ELEMENTI
DI
MATEMATICA PURA

AD USO
DELLE UNIVERSITA', E LICEI
DEL REGNO LOMBARDO VENETO

DI
GIOVANNI GORINI
DOTTORE IN FILOSOFIA E MATEMATICA
P. S. DI MATEMATICA PURA
NELL' IMP. R. UNIVERSITA' DI PAVIA.

VOLUME PRIMO
CONTENENTE L' ALGEBRA.

EDIZIONE SECONDA MIGLIORATA.

PAVIA
DALLA TIPOGRAFIA DI PIETRO BIZZONI
1824.

AVVERTIMENTO.

Tutti quei paragrafi che in quest' Opera sono stampati in carattere minuto possono ommettersi da chi bramasse di fare un corso puramente elementare.

PREFAZIONE.

Convinto, e per l' autorità di sommi scrittori, e per la lunga esperienza da me fatta nell' arte d' insegnare, che il buon successo di qualunque siasi liberale istituzione dipende in gran parte dalla maniera chiara colla quale si porgono i primi ammaestramenti, mi sono determinato a pubblicare questi Elementi destinati unicamente ad iniziare nello studio delle Matematiche quei Giovani, che di già posseggono le prime regole della comune Aritmetica.

Ho diviso quest' opera in due volumi; nel primo stanno scritti gli Elementi dell' Algebra, quali furono da me pubblicati nel 1816, ridotti però a miglior lezione, mediante alcune utili variazioni; nel secondo poi sono contenuti gli Elementi della Geometria piana e solida, quelli della Trigonometria rettilinea, ed i principj delle Sezioni Coniche.

Ho posto in opera ogni cura per non perdere di mira lo scopo principale che mi sono proposto; a tal fine ho distribuito nell' ordine il più naturale e conveniente, e con la maggiore possibile chiarezza ho estese le diverse materie, e coll' aggiunta di molti esempj, e di alcune pratiche applicazioni mi sono studiato d' instruire fondatamente la gioventù coltivatrice delle utili scienze, e di allettarla nel tempo stesso, onde dedicare si voglia con alacrità d' animo, e con una perseverante indefessa occupazione allo studio di questa, che per la sua utilità tiene un posto cotanto eminente nella classe delle scientifiche discipline.

Nello scrivere questi Elementi mi sono giovato delle opere dei migliori Autori sì antichi che moderni, e particolarmente di quelle dell' Euclide, dell' Eulero, del Paoli, del Ruffini, del Bossut, del Lacroix, del Legendre, del Simson, e del Giannini; ciascuno perciò vi riconosca ciò che gli appartiene, paghi essendo i miei voti quand' anche del mio null' altro rimanesse, che la scelta dei metodi, l' ordine delle materie, e la chiara loro esposizione.

ELEMENTI DI ALGEBRA.

CAPITOLO I.

Prime nozioni e convenzioni.

1. Si chiama *quantità* o *grandezza* tutto ciò che è suscettibile di accrescimento o diminuzione, secondo una determinata legge qualunque, o tutto ciò di cui si può concepire o assegnare il doppio, o la metà, il triplo o la terza parte, in generale un suo multiplo o summultiplo qualunque.

Così i numeri, il tempo, il peso, la velocità sono quantità, perchè si può concepire che i numeri, il tempo, il peso, la velocità vadano continuamente crescendo o diminuendo secondo qualsivoglia rapporto.

Non si può dire lo stesso delle affezioni morali, come sarebbero l'attenzione, la diligenza, la generosità, e simili, poichè quantunque vi sia un'attenzione, una diligenza, una generosità maggiore di un'altra, non si può concepire che una sia doppia, tripla, la metà, la terza parte di un'altra, in generale non si possono nè assegnare nè concepire i gradi di loro accrescimento o diminuzione, per lo che esse non possono annoverarsi fra le quantità.

2. Dalle diverse specie di quantità che esistono hanno avuto origine le diverse parti delle Matematiche, ciascuna delle quali si aggira nella contemplazione di una specie particolare di grandezza.

3. Le Matematiche in generale sono la scienza delle quantità, o per meglio dire la scienza che insegna a misurarle: esse si dividono in Matematiche pure ed in Matematiche miste.

Le Matematiche pure comprendono 1.° l'Aritmetica o l'arte di contare, 2.° l'Algebra, ossia la scienza del calcolo delle grandezze in generale, 3.° la Geometria, che insegna a misurare l'estensione, 4.° finalmente la Geometria mista, una combinazione cioè della Geometria coll'Algebra.

Nel numero delle Matematiche miste sono la Meccanica, ossia la scienza dell'equilibrio e del moto dei corpi solidi, l'Idraulica che considera l'equilibrio ed il moto dei fluidi, l'Astronomia che riguarda il moto dei corpi celesti, l'Ottica, ossia la teorica dei fenomeni della luce, l'Acustica, ossia la teorica del suono, ecc.

4. L'unico mezzo di misurare una quantità qualunque si è quello di riguardare come cognita e fissa un'altra quantità della medesima specie, e determinare il rapporto tra questa e quella. Così, se si vorrà determinare la grandezza di una somma di danaro, si considererà come conosciuto uno zecchino, uno scudo, o qualunque altra moneta, e s'indicherà quanti di questi pezzi sono contenuti in quella data somma. Così pure, se avremo da determinare una distanza, ci serviremo di una lunghezza cognita, come sarebbe la tesa, il braccio, o il piede, ed a quella paragoneremo la distanza da misurarsi. Lo stesso dicasi dei pesi, degli spazj, delle velocità, ecc.

Questa quantità che può essere fissata ad arbitrio, ed a cui si riferiscono tutte le altre della medesima specie si chiama *unità di misura* o *unità di confronto*.

Dell' Algebra.

5. L'Algebra, come si è detto, è la scienza del calcolo delle quantità considerate generalmente. L'etimologia del suo nome non è peranche determinata, quantunque a tale proposito si sieno dette e scritte molte cose (Enciclop. Metodica pag. 52.). Abbracciando questa scienza tutto ciò che può aver luogo nella dottrina delle quantità, si è da alcuni con giusta ragione chiamata col nome di *aritmetica universale.*

6. L'Algebra fa sopra le grandezze considerate generalmente delle operazioni analoghe a quelle che l'Aritmetica fa sopra i numeri, impiegando dei caratteri che sono generali ed indipendenti da qualsivoglia significazione particolare, e capaci di rappresentare ogni sorta di numeri, secondo la natura delle quistioni, alle quali vengono applicati.

Le lettere dell'alfabeto prese isolatamente formano i diversi nomi con cui l'algebra denomina le quantità: si serve anche delle cifre arabe per alcuni nomi particolari. Non significando le lettere alcun numero particolare, le soluzioni dei problemi che si ottengono coll'Algebra sono generali e comprendono tutti i casi possibili, laddove l'Aritmetica considerando un sol caso particolare, per ogni simile caso, conviene che faccia un nuovo calcolo. Inoltre fatta un' operazione sulle cifre numeriche, non rimane più alcun segno di questa operazione, mentre le lettere conservano sempre la traccia delle operazioni che si sono eseguite, per lo che facilmente si possono ricavare dei metodi che insegnano ad ottenere l'intento con operazioni più semplici di quelle portate dalla regola generale. Questo vantag-

gio è così grande, che l'Algebra si rende capace di operazioni complicatissime, alle quali non è in alcun modo permesso di giungere colla comune Aritmetica.

7. Le quantità si distinguono in *successive* e *permanenti*. Successive sono quelle per la cui esistenza abbisogna un certo dato tempo nel quale le parti succedonsi le une alle altre. Permanenti sono quelle le di cui parti esistono tutte nel medesimo tempo. Le permanenti poi si dividono in quantità *discrete* ed in quantità *continue*. Sono discrete quelle quantità, le di cui parti si considerano tra di loro disgiunte: cinque braccia, per esempio è una quantità discreta, poichè si considera, come divisa attualmente in cinque parti, ciascuna delle quali è un braccio. L'ampiezza di un campo non diviso in alcun luogo, ci somministra un esempio di una quantità continua.

8. Le quantità sono *intere* o *frazionarie*; *positive* o *negative*.

L'unità di confronto o l'aggregato di varie di queste unità dicesi *quantità intera*. Una o più parti di una unità stata divisa in un numero qualunque di parti eguali, dicesi *quantità frazionaria*.

Le quantità sono esseri astratti, e la loro proprietà essenziale e caratteristica si è l'aumento o la diminuzione a cui vanno o possono andar soggette. Il modo loro di esistere non dipende dalla loro natura, ma bensì dalla mente umana, che le considera sotto diversi aspetti, i quali certe volte diventano fra di loro direttamente contrarj.

Una lira è sempre una lira, sia ch' io la possegga effettivamente, sia che mi manchi, sia che mi si debba da qualcheduno, ovvero ch' io gliela debba; io non considero nella lira che una quantità o valore, che potrebbe crescere o scemare diventando, per esempio, doppio, triplo, quadruplo, ecc. la metà, un terzo, un quarto, ecc. Così lo spazio di uno o più miglia è sempre uno spazio aumentabile, o diminuibile, sia che si misuri dal Sud al Nord, o dal Nord al Sud, o in qualunque altra direzione. Una forza è sempre una vera quantità, o sia che essa spinga un corpo in una direzione, o in un'altra qualunque. E così d'ogni altra quantità.

Ma se vorremo considerare le quantità non solo per rapporto al loro *quanto* ovvero *grandezza*, ma anche per rapporto ad altre, il cui modo di esistere si oppone alle prime, avremo l'idea di quantità *contrarie*. Per esempio, Pietro deve a Paolo due lire, e Paolo dal suo lato ne deve due a Pietro, i due rispettivi debiti sono in opposizione diretta, e si collidono. Inoltre ciò che è debito di Pietro verso Paolo, è credito di Paolo verso Pietro, e viceversa. È dunque in nostro arbitrio di chiamare *credito* ciò che si deve a Pietro, ed allora ciò che questi deve a Paolo si chiamerà *debito*. Ma se questo secondo si vorrà chiamar credito di Paolo, quello di Pietro sarà *debito*. Ciò dunque che si debbono, o che si danno reciprocamente due persone, formano due quantità contrarie; denominata una di esse a nostro arbitrio *quantità positiva*, alla sua opposta o contraria si dà il nome di quantità *negativa*. Dunque se si vorrà prendere per quantità *positiva* il credito di Pietro, il debito del medesimo, ossia il credito di Paolo sarà una quantità *negativa*; e viceversa. Considerato il credito di Pietro quale quantità *positiva*, se questo supererà il suo debito, o credito di Paolo, fatti i conti, a Pietro rimarrà una quantità *positiva*; se il suo credito sarà minore del suo debito, gli rimarrà una quan-

tità in senso contrario o *negativa*. Se finalmente il credito di Pietro eguaglierà il suo debito, o credito di Paolo, cesserà ogni credito e debito reciproco, e nulla sarà la rimanenza sì in un senso che nel senso contrario. Si vede quindi che lo zero è il punto, per così esprimersi, da cui si parte, per separare le quantità *contrarie*, cioè le *positive* dalle *negative*.

9. Comunemente colle prime lettere dell'alfabeto l'Algebra denota le quantità che si conoscono, e colle ultime quelle che non si conoscono. Quando in un calcolo si sono impiegate tutte le lettere del nostro alfabeto, si ricorre alle lettere dell'alfabeto greco, oppure si impiegano le nostre lettere contrassegnate con degli apici. Mediante questi caratteri, l'Algebra forma un linguaggio tutto proprio: e lo rendono preciso, chiaro, e spedito le seguenti altre convenzioni.

10. Il segno $+$, che si legge *più*, posto fra due quantità è il carattere della loro addizione o sommazione, così $a + b$, vuol dire che alla quantità a si deve aggiungere la quantià b.

Il segno $-$, che pronunciasi *meno* frapposto tra due quantità dinota la sottrazione della quantità cui sta avanti, dalla prima; così $a - b$, vuol dire, che la quantità b deve essere levata dalla quantità a.

Il segno $\times$, che si pronuncia *moltiplicato*, indica la moltiplicazione delle due quantità cui è frapposto: così $a \times b$ vuol dire, che la quantità a deve essere moltiplicata per la quantità b. Alle volte a questo segno si sostituisce un semplice punto, come $a . b$, ed anche questo si sopprime, bastando lo scrivere le quantità da moltiplicarsi di seguito le une alle altre senza segno alcuno come ab.

L'espressione $\frac{a}{b}$, oppure $a:b$, e che si pronuncia *a diviso per b*, indica la divisione della quantità a per la quantità b.

Per denotare l'eguaglianza di due quantità si usa il segno $=$; così $a = b$, vuol dire, che la quantità a è eguale alla quantità b.

La maggioranza di a rispetto alla quantità b, si scrive in questo modo $a > b$, e la sua minoranza rispetto alla stessa quantità b si denota $a < b$, pronunciando nel primo caso a maggiore di b, e nel secondo a minore di b.

Per indicare finalmente la differenza tra due quantità delle quali non si conosca la maggiore si adopera il segno $\backsim$: così $a \backsim b$, indicherà che tra a e b vi è una differenza, senza precisare quale di esse sia la maggiore o la minore.

11. Le quantità che sono sotto un segno solo, si dicono quantità *monomie*, *semplici*, o *incomplesse*. Una quantità monomia si chiama anche col nome di *termine*.

Le quantità composte di due termini si dicono *binomie*; *trinomie* sono quelle composte di tre termini; *quadrinomie* quelle di quattro; *quinquinomie* quelle di cinque, e così di seguito. In generale poi si chiamano *polinomie*, o *complesse* le quantità che sono composte da un numero qualunque di termini.

Del coefficiente e dell' esponente.

12. Il *coefficiente* è quella cifra numerica che si pone innanzi ad una quantità per denotare quante volte essa deve essere ripetuta positivamente o negativamente; così $2a$ è l'espressione abbreviata di $+a+a$, $-3b$ è quella di $-b-b-b$: nel primo caso il numero 2 è il coefficiente di a, nel secondo caso il numero -3 è il coefficiente di b. Il primo coefficiente fa vedere che la quantità a deve essere presa due volte col segno positivo, ed il secondo dinota che la quantità b deve essere presa tre volte col segno che esso si trova avere, cioè col segno negativo.

L' esponente è ordinariamente una cifra numerica, che si mette a destra della quantità, un poco elevata sopra di essa, la quale indica quante volte la quantità a cui è soprapposta entra nel calcolo come fattore: così invece di scrivere $a \times a$, si scriverà a^2, che si pronuncia *a due*, *a innalzata alla seconda potenza*, o *al quadrato*. Invece di $a \times a \times a$, a^3, e si pronuncia *a innalzata alla terza potenza*, *a innalzata al cubo*, o più semplicemente *a tre*, ecc.

Tanto il coefficiente, quanto l' esponente sono vantaggiosissimi per rendere il calcolo breve, e spedito.

Ogni quantità ha il suo segno, il suo coefficiente, ed il suo esponente. In principio di una espressione algebrica, quando il primo termine è positivo, per brevità si tralascia di scrivervi il segno: come pure si tralascia di scrivere il coefficiente, o l' esponente di qualunque quantità, quando esso non è che l' unità.

Avvertasi bene di non confondere il coefficiente coll' esponente, il primo denota una somma; ed il secondo una moltiplicazione. Si abbiano, per esempio, le due espressioni $3a$, ed a^3. La prima di esse ossia $3a=a+a+a$: la seconda, o $a^3=a \times a \times a$, e supponendo $a=10$; si avrà sostituendo il suo valore in luogo di a in quelle due espressioni 3×10

$=10+10+10=30$, $10^3=10\times10\times10=1000$. Secondo questa supposizione, si ha $3a=30$, ed $a^3=1000$, quantità assai diverse.

13. Dalla somma degli esponenti che hanno le lettere contenute in un monomio intero si desume il numero delle dimensioni del monomio istesso.

Il numero delle dimensioni di un monomio frazionario si ha dalla differenza tra le somme degli esponenti delle quantità che formano i due termini della frazione: così $3\,m\,n^2$ è di tre dimensioni: $4\,a^2\,b^3\,x$ è di sei dimensioni:

$$\frac{5\,m\,n^3}{p\,q^2}$$ è di una dimensione:

$$\frac{7\,a\,b^2}{5\,p^4}$$ è di meno una dimensione.

14. È omogeneo quel polinomio, il quale ha tutti i suoi termini dotati dello stesso numero di dimensioni: così $3\,x^2-\frac{a\,b^3}{c^2}+f^2$ è un polinomio omogeneo di due dimensioni.

15. Diconsi simili quei termini, che sono composti di un egual numero di lettere eguali con eguali esponenti, nulla importando la diversità del segno, e del coefficiente: così $3a$, $2a$, $-5a$, sono termini simili: $3a^2\,b$, $-4a^2\,b$, $5a^2\,b$ sono pure termini tra di loro simili, ecc.: sono poi eguali quei termini che oltre all'essere simili hanno anche lo stesso coefficiente.

CAPITOLO II.

Delle prime quattro operazioni algebriche.

Sommazione.

16. La *sommazione* o *addizione* è quella operazione mediante la quale si cerca l'aggregato di varie date quantità. Queste quantità separate si chiamano *parti*, e ciò che si ottiene dicesi *somma* o *risultamento*.

L'addizione algebrica non è, propriamente parlando, che una riduzione, nè ha altro ufficio fuori che quello di raccogliere tutte le quantità coi segni che si trovano avere, riunendo in un termine solo le quantità simili.

17. Tre casi si possono dare nella riduzione: 1.° quando i termini simili sono tutti positivi: 2.° quando i termini simili sono tutti negativi: 3.° quando sono in parte positivi, ed in parte negativi.

Quando i termini simili sono tutti positivi si sommano tutti i loro coefficienti, ed il risultamento di questa sommazione forma il coefficiente del termine ridotto, al quale si antepone il segno +, segno appartenente alle quantità positive.

Lo stesso si fa quando tutti i segni sono negativi, avendo solo riguardo di porre il segno negativo avanti al termine risultante. Quando poi i termini simili sono in parte positivi ed in parte negativi, in allora si sommano i coefficienti dei termini positivi da una parte, e dall'altra tutti i coefficienti dei termini negativi; indi dal coefficiente maggiore, si leva il *minore, e si scrive il termine risultante con un coefficiente eguale alla differenza dei due trovati coefficienti, con quel segno che trovasi avere il termine dotato del maggiore di questi coefficienti. Se poi nella riduzione da farsi, si presentassero dei termini eguali con segni opposti, si cancelleranno a dirittura dal calcolo, giacchè una quantità positiva ne distrugge una negativa della stessa grandezza.*

18. In Algebra non acquistando i termini alcun valore dal luogo che occupano, è indifferente lo scrivere prima un termine che l' altro. Si ama però di conservare l' ordine alfabetico nello scrivere le lettere di un termine qualunque, per così facilitare la ricognizione dei termini simili.

19. Da quanto si è detto, è chiaro, che in Algebra la parola *aggiungere*, non significa sempre *aumentare*. Quando si aggiunge un credito ad un credito si aumenta il credito: parimente quando si aggiunge ad un debito un altro debito si aumenta il debito; ma quando si unisce un credito con un debito, si diminuisce realmente e l' una e l' altra quantità.

20. *Esemp.* I. Si abbia da sommare la quantità $7a+8b+4c$, con $3a-5b-3c+2d$. Disponiamo queste due espressioni in modo tale che le quantità simili sieno le une sotto alle altre, come segue

$$\begin{array}{lrrrr} & 7a & +8b & +4c & \\ & 3a & -5b & -3c & +2d \\ \hline \text{Risultamento} & 10a & +3b & +\ \ c & +2d. \end{array}$$

21. II. Si debbano sommare le quantità $5a+10bc+6cd+8x$, $3a+4bc-6x$, $2bc+6cd-4x$. Disponendo sarà

$$\begin{array}{lrrrr} & 5a & +10bc & +6cd & +8x \\ & 3a & +\ 4bc & & -6x \\ & & 2bc & +\ 6cd & -4x \\ \hline \text{Risultamento} & 8a & +16bc & +12cd & -2x. \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrrrrr} 22.\ \text{III.} & 6a & -2b & +5c & -8d & +6h & & \\ & -5a & +7b & -3c & & -4h & -3k & \\ & -3a & -5b & & +8d & +2h & & +2m \\ \hline \text{Risultamento} & -2a & & +2c & & +4h & -3k & +2m \end{array}$$

Sottrazione.

23. La sottrazione è quell' operazione mediante la quale si ottiene la differenza che passa fra due date quantità, la prima delle quali si denomina *diminuendo*, e la seconda *diminutore*. Dicesi *residuo* poi la differenza che ne risulta.

24. *Si eseguisce la sottrazione aggiungendo al diminuendo le quantità contenute nel diminutore con segni opposti, e facendo indi la riduzione, se ha luogo.*

Anche qui è facile il vedere, che sottrarre in Algebra non porta sempre come in Aritmetica la diminuzione della quantità che soggiace alla sottrazione, anzi alle volte tale quantità per mezzo della sottrazione si accresce, come succede nel caso, che ad uno che abbia un credito si sottragga, o si tolga un debito.

25. *Esemp.* I. Dall' espressione $6a+8b-3c$ si vuol sottrarre $5a-3b-c$: si avrà, eseguito il cangiamento dei segni nel sottrattore, ed ordinate le quantità.

Diminuendo $6a + 8b - 3c$

Diminutore $\underline{-5a + 3b + c}$ coi segni cangiati

Residuo $a + 11b - 2c$.

26. II. Da $5x - 3m^2 + 8r + n^3$ sottrarre $7x - 7m^2 - 5r + y^2$, cangiando i segni al sottrattore ed ordinando, si avrà

$$\begin{array}{l} 5x - 3m^2 + 8r + n^3 \\ \underline{-7x + 7m^2 + 5r \quad - y^2} \\ -2x + 4m^2 + 13r + n^3 - y^2. \end{array}$$

27. La prova di questa operazione si fa, come nell' Aritmetica, aggiungendo al residuo il diminutore, per il che fatta la riduzione opportuna, si torna ad avere di nuovo il diminuendo, come è facile di vedere.

28. *Esemp.* I. Si debba dalla quantità a levare la quantità b. Secondo ciò che si è detto, si avrà per residuo $a - b$. Per fare la prova, onde vedere, se questa operazione è eseguita a dovere, al residuo $a - b$, si aggiunga il diminutore b, e si avrà $a - b + b = a$, che non è altro fuorchè il proposto diminuendo.

29. II. Dalla quantità a, si leva la quantità $-b$, scrivendo accanto della stessa questa seconda quantità col segno cangiato: per il che il residuo sarà $a + b$. Unito a questo residuo il diminutore $-b$, si avrà $a + b - b = a$, che altro non è che il diminuendo, come si doveva trovare.

Della moltiplicazione.

30. La moltiplicazione è quella operazione, colla quale si ripete una data quantità quanto è indicato, da un' altra quantità qualunque.

La quantità da moltiplicarsi chiamasi *moltiplicando*, quella per cui si moltiplica dicesi *moltiplicatore*, ed ambedue queste quantità con comune vocabolo si nominano i *fattori* della moltiplicazione, e ciò che si ottiene, il *prodotto*.

31. Egli è facile vedere che ogni termine algebrico è composto da quattro differenti parti, che sono il segno, il coefficiente, le lettere, e gli esponenti che queste lettere si trovano avere.

Si renderà facile qualunque moltiplicazione, quando saranno conosciute le regole particolari per tutte le parti componenti i termini algebrici.

Regola pei segni.

32. *I fattori che hanno segni eguali danno sempre un prodotto positivo: quelli che hanno segni diseguali lo danno negativo*: si hanno quindi le seguenti quattro combinazioni:

$$\begin{array}{l} + \times + = + \\ - \times - = + \\ + \times - = - \\ - \times + = - \end{array}$$

ben inteso che questa moltiplicazione non si riferisce ai segni, ma bensì alle quantità affette da questi segni medesimi. La dimostrazione della verità di questa regola sarà data più avanti.

Regola per le lettere.

33. *Le lettere diverse, come si è detto* (10), *intendonsi moltiplicate quando esse sono scritte di seguito senza segno intermedio*: così $ab \times cd = abcd$.

Regola pei coefficienti.

34. *I coefficienti essendo ordinariamente numeri si moltiplicano insieme come nell' Aritmetica, ed il loro prodotto è il coefficiente del prodotto algebrico*: così $3m \times 4p = 12mp$. Anche di questa regola si darà la dimostrazione a suo tempo.

Regola per gli esponenti.

35. *Quando s' incontra la stessa lettera nei diversi fattori di una moltiplicazione da eseguirsi si scrive questa lettera nel prodotto una sola volta con un esponente eguale alla somma dei singoli esponenti* (12). Così

$$a^2 \times a^5 = a^{2+5} = a^7\ ;\quad a^3b^3 \times ab^2c = a^4b^5c.$$

Alle volte gli esponenti delle quantità non sono numeri, ma lettere: anche in questo caso si moltiplicano le quantità simili fra di loro, facendo la somma algebrica dei rispettivi esponenti.

Così $\quad a^m b^n p^3 \times a^n b^m p^q r = a^{m+n} b^{m+n} p^{q+3} r.$

Moltiplicazione de' monomj.

36. *Per moltiplicare un monomio per un altro monomio, basterà per le quattro parti componenti*

ciascun monomio osservare le regole superiormente indicate, avendo riguardo di ragionare egualmente sulle parti sott' intese, come se realmente vi fossero.

37. *Esemp.* I. Moltip.° $5ab$ — II. Moltip.° $-5ab$.

Moltiplicatore $3cd$ — Moltip.° $3ac$.

Prodotto $15abcd$ — $-15a^2bc$.

III. $-3ab^3c^m$ — IV. $-15a^2b^3c^4$

$-2a^nbcd$ — a^3b^mcf

$6a^{n+1}b^4c^{m+1}d$ — $-15a^5b^{m+3}c^5f$.

Moltiplicazione de' polinomj pei monomj.

38. *Onde moltiplicare un polinomio per un monomio si moltiplicheranno tutti i termini del polinomio moltiplicando per il monomio moltiplicatore, osservando le regole sopra indicate: la somma dei prodotti parziali sarà il prodotto totale cercato.*

39. *Esemp.* I. Moltip.° $-5a^4b + 3ab^3c - 8abc^5r$

Moltiplicatore $-3a^2bc$

Prodotto $15a^6b^2c - 9a^3b^4c^2 + 24a^3b^2c^6r$.

40. II. Moltiplicando $3a^3b^n - 5a^2c - 3a^mb$

Moltiplicatore $-2abc^3$

Prodotto $-6a^4b^{n+1}c^3 + 10a^3bc^4 + 6a^{m+1}b^2c^3$.

41. Ora che si è insegnato la maniera di moltiplicare i polinomj per i monomj, prima di passar oltre si darà la ragione promessa al (32) sulla mol-

tiplicazione delle quantità riguardo ai segni, da cui sono precedute.

È chiaro che due quantità positive moltiplicate fra loro danno un prodotto positivo: è del pari manifesto, che una quantità positiva presa un certo numero di volte negativamente, oppure una quantità negativa presa un numero qualunque di volte positivamente, deve dare un prodotto negativo: così $-a \times +b = -ab$, non facendo con ciò che prendere la quantità a negativa un numero b di volte; così pure sarà $a \times -b = -ab$.

Per dimostrare ora che una quantità negativa moltiplicata per un'altra quantità del pari negativa dà un prodotto positivo, si moltiplichi $a-a$, ossia zero, per $-b$. Il prodotto risultante da questa moltiplicazione deve essere necessariamente zero, onde si avrà $(a-a) \times -b = 0$.

Ora sapendo che $a \times -b = -ab$, conviene che l'altro prodotto parziale cioè $-a \times -b$ dia $+ab$, perchè il prodotto totale divenga $-ab+ab=0$, altrimenti questo prodotto non sarebbe zero, come deve essere.

Moltiplicazione dei polinomj per polinomj.

42. *Il prodotto di un polinomio per un altro polinomio si ottiene eseguendo i prodotti parziali del moltiplicando per ciascun termine del moltiplicatore, facendo indi le opportune riduzioni, se esse hanno luogo.*

In queste moltiplicazioni sta bene di mettere i termini simili sotto i simili, perchè si rende più facile la riduzione.

43. *Esemp.* I. Sia da moltiplicare la somma $a+b$ di due quantità per la loro differenza $a-b$: si avrà disponendo per la moltiplicazione

Moltiplicando	$a+b$
Moltiplicatore	$a-b$
1.° Prodotto parziale	a^2+ab
2.° Prodotto parziale	$-ab-b^2$
Prodotto totale	$a^2 \quad -b^2$

Si vede quindi che *la somma di due quantità moltiplicata per la loro differenza dà per prodotto la differenza dei quadrati delle due date quantità.*

44. II. Si debbano moltiplicare fra di loro le due quantità $2a-5b-3c$, $a-3b+3c$; dispongasi come segue

Moltiplicando	$2a-5b-3c$
Moltiplicatore	$a-3b+3c$
1.° Prod. parz.	$2a^2-5ab-3ac$
2.° Prod. parz.	$-6ab+15b^2+9bc$
3.° Prod. parz.	$+6ac-15bc-9c^2$
Prodotto totale	$2a^2-11ab+3ac+15b^2-6bc-9c^2$

45. III. Moltiplicando $5m-3n+a^2$

Moltiplicatore $3n-5m+p$

$15mn-9n^2+3a^2n-25m^2-5a^2m+5mp-3np+a^2p$

$+15mn$

P.° $30mn-9n^2+3a^2n-25m^2-5a^2m+5mp-3np+a^2p$.

46. Per dimostrare quanto si è promesso al (34), cioè che il prodotto dei coefficienti si deve fare come in Aritmetica, si osservi, che $3m \times 4p$ è lo stesso che $m+m+m$ da moltiplicarsi per $p+p+p+p$. Si eseguisca ora la moltiplicazione, e si avrà

$$\begin{array}{l} \hline mp+mp+mp \\ mp+mp+mp \\ mp+mp+mp \\ mp+mp+mp \\ \hline \end{array}$$

ossia riducendo $12mp$; come fu già asserito (34).

47. La moltiplicazione delle quantità polinomie alcune volte non si eseguisce, ma soltanto si accenna, ciò che suol farsi in varj modi: 1.° col racchiudere ciascun fattore tra due parentesi, frapponendo tra esse il segno di moltiplicazione, oppure un punto, o nulla: 2.° col soprapporre a ciascun fattore polinomio una lineetta orizzontale, e collocare tra essi uno dei segni di moltiplicazione. La moltiplicazione da eseguirsi dei due polinomj $2a-c$, $4a-5b$, si scriverà in uno dei seguenti modi:

$$(2a-c)\times(4a-5b) \qquad (2a-c).(4a-5b)$$

$$(2a-c)(4a-5b)$$

$$\overline{2a-c}\times\overline{4a-5b} \qquad \overline{2a-c}.\overline{4a-5b}$$

48. Per moltiplicare più quantità tra di loro bisogna incominciare a moltiplicarne due; indi il loro prodotto si moltiplica per la terza, e questo

per la quarta, e così di seguito. Si vede poi facilmente che è indifferente il prendere i fattori in quell' ordine che si vuole.

49. *Esemp.* Sviluppare la seguente espressione $(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$. Sarà

$$\begin{array}{l} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ \quad +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \\ \quad a+b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \\ \quad +a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ \quad a+b \\ \hline a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3 \\ \quad +a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4 \\ \hline a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \end{array}$$

Divisione.

50. La divisione è quell' operazione, mediante la quale si scopre uno dei fattori di un dato prodotto, allorquando è conosciuto l' altro fattore: con questa operazione si distrugge ciò che si è fatto colla moltiplicazione.

Il fattore cognito denominasi *divisore*, l' altra quantità data, che si ravvisa come il prodotto dei due fattori, dicesi *dividendo*, e ciò che si ottiene eseguendo la divisione, si chiama *quoto*.

51. Da quel che si è detto è facile vedere, che il divisore moltiplicato pel quoto deve riprodurre il dividendo, qualora la divisione si sia potuta eseguire esattamente: che se vi fosse rimasto qualche residuo, in allora al prodotto di questi due fattori bisognerebbe aggiungere anche quel residuo per avere il dividendo. Da ciò si vede come la divisione possa servire di prova alla moltiplicazione, e viceversa.

52. Poichè la divisione decompone ciò che la moltiplicazione ha composto, le operazioni, colle quali si trova un quoto, devono essere tali da distruggere rispettivamente quelle che hanno servito per fare un prodotto.

Anche qui prenderemo separatamente in considerazione le regole applicabili per la divisione a ciascuna delle quattro parti componenti ogni termine della divisione da eseguirsi.

Regola pei segni.

53. Incominciando dai segni, dico che *le quantità con segni eguali danno un quoto positivo, e le quantità con segni diversi danno un quoto negativo*, di modo che si avranno le seguenti quattro combinazioni.

$$+ : + = +$$
$$- : - = +$$
$$+ : - = -$$
$$- : + = -$$

In fatti la quantità positiva $a\,b$ divisa per la quantità del pari positiva a dà la quantità b per

quoto, pure positiva, come è manifesto. La quantità negativa poi $-a\,b$ divisa per la quantità del pari negativa $-a$ deve dare per quoto la quantità positiva b, poichè il quoto b moltiplicato pel divisore $-a$ deve produrre il dividendo $-a\,b$, ciò che non si otterrebbe altrimenti. La quantità positiva $a\,b$ divisa per la quantità negativa $-a$ deve dare per quoto la quantità negativa $-b$, poichè questo quoziente moltiplicato pel divisore $-a$ dà appunto $a\,b$, che è il dividendo proposto. Finalmente la quantità negativa $-a\,b$ divisa per la quantità positiva a deve dare per quoto $-b$, poichè $a \times - b = - a\,b$.

Regola per i coefficienti.

54. Siccome il coefficiente del dividendo risulta dal prodotto del coefficiente del divisore per il coefficiente del quoto (51), così *si dovrà il coefficiente del dividendo dividere, appunto come nell' Aritmetica, pel coefficiente del divisore stesso, onde avere il coefficiente del quoto cercato.*

Regola per le lettere.

55. Siccome nella moltiplicazione tutte le lettere del moltiplicatore si scrivono a fianco di quelle del moltiplicando per ottenerne il prodotto, così *nella divisione si toglieranno dal dividendo tutte quelle lettere, che collo stesso esponente sono comuni anche al divisore, e le residue formeranno il quoto.*

Regola per gli esponenti.

56. Quando nel dividendo e nel divisore vi è la stessa lettera con esponenti diversi, per eseguire

la divisione, *dall' esponente che ha la quantità nel dividendo, si leva l' esponente, che la stessa quantità si trova avere nel divisore, e nel quoto si pone tale quantità con l' esponente risultante dalla differenza dei due esponenti dati*: così $a^5 : a^3 = a^{5-3} = a^2$. Infatti $a^5 : a^3 = \frac{a^5}{a^3} = \frac{aaaaa}{aaa} = aa = a^2$.

57. Più facilmente si potrà eseguire una divisione fra due monomj, avendo prima riguardo di scomporre in fattori eguali le quantità del dividendo e del divisore, per sopprimervi indi le quantità comuni: così $3a^3 b^2 : 3 a b^3 x = \frac{3\, a^2\, a\, b^2}{3\, a\, b^2\, b\, x}$; e togliendo ora le quantità 3, a, b^2 che sono comuni al dividendo ed al divisore, si avrà per quoto $\frac{a^2}{bx}$: così pure si avrà

$$\frac{15\, m^3\, n^2\, p^5}{3\, m^2\, n^3\, p^4} = \frac{5 \,.\, 3\, m^2\, m\, n^2\, p^4\, p}{3\, m^2\, n^2\, n\, p^4} = \frac{5\, m\, p}{n}.$$

58. Acciocchè una divisione fra due monomj sia eseguibile esattamente fa d' uopo, 1.° *che il coefficiente del dividendo contenga esattamente il coefficiente del divisore*, 2.° *che il dividendo contenga tutte le lettere, che vi sono nel divisore con esponenti non minori di quelli, che le stesse lettere si trovano avere nel divisore*.

Quando queste condizioni non hanno luogo la divisione non può che indicarsi, ed ordinariamente sotto forma frazionaria; si eseguisce però in parte, quando è possibile.

Divisione de' monomj per monomj.

59. *Per dividere un monomio per un altro monomio basterà, per le quattro parti componenti ciascun monomio, attenersi alle regole superiormente indicate, avendo riguardo di ragionare anche per le parti sott' intese nello stesso modo, che si ragiona per quelle, che vi sono scritte.*

60. *Esemp.* I. Sia da dividere il monomio $15a^2b$ per il monomio $5ab$. Disponendo l'operazione nello stesso modo degli Aritmetici, sarà

Dividendo	$15a^2 b$	$5ab$	Divisore.
	$-15a^2 b$	$3a$	Quoto.
	0		

Per essere i segni tutti e due positivi, anche al quoto scrivo il segno positivo: il coefficiente 5 del divisore sta in quello 15 del dividendo tre volte: dall' esponente 2, che si trova avere la lettera a nel dividendo, levo l' esponente uno, che essa ha nel divisore, per cui al quoto rimane a: la quantità b per essere comune tanto al divisore quanto al dividendo la sopprimo, per il che il quoto che ottengo è $3a$, il quale moltiplicato pel divisore $5ab$, mi dà appunto $15a^2b$, che sottratto dal dividendo non mi lascia alcun residuo, indizio certo che l' operazione è finita.

61. II. Dividendo	$30a^5 b^3$	$6a^2 b$.	Divisore.
	$-30a^5 b^3$	$5a^3 b^2$.	Quoto.
	0		

62. III. Dividendo

$$\begin{array}{r|l} 7a^8bm^nc & 7a^5bm^3 \ \text{Div.}^e \\ \hline -7a^8bm^{n-3+3}c & a^3m^{n-3}c \ \text{Qu.}^o \\ \hline 0 & \end{array}$$

Si vede facilmente che $7a^8bm^nc$ è$=7a^8bm^{n-3+3}c$ poichè fatta la riduzione nell' esponente di m in questa seconda espressione, essa diventa indentica colla prima.

63. IV. Dividendo

$$\begin{array}{l|l} 8a^5b^3cd & 3a^4df. \ \text{Divisore} \\ \hline & \dfrac{8ab^3c}{3f}. \ \text{Quoto.} \end{array}$$

Divisione dei polinomj per i monomj.

64. *Per dividere un polinomio per un monomio, si divida ciascun termine del polinomio dividendo per il monomio divisore, e la somma di tutti i quoti parziali ottenuti formerà il quoto totale cercato.*

65. *Esempio.* Sia da dividersi il polinomio $4a^3x^2-8a^2bx^4-24a^5x^2c$ pel monomio $4a^2x^2$. Si avrà, disponendo ed eseguendo la divisione.

$$\begin{array}{r|l} \text{Div.}^o \ 4a^3x^2-8a^2bx^4-24a^5x^2c & 4a^2x^2 \ \text{Divisore} \\ \hline -4a^3x^2+8a^2bx^4+24a^5x^2c & a-2bx^2-6a^3c \ \text{Q.}^o \\ \hline 0 \qquad\quad 0 \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Dividendo il primo termine dèl dividendo, cioè $4a^3x^2$ pel divisore $4a^2x^2$, si ha per primo quoto parziale a, che si scrive al luogo del quoto; dividendo il secondo termine per lo stesso divisore si ha al quoto $-2bx^2$, ed eseguendo la stessa operazione anche sull' ultimo termine del dividendo, ottiensi al quoto il terzo termine $-6a^3c$. Moltiplicando finalmente il quoto totale pel divisore, e sottraendone il prodotto dal dividendo, non si ha più alcun residuo, come doveva essere.

Della divisione dei polinomj pei polinomj.

66. Prima d' incominciare la divisione di due polinomj tra di loro, bisogna ordinarli. Si dicono ordinati due polinomj secondo una certa data lettera, quando i termini del dividendo, e del divisore sono scritti in modo che gli esponenti di questa lettera sieno sempre decrescenti sino all' esponente più piccolo. Per esempio le due espressioni seguenti

$x^3-2px+4x^4y+2x^2$, $3x^2+x^3-2xy$

ordinate si scriverebbero

$4x^4y+x^3+2x^2-2px$, x^3+3x^2-2xy.

Quest' ordine non solo si deve stabilire nel dato dividendo, e divisore, ma ben anche nei residui successivi che ne risultano, i quali costituiscono altrettanti dividendi.

67. Le seguenti regole dedotte dalle osservazioni fatte intorno alla moltiplicazione servono benissimo a facilitare la divisione.

1.ª *Dopo aver ordinato i due polinomj, si divida il primo termine del dividendo per il primo termine del divisore, e scrivasi nel luogo destinato il quoto di tale divisione.*

2.ª *Si moltiplichi questo quoto per tutto il divisore, ed il suo prodotto si sottragga dal dividendo.*

3.ª *Ordinato il nuovo dividendo, dividasi nuova-*

mente il primo termine di esso per quello del divisore, ed il nuovo quoto si scriva a canto di quello di già ottenuto.

4.ª *Si moltiplichi pel nuovo quoto tutto il divisore, ed il prodotto si sottragga dal dividendo.*

5.ª *Avendosi un nuovo residuo, tornisi ad ordinare, se fa bisongo, a dividere, a moltiplicare ed a sottrarre come sopra, sinchè si arrivi ad un residuo nullo, se è possibile, nel qual caso l' operazione è finita.*

I seguenti esempj rischiareranno quanto si è detto.

68. *Esemp.* I. Sia da dividersi il polinomio $a^2 + 2ab + b^2$, pel polinomio $a + b$. La prima operazione, come si è detto, sarebbe quella di ordinare i due polinomj riguardo ad una delle lettere in essi contenuta: ma osservando che questi polinomj sono di già ordinati per rapporto alla lettera a, non fo che disporli per la divisione.

$$\begin{array}{l|l} \text{Div.}^{\circ} \quad a^2 + 2ab + b^2 & a + b. \text{ Divisore} \\ \quad -a^2 - ab & \\ \hline \qquad\quad ab + b^2 & a + b. \text{ Quoto.} \\ \qquad\; -ab - b^2 & \\ \qquad\quad 0 \quad 0 & \end{array}$$

Dividendo il primo termine a^2 del dividendo pel primo termine a del divisore, ottengo per quoto a che scrivo nel luogo ad esso destinato, moltiplico questo quoto parziale per tutto il divisore, per cui ottengo $a^2 + ab$, che sottratto dal dividendo mi lascia per residuo $ab + b^2$. Dividendo ora il primo termine del nuovo dividendo pel primo termine del divisore, ho per quoto la quantità b. Moltiplicando questo secondo quoto parziale per tutto il divisore $a + b$, ottengo $ab + b^2$, che sottratto dal dividendo non mi lascia più alcun residuo, ciò che fa vedere che l' operazione è finita.

Per verificare se questa divisione è stata ben eseguita, si faccia il prodotto del divisore pel quoto, e si avrà $a^2 + 2ab + b^2$, che è appunto il dividendo, come doveva essere.

69. Se questi stessi polinomj si fossero ordinati invece per rapporto alla lettera b si sarebbe ottenuto lo stesso quoto, ma scritto in ordine inverso, cioè $b + a$, come è facile da verificarsi: da ciò si vede, che è indifferente ordinare i due polinomj per rapporto a quella lettera, che si vuole.

70. Dovendosi il dividendo considerare come un prodotto del divisore e del quoto, è manifesto, che il termine del divisore, ove una data lettera ha l' esponente il più grande, entrerà come fattore nel termine del dividendo, ove essa sale egualmente all' esponente massimo. Quindi ne viene che incominciando l' operazione da questi termini si avrà sicurezza di scoprire tosto una parte del quoto, mentre non attenendosi a questa pratica si arrischierebbe di far molti inutili tentativi col mettersi a dividere una quantità per un' altra non concorsa come fattore alla formazione della prima. Ecco la ragione, per cui si devono ordinare le quantità prima di eseguire la divisione.

71. II. Dividere il polinomio

$$12b^5c^2 - 6b^4c^3 + 8b^2c^5 - 4b^3c^4 + 5b^7 - 22b^6c$$

per $4b^2c^2 + 5b^4 - 2b^3c$.

Ordinati, e disposti questi polinomj per la divisione sarà

$$\begin{array}{l|l}
\text{Div.}^{\circ}\ 5b^7-22b^6c+12b^5c^2-6b^4c^3-4b^3c^4+8b^2c^5 & \\
-5b^7+2b^6c-4b^5c^2 & 5b^4-2b^3c+4b^2c^2.\ \text{D.}^{e} \\
\hline
\text{1.R.}^{\circ}\begin{cases}-20b^6c+8b^5c^2-6b^4c^3 \\ -4b^3c^4+8b^2c^5\end{cases} & b^3-4b^2c+2c^3.\ \text{Quoto} \\
+20b^6c-8b^5c^2+16b^4c^3 & \\
\hline
\text{2.R.}^{\circ}\ 10b^4c^3-4b^3c^4+8b^2c^5 & \\
-10b^4c^3+4b^3c^4-8b^2c^5 & \\
\hline
0 \quad\quad 0 \quad\quad 0 &
\end{array}$$

Dopo di avere ordinati i due polinomj per rapporto alla lettera b ho diviso il primo termine $5b^7$ del dividendo pel primo termine $5b^4$ del divisore, per cui ho ottenuto al quoto b^3. Ho moltiplicato il quoto b^3 per tutto il divisore, e ne ho sottratto il prodotto dal dividendo, per cui fatta la opportuna riduzione, ho ottenuto il primo residuo superiormente indicato. Considerando questo primo residuo come un nuovo dividendo, l' avrei ordinato, se vi fosse stato il bisogno, ma trovandosi egli di già ordinato per rapporto alla medesima lettera b per cui è ordinato anche il divisore, ho continuata la divisione, dividendo il suo primo termine $-20b^6c$ pel primo termine $5b^4$ del divisore, per cui ho ottenuto per secondo termine del quoto la quanità $-4b^2c$. Ho moltiplicato questo quoto parziale per tutto il divisore, ed ho sottratto il prodotto risultante dal secondo dividendo, per cui mi è rimasto il secondo residuo ivi scritto; il quale considerato come un nuovo dividendo ha dato per quoto $2c^3$, che moltiplicato pel divisore, e sottratto

dal dividendo il suo prodotto, non ha lasciato più alcun residuo, ciò che ha fatto vedere che la divisione era ridotta a termine.

Moltiplicando ora il quoto totale ottenuto pel divisore si avrà il dividendo.

72. Succede alle volte che la quantità, per rapporto alla quale si ordina, si trova elevata alla medesima potenza in varj termini sia del dividendo, sia del divisore. In questo caso bisogna mettere nella stessa colonna verticale, oppure scrivere immediatamente quei termini gli uni dopo gli altri, avendo riguardo di ordinarli per rapporto ad un' altra lettera. L' aggregato poi di questi termini si considera come un medesimo tutto, ma ciascun quoto parziale si determina sempre nella maniera ordinaria.

73. *Esempio*. Dividere

$10x^3-19xyz+11x^2y+3xy^2-15x^2z+15yz^2-5y^2z$
per $3xy+5x^2-5yz$.

Ordinando per la divisione, e disponendo le quantità nel modo sopra indicato, si avrà

$$\begin{array}{l|l}
\text{D.}^{\circ}\ 10x^3+11x^2y-15x^2z+3xy^2-19xyz+15yz^2-5y^2z & \\
-10x^3-6x^2y+10xyz & 5x^2+3xy-5yz.\ \text{D.}^{e} \\
\hline
\text{1.R.}^{\circ}\begin{cases}5x^2y+3xy^2+15yz^2-5y^2z \\ -15x^2z-9xyz\end{cases} & 2x+y-3z.\ \text{Quot.} \\
-5x^2y-3xy^2+5y^2z & \\
\hline
\text{2.R.}^{\circ}-15x^2z-9xyz+15yz^2 & \\
15x^2z+9xyz-15yz^2 & \\
\hline
0 \quad\quad 0 \quad\quad 0 &
\end{array}$$

74. Accade pure alle volte, che nella moltiplicazione dei differenti termini del quoziente pel divisore nascono dei termini, che non si trovavano nel dividendo: essi devono essere trattati nello stesso modo, come se fossero termini di già esistenti nel dividendo proposto. Questi termini sono quelli i quali si sono distrutti, allorquando il dividendo si è formato colla moltiplicazione dei due fattori divisore e quoto. Daremo alcuni esempj di queste divisioni.

75. *Es.* I. Si abbia x^3-y^3 da dividere per $x-y$. Sarà ordinando, ed eseguendo la divisione

Divisione.

$$\begin{array}{l|l}
\text{Div.}^{\text{o}}\ x^3-y^3 & x-y \ \text{Div.}^{\text{e}} \\
\quad -x^3+x^2y & \overline{x^2+xy+y^2} \\
\hline
\text{1. Res.}^{\text{o}}\ x^2y-y^3 & \\
\quad -x^2y+xy^2 & \\
\hline
\text{2. Res.}^{\text{o}}\ xy^2-y^3 & \\
\quad -xy^2+y^3 & \\
\hline
\quad 0 \quad 0 &
\end{array}$$

Moltiplicazione.

$$\begin{array}{l}
\text{Moltip.}^{\text{o}}\ x-y \\
\text{Moltip.}^{\text{e}}\ x^2+xy+y^2 \\
\hline
x^3-x^2y \\
\quad +x^2y-xy^2 \\
\qquad +xy^2-y^3 \\
\hline
\text{Prodotto}\ x^3-y^3
\end{array}$$

76. Per ben intendere il meccanismo di questa divisione basta gettare gli occhi sulla moltiplicazione del quoto x^2+xy+y^2 pel divisore $x-y$, ove si vedrà che tutti i termini riprodotti nelle successive divisioni parziali, non sono altro fuori che quelli, che si sono distrutti nel risultato della moltiplicazione.

77. II. Si debba dividere x^4-y^4, per $x-y$. Si avrà eseguendo la divisione.

$$\begin{array}{l|l}
\text{Div.}^{\text{e}}\ x^4-y^4 & x-y.\ \text{Divisore.} \\
\quad -x^4+x^3y & \overline{x^3+x^2y+xy^2+y^3.\ \text{Quoto.}} \\
\hline
\quad x^3y-y^4 & \\
\quad -x^3y+x^2y^2 & \\
\hline
\qquad x^2y^2-y^4 & \\
\qquad -x^2y^2+xy^3 & \\
\hline
\qquad\quad xy^3-y^4 & \\
\qquad\quad -xy^3+y^4 & \\
\hline
\qquad\quad 0 \quad 0 &
\end{array}$$

78. III. Sia da dividere x^5-y^5, per $x-y$. Sarà

$$\begin{array}{l|l}
\text{Div.}^{\text{o}}\ x^5-y^5 & x-y.\ \text{Divisore.} \\
\quad -x^5+x^4y & \overline{x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4.\ \text{Quoto.}} \\
\hline
\quad x^4y-y^5 & \\
\quad -x^4y+x^3y^2 & \\
\hline
\qquad x^3y^2-y^5 & \\
\qquad -x^3y^2+x^2y^3 & \\
\hline
\qquad\quad x^2y^3-y^5 & \\
\qquad\quad -x^2y^3+xy^4 & \\
\hline
\qquad\qquad xy^4-y^5 & \\
\qquad\qquad -xy^4+y^5 & \\
\hline
\qquad\qquad 0 \quad 0 &
\end{array}$$

79. È facile, analizzando i quozienti ottenuti colle superiori divisioni di scoprire la legge, che in essi regna quando si tratta di dividere la differenza di due quantità elevate ambedue ad una stessa potenza per la differenza delle stesse quantità elevate all' unità, onde risparmiare la fatica della divisione, qualora si presentassero simili divisioni da eseguire.

Una legge consimile si troverebbe, dividendo la somma di due quantità elevate ad eguale potenza dispari; per la somma delle quantità semplici; non vi sarebbe altra diversità che i quoti, che si otterrebbero, sarebbero alternativamente positivi, e negativi.

80. Succede alle volte nel fare le divisioni, che nascono sempre dei nuovi termini, per lo che la divisione non finisce mai, ma progredisce con una certa legge, che rendesi manifesta, sino all' infinito.

81. *Esempio*. Sia da dividere a per $1-x$. Si avrà

$$
\begin{array}{l|l}
\text{Dividendo } a & 1-x. \text{ Divisore.} \\
\quad -a+ax & \overline{\phantom{a+ax+ax^2+ax^3+ax^4+\text{ecc.}}} \\
\hline
\quad ax & a+ax+ax^2+ax^3+ax^4+\text{ecc.} \\
\quad -ax+ax^2 & \\
\hline
\qquad ax^2 & \\
\qquad -ax^2+ax^3 & \\
\hline
\qquad\quad ax^3 & \\
\qquad\quad -ax^3+ax^4 & \\
\hline
\qquad\qquad ax^4 & \\
\qquad\qquad -ax^4+ax^5 & \\
\hline
\qquad\qquad\quad ax^5 \text{ ecc.} &
\end{array}
$$

Questa divisione non finisce mai, e progredisce in modo, che ciascun termine è eguale al suo antecedente moltiplicato per x.

Per avere esatta eguaglianza di $\frac{a}{1-x}$ col quoto, fa d' uopo di aggiungere al quoto stesso la quantità $\frac{ax^5}{1-x}$, la quale terrà luogo di tutti gli altri infiniti termini: cosicchè sarà

$$\frac{a}{1-x}=a+ax+ax^2+ax^3+ax^4+\frac{ax^5}{1-x}.$$

82. Qualunque quantità divisa per se stessa è eguale all' unità, come è manifesto. Ciò posto io dico, che una quantità elevata ad una potenza qualunque eguaglia l' unità divisa per la quantità stessa alzata allo stesso esponente, ma col segno cangiato.

83. Abbiasi in primo luogo a^{-m}, dico che essa sarà eguale ad $\frac{1}{a^m}$. Per dimostrare questa proposizione si divida la quantità a^n per la quantità a^{n+m}: in due maniere diverse si può eseguire questa divisione. Impiegando la regola degli esponenti (56), si avrà

$$\frac{a^n}{a^{n+m}}=a^{n-n-m}=a^{-m}.$$

Scomponendo il divisore a^{n+m} ne' suoi due fattori, ed eseguendo la divisione (57), si avrà $\frac{a^n}{a^{n+m}}=\frac{a^n}{a^n\times a^m}=\frac{1}{a^m}$. Ora per essere tanto

a^{-m}, quanto $\frac{1}{a^m}$ due quoti ottenuti da una stessa divisione, saranno quantità eguali, dunque $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, come si era proposto di dimostrare.

84. Abbiasi ora a^m; dico che sarà eguale ad $\frac{1}{a^{-m}}$. Si divida in fatti a^{-n} per a^{-n-m} nei due modi sopra indicati, e si avrà

$\frac{a^{-n}}{a^{-n-m}} = a^{-n+n+m} = a^m$: così pure

$\frac{a^{-n}}{a^{-n-m}} = \frac{a^{-n}}{a^{-n} \times a^{-m}} = \frac{1}{a^{-m}}$, donde paragonando si otterrà $a^m = \frac{1}{a^{-m}}$.

85. Qualunque quantità innalzata a zero eguaglia l'unità; poichè è $\frac{a^m}{a^m} = 1$; ma è anche $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$, perchè $m - m = 0$; dunque confrontando sarà $a^0 = 1$, come si doveva dimostrare.

86. Da qui ne viene, che occorrendo si potrà moltiplicare qualunque quantità per qualunque altra elevata a zero senza punto alterare il suo valore.

87. Qualunque quantità finita divisa per zero è eguale all' infinito.

Nella divisione eseguita al (81), si faccia $x = 1$, e si avrà $\frac{a}{1-1} = a + a + a + a + a +$ ecc. all' infinito. Ma $\frac{a}{1-1} = \frac{a}{0}$, dunque $\frac{a}{0} = \infty$; essendo il segno ∞ il simbolo dell' infinito.

88. Lo zero poi diviso per una quantità qualunque finita dà sempre per quoto zero, ciò che chiaramente apparisce: così $\frac{0}{a} = 0$.

CAPITOLO III.

Della separazione o raccoglimento dei fattori comuni, e della ricerca del massimo comun divisore.

89. Per *separazione*, o *raccoglimento* dei fattori si intende quell' operazione, mediante la quale si torna ad indicare una moltiplicazione di già eseguita, o si scompone un prodotto ne' suoi fattori: questa operazione serve alle volte a facilitare la divisione, ed è di un gran vantaggio nell' applicazione del calcolo algebrico alla soluzione dei problemi.

Si eseguisce la separazione de' fattori col dividere tutti i termini di una data espressione per quel fattore ad essi comune, racchiudendo il quoto totale, ottenuto mediante questa divisione, tra parentesi, e scrivendo fuori di esse come moltiplicatore il comun fattore sopra indicato.

90. Alle volte il fattore non è comune a tutti i termini di una data espressione, ma ad alcuni solamente, in tal caso si separa da quei soli termini che lo contengono.

91. Non si possono assegnare delle regole generali per eseguire il raccoglimento parziale dei fattori, che si trovano alle volte in una data espressione: in varie maniere si giunge a trovare gli stessi fattori comuni: alcune osservazioni però fatte sulla formazione dei prodotti possono facilitare questa importante operazione.

Essendo i prodotti parziali, che si ottengono moltiplicando un polinomio per un altro polinomio, composti tutti di un egual numero di termini, così nella ricerca dei fattori comuni sarà bene dividere il totale dei termini del proposto polinomio in altrettante espressioni, composte tutte di un egual numero di termini, per raccogliervi parzialmente quel fattore comune che vi potesse essere. Siccome poi nell' eseguire le moltiplicazioni hanno luogo alle volte delle riduzioni, così in tale caso non si potranno ritrovare i fattori comuni senza prima rimettere il prodotto nello stato, in cui si trovava prima delle riduzioni stesse.

Alle volte succede che dopo raccolti parzialmente alcuni fattori comuni, se ne incontrino di quelli che sono comuni a tutta l' espressione; in questo caso si raccolgono di nuovo nel modo sopra indicato.

92. Quando si porta fuori un fattor comune parziale, bisogna aver riguardo di portarlo fuori col segno positivo, o col segno negativo, secondo che è necessario, acciocchè le quantità, che rimangono tra le parentesi nei diversi raccoglimenti parziali, nel caso che esse fossero eguali, possano avere anche gli stessi segni, onde assoggettare di nuovo l'espressione ad un altro raccoglimento di fattori, ciò che diversamente non si potrebbe eseguire.

93. *Esemp.* I. Raccogliere i fattori comuni nell' espressione $p^4 - mp^3 + p$.

Dalla ispezione dei termini è facile vedere essere p il solo fattor comune a tutta questa espressione. Fatta la divisione adunque pel fattor comune p, si avrà per quoto $p^3 - mp^2 + 1$; il quale moltiplicato per p dà $p(p^3 - mp^2 + 1)$, quantità che non differisce dalla superiore, che nella forma, essendo di egual valore della medesima.

94. II. Per raccogliere il fattor comune ai termini dell' espressione $abc - ab^2x$, si avrà, operando nel modo sopra indicato, $ab(c - bx)$.

95. III. Sia ora $3a^2bx - 6a^3b^2x^2 - 9a^4b^5x^3y$.

Osservando essere $3a^2bx$ il fattor comune, ed operando nel modo indicato superiormente si otterrà $3a^2bx(1 - 2abx - 3a^2b^4x^2y)$.

96. IV. Raccogliere i fattori parziali nell' espressione $4bx + cx^2 - 3ax + 5by^2 - 10b^2$.

Per eseguire questo raccoglimento osservo, che nei tre primi termini vi è la quantità x per fattor comune, e negli altri due si trova per fattor comune $5b$. Eseguendo si avrà

$$x(4b + cx - 3a) + 5b(y^2 - 2b).$$

97. V. Raccogliere i fattori parziali nell' espressione $a^2 - ab + ac - bc$.

Incomincio a raccogliere nei primi due termini il fattor comune a, e negli altri due il fattor comune c, per cui ho $a(a - b) + c(a - b)$.

Siccome poi in questa espressione trovo di nuovo un fattor comune in $a - b$, così lo raccolgo, ed ho finalmente $(a - b)(a + c)$.

98. VI. Raccogliere i fattori comuni nell' espressione $am^2 - am^2x + bm^2 - bm^2x - a + ax - b + bx$.

Nei primi due termini raccolgo il fattor comune am^2, nei due seguenti bm^2, negli altri due $-a$, e negli ultimi due finalmente raccolgo il fattor comune $-b$: per cui vengo ad avere

$$am^2(1-x)+bm^2(1-x)-a(1-x)-b(1-x),$$

osservo che in tutti quattro questi termini vi è il fattor comune $1-x$, lo raccolgo, ed ho

$$(1-x)(am^2+bm^2-a-b).$$

Esaminando di nuovo questa espressione, vedo che nei due primi termini del secondo fattore vi è m^2 fattor comune, e negli altri due si trova il fattor comune -1: torno a raccogliere, ed ottengo $(1-x)[m^2(a+b)-1(a+b)]$. Raccogliendo finalmente anche il fattor comune $a+b$, si avrà $(1-x)(a+b)(m^2-1)$.

Del massimo comun divisore.

99. *È massimo comun divisore* di due quantità quel divisore, mediante il quale eseguita la divisione sulle quantità medesime non lascia fra esse più alcun fattor comune.

100. Si trova il massimo comun divisore di due espressioni algebriche in una maniera analoga a quella, che si impiega in Aritmetica per trovarlo tra due dati numeri.

Ordinate le espressioni, delle quali si vuole il massimo comun divisore, per rapporto ad una medesima lettera, si divida quella espressione, in cui questa lettera ha l' esponente maggiore per la seconda, e questa operazione si spinga sino a che l' esponente della lettera, per cui si sono ordinate quelle espressioni, sia nella prima di esse divenuto minore, o tutt' al più eguale all' esponente della stessa lettera nella seconda. In seguito si divida la quantità che precedentemente ha servito per divisore pel residuo della divisione: indi il primo residuo si divida pel secondo residuo, e così di seguito, sino a tanto che si giunga ad una divisione esatta; in allora l' ultimo divisore impiegato sarà il massimo comun divisore cercato.

101. La determinazione sua è appoggiata al seguente principio: *qualunque divisore comune di due quantità deve dividere il resto della loro divisione.*

Infatti rappresentando colle due quantità A e B due polinomj, dei quali si voglia il massimo comun divisore, e supponendo $A<B$, si faccia la divisione di B per A, e sia C il quoto e P il residuo.

Dovendo essere il prodotto del quoto pel divisore più il residuo eguale al dividendo (51), avremo $B=A\times C+P$.

Ora supponendo che la quantità R sia un comun divisore di B e di A, avremo $\frac{B}{R}=\frac{A\times C}{R}+\frac{P}{R}$; perchè dividendo due quantità eguali per la medesima quantità i quoti sono eguali.

Ma tanto $\frac{B}{R}$, quanto $\frac{A\times C}{R}$, sono quantità intere, essendo R comun divisore di B, ed A; dovrà per conseguenza essere una quantità intiera anche $\frac{P}{R}$, ossia il residuo della divisione anch' esso essere divisibile pel comun divisore R delle due date quantità B ed A. Ciò posto, sarà lo stesso per avere questo comun divisore, lo scomporre A e P, che scomporre B ed A. Dividasi adunque A per P, e sia D il quoto e Q il residuo: con un ragionamento analogo a quello superiormente fatto, si vedrà, che anche Q deve contenere lo stesso divisore R, di P e di A, ossia di B e di A.

Continuando sempre a dividere nello stesso modo tutti i residui, che si otterranno, si troverà essere in essi sempre quel medesimo divisore, che si cerca. Ma con queste continue divisioni i residui, che di mano in mano si otterranno, anderanno sempre diminuendo, di maniera tale che, o tosto o tardi si giungerà ad un residuo nullo, nel qual caso è manifesto che l' ultima quantità, che ha servito di divisore, sarà un comun divisore delle due quantità B ed A, e supponendo in questo caso che la divisione di Q per R si faccia esattamente, e che si ottenga F per quoto, si avrà $Q=R\times F$: la divisione sarà allora finita, ed R sarà divisore di Q e di P, e per conseguenza anche di B e di A.

Se nei valori di B e di A si faranno le opportune sostituzioni, supponendo che $\frac{P}{Q}$ dia E per quoto, ed R per residuo, si vedrà, che in tutti i termini delle due espressioni vi sarà contenuta la quantità R.

102. Per provare poi, che tra tutti i divisori comuni che le dette due quantità B ed A possono avere, R sia necessariamente il massimo, supponiamo, se è possibile, che ve ne sia un altro S più grande di lui: sarà dunque S > R e nello stesso tempo divisor comune di B e di A: ripigliando il ragionamento precedente, conchiuderemo dover esser S comun divisore anche di A e di P, di P e di Q, e finalmente di Q e di R; la qual cosa è manifestamente assurda per se stessa, giacchè essendo S > R, non è possibile che una quantità minore R si divida esattamente per una quantità S di essa maggiore, per lo che conchiuderemo che R è il massimo comun divisore delle due quantità A e B.

103. Il massimo comun divisore di due quantità non viene punto alterato, moltiplicando o dividendo una di esse per una quantità qualunque, purchè non sia questa fattore dell' altra. Per esempio A B, ed A C hanno per comun divisore la quantità A: moltiplicando questa prima espressione per D, diverrà A B D, espressione che non ha con A C alcun altro comun divisore, che la quantità stessa A, che era comune alle due quantità A B ed A C. Lo stesso succederebbe, se la quantità A B si fosse divisa per D. Ma non sarebbe eguale se si moltiplicasse, o si dividesse questa quantità per un numero che fosse fattore di A C, come sarebbe C, in allora il divisor comune non sarebbe più A, ma A C. Conchiudiamo da ciò: 1.° *che nel caso dell' operazione colla quale si cerca il massimo comun divisore di due quantità, si potranno rigettare quei fattori, che moltiplicano solamente una delle due espressioni*: 2.° *che si potrà moltiplicare l' una delle due quantità per quel numero che si vorrà, purchè questo non sia fattore dell' altra.*

104. Se le quantità, di cui si cerca il massimo comune divisore, non avranno alcun fattor comune, l' ultimo divisore che si troverà, sarà l' unità.

Facciasi qualche esempio.

105. *Esemp.* I. Per trovare il massimo comun divisore delle due quantità $a^4 - b^4$, ed $a^5 - a^3 b^2$, incomincio ad osservare che a^3 è un fattor comune ai due termini della seconda espressione senza esserlo a quelli della prima: non potendo egli perciò far parte del massimo comun divisore che si

cerca, può essere soppresso (103), per lo che si otterranno le due espressioni $a^4 - b^4$, e $a^2 - b^2$, le quali avranno lo stesso massimo comun divisore delle prime due. Eseguendo colle solite regole la divisione si osserva, che $a^2 - b^2$ divide $a^4 - b^4$, e dà per quoto $a^2 + b^2$ senza residuo, onde che si conchiuderà essere $a^2 - b^2$ il massimo comun divisore delle due proposte quantità.

Divise infatti queste due quantità per $a^2 - b^2$, la prima di esse dà per quoto $a^2 + b^2$, e la seconda a^3, quantità, le quali, come è facile di vedere, non hanno più alcun fattor comune tra di loro.

106. II. Si domanda il massimo comun divisore delle due quantità $a^2 - 3ab + 2b^2$, $a^2 - ab - 2b^2$. Disponendo queste due quantità per la divisione ed eseguendola, si avrà

Dividendo	$a^2 - 3ab + 2b^2$	$a^2 - ab - 2b^2$ Divis.
	$-a^2 + ab + 2b^2$	1 Quoto.
Residuo	$-2ab + 4b^2$	

Bisogna ora dividere la quantità $a^2 - ab - 2b^2$, che ha servito di divisore nella prima divisione pel residuo $-2ab + 4b^2$ della divisione stessa: prima però di eseguire questa divisione, osservo, che il divisore ha per fattor comune $2b$, quantità non comune a tutti i termini del dividendo, per cui lo sopprimo, ed effettuando tale divisione, ho

2.° Divid.°	$a^2 - ab - 2b^2$	$-a + 2b$. 2.° Divisore.
	$-a^2 + 2ab$	$-a - b$. 2.° Quoto.
	$ab - 2b^2$	
	$-ab + 2b^2$	
	$0 \quad 0$	

Donde conchiudo che il massimo comun divisore dei due proposti polinomj è $-a + 2b$: se essi si divideranno pel trovato massimo lor comun divisore, si otterranno i due quoti $-a + b$, e $-a - b$, i quali non hanno più alcun comune divisore, come è facile il vedere.

107. III. Sieno proposti i due polinomj

$$5x^3 - 18x^2y + 11xy^2 - 6y^3,\ 7x^2 - 23xy + 6y^2$$

dei quali si voglia il massimo comun divisore.

Siccome non si può dividere il 5, coefficiente del primo termine del primo polinomio, per 7, e d' altronde il 7 non è un fattor comune di tutti i termini della seconda quantità, perciò moltiplico i termini del primo polinomio per 7, per cui vengo ad avere il

$$\begin{array}{l|l}
\text{Div.}^{\circ}\ 35x^3 - 126x^2y + 77xy^2 - 42y^3 & \\
\quad -35x^3 + 115x^2y - 30xy^2 & 7x^2 - 23xy + 6y^2\ \text{D.}^{e} \\
\hline
\text{Res.}^{\circ}\ -11x^2y + 47xy^2 - 42y^3 & 5x.\quad \text{Quoto.}
\end{array}$$

Continuo ancora a dividere questo residuo pel medesimo divisore moltiplicandolo però prima per 7, ed ommettendo il suo fattor comune y, per lo che ho

$$\begin{array}{l|l}
2.^{\circ}\ \text{Div.}^{\circ} -77x^2 + 329xy - 294y^2 & 7x^2 - 23xy + 6y^2\ \text{D.}^{e} \\
\quad 77x^2 - 253xy + 66y^2 & -11.\quad 2.^{\circ}\ \text{Quoto} \\
\hline
2.^{\circ}\ \text{Res.}^{\circ}\quad 76xy - 228y^2 &
\end{array}$$

Bisogna ora dividere $7x^2 - 23xy + 6y^2$ per $76xy - 228y^2$, o piuttosto per $x - 3y$, sopprimendone il divisore comune $76y$, il quale non è comune al dividendo, per lo che si verrà ad avere

$$\begin{array}{l|l}
3.^{\circ}\ \text{Div.}^{\circ}\ 7x^2 - 23xy + 6y^2 & x - 3y\ .\ 2.^{\circ}\ \text{Divisore.} \\
\quad -7x^2 + 21xy & 7x - 2y\ .\ 3.^{\circ}\ \text{Quoto.} \\
\hline
\quad\quad -2xy + 6y^2 & \\
\quad\quad +2xy - 6y^2 & \\
\hline
\quad\quad\quad 0 \quad\ 0 &
\end{array}$$

Onde si rileva facilmente che il massimo comun divisore delle due quantità proposte è $x - 3y$. I due quoti che si ottengono, mediante la loro divisione per $x - 3y$, sono

$$5x^2 - 3xy + 2y^2,\ 7x - 2y.$$

108. Se si volesse il massimo comun divisore di tre quantità per esempio di A, B, C; si giungerebbe a scoprirlo, cercandolo col metodo insegnato, fra due quantità A, B, e chiamato questo X, si cercherebbe il massimo comun divisore tra X e C: l' ultimo risultamento ottenuto, essendo massimo comun divisore di X e di C, lo sarà evidentemente anche delle tre quantità proposte A, B, C.

109. Se le quantità fossero quattro, come A, B, C, D; trovato il massimo comun divisore X delle due A e B, e poscia il massimo comun divisore delle due X e C, che dirò Y, troverò il massimo comun divisore tra Y e D, il quale sarà il massimo comun divisore di tutte le quattro quantità proposte A, B, C, D. Si ragioni in un modo analogo, quando si tratti di trovare il massimo comun divisore di un numero qualunque di quantità.

CAPITOLO IV.

Delle frazioni, e del modo di calcolarle.

110. Supponendo l' unità di confronto divisa in un numero qualunque di parti fra loro eguali, una di esse, o la riunione di alcune è ciò che forma una *quantità frazionaria*, ossia una *frazione o rotto di quantità.*

111. In una frazione si devono rilevare due cose assai distinte, cioè il numero delle parti eguali, in cui l' unità principale è stata divisa, ed il numero di quelle parti che si sono prese; il primo di questi numeri dicesi il *denominatore* della frazione, ed il secondo il *numeratore*: tanto poi il numeratore, quanto il denominatore si chiamano con comune vocabolo i *termini della frazione.*

I termini di una frazione si separano mediante una linea orizzontale, che si frappone tra il numeratore, ed il denominatore: così, se una quantità considerata come unità di misura sarà divisa in b parti eguali, e se prenderassi di queste un numero a, si avrà la frazione $\frac{a}{b}$, dove a sarà il numeratore, e b il denominatore della medesima.

112. Il quoto di una divisione da eseguirsi si suole indicare ordinariamente colla forma frazionaria; e siccome molte volte si incontrano di queste divisioni indicate, nelle quali il dividendo eguaglia, o supera il divisore, così le espressioni risultanti da tali indicazioni non si possono dire vere frazioni, ma frazioni *improprie*.

Se il numeratore d'una frazione impropria è eguale al suo denominatore, oppure è un multiplo del denominatore medesimo, in allora tale espressione dicesi frazione *apparente*, non avendo essa che la sola apparenza di frazione, essendo in realtà una quantità intera; se il numeratore della frazione impropria è maggiore del denominatore senza essere un suo multiplo, la frazione in questo caso dicesi *mista*, contenendo essa e degli interi e delle parti d'intero: così la frazione $\frac{a}{b}$ sarà propria sino a tanto che $a < b$: sarà apparente se $a = b$, oppure se $a = m.b$, indicando con m un numero intero qualunque: finalmente sarà mista se $a > b$, ma non un multiplo della stessa b.

113. Sulle frazioni tanto proprie, che improprie si possono fare tutte le operazioni, che si sono eseguite sulle quantità intere, ma per confrontare le loro rispettive grandezze fa d'uopo, che esse sieno tutte della medesima specie, motivo per cui, prima di passare al calcolo delle quantità fra-

zionarie, si instituiscono sopra di esse alcune operazioni preliminari, che servono a cangiare le frazioni in altre frazioni equivalenti, le quali non differiscono dalle prime che nella forma.

114. Tutte queste operazioni preliminari si appoggiano sopra due evidenti principj, e sono 1.° *Una quantità non cangia di valore moltiplicandola, e dividendola per un' altra quantità qualunque*; poichè ciò che si fa colla moltiplicazione viene distrutto dalla divisione.

2.° *Una quantità non cangia di valore, se le si dà l'aspetto frazionario sottoponendole per denominatore l'unità.*

Operazione 1.ª

115. Dare ad una quantità intera l'aspetto frazionario, senza che il suo valore ne sia alterato.

In due maniere ciò può farsi, *o sottoponendole per divisore l'unità, oppure moltiplicando, e dividendo la data quantità per una stessa quantità qualunque.* Bisognerà servirsi del secondo metodo, qualora si voglia dare ad una data quantità un determinato denominatore: così se alla quantità a si vorrà dare il denominatore b, moltiplicandola e dividendola nello stesso tempo per b, si avrà $\frac{ab}{b}$, espressione equivalente alla prima, ma di forma diversa. Se alla stessa quantità a si volesse dare $3c$ per denominatore, si moltiplicherà, e si dividerà per $3c$, per cui si avrà $\frac{3ac}{3c}$; così dicasi di qualunque altro denominatore, che si dovesse dare alla medesima quantità a. Da ciò si rileva, che una quantità qualunque può essere espressa in un numero infinito di maniere, conservando essa sempre il suo primo valore.

116. Lo stesso succede, se i termini di una frazione si moltiplicano per qualsivoglia quantità; così $\frac{ab}{d}=\frac{4ab}{4d}=\frac{7abc^2}{7c^2d}$: la frazione conservando sempre il suo primitivo valore, può prendere infinite forme tutte fra loro diverse.

Operazione 2.ª

117. Semplificare quando è possibile le frazioni, o ciò che è lo stesso ridurre le frazioni a' minimi termini.

Si dividano a tale uopo tutti e due i termini della frazione che si vuol semplificare pei fattori comuni, che essi si trovano avere, e si avrà così una nuova frazione più semplice, e del medesimo valore della prima; ciò è manifesto, poichè se i termini di una frazione possono essere moltiplicati per una quantità qualunque, potranno anche essere divisi senza che si alteri il valore della frazione medesima.

118. *Esemp.* I. Semplificare la frazione $\frac{3bd^2}{3d^2g}$.

Togliendo da' suoi termini il fattor comune $3d^2$, avremo la frazione $\frac{b}{g}$, più semplice della prima, e dello stesso valore.

119. II. Semplificare la frazione $\frac{5a^2b-15ab^2}{5ab-10a^2b}$.

Raccogliendo prima in tutti e due i termini della frazione il comun fattore $5ab$, si avrà

$$\frac{5ab(a-3b)}{5ab(1-2a)}=\frac{a-3b}{1-2a},$$ frazione assai più semplice della proposta.

120. Invece di trovare i fattori comuni dei due termini di una data frazione da ridursi a' minimi termini col mezzo del raccoglimento dei fattori, si può cercare il massimo comun divisore dei due termini della frazione stessa, e dividere i termini medesimi pel massimo comun divisore trovato.

121. *Esemp.* Sia la frazione $\frac{4a^2-12ab+9b^2}{4a^2-9b^2}$, da ridurre a' minimi termini. Cercando il massimo comun divisore appartenente ai due termini della proposta frazione, si trova essere $2a-3b$, col quale divisi i due termini della frazione, si ha $\frac{2a-3b}{2a+3b}$, frazione più semplice della proposta, ed equivalente alla medesima.

Si giungerà allo stesso risultamento col metodo del raccoglimento dei fattori. Infatti essendo

$$\frac{4a^2-12ab+9b^2}{4a^2-9b^2}=\frac{4a^2-6ab-6ab+9b^2}{4a^2-9b^2};$$

si avrà, raccogliendo nei primi due termini del numeratore il fattor comune $2a$, e negli altri due il fattor comune $-3b$,

$$\frac{2a(2a-3b)-3b(2a-3b)}{4a^2-9b^2},$$ e raccogliendo di nuovo nel numeratore il fattor comune $2a-3b$, e sostituendo al denominatore, il quale esprime la differenza dei quadrati delle due quantità $2a$, e $3b$, il prodotto della loro somma per la loro differenza (43), si otterrà

$$\frac{(2a-3b)(2a-3b)}{(2a+3b)(2a-3b)}=\frac{2a-3b}{2a+3b},$$

come appunto si è trovato coll' altro metodo.

Operazione 3.ª

122. Levare gli interi contenuti in una frazione mista.

Non essendo una frazione mista altro, che una divisione indicata (112), *si leveranno da essa gli interi col dividere il numeratore pel denominatore della frazione stessa, spingendo questa operazione sino a tanto che è possibile.*

123. *Esemp.* I. Levare gli interi dalla frazione

$$\frac{3a^2-6ab+c}{3a}.$$

Eseguendo la divisione del numeratore pel denominatore della proposta frazione, si avrà per quoto la quantità intera $a-2b$, e per residuo c, onde

sarà $\frac{3a^2-6ab+c}{3a}=a-2b+\frac{c}{3a}.$

124. *Esemp.* II. Levare gli interi dalla frazione

$$\frac{a^2-2ab+d+b^2}{a-b}.$$

Eseguendo la divisione del numeratore pel suo denominatore, si avrà $a-b$ per quoto, e d per residuo, per lo che sarà

$$\frac{a^2-2ab+d+b^2}{a-b}=a-b+\frac{d}{a-b}.$$

Operazione 4.ª

125. Ridurre due, o più frazioni al medesimo denominatore.

Si riducono due frazioni allo stesso denominatore moltiplicando il numeratore ed il denominatore della prima per il denominatore della seconda, il numeratore ed il denominatore della seconda pel denominatore della prima: in questo modo, dietro il principio stabilito al (116), si vengono ad avere due frazioni collo stesso denominatore, ed equivalenti alle frazioni proposte.

126. *Esemp.* I. Ridurre le frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ ad avere l' egual denominatore.

Moltiplicando i termini della prima frazione pel denominatore d della seconda, ed i termini della seconda frazione pel denominatore b appartenente alla prima frazione, si avrà $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$.

127. Ridurre le frazioni $\frac{a-b}{c-d}$, $\frac{p-q}{1-x}$ ad aver lo stesso denominatore.

Indicando prima l' operazione, si avrà

$\frac{(a-b)(1-x)}{(c-d)(1-x)}$, $\frac{(p-q)(c-d)}{(c-d)(1-x)}$, ed effettuando le moltiplicazioni, sarà

$$\frac{a-ax-b+bx}{c-cx-d+dx},\ \frac{cp-dp-cq+dq}{c-cx-d+dx}.$$

128. *Per ridurre tre, o più frazioni allo stesso denominatore, si moltiplica il numeratore, ed il denominatore di ciascuna pel prodotto dei denominatori di tutte le altre frazioni.*

129. *Esemp.* I. Ridurre le tre frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{f}{g}$ allo stesso denominatore.

Seguendo la regola insegnata, si avrà

$\frac{adg}{bdg}$, $\frac{bcg}{bdg}$, $\frac{bdf}{bdg}$, frazioni che equivalgono alle tre proposte, ed hanno comune il denominatore.

130. II. Ridurre le frazioni $\frac{2a-b}{c}$, $\frac{x+y^2}{d-z}$, $\frac{a}{2v-x}$ allo stesso denominatore.

Indicando l'operazione, sarà

$$\frac{(2a-b)(d-z)(2v-x)}{c(d-z)(2v-x)},\ \frac{c(x+y^2)(2v-x)}{c(d-z)(2v-x)},\ \frac{ac(d-z)}{c(d-z)(2v-x)},$$

e sviluppando, si avrà

$$\frac{4adv-2bdv-4avz+2bvz-2adx+bdx+2axz-bxz}{2cdv-cdx-2cvz+cxz},$$

$$\frac{2cvx-cx^2+2cvy^2-cxy^2}{2cdv-cdx-2cvz+cxz},\ \frac{acd-acz}{2cdv-cdx-2cvz+cxz}.$$

131. Quando le frazioni hanno dei fattori comuni nei loro denominatori, la loro riduzione allo stesso denominatore si fa più compendiosamente, *moltiplicando i termini delle frazioni coll'ordine sopra indicato, ma pei soli fattori non comuni.*

132. *Esemp.* I. Ridurre allo stesso denominatore le due frazioni $\frac{ab}{cd}$, $\frac{f}{dg}$.

Siccome d è di già fattor comune dei due denominatori; così basterà moltiplicare i termini della prima frazione per g, e quelli della seconda per c, e si avranno le due frazioni $\frac{abg}{cdg}$, $\frac{cf}{cdg}$ collo stesso denominatore.

133. *Esemp.* II. Ridurre all'egual denominatore le tre frazioni $\frac{a-b}{x^2}$, $\frac{3c}{2x^2}$, $\frac{m-n}{x^3}$.

Osservando essere x^2 di già divisor comune, e facendo le opportune moltiplicazioni, si avrà

$$\frac{2x(a-b)}{2x^3},\ \frac{3cx}{2x^3},\ \frac{2(m-n)}{2x^3},$$ e sviluppando

$$\frac{2ax-2bx}{2x^3},\ \frac{3cx}{2x^3},\ \frac{2m-2n}{2x^3}.$$

134. La verità della regola superiormente insegnata si renderà più manifesta, se le quantità di già ridotte allo stesso denominatore si assoggetteranno ad una operazione inversa, togliendo cioè da ciascuna i fattori comuni ai rispettivi numeratori e denominatori, si vedranno in tal guisa ricomparire le frazioni proposte.

Questo esercizio sarà di moltissimo vantaggio ai principianti.

135. Le frazioni possono cangiar d'aspetto, e prendere anche la forma di quantità intere, senza punto cangiar di valore, facendo passare i fattori

dal numeratore nel denominatore, e viceversa, col cangiare il segno agli esponenti delle quantità che, si trasportano (83). Queste trasformazioni si usano particolarmente, quando si trovano delle quantità affette di esponenti negativi.

136. *Esemp.* I. Trasformare la frazione $\frac{5a^{-2}b^3}{3p^3x^{-1}}$, in un' altra ad essa equivalente cogli esponenti tutti positivi.

Operando nel modo sopra indicato, si avrà

$$\frac{5a^{-2}b^3}{3p^3x^{-1}}=\frac{5b^3x}{3a^2p^3}.$$

137. *Esemp.* II. Dare alla frazione $\frac{3a^5b^3}{c^mx^2}$ la forma di intero.

Secondo il principio stabilito, si avrà

$$\frac{3a^5b^3}{c^mx^2}=3a^5b^3c^{-m}x^{-2}.$$

Delle quattro operazioni principali sulle frazioni.

Sommazione o addizione.

138. *Per sommare le quantità intere colle frazioni, o le frazioni con altre frazioni, bisogna prima ridurre queste quantità allo stesso denominatore: ciò fatto è chiaro, che l' addizione consisterà in allora nel fare la somma algebrica dei numeratori delle frazioni stesse, sottoponendo a questa somma il denominator comune*; perchè in allora essendo tutte composte di unità frazionarie della medesima specie, la somma di quelle frazioni conterrà in un sol complesso tante di queste unità frazionarie, quante ve ne sono disgiuntamente in tutte le frazioni parziali proposte.

139. *Esemp.* I. Così per sommare l' intero $a-b$ colla frazione $\frac{p+q}{r}$, riducendo prima anche l' intero ad aver lo stesso denominatore r, si avrà $\frac{ar-br}{r}$, $\frac{p+q}{r}$, ed eseguendo l'addizione dei numeratori, sarà $\frac{ar-br+p+q}{r}$.

140. *Esemp.* II. Sommare le frazioni $\frac{ax}{a+x}$, $\frac{2ax}{a-x}$.

Riducendole al medesimo denominatore, si avrà primieramente $\frac{ax(a-x)}{(a+x)(a-x)}$, $\frac{2ax(a+x)}{(a+x)(a-x)}$, ossia sviluppando $\frac{a^2x-ax^2}{a^2-x^2}$, $\frac{2a^2x+2ax^2}{a^2-x^2}$, e facendone la sommazione sarà

$$\frac{a^2x-ax^2+2a^2x+2ax^2}{a^2-x^2}=\frac{3a^2x+ax^2}{a^2-x^2}.$$

141. *Esemp.* III. Sommare l' intero a, colle due frazioni $\frac{b}{c}$, $\frac{d-m}{f+g}$.

Riducendo prima allo stesso denominatore le proposte quantità, si avrà

$\frac{acf+acg}{cf+cg}$, $\frac{bf+bg}{cf+cg}$, $\frac{cd-cm}{cf+cg}$, ed eseguendo l'addizione sarà $\frac{acf+acg+bf+bg+cd-cm}{cf+cg}$.

Sottrazione.

142. Dopo che le quantità, sulle quali si deve operare, sono ridotte allo stesso denominatore, si eseguisce la sottrazione, *cambiando i segni alle quantità che sono nel numeratore della frazione diminutore, sommando queste quantità col numeratore del diminuendo, e scrivendo sotto questa somma il denominatore comune.* Questa regola è appoggiata ai medesimi principj addotti per la somma delle frazioni (138).

143. *Esemp.* I. Dall'intero $2a^2$ sottrarre la frazione $\frac{a^3-b}{a-x}$.

Riducendo prima queste quantità allo stesso denominatore, si avrà

$\frac{2a^3-2a^2x}{a-x}$, $\frac{a^3-b}{a-x}$; ed eseguendo la sottrazione nel modo superiormente indicato sarà

$$\frac{2a^3-2a^2x-a^3+b}{a-x}=\frac{a^3-2a^2x+b}{a-x}.$$

144. II. Dalla frazione $\frac{a-3b}{c-d}$ sottrarre la frazione $\frac{2d-bc}{m+n}$.

Riducendo prima allo stesso denominatore le proposte quantità, sarà

$\frac{(a-3b)(m+n)}{(c-d)(m+n)}$, $\frac{(2d-bc)(c-d)}{(m+n)(c-d)}$, e sviluppando

$\frac{am+an-3bm-3bn}{cm+cn-dm-dn}$, $\frac{2cd-2d^2-bc^2+bcd}{cm+cn-dm-dn}$.

Eseguendo poi la sottrazione, si avrà

$$\frac{am+an-3bm-3bn-2cd+2d^2+bc^2-bcd}{cm+cn-dm-dn}.$$

145. Queste due operazioni si servono reciprocamente di prova, come nelle quantità intere. Al residuo di una sottrazione basterà aggiungere il diminutore per avere il diminuendo: da una somma poi levando una o più parti, si avrà la somma delle rimanenti parti.

146. Osserviamo di passaggio che, per sottrarre una frazione da un'altra frazione, abbiamo cangiati i segni al solo numeratore della frazione diminutore; poichè se nello stesso tempo si fossero cangiati i segni anche al denominatore, la frazione sarebbe rimasta la stessa, ed invece di sottrarla dalla prima, si sarebbe con essa sommata; in fatti

$\frac{a}{b}$ è la stessa cosa che $\frac{a\times-1}{b\times-1}=\frac{-a}{-b}$ (116).

Moltiplicazione.

147. Per moltiplicare un intero per una frazione o una frazione per un intero *si moltiplica l'intero pel numeratore della frazione, ed il prodotto che ne risulta, si divide pel denominatore della frazione medesima.*

In fatti dalla natura della divisione segue, che se una quantità a sarà moltiplicata prima per c, ed il prodotto verrà diviso per b, si otterrà il medesimo risultamento, come se si dividesse prima a per b, e poi se ne moltiplicasse il quoziente per c: quindi $\frac{ac}{b}$ indica, tanto a moltiplicata per c, e divisa per b, quanto a divisa prima per b e poi moltiplicata per c, cioè la frazione $\frac{a}{b}$ moltiplicata per c: se adunque la frazione $\frac{a}{b}$ dovrà moltiplicarsi per c, il prodotto sarà $\frac{ac}{b}$, quantità risultante dal moltiplicare il numeratore della frazione pel dato numero intero.

148. *Esemp.* I. Moltiplicare $5a$ per $\frac{3b-c}{m-n}$.

Operando secondo la regola insegnata, si avrà

$$\frac{5a(3b-c)}{m-n}=\frac{15ab-5ac}{m-n}.$$

149. II. Sia $\frac{3x^2-2xy}{7a-2b}$ da moltiplicarsi per $3a-x$, e si avrà $\frac{(3x^2-2xy)(3a-x)}{7a-2b}=$

$$\frac{9ax^2-6axy-3x^3+2x^2y}{7a-2b}.$$

150. Per moltiplicare una frazione per un'altra frazione, *si moltiplicano i numeratori tra di loro*

ed i denominatori pure fra di loro: questi due prodotti sono i termini della frazione risultante dal prodotto delle proposte frazioni. In fatti è chiaro che avremo il medesimo risultamento, se divideremo ad un tratto a per bc, o se lo divideremo prima per b poi per c, cioè se divideremo la frazione $\frac{a}{b}$ per c: ne segue da ciò che la frazione $\frac{a}{b}$ si divide per c scrivendo $\frac{a}{bc}$, cioè moltiplicando il suo denominatore per c. Onde se la frazione $\frac{a}{b}$ si dovrà nello stesso tempo moltiplicare per d, e dividere per c, ossia se si dovrà moltiplicare per la frazione $\frac{d}{c}$, il prodotto sarà $\frac{ad}{bc}$, ove sono tra di loro moltiplicati i numeratori ed i denominatori.

Si rileva ancora, che le due quantità $\frac{ad}{bc}$ ed $\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$ sono eguali, dall' osservare, che la prima moltiplicata per bc dà ad per prodotto, e la seconda moltiplicata per bc, ossia prima per b indi per c dà lo stesso prodotto ad.

151. *Es.* I. Debbasi moltiplicare $\frac{3x}{y}$ per $\frac{2bc^2}{mn}$.

Secondo quello che si è detto, si avrà

$$\frac{3x}{y}\times\frac{2bc^2}{mn}=\frac{6bc^2x}{mny}.$$

152. II. Abbiasi $\frac{2a-3b}{c-d}$ da moltiplicare per $\frac{2c-d}{3a-b}$.

Operando secondo la regola insegnata, si avrà

$$\frac{(2a-3b)(2c-d)}{(c-d)(3a-b)}=\frac{4ac-2ad-6bc+3bd}{3ac-3ad-bc+bd}.$$

153. III. Sia $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ da moltiplicarsi per $\frac{m}{n}-\frac{p}{q}$.

Disponendo ed eseguendo la moltiplicazione, si avrà

$$\begin{array}{lll} & \frac{m}{n}+\frac{p}{q} & \\ & \frac{m}{n}-\frac{p}{q} & \\ \hline & \frac{m^2}{n^2}+\frac{mp}{nq} & \\ & \quad -\frac{mp}{nq} & -\frac{p^2}{q^2} \\ \hline & \frac{m^2}{n^2} & -\frac{p^2}{q^2}. \end{array}$$

154. Da qui si vede, che la proposizione dimostrata al paragrafo (43) si verifica anche per le frazioni.

155. Per moltiplicare un numero di frazioni qualunque tra di loro, *si fa il prodotto di tutti i numeratori, e si divide per quello di tutti i denominatori:* questa regola è appoggiata alla superiore, poichè potendo di due frazioni formarne una sola, moltiplicandole nel modo insegnato, ne viene che il prodotto di un numero qualunque di frazioni si può ridurre alla moltiplicazione di due frazioni risultanti, il quale si eseguisce moltiplicando i numeratori tra di loro ed i denominatori pure tra di loro (150).

156. *Esempio.* Moltiplicare $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}$ per $\frac{f}{a}$.

Indicando ed eseguendo poi la moltiplicazione nel modo sopra indicato, si avrà

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{f}{a}=\frac{acf}{abd}=\frac{cf}{bd}.$$

157. È da osservarsi, che il fattore a comune tanto al numeratore, quanto al denominatore della frazione ottenuta, si poteva togliere prima di eseguire la moltiplicazione, con che più facilmente si sarebbe avuto lo stesso prodotto $\frac{cf}{bd}$.

Questa osservazione si estende a tutti i casi, nei quali si debbano moltiplicare più frazioni tra di loro; per lo che *quando nei fattori della moltiplicazione da eseguirsi si trovano delle quantità comuni a qualche numeratore e denominatore, si possono levare da essi, sostituendovi l' unità.*

158. *Esempio.* Abbiansi da moltiplicare fra di loro le frazioni $\frac{am}{bn}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{b}{d}$, $\frac{m-n}{p}$, $\frac{p}{m-n}$.

Secondo quello che abbiamo detto, si avrà

$$\frac{am}{bn}\times\frac{c}{a}\times\frac{b}{d}\times\frac{m-n}{p}\times\frac{p}{m-n}=$$

$$\frac{1\,.\,m}{1\,.\,n}\times\frac{c}{1}\times\frac{1}{d}\times\frac{1}{1}\times\frac{1}{1}=\frac{cm}{dn}.$$

Divisione.

159. Si divide una frazione per un intero, *moltiplicando il denominatore della frazione pel dato intero* (150), *conservandovi il dato numeratore.*

160. *Esempio* I. Sia da dividere la frazione $\frac{3mn}{2b}$ per $4d$. Operando nel modo indicato, si avrà

$$\frac{3mn}{2b}:4d=\frac{3mn}{2b\times 4d}=\frac{3mn}{8bd}.$$

161. II. Per dividere $\frac{3a-2b}{c-x}$ per $2a-b$, si avrà

$$\frac{3a-2b}{c-x}:2a-b=\frac{3a-2b}{(c-x)(2a-b)}=\frac{3a-2b}{2ac-bc-2ax+bx}.$$

162. Per dividere un intero per una frazione *si moltiplica il dato intero pel denominatore della frazione, ed a questo prodotto si sottopone il numeratore della frazione medesima.* La dimostrazione di questa regola è appoggiata al principio stabilito al (51), *cioè, che il quoto moltiplicato pel divisore dà il dividendo.*

163. *Esempio* I. Si debba dividere la quantità a per la frazione $\frac{b}{c}$.

Secondo quello che si è detto, sarà

$$a:\frac{b}{c}=\frac{a\times c}{b}=\frac{ac}{b}.$$

In fatti $\frac{ac}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{abc}{bc}=a.$

164. II. Dividere $3a^2b-x$ per $\frac{3x-y}{m+n}$.

Disponendo ed eseguendo l' operazione enunciata, si avrà $3a^2b-x:\frac{3x-y}{m+n}=\frac{(3a^2b-x)(m+n)}{3x-y}$

$$=\frac{3a^2bm+3a^2bn-mx-nx}{3x-y}.$$

165. Si otterrebbe lo stesso quoto *rovesciando la frazione divisore, e moltiplicando questa frazione pel numero intero.*

166. Per dividere una frazione per un' altra frazione *si moltiplica il numeratore della frazione dividendo pel denominatore della frazione divisore, indi si moltiplica il suo denominatore pel numeratore della frazione divisore; il primo di questi due prodotti forma il numeratore, ed il secondo il denominatore del quoto ricercato.* Anche questa regola è appoggiata al medesimo principio del (51).

167. Si ottiene il quoto di una frazione per un' altra *rovesciando la frazione divisore, e moltiplicandola per la frazione dividendo*; questa non è in sostanza che la regola antecedente, espressa in termini più brevi.

168. *Esemp.* I. Sia $\frac{a}{b}$ da dividere per $\frac{c}{d}$.

Operando nel modo sopra descritto, si avrà

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

Per rendere manifesta la verità di questo processo, si moltiplichi il quoto ottenuto $\frac{ad}{bc}$ pel divisore $\frac{c}{d}$, e si otterrà $\frac{ad}{bc} \times \frac{c}{d} = \frac{acd}{bcd} = \frac{a}{b}$, che è appunto la frazione dividendo, come doveva essere.

169. II. Dividere $\frac{3m-2n}{c-q}$ per $\frac{2a-x}{a-b^2}$.

Eseguendo la divisione sarà

$$\frac{3m-2n}{c-q} : \frac{2a-x}{a-b^2} = \frac{(3m-2n)(a-b^2)}{(c-q)(2a-x)} = \frac{3am-3b^2m-2an+2b^2n}{2ac-cx-2aq+qx}.$$

170. III. Sia la frazione polinomia $\frac{m^2}{n^2}-\frac{p^2}{q^2}$ da dividersi per la frazione del pari polinomia $\frac{m}{n}-\frac{p}{q}$.

Ordinando, ed eseguendo la divisione, si avrà

$$\begin{array}{l|l} \text{Divid.}^{o}\ \frac{m^2}{n^2}-\frac{p^2}{q^2} & \frac{m}{n}-\frac{p}{q}.\ \text{Divisore} \\ \cline{2-2} -\frac{m^2}{n^2}+\frac{mp}{nq} & \frac{m}{n}+\frac{p}{q}.\ \text{Quoto.} \\ \hline \quad\frac{mp}{nq}-\frac{p^2}{q^2} & \\ \quad-\frac{mp}{nq}+\frac{p^2}{q^2} & \\ \cline{1-1} \quad\quad 0 \quad\; 0 & \end{array}$$

Colla regola data ai (166, 167) ho diviso il primo termine $\frac{m^2}{n^2}$ della frazione dividendo pel primo

termine $\frac{m}{n}$ della frazione divisore, ed ho ottenuto per quoto la frazione $\frac{m}{n}$: sottratto dal dividendo il prodotto di questo quoto per tutto il divisore, indi fatta la divisione del primo termine $\frac{mp}{nq}$ del residuo pel primo termine del divisore, ho avuto per quoto la frazione $\frac{p}{q}$, che ho unita all' altro quoto parziale $\frac{m}{n}$ di già ottenuto; questa frazione moltiplicata anch' essa pel divisore, e sottrattone il prodotto dal dividendo, non ha lasciato più alcun residuo, ciò che mi ha fatto conoscere che la divisione era terminata.

171. Le tre regole insegnate superiormente per la divisione delle frazioni per quantità intere, delle quantità intere per frazioni, e finalmente delle frazioni per altre frazioni, si possono ridurre ad una sola, che è la seguente. *Sottoporre l' unità per divisore alle quantità intere quando ve ne siano, rovesciare la frazione divisore, e moltiplicarla così rovesciata per la frazione dividendo.*

172. Siccome l' esercizio nel calcolo suggerisce molti mezzi di abbreviazione nei casi particolari, così sarà bene, che i principianti per rendersi esperti nel calcolo, procurino di verificare tutte le operazioni, che si sono fatte, mediante operazioni opposte.

CAPITOLO V.

Dello sviluppo in serie delle quantità frazionarie, e delle frazioni continue.

173. Sia da dividere la quantità p per $m+n$. Disponendo, ed eseguendo la divisione, si avrà:

D.° p | $m+n$ Divisore

$-\frac{mp}{m}-\frac{np}{m}$ | $\frac{p}{m}-\frac{np}{m^2}+\frac{n^2p}{m^3}-\frac{n^3p}{m^4}+\frac{n^4p}{m^5}-\frac{\frac{n^5p}{m^5}}{m+n}$ Q.°

1. Res.° $-\frac{np}{m}$

$\frac{mnp}{m^2}+\frac{n^2p}{m^2}$

2. Res.° $\frac{n^2p}{m^2}$

$-\frac{mn^2p}{m^3}-\frac{n^3p}{m^3}$

3. Res.° $-\frac{n^3p}{m^3}$

$\frac{mn^3p}{m^4}+\frac{n^4p}{m^4}$

4. Res.° $\frac{n^4p}{m^4}$

$-\frac{mn^4p}{m^5}-\frac{n^5p}{m^5}$

5. Res.° $-\frac{n^5p}{m^5}$.

Non potendo dividere il dividendo p per m, primo termine del divisore, indico questa divisione nel quoto, scrivendovi $\frac{p}{m}$, moltiplico questa frazione pel divisore, ed il prodotto lo sottraggo dal dividendo, faccio la opportuna riduzione, osservando che il termine $-\frac{mp}{m}$ distrugge il dividendo p, per essere allo stesso eguale come rendesi manifesto, togliendo dai termini di quella frazione il fattor comune m; divido in seguito il primo residuo $-\frac{np}{m}$ pel primo termine del divisore, ed ottengo $-\frac{np}{m^2}$, che scrivo al quoto; moltiplico anche questa frazione pel divisore, ed il prodotto che ottengo lo sottraggo dal dividendo, per cui vengo ad avere per 2.° residuo $\frac{n^2p}{m^2}$; divido anche questo per lo stesso divisore m, ed ottengo per quoto $\frac{n^2p}{m^3}$, e per terzo residuo $-\frac{n^3p}{m^3}$, e così di seguito, continuando la divisione, otterrei sempre dei nuovi termini; e la divisione non finirebbe mai. Il quoto totale potrà esprimersi in questa maniera.

174. $\frac{p}{m+n}=\frac{p}{m}-\frac{np}{m^2}+\frac{n^2p}{m^3}-\frac{n^3p}{m^4}+\frac{n^4p}{m^5}-$ ecc.,

ossia per essere $\frac{p}{m}$ fattor comune di tutti questi termini

$$\frac{p}{m+n}=\frac{p}{m}\left(1-\frac{n}{m}+\frac{n^2}{m^2}-\frac{n^3}{m^3}+\frac{n^4}{m^4}-\text{ecc.}\right)$$

Se per primo termine del divisore si fosse presa la quantità n, si sarebbe trovata mediante la divisione, in vece della superiore, la seguente espressione.

175. $$\frac{p}{m+n}=\frac{p}{n}-\frac{mp}{n^2}+\frac{m^2p}{n^3}-\frac{m^3p}{n^4}-\frac{m^4p}{n^5}-\text{ecc.},$$

ossia $$\frac{p}{m+n}=\frac{p}{n}\left(1-\frac{m}{n}+\frac{m^2}{n^2}-\frac{m^3}{n^3}+\frac{m^4}{n^4}-\text{ecc.}\right)$$

176. Si vede pertanto che la stessa frazione $\frac{p}{m+n}$ mediante la divisione può essere sviluppata all'infinito in due diverse maniere.

Le espressioni sopra indicate si intendono continuate sino all'infinito: volendole terminare, per esempio, dopo il quinto termine, acciò le superiori eguaglianze si verifichino, conviene aggiungervi i residui delle rispettive divisioni (81), per il che si avrà

$$\frac{p}{m+n}=\frac{p}{m}-\frac{np}{m^2}+\frac{n^2p}{m^3}-\frac{n^3p}{m^4}+\frac{n^4p}{m^5}-\frac{\frac{n^5p}{m^5}}{m+n},$$

ossia

$$1.^a\ \frac{p}{m+n}=\frac{p}{m}\left(1-\frac{n}{m}+\frac{n^2}{m^2}-\frac{n^3}{m^3}+\frac{n^4}{m^4}-\frac{\frac{n^5}{m^4}}{m+n}\right).$$

$$2.^a\ \frac{p}{m+n}=\frac{p}{n}\left(1-\frac{m}{n}+\frac{m^2}{n^2}-\frac{m^3}{n^3}+\frac{m^4}{n^4}-\frac{\frac{m^5}{n^4}}{m+n}\right).$$

177. Queste espressioni, come tutte quelle che sono composte di un aggregato di termini, che crescono, o scemano con una legge manifesta qualunque, si chiamano *serie*. Le *serie finite* sono quelle composte di un numero finito di termini; tali sono le espressioni dei numeri (75, 77, 78), le infinite sono quelle, che si suppongono continuate all'infinito; di tal natura sono le due superiori espressioni.

178. Le serie sono poi *convergenti*, *divergenti*, o *parallele*. Diconsi serie convergenti quelle, i di cui termini vanno successivamente diminuendo di valore; divergenti quelle, i di cui termini vanno successivamente aumentando, parallele quelle, che sono composte di termini tutti di egual valore: così la

serie 1.^{a} sarà convergente sino a tanto che $m>n$, quando $m<n$, sarà divergente. Nella serie 2.^{a} succederà tutto il contrario: essa sarà convergente quando $m<n$, e divergente quando $m>n$: tutte due saranno poi parallele nel caso di $m=n$.

In fatti nella serie 1.^{a}, facendo astrazione dai segni, e supponendo $m>n$, si vede che il secondo termine è una vera frazione, e per conseguenza minore del primo, che è l'unità; il terzo termine è minore del secondo, poichè essendo $m>n$; sarà anche $\frac{mn}{m^2}>\frac{n^2}{m^2}$, mentre due quantità disuguali moltiplicate per la stessa quantità n, e divise per m^2, conservano la stessa disuguaglianza di prima; levando ora dai termini della prima frazione la quantità comune m, sarà $\frac{n}{m}>\frac{n^2}{m^2}$, come si è asserito. Nello stesso modo si dimostrerebbe essere $\frac{n^2}{m^2}>\frac{n^3}{m^3}$, e così di seguito. Tutto il contrario succederà nella serie 2.^{a}, poichè nella supposizione di $m>n$ sarà il secondo termine $\frac{m}{n}$ della serie stessa una frazione mista, quindi maggiore del termine, che è l'unità. Con un ragionamento analogo a quello superiormente impiegato si dimostrerebbe facilmente, essere il terzo termine maggiore del secondo, il quarto maggiore del terzo, e così di seguito all'infinito.

179. Le serie convergono, o divergono più o meno rapidamente, secondo che è maggiore, o minore la differenza, che vi è fra i loro termini. Quanto più una serie sarà convergente, tanto meno termini occorreranno per rappresentare prossimamente il valore della frazione, dalla quale essa procede.

Le serie divergenti, e parallele non sono di alcuna utilità, ma le convergenti divengono utilissime, quando occorre massime di determinare qualche valore non determinato, nè determinabile per altra via, come succede molte volte nell'analisi sublime.

Quanto più termini si prendono di una serie convergente, tanto più si avvicina al suo vero valore; in una serie divergente al contrario sempre più si allontana dal vero valore col prendere un maggior numero di termini: la serie convergente, come la divergente dà il valore della frazione generatrice, purchè si tenga conto del residuo.

180. Tanto la 1.ª che la 2.ª delle sopra indicate serie può servire egualmente per convertire qualunque quantità frazionaria, sia numerica o letterale, in una serie infinita; per ciò fare bisogna eguagliare il numeratore della frazione proposta alla quantità p, e scomporre il denominatore in due parti; una delle quali si eguaglierà ad m, l' altra ad n. Siccome poi in un numero infinito di maniere può decomporsi una quantità in due altre, così ne viene che una frazione potrà svilupparsi in un numero infinito di serie diverse.

181. *Esemp.* I. Sviluppare in serie la quantità $\frac{3ab^2}{2c-4d}$.

Fatto $p=3ab^2$, $m=2c$, $n=-4d$, sostituisco questi valori in una delle due serie trovate, per esempio nella prima, ed ho

$$\frac{3ab^2}{2c-4d}=\frac{3ab^2}{2c}\left(1+\frac{4d}{2c}+\frac{16d^2}{4c^2}+\frac{64d^3}{8c^3}+\frac{256d^4}{16c^4}+\text{ec.}\right)$$

Riducendo poi a minimi termini, e tenendo conto anche del residuo, si avrà

$$\frac{3ab^2}{2c-4d}=\frac{3ab^2}{2c}\left(1+\frac{2d}{c}+\frac{4d^2}{c^2}+\frac{8d^3}{c^3}+\frac{16d^4}{c^4}+\frac{\frac{64d^5}{c^4}}{2c-4d}\right)$$

Ponendo mente a questo sviluppo si vede facilmente, come un termine qualunque derivi dal suo antecedente moltiplicandolo per $\frac{2d}{c}$: così il secondo termine è stato dedotto dal primo moltiplicandolo per $\frac{2d}{c}$, il terzo termine è dedotto dal secondo moltiplicando il secondo per $\frac{2d}{c}$: lo stesso dicasi degli altri. Conosciuta la legge di derivazione, senza passare per la strada da noi superiormente seguita, si potrà

sviluppare qualunque frazione in serie infinita colla semplice moltiplicazione.

Esemp. II. Sviluppare in serie la frazione $\frac{2k^2}{4x-3y}$. Si faccia a tale uopo $p=2k^2$, $m=4x$, $n=-3y$. Prevalendosi ora della seconda delle due trovate formole, si pongano in essa, a luogo di p, m, ed n, i rispettivi loro valori, e si avrà

$$\frac{2k^2}{4x-3y}=\frac{2k^2}{-3y}\left(1+\frac{4x}{3y}+\frac{16x^2}{9y^2}+\frac{64x^3}{27y^3}+\frac{256x^4}{81y^4}+\frac{\frac{1024x^5}{81y^4}}{4x-3y}\right).$$

In questo sviluppo si osserva, che ciascun termine deriva da quello che immediatamente lo precede moltiplicandolo per $\frac{4x}{3y}$.

182. III. Sviluppare in serie infinita $\frac{3}{11}$.

Fatto $p=3$, e scomposto il denominatore 11 in due parti, per esempio in $m=10$, ed $n=1$, sarà sostituendo nella prima serie questi valori

$$\frac{3}{10+1}=\frac{3}{10}\left(1-\frac{1}{10}+\frac{1}{100}-\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}-\frac{\frac{1}{10000}}{11}\right)$$

e sostituendoli nella seconda, si avrà

$$\frac{3}{10+1}=3\left(1-10+100-1000+10000-\frac{100000}{11}\right).$$

Tanto dalla 1.ª che dalla 2.ª di queste serie si potrà mediante la somma di tutti i termini rispettivi, compresi anche i residui, riavere la frazione generatrice $\frac{3}{11}$, ciò che potrà farsi per esercizio.

Delle frazioni continue.

183. Una frazione, il di cui denominatore è composto di un numero intero e di una frazione, ed il denominatore di questa è pure composto di un numero intero e di una frazione, e così di seguito, si chiama *frazione continua.* Di tal natura sono le seguenti espressioni

$$\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\text{ec.}}}} \qquad \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\text{ec.}}}}$$

184. Per ridurre una frazione ordinaria in frazione continua, *bisogna scomporre il denominatore della frazione in due parti, la prima delle quali sia il multiplo maggiore del suo numeratore, e la seconda il residuo del medesimo denominatore: ciò fatto si divida tanto il numeratore che il denominatore della frazione pel suo numeratore, e si verrà così ad avere l' unità divisa per una quantità intera più una frazione; questa frazione si tratti nello stesso modo della precedente, e si avrà anche per essa un' espressione analoga alla prima, e così di seguito.* Se la frazione non fosse pura in allora si avrebbe per primo quoziente un numero intero seguito da una frazione, che si tratterebbe nel modo sopra indicato.

185. *Esemp.* I. Sia la frazione $\frac{a}{b}$ da sviluppare in frazione continua.

Supponendo questa frazione vera, sarà $a<b$ ciò

posto si divida b per a, e sia q il quoto, ed r il residuo di tal divisione, per lo che si avrà

$b=aq+r$ (51), e la frazione $\frac{a}{b}=\frac{a}{aq+r}=\cfrac{1}{q+\cfrac{r}{a}}$.

Si divida ora la quantità a per r, e sia q' il quoto ed r' il residuo, si avrà quindi $a=rq'+r'$:

$$\text{onde } \frac{a}{b}=\cfrac{1}{q+\cfrac{r}{rq'+r'}}=\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{q'+\cfrac{r'}{r}}}$$

Dividendo r per r', sia q'' il quoto ed r'' il residuo, si avrà $r=r'q''+r''$, ed

$$\frac{a}{b}=\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{q'+\cfrac{r'}{r'q''+r''}}}=\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{q'+\cfrac{1}{q''+\cfrac{r''}{r'}}}}$$

Dividendo finalmente r' per r'' sia q''' il quoto, ed r''' il residuo, sarà $r'=r''q'''+r'''$, ed

$$\frac{a}{b}=\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{q'+\cfrac{1}{q''+\cfrac{r''}{r''q'''+r'''}}}}=\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{q'+\cfrac{1}{q''+\cfrac{1}{q'''+\cfrac{r'''}{r''}}}}},$$

e così di seguito.

Questa divisione verrà terminata quando r'' sarà un multiplo di r''', per non esservi in allora più alcun residuo.

186. II. Ridurre in frazione continua $\frac{3}{11}$.

Secondo quanto è stato detto, si avrà
$$\frac{3}{11}=\frac{3}{3.3+2}=\frac{1}{3+\frac{2}{3}}.$$
Operando in un modo analogo sulla frazione $\frac{2}{3}$, sarà
$$\frac{3}{11}=\frac{1}{3+\frac{2}{2+1}}=\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}.$$

187. Ponendo mente all'andamento di questa operazione è facile di vedere essere la stessa che quella, colla quale si trova il massimo comun divisore, che esiste tra due date quantità.

Infatti per trovare il massimo comun divisore fra 3 e 11 si sarebbe diviso 11 per 3, per cui si avrebbe avuto 3 per quoto e 2 per residuo, e la frazione $\frac{3}{11}$ sarebbesi cangiata in $\frac{1}{3+\frac{2}{3}}$; dividendo in seguito il divisore 3 pel primo residuo 2, si sarebbe ottenuto 1 per quoto ed 1 per residuo: seguitando a dividere il primo residuo 2 pel secondo residuo 1 si avrebbe per quoto 2 senza alcun residuo: onde la frazione $\frac{3}{11}=\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$, come appunto si è trovato superiormente.

188. Potendosi le frazioni ordinarie cangiare in frazioni continue, si potrà del pari risalire dalle frazioni continue alle frazioni ordinarie: vediamo ora come ciò possa eseguirsi nei sopra citati esempj.

189. *Esemp.* I. Sia la frazione $\frac{1}{q+\frac{1}{q'}}$ da ridursi in frazione ordinaria.

Si avrà, riducendo la quantità q ad avere anch' essa il denominatore q'
$$\frac{1}{q+\frac{1}{q'}}=\frac{1}{\frac{qq'+1}{q'}}=\frac{q'}{qq'+1}.$$

190. II. Sia ora la frazione continua di tre termini, cioè $\frac{1}{q+\frac{1}{q'+\frac{1}{q''}}}$ da ridursi a frazione ordinaria.

Riducendo primieramente q' ad avere il denominatore q'', sarà
$$\frac{1}{q+\frac{1}{q'+\frac{1}{q''}}}=\frac{1}{q+\frac{1}{\frac{q'q''+1}{q''}}}=\frac{1}{q+\frac{q''}{q'q''+1}};$$
e riducendo anche la quantità q ad avere lo stesso denominatore, che ha la frazione $\frac{q''}{q'q''+1}$, si avrà
$$\frac{1}{q+\frac{1}{q'+\frac{1}{q''}}}=\frac{1}{q+\frac{q''}{q'q''+1}}=\frac{1}{\frac{qq'q''+q+q''}{q'q''+1}}=\frac{q'q''+1}{qq'q''+q+q''}.$$

191. III. Ridurre a frazione ordinaria la frazione continua $\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{q'+\cfrac{1}{q''+\cfrac{1}{q'''}}}}$

Procedendo analogamente a quanto abbiamo fatto superiormente, si avrà

$$\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{q'+\cfrac{1}{q''+\cfrac{1}{q'''}}}}=\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{q'+\cfrac{1}{\frac{q''q'''+1}{q'''}}}}=\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{q'+\frac{q'''}{q''q'''+1}}}=$$

$$\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{\frac{q'q''q'''+q'+q'''}{q''q'''+1}}}=\cfrac{1}{q+\frac{q''q'''+1}{q'q''q'''+q'+q'''}}=$$

$$\cfrac{1}{\frac{qq'q''q'''+qq'+qq'''+q''q'''+1}{q'q''q'''+q'+q'''}}=$$

$$\frac{q'q''q'''+q'+q'''}{qq'q''q'''+qq'+qq'''+q''q'''+1}.$$

Si procederà in simile guisa per le frazioni continue composte di un maggior numero di termini.

192. Osservando con attenzione l' andamento di questi risultamenti, si vede, che il numeratore dell' ultima frazione non è altro che quello della penultima moltiplicato per q''', aggiuntovi il numeratore dell' antipenultima: il denominatore si forma anch' esso in una maniera analoga a questa. Quello che si è detto di questa frazione vale per qualunque altra frazione di simile natura, di modo che si può conchiudere, che qualunque sia il numero dei termini, di cui sia composta una frazione continua, la frazione ordinaria, che la rappresenterà, si formerà in una maniera analoga alla sopra indicata.

193. IV. Ridurre in frazione ordinaria la frazione continua $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}$

Secondo ciò che è stato detto, sarà

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\frac{2+1}{2}}}=\cfrac{1}{3+\frac{2}{3}}=\cfrac{1}{\frac{9+2}{3}}=\frac{3}{11}.$$

194. Quando per ridurre una frazione continua ad una frazione ordinaria non si prendono tutti i termini, che la compongono, allora la frazione ordinaria, da cui procede la frazione continua, non è eguale esattamente alla frazione continua, ma sempre più vi si accosta, quanto più termini si prendono. Questo avvicinamento si fa in tal maniera, che le successive frazioni ordinarie, che si trovano, prendendo uno, due, tre, quattro, ecc. termini della frazione continua, sono alternativamente maggiori, e minori del valore della frazione ordinaria generatrice, di modo tale che il valore della frazione ordinaria si trova sempre compreso tra i valori di due frazioni consecutive, come prima e seconda, seconda e terza, ecc., e le

differenze vanno sempre scemando. Questa proprietà, che hanno le frazioni continue si può dimostrare generalmente in questa maniera.

195. Ai numeri (189 e 190) si è trovato

$$\frac{1}{q+\frac{1}{q'}} = \frac{q'}{qq'+1}; \quad \frac{1}{q+\frac{1}{q'+\frac{1}{q''}}} = \frac{q'q''+1}{qq'q''+q+q''}.$$

Ora se dalla frazione continua $\frac{1}{q+\frac{1}{q'+\frac{1}{q''}}}$, il di cui valore esatto è $\frac{q'q''+1}{qq'q''+q+q''}$, si sottrarrà il primo suo termine $\frac{1}{q}$, si avrà $\frac{q'q''+1}{qq'q''+q+q''} - \frac{1}{q} =$

$$\frac{qq'q''+q-qq'q''-q-q''}{q(qq'q''+q+q'')} = -\frac{q''}{q(qq'q''+q+q'')}.$$

Dalla stessa frazione si sottragga ora la somma dei due primi termini della frazione continua, e si avrà $\frac{q'q''+1}{qq'q''+q+q''} - \frac{q'}{qq'+1} =$

$$\frac{qq'q'q''+qq'+q'q''+1-qq'q'q''-qq'-q'q''}{(qq'+1)(qq'q''+q+q'')} =$$

$$\frac{1}{(qq'+1)(qq'q''+q+q'')}.$$

Siccome dalla prima sottrazione si è ottenuto un residuo negativo, così è manifesto, essere il

primo termine $\frac{1}{q}$ maggiore di tutta la frazione continua, o della frazione ordinaria, che la rappresenta. Dalla stessa quantità sottraendo la somma dei due primi termini della frazione continua si è avuto un residuo positivo, ciò che fa vedere essere questa somma minore di tutta la frazione continua. Astraendo poi dai segni, la seconda differenza è minore della prima, come facilmente si può rilevare riflettendo, che per essere le quantità q, q', q'' tutte quantità intere (185), il fattore $qq'+1$ è maggiore di q, e per conseguenza il denominatore del secondo residuo è maggiore del denominatore del primo residuo, il numeratore 1 del secondo residuo non può essere maggiore di q'' numeratore del primo residuo; onde la frazione seconda, o il secondo residuo, per avere il denominatore maggiore di quello della prima, ed il numeratore eguale, o minore del numeratore della prima, deve essere necessariamente più piccolo del primo residuo, come si doveva provare.

196. Le frazioni continue servono molto vantaggiosamente nell' analisi per la risoluzione di varj problemi. Si ricava da essa anche la maniera di cangiare una frazione numerica in altre frazioni molto più semplici di essa, le quali si avvicinino costantemente in valore alla data frazione: ciò si ottiene collo sviluppare primieramente la data frazione in frazione continua, prendendo indi uno, due, tre, quattro, ecc. de' suoi termini, secondo il grado maggiore di approssimazione che si brama, e riducendo di nuovo questi termini in frazioni ordinarie.

197. *Esempio.* Si vuole una frazione più sem-

plice di $\frac{1415926535}{10000000000}$, il di cui valore si approssimi al valore della medesima. A tale oggetto si cangi questa frazione nella seguente frazione continua mediante le regole insegnate.

$$\frac{1415926535}{10000000000} = \cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{13+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{3}}}}}}}}}}}}.$$

Prendendo il solo primo termine $\frac{1}{7}$, si avrebbe una frazione maggiore della proposta, la di cui differenza è di $\frac{88514255}{70000000000} = 0,0012644893$; prendendo la somma dei primi due termini $\frac{15}{106}$ si avrebbe una frazione minore della proposta di $\frac{88211271}{1060000000000} = 0,0000832196$; prendendo la somma dei primi tre termini, si avrà $\frac{16}{113}$, frazione

maggiore della proposta di $\frac{301545}{1130000000000} = 0,0000002668$; prendendo l' aggregato dei primi quattro termini si ha $\frac{4686}{33102}$, quantità minore del vero valore della proposta frazione di $\frac{16157}{331020000000000} = 0,0000000005$; queste differenze si sono ottenute paragonando successivamente le frazioni ordinarie $\frac{1}{7}, \frac{15}{106}, \frac{16}{113}, \frac{4687}{33102}$ colla proposta frazione, riducendole prima allo stesso denominatore, e facendo indi la sottrazione dei rispettivi numeratori. Ponendo l'occhio sulle successive differenze si vede, come esse decrescano con rapidità, onde volendosi fermare anche al solo quarto termine, si ha la frazione $\frac{4687}{33102}$, che può essere sostituita in luogo della proposta anche nei calcoli, nei quali si esiga un grado assai grande di approssimazione, mentre la differenza non è che di circa 0,0000000005, come abbiamo veduto di sopra.

198. *Applicazione.* Chiamato 1 il diametro del Circolo, Leudolfo di Ceulen ha trovato essere la circonferenza prossimamente $= 3,1415926535$; a questa frazione decimale, sostituendo la frazione continua trovata (197), sarà la circonferenza del circolo prossimamente $= 3 + \cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\text{ec.}}}}$

Prendendo ora i due primi termini di questa frazione continua, si avrà $3+\frac{1}{7}=\frac{21+1}{7}=\frac{22}{7}$, frazione che pochissimo differisce dalla proposta; e che esprime il rapporto trovato da Archimede fra il diametro e la circonferenza di un circolo.

Prendendo tre termini, sarà

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15}}=3+\cfrac{1}{\cfrac{105+1}{15}}=3+\frac{15}{106}=$$

$\frac{318+15}{106}=\frac{333}{106}$; rapporto più approssimato di quello di Archimede.

Presi quattro termini, si ha

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1}}}=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{\cfrac{15+1}{1}}}=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{16}}=$$

$3+\cfrac{1}{\cfrac{112+1}{16}}=3+\frac{16}{113}=\frac{355}{113}$: frazione che esprime il rapporto approssimatissimo trovato da Adriano Mezio, e che non differisce dalla proposta frazione che di 0,0000002668 quantità minore di 27 cento milionesimi, mentre il primo la eccede di 0,0012644893, ed il secondo è superato dalla proposta frazione di 0,0000832196: se si prendesse un termine di più, si avrebbe un'approssimazione ancora maggiore, ciò poi che rendesi inutile in pratica.

CAPITOLO VI.

Della formazione delle potenze, dell'estrazione delle radici dei monomj, e del calcolo dei radicali e degli immaginarj.

199. Si è veduto (12) essere $a\times a=a^2$, $a\times a\times a=a^3$, $a\times a\times a\times a=a^4$: la quantità a^2 si è chiamata *seconda potenza di* a, o *quadrato di* a; a^3 *terza potenza di* a, o *cubo di* a; a^4 *sarà la quarta potenza di* a; a^5 *ne sarà la quinta*, *e così di seguito*, *di modo che* a^m, *si chiamerà l' emmesima potenza di* a. Nello stesso modo che si sono ottenute le successive potenze di a, si potrà avere qualsivoglia potenza di qualunque altra quantità: non si dovrà a tal uopo che *moltiplicare la data quantità una volta*, *due volte*, *tre volte*, ecc. $m-1$ *volte per se medesima*, *secondo che se ne voglia il quadrato*, *il cubo*, *la quarta potenza*, ecc., *o l'emmesima potenza*, *o ciò che è lo stesso*, *scrivere la quantità data tante volte come fattore*, *quante unità vi sono nell' esponente*, *a cui essa si vuole elevare.*

200. Nello stesso modo si possono formare le potenze dei numeri. Le potenze dei numeri contenute in questa tavola si sono trovate nel modo superiormente descritto.

TAVOLA

Delle prime sette potenze dei numeri naturali dall' 1 sino al 10.

Numeri o radici	Seconde Potenze o Quadrati	Terze Potenze o Cubi	Quarte Potenze	Quinte Potenze	Seste Potenze	Settime Potenze
1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128
3	9	27	81	243	729	2187
4	16	64	256	1024	4096	16384
5	25	125	625	3125	15625	78125
6	36	216	1296	7776	46656	279936
7	49	343	2401	16807	117649	823543
8	64	512	4096	32768	262144	2097152
9	81	729	6561	59049	531441	4782969
10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000

201. Per indicare che una data quantità deve essere innalzata a potenza, si suole racchiudere questa quantità tra parentesi, e fuori di esse al luogo degli esponenti mettere l'esponente, a cui deve innalzarsi.

202. *Esempio* I. Innalzare al quadrato la quantità $-4ab^2$.

Operando nel modo sopra descritto, si avrà

$$(-4ab^2)^2 = -4ab^2 \times -4ab^2 = 16a^2b^4.$$

203. II. Elevare al quadrato la frazione $\frac{2p^3q}{3m}$.

Indicando prima, poi eseguendo questa operazione, sarà

$$\left(\frac{2p^3q}{3m}\right)^2 = \frac{(2p^3q)^2}{(3m)^2} = \frac{2p^3q \times 2p^3q}{3m \times 3m} = \frac{4p^6q^2}{9m^2}.$$

204. III. Innalzare al cubo la quantità $3a^2b$.

Operando al solito, si avrà

$$(3a^2b)^3 = 3a^2b \times 3a^2b \times 3a^2b = 27a^6b^3.$$

205. IV. Elevare al cubo la quantità $-4ab^2$.

Eseguendo l'enunciata operazione, si avrà

$$(-4ab^2)^3 = (-4ab^2)^2 \times -4ab^2 =$$
$$16a^2b^4 \times -4ab^2 = -64a^3b^6.$$

Volendo elevare la stessa quantità alla quarta potenza, si avrà

$$(-4ab^2)^4 = (-4ab^2)^3 \times -4ab^2 =$$
$$-64a^3b^6 \times -4ab^2 = 256a^4b^8.$$

Operando in una maniera a questa analoga, si trova essere

$$(-4ab^2)^5 = (-4ab^2)^4 \times -4ab^2 =$$
$$256a^4b^8 \times -4ab^2 = -1024a^5b^{10}.$$
$$(-4ab^2)^6 = (-4ab^2)^5 \times -4ab^2 =$$
$$-1024a^5b^{10} \times -4ab^2 = 4096a^6b^{12}.$$

Così pure sarebbe

$$\left(-\frac{2p^3q}{3m}\right)^3 = -\frac{2p^3q}{3m} \times -\frac{2p^3q}{3m} \times -\frac{2p^3q}{3m} = -\frac{8p^9q^3}{27m^3}$$

$$\left(-\frac{2p^3q}{3m}\right)^4 = \left(-\frac{2p^3q}{3m}\right)^3 \times -\frac{2p^3q}{3m} =$$
$$-\frac{8p^9q^3}{27m^3} \times -\frac{2p^3q}{3m} = \frac{16p^{12}q^4}{81m^4}.$$

206. Considerando ora attentamente la maniera, colla quale si sono formate le diverse potenze delle

quantità date nei proposti esempj, si ricava facilmente un metodo compendioso per eseguire qualunque innalzamento a potenza senza passare per la lunga, e tediosa via della moltiplicazione: questo metodo consiste nelle seguenti regole.

Regola per i segni.

207. Incominciando dai segni, si osserva, che qualunque quantità positiva moltiplicata per se stessa un numero qualunque di volte dà sempre un prodotto positivo, onde si può conchiudere, *che lo sviluppo di qualunque potenza di qualsivoglia quantità positiva sarà sempre affetto da segno positivo.*

Se la quantità da innalzarsi a potenza fosse negativa, in allora *le potenze pari di questa quantità saranno positive, e le impari negative*; giacchè una quantità negativa presa per fattore un numero pari di volte dà sempre un prodotto positivo, e presa al contrario come fattore un numero dispari di volte, dà costantemente un prodotto negativo.

Regola per i coefficienti.

208. I coefficienti numerici si innalzano a potenza, *moltiplicandoli per se stessi tante volte meno una, quante unità vi sono nell' esponente della potenza, a cui si vogliono elevare.* Alle volte, invece di eseguire questa operazione, non si fa che indicarla nello stesso modo appunto, che essa si indica per le lettere.

Regola per le lettere, e per gli esponenti.

209. *Se le lettere non hanno esponente, prendono l' esponente della potenza che si deve fare, ma se sono di già innalzate a qualche potenza, l' esponente che verranno ad avere risulterà dal prodotto*

dell' esponente che avevano da prima, pel nuovo esponente della potenza, a cui si vogliono elevare: così per innalzare all' *emmesima* potenza $-3a^3b^nc$, si avrà $(-3a^3b^nc)^m = \pm 3^m a^{3m} b^{mn} c^m$. A quest' ultima espressione si è posto il doppio segno, perchè non si sa, se m sia pari o dispari: nel caso di m pari valerà il segno superiore, e nel caso di m dispari, il segno inferiore (207).

210. Da quel che abbiamo detto si rileva facilmente, che l' esponente di qualsivoglia quantità innalzata al quadrato è doppio dell' esponente primitivo, che l' esponente di una quantità elevata al cubo ne è triplo, che una quantità elevata alla quarta potenza ha un esponente quadruplo, ecc., ed in generale, che l' esponente, che si trova avere una quantità stata innalzata ad m, è m volte più grande di quello che la quantità medesima aveva prima che fosse elevata alla potenza *emmesima*.

211. La quantità a da cui si sono desunte le altre quantità a^2, a^3, $a^4 \ldots\ldots a^m$ per mezzo di successive moltiplicazioni per se medesima, dicesi *la radice delle quantità ottenute*; essa poi chiamasi *radice seconda, o radice quadrata di a^2, radice terza, o cubica di a^3, radice quarta di a^4, ed in generale radice emmesima di a^m.*

212. Queste radici si sogliono esprimere col simbolo $\sqrt{\ }$ posto avanti alle potenze, che chiamasi *radicale*; il numero poi, che si colloca nell' apertura di questo simbolo, si denomina *esponente*, *indice* o *grado* del radicale: così $\sqrt[3]{a}$ indica la radice cubica di a, ossia quella quantità, che moltiplicata due volte per se medesima produce a; $\sqrt[5]{b^2}$ dinota la radice quinta di b^2, $\sqrt[m]{c^n}$ la radice *emmesima* di

e^n. La radice seconda delle quantità si suole indicare col solo simbolo $\sqrt{}$ omettendo l' esponente 2.

213. Da quanto si è detto (210) si rileva facilmente, che un radicale di qualunque grado si può rappresentare col dividere gli esponenti delle quantità soggette a questo radicale pel grado del radicale stesso; onde la radice quadrata di una quantità qualunque si può denotare, dividendo l' esponente della data quantità per 2: di modo che sarà $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$: di fatto moltiplicando $a^{\frac{1}{2}}$ per se medesima si ottiene per l' appunto a.

La radice cubica di una quantità qualunque si ha dividendo il suo esponente per 3: così $\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}}$: in fatti $a^{\frac{2}{3}}\times a^{\frac{2}{3}}\times a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{6}{3}}=a^2$: la radice quarta si ha dividendo l' esponente per 4; e così di seguito; di maniera che col dividere l' esponente di una data quantità per m, si indicherà la radice *emmesima* di quella quantità; per lo che sarà $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$.

214. Da quanto si è detto si raccoglie, che siccome gli esponenti interi indicano alzamento a potenza, così i fratti indicheranno estrazione di radice; questa radice sarà del grado segnato dal denominatore dell' esponente.

Dell' estrazione delle radici de' monomj.

215. L' estrazione delle radici è propriamente l' operazione inversa dell' innalzamento a potenze, nello stesso modo appunto, che la sottrazione è opposta all' addizione, la divisione alla moltiplicazione; motivo per cui, volendo estrarre la radice di un grado qualunque da una data potenza, bisognerà distruggere ciò che si fosse fatto, col elevare

la quantità primitiva ad una potenza dello stesso grado della radice da estrarsi.

Regola per le lettere e per gli esponenti.

216. Siccome, per innalzare una data quantità ad una data potenza, si moltiplica il suo esponente per quella potenza, a cui si vuole elevare (209); così per estrarre qualsivoglia radice da una data quantità qualunque monomia, basterà *dividere il suo esponente per l' indice del dato radicale, come si è di già osservato al* (213).

Regola per i coefficienti.

217. Riguardo ai coefficienti, *si caverà da essi la radice indicata coi metodi, che si insegnano nell' Aritmetica, qualora i coefficienti siano potenze esatte di grado eguale all' indice della radice, che devesi estrarre; in caso diverso si procurerà di scomporli, se è possibile in fattori, uno dei quali sia una potenza esatta del grado sopra indicato, onde estrarre da esso la data radice.*

Regola per i segni.

218. Siccome una quantità qualunque positiva, o negativa elevata ad una potenza pari dà sempre un prodotto positivo (207); *così volendo estrarre una radice di grado pari da una quantità, si dovrà porre avanti alla radice il doppio segno* $\pm$, potendo avere la radice due valori uno positivo, e l' altro negativo: così $\sqrt{a^2}=\pm a$, poichè a^2 può essere nata tanto dal moltiplicare $+a$ per se stessa, quanto dal moltiplicare $-a$ pure per se medesima; *se il grado della radice sarà dispari in questo caso la radice dovrà avere il segno della potenza*, poichè nella formazione delle potenze (207) si è osservato,

che il risultamento positivo di una potenza di grado impari proviene costantemente da una quantità in più, ed il risultamento negativo di una potenza impari deriva sempre da una quantità o radice negativa.

219. Le radici di grado pari delle quantità negative sono impossibili, giacchè non vi è quantità positiva, o negativa che presa un numero pari di volte per fattore dia un prodotto negativo: alle radici pari delle quantità negative per questa ragione si dà il nome di *quantità, o simboli immaginarj*, e l' operazione non potendosi eseguire viene indicata. Benchè queste specie di radici nulla rappresentino di esistente, possono ciò non ostante entrare nel calcolo, come le altre quantità: poichè è proprietà dell' Algebra di operare tanto sulle quantità, che si conoscono, come su quelle, che non si conoscono. Di queste si parlerà più avanti, essendo la conoscenza delle medesime della massima importanza nel progresso del calcolo.

220. *Esemp.* I. Estrarre la radice quadrata di $a^6 b^2$.

Operando secondo le regole insegnate, si avrà

$$\sqrt{a^6 b^2} = \pm a^{\frac{6}{2}} b^{\frac{2}{2}} = \pm a^3 b.$$

Di fatto tanto $+a^3 b$, che $-a^3 b$ moltiplicata per se medesima produce $a^6 b^2$.

221. II. Estrarre la radice quarta da $81 a^8 b^{12}$.

Eseguendo l' enunciata operazione, si avrà

$$\sqrt[4]{81 a^8 b^{12}} = \pm 3 a^2 b^3.$$

222. III. Estrarre la radice cubica dal monomio $8a^9 b^3 c^6$.

Secondo quello che si è detto, si avrà

$$\sqrt[3]{8 a^9 b^3 c^6} = 2 a^{\frac{9}{3}} b^{\frac{3}{3}} c^{\frac{6}{3}} = 2 a^3 b c^2.$$

223. Operando nella stessa maniera, si avrà $\sqrt[3]{-27 a^3 b^{3m} c^9} = -3 a b^m c^3$; così pure sarà $\sqrt[4]{256 a^8 b^{16}} = \pm 4 a^2 b^4$, ecc.

224. Gli esponenti delle lettere non sono sempre, come in questi esempj, divisibili esattamente per l' indice della radice: così

$$\sqrt{c^3} = c^{\frac{3}{2}} = c \times c^{\frac{1}{2}};\ \sqrt[3]{c^5} = c^{\frac{5}{3}} = c \times c^{\frac{2}{3}};\ \sqrt[4]{c^3} = c^{\frac{3}{4}},$$

ecc.; espressioni che lasciano indicata o in tutto o in parte la divisione degli esponenti, e per conseguenza l' estrazione della radice. Queste radici quantunque inassegnabili, sono di un grandissimo uso nel calcolo, e perciò si devono considerare con tutta l' attenzione.

225. Quelle quantità, delle quali non si può assegnare esattamente la radice, chiamansi *quantità irrazionali*, *incommensurabili* o *sorde*; a differenza di quelle, le di cui radici sono assegnabili, che si dicono *quantità razionali* o *commensurabili*.

226. Quando l' esponente di una data quantità è maggiore del grado della radice, che da essa si vuole estrarre, ma non un suo multiplo, in allora *si scompone quella quantità in due fattori, uno dei quali abbia un esponente, che sia il multiplo maggiore dell' indice radicale contenuto nell' esponente della quantià data; ciò fatto, si eseguisce mediante la divisione dell' esponente l' estrazione della radice sulla parte commensurabile, lasciando indicata la parte incommensurabile*: di modo che sarà

$$\sqrt{a^3 b^5} = \sqrt{a^2 ab^4 b} = \pm ab^2 \sqrt{ab},$$

$$\sqrt[3]{-48 a^9 b^5 c^{10}} = \sqrt[3]{-8.6 a^9 b^3 b^2 c^9 c} =$$

$$-2 a^3 b c^3 \sqrt[3]{6 b^2 c},$$

$$\sqrt[4]{64 a^9 b^{15} c^5} = \pm 2 a^2 b^3 c \sqrt[4]{4 a b^3 c}.$$

227. Si estrarrà la radice *da una quantità monomia frazionaria, estraendola separatamente dal numeratore, e dal denominatore, avvertendo che i segni delle radici delle frazioni sono appartenenti al numeratore*: così la radice quadrata della frazione $\frac{a^2}{b^2}$ sarà $\pm\frac{a}{b}$; e la radice cubica di $-\frac{8a^6}{27b^9}$ sarà $-\frac{2a^2}{3b^3}$.

228. Nella stessa maniera, che una quantità soggetta ad un radicale si può cavar fuori dal vincolo radicale, col dividere il suo esponente per l' indice del radicale medesimo, si potrà del pari trasportarla sotto il vincolo radicale, qualora si trovasse al di fuori, *col moltiplicare il suo esponente per l' esponente del dato radicale*: con ciò si liberano i radicali dai coefficienti, da cui sono affetti.

229. *Esempio.* Liberare dal suo coefficiente la quantità $3a\sqrt[3]{b}$.

Secondo quello che abbiamo detto, avremo

$3a\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{27a^3b}$. Sarà del pari

$2a^3\sqrt{3m}=\sqrt{4a^6\times 3m}=\sqrt{12a^6m}$.

230. Per innalzare a potenza un monomio qualunque radicale, *basterà moltiplicare ciascun esponente del monomio sotto il vincolo radicale pel grado della potenza, che si vuol fare*: di modo che sarà $(\sqrt[3]{ab^2})^2=\sqrt[3]{a^2b^4}$. In fatti pei (209, 213) si ha

$(\sqrt[3]{ab^2})^2=(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}})^2=a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{a^2b^4}$.

231. Per innalzare una quantità radicale qualunque ad una potenza, il di cui esponente sia lo

stesso di quello del radicale, basterà *levare da quella espressione il segno radicale*. Infatti per innalzare $\sqrt{a}$ al quadrato, si avrà

$(\sqrt{a})^2=a^{\frac{1}{2}\cdot 2}=a^{\frac{2}{2}}=a$: si avrà del pari

$(\sqrt[m]{a})^m=a^{\frac{m}{m}}=a$.

232. Per estrarre una radice di qualunque grado da una espressione radicale, basterà *moltiplicare l' indice del suo primo radicale per l' indice della nuova radice da estrarsi, indi colle regole sopra indicate, si eseguirà totalmente, o parzialmente questa operazione, quando vi sia luogo*: così la radice cubica di $\sqrt{a}$, sarà $\sqrt[3]{\sqrt{a}}=\sqrt[6]{a}$; poichè $\sqrt[3]{\sqrt{a}}=\sqrt[3]{a^{\frac{1}{2}}}=a^{\frac{1}{2\cdot 3}}=a^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{a}$ (213 e 214).

Si sarebbe ottenuta la stessa quantità estraendo la radice quadrata da $\sqrt[3]{a}$; onde $\sqrt[3]{\sqrt{a}}=\sqrt{\sqrt[3]{a}}$.

Di qui apparisce, *che una quantità qualunque soggetta a radicali doppj si può esprimere con un sol radicale, l' indice del quale eguagli il prodotto degli indici dei radicali dati*: cosicchè sarà

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{b^3}}=\sqrt[mn]{b^3}$. Sarà per la stessa ragione

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{q^4}}}=\sqrt[m]{\sqrt[np]{q^4}}=\sqrt[mnp]{q^4}$, ecc.

233. Nella stessa maniera che una quantità soggetta a più radicali si può cangiare in un' altra dello stesso valore avente un sol vincolo radicale, il di cui indice risulti dal prodotto degli indici radicali dati, si potrà del pari *da un radicale, il di cui indice sia composto di due o più fattori, risalire ad un radicale di radicale avente tanti vincoli*,

quanti sono i fattori nell' indice del dato radicale.

Così $\sqrt[12]{ab}=\sqrt[3\cdot4]{ab}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{ab}}=\sqrt[3]{\sqrt[2\cdot2]{ab}}=\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{ab}}}$.

Come pure $\sqrt[mnp]{q}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{q}}}$.

234. Prima di passare al calcolo delle quantità radicali insegnerò la maniera di presentare queste quantità sotto una forma, che le rende suscettibili dei medesimi calcoli, ai quali si assoggettano le quantità razionali.

235. Nella stessa maniera che le quantità intere possono prendere la forma frazionaria, e le frazioni presentarsi sotto diversi aspetti senza che il loro valore sia alterato: così gli esponenti senza cangiar di valore potranno prendere diverse forme, e le potenze in conseguenza diverso aspetto: cosicchè si avrà, p. e., $a=a^{\frac{2}{2}}=a^{\frac{3}{3}}=a^{\frac{4}{4}}=a^{\frac{5}{5}}=a^{\frac{m}{m}}=a^{\frac{np}{np}}=$ ec. Siccome poi (214) i divisori degli esponenti esprimono dei radicali del grado da essi denotato, così sarà $a=\sqrt{a^2}=\sqrt[3]{a^3}=\sqrt[4]{a^4}=\sqrt[5]{a^5}=\sqrt[m]{a^m}=\sqrt[np]{a^{np}}$. Si avrà del pari $a^2=a^{\frac{2.3}{3}}=a^{\frac{2.m}{m}}=\sqrt[3]{a^6}=\sqrt[m]{a^{2m}}$. Per lo che si conchiuderà, 1.° *che le quantità razionali si potranno ridurre a radicali di quel grado che si vorrà, moltiplicando, e dividendo nello stesso tempo gli esponenti delle date quantità per l' esponente del radicale proposto:* 2.° *che una quantità radicale conserverà il suo valore, se il suo indice radicale, e nello stesso tempo l' esponente, che la data quantità si trova avere verranno moltiplicati, o divisi per una stessa quantità qualunque.*

236. Da ciò si ricava una facile maniera di

semplificare i radicali, col togliere da essi mediante la divisione i fattori comuni all' indice radicale, ed agli esponenti delle quantità sotto il radicale; come pure di ridurre tutti i radicali allo stesso grado, riducendo i loro esponenti a frazioni dello stesso denominatore, o ciò che è lo stesso, moltiplicando l' indice radicale di ciascuna espressione, e nello stesso tempo anche gli esponenti delle quantità che si trovano sotto i rispettivi radicali pel prodotto di tutti gli indici radicali delle altre espressioni. I seguenti esempj rischiareranno quanto si è detto.

237. *Esemp.* I. Semplificare l' espressione $\sqrt[6]{a^3b^3}$. Dividendo per 3 tanto l' indice radicale, quanto gli esponenti delle quantità sotto il radicale, si avrà $\sqrt[6]{a^3b^3}=\sqrt{ab}$. Si avrà del pari $\sqrt[2m]{b^{2m}c^{mp}d^{5m}}=\sqrt{b^2c^pd^5}$ dividendo per m.

238. Ridurre le due espressioni radicali $\sqrt{b}$, e $\sqrt[3]{a^2}$ allo stesso indice radicale.

Secondo quanto si è detto superiormente, sarà $\sqrt{b}=\sqrt[6]{b^3}$; $\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[6]{a^4}$.

239. Per ridurre poi i tre radicali $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b^2}$, $\sqrt[5]{c^2}$ allo stesso nome, moltiplicheremo il primo indice radicale e nello stesso tempo l' esponente di a per 15, che è il prodotto degli altri due indici radicali: il secondo radicale e l' esponente di b per 10, che è il prodotto degli indici radicali delle altre due date espressioni, moltiplicheremo finalmente il terzo radicale e l' esponente di c per 6, prodotto degli indici radicali delle prime due quantità, ed avremo, operando in questa maniera, le seguenti espressioni $\sqrt[30]{a^{15}}$, $\sqrt[30]{b^{20}}$, $\sqrt[30]{c^{12}}$ equivalenti

alle prime tre, tutte soggette a radicali dello stesso grado.

Ragionando nella medesima maniera, si vede, che le espressioni $\sqrt[m]{a^q}$, $\sqrt[n]{b^r}$, $\sqrt[p]{c^x}$, $\sqrt[3]{d^y}$, ridotte allo stesso indice radicale si cangeranno nelle seguenti, $\sqrt[3mnp]{a^{3npq}}$, $\sqrt[3mnp]{b^{3mpr}}$, $\sqrt[3mnp]{c^{3mnx}}$, $\sqrt[3mnp]{d^{mnpy}}$.

240. Quando le espressioni che si devono ridurre allo stesso radicale sono affette da indici tali, che uno di essi sia un multiplo dell' altro o degli altri, *basta in allora per ridurli allo stesso grado, moltiplicare ciascun indice summultiplo pel numero delle volte, che egli stà nell' indice maggiore:* così le due espressioni $\sqrt{a}$, e $\sqrt[4]{b}$ si ridurranno allo stesso indice radicale moltiplicando per 2 tanto l' indice radicale, quanto l' esponente della quantità sotto il primo radicale, per cui si avrà $\sqrt[4]{a^2}$, in luogo di $\sqrt{a}$, radicale dello stesso grado di $\sqrt[4]{b}$. Le tre seguenti espressioni radicali $\sqrt{a}$, $\sqrt[4]{b}$, $\sqrt[8]{c}$ si ridurranno allo stesso indice radicale moltiplicando per 4 tanto l' indice radicale della prima espressione, quanto l' esponente di a, e per 2 l' indice radicale della 2.ª espressione, non meno che l' esponente di b, onde si avranno le tre seguenti espressioni radicali $\sqrt[8]{a^4}$, $\sqrt[8]{b^2}$, $\sqrt[8]{c}$ tutte dello stesso nome, ed equivalenti ai radicali proposti.

241. Se gli indici radicali non sono multipli, in allora *si sceglie il più piccolo numero, che sia divisibile per tutti gli indici radicali delle date espressioni, e tanto l' esponente di ciascun radicale, quanto gli esponenti delle quantità ad esso soggette si moltiplicano pel numero delle volte che il suo indice radicale è contenuto nel numero che si è preso:* così se fossero proposti i tre seguenti radicali $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b^2}$, $\sqrt[4]{c^3}$, da ridursi allo stesso grado, osserverei, che il 12 è il numero più piccolo divisibile pei tre indici radicali delle proposte espressioni, (vedi la mia arit.ª N. 225) per ciò moltiplicherei gli esponenti della prima espressione radicale per 6, giacchè il suo indice radicale sta appunto 6 volte nel 12; moltiplicherei gli esponenti della seconda espressione per 4, e quelli della terza per 3, per cui avrei le tre espressioni seguenti dello stesso valore delle prime, $\sqrt[12]{a^6}$, $\sqrt[12]{b^8}$, $\sqrt[12]{c^9}$.

Delle quattro operazioni sulle quantità radicali.

Addizione, e sottrazione.

242. L' addizione, e la sottrazione delle quantità radicali si fa *unendo queste quantità coi segni indicati dall' operazione, che su di esse si deve eseguire, quando le quantità proposte sono dissimili; se poi queste quantità sono simili, si fa sommando, o sottraendo i loro coefficienti, come nell' addizione, e sottrazione delle quantità simili razionali*: così per sommare le due espressioni radicali $\sqrt{a}$, e $\sqrt[3]{b^2}$, si scriverà $\sqrt{a}+\sqrt[3]{b^2}$.

Per sommare poi le due quantità $\sqrt[3]{b^2m}$, $3\sqrt[6]{b^4m^2}$, si ridurranno prima allo stesso indice radicale, onde osservare se sono quantità simili, per cui si avrà $\sqrt[3]{b^2m}$, $3\sqrt[3]{b^2m}$, ed eseguendo l' enunciata operazione, sarà $\sqrt[3]{b^2 m} + 3\sqrt[6]{b^4 m^2} = \sqrt[3]{b^2 m} + 3\sqrt[3]{b^2 m} = 4\sqrt[3]{b^2 m}$.

Sottraendo da $5b\sqrt[3]{m}$ la quantità $3\sqrt{a}$, si avrà

$$5b\sqrt[3]{m} - 3\sqrt{a}.$$

Da $8\sqrt[4]{m^2}$ sottraendo $5\sqrt{m}$, si otterrà

$$8\sqrt[4]{m^2} - 5\sqrt{m} = 8\sqrt{m} - 5\sqrt{m} = 3\sqrt{m}.$$

Della Moltiplicazione, e della divisione.

243. Per moltiplicare o dividere le quantità radicali dello stesso grado *si opererà nel medesimo modo sulle quantità come se non vi fossero i radicali, ed al prodotto, o al quoto si anteporrà il radicale comune;* se poi i radicali fossero diversi, *prima di eseguire o l' una o l' altra di queste operazioni, converrà ridurli allo stesso grado, indi sulle quantità ridotte si procederà nella maniera sopra indicata.*

Esempj di moltiplicazione.

244. Moltiplicare $\sqrt{a}$ per $\sqrt{b}$.
Disponendo, ed eseguendo la moltiplicazione, si avrà

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = a^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{2}} = (ab)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ab} \ (214).$$

Per moltiplicare $3\sqrt[3]{b^2}$ per $2\sqrt{3a}$, si avrà

$$3\sqrt[3]{b^2} \times 2\sqrt{3a} = 3\sqrt[6]{b^4} \times 2\sqrt[6]{27a^3} = 6\sqrt[6]{27a^3 b^4}.$$

Esempj di divisione.

245. Dividere $\sqrt{a}$ per $\sqrt{b}$.
Disponendo, ed eseguendo la divisione, si avrà

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} = a^{\frac{1}{2}} : b^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Onde dividere $8\sqrt[5]{a^6}$ per $2\sqrt[10]{a^3 b}$, si avrà, riducendo prima allo stesso indice radicale queste due espressioni, $8\sqrt[10]{a^{12}}$, $2\sqrt[10]{a^3 b}$, ed eseguendo la divisione, sarà

$$8\sqrt[10]{a^{12}} : 2\sqrt[10]{a^3 b} = 4\sqrt[10]{\frac{a^{12}}{a^3 b}} = 4\sqrt[10]{\frac{a^9}{b}}.$$

246. La moltiplicazione, e la divisione dei polinomj radicali si eseguiscono nello stesso modo, come si è eseguita sulle quantità razionali, avuto però riguardo alle regole insegnate per la moltiplicazione, e divisione dei monomj radicali. I seguenti esempj serviranno a rischiarare quanto si è detto.

247. *Esempio* I. Per moltiplicare tra di loro i polinomj radicali seguenti, si avrà

$$\begin{array}{l}
3m\sqrt{a} + 2b\sqrt{ab} - \sqrt{m} - b\sqrt{a} \\
3\sqrt{c} - 2b\sqrt{a} + \sqrt{m} \\
\hline
9m\sqrt{ac} + 6b\sqrt{abc} - 3\sqrt{cm} - 3b\sqrt{ac} \\
- 6bm\sqrt{a^2} - 4b^2\sqrt{a^2 b} + 2b\sqrt{am} + 2b^2\sqrt{a^2} \\
+ 3m\sqrt{am} + 2b\sqrt{abm} - \sqrt{m^2} - b\sqrt{am} \\
\hline
9m\sqrt{ac} + 6b\sqrt{abc} - 3\sqrt{cm} - 3b\sqrt{ac} - 6abm - 4ab^2\sqrt{b} \\
+ b\sqrt{am} + 2ab^2 + 3m\sqrt{am} + 2b\sqrt{abm} - m.
\end{array}$$

Osservazione. In quest' esempio nel fare la riduzione delle quantità simili, ho nello stesso tempo liberate dai radicali quelle quantità, che erano suscettibili di questa operazione.

248. II. Sieno da moltiplicarsi i due polinomj $m - 3\sqrt{a} - 2b^3\sqrt[3]{c^2}$, e $\sqrt{a} - m\sqrt[3]{b^2 c}$, che ridotti a contenere radicali dello stesso grado, diventano

$$
\begin{array}{c}
m - 3\sqrt[6]{a^3} - 2b^3\sqrt[6]{c^4} \\
\sqrt[6]{a^3} - m\sqrt[6]{b^4c^2} \\
\hline
m\sqrt[6]{a^3} - 3\sqrt[6]{a^6} - 2b^3\sqrt[6]{a^3c^4} \\
- m^2\sqrt[6]{b^4c^2} + 3m\sqrt[6]{a^3b^4c^2} + 2b^3m\sqrt[6]{b^4c^6},
\end{array}
$$

e riducendo a minimi termini tutti i radicali, che ne sono suscettibili, si avrà per prodotto totale $m\sqrt{a} - 3a - 2b^3\sqrt[6]{a^3c^4} - m^2\sqrt[3]{b^2c} + 3m\sqrt[6]{a^3b^4c^2} + 2b^3cm\sqrt[3]{b^2}$.

Osservazione. Più brevemente si poteva eseguire questa moltiplicazione, moltiplicando a dirittura i due polinomj proposti, avendo riguardo nel fare i prodotti parziali di ridurre i radicali ad avere lo stesso grado.

249. *Esempio* I. Dividere $a^3 + 2ab\sqrt{ab} + b^3$ per $a\sqrt{a} + b\sqrt{b}$.

Ordinati questi due polinomj per rapporto alla quantità a, e disposti per la divisione, si avrà

$$
\begin{array}{l|l}
a^3 + 2ab\sqrt{ab} + b^3 & a\sqrt{a} + b\sqrt{b} \\
\cline{2-2}
-a^3 - ab\sqrt{ab} & a\sqrt{a} + b\sqrt{b} \\
\cline{1-1}
ab\sqrt{ab} + b^3 & \\
-ab\sqrt{ab} - b^3 & \\
\cline{1-1}
\quad 0 \qquad 0 &
\end{array}
$$

Per eseguire questa divisione ho considerata a^3 come composta di due fattori, cioè di a^2, e di a, ossia di a^2, e $\sqrt{a}\sqrt{a}$, dividendo $a^2\sqrt{a}\sqrt{a}$ per $a\sqrt{a}$, ho ottenuto per quoto $a\sqrt{a}$, che moltiplicato pel divisore, e sottratto dal dividendo mi ha lasciato il residuo $ab\sqrt{ab} + b^3$; ho diviso indi questo residuo per $a\sqrt{a}$, ed ho avuto per quoto $b\sqrt{b}$, che moltiplicato pel divisore mi ha dato un prodotto, il quale sottratto dal dividendo non mi ha lasciato più alcun residuo; indizio che la divisione era finita.

250. II. Dividere

$$6b\sqrt{ab} - 4b^2\sqrt[6]{b^3c^2} - 9m\sqrt[6]{a^3c^2} + 6bm\sqrt[3]{c^2}$$

per $3\sqrt{a} - 2b\sqrt[3]{c}$.

Si avrà, disponendo, ed eseguendo la divisione

$$
\begin{array}{l|l}
\multicolumn{2}{l}{6b\sqrt{ab} - 4b^2\sqrt[6]{b^3c^2} - 9m\sqrt[6]{a^3c^2} + 6bm\sqrt[3]{c^2}} \\
-6b\sqrt{ab} + 4b^2\sqrt[6]{b^3c^2} & 3\sqrt{a} - 2b\sqrt[3]{c} \\
\hline
-9m\sqrt[6]{a^3c^2} + 6bm\sqrt[3]{c^2} & 2b\sqrt{b} - 3m\sqrt[3]{c} \\
+9m\sqrt[6]{a^3c^2} - 6bm\sqrt[3]{c^2} & \\
\cline{1-1}
\quad 0 \qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Ho diviso primieramente $6b\sqrt{ab}$ per $3\sqrt{a}$, ed ho avuto $2b\sqrt{b}$ per quoto, il quale moltiplicato pel divisore, e sottratto il suo prodotto dal dividendo, mi ha lasciato il residuo $-9m\sqrt[6]{a^3c^2} + 6bm\sqrt[3]{c^2}$: ho diviso quindi il primo termine di questo residuo per $3\sqrt{a}$, ossia per $3\sqrt[6]{a^3}$, ed ho avuto per quoto $-3m\sqrt[6]{c^2} = -3m\sqrt[3]{c}$, che moltiplicato pel divisore, ed il prodotto sottratto dal dividendo ha dato zero per residuo.

251. Se le quantità da moltiplicarsi, o da dividersi fossero soggette a radicali *universali*, che abbracciassero cioè tutto il polinomio, si ridurrebbero, occorrendo, prima questi radicali allo stesso grado, tolto poi il radicale universale,

si opererebbe sui dati polinomj, come se il radicale universale non vi fosse, ed il prodotto, o il quoziente ottenuto si riporrebbe sotto il radicale universale proposto.

252. *Es.* Moltiplicare $\sqrt[3]{(a+b\sqrt[3]{a})}$ per $\sqrt[3]{(m-n\sqrt{b})}$:
Si avrà, togliendo per ora il vincolo radicale, che nei due fattori è dello stesso grado, ed eseguendo la moltiplicazione

$$\begin{array}{c} a+b\sqrt[3]{a} \\ m-n\sqrt{b} \\ \hline \end{array}$$

$am+bm\sqrt[3]{a}-an\sqrt{b}-bn\sqrt[6]{a^2b^3}$; e rimettendo questo prodotto sotto il radical universale, sarà

$$\sqrt[3]{(a+b\sqrt[3]{a})}\times\sqrt[3]{(m-n\sqrt{b})}=$$
$$\sqrt[3]{(am+bm\sqrt[3]{a}-an\sqrt{b}-bn\sqrt[6]{a^2b^3})}.$$

253. Siccome il valore di una frazione non viene alterato moltiplicando i suoi termini per una medesima quantità qualunque, così alcune volte si potranno togliere i radicali esistenti nel numeratore, o nel denominatore di una data frazione monomia, *moltiplicando ambi i termini della frazione pel radicale, che si vuol far smarrire, innalzato ad una podestà eguale all'indice del radicale medesimo diminuito dell'unità.*

254. *Esempio.* Dalla frazione $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b^2}}$ far sparire il radicale contenuto nel suo numeratore.

A tale oggetto moltiplico ambi i suoi termini per $\sqrt{a}$, ed ho

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b^2}}=\frac{\sqrt{a}\times\sqrt{a}}{\sqrt{a}\times\sqrt[3]{b^2}}=\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt[6]{a^3}\times\sqrt[6]{b^4}}=\frac{a}{\sqrt[6]{a^3b^4}}.$$

255. II. Liberare la stessa espressione $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b^2}}$ dal radicale contenuto nel suo denominatore.

Moltiplicando ambi i termini di questa frazione per $(\sqrt[3]{b^2})^2$; si avrà

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b^2}}=\frac{\sqrt{a}\times(\sqrt[3]{b^2})^2}{\sqrt[3]{b^2}\times(\sqrt[3]{b^2})^2}=\frac{\sqrt{a}\times\sqrt[3]{b^4}}{(\sqrt[3]{b^2})^3}=$$
$$\frac{\sqrt{a}\times b\sqrt[3]{b}}{b^2}=\frac{\sqrt[6]{a^3}\times b\sqrt[6]{b^2}}{b^2}=\frac{b\sqrt[6]{a^3b^2}}{b^2}=\frac{\sqrt[6]{a^3b^2}}{b}.$$

Delle quantità immaginarie e del modo di calcolarle.

256. Si dicono *immaginarie*, *impossibili*, o *assurde* quelle quantità, che essendo negative, si presentano sotto un radicale di grado pari (219), come sarebbero le espressioni $\sqrt{-a^2}$, $\sqrt[4]{-b}$, $\sqrt[2n]{-c^m}$, ecc.
Non esistendo queste quantità, che nella immaginazione, sembrerebbe, che non se ne dovesse far conto alcuno, e che esse non dovessero essere frammischiate colle quantità reali: ma siccome dalla combinazione di quantità immaginarie nascono in certi casi delle quantità reali, così l'analisi prende a considerarle, ed insegna ad operare sopra di esse, come si opera sulle quantità reali; nel calcolo però di queste quantità succedono delle variazioni dipendenti dalla loro natura, le quali è necessario di esporre. Le quantità immaginarie servono assai utilmente nella soluzione dei problemi a far conoscere colla loro presenza l'impossibilità della soluzione, quando il problema sia di tal natura.

257. Qualunque monomio immaginario può essere rappresentato da due fattori, uno reale, e l'altro immaginario, così $\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{-1} = \pm a\sqrt{-1}$. Come pure $\sqrt[4]{-3a^3b} = \sqrt[4]{3a^3b} \cdot \sqrt[4]{-1}$, ecc.

Delle quattro operazioni sulle quantità immaginarie.

Sommazione, e sottrazione.

158. Queste due operazioni si fanno sulle quantità immaginarie nella stessa maniera, che si eseguiscono sulle quantità reali: così

$$a\sqrt{-1} + b\sqrt{-1}, \text{ ed } a\sqrt{-1} - b\sqrt{-1}$$

fa vedere nel primo caso, che la quantità $b\sqrt{-1}$ è aggiunta, e nel secondo caso è sottratta dalla quantità $a\sqrt{-1}$.

Moltiplicazione.

259. Prima di passare ad eseguire quest' operazione si osservi, che dovendo estrarre da una quantità qualunque, per esempio da a^2, la radice quadrata, e non conoscendo il modo, col quale a^2 si è formata, alla sua radice a si dovrà anteporre il doppio segno $\pm$, perchè a^2 può tanto essersi formata dal moltiplicare $+a$ per se stessa, quanto $-a$ pure per se stessa (218); ma quando si conosce quale delle due quantità è stata moltiplicata per se medesima per formare a^2, non è più permesso, ritornando sulle proprie tracce, di prenderne un' altra. Questo caso è evidentemente quello dell' espressione $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{a^2} = \pm a$: sapendo, che la quantità a^2 sotto il radicale quadratico proviene da $-a \times -a$, l'ambiguità del segno cessa, e per ritornare alla radice è necessario di scrivere $-a$.

Per la stessa ragione sarà $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$. In fatti $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = (-1)^{\frac{1}{2}} \times (-1)^{\frac{1}{2}} = (-1)^{\frac{2}{2}} = -1$.

Ritenuto questo principio il calcolo delle quantità immaginarie non presenta più la minima difficoltà.

260. *Il prodotto di una quantità reale per una immaginaria, o di una quantità immaginaria per una reale sarà immaginario, e la regola dei segni sarà la solita.* Ciò è manifesto, perchè con tale operazione non si fa che ripetere una quantità immaginaria tante volte, e nello stesso senso, quante ne indica la quantità reale: così moltiplicando $3\sqrt{a}$ per $2m\sqrt{-n}$, si avrà $3\sqrt{a} \times 2m\sqrt{-n} = 6m\sqrt{-an}$.

261. Non si possono stabilir canoni generali, onde scoprire se il prodotto di due quantità immaginarie sia reale, o no. Solo possiamo avvertire, che sarà utile il trasformare il fattore -1 sottoposto ad un radicale d'indice pari in una potenza fratta di -1, conservando sempre il segno negativo innanzi all' unità. Con ciò si tratteranno queste moltiplicazioni, come quelle di quantità innalzate a potenze. I seguenti esempj saranno di norma ai principianti.

262. *Esempj.* Moltiplicare $ab\sqrt{-1}$ per $c\sqrt{-1}$. Disponendo, ed eseguendo l' operazione, si avrà $ab\sqrt{-1} \times c\sqrt{-1} = abc\sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$. Ma $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = (-1)^{\frac{1}{2}}(-1)^{\frac{1}{2}} = (-1)^{\frac{2}{2}} = -1$ (259); dunque $ab\sqrt{-1} \times c\sqrt{-1} = abc \times -1 = -abc$. Lo stesso sarebbesi ottenuto, se i segni di tutti e due i fattori fossero stati negativi.

Moltiplicando $ab\sqrt{-1}$ per $-c\sqrt{-1}$, si avrà

$$ab\sqrt{-1} \times -c\sqrt{-1} = -abc\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = abc.$$

Lo stesso accaderebbe, se il primo dei due fattori fosse stato negativo invece del secondo.

Moltiplicando $-5a\sqrt{-a}$ per $2ab\sqrt[4]{-a^3c}$, sarà

$$-5a\sqrt{-a}\times 2ab\sqrt[4]{-a^3c}=-5a\sqrt[4]{-a^2}\times 2ab\sqrt[4]{-a^3c}=$$

$$-10a^2b\sqrt[4]{a^5c}\times\sqrt[4]{-1}\times\sqrt[4]{-1}=$$

$$-10a^2b\sqrt[4]{a^5c}.(-1)^{\frac{1}{4}}.(-1)^{\frac{1}{4}}.=-10a^2b\sqrt[4]{a^5c}.(-1)^{\frac{2}{4}}$$

$$=-10a^2b\sqrt[4]{a^5c}.(-1)^{\frac{1}{2}}=-10a^3b\sqrt[4]{ac}\sqrt{-1}.$$

263. Posti questi principj, si eseguisce con tutta facilità la moltiplicazione delle quantità polinomie contenenti degli immaginarj, come si vedrà nei seguenti esempj.

264. I. Moltiplicare $a+b\sqrt{-1}$ per $a-b\sqrt{-1}$. Disponendo, ed eseguendo la moltiplicazione, si avrà

$$\begin{array}{llr} a & +\ b\sqrt{-1} & \\ a & -\ b\sqrt{-1} & \\ \hline a^2 & +\ ab\sqrt{-1} & \\ & -\ ab\sqrt{-1} & +\ b^2 \\ \hline a^2 & & +\ b^2 \end{array}$$

265. II. Moltiplicare

$$\begin{array}{lr} & 3a-2\sqrt{-3}+c\sqrt{-1} \\ \text{per} & 2a-3c\sqrt{-1}+\sqrt{-a} \\ \hline & 6a^2-4a\sqrt{-3}+2ac\sqrt{-1} \\ & -9ac\sqrt{-1}-6c\sqrt{3}+3c^2 \\ & +3a\sqrt{-a}+2\sqrt{3a}-c\sqrt{a} \\ \hline \end{array}$$

$$6a^2-4a\sqrt{-3}-7ac\sqrt{-1}-6c\sqrt{3}+3c^2+3a\sqrt{-a}+2\sqrt{3a}-c\sqrt{a}.$$

266. III. Moltiplicare la seguente espressione $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$. Moltiplicando fra di loro i primi due fattori, si avrà

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=\frac{1-\sqrt{-3}-\sqrt{-3}-3}{4}=$$

$\frac{-2-2\sqrt{-3}}{4}=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$. Moltiplicando questo prodotto per il terzo fattore, sarà

$$\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=\frac{1-\sqrt{-3}+\sqrt{-3}+3}{4}=$$

$$\frac{4}{4}=1.$$

Si otterrebbe l' unità anche moltiplicando $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ due volte per se medesima.

Divisione.

267. *La divisione di una quantità immaginaria per una reale si fa osservando le stesse regole, anche per rapporto ai segni, che si sono usate per la divisione delle quantità reali.*

268. *Esempj*. Dividere $ab\sqrt{-1}$ per a. Disponendo, ed eseguendo la divisione, si avrà $ab\sqrt{-1}:a=b\sqrt{-1}$. Se i segni di tutte e due le date quantità fossero stati negativi, si sarebbe del pari ottenuto lo stesso quoto positivo.

Dividendo poi $-ab\sqrt{-1}$ per a, si avrà $-ab\sqrt{-1}:a=-b\sqrt{-1}$. Lo stesso quoto col medesimo segno si sarebbe ottenuto se il solo divisore fosse stato negativo.

269. *Dividendo una quantità reale per una immaginaria, comparirà al quoto l' immaginario come denominatore, ma si potrà sempre far passare nel numeratore con facile ripiego.*

270. *Esempj.* Dividere la quantità reale ab, per la quantità immaginaria $b\sqrt{-1}$.

Operando nel modo sopra descritto, si avrà $ab : b\sqrt{-1} = \frac{ab}{b\sqrt{-1}} = \frac{a}{\sqrt{-1}}$, e moltiplicando ambi i termini di quest' ultima frazione per $\sqrt{-1}$, sarà

$$\frac{ab}{b\sqrt{-1}} = \frac{a\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}} = \frac{a\sqrt{-1}}{-1} = -a\sqrt{-1}.$$

Lo stesso risultamento si sarebbe ottenuto, se i segni fossero stati tutti e due negativi.

Dividere $-ab$ per $b\sqrt{-1}$.

Eseguendo la divisione nel modo sopra indicato, si avrà

$$-ab : b\sqrt{-1} = \frac{-ab}{b\sqrt{-1}} = -\frac{a}{\sqrt{-1}} = -\frac{a\sqrt{-1}}{-1} = a\sqrt{-1}.$$

Lo stesso sarebbe avvenuto, se il divisore in luogo del dividendo fosse stato negativo.

Abbiasi ora da dividere ab per $a\sqrt[4]{-1}$, e sarà $\frac{b}{\sqrt[4]{-1}}$ il quoto. Moltiplicando numeratore, e denominatore per $(\sqrt[4]{-1})^3$, si ha $\frac{b(\sqrt[4]{-1})^3}{-1} = -b\sqrt[4]{-1}$.

271. *Per dividere una quantità immaginaria per una del pari immaginaria, valgono avvertenze affatto simili.*

272. *Esempj.* Dividere $ab\sqrt{-1}$ per $b\sqrt{-1}$.

Disponendo, ed eseguendo la divisione, si avrà $ab\sqrt{-1} : b\sqrt{-1} = \frac{ab\sqrt{-1}}{b\sqrt{-1}} = a$. Se i segni fossero stati tutti e due negativi, si sarebbe del pari ottenuto un quoto positivo.

Dividendo $-ab\sqrt{-1}$ per $b\sqrt{-1}$, sarà $\frac{-ab\sqrt{-1}}{b\sqrt{-1}} = -a$. Se il divisore fosse stato negativo, ed il dividendo positivo, il quoto sarebbe stato affetto egualmente dal segno negativo. Vogliasi ora dividere $ab\sqrt{-1}$ per $b\sqrt[4]{-1}$. Si avrà

$$\frac{ab\sqrt{-1}}{b\sqrt[4]{-1}} = \frac{a(-1)^{\frac{1}{2}}}{(-1)^{\frac{1}{4}}} = \frac{a(-1)^{\frac{2}{4}}}{(-1)^{\frac{1}{4}}} = a(-1)^{\frac{1}{4}} = a\sqrt[4]{-1}.$$

273. Siccome poi qualunque quantità monomia immaginaria può essere rappresentata dal prodotto di due fattori uno reale, e l'altro immaginario (257); così le regole superiormente insegnate si potranno con tutta facilità applicare alla moltiplicazione, ed alla divisione di qualunque monomio reale o immaginario, per un altro monomio immaginario: così volendo dividere $2a\sqrt{3}$ per $2\sqrt{-a}$, si avrà

$$\frac{2a\sqrt{3}}{2\sqrt{-a}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{-a}} = \frac{\sqrt{a}.\sqrt{3}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{3a}.\sqrt{-1}}{-1} = -\sqrt{-3a}.$$

274. La verità delle regole sopra insegnate si potrà riconoscere, moltiplicando i quoti ottenuti pei rispettivi divisori, o dividendo i prodotti per uno dei fattori, e ciò secondo le circostanze.

Dopo questi principj, la divisione dei polinomj, contenenti delle quantità immaginarie, non reca più alcuna difficoltà, come facilmente si vedrà dai seguenti esempj.

275. *Esemp.* I. Dividere a^2+b^2 per $a+b\sqrt{-1}$. Si avrà disponendo, ed eseguendo colle solite regole la divisione.

$$\begin{array}{l|l}
a^2+b^2 & a+b\sqrt{-1} \\ \cline{2-2}
-a^2-ab\sqrt{-1} & a-b\sqrt{-1} \\ \cline{1-1}
-ab\sqrt{-1}+b^2 & \\
ab\sqrt{-1}-b^2 & \\ \cline{1-1}
0 \quad\quad 0 &
\end{array}$$

276. II. Dividere il polinomio
$6a^2-4a\sqrt{-3}-4ac\sqrt{-1}+3a\sqrt{-a}+2\sqrt{3a}$
$-4c\sqrt{3}-c\sqrt{a}+2c^2$, per $3a-2\sqrt{-3}+c\sqrt{-1}$.
Disponendo, ed eseguendo la divisione, si avrà

$$\begin{array}{l|l}
6a^2-4a\sqrt{-3}-4ac\sqrt{-1}+3a\sqrt{-a}+2\sqrt{3a} & \\
-4c\sqrt{3}-c\sqrt{a}+2c^2 & \\
-6a^2+4a\sqrt{-3}-2ac\sqrt{-1} & 3a-2\sqrt{-3}+c\sqrt{-1} \\ \hline
-6ac\sqrt{-1}+3a\sqrt{-a}+2\sqrt{3a} & 2a-2c\sqrt{-1}+\sqrt{-a} \\
-4c\sqrt{3}-c\sqrt{a}+2c^2 & \\
+6ac\sqrt{-1}+4c\sqrt{3}-2c^2 & \\ \cline{1-1}
3a\sqrt{-a}+2\sqrt{3a}-c\sqrt{a} & \\
-3a\sqrt{-a}-2\sqrt{3a}+c\sqrt{a} & \\ \cline{1-1}
0 \quad\quad 0 \quad\quad 0 &
\end{array}$$

277. III. Dividere $-a^2\sqrt{3}+5a\sqrt{3a}-ab+5b\sqrt{a}$ per $a\sqrt{-3}+b\sqrt{-1}$.

Disponendo, ed operando al solito, si avrà

$$\begin{array}{l|l}
-a^2\sqrt{3}+5a\sqrt{3a}-ab+5b\sqrt{a} & \\
a^2\sqrt{3} \qquad\qquad +ab & a\sqrt{-3}+b\sqrt{-1} \\ \hline
5a\sqrt{3a}+5b\sqrt{a} & a\sqrt{-1}-5\sqrt{-a} \\
-5a\sqrt{3a}-5b\sqrt{a} & \\ \cline{1-1}
0 \quad\quad 0 &
\end{array}$$

Innalzamento a potenze delle quantità monomie immaginarie.

278. Mediante la successiva moltiplicazione di $\sqrt{-1}$ per se medesima, si ottiene la seguente tavola contenente le potenze di $\sqrt{-1}$ dalla prima sino alla sedicesima.

$(\sqrt{-1})^1=\sqrt{-1}$	$(\sqrt{-1})^9=\sqrt{-1}$
$(\sqrt{-1})^2=-1$	$(\sqrt{-1})^{10}=-1$
$(\sqrt{-1})^3=-\sqrt{-1}$	$(\sqrt{-1})^{11}=-\sqrt{-1}$
$(\sqrt{-1})^4=1$	$(\sqrt{-1})^{12}=1$
$(\sqrt{-1})^5=\sqrt{-1}$	$(\sqrt{-1})^{13}=\sqrt{-1}$
$(\sqrt{-1})^6=-1$	$(\sqrt{-1})^{14}=-1$
$(\sqrt{-1})^7=-\sqrt{-1}$	$(\sqrt{-1})^{15}=-\sqrt{-1}$
$(\sqrt{-1})^8=1$	$(\sqrt{-1})^{16}=1$

279. Osservando questi risultamenti si vede facilmente, *che tutte le potenze pari delle quantità monomie immaginarie di questa specie sono reali, e le dispari sono immaginarie; delle potenze pari sono poi positive quelle, il di cui esponente è divisibile esattamente per quattro; fra le immaginarie sono positive, oltre la prima, tutte quelle, il di cui esponente diminuito dell' unità è divisibile per* 4.

280. Considerando l' unità come un quadrato, si vede che essa ha due radici quadrate cioè $+1$,

e -1. Considerando l' unità come un cubo, essa ha tre radici cubiche, una delle quali è reale, e le altre due immaginarie, cioè 1; $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$; $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$; poichè, moltiplicando due volte per se stessa qualsivoglia di queste quantità, si ottiene sempre per prodotto l' unità (266). Se l' unità poi viene considerata come quarta potenza, essa si trova avere le quattro seguenti radici quarte, 1, -1, $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$, quantità tutte che moltiplicate per se stesse tre volte danno l' unità per prodotto, come facilmente si può verificare.

CAPITOLO VII.

Della formazione delle potenze dei polinomj, dell' estrazione delle loro radici.

281. Avendo riguardo a quanto abbiamo detto, che le potenze di qualsivoglia quantità nascono dalla successiva moltiplicazione della data quantità per se medesima, si vede che si potrà giungere con questo mezzo ad innalzare qualunque quantità a qualsivoglia potenza.

Incominciando dalle quantità binomie, che sono le più semplici dopo le monomie, abbiasi, per esempio, da innalzare $a+b$ al quadrato, e sarà $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$.

Abbiasi $-a-b$ da innalzarsi al quadrato, e si avrà $(-a-b)^2=(-a-b)(-a-b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$.

Sia $a-b$ da elevarsi al quadrato, e sarà $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2$. Abbiasi finalmente $-a+b$ da innalzarsi al quadrato, e si otterrà $(-a+b)^2=(-a+b)(-a+b)=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2$.

282. Esaminando attentamente tutti questi risultamenti, si vede, che *il quadrato di un binomio è sempre composto di tre termini*, cioè 1.° *del quadrato della prima parte del binomio proposto*, 2.° *del doppio prodotto della prima parte per la seconda*, 3.° *del quadrato della seconda parte del binomio stesso*. Quando poi i segni delle due parti del binomio sono eguali, sieno essi positivi o negativi, lo sviluppo è tutto positivo; se i segni sono disuguali, è il solo doppio prodotto, che porta il segno negativo.

283. Dietro quanto si è detto, è facile formare il quadrato di qualunque binomio: il quadrato quindi di $2a-3b$ sarà $4a^2-12ab+9b^2$; essendo $4a^2$ il quadrato della prima parte $2a$, $-12ab$ il doppio prodotto di $2a$ per $-3b$, e $9b^2$ il quadrato della seconda parte $-3b$.

284. Si osservi che per rendere completo il quadrato di un binomio, del quale si abbiano i due primi termini, basterà aggiungere ad essi il quadrato della metà del 2.° termine divisa per la radice del 1.°; così per rendere completo x^2+2ax, si prenderà il 2.° termine $2ax$, si dividerà per x, che è la radice del 1.° termine x^2, e si avrà $2a$, si prenderà di questo la metà a, e se ne farà il quadrato a^2, che aggiunto ad x^2+2ax, compirà il quadrato $x^2+2ax+a^2$, che è appunto il quadrato di $x+a$. Per rendere completo x^2+ax, si prenderà $\frac{a}{2}$, che è la metà

del secondo termine ax, diviso per x, ed aggiunto il suo quadrato $\frac{a^2}{4}$ ai due termini dati, si avrà $x^2 + ax + \frac{a^2}{4}$, che è il quadrato di $x + \frac{a}{2}$.

285. Abbiasi ora da elevare $a + b$ al cubo, e si avrà secondo quello che si è detto
$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Se fosse $-a-b$ da elevare al cubo, si avrebbe
$(-a-b)^3 = (-a-b)^2(-a-b) = (a^2 + 2ab + b^2)(-a-b) = -a^3 - 2a^2b - ab^2 - a^2b - 2ab^2 - b^3 = -a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3$. Si avrà del pari
$(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) = a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$: così pure sarà $(-a+b)^3 = (-a+b)^2(-a+b) = (a^2 - 2ab + b^2)(-a+b) =$

$$-a^3 + 2a^2b - ab^2 + a^2b - 2ab^2 + b^3 =$$
$$-a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3.$$

286. Si rileva dall'esame di questi risultamenti *che il cubo di un binomio contiene quattro termini, cioè 1.° il cubo della prima parte del binomio, 2.° il triplo del quadrato della prima parte moltiplicato per la seconda, 3.° il triplo del quadrato della seconda parte del binomio stesso moltiplicato per la prima, 4.° finalmente il cubo della seconda parte.*

I segni, da cui sono affetti questi termini, sono tutti positivi quando ambi i segni del binomio sono positivi, sono tutti negativi se il binomio ha segni

negativi; quando poi il binomio si trova avere un termine positivo, e l'altro negativo, i termini dello sviluppo sono alternativamente positivi e negativi, appartenendo il segno negativo a quei termini, che contengono le potenze impari di quella parte del binomio che è affetta dal segno negativo.

287. *Esempio.* Innalzare $2a - 3b$ al cubo.
Dietro quanto è stato detto, sarà
$(2a-3b)^3 = 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$.

288. Per innalzare $a + b$ alla quarta potenza, si avrà $(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, avendo nel prodotto fatte le opportune riduzioni.

289. Se $a + b$ si volesse innalzare alla quinta potenza, si avrebbe
$(a+b)^5 = (a+b)^4(a+b) = (a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4)(a+b) = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$, e così di seguito.

290. Se il binomio $a + b$, o qualunque altro si dovesse innalzare ad una potenza molto alta, l'operazione diventerebbe lunghissima, e penosa nell'esecuzione di tante moltiplicazioni, dovendo passare per tutte le potenze intermedie per giungere alla potenza ricercata. Onde evitare questo incomodo gli Analisti si sono applicati per trovare un metodo, che li guidasse al risultamento finale con una sola operazione: questo metodo si scoprirà facilmente se si osserverà con attenzione l'ordine, che regna nei diversi termini delle potenze del binomio $a + b$, che si trovano nella seguente tavola.

TAVOLA

Contenente le prime sette potenze del binomio $a+b$.

$(a+b)^1 = a + b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.$

Questa tavola è stata formata colla successiva moltiplicazione di $a+b$ per se medesima.

291. Dall' ispezione di questa tavola si vede, *che uno sviluppo qualunque in essa contenuto è composto di tanti termini più uno, quante unità vi sono nell' esponente della potenza che si vuol formare;* di modo che la seconda potenza di $a+b$ è composta di tre termini, il cubo di $a+b$ di quattro termini, la quarta potenza di cinque termini, e così di seguito. *Il primo termine di ogni sviluppo è sempre la prima parte del dato binomio, con un esponente eguale a quello del binomio stesso*, così nella terza potenza di $a+b$, il primo termine del suo sviluppo è a^3, quello di $(a+b)^6$ è a^6, ecc.; *l'ultimo termine di qualsivoglia sviluppo non è che la seconda parte del binomio elevata all' esponente del binomio medesimo;* così l' ultimo termine di $(a+b)^3$ è b^3, quello di $(a+b)^6$ è b^6, ecc. *Il secondo termine è composto della prima parte del binomio (fatta astrazione dai coefficienti) innalzata alla potenza del binomio diminuita dell' unità, e moltiplicata per b; nel terzo termine la prima parte del binomio vi è innalzata ad una potenza mi-*

nore di due unità della potenza del binomio, ed è moltiplicata per b^2, e così di seguito; di modo che gli esponenti della prima parte del binomio, passando da un termine all' altro, vanno continuamente diminuendo di una unità, e quelli della seconda parte vanno crescendo di una unità, in maniera che la somma degli esponenti delle due parti del binomio si conserva in ciascun termine dello sviluppo sempre eguale all' esponente della data potestà del binomio proposto.

292. Dietro quanto si è detto è facile l' ottenere lo sviluppo di qualsivoglia potenza di un binomio qualunque. Onde trovare, per esempio, lo sviluppo di $a+b$ elevato all' ottava potenza; chiamati A, B, C, D, ecc. i coefficienti dei successivi termini intermedj, si avrà: $(a+b)^8 = a^8 + \mathrm{A}a^7b + \mathrm{B}a^6b^2 + \mathrm{C}a^5b^3 + \mathrm{D}a^4b^4 + \mathrm{E}a^3b^5 + \mathrm{F}a^2b^6 + \mathrm{G}ab^7 + b^8.$

Per conoscere poi il valore di ciascuno di questi coefficienti, si osservi nella tavola del (290) l' andamento di tutti i coefficienti dei termini, che si sono ottenuti negli sviluppi successivi del binomio $a+b$, elevato alle diverse potenze, e si vedrà, 1.° *che il coefficiente tanto del primo quanto dell' ultimo termine di ogni sviluppo è sempre l' unità*, 2.° *che il coefficiente di qualsivoglia termine intermedio si forma costantemente col moltiplicare il coefficiente del termine antecedente per l' esponente che la prima parte del binomio si trova avere in quel termine, e col dividere questo prodotto pel numero dei termini, che precedono il termine, di cui si vuole il coefficiente:* così se si volesse il coefficiente del quarto termine nello sviluppo del binomio $(a+b)^5$, si moltiplicherebbe il 10, coefficiente del terzo termine, per 3 esponente di a nel termine stesso, ed il prodotto 30 si dividerebbe per 3, che è il numero dei termini, che precedono quello di cui si cerca il coefficiente, e si avrebbe 10 pel coefficiente cercato, come in fatti deve essere (290).

293. Osservando poi che in qualsivoglia sviluppo di un dato binomio vi è un coefficiente massimo quando la potenza del binomio è pari, e due ve ne sono di egual grandezza, quando la potenza è dispari, indi ad eguali distanze di questo o di questi coefficienti ritornano i coefficienti precedentemente trovati, si potrà risparmiare molta fatica; poichè quando nelle potenze pari si sarà trovato il coefficiente del termine medio, che è il massimo, e nelle dispari il primo dei due termini di mezzo, si otterranno gli altri coefficienti collo scrivere i coefficienti di già trovati coll' ordine sopra indicato: ciò si rende evidente riflettendo, che se si fosse preso il binomio $b+a$ invece di $a+b$, si sarebbero ottenute le medesime potenze scritte in ordine inverso, di modo che l' ultimo termine diverrebbe il primo, il penultimo diverrebbe il secondo, ecc.; i coefficienti di $b+a$ sono gli stessi di quelli di $a+b$ nella stessa potenza, perchè questo si cangia in quello, purchè si muti a in b, e b in a: dunque in qualunque potenza del binomio $a+b$, l' ultimo termine deve avere lo stesso coefficiente del primo, il penultimo lo stesso del secondo, e così di seguito.

Dopo la sopra indicata osservazione sarà facile il determinare i coefficienti dei termini dello sviluppo di $(a+b)^8$ (292).

294. Il coefficiente del secondo termine sarà eguale al prodotto del coefficiente 1 del primo termine per l' esponente 8, che la quantità a si trova avere nello stesso termine, diviso per 1, che esprime il numero dei termini che stanno avanti al secondo termine: onde sarà $A = \frac{1\,.\,8}{1} = 8$.

Determinato così il coefficiente del secondo termine, si avrà subito quello del terzo, moltiplicandolo per 7, che è l' esponente di a nel termine antecedente, e dividendone il prodotto per 2, numero dei termini precedenti: sarà quindi

$$B = \frac{8 \times 7}{2} = 28.$$

Operando in una maniera a questa analoga, si avrà

$$C = \frac{28 \times 6}{3} = 56,\quad D = \frac{56 \times 5}{4} = 70$$

$$E = 56,\ F = 28,\ G = 8.$$

295. Se si volesse una podestà qualunque m del binomio $a+b$, essendo m un numero intero, ed indeterminato; secondo la regola precedentemente insegnata, chiamando A, B, C, D, ecc. i coefficienti dei termini successivi, che si otterrebbero nello sviluppo di tale podestà, si avrebbe

$$(a+b)^m = a^m + Aa^{m-1}b + Ba^{m-2}b^2 + Ca^{m-3}b^3 + Da^{m-4}b^4 + Ea^{m-5}b^5 + \ldots\ldots\ldots\ldots + b^m.$$

Ove $A = \frac{1\,.\,m}{1} = m$

$$B = \frac{m(m-1)}{2}$$

$$C = \frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}$$

$$D = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\,.\,3\,.\,4}$$

$$E = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}.$$

La legge di questi coefficienti essendo manifesta, si vede come si dovrebbe procedere, volendone degli altri. Sostituendo ora per A, B, C, D, ecc. i trovati valori, si avrà

$$(a+b)^m = a^m + m a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2} b^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} a^{m-3} b^3$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-4} b^4$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{m-5} b^5 + \text{ecc,}$$

di modo che il coefficiente di b^m, che come sappiamo, deve essere l' unità, perchè abbia una forma analoga ai precedenti si suole scrivere nella seguente maniera

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots\ldots(m-m+1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots\ldots(m-2)(m-1)m} a^{m-m} b^m;$$

per cui

$$(a+b)^m = a^m + m a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2} b^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} a^{m-3} b^3$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-4} b^4$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{m-5} b^5 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-m+1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (m-2)(m-1)m} a^{m-m} b^m.$$

Questa elegantissima formola è chiamata il bino-

mio di Newton per essere stata ritrovata da questo sublime Geometra. La dimostrazione che abbiamo data essendo appoggiata all' induzione non ha veramente tutto il rigor matematico, non per altra ragione, che per il modo, con cui si è desunta; una maggiore accuratezza si potrà ottenere col seguente ragionamento.

296. Supponiamo che la legge, che seguono gli esponenti, ed i coefficienti di un dato binomio siasi verificata sino ad una data potenza n, come l' abbiamo veduta verificarsi per le prime otto potenze del binomio $a+b$; per cui si abbia

297. $(a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2$
$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 +$ ecc., dico che la medesima legge avrà luogo anche per la potenza susseguente, cioè per $n+1$, per cui sarà $(a+b)^{n+1} =$
$a^{n+1} + (n+1) a^n b + \frac{(n+1)n}{2} a^{n-1} b^2 +$
$\frac{(n+1)n(n-1)}{2 \cdot 3} a^{n-2} b^3 +$ ecc. Per provare la verità di questa legge in questo caso, si moltiplichi lo sviluppo di $(a+b)^n$ per $a+b$, e si avrà

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \times (a+b) = \left\{ a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \text{ec.} \right\} (a+b) =$$
$$a^{n+1} + n a^n b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-1} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} a^{n-2} b^3 + \text{ec.}$$
$$+ a^n b + \quad n a^{n-1} b^2 + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^3 + \text{ec.}$$

Raccogliendo i fattori comuni in quest' ultima espressione, e paragonandola coll' espressione del numero (297), si avrà

$$a^{n+1}+(n+1)a^nb+\frac{(n+1)n}{2}a^{n-1}b^2+$$
$$\frac{(n+1)n(n-1)}{2\,.\,3}a^{n-2}b^3+\text{ecc.}=a^{n+1}+(n+1)a^nb$$
$$+\left(\frac{n(n-1)}{2}+n\right)a^{n-1}b^2+\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{2\,.\,3}\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)}{2}\right)a^{n-2}b^3+\text{ecc.}$$

Infatti i primi due termini di questa eguaglianza sono identici, come manifestamente si vede, gli altri sono del pari tra di loro rispettivamente identici; di fatto sviluppando il coefficiente $\frac{n(n-1)}{2}+n$ del terzo termine nella seconda parte dell' eguaglianza, si ha $\frac{n(n-1)}{2}+n=\frac{n^2-n+2n}{2}=\frac{n^2+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$ espressione identica col coefficiente del terzo termine della prima parte dell' eguaglianza. Così pure si ha

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{2\,.\,3}+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{(n^2-n)(n-2)+3n(n-1)}{2\,.\,3}=$$
$$\frac{n^3-2n^2-n^2+2n+3n^2-3n}{2\,.\,3}=\frac{n^3-n}{2\,.\,3}=\frac{n(n^2-1)}{2\,.\,3}=$$

$\frac{n(n+1)(n-1)}{2\,.\,3}$, per cui si vede che anche i due quarti termini della sopra scritta espressione si

eguagliano: lo stesso succede degli altri, di modo che si può conchiudere, che verificandosi la formola newtoniana per una data potenza, essa avrà luogo anche per la potenza susseguente, e siccome è vera nelle prime potenze, lo sarà egualmente in tutte le altre.

298. Se in vece di elevare il binomio $a+b$ alla potenza *emmesima*, si volesse innalzare il binomio $a-b$ alla stessa potenza, si giungerebbe al risultamento, seguendo lo stesso metodo, che abbiamo tenuto per trovare le diverse potenze di $a+b$: ma più brevemente si potrà dedurre lo sviluppo di $(a-b)^m$ dalla formola trovata al (295); al quale oggetto bisogna ricordarsi, che tutte le potenze pari di $-b$ sono quantità positive, e le potenze dispari sono quantità negative; donde ne viene, che cangiandosi b in $-b$, le podestà pari di b non soffriranno alcuna mutazione, ma le dispari diverranno negative: onde sarà

299. $$(a-b)^m=a^m-ma^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2$$
$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}a^{m-3}b^3+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\,.\,3\,.\,4}a^{m-4}b^4$$
$$-\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}a^{m-5}b^5+\ldots\ldots$$
$$\pm\frac{m(m-1)(m-2)\,\ldots\ldots\ldots\,(m-m+1)}{2\,.\,3\,.\,4\,\ldots\ldots\,(m-2)(m-1)m}a^{m-m}b^m.$$

Le due formole trovate per l'*emmesima* podestà dei due binomj $a+b$ ed $a-b$ si possono riunire in una sola, che è la seguente.

300. $(a \pm b)^m = a^m \pm m a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2} b^2$

$$\pm \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} a^{m-3} b^3$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-4} b^4$$

$$\pm \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{m-5} b^5 + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \pm \frac{m(m-1)(m-2) \ldots\ldots (m-m+1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (m-2)(m-1)m} a^{m-m} b^m,$$

nella quale dei due segni si dovrà prendere il superiore quando b è positiva, e l' inferiore quando b è negativa; nell' ultimo termine poi varrà il segno negativo nel solo caso che b, oltre all' essere negativa, fosse anche elevata ad una potenza dispari.

301. Mediante questa formola si possono avere tutte le potenze di un binomio qualunque, paragonando il binomio proposto col binomio $(a \pm b)^m$ termine per termine, e facendo in esso le opportune sostituzioni.

302. *Esemp.* Innalzare al cubo il binomio $2c-3d$. Si avrà, paragonando, prendendo i segni inferiori, $a=2c$, $-b=-3d$, $m=3$, e facendo le debite sostituzioni

$$(2c-3d)^3 = (2c)^3 - 3(2c)^{3-1}.3d + \frac{3(3-1)}{2}(2c)^{3-2}.(3d)^2$$

$$- \frac{3(3-1)(3-2)}{2 \cdot 3} (2c)^{3-3} \times (3d)^3 =$$

$$8c^3 - 3 \cdot 4c^2 \cdot 3d + \frac{3 \cdot 2}{2} \cdot 2c \times 9d^2$$

$$- \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 3} \times 27d^3 = 8c^3 - 36c^2 d + 54cd^2 - 27d^3.$$

La formola newtoniana vale non solo per elevare i binomj a qualunque potenza, ma anche per formare le potenze dei polinomj.

303. *Esemp.* Innalzare al quadrato il trinomio $a+c+d$. Nella formola generale del (300) si ponga $c+d$ in luogo di b, ed in vece di m il numero 2 e si avrà prendendo i segni superiori

$$(a+c+d)^2 = a^2 + 2a(c+d) + \frac{2(2-1)}{2} a^{2-2}(c+d)^2 =$$

$$a^2 + 2ac + 2ad + \frac{2 \cdot 1}{2}(c^2 + 2cd + d^2) =$$

$$a^2 + 2ac + 2ad + c^2 + 2cd + d^2.$$

304. Se lo stesso trinomio si volesse elevare al cubo, alla quarta potenza, o ad una potenza qualunque, non si farebbe altro, che nella formola generale sostituire $c+d$ in luogo di b, ed in vece di m il numero, a cui si vuole innalzare il dato trinomio, e prendere della sopra nominata formola, incominciando dal primo termine, tanti termini più uno, quante unità vi sono nell' esponente della potenza, a cui si vuole elevare il trinomio proposto.

305. Se si volesse innalzare il quadrinomio $a+c+d+f$ ad una potenza qualunque, in luogo di b si metterebbe nella formola generale $c+d+f$, ed in vece di m il grado della potenza, a cui si vuole elevare il dato quadrinomio. Si vede ora come si potrebbe innalzare col mezzo del binomio di Newton un polinomio qualunque ad una potenza qualunque intera e positiva.

306. La formola newtoniana non vale solamente nel caso in cui m sia intero e positivo, ma anche quando m è intero e negativo, quando è frazionario e positivo, e quando è frazionario e negativo.

307. Per dimostrare la verità della prima di queste proposizioni si ponga nel binomio newtoniano $-m$ in luogo di m, e si avrà la formola legittima

$$(a+b)^{-m}=a^{-m}-ma^{-m-1}b-\frac{m(-m-1)}{2}a^{-m-2}b^2$$
$$-\frac{m(-m-1)(-m-2)}{2\,.\,3}a^{-m-3}b^3-\text{ecc.}=$$
$$a^{-m}-ma^{-m-1}b+\frac{m(m+1)}{2}a^{-m-2}b^2$$
$$-\frac{m(m+1)(m+2)}{2\,.\,3}a^{-m-3}b^3+\text{ecc.}$$

Difatto si moltiplichi questo sviluppo per quello di $(a+b)^m$, e si avrà, eseguendo l'operazione,

$$\begin{array}{llllll}
a^{-m} & -ma^{-m-1}b & +\frac{m(m+1)}{2}a^{-m-2}b^2 & -\frac{m(m+1)(m+2)}{2\,.\,3}a^{-m-3}b^3 & +\text{ecc.} \\
a^{m} & +ma^{m-1}b & +\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2 & +\frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}a^{m-3}b^3 & +\text{ecc.} \\
\hline
a^0 & -ma^{-1}b & +\frac{m(m+1)}{2}a^{-2}b^2 & -\frac{m(m+1)(m+2)}{2\,.\,3}a^{-3}b^3 & +\text{ecc.} \\
 & +ma^{-1}b & -m^2a^{-2}b^2 & +\frac{m^2(m+1)}{2}a^{-3}b^3 & -\text{ecc.} \\
 & & +\frac{m(m-1)}{2}a^{-2}b^2 & -\frac{m^2(m-1)}{2}a^{-3}b^3 & +\text{ecc.} \\
 & & & +\frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}a^{-3}b^3 & -\text{ecc.}
\end{array}$$

Facendo ora le opportune riduzioni, si vedrà essere $-ma^{-1}b+ma^{-1}b=0$

$$\left(\frac{m(m+1)}{2}-m^2+\frac{m(m-1)}{2}\right)a^{-2}b^2=0$$

$$\left(-\frac{m(m+1)(m+2)}{2\,.\,3}+\frac{m^2(m+1)}{2}-\frac{m^2(m-1)}{2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}\right)a^{-3}b^3=0;$$ e così di tutti gli altri termini, che in tale prodotto vi fossero. Per cui il prodotto di quei due sviluppi rimane $=a^0=1$. Perciò dovrà essere $(a+b)^{-m}\times(a+b)^m=1$, com'è infatti, giacchè

$$(a+b)^{-m}\times(a+b)^m=\frac{(a+b)^m}{(a+b)^m}=1, \quad (83)$$

dunque lo sviluppo assunto per $(a+b)^{-m}$ (307) è il vero

308. La formola del numero precedente può essere cangiata nella seguente (83).

$$\frac{1}{(a+b)^m}=\frac{1}{a^m}-\frac{mb}{a^{m+1}}+\frac{m(m+1)b^2}{2a^{m+2}}$$
$$-\frac{m(m+1)(m+2)b^3}{2\,.\,3a^{m+3}}+\text{ecc.},$$ espressione che si estende sino all'infinito, e che serve per sviluppare in serie le frazioni della forma $\frac{1}{(a+b)^m}$.

Facendovi $m=1$, si ha

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{2b^2}{2a^3} - \frac{6b^3}{6a^4} + \text{ecc.} =$$
$$\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \text{ecc.} =$$
$$\frac{1}{a}\left(1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \text{ecc.}\right);$$ e moltiplicando ambi i termini di quest' espressione per c, si avrà

$$\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a}\left(1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \text{ecc.}\right),$$

che è appunto la stessa serie trovata al (175) mediante la divisione, cangiando però c in p, a in m, e b in n.

309. Se in luogo di m nella formola del (295) si metterà la frazione $\frac{m}{n}$, dico che si avrà la formola pure legittima

$$(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} a^{\frac{m-n}{n}} b + \frac{m}{n}\left(\frac{m-n}{2\,.\,n}\right) a^{\frac{m-2n}{n}} b^2$$
$$+ \frac{m}{n}\left(\frac{m-n}{2\,.\,n}\right)\left(\frac{m-2n}{3\,.\,n}\right) a^{\frac{m-3n}{n}} b^3 + \text{ecc. all' infinito.}$$

Di fatto posto $c = \frac{m}{n}.\frac{b}{a} + \frac{m(m-n)}{2\,.\,n^2}.\frac{b^2}{a^2} + \frac{m(m-n)(m-2n)}{2\,.\,3\,.\,n^3}.\frac{b^3}{a^3}$ + ecc. dimostreremo primieramente essere $\left(1+\frac{b}{a}\right)^m = (1+c)^n$. Poichè dalla formola newtoniana si ha

$$(1+c)^n = 1 + nc + \frac{n(n-1)}{2}c^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\,.\,3}c^3 + \text{ec.}$$

Facendo le potenze successive del valore di c, per sostituirle in quest' espressione, si avrà

$$c^2 = \frac{m^2}{n^2}.\frac{b^2}{a^2} + \frac{2m^2(m-n)}{2n^3}.\frac{b^3}{a^3} + \text{ecc.} =$$
$$\frac{m^2}{n^2}.\frac{b^2}{a^2} + \frac{m^2(m-n)}{n^3}.\frac{b^3}{a^3} + \text{ec.},\quad c^3 = \frac{m^3}{n^3}.\frac{b^3}{a^3} + \text{ec.}$$

e sostituendo, come abbiamo detto, sarà

$$(1+c)^n = 1 + m\frac{b}{a} + \frac{m(m-n)}{2\,.\,n}.\frac{b^2}{a^2} + \frac{m(m-n)(m-2n)}{2\,.\,3\,.\,n^2}.\frac{b^3}{a^3} + \text{ec.}$$
$$+ \frac{m^2(n-1)}{2\,.\,n}.\frac{b^2}{a^2} + \frac{m^2(m-n)(n-1)}{2\,.\,n^2}.\frac{b^3}{a^3} + \text{ec.}$$
$$+ \frac{m^3(n-1)(n-2)}{2\,.\,3\,.\,n^2}.\frac{b^3}{a^3} + \text{ec.}$$

All' oggetto di semplificare questa espressione raccolgo in un solo termine tutti quelli, che contengono la stessa potenza di $\frac{b}{a}$, ed incominciando dal separare $\frac{b^2}{a^2}$ fattor comune, ho $\left(\frac{m(m-n)}{2n} + \frac{m^2(n-1)}{2n}\right).\frac{b^2}{a^2}$, ed eseguendo gli indicati prodotti, $\left(\frac{m^2 - mn + m^2n - m^2}{2n}\right).\frac{b^2}{a^2}$, riducendo, e dividendo per n, $\frac{m^2 - m}{2}.\frac{b^2}{a^2}$, e separando il fattor comune m, si ottiene

$\frac{m(m-1)}{2}\cdot\frac{b^2}{a^2}$: raccolgo ora $\frac{b^3}{a^3}$, ed ho

$$\left(\frac{m(m-n)(m-2n)}{2.3.n^2}+\frac{m^2(m-n)(n-1)}{2.n^2}+\frac{m^3(n-1)(n-2)}{2.3.n^2}\right).\frac{b^3}{a^3},$$

riduco anche il 2.° termine al denominatore $2.3.n^2$, ed ho

$$\left(\frac{m(m-n)(m-2n)}{2.3.n^2}+\frac{3m^2(m-n)(n-1)}{2.3.n^2}+\frac{m^3(n-1)(n-2)}{2.3.n^2}\right).\frac{b^3}{a^3},$$

eseguendo i prodotti

$$\left(\frac{m^3-2m^2n-m^2n+2mn^2}{2.3.n^2}+\frac{3m^3n-3m^3-3m^2n^2+3m^2n}{2.3.n^2}+\frac{m^3n^2-2m^3n-m^3n+2m^3}{2.3.n^2}\right).\frac{b^3}{a^3},$$

riducendo

$$\frac{m^3n^2-3m^2n^2+2mn^2}{2.3.n^2}.\frac{b^3}{a^3},$$

dividendo tutti i termini della frazione per n^2, e separando il fattore m, si ha $\frac{m(m^2-3m+2)}{2.3}.\frac{b^3}{a^3}$, e posta in luogo di m^2-3m+2 l'espressione equivalente $(m-1)(m-2)$, si avrà $\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}.\frac{b^3}{a^3}$: sostituiti pertanto questi coefficienti delle potenze di $\frac{b}{a}$, così semplificati, nello sviluppo di $(1+c)^n$, si otterrà

$$(1+c)^n=1+m.\frac{b}{a}+\frac{m(m-1)}{2}.\frac{b^2}{a^2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}.\frac{b^3}{a^3}+\text{ecc.}$$

Ora dalla formola newtoniana, si ha

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^m=1+m.\frac{b}{a}+\frac{m(m-1)}{2}.\frac{b^2}{a^2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}.\frac{b^3}{a^3}+\text{ecc.},$$

dunque $(1+c)^n=\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$. Ciò posto moltiplicando queste due quantità per a^m, sarà

$$(1+c)^n.a^m=\left(1+\frac{b}{a}\right)^m.a^m=\left(\frac{a+b}{a}\right)^m.a^m=\frac{(a+b)^m}{a^m}.a^m=(a+b)^m,$$

ed estratta la radice *ennesima*, ciò che si fa dividendo gli esponenti di ambedue le espressioni per n, si avrà $(a+b)^{\frac{m}{n}}=(1+c)\,a^{\frac{m}{n}}$, e ponendo per c il valore da noi assunto, sarà $(a+b)^{\frac{m}{n}}=$

$$a^{\frac{m}{n}}\left(1+\frac{m}{n}.\frac{b}{a}+\frac{m(m-n)}{2n^2}.\frac{b^2}{a^2}+\frac{m(m-n)(m-2n)}{2.3n^3}.\frac{b^3}{a^3}+\text{ec.}\right)$$

$$=a^{\frac{m}{n}}+\frac{ma^{\frac{m}{n}}b}{n.a}+\frac{m(m-n)a^{\frac{m}{n}}.b^2}{n.2n.a^2}+\frac{m(m-n)(m-2n)a^{\frac{m}{n}}b^3}{n.2n.3n.a^3}+\text{ecc.},$$

e facendo passare (135) la quantità a dal denominatore nel numeratore delle rispettive frazioni che la contengono elevata a diverse potenze, sarà

$$(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} a^{\frac{m}{n}-1} b +$$

$$\frac{m(m-n)}{n\,.\,2n} a^{\frac{m}{n}-2} b^2 + \frac{m(m-n)(m-2n)}{n\,.\,2n\,.\,3n} a^{\frac{m}{n}-3} b^3 + \text{ecc.} =$$

$$a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} a^{\frac{m-n}{n}} b + \frac{m(m-n)}{n\,.\,2n} a^{\frac{m-2n}{n}} b^2$$

$$+ \frac{m(m-n)(m-2n)}{n\,.\,2n\,.\,3n} a^{\frac{m-3n}{n}} . b^3 + \text{ecc.}$$

come superiormente si era supposto.

310. Con un ragionamento simile a quello da noi fatto al (307) per dimostrare la verità del canone newtoniano anche quando l'esponente intero era negativo, si dimostrerebbe, essere egli vero anche nel caso che l'esponente oltre all'essere negativo, fosse anche fratto, ciò che darebbe

$$(a+b)^{-\frac{m}{n}} = a^{-\frac{m}{n}} - \frac{m}{n} a^{\frac{-m-n}{n}} b - \frac{m}{n}\left(\frac{-m-n}{2\,.\,n}\right) a^{\frac{-m-2n}{n}} b^2$$

$$-\frac{m}{n}\left(\frac{-m-n}{2n}\right)\left(\frac{-m-3n}{3\,.\,n}\right) a^{\frac{-m-3n}{n}} b^3 - \text{ecc.} =$$

$$a^{-\frac{m}{n}} - \frac{m}{n} a^{\frac{-m-n}{n}} b + \frac{m}{n}\left(\frac{m+n}{2\,.\,n}\right) a^{\frac{-m-2n}{n}} b^2$$

$$-\frac{m}{n}\left(\frac{m+n}{2\,.\,n}\right)\left(\frac{m+2n}{3\,.\,n}\right) a^{\frac{-m-3n}{n}} b^3 + \text{ecc.}$$

Tanto nella formola del (309), quanto in questa, se invece di lasciare scritta la quantità n come divisore degli esponenti di a, si scriverà avanti alla medesima qual indice radicale, si avrà (214).

311. $$\sqrt[n]{(a+b)^m} = \sqrt[n]{a^m} + \frac{m}{n} b \sqrt[n]{a^{m-n}}$$

$$+ \frac{m(m-n)}{n\,.\,2n} b^2 \sqrt[n]{a^{m-2n}} + \frac{m(m-n)(m-2n)}{n\,.\,2n\,.\,3n} b^3 \sqrt[n]{a^{m-3n}} + \text{ecc.}$$

$$\sqrt[n]{(a+b)^{-m}} = \sqrt[n]{a^{-m}} - \frac{m}{n} b \sqrt[n]{a^{-m-n}} + \frac{m}{n}\left(\frac{m+n}{2\,.\,n}\right) b^2 \sqrt[n]{a^{-m-2n}}$$

$$-\frac{m}{n}\left(\frac{m+n}{2\,.\,n}\right)\left(\frac{m+2n}{3\,.\,n}\right) b^3 \sqrt[n]{a^{-m-3n}} + \text{ecc.},\ \text{ossia}$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(a+b)^m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} - \frac{m}{n} b \sqrt[n]{\frac{1}{a^{m+n}}}$$

$$+ \frac{m}{n}\left(\frac{m+n}{2n}\right) b^2 \sqrt[n]{\frac{1}{a^{m+2n}}}$$

$$-\frac{m}{n}\left(\frac{m+n}{2\,.\,n}\right)\left(\frac{m+2n}{3\,.\,n}\right) b^3 \sqrt[n]{\frac{1}{a^{m+3n}}} + \text{ecc.}$$

312. Sì l'una, che l'altra di queste due formole va all'infinito, e può servire per l'estrazione approssimata delle radici di quelle quantità, che non sono potenze perfette; ma essendo queste serie espresse per altrettanti radicali *ennesimi*, quanti sono i termini che le compongono, sembra a prima vista, che poco vantaggio ricavare si possa dalle stesse, ma è facile vedere, che questi radicali spariscono prendendo per a una qualunque quantità elevata alla potenza *ennesima*. In fatti posto $a = p^n$,

sarà $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = p^{n \cdot \frac{m}{n}} = p^m$,

$$\sqrt[n]{a^{m-n}} = a^{\frac{m-n}{n}} = p^{m-n},$$

$$\sqrt[n]{a^{m-2n}} = a^{\frac{m-2n}{n}} = p^{m-2n},$$

$$\sqrt[n]{a^{m-3n}} = a^{\frac{m-3n}{n}} = p^{m-3n},$$

ecc. ecc.

Questi valori sostituiti nella formola del (311) danno

$$\sqrt[n]{(p^n + b)^m} = p^m + \frac{m}{n} p^{m-n} b + \frac{m(m-n)}{n \cdot 2n} p^{m-2n} b^2$$
$$+ \frac{m(m-n)(m-2n)}{n \cdot 2n \cdot 3n} p^{m-3n} b^3 + \text{ecc.}$$

313. Se adesso vi faremo $m=1$, ed $n=2, 3, 4$, ecc. avremo le serie seguenti per l'estrazione approssimata della radice quadrata, cubica, ecc.

$$1.^a \sqrt{(p^2 + b)} = p + \frac{b}{2p} - \frac{b^2}{8p^3} + \frac{b^3}{16p^5} - \text{ec.}$$

$$2.^a \sqrt[3]{(p^3 + b)} = p + \frac{b}{3p^2} - \frac{b^2}{9p^5} + \frac{5b^3}{81p^8} - \text{ec.}$$

$$3.^a \sqrt[4]{(p^4 + b)} = p + \frac{b}{4p^3} - \frac{3b^2}{32p^7} + \frac{7b^3}{128p^{11}} - \text{ec.}$$

Volendo estrarre la radice *ennesima* da una data quantità, conviene dividere questa quantità in due parti, una delle quali sia una potenza dell' esponente n, e poi far uso delle serie precedenti, come

avremo occasione di vedere, dopo che avremo parlato dell' estrazione delle radici delle potenze esatte dei polinomj.

314. Se nelle formole dei (295, 299) in luogo di b metteremo la quantità immaginaria $b\sqrt{-1}$, avremo

$$(a+b\sqrt{-1})^m = a^m + ma^{m-1} b\sqrt{-1} - \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2} b^2 -$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} a^{m-3} b^3 \sqrt{-1} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \times a^{m-4} b^4$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{m-5} b^5 \sqrt{-1} - \text{ecc.}$$

315. $(a-b\sqrt{-1})^m = a^m - ma^{m-1} b\sqrt{-1} - \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2} b^2$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} a^{m-3} b^3 \sqrt{-1} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-4} b^4$$
$$- \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{m-5} b^5 \sqrt{-1} - \text{ecc.}$$

316. Osservando ora con attenzione questi due sviluppi si scorge, che essi sono composti di un egual numero di termini eguali ciascuno a ciascuno, colla sola differenza, che i termini immaginarj del secondo sviluppo hanno i segni contrarj a quelli che gli stessi termini si trovano avere nel primo; di modo che chiamando R la somma delle quantità reali in ciascuno di essi, ed $I\sqrt{-1}$ quella degli immaginarj, si avrà

$$(a+b\sqrt{-1})^m = R + I\sqrt{-1}, \text{ ed}$$
$$(a-b\sqrt{-1})^m = R - I\sqrt{-1}.$$

Donde si scorge che $(a+b\sqrt{-1})^m + (a-b\sqrt{-1})^m = 2R$, poichè i termini immaginarj dei due sviluppi si distruggono a vicenda, per avere segni contrarj, ed i reali si duplicano tutti perchè sì nell'uno che nell'altro caso vengono ad avere rispettivamente gli stessi segni. Di qui si ricava, che la somma delle due proposte quantità immaginarie $(a+b\sqrt{-1})^m$ ed $(a-b\sqrt{-1})^m$ è una quantità reale.

317. Prendendo la differenza tra quei due binomj avremo $(a+b\sqrt{-1})^m-(a-b\sqrt{-1})^m = 2I\sqrt{-1}$; poichè le quantità reali si distruggono a vicenda per avere in questo caso segni opposti, e le immaginarie si duplicano per essere quelle del secondo sviluppo identiche con quelle del primo. Onde la differenza che esiste fra i due binomj immaginarj proposti è una quantità immaginaria.

Dell' estrazione delle radici dalle quantità polinomie.

Dell' estrazione della radice quadrata.

318. Conoscendo il modo col quale si può formare una potenza qualunque di un dato polinomio, facilmente, data la potenza, si potrà ritrovare un metodo, onde avere la radice del grado della potenza medesima.

319. Incominciando a considerare la formazione del quadrato di un binomio qualunque, abbiamo veduto (282) esser egli composto sempre di tre termini, il primo dei quali è il quadrato della prima parte del binomio, il secondo è il doppio della prima parte moltiplicata per la seconda, ed il terzo termine è il quadrato della seconda parte del binomio stesso: ciò posto, la radice quadrata di un trinomio il quale sia un quadrato perfetto, si troverà, dopo ordinati i suoi termini, come nel seguente.

320. *Esemp.* I. Dal trinomio $a^2+2ab+b^2$, estrarre la radice quadrata.

Disponendo, ed eseguendo l' operazione, si avrà

$$\begin{array}{ll|l} & a^2+2ab+b^2 & a+b \text{ Radice} \\ & -a^2 & \\ \hline & & 2a+b \\ \text{Res.} & 2ab+b^2 & \\ & -2ab-b^2 & \\ \hline & 0 \quad 0 & \end{array}$$

Non essendo il primo termine a^2 altro che il quadrato della prima parte della radice, ho da esso estratta la radice quadrata, e così ho ottenuta la prima parte a della radice del dato polinomio, che ho scritta al luogo destinato per le radici: sottratto indi il quadrato di questa prima parte dal dato polinomio ho avuto il residuo $2ab+b^2$; il quale contiene il doppio prodotto della prima parte della radice per la seconda, non meno che il quadrato della seconda parte della radice stessa. Diviso il primo termine di questo residuo per $2a$ doppio della prima parte della radice, ho ottenuto per quoto la seconda parte b della radice medesima, che ho pure scritta al luogo delle radici in seguito alla prima parte. Ho moltiplicato indi questa seconda parte b per il doppio della prima, e per se stessa, e sottrattone il prodotto dal residuo, non ho avuto alcun avanzo, ciò che mi indica, essere l' operazione terminata, ed $a+b$ la radice richiesta.

Operando nello stesso modo, si potrà trovare la radice quadrata di un trinomio qualunque, purchè esso sia un quadrato perfetto.

321. *Esempio* II. Estrarre la radice quadrata dal polinomio $4n^6+9m^2-12mn^3$.

Ordinando ed operando nel modo sopra indicato, sarà

$$\begin{array}{l|l} 4n^6 - 12mn^3 + 9m^2 & 2n^3 - 3m.\ \text{Radice} \\ \cline{2-2} -4n^6 & 4n^3 - 3m \\ \hline \text{Res.}\quad -12mn^3 + 9m^2 & \\ \qquad\quad 12mn^3 - 9m^2 & \\ \hline \qquad\quad 0 \qquad\quad 0 & \end{array}$$

322. Qui si osservi, che se il trinomio, da cui si vuole estrarre la radice si fosse ordinato per rapporto a m, si sarebbe ottenuta la radice $3m - 2n^3$ quantità eguale alla radice che abbiamo già trovata, ma con segni opposti. Ciò dipende dalla maniera colla quale il quadrato di un binomio si forma quando una delle sue parti è affetta da segno negativo (281).

323. Per trovare la radice quadrata di un polinomio qualunque, il quale sia un quadrato perfetto, dopo di aver trovati due termini della radice, operando nel modo superiormente indicato, questi due termini si devono considerare come formanti la prima parte della radice, e sul residuo, da cui devesi cavare la seconda parte della radice, si opererà nella medesima maniera, colla quale si è trovato il secondo termine della radice stessa. Gli esempj seguenti renderanno chiaro il processo indicato.

324. *Esempio* I. Estrarre la radice quadrata dal sestinomio

$$\begin{array}{l|l} a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2 & a + b + c.\ \text{Radice} \\ \cline{2-2} -a^2 & 2a + b \\ \hline \text{1. Res.}\ 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2 & \\ \cline{2-2} \qquad -2ab \qquad\quad -b^2 & 2a + 2b + c \\ \hline \text{2. Res.}\qquad 2ac \qquad + 2bc + c^2 & \\ \qquad\qquad -2ac \qquad -2bc - c^2 & \\ \hline \qquad\qquad\ \ 0 \qquad\qquad 0 \quad 0 & \end{array}$$

Dopo di avere colla solita regola ottenuti i due termini $a + b$ della radice, considerando questi due termini come formanti la sola prima parte della radice, gli ho duplicati, e mi sono servito di questa prima parte così duplicata per dividere il secondo residuo, per cui ho ottenuto per seconda parte della cercata radice la quantità c; il prodotto della quale pel doppio della prima parte, cioè per $2a + 2b$, e per se medesima, sottratto dall' ultimo residuo avendomi dato zero, mi ha fatto conoscere essere $a + b + c$, la radice richiesta.

325. II. Sia $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$, da cui si voglia estrarre la radice quadrata.

Operando nel modo da noi descritto, sarà

$$\begin{array}{l|l} a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 & a^2 - 2ab + b^2.\ \text{Rad.} \\ \cline{2-2} -a^4 & 2a^2 - 2ab. \\ \hline \text{1. Res.} -4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 & 2a^2 - 4ab + b^2 \\ \qquad\quad 4a^3b - 4a^2b^2 & \\ \hline \qquad\quad \text{2. Res.}\ 2a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 & \\ \qquad\qquad\quad -2a^2b^2 + 4ab^3 - b^4 & \\ \hline \qquad\qquad\qquad 0 \qquad\quad 0 \qquad 0 & \end{array}$$

326. III. Estrarre la radice quadrata dal polinomio

$$\begin{array}{l|l} a^2 + 2ab - 2ac - 2ad + b^2 - 2bc - 2bd + c^2 + 2cd + d^2 & \\ -a^2 & a + b - c - d.\ \text{Rad.} \\ \hline \text{1. Res.} \left\{ \begin{array}{l} 2ab - 2ac - 2ad + b^2 - 2bc - 2bd \\ + c^2 + 2cd + d^2 \end{array} \right. & 2a + b \\ \qquad -2ab \qquad\qquad\quad -b^2 & 2a + 2b - c \\ & 2a + 2b - 2c - d \\ \hline \text{2. Res.}\ -2ac - 2ad - 2bc - 2bd + c^2 + 2cd + d^2 & \\ \qquad\quad 2ac \qquad\quad + 2bc \qquad\quad - c^2 & \\ \hline \text{3. Res.}\qquad -2ad \qquad\quad -2bd \qquad + 2cd + d^2 & \\ \qquad\qquad\quad 2ad \qquad\quad + 2bd \qquad - 2cd - d^2 & \\ \hline \qquad\qquad\quad\ 0 \qquad\qquad\quad 0 \qquad\qquad 0 \quad 0 & \end{array}$$

In questo esempio dopo di aver trovati i primi tre termini $a+b-c$ della radice, gli ho duplicati tutti e tre ed ho operato per avere il quarto termine $-d$ in un modo analogo al precedente. Si agirà nella stessa maniera per qualunque altro polinomio, purchè egli sia un quadrato perfetto.

327. La radice di un polinomio frazionario si ottiene estraendo separatamente la radice e dal suo numeratore e dal suo denominatore, perchè il quadrato di una frazione si forma moltiplicando il suo numeratore per se medesimo, ed il suo denominatore pure per se medesimo; di modo che sarà

$$\sqrt{\frac{m^2-4mn+4n^2}{4m^2-4mn+n^2}}=\frac{\sqrt{(m^2-4mn+4n^2)}}{\sqrt{(4m^2-4mn+n^2)}}=$$
$$\frac{m-2n}{2m-n}\text{ oppure (146) }=\frac{2n-m}{n-2m}.$$

Dell' estrazione della radice cubica.

328. Considerando che il cubo di un binomio è composto di quattro termini, cioè del cubo della prima parte della radice, del triplo del quadrato della prima parte per la seconda, del triplo del quadrato della seconda parte per la prima, e finalmente del cubo della seconda parte (286), facilmente si troverà il metodo onde estrarre la radice cubica da un dato polinomio commensurabile.

329. Sia per esempio proposto di estrarre la radice cubica dal polinomio

$$\begin{array}{l|l}
\quad a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 & a-b.\ \text{Radice} \\
\quad -a^3 & 3a^2 \\
\hline
\text{Res.}\quad -3a^2b+3ab^2-b^3 & \\
\qquad\quad 3a^2b-3ab^2+b^3 & \\
\hline
\qquad\quad 0 \qquad 0 \qquad 0 &
\end{array}$$

Essendo di già questo polinomio ordinato per rapporto alla lettera a, e sapendo quindi (328), che il primo suo termine a^3 è il cubo della prima parte della radice del polinomio proposto, vi estraggo la sua radice cubica a, che scrivo nel luogo destinato per le radici, e ne sottraggo il suo cubo dal dato polinomio; ciò fatto osservo, che il primo termine del residuo essendo un prodotto di due fattori, il primo dei quali è il triplo del quadrato della prima parte della radice di già determinata, ed il secondo è la seconda parte della radice cubica del dato polinomio, così divido questo primo termine pel triplo del quadrato della prima parte, cioè per $3a^2$, ed ottengo $-b$, che è la seconda parte della radice cercata; per assicurarsi poi che essa è veramente la seconda parte della radice richiesta, sottraggo dal primo residuo ottenuto il triplo del quadrato della prima parte della radice per la seconda cioè $-3a^2b$, il triplo del quadrato della seconda per la prima ossia $3ab^2$, e finalmente il cubo $-b^3$ della seconda parte della radice, e siccome tale sottrazione non mi lascia avanzo, così conchiudo essere $a-b$ la radice cubica del polinomio proposto. Un' altra prova sarebbe stata quella di innalzare $a-b$ al cubo, con che si sarebbe ottenuto il polinomio $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$, che fu da prima proposto.

330. II. Estrarre la radice cubica dal polinomio

$$\begin{array}{l|l}
27a^6b^3-135a^4b^2m+225a^2bm^2-125m^3 & \\
-27a^6b^3 & 3a^2b-5m.\ \text{Rad.} \\
\hline
\text{Res.}\ -135a^4b^2m+225a^2bm^2-125m^3 & 27a^4b^2. \\
\qquad 135a^4b^2m-225a^2bm^2+125m^3 & \\
\hline
\qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 &
\end{array}$$

La radice cubica del polinomio proposto è adunque $3a^2b-5m$. In fatti, fatto il cubo di questa radice, si ottiene per appunto il dato polinomio.

331. Se la radice cubica di un dato polinomio fosse composta di tre o più termini, in questo caso, dopo che se ne sono trovati due, operando nel modo da noi insegnato, essi si considereranno, come formanti la prima parte della radice, per cui, fattone il quadrato, si triplicherà, affine di valersene per divisore del residuo nel modo appunto da noi spiegato. Così pure trovati tre termini, per avere il quarto termine della radice cubica, se vi fosse, si considererebbero essi come formanti la prima parte della radice stessa, e nel resto si opererebbe totalmente nel modo da noi indicato.

332. III. Estrarre la radice cubica dal polinomio

$$\begin{array}{l|l}
a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+3ac^2+b^3 & \\
\quad +3b^2c+3bc^2+c^3 & a+b+c. \text{ Rad.} \\
-a^3 & \\
\hline
\text{1. Res.}\left\{\begin{array}{l} 3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc \\ +3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3 \end{array}\right. & 3a^2 \\
\quad -3a^2b-3ab^2-b^3 & 3a^2+6ab+3b^2 \\
\hline
\text{2. Res.}\quad 3a^2c+6abc+3ac^2+3b^2c+3bc^2+c^3 & \\
\quad -3a^2c-6abc-3ac^2-3b^2c-3bc^2-c^3 & \\
\hline
\quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 &
\end{array}$$

Dopo di aver trovati i due termini $a+b$ della radice cubica del dato polinomio, e fatto il triplo del quadrato di questo binomio, ho diviso il primo termine $3a^2c$ del secondo residuo per il primo termine $3a^2$ di questo triplo quadrato, per cui ho ottenuto il terzo termine c spettante alla radice

cubica del polinomio proposto. Da questo residuo ho poi sottratto il triplo del quadrato della prima parte della radice moltiplicato per c, cioè $3ac^2+6abc+3b^2c$, il triplo del quadrato di c per la prima parte della radice medesima, ossia $3ac^2+3bc^2$, e finalmente il cubo c^3 della seconda parte, per cui non ho avuto più alcun residuo.

333. La radice cubica di un polinomio frazionario si ottiene estraendola separatamente da ambi i termini, che costituiscono la frazione (327). Di modo che sarà

$$\sqrt[3]{\frac{8m^3-12m^2n+6mn^2-n^3}{27p^3-27p^2q+9pq^2-q^3}}=$$

$$\frac{\sqrt[3]{(8m^3-12m^2n+6mn^2-n^3)}}{\sqrt[3]{(27p^3-27p^2q+9pq^2-q^3)}}=\frac{2m-n}{3p-q}.$$

Estrazione della radice quarta.

334. Al (288) si è veduto, essere la quarta potenza di $a+b$ espressa dal polinomio

$$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4;$$

dei cinque termini, di cui essa è composta, i primi due soli possono bastare per istabilire la regola, che cerchiamo.

Il primo termine di questo polinomio è la quarta potenza del primo termine del binomio, che ne è la radice quarta; il secondo termine è il quadruplo del cubo di questo medesimo primo termine moltiplicato pel secondo termine della radice stessa; per avere adunque il primo termine della radice quarta di questo polinomio, bisogna, dopo di aver ordinati tutti i termini della data potenza (qualora ve ne sia il bisogno), estrarre la radice quarta dal primo termine della potenza medesima: per avere poi il secondo termine della radice, fa d' uopo dividere il secondo termine del polinomio dato, per il quadruplo del cubo della radice trovata mediante la prima operazione. Di fatto è evidente, che la radice quarta di a^4 è a, la quale è il primo termine del binomio, di cui $a^4 + 4a^3b +$ ecc. è la quarta potenza; è del pari evidente, che $\frac{4a^3b}{4a^3}$ dà b, che è il secondo termine di quel binomio; ma siccome potrebbe accadere, che la quantità proposta non fosse una quarta potenza perfetta, così, dopo di avere nel modo indicato trovato il secondo termine della radice, bisogna verificare questa radice innalzandola alla quarta potenza, onde vedere se essa eguagli il polinomio proposto.

335. *Esempio.* Si domanda la radice quarta di

$$
\begin{array}{l|l}
16a^4 - 32a^3b + 24a^2b^2 - 8ab^3 + b^4 & \\
-16a^4 & 2a - b. \text{ Rad.} \\
\hline
\text{Res.} -32a^3b + 24a^2b^2 - 8ab^3 + b^4 & 32a^3.
\end{array}
$$

Ho estratta la radice quarta da $16a^4$, la quale è $2a$, che ho scritta al luogo delle radici; ho innalzato quindi $2a$ alla 4.ª potenza, ed ho sottratta la quantità $16a^4$ dal polinomio proposto, per cui ho avuto il residuo $-32a^3b +$ ecc. Ho innalzata la radice trovata al cubo, per cui ho ottenuto $8a^3$, che quadruplicata mi ha dato $32a^3$, quantità, che ho scritta sotto la radice; di questa quantità mi sono poi servito per dividere il primo termine $-32a^3b$ del residuo; fatta una tal divisione, ho scritto il

quoziente b della medesima alla radice, di modo che per la radice cercata ho ottenuto $2a - b$. Ma per assicurarmi, se veramente $2a-b$ era la cercata radice quarta, ho innalzato questo binomio alla quarta potenza, ed ho ottenuto

$$16a^4 - 32a^3b + 24a^2b^2 - 8ab^3 + b^4,$$

che è appunto il polinomio proposto, per lo che conchiudo, essere $2a-b$ la radice quarta domandata.

Se nella radice vi dovesse essere ancora un altro termine, dopo questa operazione, considererei $2a-b$ come una sola quantità, colla quale opererei per trovare il terzo termine, come ho operato con $2a$ per trovare $-b$.

336. Ciò che ho detto riguardo all' estrazione delle radici quadrate, cubiche, e quarte dei polinomj, può bastare per conoscere il modo da seguirsi per l'estrazione delle radici dei gradi a questi superiori.

Dell' estrazione delle radici per approssimazione.

337. Allorquando il polinomio proposto non è una potenza perfetta del grado, di cui si domanda la radice, non potendosi avere una radice esatta, fa d' uopo limitarsi ad ottenerne una approssimata, alla quale si potrebbe sempre giungere seguendo il metodo da noi esposto per le potenze perfette: si avrebbe così una serie di termini frazionarj, il valore dei quali diminuendo continuamente, lascerebbe luogo a limitarsi ad un certo numero di termini, trascurando gli altri senza commettere errore sensibile; ma questa operazione, che sarebbe assai lunga e penosa, non si eseguisce mai, potendo giungere allo stesso risultamento per una via molto

più breve, impiegando le formole del (313) desunte dal binomio newtoniano ad esponente frazionario. La formola 1.ª basta per estrarre la radice quadrata per approssimazione da qualunque polinomio; la 2.ª serve per le radici cubiche, e la 3.ª per le radici quarte, ecc. Facciamo alcune applicazioni in proposito.

338. *Esempj*. Estrarre la radice quadrata per approssimazione dal polinomio $c^2 + d - f$.

Paragonando questo polinomio con quello della formola 1.ª sopra citata, si avrà $p^2 = c^2, b = d - f$: sostituendo poi per p^2 e per b questi valori nella formola medesima, si otterrà

$$\sqrt{(c^2+d-f)} = c + \frac{d-f}{2c} - \frac{(d-f)^2}{8c^3} + \frac{(d-f)^3}{16c^5} - \text{ecc.}$$

Se del medesimo polinomio $c^2 + d - f$ si volesse la radice cubica per approssimazione, basterebbe paragonarlo colla 2.ª, per cui sarebbe $p^3 = c^2$, $b = d - f$, e sostituendo si avrebbe

$$\sqrt[3]{(c^2 + d - f)} = \sqrt[3]{c^2} + \frac{d-f}{3\sqrt[3]{c^4}} - \frac{(d-f)^2}{9\sqrt[3]{c^{10}}}$$

$$+ \frac{5(d-f)^3}{81\sqrt[3]{c^{16}}} - \text{ecc.} = \sqrt[3]{c^2} + \frac{d-f}{3c\sqrt[3]{c}} - \frac{(d-f)^2}{9c^3\sqrt[3]{c}}$$

$$+ \frac{5(d-f)^3}{81c^5\sqrt[3]{c}} - \text{ecc.}$$

Se dallo stesso polinomio, o da un altro polinomio qualunque si volesse cavare la radice quarta, basterebbe confrontare il dato polinomio con quello della 3.ª formola, e fare in essa le opportune sostituzioni e riduzioni, onde giungere all' intento.

CAPITOLO VIII.

Dei problemi e delle equazioni in generale.

339. Lo scopo principale delle Matematiche si è quello di determinare il valore delle quantità incognite col mezzo di quantità conosciute; tutte le operazioni che si sono fatte sino ad ora ne offrono dei chiari esempj.

Di fatto, per trovare la somma di due o più quantità, si è dovuto cercare un numero incognito, il quale fosse eguale alle quantità date prese insieme: colla sottrazione non si è fatto che cercare una quantità incognita eguale alla differenza tra due quantità conosciute. Una moltitudine di altri esempj si sono a noi presentati nella moltiplicazione, nella divisione, nell' elevazione a potenze, nell' estrazione delle radici: la domanda si riduceva sempre a trovare col mezzo di quantità conosciute un' altra quantità sino allora incognita. Tutte queste, e simili quistioni, nelle quali col mezzo di alcune cose cognite si devono scoprire altre cose, che non si conoscono, si chiamano *problemi*. Le quantità conosciute si denominano le *date* del problema, ed i rapporti pure conosciuti, che esistono fra le quantità cognite e le quantità incognite, si dicono le *condizioni* del problema. L' arte poi di sciogliere i problemi col mezzo dell' Algebra chiamasi *analisi matematica*.

340. Il rapporto d' eguaglianza, che esiste fra le quantità cognite ed incognite, comunque mescolate insieme, si chiama *equazione*, e si divide in due membri per mezzo del segno d' eguaglianza =;

le quantità, che sono scritte alla sinistra di questo segno formano il primo membro dell' equazione; e quelle a destra ne formano il secondo. Le equazioni poi rappresentano le condizioni dei problemi tradotte in linguaggio algebrico.

341. La varietà infinita dei problemi conducendo ad una infinità di equazioni di forma diversa, ha fatto nascere agli Algebristi il pensiero di dividere le equazioni in diverse specie o gradi, i quali traggono l' origine ed il nome dall' esponente dell' incognita, o dalla somma degli esponenti delle incognite. Le equazioni ad una sola incognita diconsi *di primo grado* quando il più alto esponente dell' incognita è l' unità; diconsi *di secondo grado* quando l' incognita ha per massimo esponente il due, ed in generale chiamansi *di grado ennesimo* quelle equazioni, nelle quali il maggiore esponente dell' incognita è n. Se poi l' equazione contiene più incognite, in allora dalla massima somma degli esponenti delle incognite esistenti in un termine si dedurrà il grado della medesima.

Così le equazioni

$$\left.\begin{aligned} ax&=b\\ ax+bx-c&=d+x\end{aligned}\right\}\ \text{sono di 1.° grado}$$

$$\left.\begin{aligned} x^2+ax+b&=0\\ xy+x+b&=0\end{aligned}\right\}\ \text{sono del 2.° grado}$$

$$\left.\begin{aligned} x^3+ax^2+bx+c&=0\\ x^2y+y^2+x^2+cx+dy+c&=0\end{aligned}\right\}\ \text{sono del 3.° grado,}$$

e così di seguito; di modo che l' equazione

$$x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+\ldots\ldots\ldots+t=0$$

è del grado *ennesimo*.

Un' equazione si dice *ordinata* quando, posti i termini tutti in un membro in maniera che le po-

tenze dell' incognita vadano di mano in mano diminuendosi sino al termine tutto noto, nell' altro membro si scriva lo zero, ed il primo termine della medesima altro coefficiente non abbia, che l' unità positiva. Dicesi poi *completa* quella equazione, nella quale si trovano tutte le potenze dell' incognita dalla massima fino alla minima, cioè fino al termine tutto cognito. Se l' equazione è incompleta, invece dei termini che mancano, si scrive talvolta il segno $*$. Quindi l' equazione incompleta

$x^6+5x^4+3x^2+x-10=0$ si scriverebbe

$$x^6 * +5x^4 * +3x^2+x-10=0.$$

342. Acciò il problema sia generalmente solubile o *determinato*, fa d' uopo che contenga nel suo enunciato tante condizioni quante sono le incognite, ossia che, tradotto in linguaggio algebrico, somministri tante equazioni, quante sono le incognite da determinarsi: quei problemi, i quali ci somministrano meno equazioni del numero delle incognite, che si devono determinare, si dicono problemi *indeterminati*; *più che determinati* chiamansi poi quelli, il di cui numero di equazioni supera il numero delle incognite. La considerazione dei primi appartiene all' *Analisi determinata*, e la considerazione degli altri forma un altro ramo di analisi matematica che dicesi *Analisi indeterminata*. Anche le equazioni *diconsi determinate o indeterminate*, secondo che il loro numero eguaglia od è superato dal numero delle incognite da determinarsi.

343. Un' equazione dicesi risoluta, quando si arriva ad avere l' incognita, di cui si cerca il valore, sola e positiva in un membro, senza coefficiente, senza esponente, e senza divisore, mentre nell' altro membro vi sono tutte le quantità cono-

sciute, poichè l'incognita cessa di esser tale dal momento, che è eguale ad un risultamento composto tutto di quantità note.

344. Tutta l'arte di risolvere le equazioni è appoggiata ai seguenti assiomi.

1.° *Aggiungendo o levando da quantità eguali la stessa quantità, oppure quantità eguali, i risultamenti, o i residui sono tra di loro eguali.*

2.° *Moltiplicando o dividendo quantità eguali per la stessa quantità o per quantità eguali, i prodotti, o i quoti, che si ottengono sono quantità eguali.*

3.° *Innalzando alla stessa potenza, od estraendo la radice dello stesso grado da quantità eguali, si ottengono pure quantità eguali.*

4.° *Due quantità eguali ad una terza sono eguali fra di loro.*

5.° *La somma delle parti è eguale al tutto.*

Della risoluzione delle equazioni, e dei problemi determinati di primo grado ad una sola incognita.

345. Sia in primo luogo data l'equazione $x-a=b$, ove tutto è conosciuto fuori che la quantità x. Egli è facile ad accorgersi che questa equazione sarà risoluta, quando col mezzo di qualche artificio di calcolo si sarà mandata via la quantità cognita $-a$ dal primo membro: a tale oggetto si aggiunga ad ambi i membri della proposta equazione la quantità a, ma con segno opposto a quello, che essa si trova avere nel primo membro della data equazione, e si avrà $x+a-a=b+a$, ossia riducendo $x=b+a$. Questo valore di x, che dicesi *radice dell' equazione*, messo nell' equazione medesima, vi soddisfà, rende cioè i suoi membri identici. Di fatto, mediante tale sostituzione, l'equazione

proposta diverrà $b+a-a=b$, ossia riducendo $b=b$.

Se l'equazione da risolversi fosse $x+a=b$, levando da ambi i membri la quantità a, si avrebbe $x+a-a=b-a$, da cui $x=b-a$: radice che soddisfà all' equazione proposta.

346. Esaminando con attenzione l'andamento del processo seguito nella risoluzione delle superiori equazioni, e paragonando le equazioni proposte colle equazioni risolute, si vede, che per far sparire una quantità dal primo membro di un' equazione, senza punto turbare l'eguaglianza, basta scriverla nel secondo membro col segno opposto a quello, che essa aveva nel primo: lo stesso sarebbe accaduto se una quantità appartenente al secondo membro si fosse dallo stesso fatta scomparire; sarebbe essa ricomparsa nel primo membro col segno cangiato, di maniera che si può stabilire la seguente regola. *Si potrà a piacere senza punto turbare l'eguaglianza trasportare da un membro all' altro di una data equazione dei termini, purchè ad essi si cangino i segni*: in questa maniera si potrà liberare l'incognita contenuta in un' equazione, da quei termini, che ad essa fossero uniti o da essa sottratti.

347. Sia ora data l'equazione $ax=b$ da risolversi. Dividendo ambi i membri di questa equazione pel coefficiente a dell' incognita x, si avrà $\frac{ax}{a}=\frac{b}{a}$, ossia $x=\frac{b}{a}$. Se si avesse invece da risolvere l'equazione $\frac{x}{a}=b$; si otterrebbe, moltiplicando ambi i membri per a, $\frac{ax}{a}=ab$, e quindi $x=ab$. Per lo che si può stabilire questa seconda

regola: *che un moltiplicatore d' un membro di una data equazione può passare per divisore all' altro membro, e viceversa, che un divisore di un membro di un' equazione può passare ad esser moltiplicatore dell' altro, restando inalterabile l' eguaglianza.* Di modo che con questo mezzo, quando l'incognita è sola in un membro, si potrà liberarla dal suo coefficiente dividendo l'altro membro pel coefficiente medesimo, e si libererà dal divisore, moltiplicando l'altro membro per questo divisore istesso.

348. Se l' incognita in un' equazione si troverà sparsa in più termini, la prima operazione, che si dovrà fare, sarà quella di trasportare tutti i termini, che la contengono, nel primo membro, ed i termini noti nel secondo, ciò che potrà facilmente eseguirsi in conseguenza di quanto si è detto al (346), cangiando alle quantità che si trasportano i rispettivi segni. Fatta questa prima operazione si separerà l' incognita da tutti i termini, come fattor comune, indi si dividerà il secondo membro dell' equazione pel coefficiente dell' incognita stessa (347), ed in questa maniera si giungerà ad avere il valore dell' incognita, come si può vedere nel seguente esempio.

349. Sia proposta l' equazione $nx-3a=b+mx$ da risolversi.

Trasportando nel primo membro mx, e nel secondo $-3a$, si avrà $nx-mx=b+3a$, e separando il fattor comune x, sarà $(n-m)x=b+3a$, dividendo pel coefficiente $n-m$ di x, si otterrà finalmente $x=\dfrac{b+3a}{n-m}$.

350. Quando i due membri di una stessa equazione hanno un comun moltiplicatore, o un comune

divisore, questo può essere soppresso senza turbare l' eguaglianza, per l' assioma 2.° da noi enunciato (344); se adunque un' equazione da risolversi contenesse dei termini frazionarj, prima di passare alla di lei risoluzione, si ridurranno tutte le quantità, che la compongono, allo stesso denominatore, e quando questo denominatore sarà comune ad ambi i membri della proposta equazione, in allora si sopprimerà, e l'equazione, onde risolverla, si tratterà nella maniera superiormente indicata: così per risolvere l' equazione

$\dfrac{x}{a}-b=\dfrac{c}{m}-x+\dfrac{d}{p}$, si avrà, riducendo prima allo stesso denominatore tutte le sopra scritte quantità, $\dfrac{mpx-abmp}{amp}=\dfrac{acp-ampx+adm}{amp}$,

e sopprimendo il comun divisore, sarà

$mpx-abmp=acp-ampx+adm$,

separando ora i termini cogniti dagli incogniti,

$mpx+ampx=acp+adm+abmp$,

raccogliendo il fattor comune x,

$(mp+amp)x=acp+adm+abmp$,

dividendo finalmente pel coefficiente di x,

si ottiene $x=\dfrac{acp+adm+abmp}{mp+amp}$.

351. Succede alle volte che alla fine dell' operazione l' incognita si trova essere negativa, in allora, per renderla positiva, si cangiano i segni a tutti i termini del secondo membro dell' equazione, avendo sempre di mira però di cangiarli al solo numeratore nel caso che il valore dell' incognita

fosse espresso da una frazione, e ciò in conseguenza di quello che abbiamo detto al (146). La sopra indicata operazione è appoggiata totalmente all' assioma 2.° del (344), perchè con ciò non si fa che moltiplicare ambi i membri dell' equazione per la stessa quantità -1.

Se, per esempio, fosse proposta l' equazione $2x+a=3x+1$ da risolvere, si avrebbe $2x-3x=1-a$, ossia $-x=1-a$, e cangiando i segni a tutti i termini dell' equazione, si otterrebbe finalmente $x=a-1$.

352. In qualunque equazione il valore dell' incognita è tale, che, sostituito in luogo dell' incognita stessa nell' equazione proposta, rende un membro perfettamente eguale all' altro, per cui si ha con ciò un' equazione identica, come abbiamo di già osservato (345). Mediante questa sostituzione si verifica se il valore trovato per l' incognita è giusto, o no.

Coi principj da noi superiormente stabiliti, e colle regole insegnate si può giungere alla risoluzione di qualunque equazione di primo grado ad una sola incognita, per quanto complicata essa sia.

353. *Esempio.* Trovare il valore di x nell' equazione $\frac{x(3-a)}{5-r}+\frac{c}{3}-\frac{ax}{m}=\frac{3x-a}{p}+c.$

Riducendo primieramente tutti i termini del primo membro allo stesso denominatore, e quelli del secondo membro pure al medesimo denominatore, sarà

$$\frac{3mx(3-a)+(cm-3ax)(5-r)}{3m(5-r)}=\frac{3x-a+cp}{p}:$$

moltiplicando ora il primo membro pel divisore p del secondo, ed il secondo membro per quello del

primo $3m(5-r)$, e sopprimendo il comun divisore, si avrà $[3mx(3-a)+(cm-3ax)(5-r)]p=$

$$3m(3x-a+cp)(5-r),$$

ossia eseguendo i prodotti indicati,

$$9mpx-3ampx+5cmp-cmpr-15apx+3aprx=$$
$$45mx-9mrx-15am+3amr+15cmp-3cmpr,$$

e separando i termini, che contengono l' incognita (348), fatte le opportune riduzioni, si otterrà,

$$9mpx-3ampx-15apx+3aprx-45mx$$
$$+9mrx=3amr+10cmp-15am-2cmpr,$$

separando poscia l' incognita x come fattor comune, e quindi liberandola dal suo coefficiente si giungerà finalmente ad avere

$$x=\frac{3amr+10cmp-15am-2cmpr}{9mp-3amp-15ap+3apr-45m+9mr}$$

354. Passiamo ora alla risoluzione dei problemi determinati del primo grado ad una sola incognita.

La maggiore difficoltà, che s' incontra nella risoluzione dei problemi consiste nel modo di poterli ridurre in equazione, ossia nel trovare il rapporto di eguaglianza fra le quantità conosciute o le date del problema, e l' incognita; a quest' oggetto non si possono assegnare delle regole generali, e non vi è che un lungo esercizio ed un' attenta riflessione, per acquistare quell' avvedutezza, mediante la quale si giunge con facilità all' equazione del problema; i seguenti precetti però giovano a renderci agevole l' intavolazione dei problemi.

1.° *Leggendo attentamente il problema, e riflettendo sulla domanda del problema stesso, si distinguano le* *quantità cognite dalle incognite, e si notino le prime coi numeri, o colle prime lettere dell' alfabeto a, b, c, ecc., e le incognite colle ultime lettere x, y, z, ecc.*

2.° *Seguendo parzialmente l' enunciato del problema, si traducano le varie sue condizioni in linguaggio algebrico, e con attente considerazioni si procuri di trovare due espressioni dello stesso valore, e di aspetto diverso, per così formare l' equazione del problema.*

355. Quando poi il problema è messo in equazione, la soluzione dell' equazione, che lo esprime porta con se la risoluzione del problema. Il valore dell' incognita in questo modo trovato deve, se è giusto, soddisfare alle condizioni del problema, e quindi rendere identica, mediante la sua sotituzione, l' equazione del problema stesso.

356. *Problema* I. La terza parte di un esercito disfatto è stata uccisa, la quarta parte fatta prigioniera, e diecimila uomini fuggirono: si domanda di quanti soldati fosse composto quell' esercito, quanti furono gli uccisi, e quanti i prigionieri?

Al primo aspetto le incognite in questo problema sembrano tre, cioè il numero dei soldati componenti l' esercito, il numero degli uccisi, e quello dei prigionieri; ma riflettendo attentamente sulle condizioni del problema, si vede, che quando sarà conosciuto il numero totale dei soldati, che componevano l' esercito, dividendo questo numero per 3, si avrà il numero degli uccisi, e dividendo il numero stesso per quattro, si avrà il numero dei prigionieri.

Soluzione. Chiamando pertanto x il numero incognito di tutti i soldati, che formavano l' esercito, sarà $\frac{x}{3}$ il numero degli uccisi, ed $\frac{x}{4}$ quello dei

prigionieri. È facile ora vedere per le condizioni del problema, che la somma degli uccisi, dei prigionieri e dei fuggiti costituisce il numero totale dei soldati dell' esercito, per cui si avrà per equazione del problema

$$x=\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+10000,$$

giacchè la somma delle parti eguaglia il tutto.

Per risolvere ora questa equazione, si riducano prima tutti i suoi termini allo stesso denominatore, e si avrà $\frac{12x}{12}=\frac{4x+3x+120000}{12}$, ossia sopprimendo il divisor comune 12, e sommando

$12x=7x+120000$, trasportando

$12x-7x=120000$, e riducendo

$5x=120000$; dividendo finalmente per il coefficiente di x, sarà $x=\frac{120000}{5}=24000$.

L' esercito in discorso era composto di 24 mila uomini. La terza parte di 24 mila, ossia 8 mila furono gli uccisi, e la quarta parte del medesimo numero, cioè 6 mila uomini i prigioneri; come si può verificare facilmente sostituendo nell' equazione proposta in luogo di x il suo valore 24000, ciò che rende l' equazione soddisfatta.

357. *Problema* II. Dividere il numero n in due parti, la prima delle quali superi la seconda di una quantità d.

Soluzione. Chiamando x la parte maggiore di questo numero, sarà $x-d$ la parte minore: ora la somma delle due parti per condizione del problema deve eguagliare il numero n, si avrà dunque l' equazione $x+x-d=n$, ossia riducendo e trasportando, $2x=n+d$, da cui si ricava

$$x=\frac{n+d}{2}, \text{ ed } x-d=\frac{n+d}{2}-d=\frac{n+d-2d}{2}=$$

$\frac{n-d}{2}$, *donde si vede che la parte maggiore è eguale alla metà del numero proposto, più la metà della data differenza, e la parte più piccola è eguale alla metà del numero stesso, meno la metà della differenza.*

Per dividere lo stesso numero n in tre parti, di maniera che la prima superi la seconda d' una quantità d, e la seconda superi la terza d' una quantità f; posta la prima parte $=x$, sarà la seconda $x-d$, e la terza $x-d-f$. La somma di tutte tre queste parti dovendo essere eguale al dato numero n, ci darà l' equazione seguente

$$x+x-d+x-d-f=n, \text{ ossia}$$

$$3x-2d-f=n; \text{ donde si ricava}$$

$x=\frac{n+2d+f}{3}$. Le altre parti si avranno facilmente.

Per dividerlo in quattro parti, ed in modo che la differenza fra la prima e la seconda sia d, tra la seconda e la terza f, fra la terza e la quarta g; posta la prima parte $=x$; si avrà l' equazione

$$x+x-d+x-d-f+x-d-f-g=n,$$

donde trovasi $x=\frac{n+3d+2f+g}{4}$.

Nella stessa guisa se la quantità n si dovesse dividere in cinque parti, le di cui differenze incominciando dalla prima sieno per ordine d, f, g, h, fatto il calcolo, si troverà essere la prima parte, cioè

$$x=\frac{n+4d+3f+2g+h}{5}.$$

Se le parti fossero sei, e la quinta differenza fosse l, si troverebbe

$$x=\frac{n+5d+4f+3g+2h+l}{6}, \text{ e così di seguito;}$$

di modo che, riunendo insieme i valori trovati di x, si può formare la seguente tavola

Numero delle parti, nelle quali n è stata divisa.	*La massima delle parti $=x$.*
2.	$x=\frac{n+d}{2}$
3.	$x=\frac{n+2d+f}{3}$
4.	$x=\frac{n+3d+2f+g}{4}$
5.	$x=\frac{n+4d+3f+2g+h}{5}$
6.	$x=\frac{n+5d+4f+3g+2h+l}{6}$
ecc.	ecc.

Dall' ispezione di questa tavola si rileva, che il denominatore di ciascun valore di x è eguale al numero delle parti, in cui n è stato diviso: nel numeratore poi il coefficiente del secondo termine è minore di una unità del denominatore, e gli altri vanno sempre decrescendo di una unità fino al coefficiente dell' ultimo termine, che è 1; onde se il numero delle parti sarà m, avremo la formola generale così espressa

$$x = \frac{n + (m-1)d + (m-2)f + (m-3)g + (m-4)h + \text{ec.}}{m}$$

Facciamo un' applicazione della formola superiore alla soluzione del seguente problema.

358. *Problema* III. Un padre ha lasciati morendo 10000 zecchini da dividersi fra i suoi tre figli, in modo che il maggiore dovesse avere 2000 zecchini di più del secondo, ed il secondo 3000 più del terzo, si cerca la porzione di ciascuno?

Soluzione. Paragonando questi dati con quelli che hanno servito alla soluzione del problema generale, avremo $n = 10000$, $m = 3$, $d = 2000$, $f = 3000$. Questi valori sostituiti nella formola generale danno

$$x = \frac{10000 + 4000 + 3000}{3} = \frac{17000}{3} = 5666 + \tfrac{2}{3}.$$

La porzione adunque del primo figlio sarà di zecchini $5666 + \frac{2}{3}$; quella del secondo $5666 + \frac{2}{3} - 2000 = 3666 + \frac{2}{3}$, e quella del terzo $5666 + \frac{2}{3} - 2000 - 3000 = 666 + \frac{2}{3}$; le quali porzioni sommate insieme danno appunto i 10000 zecchini proposti.

359. *Problema* IV. Due fontane, la prima delle quali sgorgando sola un numero a di ore riempia d'acqua un certo bacino, e la seconda riempia lo stesso bacino sgorgando sola un numero b di ore, si domanda quanto tempo impiegheranno per riempire lo stesso bacino sgorgando tutte e due ad un tratto?

Soluzione. Prendendo la capacità del bacino per unità, si vede subito che la prima fontana, la quale da sola sarebbe capace di riempirlo in un numero a di ore, vi verserà in un' ora una quantità d'ac-

qua espressa da $\frac{1}{a}$, e per conseguenza somministrerà in un numero x di ore una quantità d'acqua espressa da $x \times \frac{1}{a} = \frac{x}{a}$. La seconda fontana per una simile ragione somministrerà in x ore la quantità d'acqua espressa da $\frac{x}{b}$. La quantità totale d'acqua somministrata dalle due fontane nel tempo x sarà quindi espressa da $\frac{x}{a} + \frac{x}{b}$, ma dovendo essa eguagliare la quantità d'acqua, di cui è capace il bacino, stata presa per unità, si avrà l'equazione $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$; da cui si ricava $ax + bx = ab$, ed $(a+b)x = ab$, per cui $x = \frac{ab}{a+b}$. Donde si può avere la seguente semplicissima regola, la quale serve alla soluzione di tutti i problemi simili al proposto.

Dividendo il prodotto dei due numeri, che indicano il tempo impiegato particolarmente da ciascuna fontana per riempire da sola il bacino, per la somma dei numeri medesimi, il quoto darà il tempo necessario alle due fontane per riempire simultaneamente il dato bacino. Così se la prima fontana lo riempisse da sola in 8 ore, e la seconda in 4 ore, si avrebbe $x = \frac{8 \times 4}{8+4} = \frac{32}{12} = 2 + \frac{2}{3}$ pel numero delle ore, che esse impiegherebbero a riempirlo sgorgando insieme.

360. *Problema* V. Un negoziante trae ogni anno dal capitale impiegato nel negozio per spese di fa-

miglia una somma espressa dalla quantità a, ed alla fine d'ogni anno trova che il residuo del suo capitale si è aumentato del terzo, e ciò per tre anni consecutivi, alla fine dei quali il suo capitale si è raddoppiato: si domanda quanto fosse questo capitale?

Soluzione. Chiamando x il capitale, esso rimarrà $x-a$ dopo d'avervi levata la quantità a, ma alla fine del primo anno essendosi questo capitale aumentato del terzo, sarà divenuto $x-a+\frac{x-a}{3}=\frac{4x-4a}{3}$. Levandovi di nuovo la quantità a, si avrà $\frac{4x-4a}{3}-a=\frac{4x-7a}{3}$, ma alla fine del second' anno, essendosi questo capitale aumentato del terzo, sarà espresso in allora da

$$\frac{4x-7a}{3}+\frac{4x-7a}{9}=\frac{16x-28a}{9},$$

il quale, diminuito ancora della quantità a, rimarrà $\frac{16x-28a}{9}-a=\frac{16x-37a}{9}$; alla fine del terzo anno, aumentatosi del suo terzo, diverrà

$$\frac{16x-37a}{9}+\frac{16x-37a}{27}=\frac{64x-148a}{27};$$

ma per la condizione del problema alla fine di tal tempo il capitale primitivo deve essersi raddoppiato, perciò l'equazione del problema sarà $\frac{64x-148a}{27}=2x$, ossia $64x-148a=54x$, e

trasportando $64x-54x=148a$, cioè $10x=148a$, ed $x=\frac{148a}{10}$.

Supponiamo, per esempio, che il negoziante abbia levato per spese di famiglia mille lire all'anno, ed andiamo a vedere, dietro questa ipotesi, quanto era il capitale da lui impiegato in negozio. A tale oggetto avremo $a=1000$, ed $x=\frac{148000}{10}=14800$.

361. ***Problema* VI.** Per impegnare un operajo negligente a terminare una data opera, si è pattuito seco lui che egli avrebbe ricevuto a lire per ogni giorno che avesse lavorato, e pagato b lire per ogni giorno d'ozio: alla fine di n giorni ha terminata la sua opera, e gli sono state pagate a saldo del suo credito c lire. Si domanda il numero dei giorni, che ha lavorato, ed il numero dei giorni, che è stato in ozio?

Soluzione. Chiamando x il numero dei giorni che questo operajo ha lavorato, sarà $n-x$ il numero dei giorni, che egli è stato in ozio. Per ogni giorno di lavoro guadagnando a lire, avrà guadagnato in tutto ax lire, ed avrà perduto $b(n-x)$ lire, giacchè doveva pagare b lire per ogni giorno di ozio. Ora per avere c lire, ossia la somma, che alla fine dei conti ha ricevuta, si deve sottrarre dal suo guadagno la sua perdita, per cui l'equazione del problema sarà $ax-b(n-x)=c$, e sviluppando $ax-bn+bx=c$, ossia $(a+b)x=c+bn$, da cui si ha $x=\frac{c+bn}{a+b}$ pel numero de' giorni di lavoro, e quindi $n-x=n-\frac{c+bn}{a+b}=$

$$\frac{an+bn-c-bn}{a+b}=\frac{an-c}{a+b} \text{ pei giorni di ozio.}$$

Per fare un' applicazione di questo problema generale, supponiamo

$n=60$, $a=3$, $b=2$, $c=80$, e sarà

$$x=\frac{80+2.60}{3+2}=\frac{80+120}{5}=\frac{200}{5}=40.$$

$$n-x=\frac{3.60-80}{5}=\frac{180-80}{5}=\frac{100}{5}=20.$$

362. *Problema* VII. Due corrieri partono l' uno da Milano, l'altro da Brescia per Vienna, seguendo ambidue la stessa strada. Il secondo corriere parte quattro ore dopo il primo. Il primo corriere fa 8 miglia all' ora, ed il secondo ne fa 6. Dopo quante ore ed a qual distanza da Milano essi si troveranno insieme, supponendo che la distanza tra Brescia e Milano sia di 60 miglia?

Soluzione. Si rappresenti la strada colla sottoposta linea, e si noti in essa con M Milano, con B Brescia, con V Vienna, e con I il punto di riunione

M B I V

Sia x il numero delle ore impiegate dal corriere di Milano per giungere al punto I, $x-4$ sarà il numero delle ore, che ha viaggiato il corriere partito da Brescia per arrivare allo stesso punto I di riunione. Il primo facendo 8 miglia all' ora avrà percorso uno spazio espresso da $8x$, cioè dal prodotto risultante dal numero x delle ore per quello delle miglia fatte in un' ora; ed il secondo avrà percorso uno spazio espresso da $(x-4)6$. Ma lo spazio percorso dal secondo corriere per giungere al punto di riunione, unito alla distanza, che vi è tra

Brescia e Milano, eguaglia lo spazio percorso dal primo corriere, poichè la somma degli spazj MB+BI eguaglia lo spazio MI; dunque si avrà per equazione del problema

$$8x=(x-4)6+60=6x-24+60=6x+36,$$

ossia $8x-6x=36$, da cui si ricava prima $2x=36$, indi $x=18$. Dopo 18 ore di viaggio il corriere di Milano raggiungerà quello partito da Brescia, ed alla distanza di 144 miglia da Milano, oppure alla distanza di 84 miglia da Brescia; come si può rilevare moltiplicando il numero delle ore di viaggio di ciascun corriere pel rispettivo numero delle miglia fatte in un' ora.

Per risolvere questo problema si è assunto per incognita il numero delle ore impiegate dal corriere di Milano, e l' equazione è stata formata da due espressioni equivalenti allo stesso spazio MI; si poteva assumere in vece per incognita il numero delle ore impiegate dal corriere partito da Brescia, e si sarebbe ottenuto lo stesso risultamento finale, formando l' equazione del problema con due espressioni equivalenti allo spazio BI$=6x=8(x+4)-60$.

Si può assumere per incognita anche la distanza MI, e formare l' equazione con due espressioni equivalenti allo stesso tempo, per esempio, a quello impiegato dal corriere di Milano: questo tempo verrà espresso dallo spazio MI$=x$ diviso pel numero delle miglia, che il corriere di Milano fa in un' ora, cioè da $\frac{x}{8}$, nello stesso modo quello del corriere di Brescia si esprimerà da $\frac{x-60}{6}$; ma stante le condizioni del problema questo tempo è minore dell' antecedente di 4 ore, per conseguenza l' equazione del problema sarà $\frac{x}{8} = \frac{x-60}{6} + 4$, dalla quale si ricava $x = 144$, che è il cammino fatto dal primo corriere per giungere al punto di riunione, ed $x - 60 = 144 - 60 = 84$, che è il cammino fatto dal secondo corriere, e ciò come è stato appunto da noi superiormente trovato.

363. Supponiamo ora che i due corrieri viaggino in senso contrario, l' uno partendo da Milano per Vienna, e l' altro da Vienna per Milano, e si voglia, salde tutte le condizioni enunciate nell' antecedente problema, sapere dopo quante ore, ed in qual punto i due corrieri si incontreranno, supponendo di 500 miglia la distanza tra Milano e Vienna

M I V

Sia x il tempo espresso in ore impiegato dal corriere di Milano per giungere al punto I d' incontro, sarà $x - 4$ quello impiegato dal corriere di Vienna per arrivare allo stesso punto. Lo spazio MI percorso dal primo sarà espresso da $8x$, e lo spazio VI percorso dal secondo sarà espresso da $(x-4)6 = 6x - 24$.

Ciò posto, si prendano, onde formare l' equazione, due spazj equivalenti ad MV. Si ha primieramente per dato del problema $MV = 500$, e per essere il tutto eguale alla somma delle sue parti, si ha anche $MV = MI + IV = 8x + 6x - 24$, per cui $8x + 6x - 24 = 500$, ossia $14x = 524$, ed $x = 37 + \frac{3}{7}$; succederà adunque il loro incontro, dopo che il corriere di Milano avrà viaggiato trentasette ore e tre settimi di un' ora; e siccome poi per ogni ora egli percorre 8 miglia, così quest' incontro si farà alla distanza da Milano di miglia

$(37 + \frac{3}{7})8 = 299 + \frac{3}{7}$; oppure alla distanza di miglia $200 + \frac{4}{7}$ da Vienna, come si può verificare col moltiplicare il numero $33 + \frac{3}{7}$ delle ore impiegate dal corriere di Vienna per giungere al punto d' incontro per 6, che è il numero delle miglia, che percorreva ogni ora, o più facilmente sottraendo dalla distanza totale $MV = 500$, la parte $MI = 299 + \frac{3}{7}$ superiormente determinata.

Questo problema si poteva egualmente risolvere anche prendendo per incognita lo spazio MI, come precedentemente si è praticato.

Se il corriere, che è partito da Brescia nel primo caso, e da Vienna nel secondo, fosse stato il primo a mettersi in cammino, in allora bisognerebbe cangiare il segno al numero delle ore, di cui egli ha preceduto l' altro, di modo che nel primo caso l' equazione sarebbe $8x = 6(x+4) + 60$, che dà $x = 42$ ore, ed $MI = 336$, e nel secondo caso l' equazione sarebbe $8x + (x+4)6 = 500$, dalla quale si cava $x = 34$, ed $MI = 272$.

364. Questo problema può risolversi generalmente, per avere delle formole capaci di servire per qual si voglia caso simile al precedente.

Supponiamo primieramente che i due corrieri camminino nel medesimo senso, e che MV sia la strada, che percorrono. L' intervallo MB dei punti di partenza sia $= a$, I il punto di riunione, b il numero delle ore, ossia delle unità di tempo, di cui l' un corriere precede l' altro; c e d il numero delle miglia, che ciascun corriere fa in un' ora, ossiano le velocità rispettive, essendo $c > d$, x l' intervallo MI, sarà per conseguenza l' intervallo $BI = x - a$. L' equazione del problema si formerà con due espressioni equivalenti al tempo impiegato dallo stesso corriere. Ora il tempo impiegato dal corriere partito da M è $\frac{x}{c}$, quello dell' altro è $\frac{x-a}{d}$; se poi, come nell' esempio precedente, quest' ultimo è minore del primo, si avrà $\frac{x-a}{d}+b$ per il secondo valore dello stesso tempo impiegato dal corriere partito da M. Dunque $\frac{x-a}{d}+b=\frac{x}{c}$; donde, fatte le opportune operazioni, si ricava $x=\frac{c(a-bd)}{c-d}$, che è il valore di MI. Quello di BI sarà

$$x-a=\frac{c(a-bd)}{c-d}-a=\frac{d(a-bc)}{c-d}.$$

Se il corriere che parte da M fosse il secondo a mettersi in viaggio, per esprimere questa condizione basterà cangiare il segno a quel termine, in cui b è fattore, per cui l' intervallo MI, ossia

$$x=\frac{c(a+bd)}{c-d}, \text{ e BI, oppure } x-a=\frac{d(a+bc)}{c-d}.$$

365. Supponiamo che i corrieri viaggino in senso contrario, e sian ritenute tutte le altre denominazioni

$$\overset{\text{M}}{\cdot}\text{———————————}\overset{\text{I}}{\cdot}\text{———————————}\overset{\text{V}}{\cdot}$$

$$\text{MV}=a,\ \text{MI}=x,\ \text{VI}=a-x.$$

Si avranno quindi le due espressioni

$\frac{x}{c}$ ed $\frac{a-x}{d}-b$ equivalenti al medesimo tempo, supponendo che il corriere partito da V sia stato il primo a partire; onde $\frac{x}{c}=\frac{a-x}{d}-b$; da dove si ricava, mediante le opportune operazioni,

$$x=\frac{c(a-bd)}{c+d}, \text{ ed } a-x=\frac{d(a+bc)}{c+d}.$$

Se il corriere partito da M fosse il primo a mettersi in moto, basterebbe cangiare il segno a quel termine, in cui b è fattore, e si avrebbe

$x=\frac{c(a+bd)}{c+d}$, ed $a-x=\frac{d(a-bc)}{c+d}$. Questo cangiamento di segno proviene dall' essere la seconda espressione del tempo contrassegnata da $\frac{a-x}{d}+b$, e non da $\frac{a-x}{d}-b$, come nel primo caso.

Della risoluzione delle equazioni e dei problemi determinati di 1.° grado a due e più incognite.

366. Quando un problema contiene due incognite, per essere determinato, deve in se racchiudere due diverse condizioni; dalle quali si possano derivare due equazioni contenenti ne' loro termini i rapporti, che esistono fra le quantità conosciute, e le quantità incognite, mediante le quali si ricava il valore delle incognite contenute nelle medesime.

In diverse maniere si giunge a determinare questi valori; tutti i metodi, che si conoscono convengono però a fare in modo, che da due equazioni contenenti due incognite, se ne possa ricavare una sola con una sola incognita, mediante la quale si incomincia a determinare il valore di questa incognita; dopo di che si determina con tutta facilità anche il valore della seconda, sostituendo in una delle due equazioni proposte, in luogo della prima incognita, il suo valore di già determinato.

367. I metodi ordinarj per la risoluzione delle equazioni a due o più incognite si possono ridurre

a tre, i quali prendono i loro differenti nomi dal principio, sul quale ciascuno di essi appoggia, e sono i seguenti; 1.° *Metodo di confronto o di paragone*, 2.° *Metodo di sostituzione*, 3.° *Metodo di addizione e sottrazione.*

368. Risolviamo con ciascuno dei tre sopra indicati metodi le seguenti due equazioni generali a due incognite $ax + by = c$, $a'x + b'y = c'$.

Incominciando dal metodo di paragone, *si caverà da tutte e due le proposte equazioni il valore della medesima incognita, trattando l' altra, come se fosse una quantità conosciuta: quei due valori così determinati si paragoneranno fra di loro, con che si otterrà una equazione con una sola incognita, mediante la quale si potrà determinare il valore dell' incognita medesima.* Ricavando quindi nel presente caso il valore di x, dalla prima equazione si avrà $x = \frac{c - by}{a}$, e dalla seconda si otterrà $x = \frac{c' - b'y}{a'}$: ora che si hanno due valori eguali di x, paragonati fra di loro daranno la nuova equazione $\frac{c - by}{a} = \frac{c' - b'y}{a'}$, la quale non contiene che la sola incognita y. Risolvendo questa equazione per rapporto ad y, si ha primieramente $a'c - a'by = ac' - ab'y$, ossia $ab'y - a'by = ac' - a'c$, donde si cava $(ab' - a'b)y = ac' - a'c$, e finalmente

$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

Per trovare poi il valore dell' altra incognita, si potrebbe da capo procedere nel modo stesso, cavando dalle due proposte equazioni il valore di y, e paragonando tra loro i due valori eguali trovati; l' equazione, a cui con questo mezzo si giungerebbe, conterrebbe la sola incognita x, che si potrebbe determinare, come si fece superiormente della y: ma più brevemente si ottiene il valore della suddetta incognita, sostituendo in una delle prime due equazioni, che si sono ricavate, il valore di y. Operando in questa seconda maniera, e mettendo nell' equazione $x = \frac{c - by}{a}$ il valore trovato per y, si avrà

$$x = \frac{c - b\left(\frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}\right)}{a} = \frac{ab'c - a'bc - abc' + a'bc}{a(ab' - a'b)} =$$

$$\frac{ab'c - abc'}{a(ab' - a'b)} = \frac{a(b'c - bc')}{a(ab' - a'b)} = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}.$$

369. Per risolvere le medesime equazioni col metodo di sostituzione, 1.° *da una si ricaverà il valore di una delle due incognite, considerando l' altra come cognita;* 2.° *si sostituirà il valore trovato nell' altra equazione, per cui si avrà una sola equazione con una sola incognita,* 3.° *si risolverà questa equazione per ottenere così il valore di un' incognita,* 4.° *finalmente si sostituirà questo valore in una delle due equazioni ritrovate, affine di determinare anche il valore della seconda incognita*: di modo che per risolvere le due equazioni generali

$$ax + by = c, \quad a'x + b'y = c',$$

cavato dalla prima il valore di $x = \frac{c - by}{a}$, si sostituisca nella seconda, per cui si avrà $\frac{a'(c - by)}{a} + b'y = c'$, ossia $a'c - a'by + ab'y = ac'$, e separando i termini contenenti l'incognita da quelli, che non la contengono, sarà

$ab'y - a'by = ac' - a'c$, oppure

$(ab' - a'b)y = ac' - a'c$, per cui $y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$.

Per avere il valore di x si potrebbe ripetere quello che si è fatto rapporto ad y, avendo solo riguardo di cavare il valore di y in luogo di quello di x da una delle due proposte equazioni per sostituirlo nell'altra. Più speditamente però lo si otterrà sostituendo nel valore di x espresso per y il valore di y come antecedentemente abbiam fatto.

370. Volendo impiegare il metodo di addizione e sottrazione; *fa d' uopo* 1.° *rendere eguali in ambe le equazioni i coefficienti di quell' incognita, che si vuole eliminare, e ciò si ottiene col moltiplicare tutti i termini della prima equazione pel coefficiente, che si trova avere l' incognita, che si vuole mandar via nella seconda, e moltiplicando la seconda equazione pel coefficiente, che la stessa incognita si trova avere nella prima,* 2.° *ridotta che sia l' incognita ad avere lo stesso coefficiente in ambe le equazioni, se il segno da cui è affetta nella prima è contrario a quello, che ha nella seconda, le due equazioni si sommano, e se in entrambe ha lo stesso segno, in allora si sottrae un' equazione dall' altra; operando in tale guisa ne risulterà una equazione ad una sola incognita, la quale si risolverà colle note regole. A fine poi di determinare l' altra incognita si può da capo procedere collo stesso metodo, oppure al solito adoperare la sostituzione.*

Dalle equazioni generali

$$ax + by = c, \qquad a'x + b'y = c'$$

volendo eliminare la x, si moltiplicheranno tutti i

termini della prima equazione per a', e quelli della seconda per a, e si avrà

$$aa'x + a'by = a'c, \qquad aa'x + ab'y = ac',$$

dalla seconda poi sottraendo la prima, sarà

$ab'y - a'by = ac' - a'c$, d' onde si ricava

$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

Se si volesse eliminare la y per avere il valore di x, si opererebbe in un modo a questo analogo.

Con uno qualunque di questi tre metodi si potranno sempre risolvere due equazioni a due incognite per complicate che esse siano: la pratica poi fa conoscere quale sia nei diversi casi il più utile da impiegarsi per poter più brevemente giungere allo scopo; generalmente parlando però, il metodo di paragone è il più lungo.

371. Paragonando le due equazioni proposte coi trovati valori delle due incognite, si può osservare la seguente legge riguardo alla formazione dei valori stessi.

Il numeratore della frazione, che esprime il valore di x, si forma moltiplicando il coefficiente b' di y nella seconda equazione per la quantità nota c della prima equazione, moltiplicando indi il coefficiente b della stessa incognita nella prima equazione pel valore noto c' della seconda equazione, e sottraendo in fine il secondo prodotto dal primo: il denominatore poi è eguale al prodotto del coefficiente a di x nella prima equazione pel coefficiente b' di y nella seconda equazione, meno il prodotto del coefficiente a' di x nella seconda equazione pel coefficiente b di y nella prima equazione. Il numeratore della frazione esprimente il valore di y si forma dal prodotto del coefficiente a di x nella prima equazione *pel termine noto c' della seconda, meno il prodotto del coefficiente a' di x nella seconda equazione pel valore noto c della prima. Il suo denominatore è lo stesso di quello di x.*

Col mezzo delle due equazioni generali superiormente risolute si può avere la soluzione di due equazioni qualunque di primo grado a due incognite, con una semplice sostituzione da farsi nei valori delle incognite dalle medesime ricavati.

372. *Esemp.* Siano le due equazioni da risolversi

$$4x - 3y = 7$$
$$5x + y = 23.$$

Paragonando termine per termine queste equazioni colle due equazioni generali

$$\left.\begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right\} \text{ le cui radici sono } \quad x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}, \quad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

Si avrà

$$\begin{array}{ll} a = 4 & a' = 5 \\ b = -3 & b' = 1 \\ c = 7 & c' = 23 \end{array}$$

Sostituiti questi valori nei valori generali di x, e di y superiormente trovati, si avrà

$$x = \frac{7 + 69}{4 + 15} = 4, \quad y = \frac{92 - 35}{19} = 3.$$

Valori che soddisfanno alle proposte equazioni, come facilmente si può verificare sostituendoveli in luogo delle incognite medesime.

373. Se le due equazioni proposte contenessero in diversi termini la medesima incognita, in allora, per servirsi delle formole generali per la risoluzione

delle medesime, bisognerebbe in ogni equazione raccogliere in una sola espressione tutte le quantità contenenti la medesima incognita, trasportando nel secondo membro, sì in una, che nell'altra equazione, tutte le quantità conosciute: così se fossero date le due equazioni

$$mx + y + 3x - n = fy + d$$
$$2x - p + 2y = q + py.$$

Operando nel modo sopra indicato, sarà primieramente

$$mx + 3x + y - fy = d + n$$
$$2x + 2y - py = p + q,$$

e raccogliendo i fattori comuni

$$(m+3)x + (1-f)y = d + n$$
$$2x + (2-p)y = p + q.$$

Paragonando queste equazioni colle equazioni generali, si avrà

$$\begin{array}{ll} a = m + 3 & a' = 2 \\ b = 1 - f & b' = 2 - p \\ c = d + n & c' = p + q, \end{array}$$

e sostituendo, sarà

$$x = \frac{(2-p)(d+n) - (1-f)(p+q)}{(m+3)(2-p) - 2(1-f)} =$$
$$\frac{2d + 2n - dp - np - p - q + fp + fq}{2m - mp + 6 - 3p - 2 + 2f} =$$
$$\frac{2d + 2n - dp - np - p - q + fp + fq}{2m - mp + 4 - 3p + 2f},$$

$$y = \frac{(m+3)(p+q) - 2(d+n)}{(m+3)(2-p) - 2(1-f)} =$$
$$\frac{mp + mq + 3p + 3q - 2d - 2n}{2m - mp + 4 - 3p + 2f}.$$

374. Se una delle due equazioni contenesse una sola incognita, in allora nell' equazione generale si eguaglierà a zero il coefficiente della corrispondente incognita: così se si avessero le due equazioni $5x=8$, $3x+y=9$, sarebbe paragonando $a=5$, $a'=3$, $b=0$, $b'=1$, $c=8$, $c'=9$, e sostituendo $x=\frac{8}{5}$, $y=\frac{45-24}{5}=\frac{21}{5}$.

Applicheremo ora questa dottrina alla soluzione di alcuni problemi di 1.° grado a due incognite.

Prima però di passare alla soluzione di questi problemi si osservi che, allorquando si deve intavolare un problema a due incognite, oltre i precetti, che si sono indicati (354), per render facile questa operazione si deve avere l'avvertenza di separare le due distinte condizioni, che essenzialmente vi devono essere nell' enunciato del problema, da cui risultar devono le due equazioni.

375. *Problema* I. È data la somma di due quantità $=a$, e la loro differenza $=b$; si domanda il valore di ciascuna delle quantità?

Soluzione. Sia x la maggiore di queste quantità, y la minore, si avranno le due equazioni

$$x+y=a$$
$$x-y=b.$$

Procedendo quindi col metodo di addizione e sottrazione, si avrà, sommando queste due equazioni membro per membro, $2x=a+b$, quindi

$$x=\frac{a+b}{2}.$$

Dalla prima di quelle due equazioni sottraendo poi la seconda, si avrà $2y=a-b$, ed $y=\frac{a-b}{2}$. Da ciò si ricava la seguente regola generale.

Che data la somma, e la differenza di due quantità, la maggiore eguaglia la metà della somma più la metà della differenza, e la minore eguaglia la metà della somma, meno la metà della differenza; come di già si è osservato (357). Mediante questa regola si possono sciogliere tutti i problemi, nei quali sia data la somma, e la differenza delle quantità, che si cercano.

Se si domandasse, per esempio, l'età di Newton, e quella di Cartesio, sapendo che la somma delle due età è di 139 anni, e che Cartesio era più giovane di Newton di 31 anni, si troverebbe essere l'età di Newton eguale alla metà della somma 139 più la metà della differenza 31, ossia $=\frac{139+31}{2}=85$, e quella di Cartesio $=\frac{139-31}{2}=54$.

376. *Problema* II. Due facchini portano dei carichi espressi in quintali. Uno di essi lamentandosi del suo peso dice all' altro; se io avessi ancora un quintale del tuo carico, sarei caricato il doppio di te. L'altro risponde, se tu me ne dessi un quintale del tuo, io avrei il triplo di te; si domanda quanti quintali ciascuno portava?

Soluzione. Supponiamo che il carico del primo facchino sia di x quintali, e quello del secondo sia di y quintali: se il primo facchino darà al secondo un quintale del proprio carico, egli rimarrà con $x-1$, ed il secondo verrà ad averne $y+1$, e poichè in questo caso il carico del secondo è doppio di quello del primo, si avrà l' equazione $2(x-1)=y+1$, ossia $2x-2=y+1$; ma se il secondo facchino darà un quintale del suo carico al primo, egli rimarrà con $y-1$, ed il primo verrà ad averne $x+1$, ed essendo in questo caso il carico del primo triplo di quello del secondo, avremo $x+1=3(y-1)$, ossia $x+1=3y-3$, che è la seconda equazione del problema.

Dalla prima di queste due equazioni si ricava $x=\frac{y+3}{2}$, e dalla seconda $x=3y-4$, dal paragone delle quali ne risulta l' equazione $\frac{y+3}{2}=3y-4$, ossia $y+3=6y-8$; e quindi $5y=11$, da cui si ricava $y=\frac{11}{5}=2+\frac{1}{5}$: sostituendo questo valore di y nell' equazione $x=3y-4$ superiormente trovata, si avrà

$$x=\frac{33}{5}-4=\frac{33-20}{5}=\frac{13}{5}=2+\frac{3}{5}.$$

Il primo dei due facchini portava due quintali e tre quinti, ed il secondo ne portava due ed un quinto; carichi che soddisfanno alle condizioni del problema.

377. *Problema* III. Un operajo, che ha lavorato un numero a di giorni in una casa, tenendo seco lui la moglie per un numero b di giorni, ha guadagnato una somma c; egli ha lavorato in seguito nella stessa casa un numero a' di giorni, e questa volta ha avuto seco lui la moglie per un numero b' di giorni, ed ha ricevuto una somma c'; si domanda quanto egli guadagnava al giorno, e quanto era il guadagno di sua moglie durante lo stesso tempo?

Soluzione. Sia x il prezzo della giornata dell' operajo, y quello della moglie; per un numero a di giorni egli avrà guadagnato ax, e sua moglie per un numero b di giorni avrà guadagnato by; di modo

che la prima equazione di questo problema sarà $ax+by=c$. La seconda si troverà ragionando in un modo analogo a quello da noi seguito per trovare la prima equazione, e sarà $a'x+b'y=c'$. Queste due equazioni già risolute al (368) danno

$$x=\frac{b'c-bc'}{ab'-a'b},\quad y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}.$$

Per fare un' applicazione di questo problema generale, supponiamo che la prima volta abbia l' operajo lavorato 12 giorni, e 7 giorni la moglie, e che abbia ricevuto 74 lire; che la seconda volta egli abbia lavorato 8 giorni, e la moglie 5 giorni, e che abbia ricevuto 50 lire. Paragonando si avrà

$$\begin{array}{ll} a=12 & a'=8 \\ b=7 & b'=5 \\ c=74 & c'=50. \end{array}$$

Messi questi valori nelle due equazioni generali, esse diverranno

$$x=\frac{370-350}{60-56}=5;\ \text{ed}\ y=\frac{600-592}{4}=2.$$

378. *Problema* IV. Si è mischiato insieme una certa quantità di due differenti materie: tutto il miscuglio fa un volume di a pollici cubici e pesa b once. Un pollice cubico della prima materia pesa c once, un pollice cubico della seconda materia pesa d once: si domanda quanto sia la quantità di ciascuna delle materie mescolate?

Soluzione. Sia x il numero dei pollici cubici della prima materia, e y il numero dei pollici cubici della seconda, e si avranno le seguenti equazioni

$$x+y=a$$
$$cx+dy=b$$

dalle quali si ricava $x=\frac{b-ad}{c-d}$; $y=\frac{ac-b}{c-d}$.

Esaminando questi valori si ricaverà una regola semplicissima per la soluzione di tutti i problemi di questa specie.

Per avere il numero delle parti della prima materia, che entra nel miscuglio, si calcola quanto peserebbe il volume del miscuglio, se egli fosse composto tutto della seconda materia, ciò che si ottiene moltiplicando il volume a pel peso specifico d; questo peso si leva dal peso totale b del miscuglio, ed il residuo si divide per la differenza c — d dei due pesi specifici c, e d.

Per avere poi il numero delle parti della seconda materia, si calcola quanto peserebbe il volume del miscuglio, se tutto fosse della prima materia, e da esso si leva il peso totale del miscuglio, ed il residuo si divide per la differenza dei pesi specifici.

379. La soluzione di questo problema serve a sciogliere tutte le quistioni che si riferiscono alla regola aritmetica di alligazione.

Giova però qui avvertire che le soluzioni dei problemi, che presentemente si considerano, non sempre corrispondono con esattezza ai risultamenti, che realmente ottengonsi in natura; e ciò perchè allorquando due o più sostanze, per esempio, due o più metalli si uniscono fra di loro per affinità di composizione, il volume della sostanza terza, o della lega, che ne risulta non suole eguagliare la somma dei volumi delle sostanze componenti, onde nel caso, per esempio, dei due metalli suol divenire inesatta l'equazione $x+y=a$. Però se col mezzo dell'esperienza si potesse conoscere il rapporto del volume a cogli altri x, y, ecc., e se si conoscesse

quindi essere nel caso precedente $x+y=m.a$; allora servendoci di questa nuova equazione in vece dell'altra $x+y=a$, potressimo col calcolo ottenere un risultamento eguale a quello, che ottiensi in natura.

Passiamo alle equazioni ed ai problemi a tre e più incognite.

380. I metodi, che si sono insegnati per la risoluzione delle equazioni di primo grado a due incognite, sono applicabili alla risoluzione delle equazioni di primo grado contenenti un numero qualunque d'incognite: di fatto sieno da risolversi le seguenti tre equazioni con tre incognite

$$x+2y+z=8$$
$$2x+y-z=7$$
$$x-y+5z=6.$$

Seguendo il metodo di paragone, cavo il valore della medesima incognita, per esempio di x da tutte tre le equazioni, ed ho

dalla 1.ª $x=8-2y-z$,

dalla 2.ª $x=\frac{7-y+z}{2}$,

dalla 3.ª $x=6+y-5z$.

Paragonando ora queste tre equazioni fra di loro si verranno a formare due nuove equazioni, le quali conterranno le due sole incognite y, e z; se si paragonerà la prima colla seconda, si ricaverà

$8-2y-z=\frac{7-y+z}{2}$, dal paragone della prima colla terza, si otterrà $8-2y-z=6+y-5z$.

Qui è da osservarsi che si otterrebbe lo stesso risultamento finale, se si fosse in vece paragonata la seconda colla terza. Adesso che la quistione si è ridotta a risolvere due equazioni con due incognite, continuando col metodo di paragone, si cavi dalle due equazioni il valore di una stessa incognita, per esempio della y, e si avrà dalla prima

$16-4y-2z=7-y+z$, ossia $3y=9-3z$, da cui $y=3-z$, dalla seconda $3y=4z+2$, cioè $y=\frac{4z+2}{3}$.

Eguagliando ora questi due valori di y, si ottiene

$3-z=\frac{4z+2}{3}$; donde $9-3z=4z+2$,

ossia $7z=7$, e $z=1$.

Ora che si conosce il valore di z pongasi questo in una delle due equazioni esprimenti il valore di y per mezzo della z, per esempio, nella prima, e si avrà $y=3-1=2$. Mettendo poi i valori trovati per y e per z in una qualunque delle tre equazioni esprimenti il valore di x per mezzo di y e di z, si avrà in questo modo anche quello di x. Ponendolo in fatti nella prima di esse, sarà

$$x=8-4-1=3.$$

Sostituendo nelle equazioni proposte 3 in luogo di x, 2 in luogo di y, ed 1 in vece di z, esse si verificheranno compiutamente.

381. Se tutte tre le incognite non si trovassero nello stesso tempo in ciascuna delle equazioni proposte, il calcolo per la loro risoluzione riuscirebbe assai più facile. Se, per esempio, si dovessero risolvere le tre equazioni

$$\begin{array}{ll} 1.^a & x+2z=10 \\ 2.^a & 3x-y=3 \\ 3.^a & x+y-z=1. \end{array}$$

impiegando il metodo di addizione e sottrazione, osservo che sommando la $2.^a$ equazione colla $3.^a$, si elimina la y, e si ha $4x-z=4$, equazione, che contiene le stesse due incognite contenute nella $1.^a$: onde eliminare poi la z, si moltiplichi questa equazione pel coefficiente 2, che ha la z nella $1.^a$ delle tre equazioni proposte, dal che si avrà $8x-2z=8$; che sommata colla $1.^a$ dà

$$9x=18, \text{ per cui } x=2.$$

Questo valore, messo in luogo di x nella $1.^a$ delle proposte equazioni, darà $z=\frac{10-2}{2}=4$.

Sostituito poi lo stesso valore nella $2.^a$ ci dà

$$y=6-3=3.$$

Volendo risolvere le medesime equazioni col metodo di sostituzione, si caverà il valore di una delle tre incognite in una delle proposte equazioni, e si sostituirà nelle altre: cavando, per esempio, dalla $1.^a$ il valore di x, si avrà $x=10-2z$, mediante questa sostituzione le altre due equazioni diventeranno

$$\begin{array}{l} 30-6z-y=3 \\ 10-3z+y=1 \end{array}$$

dalla seconda delle quali cavando il valore di $y=3z-9$, e mettendolo nella prima, si avrà

$$30-6z-3z+9=3, \text{ cioè}$$

$9z=36$, da cui $z=4$: come si è di già trovato coll' altro metodo.

382. Si abbiano ora quattro equazioni con quattro incognite, e siano le seguenti

$$\begin{array}{l} x+y+z+t=10 \\ 2x+y+z-t=3 \\ 3x-2y-3z+4t=6 \\ 4x+2y+z-2t=3. \end{array}$$

Procedendo col metodo di paragone, cavo da ciascuna equazione il valore di x, ed ho,

$$1.^\circ \ x = 10 - y - z - t$$

$$2.^\circ \ x = \frac{3 - y - z + t}{2}$$

$$3.^\circ \ x = \frac{6 + 2y + 3z - 4t}{3}$$

$$4.^\circ \ x = \frac{3 - 2y - z + 2t}{4}.$$

Eguagliando ora il primo di questi valori di x successivamente con ciascuno degli altri, si avranno le tre equazioni seguenti

$$10 - y - z - t = \frac{3 - y - z + t}{2},$$

$$10 - y - z - t = \frac{6 + 2y + 3z - 4t}{3},$$

$$10 - y - z - t = \frac{3 - 2y - z + 2t}{4},$$

continuando il calcolo, e cavando da tutte tre queste equazioni il valore di y, si avrà

$$1.^a \ y = 17 - z - 3t$$

$$2.^a \ y = \frac{24 - 6z + t}{5}$$

$$3.^a \ y = \frac{37 - 3z - 6t}{2}.$$

Paragonando la prima di queste equazioni colla seconda, e la seconda colla terza, si ottengono le due equazioni seguenti

$$17 - z - 3t = \frac{24 - 6z + t}{5}$$

$$\frac{24 - 6z + t}{5} = \frac{37 - 3z - 6t}{2},$$

dalla prima delle quali si ricava

$z = 16t - 61$, e dalla seconda

$z = \frac{137 - 32t}{3}$. Confrontando finalmente queste due equazioni, si giungerà ad avere l'equazione $16t - 61 = \frac{137 - 32t}{3}$ contenente una sola incognita, dalla quale si ricava $t = 4$.

Mediante poi le opportune sostituzioni si troverà essere $z = 3$, $y = 2$, ed $x = 1$; valori, che soddisfanno pienamente alle quattro proposte equazioni, come facilmente si può verificare, facendo nelle equazioni medesime le debite sostituzioni.

383. Se in generale si avessero n equazioni con un egual numero d' incognite, per risolverle col metodo di paragone sarebbe d' uopo, 1.° *risolvere ciascuna equazione per rapporto ad una stessa incognita, dal che si avrebbero n equazioni esprimenti tutte lo stesso valore*, 2.° *eguagliare questi valori fra di loro combinandoli a due a due, dal che si verranno ad avere $n - 1$ equazioni con $n - 1$ incognite*, 3.° *trattare queste equazioni derivate nell' egual maniera, che si sono trattate le primitive, e così di seguito; in tale maniera il numero delle equazioni, e delle incognite andrà sempre del pari diminuendo, sino a tanto che si giungerà ad una equazione con una sola incognita, dalla quale si desumerà facilmente il valore dell' incognita medesi-*

ma. Mediante poi le opportune sostituzioni si avranno di mano in mano i valori delle altre incognite.

384. Volendo adoperare il metodo di sostituzione, 1.° *si caverà da una delle n equazioni da risolversi il valore di una qualunque delle n incognite in esse contenute*, 2.° *si sostituirà questo valore in luogo di quell' incognita in tutte le altre equazioni, le quali mediante questa operazione si ridurranno ad* $n-1$ *con* $n-1$ *incognite, eliminandosene una per mezzo di questa sostituzione*, 3.° *da una qualunque di queste* $n-1$ *equazioni si caverà il valore di una qualunque delle incognite, che vi saranno contenute, e si sostituirà in tutte le altre equazioni, per cui si verranno ad avere* $n-2$ *equazioni con* $n-2$ *incognite, e così di seguito, procedendo sempre con questo metodo, sino a tanto che si giungerà ad un' equazione con una sola incognita, dalla quale si caverà il valore dell' incognita stessa. Sostituendo poi questo valore in una delle antecedenti equazioni, si determinerà una seconda incognita; mediante la sostituzione di questi due valori, nell' equazione apposita, si avrà il valore d' una terza incognita, e così di seguito, continuando ad operare, si giungerà a determinare i valori rispettivi di tutte le n incognite appartenenti alle n equazioni proposte.*

385. Volendo impiegare il metodo di addizione e sottrazione è necessario 1.° *moltiplicare ciascuna equazione pel prodotto dei coefficienti, che si trova avere quell' incognita, che si vuol eliminare in tutte le altre equazioni*, 2.° *combinare in seguito la prima equazione così ridotta con ciascuna delle altre in via di somma o sottrazione, acciò scomparisca l' incognita, che si vuol eliminare, con che si otterranno* $n-1$ *equazioni con* $n-1$ *incognite*, 3.° *operare in un modo analogo sulle equazioni, che di mano in mano*

si ottengono sino a tanto che si giunga ad avere una sola equazione con una sola incognita, la quale risoluta darà il valore dell' incognita stessa; per avere le altre incognite vale il processo indicato superiormente.

386. Alle volte succede, che nel combinare con uno qualunque dei sopra descritti metodi le equazioni, si eliminano ad un tratto diverse incognite, ciò che facilita la risoluzione delle equazioni, come si può vedere nel seguente esempio.

Debbansi risolvere le tre seguenti equazioni

$$1.^a \quad x + 2y - z = 1$$
$$2.^a \quad 2x - 2y + z = 2$$
$$3.^a \quad 2x - 2y + 2z = 6$$

sommo la 1.ª colla 2.ª, ed ho

$$3x = 3, \text{ da cui } x = 1.$$

Dalla 3.ª sottraggo la 2.ª, ed ho $z = 4$. Sostituiti nella prima delle proposte equazioni in luogo di x e di z i valori trovati, si ha $1 + 2y - 4 = 1$; e quindi $y = 2$.

Passiamo alla risoluzione di alcuni problemi contenenti tre incognite.

387. *Problema* I. La polvere da schioppo è composta di salnitro, di zolfo, e di carbone. La mistura è tale che in 100 libbre il triplo del peso del salnitro impiegato è eguale a tredici volte quello del carbone, più cinque volte quello dello zolfo, e che cinque volte il peso del salnitro vale trentasette volte il peso dello zolfo, meno sette volte quello del carbone. Con qual proporzione si fa dunque la mistura?

Soluzione. Sia x il peso del salnitro, y quello dello zolfo, e z quello del carbone, essendo x, y, z

valutati in libbre. La prima condizione dà l'equazione $x + y + z = 100$,
la seconda dà $3x = 5y + 13z$
e la terza $5x = 37y - 7z$.
Dalla prima equazione si ricava

$$x = 100 - y - z,$$

dalla seconda $x = \frac{5y + 13z}{3}$,

e dalla terza $x = \frac{37y - 7z}{5}$.

Paragonando il primo col secondo valore di x, indi il primo col terzo, si trova

$$100 - y - z = \frac{5y + 13z}{3};$$

$$100 - y - z = \frac{37y - 7z}{5},$$

dalla prima delle quali si ricava

$y = \frac{300 - 16z}{8} = \frac{75 - 4z}{2}$, e dalla seconda

$y = \frac{500 + 2z}{42} = \frac{250 + z}{21}$. Paragonando ora questi due valori di y, si ha $\frac{75 - 4z}{2} = \frac{250 + z}{21}$, e tolti i divisori, $1575 - 84z = 500 + 2z$, da cui si cava $86z = 1075$, e quindi $z = \frac{1075}{86} = 12 + \frac{1}{2}$.
Sostituendo in y espresso per z, in luogo di z il suo valore, si ha

$$y = \frac{75 - 4(12 + \frac{1}{2})}{2} = \frac{75 - 50}{2} = 12 + \frac{1}{2}.$$

Mettendo finalmente i valori di y, e di z nel primo valore di x, si ha
$x = 100 - (12 + \frac{1}{2}) - (12 + \frac{1}{2}) = 100 - 25 = 75$.
Vi sono adunque settantacinque libbre di salnitro, 12 libbre e mezzo tanto di zolfo, che di carbone in cento libbre di polvere. Di modo che nella composizione della polvere da schioppo vi entrano $\frac{6}{8}$ di salnitro, $\frac{1}{8}$ di zolfo, ed $\frac{1}{8}$ di carbone.

388. *Problema* II. Si è comperato della tela di tre qualità in tre diverse riprese. La prima volta per averne 30 braccia della prima qualità, 20 della seconda, e 10 della terza, si sono spese 230 lire. La seconda volta per averne 15 braccia della prima qualità, 6 della seconda, e 12 della terza si sono spese 138 lire. Finalmente per averne 10 braccia della prima qualità, 5 della seconda, e 4 della terza, si sono sborsate 75 lire: si domanda quanto importi al braccio la tela di ciascuna qualità?

Soluzione. Chiamo x il prezzo di un braccio di tela della prima qualità, y quello della seconda qualità; e z quello della terza.

Per soddisfare alla prima condizione si vede, che le 30 braccia di tela della prima qualità importeranno $30x$, le 20 della seconda qualità, $20y$, e le 10 braccia della terza qualità importeranno $10z$.

Ma queste tre somme riunite insieme danno appunto 230 lire, dunque la prima equazione del problema sarà $30x + 20y + 10z = 230$. Ragionando nella stessa maniera, si otterranno le altre due equazioni

$$15x + 6y + 12z = 138$$
$$10x + 5y + 4z = 75.$$

Le due prime equazioni possono semplificarsi dividendo la prima per 10, e la seconda per 3, onde le tre equazioni del problema proposto, saranno

$$1.^a \quad 3x + 2y + z = 23.$$
$$2.^a \quad 5x + 2y + 4z = 46.$$
$$3.^a \quad 10x + 5y + 4z = 75.$$

Procedendo col metodo di sostituzione, cavo dalla prima $z = 23 - 3x - 2y$, e lo metto nelle altre due, dal che ho

$$5x + 2y + 4(23 - 3x - 2y) = 46$$
$$10x + 5y + 4(23 - 3x - 2y) = 75,$$

ossia sviluppando

$$5x + 2y + 92 - 12x - 8y = 46$$
$$10x + 5y + 92 - 12x - 8y = 75\text{, e riducendo}$$
$$7x + 6y = 46$$
$$2x + 3y = 17.$$

Cavo il valore di $x = \frac{17 - 3y}{2}$ dalla seconda, e lo pongo nella prima, onde ho

$$\frac{7(17 - 3y)}{2} + 6y = 46\text{, e sviluppando}$$

$$119 - 21y + 12y = 92\text{, da cui si ricava}$$

$$y = \frac{27}{9} = 3.$$

Mettendo questo valore nell' equazione superiormente trovata $x = \frac{17 - 3y}{2}$, si ha

$$x = \frac{17 - 9}{2} = 4.$$

Sostituendo finalmente tanto il valore di x che di y in una delle tre primitive equazioni, si ottiene, fatte le opportune riduzioni, $z = 5$. La tela adunque della prima qualità valeva 4 lire al braccio, quella della seconda 3 lire, e quella della terza qualità 5 lire al braccio.

389. Oltre a questi metodi vi sono degli artificj particolari, mediante i quali alle volte si giunge con maggior prontezza ad ottenere il valore delle incognite contenute nelle proposte equazioni: su tale argomento si potrà consultare il Sig. Cramer, il quale alla fine della sua *Introduzione all' analisi delle linee curve* insegna una bellissima regola per determinare immediatamente, e senza passare per i metodi ordinarj, il valore delle incognite, qualunque ne sia il numero. Col seguente problema si potrà prendere un' idea di siffatta abbreviazione.

Problema. Un uomo dabbene morendo ha lasciati 901 zecchini da distribuirsi ai poveri di tre diverse Parrocchie nel modo seguente: ciascun povero di quella Parrocchia, che per la prima chiederà l' esecuzione di questa benefica disposizione, riceverà uno zecchino, ed il rimanente verrà distribuito per egual porzione ai poveri delle altre due Parrocchie. Ora se i primi a fare una tâle domanda sono i poveri della prima Parrocchia, ogni povero delle altre due Parrocchie riceve un mezzo zecchino; se sono i poveri della seconda Parrocchia, che la fanno pei primi, ogni povero delle altre riceve un terzo di zecchino; se finalmente sono i poveri della terza Parrocchia, a ciascun povero delle altre non tocca che un quarto di zecchino: si domanda quanti poveri vi erano in ciascuna Parrocchia?

Soluzione. Sia x il numero dei poveri della prima Parrocchia, quello della seconda y, e quello della terza z. Facciamo in oltre $x+y+z=s$, essendo pure s una quantità incognita. Nel primo caso essendo x il numero de' poveri, ai quali tocca uno zecchino per uno, il numero dei poveri delle altre due Parrocchie, a ciascuno de' quali tocca un mezzo zecchino, sarà $y+z=s-x$; di modo che si avrà l' equazione 1.^{a} $x+\frac{s-x}{2}=901$, si troverà del pari, che se sono i poveri della seconda Parrocchia quelli che fanno la domanda, l'equazione corrispondente sarà

$$2.^a \; y+\frac{s-y}{3}=901;$$

e se sono quelli della terza, si avrà l' equazione

$$3.^a \; z+\frac{s-z}{4}=901.$$

Dalla prima di queste tre equazioni fatte le opportune riduzioni, si avrà

$$x=1802-s,$$

dalla 2.^{a} $\quad 2y=2703-s,$

dalla 3.^{a} $\quad 3z=3604-s,$

riducendo le tre incognite ad avere lo stesso coefficiente in queste equazioni, si avrà

$$6x=10812-6s$$
$$6y=\;8109-3s$$
$$6z=\;7208-2s,$$

e sommando sarà

$6(x+y+z)=26129-11s$, ossia

$6s+11s=26129$, donde si ricava primieramente $17s=26129$, indi $s=\frac{26129}{17}=1537$.

Il numero totale dei poveri è 1537. Col mezzo di questo numero si trova poi

$x=1802-1537=265$

$2y=2703-1537=1166$, ed $y=583$

$3z=3604-1537=2067$, e $z=689$.

I poveri della prima Parrocchia erano adunque 265, quelli della seconda 583, e quelli della terza Parrocchia 689.

Casi in cui i problemi proposti sono indeterminati, quantunque si abbia un egual numero sì di equazioni che d' incognite, e casi nei quali essi sono impossibili.

390. Accade alle volte che, sebbene si abbia un egual numero sì di equazioni che d' incognite, il problema sia nulla di meno indeterminato, o impossibile: nel primo caso l' equazione finale, a cui si giunge può verificarsi con una infinità di numeri, e nel secondo nessun numero è capace di soddisfarla, perchè essa contiene qualche assurdità: nel primo caso alcune condizioni del problema sono in sostanza le medesime, quantunque diversamente enunciate, e le equazioni, che se ne deducono, sono derivate le une dalle altre: nel caso poi d'impossibilità, alcune condizioni del problema sono tra di loro contraddittorie.

391. Un esempio del primo caso si ha nelle due equazioni

$$6x-15y=3$$
$$2x-\;5y=1,$$

risolvendo le quali, si ottiene

$x=\frac{3+15y}{6}$

$x=\frac{1+5y}{2}$, paragonando questi due valori di x, si ottiene l' equazione

$\frac{3+15y}{6}=\frac{1+5y}{2}$, dalla quale si ha

$$3+15y=3+15y.$$

Egli è facile vedere come questa equazione si verifichi per qualunque valore si dia ad y positivo o negativo, intero o frazionario, razionale o irrazionale. Questo succede, perchè la seconda delle proposte equazioni non è in sostanza che la prima moltiplicata per 3; per cui con essa non si può rappresentare una nuova condizione del problema; onde contenendo esso due incognite, e somministrando una sola equazione, o ciò che è lo stesso due equazioni eguali in sostanza, quantunque diverse in apparenza, egli ricade nella classe dei problemi indeterminati.

392. Un esempio del secondo caso si ha nelle seguenti due equazioni

$$3x-y=7$$
$$6x-2y=12.$$

Risolvendole per rapporto ad x, si ha

$$x=\frac{7+y}{3},\; x=\frac{12+2y}{6}=\frac{6+y}{3}, \text{ e}$$

paragonando $\frac{7+y}{3}=\frac{6+y}{3}$, ossia $7+y=6+y$, dalla quale se ne dedurrebbe $7=6$, risultamento manifestamente assurdo, per cui è impossibile soddisfare contemporaneamente alle due equazioni primitive, per qualunque valore si dia ad x e ad y. Ponendo mente alle proposte equazioni, si vede che la seconda è stata dedotta col moltiplicare il primo membro della prima equazione per 2, ed il secondo membro per $\frac{12}{7}$, moltiplicazione, che

distrugge l'eguaglianza, per lo che vi è una manifesta contraddizione supponendola sotto tale aspetto.

393. Un'altra specie di impossibilità s'incontra quando si trovano dei valori frazionarj, o negativi per le incognite, mentre il problema è di tal natura da esigere numeri interi e positivi; in questo caso si può soddisfare alle equazioni coi valori, che si ritrovano, ma non già alle condizioni del problema. Così se si dicesse: vi sono 50 commensali ad un gran pranzo seduti a due tavole; in una di esse ve ne sono 5 di più che nell' altra: mediante la risoluzione delle relative equazioni si troverebbe $27+\frac{1}{2}$ pel numero dei commensali in una tavola, e $22+\frac{1}{2}$ per quelli nell' altra. Questi due numeri soddisfanno bensì alle condizioni numeriche del problema, poichè la loro somma è 50, e la loro differenza 5; ma non soddisfanno alla natura del problema, il quale esige de' numeri interi.

Similmente se si supponesse, che i numeri dei luigi contenuti in due borse fossero tali, che se ne avessero 100 prendendo tre quarti di quelli contenuti nella prima borsa, e la metà di quelli contenuti nella seconda, e che se ne avessero poi 120 prendendo $\frac{4}{5}$ di quelli contenuti nella prima, e $\frac{2}{5}$ di quelli contenuti nella seconda. Mediante la risoluzione delle equazioni di questo problema, si troverebbero i numeri 200, e -100, i quali soddisfanno bensì alle condizioni numeriche del problema, ma non già alla natura del medesimo, il quale non può ammettere numeri negativi.

Delle equazioni, e dei problemi indeterminati del primo grado.

394. Abbiamo detto (342), che sono indeterminati quei problemi, i quali ci somministrano un numero di equazioni

minore del numero delle incognite: quella parte d'Algebra, che intorno alla soluzione dei medesimi si occupa, si chiama *analisi indeterminata*, a differenza di quella, di cui abbiamo parlato, che dicesi *analisi determinata*.

Per essere il numero delle incognite nei problemi indeterminati maggiore del numero delle equazioni, che da essi si possono ottenere, ne viene che, trattando queste equazioni nel modo ordinario da noi seguito per la risoluzione delle equazioni determinate, si giunge ad un' equazione finale, la quale contiene due o più incognite, per lo che si può determinare ad arbitrio il valore di una qualunque delle incognite in essa contenute, prendendo per ciascuna delle altre qualsivoglia numero sia intero o frazionario, positivo o negativo, razionale o irrazionale: onde ne viene, che i problemi indeterminati sono generalmente suscettibili di un numero infinito di soluzioni; ma siccome poi vi si aggiunge d'ordinario la condizione, che i numeri cercati sieno interi e positivi, o almeno razionali; così il numero delle loro soluzioni per lo più viene ad essere da tali condizioni limitato, di modo che spesso si hanno poche soluzioni, alle volte non ve n'è alcuna ed altre volte il loro numero si mantiene con tutto ciò ancora infinito: egli è perciò, che questa parte d'analisi, per le varie condizioni, alle quali conviene soddisfare, esige soventi molta accuratezza, e particolari artifizj di calcolo.

395. Per facilitare l'intelligenza ai nostri lettori di questo importante ramo d'analisi, prenderemo a risolvere primieramente il seguente semplicissimo problema.

Si cercano due numeri interi e positivi, la di cui somma sia 12?

Soluzione Chiamando x il primo di questi numeri, ed y l'altro, avremo, secondo l'enunciato del problema, l'equazione $x+y=12$, equazione indeterminata, perchè essendo unica contiene due incognite. Da questa equazione si ottiene $x=12-y$, ove y può avere qualunque valore intero e positivo minore di 12, perchè se egli fosse eguale a 12 sarebbe $x=0$, contro la supposizione, e se fosse maggiore di 12, si avrebbero per x dei valori negativi, i quali devono del pari essere esclusi; di modo che del proposto problema avremo le sole undici soluzioni seguenti,

facendo $y=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,$

si ha $x=11,\ 10,\ 9,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1.$

Osservando poi che le ultime cinque sono identiche colle prime cinque, si vede chiaramente che il proposto problema non può risolversi in numeri interi, e positivi che in sole sei maniere.

Se si fossero chiesti tre numeri, la di cui somma fosse 12, non si avrebbe che a dividere in due parti uno dei numeri da noi trovati nella soluzione del problema precedente, ed in questa maniera si otterrebbero le soluzioni appartenenti a sì fatto problema.

Colla stessa facilità, colla quale abbiamo risoluto questo problema, si potranno risolvere tutti quelli, che contenendo due incognite, una di esse abbia per coefficiente l'unità.

396. *Problema.* Dividere il 12 in due numeri interi e positivi, di maniera che uno di essi sia divisibile per 3?

Soluzione. Sia x il primo di questi numeri, ed il secondo sia $3y$; l'equazione del problema sarà $x+3y=12$, da cui si ha $x=12-3y$: donde si vede chiaramente che $3y$ deve essere $<$ di 12, altrimenti per x si avrebbero dei valori negativi

Fatta adunque $y=1,\ 2,\ 3,$

per lo che $3y=3,\ 6,\ 9,$

si ha $x=9,\ 6,\ 3,$

e quindi si hanno le seguenti tre soluzioni:

$$9+3=12$$
$$6+6=12$$
$$3+9=12$$

le quali si riducono a due, essendo la terza identica colla prima.

Si osservi che per y non si sono potuti prendere che i valori $<$ di $\frac{12}{3}$, cioè i valori minori del quoto, che si ottiene dividendo la quantità data pel coefficiente della y.

Nella stessa maniera si potrà risolvere l'equazione $x+by=c$, dalla quale si ha $x=c-by$; ma per y non si potranno prendere che i numeri interi e positivi minori di $\frac{c}{b}$.

397. Tutti i problemi indeterminati di primo grado a due incognite possono generalmente essere rappresentati dall'equazione $\pm ax\pm by=\pm c$, essendo a, b, c numeri interi e conosciuti,

x ed y le incognite da determinarsi. Di fatto è chiaro che con $\pm a$ si può rappresentare la riunione di tutte le quantità, che moltiplicano x, con $\pm b$ quelle, che moltiplicano y, e con $\pm c$ il risultamento di tutte le quantità, che non sono affette dalle incognite.

398. Un proposto problema conduca all' equazione indeterminata e generale $ax+by=c$, ove x ed y debbano essere numeri interi e positivi, essendo tali anche le quantità a, b, c, e maggiori dell' unità: a fine di risolvere quest' equazione converrà ridurla alla forma di quella del (396), in cui a è $=1$: sarebbe lo stesso se in vece di a fosse $b=1$. Si osservi che se i numeri a e b non fossero primi fra di loro, ma che avessero un comun divisore d maggiore dell' unità, bisognerebbe che anche il numero c fosse un multiplo di d, acciocchè l' equazione potesse sussistere in numeri interi, nel qual caso si potrà togliere mediante la divisione il fattor comune d per ottenere un' equazione più semplice, ed in cui a, e b sieno primi tra loro; infatti se i due numeri a, b avessero un fattore d, non comune a c, e fosse $a=md$, $b=nd$, si avrebbe l' equazione $dmx+dny=c$, la quale divisa per d darebbe $mx+ny=\frac{c}{d}$, in cui la quantità intera $mx+ny$ sarebbe eguale al rotto $\frac{c}{d}$, cosa manifestamente impossibile; se un problema adunque conducesse ad un' equazione come la seguente $6x+9y=15$, in cui i coefficienti, 6, e 9, hanno ambidue il comun fattore 3, non comune al 13, la sua soluzione in numeri interi sarebbe impossibile.

Ritornando all' equazione proposta $ax+by=c$, in cui a e b sieno numeri primi fra di loro, per cui queste quantità non avranno altro comune divisore fuorichè l' unità, e supponendo $b>a$, colla regola insegnata (100) per la ricerca del massimo comun divisore, si divida b per a, indi a pel primo residuo di tal divisione, poi il primo residuo pel secondo residuo, il secondo pel terzo, e così di seguito sino a tanto che l' ultimo residuo, che serve di divisore, sia 1.

Supponiamo che dividendo b per a si abbia m per quoto e b' per residuo, che dividendo a per b' si abbia per quoto m',

e b'' per residuo, che dividendo b' per b'', si abbia m'' per quoto, e b''' per residuo, e così di seguito. D' altronde supponiamo, che dividendo c per a si abbia q per quoto, ed r per residuo, che dividendo r per b' si abbia q' per quoto, ed r' per residuo, che dividendo r' per b'' si abbia per quoto q'', e per residuo r'', e così di seguito. Nel caso che sia $c<a$, si avrà $q=0$, ed $r=c$, e così anche per le altre divisioni. Per la supposizione fatta si avranno le seguenti equazioni

$$\begin{array}{ll} b=am+b' & c=aq+r \\ a=b'm'+b'' & r=b'q'+r' \\ b'=b''m''+b''' & r'=b''q''+r'' \\ \text{ecc. ecc.} & \text{ecc. ecc.} \end{array}$$

Sostituendo per b e per c nella proposta equazione $ax+by=c$ i rispettivi loro valori, essa diverrà

$ax+(am+b')y=aq+r$, ossia

$ax+amy+b'y=aq+r$, donde si ricava

$x=q-my+\frac{r-b'y}{a}$. Ora il primo membro di questa equazione deve essere un numero intero e positivo, dunque la totalità del secondo membro dovrà pure essere un numero intero e positivo: cosicchè per essere i termini $q-my$ numeri interi, anche la parte $\frac{r-b'y}{a}$ deve essere un numero intero. Sia adunque $\frac{r-b'y}{a}=s$, essendo s un numero intero e positivo; da quest' equazione si ottiene $b'y=r-as$; mettendovi per r e per a i rispettivi loro valori, si avrà

$b'y=b'q'+r'-b'm's-b''s$, ossia

$y=q'-m's+\frac{r'-b''s}{b'}$. Ma dovendo anche y essere un numero intero e positivo, bisogna che $\frac{r'-b''s}{b'}$ sia un numero intero, poichè $q'-m's$ è una quantità intera. Sia dunque $\frac{r'-b''s}{b'}=u$, e si avrà $b''s=r'-b'u$, oppure, mettendo per b' e per r' i loro valori,

$$b''s=b''q''+r''-b''m''u-b'''u,$$

donde si cava $s=q''-m''u+\frac{r''-b'''u}{b''}$. Ragionando nella stessa maniera, si vede che la parte $\frac{r''-b'''u}{b''}$, deve essere un numero intero, per cui chiamato z, sarà $\frac{r''-b'''u}{b''}=z$, e continuando l'operazione come abbiamo fatto sino ad ora per le parti analoghe delle seguenti equazioni, si giungerà sempre, per essere l'ultimo dei residui, che servono di divisore $=1$, ad un'equazione finale della forma $v=\pm B\pm Az$, la quale contenendo una delle indeterminate dotata dell'unità per coefficiente si risolverà col metodo del (396); dopo di che, mediante le opportune sostituzioni, si giungerà gradatamente a determinare i valori delle incognite z, u, s, y, x.

Per esempio, supponiamo che sia il residuo $b'''=1$; si avrà allora $\frac{r''-u}{b''}=z$, donde si cava $u=r''-b''z$, equazione, alla quale si soddisfarà prendendo per z tutti i valori interi e positivi minori di $\frac{r''}{b''}$ (396). Conoscendo z ed u, si avrà s dall'equazione $s=q''-m''u+\frac{r''-b'''u}{b''}=q''-m''(r''-b''z)+z$. Conoscendo s, u, e z, si otterrà y dall'equazione $y=q'-m's+\frac{r'-b''s}{b'}$, e finalmente conoscendo y, si avrà anche x dall'equazione

$$x=q-my+\frac{r-b'y}{a}.$$

399. *Problema* I. Dividere il numero 25 in due parti, una delle quali sia divisibile per 2, e l'altra per 3?

Soluzione. Una di queste parti sia $2x$, e l'altra $3y$: converrà che sia $2x+3y=25$, e per conseguenza

$$2x=25-3y,\ \text{ed}\ x=\frac{25-3y}{2}.$$

Ora siccome i valori di x e di y devono essere numeri interi e positivi, bisognerà in primo luogo che sia $3y<25$, e per conseguenza $y<\frac{25}{3}$; farà d'uopo ancora che $25-3y$ sia esattamente divisibile per 2; per lo che cavando da quella frazione tutti gli interi possibili, si avrà $x=12-y+\frac{1-y}{2}$, donde ne segue che $1-y$ deve essere divisibile per 2; fatto adunque $\frac{1-y}{2}=z$, sarà $y=1-2z$, e per conseguenza $x=12-1+2z+z=11+3z$. Ora poichè y non può esser maggiore di $\frac{25}{3}$, ossia di 8, non si potranno prendere per z dei numeri, i quali rendano $1-2z>8$, per cui z non potrà essere positiva, nè <-3; donde si ricavano le seguenti quattro soluzioni:

$$\text{fatto}\quad z=-3,\ -2,\ -1,\ 0;$$

$$\text{si ha}\left\{\begin{array}{llll} y= & 7, & 5, & 3, & 1, \\ x= & 2, & 5, & 8, & 11; \end{array}\right.$$

onde le parti del numero 25, che si cercano, possono essere 22 e 3, 16 e 9, 10 e 15, 4 e 21.

400. *Problema* II. Si cerca un numero, il quale sia divisibile tanto per 5, che per 7?

Soluzione. Chiamato N questo numero, ed x il numero delle volte, che il 5 sta in N, sarà $N=5x$; si avrà del pari $N=7y$, supponendo essere y il quoto, che si ottiene dividendo N per 7. Paragonando fra di loro i due valori eguali di N, si avrà l'equazione $5x=7y$, dalla quale si ricava $x=\frac{7y}{5}$; ora siccome il 7 non è divisibile per 5, bisogna che lo sia y; fatto adunque $y=5z$, si avrà

$x=\frac{7.5z}{5}=7z$; di modo che il numero cercato sarà $N=5.7z=35z$: e siccome per z si può prendere qualunque intero, purchè egli sia positivo; così, fatto $z=1, 2, 3, 4$, ecc. ecc., si avranno per N i corrispondenti valori 35, 70, 105, 140, 175, ecc. sino all' infinito, capaci tutti di soddisfare alle richieste condizioni del problema proposto.

Se oltre a quanto fu annunziato, si volesse aggiungere la condizione, che N fosse divisibile anche per 9, si farebbe $N=9u$: ma superiormente fu trovato $N=35z$, dunque paragonando sarà $9u=35z$, ed $u=\frac{35z}{9}$, ove è chiaro, che z deve essere divisibile per 9, poichè $\frac{35}{9}$ non è un numero intero: sia dunque $z=9\omega$, e si avrà $u=35\omega$, per cui sarà $N=9\times35\omega=315\omega$; fatto quindi $\omega=1, 2, 3$, ecc., si otterranno per N i numeri 315, 630, 945, ecc., i quali tutti saranno divisibili esattamente per 5, per 7, e per 9.

401. *Problema* III. Si vuole un numero, il quale diviso per 6 dia 3 di residuo, e diviso per 7 dia 5 per residuo?

Soluzione. Sia N questo numero, x il numero delle volte, che il 6 sta in N, ed y il numero delle volte, che in N vi sta il 7, si avrà $N=6x+3$; $N=7y+5$ (51), e paragonando $6x+3=7y+5$, ossia $6x=7y+2$, donde si ottiene

$x=y+\frac{y+2}{6}$, fatto $\frac{y+2}{6}=z$; si cava $y=6z-2$,

per lo che $x=6z-2+z=7z-2$.

Fatto $z=1, 2, 3, 4$, ecc.,

si avrà $\begin{cases} y=4, 10, 16, 22, \text{ecc.}, \\ x=5, 12, 19, 26, \text{ecc.} \end{cases}$

donde si vede, che continuando ad aumentare z sino all' infinito, si potranno avere per y e per x infiniti valori. Il più piccolo numero cercato è adunque $N=6.5+3=33$, si avranno per N infiniti valori, fra i quali il 75, 117, 159, ecc.

Se il numero ricercato dovesse soddisfare ad una nuova condizione, per esempio, che diviso per 8 dovesse dare 7 per residuo, si avrebbe $N=8u+7$, chiamando u il quoto di N divisa per 8, prendendo poi per N il suo valore $6x+3=6(7z-2)+3=42z-9$, e paragonandolo con questo, si avrà $8u+7=42z-9$, onde $8u=42z-16$, ed

$$u=5z-2+\frac{2z}{8}=5z-2+\frac{z}{4};$$

fatto $\frac{z}{4}=t$, si ha $z=4t$, onde

$$N=42z-9=42.4t-9=168t-9;$$

fatto $t=1, 2, 3$, ecc.

si ha $N=159, 327, 495$, ecc.

numeri, i quali tutti soddisfanno alle condizioni del problema.

402. *Problema* IV. Si deve pagare una cambiale di 1254 lire milanesi in pezzi di Spagna da lire sette ed in scudi di Milano da lire sei; si domanda in quante maniere diverse si possa soddisfarla?

Soluzione. Chiamo x il numero degli scudi di Milano, che si dovrà a tale oggetto impiegare, y il numero dei pezzi di Spagna, e l' equazione del problema sarà $6x+7y=1254$. Da questa equazione si ha

$x=209-y-\frac{y}{6}$; fatto $\frac{y}{6}=z$, si trova

$y=6z$, per cui $x=209-6z-z=209-7z$.

Dando ora a z diversi valori si vede, che per essa si potranno prendere tutti i numeri naturali positivi dall' unità sino al 29, poichè, se si prendesse per z un numero maggiore del 29, si avrebbe per x un valore negativo, contro la supposizione; e se per z si prendessero dei valori negativi, sarebbe in allora negativo il valore di y, il che è pure contro l' ipotesi.

Fatto adunque $z=1, 2 \ldots\ldots\ldots 29$.

si ha $\begin{cases} y=6, 12 \ldots\ldots\ldots 174. \\ x=202, 195 \ldots\ldots\ldots 6. \end{cases}$

Valori che tutti soddisfanno alle condizioni del problema: in ventinove maniere diverse si potrà dunque pagare la proposta cambiale.

403. *Problema* V. Con cento lire si vogliono comperare 100 uccelli, cioè delle beccacce a 5 lire l'una, delle quaglie ad una lira, e delle passere ad un soldo l'una: si domanda il numero delle beccacce, quello delle quaglie, e quello delle passere da comperarsi?

Soluzione. Sia x il numero delle beccacce, y quello delle quaglie, e z quello delle passere; le equazioni del problema saranno

$$x+y+z=100$$

$$5x+y+\frac{z}{20}=100.$$

ed eliminando il divisore dalla seconda equazione, essa si cangerà in $100x+20y+z=2000$, dalla quale sottratta la prima equazione, si ottiene $99x+19y=1900$, donde poi si ricava $y=100-5x-\frac{4x}{19}$; fatto $\frac{4x}{19}=t$,

si ha $x=\frac{19t}{4}=4t+\frac{3t}{4}$, fatto $\frac{3t}{4}=u$,

si ha $t=u+\frac{u}{3}$, e posto finalmente $\frac{u}{3}=w$;

si trova $u=3w$, per lo che, mediante le opportune sostituzioni, si ottiene

$$t=3w+w=4w$$
$$x=16w+3w=19w$$
$$y=100-95w-4w=100-99w$$
$$z=100-19w-100+99w=80w.$$

Fatto $w=1$

$$\text{si ha}\begin{cases}x=19\\ y=1\\ z=80.\end{cases}$$

Se per w prendessi un numero maggiore dell'unità, avrei per y un valore negativo, e, se per essa prendessi dei numeri negativi, otterrei per x e per z dei valori negativi, risultamenti, che devono esser esclusi. In un sol modo adunque si può soddisfare al proposto problema, comperando cioè 19 beccacce, una quaglia, ed 80 passere.

404. Ciò che si osserva in questi problemi, si è, che i

diversi valori, che si ottengono per x formano costantemente una serie di numeri, finita o infinita, la di cui differenza costante è il coefficiente, che si trova avere la y nell' equazione indeterminata del problema; i valori poi della y formano anch' essi una serie, la di cui differenza è espressa dal coefficiente della x nell' equazione medesima: così appunto deve succedere, perchè i valori di ciascuna di queste due incognite ci vengono dati da una quantità, nella quale vi entra l' incognita, che ad arbitrio si determina, in numeri però interi e positivi, ripetuta tante volte, quante unità vi sono nel coefficiente dell' altra incognita.

405. Quando l' enunciato di un problema indeterminato contiene qualche assurdo, l' ultimo risultamento del calcolo lo fa conoscere, conducendo ad una frazione, il di cui numeratore è un numero dispari, ed il denominatore un numero pari, oppure il numeratore è un numero minore del denominatore, ciò che assolutamente non può mai dare, per quoziente un intero, come si esige in simili problemi; un esempio si può riscontrare risolvendo l' equazione $6x+9y=15$ citata al (398), dalla quale si ricava primieramente

$$x=2-y+\frac{1-3y}{6},\ \text{e fatto}\ \frac{1-3y}{6}=z,\ \text{si ha poi}$$

$y=-2z+\frac{1}{3}$, il qual valore non può soddisfare all' equazione proposta perchè frazionario.

406. L' Algebra ci avverte sempre delle assurdità, che possono essere negli enunciati dei problemi ad essa affidati per la loro soluzione, abbiamo di già veduto uno de' suoi modi, mediante i quali ci avverte di una tale impossibilità nell' espressione immaginaria $\sqrt[2n]{-1}$ (219); un secondo modo l' abbiamo ora incontrato nella frazione a cui siamo giunti risolvendo un' equazione, la quale per le sue condizioni deve esser risoluta in quantità intere. In avvenire avremo occasione di vederne anche degli altri.

407. Vediamo ora come si possano risolvere le equazioni indeterminate del primo grado con tre incognite, operando sopra dei casi particolari onde facilitarne l' intelligenza.

Problema I. Si domanda in quante maniere si potranno fare 50 lire, con tre qualità di monete, la prima delle quali valga 5 lire il pezzo, la seconda 8 lire, e la terza 7 lire?

Soluzione. Chiamando x il numero delle monete da 5 lire, che vi vogliono, y il numero di quelle da 8 lire, e z il numero di quelle da 7 lire, si avrà l' equazione

$$5x+8y+7z=50.$$

Onde risolverla si faccia $x+y=t$, e sarà $5t=5x+5y$ per lo che l'equazione superiore diventerà $5t+3y+7z=50$, avendo in essa scomposta la quantità $8y$ in $5y+3y$; fatto poi $y+t=t'$, si avrà $3t'+2t+7z=50$, e posto $t+t'=t''$, si avrà $2t''+t'+7z=50$, donde si ricava $t'=50-2t''-7z$, e siccome si è supposto $t+t'=t''$ sarà anche $t=t''-t'=t''-50+2t''+7z=3t''+7z-50$; ed $y=t'-t=50-2t''-7z-3t''-7z+50=100-14z-5t''$; e finalmente $x=t-y=3t''+7z-50-100+14z+5t''=8t''+21z-150$. Prendendo ora per z dei valori tutti interi e positivi, e per t'' tutti gli interi, che combinati coi valori di z rendono x ed y interi e positivi, si avranno tutte le soluzioni possibili del proposto problema. Onde semplificare poi questa operazione, si faccia $t''=20-2z-u$, si avrà

$$y=100-14z-100+10z+5u=5u-4z,$$

ed $x=8(20-2z-u)+21z-150=$

$$160-16z-8u+21z-150=10+5z-8u.$$

Ora acciocchè i valori di x e di y riescano positivi conviene prima, che u sia positiva, e poi, che sia $z<\frac{5u}{4}$, e $>\frac{8u-10}{5}$, perchè se u non fosse positiva, per y si avrebbero dei valori negativi contro la natura del problema proposto, e se z non fosse minore di $\frac{5u}{4}$, i valori di y riescirebbero del pari negativi, se poi z non fosse maggiore di $\frac{8u-10}{5}$, riescirebbero negativi i valori di x.

E poichè deve essere $z<\frac{5u}{4}$, e $>\frac{8u-10}{5}$, sarà anche $\frac{5u}{4}>\frac{8u-10}{5}$, ossia $25u>32u-40$; e levando da

ambe le parti $25u$, ed aggiungendovi il 40, sarà $40>7u$, e dividendo per 7, $\frac{40}{7}>u$, ciò che dà $u<6$.

Ciò posto si troveranno le seguenti soluzioni

Fatto $u=1,\ 2,\ 3$

si ha $\begin{cases} x=7,\ 4,\ 1 \\ y=1,\ 2,\ 3 \\ z=1,\ 2,\ 3. \end{cases}$

Se si facesse $u=4$ oppure $z=5$, si troverebbe una delle indeterminate x, o $y=0$, soluzione da noi esclusa, ogni altra combinazione dà dei valori negativi per x, o per y.

In tre maniere adunque si possono formare cinquanta lire, prendendo per le rispettive incognite il numero delle monete indicate in ciascuna delle colonne verticali.

Si potrebbe giungere più brevemente alla soluzione del proposto problema nella seguente maniera: si faccia a tale oggetto $x+y+z=t$, e sarà sostituendo $5t+3y+2z=50$, fatto poi $2t+y+z=t'$, si avrà $2t'+y+t=50$; cavando il valore di y da quest' ultima equazione, sarà $y=50-t-2t'$, e
$z=t'-2t-y=3t'-t-50$,
$x=t-y-z=3t-t'$, ossia posto $3t-t'=u$,

$$x=u,$$
$$y=50-7t+2u.$$
$$z=8t-3u-50.$$

In queste tre ultime equazioni si devono prendere per u e per t i numeri interi e positivi capaci di rendere positive le tre altre indeterminate.

Fatto adunque

	$u=1$, e $t=7$;	$u=4$, $t=8$;	$u=7$, $t=9$,
si ha	$x=1$;	$x=4$;	$x=7$
	$y=3$;	$y=2$;	$y=1$
	$z=3$;	$z=2$;	$z=1$.

Tutti gli altri valori presi per u e per t non soddisfanno alle condizioni del problema.

408. *Problema.* II. Vi sono tre qualità di vino, la prima delle quali vale 15 lire alla brenta, la seconda vale lire 12, e la terza 9: si domanda quante brente di ciascuna qualità se ne potranno comperare con lire 87, escludendo secondo il solito le frazioni?

Soluzione. Chiamo x il numero delle brente di vino da 15 lire, y il numero delle brente di vino da 12 lire, e z quello da 9 lire, l' equazione del problema sarà

$15x + 12y + 9z = 87$, e tolto da essa il comun fattore 3, si avrà $5x + 4y + 3z = 29$. Fatto $x + y = t$ quest' equazione diventerà

$4t + x + 3z = 29$, donde si ricava

$x = 29 - 4t - 3z$, per cui

$y = t - x = t - 29 + 4t + 3z = 5t + 3z - 29$.

Dovendo poi queste equazioni essere soddisfatte in numeri interi e positivi, fa d' uopo che sia $4t + 3z < 29$, e $5t + 3z > 29$, dalle quali si ottiene $z < \frac{29 - 4t}{3}$ e $> \frac{29 - 5t}{3}$, cioè

$29 - 4t > 29 - 5t$, ossia $t > 0$, e $t < \frac{29}{4}$, ossia $t < 8$,

altrimenti il valore di z diverrebbe negativo. Dunque prendendo per t tutti i numeri interi dall' un sino al 7, si avranno i corrispondenti valori di z, i quali sono tutti compresi tra i limiti $8 + \frac{1}{3}$, e -2. Fra gli otto interi positivi compresi fra questi due limiti, $z = 5$, $z = 4$, $z = 2$, $z = 1$, sono i quattro, che soddisfanno alle condizioni di questo problema unitamente ai corrispondenti valori di $t = 3$, $t = 4$, $t = 5$ e $t = 6$: sostituendo in fatti questi valori per t, unitamente ai corrispondenti valori di z nelle due equazioni

$$x = 29 - 4t - 3z$$
$$y = 5t + 3z - 29, \text{ sarà}$$

$$\left.\begin{matrix} t=3 \\ z=5 \end{matrix}\right\} \quad x = 2,\ y = 1$$

$$\left.\begin{matrix} t=4 \\ z=4 \end{matrix}\right\} \quad x = 1,\ y = 3$$

$$\left.\begin{matrix} t=5 \\ z=2 \end{matrix}\right\} \quad x = 3,\ y = 2$$

$$\left.\begin{matrix} t=6 \\ z=1 \end{matrix}\right\} \quad x = 2,\ y = 4.$$

Onde il problema proposto ha quattro soluzioni, ed il numero delle brente di vino può essere otto nei primi due casi, e sette negli altri due, e debbono questi numeri risultare dalle tre qualità di vino combinate nello stesso modo, come sono i valori di x, y e z nelle superiori file orizzontali.

Con tutta facilità si possono estendere i ragionamenti da noi fatti per la risoluzione dei problemi indeterminati a due o tre incognite, alla risoluzione dei problemi di primo grado contenenti nelle rispettive loro equazioni finali un numero qualunque d' indeterminate.

409. Per esercizio dei principianti porremo qui alcuni problemi colle rispettive loro soluzioni, le quali serviranno di norma per verificare quelle, che essi otterranno, eseguendo minutamente i calcoli delle equazioni, da cui sono rappresentati i proposti problemi.

Problema I. I luigi che ha Tizio sono la terza parte di quelli di Sempronio: se a ciascuno di essi si tolgono 6 luigi, il numero de' luigi di Tizio rimarrà la quarta parte di quelli di Sempronio. Quanti luigi ha Tizio, e quanti ne ha Sempronio?

Risposta. Sempronio ha 54 luigi e Tizio 18.

Problema II. Al mezzo giorno la lancetta de' minuti di un orologio si trova sopra quella delle ore. Quale sarà il punto, nel quale si farà il primo incontro delle due lancette?

Risposta. Allorchè sarà 1 ora 5 minuti e $\frac{5}{11}$ di minuto.

Problema III. Un servitore percepiva dal suo padrone 12 lire al mese ed una livrea per ogni anno; dopo otto mesi venne licenziato, e le furono date 66 lire, e la livrea; si domanda il valore della livrea?

Risposta. Il valore della livrea è di lire 90.

Problema IV. Vi sono due tazze d' argento con un sol coperchio servibile per tutte e due, la prima tazza pesa 12 once, e se vi si mette il coperchio, essa pesa due volte più della seconda: ma se si copre con esso la seconda, questa pesa il triplo della prima: si domanda il peso della seconda tazza, e quello del coperchio?

Riposta. La seconda tazza è di 16 once, ed il coperchio di 20 once.

Problema V. Uno ha due qualità di tabacco; quello della prima qualità vale 9 lire la libbra, e quello della seconda qualità vale sette lire la libbra. Quanto deve egli prenderne di ciascuna specie per formarne un pacco di 100 libbre, il quale sia del valore di 840 lire?

Risposta. 70 libbre della prima qualità, e 30 libbre della seconda.

Problema VI. Si è riempiuto un vaso contenente 39 secchi d' acqua in 12 minuti facendo sgorgare successivamente due fontane, una delle quali dava quattro secchi d' acqua per minuto, e l' altra ne dava tre, si domanda per quanti minuti ciascuna fontana ha versato acqua?

Risposta. La prima per 3 minuti, e la seconda per 9 minuti.

Problema VII. Si sono comperati tre orologi, i di cui prezzi sono tali, che il primo colla metà del prezzo del secondo e del terzo vale 25 zecchini, il secondo con un terzo del prezzo degli altri due costa 26 zecchini, ed il terzo finalmente colla metà del prezzo degli altri due costa 29 zecchini. Si domanda il prezzo di ciascun orologio?

Risposta. Il primo orologio valeva 8 zecchini, il secondo 18, ed il terzo 16 zecchini.

Problema VIII. Quattro compagnie di soldati compongono in tutto 600 uomini. Nella prima compagnia vi sono due volte tanti soldati, quanti ve ne sono nella quarta: il numero dei soldati della seconda e della terza riunite è eguale a quello dei soldati della prima, e della quarta compagnia pure riunite: nella terza vi è poi $\frac{5}{7}$ del numero dei soldati, di cui è composta la seconda compagnia. Quanti soldati vi sono in ciascuna compagnia?

Risposta. Nella 1.ª 200, nella 2.ª 175, nella 3.ª 125, e nella 4.ª 100.

Problema IX. Un negoziante ha comprati nello stesso tempo dei cavalli e dei buoi per la somma di 1770 scudi. Per ogni cavallo ha speso 31 scudi, e 21 scudi per ogni bue. Quanti cavalli, e quanti buoi ha egli comprati?

Risposta. 9 cavalli e 71 buoi, oppure
30 cavalli e 40 buoi, o anche
51 cavalli e 9 buoi.

CAPITOLO IX.

Delle equazioni e dei problemi di secondo grado, e di quelle equazioni, che si riducono al secondo grado.

Equazioni determinate del secondo grado.

410. Qualunque equazione determinata del secondo grado ad una sola incognita può essere rappresentata dalla formola generale

$$x^2 + ax + b = 0,$$

il primo termine della quale è il quadrato dell' incognita, il secondo è composto dell' incognita moltiplicata per una quantità nota qualunque positiva o negativa rappresentata da a, ed il terzo termine b esprime una quantità nota, o un aggregato qualunque di quantità conosciute; in fatti se fosse data, per esempio, l' equazione

$$mx^2 + \frac{cx}{p} + n = dx^2 - f + \frac{x}{3},$$

raccogliendo in un sol termine tutte le quantità moltiplicate per x^2, in un altro termine le quantità moltiplicate per x, e trasportando tutto nel primo membro, si avrà

$$(m-d)\,x^2 + \left(\frac{c}{p} - \frac{1}{3}\right) x + f + n = 0,$$

e dividendo tutti i termini dell' equazione per il coefficiente $m-d$ di x^2, sarà

$$x^2 + \frac{\left(\frac{c}{p} - \frac{1}{3}\right)}{m-d}\, x + \frac{f+n}{m-d} = 0,$$

nella quale, fatto $\left(\frac{c}{p} - \frac{1}{3}\right) : (m-d) = a$, ed $\frac{n+f}{m-d} = b$, si avrà l' equazione generale

$$x^2 + ax + b = 0.$$

Se fossero date le due equazioni

$$x + \frac{d}{x} = n$$

$$x + \sqrt{x} = m,$$

liberando la prima dal divisore, mediante la riduzione di tutte le quantità, che la compongono al

medesimo denominatore, e la seconda dal radicale, coll' isolare primieramente il radicale in essa contenuto, ed innalzare poi al quadrato i due membri dell' equazione, che ne risulta, esse si cangeranno nelle seguenti

$$x^2 - nx + d = 0$$

$$x^2 - (2m+1)\,x + m^2 = 0,$$

che sono della forma dell' equazione generale

$$x^2 + ax + b = 0.$$

Qui è da osservarsi, che per giudicare esattamente del grado di una equazione proposta fa d' uopo, che i membri dell' equazione medesima sieno ridotti a polinomj interi e razionali.

Dopo quello che abbiamo detto, si vede facilmente che, ottenuta la soluzione della formola generale superiormente proposta, si avrà la soluzione di qualunque altra equazione di secondo grado col sostituire nel valore dell' incognita generalmente determinato, in luogo di a, e di b, i corrispondenti valori.

411. Potendo essere a, e b quantità qualunque, può accadere che sia $a = 0$, oppure può succedere che sia $b = 0$: nel primo caso l' equazione generale si ridurrà ad $x^2 + b = 0$, che chiamasi equazione *pura* del secondo grado, e la di cui risoluzione dipende da una semplice estrazione di radice; di fatto si avrà in questo caso $x^2 = -b$, ed estrando la radice quadrata da ambi i membri, sarà $x = \pm\sqrt{-b}$, donde si vede che due sono i valori di x, uno positivo e l' altro negativo, il che succede per la natura delle radici quadrate delle quantità (218). Si potrebbe mettere il doppio segno anche avanti alla x, ma ciò non produrrebbe

alcuna variazione. I valori dell' incognita, o le radici dell' equazione soddisfanno all' equazione proposta qualora in essa vengano posti in luogo dell' incognita stessa: in questo caso i valori di x sono ambidue immaginarj: ma se, nell' equazione proposta, b fosse stata negativa in luogo di essere positiva, si sarebbero per x ottenuti due valori reali.

Nel secondo caso, cioè quando $b=0$, l' equazione generale si riduce ad $x^2+ax=0$, oppure, raccogliendo il fattor comune x, ad $x\ (x+a)=0$, la quale divisa per $x+a$, dà $x=0$, e divisa per x, dà $x+a=0$, cioè $x=-a$. Tanto il primo, che il secondo di questi valori di x soddisfanno all' equazione $x^2+ax=0$, e ne sono per conseguenza radici.

412. Passiamo ora alla risoluzione dell' equazione generale e completa del secondo grado

$$x^2+ax+b=0, \text{ ossia } x^2+ax=-b.$$

Per avere i valori dell' incognita in quest' equazione è d' uopo che il primo membro della medesima sia un quadrato perfetto, al quale oggetto aggiungo ad esso una quantità m tale da renderlo un vero quadrato, e per conservare l' eguaglianza l' aggiungo anche al secondo membro, onde vengo ad avere

$$x^2+ax+m=m-b.$$

Cavando ora la radice quadrata da ambidue i membri di quest' equazione, ottengo

$x+\sqrt{m}=\pm\sqrt{(m-b)}$, e quadrando,

$x^2+2x\sqrt{m}+m=m-b$, paragonando questa colla superiore equazione, ho

$x^2+ax+m=x^2+2x\sqrt{m}+m$, ossia

$ax=2x\sqrt{m}$, dividendo per x, ottengo $a=2\sqrt{m}$, quadrando e dividendo per 4, ho finalmente

$m=\frac{a^2}{4}$. Donde rilevo che la quantità m, atta a rendere il primo membro dell' equazione

$x^2+ax=-b$ un quadrato perfetto, è $\frac{a^2}{4}$, cioè il quadrato della metà del coefficiente a del secondo termine della data equazione; posto adunque in essa in vece di m il suo valore $\frac{a^2}{4}$, avrò

$x^2+ax+\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{4}-b$, dalla quale ottengo mediante l' estrazione della radice,

$x+\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}-b\right)}$, ossia trasportando la quantità nota $\frac{a}{2}$ nel secondo membro,

$$x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}-b\right)}=\frac{-a\pm\sqrt{(a^2-4b)}}{2}.$$

Paragonando ora l' equazione proposta colla risoluta, si vede che *nell' equazione del secondo grado completa ed ordinata, l' incognita è eguale alla metà del coefficiente del secondo termine preso col segno cangiato, più o meno la radice quadrata del quadrato della stessa metà con aggiunta la quantità tutta nota pure col segno cangiato.*

413. Le equazioni complete del secondo grado si possono risolvere, anche trasformandole prima

in equazioni *pure* dello stesso grado. Questa trasformazione si fa sostituendo nella data equazione, in luogo dell' incognita, un' altra incognita accresciuta del coefficiente del secondo termine col segno cangiato, e diviso pel grado dell' equazione: così nell' equazione proposta

$x^2 + ax + b = 0$, fatto $x = y - \frac{a}{2}$, sarà

$\left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + a\left(y - \frac{a}{2}\right) + b = 0$, ossia

$y^2 - ay + \frac{a^2}{4} + ay - \frac{a^2}{2} + b = 0$, e riducendo

$y^2 - \frac{a^2}{4} + b = 0$, donde si ricava $y^2 = \frac{a^2}{4} - b$,

ed $y = \pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b\right)}$: mettendo poi per y il

suo valore, sarà $x + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b\right)}$, ed

$x = -\frac{a}{2} \pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b\right)}$, come di già si era

trovato coll' altro metodo.

Ponendo occhio sulle trovate radici, osservo che esse sono reali se $b < \frac{a^2}{4}$; se $b = \frac{a^2}{4}$ svanisce il radicale, e le radici oltre all' essere reali sono anche eguali; se finalmente $b > \frac{a^2}{4}$ le radici in allora sono immaginarie. Se però b nell' equazione proposta

fosse stata negativa, in allora, qualunque fosse la sua grandezza, le radici sarebbero sempre reali, perchè comparirebbe nel secondo membro sotto il radicale col segno positivo: di modo che dopo queste osservazioni si può conchiudere, *che le radici di una equazione completa ed ordinata del secondo grado saranno sempre reali fin tanto che la quantità nota sarà negativa, o essendo positiva non supererà il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine dell' equazione stessa.*

414. Tanto l'una, quanto l'altra delle due trovate radici soddisfà all' equazione proposta; mettendo di fatto in luogo di x il primo de' suoi valori, cioè $-\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b\right)}$, si ha

$$\left\{-\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b\right)}\right\}^2 + a\left\{-\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b\right)}\right\} + b = 0,$$

ossia

$$\frac{a^2}{4} - a\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b\right)} + \frac{a^2}{4} - b - \frac{a^2}{2} + a\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b\right)} + b = 0,$$

e riducendo, $\frac{2a^2}{4} - \frac{a^2}{2}$, ossia $\frac{2a^2}{4} - \frac{2a^2}{4} = 0$.

Lo stesso sarebbe dell' altra radice.

415. *In qualunque equazione completa, ed ordinata del secondo grado, la somma delle sue radici è sempre eguale al coefficiente del secondo termine preso col segno contrario, ed il loro prodotto eguaglia il terzo termine o il termine tutto noto.*

In fatti sommando le due radici dell' equazione proposta, cioè $-\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b\right)}$, e $-\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}-b\right)}$, si ha $-\frac{2a}{2}=-a$, e moltiplicandole si ottiene $\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}+b=b$; come fu asserito. Cosicchè se dell'equazione generica $x^2+Ax+B=0$ le radici fossero a, e b, sarebbe $-A=a+b$, e $B=ab$.

416. Sia ora proposta da risolvere l'equazione completa del secondo grado

$$x^2-(a+b)x+ab=0.$$

Secondo quello che superiormente è stato detto, si avrà $x=\frac{a+b}{2}\pm\sqrt{\left\{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-ab\right\}}=$

$$\frac{a+b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{4}\right)}=$$

$$\frac{a+b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a^2-2ab+b^2}{4}\right)}=\frac{a+b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}=$$

$\frac{a+b}{2}\pm\frac{a-b}{2}$. Prendendo il segno superiore, sarà

$$x=\frac{a+b+a-b}{2}=\frac{2a}{2}=a,$$

e prendendo il segno inferiore,

$$x=\frac{a+b-a+b}{2}=\frac{2b}{2}=b.$$

Le due radici dell'equazione proposta sono adunque $x=a$, $x=b$. Trasportando ciascun valore dell'incognita, nello stesso membro, in cui trovasi l'incognita stessa, si avranno le due espressioni $x-a=0$, $x-b=0$, che chiamansi *equazioni lineari*, i primi membri delle quali diconsi *fattori di primo grado*, o *fattori lineari* della proposta equazione.

Siccome poi moltiplicando $x-a=0$ per $x-b=0$, si ottiene $x^2-(a+b)x+ab=0$, ne viene che essa risulta dal prodotto delle due equazioni lineari $x-a=0$, $x-b=0$. Questa proprietà è comune a tutte le equazioni del secondo grado, di modo che anche l'equazione generale $x^2+ax+b=0$ risulta dal prodotto delle sue due equazioni lineari

$$x+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}-b\right)}=0,\quad x+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}-b\right)}=0,$$

come facilmente si può verificare eseguendo l'opportuna moltiplicazione. Di qui ne viene che conoscendo una delle radici dell'equazione del secondo grado, quest'equazione si potrà ridurre ad essere di primo grado col dividerla pel fattor lineare conosciuto, onde trovare con facilità l'altra radice.

417. Questa proprietà appartiene non solo alle equazioni del secondo grado, ma anche alle equazioni di grado qualunque. Per ciò dimostrare sia proposta l'equazione di grado *emmesimo*

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}\ldots+Sx+T=0.$$

Se a sarà una radice di questa equazione, essa potrà dividersi esattamente pel fattore lineare $x-a$, poichè ponendo nella medesima $x=a$, si ottiene

$$a^m+Aa^{m-1}+Ba^{m-2}+Ca^{m-3}\ldots+Sa+T=0.$$

Il primo membro di questa equazione è nullo, per essere nullo anche il secondo. Se ora dall'equazione proposta sottreremo questa, avremo

$$x^m-a^m+A(x^{m-1}-a^{m-1})+B(x^{m-2}-a^{m-2})+$$
$$C(x^{m-3}-a^{m-3})\ldots+S(x-a)=0,$$

equazione che non è diversa dalla proposta che nella forma, giacchè questa è nata col sottrarre dalla prima lo zero; dunque sarà

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}\ldots+Sx+T=x^m-a^m$$
$$+A(x^{m-1}-a^{m-1})+B(x^{m-2}-a^{m-2})$$
$$+C(x^{m-3}-a^{m-3})\ldots+S(x-a).$$

Il secondo membro di questa equazione, come è facile di vedere (75, 77) è divisibile per $x-a$, dunque lo sarà anche il primo, lo sarà cioè l'equazione proposta.

Se poi $b, c, d\ldots t$, saranno altre $m-1$ radici della proposta equazione, si proverà con simile ragionamento, che dessa sarà divisibile anche per $x-b$, $x-c$, $x-d\ldots x-t$, e per proprietà della divisione essa potrà essere rappresentata dal prodotto di tutti i suoi fattori lineari, sarà cioè

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}\ldots+Sx+T=$$
$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots(x-t)=0.$$

418. Giova osservare che divisa la proposta equazione pel fattor lineare $x-a$, si ottiene una equazione del grado $m-1$, la quale sarà soddisfatta da tutte le radici della proposta equazione tranne la radice a, cioè da ciascuna delle radici $b, c, d\ldots t$; di fatto dividendo l'eguaglianza

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}\ldots\ldots+T=$$
$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots(x-t)$$ per $x-a$, si otterrà $x^{m-1}+A'x^{m-2}+B'x^{m-3}\ldots+T'=$ $(x-b)(x-c)(x-d)\ldots(x-t)$, ove il primo membro rappresenti il quoziente della divisione del polinomio $x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}\ldots+T$ per $x-a$. Si vede quindi che per ogni radice conosciuta, mediante la divisione, si può abbassare d'un grado l'equazione proposta, e che per ciò il

numero delle radici appartenenti ad una data equazione qualunque non può mai superare il numero indicante il grado dell'equazione medesima.

419. Tutte le equazioni di grado pari riducibili a tre termini, il cui secondo termine contenga l'incognita con un esponente, che sia la metà del grado dell'equazione, si dicono derivative del secondo grado; e si possono risolvere col metodo insegnato.

Abbiasi l'equazione generale

$x^{2m}+ax^m+b=0$. Si faccia $x^m=y$, per lo che $x=\sqrt[m]{y}$, e si avrà

$y^2+ay+b=0$, la quale risoluta (412), dà

$$y=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}-b\right)};\text{ ossia}$$

$$x^m=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}-b\right)},$$ ed estraendo da ambi i membri la radice *emmesima*, si ha

$$x=\pm\sqrt[m]{\left\{-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}-b\right)}\right\}}.$$

Il doppio segno posto avanti al radicale *emmesimo* avrà luogo solamente quando m sarà pari.

420. *Esempio*. Sia proposta l'equazione

$$x^4-5x^2+4=0.$$

Paragonandola colla generale, sarà $m=2$, $a=-5$, $b=4$, e per conseguenza

$$x=\pm\sqrt{\left\{\frac{5}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{25}{4}-4\right)}\right\}}=\pm\sqrt{\left(\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}}\right)}=$$
$$\pm\sqrt{\left(\frac{5}{2}\pm\frac{3}{2}\right)}.$$ Dalla diversa combinazione dei se-

gni si ricavano per x i seguenti quattro valori

$$x=\pm\sqrt{\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\right)}=\pm\sqrt{4}=\pm 2, \text{ ed}$$

$$x=\pm\sqrt{\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\right)}=\pm\sqrt{1}=\pm 1,$$

valori tutti, che soddisfanno alla proposta equazione.

Risolveremo ora alcuni problemi relativi alle equazioni del secondo grado, che serviranno nello stesso tempo e di esempio, e di schiarimento alle cose superiormente spiegate.

421. *Problema* I. Si cerca un numero, la di cui terza parte moltiplicata per la quinta parte del medesimo dia 15?

Soluzione. Questo numero sia $=x$. Bisogna che $\frac{x}{3}$ moltiplicato per $\frac{x}{5}$ sia eguale a 15, per lo che l'equazione del problema sarà $\frac{x}{3}\times\frac{x}{5}=15$, cioè $\frac{x^2}{15}=15$, e moltiplicando per 15 ciascun membro della medesima, si avrà $x^2=225$, e cavandovi la radice, sarà $x=\pm\sqrt{225}=\pm 15$. Tanto il numero 15 quanto il -15 soddisfà al proposto problema, come facilmente si può verificare mediante l'opportuna sostituzione.

422. *Problema* II. Se dal triplo del quadrato di un numero si leva il sestuplo del numero medesimo, non si ha alcun residuo: qual è questo numero?

Soluzione. Se x è il numero cercato, l'equa-

zione del problema sarà $3x^2-6x=0$, ossia $x^2-\frac{6x}{3}=0$, e dividendola per x, si ha $x-\frac{6}{3}=0$; donde ricavasi $x=\frac{6}{3}=2$. L'altro valore poi dell'incognita è $x=0$ (411).

423. *Problema* III. Per 180 luigi un negoziante ha comperati diversi cavalli; se per la stessa somma ne avesse presi tre di più, ciascun cavallo gli sarebbe costato tre luigi meno. Quanti cavalli ha egli comperati?

Soluzione. Sia x il numero cercato. Ciascun cavallo sarà costato realmente $\frac{180}{x}$ luigi; ora se il compratore ne avesse acquistato 3 di più, ciascun cavallo gli sarebbe costato $\frac{180}{x+3}$ luigi, e perchè questo prezzo è minore di tre luigi del prezzo reale, si avrà l'equazione $\frac{180}{x+3}=\frac{180}{x}-3$, dalla quale facendo sparire i divisori, si ottiene $180x=180x+540-3x^2-9x$, ossia riducendo, $3x^2+9x-540=0$, e dividendo per 3, si ha $x^2+3x-180=0$, donde si ricava

$$x=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{9}{4}+180\right)}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{9+720}{4}\right)}=$$

$$-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{729}{4}}=-\frac{3}{2}\pm\frac{27}{2}.$$ Prendendo il segno superiore, si ottiene $x=-\frac{3}{2}+\frac{27}{2}=12$, e

prendendo l'inferiore, $x = -\frac{3}{2} - \frac{27}{2} = -15.$

Per 180 luigi ha comperato adunque 12 cavalli a quindici luigi cadauno. Il secondo valore -15 trovato per l'incognita, soddisfà bensì all'equazione, ma non già alle condizioni del problema, il quale esige delle quantità positive.

424. *Problema* IV. Si vuol dividere il numero 8 in due parti, il di cui prodotto sia 20: quali sono queste parti?

Soluzione. Chiamando x la parte maggiore, l'altra sarà $8-x$, ed il loro prodotto $x(8-x)$, ossia $8x-x^2$, che per le condizioni del problema dovendo essere eguale a 20, dà l'equazione $8x-x^2=20$, ossia ordinando, $x^2-8x+20=0$. Risolvendo ora quest'equazione, mediante le regole insegnate, si avrà $x=4\pm\sqrt{(16-20)}=4\pm\sqrt{-4}$. Donde si vede che tutti e due i valori dell'incognita, o le radici della proposta equazione sono immaginarie, ciò che ci indica l'impossibilità o l'assurdità del problema; anche da ciò si scorge quanto vantaggio rechi l'Algebra: essa si presta alla soluzione di qualunque quistione, la dà quando è possibile, e quando è impossibile, rende manifesta la sua impossibilità.

425. *Problema* V. Sopra la retta AB, che congiunge due corpi luminosi, uno de' quali è in A, e l'altro in B, trovare il punto C, in cui essi illuminano egualmente un medesimo oggetto?

La soluzione di questo problema è appoggiata al seguente fatto di fisica: che se l'azione della luce

sopra un dato oggetto alla distanza di 1 è espressa da 1, alla distanza di 2 è espressa dal quadrato di $\frac{1}{2}$, ossia da $\frac{1}{4}$, alla distanza di 3 dal quadrato di $\frac{1}{3}$ cioè da $\frac{1}{9}$, e così di seguito.

Soluzione. Sia a la distanza nota tra i due lumi, x la distanza incognita AC, che vi è tra l'oggetto illuminato ed il lume più forte, che suppongo essere in A: sarà $a-x$ la distanza dall'oggetto al secondo lume posto in B, supponendo l'oggetto fra A e B. Alla distanza 1 l'illuminazione prodotta da A sia m, e quella prodotta da B sia n. Secondo il citato principio di fisica l'illuminazione prodotta dal primo lume alla distanza x sarà espressa da $\frac{1\,.\,m}{x^2}=\frac{m}{x^2}$; quella prodotta dal secondo lume sarà $\frac{1\,.\,n}{(a-x)^2}=\frac{n}{(a-x)^2}$: ora queste due illuminazioni devono essere eguali; dunque l'equazione del problema sarà $\frac{m}{x^2}=\frac{n}{(a-x)^2}$. Si potrebbe ridurre quest'equazione alla formola generale, ma più facilmente se ne avrà la sua soluzione, col cavare da ciascun membro della medesima la radice quadrata, per cui sarà

$\frac{\sqrt{m}}{x}=\pm\frac{\sqrt{n}}{a-x}$, ossia $(a-x)\sqrt{m}=\pm x\sqrt{n}$, donde si ricava $a\sqrt{m}-x\sqrt{m}=\pm x\sqrt{n}$, ossia $\pm x\sqrt{n}+x\sqrt{m}=a\sqrt{m}$, ed $x(\sqrt{m}\pm\sqrt{n})=a\sqrt{m}$, e finalmente $x = \frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m} \pm \sqrt{n}}$. Stando alle supposizioni fatte, del doppio segno si deve prendere il superiore, per cui $x = \frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$, altrimenti, se si prendesse l' inferiore, si avrebbe $x = \frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$, e siccome si è supposto $m > n$, sarebbe in questo caso $x > a$, o ciò che è lo stesso, il punto cercato si troverebbe fuori della retta AB in C', contro la nostra supposizione.

Se i due lumi fossero di eguale intensità, sarebbe $m = n$, ed $x = \frac{a\sqrt{m}}{2\sqrt{m}} = \frac{a}{2}$, ciò che fa vedere, che il punto dovrebbe essere collocato ad eguali distanze dai due corpi luminosi.

Per fare un' applicazione si supponga $a = 125$ braccia, la forza della luce del corpo luminoso posto in A, alla distanza C sia $m = 25$, quella del lume posto in B alla stessa distanza sia $n = 16$, sostituendo, si avrà

$$x = \frac{125 \cdot \sqrt{25}}{\sqrt{25}+\sqrt{16}} = \frac{125 \cdot 5}{5+4} = \frac{625}{5+4}.$$ Onde

$x = \frac{625}{9} = 69 + \frac{4}{9}$; il qual valore indica che la distanza, a cui deve essere posto il corpo tra A e B, è di 69 braccia e $\frac{4}{9}$ partendo dal corpo luminoso A.

Delle equazioni e dei problemi determinati di secondo grado a due incognite.

426. Le equazioni complete a due incognite del secondo grado della forma

$$x^2 + ay^2 + bxy + cx + dy = m$$
$$x^2 + fy^2 + gxy + hx + ly = n$$

conducono generalmente parlando ad equazioni di quarto grado; ma alle volte succede che la natura loro è tale da poter dedurne una equazione di secondo grado ad una sola incognita.

427. *Esempio* I. Abbiansi le due equazioni

$$x^2 + y^2 = 34$$
$$x^2 - y^2 = 16$$

che sommate danno $2x^2 = 50$, ed $x^2 = 25$, ossia $x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$, onde $x = 5$ ed $x = -5$. Sostituendo ora in una delle due equazioni proposte per x uno de' suoi valori trovati, si avrà il valore di y. Ponendo, per esempio, $+5$ in luogo di x, si avrà $y^2 = 34 - x^2 = 34 - 25 = 9$, onde $y = \pm\sqrt{9} = \pm 3$; cioè $y = 3$, ed $y = -3$; gli stessi valori si sarebbero trovati sostituendo per x, -5. Le due equazioni proposte saranno soddisfatte in quattro diverse maniere; sostituendovi nello stesso tempo $x = 5$, ed $y = 3$, oppure $x = 5$, ed $y = -3$, o anche $x = -5$, ed $y = 3$, o finalmente $x = -5$, ed $y = -3$.

428. II. Sieno proposte le due equazioni

$$3xy = 2x + 2y$$
$$3xy = x^2 - y^2.$$

Paragonandole tra loro, si avrà l' equazione

$2x+2y=x^2-y^2$; dalla quale, raccogliendo nel primo membro il fattor comune 2, e sostituendo nel secondo, in luogo della differenza dei quadrati di x, e di y, il prodotto della loro somma per la differenza, si ha $2(x+y)=(x+y)(x-y)$, ossia $2=x-y$, da cui si cava $x=2+y$; posto ora questo valore in una delle due equazioni proposte, per esempio nella seconda, si avrà

$3y(2+y)=(2+y)^2-y^2$, ossia

$6y+3y^2=4+4y+y^2-y^2$, donde ne viene

$3y^2+2y-4=0$, oppure $y^2+\frac{2}{3}y-\frac{4}{3}=0$.

Risolvendo ora questa equazione, si ottiene

$y=-\frac{1}{3}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{9}+\frac{4}{3}\right)}=-\frac{1}{3}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{9}+\frac{12}{9}\right)}=$
$-\frac{1}{3}\pm\sqrt{\frac{13}{9}}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{3}$. Messo questo valore in luogo di x nella trovata equazione $x=2+y$, si avrà $x=2+\frac{-1\pm\sqrt{13}}{3}=\frac{6-1\pm\sqrt{13}}{3}=$
$\frac{5\pm\sqrt{13}}{3}$.

429. Lo stesso problema che tradotto in linguaggio algebrico conduce a due equazioni complete del secondo grado, la risoluzione delle quali poi porta ad un' equazione del quarto grado, somministra talvolta due equazioni, che hanno il pregio di ridursi ad una sola equazione del secondo grado con una sola incognita, e ciò dipende dalla maniera di istituire la ricerca dell' equazione del problema. Ne somministra una prova assai manifesta il seguente.

430. *Problema*. La somma dei guadagni di due Negozianti sottratta dai quadrati dei guadagni stessi dà 78 luigi, ma unita al loro prodotto dà 39 luigi. Quali sono questi guadagni?

Soluzione. Chiamando x il guadagno del primo, y quello del secondo, si avranno le seguenti equazioni del problema $x^2+y^2-x-y=78$

$$xy+x+y=39.$$

Cavando da quest' ultima il valore di y, si avrà $y(1+x)=39-x$, per lo che $y=\frac{39-x}{1+x}$, che sostituito nella prima dà

$x^2+\left(\frac{39-x}{1+x}\right)^2-x-\frac{39-x}{1+x}=78$, ossia

$x^2+\frac{1521-78x+x^2}{1+2x+x^2}-x-\frac{39-x}{1+x}=78$, e riducendo tutto allo stesso denominatore

$x^2+2x^3+x^4+1521-78x+x^2-x-2x^2-x^3$
$-39+x-39x+x^2=78+156x+78x^2$, e riducendo si avrà $x^4+x^3-77x^2-273x+1404=0$, equazione completa del quarto grado.

Ma se in vece delle denominazioni da noi assunte precedentemente, si chiamerà $2x$ la somma dei guadagni, e $2y$ la loro differenza, sarà (375) il guadagno del primo negoziante, che supporremo il maggiore, $x+y$, e quello del secondo $x-y$, e le equazioni del problema saranno

$$1.^a\ (x+y)^2+(x-y)^2-2x=78$$
$$2.^a\ (x+y)(x-y)+2x=39;$$

oppure sviluppando, e riducendo, sarà

$$1.^a\ x^2+y^2-\ x=39$$
$$2.^a\ x^2-y^2+2x=39,$$

le quali sommate danno $2x^2+x=78$, ossia $x^2+\frac{x}{2}-39=0$; equazione del secondo grado ad una sola incognita, che risoluta dà

$$x=-\frac{1}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{16}+39\right)}=-\frac{1}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{1+624}{16}\right)}=$$

$$-\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{625}{16}}=-\frac{1}{4}\pm\frac{25}{4},$$ donde, preso il segno superiore, si ha $x=-\frac{1}{4}+\frac{25}{4}=6$, per cui $y^2=39-x^2+x=39-36+6=9$, ed $y=3$. I guadagni cercati saranno adunque $x+y=6+3=9$ pel primo, ed $x-y=6-3=3$ pel secondo.

431. *Problema.* Si cercano due numeri p, q, dei quali è data la somma $=n$, ed il triplo della radice cubica del loro prodotto $=m$.

Soluzione. Seguendo l'enunciato del problema, si avranno per rappresentarlo le due seguenti equazioni

$$1.^a\quad p+q=n$$

$$2.^a\quad 3\sqrt[3]{pq}=m.$$

Si faccia il quadrato della prima equazione, ed il cubo della seconda, e si avranno le seguenti altre equazioni $3.^a\ p^2+2pq+q^2=n^2$

$4.^a\ 27pq=m^3$; da quest'ultima si ricava $pq=\frac{m^3}{27}$, e moltiplicando ambi i suoi membri per 4, si ha $4pq=\frac{4m^3}{27}$; questa equazione si sottragga

membro per membro dalla $3.^a$, e si avrà $p^2-2pq+q^2=n^2-\frac{4m^3}{27}$, ed estraendo da ambi i membri la radice quadrata $p-q=\pm\sqrt{\left(n^2-\frac{4m^3}{27}\right)}$: sommando ora quest'equazione colla $1.^a$, si avrà $2p=n\pm\sqrt{\left(n^2-\frac{4m^3}{27}\right)}$, per lo che

$$p=\frac{n\pm\sqrt{\left(n^2-\frac{4m^3}{27}\right)}}{2}=\frac{n}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}\right)},$$ e sottraendola dalla stessa, fatte le opportune riduzioni, si avrà $q=\frac{n}{2}\mp\sqrt{\left(\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}\right)}$.

Nei quali valori di p e di q basterà prendere i segni superiori, perchè se si prendessero i segni inferiori si avrebbe la stessa soluzione cangiandosi p in q, e viceversa. Onde i valori che soddisfanno alle condizioni del proposto problema sono

$$p=\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}\right)}$$

$$q=\frac{n}{2}-\sqrt{\left(\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}\right)},$$

come facilmente si può verificare sostituendo in luogo di p, e di q nelle due equazioni del problema questi valori medesimi.

432. Nella risoluzione delle equazioni del secondo grado succede molte volte di dovere estrarre

la radice quadrata di un binomio composto di una parte razionale, e di un' altra irrazionale, come sarebbe $a+\sqrt{b}$, cerchiamo ora di determinare un carattere, mediante il quale si possa conoscere in ogni caso, se una tale radice possa o no aver luogo.

Si prenda a considerare il binomio generale $a+\sqrt{b}$, e si supponga la sua radice cioè $\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$, dove a e b sono quantità date, x ed y quantità da determinarsi. Quadrando ciascun membro di questa equazione, sarà $a+\sqrt{b}=x+y+2\sqrt{xy}$; e siccome questa eguaglianza non può reggere che fra le quantità razionali, e le irrazionali separatamente, altrimenti ne verrebbe, che un aggregato di quantità razionali sarebbe eguale ad uno di quantità irrazionali, ciò che è impossibile; così si avrà $x+y=a$, e $2\sqrt{xy}=\sqrt{b}$, ossia quadrando l'una e l'altra di queste equazioni, sarà $x^2+2xy+y^2=a^2$, e $4xy=b$, sottraendo dalla prima di queste equazioni la seconda si avrà $x^2-2xy+y^2=a^2-b$, la di cui radice quadrata è $x-y=\sqrt{(a^2-b)}$; e siccome si ha $x+y=a$, così (375) sarà

$$x=\frac{a+\sqrt{(a^2-b)}}{2}, \text{ ed } y=\frac{a-\sqrt{(a^2-b)}}{2},$$

e per conseguenza sarà $\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}=$

$$\sqrt{\frac{a+\sqrt{(a^2-b)}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{(a^2-b)}}{2}}.$$

La formola trovata diverrà assai semplice quando a^2-b sarà un quadrato esatto; se non si verifica questa condizione, in vece di semplificare il valore di $\sqrt{(a+\sqrt{b})}$, se ne otterrebbe un altro più complicato; e quindi questo metodo sarebbe inopportuno.

Sia adunque $a^2-b=c^2$, e si avrà sostituendo

$$\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a-c}{2}};$$

si avrebbe del pari

$$\sqrt{(a-\sqrt{b})}=\sqrt{\frac{a+c}{2}}-\sqrt{\frac{a-c}{2}},$$

ambidue i casi saranno dunque rappresentati dalla formola

$$\sqrt{(a\pm\sqrt{b})}=\sqrt{\frac{a+c}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-c}{2}}.$$

433. *Esempio* I. Si domanda la radice quadrata di $49+12\sqrt{5}$. Paragonando questa formola colla generica $a\pm\sqrt{b}$, si ha $a=49$; $\sqrt{b}=12\sqrt{5}$, e quindi $a^2=2401$, $b=720$; $a^2-b=1681$, il qual numero, non essendo altro che il quadrato di 41 ci avvisa, che questo caso è dotato della condizione richiesta; sarà quindi $c^2=1681$, e per conseguenza $c=41$; e sostituendo si avrà

$$\sqrt{(49+12\sqrt{5})}=\sqrt{\frac{49+41}{2}}+\sqrt{\frac{49-41}{2}}=$$

$$\sqrt{45}+\sqrt{4}=2+\sqrt{45}=2+3\sqrt{5}.$$

434. *Esempio* II. Si domanda la radice quadrata di $\frac{3\pm\sqrt{-7}}{2}$; fatto il paragone colla formola generale si trova $a=\frac{3}{2}$, $\pm\sqrt{b}=\pm\frac{\sqrt{-7}}{2}$, e quindi $a^2=\frac{9}{4}$, $b=-\frac{7}{4}$, e perciò $a^2-b=\frac{9}{4}+\frac{7}{4}=4$, e siccome quest' ultimo numero è un vero quadrato,

l' estrazione ricercata è possibile, e si avrà per sostituire $c^2 = 4$, cioè $c = 2$, e quindi

$$\sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{3}{2} + \frac{4}{2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\frac{3}{2} - \frac{4}{2}}{2}} =$$

$$\frac{\sqrt{7}}{2} \pm \frac{\sqrt{-1}}{2}.$$

Il metodo proposto è adunque applicabile anche al caso, in cui il binomio proposto sia in parte reale ed in parte immaginario.

Un simile metodo si può estendere anche per l' estrazione della radice cubica, e quarta: a noi basta d' averlo indicato.

Dei problemi indeterminati del 2.° grado.

435. Se fosse data un' equazione indeterminata del secondo grado a due incognite x ed y, sarebbe facile il soddisfarvi, qualora fosse permesso di prendere per x ed y qualunque quantità; poichè prendendo per una di queste un valore arbitrario, non si tratterebbe, per averne l' altra, che di risolvere un' equazione determinata del secondo grado ad una sola incognita: ma se le quantità x ed y dovessero essere espresse in numeri interi, o essendo frazionarj, dovessero essere almeno razionali, in allora il problema è qualche volta difficile, e sovente anche insolubile. Le principali regole per risolverlo in numeri razionali, quando ciò è possibile, consistono nell' esprimere le incognite per mezzo delle date del problema, e di una nuova incognita tale, che le equazioni così risultanti abbiano le incognite che si cercano elevate alla prima potenza, per cui esse si possano determinare, mediante le regole per la risoluzione delle equazioni di primo grado.

Siccome poi la teorica generale di queste equazioni si tratta con tutta l' estensione nei corsi di introduzione al calcolo sublime; così io mi limiterò a darne un cenno col mezzo di alcuni esempj, i quali serviranno benissimo a facilitare l' intelligenza dei precetti generali, ed astratti.

436. ***Problema* I.** Dividere un quadrato in due altri quadrati?

Soluzione. Sia a^2 il quadrato dato, x ed y sieno le radici dei due quadrati cercati; si avrà l' equazione $x^2 + y^2 = a^2$. Ciò posto, si prenda una nuova incognita z in modo, che sia $y = a - zx$, oppure $y = zx - a$, per lo che sarà $y^2 = a^2 - 2azx + z^2x^2$, posto questo valore nell' equazione del problema in luogo di y^2, si avrà $x^2 + a^2 - 2azx + z^2x^2 = a^2$, ossia $x^2 - 2azx + z^2x^2 = 0$, e separando il fattor comune x, sarà $x(x - 2az + z^2x) = 0$: donde (411) si ricava 1.° $x = 0$, e per conseguenza $y = a$, 2.° $x - 2az + z^2x = 0$, ossia $x + z^2x = 2az$, per lo che

$$x(1 + z^2) = 2az, \text{ ed } x = \frac{2az}{1 + z^2}.$$

Prendendo ora $y = a - zx$, si ha

$$y = a - z \times \frac{2az}{1 + z^2} = \frac{a + az^2 - 2az^2}{1 + z^2} = \frac{a - az^2}{1 + z^2} =$$

$\frac{a(1 - z^2)}{1 + z^2}$; e prendendo $y = zx - a$, viene $y = \frac{a(z^2 - 1)}{1 + z^2}$.

Tutte e due le trovate soluzioni soddisfanno al problema, ma quest' ultima dando tanto per x, che per y dei numeri positivi è quella, che veramente si cercava.

Per fare un esempio, sia $a^2 = 100$, quindi $a = 10$, prendendo $z = 2$, si avrà

$$y = \frac{10(4 - 1)}{1 + 4} = 6, \text{ ed}$$

$$x = \frac{y + a}{z} = \frac{6 + 10}{2} = 8,$$

dunque $y^2 = 36$, ed $x^2 = 64$: in fatti $36 + 64 = 100$. Supponendo $z = 3$, si avrà in tal caso

$$y = \frac{10(9 - 1)}{10} = 8, \; x = \frac{8 + 10}{3} = 6,$$

soluzione identica colla prima.

Supposto $z = 4$, si avrà $y = \frac{150}{17}$, ed $x = \frac{80}{17}$; per lo che

$$y^2 = \frac{(150)^2}{17^2} = \frac{22500}{289}, \text{ ed } x^2 = \frac{6400}{289}.$$

Quindi $y^2 + x^2 = \frac{22500 + 6400}{289} = 100$,

e così di seguito per gli altri valori, che si attribuissero a z.

437. In conseguenza di quello, che abbiamo detto, si può stabilire una regola generale, onde trovare un numero qualunque di quadrati, che presi a due a due sieno eguali ad un dato quadrato. A questo oggetto nelle equazioni superiormente trovate $x = \frac{2az}{1+z^2}$, ed $y = \frac{a(z^2-1)}{1+z^2}$, si faccia $a = 1$, e si avrà $x = \frac{2z}{1+z^2}$. $y = \frac{z^2-1}{1+z^2}$. Moltiplicando i secondi membri di queste equazioni per $1+z^2$, essi diventeranno $2z$, e z^2-1, i di cui quadrati sono $4z^2$, e z^4-2z^2+1, la loro somma $4z^2+z^4-2z^2+1 = z^4+2z^2+1$ è appunto il quadrato di z^2+1. Siccome poi la grandezza di z è indeterminata, così per essa potremmo prendere qualunque numero, purchè il suo quadrato sia maggiore dell' unità, mentre se ciò non fosse, z^2-1 sarebbe eguale a zero nel caso di $z=1$, e sarebbe una quantità negativa se z fosse minore di 1.

Supponendo $z=2$ e sostituendo per z questo valore nelle radici $2z$, e z^2-1, si avranno i numeri 4, e 3, i di cui quadrati sono 16, e 9, i quali sommati insieme danno 25, che è un altro quadrato.

Supponiamo $z=3$, ed avremo, fatte le opportune sostituzioni nelle già citate radici, i numeri 6, e 8, i di cui quadrati 36 e 64 fanno 100, numero, che è pure un quadrato perfetto.

Facciamo $z=4$, e si avranno i numeri 8 e 15, i cui quadrati 64 e 225 sommati danno appunto 289, che è il quadrato di 17.

In generale prendendo per z qualunque numero sia intero, sia composto d'interi e di frazioni, si troveranno sempre due quadrati, la di cui somma sarà eguale ad un terzo quadrato; e siccome infiniti valori si possono assegnare a z, così si potrà determinare una infinità di quadrati, i quali presi a due a due formino un altro quadrato.

438. Di qui si può ricavare una bellissima proprietà dei numeri, ed è, che qualunque numero si prenda sia intero, sia composto di interi e di frazioni, che nomineremo a, il quadrato del suo doppio, cioè di $2a$, che è $4a^2$, sommato col quadrato del quadrato diminuito dell' unità del numero medesimo, cioè con $(a^2-1)^2$, viene sempre a formare un nuovo quadrato, la di cui radice è a^2+1, che è il quadrato del numero proposto aumentato dell' unità. Di fatto

$$4a^2+(a^2-1)^2 = 4a^2+a^4-2a^2+1 = a^4+2a^2+1 = (a^2+1)^2.$$

Così, per esempio, se per a si prenderà il 3, si vedrà subito che il quadrato, il quale sarà eguale ad altri due quadrati, avrà per radice $9+1$, cioè 10, e che uno di quei quadrati avrà poi per radice il medesimo quadrato $9-1$, cioè 8.

Che se il quadrato grande fosse determinato, e che fosse un numero intero, per esempio il 100, vi si caverà la sua radice $10 = a^2+1$, per lo che $a^2 = 9$: e siccome 9 è un quadrato perfetto, così si vede, che il quadrato di 100, può essere diviso in due quadrati, ciascuno de' quali sarà un numero intero: di fatto cavando la radice quadrata dal 9, si avrà $a=3$, e per conseguenza $2a=6$, ed $a^2-1=9-1=8$; cosicchè 36 e 64 saranno i due quadrati cercati.

Se il quadrato grande, essendo un numero intero come, per esempio, il 64, dalla di cui radice 8 avendo levato 1, si trovasse il residuo $a^2=7$, quantità, che non è un quadrato perfetto, si potrebbe agire egualmente, e si avrebbe $a=\sqrt{7}$, e per conseguenza $2a=2\sqrt{7}$, ed $a^2-1=7-1=6$; donde quadrando avrebbonsi i numeri 28 e 36, la di cui somma è 64; ciò che fa vedere che la proprietà spiegata sussiste in ogni caso; ma siccome in questa sorte di problemi si domandano dei quadrati, le di cui radici sieno commensurabili, per giungere al divisato scopo, in vece di servirsi del metodo or ora adoperato, bisognerà impiegare le formole

$$x = \frac{2az}{1+z^2}, \text{ ed } y = \frac{a(z^2-1)}{1+z^2}$$

superiormente da noi trovate, determinando z nel modo insegnato; cosicchè supponendo, per esempio, $z=2$, ed avendo $a=8$, si avrebbe $x = \frac{2 \cdot 8 \cdot 2}{1+4} = \frac{32}{5}$, ed $y = \frac{24}{5}$, e per conseguenza $x^2=\frac{1024}{25}$, ed $y^2=\frac{576}{25}$, e quindi

$$x^2+y^2=\frac{1024+576}{25}=\frac{1600}{25}=64,$$

come appunto doveva essere.

439. *Problema* II. Trovare due quadrati, la cui differenza sia eguale ad un quadrato dato?

Soluzione. Sia a^2 il quadrato dato, x ed y sieno le radici dei quadrati cercati. Supponendo $y>x$, si avrà $y^2-x^2=a^2$: fatto poi $y=a+zx$, e per conseguenza $y^2=a^2+2azx+z^2x^2$, l' equazione precedente, eseguita l' opportuna sostituzione e riduzione, diventa $2azx+z^2x^2-x^2=0$, ossia $x(2az+z^2x-x)=0$, da cui si avrà 1.° $x=0$, e per conseguenza $y=a$, 2.° $x=\frac{2az}{1-z^2}$, ed $y=\frac{a(1+z^2)}{1-z^2}$.

Si vede quindi che, se si vogliono i valori di x, e di y positivi, si devono prendere per z dei numeri minori dell' unità.

Si vogliano, per esempio, due quadrati, la cui differenza sia 16, che è pure un quadrato.

Paragonando si avrà $a^2=16$, per cui $a=4$, e preso $z=\frac{1}{3}$, sarà

$$x=\frac{2\cdot4\cdot\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{\frac{8}{3}}{\frac{8}{9}}=3,\quad y=\frac{4(1+\frac{1}{9})}{\frac{8}{9}}=\frac{\frac{40}{9}}{\frac{8}{9}}=5.$$

Per lo che $x^2=9$, ed $y^2=25$, quadrati, la di cui differenza è appunto 16, che è il quadrato dato.

440. *Problema* III. Dividere la somma di due quadrati in due altri quadrati?

Soluzione. Sieno a^2 e b^2 i due quadrati dati, x^2 ed y^2 i due quadrati ricercati. Si avrà $a^2+b^2=x^2+y^2$. Prendansi due nuovi numeri z, e t tali, che si abbia

$$x=a-z,\quad y=zt-b,$$

e per conseguenza

$$x^2=a^2-2az+z^2,\quad y^2=z^2t^2-2bzt+b^2.$$

Mettendo questi valori di x^2 e di y^2 nell' equazione fondamentale del problema, sarà

$$a^2+b^2=a^2-2az+z^2+z^2t^2-2bzt+b^2,$$

ossia $z^2+z^2t^2-2az-2bzt=0$, oppure $z(z+zt^2-2a-2bt)=0$; donde si cava

1.° $z=0$, ciò che dà $x=a$, $y=-b$;

2.° $z=\frac{2a+2bt}{1+t^2}$; per cui $x=\frac{at^2-a-2bt}{1+t^2}$, ed $y=\frac{2at+bt^2-b}{1+t^2}$. Prendendo ora per t un numero razionale qualunque, si avranno per x e per y dei numeri pure razionali, i quadrati dei quali soddisfaranno alle condizioni del problema.

Sia per esempio $a^2=100$, $b^2=64$; sarà $a=10$, $b=8$. Fatto $t=3$, che è il più piccol numero, il quale renda positivi i valori di x e di y, ed eseguite nelle due equazioni trovate le opportune sostituzioni, si avrà

$$x=\frac{10.9-10-2.8.3}{1+9}=\frac{90-10-48}{10}=\frac{32}{10}$$

$$y=\frac{2.10.3+8.9-8}{1+9}=\frac{60+72-8}{10}=\frac{124}{10}.$$

Onde $x^2=\left(\frac{32}{10}\right)^2=\frac{1024}{100}$, ed $y^2=\left(\frac{124}{10}\right)^2=\frac{15376}{100}$

per cui $x^2+y^2=\frac{1024+15376}{100}=\frac{16400}{100}=164$, come doveva per appunto essere.

441. *Problema* IV. Trovare due numeri tali, che aggiungendo il quadrato dell' uno al prodotto del quadrato dell' altro per un numero dato b, la somma sia eguale ad un quadrato proposto a^2?

Soluzione. Sieno x ed y i numeri cercati, e si avrà l' equazione $x^2+by^2=a^2$. Fatto $x=a-zy$, oppure $x=zy-a$, e per conseguenza $x^2=a^2-2azy+z^2y^2$, l' equazione del problema mediante la sostituzione nella medesima del valore di x^2 diventerà $y(z^2y-2az+by)=0$, donde si ricava

1.° $y=0$, e per conseguenza $x=a$. 2.° $y=\frac{2az}{b+z^2}$, e per conseguenza $x = \frac{a(b - z^2)}{b + z^2}$. Prendendo ora per z un numero razionale qualunque, si avranno per x e per y pure dei numeri razionali, che soddisfaranno alle condizioni del problema.

Sia, per esempio, $a^2 = 9$, $b = 2$, fatto $z = 1$, si avrà $y = \frac{6}{3} = 2$, $x = \frac{3}{3} = 1$, per cui $x^2 = 1$ ed $y^2 = 4$: onde $x^2 + by^2 = 1 + 4 \cdot 2 = 9$, come fu proposto.

Se a^2 fosse $= 16$, $b = 5$, e $z = 2$, sarebbe $y = \frac{16}{9}$, ed $x = \frac{4}{9}$: onde $x^2 = \frac{16}{81}$, ed $y^2 = \frac{256}{81}$, quindi

$$x^2 + y^2 \cdot b = \frac{16}{81} + \frac{256}{81} \cdot 5 = \frac{16 + 1280}{81} = \frac{1296}{81} = 16,$$

come doveva essere.

Prendendo b col segno negativo le formole superiori darebbero la soluzione del problema, nel quale si cercassero due quadrati tali, che levando da uno di essi il prodotto dell' altro pel numero dato b, il residuo fosse eguale ad un quadrato egualmente dato.

442. *Problema* V. Trovare due numeri, il primo dei quali aggiunto al quadrato del secondo, ed il secondo aggiunto al quadrato del primo, diano due quadrati perfetti?

Soluzione. Sia y il primo di questi numeri, ed x il secondo. Per le condizioni del problema, $x^2 + y$ ed $y^2 + x$ dovranno essere due quadrati perfetti. Suppongasi che $x + t$ sia la radice del primo di questi quadrati, e che $y + u$ sia la radice del secondo; fatti i quadrati di queste due radici, si avranno le seguenti equazioni

$$x^2 + 2xt + t^2 = x^2 + y$$
$$y^2 + 2yu + u^2 = y^2 + x.$$

Si cavi dall' una e dall' altra il valore di y, e sarà $y = 2xt + t^2$, $y = \frac{x - u^2}{2u}$, e paragonando, si ottiene

$2xt + t^2 = \frac{x - u^2}{2u}$, ossia $4xtu + 2t^2u = x - u^2$, ed $x = \frac{2t^2u + u^2}{1 - 4tu}$, valore, che soddisfà alle condizioni del problema. Le due quantità u e t sono arbitrarie; ma a motivo del denominatore $1 - 4tu$, bisogna che sia $1 > 4tu$, qualora si vogliano per x dei valori positivi; cosicchè, dividendo per 4, sarà $\frac{1}{4} > tu$; ciò che fa vedere, che le indeterminate devono essere tali, che il loro prodotto sia minore di $\frac{1}{4}$, e per conseguenza bisogna che tutte e due sieno vere frazioni, o che, essendo una delle due un numero intero, questo sia tale che la di lui combinazione coll' altra indeterminata verifichi la condizione superiore, cioè $tu < \frac{1}{4}$. Supponiamo che sia $t = \frac{1}{3}$, e $u = \frac{1}{2}$, e si avrà

$$x = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{4}}{1 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{9} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{13}{36}}{\frac{1}{3}} = \frac{13}{12}.$$

$$y = \frac{\frac{13}{12} - \frac{1}{4}}{1} = \frac{13}{12} - \frac{3}{12} = \frac{10}{12};$$ e per conseguenza

$$x^2 = \frac{169}{144}, \text{ ed } y^2 = \frac{100}{144}; \text{ onde}$$

$$x^2 + y = \frac{169}{144} + \frac{10}{12} = \frac{169 + 120}{144} = \frac{289}{144} = \left(\frac{17}{12}\right)^2; \text{ ed}$$

$$y^2 + x = \frac{100}{144} + \frac{13}{12} = \frac{100 + 156}{144} = \frac{256}{144} = \left(\frac{16}{12}\right)^2.$$

443. Seguendo il metodo da noi tenuto per la risoluzione dei proposti problemi indeterminati, si potrà con tutta facilità risolverne un gran numero d'altri ad essi simili, che io non propongo per brevità. Questa ricerca si potrebbe estendere anche ai problemi indeterminati del 3.° e del 4.° grado ed anche dei gradi superiori analoghi a quelli da noi risoluti pei primi due gradi; ma essendo tale ricerca molto complicata, e non servendo d'altronde che di semplice curiosità, stimo opportuno il non parlarne.

CAPITOLO X.

Della risoluzione delle equazioni determinate del terzo grado.

444. Tutte le equazioni determinate del 3.° grado ad una sola incognita possono ridursi alla formola generale $x^3 - px^2 - mx - n = 0$ essendo x l'incognita, p, m, n quantità date: infatti i termini di qualunque equazione del 3.° grado si potranno scrivere tutti in un membro, si potrà dividere tutta l'equazione pel moltiplicatore di x^3, qualora vi sia, indi rappresentare per p il coefficiente di x^2, per m il coefficiente di x, e per n l'aggregato dei termini noti.

445. Essendo p, m, ed n quantità date qualunque, possono succedere sei diversi casi.

Supponiamo in primo luogo che sia nello stesso tempo $p=0$, $m=0$ ed $n=1$, in allora l'equazione generale si ridurrà ad $x^3-1=0$, ossia ad $x^3=1$, per risolvere la quale basterà estrarre da ciascun membro della medesima la radice cubica; di fatto eseguendo tale operazione, si avrà $x=\sqrt[3]{1}$, ma $\sqrt[3]{1}=1$ (280); onde $x=1$. Essendo l'unità una ra-

dice della proposta equazione $x^3-1=0$, essa sarà divisibile pel fattore lineare $x-1$ (417). Effettuata tale divisione, si ottiene per quoziente l'equazione del secondo grado $x^2+x+1=0$, che risoluta (412) fornisce altri due valori di x che sono

$$x=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\quad x=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Tre adunque sono i valori di x nell'equazione $x^3-1=0$, o ciò che torna lo stesso tre radici cubiche ha l'unità, e sono le seguenti

$$1,\quad \frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\ (266),$$

Volendo ora risolvere l'equazione $x^3=n$, si vede che il secondo membro della medesima può considerarsi come composto di due fattori, cioè di n, e di 1, per cui si ha $x^3=1.n$; onde $x=\sqrt[3]{1}.\sqrt[3]{n}$. Ora si è trovato che i tre valori della radice cubica dell'unità, sono

$$\sqrt[3]{1}=1,\quad \sqrt[3]{1}=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\quad \sqrt[3]{1}=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Sostituendo adunque ad uno ad uno i valori di $\sqrt[3]{1}$ nella superiore equazione, si avranno le tre seguenti espressioni

$$x=1.\sqrt[3]{n}=\sqrt[3]{n}$$

$$x=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.\sqrt[3]{n}$$

$$x=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.\sqrt[3]{n},$$

che sono le tre radici dell'equazione pura del terzo grado $x^3 - n = 0$, come è facile l'assicurarsene, mediante la sostituzione di una qualunque di esse nell'equazione in luogo dell'incognita.

446. Supponiamo in 2.° luogo $n = 0$, e l'equazione generale diventerà $x^3 - px^2 - mx = 0$, da cui, separando il fattor comune x, si avrà l'equazione $x(x^2 - px - m) = 0$, la quale risulta dal prodotto di $x = 0$ per l'equazione del 2.° grado $x^2 - px - m = 0$; quest'ultima equazione risoluta dà $x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} + m\right)}$. Di modo che l'equazione $x^3 - px^2 - mx = 0$ si trova avere le tre radici seguenti

$$x = 0$$

$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} + m\right)}$$

$$x = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} + m\right)},$$

le quali tutte soddisfanno all'equazione stessa, come facilmente si può verificare mediante le opportune sostituzioni.

447. Supponiamo in 3.° luogo, che sia nello stesso tempo $m = 0$ ed $n = 0$, e si avrà $x^3 - px^2 = 0$, ossia $x^2(x - p) = 0$, dalla quale si ha $x^2 = 0$, cioè $x = \pm\sqrt{0} = \pm 0$, ed $x - p = 0$, per cui $x = p$: onde le tre radici di quest'equazione saranno $x = 0$, $x = 0$, ed $x = p$.

448. Supponiamo in 4.° luogo $p = 0$, e nello stesso tempo anche $n = 0$, e l'equazione generale si ridurrà ad $x^3 - mx = 0$, dalla quale si ricava $x(x^2 - m) = 0$: onde $x = 0$, ed $x^2 - m = 0$;

cioè $x^2 = m$, e quindi $x = \pm\sqrt{m}$. Le tre radici adunque della superiore equazione sono $x = 0$, $x = \sqrt{m}$, $x = -\sqrt{m}$.

449. Supponiamo in 5.° luogo $p = 0$, e l'equazione generale si ridurrà ad $x^3 - mx - n = 0$, ossia ad $x^3 - mx = n$. Nella risoluzione di questa equazione consiste quasi tutta la difficoltà, che presenta la teorica della risoluzione delle equazioni del 3.° grado. Onde giungere colla minore difficoltà possibile allo scopo bramato, supponiamo che si abbia $x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$; facendo il cubo dell'uno e dell'altro membro di questa equazione, si avrà

$x^3 = p + 3\sqrt[3]{p^2 q} + 3\sqrt[3]{p q^2} + q =$

$p + 3\sqrt[3]{pq} \cdot \sqrt[3]{p} + 3\sqrt[3]{pq} \cdot \sqrt[3]{q} + q$, e raccogliendovi il fattor comune $3\sqrt[3]{pq}$, sarà

$x^3 = p + q + 3\sqrt[3]{pq}(\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}) =$

$p + q + 3x\sqrt[3]{pq}$, ossia $x^3 - 3x\sqrt[3]{pq} = p + q$; equazione del 3.° grado mancante del secondo termine, una delle cui radici è certamente $x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$, perchè essa fu da noi formata facendo il cubo di questa equazione. Paragonando ora l'equazione proposta $x^3 - mx = n$, coll'equazione da noi formata $x^3 - 3x\sqrt[3]{pq} = p + q$, termine per termine, si vede essere $m = 3\sqrt[3]{pq}$, $n = p + q$, onde si scorge, che con tutta la facilità si potrà avere una radice di quell'equazione, qualora si possa dividere la quantità n in due parti p e q, tali che il triplo della radice cubica del loro prodotto sia m;

cioè che sia $3\sqrt[3]{pq}=m$. Questo problema si è risoluto al (431), e si è ottenuto

$$p=\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}\right)};\ q=\frac{n}{2}-\sqrt{\left(\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}\right)}$$

estraendo poi la radice cubica da ambi i membri di ciascuna di queste equazioni, si avrà

$$\sqrt[3]{p}=\sqrt[3]{\left[\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}\right)}\right]}$$

$$\sqrt[3]{q}=\sqrt[3]{\left[\frac{n}{2}-\sqrt{\left(\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}\right)}\right]}.$$

Ora siccome $\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}$ è una delle radici cubiche della proposta equazione $x^3-mx=n$, sarà sostituendo

$$x=\sqrt[3]{\left[\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}\right)}\right]}$$

$$+\sqrt[3]{\left[\frac{n}{2}-\sqrt{\left(\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}\right)}\right]}.$$

450. Questa formola generale, che comunemente si attribuisce a Cardano, e che dicesi formola cardanica, perchè egli fu il primo a pubblicarla colle stampe, è dovuta a Nicolò Tartaglia bresciano, il quale la ritrovò in conseguenza di un problema statogli proposto da Scipione Ferreo, come di leggieri si può rilevare dalla corrispondenza fra esso ed il Cardano registrata nella storia dell'Algebra del celebre Cossali.

Le altre due radici dell'equazione proposta si troveranno facilmente, considerando essere

$$\sqrt[3]{p}=\sqrt[3]{\left[\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}\right)}\right]}\sqrt[3]{1},\ \text{e}$$

$$\sqrt[3]{q}=\sqrt[3]{\left[\frac{n}{2}-\sqrt{\left(\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}\right)}\right]}\sqrt[3]{1},$$

dalle quali, sostituendo per $\sqrt[3]{1}$ i tre suoi valori (445), si avranno tre diverse espressioni per $\sqrt[3]{p}$, e tre per $\sqrt[3]{q}$, che saranno le seguenti

$$1.^\circ\ \sqrt[3]{p}=\sqrt[3]{\left[\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}\right)}\right]}$$

$$2.^\circ\ \sqrt[3]{p}=\sqrt[3]{\left[\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}\right)}\right]}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$3.^\circ\ \sqrt[3]{p}=\sqrt[3]{\left[\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}\right)}\right]}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$1.^\circ\ \sqrt[3]{q}=\sqrt[3]{\left[\frac{n}{2}-\sqrt{\left(\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}\right)}\right]}$$

$$2.^\circ\ \sqrt[3]{q}=\sqrt[3]{\left[\frac{n}{2}-\sqrt{\left(\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}\right)}\right]}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$3.^\circ\ \sqrt[3]{q}=\sqrt[3]{\left[\frac{n}{2}-\sqrt{\left(\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}\right)}\right]}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Ora la somma di un valore di $\sqrt[3]{p}$ con uno di $\sqrt[3]{q}$ essendo eguale ad x, dovrebbe essere radice della proposta, ma dovendo i due valori, che si sommano insieme, soddisfare anche all'equazione

$3\sqrt[3]{pq}=m$, le sole tre somme seguenti, e risultanti, la prima dal 1.° valore di $\sqrt[3]{p}$ col 1.° valore di $\sqrt[3]{q}$, la seconda dal 2.° valore di $\sqrt[3]{p}$ col 3.° di $\sqrt[3]{q}$, e la terza dal 3.° valore di $\sqrt[3]{p}$ col 2.° valore di $\sqrt[3]{q}$ sono radici dell' equazione proposta, per cui si ha

$$1.^a\ x=\sqrt[3]{\left[\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}\right)}\right]}+\sqrt[3]{\left[\frac{n}{2}-\sqrt{\left(\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}\right)}\right]}$$

$$2.^a\ x=\sqrt[3]{\left[\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}\right)}\right]}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}+\sqrt[3]{\left[\frac{n}{2}-\sqrt{\left(\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}\right)}\right]}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$3.^a\ x=\sqrt[3]{\left[\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}\right)}\right]}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}+\sqrt[3]{\left[\frac{n}{2}-\sqrt{\left(\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}\right)}\right]}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Per assicurarsi poi che ciascuna di queste radici soddisfà all' equazione $3\sqrt[3]{pq}=m$, si faccia prima il prodotto di $\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}\right)}$ per $\frac{n}{2}-\sqrt{\left(\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}\right)}$, il quale (43) è

$\frac{n^2}{4}-\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}=\frac{m^3}{27}$, da questo prodotto si estragga la radice cubica, e di essa si prenda il triplo, per lo che si avrà

$$3\sqrt[3]{\frac{m^3}{27}}=\frac{3m}{3}=m;$$

ciò che serve per dimostrare la verità della prima delle tre radici superiormente determinate. Si faccia una simile operazione riguardo alla seconda radice; e siccome le quantità da moltiplicarsi, sono ambedue composte di due fattori, così per brevità si incomincierà a moltiplicare fra di loro i primi due fattori di ciascuna di quelle due espressioni, il di cui prodotto, per l' antecedente operazione, è $\frac{m^3}{27}$, moltiplicando indi gli altri due fattori, cioè $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, e $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ fra di loro, si avrà (43) per prodotto $\frac{1+3}{4}=1$. I due prodotti ottenuti moltiplicati insieme danno poi $\frac{m^3}{27}\times 1=\frac{m^3}{27}$; per lo che anche in questo caso, come si è trovato superiormente, sarà $3\sqrt[3]{pq}=m$. Vale lo stesso ragionamento anche per l' altra radice, essendo essa composta di fattori identici con quelli della seconda.

Ciascuna delle trovate radici sostituita nell' equazione proposta in luogo dell' incognita, soddisfà all' equazione medesima, come facilmente si può vedere effettuando tale sostituzione, che io tralascio per brevità.

451. Ritornando alle trovate radici, si vede essere reale la 1.ª; quando è reale la quantità $\sqrt{\left(\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}\right)}$, cioè quando $\frac{n^2}{4}>\frac{m^3}{27}$; le altre due sono poi immaginarie a motivo del fattore immaginario $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$, che vi si trova; ma quando $\sqrt{\left(\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}\right)}$ è immaginario, cioè quando $\frac{n^2}{4}<\frac{m^3}{27}$, in allora quantunque tutte le radici si presentino sotto aspetto immaginario, pure sono reali; in fatti si faccia per brevità la quantità reale $\frac{n}{2}=a$, e la quantità immaginaria

$\sqrt{\left(\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}\right)}=b\sqrt{-1}$, e questi valori si sostituiscano nelle tre radici trovate, avendo riguardo nello stesso tempo di far passare l' indice del radicale cubico ad esser divisore dell' esponente (213), e si avrà

1.° $x=(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}+(a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$

2.° $x=(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$

$\qquad+(a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

3.° $x=(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

$\qquad+(a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$.

Ma (316) si ha $(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}+(a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}=$ $R+I\sqrt{-1}+R-I\sqrt{-1}=2R$; dunque $x=2R$, che è una quantità reale. Mediante poi la sostituzione di $R+I\sqrt{-1}$ in luogo di $(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$, e di $R-I\sqrt{-1}$ in luogo di $(a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$, le altre due radici diverranno

$$x=(R+I\sqrt{-1})\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$
$$+(R-I\sqrt{-1})\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$
$$x=(R+I\sqrt{-1})\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$
$$+(R-I\sqrt{-1})\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},$$

dalle quali, fatte le opportune moltiplicazioni e riduzioni, si ottiene $x=-R-I\sqrt{3}$, ed $x=-R+I\sqrt{3}$, quantità tutte reali.

452. Questo caso, in cui tutte le radici quantunque reali si mostrano sotto forma immaginaria si chiama caso *irreducibile*, perchè ad alcuno sino ad ora non è mai riuscito di esprimere algebricamente tali radici sotto aspetto reale. La figura immaginaria generalmente non può togliersi da queste radici che sviluppandole in serie infinite, o valutandole per approssimazione, dissi generalmente,

perchè accade alle volte, che le parti delle radici comprese sotto i radicali cubici sono cubi perfetti, nel qual caso gli immaginarj si distruggono, cavando da esse le radici cubiche.

La ragione per la quale il metodo da noi impiegato ci faccia giungere ad espressioni immaginarie, anche nel caso di radici reali non può farsi ora conoscere, richiedendo ulteriori cognizioni d'analisi; basta il sapere per ora che un tale inconveniente proviene dallo spezzamento, che si è fatto della quantità n nelle due p e q.

453. Per fare un' applicazione di questa teorica generale, supponiamo che sia proposta l' equazione $x^3+x=2$, la quale per essere anch' essa mancante del secondo termine si potrà paragonare coll' equazione generale $x^3-mx=n$ da noi risoluta: da un tale paragone, si otterrà $m=-1$, $n=2$. Sostituendo, ora, questi valori nella 1.ª delle trovate radici (450), si avrà

$$x=\sqrt[3]{\left\{\frac{2}{2}+\sqrt{\left(\frac{4}{4}+\frac{1}{27}\right)}\right\}}+\sqrt[3]{\left\{\frac{2}{2}-\sqrt{\left(\frac{4}{4}+\frac{1}{27}\right)}\right\}}=$$

$$\sqrt[3]{\left\{1+\sqrt{\left(1+\frac{1}{27}\right)}\right\}}+\sqrt[3]{\left\{1-\sqrt{\left(1+\frac{1}{27}\right)}\right\}}=$$

$$\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{\frac{28}{27}}\right)}+\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{\frac{28}{27}}\right)},$$ e moltiplicando i termini della frazione $\frac{28}{27}$ per 3, scomponendo il numeratore 84 che ne risulta, nei due suoi fattori 4 e 21, ed estraendo la radice quadrata tanto al 4, che al nuovo denominatore 81, sarà

$$x=\sqrt[3]{\left(1+\frac{2\sqrt{21}}{9}\right)}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{2\sqrt{21}}{9}\right)}=$$

$$\sqrt[3]{\frac{9+2\sqrt{21}}{9}}+\sqrt[3]{\frac{9-2\sqrt{21}}{9}},$$ e moltiplicando ambi i termini di queste frazioni per 3, indi estraendo la radice cubica dal denominatore risultante 27, si avrà

$$x=\frac{1}{3}\sqrt[3]{(27+6\sqrt{21})}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{(27-6\sqrt{21})}=$$

$$\frac{1}{3}\times\frac{3+\sqrt{21}}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{3-\sqrt{21}}{2}=$$

$$\frac{3+\sqrt{21}+3-\sqrt{21}}{2.3}=1,$$ atteso che

$$\sqrt[3]{(27+6\sqrt{21})}=\frac{3+\sqrt{21}}{2},$$ e $$\sqrt[3]{(27-6\sqrt{21})}=\frac{3-\sqrt{21}}{2},$$ come si può verificare, facendo i cubi di ciascun membro di queste equazioni. Le altre due radici della proposta equazione saranno poi

$$x=\frac{3+\sqrt{21}}{2.3}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}+\frac{3-\sqrt{21}}{2.3}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=$$

$$\frac{-6+2\sqrt{-63}}{2.6},$$ ed

$$x=\frac{3+\sqrt{21}}{2.3}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}+\frac{3-\sqrt{21}}{2.3}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=$$

$$\frac{-6-2\sqrt{-63}}{2.6},$$ e dividendo per 6 tutti termini di queste frazioni, sarà

$$x=\frac{-1+\frac{1}{3}\sqrt{-63}}{2}=\frac{-1+\sqrt{\left(-\frac{63}{9}\right)}}{2}=\frac{-1+\sqrt{-7}}{2}.$$

$$x=\frac{-1-\frac{1}{3}\sqrt{-63}}{2}=\frac{-1-\sqrt{\left(-\frac{63}{9}\right)}}{2}=\frac{-1-\sqrt{-7}}{2}.$$

La prima delle trovate radici è reale, e le altre due sono immaginarie, come dovevano essere, perchè $\frac{m^3}{27}<\frac{n^2}{4}$, cioè $\frac{1}{27}<1$.

454. Supponiamo in 6.° ed ultimo luogo che l'equazione generale del terzo grado

$$x^3-px^2-mx-n=0$$

sussista interamente, ed andiamo a vedere come si possa in questo caso risolverla: onde giungere all'intento bisogna cercare una equazione trasformata, la quale sia mancante del secondo termine, e per conseguenza della forma $x^3-mx=n$.

Onde trovarla, nell'equazione proposta

$$x^3-px^2-mx-n=0,$$

si ponga in luogo di x la quantità $y+\frac{p}{3}$, e si avrà

$$\left(y+\frac{p}{3}\right)^3-p\left(y+\frac{p}{3}\right)^2-m\left(y+\frac{p}{3}\right)-n=0,$$

ossia sviluppando, e facendo le opportune riduzioni, $y^3-\left(m+\frac{p^2}{3}\right)y=n+\frac{mp}{3}+\frac{2p^3}{27}$, equazione del terzo grado mancante del secondo termine, e per conseguenza risolubile col metodo insegnato (449, 450).

Trovati per mezzo di questa equazione trasformata i valori di y (col mettere nelle tre radici determinate (450) per l'equazione $x^3-mx=n$, in luogo di m il coefficiente di y, ed in luogo di n i termini contenuti nel secondo membro di quell'equazione), se ai medesimi si aggiungerà un terzo di p, si avranno i valori di x, avendo supposto

$$x=y+\frac{p}{3}.$$

455. Sia proposta l'equazione completa del terzo grado $x^3-6x^2+13x-12=0$, da risolversi.

Per avere la sua trasformata, si faccia

$x=y+\frac{6}{3}=y+2$. Sostituendo ora nell'equazione proposta per x il suo valore, fatte le opportune riduzioni, si ottiene la trasformata richiesta $y^3+y=2$, equazione da noi risoluta per rapporto ad x (453); onde

$$y=1,\ y=\frac{-1+\sqrt{-7}}{2},\ y=\frac{-1-\sqrt{-7}}{2}.$$

Ma $x=y+2$; dunque sarà anche $x=1+2=3$,

$$x=\frac{-1+\sqrt{-7}}{2}+2=\frac{3+\sqrt{-7}}{2},$$

$$x=\frac{-1-\sqrt{-7}}{2}+2=\frac{3-\sqrt{-7}}{2}.$$

456. Sia proposta l'equazione del 3.° grado $x^3+A'x^2+B'x+C'=0$, le di cui radici

sieno a, b, c. Il coefficiente del secondo termine col segno cangiato sarà eguale alla somma delle radici dell'equazione; il coefficiente del 3.° termine col proprio segno, sarà eguale alla somma dei prodotti, che si possono fare, moltiplicando le sue radici a due a due, e finalmente il termine tutto noto col segno cangiato eguaglia il prodotto di tutte le radici.

Di fatto (415) abbiamo dimostrato, che nell'equazione generale del 2.° grado $x^2 + Ax + B = 0$, le di cui radici sono a, b, il coefficiente del secondo termine col segno cangiato è $a + b$, ed il termine noto è ab, si ha cioè $-A = a + b$, $B = ab$. Si moltiplichi ora questa equazione per la nuova equazione lineare $x - c = 0$, e si avrà l'equazione del 3.° grado

$$x^3 - (-A + c)x^2 + (B - Ac)x - Bc = 0,$$

la quale, paragonata colla proposta, dà

$$-A' = -A + c = a + b + c$$
$$B' = B - Ac = ab + (a + b)c = ab + ac + bc$$
$$-C' = Bc = abc,$$

come si doveva dimostrare. Di qui ne viene che mancando in una equazione del 3.° grado il secondo termine, sarà la somma delle radici positive eguale alla somma delle radici negative, dovendo il complesso di tutte le radici essere zero; che mancando il 3.° termine, sarà indizio che la somma dei prodotti delle radici prese a due a due sarà $= 0$, o ciò che è lo stesso la somma dei prodotti positivi = alla somma dei negativi.

457. Risultando l'equazione

$$x^3 + A'x^2 + B'x + C' = 0$$

dal prodotto delle sue equazioni lineari $x - a = 0$,

$x - b = 0$, $x - c = 0$, ne viene che il suo primo membro sarà divisibile per ciascuno de' suoi fattori, e per conseguenza quando di una equazione di 3.° grado qualunque sarà conosciuta una delle sue radici, per esempio a, essa si potrà abbassare di un grado dividendola pel fattor lineare $x - a$ (418), dopo di che, essendo ridotta al secondo, sarà facile di trovare le altre due radici.

458. Siccome le radici di una equazione sostituite in luogo dell'incognita rendono l'equazione $= 0$; così quelle quantità, che messe in luogo dell'incognita in una data equazione la renderanno $= 0$, saranno radici dell'equazione medesima.

Le considerazioni da noi fatte superiormente ci mettono in istato di poter giungere molte volte alla risoluzione delle equazioni del 3.° grado per una via assai più breve di quella sino ad ora da noi seguita. A tale oggetto si osservi (456), che l'ultimo termine col segno cangiato eguaglia sempre il prodotto delle tre radici dell'equazione proposta del 3.° grado; se l'equazione data avrà adunque una qualche radice razionale, essa sarà compresa fra i divisori dell'ultimo termine, e dovrà, messa in luogo dell'incognita, rendere tutta l'equazione $= 0$.

459. *Esempio* I. Sia proposta l'equazione

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

Se essa avrà delle radici razionali, queste radici saranno comprese fra i divisori 1, 2, 3 e 6 dell'ultimo termine, presi positivamente o negativamente. Incomincio in luogo di x a sostituirvi l'unità, e siccome trovo l'equazione essere soddisfatta, così conchiudo che l'unità è una radice della proposta, per cui essa sarà divisibile per $x - 1$: eseguendo di fatto una tale divisione, si ha per quoto $x^2-5x+6=0$, equazione di secondo grado, che dà

$$x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{25}{4}-6\right)}=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2},$$ onde le altre due radici della proposta equazione sono $x=3$, ed $x=2$: per lo che sarà anche

$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3),$$

come si può facilmente verificare eseguendo gli indicati prodotti.

Su di questa equazione si possono verificare con tutta facilità le proprietà, che generalmente abbiamo dimostrato aver luogo riguardo ai coefficienti (456).

460. *Esempio* II. L'equazione $x^3+8x^2+17x+10=0$ essendo soddisfatta mediante la sostituzione dell'unità negativa in luogo di x, sarà divisibile per $x+1$: in fatti eseguita una tale divisione, si ha per quoto l'equazione del 2.° grado $x^2+7x+10=0$, le di cui radici sono

$$x=-\frac{7}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{49}{4}-10\right)}=-\frac{7}{2}\pm\frac{3}{2},$$

cioè $x=-2$, ed $x=-5$: onde

$$x^3+8x^2+17x+10=(x+1)(x+2)(x+5).$$

461. *Esempio* III. Sia proposta l'equazione $x^3-19x+30=0$ mancante del secondo termine. Tra i divisori dell'ultimo termine 30 osservo, che il numero 2 soddisfà all'equazione, per cui conchiudo che egli è una delle sue radici. Divido quindi l'equazione proposta pel fattor lineare $x-2$, ed ottengo l'equazione del secondo grado $x^2+2x-15=0$, dalla quale ricavo le altre due radici dell'equazione proposta, che sono

$x=-1\pm\sqrt{(1+15)}=-1\pm4$; cioè $x=3$, ed $x=-5$; dove la somma delle due radici positive eguaglia la radice negativa, come fu generalmente dimostrato al (456).

462. Si osservi di passaggio che quando le radici di un' equazione completa del 3.° grado sono tutte positive, l'equazione a cui appartengono ha i segni alternativi, come si è veduto nel primo esempio; e quando le radici sono tutte negative, come nel 2.° esempio, l'equazione a cui appartengono ha tutti i segni positivi.

463. Il metodo da noi insegnato per risolvere le equazioni del 3.° grado è estensivo a tutte le equazioni della forma $x^{3n}-ax^{2n}-bx^n-c=0$, poichè ponendovi $x^n=y$, si ha la trasformata $y^3-ay^2-by-c=0$, equazione del 3.° grado simile affatto a quella risoluta al (454). Conoscendo poi y, si troverà subito x, mediante l'equazione $x=\sqrt[n]{y}$.

CAPITOLO XI.

Della risoluzione delle equazioni determinate del quarto grado.

464. Tutte le equazioni determinate del 4.° grado possono rappresentarsi colla formola generale $x^4-qx^3-px^2-mx-n=0$; x essendo l'incognita, q, p, m, n quantità conosciute positive o negative.

465. Supponiamo in primo luogo, che sia nello stesso tempo $q=0$, $p=0$, $m=0$, ed $n=1$, e l'equazione proposta diventerà $x^4-1=0$, ovvero $x^4=1$, estraendo la radice quadrata da ambi i membri di questa equazione, si ha $x^2=\pm 1$, cioè $x^2=1$, ed $x^2=-1$. Estraendo da queste nuove equazioni pure la radice quadrata, si ottiene per la prima $x=\pm 1$, e per la seconda $x=\pm\sqrt{-1}$; dunque, quattro sono i valori di x nell'equazione $x^4-1=0$, e quattro perciò anche i valori della radice quarta dell'unità, giacchè dall'equazione $x^4=1$, si ottiene anche $x=\sqrt[4]{1}$; questi valori sono i seguenti 1, -1, $\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$.

Se ora l'equazione proposta fosse $x^4-n=0$, che dicesi equazione *pura* del quarto grado, si avrebbe $x=\sqrt[4]{n}=\sqrt[4]{n}.\sqrt[4]{1}$, e posti per $\sqrt[4]{1}$ i precedenti valori, si avrebbe

$x=1.\sqrt[4]{n}=\sqrt[4]{n}$, $x=-1\sqrt[4]{n}=-\sqrt[4]{n}$,

$x=\sqrt{-1}.\sqrt[4]{n}$, $x=-\sqrt{-1}.\sqrt[4]{n}$. Di queste quattro radici, le prime due sono reali, e le altre due immaginarie.

466. Sia in secondo luogo $m=0$, e $q=0$, e si avrà $x^4-px^2-n=0$, equazione che si riduce a quella del 2.° grado (419), e che dà

$$x^2=\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}+n\right)},$$ per cui

$$x=\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}+n\right)}\right)};$$ donde si ricavano le quattro seguenti radici

$$x=\sqrt{\left(\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}+n\right)}\right)},$$
$$x=-\sqrt{\left(\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}+n\right)}\right)},$$
$$x=\sqrt{\left(\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}+n\right)}\right)},$$
$$x=-\sqrt{\left(\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}+n\right)}\right)}.$$

467. Sia in terzo luogo $m=0$, $n=0$, e si avrà $x^4-qx^3-px^2=0$, donde si ottiene $x^2=0$, ed $x^2-qx-p=0$, ossia $x=\pm\sqrt{0}=\pm 0$, ed $x=\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+p\right)}$. Onde le quattro radici sono $x=0$, $x=0$, $x=\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+p\right)}$, $x=\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+p\right)}$, radici tutte reali; se p nell'equazione superiore fosse stata positiva e $>\frac{q^2}{4}$, le ultime due radici sarebbero immaginarie. Si ragioni in un modo analogo, se nello stesso tempo in cui $n=0$, $m=0$ fosse anche $p=0$: in allora tre radici dell'equazione risultante sarebbero eguali tra di loro, perchè tutte eguali a zero; la quarta poi sarebbe $x=q$.

468. Sia in quarto luogo $n=0$, e l'equazione generale diventerà $x^4-qx^3-px^2-mx=0$, cioè $x(x^3-qx^2-px-m)=0$, donde si ricava $x=0$, ed $x^3-qx^2-px-m=0$. Sic-

come quest' ultima equazione, che è del 3.° grado, ha per lo meno una radice reale (451) potendo essere le altre due reali o immaginarie, così l'equazione proposta avendo una radice $= 0$ ne avrà una seconda reale, e le altre due potranno essere reali o immaginarie.

469. Sia in quinto luogo $q = 0$, per cui l'equazione generale si ridurrà ad

$x^4 - px^2 - mx - n = 0$, equazione che è mancante del solo secondo termine.

Onde giungere alla risoluzione di quest' equazione faremo uso dell' elegantissimo metodo di Eulero, da lui esposto nel 6.° volume degli antichi commentarj di Pietroburgo. Si supponga a tale oggetto che la radice di una equazione del quarto grado abbia la forma $x = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$, in cui le lettere a, b, c rappresentino le radici dell' equazione di 3.° grado $x^3 - p'x^2 - m'x - n' = 0$; di modo che (456) si abbia

$$p' = a + b + c,$$
$$-m' = ab + ac + bc$$
$$n' = abc.$$

Ciò posto, si faccia il quadrato della supposta equazione, e si avrà

$x^2 = a + b + c + 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc}$; e poichè $a + b + c = p'$, sarà anche

$x^2 - p' = 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc}$; si quadri di nuovo quest' ultima equazione, e si avrà

$x^4 - 2p'x^2 + p'^2 = 4ab + 4ac + 4bc + 8\sqrt{a^2bc} + 8\sqrt{ab^2c} + 8\sqrt{abc^2} = 4(ab + ac + bc) + 8\sqrt{abc}\,.\,\sqrt{a} + 8\sqrt{abc}\,.\,\sqrt{b} + 8\sqrt{abc}\,.\,\sqrt{c}$; ma

$ab + ac + bc = -m'$, $\sqrt{abc} = \sqrt{n'}$, e $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = x$. Dunque sostituendo questi valori nella superiore equazione, dopo d' aver separato il fattor comune $8\sqrt{abc}$, si avrà

$x^4 - 2p'x^2 + p'^2 = -4m' + 8x\sqrt{n'}$, ed ordinando

$x^4 - 2p'x^2 - 8x\sqrt{n'} + p'^2 + 4m' = 0$, equazione del 4.° grado mancante del secondo termine, una radice della quale è certamente $x = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$, essendo a, b, c radici dell' equazione del terzo grado $x^3 - p'x^2 - m'x - n' = 0$.

Paragoniamo ora la superiore equazione colla proposta, onde determinare una delle radici di quest' ultima, e si avrà $2p' = p$, $8\sqrt{n'} = m$, $p'^2 + 4m' = -n$; mediante queste equazioni, determinando i coefficienti p', m', n' dell' equazione

$x^3 - p'x^2 - m'x - n' = 0$, che dicesi *ausiliaria* del terzo grado, si avrà

$$p' = \frac{p}{2}, \quad n' = \frac{m^2}{64},$$

$$-m' = \frac{n}{4} + \frac{p'^2}{4} = \frac{n}{4} + \frac{p^2}{16},$$

e l' equazione superiore diventerà

$$x^3 - \frac{p}{2}x^2 + \left(\frac{n}{4} + \frac{p^2}{16}\right)x - \frac{m^2}{64} = 0.$$

Risolvendo col metodo noto quest' equazione, si avranno le tre radici ad essa appartenenti; e se queste si suppongono $x = a$, $x = b$, $x = c$, bisognerà che una delle radici della proposta equazione del 4.° grado $x^4 - px^2 - mx - n = 0$, sia $x = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$.

470. A prima giunta pare che questo metodo non dia che una sola radice della proposta equazione, ma se si riflette che ciascun radicale può essere preso tanto positivamente che negativamente, si vedrà al momento che questa formola contiene tutte quattro le radici; anzi se ammettere si volessero tutti i cangiamenti possibili dei segni, si avrebbero otto valori per x, mentre che soli quattro possono aver luogo; ma rammentandosi che il prodotto di quei tre termini, che è $\sqrt{abc}$ deve essere eguale (456) a $\sqrt{n'} = \frac{m}{8}$, conchiuderemo, che se $\frac{m}{8}$ è una quantità positiva, il prodotto dei termini $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ deve del pari essere positivo, e se $\frac{m}{8}$ è negativa, tale deve essere anche quel prodotto: escluderemo quindi dagli otto valori di x, che si possono avere, tutti quelli, che nel primo caso non rendono il loro prodotto positivo, e nel secondo caso tutti quelli, che non lo rendono negativo; per lo che avremo

$$\left.\begin{array}{ll} 1.^\circ & x = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \\ 2.^\circ & x = \sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c} \\ 3.^\circ & x = -\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c} \\ 4.^\circ & x = -\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c} \end{array}\right\} \text{Nel caso che } \frac{m}{8} \text{ sia positivo.}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 1.^\circ & x = \sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c} \\ 2.^\circ & x = \sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c} \\ 3.^\circ & x = -\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \\ 4.^\circ & x = -\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c} \end{array}\right\} \text{Nel caso che } \frac{m}{8} \text{ sia negativo.}$$

Questa osservazione ci mette in grado di determinare le quattro radici in qualunque caso. Il seguente esempio servirà di schiarimento.

471. *Esempio*. Sia proposta l'equazione del 4.° grado mancante del secondo termine

$$x^4 - 12x^2 - 16x\sqrt{3} - 16 = 0.$$

Onde risolverla si paragoni coll'equazione del (469), e si avrà

$$\left.\begin{array}{l} p = 12 \\ m = 16\sqrt{3} \\ n = 16 \end{array}\right\} \text{onde} \left\{\begin{array}{l} p' = \frac{12}{2} = 6. \\ n' = \frac{16.16.3}{64} = 12. \\ -m' = \frac{16}{4} + \frac{144}{16} = 4 + 9 = 13. \end{array}\right.$$

Sostituendo ora i valori di p', n', m', nella equazione ausiliaria del 3.° grado
$x^3 - p'x^2 - m'x - n' = 0$, essa diventerà
$x^3 - 6x^2 + 13x - 12 = 0$, le di cui radici (455); chiamate a, b, c, sono $a = 3$, $b = \frac{3 + \sqrt{-7}}{2}$, $c = \frac{3 - \sqrt{-7}}{2}$, i valori delle quali, sostituiti nelle formole del (470), danno le quattro radici della proposta. Siccome poi $\frac{m}{8} = \frac{16\sqrt{3}}{8} = 2\sqrt{3}$ è una quantità positiva, così le radici della proposta saranno

$$1.^a \quad x = \sqrt{3} + \sqrt{\frac{3+\sqrt{-7}}{2}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{-7}}{2}},$$

$$2.^a \quad x = \sqrt{3} - \sqrt{\frac{3+\sqrt{-7}}{2}} - \sqrt{\frac{3-\sqrt{-7}}{2}},$$

$$3.^a \quad x = -\sqrt{3} - \sqrt{\frac{3+\sqrt{-7}}{2}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{-7}}{2}},$$

$$4.^a \quad x = -\sqrt{3} + \sqrt{\frac{3+\sqrt{-7}}{2}} - \sqrt{\frac{3-\sqrt{-7}}{2}};$$

e poichè si ha (434)

$$\sqrt{\frac{3+\sqrt{-7}}{2}} = \frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{\sqrt{-1}}{2},$$

$\sqrt{\frac{3-\sqrt{-7}}{2}} = \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{\sqrt{-1}}{2}$; così mediante le opportune sostituzioni di questi valori nelle trovate radici, esse si cangeranno nelle seguenti

$$1.^a \quad x = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{\sqrt{-1}}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{\sqrt{-1}}{2} = \sqrt{3} + \sqrt{7},$$

$$2.^a \quad x = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{\sqrt{-1}}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{\sqrt{-1}}{2} = \sqrt{3} - \sqrt{7},$$

$$3.^a \quad x = -\sqrt{3} - \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{\sqrt{-1}}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{\sqrt{-1}}{2} = -\sqrt{3} - \sqrt{-1},$$

$$4.^a \quad x = -\sqrt{3} + \frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{\sqrt{-1}}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{\sqrt{-1}}{2} = -\sqrt{3} + \sqrt{-1},$$

due delle quali sono radici reali, e due immaginarie.

472. Sia finalmente proposta da risolversi l' equazione completa $x^4 - qx^3 - px^2 - mx - n = 0$;

onde risolverla bisogna trasformarla in un' altra equazione pure del 4.° grado, ma mancante del 2.° termine, e per conseguenza della forma di quella da noi risoluta (469). Per ciò fare, in luogo di x si ponga nella proposta $y + \frac{q}{4}$, e si avrà l' equazione

$$y^4 + qy^3 + \frac{6q^2y^2}{16} + \frac{q^3y}{16} + \frac{q^4}{256} - qy^3 - \frac{3q^2y^2}{4} - \frac{3q^3y}{16} - \frac{q^4}{64} - py^2 - \frac{pqy}{2} - \frac{pq^2}{16} - my - \frac{mq}{4} - n = 0,$$

dalla quale, i termini contenenti le terze potenze di y distruggendosi vicendevolmente, si ottiene un' equazione della forma

$$y^4 - p'y^2 - m'y - n' = 0$$

paragonabile con quella del (469) già risoluta.

Determinati i quattro valori di y in questa equazione, basterà a ciascuno di essi aggiungere $\frac{q}{4}$ per avere quelli di x, cioè le radici dell' equazione completa del quarto grado stata da noi proposta.

Le radici trovate messe in luogo delle incognite nelle rispettive equazioni, a cui appartengono, le rendono soddisfatte.

473. Nell' equazione completa del 4.° grado

$$x^4 + A''x^3 + B''x^2 + C''x + D'' = 0,$$

le di cui radici sieno a, b, c, d, sarà il coefficiente del secondo termine col segno mutato eguale alla somma delle radici; il coefficiente del 3.° termine col proprio segno eguale alla somma dei prodotti delle radici a due a due; il coefficiente del quarto termine col segno cangiato è eguale alla somma dei prodotti delle radici a tre a tre; e l'ultimo termine col proprio segno sarà eguale al prodotto di tutte quattro le radici. Al (456) si è dimostrato, che essendo a, b; c le radici dell' equazione del 3.° grado $x^3+A'x^2+B'x+C'=0$, si ha

$$-A'=a+b+c$$
$$B'=ab+ac+bc$$
$$-C'=abc.$$

Moltiplicando ora quell' equazione del 3.° grado per la nuova equazione lineare $x-d=0$, e nel prodotto raccogliendo in un sol termine tutte le quantità moltiplicate per x^3, in un altro termine quelle moltiplicate per x^2, e finalmente in un termine solo anche quelle moltiplicate per x, si viene ad avere l' equazione del 4.° grado

$$x^4+(A'-d)x^3+(B'-A'd)x^2+(C'-B'd)x-C'd=0,$$

la quale paragonata colla proposta dà

$$-A''=-A'+d=a+b+c+d$$
$$B''=B'-A'd=ab+ac+bc+(a+b+c)d=ab+ac+bc+ad+bd+cd.$$
$$-C''=-C'+B'd=abc+(ab+ac+bc)d=abc+abd+acd+bcd.$$
$$D''=-C'd=abcd,$$ come fu proposto.

474. Questa legge ha luogo non solo per le equazioni del 2.° grado, del 3.° grado, e del 4.° grado, come si dimostrò ai (415, 456, 473), ma anche per le equazioni di qualunque grado, come facilmente si può provare con un ragionamento analogo a quello da noi impiegato superiormente. Di

modo che si può conchiudere che *in una equazione completa ed ordinata del grado ennesimo; il coefficiente del secondo termine col segno cangiato è eguale alla somma di tutte le radici, il coefficiente del terzo termine col proprio segno è eguale alla somma dei prodotti, che con tutte le radici si possono fare prese a due a due, il coefficiente del quarto termine col segno cangiato è eguale alla somma dei prodotti, che colle radici si posson fare combinandole a tre a tre, il coefficiente del quinto termine col proprio segno è eguale alla somma dei prodotti delle radici a quattro a quattro, e così di seguito, e l' ultimo termine col proprio segno, se l' equazione è di grado pari, o col segno cangiato, se essa è di grado dispari, eguaglia sempre il prodotto di tutte le radici.*

Appoggiati agli stessi principj da noi esposti per le equazioni del 2.° e del 3.° grado, si vedrà facilmente che una equazione qualunque del quarto grado risulta dal prodotto de' suoi quattro fattori lineari, per cui sarà divisibile per ciascuno di essi; mediante poi una tale divisione si minorerà il suo grado. Questa proposizione si è anche dimostrata generalmente per una equazione del grado *emmesimo* (417).

475. *Esempio* I. Sia data l' equazione

$$x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$$

da risolvere: si osservi primieramente che essa è soddisfatta ponendo l' unità in luogo dell' incognita, per cui $x=1$ sarà una delle sue radici, ed in conseguenza l' equazione proposta sarà divisibile pel suo fattor lineare $x-1$. Eseguendo una tale divisione si ottiene per quoto l' equazione del 3.° grado $x^3-9x^2+26x-24=0$; la quale, essendo soddisfatta da $x=2$, si riduce mediante la sua divisione per $x-2$, all' equazione del 2.° grado $x^2-7x+12=0$; le di cui radici sono

$$x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{49}{4} - 12\right)} = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2},$$ cioè $x=4$, ed $x=3$; onde le quattro radici della proposta equazione del quarto grado sono $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=4$.

476. Questa equazione, ed in generale qualunque equazione di grado superiore al secondo, è divisibile pel fattore di secondo grado risultante dal prodotto di due qualunque dei fattori lineari appartenenti all' equazione medesima. Dividendo in fatti la proposta equazione $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$ per il fattore di secondo grado $x^2 - 3x + 2$, risultante dal prodotto dei due fattori lineari $x-1$, $x-2$, si ha per quoto la stessa equazione $x^2 - 7x + 12 = 0$ da noi trovata, e risoluta superiormente.

477. II. Abbiasi l' equazione

$$x^4 + 12x^3 + 49x^2 + 78x + 40 = 0.$$

Onde risolverla, osservo che fra i divisori dell' ultimo termine 40 di questa equazione il -1, ed il -2 vi soddisfanno, ne conchiudo quindi che questa equazione sarà divisibile per $x+1$, e l' equazione del 3.° grado risultante, sarà poi divisibile per $x+2$ per cui si giungerà all' equazione del 2.° grado $x^2 + 9x + 20 = 0$, la quale risoluta dà

$$x = -\frac{9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{81}{4} - 20\right)} = -\frac{9}{2} \pm \frac{1}{2};$$

cioè $x = -4$ ed $x = -5$ di modo che le radici di questa equazione sono tutte negative, e sono $x=-1$, $x=-2$, $x=-4$, $x=-5$. Più brevemente si sarebbe trovata l' equazione $x^2 + 9x + 20 = 0$ del 2.° grado dividendo a dirittura la proposta equazione pel fattore del secondo grado $x^2 + 3x + 2$ risultante dal prodotto dei due fattori lineari $x+1$, $x+2$.

478. Cade in acconcio anche qui d' osservare, che nella prima delle proposte equazioni, della quale tutte le radici sono positive, i segni sono alternativamente positivi e negativi, e nella seconda, le di cui radici sono tutte negative, i segni sono tutti positivi.

479. Il metodo spiegato per la risoluzione delle equazioni generali del 4.° grado è applicabile a tutte le equazioni della forma

$$x^{4n} - ax^{3n} - bx^{2n} - cx^{n} - d = 0;$$

poichè fattovi $x^n = y$; la proposta si cangia in $y^4 - ay^3 - by^2 - cy - d = 0$ equazione del quarto grado simile a quella da noi risoluta al (472). Trovati i quattro valori di y si avranno pure quelli di x, poichè essendo $x^n = y$, si ha anche $x = \sqrt[n]{y}$.

CAPITOLO XII.

Dei divisori commensurabili, e del modo di trovare le radici per approssimazione delle equazioni numeriche.

480. Le equazioni di grado superiore al quarto non si possono generalmente risolvere: vi sono però dei metodi, mediante i quali si giunge con facilità a scoprire le radici razionali o commensurabili, che possono essere contenute in queste equazioni, conosciute le quali, mediante la divisione si abbasseranno di tanti gradi le date equazioni, quante sono le radici razionali trovate, di modo che molte volte si giungerà a ridurle al quarto grado ed anche a minor grado, e quindi si potranno avere tutte le altre radici.

Parlando delle equazioni del 3.° e del 4.° grado abbiamo fatto osservare (458, 474) che l'ultimo termine di una equazione qualunque risulta dal prodotto di tutte le sue radici, per il che nessun numero può essere radice commensurabile di una equazione, se non è divisore esatto dell' ultimo termine. Per avere quindi i divisori commensurabili, che potessero essere contenuti in una data equazione, si potrebbero sostituire tanto in più, che in meno tutti i divisori dell' ultimo termine in luogo dell' incognita nella proposta equazione, e quelli i quali la rendessero soddisfatta sarebbero vere radici della proposta equazione: ma siccome questa operazione sarebbe di sovente lunghissima, e particolarmente quando l' ultimo termine avesse molti divisori, così si rende necessario l' avere qualche regola, che insegni subito a rigettare i divisori inutili per ritenere solamente quelli che possono soddisfare alla proposta equazione.

481. A questo oggetto sia proposta l' equazione $E=0$, la quale abbia una data radice intera e razionale a. Un suo fattor lineare sarà $x-a$; supponendo Q il quoto ottenuto dal dividere la proposta per $x-a$, l' equazione data si potrà rappresentare per $(x-a)Q=0$, ed il numero a si troverà fra i divisori del suo ultimo termine. Ora se in questa ultima equazione in luogo di x si porrà $y+1$, per cui sarà $y=x-1$, si otterrà la trasformata $(y-a+1)Q'=0$, la quale avrà le sue radici eguali a quelle della proposta diminuite dell' unità. Se la proposta aveva per radice la quantità a; la trasformata avrà per radice $a-1$, e l' ultimo suo termine sarà divisibile per $a-1$. Quest' ultimo termine poi non è altro che la proposta, nella quale siasi cangiata x in 1, come è facile l' assicurarsene mediante tale sostituzione.

Nell' equazione $E=0$ in luogo di x si ponga $y'-1$, onde $y'=x+1$, e la proposta diverrà $(y'-a-1)Q''=0$. Uno dei divisori dell' ultimo termine di questa equazione sarà $a+1$, essendo a una radice dell' equazione data, e questo ultimo termine si ottiene cangiando, nella proposta $E=0$, x in -1. Da quanto si è detto si rileva, che se a è una radice dell' equazione proposta $E=0$, la trasformata in y ossia in $x-1$ avrà per radice $a-1$, e la trasformata in y', ossia in $x+1$ avrà per radice $a+1$; o ciò che è lo stesso l' ultimo termine di ciascuna equazione in $x-1$, in x, ed in $x+1$ deve essere rispettivamente divisibile per $a-1$, per a, per $a+1$; donde si ricava la seguente regola.

Si faccia nel primo membro della proposta equazione successivamente $x=1$, $x=0$, $x=-1$, e si otterranno tre quantità che nomineremo D, D', D'', la prima delle quali non è che l' ultimo termine, ossia la quantità tutta nota della trasformata in $x-1$, la seconda è l' ultimo termine della proposta, e la terza è l' ultimo termine della trasformata in $x+1$; ciò posto si trovino i divisori di questi tre numeri, e si dispongano in tre linee orizzontali: fra i divisori di D' non si ritengano che quelli, che si trovano nello stesso tempo in D diminuiti dell' unità, ed in D'' accresciuti dell' unità, o viceversa; tutti gli altri divisori di D' si rigettino come inutili; i numeri ritrovati nel primo di questi confronti possono essere radic razionali positive, e gli altri, radici razionali negative della proposta equazione $E=0$; quelli poi tra i divisori, che saranno dotati di questa proprietà, e che sostituiti nell' equazione proposta vi soddisfaranno, saranno altrettante radici commensurabili della medesima: se poi nessuno di questi valori rendesse soddisfatta la proposta equazione, sarebbe segno manifesto che l' equazione data è mancante di radici razionali. Questo elegantissimo metodo è dovuto a Newton.

Facciamo alcuni esempj.

482. *Esempio* I. Sia proposta l' equazione del terzo grado $x^3-5x^2-18x+72=0$, di cui si vogliano le radici razionali, che in essa fossero contenute. Fatto nella medesima $x=1$, si ha $D=1-5-18+72=50$; fattovi $x=0$, si ha $D'=72$, e finalmente postovi $x=-1$, viene $D''=-1-5+18+72=84$, onde si ha

$$\left.\begin{array}{l} D=50 \\ D'=72 \\ D''=84 \end{array}\right\}\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 5,\ 10,\ 25,\ 50. \\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 12,\ 18,\ 24,\ 36,\ 72. \\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 12,\ 14,\ 21,\ 28,\ 42,\ 84. \end{array}$$

Prendendo ora in esame i divisori di D', secondo quello che è stato detto al numero antecedente, rigetto l'unità, perchè in D non vi è zero, ritengo 2 perchè in D vi è 1, ed in D'' si trova il 3, ritengo del pari 3, perchè in D vi è il 2, ed in D'' vi è il 4, così ritengo il 6 per una simil ragione, e rigetto tutti gli altri. Prendendo poi i divisori di D' negativamente li rigetto tutti eccetto il -4, perchè egli è il solo, il quale diminuito di 1, per cui diviene -5, sia divisore di D, ed accresciuto di 1, per il che diventa -3, sia divisore di D''. Sostituendo ora separatamente ciascuno di questi quattro valori nella proposta equazione, essa si trova soddisfatta dal 3, dal 6, e dal -4, onde questi numeri sono le radici ricercate, per cui essa può essere rappresentata dal prodotto dei tre fattori lineari $x-3$, $x-6$, ed $x+4$; onde

$$x^3-5x^2-18x+72=(x-3)(x-6)(x+4);$$

come facilmente si potrebbe verificare, mediante la moltiplicazione dei fattori medesimi.

483. *Esempio* II. Sia $x^3-10x^2+31x-30=0$, di cui si vogliano le radici razionali.

Fatto in questa equazione $x=1$, indi $x=0$, e finalmente $x=-1$, si ha $D=-8$, $D'=-30$, e $D''=-72$, onde

$$\left.\begin{array}{l} D=-8 \\ D'=-30 \\ D''=-72 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1,\ 2,\ 4,\ 8. \\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15,\ 30. \\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 12,\ 18,\ 24,\ 36,\ 72. \end{array}$$

Fra i divisori di D' presi positivamente sono il 2, il 3, ed il 5 quelli che si possono ritenere, e fra i negativi il solo -3. Sostituiti ad uno ad uno questi quattro divisori trovo che la proposta è soddisfatta dai primi tre, per cui conchiudo che il 2, il 3, ed il 5 sono le radici razionali ricercate; e siccome essa per essere di 3.° grado non può avere che tre sole radici, così risulterà dal prodotto dei tre fattori lineari $x-2$, $x-3$, $x-5$, per lo che sarà

$$x^3-10x^2+31x-30=(x-2)(x-3)(x-5).$$

484. *Esempio* III. Si vogliono le radici razionali dell'equazione del 5.° grado

$$x^5-6x^4+9x^3+12x^2-52x+48=0.$$

A tale oggetto pongo successivamente $x=1$, $x=0$, $x=-1$, ed ottengo $D=12$, $D'=48$, $D''=96$: i di cui divisori sono i seguenti

$$\left.\begin{array}{l} D=12 \\ D'=48 \\ D''=96 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12. \\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 16,\ 24,\ 48. \\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 16,\ 24,\ 32,\ 48,\ 96. \end{array}$$

Ora fra i divisori di D' ritengo il 2, perchè in D vi è 1, ed in D'' vi è il 3, così ritengo 3, perchè in D vi è 2, ed in D'' si trova 4, rigetto tutti gli altri, perchè non soddisfanno alle condizioni necessarie (481). Prendendo i divisori negativamente ritengo il -2, ed il -3, perchè in D si trova -3, e -4, ed in D'' si incontra -1, -2; rigetto tutti gli altri, perchè non hanno le necessarie qualità. Di questi quattro divisori i primi tre sono radici razionali della proposta, perchè mediante la sostituzione dei medesimi essa è soddisfatta, ciò che non accade rispetto al -3.

Dividendo ora l'equazione proposta per l'equazione

$$x^3-3x^2-4x-12=0,$$

risultante dal prodotto dei tre fattori lineari $x-2$, $x-3$, ed $x+2$, che si sono trovati, si ottiene l'equazione del 2.° grado $x^2-3x+4=0$, che risoluta dà $x=\frac{3\pm\sqrt{-7}}{2}$; questi due valori di x sono immaginarj, e sono le altre due radici della proposta equazione del 5.° grado. Saremmo giunti alla medesima equazione del 2.° grado abbassando di un grado alla volta l'equazione proposta, mediante le successive divisioni per ciascuno dei tre fattori lineari trovati. Simile raggionamento si fa per qualunque equazione di qualsivoglia grado.

485. *Osservazione* I. Se una proposta equazione, mediante la sostituzione di $x=1$, oppure di $x=-1$ si annullasse, sarebbe in allora segno che 1, ovvero -1 è radice della proposta, onde tolta tale radice mediante la divisione per $x-1$, oppure per $x+1$, si opererebbe da capo sulla equazione di quoto nel modo spiegato, per avere le altre radici razionali, che potessero esservi comprese.

486. *Osservazione* II. Ponendo mente alla formazione delle equazioni, mediante lo sviluppo dei rispettivi fattori lineari, che le compongono, molte volte si potranno risparmiare degli inutili tentativi, che si fanno per trovare le radici com-

mensurabili delle equazioni. In fatti, 1.° quando i termini di una data equazione sono alternativamente positivi e negativi, o viceversa, essa avrà tutte le sue radici positive, per cui sarà inutile il tentare i divisori negativi. Ai (462, 478) si è veduto verificarsi questa verità per le equazioni del 3.°, e del 4.° grado.

2.° Quando i termini di una data equazione sono tutti positivi, tutte le radici della proposta saranno negative, per lo che sarà inutile il tentare i divisori positivi.

3.° Nelle equazioni prive del secondo termine la somma delle radici positive eguaglia quella delle radici negative (456).

4.° Vi sono in una equazione tante radici reali positive, quante sono le variazioni dei segni, e tante radici reali negative quante sono le permanenze. Dicesi esservi una *variazione* di segni, quando i due termini consecutivi hanno segni diversi, una *permanenza* quando essi hanno lo stesso segno: così nell' equazione

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$$

vi sono tre variazioni ed una permanenza, e quindi vi potranno essere tre radici reali positive, ed una sola negativa.

Onde dimostrare questa verità prendiamo l' equazione del terzo grado

$$x^3 + (c - a - b)\,x^2 + (ab - ac - bc)\,x + abc = 0,$$

la quale ha due radici positive a, e b, ed una negativa $-c$. Può succedere che sia $c > a + b$, ovvero $c < a + b$; nel primo caso il secondo termine è positivo, ed il terzo è negativo, perchè essendo $c > a + b$ sarà anche moltiplicando dall' una e dall' altra parte per $a + b$, $ac + bc > (a + b)^2$ ed a più forte ragione $ac + bc > ab$, e siccome l' ultimo termine è positivo, si vede che dal primo al secondo vi è una permanenza di segni, che dal secondo al terzo vi è una variazione, che dal terzo al quarto vi è ancora una variazione, di modo che in tutto vi sono due variazioni ed una permanenza di segni, cioè tante variazioni quante sono le radici positive, e tante permanenze quante sono le radici negative: nel secondo caso, supponendo cioè $c < a + b$, il secondo termine dell' equazione è negativo, ed il terzo può essere positivo o negativo, se questo termine sarà positivo, vi sarà dal primo al secondo termine una variazione di segni, dal secondo al terzo ancora una variazione, e dal terzo al

quarto una permanenza, ciò che fa in tutto due variazioni ed una permanenza; se il terzo termine è negativo, vi sarà una variazione di segni dal primo al secondo, una permanenza dal secondo al terzo, ed una variazione dal terzo al quarto, ciò che fa ancora due variazioni ed una permanenza. Il numero delle variazioni dei segni è adunque in questo caso, come nel primo, lo stesso che quello delle radici positive, ed il numero delle permanenze, lo stesso che quello delle radici negative. Questo ragionamento, che si può estendere alle equazioni tutte, e di qualunque grado, è dovuto a Cartesio.

487. Da quanto si è detto si rileva a prima vista quante sieno le radici positive e quante le negative di una data equazione qualunque, la quale non contenga che delle radici reali; ho detto delle radici reali, poichè l' esistenza delle radici immaginarie rende inesatti i criterj sopra esposti.

488. *Osservazione* I. Se l' equazione proposta fosse incompleta bisognerebbe prima completarla col supplire ai termini mancanti con zeri preceduti dal segno $\pm$, senza di che non vi si potrebbero applicare i ragionamenti superiormente fatti.

489. *Osservazione* II. L' equazione $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$ del (486), la quale contiene tre variazioni, ed una permanenza di segni, risoluta somministra anche tre radici positive che sono $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, ed una negativa che è $x = -1$, perchè in essa non vi sono radici immaginarie; non succede lo stesso rapporto all' equazione $x^2 + 2x + 5 = 0$, perchè le sue radici sono immaginarie.

Della risoluzione delle equazioni numeriche per approssimazione.

490. In mancanza di radici esatte, bisogna accontentarsi determinarne i valori per approssimazione, cioè con mezzi, uali fanno avvicinare sempre più al vero valore delle rae sino a che l' errore per la somma sua piccolezza possa re considerato come nullo. Fra i diversi metodi che sono proposti a questo fine noi faremo un breve cenno di lo di Newton, nel quale si suppone che di già si conosca umero, il quale sia prossimo alla radice, e dal quale si ono poi dei valori sempre più prossimi.

Procureremo di far conoscere questo metodo prima sopra un esempio facile, per indi passare ad altri più complicati.

491. *Esempio.* Si vuole per approssimazione la radice dell' equazione $x^2 = 20$.

Si vede subito che x deve essere maggiore di 4 e minore di 5: si faccia adunque $x = 4 + p$, in cui p esprima una vera frazione; fatto il quadrato di questa espressione, si avrà $x^2 = 16 + 8p + p^2$, e trascurando p^2, quantità piccola per essere il quadrato di una frazione, si avrà approssimatamente $x^2 = 16 + 8p$, ossia $20 = 16 + 8p$, donde si ricava

$p = \frac{1}{2}$: onde $x = 4 + \frac{1}{2} = 4,5$, valore molto più prossimo a $\sqrt{20}$, che 4. Per avvicinarsi vieppiù al vero valore di $\sqrt{20}$, si faccia $x = 4,5 + p'$, in cui p' significa una frazione assai più piccola della prima, e si avrà per determinare p' l' equazione $x^2 = 20,25 + 9p' + p'^2$, ossia trascurando p'^2, e ponendo nell' equazione in luogo di x^2 il suo valore 20, sarà $20 = 20,25 + 9p'$, dalla quale si ricava

$p' = -\frac{0,25}{9} = -0,0278$ prossimamente. Continuando a ragionare nella medesima maniera, ci avvicineremo sempre più al vero valore di x, ossia dalla radice dell' equazione proposta, a segno di differire da essa di una quantità minore di ogni data quantità.

Onde generalizzare quanto abbiamo esposto, supponiamo che l' equazione proposta sia $x^2 = a$, e si sappia essere $x > n$, e $< n + 1$; si faccia perciò $x = n + p$, e si avrà per determinare p l' equazione $a = n^2 + 2np + p^2$, ossia trascurando p^2, giacchè trattasi di approssimazione, $a = n^2 + 2np$, onde $p = \frac{a - n^2}{2n}$, ed $x = n + \frac{a - n^2}{2n} = \frac{n^2 + a}{2n}$. Per avvicinarsi vieppiù al vero valore di $\sqrt{a}$, si faccia $x = \frac{n^2 + a}{2n} + p'$; sostituendo questo valore di x nella proposta equazione, e trascurando p'^2, si avrà l' equazione che ci darà il valore di p', il quale aggiunto al di già trovato

valore di x, darà una radice più prossima della prima: da questa radice poi, operando nella stessa guisa, potremo ricavarne un' altra più prossima ancora, e così di seguito; di modo che avremo in tale maniera i seguenti valori di x, i quali anderanno di mano in mano sempre più approssimandosi al giusto valore della radice dell' equazione proposta

$$x = n$$
$$x = n + p$$
$$x = n + p + p'$$
$$x = n + p + p' + p''$$
$$x = n + p + p' + p'' + p'''$$
ecc. ecc.

Egli è facile poi vedere, che anche senza fare queste successive sostituzioni, si può avere a dirittura p', mettendo $n + p$ in vece di n nel valore di p, per lo che si avrà $p' = \frac{a - (n+p)^2}{2(n+p)}$; per avere p'' basta sostituire $n + p + p'$ nel valore di p, e sarà $p'' = \frac{a - (n+p+p')^2}{2(n+p+p')}$, e così di seguito. Questa osservazione abbrevia moltissimo il metodo, anzi senza determinare i valori di p', di p'', ecc. se faremo $n' = \frac{n^2 + a}{2n}$, la terza approssimazione sarà

$x = n + p + p' = \frac{n'^2 + a}{2n'}$, e facendo $n'' = \frac{n'^2 + a}{2n'}$, si avrà per quarta approssimazione

$x = n + p + p' + p'' = \frac{n''^2 + a}{2n''}$; e così delle altre, ecc.

492. *Esempio.* Sia proposta l' equazione $x^2 = 2$, di cui si voglia una radice per approssimazione.

Supposto $n = 1$, si avrà $x = n + p = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$: fatto $n' = \frac{3}{2}$, sarà $x = n + p + p' = \frac{n'^2 + a}{2n'} =$

$$\frac{\frac{9}{4}+2}{2\times\frac{3}{2}} = \frac{9+8}{4\,.\,3} = \frac{17}{12}.$$ Fatto $n'' = \frac{17}{12}$, sarà

$$x = n + p + p' + p'' = \frac{n''^2 + a}{2n''} = \frac{\left(\frac{17}{12}\right)^2 + 2}{2\times\frac{17}{12}} =$$

$$\frac{\frac{289+288}{144}}{\frac{17}{6}} = \frac{577}{408}.$$ Quest' ultimo valore è tanto prossimo al vero valore di x, o di $\sqrt{2}$, che il suo quadrato $\frac{332929}{166464}$ non differisce dal 2 che della piccolissima quantità $\frac{1}{166464}$, di cui lo sorpassa.

493. Il metodo sopra descritto s' impiega collo stesso successo onde trovare per approssimazione le radici di qualunque equazione. Prendiamo per

Esempio I. L' equazione generale del 3.° grado $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, e supponiamo che la quantità n sia un valore prossimo di una delle sue radici. Facciamo, secondo quanto si è detto, $x = n + p$, e siccome p, per supposizione, deve essere una quantità piccola, giacchè è la differenza tra la vera radice ed il valore n, così potremo trascurare le potenze di p superiori alla prima, ed avremo in tal maniera $x^2 = n^2 + 2np$; $x^3 = n^3 + 3n^2p$; fatte queste sostituzioni nell' equazione proposta, avremo

$$n^3 + 3n^2p + an^2 + 2anp + bn + bp + c = 0,$$

e quindi $p = -\frac{n^3 + an^2 + bn + c}{3n^2 + 2an + b}$. Onde

$$x = n - \frac{n^3 + an^2 + bn + c}{3n^2 + 2an + b} = \frac{2n^3 + an^2 - c}{3n^2 + 2an + b}.$$

Collo stesso ragionamento che abbiamo fatto al (491) si dimostrerà, che si potrà avere una radice di questa anche più prossima, cioè $x = n + p + p'$, se dopo di aver rappresentato per n' il ritrovato valore di x, si prenderà

$$x = \frac{2n'^3 + an'^2 - c}{3n'^2 + 2an' + b}.$$ Similmente eguagliato questo valore di x ad n'', ci approssimeremo maggiormente alla vera radice ponendo $x = \frac{2n''^3 + an''^2 - c}{3n''^2 + 2an'' + b}$, e così di seguito.

494. *Esemp.* II. Sia l'equazione $x^3 + 2x^2 + 3x - 50 = 0$, di cui si voglia una radice per approssimazione. Paragonandola coll' equazione generale del numero precedente, sarà

$a = 2$, $b = 3$, $c = -50$, e per conseguenza

$$x = \frac{2n^3 + 2n^2 + 50}{3n^2 + 4n + 3}.$$ Ponendo ora in luogo di n il 3, che è un valore prossimo di x, sarà

$$x = \frac{2\,.\,27 + 2\,.\,9 + 50}{3\,.\,9 + 4\,.\,3 + 3} = \frac{122}{42} = \frac{61}{21}.$$

Sostituendo poi nel valore di x, in vece di n, $\frac{61}{21}$, si avrebbe una maggiore approssimazione, e così di seguito.

495. *Esempio* III. Per avere una radice approssimata dell' equazione $x^3 - 2x - 5 = 0$, si paragoni questa coll' equazione generale del (493), e sarà $a = 0$, $b = -2$, $c = -5$, per lo che fatte le opportune sostituzioni, si avrà $x = \frac{2n^3 + 5}{3n^2 - 2}$. Ponendo, nel valore di x, 2 al luogo di n, per essere questo numero prossimo alla radice proposta sarà $x = \frac{21}{10} = 2,1$. Mettendo ora per n il trovato valore di $x = 2,1$, si avrà, fatte le opportune riduzioni, $x = 2,09456$;

se in luogo di n si ponesse 2,09456 nel valore di x, si avrebbe una approssimazione ancora maggiore, e così di seguito.

496. Per le equazioni superiori al quarto grado daremo il seguente

Esempio. Sia proposta l' equazione del 5.° grado $x^5 - 6x - 10 = 0$, di cui si voglia una radice per approssimazione. Si vede facilmente, che 1 è troppo piccolo, e 2 è troppo grande per essere radice della proposta; prendasi per ciò $x = n + p$, e mediante un ragionamento analogo a quello del (491), si avrà $x^5 = n^5 + 5n^4 p$, e per conseguenza $n^5 + 5n^4 p = 6n + 6p + 10$, donde si ricava $p = \frac{6n + 10 - n^5}{5n^4 - 6}$, ed $x = \frac{4n^5 + 10}{5n^4 - 6}$, si faccia quindi $n = 2$, e sarà $x = \frac{4 \cdot 32 + 10}{5 \cdot 16 - 6} = \frac{69}{37}$, valore che poco si scosta dal vero. Se adesso al luogo di n nel valore di x si sostituisse $\frac{69}{37}$, si avrebbe un valore ancora più approssimato della radice x.

497. Onde determinare poi un valore di n, dal quale incominciare le approssimazioni, si suole trasformare prima la proposta in un' altra, le di cui radici eguaglino quelle della medesima diminuite di una data quantità k; Prendendo, per un esempio, l' equazione del 3.° grado $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, i coefficienti della quale possono essere positivi o negativi, si ponga in essa $x = y + k$, per cui sarà $y = x - k$, e si avrà la trasformata

$$y^3 + (a + 3k)y^2 + (b + 2ak + 3k^2)y$$

$+ c + bk + ak^2 + k^3 = 0$. Facendo poi in essa

$A = a + 3k$

$B = b + 2ak + 3k^2$

$C = c + bk + ak^2 + k^3$, sarà

$$y^3 + Ay^2 + By + C = 0.$$

Si prenda ora per k un numero, il quale renda le quantità A, B, e C tutte positive, per cui la trasformata in y avrà

in allora tutte le sue radici negative (478): ciò posto indicando con $-r$ una delle radici della trasformata, avremo $y = -r$, per cui sarà $x = k - r$; onde ne conchiuderemo che k sarà un numero maggiore della massima radice positiva della proposta, giacchè qualunque valore di x, cioè di $k - r$ è sempre minore di k. Egli è appunto dalla quantità k, che si deve incominciare; per avere di mano in mano i valori più approssimati delle radici delle proposte equazioni.

498. Per fare un esempio abbiasi l' equazione $x^3 - 7x + 7 = 0$, la quale paragonata colla equazione generale del numero precedente dà $a = 0$, $b = -7$, $c = 7$, per cui $A = 3k$, $B = -7 + 3k^2$, $C = 7 - 7k + k^3$, donde si vede facilmente che il minimo valore di k, il quale renda le quantità A, B, e C tutte positive, è il 2. Per trovare adunque una radice prossima della proposta equazione, incominceremo a supporre $n = 2$, ed avremo per prima approssimazione $x = \frac{9}{5} = 1 + \frac{4}{5}$; per seconda approssimazione

$$x = \frac{583}{340} = 1 + \frac{243}{340}, \text{ ecc.}$$

E' da osservarsi che se l' equazione proposta avesse tutti i segni positivi allora le di lei radici sarebbero tutte negative, per lo che ponendovi $-x$ in luogo di x essa si trasformerebbe in un' altra, nella quale le radici sarebbero tutte positive. In questa nuova equazione poi si cercherebbe il valore di k, e quindi una radice prossima della medesima, la quale, col segno cangiato sarebbe la radice negativa della proposta.

Non mi trattengo ulteriormente nella teorica delle equazioni, essendo essa destinata a formar parte dell' introduzione all' Analisi Sublime: quel poco che ho detto basterà, io spero, per invogliare i principianti ad approfondirsi in questo importantissimo ramo d' Analisi.

CAPITOLO XIII.

Dei Logaritmi.

499. Se alla quantità costante b intera e maggiore dell' unità si darà un esponente variabile x, si avranno altrettanti valori y, quanti saranno i valori dati ad x, e questi saranno maggiori dell' unità per tutti i valori positivi di x, e minori dell' unità per tutti i valori negativi di x (83, 84): viceversa, ad ogni valore di y dovrà corrispondere un valore di x tale, che sia sempre $b^x = y$. Gli esponenti che successivamente si danno alla quantità costante b si chiamano i *logaritmi* delle quantità, che di mano in mano si ottengono; mentre la quantità b dicesi la *base* di questi logaritmi: di modo che x sarà generalmente il logaritmo di y. Per denotare i logaritmi si adopera la lettera L., o la sillaba *log.*, onde sarà $x = \mathrm{L}.y$, oppure $x = log.y$.

I logaritmi dei numeri che si sono ottenuti mediante la stessa base, formano un *sistema* di logaritmi, e siccome può la base variare all' infinito, così infiniti possono essere i sistemi logaritmici; onde si vede facilmente che uno stesso numero può avere diversi logaritmi appartenenti però a diversi sistemi logaritmici: in qualunque sistema però il logaritmo dell' unità è sempre $=0$, e quello della base $=1$. Di fatto elevando qualsivoglia quantità b a zero, si ottiene sempre l' unità (85), e dando a qualunque quantità l' esponente 1 si ha costantemente la quantità medesima (199).

500. Abbiansi ora le seguenti due equazioni, cioè

$$1.^a \quad b^m = a$$

$$2.^a \quad b^n = c,$$

secondo la convenzione fatta, sarà

$$m = log.a\,;\ n = log.c.$$

Moltiplicando ora le due equazioni 1.ª e 2.ª l'una per l'altra si avrà $b^{m+n} = ac$, e per la già citata convenzione, sarà $m + n = log.ac$; ponendo in quest' equazione i valori di m e di n, si otterrà finalmente

$$3.^a \quad log.ac = log.a + log.c.$$

Se c fosse $= df$, si avrebbe, sostituendo opportunamente in quest' equazione in luogo di c il suo valore,

$$log.adf = log.a + log.df = log.a + log.d + log.f.$$

Da ciò si raccoglie, che *il logaritmo di un prodotto è eguale alla somma dei logaritmi dei fattori, che lo compongono.*

Si divida ora la 1.ª per la 2.ª equazione, e sarà $b^{m-n} = \frac{a}{c}$, e per la convenzione fatta, sarà $m - n = log.\frac{a}{c}$, ponendo poi in quest' equazione per m, e per n i rispettivi loro valori, sarà

$$4.^a \quad log.\frac{a}{c} = log.a - log.c\,;$$

cioè *il logaritmo di un quoto è eguale al logaritmo del dividendo meno il logaritmo del divisore, o ciò che è lo stesso il logaritmo di una frazione eguaglia* *il logaritmo del numeratore meno il logaritmo del denominatore.*

Si innalzi una delle due date equazioni alla potenza p, ed operando sulla 1.ª, sarà $b^{mp}=a^p$; onde $mp=log.a^p$, e mettendo per m il suo valore, sarà

$$5.^a \quad log.a^p = p\,log.a.$$

Donde si scorge *che il logaritmo di una quantità elevata ad una potenza qualunque è eguale al logaritmo della sua radice moltiplicato pel grado della sua potenza.*

Si estragga finalmente dalla 1.ª la radice p^{esima}, supponendo sempre p, ed m numeri interi e positivi, e sarà $\sqrt[p]{b^m}=\sqrt[p]{a}$, ossia $b^{\frac{m}{p}}=\sqrt[p]{a}$, per cui $\frac{m}{p}=log.\sqrt[p]{a}$, e mettendo per m il suo valore, sarà

$$6.^a \quad log.\sqrt[p]{a}=\frac{log.a}{p}.$$

Donde si ricava, che *il logaritmo di una quantità radicale è eguale al logaritmo della quantità sotto il radicale diviso pel grado della radice, a cui è sottoposta.*

501. Supponiamo la base $b=10$. Dando a questa base diversi esponenti tanto positivi, che negativi, si avranno i seguenti valori:

$$10^0=1$$

$$10^1=10 \qquad 10^{-1}=\frac{1}{10}$$

$$10^2=100 \qquad 100^{-2}=\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100}$$

$$10^3=1000 \qquad 10^{-3}=\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1000}$$

$$10^4=10000 \qquad 10^{-4}=\frac{1}{10^4}=\frac{1}{10000}.$$

Disponiamo i numeri superiormente trovati in una fila orizzontale, ed in un' altra fila pure orizzontale i logaritmi ad essi corrispondenti; per cui sarà

$$N.^i \quad \frac{1}{10000},\ \frac{1}{1000},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{10},\ 1,\ 10,\ 100,\ 1000,\ 10000$$

$$L.^i \quad -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Di qui si rileva, che nella base 10, come succede in qualunque altra base maggiore dell' unità i logaritmi negativi appartengono a quantità positive e minori dell' unità, ed i positivi appartengono a quantità pure positive, ma maggiori dell' unità, onde si può conchiudere 1.° *che i numeri maggiori dell' unità avranno per logaritmi dei numeri positivi, e quelli minori dell' unità avranno per logaritmi dei numeri negativi.* 2.° *Che i logaritmi delle quantità negative saranno immaginarj, non potendo essi essere nè quantità positive, nè quantità negative.*

502. Le proprietà dei logaritmi da noi generalmente dimostrate al (500), possono di già verificarsi sulle precedenti serie. Di fatto sommando, per esempio, i logaritmi di 10 e di 1000, che sono 1 e 3, si vede che la loro somma 4 corrisponde nella serie superiore a 10000, numero che eguaglia appunto il prodotto dei due numeri 10 e 1000.

Sottraendo il logaritmo di 100 che è 2 dal logaritmo di 10000 che è 4, si ha il 2 che corrisponde nella serie superiore a 100, quoto dei due numeri 10000 e 100 proposti.

Moltiplicando il logaritmo di 100 che è 2 per 2, si ha 4, numero che nella serie superiore corrisponde a 10000, il quale è appunto il quadrato di 100.

Dividendo finalmente il logaritmo di 10000, che è 4, per 2, si ottiene 2, il quale corrisponde a 100, che è la radice quadrata del numero proposto.

Se si potessero quindi avere di tutti i numeri i rispettivi logaritmi, i calcoli aritmetici verrebbero a semplificarsi in modo singolare, mentre le moltiplicazioni si cangerebbero in somme di logaritmi, le divisioni in sottrazioni di logaritmi, gl' innalzamenti a potenze, in moltiplicazioni di logaritmi, e le estrazioni delle radici, in divisioni di logaritmi.

503. Dalle cose precedenti si rileva, che nessun numero ha logaritmo razionale, eccettuati quelli, che sono potenze perfette della base b. Se il numero a non è potenza della base b, non avrà logaritmo razionale, ma non lo avrà neppure irrazionale, poichè chiamato p questo logaritmo irrazionale, sarebbe $b^p = a$, ciò che non è possibile, se i numeri b ed a sono razionali, essendo che una quantità razionale b elevata ad una potenza irrazionale non può che produrre un numero irrazionale; non potendosi adunque i logaritmi in generale esprimere nè razionalmente nè irrazionalmente si sono posti con ragione fra le quantità trascendenti.

504. Attesa l' utilità dei logaritmi nei calcoli aritmetici, con indicibile fatica i Signori Brigg, ed Ulacq si sono presi la cura di esprimerne i valori per approssimazione, formando delle tavole di logaritmi per la base 10.

Vediamo ora come per approssimazione si possa trovare il logaritmo di un numero compreso tra l' una e l' altra successiva potenza della base. Vo-

gliasi, per esempio, il logaritmo di 2 nella base 10. Trovandosi il 2 compreso fra 1 e 10, il suo logaritmo deve essere $>$ di 0, che è il logaritmo di 1, e $<$ di 1, che è il logaritmo di 10, egli sarà adunque una vera frazione: nominando questo logaritmo colla lettera x, di modo che sia $log. 2 = x$, dovrà il valore di x essere tale da dare $10^x = 2$. Egli è facile il vedere che x deve essere minore di $\frac{1}{2}$, o ciò che è lo stesso che $10^{\frac{1}{2}} > 2$. Poichè facendo i quadrati di queste quantità si ha da una parte 10 e dall' altra 4; la prima delle quali è molto maggiore della seconda. Del pari $\frac{1}{3}$ è troppo grande per essere il valore di x, mentre $10^{\frac{1}{3}} > 2$, essendo che il cubo di $10^{\frac{1}{3}}$ è 10, e quello di 2 è solamente 8. Preso $\frac{1}{4}$, si vede che questo valore è troppo piccolo per x, perchè $10^{\frac{1}{4}} < 2$; infatti la quarta potenza di $10^{\frac{1}{4}}$ è 10, e quella di 2 è 16. Si osserva però che x, o il logaritmo di 2 è compreso tra $\frac{1}{3}$ ed $\frac{1}{4}$, ed è $< \frac{1}{3}$ e $> \frac{1}{4}$, o ciò che è lo stesso, riducendo queste frazioni allo stesso denominatore, $\frac{4}{12} > log. 2 > \frac{3}{12}$. Si potranno adesso provare le frazioni comprese fra $\frac{4}{12}$ e $\frac{3}{12}$ per vedere quali sono le maggiori e le minori di *log.* 2. Si tenti primieramente il $\frac{2}{7}$, frazione compresa fra $\frac{1}{3}$ ed $\frac{1}{4}$, ossia fra $\frac{4}{12}$ e $\frac{3}{12}$. Perchè $\frac{2}{7}$ potesse essere il vero logaritmo di 2, bisognerebbe che $10^{\frac{2}{7}}$ fosse eguale a 2, o ciò che è lo stesso bisognerebbe che la settima potenza di $10^{\frac{2}{7}}$, ossia 100, fosse eguale a 2^7; ma questa è 128, dunque $\frac{2}{7}$ non è abbastanza grande per essere il logaritmo di 2. Si prenda ora la frazione $\frac{3}{10}$ compresa fra $\frac{2}{7}$ ed $\frac{1}{3}$, ed operando in un modo analogo a quello da noi sino ad ora seguito, si troverà, facendo le rispettive decime potenze, da una parte 1000, e dall' altra 1024; dunque anche $\frac{3}{10}$ è troppo piccolo per essere il logaritmo di 2, ma si approssima più di tutte le altre frazioni, essendo la differenza delle due decime potenze assai piccola. Il logaritmo di 2 è quindi compreso fra $\frac{3}{10}$ ed $\frac{1}{3}$, ossia tra $\frac{9}{30}$ e $\frac{10}{30}$, ed è $>$ della prima di queste frazioni,

e $<$ della seconda: prendendo ora una frazione compresa fra $\frac{9}{30}$ e $\frac{10}{30}$, e continuando sempre a ragionare nello stesso modo, anderemo sempre più ristringendo i limiti, tra i quali si trova il valore di x, di modo che si potrà giungere ad una differenza fra i due limiti minore di qualunque data quantità, ed il valore di x si confonderà coi limiti stessi, per lo che si potrà prendere uno di essi pel logaritmo di 2. Il valore prossimo di x in questa maniera trovato, ridotto in decimali è 0,301030, di modo che si può conchiudere essere assai prossimamente $10^{0,301030} = 2$.

505. Lo stesso si dica dei logaritmi degli altri numeri che non sono potenze di 10. Qui però è da osservare, che per formare le tavole di un sistema di logaritmi non è necessario di trovarli tutti con questo modo cotanto laborioso, basta trovare in tal maniera i logaritmi dei numeri primi per dedurre da essi i logaritmi di tutti gli altri numeri, mediante la giusta applicazione dei teoremi dimostrati (500).

Così trovato $log.\,2 = x$, si avrà $log.\,20 = log.\,10 \,.\, 2 = log.\,10 + log.\,2 = 1 + x$; $log.\,200 = log.\,100 \,.\, 2 = log.\,100 + log.\,2 = 2 + x$; $log.\,2000 = log.\,1000 \,.\, 2 = log.\,1000 + log.\,2 = 3 + x$ (500. 3.ª); $log.\,4 = log.\,2^2 = 2\,log.\,2 = 2x$; $log.\,8 = log.\,2^3 = 3\,.\,log.\,2 = 3x$; $log.\,64 = log.\,2^6 = 6\,.\,log.\,2 = 6x$ (500. 5.ª); $log.\,40 = log.\,10\,.\,4 = log.\,10 + log.\,4 = 1 + 2x$; $log.\,400 = log.\,100\,.\,4 = log.\,100 + log.\,4 = 2 + 2x$; $log.\,4000 = log.\,1000\,.\,4 = log.\,1000 + log.\,4 =$

$3 + 2x$; $\log. 80 = \log. 10 . 8 = \log. 10 + \log. 8 =$
$1 + 3x$; $\log. 800 = \log. 100 . 8 = \log. 100 + \log. 8 =$
$2 + 3x$; $\log. 8000 = \log. 1000 . 8 = \log. 1000 + \log. 8 =$

$$3 + 3x;\quad \log. 50 = \log. \frac{100}{2} = \log. 100 - \log. 2 =$$

$$2 - x;\quad \log. 250 = \log. \frac{1000}{4} = \log. 1000 - \log. 4 =$$

$$3 - 2x;\quad \log. 25 = \log. \frac{100}{4} = \log. 100 - \log. 4 =$$

$$2 - 2x;\quad \log. 5 = \log. \frac{10}{2} = \log. 10 - \log. 2 = 1 - x$$

(500. 4.ª).

Esaminando questi risultamenti si vede, che il logaritmo appartenente ad un numero, che sia dieci volte più grande di un altro è maggiore del logaritmo di questo secondo numero di una unità: il logaritmo di un numero 100 volte più grande di un altro ha due unità di più, quello di un numero 1000 volte più grande ne ha tre, e così di seguito; di modo che si può conchiudere, che l'aggiungere ad un logaritmo appartenente ad un dato numero, o sottrarre da esso un certo numero di unità, è lo stesso che moltiplicare o dividere il numero corrispondente, tante volte per dieci, quante sono le unità aggiunte o sottratte dal suo logaritmo.

Operando in questo modo si possono trovare i logaritmi di tutti i numeri. Egli è facile poi di vedere, come i logaritmi dei numeri compresi fra 1 e 10 sieno espressi da vere frazioni, i logaritmi compresi tra 10 e 100 sieno espressi da una unità più una frazione, quelli dei numeri compresi tra 100 e 1000 da due unità più una frazione, quelli

dei numeri compresi tra 1000 e 10000 da tre unità più una frazione, e così di seguito. La parte frazionaria che si suole ridurre in decimali, si chiama la *mantissa* del logaritmo, mentre il numero intero si nomina la *caratteristica* del logaritmo. Da quello che si è detto si vede facilmente *che il logaritmo di un numero qualunque ha tante unità nella sua caratteristica, quante cifre vi sono nel dato numero meno una.* Quando adunque sarà dato un numero, si conoscerà quante unità dovrà avere il suo logaritmo, e dato un logaritmo, si saprà di quante cifre sarà composto il numero a cui questo logaritmo appartiene.

Brigg ed Ulacq sono stati i primi, che hanno formate le tavole dei logaritmi ordinarj, scegliendo la base decupla, perchè serve di fondamento alla ordinaria nostra numerazione. Le grandi tavole di Ulacq si estendono dall' unità sino al 102000, con dieci cifre decimali. Quelle di Gardiner giungono allo stesso numero, quelle di Calet arrivano sino 108000, quelle di Lalande al 10000, altre al 20000, ecc.

In tutte queste tavole vi sono scritti progressivamente in colonne verticali i numeri naturali, lateralmente a ciascuno de' quali vi è posto il rispettivo logaritmo.

Dopo le osservazioni, che abbiamo fatte è facile di supplire alla caratteristica di un numero qualunque, quando essa non siavi nelle tavole, come per esempio in quelle di Gardiner.

506. I logaritmi che hanno per base il 10 si chiamano logaritmi *ordinarj*, o logaritmi *tavolari*; i logaritmi *naturali* hanno per base 2,71828183; questi logaritmi sono quelli che per i primi furono dal sommo genio del Barone Nepero Scozzese

scoperti nel 1614. Essi si chiamano anche *iperbolici*, perchè col mezzo loro si esprime la quadratura degli spazj dell' iperbola equilatera riferita agli assintoti.

507. Dai logaritmi calcolati per un sistema si possono facilmente dedurre i logaritmi per qualunque altro sistema. Sia la base di un sistema $=b$, e dell' altro sistema $=a$, ed il logaritmo di un numero qualunque n sia nel primo sistema $=p$, e nel secondo $=q$, sarà $b^p=n$, $a^q=n$, per lo che $b^p=a^q$, e per conseguenza, estraendo la radice *quesima* da ambi i membri di quest' ultima equazione, si ha $b^{\frac{p}{q}}=a$. Prendendo ora i logaritmi pel sistema di base b, sarà $\frac{p}{q}.\,log.\,b=log.\,a$, o veramente a motivo di $log.\,b=1$ (499), sarà $\frac{p}{q}=log.\,a$, da cui $q=\frac{p}{log.\,a}=p\times\frac{1}{log.\,a}$: quindi ne viene, che conoscendo il logaritmo p di un numero qualunque n pel sistema di base b, si avrà il logaritmo q dello stesso numero pel sistema di base a; moltiplicando p per una frazione, che abbia per numeratore l' unità e per denominatore il logaritmo della base a preso nel sistema di base b, e viceversa: così dai logaritmi calcolati per la base $b=10$ si potranno dedurre quelli calcolati per la base $a=2,71828183$, ossia dai logaritmi tavolari si potrà passare agli iperbolici, moltiplicandoli per

$$\frac{1}{0,43429448\ldots}=2,302585o9\ldots,\ \text{ovvero}=2,3025851,$$

volendogli dare un valore approssimato e finito

con sette sole cifre decimali, essendo appunto $0,43429448\ldots$, ossia $0,4342945$ il logaritmo della base a preso nel sistema di base b. Volendo poi dai logaritmi naturali, o di base a passare ai logaritmi tavolari, o di base b, si moltiplicheranno

essi per $\frac{1}{2,302585o9\ldots}=0,43429448\ldots\ldots$ prossimamente $=0,4342945$; poichè $2,3025851$ è il logaritmo della base b nel sistema di base a; di modo che indicando colla sillaba *log.* il logaritmo di base b, e colla lettera L. quello di base a, si avranno le seguenti due equazioni

$$1.^a\ L.\,n=log.\,n\ (2,3025851)$$

$$2.^a\ log.\,n=L.\,n\ (0,4342945),$$

colla prima delle quali si trova il logaritmo iperbolico col mezzo del tavolare, e colla seconda si trova il logaritmo tavolare col mezzo dell' iperbolico. Così essendo il logaritmo di 2 nel sistema tavolare $=0,301030$, nel sistema iperbolico sarà $L.\,2=0,301030\times2,3025851=0,6931472$. Nel sistema iperbolico essendo $L.\,5=1,6094379$, nel sistema tavolare sarà

$$log.\,5=1,6094379\times0,4342945=0,698970.$$

508. Alle volte si ha bisogno di avere i logaritmi di certi numeri che non sono compresi nelle tavole: come sono quelli che eccedono l' estensione delle tavole medesime, i numeri composti di interi e di frazioni, ed i numeri puramente frazionarj. Indicheremo ciò che bisogna fare nei diversi casi, e per maggior facilità ragioneremo su degli esempj.

509. *Esempio* I. Supponendo di avere tra le mani le tavole di Lalande, le quali non giungono

che al 10000, sia proposto di trovare il logaritmo del numero 587657, il quale eccede l' estensione di queste tavole. Dal proposto numero si separino a destra tante cifre, sino a che la parte che rimane a sinistra sia compresa nelle tavole, così in questo caso si taglino le ultime due, per lo che si avrà 5876,57, numero che è 100 volte minore del proposto: ciò fatto, si prenda la differenza dei logaritmi dei due numeri 5876, e 5877, che è 0,00008; al logaritmo del numero 5876, che si trova essere 3,76908, si aggiunga 0,00004 quantità risultante dal prodotto della differenza 0,57 fra i due numeri 5876,57, e 5876 per 0,00008, e si avrà prossimamente 3,76912 pel logaritmo di 5876,57; aggiungendo poi due unità alla caratteristica di questo logaritmo (505), si avrà 5,76912 pel logaritmo del numero 587657 stato proposto.

A suo luogo si darà la dimostrazione di questa regola, come di quella del (513).

510. Sia il numero $12 + \frac{2}{3}$, composto di un intero e di una frazione, di cui si voglia il logaritmo. Riducendo primieramente anche la parte intera a frazione dello stesso denominatore, che ha la parte frazionaria, sarà $12 + \frac{2}{3} = \frac{38}{3}$. Osservando indi essere $log.\ 38 = 1,57978$, e sottraendo da esso il . . . . $log.\ 3 = 0,47712$, si avrà per residuo . . . . $1,10266$, che è appunto il logaritmo del numero proposto.

511. *Esemp.* III. Abbiasi un numero puramente frazionario, e sia per esempio, $\frac{3}{8}$, di cui si voglia il logaritmo. Dal logaritmo di $3 = 0,47712$ (500) si sottragga il logaritmo di . . . $8 = 0,90309$, e si avrà . . . . $log.\ \frac{3}{8} = -0,42597$, quantità negativa, come di fatto doveva essere (501).

512. Se si volesse il logaritmo di un numero accompagnato da decimali, o puramente decimale, si farebbe astrazione dalle cifre decimali, e si troverebbe il logaritmo del numero proposto come se fosse un numero intero, dal logaritmo così trovato, si leverebbero poi tante unità di caratteristica, quante fossero le cifre decimali appartenenti al proposto numero: così per trovare il logaritmo di 3,589, si cerca sulle tavole il logaritmo di 3589, che è 3,55497, e da esso si levano tre unità di caratteristica, per lo che rimane 0,55497 pel logaritmo del numero proposto 3,589. Così pure per avere il logaritmo della frazione decimale 0,53, trovato il logaritmo di 53, che è 1,72428 vi levo due unità di caratteristica, ed ho pel logaritmo di 0,53 la quantità negativa $-0,27572$.

513. Dato un logaritmo che non sia sulle tavole, determinare il numero ad esso corrispondente.

Supponendo in primo luogo che la caratteristica del logaritmo del numero, che si cerca sia sulle tavole, se il logaritmo non differisce che di una unità decimale dell' ultimo ordine, questa differenza si deve considerare come nulla, perchè l' ultima cifra dei logaritmi nelle tavole non è esatta, che ad una mezza unità all' incirca di quell' ordine, cosicchè il numero, che corrisponde al logaritmo delle tavole il più prossimo al dato logaritmo potrà essere considerato come quello, al quale appartiene il logaritmo proposto.

Supponendo poi che un logaritmo differisca di più parti decimali da un logaritmo preso nelle tavole, come sarebbe per esempio, il logaritmo 3,76912, e che si tratti di determinare il numero, al quale egli appartenga: cercando sulle tavole si trova, che questo logaritmo cade fra i logaritmi dei due numeri consecutivi 5876, e 5877. Per lo che si conchiude, essere il 5876, il numero intero formante la parte principale del numero cercato, per avere poi la parte frazionaria, che bisogna aggiungere a questo numero intero, si prenda la differenza dei logaritmi dei due numeri 5876, e 5877, la quale è 0,00008; si trovi quindi la differenza tra il logaritmo proposto 3,76912, ed il logaritmo del numero 5876, che è 0,0000456, questa differenza si divida per la prima, e si avrà

$$\frac{0{,}0000456}{0{,}0000800}=\frac{456}{800}=0{,}57$$ frazione, che aggiunta al numero 5876, darà 5876,57 numero corrispondente al proposto logaritmo 3,76912.

514. Se il logaritmo di cui si volesse il numero corrispondente, non avesse che una sola unità nella di lui caratteristica, come sarebbe 1,56749, in allora si cercherebbe questo logaritmo nelle tavole con tre unità di caratteristica, a cui prossimamente si troverebbe corrispondere il 3694, in questo caso si avrebbe a dirittura il numero cercato espresso prossimamente sino alle centesime parti dell' unità, separando dal trovato numero le ultime due cifre (505); il numero corrispondente al proposto logaritmo sarà adunque 36 94. Volendo ottenere con maggior esattezza il numero corrispon-

dente al dato logaritmo bisognerà servirsi della regola da noi data al numero precedente.

Se il logaritmo fosse privo di caratteristica, come 0,56749, in allora bisognerebbe cercare il numero corrispondente al dato logaritmo ma aumentato di tre unità di caratteristica; separando indi dal medesimo tre cifre decimali, si avrebbe per numero corrispondente al logaritmo dato 3,694, prossimamente espresso sino alle millesime parti.

Se poi il logaritmo, di cui si cercasse il numero corrispondente eccedesse l' estensione delle tavole, si incomincerebbe a diminuire la sua caratteristica sino a ridurlo nei limiti delle tavole; trovato indi il numero corrispondente al nuovo logaritmo, si trasporterebbe verso la destra la divisione decimale di tante figure quante sono le unità di caratteristica soppresse: così, per esempio, avendo trovato che al logaritmo 3,71224 corrisponde il numero 5155,136, si conchiuderà che ai logaritmi seguenti corrisponderanno i numeri, che rispettivamente vi si vedono posti al fianco

4,71224	51551,36
5,71224	515513,6
6,71224	5155136
ecc.	ecc.

Finalmente se si avrà un logaritmo negativo come sarebbe — 1,20412, cercato il numero al quale corrisponde questo logaritmo preso positivamente, e trovato essere il 16, se ne conchiuderà essere $\frac{1}{16}$ il numero corrispondente al proposto logaritmo, poichè (83) $10^{-1,20412}=\frac{1}{10^{1,20412}}=\frac{1}{16}$.

Dietro quanto abbiamo detto possiamo conchiudere, che dato un numero qualunque si potrà sempre avere il suo logaritmo, e viceversa dato un logaritmo qualunque si potrà sempre assegnare il numero ad esso corrispondente.

Uso delle tavole logaritmiche per i calcoli numerici.

515. Incominciando dalla moltiplicazione, si vede che due numeri si moltiplicheranno tra di loro, cercando nelle tavole i rispettivi loro logaritmi, e sommandoli insieme: la somma trovata sarà il logaritmo del prodotto cercato (500, 3.ª), di modo che prendendo nelle tavole il numero a cui corrisponde il nuovo logaritmo, questo sarà il prodotto dei due numeri proposti.

516. *Esempio.* Per moltiplicare 258 per 38, si operi nel modo seguente.

Trovato il *log.* di 258 = ... 2,41162
Quello di 38 = ... 1,57978

La di cui somma è = ... 3,99140;

cercando nelle tavole, si trova al logaritmo 3,99140 corrispondere il numero 9804, che è appunto il prodotto dei due numeri proposti 258 e 38.

517. Per dividere un numero per un altro si cercano nelle tavole i logaritmi del dividendo e del divisore, dal primo logaritmo si leva il secondo, ed il residuo, che si ottiene è il logaritmo del quoto (500, 4.ª), dal quale, mediante le tavole, si ha facilmente il numero cercato.

518. *Esempio.* Abbiasi da dividere 8525 per 25.

Trovato il logaritmo di 8525 = 3,93069
Quello di 25 .... = 1,39794

La differenza di questi logaritmi è = 2,53275

a cui corrisponde il numero 341, che è appunto il quoto ricercato dei due numeri proposti.

519. Per elevare ad una potenza qualunque un dato numero, si moltiplicherà il logaritmo del proposto numero per l'esponente della potenza, che si vuol formare. Il numero corrispondente al nuovo logaritmo in questa maniera trovato, sarà il numero ricercato (500. 5.ª).

520. *Esempio* I. Sia proposto da elevare il 15 al quadrato; trovato il suo logaritmo = 1,17609, si moltiplichi per 2, onde si avrà 2,35218. Cercando sulle tavole il numero corrispondente a questo logaritmo, si trova essere il 225, che è appunto il quadrato di 15.

521. *Esempio* II. Per innalzare il 15 al cubo, bisogna moltiplicare per 3 il suo logaritmo 1,17609, per cui si ha 3,52827, logaritmo che corrisponde al numero 3375, che è il cubo del numero proposto.

522. Per elevare al quadrato la frazione decimale 0,5 bisogna moltiplicare il logaritmo di 5, cioè 0,69897 per 2, e dal prodotto 1,39794 detrarre 2 unità di caratteristica, poichè il quadrato di 5 è 100 volte maggiore del quadrato di 0,5; ciò fatto si avrà $\log. (0,5)^2 = -0,60206$. Passando poi dai logaritmi ai numeri sarà $(0,5)^2 = \frac{1}{4} = 0,25$.

Per avere il logaritmo della stessa quantità elevata al cubo, bisogna moltiplicare il logaritmo di

5 per 3, indi detrarre dal prodotto ottenuto tre unità di caratteristica.

Trovato così il logaritmo di $(0,5)^3$, si ha subito anche il cubo del numero medesimo.

Il logaritmo di $(0,5)^4$ si avrebbe moltiplicando il logaritmo di 5 per 4, levando indi dal prodotto quattro unità di caratteristica; e così di seguito.

Se la frazione decimale da elevarsi a potenza fosse composta di due cifre, come sarebbe 0,25, si avrebbe il logaritmo del suo quadrato moltiplicando il logaritmo di 25 per 2, e levando poscia da questo prodotto quattro unità di caratteristica, essendo che il quadrato di 25 è 10000 volte maggiore del quadrato di 0,25. Il logaritmo del suo cubo si otterrebbe moltiplicando il logaritmo di 25 per 3, e levando dal prodotto 6 unità di caratteristica, così dicasi della quarta, della quinta, e delle altre potenze.

Il logaritmo del quadrato di una frazione decimale avente 3 cifre decimali, si ottiene moltiplicando il logaritmo del numero, che esprime questa frazione per 2, e levando dal prodotto 6 unità di caratteristica. Il logaritmo del suo cubo si otterrebbe moltiplicando il logaritmo del numero proposto per 3, e levando 9 unità di caratteristica, e così di seguito. Di modo che si può stabilire, *che per trovare il logaritmo di una potenza qualunque di una qualsivoglia frazione decimale, bisogna trovare il logaritmo del numero, che esprime la frazione decimale, moltiplicarlo per l' esponente della potenza, e dal prodotto che ne risulta, levare tante unità di caratteristica, quante ne esprime il prodotto del numero delle cifre decimali per l' esponente della potenza a cui si vuole elevare il decimale.*

523. Per estrarre la radice da un numero qualunque; trovato il logaritmo del numero proposto, si divida pel grado della radice, il logaritmo in questa maniera ottenuto, sarà il logaritmo della radice cercata (500. 6.ª), mediante il quale si determina la radice richiesta.

524. *Esempio* I. Per avere la radice quadrata di 625, divido 2,79588, logaritmo di 625, per 2, ed ottengo per quoto 1,39794. Cercando sulle tavole, si trova che quest' ultimo logaritmo corrisponde al 25, per lo che si conchiude essere $\sqrt{625} = 25$.

525. *Esempio* II. Per avere la radice cubica di 1728 divido 3,23754 logaritmo del numero proposto per 3, ed ho 1,07918, logaritmo corrispondente al numero 12: onde la radice cubica di 1728 è 12.

526. *Esempio* III. La radice quarta di 81, si trova dividendo primieramente il suo logaritmo 1,90849 per 4, onde si ha 0,47712, indi cercando sulle tavole il numero corrispondente a quest' ultimo logaritmo, che si trova essere il 3; per lo che $\sqrt[4]{81} = 3$. Si ragioni in un modo analogo per le radici di qualsivoglia altro grado.

527. Mediante i premessi principj si giunge a calcolare agevolmente qualunque espressione numerica per quanto complicata essa sia.

528. *Esempio* I. Sia primieramente proposto da determinare il valore dell' espressione $x = \frac{60 \times 5}{25}$.

Secondo quello che abbiamo detto (500. 3.ª 4.ª); si avrà

$$log.\, x = log.\, \frac{60 \times 5}{25} = log.\, 60 + log.\, 5 - log.\, 25.$$

Ora *log.* 60 è 1,77815
log. 5 è 0,69897

La loro somma è 2,47712
log. 25 è 1,39794

Il logaritmo di x sarà .... 1,07918.

Cercando ora nelle tavole il numero corrispondente a questo logaritmo, si trova essere il 12; onde

$$x = \frac{60 \times 5}{25} = 12.$$

529. *Esempio* II. Sia proposto da determinare mediante i logaritmi il valore di x nella seguente espressione

$$x = \frac{54\sqrt[3]{(58)^2} \times 35\sqrt{254}}{30\sqrt[4]{(528)^3} \times 7\sqrt[3]{(54)^2}}.$$

Prendendo i logaritmi, si avrà

$$log.\, x = log.\, \frac{54\sqrt[3]{(58)^2} \times 35\sqrt{254}}{30\sqrt[4]{(528)^3} \times 7\sqrt[3]{(54)^2}} =$$

$$log.\, 54 + \frac{2}{3}\, log.\, 58 + log.\, 35 + \frac{1}{2}\, log.\, 254$$

$$- log.\, 30 - \frac{3}{4}\, log.\, 528 - log.\, 7 - \frac{2}{3}\, log.\, 54.$$

Ora *log.* 54	= 1,73239
$\frac{2}{3}$ *log.* 58	= 1,17562
log. 35	= 1,54407
$\frac{1}{2}$ *log.* 254	= 1,20241
Somma dei logaritmi positivi	5,65449
log. 30	= 1,47712
$\frac{3}{4}$ *log.* 528	= 2,04196
log. 7	= 0,84510
$\frac{2}{3}$ *log.* 54	= 1,15492
Somma dei logaritmi negativi	5,51910.

Sottraendo poi 5,51910 da 5,65449, si ottiene 0,13539, logaritmo che corrisponde prossimamente al numero 1,366, per cui si ha

$$x = \frac{54\sqrt[3]{(58)^2} \times 35\sqrt{254}}{30\sqrt[4]{(528)^3} \times 7\sqrt[3]{(54)^2}} = 1,366.$$

530. Si possono evitare i logaritmi negativi nel calcolo delle frazioni coll' aumentare il logaritmo del numeratore della frazione data di un certo numero di unità di caratteristica: questo numero è arbitrario e dipende dal grado di precisione che si vuole mettere nel calcolo; deve essere però grande abbastanza da potervi levare il logaritmo del denominatore; fatta questa sottrazione, si avrà il logaritmo di un numero, il quale sarà eguale al prodotto della frazione proposta moltiplicata per 10,

per 100, per 1000, ecc., secondo il numero delle unità aggiunte alla caratteristica del numeratore (505). Giunti al risultamento del calcolo, si faranno in esso le convenienti modificazioni. Così per la frazione $\frac{3}{8}$ si cercherà il logaritmo del suo numeratore 3, il quale è 0,47712, e si aumenterà la sua caratteristica, per esempio, di 3 unità, onde si avrà 3,47712, da questo logaritmo si sottrarrà 0,90309, che è il logaritmo di 8, il residuo 2,57403 sarà il logaritmo del prodotto della frazione $\frac{3}{8}$ per 1000. Ciò posto, se si volesse valutare la frazione $\frac{3}{8}$ in parti decimali, si cercherebbe nelle tavole il numero esatto o prossimo a cui corrisponde il logaritmo 2,57403, e si troverebbe essere il 375, e siccome egli è più grande 1000 volte di $\frac{3}{8}$, si renderà 1000 volte più piccolo, o eguale a $\frac{3}{8}$, col separare verso la destra 3 figure decimali, e così si avrà il vero valore della frazione $\frac{3}{8}$ espresso dalla frazione decimale 0,375.

531. Collo stesso metodo si possono avere con somma facilità i prodotti delle frazioni ordinarie espressi in decimali. Debbasi, per esempio, moltiplicare la frazione $\frac{5}{7}$ per $\frac{3}{4}$, per averne il pro-

dotto espresso in decimali. Alla somma dei logaritmi di 5 e di 3 espressa da 1,17609 aggiungo 4 unità di caratteristica, per cui ho 5,17609; da questo logaritmo sottraggo 1,44716, che è la somma dei logaritmi di 7 e di 4, ed ottengo per residuo 3,72893, che è il logaritmo di un numero 10000 volte maggiore del prodotto delle due frazioni proposte (505). Il numero corrispondente all' ultimo logaritmo è prossimamente il 5357, il quale diviso per 10000 dà 0,5357, frazione decimale, che sensibilmente eguaglia il prodotto delle due frazioni proposte, non arrivando l' errore nè anche ad $\frac{1}{10000}$.

532. Colla medesima facilità si estrae qualsivoglia radice per approssimazione dalle frazioni, e sino a quell' ordine di decimali, a cui si brama di giungere. Per estrarre la radice quadrata, cubica, quarta, ecc. da una frazione qualunque, si aumenta la caratteristica del logaritmo del suo numeratore di due volte, di tre volte, di quattro volte, ecc. tante unità, quante sono le cifre decimali, che si vogliono avere nella radice. Dal logaritmo del numeratore così preparato, si sottrae quello del denominatore, si prende la metà, il terzo, il quarto, ecc. del residuo, si cerca nelle tavole il numero, al quale corrisponde questo nuovo logaritmo, ed alla destra del medesimo si separano tante figure decimali, quante se ne volevano avere; il numero così risultante sarà la radice cercata.

533. Vogliasi, per esempio, la radice quadrata di $\frac{3}{8}$ espressa in millesimi. Stando a questa condizione, la radice cercata deve contenere tre figure

decimali, e per conseguenza il quadrato deve contenerne 6; bisogna adunque cangiare la frazione $\frac{3}{8}$ nella frazione $\frac{3,000000}{8}$. Ora aumentando, secondo le regole proposte, la caratteristica del logaritmo di 3, di 6 unità, e levando da questo logaritmo il logaritmo di 8, si ha il logaritmo della frazione $\frac{3}{8}$ moltiplicato per 1000000, cioè di $\frac{3000000}{8}$. La metà di questo logaritmo è quello della radice di $\frac{3}{8}$ moltiplicata per 1000; dunque separando verso la destra con una virgola 3 figure decimali dal numero a cui corrisponde questa metà, si avrà la radice prossima di $\frac{3}{8}$, la di cui differenza dalla vera radice sarà minore di $\frac{1}{1000}$. Operando in questa guisa, si trova essere prossimamente $\sqrt{\frac{3}{8}} = 0,612$.

534. Per avere la radice cubica della stessa frazione $\frac{3}{8}$ espressa in millesimi, giova osservare che secondo questa condizione, la radice cercata deve contenere tre decimali, e per conseguenza il cubo deve contenerne 9. Ciò posto si cangi la frazione $\frac{3}{8}$ in $\frac{3,000000000}{8}$, e si aumenti, secondo la nota regola, la caratteristica del logaritmo di 3, di 9 unità, si sottragga indi il logaritmo di 8, per cui si avrà il logaritmo della frazione $\frac{3000000000}{8}$.

La terza parte del logaritmo in questo modo ottenuto è il logaritmo della radice cubica di $\frac{3}{8}$ moltiplicata per 1000: e siccome a questa terza parte vi corrisponde prossimamente il numero 721, così alla radice cubica di $\frac{3}{8}$ corrisponderà la frazione decimale 0,721, di modo che sarà $\sqrt[3]{\frac{3}{8}} = 0,721$.

535. Tutte le operazioni che si sono fatte sulle frazioni ordinarie si rendono ancora più facili operando sulle frazioni decimali.

Debbasi, per esempio, moltiplicare il 36 per la frazione decimale 0,75. Sopprimendo la virgola nel moltiplicatore, egli diventerà 100 volte più grande, e per conseguenza anche il suo prodotto per 36 sarà 100 volte maggiore del vero. Ciò posto trovo che il

log. 36 è = 1,55630, quello di 75, cioè
log. 75 è = 1,87506

la somma è = 3,43136; a questo logaritmo corrisponde 2700, numero che è 100 volte più grande del vero, separando quindi da esso due cifre decimali, si trova essere $36 \times 0,75 = 27,00$.

Se tutti e due i fattori di una moltiplicazione contenessero dei decimali, bisognerebbe dopo di aver trovato il logaritmo del loro prodotto, come se i fattori non contenessero delle parti decimali, separare nel numero corrispondente a quel logaritmo tante figure decimali, quante ve ne sono nei due dati fattori.

536. Per dividere il 36 per 0,75, si trovi il logaritmo di 3600 . . . . = 3,55630, e da esso si levi il *log.* di 75 . . . . = 1,87506

il residuo 1,68124

viene ad essere per l' appunto il logaritmo del quoto ricercato. A questo logaritmo corrispondendo il numero 48, ne viene che $\frac{36}{0,75} = 48$.

537. Volendo la radice quadrata della frazione decimale 0,582, che non differisca dalla vera che di una quantità minore di $\frac{1}{10000}$, alla destra della proposta frazione decimale si scriveranno degli zeri sino a tanto che in essa si abbiano tanti decimali, quant' è il doppio delle figure decimali, che si vogliono nella radice; in questo caso si ridurrà la proposta frazione ad aver 8 figure decimali, per lo che si avrà 0,58200000. Ciò fatto, si intenderà soppressa la virgola, e si cercherà il logaritmo del numero 58200000, che si troverà essere 7,76492, la di cui metà è 3,88246. A quest' ultimo logaritmo corrisponde prossimamente il numero 7629, il quale è 10000 volte maggiore della radice del numero 0,582 proposto: separando quindi da esso quattro figure decimali, si avrà approssimatamente $\sqrt{0,582} = 0,7629$.

538. Se si volesse la radice cubica di 0,05 espressa in millesimi, si aggiungerebbero alla data frazione decimale tanti zeri, quanti ne abbisognassero, perchè essa contenesse tre volte tante figure decimali, quante ve ne dovessero essere nella radice

cubica ricercata; in questo caso bisognerà aggiungerne sette, per lo che si avrà 0,050000000. Trovato il logaritmo di 50000000, che è 7,69897, se ne prenda il terzo, e si avrà 2,56632. A questo logaritmo corrisponde il numero 368,4. Separate da questo numero altre tre figure decimali, si avrà 0,3684 per valore approssimato della radice cubica della proposta frazione decimale, di modo che sarà

$\sqrt[3]{0,05} = 0,3684$.

Dell' uso dei complementi aritmetici.

539. Vi è un metodo facile onde risparmiare anche le sottrazioni dei logaritmi, e ridurre ogni calcolo a somme di logaritmi: ciò si eseguisce col mezzo di certi numeri così detti *complementi aritmetici*.

L' eccesso del numero 10, del numero 100, 1000, ecc. sopra un dato numero, di una, di due, di tre figure, ecc., si chiama il complemento aritmetico del numero proposto. Così il complemento aritmetico di 8 sarà 2, il complemento aritmetico di 67, sarà 33, quello di 589, sarà 411, ecc.

Il complemento aritmetico di un numero qualunque si trova sottraendo dal 9 ciascuna cifra del numero proposto, fuori che l' ultima a destra, che deve essere sottratta dal 10. Se il numero proposto terminasse con dei zeri, allora converrà levare dal 10 l' ultima cifra significativa, e nel complemento aritmetico porre alla sua destra tanti zeri, quanti ne contiene il numero proposto.

Ponendo mente ai complementi aritmetici, si vede facilmente che se in vece di sottrarre da un dato logaritmo un altro logaritmo si aggiungerà ad esso il complemento aritmetico del secondo logaritmo, si verrà ad avere lo stesso logaritmo, come se effettivamente si facesse la sottrazione, ma aumentato di 10 unità nella sua caratteristica: ciò posto si potrà in luogo di sottrarre i logaritmi da una data somma di logaritmi aggiungere ad essa i loro rispettivi complementi aritmetici, purchè dalla somma finale si abbia riguardo di levare tante volte 10 unità di caratteristica, quanti sono i complementi aritmetici aggiunti.

540. *Esempio* I. Per determinare il logaritmo della frazione $\frac{75 \times 40}{5}$, si aggiungerà alla somma dei logaritmi di 75 e di 40 il complemento aritmetico del logaritmo di 5, e dalla somma risultante si leveranno 10 unità di caratteristica, eccone il calcolo.

$log.\ 75$	$= 1,87506$
$log.\ 40$	$= 1,60206$
Complemento aritmet. di $log.\ 5$	$= 9,30103$
Somma	$12,77815.$

Onde $log. \frac{75 \times 40}{5} = 2,77815$. Passando poi dai logaritmi ai numeri si trova, che quest' ultimo corrisponde a 600: onde $\frac{75 \times 40}{5} = 600$.

541. *Esempio* II. Determinare il valore di x nella seguente espressione, col mezzo dei logaritmi.

$$x = \frac{350 \sqrt[3]{(35)^2} \times \sqrt{75}}{76 \sqrt[4]{(351)^3}}.$$

Prendendone i logaritmi, si avrà

$$log.\ x = log. \frac{350 \sqrt[3]{(35)^2} \times \sqrt{75}}{76 \sqrt[4]{(351)^3}} = log.\ 350 + \frac{2}{3}\ log.\ 35$$
$$+ \frac{1}{2}\ log.\ 75 - log.\ 76 - \frac{3}{4}\ log.\ 351.$$ Ora

$log.\ 350$	$= 2,54407$
$\frac{2}{3}\ log.\ 35$	$= 1,02938$
$\frac{1}{2}\ log.\ 75$	$= 0,93753$
Comp. arit. di $log.\ 76$	$= 8,11919$
Comp. arit. di $\frac{3}{4}\ log.\ 351$	$= 8,09101$
Somma	$20,72118.$

Siccome poi in questo calcolo si sono presi due complementi aritmetici, così dalla caratteristica del logaritmo risultante si devono levare 20 unità, onde

$$log.\ x = log. \frac{350 \sqrt[3]{(35)^2} \times \sqrt{75}}{76 \sqrt[4]{(351)^3}} = 0,72118,$$

a cui corrisponde prossimamente 5,262: onde

$$x = \frac{350 \sqrt[3]{(35)^2} \times \sqrt{75}}{76 \sqrt[4]{(351)^3}} = 5,262.$$

Delle equazioni esponenziali.

542. Mediante l' uso dei logaritmi si risolvono le equazioni, che hanno l' incognita per esponente, e che si dicono per ciò *esponenziali.* Varie sono le specie di quantità esponenziali, come a^x, y^x, a^{b^x}, y^{b^x}, y^{z^x}, ecc., secondo che è variabile il solo esponente, o anche la quantità, che si eleva a potenza, o l' esponente medesimo è anch' esso una quantità esponenziale. Considerando particolarmente le due quantità esponenziali a^x ed a^{b^x}, abbiasi in primo luogo l' equazione $a^x = c$ da risolvere. Prendendo i logaritmi di ambi i membri di questa equazione, si avrà $x\, log.\, a = log.\, c$, da cui si ricava $x = \frac{log.\, c}{log.\, a}$. Sia, per esempio, $a = 2$, $c = 8$, e si avrà $2^x = 8$, ed $x = \frac{log.\ 8}{log.\ 2}$. Cercando il logaritmo di 8 sulle tavole, si ha $log.\ 8 = 0{,}90309$, e dividendolo per 0,30103, che è il logaritmo di 2, si avrà $x = \frac{log.\ 8}{log.\ 2} = \frac{0{,}90309}{0{,}30103} = 3$. In fatti $2^3 = 8$.

543. Sia ora proposta l' equazione esponenziale $a^{b^x} = d$ da risolvere. Presi i logaritmi, si avrà $b^x\, log.\, a = log.\, d$, e dividendo ambi i membri per $log.\, a$, sarà $b^x = \frac{log.\, d}{log.\, a}$. Prendendo di nuovo i lo-

garitmi, si avrà $x\,.\,log.\, b = log.\,\frac{log.\, d}{log.\, a}$, donde si ricava $x = \frac{log.\,\frac{log.\, d}{log.\, a}}{log.\, b}$.

Per fare un esempio, sia $a = 2$, $b = 3$, $d = 512$; fatte le opportune sostituzioni, si otterrà

$$x = \frac{log.\,\frac{log.\ 512}{log.\ 2}}{log.\ 3} = \frac{log.\,\frac{2{,}70927}{0{,}30103}}{log.\ 3} = \frac{log.\ 9}{log.\ 3} = \frac{0{,}95424}{0{,}47712} = 2.$$

Onde $x = 2$, come appunto deve essere, perchè $2^{3^2} = 2^9 = 512$.

544. In una maniera a questa analoga, si giungerebbe a trovare i valori dell' incognita nelle equazioni $a^{b^{c^x}}$, $a^{b^{c^{d^x}}}$, ecc.

Vogliasi, per esempio, il valore di x nell' equazione $2^{2^{2^x}} = 65536$. Prendendone i logaritmi, sarà $2^{2^x}\, log.\ 2 = log.\ 65536$, da cui si ricava

$$2^{2^x} = \frac{log.\ 65536}{log.\ 2} = \frac{4{,}81648}{0{,}30103} = 16.$$

Presi di nuovo i logaritmi, si avrà $2^x log.\ 2 = log.\ 16$, per cui $2^x = \frac{log.\ 16}{log.\ 2} = \frac{1{,}20412}{0{,}30103} = 4$. Prendendo i logaritmi anche di ambi i membri di questa ultima equazione, sarà finalmente $x\,log.\,2 = log.\,4$, ed $x = \frac{log.\,4}{log.\,2} = \frac{0,60206}{0,30103} = 2$. In fatti

$$2^{2^{2^{2}}} = 2^{2^{4}} = 2^{16} = 65536.$$

545. Se fosse proposta l'equazione $a^x = \frac{b^{3x-m}}{d^{2x}}$ da risolvere, prendendone i logaritmi, si avrebbe $x\,log.\,a = (3x - m)\,log.\,b - 2x\,log.\,d = 3x\,log.\,b - m\,log.\,b - 2x\,log.\,d$, per cui $(log.\,a - 3\,log.\,b + 2\,log.\,d)\,x = -m\,log.\,b$, ed

$$x = -\frac{m\,log.\,b}{log.\,a - 3\,log.\,b + 2\,log.\,d} = \frac{m\,log.\,b}{3\,log.\,b - 2\,log.\,d - log.\,a}.$$

Se si volesse il valore di x nell' equazione $Aa^x + A'a^{x+m} + A''a^{x+n} + \text{ecc.} \ldots\ldots = d$, posta essa sotto la seguente forma $a^x(A + A'a^m + A''a^n + \text{ecc.} \ldots\ldots\ldots) = d$, si avrebbe prendendone i logaritmi, $x\,log.\,a = log.\,d - log.\,(A + A'a^m + A''a^n + \text{ecc.})$, per lo che $x = \frac{log.\,d - log.\,(A + A'a^m + A''a^n + \text{ecc.})}{log.\,a}$.

Del calcolo dei logaritmi col mezzo delle serie.

546. Per far vedere come col mezzo delle serie si possa ritrovare con somma rapidità il logaritmo di un numero qualunque, oppure determinare il numero corrispondente ad un dato logaritmo, premetteremo la teorica dei coefficienti indeterminati, sulla quale deve appoggiarsi quasi tutto il nostro ragionamento.

Questo metodo, che è dovuto a Cartesio, è moltissimo usato dai Geometri per la somma sua utilità, ed è in grande estimazione per lo spirito d' invenzione, che in esso regna. Lo scopo suo si è di far conoscere le serie dei termini, che si possono dedurre da certe quantità algebriche. Per renderlo maggiormente intelligibile noi ragioneremo su degli esempj; ma prima si osservi che data l' equazione

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ecc.} = a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{ecc.}$$

ove x è una quantità variabile, ed A, a, B, b, C, c, D, d, ecc. sono quantità costanti, saranno eguali tra di loro i coefficienti delle medesime potenze di x, di modo che si avrà $A = a$, $B = b$, $C = c$, $D = d$, ecc. Infatti dovendo l' equazione data aver luogo qualunque sia il valore di x, sussisterà anche quando sarà $x = 0$. Mediante una tale sostituzione, tutti i termini dell' equazione contenenti la x si annulleranno, e rimarrà $A = a$. Tolte dall' una, e dall' altra parte le quantità eguali A, a, l' equazione proposta divisa per x diventerà $B + Cx + Dx^2 + \text{ecc.} = b + cx + dx^2 + \text{ecc.}$ ove col medesimo ragionamento si dimostrerà essere $B = b$, e così di seguito per gli altri coefficienti delle rispettive potenze di x.

547. Ciò posto suppongasi che si voglia ridurre in serie la frazione $\frac{c}{a+x}$; a tale oggetto si faccia

$$\frac{c}{a+x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{ecc.},$$

nella quale A, B, C, D, E, ecc. sieno quantità capaci di verificare questa equazione; una tale supposizione è permessa, stante che queste quantità sono per anche indeterminate, e suscettibili quindi di prendere qualunque valore esiga il calcolo. Tutta la difficoltà si riduce a determinare i valori di questi coefficienti, al qual fine si moltiplichi l' equazione proposta pel denominatore $a + x$ del primo membro, e si avrà dopo ordinati i termini

$$c = \left\{ \begin{array}{l} aA + aBx + aCx^2 + aDx^3 + aEx^4 + \text{ecc.} \\ \quad\;\; + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{ecc.} \end{array} \right.$$

Paragonando ora i coefficienti delle diverse potenze di x in ambi i membri di questa equazione, sarà (546) $c = aA$,

$aB + A = 0$, $aC + B = 0$, $aD + C = 0$, $aE + D = 0$. Dalla prima di queste equazioni si ricava $A = \frac{c}{a}$, sostituendo poi questo valore nella seconda, si ha $B = -\frac{A}{a} = -\frac{c}{a^2}$. Sostituendo del pari il valore di B nella terza equazione, si trova $C = -\frac{B}{a} = \frac{c}{a^3}$. Operando egualmente, si avrà $D = -\frac{c}{a^4}$, $E = \frac{c}{a^5}$, ecc.; di modo che fatte le opportune sostituzioni, l'equazione supposta diventerà

$$\frac{c}{a+x} = \frac{c}{a} - \frac{cx}{a^2} + \frac{cx^2}{a^3} - \frac{cx^3}{a^4} + \frac{cx^4}{a^5} - \text{ecc.},$$

ove la legge della serie è così manifesta, che si potrebbe con somma facilità avere quanti termini si vogliano.

548. Sia ora proposta la frazione

$$\frac{c^2}{c^2 + 2cx - x^2} \text{ da ridurre in serie.}$$

Supponiamo che sia

$$\frac{c^2}{c^2 + 2cx - x^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ecc.},$$

ed avremo

$$c^2 = (c^2 + 2cx - x^2)(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ecc.}),$$

ossia sviluppando, ed ordinando i termini secondo le potenze della x

$$c^2 = \left\{ \begin{array}{l} c^2A + c^2Bx + c^2Cx^2 + c^2Dx^3 + \text{ecc.} \\ \quad + 2cAx + 2cBx^2 + 2cCx^3 + \text{ecc.}, \\ \qquad\quad - Ax^2 - Bx^3 - \text{ecc.}, \end{array} \right.$$

donde conchiuderemo essere (546) $c^2 = c^2A$, ossia dividendo per c^2, $A = 1$; come pure $c^2B + 2cA = 0$, da cui $B = -\frac{2cA}{c^2} = -\frac{2}{c}$, $c^2C + 2cB - A = 0$, onde

$C = \frac{A - 2cB}{c^2} = \frac{1+4}{c^2} = \frac{5}{c^2}$. Nello stesso modo troveressimo $D = -\frac{12}{c^3}$, e così se vi fossero degli altri coefficienti indeterminati, di modo che potremo conchiudere essere

$$\frac{c^2}{c^2 + 2cx - x^2} = 1 - \frac{2x}{c} + \frac{5x^2}{c^2} - \frac{12x^3}{c^3} + \text{ecc.}$$

549. Se il numeratore della frazione da sviluppare in serie conterrà diversi termini, questi si dovranno eguagliare rispettivamente ai termini omologhi della serie già moltiplicata pel suo denominatore; così per avere la serie esprimente il valore di $\frac{1+2x}{1-x-x^2}$, si supporrà essere

$$\frac{1+2x}{1-x-x^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ecc.}, \text{ per cui}$$

$$1 + 2x = (1 - x - x^2)(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ecc.}),$$

e sviluppando

$$1 + 2x = \left\{ \begin{array}{l} A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ecc.} \\ \quad - Ax - Bx^2 - Cx^3 - \text{ecc.} \\ \qquad\quad - Ax^2 - Bx^3 - \text{ecc.}, \end{array} \right.$$

indi paragonando, si avrà $A = 1$, $B - A = 2$, quindi $B = 2 + A = 3$, $C - B - A = 0$, per lo che $C = B + A = 4$, nello stesso modo si determinerebbero anche gli altri coefficienti, che vi fossero, per cui si avrà

$$\frac{1+2x}{1-x-x^2} = 1 + 3x + 4x^2 + 7x^3 + 11x^4 + 18x^5 + \text{ecc.},$$

serie, che facilmente può essere continuata, atteso che ciascun coefficiente di x incominciando dal terzo termine è uguale alla somma dei due coefficienti, che lo precedono, ed x si trova elevata successivamente a tutte le sue potenze intere e positive. Questa serie è una di quelle, che si dicono *ricorrenti*, atteso che per formare i suoi termini si ha ricorso ai precedenti.

550. Coll' eguale facilità, colla quale abbiamo sviluppato in serie le frazioni, potremo estrarre per approssimazione dai polinomj le radici di qualsivoglia grado.

Sia, per esempio, proposta da estrarre la radice quadrata dal binomio p^2+x.

Poniamo $\sqrt{(p^2+x)}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+$ ecc., e fattone il quadrato, si avrà

$$p^2+x=\left\{\begin{array}{l}A^2+2ABx+2ACx^2+2ADx^3+\text{ecc.}\\ \qquad\qquad\;\;+\;B^2x^2+2BCx^3+\text{ecc.}\end{array}\right.$$

Onde $p^2=A^2$, cioè $A=p$, $2AB=1$, per lo che

$$B=\frac{1}{2A}=\frac{1}{2p},\quad 2AC+B^2=0,\ \text{donde si cava}$$

$$C=-\frac{B^2}{2A}=-\frac{1}{8p^3},\quad 2AD+2BC=0,\ \text{onde}$$

$$D=-\frac{BC}{A}=\frac{-\frac{1}{2p}\times-\frac{1}{8p^3}}{p}=\frac{1}{16p^5},\ \text{ecc.},$$

per cui sarà

$$\sqrt{(p^2+x)}=p+\frac{x}{2p}-\frac{x^2}{8p^3}+\frac{x^3}{16p^5}-\text{ecc.}$$ Nella medesima maniera si calcolerebbero i successivi coefficienti E, F, G, ecc., se si bramasse di avere un maggior numero di termini.

551. Dopo quanto si è detto sarà facile il risolvere il seguente

Problema I. Essendo dato un numero qualunque, trovare una serie infinita, la quale esprima il suo logaritmo.

Soluzione. Supposto $1+x$ il numero dato, si elevi alla potenza emmesima e con ciò si avrà

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^3+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}x^4+\text{ecc.}$$ (come si può rilevare ponendo nella formola del (309) x in luogo di c, ed m in vece di n); ora si faccia per brevità

$$z=mx+\frac{m(m-1)}{2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^3+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}x^4+\text{ecc.},$$

e sarà $(1+x)^m=1+z$; prendendo poi i logaritmi di ciascun membro di questa equazione, si otterrà

$$m\,log.(1+x)=log.(1+z);$$

e supposto

$$log.(1+x)=Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\text{ecc.}$$
$$log.(1+z)=Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\text{ecc.}$$

nelle quali si è ommesso il termine senza x, poichè nel caso di $x=0$, riducendosi il primo membro a $log.\,1$, il quale in ogni sistema è sempre $=0$ (499), esso pure si troverebbe $=0$; si avrà sostituendo

$$mAx+mBx^2+mCx^3+mDx^4+\text{ecc.}=$$

$Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+$ ecc., e ponendo nel secondo membro il valore di z, l'equazione diverrà

$$\begin{array}{rl}mAx+mBx^2+mCx^3+mDx^4+\text{ecc.}=mAx+\frac{m(m-1)}{2}Ax^2 & \\ +\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}Ax^3+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}Ax^4+\text{ecc.} & \\ +mBx^2 & \\ +m^2(m-1)Bx^3\qquad +\frac{m^2(m-1)(m-2)}{3}Bx^4+\text{ecc.} & \\ +m^3Cx^3\qquad +\frac{m^2(m-1)^2}{4}Bx^4+\text{ecc.} & \\ +\frac{3m^3(m-1)}{2}Cx^4+\text{ecc.} & \\ +m^4Dx^4+\text{ecc.} & \end{array}$$

Paragonando ora i termini omologhi, si avrà

$mA=mA$, ossia $A=A$.

$$mB=\frac{m(m-1)}{2}A+m^2B,$$ ossia dividendo per m

$$mB-B=-\frac{m-1}{2}A,$$ da cui si ricava

$$B=-\frac{m-1}{2(m-1)}.A=-\frac{A}{2},$$

$$mC=\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}A+m^2(m-1)B+m^3C,$$ e dividendo per m, si ha

$$C=\frac{(m-1)(m-2)}{2.3}A+m(m-1)B+m^2C,$$ cioè

$$C=-\frac{m(m-1)B+\frac{(m-1)(m-2)A}{2.3}}{m^2-1}=$$

$$-\frac{6m(m-1)B+(m-1)(m-2)A}{2.3(m+1)(m-1)}=$$

$$-\frac{6mB+A(m-2)}{2.3(m+1)}=\frac{3mA-mA+2A}{2.3(m+1)}=$$

$$\frac{2mA+2A}{2.3(m+1)}=\frac{A(m+1)}{3(m+1)}=\frac{A}{3}.$$ Si troverebbe, operando in simile modo, $D=-\frac{A}{4}$, $E=\frac{A}{5}$, e così di seguito, di modo che sostituendo nell'equazione a' coefficienti indeterminati i valori dei coefficienti medesimi da noi trovati, e raccogliendovi il fattor comune A, si avrà

$$1.^a\ L.(1+x)=A\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\text{ecc.}\right)$$

Se in luogo di x si porrà $-x$, si avrà

$$2.^a\ L.(1-x)=A\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}-\text{ecc.}\right)$$

e sottraendo questa dalla precedente serie, si otterrà

$$L.(1+x)-L.(1-x)=$$

$$3.^a\ L.\frac{1+x}{1-x}=2A\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\text{ecc.}\right).$$

Tutte queste serie per essere convergenti suppongono x non maggiore di 1; senza questa condizione esse sarebbero divergenti (178), e non farebbero pel nostro caso. Siccome poi in queste formole la quantità A rimane indeterminata: così si vede che lo stesso numero $1+x$ può avere una infinità di logaritmi diversi, potendo A prendere una infinità di valori.

Questa quantità dicesi il *modulo* del sistema dei logaritmi. Supponendo il modulo $A=1$ le tre serie, che abbiamo superiormente trovate diventeranno

$$L.(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\text{ecc.}$$

$$L.(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}-\text{ecc.}$$

$$L.\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\text{ecc.}\right),$$ e da esse si otterranno i logaritmi appartenenti al sistema Neperiano o i logaritmi naturali, quelli cioè che sono stati calcolati dietro la supposizione di $A=1$. Egli fu in questa specie di logaritmi, che si incontrò il Geometra Scozzese quantunque seguendo una strada assai diversa, come si può vedere nella sua opera (*Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*).

552. Ora è facile di vedere che qualunque sistema possibile di logaritmi può essere ridotto a quello dei logaritmi naturali, essendo in qualunque sistema il logaritmo di $1+x$ eguale al prodotto del suo logaritmo naturale per la quantità costante A. Cosicchè tutta la difficoltà del calcolo dei logaritmi si riduce a calcolare i logaritmi naturali, o iperbolici.

Per avere il logaritmo del numero n, si supponga essere $n=\frac{1+x}{1-x}$, per cui sarà $x=\frac{n-1}{n+1}$, questi valori si sostituiscano nella 3.ª serie da noi trovata, e si avrà

$$4.^a\ L.n=2A\left(\frac{n-1}{n+1}+\frac{(n-1)^3}{3(n+1)^3}+\frac{(n-1)^5}{5(n+1)^5}+\text{ecc.}\right).$$

553. Col mezzo di questa formola si può determinare il modulo A incognito di un sistema qualunque logaritmico, purchè si conosca la base del sistema stesso. Supponiamo che sia b la base di un sistema di logaritmi; fatto $n=b$ si vede facilmente essere $L.\,n = L.\,b = 1$ (499), e la serie 4.ª, mediante le opportune sostituzioni, diverrà

$$1 = 2A\left(\frac{b-1}{b+1}+\frac{(b-1)^3}{3(b+1)^3}+\frac{(b-1)^5}{5(b+1)^5}+\text{ecc.}\right),$$

donde si ricava

$$5.^a\quad A = \frac{1}{2\left(\frac{b-1}{b+1}+\frac{(b-1)^3}{3(b+1)^3}+\frac{(b-1)^5}{5(b+1)^5}+\text{ecc.}\right)},$$

formola, che dà il valore prossimo di A per mezzo di quello di b, che insegna cioè a trovare il modulo, che conviene ad un sistema di logaritmi quando è conosciuta la base del sistema medesimo. Se faremo $b=10$, avremo

$$A = \frac{1}{2\left(\frac{9}{11}+\frac{9^3}{3.11^3}+\frac{9^5}{5.11^5}+\text{ecc.}\right)} = 0{,}4342945,$$

quantità, che coincide esattamente col modulo dei logaritmi tavolari o Briggiani.

Se in luogo di A nell' equazione 4.ª si metterà il suo valore 0,4342945, si avrà una formola comoda ed espeditiva onde calcolare i logaritmi tavolari di un numero qualunque n.

554. Per avere una formola assai convergente per calcolare i logaritmi iperbolici di un numero qualunque, al primo membro dell' equazione 3.ª si aggiunga e si sottragga nello stesso tempo $L.\,b$, e si avrà

$$L.\,b - L.\,b + L.\,\frac{1+x}{1-x} = L.\,\frac{b(1+x)}{b(1-x)} = L.\,\frac{b+bx}{b-bx} =$$

$$2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\text{ecc.}\right).$$

Si faccia $bx=z$, per cui $x=\frac{z}{b}$, e si avrà

$$L.\,\frac{b+z}{b-z} = 2\left(\frac{z}{b}+\frac{z^3}{3b^3}+\frac{z^5}{5b^5}+\frac{z^7}{7b^7}+\text{ecc.}\right) =$$

$$\frac{2z}{b}\left(1+\frac{z^2}{3b^2}+\frac{z^4}{5b^4}+\frac{z^6}{7b^6}+\text{ecc.}\right).$$ Serie sempre convergente, poichè bisogna che z sia $<$ di b, acciò $\frac{b+z}{b-z}$ sia una quantità positiva. Supponiamo ora $\frac{b+z}{b-z}=\frac{n}{n-1}$ per cui $\frac{z}{b}=\frac{1}{2n-1}$, e mettendo i valori di $\frac{b+z}{b-z}$, e di $\frac{z}{b}$ nell' ultima equazione, sarà

$$L.\,\frac{n}{n-1} = L.\,n - L.\,(n-1) = \frac{2}{2n-1}\left(1+\frac{1}{3(2n-1)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5(2n-1)^4}+\frac{1}{7(2n-1)^6}+\text{ecc.}\right),$$ da cui si ha

$$6.^a\quad L.\,n = L.\,(n-1)+\frac{2}{2n-1}\left(1+\frac{1}{3(2n-1)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5(2n-1)^4}+\frac{1}{7(2n-1)^6}+\text{ecc.}\right);$$

ma allorquando si cerca il logaritmo del numero n si suppone di conoscere quello di $n-1$; si avrà dunque il logaritmo di n espresso da una serie convergentissima, particolarmente quando n sarà un numero alquanto grande; si può giudicarne pel caso il più sfavorevole, calcolando il logaritmo iperbolico di 2. Fatto adunque $n=2$, dalla serie 6.ª, si avrà

$$L.\,2 = L.\,1+\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3.3^2}+\frac{1}{5.3^4}+\frac{1}{7.3^6}+\text{ecc.}\right) =$$

$$\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{27}+\frac{1}{405}+\frac{1}{5103}+\text{ecc.}\right) = 0{,}6931472,$$

non calcolandone che sette termini. Volendo il logaritmo di 5, nell' equazione 6.ª si ponga il 5 in luogo di n, e sarà

$$\text{L. }5 = \text{L. }4 + \frac{2}{9}\left(1 + \frac{1}{3.9^2} + \frac{1}{5.9^4} + \frac{1}{7.9^6} + \text{ecc.}\right) =$$

$$2\text{ L. }2 + \frac{2}{9}\left(1 + \frac{1}{243} + \frac{1}{32805} + \frac{1}{3720087} + \text{ecc.}\right) =$$

$$2 \times 0{,}6931472 + \frac{2}{9}\left(1 + \frac{1}{243} + \frac{1}{32805}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{3720087} + \text{ecc.}\right) = 1{,}6094379.$$

Questi logaritmi moltiplicati poi per 0,4342945, ossia pel modulo appartenente ai logaritmi tavolari, si cangeranno in logaritmi tavolari. Così moltiplicando 0,6931472, che è il logaritmo iperbolico di 2 per 0,4342945, si ha per prodotto 0,301030, che è approssimatamente il logaritmo tavolare del numero 2.

555. *Problema* II. Essendo dato un logaritmo, trovare il numero ad esso corrispondente.

Soluzione. Se il logaritmo proposto appartenesse ai logaritmi ordinarj o tavolari, si incomincerebbe a ridurlo iperbolico moltiplicandolo per 2,3025851 (507), o ciò che è lo stesso dividendolo per 0,4342945, dopo di che tutta la difficoltà si ridurrebbe a trovare il numero corrispondente ad un dato logaritmo iperbolico.

Si faccia

$$(a)\quad z = \text{L. }(1+x) = A\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{ecc.}\right),$$

dove sarà $z = 0$, quando $x = 0$; e supponiamo che si abbia

$$(b)\quad x = Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{ecc.};$$ per cui si avrà

$$\begin{aligned}
x^2 &= B^2z^2 + 2BCz^3 + 2BDz^4 + \text{ecc.}\\
&\qquad\qquad\quad + C^2z^4 + \text{ecc.}\\
x^3 &= \qquad\quad + B^3z^3 + 3B^2Cz^4 + \text{ecc.}\\
x^4 &= \qquad\qquad\qquad\quad + B^4z^4 + \text{ecc.}
\end{aligned}$$

Sostituendo nell' equazione (a) per x, x^2, x^3, x^4, ecc. i rispettivi valori, e moltiplicando per A, si avrà

$$z = \left\{\begin{array}{l}
ABz + ACz^2 + ADz^3 + AEz^4 + \text{ecc.}\\
-\dfrac{AB^2z^2}{2} - ABCz^3 - ABDz^4 - \text{ecc.}\\
\qquad\qquad + \dfrac{AB^3z^3}{3} - \dfrac{AC^2z^4}{2} - \text{ecc.}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad + AB^2Cz^4 + \text{ecc.}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad - \dfrac{AB^4z^4}{4} - \text{ecc.}
\end{array}\right.$$

Paragonando ora i coefficienti delle potenze omologhe di z, si avranno le equazioni

$$AB = 1,\quad AC - \frac{AB^2}{2} = 0,\quad AD - ABC + \frac{AB^3}{3} = 0$$

$$AE - ABD - \frac{AC^2}{2} + AB^2C - \frac{AB^4}{4} = 0;$$ dalle quali si ricavano i seguenti valori

$$B = \frac{1}{A},\quad C = \frac{1}{2A^2},\quad D = \frac{1}{2.3A^3},\quad E = \frac{1}{2.3.4A^4}.$$

Ponendo questi valori in luogo delle indeterminate B, C, D, E, ecc. nell' equazione (b), e $\text{L.}(1+x)$ in vece di z, ed aggiungendo l' unità dall' una e dall' altra parte, si avrà

$$(c)\quad 1 + x = 1 + \frac{\text{L.}(1+x)}{A} + \frac{\text{L.}^2(1+x)}{2A^2} + \frac{\text{L.}^3(1+x)}{2.3A^3}$$

$$+ \frac{\text{L.}^4(1+x)}{2.3.4A^4} + \text{ecc.}$$ Se in questa serie si porrà n al luogo di $1+x$, si avrà

$$(d)\quad n = 1 + \frac{\text{L.}n}{A} + \frac{\text{L.}^2n}{2A^2} + \frac{\text{L.}^3n}{2.3A^3} + \frac{\text{L.}^4n}{2.3.4A^4} + \text{ecc.},$$

e se $A = 1$, sarà finalmente

$$n = 1 + \text{L.}n + \frac{\text{L.}^2n}{2} + \frac{\text{L.}^3n}{2.3} + \frac{\text{L.}^4n}{2.3.4} + \text{ecc.},$$ serie in ogni caso convergente, e per conseguenza propria a risolvere generalmente il problema proposto.

Per applicare questa formola alla ricerca della base dei logaritmi iperbolici, cioè per trovare qual è quel numero, il di cui logaritmo iperbolico è $=1$, si farà $L.n=1$, per cui sarà anche $L.^2 n=1$, $L.^3 n=1$, $L.^4 n=1$, ecc., onde

$$n=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\text{ecc.}=2,7182818$$

prossimamente.

556. Se nella equazione (c) metteremo in luogo di $1+x$ la quantità c^y, ed in luogo di $L.(1+x)$ metteremo $y.L.c$; avremo

$$(e)\quad c^y=1+\frac{yL.c}{A}+\frac{y^2L.^2c}{2A^2}+\frac{y^3L.^3c}{2.3A^3}+\frac{y^4L.^4c}{2.3.4A^4}+\text{ecc.}$$

formola; che dà lo sviluppo in serie della quantità esponenziale c^y.

Se c è eguale alla base a dei logaritmi, che si prendono; sarà $L.c=1$ (499), ed avremo per conseguenza

$$a^y=1+\frac{y}{A}+\frac{y^2}{2A^2}+\frac{y^3}{2.3A^3}+\frac{y^4}{2.3.4A^4}+\text{ecc.}$$

facendo poi $y=1$, sarà

$$a=1+\frac{1}{A}+\frac{1}{2A^2}+\frac{1}{2.3A^3}+\frac{1}{2.3.4A^4}+\text{ecc.}$$

Per mezzo di questa serie, dato il modulo A d' un sistema di logaritmi, si può ritrovare la corrispondente base a.

Se a è la base dei logaritmi iperbolici, che in avvenire chiameremo sempre colla lettera e, a motivo di $A=1$, si avrà

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\text{ecc.},$$ serie che coincide esattamente con quella del numero precedente, e che dà $e=2,7182818$ prossimamente. Si avrà anche, supponendo $A=1$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4}+\text{ecc.}$$ Ponendo poi in questa equazione $-x$ in luogo di x sarà

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4}-\text{ecc.}$$ Sommando queste due equazioni, si ha

$$e^x+e^{-x}=2+x^2+\frac{x^4}{3.4}+\text{ecc.},$$ ossia dividendo per 2 ambi i membri

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2.3.4}+\text{ecc.}$$

Sottraendo poi la seconda dalla prima di quelle due equazioni, e dividendo la nuova equazione per 2, sarà

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x+\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^5}{2.3.4.5}+\text{ecc.}$$

CAPITOLO XIV.

Delle proporzioni e delle progressioni in generale.

557. Il risultamento, che si ottiene confrontando due quantità della stessa specie dicesi *rapporto*, o *ragione* delle quantità medesime.

In due maniere si sogliono paragonare fra di loro due quantità; o considerando quanto una di esse superi od è superata dall' altra, o considerando quanto una delle due quantità date, contenga, o sia contenuta nell' altra. La differenza che nel primo caso ne risulta dicesi *rapporto* o *ragione aritmetica* o di *differenza*; il quoziente, che si ottiene nel secondo caso prende il nome di *rapporto* o *ragione geometrica* o di *quoziente*.

558. Quantunque i nomi di rapporto di differenza, e di quoziente sieno assai più proprj ad esprimere la natura delle operazioni che si devono fare, nulla di meno ci serviremo delle espressioni di rapporto aritmetico e geometrico, per essere tali denominazioni consacrate dall' antichità dell' uso.

559. Le due quantità che si prendono a paragonare acquistano il nome di *termini* del rapporto. Il primo termine dicesi l' *antecedente* del rapporto, ed il secondo il *conseguente*.

L' unione di due rapporti eguali chiamasi *proporzione*. Le proporzioni sono *aritmetiche* o di *equidifferenza*, oppure sono *geometriche* o di *equiquoziente*, secondo che il rapporto che si prende a considerare fra quelle quantità è aritmetico o geometrico.

Sembra che il nome di proporzioni geometriche

attribuito dagli antichi alle proporzioni ad equiquoziente sia derivato dalla applicazione, che Euclide nel quinto libro de' suoi Elementi di Geometria, fa delle proporzioni alle linee.

560. Le quattro quantità a, b, c, f, formeranno una proporzione aritmetica, se la differenza che esiste fra b ed a sarà eguale a quella che passa fra f e c. Tale proporzione si scrive nella maniera seguente $a.b:c.f$, e si legge così; a sta a b, come c sta ad f.

Le quattro quantità a, b, c, f, formeranno poi una proporzione geometrica, se il quoziente che si otterrà dividendo b per a, sarà eguale a quello, che si avrà dividendo f per c. Questa proporzione si scrive nel seguente modo $a:b::c:f$, e si pronuncia come la precedente.

561. *Osservazione.* Meglio sarebbe lo scrivere le proporzioni aritmetiche in quest' altra maniera $b-a=f-c$, mentre così si ravviserebbe immediatamente l' eguaglianza dei due rapporti. Per simile ragione le proporzioni geometriche si potrebbero scrivere così $\frac{b}{a}=\frac{f}{c}$, ovvero $a:b=c:f$; come già da alcuni si pratica. Noi però seguiremo anche in ciò la notazione generalmente adottata.

562. Di qualunque proporzione il primo e l' ultimo termine si chiamano gli *estremi*, mentre il secondo ed il terzo si dicono i *medj*.

Quando i termini medj di una proporzione sono disuguali, essa dicesi *proporzione discreta*, o semplicemente *proporzione*. Quando i termini medj sono eguali, quando cioè il conseguente del primo rapporto serve anche di antecedente al secondo rapporto, in allora la proporzione prende il nome di *proporzione continua*: così la proporzione aritmetica $a \,.\, b : b \,.\, c$ è una proporzione continua, e si suole scrivere più brevemente in questo modo $\div a \,.\, b \,.\, c$. La proporzione geometrica $a : b :: b : c$ è pure una proporzione continua, che si usa scrivere in questa maniera $\div\!\div a : b : c$. Il secondo termine di qual si voglia proporzione continua si chiama *medio proporzionale*, aggiungendovi la parola *aritmetico* o *geometrico*, secondo la qualità della proporzione.

563. Quando due ragioni geometriche si paragonano fra di loro, se l'antecedente del primo rapporto sta al suo conseguente, come l'antecedente del secondo rapporto sta al conseguente del rapporto medesimo, la proporzione dicesi *diretta*; ma se l'antecedente del primo rapporto sta al suo conseguente, come il conseguente del secondo rapporto sta al suo antecedente, in allora la proporzione prende il nome di proporzione *inversa* o *reciproca*, poichè gli ultimi due termini della medesima sono in una ragione opposta a quella dei primi.

564. Vi sono due altre specie di proporzioni una delle quali dicesi *armonica*, e l' altra *contrarmonica*.

Se quattro quantità sono tali, che geometricamente stia la prima alla quarta, come la differenza fra la prima e la seconda, sta alla differenza fra la terza e la quarta, quelle quattro quantità si dicono essere in proporzione armonica: così i quattro numeri 4, 5, 6, 8 sono in proporzione armonica, giacchè geometricamente si ha $4 : 8 :: 1 : 2$. Il nome di queste proporzioni si è desunto dall' osservare, che quattro corde, le quali in un minuto secondo fanno delle vibrazioni proporzionali ai numeri 4, 5, 6, 8 formano un' armonia, che dai Filarmonici viene distinta col nome di accordo perfetto. È piaciuto poi ai Matematici di estendere questo nome al complesso di quattro quantità qualunque aventi fra di loro la medesima relazione geometrica dei sopraccitati numeri: cosicchè i numeri 24, 16, 12, 9 costituiranno una proporzione armonica, poichè si ha geometricamente $24 : 9 :: 8 : 3$. Se poi

di quattro date quantità, la quarta starà geometricamente alla prima, come la differenza fra la prima e la seconda sta alla differenza fra la terza e la quarta, quelle quantità si dicono in proporzione contrarmonica.

Allorchè tre quantità sono tali; che la prima stia alla terza, come la differenza fra la prima e la seconda sta alla differenza fra la seconda e la terza, quelle quantità sono in proporzione *armonica continua*. In tale proporzione sono i numeri 2, 3, 6, poichè geometricamente si ha $2 : 6 :: 1 : 3$. Se poi di tre quantità date, la terza stia alla prima, come la differenza fra la prima e la seconda, sta alla differenza fra la seconda e la terza, in allora tali quantità diconsi in proporzione *contrarmonica continua*: così i numeri 3, 5, 6 sono in proporzione contrarmonica continua, perchè geometricamente sta $6 : 3 :: 2 : 1$.

565. Paragonando diverse ragioni eguali, si ottiene una serie di quantità proporzionali: così se si paragoneranno le ragioni aritmetiche eguali

$$a \,.\, b\,;\ c \,.\, f,\ g \,.\, h,\ \text{ecc.},$$

si avrà la serie di quantità aritmeticamente proporzionali $\quad a \,.\, b : c \,.\, f : g \,.\, h :$ ecc.

Dal paragone delle ragioni geometriche eguali

$$a : b,\ c : f,\ g : h,\ \text{ecc.},$$

si avrà la serie di quantità geometricamente proporzionali $\quad a : b :: c : f :: g : h ::$ ecc.

566. Una serie di quantità continuamente proporzionali, prende il nome di *progressione*. La progressione poi è *aritmetica* o *geometrica*, secondo che la ragione che in essa regna è di differenza o di quoziente.

Le quantità a, b, c, f, g, h, ecc. saranno in progressione aritmetica, se la differenza che passa fra b ed a, passerà anche fra c e b, fra f e c, ecc. Le progressioni aritmetiche si scrivono nel modo seguente $\quad \div a \,.\, b \,.\, c \,.\, f \,.\, g \,.\, h \,.$ ecc.

Le quantità a, b, c, f, g, h, ecc. saranno in progressione geometrica, se il quoziente che si otterrà dividendo b per a, sarà eguale a quello che si ha dividendo c per b, dividendo f per c, ecc. Le progressioni geometriche si scrivono nella seguente maniera $\div\div a : b : c : f : g : h$: ecc.
Le progressioni poi di qualunque siasi specie si enunciano dicendo a sta a b, come b sta a c, come c sta ad f, ecc.

567. Una serie di quantità tali, che la prima stia alla terza, come la differenza fra la prima e la seconda, sta alla differenza fra la seconda e la terza; che la seconda stia alla quarta, come la differenza fra la seconda e la terza, sta alla differenza fra la terza e la quarta, ecc, chiamasi *progressione armonica*, così le frazioni $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ecc. formano una progressione armonica.

Una serie di quantità tali che la terza stia alla prima, come la differenza fra la prima e la seconda, sta alla differenza fra la seconda e la terza; che la quarta stia alla seconda, come la differenza fra la seconda e la terza, sta alla differenza fra la terza e la quarta, e così di seguito, quella serie prende il nome di *progressione contrarmonica*.

568. Noi distingueremo due sorta di progressioni l'una *crescente* allorchè i suoi termini vanno aumentando, l'altra *decrescente* allorchè i termini vanno diminuendo.

Delle proporzioni e progressioni aritmetiche.

569. Sia a l'antecedente di un rapporto aritmetico, b il suo conseguente, d la differenza additiva o sottrattiva, che esiste fra a e b, si avrà $b = a \pm d$. Sia c l'antecedente di un altro rapporto eguale al primo, ed f il suo conseguente,

dovrà essere $f = c \pm d$. Ora dall'unione di questi due rapporti eguali risultandone una proporzione aritmetica (559), si avrà $a . b : c . f$, ossia sostituendovi per b e per f i rispettivi valori, $a . a \pm d : c . c \pm d$; donde si ricava 1.° *che qualunque conseguente di un rapporto aritmetico può essere sempre rappresentato dal suo antecedente più o meno la ragione, secondo che egli si trova essere maggiore o minore dell'antecedente stesso*, 2.° *che in una proporzione aritmetica qualunque la somma degli estremi è eguale non solo, ma anche identica colla somma dei medj*. In fatti dalla proporzione $a . a \pm d : c . c \pm d$ si ricava $a + c \pm d = a + c \pm d$. Così pure dalla proporzione $3 . 5 : 7 . 9$ si ha

$$3 + 9 = 5 + 7, \text{ cioè } 12 = 12.$$

570. Potendo da una proporzione aritmetica cavare una equazione, col fare la somma degli estremi e de' medj suoi, e mediante una equazione determinare il valore di una incognita, ne viene che, *dati tre termini, di una proporzione aritmetica, si troverà il quarto ad essi proporzionale sottraendo dalla somma dei due medj l'estremo cognito*; di modo che se di una proporzione aritmetica si avessero i primi tre termini, a, b, c, chiamato x il quarto proporzionale, si avrebbe la proporzione $a . b : c . x$, dalla quale $a + x = b + c$, ed $x = b + c - a$; se fossero poi dati i due estremi a ed f, ed il medio b, chiamato x l'altro medio, si avrebbe $a . b : x . f$, per cui $b + x = a + f$, ed $x = a + f - b$, sarebbe, cioè, *il medio incognito eguale alla somma degli estremi meno il medio conosciuto.*

Viceversa, se quattro quantità a, b, c, f sono tali, che la somma $a + f$ degli estremi sia eguale a quella dei medj $b + c$, queste quattro quantità formeranno una proporzione aritmetica.

571. Se la proporzione aritmetica sarà continua, in allora la somma degli estremi sarà doppia del medio: in fatti avendo in questo caso $a . b : b . f$, sarà anche $a + f = 2b$, per cui $b = \frac{a+f}{2}$, donde si ricava che *un medio proporzionale aritmetico è eguale alla semisomma dei due estremi.* Chiamando x il medio proporzionale aritmetico fra 5 e 11, si avrà $5 . x : x . 11$, onde $x = \frac{5 + 11}{2} = 8$: in fatti $\div 5 . 8 . 11$.

Se dati due termini di una proporzione aritmetica continua si volesse il terzo proporzionale, chiamato x, si avrebbe $a . b : b . x$, onde $x = 2b - a$; da ciò si ricava che *il terzo termine di una proporzione aritmetica continua è eguale al doppio del medio meno il primo.* Con un simile ragionamento si dimostrerebbe, *essere il primo termine di una proporzione aritmetica continua eguale al doppio del medio meno il terzo.*

572. Determinate così le principali proprietà delle proporzioni, passiamo ora ad investigare quelle delle progressioni aritmetiche. Sia perciò data la progressione

$$\div a . b . c . f . g . h . l, \text{ ecc.},$$

la quale generalmente serve ad esprimere qualunque progressione aritmetica; se d sarà la ragione additiva di questa progressione, si avrà (569)

$$\begin{aligned} b &= a + d \\ c &= b + d = a + 2d \\ f &= c + d = a + 3d \\ g &= f + d = a + 4d \\ h &= g + d = a + 5d \\ l &= h + d = a + 6d \\ &\text{ecc.} \qquad \text{ecc.} \end{aligned}$$

per lo che la proposta progressione si potrà trasformare nella seguente

$$\div a . a + d . a + 2d . a + 3d . a + 4d . a + 5d . a + 6d \text{ ecc.}$$

Considerando ora l' andamento dei termini di questa progressione, si vede facilmente, che *un termine qualunque della medesima è eguale ad un altro qualunque più la differenza additiva della progressione ripetuta tante volte, quante unità vi sono nel numero dei termini, che si trovano, incominciando a contare dall' uno inclusivamente sino all' altro esclusivamente.* In fatti, si osserva in questa progressione che il quinto termine $a + 4d$ è eguale al secondo $a + d$, aggiuntavi la differenza d ripetuta tre volte, essendo tre per l' appunto i termini compresi fra il secondo inclusivamente ed il quinto esclusivamente; lo stesso dicasi di qualunque altro termine.

573. Da ciò che si è detto si ricava, che conoscendo un termine qualunque, e la ragione di una progressione aritmetica, si potrà determinare un altro termine qualunque, purchè sia conosciuto il suo luogo, senza essere obbligati a calcolare gli altri, che lo devono precedere; così il ventesimo termine, per esempio, di una progressione aritmetica crescente sarà eguale al primo più 19 volte

la differenza o la ragione della progressione medesima. Il termine *ennesimo*, che nomineremo u sarà eguale al primo termine a più la differenza d ripetuta $n-1$ volte, di modo che si avrà l'equazione

$$1.^a \quad u = a + d(n-1).$$

Questo termine si suol chiamare il *termine generale*, perchè, mettendo in esso per n dei valori particolari, si possono ricavare tutti quei termini della progressione, che si desiderano: così, per esempio, fatto $n = 4$, si ha

$$u = a + d(n-1) = a + d(4-1) = a + 3d,$$

che è appunto il quarto termine della proposta progressione.

574. Con quattro termini di una progressione aritmetica presi di seguito o ad eguali distanze dagli estremi si può sempre formare una proporzione aritmetica: così coi quattro primi termini $a, a+d, a+2d, a+3d$ della data progressione aritmetica generale, si forma la proporzione $a.a+d:a+2d.a+3d$.

Il primo ed il terzo termine della data progressione, sono aritmeticamente proporzionali col terz'ultimo, e coll'ultimo, e supponendo, per esempio, che la progressione termini al settimo termine $a+6d$, sarà

$$a.a+2d:a+4d.a+6d.$$

575. Si vede anche che la somma di due termini di una progressione aritmetica egualmente distanti dagli estremi è costantemente eguale alla somma degli estremi stessi. In fatti nell'esempio sopra citato la somma degli estremi $2a+6d$ della data progressione eguaglia la somma del secondo e

del penultimo non solo, ma anche del terzo e del terz' ultimo, ecc. poichè $a+d+a+5d = 2a+6d$; $a+2d+a+4d = 2a+6d$, ecc.

576. Quando la progressione è composta di un numero dispari di termini, come in questo caso, il termine medio è eguale alla semisomma degli estremi: in fatti $a+3d = \frac{2a+6d}{2}$. Da qui si ricava che *la somma dei termini di una progressione aritmetica qualunque è eguale alla somma degli estremi moltiplicata per la metà del numero dei termini della data progressione.*

In fatti essendo generalmente la somma degli estremi espressa da $a+u$, chiamando u l'ultimo termine, e di queste somme essendovene in una progressione un numero eguale alla metà del numero dei termini stessi, quando la progressione è composta di un numero pari di termini, chiamato n questo numero, ed S la somma di tutti i termini della progressione, si avrà generalmente

$$2.^a \quad S = (a+u)\frac{n}{2}.$$

Se il numero dei termini fosse dispari, in allora si avrebbe, ritenute le stesse denominazioni, $\left(\frac{a+u}{2}\right)(n-1)$ per la somma di tutti i termini eccetto il termine medio, il quale si trova essere $= \frac{a+u}{2}$. Dunque la somma totale in questo caso sarà espressa da

$$S = \left(\frac{a+u}{2}\right)(n-1) + \frac{a+u}{2} =$$

$\left(\frac{a+u}{2}\right)(n-1+1) = (a+u)\frac{n}{2}$, come superiormente abbiamo trovato.

Per avere la somma dei termini della progressione numerica $\div\, 3.5.7.9.11.13.15.17$ non si deve far altro che sostituire 3 in luogo di a, 17 in luogo di u, e 8 in vece di n, per lo che sarà

$$S = (3+17)\frac{8}{2} = 20 \times 4 = 80.$$

577. I termini di una progressione aritmetica sommati a due a due, a tre a tre, e generalmente ad m ad m, danno una nuova progressione aritmetica, la di cui ragione è eguale al prodotto della ragione della data progressione pel quadrato del numero dei termini sommati: così se d è la differenza della data progressione, dm^2 sarà quella della nuova progressione, che nascerebbe sommando i termini della prima ad m ad m. In fatti, sommando a due a due i termini della progressione generale

$\div\, a.a+d.a+2d.a+3d\,.........\,a+d(n-4).$
$a+d(n-3).a+d(n-2).a+d(n-1)$,

si avrà

$2a+d,\ 2a+5d\,.....,\ 2a+2dn-7d,\ 2a+2dn-3d$,

per cui

$\div\, 2a+d.2a+5d\,...\,2a+2dn-7d.2a+2dn-3d$,

progressione, la di cui ragione è manifestamente $4d$, ossia 2^2d.

Sia ancora la stessa progressione

$\div\, a.a+d.a+2d.a+3d.a+4d.a+5d\,.....$
$a+d(n-6).a+d(n-5).a+d(n-4).$
$a+d(n-3).a+d(n-2).a+d(n-1)$,

sommandone i termini a tre a tre, si avrà

$3a+3d,\ 3a+12d\,......\,3a+3dn-15d,\ 3a+3dn-6d$,

quantità in progressione aritmetica, la di cui ragione o differenza è appunto $9d$, ossia 3^2d. Sommati i termini a quattro a quattro, si avrebbero delle quantità in progressione aritmetica, la di cui ragione sarebbe 4^2d, e così di seguito: onde per induzione si può conchiudere, che, sommati quei termini ad m ad m, ne risulteranno delle quantità in progressione aritmetica, la di cui ragione sarà espressa da m^2d.

578. Se in luogo di d si porrà $-d$, tutti i ragionamenti fatti per le progressioni crescenti varranno anche per le progressioni aritmetiche decrescenti: così se, per esempio, si volesse determinare l'ultimo termine della progressione aritmetica decrescente, il primo termine della quale fosse 17, la ragione 2, ed il numero dei termini 8, nell'equazione 1.ª posto $-d$ in luogo di d, si avrebbe $u = a - d(n-1) = 17 - 2.7 = 3$; come in fatti deve essere.

579. Dati tre dei cinque elementi, dei quali si può intendere composta una progressione aritmetica qualunque, e che sono il primo termine a, l'ultimo termine u, il numero dei termini n, la ragione d, e la somma dei termini S; mediante le due equazioni da noi determinate (573, 576)

$$1.^a\ u = a + d(n-1)$$

$$2.^a\ S = (a+u)\frac{n}{2}$$

si possono sempre trovare gli altri due.

580. 1.° Conoscendo a, u, ed n, trovare d ed S.

La 1.ª equazione ci dà $d(n-1) = u - a$, donde si ricava $d = \frac{u-a}{n-1}$. Il valore di S è di già determinato dall' equazione 2.ª.

581. La formola $d = \frac{u-a}{n-1}$ somministra il

modo di inscrivere un numero qualunque m di medj proporzionali aritmetici fra a ed u, o ciò che è lo stesso, di formare una progressione aritmetica, il primo termine della quale sia a, l'ultimo u, ed il numero de' termini $n=m+2$; per cui $d=\frac{u-a}{m+1}$.

Conosciuta in questa maniera la ragione della richiesta progressione, si determineranno (573) facilmente tutti i suoi termini, ed essa sarà

$$\div\ a\,.\,a+\frac{u-a}{m+1}\,.\,a+2\,\frac{u-a}{m+1}\,.\,a+3\,\frac{u-a}{m+1}\,.$$

$$a+4\,\frac{u-a}{m+1}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,a+\frac{(m+1)(u-a)}{m+1}$$

dove si vede che l'ultimo termine è eguale ad u. Per fare un esempio, suppongasi di voler inscrivere tra 5 e 40 sei medj proporzionali aritmetici, nel qual caso si avrà $a=5$, $u=40$, $m=6$; onde $d=\frac{40-5}{6+1}=5$, e la progressione domandata sarà

$$\div\ 5\,.\,10\,.\,15\,.\,20\,.\,25\,.\,30\,.\,35\,.\,40\,.$$

582. 2.° Conoscendo a, d, n, trovare u ed S.

L'equazione 1.ª dà a dirittura il valore di u. Sostituendo questo valore nell'equazione 2.ª, si ha

$$S=\left(a+a+d(n-1)\right)\frac{n}{2}=(2a+dn-d)\frac{n}{2}.$$

583. 3.° Conoscendo u, d, n, trovare a ed S.

L'equazione 1.ª dà $a=u-d(n-1)$. Sostituito questo valore nell'equazione 2.ª, si ha

$$S=(u-dn+d+u)\frac{n}{2}=(2u-dn+d)\frac{n}{2}.$$

584. 4.° Conoscendo a, u, d, trovare n ed S.

L'equazione 1.ª dà $n=\frac{u-a+d}{d}$. Sostituito questo valore nell'equazione 2.ª, si ha

$$S=\frac{(a+u)(u-a+d)}{2d}=\frac{u^2+du+ad-a^2}{2d}.$$

585. 5.° Conoscendo u, d, S, trovare a ed n.

Ordinato per rapporto ad a il valore di S, ottenuto al numero precedente, si ha l'equazione del secondo grado $a^2-ad-du-u^2+2dS=0$, dalla quale si ricava

$$(412)\quad a=\frac{d}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{d^2}{4}+du+u^2-2dS\right)},\ \text{ossia}$$

$a=\frac{d}{2}\pm\sqrt{\left\{\left(\frac{d}{2}+u\right)^2-2dS\right\}}$. Onde avere poi n, si ponga il valore di $a=u-dn+d$ cavato dalla 1.ª, nella 2.ª, e si avrà

$S=(2u-dn+d)\frac{n}{2}$, ossia $2S=2nu-dn^2+dn$.

Questa equazione, ordinata per rapporto ad n, diviene $n^2-\left(\frac{2u+d}{d}\right)n+\frac{2S}{d}=0$, da cui si cava $n=\frac{2u+d}{2d}\pm\sqrt{\left\{\left(\frac{2u+d}{2d}\right)^2-\frac{2S}{d}\right\}}$.

586. 6.° Conoscendo a, n, S, trovare u e d.

L'equazione 2.ª dà $u=\frac{2S-an}{n}$. Sostituendo questo valore nell'equazione 1.ª, si ha

$$d=\frac{2S-2an}{n(n-1)}.$$

587. 7.° Conoscendo u, n, S, trovare a e d. Dall' equazione 2.ª si cava $a = \frac{2S - nu}{n}$. Sostituito questo valore nell' equazione 1.ª, si ha $u = \frac{2S - nu}{n} + d(n-1)$, da cui $d = \frac{2nu - 2S}{n(n-1)}$.

588. 8.° Conoscendo a, u, S, trovare n, e d. L' equazione 2.ª dà $n = \frac{2S}{a+u}$: sostituendo poi questo valore nell' equazione 1.ª, si ha

$$d = \frac{(u+a)(u-a)}{2S-a-u} = \frac{u^2 - a^2}{2S-a-u}.$$

589. 9.° Conoscendo n, d, S, trovare u, ed a. Dall' equazione 2.ª si ha $u = \frac{2S - an}{n}$; posto questo valore in luogo di u nella 1.ª, sarà $a = \frac{2S - dn^2 + dn}{2n}$: sostituendo poi questo valore di a nella 1.ª, si troverà subito $u = \frac{2S + dn^2 - dn}{2n}$.

590. 10.° Conoscendo a, d, S, trovare n ed u. Il valore di $u = a + d(n-1)$ dato dall' equazione 1.ª, si ponga nella 2.ª, e si avrà $S = (2a + dn - d)\frac{n}{2}$, sviluppando ed ordinando secondo la lettera n, si avrà l' equazione del 2.° grado $n^2 + \left(\frac{2a-d}{d}\right)n - \frac{2S}{d} = 0$, dalla quale

$$n = \frac{d-2a}{2d} \pm \sqrt{\left\{\left(\frac{d-2a}{2d}\right)^2 + \frac{2S}{d}\right\}}.$$

Questo valore di n, posto nella 1.ª equazione, darà

$$u = -\frac{d}{2} \pm d\sqrt{\left\{\left(\frac{d-2a}{2d}\right)^2 + \frac{2S}{d}\right\}}.$$

591. Per esercizio dei principianti sarà bene il verificare tutte le formole da noi trovate applicandole ad una progressione numerica conosciuta in tutte le sue parti. A tal fine si sono riunite tutte le formole nella seguente tavola.

Date	*Si ha*	FORMOLE.
u, d, n	a	$a = u - d(n-1)$.
u, d, S		$a = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left\{\left(\frac{d}{2} + u\right)^2 - 2dS\right\}}$.
u, n, S		$a = \frac{2S - nu}{n}$.
d, n, S		$a = \frac{2S - dn^2 + dn}{2n}$.
a, d, n	u	$u = a + d(n-1)$.
a, n, S		$u = \frac{2S - an}{n}$.
d, n, S		$u = \frac{2S + dn^2 - dn}{2n}$.
a, d, S		$u = -\frac{d}{2} \pm d\sqrt{\left\{\left(\frac{d-2a}{2d}\right)^2 + \frac{2S}{d}\right\}}$.

Date	Si ha	FORMOLE.
a, u, n	d	$d = \frac{u-a}{n-1}$.
a, n, S		$d = \frac{2S - 2an}{n(n-1)}$.
u, n, S		$d = \frac{2nu - 2S}{n(n-1)}$.
a, u, S		$d = \frac{(u+a)(u-a)}{2S - a - u}$.
a, u, d	n	$n = \frac{u - a + d}{d}$.
u, d, S		$n = \frac{2u+d}{2d} \pm \sqrt{\left\{\left(\frac{2u+d}{2d}\right)^2 - \frac{2S}{d}\right\}}$.
u, a, S		$n = \frac{2S}{a+u}$.
a, d, S		$n = \frac{d-2a}{2d} \pm \sqrt{\left\{\left(\frac{d-2a}{2d}\right)^2 + \frac{2S}{d}\right\}}$.
a, u, n	S	$S = (a+u)\frac{n}{2}$.
a, d, n		$S = (2a + dn - d)\frac{n}{2}$.
u, d, n		$S = (2u - dn + d)\frac{n}{2}$.
a, u, d		$S = \frac{u^2 + du + ad - a^2}{2d}$.

592. Per verificare alcune delle formole, che si sono trovate prendasi, per esempio, la progressione numerica $\div 3.5.7.9.11.13.15.17$, la quale paragonata colla generale, da cui si sono desunte le due equazioni fondamentali

$u = a + d(n-1)$, $S = (a+u)\frac{n}{2}$, darà

$a = 3$, $u = 17$, $d = 2$, $n = 8$, $S = 80$.

Nella formola $n = \frac{d-2a}{2d} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{d-2a}{2d}\right)^2 + \frac{2S}{d}\right]}$ messi per a, d, ed S i rispettivi valori; si avrà

$n = \frac{2-6}{4} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{2-6}{4}\right)^2 + \frac{2.80}{2}\right]} = -1 \pm \sqrt{(1+80)} = -1 \pm 9$, onde $n = 8$, ed $n = -10$. Il primo di questi valori soddisfà all' equazione ed alla progressione, ed il secondo non soddisfà che all' equazione. Per verificare la formola

$$a = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{d}{2} + u\right)^2 - 2dS\right]},$$

fatte le opportune sostituzioni, si avrà $a = 1 \pm \sqrt{[(1+17)^2 - 4.80]} = 1 \pm \sqrt{(324 - 320)} = 1 \pm 2$. Onde $a = 3$, ed $a = -1$. Anche qui il primo valore di a soddisfà alla domanda, mentre il secondo soddisfà alla sola equazione. Operando in un modo a questo analogo, si potranno verificare anche tutte le altre formole contenute nella precedente tavola.

593. Applichiamo ora alla soluzione di alcuni problemi le dottrine insegnate.

Si sa dalla fisica che un corpo, il quale cade liberamente dall' alto, fatta astrazione dalla resistenza dell' aria, percorre nel primo minuto secondo di tempo uno spazio espresso prossimamente da 15 piedi parigini, nel secondo minuto secondo uno di 45 piedi, nel terzo uno di 75 piedi, e così di seguito sempre in progressione aritmetica crescente, il di cui primo termine è 15 piedi, la differenza 30 piedi, che è uno spazio doppio del primo, e che è l' effetto della *forza acceleratrice.*

594. *Problema* I. Determinare l' altezza di una torre mediante la caduta di un grave dalla torre medesima.

Suppongasi, per esempio, che una palla di piombo impieghi a cadere dalla sommità di una data torre sino a terra quattro minuti secondi. Ciò posto, si avrà $a=15$, $d=30$, $n=4$: sostituiti questi valori nella formola

$$S=(2a+dn-d)\frac{n}{2},\text{ si avrà}$$

$$S=(2.15+30.4-30)\frac{4}{2}=240$$ piedi per l' altezza della torre.

595. Se, date le medesime cose, si volesse sapere lo spazio percorso nel quarto minuto secondo, messi questi valori nell' equazione $u=a+d(n-1)$, si avrebbe $u=15+30.3=105$ piedi.

596. Se si domandasse quanto tempo impiegherebbe un corpo a cadere da una torre, la di cui altezza fosse di 240 piedi; dalla formola

$$n=\frac{d-2a}{2d}\pm\sqrt{\left[\left(\frac{d-2a}{2d}\right)^2+\frac{2S}{d}\right]},\text{ si avrebbe}$$

$$n=\frac{30-30}{60}\pm\sqrt{\left[\left(\frac{30-30}{60}\right)^2+\frac{2.240}{30}\right]}=$$

$\pm\sqrt{\frac{240}{15}}=\pm\sqrt{16}=\pm 4$. Impiegherebbe adunque quattro minuti secondi di tempo

597. Se si volesse sapere lo spazio descritto nel primo minuto secondo da un corpo, il quale in 4'' è caduto dall' altezza di 240 piedi colla forza acceleratrice di 30 piedi: fatte le opportune sostituzioni nella formola $a=\frac{2S-dn^2+dn}{2n}$, si avrebbe $a=\frac{2.240-30.4^2+30.4}{2.4}=15$; donde si vede che nel primo minuto secondo avrebbe dovuto percorrere uno spazio di 15 piedi.

598. Se finalmente, conoscendo lo spazio percorso nel primo 1'', il numero dei minuti impiegati a cadere, e l'altezza della caduta, si volesse determinare l' effetto della forza acceleratrice; dalla formola

$$d=\frac{2S-2an}{n(n-1)},$$

si avrebbe $d=\frac{2.240-2.15.4}{4(4-1)}=30$. Onde l'effetto della forza acceleratrice domandata sarebbe di 30 piedi.

599. *Problema* II. Si è comperato un cavallo a condizione di pagare 10 soldi pel primo chiodo, 15 soldi pel secondo, 20 soldi pel terzo, e così di seguito, sempre 5 soldi di più per ogni chiodo successivo. Il cavallo ha 32 chiodi ne' suoi ferri; si domanda quanto sia il suo valore?

Soluzione. Egli è chiaro che quivi non si tratta, che di trovare la somma dei termini di una progressione aritmetica, il primo termine della quale è 10, la differenza 5, ed il numero dei termini 32. Messi adunque gli opportuni valori di a, di d, e di n nella formola $S=(2a+dn-d)\frac{n}{2}$, si avrà

$$S = (2 \cdot 10 + 5 \cdot 32 - 5)\frac{32}{2} = 175 \times 16 = 2800.$$

Onde il cavallo costa 2800 soldi, oppure 140 lire.

600. *Problema* III. Un uomo è incaricato di innaffiare ad uno ad uno 100 alberi situati sulla stessa linea a 5 braccia di distanza l' uno dall' altro: egli prende l' acqua a 10 braccia di distanza dal primo albero sul prolungamento della linea degli alberi stessi. Quanto cammino egli farà in tutto, nella supposizione che egli parta e ritorni ogni volta alla fontana?

Soluzione. Si vede facilmente che questo uomo dovrà percorrere 20 braccia per innaffiare il primo albero, 30 pel secondo, 40 pel terzo, e così di seguito, di modo che gli spazj vengono a formare una progressione aritmetica, il di cui primo termine è 20, la differenza è 10, ed il numero dei termini è 100. Dalla formola

$$S = (2a + dn - d)\frac{n}{2}, \text{ si avrà}$$

$$S = (40 + 1000 - 10)\,50 = 51500.$$

Il cammino totale sarà espresso adunque da 51500 braccia.

601. *Problema* IV. Un uomo tanto nell' andata, che nel ritorno ha percorso 13750 braccia per innaffiare ad uno ad uno un numero x di alberi situati sopra una medesima linea a 5 braccia di distanza l' uno dall' altro. Per innaffiare l' ultimo albero ha dovuto percorrere 520 braccia; si domanda quanti alberi sono, ed a quale distanza dal primo albero è la sorgente, che si suppone sulla medesima linea degli alberi?

Soluzione. Si assuma per incognita il solo cammino percorso o nell' andata o nel ritorno, e si avrà

$\frac{13750}{2} = 6875$ braccia per tutti gli alberi, e $\frac{520}{2} = 260$ per l' ultimo albero. In tal caso gli spazj percorsi formano una progressione aritmetica, in cui la differenza è $d = 5$, l' ultimo termine $u = 260$, e la somma dei termini $S = 6875$. Il numero dei termini sarà

$$n = \frac{2u + d}{2d} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{2u+d}{2d}\right)^2 - \frac{2S}{d}\right]} = \frac{525 \pm 25}{10},$$

donde, prendendo il segno superiore, si avrà

$$n = \frac{525 + 25}{10} = 55, \text{ e prendendo l' inferiore}$$

$$n = \frac{525 - 25}{10} = 50.$$

Preso quindi $n = 50$, dalla formola $a = u - d(n - 1)$ si trova $a = 260 - 5 \cdot 49 = 15$. Di modo che vi sono 50 alberi, e l' acqua è a quindici braccia di distanza dal primo albero. L' altro valore di n non può risolvere il problema, perchè se si prende $n = 55$ si trova $a = -10$.

Delle proporzioni e progressioni geometriche.

602. La proporzione geometrica, formandosi dall' unione di due rapporti eguali (559), consiste in quattro termini tali, che il secondo diviso per il primo, o viceversa, dà lo stesso quoto, che dà il quarto diviso per il terzo, o viceversa: così se $\frac{b}{a} = q$, e nel medesimo tempo $\frac{d}{c} = q$, le quattro quantità a, b, c, d saranno in proporzione geometrica, la di cui ragione sarà q, e si avrà $a:b::c:d$. I quattro numeri 2, 4, 5, 10 daranno la propor-

zione geometrica $2:4::5:10$; poichè il quoto 2; che si ottiene dividendo il 4 per 2, si ricava anche dividendo il 10 per 5.

603. *In una proporzione geometrica si ha che un conseguente qualunque è sempre eguale al suo antecedente moltiplicato per la ragione*: infatti nella proporzione $a:b::c:d$ si ha pel numero precedente $\frac{b}{a}=q$, $\frac{d}{c}=q$, donde si ricava $b=aq$, e $d=cq$.

604. *In una proporzione geometrica qualunque* $a:b::c:d$, *il prodotto* ad *degli estremi è sempre eguale a quello dei medj* bc. Poichè, essendo $\frac{b}{a}=q$, $\frac{d}{c}=q$, paragonando queste due equazioni, sarà anche $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, ossia $ad=bc$. In numeri, se $2:4::5:10$, si ha $2\times10=4\times5$.

605. Potendo sempre da una proporzione geometrica ricavare una equazione, moltiplicando i medj fra di loro e gli estremi pure fra di loro, si potrà del pari 1.° data una equazione formare con essa una proporzione geometrica, avendo riguardo di scomporre ciascun membro dell' equazione in due fattori. I fattori del primo membro dovranno formare gli estremi nel caso che quelli del secondo formino i medj, o viceversa. Così essendo $ad=bc$, si avrà $a:b::c:d$, se fosse $am=n$, si avrebbe $a:n::1:m$; se finalmente fosse $ab=1$, si ricaverebbe $a:1::1:b$; 2.° si potrà, dati tre termini di una proporzione geometrica, trovare il quarto ad essi proporzionale. Poichè, chiamato x il termine incognito, si avranno le quattro seguenti proporzioni

$$a:b::c:x \qquad a:b::x:d$$
$$x:b::c:d \qquad a:x::c:d$$

dalle quali si ricavano le equazioni

$$ax=bc \qquad bx=ad$$
$$dx=bc \qquad cx=ad,$$

che danno

$$x=\frac{bc}{a},\ x=\frac{bc}{d},\ x=\frac{ad}{b},\ x=\frac{ad}{c}.$$

Donde ne segue *che un estremo di una proporzione geometrica qualunque è eguale al prodotto dei medj diviso per l' altro estremo, e che un medio è eguale al prodotto degli estremi diviso per l' altro medio.*

Così l' estremo x della proporzione $2:4::5:x$ sarà $=\frac{4\times5}{2}=10$. Il medio x della proporzione $2:x::5:10$, sarà eguale a $\frac{2\times10}{5}=4$.

E qui siamo in grado di dimostrare quello che abbiamo promesso ai (509, 513).

Nell' esempio 1.° del (509), trattandosi di trovare il logaritmo di 587657, si è moltiplicata la differenza tra il numero 5876, ed il numero 5876,57, la quale è 0,57, per la differenza, che vi è tra il logaritmo di 5876, e quello di 5877, la quale è 0,00008, ed il prodotto di queste due differenze 0,00004 si è aggiunto al logaritmo di 5876: e ciò perchè la differenza de' numeri, i quali poco tra loro differiscono potendosi supporre sensibilmente proporzionale a quella dei loro logaritmi, si può istituire la seguente proporzione

$$1:0,57::0,00008:x,$$

dalla quale si ha $x = 0,0000456$, ossia prossimamente $x = 0,00004$ per la differenza fra i logaritmi dei due numeri 5876, e 5876,57, onde $log.\ 5876,57 = log.\ 5876 + 0,00004 =$
$3,76908 + 0,00004 = 3,76912$.

Parimente al (513) ove trattasi di trovare il numero corrispondente al logaritmo 3,76912, che non è sulle tavole, si disse che al numero 5876, il quale è quello, a cui corrisponde più prossimamente il logaritmo dato, si doveva aggiungere la frazione 0,57 risultante dal dividere 0,0000456, che è la differenza fra il logaritmo proposto, e quello del numero 5876, per 0,0000800, che è la differenza dei logaritmi dei due numeri consecutivi 5876, e 5877, e ciò perchè potendosi in questo caso considerare la differenza dei logaritmi proporzionale a quella dei numeri, si può istituire la proporzione

$$0,0000800 : 0,0000456 :: 1 : x,$$

quindi $x = \dfrac{0,0000456}{0,0000800} = \dfrac{456}{800} = 0,57$.

Quello che si è detto in questi casi particolari può estendersi a qualunque altro caso analogo.

606. Se la ragione di $a : b$ fosse inversa di quella di c a x, si avrebbe (559) $a : b :: x : c$, oppure, ciò che è lo stesso $a : b :: \dfrac{1}{c} : \dfrac{1}{x}$, donde si ricava $x = \dfrac{ac}{b}$.

607. *In qualunque proporzione geometrica continua $a : b :: b : c$, ossia $\div\!\div\, a : b : c$ il prodotto degli estremi è eguale al quadrato del medio.* Infatti po-

tendosi la proporzione continua considerare come una proporzione discreta nella quale i due medj sono eguali, ne deriva che il prodotto degli estremi debba eguagliare il medio moltiplicato pel medio stesso, ossia il quadrato del medio medesimo. Eseguendo in fatti tale operazione si ha $b^2 = ac$. Estraendo ora la radice quadrata da ambi i membri di questa equazione, si ottiene $b = \sqrt{ac}$, da ciò si ricava, che *un medio proporzionale geometrico tra due quantità date è sempre eguale alla radice quadrata del loro prodotto*: così il medio proporzionale geometrico x fra 2 e 8, nella proporzione continua $2 : x :: x : 8$, sarà $= \sqrt{2 \cdot 8} = 4$.

Il terzo proporzionale di una proporzione geometrica continua è eguale al quadrato del medio diviso pel primo termine della proporzione. Infatti, dati i primi due termini a, b e chiamato x il terzo proporzionale, si avrà

$a : b :: b : x$, per cui $x = \dfrac{b^2}{a}$. Il terzo termine continuamente proporzionale ai due numeri 4 e 8 sarà dunque $x = \dfrac{64}{4} = 16$.

Per una simile ragione si vedrà *essere il primo termine di una proporzione continua eguale al quadrato del medio proporzionale diviso pel terzo.*

608. A quattro grandezze geometricamente proporzionali si potranno far subire tutte quelle variazioni o cangiamenti, che si vogliono, purchè nelle quantità che si ottengono si verifichi la proprietà fondamentale, che regna nelle proporzioni geometriche, cioè che il prodotto degli estremi sia eguale a quello de' medj. *Si può dunque senza distruggere*

la proporzione geometrica 1.° far cangiare di posto ai termini medj fra loro, o agli estremi pure fra loro, oppure mettere gli estremi al posto dei medj e viceversa. 2.° Si può moltiplicare, oppure dividere per una medesima quantità tutti i termini della proporzione, o i due antecedenti, o i due conseguenti, o anche i due termini di uno dei rapporti. Nel primo caso i due prodotti risulteranno sempre dai medesimi fattori, e nel secondo caso non facendo altro che moltiplicare o dividere per una stessa quantità i fattori, o un fattore di ciascun prodotto, e per conseguenza i prodotti medesimi, essendo essi da prima eguali, tali devono rimanere anche dopo la moltiplicazione, o divisione per una medesima quantità.

Prendiamo ad esempio la proporzione $a:b::c:d$, ed in conseguenza di quanto abbiamo detto, avremo

$$\left.\begin{array}{ll} 1.^a & a : b :: c : d \\ 2.^a & a : c :: b : d \\ 3.^a & d : b :: c : a \\ 4.^a & d : c :: b : a \end{array}\right\}$$

Cambiando di luogo ai medj o agli estremi, ossia alternando.

$$\left.\begin{array}{ll} 5.^a & b : a :: d : c \\ 6.^a & b : d :: a : c \\ 7.^a & c : a :: d : b \\ 8.^a & c : d :: a : b \end{array}\right\}$$

Ponendo i medj al posto degli estremi e viceversa, ossia invertendo.

$$\left.\begin{array}{l} ma : mb :: mc : md \\ ma : b :: mc : d \\ a : mb :: c : md \\ ma : mb :: c : d \\ a : b :: mc : md \\ \frac{a}{m} : \frac{b}{m} :: \frac{c}{m} : \frac{d}{m} \\ \frac{a}{m} : b :: \frac{c}{m} : d \\ a : \frac{b}{m} :: c : \frac{d}{m} \\ \frac{a}{m} : \frac{b}{m} :: c : d \\ a : b :: \frac{c}{m} : \frac{d}{m} \end{array}\right\}$$

Moltiplicando, o dividendo tutti i termini della proporzione per una stessa quantità, o i soli antecedenti, o i soli conseguenti, oppure i termini di un rapporto.

$$\left.\begin{array}{l} a^m : b^m :: c^m : d^m \\ \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} :: \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d} \end{array}\right\}$$

Elevando tutti i termini alla stessa potenza, o estraendovi la radice del medesimo grado.

L'eguaglianza, che esiste fra il prodotto dei medj e quello degli estremi in ciascuna delle soprascritte espressioni ci assicura, che esse sono tutte proporzioni geometriche.

Si giungerebbe alle medesime conclusioni ponendo la proporzione proposta sotto la forma dell' equazione $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; poichè le frazioni che sono eguali

rimangono tali, sia che si moltiplichino o si dividano i loro numeratori o denominatori, o i due termini di una di esse per una stessa quantità, o che si innalzino ambedue le frazioni ad una stessa potenza, o che vi si estragga la radice di uno stesso grado.

609. Da quanto si è detto ne deriva, *che due quantità qualunque sono proporzionali alle loro multiple, ed anche alle rispettive parti aliquote*; poichè se, per esempio, si ha la proporzione identica $a : b :: a : b$, sarà anche (608) $a : b :: am : bm$, come pure $a : b :: \frac{a}{m} : \frac{b}{m}$.

610. Se si percorrono le diverse operazioni che si possono far subire ai termini delle frazioni eguali $\frac{a}{b}$, e $\frac{c}{d}$ senza che la loro eguaglianza venghi distrutta, si vedrà che esse possono essere accresciute dell' unità, e che ciascuna può anche essere sottratta dall' unità, ed avere in questa maniera delle frazioni ancora eguali. Eseguendo adunque questi cangiamenti si ha $1 + \frac{a}{b} = 1 + \frac{c}{d}$, ossia riducendo ciascun membro di questa identità al medesimo denominatore, $\frac{b+a}{b} = \frac{d+c}{d}$: così pure $1 - \frac{a}{b} = 1 - \frac{c}{d}$, ossia $\frac{b-a}{b} = \frac{d-c}{d}$. Ponendo poi queste frazioni eguali sotto forma di proporzione, si avrà

$$b + a : b :: d + c : d$$
$$b - a : b :: d - c : d.$$

Confrontando queste proporzioni colla proporzione $a : b :: c : d$ dalla quale si sono desunte, si rileva, *che la somma o la differenza dei termini del primo rapporto, sta al conseguente del rapporto medesimo, come la somma o la differenza dei termini del secondo rapporto sta al conseguente di questo rapporto.*

Se i medj di quelle proporzioni si alternano, si ottengono le proporzioni

$$b + a : d + c :: b : d$$
$$b - a : d - c :: b : d.$$

Siccome poi queste due proporzioni hanno di comune il rapporto $b : d$, ne viene che gli altri due rapporti saranno fra di loro eguali (344. ass.ª 4.°), e che con essi si potrà formare la nuova proporzione

$$b + a : b - a :: d + c : d - c,$$

la quale alternata dà

$$b + a : d + c :: b - a : d - c.$$

Paragonando ora queste proporzioni colla proporzione primitiva $a : b :: c : d$, si vede *che sta la somma dei termini del primo rapporto alla loro differenza, come la somma dei termini del secondo rapporto sta alla differenza dei medesimi, e che la somma dei termini del primo rapporto sta alla somma dei termini del secondo rapporto, come le rispettive differenze dei termini medesimi.*

Se i ragionamenti che si sono fatti sulla proporzione $a : b :: c : d$ si faranno sulla proporzione $a : c :: b : d$, che nasce dall' alternazione che in quella si è fatta de' medj, si dedurrano per questa proporzione le medesime conseguenze che si sono dedotte per la proporzione primitiva, per lo che si avranno le proporzioni seguenti

$$a + c : b + d :: a : b$$
$$a - c : b - d :: a : b$$
$$a + c : b + d :: a - c : b - d$$

le quali confrontate colla proporzione primitiva $a : b :: c : d$ fanno conoscere 1.° *Che in una proporzione geometrica la somma o la differenza degli antecedenti sta alla somma o differenza dei conseguenti, come un antecedente al suo conseguente.* 2.° *Che la somma degli antecedenti, sta alla somma dei conseguenti, come la differenza degli antecedenti sta alla differenza dei conseguenti.*

611. *Osservazione.* Quando i termini di una proporzione si sommano per avere una nuova proporzione, una tale operazione si suole comunemente denominare *composizione*; e *scomposizione* o *divisione* quando si sottraggono.

612. *Da due proporzioni che hanno comune un rapporto, oppure gli antecedenti, o i conseguenti si può ricavare una terza proporzione paragonando fra di loro le quantità non comuni.* Così se si avranno le due proporzioni $a : b :: c : d$; $a : b :: m : n$ sarà anche $c : d :: m : n$, poichè come già si è fatto osservare (610), essendo le due ragioni $c : d$; $m : n$ eguali alla ragione $a : b$, devono essere eguali fra di loro, e per conseguenza formare una proporzione. Se si avessero poi le due proporzioni

$$a : b :: c : d \quad , \quad a : m :: c : n,$$

alternando si otterrebbe

$$a : c :: b : d \quad , \quad a : c :: m : n$$

e quindi $b : d :: m : n$, riducendosi questo al primo caso. Nello stesso modo si ragionerebbe, per dimostrare che gli antecedenti di due proporzioni, che hanno comuni i conseguenti sono fra di loro proporzionali.

613. Due o più proporzioni moltiplicate termine per termine danno una nuova proporzione, la di cui ragione eguaglia il prodotto delle ragioni delle date proporzioni; di fatto sieno le due proporzioni

$$a : b :: c : d$$
$$m : n :: g : h,$$

moltiplicate termine per termine danno

$$am : bn :: cg : dh.$$

Sia q la ragione, che regna nella prima proporzione, ed r quella della seconda, si avrà mediante le opportune sostituzioni (603)

$$am : aq \times mr :: cg : cq \times gr;$$

proporzione evidentemente vera, la di cui ragione è qr, cioè il prodotto delle due ragioni semplici. Le proporzioni di tal sorta si chiamano *proporzioni composte.*

614. Se la ragione fosse la medesima nelle due proporzioni in allora, per essere $q = r$, si avrebbe $am : amq^2 :: cg : cgq^2$, proporzione, il di cui rapporto è eguale al quadrato del rapporto, che regna nelle date proporzioni. In questo caso dicesi che $am : amq^2$ è in *ragione duplicata* di $am : amq$.

Quando la ragione di una data proporzione risulta dal prodotto di tre ragioni eguali, in allora dicesi *ragione triplicata.*

615. La ragione duplicata di $a : aq$ e di $m : mq$ è la stessa di quella dei quadrati di una qualunque di queste ragioni, e la triplicata è la medesima di quella dei cubi; di fatto la ragione duplicata di $a : aq$, ecc. è q^2: quella dei quadrati di a

e di aq è pure $\frac{a^2 q^2}{a^2} = q^2$. Quella dei cubi è q^3, come è q^3 anche la ragione triplicata delle tre ragioni eguali

$$a : aq, \; m : mq, \; n : nq.$$

616. Dividendo due proporzioni termine per termine, si ha una nuova proporzione, la di cui ragione è il quoto delle ragioni appartenenti alle date proporzioni; così se si avranno le due proporzioni

$$a : b :: c : d$$
$$m : n :: g : h$$

dividendo ciascun termine della prima per il corrispondente della seconda, si avrà la proporzione

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{n} :: \frac{c}{g} : \frac{d}{h}, \text{ ossia } \frac{a}{m} : \frac{aq}{mr} :: \frac{c}{g} : \frac{cq}{gr},$$

nella quale si vede chiaramente regnare la ragione $\frac{q}{r}$. Se le date ragioni fossero eguali, in tal caso $\frac{q}{r} = 1$, sarebbe cioè la ragione della nuova proporzione eguale all' unità.

617. Da due o più proporzioni si possono ricavare delle nuove proporzioni, moltiplicando o dividendo con un certo ordine i termini dell' una per quelli dell' altra o delle altre: così dalle proporzioni

$$a : b :: c : d$$
$$m : n :: g : h$$

si possono dedurre le seguenti

$$an : bm :: ch : dg \qquad ag : cm :: bh : dn$$

618. Se si avrà un numero qualunque di proporzioni tali, che i conseguenti della prima sieno antecedenti della seconda, i conseguenti della seconda antecedenti della terza, e così successivamente, gli antecedenti della prima proporzione coi conseguenti dell' ultima formeranno una proporzione geometrica: così date le quattro proporzioni

$$a : c :: b : d \qquad g : k :: h : l$$
$$c : g :: d : h \qquad k : m :: l : n,$$

si avrà anche $a : b :: m : n$; di fatto moltiplicando insieme le quattro proporzioni date termine per termine, si ha la nuova proporzione

$$acgk : cgkm :: bdhl : dhln;$$

e dividendo i termini del primo rapporto di questa proporzione per cgk, che è ad essi comune, ed i termini del secondo rapporto per la quantità loro comune dhl, si avrà $a : m :: b : n$, ed alternando sarà

$$a : b :: m : n.$$

619. In una serie di rapporti eguali

$$a : b :: c : d :: f : g :: m : n$$

1.° la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti i conseguenti, come un antecedente al suo conseguente, 2.° la somma di un numero qualunque di antecedenti sta alla somma de' loro conseguenti, come un antecedente sta al suo conseguente, oppure come una somma di antecedenti sta a quella de' rispettivi conseguenti: poichè, essendo $a : b :: c : d$, si ha pure (610) $a + c : b + d :: a : b :: c : d$; ma $c : d :: f : g$, quindi anche $a + c : b + d :: f : g$, e perciò sarà ancora $a + c + f : b + d + g :: f : g$, ma $f:g::m:n$, dunque $a+c+f:b+d+g::m:n$, e componendo, si avrà $a+c+f+m:b+d+g+n::m:n::f:g::c:d::a:b$. La proporzione $a+c:b+d::f:g$ superiormente trovata, dalla quale, componendo, si ricava poi $a+c+f:b+d+g::a+c:b+d$, ci somministra la dimostrazione della seconda parte del teorema enunciato.

Lo stesso teorema si può dimostrare anche formando, secondo l' enunciato suo, le corrispondenti proporzioni, sostituendo in esse al luogo dei conseguenti i rispettivi antecedenti nella propria ragione, e facendo in fine il prodotto dei medj e degli estremi, prodotto, che risultando identico, fa conoscere la verità dell' enunciata proporzione.

In vece di scrivere le serie di rapporti eguali, come si è fatto superiormente, si usa alle volte per maggior comodo scrivere prima tutti gli antecedenti, indi tutti i conseguenti in questa maniera

$$a:c:f:m::b:d:g:n.$$

620. Dimostrate le principali proprietà delle proporzioni geometriche, passeremo ad indagare quelle delle progressioni: a tale oggetto sia proposta la progressione

$$\div\, a:b:c:d:e:f:g:\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots:u.$$

Se q è la ragione, che regna in questa progressione, sarà

$$b=aq, \qquad e=dq=aq^4$$
$$c=bq=aq^2 \qquad f=eq=aq^5$$
$$d=cq=aq^3 \qquad g=fq=aq^6$$

ecc.

e quindi la data progressione si cangerà nella seguente $\div\, a:aq:aq^2:aq^3:aq^4:aq^5:aq^6:$ ecc. *Ove si vede che un termine qualunque della medesima è eguale ad un altro qualunque dei termini precedenti moltiplicato per la ragione elevata ad una potenza indicata dal numero dei termini compresi dall' uno inclusivamente sino all' altro esclusivamente.* In fatti il terzo termine, per esempio, aq^2 è eguale al primo termine a moltiplicato per la ragione q elevata al quadrato, il settimo termine aq^6 è eguale al secondo termine aq moltiplicato per la ragione q elevata a 5; e così degli altri.

621. Segue da quanto si è detto che, conoscendo solamente il primo termine e la ragione di una progressione geometrica, si potrà formare questa progressione col moltiplicare il primo termine dato per le successive potenze della ragione, di modo che il secondo termine di una progressione si otterrà moltiplicando il primo per la ragione, il terzo termine moltiplicando il primo pel quadrato della ragione, il quarto moltiplicando pure il primo pel cubo della ragione e così di seguito, di modo che un termine qualunque *ennesimo* si otterrà moltiplicando il primo termine per la ragione elevata ad un esponente indicato dal numero dei termini, che lo precedono; per lo che nominando u questo termine, n il luogo che deve occupare nella progressione, si avrà l' equazione 1.ª $u=aq^{n-1}$. Questo termine *ennesimo* si suole chiamare il termine generale delle progressioni geometriche, poichè fatto in esso, $n=1$, $n=2$, $n=3$, ecc., si ha il primo, il secondo, il terzo termine, ed in generale il termine corrispondente al numero, a cui n si eguaglia.

622. Nella progressione generale fatto $a=1$,

si ha $\div\div$ $1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : q^5 : q^6 : \ldots\ldots q^{n-1}$: e poichè $1 = q^0$, sarà anche

$\div\div$ $q^0 : q^1 : q^2 : q^3 : q^4 : q^5 : q^6 : \ldots\ldots\ldots : q^{n-1}$.

Dove si vede, chè le potenze successive intere di una medesima quantità q formano una progressione geometrica, e gli esponenti della ragione formano la progressione aritmetica dei numeri naturali $\div$ $0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 \ldots n-1$. Non si può dire lo stesso delle potenze successive frazionarie, perchè gli esponenti $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ ecc. non sono in progressione aritmetica. Si può adunque conchiudere *che se gli esponenti di diverse potenze di una medesima quantità formano una progressione aritmetica, i termini affetti da questi esponenti formano una progressione geometrica:* così le quantità a^3, a^5, a^7, a^9, ecc. saranno in progressione geometrica, perchè gli esponenti 3, 5, 7, 9, ecc. sono in progressione aritmetica.

623. In una progressione geometrica qualunque si ha il prodotto di due termini qualunque egualmente distanti dagli estremi costantemente eguale al prodotto degli estremi stessi. In fatti, supponendo la progressione generale (620) terminata dopo il 7.° termine, si ha

$$a \times aq^6 = aq \times aq^5 = aq^2 \times aq^4 = \text{ecc.}$$

Dalle cose qui sopra esposte ne segue, *che il termine medio di una progressione geometrica, composta di un numero dispari di termini, sarà medio proporzionale fra il primo termine e l' ultimo della data progressione:* così il termine medio aq^3 della progressione $\div\div a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5 : aq^6$, composta di sette termini è medio proporzionale tra a, aq^6 : in fatti $a : aq^3 :: aq^3 : aq^6$.

Con quattro termini di una progressione geometrica presi consecutivamente, o ad eguali distanze dagli estremi si può formare sempre una proporzione geometrica: di fatto supponiamo che la data progressione finisca dopo il settimo termine. Presi i quattro primi termini della medesima, questi formeranno evidentemente la proporzione $a : aq :: aq^2 : aq^3$, poichè si ha $a^2q^3 = a^2q^3$. Preso il primo ed il terzo, il terz' ultimo e l' ultimo, si avrà del pari la proporzione $a : aq^2 :: aq^4 : aq^6$, poichè (605) $a^2 q^6 = a^2 q^6$.

624. In una progressione geometrica qualunque il primo termine sta al terzo, come il quadrato del primo al quadrato del secondo: il primo termine sta al quarto, come il cubo del primo al cubo del secondo, e generalmente il primo termine di una progressione sta ad un termine qualunque n della progressione stessa, come il primo al secondo elevati ambidue ad $n-1$; infatti

$a : aq^2 :: a^2 : a^2q^2$, dà $a^3q^2 = a^3q^2$,

$a : aq^3 :: a^3 : a^3q^3$, dà $a^4q^3 = a^4q^3$,

$\vdots$

$a : aq^{n-1} :: a^{n-1} : a^{n-1}q^{n-1}$, dà $a^n q^{n-1} = a^n q^{n-1}$.

625. Se i termini di una progressione geometrica si sommano a due a due, a tre a tre, ed in generale ad m ad m, si ha una nuova progressione geometrica, la di cui ragione è eguale alla ragione della data innalzata ad una potenza eguale al numero dei termini, che si sommano. Per dimostrare questa proposizione, si ripigli la progressione generale, e si scrivano nella medesima alcuni termini consecutivi precedenti l'ultimo, per lo che si avrà

$\div a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5 : \ldots : aq^{n-6} : aq^{n-5} : aq^{n-4} : aq^{n-3} : aq^{n-2} : aq^{n-1}$.

I termini di questa progressione sommati a due a due, e da queste somme separati i rispettivi fattori comuni, daranno la progressione

$\div a(1+q) : aq^2 (1+q) : aq^4 (1+q) : \ldots\ldots\ldots\ldots : aq^{n-6}(1+q) : aq^{n-4}(1+q) : aq^{n-2}(1+q)$,

nella quale regna evidentemente la ragione q^2. Sommati a tre a tre, si ha

$\div a(1+q+q^2) : aq^3(1+q+q^2) : \ldots\ldots\ldots\ldots : aq^{n-6}(1+q+q^2) : aq^{n-3}(1+q+q^2)$,

progressione, la di cui ragione è q^3, e così di seguito, di modo che, sommati i termini della proposta progressione ad m ad m, si ricaverà una progressione, la di cui ragione sarà q^m, cioè la ragione della proposta elevata ad m, che è il numero dei termini sommati come fu enunciato.

626. In una progressione geometrica qualunque

$\div a : b : c : d : e : f : g : \ldots\ldots\ldots : u$

il primo termine sta al secondo, come la somma di tutti i termini meno l'ultimo, sta alla somma di tutti i suoi termini meno il primo; di modo che, chiamando S la somma totale dei termini della data progressione, dico che si avrà la proporzione $a : b :: S - u : S - a$. Di fatto una progressione geometrica non essendo altro che una serie di rapporti geometrici eguali, i termini della quale sono tutti antecedenti fuori che l'ultimo, e tutti sono conseguenti eccettuato il primo, essa dovrà dare (619) la proporzione $a : b :: S - u : S - a$. Da questa proporzione si ricava l'equazione $a(S-a) = b(S-u)$, ossia, mettendo in luogo di b il suo valore aq, e dividendo poi pel fattor comune a, si ha $S - a = q(S-u) = qS - uq$, e trasportando, $qS - S = uq - a$, da cui si ricava finalmente 2.ª $S = \dfrac{uq-a}{q-1}$, che è l'espressione generale della somma dei termini di una progressione geometrica qualunque.

627. Per fare un esempio, sia data la progressione numerica $\div 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64$. Paragonata colla generale, sarà $a = 1$, $q = 2$, $u = 64$, $n = 7$. Questi valori messi nella superiore equazione daranno $S = \dfrac{64 . 2 - 1}{2 - 1} = 127$ per la somma di tutti i termini della progressione medesima. La somma dei termini della progressione geometrica decrescente $\div 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32} : \frac{1}{64}$, si otterrà mettendo, nella 2.ª equazione, 1 in luogo di a, $\frac{1}{2}$ in luogo di q, $\frac{1}{64}$ invece di u, e sarà

$$S = \frac{\frac{1}{64} \times \frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{-127}{128}}{-\frac{1}{2}} = \frac{254}{128} = \frac{127}{64} = 1 + \frac{63}{64}.$$

Col mezzo poi dell'equazione $u = aq^{n-1}$ trovata al (621), si potrà avere l'ultimo termine di una progressione qualunque geometrica; se, per esempio, si volesse l'ottavo termine della progressione crescente $\div 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64$, messo in quella equazione 1 in luogo di a, 2 in vece di q, ed 8 al posto di n, si avrà $u = 1 . 2^7 = 128$.

628. Allorquando la progressione va diminuendo sino all' infinito, il suo ultimo termine può essere considerato come nullo in confronto del primo, per lo che in questo caso l' equazione 2.ª si ridurrà ad $S=\frac{-a}{q-1}=\frac{a}{1-q}$. La somma dei termini della progressione decrescente

$$\div 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32} : \frac{1}{64} : \frac{1}{128} : \text{ecc.}$$

all' infinito sarà prossimamente espressa da

$$S=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$$

Da ciò si rileva essere la somma di tutti gli altri termini, eccetto il primo, $=1$. Questa proprietà è comune a tutte le progressioni di tal natura: di fatto, se fosse data la progressione

$$\div \frac{d}{d+1} : \frac{d}{(d+1)^2} : \frac{d}{(d+1)^3} : \frac{d}{(d+1)^4} : \text{ecc.}$$

all' infinito, paragonata colla generale, darebbe

$a=\frac{d}{d+1}$, $q=\frac{1}{d+1}$, e per conseguenza

$$S=\frac{a}{1-q}=\frac{\frac{d}{d+1}}{1-\frac{1}{d+1}}=\frac{\frac{d}{d+1}}{\frac{d+1-1}{d+1}}=\frac{d}{d}=1.$$

Ciascuna delle progressioni

$$\div \frac{2}{3} : \frac{2}{9} : \frac{2}{27} : \frac{2}{81} : \frac{2}{245} : \text{ecc.},$$

$$\div \frac{7}{8} : \frac{7}{64} : \frac{7}{512} : \frac{7}{4096} : \text{ecc.}$$

all' infinito ha per somma rispettiva l' unità.

629. La somma dei termini di una progressione geometrica della seguente forma

$$\div \frac{1}{2^{n+1}} : \frac{1}{2^{n+2}} : \frac{1}{2^{n+3}} : \frac{1}{2^{n+4}} : \text{ecc. all' infi-}$$

nito eguaglierà sempre il doppio del primo termine. Di fatto nella formola $S=\frac{a}{1-q}$ facendo $a=\frac{1}{2^{n+1}}$, $q=\frac{1}{2}$,

$$\text{si ha } S=\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{2^{n+1}}=\frac{2}{2^n\cdot 2}=\frac{1}{2^n},$$

quantità doppia di $\frac{1}{2^{n+1}}$: così la somma dei termini della progressione decrescente $\div \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16}$: ecc. all' infinito, sarà espressa da $\frac{1}{2}\times 2=1$, come di già si è veduto. Quella della progressione $\div \frac{1}{16} : \frac{1}{32} : \frac{1}{64} : \frac{1}{128}$: ecc. all' infinito è espressa da $\frac{1}{16}\times 2=\frac{1}{8}$.

630. Col mezzo delle due formole fondamentali 1.ª $u=aq^{n-1}$; 2.ª $S=\frac{uq-a}{q-1}$, da noi ritrovate (621, 626), nelle quali a indica il primo termine della progressione generale, u l' ultimo termine, n il numero dei termini, q la ragione, ed S la somma di tutti i termini della progressione, date che sieno tre di queste cinque quantità si potranno determinare le altre due.

631. 1.° Conoscendo a, u, n, trovare q ed S,

Dividendo l' equazione 1.ª per a, ed estraendo la radice $n-1$ da ambi i membri, si ha $q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$. Questo valore sostituito nella 2.ª

$$\text{dà } S = \frac{u \cdot \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} - a}{\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} - 1} = \frac{\frac{u \cdot u^{\frac{1}{n-1}}}{a^{\frac{1}{n-1}}} - a}{\frac{u^{\frac{1}{n-1}}}{a^{\frac{1}{n-1}}} - 1} =$$

$$\frac{u^{\frac{n-1}{n-1}} \times u^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{n-1}{n-1}} \times a^{\frac{1}{n-1}}}{u^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}} = \frac{u^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{u^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}.$$

632. Col mezzo dell' equazione $q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$ trovata al numero precedente si può inserire fra due date quantità a ed u un numero m qualunque di medj proporzionali geometrici, oppure formare una progressione, il di cui primo termine sia a, l' ultimo termine u, ed il numero dei termini $n = m + 2$. Mettendo in essa $m + 2$ in luogo di n, si ha $q = \sqrt[m+1]{\left(\frac{u}{a}\right)}$ per esprimere la ragione della progressione, che devesi formare. Conoscendo così la

ragione della progressione, si avrà subito (621) la cercata progressione, che sarà

$$\div\!\div a : a\sqrt[m+1]{\left(\frac{u}{a}\right)} : a\sqrt[m+1]{\left(\frac{u^2}{a^2}\right)} : a\sqrt[m+1]{\left(\frac{u^3}{a^3}\right)} :$$

$$: a\sqrt[m+1]{\left(\frac{u^4}{a^4}\right)} : a\sqrt[m+1]{\left(\frac{u^5}{u}\right)} : \ldots : a\sqrt[m+1]{\left(\frac{u^{m+1}}{a^{m+1}}\right)},$$

nella quale l' ultimo termine è evidentemente eguale ad u.

Sieno, per esempio, da inserirsi cinque medj proporzionali geometrici tra 1 e 64. Sarà in questo caso $a = 1$, $m = 5$, $u = 64$, per cui la ragione della progressione, che si deve formare, sarà $q = \sqrt[6]{64} = 2$; onde si otterrà $\div\!\div 1:2:4:8:16:32:64$.

633. Volendo inserire tra i termini consecutivi di una progressione geometrica un numero m di medj proporzionali, basterà inserire tra gli esponenti consecutivi de' termini stessi un numero m di medj proporzionali aritmetici; poichè (622) i termini, i quali avranno per esponenti quei medj aritmetici saranno i medj proporzionali geometrici cercati: così per inserire due medj proporzionali geometrici fra termine e termine della progressione

$$\div\!\div a : aq : aq^2 : aq^3 : \text{ecc., si scriverà}$$

$$\div\!\div a : aq^{\frac{1}{3}} : aq^{\frac{2}{3}} : aq : aq^{\frac{4}{3}} : aq^{\frac{5}{3}} : aq^2 : aq^{\frac{7}{3}} : aq^{\frac{8}{3}} : aq^3 : \text{ecc.}$$

Se si volessero inserire tre medj proporzionali geometrici fra i termini della progressione $\div\!\div 2 : 32 : 512 : 8192$. Essendo in questo caso $q = 16$, $a = 2$, $u = 32$, chiamando q' la ragione, che deve regnare nella nuova progressione, sarà $q' = \sqrt[4]{16} = 2$. Si avrà in questo modo

$\div\div$ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024 : : 2048 : 4096 : 8192.

634. 2.° Conoscendo a, q, n, trovare u ed S. L'equazione 1.ª presenta il valore di u. Mettendo poi per u il suo valore nella 2.ª, si avrà

$$S = \frac{aq^{n-1}q - a}{q-1} = \frac{aq^n - a}{q-1} = \frac{a(q^n - 1)}{q-1}.$$

635. 3.° Conoscendo u, q, n, trovare a ed S.

Dall' equazione 1.ª si ricava $a = \frac{u}{q^{n-1}}$. Sostituendo questo valore nell' equazione 2.ª, si avrà

$$S = \frac{uq - \frac{u}{q^{n-1}}}{q-1} = \frac{uq^n - u}{q^{n-1}(q-1)} = \frac{u}{q^{n-1}}\left(\frac{q^n - 1}{q-1}\right).$$

636. 4.° Conoscendo a, u, q, trovare S ed n. Il valore di S è dato dall' equazione 2.ª. Per avere n è d' uopo ricorrere ai logaritmi, poichè egli è esponente di q nell' equazione 1.ª. Operando nel modo insegnato (542), si avrà

$$log.u = log.a + (n-1)log.q = log.a + n.log.q - log.q,$$

da cui si ricava

$$n.log.q = log.q + log.u - log.a,$$ e finalmente

$$n = 1 + \frac{log.u - log.a}{log.q}.$$

637. 5.° Conoscendo a, u, S, trovare q ed n. L' equazione 2.ª dà $Sq - S = uq - a$, perciò

$q = \frac{S-a}{S-u}$. Mettendo questo valore nella 1.ª si avrà $u = a\left(\frac{S-a}{S-u}\right)^{n-1}$, e prendendo i logaritmi, sarà $log.u = log.a + (n-1)\,log.\frac{S-a}{S-u} =$

$log.a + n.log.\frac{S-a}{S-u} - log.\frac{S-a}{S-u}$, ossia

$n.log.\frac{S-a}{S-u} = log.\frac{S-a}{S-u} + log.u - log.a$, e dividendo per $log.\frac{S-a}{S-u}$, sarà finalmente

$$n = 1 + \frac{log.u - log.a}{log.\frac{S-a}{S-u}} = 1 + \frac{log.u - log.a}{log.(S-a) - log.(S-u)}.$$

638. 6.° Conoscendo n, q, S, trovare a ed u. L' equazione 2.ª dà $Sq - S = uq - a$, dalla quale si ricava $u = \frac{Sq - S + a}{q}$, sostituendo questo valore nell' equazione 1.ª, si avrà

$\frac{Sq - S + a}{q} = aq^{n-1}$, ossia $Sq - S + a = aq^n$,

donde si ricava $a = \frac{Sq - S}{q^n - 1} = S\left(\frac{q-1}{q^n - 1}\right)$. Per avere u, il valore di $a = uq + S - Sq$ cavato dalla 2.ª si ponga nella 1.ª e si avrà

$u = (uq + S - Sq)\, q^{n-1} = uq^n + Sq^{n-1} - Sq^n$;

da cui $u = \dfrac{Sq^n - Sq^{n-1}}{q^n - 1} = Sq^{n-1}\left(\dfrac{q-1}{q^n-1}\right)$.

639. 7.° Conoscendo a, q, S, trovare u ed n.

L' equazione 2.ª, dà $u = \dfrac{Sq - S + a}{q}$; sostituendo questo valore nella 1.ª, si avrà

$\dfrac{Sq - S + a}{q} = aq^{n-1}$, e prendendo i logaritmi

$\log.(Sq - S + a) - \log.q = \log.a + n\log.q - \log.q$,

donde si ricava $n = \dfrac{\log.(Sq - S + a) - \log.a}{\log.q}$.

640. 8.° Conoscendo u, q, S, trovare a ed n.

L' equazione 2.ª dà $a = uq - Sq + S$, mettendo questo valore nella 1.ª, si avrà

$u = (uq - Sq + S)\, q^{n-1}$, e prendendo i logaritmi, sarà $\log.u = \log.(uq - Sq + S) + n\log.q - \log.q$,

da cui si ricava $n = 1 + \dfrac{\log.u - \log.(uq - Sq + S)}{\log.q}$.

641. 9.° Conoscendo a, n, S, trovare q, ed u.

L' equazione 2.ª dà $u = \dfrac{Sq - S + a}{q}$. Questo valore messo nella 1.ª dà $\dfrac{Sq - S + a}{q} = aq^{n-1}$, ossia $Sq - S + a = aq^n$, ed ordinando per rapporto a q, si avrà l' equazione $q^n - \dfrac{Sq}{a} + \dfrac{S}{a} - 1 = 0$,

che per essere del grado *ennesimo* generalmente non si può risolvere. Per avere poi u, dalla prima equazione si cavi il valore di q, e sarà

$q = \sqrt[n-1]{\dfrac{u}{a}} = \dfrac{u^{\frac{1}{n-1}}}{a^{\frac{1}{n-1}}}$. Si ricavi il valore di q anche dalla 2.ª, per cui $q = \dfrac{S-a}{S-u}$; questi due valori paragonati danno l' equazione

$\dfrac{u^{\frac{1}{n-1}}}{a^{\frac{1}{n-1}}} = \dfrac{S-a}{S-u}$, ossia $(S-u)\, u^{\frac{1}{n-1}} = (S-a)\, a^{\frac{1}{n-1}}$

equazione anch' essa generalmente non solubile.

Se si conoscesse q, il valore di u sarebbe dato dall' equazione $u = \dfrac{Sq - S + a}{q}$ superiormente trovata.

642. 10.° Conoscendo u, n, S, trovare q ed a.

Nell' equazione 2.ª per a si metta il suo valore $\dfrac{u}{q^{n-1}}$, cavato dalla 1.ª, e si avrà $S = \dfrac{uq - \dfrac{u}{q^{n-1}}}{q-1} = \dfrac{uq^n - u}{q^n - q^{n-1}}$, ossia $Sq^n - Sq^{n-1} = uq^n - u$, e raccogliendo il fattore q^n, sarà

$(S-u)q^n - Sq^{n-1} + u = 0$, ed ordinando per rapporto a q, sarà finalmente

$q^n - \frac{S}{S-u} \cdot q^{n-1} + \frac{u}{S-u} = 0$, equazione che per essere del grado *ennesimo* è generalmente insolubile. Per avere poi a, bisogna eliminare q dalle due equazioni fondamentali, per lo che si giunge all' equazione

$(S-u)u^{\frac{1}{n-1}} = (S-a)a^{\frac{1}{n-1}}$ di già trovata, la quale è generalmente insolubile, come si è già detto (641).

643. Sarà utile agli Studiosi l' applicazione di tutte le formole trovate a degli esempj numerici, al quale oggetto si sono raccolte le formole stesse nella seguente tavola.

Date	*Si ha*	FORMOLE.
u, S, n	a	$(S-u)u^{\frac{1}{n-1}} = (S-a)a^{\frac{1}{n-1}}$. *Equ. insolub.*
u, q, n		$a = \frac{u}{q^{n-1}}$.
u, q, S		$a = uq - Sq + S$.
q, n, S		$a = S\left(\frac{q-1}{q^n-1}\right)$.
a, q, n	u	$u = aq^{n-1}$.
a, n, S		$(S-u)u^{\frac{1}{n-1}} = (S-a)a^{\frac{1}{n-1}}$. *Equ. insolub.*
a, q, S		$u = \frac{Sq - S + a}{q}$.
q, n, S		$u = Sq^{n-1}\left(\frac{q-1}{q^n-1}\right)$.
a, u, n	q	$q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$.
a, n, S		$q^n - \frac{Sq}{a} + \frac{S}{a} - 1 = 0$. *Equ. insolub.*
a, u, S		$q = \frac{S-a}{S-u}$.
n, u, S		$q^n - \frac{S}{S-u} \cdot q^{n-1} + \frac{u}{S-u} = 0$. *Eq. insol.*

Date	*Si ha*	FORMOLE.
a,u,q	n	$n=1+\dfrac{\log.u-\log.a}{\log.q}$.
a,u,S	n	$n=1+\dfrac{\log.u-\log.a}{\log.(S-a)-\log.(S-u)}$.
a,q,S	n	$n=\dfrac{\log.(Sq-S+a)-\log.a}{\log.q}$.
u,q,S	n	$n=1+\dfrac{\log.u-\log.(uq-Sq+S)}{\log.q}$.
a,u,n	S	$S=\dfrac{u^{\frac{n}{n-1}}-a^{\frac{n}{n-1}}}{u^{\frac{1}{n-1}}-a^{\frac{1}{n-1}}}$.
a,q,n	S	$S=a\left(\dfrac{q^n-1}{q-1}\right)$.
a,u,q	S	$S=\dfrac{uq-a}{q-1}$.
u,n,q	S	$S=\dfrac{u}{q^{n-1}}\left(\dfrac{q^n-1}{q-1}\right)$.

644. Onde verificare alcune delle ritrovate formole, si prenda per esempio, la progressione numerica

$$\div\!\div\, 1:2:4:8:16:32:64\,,$$

che paragonata colla generale, da cui si sono ricavate le due equazioni fondamentali, dà

$$a=1\,,\ q=2\,,\ u=64\,,\ n=7\,,\ S=127.$$

Se si volesse, per fare un esempio, il primo termine di una progressione, l' ultimo termine della quale fosse 64, la ragione 2, e la somma di tutti i suoi termini 127. Dalla formola $a=uq-Sq+S$, si avrebbe in questo caso

$$a=64.2-127.2+127=128-254+127=1.$$

Se date le medesime cose si bramasse sapere il numero dei termini della progressione stessa. Dalla formola $n=1+\dfrac{\log.u-\log.(uq-Sq+S)}{\log.q}$, si avrebbe $n=1+\dfrac{\log.64-\log.1}{\log.2}=1+\dfrac{\log.64}{\log.2}=$

$$1+\frac{1{,}80618}{0{,}30103}=1+6=7.$$

Se si volesse determinare la ragione di una progressione, il di cui primo termine fosse 1, l' ultimo 64, e la somma 127. Dalla formola

$$q=\frac{S-a}{S-u}\,,\ \text{si avrebbe}\ q=\frac{127-1}{127-64}=\frac{126}{63}=2.$$

Il numero dei termini della medesima progressione si otterrebbe mediante le opportune sostituzioni dei valori di a, u ed S nella formola

$n=1+\dfrac{\log.u-\log.a}{\log.(S-a)-\log.(S-u)}$, e sarebbe in questo caso. $n=1+\dfrac{\log.64-\log.1}{\log.126-\log.63}=$

$$1+\frac{\log.64}{\log.\frac{126}{63}}=1+\frac{\log.64}{\log.2}=7.$$

Operando in un modo simile a questo, si potranno con tutta facilità verificare tutte le altre formole contenute nella precedente tavola.

Applichiamo ora le trovate formole alla soluzione di alcuni problemi.

645. *Problema* I. Un giuocatore ha guadagnato in varie partite 60500 lire: nella prima partita ha guadagnato 500 lire, nell' ultima 40500: i guadagni fatti nelle altre partite sono medj proporzionali geometrici fra questi due estremi. Ciò posto si cerca il numero delle partite?

Soluzione. I guadagni parziali formeranno una progressione geometrica, in cui $a=500$, $u=40500$ ed $S=60500$. Questi valori sostituiti nella formola $n=1+\frac{log.u-log.a}{log.(S-a)-log.(S-u)}$

danno $n=1+\frac{log.40500-log.500}{log.60000-log.20000}=$

$$1+\frac{log.\frac{40500}{500}}{log.\frac{60000}{20000}}=1+\frac{log.81}{log.3}=1+\frac{log.3^4}{log.3}=$$

$1+\frac{4.log.3}{log.3}=1+4=5$: onde le partite furono cinque. Per avere poi il rapporto dei guadagni, nella formola $q=\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$, si pongano i valori di a, u ed n dati dalle condizioni del problema, o determinati, e sarà

$q=\sqrt[4]{\frac{40500}{500}}=\sqrt[4]{81}=3$: onde si vede che in ogni partita il giuocatore triplicava la posta.

646. *Problema* II. Un generale, per trionfare del suo inimico, ha dovuto dare otto combattimenti, nell' ultimo dei quali tra morti, feriti, e prigionieri ha perduto 65536 uomini. Facendo il calcolo dei soldati perduti, ha trovato che le perdite fatte nei diversi combattimenti formavano una progressione geometrica, la di cui ragione è 4; si domanda la perdita fatta nel primo combattimento; e la perdita totale?

Soluzione. Mettendo nella formola $a=\frac{u}{q^{n-1}}$, in luogo di u, 65536, in vece di q il suo valore 4, ed 8 in luogo di n, sarà $a=\frac{65536}{4^7}=\frac{65536}{16384}=4$,

e nella formola $S=\frac{u}{q^{n-1}}\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)$, sostituendo i medesimi valori, sarà $S=\frac{65536}{4^7}\left(\frac{4^8-1}{4-1}\right)=$

$$4\left(\frac{65536-1}{3}\right)=\frac{4\times 65535}{3}=87380.$$

Nel primo combattimento ha perduto quattro uomini, ed in tutto 87380 uomini.

647. *Problema* III. Sessa Dehir inventore del giuoco degli Scacchi avendo avuto da Scheramo Re delle Indie la scelta della ricompensa, che desiderava per sì bella invenzione, domandò un grano di frumento per la prima casella dello scacchiere,

due grani per la seconda, 4 per la terza, 8 per la quarta casella, e così di seguito raddoppiando sempre sino alla sessagesima quarta ed ultima casella. Quanti grani di frumento addimandò egli?

Soluzione, Il numero cercato si ha dalla somma dei termini di una progressione, in cui $a=1$, $q=2$, $n=64$. Questi valori di a, q ed n sostituiti nella formola $S=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$, danno

$$S=\frac{1(2^{64}-1)}{2-1}=2^{64}-1=18446744073709551615$$

pel numero ricercato.

Ora, per formare il peso di una libbra di frumento, vi vogliono all' incirca 13050 grani: vi saranno adunque 1413543607180808 libbre di frumento, le quali valutate a soldi 2 l' una, danno lire 141354360718080 e soldi 16, somma di denaro estremamente grande.

648. La teorica delle proporzioni e progressioni geometriche è la più vantaggiosa e la più importante parte della Matematica elementare: le proporzioni non solamente trovano di continuo delle utilissime applicazioni in tutte le parti delle scienze Fisico-Matematiche, ma ne incontrano ognora nel commercio stesso della vita comune: vi è sempre proporzione tra i prezzi e le mercanzie, tra le differenti specie di monete, tra gli spazj, le velocità ed i tempi, ecc.; tutto si riduce sempre a determinare il rapporto tra due o più quantità. Le principali regole d' aritmetica dipendono tutte da questa teorica.

Delle proporzioni armoniche, e contrarmoniche.

649. In conseguenza di quanto si è detto al (564) si potrà con tutta facilità trovare uno dei termini di una proporzione armonica o contrarmonica, dati che sieno gli altri tre, come pure si potrà avere uno dei termini di una proporzione armonica o contrarmonica continua, dati che sieno gli altri due. Così se fossero dati gli ultimi tre termini b, c, d di una proporzione armonica, chiamato x il primo, si avrebbe (564) geometricamente $x:d::x-b:c-d$, donde

$cx-dx=dx-bd$, ed $x=\frac{bd}{2d-c}$. Come pure se si volesse la quarta proporzionale armonica alle tre quantità a, b, c, si avrebbe geometricamente $a:x::a-b:c-x$, ossia

$ac-ax=ax-bx$, per cui $x=\frac{ac}{2a-b}$. La media armonicamente proporzionale alle due date quantità a e c si avrà

dalla proporzione $a:c::a-x:x-c$, da cui $x=\frac{2ac}{a+c}$.

La prima proporzionale alle tre quantità date b, c, d di una proporzione contrarmonica si avrà dalla proporzione $d:x::x-b:c-d$, dalla quale si ricava

$$x=\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left((c-d)\,d+\frac{b^2}{4}\right)}.$$

La terza proporzionale di una proporzione continua contrarmonica alle due date quantità a, b si ottiene dalla proporzione geometrica $x:a::a-b:b-x$, dalla quale si ricava

$$x=\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left((b-a)\,a+\frac{b^2}{4}\right)}.$$

Tutte queste proporzionali si hanno facilmente ponendo mente a quanto si è detto al (564).

650. Se tre quantità a, b, c sono in proporzione aritmetica continua, i prodotti ab, ac, bc formeranno una proporzione armonica pure continua. Poichè, essendo $a.b:b.c$, si

ha anche $a+c=2b$, e moltiplicando ambi i membri di questa equazione per abc, si ottiene

$$a^2bc + abc^2 = 2ab^2c, \text{ cioè}$$
$$a^2bc - ab^2c = ab^2c - abc^2, \text{ ossia}$$
$$ab(ac - bc) = bc(ab - ac),$$

da cui ricavasi la proporzione geometrica
$ab : bc :: ab - ac : ac - bc$, ove si vede chiaramente essere le quantità ab, ac, bc in proporzione armonica continua (564).

651. I quozienti, che si ottengono dividendo una stessa quantità per tre altre, che siano in proporzione armonica continua, sono in proporzione aritmetica continua. Poichè supposto essere le tre quantità a, b, c in proporzione armonica continua, sarà (649) $b = \frac{2ac}{a+c}$, e quindi quelle tre quantità si cangeranno in a, $\frac{2ac}{a+c}$, c. Se ora si divide la quantità d per ciascuna di queste, si avranno le tre frazioni

$$\frac{d}{a},\ \frac{d}{\frac{2ac}{a+c}},\ \frac{d}{c},\ \text{ossia } \frac{d}{a},\ \frac{ad+cd}{2ac},\ \frac{d}{c},$$

le quali sono in proporzione aritmetica continua, poichè

$$\frac{d}{a} + \frac{d}{c} = 2 \times \frac{ad+cd}{2ac} = \frac{ad+cd}{ac}.$$

652. I quozienti, che si ottengono dividendo una data quantità per tre altre in proporzione aritmetica continua, sono in proporzione armonica parimente continua; giacchè date le tre quantità a, b, c in proporzione aritmetica continua, sarà $a+c=2b$, e $b = \frac{a+c}{2}$, per cui le quantità date saranno a, $\frac{a+c}{2}$, c; se poi si divide d per ciascuna delle medesime, si avranno le tre frazioni $\frac{d}{a}$, $\frac{2d}{a+c}$, $\frac{d}{c}$, le quali sono

in proporzione armonica continua, giacchè da esse si ricava la proporzione geometrica

$$\frac{d}{a} : \frac{d}{c} :: \frac{d}{a} - \frac{2d}{a+c} : \frac{2d}{a+c} - \frac{d}{c}, \text{ cioè}$$
$$\frac{d}{a} : \frac{d}{c} :: \frac{ad+cd-2ad}{a(a+c)} : \frac{2cd-ad-cd}{c(a+c)}, \text{ ossia}$$
$$\frac{d}{a} : \frac{d}{c} :: \frac{cd-ad}{a} : \frac{cd-ad}{c},$$

come può verificarsi facendo il prodotto dei medj e degli estremi.

653. Da quello che si è esposto, ne segue, che una proporzione armonica continua, si cangerà in un' altra continua aritmetica, oppure questa in quella, se si dividerà l' unità per ciascun termine di quelle proporzioni: così, data la proporzione aritmetica $\div\ 3 . 7 . 11$, le tre frazioni $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11}$ formeranno una proporzione armonica continua, poichè si ha $\frac{1}{3} : \frac{1}{11} :: \frac{1}{3} - \frac{1}{7} : \frac{1}{7} - \frac{1}{11}$, cioè $\frac{1}{3} : \frac{1}{11} :: \frac{4}{21} : \frac{4}{77}$: così pure dalla proporzione armonica continua 30, 20, 15 si avrà la proporzione aritmetica continua $\div\ \frac{1}{30} . \frac{1}{20} . \frac{1}{15}$.

CAPITOLO XV.

Dell' uso delle proporzioni e progressioni geometriche, e dei logaritmi per la dottrina degli interessi sì semplici, che composti.

654. A motivo del vantaggio, che col mezzo del danaro l' uomo può procurarsi impiegandolo nell' acquisto di terre, nel commercio, o in lavori produttivi, ne segue che uno, il quale prenda ad imprestito una somma di danaro debba, nel restituirla dopo un determinato tempo, aggiungervi una ricompensa per indennizzare il prestatore degli utili, che si sarebbe procurati, se egli stesso l' avesse impiegata. Tale è l' idea che dobbiamo formarsi dell' interesse del danaro. Onde determinarlo poi si suole riferire la somma presa ad imprestito a quella di 100 lire, assunta per unità, e si conviene quanto debba rendere di utile alla fine di un determinato tempo preso pure per unità, e che ordinariamente suole essere un anno.

Onde prendere la cosa nella maggiore sua generalità, si supponga che alla fine di un anno la somma 1 debba produrre un interesse espresso da f, essendo f una frazione vera. L' interesse di una somma 100 per lo stesso tempo sarà espresso da $100f$ come facilmente si può rilevare dalla proporzione $1 : f :: 100 : x$; quello di una somma qualunque c sarà espresso da cf; donde ne deriva che un capitale c impiegato ad interesse in ragione di f per 1 diverrà, indicando con S l' ammontare totale e del capitale e del frutto, alla fine di un anno $S = c + cf$.

Mediante questa relazione egli è facile di trovare l' interesse di una data somma qualunque allora che è noto l' interesse di 100 lire, oppure di qualunque altra somma, per un determinato tempo; così supponendo, come ordinariamente si usa, che un capitale di 100 lire alla fine di un anno dia 5 lire di interesse, l' interesse di un altro capitale qualunque, per esempio, di 2300 lire si ricaverà facilmente dalla seguente proporzione: se 100 lire di capitale danno 5 lire d' interesse, 2300 lire di capitale daranno x lire di interesse, cioè $100 : 5 :: 2300 : x$, da cui si ricava $x = 115$: onde alla fine

di un anno dovrà il debitore restituire al prestatore 2415 lire Questa stessa somma si sarebbe immediatamente ritrovata, ponendo nell' equzione $S = c + cf$ in luogo di c, 2300 lire, ed in vece di f, $\frac{1}{20}$ di lira, per essere $100f = 5$ secondo l' ipotesi: di fatto facendo una tale sostituzione, si ha

$$S = 2300 + 2300 \times \frac{1}{20} = 2300 + 115 = 2415.$$

Questo problema appartiene alla regola *d' interesse semplice*.

655. Dicesi che un capitale è impiegato ad *interesse composto* allorquando il prestatore, invece di ritirare alla fine dell' anno l' interesse del capitale, lo lascia tra le mani del debitore per unirlo al capitale fruttifero, o ritirandolo fa un nuovo impiego e del capitale, e del frutto per l' anno successivo, e così di seguito per un numero n qualunque d' anni; sempre in ragione di f per 1.

656. *Problema.* Dietro questa ipotesi formare una equazione, la quale esprima la relazione tra il capitale primitivo c dato ad imprestito, il frutto f, che si ricava da una somma 1, e la somma S, che devesi rendere alla fine di n anni?

Soluzione. Dovendo la somma 1 produrre un interesse f in un anno, il capitale c produrrà un interesse cf nello stesso tempo, e la somma data ad imprestito alla fine del primo anno sarà espressa (654) da $c + cf = c(1+f)$. Ora l' interesse del capitale $c(1+f)$ per un anno, essendo $cf(1+f)$, il capitale primitivo alla fine del second' anno sarà espresso da $c(1+f) + cf(1+f) = c(1+f)(1+f) = c(1+f)^2$. Questo nuovo capitale producendo in un anno un frutto rappresentato da $cf(1+f)^2$, ne verrà che il capitale primitivo alla fine del terzo anno sarà

$$c(1+f)^2 + cf(1+f)^2 = c(1+f)^3.$$

Ragionando sempre nel medesimo modo, è facile vedere, che il capitale c diverrà alla fine del quarto anno $c(1+f)^4$, alla fine del quinto anno sarà $c(1+f)^5$, e così di seguito; di modo che, alla fine di un numero n di anni; esso sarà espresso da $c(1+f)^n = S$. Per lo che il fondo principale, e le somme da rendersi alla fine del primo, del secondo, del terzo, dell'*ennesimo* anno formeranno la seguente progressione geometrica.

$\div c : c(1+f) : c(1+f)^2 : c(1+f)^3 : \ldots : c(1+f)^n$, nella quale n indica il numero degli anni passati dall'istante dell'imprestito, $1+f$ la ragione, e $c(1+f)^n$ il termine generale.

Coll' equazione $c(1+f)^n = S$, date che sieno tre delle quattro quantità c, f, n, S, che la compongono, si potrà sempre determinare la quarta.

657. 1.° *Caso.* Date le quantità c, f, ed n, trovare S.

L'equazione superiore presenta immediatamente il valore di S espresso per le quantità date.

Per fare un esempio, si supponga di voler sapere cosa diverrebbe una somma di 1000 lire dopo dieci anni data ad interesse composto al 5 per cento.

Si avrà in questo caso $c = 1000$, $f = \frac{1}{20}$, $n = 10$, e per conseguenza $1000\left(1+\frac{1}{20}\right)^{10} = S$, ossia $1000\left(\frac{21}{20}\right)^{10} = S$, e prendendo i logaritmi sarà $\log. S = \log. 1000 + 10 \log \frac{21}{20} =$
$3,0000000 + 10(\log. 21 - \log. 20) =$
$3,0000000 + 10(1,3222193 - 1,3010300) =$
$3,0000000 + 0,2118930 = 3,2118930.$
Passando ora dai logaritmi ai numeri, si trova essere $S = 1628,89$ prossimamente.

658. Se il frutto convenuto fosse il 6 per 100, in allora sarebbe $100 f = 6$, e per conseguenza $f = \frac{3}{50}$, e l'equazione generale in questa supposizione diverrebbe $c\left(\frac{53}{50}\right)^n = S$. Si ragioni in simile modo per qualunque altro interesse.

659. 2.° *Caso.* Conoscendo c, S, n trovare f.

L'equazione generale $c(1+f)^n = S$ dà in questo caso $1+f = \sqrt[n]{\frac{S}{c}}$, per cui $f = \sqrt[n]{\frac{S}{c}} - 1$.

Se $n = 10$, $S = 1628,89$, $c = 1000$; sarà

$$f = \sqrt[10]{\frac{1628,89}{1000}} - 1 = \sqrt[10]{1,62889} - 1 = 1,05 - 1 = 0,05 = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}.$$

660. 3.° *Caso.* Conoscendo S, f, n, trovare c.

Dividendo ambi i membri dell'equazione generale $c(1+f)^n = S$ per $(1+f)^n$, si avrà subito $c = \frac{S}{(1+f)^n}$.

Se si volesse sapere il valore di un capitale da impiegarsi perchè alla fine di 10 anni, mediante l'interesse composto del 5 per 100, divenisse 1000 lire, si farebbe $S = 1000$, $f = \frac{1}{20}$, $n = 10$, e per conseguenza $c = \frac{1000}{\left(\frac{21}{20}\right)^{10}}$. E prendendo i logaritmi sarebbe $\log. c = \log. 1000 - 10 \log. \frac{21}{20} =$
$3,0000000 - 0,2118930 = 2,7881070$. Passando poi dai logaritmi ai numeri, si avrebbe $c = 613,9$ ad un di presso.

661. 4.° *Caso.* Conoscendo S, c, f, trovare n.

Prendendo i logaritmi di ambedue i membri dell'equazione generale $c(1+f)^n = S$, si ha $\log. c + n \log.(1+f) = \log. S$: donde si ricava $n = \frac{\log. S - \log. c}{\log.(1+f)}$.

Volendo determinare il tempo, che un dato capitale debba rimaner impiegato al 5 per 100, per divenire doppio, si porrà nella superiore equazione $2c$, in luogo di S, ed $\frac{1}{20}$ in vece di f, per lo che sarà

$$n = \frac{\log. 2c - \log. c}{\log. \frac{21}{20}} = \frac{\log. 2}{\log. \frac{21}{20}} = \frac{0,3010300}{0,0211893} =$$

$14,2066 = 14$ anni, 2 mesi, 14 giorni e 9 ore ad un di presso.

662. Ponendo nel valore di n superiormente determinato $3c$, $4c$, $5c$ .... mc in luogo di S, e facendo sopra di esso le opportune operazioni, si scoprirà con tutta facilità il tempo necessario, perchè un capitale qualunque impiegato nel modo sopra indicato diventi tre, quattro, cinque, ed in generale m volte maggiore. Facendo poi S eguale ad una data somma qualunque, si troverà il tempo necessario, perchè un capitale c divenghi eguale alla somma proposta.

Se, per esempio, si volesse sapere il tempo necessario, perchè un capitale di 1000 lire impiegato al 5 per 100 diventi 1000000 di lire, fatte le opportune sostituzioni nel valore generale di n, si avrebbe

$$n = \frac{\log. 1000000 - \log. 1000}{\log. \frac{21}{20}} = \frac{\log. 1000}{\log. \frac{21}{20}} =$$

$\frac{3,0000000}{0,0211893} = 141,5809 = 141$ anni, 6 mesi, 29 giorni, e 5 ore prossimamente.

663. *Problema.* Ritenuto quanto si è detto nel problema precedente, se il prestatore alla fine di ogni anno, oltre i frutti decorsi, aggiungesse una nuova somma al capitale di quell' anno, e ciò per n anni, si domanda quale sarebbe alla fine dell' ultimo anno l' ammontare di tutte quelle somme coi loro interessi composti?

Soluzione. Chiamando c, c', c'', c''' .... $c^{(n-1)}$ le somme rispettive somministrate dal prestatore il primo, il secondo, il terzo, il quarto anno, ecc., la somma c alla fine di n anni (656) diverrebbe $c(1+f)^n$, la somma c' alla fine di $n-1$ anni diverrebbe $c'(1+f)^{n-1}$, la somma c'' alla fine di $n-1$ anni diverrebbe $c''(1+f)^{n-2}$; e così delle altre sino all' ultima somma $c^{(n-1)}$, la quale non rimanendo

impiegata, che per un solo istante, resterà la medesima. Ora chiamando S l' ammontare di tutte queste somme, si avrà l' equazione

$$S = c(1+f)^n + c'(1+f)^{n-1} + c''(1+f)^{n-2} \ldots + c^{(n-1)}.$$

Calcolando ciascun termine del secondo membro di questa equazione separatamente, la somma di tutti i risultamenti, che si otterranno ci darà il ricercato valore di S.

664. Questa operazione viene molto semplificata, supponendo costante la somma aggiunta, ed eguale al capitale primitivo, supponendo cioè $c = c' = c'' = c'''$ ...... $= c^{(n-1)}$, nel qual caso si viene ad avere

$$S = c(1+f)^n + c(1+f)^{n-1} + c(1+f)^{n-2} \ldots + c(1+f) + c.$$

Dove il secondo membro è una progressione geometrica scritta a rovescio, il di cui primo termine è c, l' ultimo $c(1+f)^n$, la ragione $1+f$, ed il numero de' termini è $n+1$, e per conseguenza la somma della medesima (626) è

$$S = \frac{c(1+f)^n(1+f) - c}{f} = \frac{c[(1+f)^{n+1} - 1]}{f}.$$

Questa equazione presenta pure quattro diversi quesiti corrispondenti a quelli dell' equaziene $c(1+f)^n = S$ (656).

Per fare un esempio, supponiamo che ad un capitale di 1000 scudi, dato ad interesse composto del 5 per 100, si aggiunga annualmente un altro capitale pure di 1000 scudi, oltre i rispettivi interessi, e questa aggiunta si faccia per tre anni, si avrà in questo caso $c = 1000$, $n = 3$, $1+f = \frac{21}{20}$, e

per conseguenza $S = \dfrac{1000\left\{\left(\frac{21}{20}\right)^4 - 1\right\}}{\frac{1}{20}}$. Prendendo i logaritmi, si avrà

$$\log. S = \log. 1000 + \log. \left\{\left(\frac{21}{20}\right)^4 - 1\right\} - \log. \frac{1}{20} =$$

$$\log. 1000 + \log. \left(\frac{194481}{160000} - 1\right) + \log. 20 =$$

$log.\ 1000 + log.\ 34481 - log.\ 160000 + log.\ 20.$

Ora	$log.\ 1000$	$= 3,0000000$
	$log.\ 34481$	$= 4,5375799$
	$log.\ 20$	$= 1,3010300$
		$8,8386099$
	$log.\ 160000$	$= 5,2041200$
onde	$log.\ S$	$= 3,6344899.$

Passando poi dai logaritmi ai numeri, si trova $S = 4310,12$ prossimamente.

665. Se fossero eguali tra di loro solamente le somme aggiunte dopo il primo anno, se fosse cioè

$$c' = c'' = c''' \dots = c^{(n-1)},$$

l' equazione del (663) diverrebbe

$S = c(1+f)^n + c'(1+f)^{n-1} + c'(1+f)^{n-2} \dots \dots$
$\dots + c'(1+f) + c'$. Dove si vede che il capitale totale consiste in due parti, la prima delle quali è espressa da $c(1+f)^n$, e la seconda scritta a rovescio forma la progressione geometrica

$$\div c' : c'(1+f) : c'(1+f)^2 : \dots\dots\dots : c'(1+f)^{n-2} : c'(1+f)^{n-1},$$

composta di n termini, la di cui somma è evidentemente

$$\frac{c'(1+f)^{n-1}(1+f) - c'}{f} = \frac{c'[(1+f)^n - 1]}{f}.$$

Onde $S = c(1+f)^n + c'\dfrac{[(1+f)^n - 1]}{f}$.

Se al capitale, per esempio, di 1000 scudi impiegato al 5 per 100, si aggiungerà alla fine di ogni anno un altro capitale di 100 scudi, oltre gli interessi decorsi, e ciò per anni 25 si determinerà il valore totale del capitale alla fine dei 25 anni, ponendo in questa formola

$c = 1000$, $n = 25$, $c' = 100$, $f = \frac{1}{20}$. Per cui

$S = 1000\left(\frac{21}{20}\right)^{25} + \dfrac{100\left\{\left(\frac{21}{20}\right)^{25} - 1\right\}}{\frac{1}{20}}$. Calcolando ora il primo termine separatamente, si ha

$log.\ 1000\left(\frac{21}{20}\right)^{25} = log.\ 1000 + 25\ log.\ \frac{21}{20} =$
$3,0000000 + 0,5297325 = 3,5297325$, e passando dai logaritmi ai numeri, si ha $1000\left(\frac{21}{20}\right)^{25} = 3386,36$ ad un di presso.

Calcolando il secondo termine, si ha

$$log.\ 100\ \frac{\left\{\left(\frac{21}{20}\right)^{25} - 1\right\}}{\frac{1}{20}} = log.\ 100 + log.\ \left\{\left(\frac{21}{20}\right)^{25} - 1\right\}$$

$- log.\ \frac{1}{20} = log.\ 100 + log.\ (3,38636 - 1) + log.\ 20 =$
$log.\ 100 + log.\ 2,38636 + log.\ 20 =$
$2,0000000 + 0,3777359 + 1,3010300 = 3,6787659.$
Passando dai logaritmi ai numeri, si trova essere

$$\frac{100\left\{\left(\frac{21}{20}\right)^{25} - 1\right\}}{\frac{1}{20}} = 4772,72 \text{ prossimamente:}$$

onde $S = 3386,36 + 4772,72 = 8159,08$ ad un di presso.

666. Il valore di n ricavato dall' equazione del numero precedente indicherebbe il tempo necessario perchè una data somma c impiegata ad interesse composto, coll' aggiunta di un' altra somma c' annua nello stesso modo impiegata, divenisse doppia, tripla, ecc., oppure eguale ad un' altra somma qualunque data. In tal caso nella formola sopraccitata non si dovrebbe far altro, che $S = 2c$, $S = 3c$, ecc., $S =$ alla data somma qualunque.

667. Se si supponesse che qualcuno, in vece di aggiungere al capitale c da prima impiegato, vi levasse alla fine di ogni anno la somma c'; il valore del capitale residuo dopo un numero n di anni, impiegato all' interesse composto di f per 1, sarebbe espresso dalla formola

$S = c(1+f)^n - c'\frac{[(1+f)^n - 1]}{f}$, la quale differisce da quella del (665) nel solo segno posto al secondo termine del secondo membro, come appunto deve essere atteso che, stando a quell' ipotesi, si doveva in quel caso aggiungere ogni anno la stessa somma c', che adesso si leva.

Se poi in essa si farà $S = 0$, si avrà

$cf(1+f)^n = c'[(1+f)^n - 1]$, dove si potrà prendere alternativamente per incognita il capitale primitivo c, la somma c', che si deve levare ogni anno, la quantità f, che è l' interesse convenuto, e finalmente il tempo n. Volendo trovare quest' ultimo bisogna necessariamente ricorrere ai logaritmi. Liberando primieramente $(1+f)^n$, si ha

$(1+f)^n = \frac{c'}{c' - cf}$, e prendendo i logaritmi,

$n \, log.\,(1+f) = log.\,c' - log.\,(c' - cf)$, per cui

$$n = \frac{log.\,c' - log.\,(c' - cf)}{log.\,(1+f)}.$$

Se si volesse sapere il tempo necessario, perchè un capitale di 10000 lire impiegato al 5 per 100 abbia da estinguersi, mediante il pagamento annuo di 1000 lire, si farebbe in questa equazione

$$c = 10000,\ c' = 1000,\ f = \frac{1}{20},\ 1+f = \frac{21}{20},$$

per cui si avrebbe

$$n = \frac{log.\,1000 - log.\left(1000 - \frac{10000}{20}\right)}{log.\,\frac{21}{20}} =$$

$$\frac{log.\,1000 - log.\,500}{log.\,\frac{21}{20}} = \frac{log.\,\frac{1000}{500}}{log.\,\frac{21}{20}} = \frac{log.\,2}{log.\,\frac{21}{20}} =$$

$\frac{0,3010300}{0,0211893} = 14$ anni, 2 mesi, 14 giorni, e 9 ore prossimamente.

668. Dall' equazione $cf(1+f)^n = c'[(1+f)^n - 1]$, si ricava $c' = \frac{cf(1+f)^n}{(1+f)^n - 1}$, ciò che indica il valore della somma annuale necessaria per estinguere un dato capitale co' suoi frutti in un determinato tempo.

Per determinare la somma da pagarsi ogni anno onde estinguere un capitale di 10000 lire co' suoi interessi al 5 per 100 in 12 anni, si porrà nella formola superiore $c = 10000$, $n = 12$, $f = \frac{1}{20}$, $1+f = \frac{21}{20}$, e si avrà

$c' = \frac{\frac{10000}{20}\left(\frac{21}{20}\right)^{12}}{\left(\frac{21}{20}\right)^{12} - 1}$. Calcolando ora separatamente col mezzo dei logaritmi l' espressione $\left(\frac{21}{20}\right)^{12}$, si trova essere

$\left(\frac{21}{20}\right)^{12} = 1,79586$. Onde $c' = \frac{500 \times 1,79586}{0,79586} = 1128,26$.

Si dovranno adunque pagare annualmente 1128, 26.

669. Dall' equazione $cf(1+f)^n = c'f[(1+f)^n - 1]$ si ricava $c = \frac{c'[(1+f)^n - 1]}{f(1+f)^n}$, che è il valore di una somma da impiegare ad un dato interesse, perchè si possa, durante un determinato tempo, avere annualmente una data somma.

670. *Problema.* Trovare una formola mediante la quale si possa determinare il valore attuale di una rendita o pensione annuale S esigibile per un numero determinato n di anni, supponendo che l' interesse annuo sia f per 1?

Soluzione. L' equazione $c = \frac{S}{(1+f)^n}$ del (660), fa conoscere il valore attuale di una somma S di danaro pagabile dopo un numero n di anni, $\frac{S}{(1+f)^{n-1}}$ sarà il valore della medesima esigibile dopo $n-1$ anni, $\frac{S}{(1+f)^{n-2}}$ quello della stessa esigibile dopo $n-2$ anni, e così di seguito; di modo che $\frac{S}{1+f}$ sarà il valore della rendita stessa esigibile dopo il primo anno. Questi valori formano evidentemente la progressione geometrica

$$\div \frac{S}{1+f} : \frac{S}{(1+f)^2} : \frac{S}{(1+f)^3} : \ldots : \frac{S}{(1+f)^{n-2}} : \frac{S}{(1+f)^{n-1}} : \frac{S}{(1+f)^n}$$

composta di n termini, la di cui ragione è $\frac{1}{1+f}$. Sommando ora i termini di questa progressione, e nominando S' questa somma, si avrà

$$S' = \frac{\frac{S}{(1+f)^n} \cdot \frac{1}{1+f} - \frac{S}{1+f}}{\frac{1}{1+f} - 1} = \frac{S\left(\frac{1}{(1+f)^n} \cdot \frac{1}{1+f} - \frac{1}{1+f}\right)(1+f)}{-f},$$

dalla quale

si ha $S' = \frac{S\left(\frac{1}{(1+f)^n} - 1\right)}{-f}$, che è il valore ricercato.

Per fare un esempio, supponiamo che si voglia sapere il valore attuale di una rendita annuale di 300 lire esigibile per 15 anni consecutivi, scontando gli interessi in ragione del 5 per 100, si avrà in tal caso

$S = 300$, $n = 15$, $f = \frac{1}{20}$, $1+f = \frac{21}{20}$, e per conseguenza

$$S' = \frac{300\left\{\frac{1}{\left(\frac{21}{20}\right)^{15}} - 1\right\}}{-\frac{1}{20}}.$$

Calcolando separatamente col mezzo dei logaritmi l' espressione $\left(\frac{21}{20}\right)^{15}$, si trova essere prossimamente 2,07892. Onde $S' = \frac{300\left(\frac{1}{2,07892} - 1\right)}{-\frac{1}{20}} =$

$$300\left(\frac{1-2,07892}{2,07892}\right) \times -20 = \frac{300 \times 1,07892 \times 20}{2,07892}.$$

Prendendone i logaritmi, si avrà *log.* $S' =$ *log.* $300 +$ *log.* $1,07892 +$ *log.* $20 -$ *log.* $2,07892 =$ $2,4771212 + 0,0329568 + 1,3010300 - 0,3178378 =$ $3,8111080 - 0,3178378 = 3,4932702$; e passando dai logaritmi ai numeri si trova $S' = 3113,655$ ad un di presso.

671. L' equazione $S' = \frac{S\left(\frac{1}{(1+f)^n} - 1\right)}{-f}$ ci somministra il modo di determinare una qualunque delle quattro quantità S', S, f, ed n, purchè sieno conosciute le altre tre. Un tale esercizio potrà essere utile ai giovani studiosi.

672. I limiti che mi sono prescritto non mi permettono di trattenermi ulteriormente su questi quesiti: farò però osservare, prima di por fine a questo capitolo, che per paragonare il valore di diverse somme, rapporto a chi le deve pagare o ricevere, bisogna ridurle alla medesima epoca, cercare cioè quanto darebbero di capitale esigibile nello stesso tempo.

Onde fare un esempio si supponga, che un banchiere debba una somma S pagabile dopo n anni, e che per liberarsi di questo debito offra in pagamento un effetto S' esigibile dopo un numero n' d'anni. Riportando la prima somma al momento, in cui si effettua l'operazione, nella supposizione che lo sconto sia di f per 1, essa (660) non varrà che $\dfrac{S}{(1+f)^n}$ dovendo questa considerarsi come il valore primitivo di un capitale divenuto S, dopo un numero n di anni. Alla stessa epoca il valore di S' sarà per una simil ragione $\dfrac{S'}{(1+f')^{n'}}$ nella supposizione che sia in questo caso lo sconto di f' per 1. La differenza $\dfrac{S}{(1+f)^n} - \dfrac{S'}{(1+f')^{n'}}$ indicherà, secondo che essa sarà positiva o negativa, ciò che dovrà dare il banchiere o ricevere a compimento del suo cambio.

Sia, per esempio, $S = 1000$, $n = 10$, $f = \dfrac{1}{20}$,

$1 + f = \dfrac{21}{20}$, $S' = 700$, $n' = 5$, $f' = \dfrac{3}{50}$, $1 + f' = \dfrac{53}{50}$,

e si avrà $\dfrac{1000}{\left(\dfrac{21}{20}\right)^{10}} - \dfrac{700}{\left(\dfrac{53}{50}\right)^{5}}$. Dal (660) si ha

$\dfrac{1000}{\left(\dfrac{21}{20}\right)^{10}} = 613,9$: per valutare poi il secondo termine della superiore espressione, si prendano i logaritmi, e si avrà

$$log. \frac{700}{\left(\frac{53}{50}\right)^{5}} = log.\ 700 - 5\ log.\ \frac{53}{50} = 2,8450980$$

$- 0,1265295 = 2,7185685$, a cui corrisponde prossimamente il numero 523,1: onde

$$\frac{1000}{\left(\frac{21}{20}\right)^{10}} - \frac{700}{\left(\frac{53}{50}\right)^{5}} = 613,9 - 523,1 = 90,8.$$ Il banchiere, all'effetto, che ha dato in pagamento, dovrà al momento del cambio aggiungere 90 lire ed otto decimi di una lira, per eguagliare il valore dei due effetti valutati alla stessa epoca.

673. L'espressione

$$\frac{S\left(\frac{1}{(1+f)^n} - 1\right)}{-f} - \frac{S'\left(\frac{1}{(1+f)^{n'}} - 1\right)}{-f'}$$

servirà pei cambj, che si possono fare con due diverse rendite annue S ed S', la prima delle quali sia decorribile per un numero n di anni, e la seconda per un numero n' pure di anni, f ed f' rappresentando in quella formola gli interessi convenuti per lo sconto rispettivo.

Molti altri problemi si possono ridurre a questa classe, come sono i seguenti.

674. *Problema* I. Una popolazione di 100000 abitanti, aumentando ogni anno della sua trentesima parte, si domanda a qual numero essa ascenderà dopo un secolo?

Soluzione. Per poco che si rifletta, si vede facilmente, che questo problema può cangiarsi nel seguente. Una somma di 100000 lire impiegata ad interesse composto di $\dfrac{1}{30}$ per 1, si domanda a quanto ascenderà dopo un secolo?

Richiamando (656) la formola $S = c(1+f)^n$ e paragonandola coi dati del proposto problema, si avrà $c = 100000$, $f = \dfrac{1}{30}$, $n = 100$, e per conseguenza $S = 100000 \left(\dfrac{31}{30}\right)^{100}$, e prendendo i logaritmi, sarà

$$log.\ S = log.\ 100000 + 100\ log.\ \frac{31}{30} = 5{,}0000000$$
$$+ 1{,}4240439 = 6{,}4240439,$$ e per conseguenza $S = 2654874$. Vi saranno adunque dopo 100 anni, due milioni seicento cinquantaquattro mila ottocento settantaquattro abitanti.

675. *Problema* II. La terra non essendo stata ripopolata dopo il diluvio che dai tre figli di Noè, e dalle loro tre mogli, si domanda in quale rapporto avrebbe dovuto crescere la popolazione ogni anno, perchè vi fosse al mondo un milione di uomini dopo 200 anni?

Soluzione. Nella formola $S = c\,(1+f)^n$ si dovrà fare in questo caso $S = 1000000$, $c = 6$, $n = 200$, per cui essa diverrà $1000000 = 6\,(1+f)^{200}$. Ricavando ora il valore $1+f$, sarà

$$1+f = \sqrt[200]{\frac{1000000}{6}} = \left(\frac{1000000}{6}\right)^{\frac{1}{200}}:$$ e prendendone i logaritmi, si avrà $$log.\ (1+f) = \frac{1}{200}\ log.\ \frac{1000000}{6} =$$
$$\frac{1}{200}\,(log.\ 1000000 - log.\ 6) = \frac{1}{200}\,.\,5{,}2218487 = 0{,}0261092.$$
Onde $1+f = 1{,}0625$, e per conseguenza
$$f = 0{,}0625 = \frac{1}{16}.$$ Donde si vede che sarebbe stato necessario che il genere umano si fosse aumentato ogni anno di $\frac{1}{16}$; ciò che la salute ferma, e la lunghezza della vita degli antichi nostri padri rende assai verisimile.

Colla stessa facilità si potrà determinare il tempo necessario perchè una data popolazione aumentando o diminuendo ogni anno con un certo rapporto, essa divenghi doppia, tripla, quadrupla ed in generale *ennupla*, oppure si distrugga.

FINE.

INDICE