimo*; o ciò che è lo stesso, *la tangente di un arco è quarta proporzionale dopo il suo coseno, il seno, ed il raggio.*

I medesimi triangoli simili danno anche AC : AD :: AB : AE, cioè $cos. x : R :: R : sec. x$, donde

$$2.^a\ sec. x = \frac{R^2}{cos. x}.$$

Per lo che *la secante dell' arco x è eguale al quadrato del raggio diviso pel coseno dell' arco medesimo, oppure è terza proporzionale dopo il suo coseno ed il raggio.*

I triangoli DAH, LAG sono simili perchè HD è parallela a GL, e danno AH : HD : : AG : GL; ma per essere AH$=$DC, ed HD$=$AC, si avrà DC : AC : : AG : GL, ossia $sen.x : cos.x :: R : cot.x$; donde si ricava 3.ª $cot.x = \frac{R \times cos.x}{sen.x}$. Onde *la cotangente di un arco x è eguale al prodotto del raggio nel coseno, diviso pel seno dell' arco medesimo*, oppure *essa è quarta proporzionale dopo il seno, il coseno, ed il raggio.*

I medesimi triangoli simili danno anche la proporzione AH : AD : : AG : AL, ossia $sen.x : R :: R : cosec.x$; onde 4.ª $cosec.x = \frac{R^2}{sen.x}$. *La cosecante dell' arco x è quindi eguale al quadrato del raggio diviso pel seno dell' arco medesimo, o è terza proporzionale dopo il seno ed il raggio.*

38. Il triangolo rettangolo ABE dà

$\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2$, ossia 1.ª $sec.^2 x = R^2 + tang.^2 x$: Dal triangolo rettangolo AGL si ricava poi

$\overline{AL}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{GL}^2$, cioè 2.ª $cosec.^2 x = R^2 + cot.^2 x$.

39. *Scolio* I. I valori di $cot.x$, e di $cosec.x$ si sarebbero più facilmente ottenuti ponendo nei valori di $tang.x$, e di $sec.x$ in luogo di x il suo complemento, cioè $90^\circ - x$.

40. *Scolio* II. Il raggio R può essere di qualunque grandezza, e le equazioni, che superiormente abbiamo ritrovate sono vere qualunque sia la grandezza del circolo, da cui esse si sono desunte. Il valore del raggio è adunque arbitrario; ma stabilita una volta la di lui grandezza, essa debbesi conservare costante, dovendo tutte le altre linee trigonometriche, essere espresse in parti del raggio medesimo.

41. Se il raggio R si farà $= 1$, le formole superiormente trovate si semplificheranno, e diverranno

$$sen.\ 30^\circ = \tfrac{1}{2} \qquad sen.^2 x + cos.^2 x = 1.$$
$$sen.\ 45^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \qquad \sqrt{(sen.^2 x + cos.^2 x)} = \sqrt{1} = 1.$$
$$cos.\ 45^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \qquad sen.x = \sqrt{(1 - cos.^2 x)}.$$
$$tang.\ 45^\circ = 1 \qquad cos.x = \sqrt{(1 - sen.^2 x)}.$$
$$cot.\ 45^\circ = 1 \qquad tang.\ x = \frac{sen.x}{cos.x}.$$
$$sec.\ 45^\circ = \sqrt{2} \qquad cot.\ x = \frac{cos.x}{sen.x}.$$
$$cosec.\ 45^\circ = \sqrt{2} \qquad sec.\ x = \frac{1}{cos.x}.$$
$$sec.^2 x = 1 + tang.^2 x \qquad cosec.x = \frac{1}{sen.x}.$$
$$cosec.^2 x = 1 + cot.^2 x$$

Si avrà anche $cos.\,30^\circ = \sqrt{(1 - sen.^2 30^\circ)} =$
$$\sqrt{\left[\left(1 - \frac{1}{4}\right)\right]} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$
$$tang.\,30^\circ = \frac{sen.\,30^\circ}{cos.\,30^\circ} = \frac{1}{2} : \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Siccome poi dall' ispezione della figura si vede essere BC $=$ AB $-$ AC, e GH $=$ AG $-$ AH; così sarà
$$senv.x = R - cos.x = 1 - cos.x;$$
$$cosv.x = R - sen.x = 1 - sen.x.$$

42. *Scolio* III. Queste formole sono di un grandissimo uso nella trigonometria. In quei casi, nei quali si volesse attribuire al raggio un valore diverso dell' unità, nelle equazioni trigonometriche ricavate per $R = 1$, bisognerà introdurre debitamente la quantità R, elevata a quella potenza che occorre, quale moltiplicatore o divisore, onde ridurre tutti i termini dell' equazione, di cui si vuole

far uso ad essere omogenei, dopo di che vi si porrà per R il valore, che gli si vuole attribuire.

Proposizione IV. Teorema.

43. *Il seno di un arco negativo BT* (fig. 2.) *è eguale a meno il seno dell' arco stesso preso positivamente, ed il coseno dell' arco negativo BT è eguale al coseno dell' arco medesimo preso positivamente.*

Si prolunghi TC sino all' incontro in D colla circonferenza, e le rette TC, DC saranno eguali in grandezza, come lo saranno anche gli archi BT, BD (Geom. 324.). Supponendo in B l' origine degli archi tanto positivi che negativi, sarà (17) *arco* BD $=-$ *arco* BT, e DC $=-$ TC, ma TC è il seno dell' arco negativo BT, e DC è il seno dell' arco positivo BD $=x$; sarà dunque $-sen. -x = sen. x$, e cangiando i segni, si otterrà 1.ª $sen. -x = -sen. x$. Il coseno poi tanto dell' arco negativo BT, quanto del suo eguale positivo BD, è AC, onde 2.ª $cos. -x = cos.\ x$.

44. *Corollario.* Le due trovate equazioni danno i valori ed i segni convenienti alla tangente, cotangente, secante, cosecante di un arco negativo qualunque, di cui si conosca il seno ed il coseno; di fatto posti i trovati valori nelle quattro formole del (37), si ha, fatto R = 1

$$3.^a\ tang. -x = \frac{sen. -x}{cos. -x} = \frac{-sen.\ x}{cos.\ x} = -tang. x.$$

$$4.^a\ cot. -x = \frac{cos. -x}{sen. -x} = \frac{cos.\ x}{-sen.\ x} = -cot.\ x.$$

$$5.^a\ sec. -x = \frac{1}{cos. -x} = \frac{1}{cos.\ x} = sec.\ x.$$

$$6.^a\ cosec. -x = \frac{1}{sen -x} = \frac{1}{-sen. x} = -cosec. x.$$

Proposizione V. Teorema.

45. *Il rettangolo compreso dalla tangente di un dato arco qualunque x, e dalla sua cotangente, eguaglia il quadrato del raggio.*

Poichè moltiplicando fra di loro membro per membro le due equazioni $tang.\ x = \frac{R\ .\ sen.\ x}{cos.\ x}$, $cot.\ x = \frac{R\ .\ cos.\ x}{sen.\ x}$ trovate al paragrafo (37), si ha $tang.\ x \times cot.\ x = R^2 = 1$; onde ecc.

46. *Corollario* I. Da questa equazione si ricava

$$1.^a\ tang.\ x = \frac{R^2}{cot.\ x.} = \frac{1}{cot.\ x}.$$

$$2.^a\ cot.\ x = \frac{R^2}{tang.\ x} = \frac{1}{tang. x}.$$

47. *Corollario* II. Siccome poi sarà anche $tang. y \times cot. y = R^2$; così paragonando si otterrà $tang. x \times cot.\ x = tang.\ y \times cot.\ y$; cioè *il rettangolo formato dalla tangente di un arco, e dalla sua cotangente, è eguale a quello formato dalla tangente, e dalla cotangente di un altro arco qualunque, il raggio essendo lo stesso.*

Dalla equazione superiormente trovata si ricava la proporzione $tang.x : tang.y :: cot.y : cot.x$; *donde si vede, che le tangenti di due archi appartenenti allo stesso cerchio sono in ragione inversa delle loro rispettive cotangenti.*

Proposizione VI. Teorema.

48. *Dati i seni ed i coseni di due archi AB,*

BC (fig. 3.), *trovare i seni ed i coseni della loro somma, e della loro differenza.*

Sia l' arco $AB = y$, e l' arco $BC = x$; sarà l' arco $ABC = BC + AB = x + y$.

Dai punti B, C si abbassino sopra il diametro AL le perpendicolari BD, CH; e dal medesimo punto C si abbassi la perpendicolare CF sul diametro BM, e dal punto F si conduca la FG parallela ad AL, ed FE perpendicolare alla medesima AL. Ciò fatto sarà (11, 12)

$CF = sen.\ x.$ $\quad$ $CH = sen.\ (x + y).$

$OF = cos.\ x.$ $\quad$ $OH = cos.\ (x + y).$

$BD = sen.\ y.$ $\quad$ $OB = OA = R.$

$OD = cos.\ y.$

I triangoli OBD, CGF sono simili, perchè hanno i lati rispettivamente perpendicolari, e danno

$OB : OD :: CF : CG$, ossia $R : cos.y :: sen.\ x : CG$,

$OB : DB :: CF : FG$, cioè $R : sen.y :: sen.\ x : FG$,

dalla prima delle quali si ricava $CG = \dfrac{sen.\ x\ .\ cos.y}{R}$

e dalla seconda $FG = \dfrac{sen.\ x \times sen.\ y}{R}$.

I triangoli OBD, OFE sono simili, poichè FE è parallela alla base BD, e danno le proporzioni

$OB : BD :: OF : FE$, cioè $R : sen.y :: cos.\ x : FE$,

$OB : OD :: OF : OE$, ossia $R : cos.y :: cos.x : OE$,

donde si ottiene $FE = \dfrac{sen.y\ .\ cos.x}{R}$, ed $OE = \dfrac{cos.x\ .\ cos.y}{R}$.

Ma si ha (fig. 3.) $CH = CG + GH = CG + FE$, ed $OH = OE - HE = OE - FG$, quindi sostituendo sarà anche

$$1.^a\ sen.\ (x+y) = \frac{sen.\ x\ .\ cos.\ y + sen.\ y\ .\ cos.\ x}{R}.$$

$$2.^a\ cos.\ (x+y) = \frac{cos.\ x\ .\ cos.\ y - sen.\ x\ .\ sen.\ y}{R}.$$

Se ora in ciascuna di queste due formole al luogo di y porremo $-y$, avremo

$$sen.\ (x - y) = \frac{sen.x\ .\ cos. - y + sen. - y\ .\ cos.x}{R}.$$

$$cos.\ (x - y) = \frac{cos.x\ .\ cos. - y - sen.x\ .\ sen. - y}{R}.$$

ossia ponendovi in luogo di $cos. - y$, di $sen. - y$, i rispettivi loro valori $cos.y$, e $- sen.y$ datici dalle equazioni 1.ª, 2.ª (43), avremo

$$3.^a\ sen.\ (x-y) = \frac{sen.\ x\ .\ cos.y - sen.y\ .\ cos.\ x}{R}.$$

$$4.^a\ cos.\ (x-y) = \frac{cos.\ x\ .\ cos.y + sen.\ x\ .\ sen.y}{R}.$$

Se in queste formole faremo $R = 1$ esse diverranno più semplici, e saranno

$1.^a\ sen.(x+y) = sen.\ x\ .\ cos.y + sen.\ y\ .\ cos.\ x.$

$2.^a\ cos.\ (x+y) = cos.\ x\ .\ cos.y - sen.\ x\ .\ sen.\ y.$

$3.^a\ sen.\ (x-y) = sen.\ x\ .\ cos.y - sen.\ y\ .\ cos.\ x.$

$4.^a\ cos.\ (x-y) = cos.\ x\ .\ cos.y + sen.\ x\ .\ sen.\ y,$

che potranno comprendersi nelle due seguenti

$sen.\ (x \pm y) = sen.x\ .\ cos.y \pm sen.y\ .\ cos.\ x.$

$cos.\ (x \pm y) = cos.\ x\ .\ cos.y \mp sen.x\ .\ sen.\ y.$

49. *Scolio.* Il problema che abbiamo risoluto vale qualunque sia la grandezza degli archi x, y. Poichè costruite in modo analogo alla figura 3.ª su

della quale si è ragionato, le figure 4.ª, 5.ª, 6.ª, nella prima delle quali la somma $x+y$ dei due archi proposti sia $> 90°$, e $< 180°$, nella seconda sia $> 180°$, e $< 270°$, e nell' ultima, tale somma sia $> 270°$, e $< 360°$, in ciascuna di esse vi saranno i medesimi triangoli simili, che si sono trovati nella fig. 3.ª, dai quali si avranno le stesse proporzioni, che si sono riscontrate nella figura medesima, e per conseguenza anche i medesimi valori, per *sen.* $(x+y)$, e *cos.* $(x+y)$ in qualunque caso, purchè si abbia riguardo di cangiare i segni ai valori di quelle rette, che si trovano in quella qualunque delle altre figure in direzione opposta a quella, che esse hanno nella fig. 3.ª, sopra di cui si è ragionato. Nella fig. 4.ª si ha $CH = CG - GH = CG - FE$, ma $CH = sen.\ (x+y)$, $CG = \frac{sen.\ x . cos.\ y}{R}$, e $-FE = -\frac{sen.\ y . cos.\ x}{R}$; ora CH e CG sono nella medesima direzione in cui si trovavano nella fig. 3.ª, ed FE si trova in una direzione opposta, dunque al valore di $-FE$ si deve cangiare il segno, onde $sen.\ (x+y) = \frac{sen.x . cos.y + sen.y . cos.x}{R}$.

Si ha pure $HO = HE + EO = FG + EO$; ma EO è in direzione contraria, mentre FG è nella stessa direzione di quella, che ha nella fig. 3.ª, e siccome $cos.\ (x+y) = -HO$; così sarà

$$cos.\ (x+y) = \frac{cos.\ x . cos.\ y - sen.\ x . sen.\ y}{R}.$$

Si faccia un simile ragionamento per le figure 5.ª e 6.ª

50. *Corollario* I. Le quattro equazioni superiormente ritrovate servono a sviluppare i valori dei seni e coseni della somma e della differenza di

qualsivoglia numero di archi. Sia proposto, per esempio, di trovare il valore di *sen.* $(x+y+z)$; si faccia $y+z=t$, e si avrà $sen.\ (x+t) = sen.x.cos.t + sen.t.cos.x = sen.x . cos.(y+z) + sen.(y+z).cos.x = sen.x\,(cos.y . cos.z - sen.y . sen.z) + (sen.y . cos.z + sen.z . cos.y)\ cos.x = sen.x . cos.y . cos.z - sen.x . sen.y . sen.z + sen.y . cos.x . cos.z + sen.z . cos.x . cos.y$.

51. *Corollario* II. Sommando (48) la 1.ª equazione colla 3.ª membro per membro si ha

1.ª $sen.\ (x+y) + sen.\ (x-y) = 2\, sen.x . cos.y$,

sottraendo la 3.ª dalla prima, si ottiene

2.ª $sen\ (x+y) - sen.\ (x-y) = 2\, sen.y . cos.x$,

sommando la seconda colla quarta, si ha

3.ª $cos.\ (x+y) + cos.\ (x-y) = 2\, cos.x . cos.y$,

sottraendo finalmente la 2.ª dalla 4.ª, si ottiene

4.ª $cos.\ (x-y) - cos.\ (x+y) = 2\, sen.x . sen.y$.

Queste quattro formole servono per cangiare i prodotti dei seni e coseni, in somme e differenze, e *viceversa*.

52. Se in queste formole faremo $x+y=A$, $x-y=B$, per cui sarà $x = \frac{A+B}{2}$, $y = \frac{A-B}{2}$; si otterrà

1.ª $sen.\ A + sen.\ B = 2 . sen.\frac{A+B}{2} \times cos.\frac{A-B}{2}$

2.ª $sen.\ A - sen.\ B = 2 . sen.\frac{A-B}{2} \times cos.\frac{A+B}{2}$

$$3.^a \; cos. A + cos. B = 2 . cos. \frac{A+B}{2} \times cos. \frac{A-B}{2}$$

$$4.^a \; cos. B - cos. A = 2 . sen. \frac{A+B}{2} \times sen. \frac{A-B}{2}$$

Queste formole servono molto utilmente nei calcoli trigonometrici per ridurre due termini ad un solo.

Proposizione VII. Teorema.

53. *La somma dei seni di due archi, A, B, sta alla loro differenza, come la tangente della semisomma degli archi stessi sta alla tangente della loro semidifferenza.*

Si divida la 1.ª delle formole trovate superiormente (52) per la 2.ª, e si avrà

$$\frac{sen. A + sen. B}{sen. A - sen. B} = \frac{2 . sen. \frac{A+B}{2} \times cos. \frac{A-B}{2}}{2 . sen. \frac{A-B}{2} \times cos. \frac{A+B}{2}} .$$

Sopprimendo nel secondo membro il fattor comune 2, e ponendo in luogo di $\dfrac{sen. \frac{A+B}{2}}{cos. \frac{A+B}{2}}$ il suo valore $tang. \dfrac{A+B}{2}$, ed invece di $\dfrac{cos. \frac{A-B}{2}}{sen. \frac{A-B}{2}}$ il suo valore $cot. \dfrac{A-B}{2}$, si avrà $\dfrac{sen. A + sen. B}{sen. A - sen. B} = tang. \dfrac{A+B}{2} \times cot. \dfrac{A-B}{2}$; ma $cot. \dfrac{A-B}{2} = \dfrac{1}{tang. \frac{A-B}{2}}$; dunque

$$\frac{sen. A + sen B}{sen. A - sen. B} = \frac{tang. \frac{A+B}{2}}{tang. \frac{A-B}{2}},$$

o ciò che è lo stesso

$$sen. A + sen. B : sen. A - sen. B :: tang. \frac{A+B}{2} : tang \frac{A-B}{2} .$$

54. *Scolio.* Dalle formole del (52), mediante la divisione, se ne possono ricavare molte altre, le quali saranno altrettante espressioni di teoremi di trigonometria: per esempio, dividendo la prima per la terza si ha

$$1.^a \; \frac{sen. A + sen. B}{cos. A + cos. B} = \frac{sen. \frac{A+B}{2}}{cos. \frac{A+B}{2}} = tang. \frac{A+B}{2} .$$

Dividendo la prima per la quarta, si ottiene

$$2.^a \; \frac{sen. A + sen. B}{cos. B - cos. A} = \frac{cos. \frac{A-B}{2}}{sen. \frac{A-B}{2}} = cot. \frac{A-B}{2} .$$

Dividendo la seconda per la terza, si ha

$$3.^a \frac{sen.A - sen.B}{cos.A + cos.B} = \frac{sen.\frac{A-B}{2}}{cos.\frac{A-B}{2}} = tang.\frac{A-B}{2}.$$

Dividendo la seconda per la quarta, si ottiene

$$4.^a \frac{sen.A - sen.B}{cos.B - cos.A} = \frac{cos.\frac{A+B}{2}}{sen.\frac{A+B}{2}} = cot.\frac{A+B}{2}.$$

Proposizione VIII. Problema.

55. *Dati i seni ed i coseni di due archi x, y e quindi le tangenti degli archi medesimi, trovare il valore della tangente e della cotangente della loro somma e della loro differenza.*

Poichè (41) $tang.(x+y) = \frac{sen.(x+y)}{cos.(x+y)}$, sarà anche sostituendo nel secondo membro di quest' equazione, i valori di $sen.(x+y)$, e di $cos.(x+y)$ trovati (48), $tang.(x+y) = \frac{sen.x \cdot cos.y + sen.y \cdot cos.x}{cos.x \cdot cos.y - sen.x \cdot sen.y}$, e dividendo tutti i termini del secondo membro per $cos.x \cdot cos.y$, si otterrà

$$tang.(x+y) = \frac{\frac{sen.x \cdot cos.y}{cos.x \cdot cos.y} + \frac{sen.y \cdot cos.x}{cos.x \cdot cos.y}}{\frac{cos.x \cdot cos.y}{cos.x \cdot cos.y} - \frac{sen.x \cdot sen.y}{cos.x \cdot cos.y}},$$ ed

eseguendo nel secondo membro di quest' ultima

equazione le opportune divisioni, e sostituzioni, si otterrà finalmente

$1.^a$ $tang.(x+y) = \frac{tang.x + tang.y}{1 - tang.x \cdot tang.y}$: siccome poi è

$$cot.(x+y) = \frac{1}{tang.(x+y)} = \frac{1}{\frac{tang.x + tang.y}{1 - tang.x \cdot tang.y}};$$

così sarà anche

$$2.^a\ cot.(x+y) = \frac{1 - tang.x \cdot tang.y}{tang.x + tang.y}.$$

Ponendo in queste formole $-y$ al luogo di y, avendo riguardo che $tang.-y = -tang.y$, si otterrà

$$3.^a\ tang.(x-y) = \frac{tang.x - tang.y}{1 + tang.x \cdot tang.y}.$$

$$4.^a\ cot.(x-y) = \frac{1 + tang.x \cdot tang.y}{tang.x - tang.y}.$$

Proposizione IX. Problema.

56. *Dato il seno ed il coseno di un arco e per conseguenza anche la sua tangente e cotangente, trovare il seno, il coseno, la tangente, e la cotangente dell' arco doppio, triplo, ecc.*

Nelle equazioni $1.^a$ e $2.^a$ del (48) si ponga x in luogo di y, e si otterrà

$1.^a$ $sen.2x = sen.x \cdot cos.x + sen.x \cdot cos.x = 2sen.x \cdot cos.x$.

$2.^a$ $cos.2x = cos.x \cdot cos.x - sen.x \cdot sen.x = cos.^2 x - sen.^2 x$.

ma si ha (41) $sen.^2 x = 1 - cos.^2 x$; onde sostituendovi questo valore al luogo di $sen.^2 x$, si ha anche $3.^a$ $cos.2x = 2cos.^2 x - 1$.

Nelle equazioni prima e seconda del (55), ponendo x al luogo di y, si ha

$4.^a\ tang.\,2x = \dfrac{tang.\,x + tang.\,x}{1 - tang.\,x\,.\,tang.\,x} = \dfrac{2\,tang.\,x}{1 - tang.^2\,x}$; e

$5.^a\ cot.\,2x = \dfrac{1 - tang.^2\,x}{2\,tang.\,x}$.

Queste formole servono alla duplicazione dell'angolo.

Ponendo nelle medesime equazioni (48) $2x$ al posto di y, si avrà

$$sen.\,3x = sen.\,x\,.\,cos.\,2x + sen.\,2x\,.\,cos.\,x =$$
$$sen.\,x\,(cos.^2\,x - sen.^2\,x) + 2\,sen.\,x\,.\,cos.\,x\,.\,cos.\,x$$
$$= sen.\,x\,.\,cos.^2 x - sen.^3 x + 2\,sen.\,x\,.\,cos.^2 x =$$
$$3\,sen.\,x\,.\,cos.^2 x - sen.^3 x = 3\,sen.\,x\,(1 - sen.^2 x)$$
$$- sen.^3 x = 3\,sen.\,x - 3\,sen.^3\,x - sen.^3 x,$$ e riducendo

$6.^a\ sen.\,3x = 3\,sen.\,x - 4\,sen.^3\,x.$

$$cos.\,3x = cos.\,x\,.\,cos.\,2x - sen.\,x\,.\,sen.\,2x =$$
$$cos.\,x\,(2cos.^2\,x - 1) - sen.\,x \times 2\,sen.\,x\,.\,cos.\,x =$$
$$2\,cos.^3\,x - cos.\,x - 2\,sen.^2\,x\,.\,cos.\,x =$$
$$2\,cos.^3\,x - cos.\,x - 2\,cos.\,x\,(1 - cos.^2\,x) =$$
$$2\,cos.^3\,x - cos.\,x - 2\,cos.\,x + 2\,cos.^3 x,$$ onde

$7.^a\ cos.\,3x = 4\,cos.^3\,x - 3\,cos.\,x.$

Se nelle formole $1.^a$ e $2.^a$ del (55), faremo la medesima sostituzione di $2x$ al luogo di y, e nei valori, che si troveranno, vi porremo per *tang.* $2x$ il suo valore superiormente determinato, avremo

$8.^a\ tang.\,3x = \dfrac{3\,tang.\,x - tang.^3\,x}{1 - 3\,tang.^2\,x}$.

$9.^a\ cot.\,3x = \dfrac{1 - 3\,tang.^2\,x}{3\,tang.\,x - tang.^3\,x}$.

Queste formole possono servire alla triplicazione dell'arco non solo, ma anche alla sua trisezione;

poichè, se per esempio nella equazione $6.^a$ faremo $sen.\,3x = a$, e $sen.\,x = z$, otterremo $a = 3z - 4z^3$, ossia ordinando per rapporto a z, si avrà l'equazione del terzo grado $z^3 - \dfrac{3z}{4} + \dfrac{a}{4} = 0$, mediante la risoluzione della quale avremo il valore di z, e quindi il mezzo analitico di dividere in tre parti eguali un angolo dato.

Ponendo nelle formole medesime (48,55) in luogo di y, successivamente $3x$, $4x$, $5x$ ...... $(m-1)\,x$, e facendo nelle equazioni, che si ottengono le opportune sostituzioni, sviluppi e riduzioni, si otterranno, i seni, i coseni, le tangenti, e le cotangenti, dell'arco quadruplo, quintuplo, ed in generale dell'arco multiplo di x: formole, che potranno servire alla moltiplicazione, ed alla divisione degli angoli.

Proposizione X. Problema.

57. *Dato il seno ed il coseno, e per conseguenza la tangente e cotangente di un arco, trovare il seno, il coseno, la tangente, e cotangente della metà dell'arco medesimo.*

Nella formola $2.^a$ (56) $cos.\,2x = cos.^2 x - sen.^2 x$, ponendo in luogo di $cos.^2 x$ il suo valore $1 - sen^2 x$, si ottiene $cos.\,2x = 1 - 2\,sen.^2 x$, da cui si ricava $sen.^2\,x = \dfrac{1 - cos.\,2x}{2}$, ed estraendo la radice $sen.\,x = \sqrt{\left(\dfrac{1 - cos.\,2x}{2}\right)}$, e ponendo $\frac{1}{2}\,x$ in luogo di x, si otterrà, $1.^a\ sen.\,\frac{1}{2}\,x = \sqrt{\left(\dfrac{1 - cos.\,x}{2}\right)}$.

Dalla formola $3.^a$ (56) $cos.\,2x = 2cos.^2\,x - 1$, si ricava $\cos.^2 x = \frac{\cos. 2x + 1}{2}$, donde estraendo la radice si ha $\cos. x = \sqrt{\left(\frac{\cos. 2x + 1}{2}\right)}$. Si ponga in ambi i membri di quest' equazione $\frac{1}{2} x$ al luogo di x, e si avrà, 2.ª $\cos. \frac{1}{2} x = \sqrt{\left(\frac{\cos. x + 1}{2}\right)}$.

Si possono ottenere i valori di $sen. \frac{1}{2} x$, e $\cos. \frac{1}{2} x$, espressi anche per mezzo di $sen. x$. Questi valori sono

3.ª $sen. \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} \sqrt{(1 + sen. x)} - \frac{1}{2} \sqrt{(1 - sen. x)}$.

4.ª $\cos. \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} \sqrt{(1 + sen. x)} + \frac{1}{2} \sqrt{(1 - sen. x)}$.

In fatti se si innalza la equazione 3.ª al quadrato, si avrà $sen.^2 \frac{1}{2} x = \frac{1}{4}(1 + sen. x) - \frac{1}{2} \sqrt{(1 - sen.^2 x)} + \frac{1}{4}(1 - sen. x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(1 - sen.^2 x)}$; ma $\sqrt{(1 - sen.^2 x)} = \cos. x$, dunque $sen.^2 \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos. x = \frac{1 - \cos. x}{2}$, e quindi $sen. \frac{1}{2} x = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos. x}{2}\right)}$, come superiormente si è trovato. Nello stesso modo si troverebbe anche $\cos.^2 \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos. x$, donde si ricava $\cos. \frac{1}{2} x = \sqrt{\left(\frac{1 + \cos. x}{2}\right)}$.

Si può ora osservare che se fosse $\cos. x$ negativo, il valore di $\cos. \frac{1}{2} x$ ricadrebbe in quello di $sen. \frac{1}{2} x$ e viceversa.

Se nella formola 3.ª (55), che è

$tang. (x - y) = \frac{tang. x - tang. y}{1 + tang. x . tang. y}$, porremo $\frac{1}{2} x$

in luogo di y, otterremo

$$tang. \tfrac{1}{2} x = \frac{tang. x - tang. \frac{1}{2} x}{1 + tang. x . tang. \frac{1}{2} x}, \text{ ossia}$$

$tang. \frac{1}{2} x + tang. x . tang.^2 \frac{1}{2} x = tang. x - tang. \frac{1}{2} x$ donde si ricava $tang.^2 \frac{1}{2} x + \frac{2 \, tang. \frac{1}{2} x}{tang. x} - 1 = 0$.

Risolvendo questa equazione, si ha $tang. \frac{1}{2} x = \frac{-1 + \sqrt{(1 + tang.^2 x)}}{tang. x}$. Ma (41) $1 + tang.^2 x = sec.^2 x$; e quindi $\sqrt{(1 + tang.^2 x)} = sec. x$; dunque

$$5.^a \; tang. \tfrac{1}{2} x = \frac{sec. x - 1}{tang. x} = \frac{\frac{1}{\cos. x} - 1}{\frac{sen. x}{\cos. x}} = \frac{1 - \cos. x}{sen. x}.$$

Moltiplicando poi tanto il numeratore che il denominatore di questa frazione per $1 + \cos. x$, si avrà $\frac{(1 - \cos. x)(1 + \cos. x)}{sen. x \, (1 + \cos. x)} = \frac{1 - \cos.^2 x}{sen. x \, (1 + \cos. x)} = \frac{sen.^2 x}{sen. x \, (1 + \cos. x)} = \frac{sen. x}{1 + \cos. x}$; onde sarà anche

$$6.^a \; tang. \tfrac{1}{2} x = \frac{sen. x}{1 + \cos. x}.$$

Siccome poi (46) si ha $\cot. x = \frac{1}{tang. x}$, così sarà

$$7.^a \; \cot. \tfrac{1}{2} x = \frac{1}{tang. \frac{1}{2} x} = \frac{1}{\frac{sec. x - 1}{tang. x}} = \frac{tang. x}{sec. x - 1} = \frac{sen. x}{1 - \cos. x} = \frac{1 + \cos. x}{sen. x}.$$

Della risoluzione dei triangoli rettilinei.

Proposizione XI. Teorema.

58. *I lati di un triangolo rettilineo qualunque ABC* (fig. 7.) *sono proporzionali ai seni degli angoli opposti ai lati medesimi.*

Al triangolo dato ABC si circoscriva un cerchio, e dal suo centro si tirino le rette OD, OE, OF perpendicolari rispettivamente alle corde AB, AC, BC, queste perpendicolari divideranno tanto le corde, quanto gli archi corrispondenti per metà (Geom. 324.). Ciò fatto, la retta BG sarà il seno dell' angolo BOF (11), ma l' angolo BOF è eguale all' angolo BAC, poichè il primo è misurato da tutto l'arco BF ed il secondo della metà dell' arco BFC, cioè del medesimo arco BF (Geom. 353.); dunque BG $=$ *sen.* BAC $=$ *sen.* A. Nello stesso modo si proverà essere AK $=$ *sen.* B, ed AH $=$ *sen.* C. Paragonando ora i lati del triangolo proposto colle rispettive loro metà, si avranno le seguenti proporzioni

$$\left.\begin{array}{l} BC : AC :: BG : AK \\ AC : AB :: AK : AH \\ AB : BC :: AH : BG \end{array}\right\} \text{cioè} \left\{\begin{array}{l} BC : AC :: sen.A : sen.B \\ AC : AB :: sen.B : sen.C \\ AB : BC :: sen.C : sen.A \end{array}\right.$$

donde si ricavano le equazioni

$$1.^a \ BC \times sen.\ B = AC \times sen.\ A$$
$$2.^a \ AC \times sen.\ C = AB \times sen.\ B$$
$$3.^a \ AB \times sen.\ A = BC \times sen.\ C.$$

Mediante queste tre equazioni si possono risolvere tutti i casi, nei quali di un triangolo rettilineo qualunque, sieno dati due angoli ed un lato, oppure sieno dati due lati ed un angolo non compreso fra i lati dati.

59. 1.° Caso. *Nel triangolo ABC* (fig. 9.) *sono conosciuti due angoli A, C ed il lato AB opposto all' angolo C, trovare uno degli altri due lati.*

Dall' equazione 3.ª AB $\times$ *sen.* A $=$ BC $\times$ *sen.* C, si ricava $BC = \dfrac{AB \times sen.\ A}{sen.\ C}$.

Dall' equazione 2.ª AC $\times$ *sen.* C $=$ AB $\times$ *sen.* B, si ha $AC = \dfrac{AB \times sen.\ B}{sen.\ C} = \dfrac{AB \times sen.\ (A+C)}{sen.\ C}$, mentre A $+$ C è supplemento di B, ed i seni degli angoli di supplemento sono eguali.

60. 2.° Caso. *Nel medesimo triangolo ABC sono dati i due lati AB, BC, e l' angolo A opposto al lato BC, trovare l' angolo C opposto al lato AB.*

Dall' equazione 3.ª AB $\times$ *sen.* A $=$ BC $\times$ *sen.* C, si ha $sen.\ C = \dfrac{AB \times sen.\ A}{BC}$.

61. *Scolio.* Se l' angolo cercato C sarà opposto al lato minore dei due lati dati, l' angolo stesso sarà acuto, poichè dalla geometria si sa, che in un triangolo rettilineo qualunque al lato minore si oppone l' angolo minore; onde se sarà AB $<$ BC anche l' angolo C $<$ A, per cui l' angolo C sarà necessariamente acuto, poichè in un triangolo non vi può essere che un solo angolo ottuso. Se poi l' angolo cercato fosse opposto al lato maggiore dei due lati dati, la specie dell' angolo sarà dubbia; di fatto se AB $>$ BC (fig. 1.), condotta BD $=$ BC, si avrà l' angolo C $=$ BDC, e quindi *sen.* C $=$ *sen.* BDC $=$ *sen.* ADB di supplemento $= \dfrac{AB \times sen.\ A}{BC} = \dfrac{AB \times sen.\ A}{BD}$; dunque per sapere se l' angolo cercato sia acuto come

C, o ottuso come ADB, non basta conoscere le grandezze dell' angolo A, del lato AB, e del lato BC $=$ BD; ma è necessario di sapere ancora, se il lato minore, sia nella posizione di BC o in quella di BD. Ordinariamente questa cognizione ci viene somministrata dalle circostanze locali, senza di essa è impossibile di conoscere quale si debba adottare dei due valori ABC, o ABD pel terzo angolo, e quale dei due valori AC, o AD pel terzo lato.

62. 3.° Caso. *Nel triangolo ABC dati i due lati AB, BC e l'angolo A opposto al lato BC, trovare il terzo lato AC.*

Dall' equazione 3.ª (58) si ricava immediatamente, come abbiamo fatto di sopra, $sen.\,C = \frac{AB \times sen.\,A}{BC}$; conoscendo ora l' angolo C, sarà noto anche l' angolo B, perchè supplemento degli altri due A, C; ciò posto dall' equazione 2.ª $AC \times sen.\,C = AB \times sen.\,B$, si ricava $AC = \frac{AB \times sen.\,B}{sen.\,C} = \frac{AB \times sen.\,(A+C)}{sen.\,C.}$

Anche in questo caso come nel superiore è necessario conoscere di quale specie sia l' angolo C.

63. *Corollario.* Se il triangolo ABC proposto fosse rettangolo in A (fig. 8.), in tal caso sarà $sen.\,A = R$. Siccome poi i due angoli B e C si serviranno di complemento, così sarà anche $sen.\,C = cos.\,B$, e $sen.\,B = cos.\,C$; e le proporzioni superiormente trovate. (58) $\begin{cases} BC : AC :: sen.\,A : sen.\,B \\ BC : AB :: sen.\,A : sen.\,C, \end{cases}$

diverranno $\begin{cases} BC : AC :: R : sen.\,B :: R : cos.\,C \\ BC : AB :: R : sen.\,C :: R : cos.\,B; \end{cases}$

donde si ricava *che in un triangolo rettilineo rettangolo, sta l' ipotenusa ad un cateto come il raggio sta al seno dell' angolo opposto a questo cateto, oppure come il raggio sta al coseno dell' angolo adiacente al cateto medesimo.*

64. La proporzione poi $AC : AB :: sen.\,B : sen.\,C$, diverrà $AC : AB :: sen.\,B : cos.\,B$, oppure $AC : AB :: cos.\,C : cos.\,B$, donde si rileva, *che in un triangolo rettilineo rettangolo qualunque, sta un cateto all' altro cateto, come il seno dell' angolo opposto al primo cateto sta al coseno dell' angolo medesimo, oppure un cateto sta all' altro cateto, come il coseno dell' angolo adiacente al primo cateto, al coseno dell' angolo adiacente al secondo cateto.*

65. La proporzione $AC : AB :: sen.\,B : cos.\,B$ ci dà $AC = AB \times \frac{sen.\,B}{cos.\,B}$, ma $\frac{sen.\,B}{cos.\,B} = \frac{tang.\,B}{R}$; dunque $AC = \frac{AB \times tang.\,B}{R}$, ossia $AB : AC :: R : tang.\,B$, donde si ha, *che in un triangolo rettilineo rettangolo qualunque sta un cateto all' altro cateto, come il raggio sta alla tangente dell' angolo opposto al secondo cateto.*

66. Le proporzioni, che si sono ritrovate nei precedenti articoli riguardo al triangolo rettangolo si possono avere anche direttamente dal triangolo rettangolo ABC (fig. 8.); poichè fatto centro in C con intervallo $CR = R$ descritto l' arco di cerchio RD, e dai punti D, R condotte le perpendicolari DE, RT sul cateto CA, sarà (12) $RT = tang.\,C$, $DE = sen.\,C = cos.\,B$; $CE = cos.\,C = sen.\,B$. Ciò posto la somiglianza dei triangoli rettangoli BAC, DEC dà le proporzioni

$BC : AB :: CD : DE :: R : sen.\,C :: R : cos.\,B$

$BC : AC :: CD : CE :: R : cos.\,C :: R : sen.\,B$

$AC : AB :: CE : DE :: cos.\,C : sen.\,C :: sen.\,B : cos.\,B.$

La somiglianza dei triangoli rettangoli CAB, CRT dà la proporzione AC : AB :: CR : RT :: R : *tang.* C.

67. Da queste proporzioni si possono ottenere le seguenti equazioni, le quali servono all' immediata risoluzione dei triangoli rettangoli.

1.ª $R \times AB = BC \times sen.C = BC \times cos.B.$
2.ª $R \times AC = BC \times sen.B = BC \times cos.C.$
3.ª $R \times AB = AC \times tang.C = AC \times cot.B.$

68. 1.° Caso. *Data l' ipotenusa BC ed un lato AB, trovare gli angoli C e B, ed il terzo lato AC.*

Dall' equazione 1.ª si ha $sen.C = \frac{R \times AB}{BC}$. Conoscendo l' angolo C, si conosce anche il suo complemento $90° - C = B$.

Il terzo lato AC si ha dall' equazione 2.ª dopo di aver trovato l' angolo C, ed è

$$AC = \frac{BC \times sen.B}{R} = \frac{BC \times cos.C}{R}.$$

Si può anche averlo facendo uso della proprietà del triangolo rettangolo (Geom. 209.), per lo che si ottiene $AC = \sqrt{(\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2)} = \sqrt{[(BC+AB)(BC-AB)]}$.

69. 2.° Caso. *Sono dati i due cateti AB, AC, trovare gli angoli acuti, e l' ipotenusa BC.*

Si avrà immediatamente l' angolo C dalla equazione 3.ª, e sarà $tang.C = \frac{R \times AB}{AC}$; determinato l'angolo C, si ha anche $B = 90° - C$. Dall' equazione 1.ª si ottiene poi $BC = \frac{R \times AB}{sen.C}$. Si può avere direttamente il valore di BC facendo uso della proprietà del triangolo rettangolo, per lo che

$$BC = \sqrt{(\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2)}.$$

70. 3.° Caso. *Data l' ipotenusa BC, ed uno degli angoli acuti, trovare i due cateti AB, AC.*

Essendo dato un angolo acuto, si conosce anche l' altro; ciò posto il valore di AB si avrà immediatamente dall' equazione 1.ª, e quello di AC dalla 2.ª, e sarà $AB = \frac{BC \times sen.C}{R}$; $AC = \frac{BC \times sen.B}{R}$.

71. 4.° Caso. *È dato il cateto AB, e l' angolo acuto B, trovare l' ipotenusa BC, e l' altro cateto AC.*

Dall' equazione 1.ª si ha $BC = \frac{R \times AB}{cos.B}$.

Dall' equazione 3.ª si ricava $AC = \frac{R \times AB}{tang.C} = \frac{R \times AB}{cot.B}$.

Proposizione XI. Teorema.

72. *In un triangolo rettilineo qualunque ABC (fig. 9.) sta la somma BC + AC di due lati, alla loro differenza BC—AC, come la tangente della semisomma $\frac{A+B}{2}$ degli angoli opposti a questi lati, sta alla tangente della loro semidifferenza $\frac{A-B}{2}$.*

In fatti si è dimostrato (53) che

$$sen.A + sen.B : sen.A - sen.B :: tang.\frac{A+B}{2} : tang.\frac{A-B}{2}.$$

Si è del pari dimostrato (58) che sta $sen.A : sen.B :: BC : AC$, starà anche $sen.A + sen.B : sen.A - sen.B :: BC + AC : BC - AC$; dunque a cagione del rapporto comune $sen.A + sen.B : sen.A - sen.B$, si avrà

$$BC + AC : BC - AC :: tang.\frac{A+B}{2} : tang.\frac{A-B}{2}.$$

73. Col mezzo di questo teorema si risolve qualunque triangolo rettilineo, quando sono dati due de' suoi lati e l' angolo da essi compreso.

In fatti, se nel triangolo ABC conosceremo l' angolo C, si conoscerà anche la somma $A+B$ degli altri due, poichè sarà $A+B=180^\circ-C$, sarà nota per conseguenza anche la semisomma degli angoli medesimi, cioè $\frac{A+B}{2}=\frac{180^\circ-C}{2}$. Ora nella proporzione superiormente trovata, conoscendo i tre primi suoi termini, si determinerà anche il valore del quarto termine, cioè di *tang.* $\frac{A-B}{2}$, dopo di che si conosceranno gli angoli A, B; poichè nella supposizione che sia il lato $BC>AC$, sarà anche l' angolo $A>B$, e quindi l' angolo A sarà eguale alla semisomma più la semidifferenza, e l'angolo B sarà eguale alla semisomma meno la semidifferenza degli angoli medesimi. Conosciuti che sieno i tre angoli del triangolo ABC, si troverà agevolmente il terzo lato AB mediante la proporzione

$AB : AC :: sen.\,C : sen.\,B$, e sarà $AB=\frac{AC\times sen.\,C}{sen.\,B}$.

Proposizione XII. Teorema.

74. *In un triangolo rettilineo qualunque ABC* (fig. 10.) *il coseno di un angolo A qualunque, sta al raggio, come la somma dei quadrati dei lati, che comprendono quell' angolo meno il quadrato del lato, che gli si oppone, sta al doppio rettangolo dei lati, che comprendono l' angolo medesimo.*

Dal vertice dell' angolo B sia abbassata la perpendicolare BD sopra il lato AC.

1.° Se la perpendicolare cadrà dentro il triangolo proposto, si avrà $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2AC\times AD$ (Geom. 218.), donde si ricava $AD=\frac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2AC}$.

Dal triangolo rettangolo ADB si ottiene (66) $AB : AD :: R : cos.\,A$, per lo che $AD=\frac{AB\times cos.\,A}{R}$, e paragonando i due valori di AD, si ha

$\frac{AB\times cos.\,A}{R}=\frac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2AC}$, donde si ricava

$$cos.\,A=R\left(\frac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2AC\times AB}\right).$$

2.° Se la perpendicolare BD cadrà al di fuori del triangolo ABC, si avrà (Geom. 219.)

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+2AC\times AD$, e quindi $AD=\frac{\overline{BC}^2-\overline{AB}^2-\overline{AC}^2}{2AC}$. Il triangolo rettangolo ABD dà $AB : AD :: R : cos.\,BAD$; ma $cos.BAD=-cos.BAC=-cos.\,A$; poichè i coseni degli angoli di supplemento sono eguali (26), ma di segno contrario; dunque $AB : AD :: R : -cos.\,A$, e quindi $AD=-\frac{AB\times cos.\,A}{R}$, paragonando i due valori di AD, cangiando i segni, e facendo le medesime operazioni, che si sono fatte superiormente, si avrà anche in questo caso,

$$cos.\,A=R\left(\frac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2AC\times AB}\right);$$

dalla quale si può ricavare la proporzione

$$\cos.A : R :: \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 : 2AC \times AB.$$

75. *Scolio* I. Questo teorema serve nella trigonometria particolarmente per determinare gli angoli di un triangolo qualunque rettilineo, quando è data la grandezza dei lati del triangolo medesimo. Egli potrebbe da solo bastare a risolvere tutti i problemi della trigonometria rettilinea, poichè scritte due altre equazioni analoghe alla superiore, per gli angoli B, e C, si avranno così tre equazioni fra sei quantità, onde date tre delle sei cose che costituiscono un triangolo, purchè fra esse vi sia almeno un lato, si potranno sempre mediante quelle tre equazioni determinare le tre quantità incognite.

76. *Scolio* II. Se nella formola del (57) $sen.\frac{1}{2}A = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos.A}{2}\right)}$ in luogo di $\cos.A$ vi porremo il valore superiormente determinato, avremo, fattovi $R = 1$, $sen.\frac{1}{2}A = \sqrt{\left\{\frac{1 - \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2}{2AC \times AB}}{2}\right\}}$

$$= \sqrt{\left(\frac{2AC \times AB + \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2}{4AC \times AB}\right)} = \sqrt{\left(\frac{(BC + AB - AC)\,(BC + AC - AB)}{4AC \times AB}\right)}.$$

Si faccia $BC + AB + AC = 2M$, e si avrà $BC + AB - AC = 2M - 2AC$, e $BC + AC - AB = 2M - 2AB$ onde $sen.\frac{1}{2}A = \sqrt{\left(\frac{(2M - 2AC)\,(2M - 2AB)}{4AC \times AB}\right)} =$

$\sqrt{\left(\frac{(M - AC)\,(M - AB)}{AC \times AB}\right)}$; formola che, resa omogenea mediante la moltiplicazione del 2.° membro per R, diverrà $sen.\frac{1}{2}A = R\sqrt{\left(\frac{(M - AC)\,(M - AB)}{AC \times AB}\right)}$, e che servirà a calcolare con molta facilità il valore di un angolo qualunque di un triangolo rettilineo, qualora si conoscano i suoi lati.

Della costruzione delle tavole trigonometriche.

77. La costruzione delle tavole trigonometriche è fondata sui principj generali, che abbiamo dimostrati, servendo essi a determinare i seni, i coseni, le tangenti, ecc. in parti del raggio. Varj sono i metodi, che possono condurre allo stesso fine; noi ci accontenteremo di indicarne brevemente uno.

78. Le linee trigonometriche sono state calcolate altre con 10, altre con 15 cifre decimali; le tavole più comuni sono ridotte a 7 decimali, perchè più comode all'uso, e sufficienti in esattezza nella maggior parte dei casi.

Supponendo il raggio $= 1$, si parta da un arco, di cui si conosca il seno, per esempio, dall'arco di 30°, e sarà (41) $sen.\ 30° = \frac{1}{2} = 0,5000000$. Dalla formola $\cos.x = \sqrt{(1 - sen.^2 x)}$, si avrà, postovi per $sen.^2 x$ il suo valore ora determinato, $\cos.30° = \sqrt{(1 - 0,2500000)} = \sqrt{(0,7500000)} = 0,8660254$. Dalla formola $tang\,x = \frac{sen.\,x}{\cos.\,x}$, si otterrà $tang.\,30° = \frac{sen.\,30°}{\cos.\,30°} = \frac{0,5000000}{0,8660254} = 0,5773503.$

Dalla formola $sec. x = \frac{1}{cos. x}$ si avrà

$$sec.\ 30^\circ = \frac{1}{cos.\ 30^\circ} = \frac{1{,}0000000}{0{,}8660254} = 1{,}1547005.$$

Dalla formola $cot. x = \frac{1}{tang. x}$, si otterrà

$$cot.\ 30^\circ = \frac{1}{tang.\ 30^\circ} = \frac{1{,}0000000}{0{,}5773503} = 1{,}7320508.$$

Dalla formola $cosec. x = \frac{1}{sen. x}$, si avrà

$$cosec.\ 30^\circ = \frac{1}{sen.\ 30^\circ} = \frac{1{,}0000000}{0{,}5000000} = 2{,}0000000.$$

Mediante le formole $sen. \frac{1}{2} x = \sqrt{\left(\frac{1 - cos. x}{2}\right)}$, e $cos. \frac{1}{2} x = \sqrt{\left(\frac{1 + cos. x}{2}\right)}$, si avranno i valori dei seni, e de' coseni degli archi compresi nella seguente progressione geometrica, e per conseguenza anche quelli delle tangenti, cotangenti, ecc. degli archi medesimi:

$$\div 30^\circ : \frac{30^\circ}{2} : \frac{30^\circ}{4} : \frac{30^\circ}{8} : \frac{30^\circ}{16} : \frac{30^\circ}{32} : \frac{30^\circ}{64} : \frac{30^\circ}{128} : \frac{30^\circ}{256} : \frac{30^\circ}{512} : \text{ecc.};$$

ossia $\div 30^\circ : 15^\circ : 7^\circ 30' : 3^\circ 45' : 1^\circ 52' 30'' : 0^\circ 56' 15'' :$
$0^\circ 28' 7'' 30''' : 0^\circ 14' 3'' 45''' : 0^\circ 7' 1'' 52''' 30'''' :$ ecc.

Ciò posto si osserverà che quando gli archi sono piccolissimi, essi non differiscono sensibilmente dai rispettivi loro seni, e la loro differenza non influisce punto sulle 7 cifre decimali, alle quali ci siamo limitati, onde esprimerne i valori, ed essi potranno quindi

supporsi proporzionali ai seni medesimi, di modo che, per trovare il seno appartenente ad un arco di $0^\circ 1'$, si farà questa proporzione, come sta l'arco di $0^\circ 7' 1'' 52''' 30''''$ all'arco di $0^\circ 1'$, così il seno del primo arco sta al seno di $0^\circ 1'$.

I primi due termini di questa proporzione si possono determinare con facilità, atteso che essi sono frazioni della circonferenza, il di cui valore espresso in parti del raggio è 6,2831853; il terzo termine si ha dalla formola $sen. \frac{1}{2} x$, si conoscerà per conseguenza anche il quarto termine, il valore cioè del seno dell'arco di $0^\circ 1'$ espresso in parti del raggio. Da $0^\circ 1'$ sino a 3° basterà moltiplicare il valore di seno $0^\circ 1'$ per 2, 3, 4, 5,....... ecc. per avere i valori dei seni di $0^\circ 2'$, $0^\circ 3'$, $0^\circ 4'$, $0^\circ 5'$...... sino a 3°; poichè i seni degli archi compresi fra i limiti di $0^\circ 1'$, e 3° non differiscono sensibilmente dagli archi corrispondenti.

Per calcolare poi i valori dei seni degli archi al di sopra di 3° serviranno le formole del (56)

1.ª $sen.\ 2x = 2\ sen.\ x . cos.\ x = 2\ sen. x \sqrt{(1 - sen.^2 x)}$.

5.ª $sen.\ 3x = 3\ sen.\ x - 4\ sen.^3\ x$, e la formola

1.ª del (48) $sen.\ (x+y) = sen.\ x . cos.\ y + sen.\ y . cos.\ x$.

Con tali mezzi, calcolati che sieno i valori dei seni, si avranno facilmente quelli dei coseni, delle tangenti, delle cotangenti, ecc. impiegando le formole del (41).

Basterà però calcolare i valori delle linee trigonometriche in parti del raggio sino all'arco inclusivamente di 45°, perchè sieno conosciuti anche quelli delle linee trigonometriche appartenenti ad archi di qualsivoglia grandezza maggiore di 45°. Di fatto in virtù dei teoremi dimostrati (15) sarà, per esempio,

$$sen.\ 65^\circ = cos.\ 25^\circ,\ sen.\ 170^\circ = sen.\ 10^\circ;$$

$$cos.\ 83^\circ = sen.\ 7^\circ,\ tang.\ 75^\circ = cot.\ 15^\circ,\ \text{ecc.}$$

79. Calcolati i valori delle linee trigonometriche in parti del raggio, si sono calcolati i rispettivi logaritmi, nello stesso modo di quelli dei numeri. Questi formano delle tavole, il di cui uso è assai più grande delle precedenti. I logaritmi dei seni, dei coseni, delle tangenti, ecc., si chiamano ancora, seni, coseni, tangenti, ecc. *artificiali*, a differenza dei veri seni, coseni, tangenti, ecc. delle prime tavole, che diconsi *naturali*. Quindi per far uso di queste tavole di logaritmi, bisogna richiamarsi alla memoria i principali teoremi sui logaritmi, di cui si è parlato estesamente nell' Algebra, e per mezzo dei quali i calcoli trigonometrici acquistano una singolare brevità e facilità, come avremo occasione di vedere nelle applicazioni pratiche, che fra poco aggiungeremo.

I primi Matematici, che hanno intrapreso il penosissimo lavoro di formare le tavole dei logaritmi per le linee trigonometriche, hanno supposto che il raggio, in parti del quale esse si esprimono, fosse rappresentato dall' unità seguita da 10 zeri cioè da 10000000000, in conseguenza di che il logaritmo del raggio viene ad avere 10 unità di caratteristica; ma in seguito, siccome i calcoli ordinarj non esigono una tale precisione, si sono tralasciate nelle tavole attuali le ultime cinque cifre dei valori numerici delle linee trigonometriche, di modo che quei valori, come sono attualmente nelle tavole, possono differire da quelli calcolati pel raggio 10000000000 di una quantità minore di $\frac{1}{100000}$; ma non maggiore nè eguale. Non si è fatto lo stesso riguardo ai logaritmi di quelle funzioni, essendosi questi conservati tali come si calcolarono nella supposizione di $R = 10000000000$, ed è per questa ragione che si trova per essi una caratteristica molto maggiore di quella corrispondente al valore numerico delle rispettive funzioni circolari; ma questa abbreviazione non porta seco alcun inconveniente; poichè la caratteristica dei logaritmi di tutti i seni, coseni, tangenti, ecc. è relativa alla caratteristica del logaritmo del raggio, il quale tacitamente si considera $= 10000000000$.

80. I Matematici Francesi hanno giudiziosamente messo in uso la divisione decimale anche per la circonferenza del cerchio, ed hanno quindi divisa la circonferenza in 400°, e ciascun grado in $100'$; ciascun minuto in $100''$, ecc., ciò che porta molte facilitazioni nei calcoli trigonometrici. Tale divisione, che è la più naturale e più consentanea al metodo della nostra numerazione, avrei bramato io pure di introdurla in questi miei elementi, ma pensando che fra noi non sono per anche bastantemente sparse le tavole trigonometriche dei logaritmi calcolate secondo la nuova divisione, ho creduto miglior partito di attenermi per ora alla vecchia divisione sessagesimale della circonferenza.

Applicazione della trigonometria rettilinea alla soluzione di alcuni problemi di pratica.

81. È indispensabile nei problemi di pratica di misurare delle lunghezze rettilinee sul terreno, e degli angoli. Per le prime si fa uso di

una catena o di certe verghe riferite nelle loro divisioni a qualche unità di misura praticata nei rispettivi paesi; per misurare gli angoli si adopera uno stromento chiamato *Grafometro*, o *Goniometro*, la di cui costruzione consiste in un cerchio, o semicerchio metallico, che ha la sua circonferenza divisa in 360°, ed a cui sono unite due lastre metalliche o *Alidade* munite di traguardi alle loro estremità, oppure di due cannocchiali, uno dei quali è fisso nel centro del circolo in modo, che la linea visuale da esso indicata corrisponde ad un diametro segnato sul circolo metallico, e l'altro è mobile intorno al centro del circolo medesimo, onde poterlo dirigere verso gli oggetti, che si vogliono osservare. Nel centro del grafometro e dalla parte del cannocchiale stabile vi è aggiunto un piede a ginocchio portante un pezzo di canna pure di metallo, nella quale si fa entrare l'estremità superiore del piede, che è destinato a sostenerlo.

Per esplorare poi se un terreno è orizzontale, ciò che interessa da sapersi nella maggior parte delle pratiche operazioni, si fa uso del noto strumento chiamato *Livello* applicato sopra di un'asta rettilinea tenuta coricata sulla superficie del terreno medesimo. Ciò basta per indicare i principj sopra i quali noi supporremo appoggiate le misure di cui avremo bisogno; chi bramasse più estese cognizioni sulla pratica delle misure e sulla descrizione degli strumenti, che si usano per ottenerle, le troverà nei trattati più ampj di Trigonometria, e particolarmente in quelli di Geodesia.

Proposizione I. Problema.

82. *Trovare l'altezza verticale di un edifizio, il di cui piede sia accessibile, per esempio della torre AB* (fig. 11).

Partendo dal piede della torre proposta si misuri sul terreno, supposto orizzontale una retta BD arbitraria, tale però, che non sia nè troppo grande nè troppo piccola rispetto all' altezza, che si vuol misurare. Nel punto D si ponga verticalmente il piede del grafometro, e col mezzo di un livello si disponga l'alidada o il cannocchiale fisso orizzontalmente, e si diriga il mobile alla sommità A dell' oggetto, di cui si cerca l'altezza. Sopra il lembo del grafometro si troverà la misura dell'angolo ACE formato dalla orizzontale CE e dalla obbliqua AC. Supponiamo che tale angolo sia di 50°, e che la orizzontale BD = CE sia di 20 metri; ciò posto (66), nel triangolo rettangolo ACE sta EC : AE :: R : *tang.* C, ossia 20^m : AE : R : *tang.* 50°, donde si ricava $AE = \frac{20^m \times tang.\ 50°}{R}$. Prendendo i logaritmi, si avrà

$$log.\ AE = log.\ 20^m + log.\ tang.\ 50° - log.\ R.$$

Nelle tavole logaritmiche si troverà

log. 20	=	1,30103
log. tang. 50° = *log. cot.* 40°	=	10,07619
Somma		11,37722
log. R	=	10,00000
Residuo		1,37722

Cercando nelle tavole il numero corrispondente a questo logaritmo, si trova essere AE = 23^m,84 prossimamente. Aggiungendo ad AE l'altezza CD = BE del grafometro, che supporremo di un metro, l'altezza totale della torre AB sarà di 24 metri, e 84 centimetri.

Se si volesse la lunghezza della visuale AC, si ot-

terrebbe dalla proporzione AC : CE : : R : *cos.* C, donde si ricava $AC = \frac{CE \times R}{cos.\, C} = \frac{20^m \times R}{cos.\, 50^\circ}$. Operando in un modo analogo a quello tenuto per determinare AE, si avrebbe AC espressa in metri.

Proposizione II. Problema.

83. *Determinare l' altezza AB* (fig. 11.) *di una torre o di un altro oggetto qualunque, il di cui piede sia inaccessibile.*

Si misuri sul terreno una orizzontale DG, tale però che da ciascuno de' suoi estremi si possa vedere la sommità A dell' oggetto, di cui si cerca l' altezza; e mediante il grafometro si misurino gli angoli FCA, CFA, che la orizzontale DG, o la sua parallela ed eguale FC, fa colle visuali AC, AF; ciò posto, nel triangolo FCA sarà conosciuta la base FC = GD, e gli angoli C, F sopra la medesima, e per conseguenza anche l' angolo CAF = 180° — C — F; per cui si potrà determinare a piacere la distanza CA, o FA, che dalla sommità A vi è a ciascuno degli estremi della retta FC. Onde determinare FA, supponiamo che la misura dell' angolo C sia di 50°, e che quella dell' angolo F sia di 106°, e la retta GD = FC sia di 10 metri. Dal triangolo obliquangolo CFA si avrà

CF : FA : : *sen.*CAF : *sen.* C, ossia

10^m : FA : : *sen.* (180° — 50° — 106°) : *sen.* 50, onde

$FA = \frac{10^m \times sen.\, 50^\circ}{sen.\, 24^\circ}$. Prendendo i logaritmi, si avrà $log.FA = log.10 + log.sen.50^\circ - log.sen.24^\circ$; ma

log. 10	=	1,00000
log. sen., 50° = *log. cos.* 40°	=	9,88425
Somma		10,88425
log. sen. 24°	=	9,60931
Residno		1,27494

Passando poi dai logaritmi ai numeri si trova essere FA = 18^m, 83 prossimamente. Tenendo il piano del grafometro verticale, si misuri l' angolo AFE, che fa il suo diametro tenuto orizzontale colla visuale FA mandata alla sommità della torre, e dal triangolo rettangolo FEA si avrà FA : AE : : R : *sen.* AFE, donde si ricava $AE = \frac{FA \times sen.\, AFE}{R}$.

In questo caso essendo, l' angolo AFE di 74°; si avrà $AE = \frac{18^m, 83 \times sen. 74^\circ}{R}$. Prendendo i logaritmi si avrà $log.AE = log.\, 18^m{,}83 + log.\, sen\, 74^\circ - log.R$.

Ma *log.* 18, 83	=	1,27494
log. sen. 74° = *log. cos.* 16°	=	9,98284
Somma		11,25778
log. R	=	10,00000
Residuo		1,25778

Questo logaritmo corrisponde nelle tavole al numero 18, 10, onde è AE = 18^m, 10.

Se all' altezza AE si aggiungerà l' altezza dello strumento DC = BE supposta di 1 metro, si avrà l' altezza totale della torre AB = 19^m, 10, al di sopra del livello del terreno, nel quale fu condotta la GD, che ha servito di base per l' operazione eseguita.

84. *Corollario* I. Questo problema serve anche a far conoscere l' altezza di un monte sopra un dato

piano orizzontale, come sarebbe il livello di un lago o del mare, al quale oggetto si determinerà la distanza, che vi è fra un punto qualunque preso nel detto piano, e la vetta del monte indi l'angolo che quella retta fa coll'orizzonte.

85. *Corollario* II. Se stando sopra una torre AE (fig. 12.) si volesse determinare la distanza, che vi è fra la sua estremità A, ed un punto qualunque D preso sul terreno, dal punto A al punto D si manderebbe la visuale AD, e si misurerebbe l'angolo GAD formato da quella visuale colla verticale AE; da un altro punto G preso più basso che sia possibile al di sotto del punto A nella verticale medesima AE, si manderebbe allo stesso punto D la visuale GD, e si misurerebbe l'angolo AGD, formato dalla visuale GD colla verticale AE, si misurerebbe finalmente la distanza verticale AG, per lo che nel triangolo AGD si conosceranno due angoli ed un lato, onde si potrà col suo mezzo determinare tanto il lato AD, quanto il lato GD.

Se poi nel piano della visuale AD, e della verticale AE immagineremo condotta l'orizzontale DE ad incontrare la verticale AE nel punto E, il triangolo rettangolo AED, di cui è conosciuta l'ipotenusa AD, e l'angolo adiacente DAE, darà tanto la distanza orizzontale, che vi è dal punto D al piede E della torre, quanto l'altezza AE della torre medesima.

86. *Scolio*. Se stando sopra di un monte si volesse sapere la sua altezza al di sopra di un dato piano orizzontale, si opererebbe nel modo stesso, colla differenza che la retta AG si potrebbe prendere comunque, purchè da' suoi estremi si potesse vedere il punto D preso nel piano orizzontale dato.

Proposizione III. Problema.

87. *Trovare la distanza fra due punti A, e B (fig. 13.) situati sulle rive opposte di un fiume.*

Sul prolungamento della visuale AB si prenda un punto qualunque E, dal quale si conduca una retta qualunque ED, e da qualsivoglia punto D preso sopra di essa si mandi una visuale al punto A, che trovasi sulla opposta riva del fiume. Si avrà in questo modo un triangolo ADE, del quale si conoscerà il lato ED, e gli angoli D, E ad esso adiacenti, e per conseguenza anche il terzo angolo A. Dalla risoluzione poi di questo triangolo si avrà DE : AE :: *sen*. A : *sen*. D; donde $AE = \frac{DE \times sen.D}{sen.A}$. Mediante il grafometro si misurino gli angoli D, E, e sia l'angolo D di 58° 30', e l'angolo E sia di 68° 33', sarà l'angolo $A = 180° - 68° 33' - 58° 30' = 52° 57'$, e la retta DE sia di 10 metri; fatte queste sostituzioni, si avrà in questo caso

$AE = \frac{10^m \times sen.\, 58° 30'}{sen.\, 52° 57'}$. Prendendo i logaritmi sarà

$log.AE = log.10 + log.sen.58° 30' - log.sen.52° 57'$,

ma *log*. 10	=	1,00000
log. sen. 58° 30' = *log. cos.* 31° 30'	=	9,93077
Somma		10,93077
log. sen 52° 57' = *log cos.* 37° 3'	=	9,90206
Residuo		1,02871

Passando dai logaritmi ai numeri, si ha $AE = 10^m,68$ prossimamente.

Dalla retta AE si sottragga la parte BE, che rimane al di quà del fiume, e che misurata si supponga di $5^m, 48$, la distanza AB richiesta sarà di $5^m, 20$.

Proposizione IV. Problema.

88. *Trovare la distanza fra due oggetti A, e B totalmente inaccessibili, come sarebbe, per esempio, la distanza, che vi è fra due piante A, e B poste al di là di un fiume PQRS* (fig. 14.).

Si misuri sul terreno al di qua del fiume una retta CD, tale che da ciascuno de' suoi estremi C, D si possano vedere i piedi delle piante A, B; dalla estremità della retta CD si mandino al punto A le visuali CA, DA, e col mezzo del grafometro si misurino gli angoli fatti dalla CD colle visuali medesime; ciò fatto, mediante la risoluzione del triangolo ACD, si trovi la grandezza di una delle due visuali nominate. Sia, per esempio, CD = 10 metri, l'angolo ACD = 93°, e l'angolo ADC = 58°, l'angolo CAD di supplemento sarà di 29°. Risolvendo il triangolo ACD, onde trovare AD, si avrà AD : CD : : *sen.* ACD : *sen.* CAD, ossia AD : 10^m : : *sen.* 93° : *sen.* 29°, donde si ricava

$$AD = \frac{10^m \times sen.\,93^\circ}{sen.\,29^\circ}.$$ Prendendo i logaritmi si avrà

$log.\,AD = log.\,10 + log.\,sen.\,93^\circ - log.\,sen.\,29^\circ$; ma

log. 10	=	1, 00000
log. sen. 93° = *log. cos.* 3°	=	9, 99940
Somma		10, 99940
log. sen. 29°	=	9, 68557
Residuo		1, 31383

A questo logaritmo corrisponde prossimamente AD = $20^m, 60$.

Dagli estremi stessi della base CD si mandino al punto B le visuali CB, DB. Misurato l'angolo CDB sia di 104°, e l'angolo DCB sia di 50°; l'angolo CBD di supplemento sarà di 26°. Ciò posto, mediante la risoluzione del triangolo CDB, si determini la visuale BD, poichè nel triangolo ACD è stata determinata la AD; se in quel triangolo fosse stata determinata la AC, bisognerebbe ora trovare la BC, per avere così un triangolo, nel quale sieno noti due lati e l'angolo da essi compreso. Onde avere BD si faccia la proporzione BD : CD : : *sen.* DCB : *sen.* CBD, ossia BD : 10^m : : *sen.* 50° : *sen.* 26°; donde si ricava

$$BD = \frac{10^m \times sen.\,50^\circ}{sen.\,26^\circ}.$$ Prendendo i logaritmi sarà

$log.\,BD = log.\,10 + log.\,sen.\,50^\circ - log.\,sen.\,26^\circ$; ora

log. 10	=	1, 00000
log. sen. 50° = *log. cos.* 40°	=	9, 88425
Somma		10, 88425
log. sen. 26°	=	9, 64184
Residuo		1, 24241

a cui prossimamente corrisponde BD = $17^m, 48$.

Si immagini condotta una retta dal punto A al punto B, e mediante il grafometro si misuri l'angolo ADB, che suppongo in questo caso di 46°; si avrà così un triangolo, ADB in cui saranno conosciuti i due lati AD, BD e l'angolo ADB da essi compreso, si conoscerà in conseguenza anche la somma degli altri due angoli del triangolo medesimo, che sarà $B + A = 180^\circ - ADB = 180^\circ - 46^\circ = 134^\circ$, e quindi $\frac{B+A}{2} = 67^\circ$. Onde risolvere il triangolo ADB, si avrà la proporzione (72)

$$AD + BD : AD - BD : : tang.\,\frac{B+A}{2} : tang.\,\frac{B-A}{2},$$

la quale nel caso attuale diventa $20^m, 60 + 17^m, 48 : 20^m, 60 - 17^m, 48 :: tang. 67° : tang. \frac{B-A}{2}$, ossia $38^m, 08 : 3^m, 12 :: tang. 67° : tang. \frac{B-A}{2}$, donde si ricava $tang. \frac{B-A}{2} = \frac{3^m, 12 \times tang. 67°}{38^m, 08}$.

Prendendo i logaritmi, si ha

$$log. tang. \frac{B-A}{2} = log. 3, 12 + log. tang. 67° - log. 38, 08;$$

ma $log. 3, 12$	=	0,49415
$log. tang. 67° = log. cot. 23°$	=	10,37215
Somma		10,86630
$log. 38, 08$	=	1,58070
Residuo		9,28560

Trovato questo logaritmo nelle tavole trigonometriche e fra le colonne delle tangenti, si vede che esso corrisponde prossimamente alla tangente di un angolo di 10° 56′; onde $\frac{B-A}{2} = 10° 56'$. Conoscendo ora la semisomma $\frac{B+A}{2} = 67°$ degli angoli B, A, e la loro semidifferenza, l' angolo maggiore, quello cioè opposto al lato maggiore, sarà eguale alla semisomma più la semidifferenza, e l' angolo minore sarà eguale alla semisomma meno la semidifferenza dei due angoli B, A; e siccome è AD > BD, così sarà l' angolo $B = 67° + 10° 56' = 77° 56'$, e l' angolo $A = 67° - 10° 56' = 56° 4'$. Ora poichè nel triangolo ADB si conoscono due lati e tutti gli angoli, si troverà il lato AB, mediante la proporzione seguente $AB : AD :: sen. ADB : sen. B$,

ossia $AB : 20^m, 60 :: sen. 46° : sen. 77° 56'$, donde si ottiene $AB = \frac{20^m . 60 \times sen. 46°}{sen. 77° 56'}$. Prendendo i logaritmi si ha $log. AB = log. 20, 60 + log. sen. 46° - log. sen. 77° 56'$; ma

$log. 20, 60$	=	1,31383
$log. sen. 46° = log. cos. 44°$	=	9,85693
Somma		11,17076
$log. sen. 77° 56' = log. cos. 12° 4'$	=	9,99030
Residuo		1,18056.

Passando dai logaritmi ai numeri, si trova essere prossimamente $AB = 15^m, 15$.

Proposizione V. Problema.

89. *Conoscendo le distanze, che vi sono da un punto A (fig. 15.) alle estremità B, C di una retta data BC, come sarebbe la lunghezza della facciata di una casa, determinare l'angolo, sotto il quale si vede quella linea stando in A.*

Condotte dal punto A agli estremi della retta data BC le rette AB, AC, si avrà un triangolo del quale si conosceranno tutti e tre i lati. Sia, per esempio, BC = 10 metri, $AB = 12^m$, ed $AC = 17^m$. Sostituendo questi valori nella formola

$$(74) \quad cos. A = R\left(\frac{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}{2AC \times AB}\right), \text{ si avrà}$$

$$cos. A = R\left(\frac{289 + 144 - 100}{2 . 17 . 12}\right) = \frac{R \times 333}{408}, \text{ e}$$

prendendo i logaritmi, sarà

$$log. cos. A = log. R + log. 333 - log. 408; \text{ ma}$$

$log.\ R$ .... $= 10,00000$
$log.\ 333$ .... $= 2,52244$

Somma $12,52244$

$log.\ 408$ .... $= 2,61066$

Residuo $9,91178$

Si cerchi questo logaritmo nelle tavole fra le colonne dei coseni, e si troverà che esso corrisponde al coseno di un angolo di 35° 18′, onde sarà l'angolo cercato $A = 35°\ 18'$.

90. *Scolio.* Potrebbe succedere che *cos.*A fosse espresso per una quantità negativa, nel qual caso l'angolo sarebbe ottuso. Onde avere il valore di quell'angolo, si opererà come si è fatto superiormente, non avendo riguardo alcuno al segno negativo. Il valore così determinato sarà quello del coseno del supplemento dell'angolo A, atteso che gli angoli di supplemento hanno coseni eguali con segni contrarj.

Se, per esempio, fosse nel triangolo ABC il lato $BC = 10^m$, il lato $AB = 5^m$, ed il lato $AC = 7^m$, fatte le opportune sostituzioni nella formola sopra citata, si avrebbe $cos.A = \frac{R \times -26}{70}$, per cui sarebbe

$log.\ R$ .... $= 10,00000$
$log.\ 26$ .... $= 1,41497$

Somma $11,41497$

$log.\ 70$ .... $= 1,84510$

Residuo $9,56987$

a cui corrisponde il coseno dell'angolo di 68° 12′, il di cui supplemento è di 111° 48′, onde l'angolo A cercato sarà di 111° 48′.

91. *Scolio generale.* È assolutamente necessario nelle applicazioni della trigonometria ai casi pratici,

ed in generale nelle operazioni di geodesia di evitare gli angoli troppo acuti, e, dovendo costruire dei triangoli, di cercare di farli più che è possibile tendenti alla forma equilatera, per schivare dei gravissimi errori, che in caso diverso possono succedere. Se, per esempio, onde determinare la distanza inaccessibile AB della figura 14., l'angolo ADB fosse stato piccolissimo, come sarebbe di soli quattro o cinque minuti, siccome nel misurarlo si potrebbe ingannarsi di un minuto, l'errore, che si commetterebbe nel determinare la AB sarebbe prossimamente della sua quarta o quinta parte, al contrario se l'angolo ADB fosse di 50°, o 60°, ingannandosi nella sua misura di un minuto, l'errore sarebbe all'incirca di una tremillesima parte di quell'angolo, e l'errore, che si commetterebbe nella determinazione della AB, sarebbe estremamente piccolo.

Per dare un'idea del grado di precisione, di cui i metodi trigonometrici sono suscettibili, citeremo un solo esempio, scelto a sorte fra i molti che si conoscono. I Signori Bouguer, La Condamine, e Godin furono spediti all'equatore, onde determinare la grandezza della terra; ciascun di essi ha misurato separatamente, con delle serie diverse di triangoli, una lunghezza di 25 leghe, ed il primo la trovò di 56753 tese, il secondo di 56749, ed il terzo di 56746; di modo che la seconda misura non differisce dalla prima che di 4 tese, e la seconda dalla terza di sole 3 tese, ciò che è appena un piede di differenza per ogni lega.

Proposizione VI. Problema.

92. *Conoscendo i lati AB, AC* (fig. 10.) *di un triangolo qualunque ABC, e l'angolo A da essi compreso trovare la misura della sua superficie.*

Dall' angolo B sopra la AC si immagini abbassata la perpendicolare BD, e la misura della superficie del triangolo ABC sarà espressa (Geom. 642.) da $\frac{AC \times BD}{2}$. Ma il triangolo rettangolo ADB (63) dà $AB : BD :: R : sen. A$, quindi è $BD = \frac{AB \times sen. A}{R}$; sostituendo nell' espressione superiore il valore di BD, e nominando S la superficie del triangolo proposto, si avrà $S = \frac{AB \times AC \, . \, sen. A}{2R}$, donde si rileva *che la misura dell' area di un triangolo si ottiene dividendo il prodotto dei due lati conosciuti e del seno dell' angolo da essi compreso pel doppio del raggio.*

93. *Esempio.* Sia AB = 10 once, AC = 8 once, e l' angolo A = 40°, sarà

$$S = \frac{10 \times 8 \times sen. 40^\circ}{2R} = \frac{40 \times sen. 40^\circ}{R},$$

Prendendo i logaritmi, si avrà

$log. S = log. 40 + log. sen. 40^\circ - log. R.$

Ora	*log.* 40	=	1,60206
	log. sen. 40°	=	9,80807
	Somma		11,41013
	log. R	=	10,00000
	Residuo		1,41013

Passando dai logaritmi ai numeri, sarà S = 25,71 once quadrate.

Proposizione VII. Problema.

94. *Conoscendo il lato AB del triangolo ABC* (fig. 10.) *e gli angoli A e B ad esso adiacenti, trovare la misura della sua superficie S.*

Risolvendo mediante la trigonometria il triangolo ABC si avrà (58) $AC : AB :: sen. B : sen. C$; donde si ricava $AC = \frac{AB \times sen. B}{sen. C}$. Si ponga questo valore nella formola superiormente trovata, e si avrà

$$S = \frac{\overline{AB}^2 \times sen. A \times sen. B}{2R \times sen. C}.$$

95. *Esempio.* Sia AB = 10 once, l' angolo A = 60°, e l' angolo B = 55°, l' angolo C sarà di 65°, per lo che sarà $S = \frac{50 \times sen. 60^\circ \times sen. 55^\circ}{R \times sen. 65^\circ}$. Prendendo i logaritmi si avrà $log. S = log. 50 + log. sen. 60^\circ + log. sen. 55^\circ - log. R - log. sen. 65^\circ$.

Ma	*log.* 50	=	1,69897
	log. sen. 60°	=	9,93753
	log. sen. 55°	=	9,91336
	Somma		21,54986
	log. R	=	10,00000
	log. sen. 65.°	=	9,95728
	Somma		19,95728
	Residuo		1,59258

Passando dai logaritmi ai numeri, si ha S = 39,14 once quadrate.

Proposizione VIII. Problema.

96. *Trovare la misura della superficie di un quadrilatero qualunque ABCD* (fig. 16.), *di cui si conoscano le diagonali AC, BD e l' angolo BEC, che esse formano colla loro intersezione.*

Poichè il quadrilatero proposto risulta dalla somma dei quattro triangoli AEB, BEC, CED, DEA, e siccome (92) si ha

$$AEB = \frac{AE \times BE \times sen. AEB}{2R}$$

$$BEC = \frac{BE \times EC \times sen. BEC}{2R}$$

$$CED = \frac{EC \times DE \times sen. CED}{2R}$$

$$DEA = \frac{DE \times AE \times sen. DEA}{2R}.$$

Sommando queste quattro equazioni membro per membro, ed osservando che tutti i seni degli angoli fatti dalle diagonali intorno al punto E sono eguali, poichè appartenenti ad angoli o eguali, o di supplemento, si avrà ....ABCD $=$

$$\left(\frac{AE \times BE + BE \times EC + EC \times DE + DE \times AE}{2R}\right) sen. BEC =$$

$$\frac{(AE + EC)(BE + DE)}{2R} sen. BEC$$; ma $AE + EC = AC$, e $BE + DE = BD$; dunque

$$ABCD = \frac{AC \times BD}{2R} \times sen.\ BEC;$$

donde si ricava, *che la misura della superficie di un quadrilatero qualunque è espressa dal prodotto delle due diagonali, e del seno dell' angolo da esse formato diviso pel doppio del raggio.*

Dello sviluppo in serie delle principali linee trigonometriche.

97. Sia x un arco qualunque di cerchio, e si ponga

1.ª $sen.\ x = ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 +$ ecc.

2.ª $cos.\ x = 1 + Ax^2 + Bx^4 + Cx^6 +$ ecc.

I secondi membri di queste due equazioni sono serie a coefficienti indeterminati; nella prima delle quali si è ommesso il termine senza x, perchè all' annullarsi dell' arco si annulla anche il primo membro di quell' equazione, poichè quando è $x = 0$ anche $sen.\ x = 0$ (23), e quindi la quantità nota, che fosse scritta nel secondo membro di quella prima equazione, diverrebbe eguale a zero. Si sono poi da quella serie medesima ommesse le potenze pari della x, perchè nel caso che x divenga negativa, cioè $-x$, il primo membro di quell' equazione, cangia di segno, giacchè $sen. -x = -sen.\ x$ (43), e perciò deve cangiare di segno anche tutto il secondo, ciò che non succederebbe, se vi fossero le potenze pari di x. Nella seconda serie poi si è posta l' unità per primo termine, perchè tale diviene il valore di $cos.\ x$, quando è $x = 0$ (23). In oltre si sono in essa ommesse le podestà impari della x, perchè rimanendo $cos.\ x$ immutabile se x si cangia in $-x$ (43), tale rimanga anche il secondo membro di quella equazione. Ciò posto si faccia il quadrato di ciascuna di quelle due equazioni, e si avrà

$$\begin{aligned} sen.^2\, x &= a^2x^2 + 2abx^4 + 2acx^6 + \text{ecc.} \\ &\qquad\qquad\quad + b^2x^6 + \text{ecc.} \\ cos.^2\, x &= 1 + 2Ax^2 + 2Bx^4 + 2Cx^6 + \text{ecc.} \\ &\qquad\qquad + A^2x^4 + 2ABx^6 + \text{ecc.} \end{aligned}$$

Sommando queste due equazioni membro per membro, e sostituendo al luogo di $sen.^2\, x + cos.^2\, x$ il suo valore, che è l' unità (41), sarà

$$1 = \left\{ \begin{array}{l} 1 + a^2x^2 + 2abx^4 + 2acx^6 + \text{ecc.} \\ \quad + 2Ax^2 + 2Bx^4 + b^2x^6 + \text{ecc.} \\ \qquad\qquad + A^2x^4 + 2Cx^6 + \text{ecc.} \\ \qquad\qquad\qquad + 2ABx^6 + \text{ecc.} \end{array} \right.$$

Eguagliando fra loro i coefficienti delle singole potenze di x (Algeb. 546.), si ottengono le tre seguenti equazioni

$$a^2 + 2A = 0; \qquad 2ab + 2B + A^2 = 0;$$
$$2ac + b^2 + 2C + 2AB = 0.$$

Non potendosi queste tre equazioni risolvere, perchè esse contengono sei incognite, è necessario d'averne altre tre contenenti le medesime incognite, al quale oggetto nella equazione 1.ª si ponga $2x$ a luogo di x, e si avrà

$$sen.\,2x = 2ax + 8bx^3 + 32cx^5 + 128dx^7 + \text{ecc.}$$

Ma sappiamo essere $sen.\,2x = 2 sen.x\, cos.x$ (56); dunque sostituendo nel secondo membro di quest' ultima equazione al luogo di $sen.x$, e di $cos.x$ le corrispondenti serie, che si sono assunte, sarà

$$sen.2x = 2\{(ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 + ..)(1 + Ax^2 + Bx^4 + Cx^6 + ..)\}$$

Eguagliando fra di loro i due trovati valori per $sen.2x$, sviluppando ed ordinando i prodotti indicati nel secondo membro dell' ultima equazione, si otterrà

$$\left.\begin{array}{r} 2ax + 8bx^3 + 32cx^5 + \\ 128dx^7 + \text{ecc.} = \end{array}\right\{\begin{array}{r} 2ax + 2bx^3 + 2cx^5 + 2dx^7 + \text{ecc.} \\ + 2aAx^3 + 2bAx^5 + 2cAx^7 + \text{ecc.} \\ + 2aBx^5 + 2bBx^7 + \text{ecc.} \\ + 2aCx^7 + \text{ecc.} \end{array}$$

Eguagliando fra di loro i coefficienti delle medesime potenze di x si hanno le equazioni seguenti

$$\begin{aligned} 2a &= 2a, \text{ cioè } 0 = 0 \\ 8b &= 2b + 2aA \\ 32c &= 2c + 2bA + 2aB \\ 128d &= 2d + 2cA + 2bB + 2aC, \end{aligned}$$

le quali semplificate danno

$$\begin{aligned} 3b &= aA \\ 15c &= bA + aB \\ 63d &= cA + bB + aC. \end{aligned}$$

Queste tre equazioni combinate colle altre tre superiormente ritrovate ci somministreranno i valori dei coefficienti indeterminati appartenenti alle serie che si sono assunte. Di fatto dalla

equazione $a^2 + 2A = 0$, si ricava $A = -\frac{a^2}{2}$. Ponendo questo valore al luogo di A nell' equazione $3b = aA$, si ottiene

$$3b = -\frac{a^3}{2}, \text{ e quindi } b = -\frac{a^3}{2\,.\,3}.$$

L' equazione $2ab + 2B + A^2 = 0$, risoluta per rapporto a B ci dà $B = -\frac{2ab + A^2}{2}$, e sostituendo in essa per b e per A i ritrovati valori, si ha

$$B = -\frac{2a \times -\frac{a^3}{2\,.\,3} + \frac{a^4}{4}}{2} = \frac{a^4}{2\,.\,3\,.\,4}.$$

Dall' equazione $15c = bA + aB$, si ricava

$$c = \frac{bA + aB}{15} = \frac{\frac{a^5}{2\,.\,3\,.\,2} + \frac{a^5}{2\,.\,3\,.\,4}}{15} = \frac{3a^5}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,15} = \frac{a^5}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}$$

Operando in simile guisa si troverà

$$C = -\frac{a^6}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}; \quad d = -\frac{a^7}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7}, \text{ ecc.}$$

Ponendo questi valori nelle due serie assunte, si avrà

$$sen.\,x = ax - \frac{a^3x^3}{2\,.\,3} + \frac{a^5x^5}{2.3.4.5} - \frac{a^7x^7}{2.3.4.5.6.7} + \text{ecc.}$$

$$cos.\,x = 1 - \frac{a^2x^2}{2} + \frac{a^4x^4}{2\,.\,3\,.\,4} - \frac{a^6x^6}{2.3.4.5.6} + \text{ecc.}$$

In queste serie non rimane indeterminato che il coefficiente a; ciò che doveva necessariamente accadere. Di fatto se si osserva che ad un dato arco corrisponde un solo seno, ed un solo coseno, ma poi quel seno, e quel coseno al contrario possono convenire a ciascuno degli infiniti archi compresi nella serie x, $c + x$, $2c + x$, $3c + x$, ecc., essendo c l' espressione di un intera circonferenza (29); si rileva facilmente che il coefficiente a doveva rimanere indeterminato, acciocchè l' arco ax li potesse tutti rappresentare. In fatti se si pone $c = mx$ essendo m un numero intero, questo valore di c posto nella serie precedente, essa si cangerà in x, $x(m+1)$, $x(2m+1)$, $x(3m+1)$, ecc. e perciò a può rappresentare indistintamente 1, $m+1$, $2m+1$, $3m+1$, ecc. Scegliendo ora per maggiore semplicità fra questi archi il minimo, che è quello nel quale è $a=1$; e fatta tale sostituzione nelle trovate serie rappresentanti i valori di *sen.* x, e *cos.* x, si avrà

$$sen.\,x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} + \text{ecc.}$$

$$cos.\,x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \text{ecc.}$$

98. Onde sviluppare in serie la tangente dell' arco x, si ponga

$$tang.\,x = x + Ax^3 + Bx^5 + Cx^7 + \text{ecc.}$$

e siccome è $tang.\,x = \dfrac{sen.\,x}{cos.\,x}$ (41), così, sostituendo in questa equazione i valori di *sen.* x, e di *cos.* x superiormente trovati, ed a luogo di *tang.* x la serie assunta, sarà

$$x + Ax^3 + Bx^5 + Cx^7 = \frac{x - \dfrac{x^3}{2.3} + \dfrac{x^5}{2.3.4.5} - \dfrac{x^7}{2.3.4.5.6.7} + \text{ecc.}}{1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{2.3.4} - \dfrac{x^6}{2.3.4.5.6} + \text{ecc.}}$$

Moltiplicando il primo membro di questa equazione pel denominatore del secondo, ed ordinando i prodotti secondo le potenze della x, si avrà

$$\left.\begin{array}{llll} x + Ax^3 & + Bx^5 & + Cx^7 & + \text{ecc.} \\ \quad - \dfrac{x^3}{2} & - \dfrac{Ax^5}{2} & - \dfrac{Bx^7}{2} & - \text{ecc.} \\ & + \dfrac{x^5}{2.3.4} & + \dfrac{Ax^7}{2.3.4} & + \text{ecc.} \\ & & - \dfrac{x^7}{2.3.4.5.6} & - \text{ecc.} \end{array}\right\} =$$

$$x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7}.$$

Eguagliando fra di loro i coefficienti delle singole potenze della x, si ha

$$A - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2.3};\quad B - \frac{A}{2} + \frac{1}{2.3.4} = \frac{1}{2.3.4.5};$$

$$C - \frac{B}{2} + \frac{A}{2.3.4} - \frac{1}{2.3.4.5.6} = -\frac{1}{2.3.4.5.6.7}$$

Dalla prima di queste equazioni si ricava $A = \frac{1}{3}$; dalla seconda, sostituendo in essa per A il suo valore, si ottiene $B = \dfrac{2}{3.5}$: e dalla terza, dopo d'avervi posti per A, e per B i valori che si sono trovati, si ha $C = \dfrac{17}{3.3.5.7}$. ecc. Sostituendo questi valori di A, B, C, ecc. nella serie assunta per *tang.* x, si ha

$$tang.\,x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3.5} + \frac{17x^7}{3.3.5.7} + \text{ecc.}$$

Con un metodo a questo simile si potranno esprimere in serie tutte le altre linee trigonometriche.

99. Ora che si è veduto come le linee trigonometriche si possano esprimere in serie, per mezzo degli archi circolari loro corrispondenti; passiamo a vedere come *viceversa* gli archi si possano esprimere col mezzo delle linee trigonometriche.

Si nomini t la tangente d' un arco x, e si faccia

$$x = t + At^3 + Bt^5 + \text{ecc.}$$

Se l'arco x diverrà doppio, cioè $2x$, la tangente di quest' arco sarà espressa da $\dfrac{2t}{1-t^2}$ (56), e si avrà perciò

$$2x = \frac{2t}{1-t^2} + \frac{8At^3}{(1-t^2)^3} + \frac{32Bt^5}{(1-t^2)^5} + \text{ecc.}$$

Colla scorta dei principj insegnati (Algeb. 173.), si risolvano separatamente in serie le espressioni

$$\frac{2t}{1-t^2};\quad \frac{8At^3}{(1-t^2)^3};\quad \frac{32Bt^5}{(1-t^2)^5},\ \text{ecc.}$$

ed i valori che si ottengono si sommino, e si ordinino per rapporto a t, e si otterrà

$$2x = \begin{cases} 2t + 2t^3 + 2t^5 + \text{ecc.} \\ \quad + 8At^3 + 24At^5 + \text{ecc.} \\ \quad\quad + 32Bt^5 + \text{ecc.} \end{cases}$$

Si moltiplichi ciascun membro dell' equazione da noi assunta per 2, e si avrà $2x = 2t + 2At^3 + 2Bt^5 + \text{ecc.}$, che paragonata colla precedente, darà

$$2t + 2At^3 + 2Bt^5 + \text{ecc.} = \begin{cases} 2t + 2t^3 + 2t^5 + \text{ecc.} \\ \quad + 8At^3 + 24At^5 + \text{ecc.} \\ \quad\quad + 32Bt^5 + \text{ecc.} \end{cases}$$

Donde si ricava, facendo i soliti confronti, $A = -\frac{1}{3}$;

$B = \frac{1}{5}$; si otterrebbe del pari $C = -\frac{1}{7}$, ecc. e quindi

$$x = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \text{ecc.}$$

100. Se sarà $x = \frac{c}{8}$, se sarà cioè un arco di 45° gradi, in tal caso la tangente t sarà eguale al raggio (41), per cui $t = 1$, e si avrà la serie *Leibniziana*

$$\frac{c}{8} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{ecc.}$$

Ponendo $x = \frac{c}{12}$ = all' arco di 30°, la di cui tangente è $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (41), si otterrà la serie più convergente

$$\frac{c}{12} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \frac{1}{9.3^4} - \text{ecc.}\right)$$

per mezzo della quale *Lagny* calcolò il valore della semicirconferenza, con 127 decimali, le prime delle quali ci danno

$$\frac{c}{2} = 3,141592.$$

Con un simile metodo si potrà esprimere l' arco per le altre sue funzioni.

FINE DELLA TRIGONOMETRIA.

INIZIAMENTI
ALLE SEZIONI CONICHE.

Definizioni.

1. I. Dicesi *sezione conica* quella qualunque figura piana, che nasce tagliando un cono mediante un piano.

Il nome di sezione conica però si applica anche al solo perimetro della sezione, cioè alla traccia formata sopra la superficie convessa del cono dal piano che lo sega.

Supporremo che il cono sia retto, per maggior semplicità; mentre le sezioni fatte nel cono obliquo sono della medesima natura di quelle fatte nel cono retto, e perciò li convengono le medesime proprietà.

2. II. In cinque diverse maniere un cono retto può essere segato da un piano.

1.° Può il piano segante passare pel vertice del cono e la figura, che ne risulta è un triangolo.

2.° Può essere parallela alla base, e si ha un cerchio (Geom. 573.).

3.° Può il piano segante essere parallelo ad un lato qualunque del cono, e la sezione, che ne risulta dicesi *parabola*.

4.° Può essere inclinato in modo da segare due lati opposti del cono, e la sezione, che si ottiene chiamasi *ellisse*.

5.° Può finalmente il piano segante, essere diretto in maniera da segare un lato del cono, ed il prolungamento del lato opposto al di sopra del vertice del cono stesso, e la figura, che ne nasce dicesi *iperbola*.

Cosicchè nel cono retto SABCD (fig. I.) la sezione SAC è un triangolo, GHOLG è un cerchio, FBED è una parabola; nel cono SATCX (fig. II.) la sezione, PRQS è un ellisse, ed YXT è un' iperbola, come lo è anche *yxt* nel cono opposto *Satcx*.

3. Si è detto quanto basta nella Geometria intorno alle proprietà delle prime due specie di queste sezioni, cioè intorno ai triangoli ed ai circoli, esporremo ora alcune delle principali proprietà intorno alla parabola, all' ellisse, ed all' iperbola, considerando queste sezioni come descritte sopra del medesimo piano segante, e facendo astrazione dalla loro generazione nel solido.

In ciascuna di queste curve considereremo come nota una delle sue proprietà, e dimostreremo poi come queste proprietà sieno inerenti alle curve medesime considerate nel cono.

Della Parabola.

4. III. La parabola LAH (fig. III.) ha la proprietà di avere dentro di se un punto fisso F, dal quale tutte le rette FG, FG', ecc. condotte al suo perimetro sono rispettivamente eguali alle perpendicolari GN, G'N' ecc., condotte dai punti G, G' della curva parabolica ad una retta CD data di posizione fuori della curva medesima.

5. La parabola LAH può essere descritta sopra di un piano nella maniera seguente.

Si prenda una squadra MNP, e si disponga in modo che uno de' suoi lati NP possa muoversi liberamente lungo una retta fissa CD, e si prenda un

filo eguale in lunghezza all' altro lato MN della squadra medesima, un capo del quale si leghi all' estremità M del lato MN della squadra, e l' altro capo si fissi in un punto F preso fuori della retta CD nel piano della squadra stessa, ciò fatto, mediante la punta di uno stile, si tenga costantemente teso il filo contro il lato MN della squadra, mentre essa scorre lungo la retta CD da C verso D, la punta dello stile descriverà una parte della parabola. Voltando la squadra, e ripetendo la medesima operazione dalla parte opposta, si descriverà l' altra porzione; poichè essendo costantemente teso il filo, sarà $MN = FG + GM = GM + GN$; onde $FG = GN$.

È chiaro che questa curva può estendersi ad una distanza dal punto F maggiore di qualunque siasi distanza data, se si prenderà MN maggiore della data distanza.

6. IV. La retta CD data di posizione si chiama la *direttrice* della parabola LAH, ed il punto fisso F nominasi il *foco* della parabola medesima.

7. V. Qualunque retta MN perpendicolare alla direttrice CD si chiama *diametro*; il punto G, in cui il diametro entra nella parabola, si dice il *vertice* del diametro MN. Il diametro BK, che passa pel foco F, si chiama l' *asse della parabola*, ed il suo vertice A dicesi il *vertice della parabola* o *vertice primario*.

8. VI. Dicesi *parametro* dell' asse o di un diametro qualunque il quadruplo della distanza dal vertice dell' asse o del diametro al foco; così una retta $= 4FA$, sarà il parametro dell' asse BK, ed una retta $= 4FG$, sarà il parametro del diametro NM.

9. VII. Dicesi *tangente* qualunque retta SG (fig. IV.), che ha un punto solo G comune colla pa-

rabola e che prolungata per ogni verso giace fuori della parabola medesima, e va ad incontrare in S l' asse pure prolungato.

10. VIII. La perpendicolare GE abbassata da qualunque punto G della curva sopra l' asse AK dicesi *ordinata all' asse* medesimo. L' *ordinata* poi ad un diametro qualunque GM è la retta NI tirata da un punto qualunque N della curva sopra il diametro medesimo parallelamente alla tangente SG condotta al vertice del diametro stesso.

11. IX. Si chiama *ascissa* di una ordinata qualunque la parte dell' asse o del diametro corrispondente compresa fra il vertice dell' asse o del diametro, e l' ordinata medesima; così le rette AE, GI sono le ascisse corrispondenti alle ordinate GE, NI.

12. X. La parte dell' asse o del diametro compresa fra un' ordinata e la tangente al medesimo punto della curva, da dove parte l' ordinata, si chiama *sottotangente*: così se le rette SG, N'R saranno tangenti alla curva nei rispettivi punti G, N', le rette SE, IR saranno le sottotangenti.

13. XI. Se dal punto di contatto si tira alla tangente una perpendicolare, la parte dell' asse o del diametro compresa fra questa perpendicolare, e l' ordinata condotta dal medesimo punto all' asse o al diametro, si chiama *sottonormale*. Così supponendo GP perpendicolare alla tangente SG nel punto G, PE sarà la sottonormale. La perpendicolare poi GP dicesi *normale*. Qualunque retta FG, che dal fuoco F vien condotta al perimetro della parabola, dicesi *raggio vettore*.

Proposizione I. Teorema.

14. *La perpendicolare IR (fig. V.) condotta sopra la direttrice CD da un punto qualunque I preso fuori della parabola LAH è minore della distanza IF, che vi è fra il medesimo punto ed il fuoco F; e la perpendicolare EO condotta sopra la direttrice medesima da un punto E preso dentro la parabola è maggiore della distanza EF del medesimo punto al fuoco F.*

1.° Dal punto G, in cui la retta IF incontra la curva, si conduca sulla direttrice la perpendicolare GN, e si tiri IN. Nel triangolo rettangolo IRN sarà $IR < IN$, e nel triangolo IGN sarà $IN < IG + GN$, dunque $IR < IG + GN$; ma (4) $GN = GF$, dunque $IG + GN = IG + GF = IF$, quindi $IR < IF$.

2.° Dal foco F si conduca la retta FQ al punto Q, in cui la retta EO incontra la curva, e sarà (4) $OQ = FQ$, ed aggiungendo da una e dall' altra parte la EQ, si avrà $OQ + EQ = FQ + EQ$, cioè $EO = FQ + EQ$; ma $FQ + EQ > EF$, dunque sarà anche $EO > EF$.

15. *Corollario.* Da qui ne segue, che se la distanza da un punto dato al foco della parabola è eguale alla distanza del medesimo punto alla direttrice CD, quel punto apparterrà al perimetro della parabola. Se tale distanza sarà maggiore o minore di quella, che vi è dal punto medesimo alla direttrice, quel punto si troverà nel primo caso fuori della parabola, e nel secondo caso sarà dentro la parabola medesima.

Proposizione II. Teorema.

16. *Il quadrato di qualunque ordinata PM (fig. V.) all' asse AK della parabola LAH è eguale al rettangolo fatto col parametro 4AF, e coll' ascissa AP corrispondente all' ordinata medesima.*

Poichè condotta dal foco F al punto M la FM; e dal punto M la perpendicolare MT alla direttrice

CD, sarà FM = BP, poichè ambedue eguagliano MT'; e per conseguenza sarà anche $\overline{FM}^2 = \overline{BP}^2$; ma $\overline{FM}^2 = \overline{PF}^2 + \overline{PM}^2$, e $\overline{BP}^2 = (AP + AB)^2 = (AP + AF)^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AF}^2 + 2AF \times AP$: ora essendo PF la differenza fra AP ed AF, si ha $\overline{AP}^2 + \overline{AF}^2 - 2AF \times AP = \overline{PF}^2$, ed aggiungendo da una parte e dall'altra $4AF \times AP$, sarà $\overline{AP}^2 + \overline{AF}^2 + 2AF \times AP = 4AF \times AP + \overline{PF}^2$, onde $(AP + AF)^2 = 4AF \times AP + \overline{PF}^2$, e per conseguenza $\overline{BP}^2 = 4AF \times AP + \overline{PF}^2$; paragonando si avrà adunque $\overline{PF}^2 + \overline{PM}^2 = 4AF \times AP + \overline{PF}^2$, cioè $\overline{PM}^2 = 4AF \times AP$.

17. *Corollario* I. Nello stesso modo si dimostrerebbe, che $\overline{PM'}^2 = 4AF \times AP$, quindi $\overline{PM}^2 = \overline{PM'}^2$ cioè PM=PM', donde si ricava che nella parabola le ordinate ad un medesimo punto dell'asse sono eguali.

18. *Corollario* II. Per essere $\overline{PM}^2 = 4AF \times AP$, sarà anche $4AF : PM :: PM : AP$; qualunque ordinata all'asse sarà quindi media proporzionale fra il parametro e l'ascissa corrispondente.

Così pure se $\overline{PM}^2 = 4AF \times AP$, e sarà PM perpendicolare all'asse AK, il punto M si troverà sul perimetro della parabola LAH.

19. *Corollario* III. Se dal foco F si condurrà alla parabola l'ordinata FG all'asse, sarà $\overline{FG}^2 = 4AF \times AF = 4\overline{AF}^2$, ed FG=2AF; onde l'ordinata FG condotta al foco è la metà del parametro.

20. *Corollario* IV. Condotta all'asse AK un'altra ordinata qualunque SX, sarà $\overline{SX}^2 = 4AF \times AS$, onde

$\overline{PM}^2 : \overline{SX}^2 :: 4AF \times AP : 4AF \times AS$, e dividendo i termini del secondo rapporto per 4AF, si avrà $\overline{PM}^2 : \overline{SX}^2 :: AP : AS$, donde si vede che nella parabola i quadrati delle ordinate all'asse AK sono proporzionali alle ascisse corrispondenti.

Proposizione III. Problema.

21. *Descrivere una parabola LAH* (fig. V.), *il di cui asse sia la retta AK data di posizione, il vertice sia nel punto A, ed il suo parametro sia eguale alla retta data ZY.*

Sopra la AK si prenda la parte AF eguale alla quarta parte della retta data ZY, e sul prolungamento della AK si prenda AB = AF, e si tiri CD perpendicolare alla BK. Ciò fatto, si descriva la parabola LAH (5), il di cui foco sia in F, e la direttrice sia CD; la parabola così descritta sarà la richiesta. In fatti BK è perpendicolare a CD e passa pel foco F, dunque essa è l'asse della parabola; e per essere FA = AB, il punto A è sopra la curva, ed è il vertice primario; siccome poi per costruzione $AF = \frac{ZY}{4}$, così si ha il parametro $4AF = ZY$.

Proposizione IV. Problema.

22. *Condurre una tangente alla parabola LAH* (fig. VI.) *in un punto dato sopra di essa.*

Se il punto dato sarà il vertice A dell'asse BK della parabola, dal punto medesimo all'asse BK si innalzi la perpendicolare AM, che sarà la tangente richiesta. In fatti dal foco F ad un punto qualunque M preso sulla AM, si conduca la FM, e dal punto medesimo M si tiri MN perpendicolare alla direttrice CD. Nel triangolo rettangolo FAM sarà FM > FA; ma FA = AB = MN, dunque sarà anche FM > MN, dunque il punto M sarà fuori della parabola (15). Lo stesso si potrebbe dimostrare per qualunque altro punto preso sulla AM, prolungata da ambe le parti; dunque la AM sarà tangente alla parabola nel punto A.

Se il punto dato non fosse il vertice A, ma un altro punto qualunque E della curva; da quel punto sopra la direttrice CD si tiri la perpendicolare EG, si conduca la FG, e divisa questa per metà in P, si tiri pei punti P ed E la retta PE, che sarà la tangente richiesta. Poichè da qualunque punto R preso nella sua direzione, condotta la RI perpendicolare alla direttrice CD, e tirate le rette FE, FR, RG, ne risultano i triangoli EPF, EPG, che sono eguali, poichè essi hanno i lati FP, PG eguali, i lati FE, EG pure eguali, ed il lato PE comune; e perciò gli angoli EPF, EPG, saranno eguali e retti. I triangoli rettangoli RPF, RPG saranno pure eguali, avendo FP = PG, e PR comune; sarà quindi FR = GR, ma GR > IR, dunque sarà anche FR > IR, e per conseguenza (15) il punto R sarà al di fuori della parabola LAH. Lo stesso si potrebbe dimostrare per qualunque altro punto della retta PER, diverso dal punto E; dunque quella retta sarà tangente alla parabola nel punto E (9).

23. *Corollario* I. Se la GE verrà prolungata in Q, sarà l'angolo QER formato dal diametro EQ e dalla tangente PER eguale all'angolo FEP formato dalla retta FE, che dal foco va al punto di contatto, colla tangente medesima PER; poichè, essendo eguali i triangoli EPF, EPG, sarà l'angolo FEP = GEP, ma GEP è eguale all'angolo opposto al vertice QER; dunque sarà QER = FEP.

24. *Corollario* II. Se la tangente PER si prolungherà sino al suo incontro in S coll'asse, sarà il raggio vettore FE = FS: di fatto per essere le rette SK, EQ parallele, sarà l'angolo FSE = QER; ma l'angolo QER = FES (23), dunque sarà anche l'angolo FES = FSE, e per conseguenza FE = FS.

Proposizione V. Teorema.

25. *La sottotangente nella parabola LAH* (fig. VI.) *è doppia dell'ascissa corrispondente.*

Sia SE tangente alla parabola nel punto E, e la retta ET sia l'ordinata corrispondente all'asse BK; dal foco F della parabola si conduca al punto di contatto la FE, e dal punto E si tiri la perpendicolare EG sulla direttrice CD, e si avrà FE = BT, perchè ciascuna di queste rette è eguale alla EG: ma è FE = FS (24); dunque FS = BT, e siccome AF = AB, sarà sottraendo FS — AF = BT — AB, cioè AS = AT, e per conseguenza ST = 2AT.

26. *Scolio.* Per tirare alla parabola la tangente in un punto qualunque punto E, si condurrà l'asse BK, e dal punto dato la ordinata ET, e sopra l'asse partendo dal punto T si prenderà TS = 2AT, la retta SE, che congiunge i punti S ed E, sarà la tangente richiesta.

Proposizione VI. Teorema.

27. *Se la retta EV* (fig. VI.) *sarà perpendicolare alla tangente SR nel punto di contatto E, e la retta ET sarà ordinata all'asse AK corrispondente al punto E, la sottonormale VT sarà eguale alla metà del parametro 4AF dell'asse medesimo.*

Essendo per costruzione l'angolo SEV retto, ed essendo ET perpendicolare sopra SV, starà (Geom. 286)

ST : ET : : ET : VT, onde $ST \times VT = \overline{ET}^2$; ma (16) $\overline{ET}^2 = 4AF \times AT$; dunque $ST \times VT = 4AF \times AT$, e quindi 4AF : ST : : VT : AT; ma la sottotangente ST è doppia dell' ascissa corrispondente AT (25); dunque anche il parametro 4AF sarà doppio della sottonormale VT, o ciò che è lo stesso la sottonormale sarà la metà del parametro, donde ne deriva che la grandezza della sottonormale nella parabola è costante.

Proposizione VII. Teorema.

28. *Il quadrato della tangente ES* (fig. VI.) *compresa fra il punto di contatto E, e l'asse, è eguale a quattro rettangoli contenuti dal raggio vettore FE condotto dal foco al punto di contatto E, e dall' ascissa corrispondente AT.*

Sia al solito CD la direttrice, ed EG perpendicolare alla medesima innalzata dal punto di contatto E. Poichè il triangolo ETS è rettangolo in T, sarà $\overline{ES}^2 = \overline{ET}^2 + \overline{ST}^2$; ma $\overline{ET}^2 = 4AF \times AT = 4AB \times AT$, ed $\overline{ST}^2 = 4\overline{AT}^2$, perchè $ST = 2AT$ (25); dunque sarà $\overline{ES}^2 = 4AB \times AT + 4\overline{AT}^2 = 4AT(AB + AT) = 4BT \times AT$; ma $BT = FE$, perchè sì l' una che l' altra di queste rette eguaglia EG; dunque finalmente $\overline{ES}^2 = 4FE \times AT$.

Proposizione VIII. Teorema.

29. *Se sopra una doppia ordinata qualunque XY* (fig. V.) *all' asse BK, si conducono delle perpendicolari GV, MT da qualunque punto della curva,*

queste perpendicolari saranno proporzionali rispettivamente ai rettangoli $VY \times VX$, $TY \times TX$ fatti coi segmenti della doppia ordinata, in cui essa rimane divisa dalle perpendicolari medesime.

Poichè condotta da M un' altra doppia ordinata MM', sarà (17) SY=SX, e PM=PM'. Dalla Geometria (207) si ha $(SX + ST)(SX - ST) = \overline{SX}^2 - \overline{ST}^2$; ma $SX + ST = SY + ST = TY$, ed $SX - ST = TX$; dunque $\overline{SX}^2 - \overline{ST}^2 = TY \times TX$, e quindi $\overline{SX}^2 = TY \times TX + \overline{ST}^2 = TY \times TX + \overline{PM}^2$; ma $\overline{SX}^2 = 4AF \times AS$, e $\overline{PM}^2 = 4AF \times AP$ (16); dunque sarà $4AF \times AS = TY \times TX + 4AF \times AP$, e sottraendo da ambe le parti il rettangolo $4AF \times AP$, rimarrà $4AF(AS - AP) = TY \times TX$, ossia $4AF \times PS = TY \times TX$; ma $PS = MT$; dunque $4AF \times MT = TY \times TX$: nel medesimo modo si dimostrerà, che $4AF \times GV = VY \times VX$, dunque $4AF \times GV : 4AF \times MT : : VY \times VX : TY \times TX$; cioè $GV : MT : : VY \times VX : TY \times TX$.

Proposizione IX. Teorema.

30. *Nella parabola LAH* (fig. VII.) *il quadrato di qualunque ordinata MN al diametro EG eguaglia il rettangolo dell' ascissa EM nel parametro 4FE del diametro medesimo.*

Dai punti N ed E si tirino le ordinate NK, ED all' asse AK, e dal punto A si guidi AQ perpendicolare all' asse medesimo, si conduca al punto E la tangente ST, che sarà parallela all' ordinata MN (10), si prolunghi la MN sino ad incontrare l' asse AK in V, e finalmente si prolunghi la AQ sino ad incontrare il diametro GEC in C. Per essere le rette KN, DE ordinate all' asse AK, sarà (20) $\overline{KN}^2 : \overline{DE}^2 :: AK : AD$; ma (Geom. 252.) $AK : AD :: AKGC : ADEC$; dunque $\overline{KN}^2 : \overline{DE}^2 :: AKGC : ADEC$. I triangoli NKV, DSE sono simili, perchè hanno i lati paralleli; essi staranno adunque come i quadrati dei loro lati omologhi, si avrà cioè $NKV : DSE :: \overline{KN}^2 : \overline{DE}^2$, e quindi starà anche $AKGC : ADEC :: NKV : DSE$; ma (25) per essere $SD = 2AD$, il parallelogrammo ADEC sarà eguale al triangolo DSE; dunque sarà anche il parallelogrammo $AKGC = NKV$, e sottraendovi il trapezio VMGK comune, rimarrà $AVMC = GMN$; ma $AVMC = SVME$, per essere eguali i triangoli SAQ, ECQ; dunque sarà il parallelogrammo $SVME = GMN$; ma per la somiglianza dei triangoli GMN, SDE, si ha $\overline{MN}^2 : \overline{SE}^2 :: GMN : SDE$, e quindi $\overline{MN}^2 : \overline{SE}^2 :: SVME : ADEC :: SV : AD$, poichè i parallelogrammi SVME, ADEC sono compresi fra le medesime parallele; ma sta $SV : AD :: SV \times 4FE : AD \times 4FE$; dunque starà anche $\overline{MN}^2 : \overline{SE}^2 :: SV \times 4FE : AD \times 4FE$; ma abbiamo dimostrato (28) che è $\overline{SE}^2 = 4FE \times AD$, dunque sarà anche $\overline{MN}^2 = 4FE \times SV = 4FE \times EM$.

31. *Corollario* I. Nello stesso modo si dimostrerebbe, che $\overline{MN'}^2 = 4FE \times EM$; dunque sarà $\overline{MN'}^2 = \overline{MN}^2$, ed $MN' = MN$, onde le ordinate della parabola, corrispondenti ad un medesimo punto di qualunque diametro, sono eguali.

32. *Corollario* II. Per essere $\overline{MN}^2 = 4FE \times EM$, starà $4FE : MN :: MN : EM$; dunque nella parabola l' ordinata ad un diamatro qualunque è media proporzionale fra il parametro, e l' ascissa corrispondente.

33. *Corollario* III. Se OP sarà parallela ad una qualunque ordinata MN del diametro EG, e se sarà $\overline{OP}^2 = 4FE \times EO$, il punto P dovrà trovarsi sopra la curva, e la OP sarà anch' essa ordinata al diametro medesimo.

34. *Corollario* IV. Siccome è $\overline{MN}^2 = 4FE \times EM$, ed $\overline{OP}^2 = 4FE \times EO$, così starà $\overline{MN}^2 : \overline{OP}^2 :: 4FE \times EM : 4FE \times EO$, ossia $\overline{MN}^2 : \overline{OP}^2 :: EM : EO$; dunque i quadrati delle ordinate al medesimo diametro di una parabola sono proporzionali alle ascisse corrispondenti.

Proposizione X. Teorema.

35. *La sezione FBD (fig. I.), che risulta segando un cono retto SABCD mediante un piano che passa per la retta BD perpendicolare alla base AC del triangolo per l' asse, e per la retta FE parallela ad un lato SA del cono, sarà una parabola, e la retta FE ne sarà l' asse.*

Da un qualunque punto N della retta FE sieno condotte le rette GO, HL, rispettivamente parallele alle rette AC, BD; il piano GHOL, che passa per le rette GO, HL, sarà parallelo alla base ABCDA, che passa per le rette AC, BD (Geom. 485.), e per conseguenza la sezione GHOLG sarà un cerchio, il di cui diametro sarà GO. Per essere le rette NL, NG rispettivamente parallele alle rette ED, EA, sara l' angolo $GNL = AED$; ma l'angolo AED è per supposizione retto, dunque sarà retto anche l'angolo GNL, e per conseguenza la retta HL sarà divisa per metà in N (Geom. 324.). Ora essendo le rette

ED, NL perpendicolari ai diametri AC, GO, sarà $\overline{ED}^2 = AE \times EC$, ed $\overline{NL}^2 = GN \times NO$, donde si ricava che sta $\overline{ED}^2 : \overline{NL}^2 :: AE \times EC : GN \times NO$; ma le rette AE, GN sono eguali, perchè sono lati opposti nel parallelogrammo AENG, dunque starà $\overline{ED}^2 : \overline{NL}^2 :: EC : NO$; ora essendo NO parallela ad EC nel triangolo FEC, starà $EC : NO :: FE : FN$, dunque starà anche $\overline{ED}^2 : \overline{NL}^2 :: FE : FN$. Se verrà descritta una parabola, l'asse della quale sia FE, il vertice F, i punti L e D saranno sul perimetro della parabola medesima, poichè stà $\overline{ED}^2 : \overline{NL}^2 :: FE : FN$: lo stesso si può dimostrare per qualunque altro punto della curva FBD, dunque la sezione FBD è una parabola, l'asse della quale è FE.

Dell' Ellisse

Definizioni.

36. I. L'ellisse AEBD (fig. VIII.) è una superficie piana curvilinea, che ha la proprietà di avere dentro di se due punti F, f, dai quali condotte le rette FM, fM ad un punto qualunque M del suo perimetro, la somma $FM + fM$ di quelle rette è costantemente la medesima.

37. L'ellisse si può descrivere sopra di un piano nel modo seguente.

Scelti a piacere due punti F, f nel piano, in cui si vuole descrivere l'ellisse, si prenda un filo di lunghezza maggiore della distanza Ff, che vi è fra quei due punti, una estremità del quale si fissi

in F, e l'altra estremità in f indi col mezzo di uno stile si tenga costantemente teso quel filo, facendo girare la sua punta lungo tutto il filo medesimo dall'una e dall'altra parte, sinchè sia ritornata al punto donde partì, la figura così descritta sarà un ellisse; perchè dovunque si trovi la punta dello stile, sarà sempre $FM + fM$ eguale alla lunghezza del filo, che si è preso.

38. II. I punti F, f si dicono i *fochi* dell'elisse, il punto C, che divide per metà la retta Ff, che congiunge i fochi, si chiama il *centro* dell'ellisse; la distanza CF, o Cf, che vi è dal centro dell'ellisse a ciascuno dei fochi, dicesi *eccentricità*.

39. III. Qualunque retta GH, che passa pel centro ed ha i suoi estremi sul perimetro dicesi *diametro* dell'ellisse. I punti G, e H comuni al diametro ed alla curva diconsi i *vertici* del diametro GH. Il diametro AB, che passa pei fochi F, f, si chiama *asse maggiore* dell'ellisse, ed il diametro ED perpendicolare all'asse maggiore dicesi *asse minore*. I punti A, B si dicono i *vertici dell'asse maggiore*, o i *vertici dell'ellisse*.

40. IV. Qualunque retta FM, fM, FE, ecc., che da uno dei fochi va ad un punto qualunque del perimetro dell'ellisse, dicesi *raggio vettore*.

41. V. Due diametri AB, ED si dicono *conjugati* quando una retta GP condotta parallelamente ad uno di essi ED, da un punto all'altro del perimetro, rimane dall'altro diametro AB divisa per metà.

42. VI. La terza proporzionale a due diametri conjugati si chiama *parametro* del diametro, che forma il primo termine della proporzione continua.

Le definizioni, che si sono date per la parabola rispetto alla tangente, sottotangente, normale, sottonormale, ordinata, ascissa, ecc. sono le medesime anche per riguardo all' ellisse.

Proposizione I. Teorema.

43. *La somma di due raggi vettori FH ed fH* (fig. VIII.) *condotti dai fochi a qualunque punto H preso sul perimetro dell' ellisse è eguale all' asse maggiore AB; e la somma delle rette FK, fK condotte dai fochi a qualunque punto K preso dentro l' ellisse è minore dell' asse maggiore AB; la somma finalmente delle rette FN, fN condotte dai fochi a qualunque punto N preso fuori dell' ellisse è maggiore dell' asse medesimo AB.*

1.° Poichè si ha (36) $FA + fA = FB + fB$, togliendo di comune Ff, sarà $FA + fA - Ff = FB + fB - Ff$, cioè $2FA = 2fB$, e quindi $FA = fB$, per lo che anche $FA + fA = AB$: ma $FH + fH = FA + fA$ (35); dunque $FH + fH = AB$.

2.° Dal centro C al punto K si conduca la CK, che si prolunghi sino ad incontrare il perimetro dell' ellisse in H, tirate le rette FH, fH, sarà $FK + fK < FH + fH$; ma $FH + fH = AB$; dunque $FK + fK < AB$.

3.° Condotta da C al punto N la retta CN, e le rette FH, fH dai fochi al punto H, in cui CN incontra il perimetro dell' ellisse, sarà $FN + fN > FH + fH$, e quindi $FN + fN > AB$.

44. *Corollario* I. Se sarà $FH + fH = AB$, il punto H sarà sul perimetro dell' ellisse; se poi sarà $FK + fK < AB$, il punto K si troverà dentro l' ellisse; finalmente se si avrà $FN + fN > AB$, il punto N sarà fuori dell' ellisse.

45. *Corollario* II. Il centro C dell' ellisse divide per metà l' asse maggiore AB, poichè essendo

$FA = fB$, ed essendo $FC = fC$, sarà anche $FA + FC = fB + fC$, cioè $CA = CB$.

46. *Corollario* III. Il raggio vettore FE condotto dal foco al vertice E dell' asse minore ED è eguale al semiasse maggiore AC; poichè se dall' altro foco f si conduce al medesimo punto E il raggio vettore fE, si hanno i triangoli rettangoli FCE, fCE eguali, perchè intorno agli angoli retti in C il lato $FC = fC$, e CE è comune, per lo che $FE = fE$; ma $FE + fE = AB = 2AC$ (45); dunque $FE = AC$.

47. *Corollario* IV. L' asse minore ED è diviso per metà dal centro C; poichè condotte dal foco F le rette FE, FD, esse saranno fra di loro eguali, eguagliando ciascuna AC, e perciò saranno eguali i triangoli rettangoli FCE, FCD e per conseguenza sarà $CE = CD$.

Proposizione II. Teorema.

48. *Il quadrato del semiasse minore CE* (fig. VIII.) *è eguale al rettangolo formato dai segmenti dell' asse maggiore AB, compresi fra i vertici A e B ed uno de' fochi F.*

Essendo $FE = AC$, sarà anche $\overline{FE}^2 = \overline{AC}^2$; ma $\overline{FE}^2 = \overline{FC}^2 + \overline{CE}^2$, e poichè $AF = AC - FC$, ed $FB = AC + FC$, si ha (Geom. 207) $\overline{AC}^2 - \overline{FC}^2 = AF \times FB$, ed aggiungendo $\overline{FC}^2$ da ambe le parti, si avrà $\overline{AC}^2 = \overline{FC}^2 + AF \times FB$; dunque sarà anche $\overline{FC}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{FC}^2 + AF \times FB$, e quindi $\overline{CE}^2 = AF \times FB$.

49. *Corollario*. Se la retta AL sarà eguale al parametro dell' asse maggiore AB, starà $AB : ED :: ED : AL$, e per conseguenza $\overline{ED}^2 = AB \times AL$; ma $\overline{ED}^2 = 4\overline{CE}^2 = 4AF \times FB$; dunque $AB \times AL = 4AF \times FB$.

Proposizione III. Teorema.

50. *Se si conduce una ordinata qualunque HG (fig. IX.) all' asse maggiore AB, e se dal punto H al foco più vicino si tira la FH, starà il semiasse maggiore AC all' eccentricità CF, come la distanza CG, che vi è dal centro all' ordinata, sta alla differenza, che esiste fra il semiasse maggiore AC ed il raggio vettore FH.*

Dal punto H all' altro foco f si tiri il raggio vettore fH; e sopra l' asse AB presa $AK = FH$, si descriva col centro H, e con raggio HF il semicircolo NFOM, il quale incontrerà l' asse maggiore AB in un altro punto O, ed il raggio vettore fH prolungato nei punti M, ed N. Poichè $Ff = 2CF$, ed $FO = 2FG$, sarà anche, sottraendo una dall' altra queste equazioni, $fO = 2CG$. Siccome poi $FH + fH = AB$ ed $FH = HN$, sarà anche $fN = HN + fH = AB = 2AC$, ed $MN = 2HN = 2FH = 2AK$, e sottraendo come si è fatto superiormente si avrà $fM = 2CK$. E poichè le rette fN, Ff sono secanti del cerchio NFOM, così starà (Geom. 368.) $fN . Ff :: fO : fM$, e per conseguenza starà anche $AC : CF :: CG : CK$, poichè le metà sono nello stesso rapporto delle quantità intere; ma $CK = AC - AK = AC - FH$, dunque starà finalmente $AC : CF :: CG : AC - FH$.

51. *Corollario.* Poichè $AC : CF :: CG : CK$, sarà anche $AC \times CK = CF \times CG$.

Proposizione IV. Teorema.

52. *Supposta la precedente costruzione il quadrato di qualunque ordinata GH (fig. IX.) all' asse maggiore AB è eguale alla differenza dei rettangoli $AG \times GB$ ed $FK \times Kf$.*

Per essere la retta AC divisa in K, sarà (Geom. 201.) $\overline{AC}^2 = \overline{AK}^2 + \overline{CK}^2 + 2AK \times CK$, ed aggiungendo dall' una e dall' altra parte $\overline{CK}^2$, si avrà $\overline{AC}^2 + \overline{CK}^2 = \overline{AK}^2 + 2\overline{CK}^2 + 2AK \times CK = \overline{AK}^2 + 2CK\,(CK + AK) = \overline{AK}^2 + 2AC \times CK$; ma $AC \times CK = CF \times CG$ (50), ed $\overline{AK}^2 = \overline{FH}^2 = \overline{FG}^2 + \overline{GH}^2$; dunque $\overline{AC}^2 + \overline{CK}^2 = 2CF \times CG + \overline{FG}^2 + \overline{GH}^2$; e poichè CF è divisa in G, sarà $\overline{CF}^2 = \overline{CG}^2 + 2CG \times FG + \overline{FG}^2$, ed aggiungendo dall' una e dall' altra parte $\overline{CG}^2$, e ragionando come superiormente, sarà $\overline{CF}^2 + \overline{CG}^2 = 2CF \times CG + \overline{FG}^2$; dunque $\overline{AC}^2 + \overline{CK}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{CG}^2 + \overline{GH}^2$; siccome poi $AG = AC - CG$, e $BG = BC + CG = AC + CG$, così sarà (Geom. 207.) $\overline{AC}^2 - \overline{CG}^2 = (AC - CG)\,(AC + CG) = AG \times BG$, e per conseguenza $\overline{AC}^2 = AG \times GB + \overline{CG}^2$, e per simile ragione $\overline{CF}^2 = FK \times Kf + \overline{CK}^2$, onde, sostituendo avremo $AG \times GB + \overline{CG}^2 + \overline{CK}^2 = FK \times Kf + \overline{CK}^2 + \overline{CG}^2 + \overline{GH}^2$, ossia $AG \times GB = FK \times Kf + \overline{GH}^2$, onde $\overline{GH}^2 = AG \times GB - FK \times Kf$.

Proposizione V. Teorema.

53. *Se si conduce un' ordinata ad uno degli assi dell' ellisse, starà il quadrato di quell' asse, al quadrato dell' altro, come il rettangolo formato coi*

segmenti dell' asse, su cui cade l' ordinata al quadrato dell' ordinata medesima.

Sia GH ordinata all' asse maggiore AB nell' ellisse AEBD (fig. X.), ed ED sia l' asse minore dell' ellisse medesima, dico che si avrà $\overline{AB}^2 : \overline{ED}^2 :: AG \times GB : \overline{GH}^2$. Si conduca il raggio vettore FH, e si faccia $AK = FH$, per cui si avrà (50) $AC : CF :: CG : CK$, e quindi anche $\overline{AC}^2 : \overline{CF}^2 :: \overline{CG}^2 : \overline{CK}^2$, ed alternando e dividendo $\overline{AC}^2 : \overline{CF}^2 :: \overline{AC}^2 - \overline{CG}^2 : \overline{CF}^2 - \overline{CK}^2$. Ma, essendo, come si è già dimostrato (52), $\overline{AC}^2 - \overline{CG}^2 = AG \times GB$, e $\overline{CF}^2 - \overline{CK}^2 = FK \times Kf$, così starà $\overline{AC}^2 : \overline{CF}^2 :: AG \times GB : FK \times Kf$, e dividendo di nuovo, si avrà $\overline{AC}^2 : \overline{AC}^2 - \overline{CF}^2 :: AG \times GB : AG \times GB - FK \times Kf$, ma anche $\overline{AC}^2 - \overline{CF}^2 = AF \times FB$, ed $AG \times GB - FK \times Kf = \overline{GH}^2$ (52), dunque starà $\overline{AC}^2 : AF \times FB :: AG \times GB : \overline{GH}^2$; ma $AF \times FB = \overline{EC}^2$ (48); dunque $\overline{AC}^2 : \overline{EC}^2 :: AG \times GB : \overline{GH}^2$; e finalmente (Geom. 249.) starà $\overline{AB}^2 : \overline{ED}^2 :: AG \times GB : \overline{GH}^2$. Se LH sarà ordinata all' asse minore ED, si dimostrerà con un simile ragionamento, che $\overline{ED}^2 : \overline{AB}^2 :: EL \times LD : \overline{LH}^2$.

54. *Corollario* I. condotta un' altra ordinata GY al medesimo punto G dell' asse maggiore AB, si dimostrerà nel medesimo modo che sta $\overline{AB}^2 : \overline{ED}^2 :: AG \times GB : \overline{GY}^2$, onde $\overline{GY}^2 = \overline{GH}^2$, e per conseguenza anche $GY = GH$: onde a qualunque ascissa AG presa sull' asse maggiore corrispondono due ordinate

eguali, l' una da una parte e l' altra dall' altra dell' asse medesimo.

Lo stesso si dimostrerebbe rispetto alle ordinate all' asse minore ED; dunque gli assi AB, ED sono due diametri conjugati (41).

55. *Corollario* II. Se la retta PQ sarà perpendicolare all' asse maggiore, e se starà $\overline{AB}^2 : \overline{ED}^2 :: AP \times PB : \overline{PQ}^2$ il punto Q si troverà sul perimetro dell' ellisse AEBD.

56. *Corollario* III. Essendo il parametro AX dell' asse AB terza proporzionale dopo gli assi AB, ED, starà la prima AB alla terza AX, come il quadrato descritto sopra la prima al quadrato descritto sulla seconda, starà cioè $AB : AX :: \overline{AB}^2 : \overline{ED}^2$; ma (53) $\overline{AB}^2 : \overline{ED}^2 :: AG \times GB : \overline{GH}^2$, dunque starà anche $AB : AX :: AG \times GB : \overline{GH}^2$.

57. *Corollario* IV. Se sopra l' asse maggiore AB come diametro si descriverà il semicircolo AZB, e si prolungherà l' ordinata GH sino all' incontro in Z della periferia, sarà (Geom. 363.) $\overline{GZ}^2 = AG \times GB$; dunque starà $\overline{AB}^2 : \overline{ED}^2 :: \overline{GZ}^2 : \overline{GH}^2$, e per conseguenza $AB : ED :: GZ : GH$; donde ne risulta che la perpendicolare abbassata da qualunque punto Z della circonferenza del circolo sull' asse maggiore AB dell' ellisse sta all' ordinata GH corrispondente al punto G nel rapporto costante dell' asse maggiore all' asse minore.

Proposizione VI. Teorema.

58. *I quadrati delle ordinate ad uno qualunque degli assi dell' ellisse, sono in ragione dei rettangoli*

dei segmenti dell' asse medesimo determinati dalle ordinate stesse.

Se le rette GH, PQ (fig. X.) saranno ordinate all' asse maggiore AB, dico che starà

$$\overline{GH}^2 : \overline{PQ}^2 :: AG \times GB : AP \times PB.$$

Poichè essendo (52) $\overline{AB}^2 : \overline{ED}^2 :: AG \times GB : \overline{GH}^2$, ed essendo anche $\overline{AB}^2 : \overline{ED}^2 :: AP \times PB : \overline{PQ}^2$, a cagione del rapporto comune $\overline{AB}^2 : \overline{ED}^2$, starà $\overline{GH}^2 : \overline{PQ}^2 :: AG \times GB : AP \times PB$. Nello stesso modo si dimostrerà, che se le rette LT, MN saranno ordinate all' asse minore ED, starà $\overline{LT}^2 : \overline{MN}^2 :: EL \times LD : EM \times MD$.

59. *Corollario* I. Se le rette GH, PQ saranno perpendicolari all' asse AB, e se nello stesso tempo starà $\overline{GH}^2 : \overline{PQ}^2 :: AG \times GB : AP \times PB$, i punti H, e Q saranno sul perimetro dell' ellisse.

60. *Corollario* II. Stando $\overline{GH}^2 : \overline{PQ}^2 :: AG \times GB : AP \times PB$, starà anche $\overline{GH}^2 : \overline{PQ}^2 :: \overline{AC}^2 - \overline{CG}^2 : \overline{AC}^2 - \overline{CP}^2$; perchè (Geom. 207.) $\overline{AC}^2 - \overline{CG}^2 = AG \times GB$; ed $\overline{AC}^2 - \overline{CP}^2 = AP \times PB$.

Proposizione VII. Teorema.

61. *Se la retta FG (fig. VIII.) sarà ordinata all' asse maggiore AB nel foco F, essa sarà la metà del parametro AL appartenente all' asse medesimo.*

Poichè (56) sta $AB : AL :: AF \times FB : \overline{FG}^2$, starà anche $AB \times AL : \overline{AL}^2 :: AF \times FB : \overline{FG}^2$; ma $AB \times AL = 4AF \times FB$ (48); dunque anche $\overline{AL}^2 = 4\overline{FG}^2$, e per conseguenza $AL = 2FG$, oppure $FG = \frac{AL}{2}$.

Proposizione VIII. Problema.

62. *Date due rette AB, ED (fig. VIII.) disuguali, che si tagliano rispettivamente per metà in C ad angoli retti descrivere un' ellisse, i di cui assi sieno le rette date.*

Fatto centro in una delle estremità E della retta minore ED con intervallo $EF = AC$, si descriva l' arco di cerchio Ff, che taglierà in F, f l' asse maggiore AB, per lo che essendo $CF = Cf$, sarà anche $AF = Bf$; ciò fatto, mediante un filo di lunghezza eguale ad AB, gli estremi del quale sieno fissi in F, f, si descriva l' ellisse AEBD, che sarà la richiesta: poichè per costruzione essa ha per asse maggiore AB; e siccome $FE = AC$, ed $fE = BC$, così sarà anche $FE + fE = AB$, e quindi il punto E sarà sul perimetro dell' ellisse, come sarà sul perimetro medesimo, anche il punto D, poichè $FD + fD = AB$. Ora la retta ED è perpendicolare all' asse maggiore AB, nel centro C, dunque ED è l' asse minore dell' ellisse AEBD. Dunque ecc.

Proposizione IX. Problema.

63. *Dato un punto sul perimetro dell' ellisse condurre una tangente all' ellisse in quel punto medesimo.*

1.° Se il punto sarà uno dei vertici B (fig. X.) dell' asse maggiore AB, la perpendicolare BN innalzata in quel punto all' asse medesimo sarà la tangente richiesta. Dai fochi F, f sieno condotte le rette FN, fN a un punto qualunque N della retta BN. Per essere retto l' angolo FBN, sarà $FN > FB$, ed $fN > fB$, e per conseguenza anche $FN + fN > FB + fB$, ma $FB + fB = FB + AF = AB$, dunque

$FN + fN > AB$, e per conseguenza il punto N rimane al di fuori dell'ellisse AEBD (44). Lo stesso si dimostrerà per qualunque altro punto preso sulla retta BN prolungata da ambe le parti quanto si vuole; dunque BN è tangente all'ellisse nel punto B.

2.° Se il punto dato sarà un altro punto D qualunque della curva, dai fochi F, f si guidino le rette FD, fD al punto medesimo, si prolunghi FD indefinitivamente, e si divida l'angolo fDK' per metà mediante la LD, questa retta sarà la tangente richiesta. Poichè fatta $DK' = fD$, e condotta fK'; preso un punto qualunque O sopra la retta LD, o sul suo prolungamento, si guidino dai fochi F, f le rette FO, fO, e dal punto K' al medesimo punto O si tiri la OK', i triangoli fDL, $K'DL$ saranno eguali, avendo per costruzione $fD = DK'$, il lato DL comune, e l'angolo $fDL = K'DL$ pure per costruzione, onde sarà anche il lato $fL = K'L$, e gli angoli fLD, $K'LD$ saranno eguali e retti, saranno per conseguenza eguali anche i triangoli rettangoli OLf, OLK', per cui $fO = K'O$, ed $FO + fO = FO + K'O$; ma $FO + K'O > FK'$, ed $FK' = FD + DK' = FD + fD = AB$, dunque $FO + fO > AB$, e per conseguenza il punto O è fuori dell'ellisse AEBD. Lo stesso si dimostrerebbe per qualunque altro punto della LO; dunque la retta LD è tangente all'ellisse in D.

64. *Corollario* I. Gli angoli FDO, fDL formati dalla tangente LO e dai raggi vettori FD, fD condotti al punto di contatto D sono eguali; poichè essendo l'angolo $FDO = K'DL$, ed essendo, per costruzione, l'angolo $K'DL = fDL$, sarà anche $FDO = fDL$.

65 *Corollario* II. La tangente al punto D vertice dell'asse minore ED dell'ellisse; è perpendico-

lare all'asse medesimo; poichè essendo l'angolo $FDO = fDL$, e l'angolo $FDC = fDC$ a cagione dell'eguaglianza dei triangoli rettangoli FCD, fCD, sarà anche l'angolo $CDO = CDL$; e perciò la LO perpendicolare ad ED.

Proposizione X. Teorema.

66. *Se la tangente DL* (fig. IX.) *incontrerà in E l'asse maggiore AB prolungato, e se dal punto di contatto D si condurrà sopra l'asse medesimo l'ordinata DP, il semiasse maggiore CB sarà medio proporzionale fra CE, e CP.*

Poichè condotta dal punto f la retta fM parallela ad ED, sarà l'angolo $DMf = SDE$, e l'angolo $DfM = fDE$; ma (63) l'angolo $SDE = fDE$, dunque sarà anche l'angolo $DMf = DfM$, e per conseguenza anche il lato $MD = fD$. Ora essendo fM parallela alla base del triangolo DFE starà $FE : fE :: FD : MD$, ossia $FE : fE :: FD : fD$, e componendo starà $FE + fE : fE :: FD + fD : fD$, e prendendo la metà degli antecedenti starà $CE : fE :: CB : fD$, e dividendo $CE : CE - fE :: CB : CB - fD$, ossia $CE : Cf :: CB : CB - fD$; ma (50) si è dimostrato, che $CB : Cf :: CP : CB - fD$. E siccome in queste due proporzioni sono eguali i conseguenti, gli antecedenti formeranno proporzione, si avrà quindi $CE : CB :: CB : CP$.

67. *Corollario* I. Se la tangente LD incontrerà l'asse minore QT prolungato in R, e dal punto di contatto D si tirerà l'ordinata DV all'asse minore, il semiasse minore QC sarà medio proporzionale fra CR, e CV.

68. *Corollario* II. Per essere $CA = CB$, starà $CE : CA :: CA : CP$, e componendo $CE + CA : CA ::$

CA + CP : CP, ossia AE : AC :: AP : CP, ed alternando AE : AP :: AC : CP, e dividendo AE — AP : AP :: AC — CP : CP, cioè PE : AP :: BP : CP, ed alternando, sarà finalmente CP : AP :: BP : PE, donde si ricava; che la sottotangente PE nell' ellisse è quarta proporzionale dopo CP, AP, BP, e che il rettangolo di PE $\times$ CP = AP $\times$ BP.

69. *Scolio.* Conoscendo i valori della tangente e della sottotangente, si otterranno, con tutta facilità quelli della normale, e della sottonormale, nello stesso modo, che si è praticato per trovarle nella parabola.

Proposizione XI. Teorema.

70. *La sezione PRQS (fig. II.) fatta nel cono retto SATCX, perpendicolarmente al triangolo per l'asse in modo, che passando per PQ, e per una perpendicolare al diametro BD del circolo BRDSB parallelo alla base del cono, seghi due lati opposti SC, SA del cono medesimo, sarà un ellisse.*

Poichè preso sulla PQ un punto qualunque N, e condotto per le rette NH, EN rispettivamente parallele alle rette KR, BK un piano, la sezione EHYL risultante sarà un circolo parallelo anch' esso alla base del cono, il di cui diametro sarà EY. Ciò posto si dimostrerà come nella parabola (35), che HL è una corda del circolo EHYLE divisa per metà in N dal diametro EY; onde si avrà $\overline{KR}^2 =$ BK $\times$ KD, $\overline{NH}^2 =$ EN $\times$ NY, donde si ricava la proporzione $\overline{KR}^2 : \overline{NH}^2$ :: BK $\times$ KD : EN $\times$ NY. Ma essendo nel triangolo BPK la retta EN parallela alla base BK, starà BK : EN :: PK : PN, ed essendo nel triangolo QNY la retta KD parallella alla base NY, si avrà KD : NY :: KQ : NQ, onde (Geom. 250.), starà anche BK $\times$ KD : EN $\times$ NY :: PK $\times$ KO : PN $\times$ NQ, e per conseguenza si avrà $\overline{KR}^2 : \overline{NH}^2$ :: PK $\times$ KQ : PN $\times$ NQ, donde ne viene che essendo nella sezione PRQS i quadrati delle ordinate KR, NK proporzionali ai rettangoli delle ascisse corrispondenti, essa sarà un' ellisse (58).

Dell' Iperbola.

Definizioni.

71. I. L' iperbola HAH (fig. XI) è una superficie piana, in cui è costante la differenza che vi è fra le rette fH, FH condotte a qualsivoglia punto H del suo perimetro da due punti fissi F, f, uno dei quali F è dentro l' iperbola, e l' altro è fuori, ma nello stesso piano.

72. II. Le iperbole HAH, hBh si dicono *opposte* quando la differenza, che vi è fra le rette fH, FH condotte dai punti fissi f, F a qualunque punto H dell' iperbola HAH è eguale alla differenza, che vi è fra le rette Fh, fh condotte dai medesimi punti a qualunque punto h dell' iperbola hBh.

73. L' iperbola si può descrivere nel modo seguente.

In un punto qualunque f si fissi una estremità di un regolo fY in modo però che possa girare liberamente intorno a quel punto; e si prenda un filo di lunghezza minore di fF, uno de' suoi estremi si fissi in Y, e l' altro in un punto qualunque F, indi mediante la punta di uno stile si tenga costantemente teso il filo contro il regolo mentre il regolo stesso si muove ruotando intorno al punto f nel piano, in cui sono presi i punti f, F, Y, la punta di quello stile descriverà l'iperbola HAH. Se poi l'estremità di quel medesimo regolo si fisserà in F, e l'estremità del filo in f, operando nel resto come si è indicato precedentemente, si descriverà l'iperbola opposta hBh.

È chiaro che le nominate iperbole potranno estendersi ad una distanza dai punti F, f, maggiore di qualunque data distanza, col prendere un filo, la di cui lunghezza sia maggiore della distanza data.

74. III. I punti F, f si dicono i *fochi*. Il punto C, che divide per metà la retta Ff, che unisce i fochi, si chiama il *centro* dell'iperbola o delle iperbole opposte.

75. IV. Qualunque retta NQ, che passa pel centro C ed è terminata sui perimetri delle iperbole opposte, si chiama *diametro trasverso*, o *principale* delle iperbole medesime; ed i punti N, Q, nei quali incontra le iperbole, si dicono *i vertici* dell'iperbola o delle *iperbole opposte*.

76. V. Il diametro AB, che passa pei fochi F, f, si dice *asse trasverso*, o *principale* dell'iperbola o delle iperbole opposte.

77. VI. Se dal centro C si innalza una perpendicolare indefinita all'asse principale AB, e se col centro A, e l'intervallo CF si descrive un arco di cerchio a tagliare questa perpendicolare nei punti D, E, la corda DE appartenente a quell'arco dicesi *asse secondario* dell'iperbola o delle iperbole opposte.

78. VII. Se la retta RAG sarà perpendicolare all'asse trasverso AB in uno de' suoi vertici A, ed eguale all'asse secondario DE e sarà dall'asse trasverso medesimo divisa per metà, le rette CP, CS condotte dal centro C delle iperbole, per gli estremi

R, G di quella perpendicolare, si dicono gli *assintoti* dell'iperbola HAH. Quelle rette prolungate in p, ed s dalla parte opposta sono gli assintoti dell'iperbola hBh.

79. VIII. Dicesi *tangente* dell'iperbola qualunque retta, che incontra l'iperbola in un sol punto, e che prolungata da ambe le parti non la sega.

80. IX. La terza proporzionale dopo i due assi dell'iperbola si chiama parametro dell'asse, che forma il primo termine della proporzione.

81. L'ordinata ad un diametro, o ad un'asse, l'ascissa, la tangente, la sottotangente, i raggi vettori, ecc. si definiscono come nella parabola.

Proposizione I. Teorema.

82. *Nelle iperbole opposte HAZ, PBQ* (fig. XII.)

1.° *La differenza delle rette fH, FH condotte ad uno stesso punto H preso sul perimetro di una delle iperbole dai fochi f, F eguaglia l'asse trasverso AB.*

2.° *La differenza delle rette fR, FR condotte dal punto R preso fuori delle iperbole medesime ai fochi f, F è minore dell'asse trasverso AB.*

3.° *La differenza finalmente delle rette fS, FS condotte da qualunque punto S preso dentro una delle iperbole ai fochi f, F è maggiore dell'asse trasverso AB.*

I.° Si prenda $AT = AF$, e $BV = Bf$. Siccome i vertici A, e B dell'asse trasverso AB sono posti sui perimetri delle iperbole opposte, sarà (71) $Af - AF = BF - Bf$, cioè $fT = FV$, e togliendo la parte comune VT si avrà $fV = FT$, ed eguali saranno anche fra di loro le metà di queste rette, cioè $Bf = AF$, e per conseguenza sarà anche $Af - AF = Af - Bf = AB$; ma $Af - AF = fH - FH$; dunque $fH - FH = AB$.

II.° Nel triangolo fHR è il lato $fR < fH + HR$, dunque sarà anche $fR - HR < fH$, e sottraendo da ambe le parti la retta FH, si avrà $fR - FR < fH - FH$; ma $fH - FH = AB$ dunque $fR - FR < AB$.

III.° Nel triangolo fHS si ha $fS + HS > fH$, e sottraendo dall'una e dall'altra parte la retta FH, sarà $fS - FS > fH - FH$, cioè $fS - FS > AB$.

83. *Corollario* I. Da questo teorema si ricava.

1.° Che se sarà $fH - FH = AB$, il punto H si troverà sul perimetro dell'iperbola HAZ.

2.° Se sarà $fR - FR < AB$, il punto R sarà fuori dell'iperbola.

3.° Se finalmente sarà $fS - FS > AB$, il punto S si troverà dentro l'iperbola.

84. *Corollario* II. Il centro C trovasi alla metà dell'asse trasverso AB, perchè essendo $fC = FC$, e $Bf = AF$, sarà anche $CB = CA$.

Proposizione II. Teorema.

85. *Il quadrato del semiasse secondario CE delle iperbole opposte HAZ, PBQ* (fig. XII.) *è eguale al rettangolo formato dalle rette BF ed FA comprese da uno dei fochi F e dai vertici dell'asse trasverso.*

Dal vertice A si conduca la retta AE, e poichè (77) $AE = CF$, sarà anche $\overline{AE}^2 = \overline{CF}^2$; ma $\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CE}^2$, e (Geom. 201.) $\overline{CF}^2 = (FA + AC)^2 = \overline{FA}^2 + 2AC \times FA + \overline{AC}^2 = FA\ (FA + 2AC) + \overline{AC}^2 = FA\ (FA + BA) + \overline{AC}^2 = BF \times FA + \overline{AC}^2$; dunque sarà anche $\overline{AC}^2 + \overline{CE}^2 = BF \times FA + \overline{AC}^2$, e togliendo da ambe le parti $\overline{AC}^2$, rimarrà $\overline{CE}^2 = BF \times FA$.

85. *Corollario.* Se la retta AX sarà il parametro dell'asse trasverso AB, si avrà $AB \times AX = 4BF \times FA$, poichè essendo $\overline{CE}^2 = BF \times FA$, e siccome si ha (Geometria 203.) $\overline{DE}^2 = 4\overline{CE}^2$, così $\overline{DE}^2 = 4BF \times FA$; ma essendo le rette AB, DE, AX continuamente proporzionali, si ha pure $\overline{DE}^2 = AB \times AX$, dunque $AB \times AX = 4BF \times FA$.

Proposizione III. Teorema.

86. *Se sopra l'asse trasverso AB* (fig. XII.) *prolungato si conduce una qualunque ordinata GH, e dal foco F al punto H si guida il raggio vettore FH, starà $AC : FC :: CG : AC + FH$.*

Dal punto H all'altro foco f si guidi la retta fH e si prenda $AK = FH$, indi fatto centro in H con intervallo FH, si descriva il semicircolo MFON, la di cui circonferenza segherà in un altro punto O l'asse trasverso AB prolungato, ed anche la retta fH pure prolungata nei punti M, ed N. Siccome poi $fF = 2FC$, ed $FO = 2FG$, sarà anche $fO = 2CG$; e poichè $fM = fH - HM = fH - FH = AB$, sarà anche $fM = 2AC$; ed essendo $MN = 2HM = 2FH$, sarà anche $MN = 2AK$, poichè si è fatto $AK = FH$; finalmente essendo $fN = fM + MN$, sarà pure $fN = 2AC + 2AK = 2CK$. Ora, poichè le rette fN, fO sono secanti del circolo MFON, si avrà (Geom. 367.) $fM : fF :: fO : fN$, e quindi anche $2AC : 2FC :: 2CG : 2CK$, e per conseguenza $AC : FC :: CG : CK$; ma $CK = AC + AK = AO + FH$; dunque starà finalmente $AC : FC :: CG : AC + FH$.

87. *Corollario.* Dalla proporzione $AC : FC :: CG : CK$ si ricava $AC \times CK = FC \times CG$.

Proposizione IV. Teorema.

88. *Supposta la costruzione della proposizione precedente, il quadrato dell'ordinata GH sarà eguale alla differenza dei rettangoli* $fK \times KF$, *e* $BG \times GA$.

Per essere la retta CK divisa in A (Geom. 201.) sarà $\overline{CK}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AK}^2 + 2AC \times AK$, ed aggiungendo da ambe le parti $\overline{AC}^2$, sarà $\overline{CK}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AC}^2 + \overline{AK}^2 + 2AC \times AK = 2AC\,(AC + AK) + \overline{AK}^2 = 2AC \times CK + \overline{AK}^2$ ma $AC \times CK = FC \times CG$ (87); dunque $\overline{CK}^2 + \overline{AC}^2 = 2FC \times CG + \overline{AK}^2$; ma $\overline{AK}^2 = \overline{FH}^2 = \overline{GH}^2 + \overline{FG}^2$, dunque $\overline{CK}^2 + \overline{AC}^2 = 2FC \times CG + \overline{GH}^2 + \overline{FG}^2$.

Siccome poi la retta CG è divisa in F, così; come superiormente si è dimostrato riguardo alla CK divisa in A, sarà $\overline{CG}^2 + \overline{FC}^2 = 2FC \times CG + \overline{FG}^2$, dunque sarà $\overline{CK}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{CG}^2 + \overline{FC}^2 + \overline{GH}^2$; ma essendo $fK = CK + fC = CK + FC$, e $KF = CK - FC$, sarà anche (Geom. 207.) $\overline{CK}^2 = fK \times KF + \overline{FC}^2$, per simile ragione sarà anche $\overline{CG}^2 = BG \times GA + \overline{AC}^2$, dunque $fK \times KF + \overline{FC}^2 + \overline{AC}^2 = BG \times GA + \overline{AC}^2 + \overline{FC}^2 + \overline{GH}^2$, e levando dall'una e dall'altra parte i quadrati di FC e di AC, rimarrà $fK \times KF = BG \times GA + \overline{GH}^2$; e per conseguenza sarà $\overline{GH}^2 = fK \times KF - BG \times GA$.

Proposizione V. Teorema.

89. *Se da un punto H* (fig. XII.) *preso sopra il perimetro di una delle iperbole opposte HAZ, PBQ si tira l'ordinata GH all'asse trasverso AB prolungato, starà il quadrato di quest'asse al quadrato dell'asse secondario DE come* $BG \times GA : \overline{GH}^2$.

Sieno al solito F, f i fochi delle iperbole opposte, si conduca la retta FH, e si prenda AK=FH, e si avrà (86) CK : CG :: FC : AC, e quindi anche $\overline{CK}^2 : \overline{CG}^2 :: \overline{FC}^2 : \overline{AC}^2$, e ragionando come si è fatto (53) per l'ellisse, starà anche $\overline{CK}^2 : \overline{CG}^2$, oppure $\overline{FC}^2 : \overline{AC}^2 :: fK \times KF : BG \times GA$; e dividendo si avrà $\overline{FC}^2 - \overline{AC}^2 : \overline{AC}^2 :: fK \times KF - BG \times GA : BG \times GA$; ma (Geom. 207.) $\overline{FC}^2 - \overline{AC}^2 = BF \times FA = \overline{CE}^2$ (85), ed (88) $fK \times KF - BG \times GA = \overline{GH}^2$, dunque starà $\overline{CE}^2 : \overline{AC}^2 :: \overline{GH}^2 : BG \times GA$, ed invertendo $\overline{AC}^2 : \overline{CE}^2 :: BG \times GA : \overline{GH}^2$, e quindi starà anche

$$\overline{AB}^2 : \overline{DE}^2 :: BG \times GA : \overline{GH}^2.$$

90. *Corollario* I. Condotta un'altra ordinata GL al medesimo punto G dell'asse trasverso AB prolungato, si dimostrerà nello stesso modo, che sta $\overline{AB}^2 : \overline{DE}^2 :: BG \times GA : \overline{GL}^2$, donde $\overline{GH}^2 = \overline{GL}^2$, e quindi GH = GL, donde si ricava che qualunque retta LH parallela all'asse secondario, che ha i suoi estremi sul perimetro dell'iperbola resta divisa per metà dall'asse trasverso AB prolungato.

91. *Corollario* II. Se la retta IZ sarà perpendicolare all'asse trasverso prolungato e se starà $\overline{AB}^2 : \overline{DE}^2 :: BI \times IA : \overline{IZ}^2$, il punto Z sarà sul perimetro dell'iperbola HAZ.

92. *Corollario* III. Essendo il parametro AX terza proporzionale dopo AB, DE, starà (Geom. 236.) $\overline{AB}^2 : \overline{DE}^2 :: AB : AX$, ma sta anche (89) $\overline{AB}^2 : \overline{DE}^2 :: BG \times GA : \overline{GH}^2$, dunque sarà $AB : AX :: BG \times GA : \overline{GH}^2$.

93. *Corollario* IV. Se sopra l'asse trasverso AB (fig. XIII.) come diametro si descriverà il semicerchio AIBA, e se da qualunque punto G preso sull'asse trasverso AB prolungato si condurrà a questo semicerchio la tangente GR, starà GR : GH :: AB : DE. In fatti stando (89) $BG \times GA : \overline{GH}^2 :: \overline{AB}^2 : \overline{DE}^2$, ed essendo (Geom. 371.) $BG \times GA = \overline{GR}^2$, starà anche $\overline{GR}^2 : \overline{GH}^2 :: \overline{AB}^2 : \overline{DE}^2$, e quindi GR : GH :: AB : DE.

Proposizione VI. Teorema.

94. *Se la retta HL sarà ordinata all'asse secondario DE* (fig. XIII.), *starà* $\overline{DE}^2 : \overline{AB}^2 :: \overline{CD}^2 + \overline{CL}^2 : \overline{HL}^2$.

Condotta l'ordinata GH all'asse trasverso AB prolungato, sarà (89) $\overline{AC}^2 : \overline{CD}^2 :: BG \times GA : \overline{GH}^2$, ed invertendo $\overline{CD}^2 : \overline{AC}^2 :: \overline{GH}^2 : BG \times GA$ e quindi (Geom. 271.), starà anche $\overline{CD}^2 + \overline{GH}^2 : \overline{AC}^2 + BG \times GA :: \overline{CD}^2 : \overline{AC}^2$; ma (Geom. 205.) $\overline{AC}^2 + BG \times GA = \overline{CG}^2 = \overline{HL}^2$, e $\overline{GH}^2 = \overline{CL}^2$, dunque starà anche $\overline{CD}^2 + \overline{CL}^2 : \overline{HL}^2 :: \overline{CD}^2 : \overline{AC}^2 :: \overline{DE}^2 : \overline{AB}^2$, ossia $\overline{DE}^2 : \overline{AB}^2 :: \overline{CD}^2 + \overline{CL}^2 : \overline{HL}^2$.

95. *Corollario.* Condotta allo stesso punto L un altra ordinata LN, starà $\overline{DE}^2 : \overline{AB}^2 :: \overline{CD}^2 + \overline{CL}^2 : \overline{NL}^2$; quindi $HL = NL$; donde si vede che l'asse secondario DE divide per metà tutte le rette, che essendo parallele all'asse trasverso AB, terminano ai perimetri delle iperbole opposte.

Proposizione VII. Teorema.

96. *Se le rette KQ, HL* (fig. XIII.) *sono ordinate all'asse secondario DE delle iperbole opposte HAY, NBO, starà* $\overline{KQ}^2 : \overline{HL}^2 :: \overline{CD}^2 + \overline{CK}^2 : \overline{CD}^2 + \overline{CL}^2$; *e se le rette PQ; GH, sono ordinate all'asse trasverso AB, starà* $\overline{PQ}^2 : \overline{GH}^2 :: BP \times PA : BG \times GA$.

I. Poichè le rette KQ, HL sono ordinate all'asse secondario DE, starà (94) $\overline{DE}^2 : \overline{AB}^2 :: \overline{CD}^2 + \overline{CK}^2 : \overline{KQ}^2$, e $\overline{DE}^2 : \overline{AB}^2 :: \overline{CD}^2 + \overline{CL}^2 : \overline{HL}^2$, e per conseguenza $\overline{KQ}^2 : \overline{HL}^2 :: \overline{CD}^2 + \overline{CK}^2 : \overline{CD}^2 + \overline{CL}^2$.

II. Per essere le rette PQ, GH ordinate all'asse trasverso AB, starà (89) $\overline{AB}^2 : \overline{DE}^2 :: BP \times PA : \overline{PQ}^2$, ed $\overline{AB}^2 : \overline{DE}^2 :: BG \times GA : \overline{GH}^2$, e quindi $\overline{PQ}^2 : \overline{GH}^2 :: BP \times PA : BG \times GA$.

97. *Scolio.* Per condurre una tangente all'iperbola in un punto dato, si opererà nel modo, che si è praticato per guidare una tangente all'ellisse (63).

Ragionando come si è fatto per l'ellisse (70) si dimostrerà, che la sezione praticata nel cono mediante un piano, che taglia un solo lato di esso, ed il prolungamento del lato opposto è una iperbola.

Trattandosi di soli iniziamenti alle sezioni coniche, si è creduto conveniente di omettere le proprietà dell'ellisse e dell'iperbola rapporto ai diametri, non che quelle dell'iperbola rispetto agli assintoti, non essendo tali proprietà di sì frequente uso nella fisica, come sono quelle della parabola riguardo a' suoi diametri, di cui si è parlato bastantemente.

FINE.

INDICE

LIBRO PRIMO.

LIBRO SECONDO.

LIBRO TERZO.

LIBRO QUARTO.

LIBRO QUINTO.

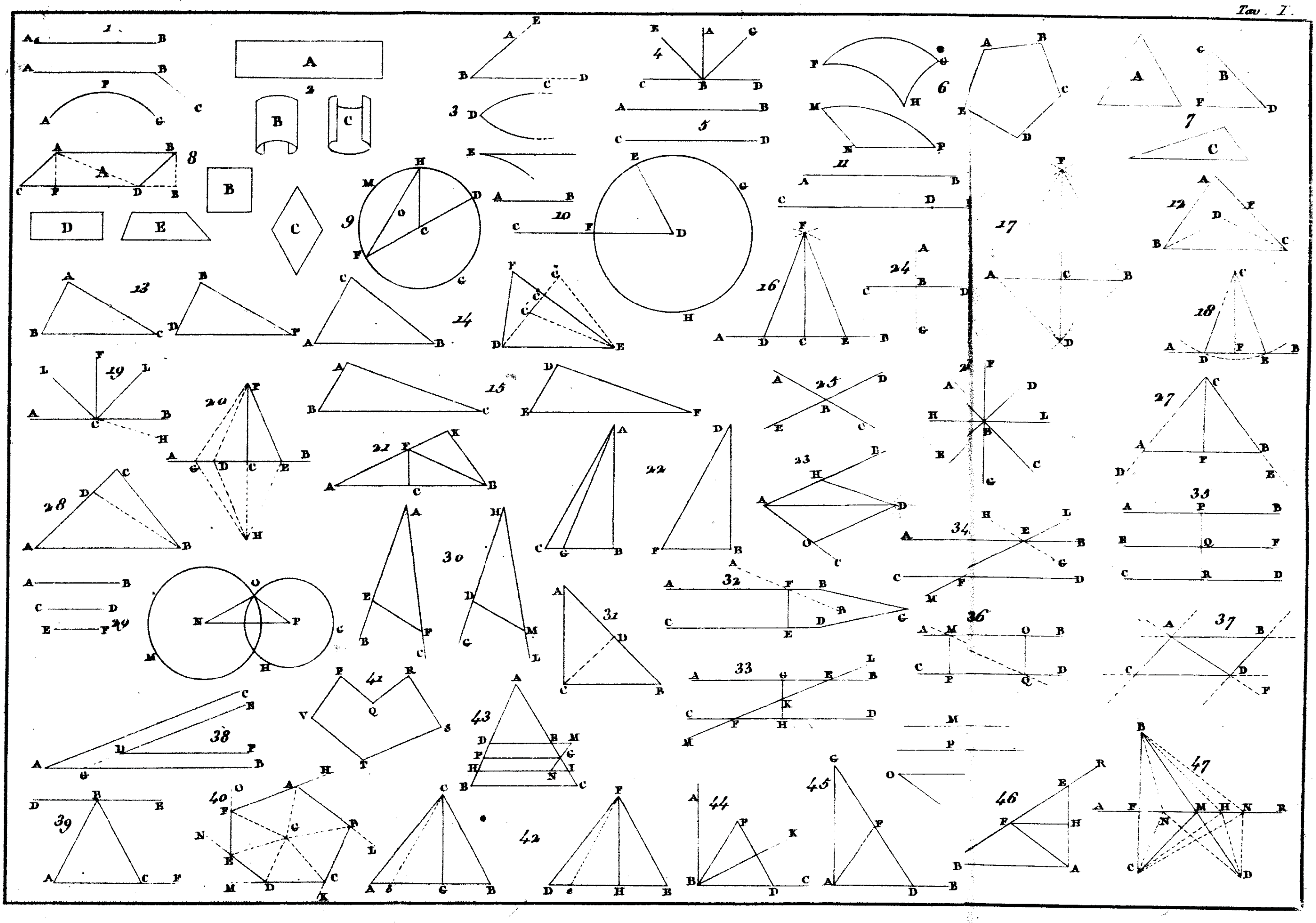
LIBRO SESTO.

LIBRO SETTIMO.

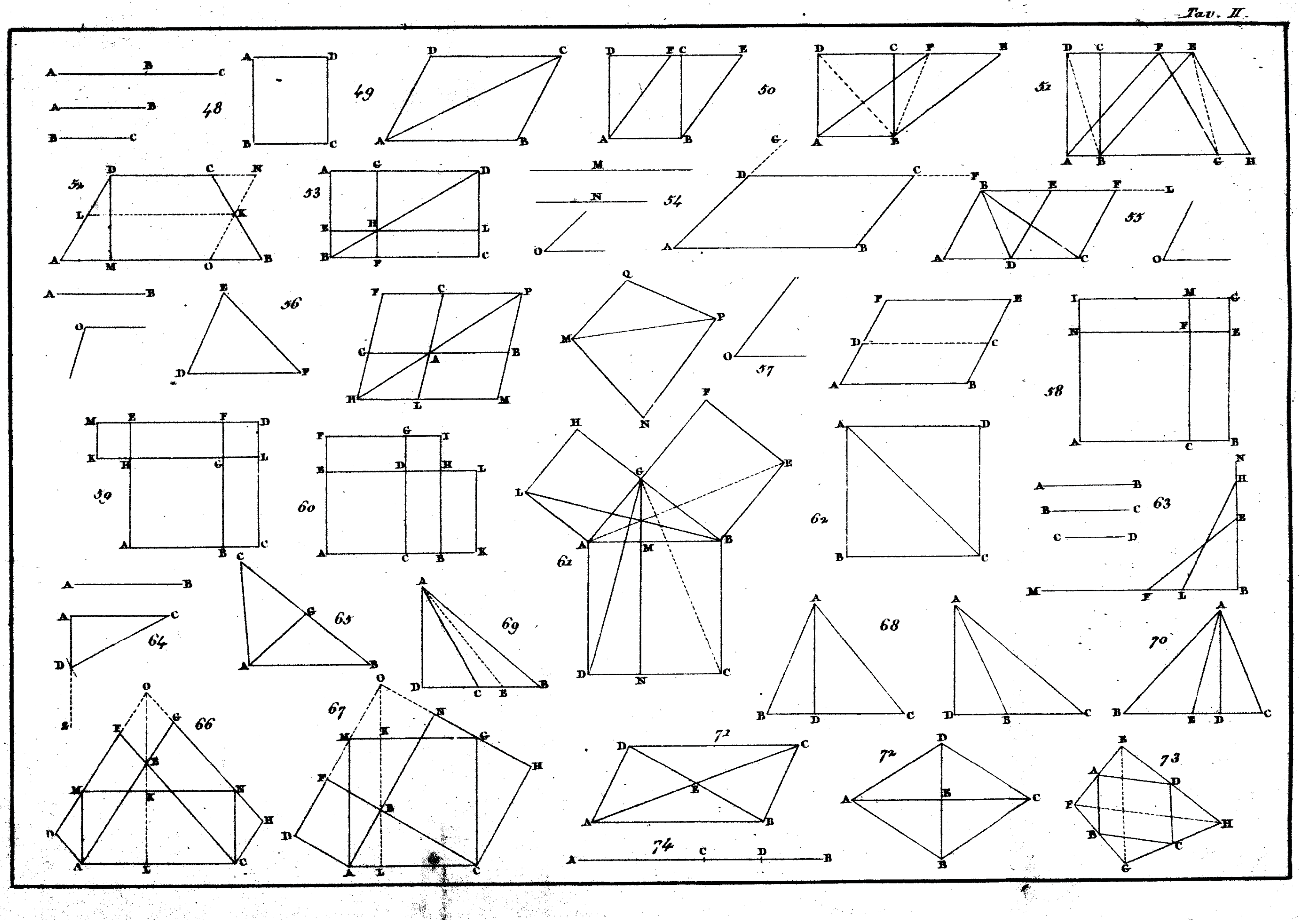
LIBRO OTTAVO.

LIBRO NONO.

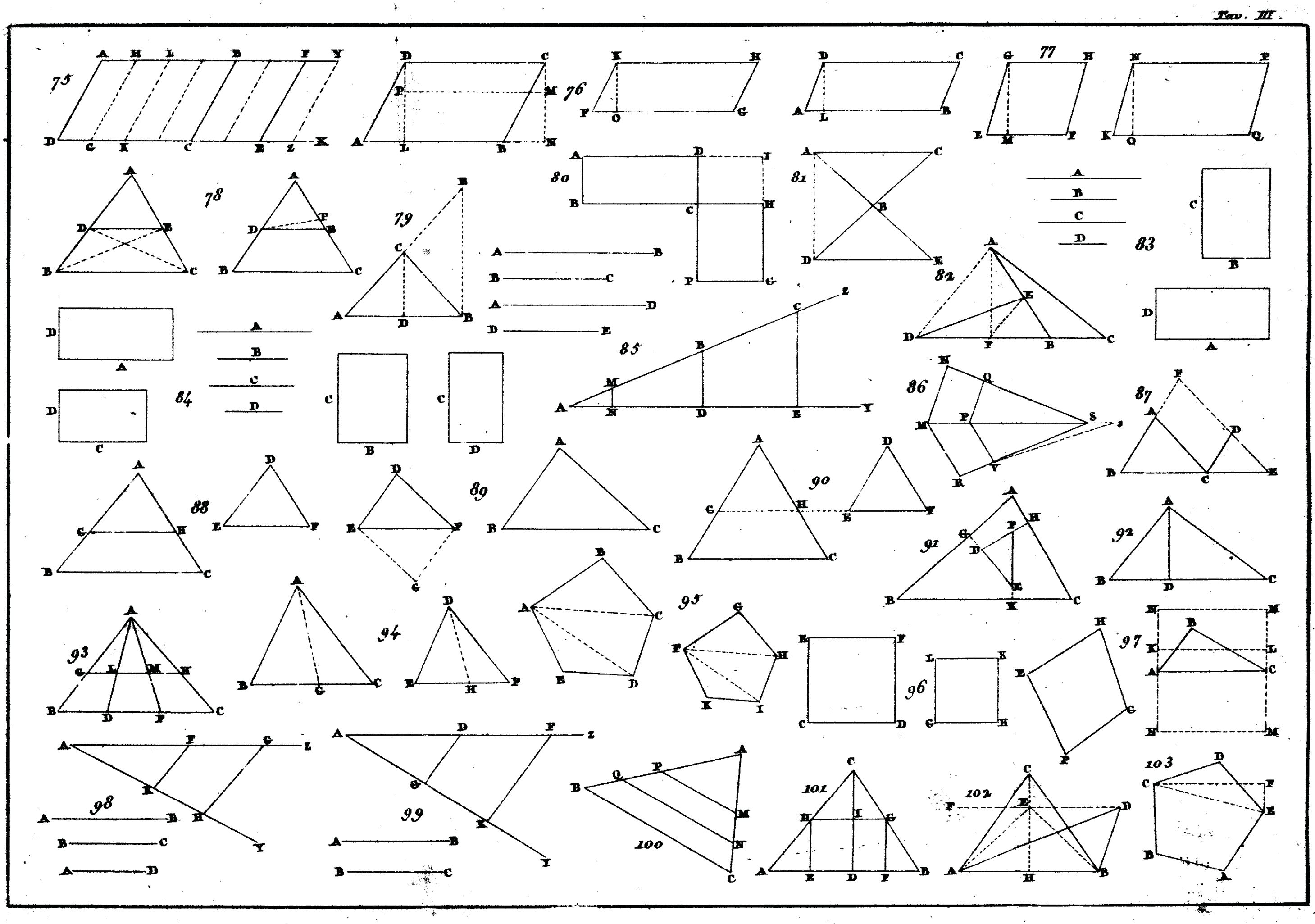
Tav. I.



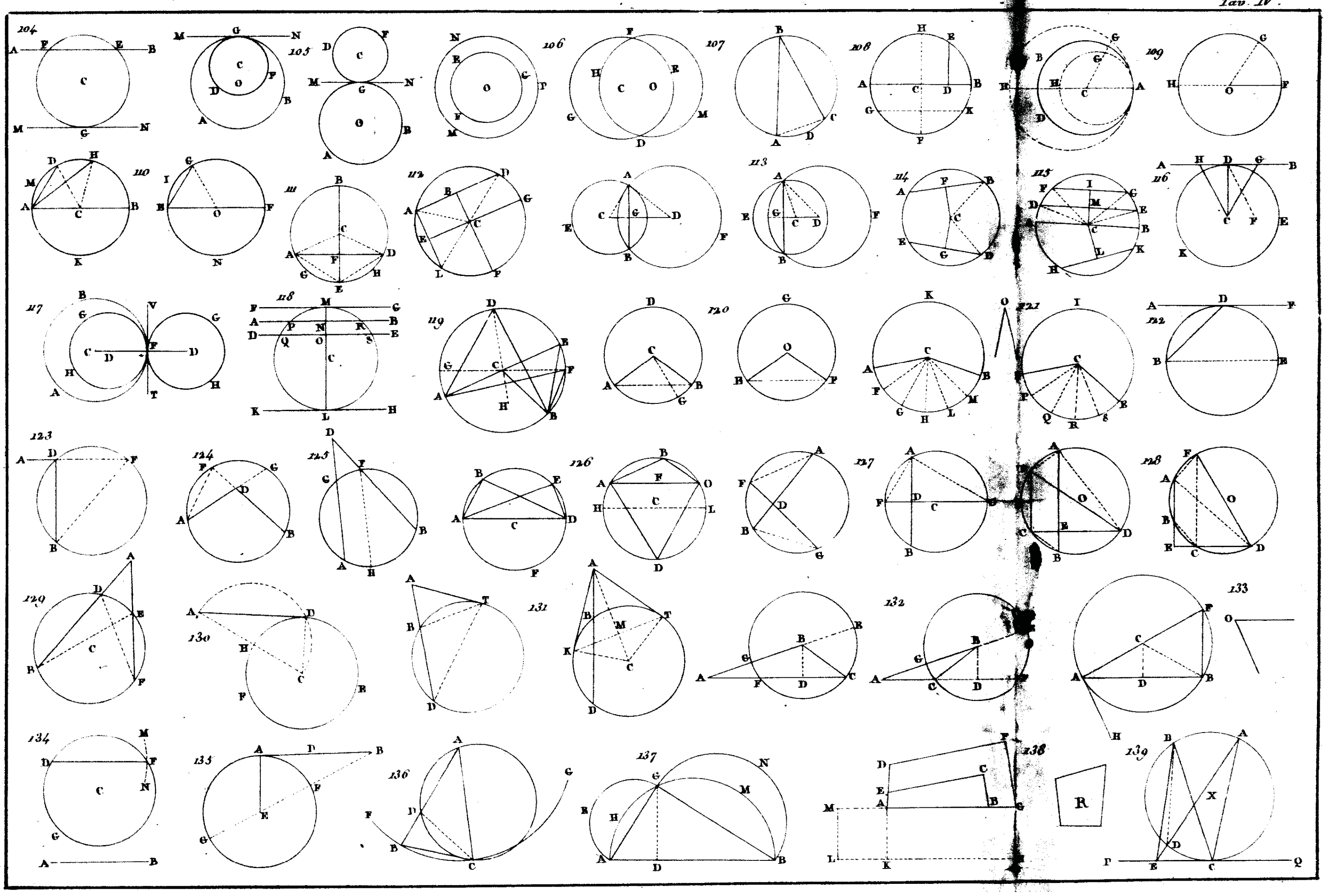
Tav. II.



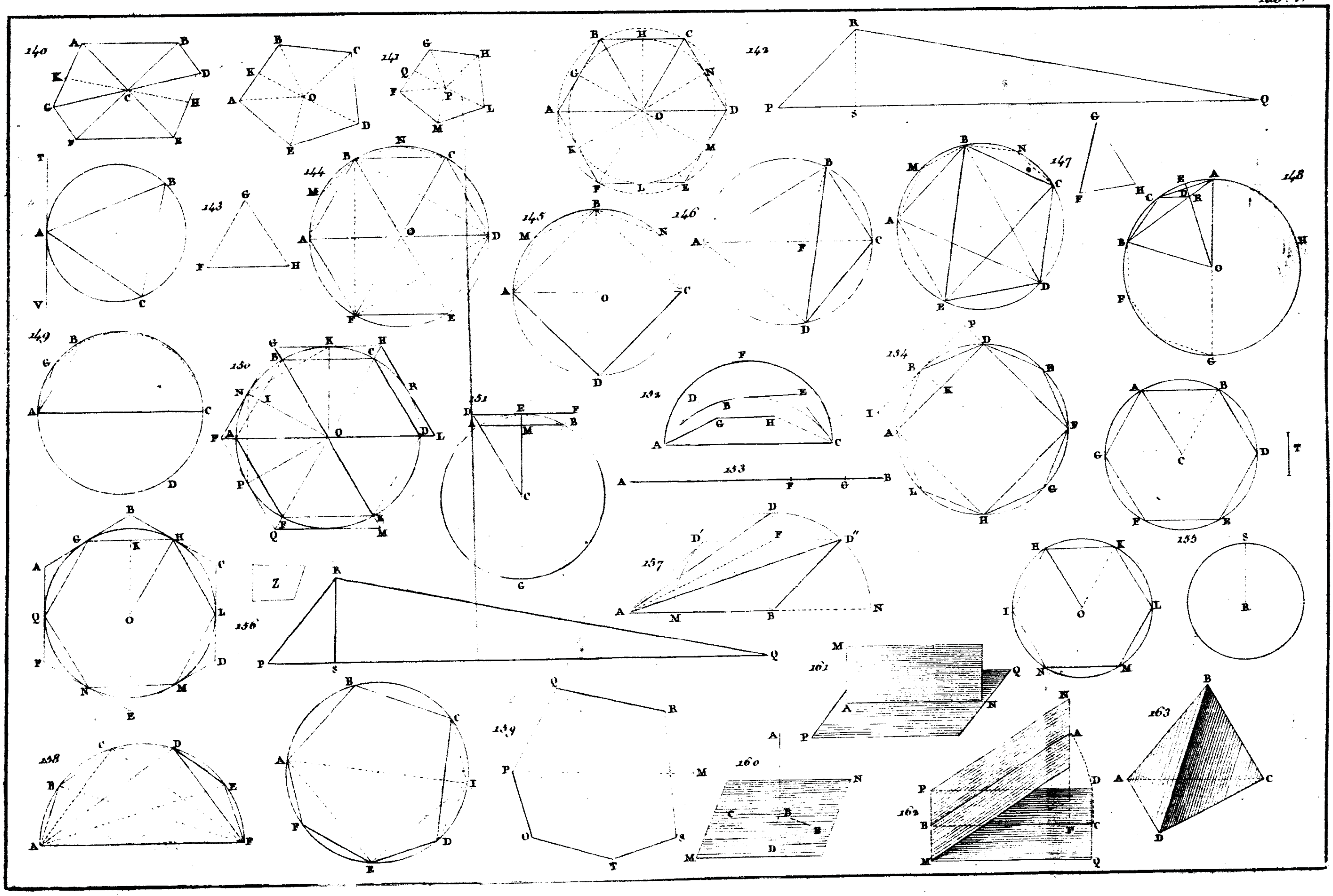
Tav. III



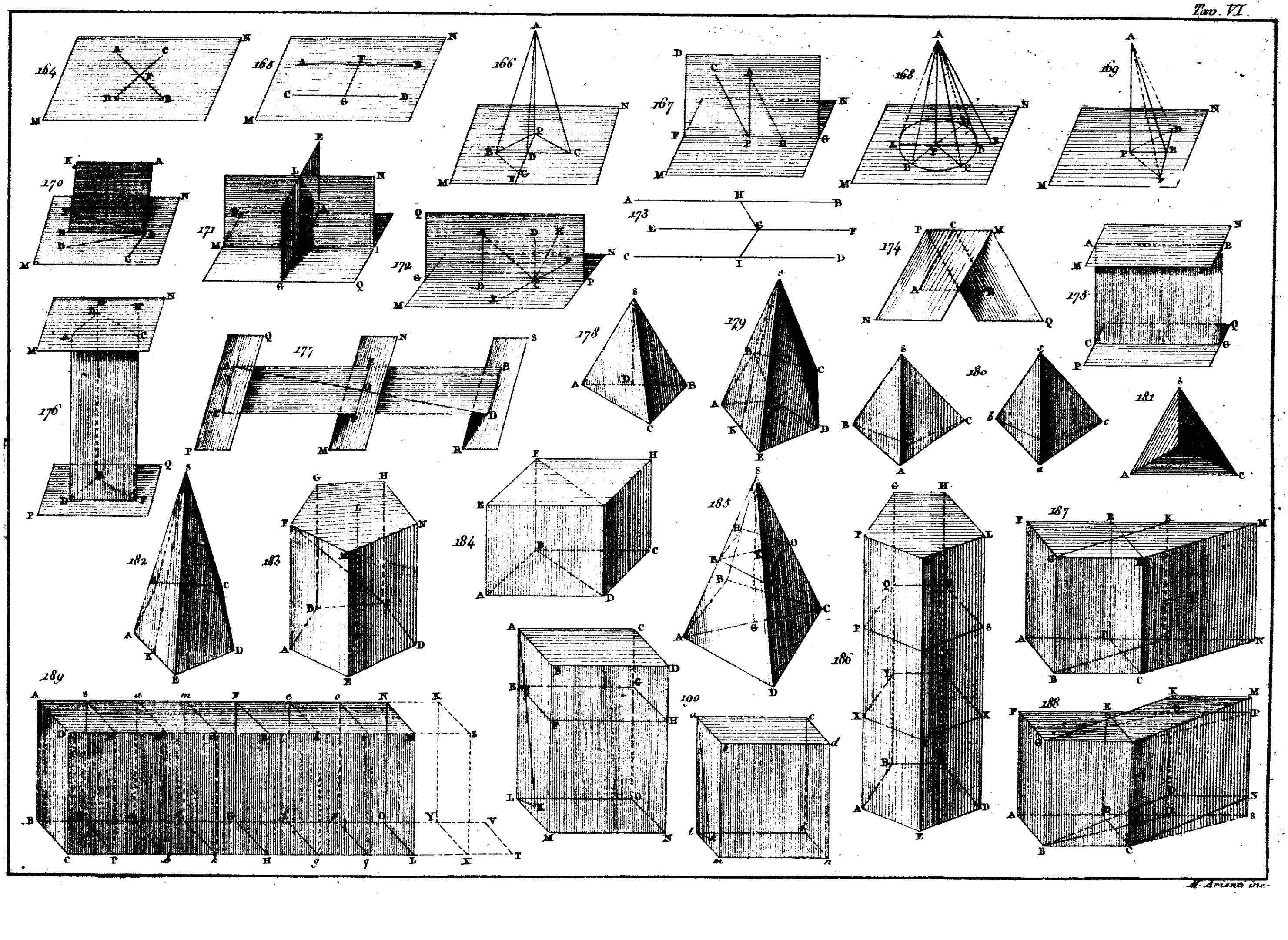
Tav. IV



Tav. V.

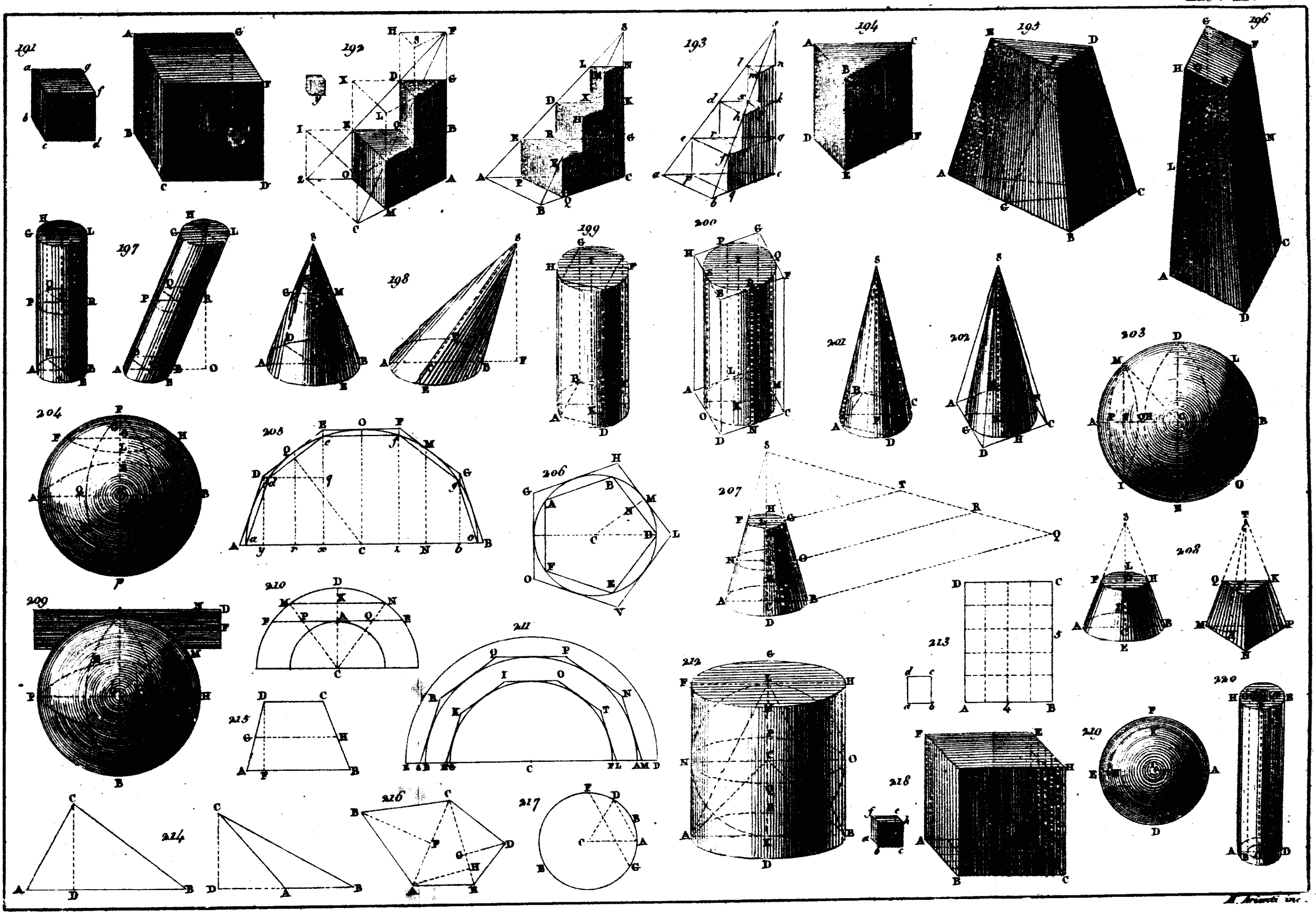


Tav. VI.



M. Arienti inc.

Tav. VII.



A. Arienti inc.

Tav. VIII.