ELEMENTI

DI

GEOMETRIA SOLIDA

DI

FILIPPO MARIA GUIDI

PROFESSORE DI MATEMATICA NELLA REALE UNIVERSITA'

DEGLI STUDII DI NAPOLI.

NAPOLI,

DA' TORCHI DI RAFFAELLO DI NAPOLI

Vico S. Nicola a Nilo n.° 16.

1829.

INDICE

DELLE MATERIE

ELEMENTI
DI
GEOMETRIA SOLIDA

CAP. I.

Nozioni preliminari.

1. Nella Geometria piana abbiamo detto, che da noi si chiama *Superficie piana*, o semplicemente *piano*, quella superficie illimitata, sopra della quale una retta può essere applicata per tutte le direzioni, dal che ricaviamo 1.° che qualora una retta ha due punti in un piano essa deve essere interamente adattata sopra del piano. 2.° Che una retta, la quale cade sopra di un piano, non può incontrarlo in più di un punto, giacchè se avesse due punti nel piano sarebbe tutta intera nel piano 3.° Che una retta non può essere parte in un piano, e parte in un altro piano, giacchè quando ha due punti in un piano deve essere tutta intera nel piano. 4.° Che due rette le quali si incontrano sono sempre in un medesimo piano, e determinano la posizione di esso, in fatti sieno le due rette (fig. 1) AB, AC, le quali si incontrano nel punto A, noi

possiamo concepire un piano, il quale giri intorno alla retta AB, esso in tutte le sue posizioni contiene sempre il punto A appartenente alla retta AC, quando questo piano incontrerà un altro punto della retta AC essa sarà in esso contenuta, ma se esso seguitasse a girare, la retta AC non sarebbe più adattata sopra di esso, dunque non vi può essere un altro piano, nel quale sieno contenute le rette AB, AC, dal che conchiudiamo ancora, che tre punti dati non in linea retta, come sarebbero li vertici delli tre angoli di un triangolo determinano la posizione di un piano. 5.° Che due rette parallele determinano ancora la posizione di un piano, poichè secondo la definizione due rette allora sono parallele, qualora esistono nel medesimo piano, e prolungate indefinitamente non possono incontrarsi, e per conseguenza facendo passare un piano per una retta, e per un punto di una parallela ad essa, questa seconda retta sarà contenuta tutta intera nel medesimo piano, e se da un punto di un piano si tiri una retta parallela ad una altra retta contenuta nel medesimo piano, essa sarà tutta intera nel piano. 6.° Finalmente, che la comune sezione di due piani che si incontrano, o che si tagliano è una linea retta, poichè se tra due punti comuni alli due piani vi fosse un altro punto non in linea retta con li due, allora li due piani, che passerebbero per questi tre punti si confonderebbero, e formerebbero un medesimo piano.

CAP. II.

Articolo I.

Delle rette perpendicolari, ed oblique ad un piano.

2. Teor. 1. *Se una retta incontra due altre rette, le quali si intersecano al suo piede ed è ad amendue perpendicolare, essa sarà perpendicolare a tutte le altre rette, che dal medesimo punto si possono tirare nel piano, che esse determinano.*

(Fig. 2). Sia la retta AB, che incontri le due rette CD, EF, le quali si intersecano al suo piede B, e sia ad ambedue perpendicolare, dico che essa sarà perpendicolare a qualunque altra rette GH tirata dal suo piede nel piano LM determinato dalle due rette CD, EF.

Dim. Si taglino BC=BD, EB=BF, si uniscano le rette CE, FD, le quali incontrano GH nelli punti G, H, e dal punto A si tirino le rette AC, AG, AE, AF, AH, AD.

Le due rette AC, AD come egualmente distanti dal piede B della perpendicolare AB sono eguali, e per la medesima ragione anche eguali sono le rette AE, AF. Li due triangoli CBE, FBD hanno il lato BC=BD, EB=BF, e l'angolo CBE compreso fra li due lati del primo eguale all'angolo FBD compreso fra li due lati del secondo, poichè sono angoli verticali, dunque avranno le altre parti respettivamente eguali, e perciò l'angolo BCE=BDF, ed il lato EC=FD. Similmente li due triangoli CAE, DAF hanno li lati AC =AD, AE=AF, EC=DF, dunque essi sono eguali, e perciò l'angolo ACE=ADF. Dippiù li due triangoli GCB, HDB hanno l'angolo GCB=BDH, l'angolo CBG=DBH, ed eguali li lati CB, BD adjacenti a tali angoli, dunque essi sono eguali, e perciò CG =DH, e GB=BH. In oltre li due triangoli ACG, ADH hanno li lati AC, CG respettivamente eguali alli lati AD, DH, e l'angolo ACG = ADH, dunque essi sono eguali, e perciò AG=AH. Finalmente li due triangoli ABG, ABH hanno il lato AB comune, il lato GB =BH, ed AG=AH, dunque essi sono eguali, e perciò l'angolo ABG=ABH; ma questi angoli sono fatti dalla retta AB, che cade sopra di GH, dunque essi sono angoli retti, e perciò la retta AB è perpendicolare a GH; con lo stesso raziocinio si dimostra, che AB è perpendicolare a qualunque altra retta, che dal suo piede B si può tirare nel piano LM; Dunque ec.

3. Avv. La retta, che cadendo sopra di un piano è perpendicolare a tutte le rette, che dal suo piede si possono tirare nel piano, si chiama *perpendicolare al piano*, quindi la retta, che è perpendicolare a due rette, che si incontrano al suo piede è perpendicolare al piano, che esse determinano:

4. Teor. 2. *Da un punto preso in un piano non si può al piano elevare più di una perpendicolare.*

(Fig. 3.) Sia il punto A preso nel piano LM; Dico che da questo punto A non si può inalzare più di una perpendicolare sul piano LM.

Dim. Se mai è possibile dal punto A sieno inalzate le due perpendicolari AB, AC, e sia BD il piano, che esse determinano, il quale si concepisca prolungato fino tanto, che incontri il piano LM, e sia AD la comune sezione di essi.

Poichè la perpendicolare ad un piano è perpendicolare a qualunque retta, che dal suo piede si tira nel piano, ne segue, che alla AD sarà perpendicolare sì AB, che AC, e perciò sarà retto sì l'angolo BAD, che l'angolo CAD, ma gli angoli retti sono tutti eguali, dunque sarà l'angolo BAD tutto eguale alla sua parte CAD, il che è assurdo, dunque è anche assurdo, che da un punto preso in un piano si possa elevare più di una perpendicolare al piano. Sicchè ec.

5. Teor. 3. *Da un punto preso fuori di un piano non si può abbassare più di una perpendicolare al piano.*

(Fig. 3). Sia il punto C esistente fuori del piano LM, dico che da questo punto C non si può abbassare più di una perpendicolare sopra del piano LM.

Dim. Se mai è possibile sieno le due rette CA, CD ambedue perpendicolari al piano

LM. Noi abbiamo dimostrato, che due rette le quali si incontrano sono sempre nel medesimo piano, che esse determinano, quindi sia BD il piano determinato dalle rette CD, CA, il quale si intenda prolungato fino allo incontro del piano LM, e sia AD la comune sezione di essi. Noi abbiamo dimostrato che la perpendicolare ad un piano è perpendicolare a tutte le rette, che dal suo piede si possono tirare nel piano, dunque le rette CD, CA saranno perpendicolari ad AD, ed avremo il tri angolo CAD, nel quale vi sarebbero due angoli retti, il che è assurdo, dunque è anche assurdo che dal punto A si possano calare due perpendicolari al piano LM. Sicchè ec.

6. Cor. Poichè la perpendicolare CD è l'unica, che si possa calare dal punto C sopra del piano LM, ne segue, che tutte le altre rette, che dal punto C si possono calare sopra del piano LM sono oblique al medesimo piano, quindi se dal punto D si tirino delle rette alli piedi delle oblique, si formeranno delli triangoli rettangoli, li quali avranno per ipotenuse le oblique, ed avranno per cateto comune la perpendicolare; ma in qualunque triangolo rettangolo il cateto è sempre minore della ipotenusa, dunque di tutte le rette, che da un punto esistente fuori di un piano si possono calare sopra del piano la perpendicolare è la minima, quindi essendo la perpendicolare calata sopra di un piano da un punto esistente fuori di esso unica, e minore

di qualunque altra retta, che dal medesimo punto si può calare sul piano, ne segue, che essa è la misura naturale della distanza, che il punto ha dal piano.

7. Teor. 4. *Da un punto preso in una retta non si può tirare più di un solo piano a cui essa sia perpendicolare.*

(Fig. 4). Dal punto B della retta AB sia tirato il piano DF, a cui AB sia perpendicolare; dico, che non si può dal punto B tirare un altro piano, al quale la medesima AB sia perpendicolare.

Dim. Se mai è possibile dal punto B sia tirato l'altro piano DM, al quale sia anche perpendicolare la retta AB, e per la retta AB si faccia passare un piano ABLN, il quale tagli li piani DF, DM, e sieno BK, BL le comuni intersezioni delli piani DF, DM col piano ABLN.

Essendo per la ipotesi AB perpendicolare al piano DF essa sarà perpendicolare alla retta BK dal suo piede tirata nel piano DF, ed essendo per la sopposizione la stessa AB perpendicolare piano DM, essa sarà perpendicolare ancora alla retta BL tirata dal suo piede nel piano DM, quindi li due angoli ABK, ABL saranno amendue retti, e perciò eguali, il chè è assurdo poichè ne risulterebbe la parte eguale al tutto, dunque è anche assurdo, che da un punto preso in una retta si possa tirare più di un piano, al quale essa sia perpendicolare. Sicchè ec.

8. Teor. 5. *Se una retta è perpendicolare a più di due rette tirate dal medesimo punto, queste rette saranno nel medesimo piano.*

(Fig. 5.) Dal punto B della retta AB sieno tirate le tre rette BC, BD, BF perpendicolari ad AB, dico che esse sono tutte tre nel medesimo piano.

Dim. Se si nieghi essere le tre rette BC, BD, BF nel medesimo piano, almeno due di esse saranno nel medesimo piano, sieno le due BC, BD nel piano LM, che esse determinano, e poicchè AB è per pendicolare alle due rette BC, BD che s' incontrano al suo piede, esse sarà perpendicolare al piano LM, da esse determinato, ed essendo per supppposizione fuori del piano LM la terza BF, noi possiamo concepire per BD, e BF, che si incontrano nel punto B passare il piano, che esse determinano, ma per ipotesi AB è perpendicolare alle due rette BD, BF, che si incontrauo al suo piede B, dunque AB è anche perpendicolare al piano, che BD, BF determinano, e perciò dal medesimo punto B noi avremo tirati due piani, sulli quali la medesima AB sarebbe perpendicolare, il che è assurdo, dunque è anche assurdo, che le rette BC, BD, BF non sieno nel medesimo piano. Sicchè ec.

9. Teor. 6. *Se da un punto esistente fuori di un piano sieno calate sopra del piano una perpendicolare e delle oblique. Le oblique, che incontrano il piano in punti egualmente distanti dal piede della perpendicolare sono eguali, e quelle, che incontrano il piano in punti più distanti sono maggiori di quelle, che lo incontrano in punti più vicini al medesimo piede.*

(Fig. 6). Dal punto A esistente fuori del piano LM sia calata sopra del piano la perpendicolare AB, e fatto centro il piede B di AB con qualsivoglia intervallo si descriva il cerchio CDE, e dal punto A alli punti C,D,E ec. della periferia CDE sieno tirate le oblique AC, AD, AE ec., evidentemente esse hanno li loro piedi ad eguale distanza dal piede B della perpendicolare AB, giacchè tirate le rette BC, BD, BE esse sono tutte eguali, come raggi del medesimo cerchio CDE, e prolungato il raggio BE verso F sia unita la obliqua AF, si vede chiaramente, che il suo piede F dista dal piede B della perpendicolare più di quello, che ne distano le rette, che giungono alla circonferenza CDE. Dico che AC=AD=AE ec.; e che AF è maggiore di AC, di AD ec.

Dim. 1.° La retta AB è perpendicolare al piano LM, quindi è perpendicolare a tutte le rette BC, BD, BE, ec. e perciò li triangoli ABC, ABD, ABE, ec. sono tutti rettangoli, ed hanno il cateto AB comune, e gli altri cateti BC, BD, BE, ec. tutti eguali, come raggi del medesimo cerchio, dumque anche le ipotenuse AC, AD, AE, ec. sono eguali. Sicchè, ec.

2.° Nel piano ABF sono tirate le oblique AE, AF, delle quali la AF dista dal piede B della perpendicolare AB più di quello che ne dista AE, dunque AF>AE, ma AE=AC =AD; dunque AF è anche maggiore di AC, AD, ec. Sicchè, ec.

10. Teor. 7. *Se due rette parallele incontrano un piano, ed una di essa è al piano perpendicolare, anche l'altra sarà al medesimo piano perpendicolare.*

(Fig. 7). Sieno le due rette AB, CD parallele, le quali incontrano il piano LM, e sia AB perpendicolare ad LM, dico che anche CD sarà perpendicolare al medesimo piano LM.

Dim. Si uniscano li punti B, D con la retta BD, e dal punto D si tiri nel piano LM la retta DE perpendicolare a BD, e si tagli DE=AB, finalmente si uniscano le rette AD, AE, BE.

Li due triangoli ABD, BDE sono eguali, poichè hanno il lato BD comune, il lato AB =DE per costruzione, e gli angoli ABD, BDE da tali lati compresi eguali, poichè sono amendue retti, dunque sarà AD=BE. In oltre li due triangoli ABE, ADE, avendo il lato AE comune, il lato AD=BE, ed il lato AB=DE sono eguali, e perciò l'angolo ABE=ADE, ma per la ipotesi l'angolo ABE è retto, dunque anche l'angolo ADE è retto; quindi la retta ED essendo perpendicolare alle due rette BD, DA, che si incontrano al suo piede sarà perpendicolare al piano, che esse determinano, dunque ED è perpendicolare al piano in cui esistono le rette AB, AD, ma queste rette, che uniscono le parallele AB, CD esistono nel medesimo piano delle parallele, dunque ED è perpendicolare a CD.

Finalmente le rette AB, CD che per la ipotesi sono parallele, vengono tagliate da BD, dunque la somma degli angoli interni ABD, CDB posti dalla medesima parte è eguale a due retti, ma l'angolo ABD è retto, dunque anche l'angolo CDB è retto, e perciò CD è perpendicolare a DB; ma si è dimostrato che CD è perpendicolare a DE, dunque CD essendo perpendicolare alle due BD, DE, che si incontrano al suo piede è perpendicolare anche al piano LM, nel quale esse esistono. Sicchè ec.

11. Teor. 8. *Se due rette sono perpendicolari ad un medesimo piano, esse sono parallele.*

Le due rette AB, CD siano amendue perpendicolare al piano LM, dico, che esse sono parallele.

Dim. Si unisca la retta BD, e dal punto D si tiri nel piano LM la retta DE perpendicolare a BD, ed eguale ad AB, e si uniscano le rette AD, AE, BE.

Li triangoli ABD, BDE avendo il lato AB =DE per costruzione, il lato BD comune, e gli angoli da tali lati compresi ABE, BDE eguali, poichè sono retti, sono eguali, e perciò AD=BE. Di più li due triangoli ABE, ADE hanno li lati AB, BE dell' uno respettivamente eguali alli lati ED, DA dell' altro, ed il lato AE comune, dunque essi sono eguali, e perciò l' angolo ABE=ADE, ma per la ipotesi l' angolo ABE è retto, dunque anche l' angolo ADE è retto, ma per la ipotesi anche l' angolo CDE è retto, e l' angolo BDE è retto per costruzione, dunque la retta ED è perpendicolare alle tre rette CD, DA, DB, che si incontrano al suo piede, dunque queste tre rette sono tutte tre nel medesimo piano, ma nel piano in cui sono le due DB, DA vi è ancora AB, dunque AB, CD sono in un medesimo piano, dippiù essendo per la ipotesi tutte due perpendicolari al piano LM sono perpendicolari alla medesima retta BD tirata nel piano LM, ma la rette esistenti in un medesimo piano, le quali sono perpendicolari ad una medesima retta sono parallele, dunque AB, CD sono parallele. Sicchè ec.

12. Avv. 1. Per mezzo delle proposizioni precedenti possiamo facilmente dimostrare, che se *due rette sono parallele ad una terza, ancorchè non sieno tutte tre nel medesimo piano sono parallele fra esse.*

(Fig. 8). In fatti sieno le rette CD, EF parallele alla terza AB, e siano AD, BC nel piano ABDC, ed AB, EF sieno nel piano ABEF.

Nella retta AB si prenda ad arbitrio il punto G, e da questo punto si tirino nel piano

ABDC la retta GH, e nel piano ABFE la GI amendue perpendicolari ad AB, che incontrano le rette CD, EF nelli punti H, I, e si unisca HI. Essendo la retta AG perpendicolare alle due rette GH, GI le quali si incontrano al suo piede è perpendicolare al piano GIH, che queste rette determinano, quindi le rette CD, EF, che sono ad essa parallele, sono al medesimo piano perpendicolari, ma le rette perpendicolari, ad un medesimo piano sono parallele dunque DC, FE sono parallele. Sicchè ec.

13. Avv. 2. Con la medesima facilità possiamo dimostrare, *che se due rette, le quali si incontrano in un piano sono respettivamente parallele a due altre rette che si incontrano in un altro piano l'angolo compreso fra le due prime è eguale all' angolo compreso fra le due altre purchè questi angoli abbiano le aperture rivolte dalla medesima parte.*

In fatti sieno le due rette EA, AC situate sul piano EAC, che si incontrano nel punto A respettivamente parallele ad FB, BD, che esistono nel piano FBD, e che si incontrano nel punto B. Si taglino AE=BF, AC=BD, e si uniscano le rette CE, EF, FD, AB, DC. Le rette EA, FB sono eguali, e parallele, dunque le rette EF, AB, che ne uniscono gli estremi dalla medesima parte sono ancora eguali, e parallele; similmente le rette CD, AB sono eguali e parallele dunque anche le due CD, AB, che ne uniscono gli estremi dalla medesima parte sono eguali, e parallele; finalmente le rette EF, CD essendo eguali, e parallele alla medesima AB saranno anche eguali, e parallele, e perciò le rette EF, CD, che uniscono gli estremi di esse dalla medesima parte saranno anche eguali, e parallele, quindi li due triangoli EAC, FBD avendo li tre lati dell'uno respettivamente eguali alli tre lati dell'altro sono eguali, e perciò l'angolo $EAC=FBD$. Sicchè ec.

14. Teor. 9. *Se da un punto esistente fuori di un piano si tirino sopra del piano una perpendicolare, ed una obliqua, e dal medesimo punto si tirino sopra del piano quante oblique si vogliano, le quali incontrino il piano in punti egualmente distanti dal piede della obliqua, di tutte queste oblique 1.° Quella, che ha il suo piede più vicino al piede della perpendicolare è la minima 2.° Quella, che ha il suo piede più lontano dal piede della perpendicolare è la massima. 3.° Quelle che sono più vicine alla minima sono minori di quelle, che ne sono più distanti. 4.° Ogni una di esse fuori della massima e della minima non ne può avere più di una altra che sia ad essa eguale.*

(Fig. 9). Dal punto A esistente fuori del piano LM sieno calate sopra del piano la perpendicolare AP, e la obliqua AO, indi fatto centro il punto O con qualunque intervallo sia descritto il cerchio BCD, e si tiri il diametro BE il quale passa per lo punto P, e

dal punto A alli punti E, B si tirino le rette AE, AB. Le rette tirate dal punto A a tutti li punti della periferia BCD sono ad eguale distanza del piede O della obliqua, e poichè di tutte le rette, che possono essere tirate dal punto P alla periferia, BP è la più grande, e PE è la più piccola, ne segue che AE è la più vicina, ed AB è la più lontana dal piede P della perpendicolare. Dico 1.° Che di tutte le oblique, che dal punto A si possono tirare alli punti della periferia BED, la AE è la più piccola 2.° Che la maggiore è AB 3.° Che se si tirano le rette AC, AG, delle quali AC sia più vicino di AG al piede della perpendicolare, sarà AC minore di AG. 4.° Che AC non può averne più di una altra che sia ad essa eguale.

Dim. 1. Si tiri la retta PC.

Di tutte le rette, che dal punto P si possono tirare alla periferia, PE è la minima, dunque $PE<PC$, e perciò $PE^2<PC^2$, si aggiunga ad essi di comune AP^2, avremo $AP^2+PE^2<AP^2+PC^2$, ma poichè li triangoli APC, APE sono rettangoli in P, avremo $AP^2+PE^2=AE^2$, ed $AP^2+PC^2=AC^2$, dunque $AE^2<AC^2$, e perciò $AE<AC$; con lo stesso raziocinio si dimostra che AE è minore di qualunque altra retta, che dal punto A si può tirare a qualsivoglia altro punto della periferia BCD, dunque ec.

2. Di tutte le rette, che dal punto P si possono tirare alla periferia BCD, la retta PB è la massima, e perciò $PB>PC$, e per con-

seguenza $PB^2 > PC^2$, si aggiunga di comune AP^2 sarà $AP^2+PB^2 > AP^2+PC^2$, ma poichè li triangoli APB, APC, sono rettangoli in P, abbiamo $AP^2+PB^2=AB^2$, ed $AP^2+PC^2=AC^2$ dunque $AB^2 > AC^2$, e perciò $AB > AC$; con lo stesso raziocinio si può dimostrare, che AB è maggiore di qualunque altra retta, che dal punto A si tira a qualsivoglia altro punto della circonferenza BCD. dunque ec.

3.° Si tiri la retta PG.

La retta $PC < PG$, e perciò $PC^2 < PG^2$, si unisca di comune AP^2, sarà $AP^2+PC^2 < AP^2+PG^2$, ma $AP^2+PC^2=AC^2$, ed $AP^2+PG^2=AG^2$, dunque $AC^2 < AG^2$, e per conseguenza $AC < AG$. Sicchè ec.

4.° Al centro O si faccia l'angolo $POH=POG$, e si uniscano le rette AH, HP.

Li due triangoli POH, POG hanno il lato OP comune, il lato $OG=OH$, ed eguali gli angoli POH, POG da questi lati compresi, dunque essi sono eguali, e perciò $PG=PH$. Quindi li due triangoli APG, APH avendo il lato AP comune, gli altri due lati PG, PH eguali, e l'angolo $APG=APH$, poichè sono retti, sono fra eguali, e perciò $AG=AH$; or se dal p nto A si tirasse alla circonferenza una altra retta questa sarebbe o più vicina, o più lontana da AB di quello che ne sono AH, AG, e perciò sarebbe o maggiore, o minore di AG, e di AH; dunque AG può avere la sola AH, che sia ad essa eguale. Sicchè ec.

15. Cor. Gli angoli GOE, EOH per costruzione sono eguali, e perciò eguali ancora sono li supplementi GOB, BOH di essi, dunque gli archi sopra delli quali essi appoggiano sono eguali, e perciò $BG=BH$, $GE=EH$, dunque le rette eguali EG, EH incontrano la circonferenza BCD in punti egualmente distanti dalli piedi della massima, e della minima.

16. Teor. 10. *Dal punto A esistente fuori del piano LM sieno calate sul piano la perpendicolare AP, e la obliqua AO, e fatto centro il punto O con qualsivoglia intervallo nel piano LM sia descritto il cerchio BDF, nel quale sia tirato il diametro DF perpendicolare alla retta OP, che unisce li piedi della perpendicolare, e della obliqua, la quale sia prolungata verso B, e verso E. Dico 1.° Che gli angoli AOD, AOF sono angoli retti 2.° Che tutti gli angoli fatti da AO, e le rette tirate da O nel semicerchio DEF sono acuti, li quali divengono tanto più piccoli, quanto più le rette tirate nel piano dal punto O si accostano alla retta OE, e che il minimo di essi è l'angolo AOE 3.° Che tutti gli angoli fatti dalla obliqua AO con le rette tirate dal suo piede O nel semicerchio DBF sono ottusi, e che questi angoli divengono tanto più grandi, quanto più le rette tirate nel piano dal punto O si accostano al prolungamento OB della retta OP, e che il massimo di essi è l'angolo AOB.*

4.° Che ciascuno degli angoli fatti da AO e dalle rette, che dal suo piede O si tirano nel piano non può averne più di un altro, che sia ad esso eguale.

Dim. Dal punto A si tirino le rette AD, AF, AB, AE.

1. Li due triangoli AOD, AOF hanno il lato AO comune, il lato OD=OF, ed AD =AF, poichè essi sono egualmente distanti dai piedi della massima, e della minima, dunque essi sono eguali, e perciò l' angolo AOD =AOF, ma questi angoli sono formati dalla retta AO, che cade sopra di DF, dunque essi sono angoli retti.

2.° Si tirino le rette OC, AC.

Li due triangoli AOF, AOC hanno il lato AO comune, il lato OC=OF, ed AC<AF dunque l' angolo AOC<AOF, ma AOF è retto, dunque AOC è acuto; dippiù la retta AC diviene tanto più piccola quanto più la OC si accosta ad OP, dunque anche l' angolo AOC diviene tanto più piccolo, quanto più la retta OC si accosta ad OP, e quando essa si confonde con OP la retta AC si confonde con la minima AE, ed allora l'angolo AOE diviene il minimo degli angoli, che la obliqua AO può fare con le rette tirate dal suo piede O nel piano LM.

3.° Dal punto O si tiri la retta OG, e si unisca AG.

Li due triangoli AOG, AOF hanno il lato AO comune, il lato OG=OF, ed AG>AF, dunque l' angolo AOG>AOF, ma AOF è retto, dunque AOG è ottuso, e poichè la retta AG diviene tanto più grande, quanto più OG si accosta ad OB, anche l' angolo AOG diverrà più grande, e quando OG si confonde con OB, la AG si confonderà con la massima AB, dunque l' angolo AOB è il massimo.

4.° Finalmente nel punto O si faccia nel piano l' angolo BOH=BOG, e si unisca AH.

Le rette AG, AH saranno eguali, poichè vengono a punti egualmente distanti dalla massima, e dalla minima, quindi li due triangoli AOH, AOG avendo li lati respettivamente eguali, saranno eguali, e perciò l' angolo AOH=AOG, e poichè dal punto A non si può tirare alla circonferenza una altra retta, che sia eguale ad AH, e ad AG, ne segue, che l' angolo AOH non può avere altro angolo che AOG, il quale sia ad esso eguale. Sicchè ec.

17. Cor. Noi abbiamo dimostrato, che l'angolo AOP è minore di tutti gli angoli, che la obliqua AO può fare con le rette, che dal suo piede si possono tirare nel piano LM, quindi esso si prende per la misura naturale della inclinazione di una retta al piano, e lo chiamiamo *angolo della inclinazione di una retta al piano.*

18. Teor. 11. *Se due parallele incontrano un medesimo piano, esse avranno gli angoli di inclinazione eguali.*

(Fig. 10). Sieno le due parallele AB, CD, le quali incontrano il piano LM nelli punti B , D , e dalli punti A , C presi ad arbitrio in esse sieno calate sul piano le perpendicolari AE , CF , e si uniscano le rette BE , DF ; gli angoli ABE , CDF saranno gli angoli delle inclinazioni delle rette AB , CD al piano LM ; Dico che gli angoli ABE , CDF sono eguali.

Dim. Noi abbiamo dimostrato , che le rette perpendicolari ad un medesimo piano sono parallele , dunque AE è parallela a CF , ma per la ipotesi anche AB è parallela a CD , e quando due rette , che si incontrano in un piano sono respettivamente parallele a due altre rette , che si incontrano in un altro piano , l' angolo compreso dalle due prime è eguale all' angolo compreso dalle altre due , dunque l' angolo AEB=DCF , e perciò li triangoli AEB , CFD avendo gli angoli in E , F retti , e l' angolo EAB=FCD , avranno anche l' angolo ABE=CDF. Sicchè ec.

Articolo II.

Problemi relativi alle rette perpendicolari , ed oblique ai piani.

19. Prob. 1. *Da un punto dato fuori di un piano abbassare la perpendicolare al piano.*

(Fig. 11). Sia dato il punto A fuori del piano LM , si vuole dal punto dato A calare la perpendicolare al piano LM.

Soluz. Nel piano LM si tiri ad arbitrio qualunque retta BC , e dal punto dato A si cali sopra di BC la perpendicolare AD , indi dal punto B nel piano LM si tiri sopra di BC la perpendicolare DE , e dal punto A si abbassi sopra di DE la perpendicolare AE. Dico , che AE è la perpendicolare dimandata.

Dim. Per lo punto E nel piano LM si tiri la retta EF parallela a BC.

Gli angoli CDA , CDE sono retti , dunque la retta CD è perpendicolare alle due rette AD , DE , che si incontrano al suo piede , dunque CD è perpendicolare al piano ADE , che esse determinano. In oltre le due rette EF , BC sono parallele , ma una di esse DC è perpendicolare al piano ADE , dunque anche l' altra EF sarà al medesimo piano perpendicolare , e per conseguenza l' angolo AEF è retto ; ma per costruzione anche l' angolo AED è retto , dunque la retta AE è perpendicolare alle due rette ED, EF, che si incontrano al suo piede , e perciò AE è perpendicolare al piano LM. Sicchè ec.

20. Prob. 2. *Da un punto dato in un piano elevare la perpendicolare al piano.*

(Fig. 7). Sia dato il punto B nel piano LM. Si vuole dal punto B elevare una perpendicolare ad LM.

Sol. Da un punto preso ad arbitrio fuori del piano LM si cali sopra del piano la perpendicolare CD, se questa retta incontra il piano nel dato punto B, il problema è sciolto, altrimenti si unisca il punto B col punto D per mezzo della retta BD, e dal punto B si tiri nel piano determinato da DC, DB la retta AB parallela a DC. Dico che AB è la perpendicolare dimandata.

Dim. Per la costruzione le rette AB, CD sono parallele, ma CD è perpendicolare al piano LM, dunque anche AB è al medesimo piano perpendicolare. Sicchè, ec.

21. Prob. 3. *Dato un punto fuori di un piano, ed un angolo acuto, tirare dal punto dato una retta, che faccia col piano un angolo di inclinazione eguale all' angolo dato.*

(Fig. 12). Sia dato il punto C fuori del piano LM, e l'angolo acuto F, si vuole tirare dal punto C una retta, che incontrando il piano LM faccia con esso un angolo di inclinazione eguale all' angolo F.

Sol. Dal punto dato C si cali sopra di LM la perpendicolare CB, e dal punto B si tiri ad arbitrio la retta AB nel piano LM, indi nel punto C della retta CB, e nel piano determinato da AB, BC si faccia l' angolo BCD eguale al complemento dell'angolo dato F, e si prolunghi CD fino a tanto, che incontri AB nel punto D. Dico, che CD è la retta dimandata.

Dim. Nel triangolo CBD l'angolo CBD è retto, quindi gli altri due BCD, BDC insieme presi eguagliano un retto, e perciò l' angolo BCD è complemento dell' angolo CDB, ma per la costruzione esso è anche il complemento dell'angolo dato F, dunque li due angoli CDB, ed F hanno un medesimo complemento, e perciò sono eguali, ma l'angolo CDB è l'angolo della inclinazione della retta CD al piano LM, dunque CD è la retta dimandata. Sicchè, ec.

22. Prob. 4. *Dato un punto in un piano, e dato un angolo acuto tirare dal punto dato una retta, che faccia col piano un angolo d' inclinazione eguale all' angolo dato.*

(Fig. 13). Sia dato il punto D nel piano LM, e l' angolo acuto F; si vuole dal punto D tirare una retta, che faccia col piano LM un angolo di inclinazione eguale all' angolo F.

Sol. da un punto G preso ad arbitrio fuori del piano LM si abassi sopra del piano la la retta GE, la quale faccia col piano un angolo di inclinazione eguale all' angolo dato F, se questa retta incontra il piano nel dato punto D, il problema è sciolto, altrimenti si uniscano li punti D, E con la retra DE, e per lo punto D nel piano determinato da GE, ED si tiri la DC parallela a GE. Dico che DC è la retta dimandata.

Dim. Le rette DC, EG essendo parallele, gli angoli di inclinazione, che esse fanno col piano LM sono eguali, ma l' angolo di inclinazione di EG col piano LM è eguale all'angolo dato F, dunque anche l'angolo di inclinazione di CD col piano LM è eguale all'angolo dalo F, e perciò la retta CD è la retta dimandata. Sicchè, ec.

C A P. III.

Teoria degli angoli diedri.

23. (Fig. 14). Se due piani AE, AC si incontrano, ed hanno per comune sezione la retta AB, esse determinano uno spazio, il quale sebbene da essi sia determinato, pure resta indeterminato per tutte le altre direzioni, ed esso può essere paragonato con qualsivoglia altro spazio similmente determinato da due altri piani, e della medesima maniera illimitato per tutte le altre direzioui, questo spazio sarà da noi chiamato *angolo diedro*; La comune sezione AB delli due piani si chiama *costola*, oppure *spigolo* dell' angolo diedro, e nomineremo questo angolo diedro con quattro lettere, mettendo in mezzo le due lettere che corrispondono allo spigolo, così l'angolo diedro compreso fra li due piani AC, AE, li quali si incontrano nella retta AB si enuncierà dicendo l' angolo diedro EBAD.

Se da qualunque punto O dello spigolo AB di questo angolo diedro si inalzino sopra di AB la perpendicolare OQ, nel piano ABCD, e nel pia-

no ABEF la perpendicolare ON, queste due rette comprenderanno l' angolo QON, che noi chiameremo *angolo misuratore* dell'angolo diedro EBAD.

24. Teor. 1. *Se a due punti degli spigoli di due angoli diedri si formano due angoli misuratori; qualora questi angoli misuratori sono eguali, anche gli angoli diedri saranno eguali.*

Alli punti O, P delli spigoli AB, GH degli angoli diedri DABF, KGHM sieno fatti gli angoli misuratori QON, RPS, e sia QON =RPS. Dico che l' angolo diedro DABF =KGHM.

Dim. Si concepisca l' angolo diedro KGHM posto dentro dell' angolo diedro DABF, in modo, che gli spigoli GH, AB cadono l'uno sopra dell' altro, il punto P cada sopra del punto O, ed il piano LG sopra del piano AE. Poichè le rette PS, ON sono amendue perpendicolari ad AB debbono cadere l' una sopra dall' altra. Dippiù le due rette GP, AO formando una medesima retta AO, sarà OA perpendicolare alle tre rette ON, PR, OQ, le quali si incontrano al suo piede, dunque le rette ON, PR, OQ saranno in un medesimo piano, ma l' angolo RPS=POQ, dunque PR cade sopra di PQ ed il piano intero GI si confonde col piano intero AC, poichè essi hanno le rette GP, PR dell'uno, le quali si confondono con le rette OP, OQ dell' altro, e l' angolo diedro KGHM combacia con l'angolo diedro DABF, e per conseguenza essi sono eguali. Sicchè, ec.

25. Cor. Se nello spigolo AB dell'angolo diedro DABF si prenda qualsivoglia altro punto, e si formi un altro angolo misuratore, li lati di esso saranno paralleli alli lati dell' angolo QON, ed avranno le aperture rivolte dalla medesima parte, e per conseguenza esso sarà eguale all'angolo QON, dunque tutti gli angoli misuratori di un angolo diedro sono eguali.

26. Teor. 2. *Gli angoli diedri sono fra essi nella ragione degli angoli misuratori.*

(Fig. 15). Sieno DABF, KGHM due angoli diedri, e sieno DAF, MGK gli angoli misuratori di essi. Dico che DABF : KGHM : : DAF : MGK.

Dim. Si formino in due altri punti B, H delli spigoli AB, GH due altri angoli EBC, LHI misuratori delli medesimi angoli diedri, e fatti centri li punti A, B, G, H con un medesimo raggio si descrivano gli archi DF, CE, KM, IL, li quali sono le misure degli angoli misuratori; due casi possono darsi 1.° Che questi angoli misuratori sieno commensurabili. 2.° Che sieno incommensurabili.

Nel primo caso essendo commensurabili gli angoli FAD, KGM, commensurabili faranno ancora gli archi FD, MK, sia DR la comune misura di essi, e si considerino divisi gli archi DF, CE, EM, IL, nelle parti BD, BF, CS, KN etc. tutte eguali a DR e si uniscano le rette AR, BS, GN, GO, HP etc. indi si concepiscano per gli spigoli AB, GH e per queste rette passare li respettivi piani ABSR, GHPN, GHQO etc. Essendo gli archi DR, RF, CS, GE etc. tutti eguali, saranno gli angoli DAR, RAF etc., e per conseguenza gli angoli diedri, corrispondenti KGHN, NGHO etc. saranno eguali. Supponiamo, che l'angolo misnratore DAR si contenga m volte nell' angolo misuratore NOF, ed n volte nell'angolo misuratore KGM; avremo DAF : KGM : : DAR$\times m$: DAR$\times n$: : m : n Similmente avremo DABF$=$DABR$\times m$, KGHL$=$DABR$\times n$; e perciò sarà DABF : KGHL : : DABR$\times m$: DABR$\times n$: : m : n, ma le ragioni eguali ad una terza sono eguali, dunque DABF : KGHL : : DAF : KGM. Dunque, ec.

2.° Se gli angoli misuratori fossero incommensurabili, si dimostrerebbe che gli angoli diedri sono anche nella ragione degli angoli misuratori, adoperando un raziocinio simile a quello, che abbiamo adoperato nella geometria piana (§. 74); Quindi in generale conchiudiamo, che gli angoli diedri sono sempre nella ragione degli angoli misuratori.

27. Cor. Da quello, che abbiamo detto, chiaramente si vede, che gli angoli diedri godono le medesime proprietà degli angoli misuratori, e perciò gli angoli diedri adjacenti presi insieme sono eguali a due angoli diedri retti; gli angoli diedri verticali sono eguali; tutti gli angoli diedri fatti attorno ad un me-

desimo spigolo sono eguali a quattro augoli diedri retti etc.

28 Avv. Noi determiniamo la inclinazione, che hanno fra essi due piani per mezzo dell' angolo diedro, che essi comprendono, ma gli angoli diedri sono misurati dagli angoli misuratori, dunque noi misuriamo la inclinazione, che due piani hanno fra essi per mezzo degli angoli misuratori degli angoli diedri, che essi formano, quindi si vede perchè gli antichi Geometri hanno definita la inclinazione di due piani, dicendo la *inclinazione di due piani, che s' incontrano è l' angolo, che formano due linee rette tirate in ciascuno dei piani perpendicolari alla loro comune sezione e da un medesimo punto di essa*, ed ecco ancora la ragione per la quale questo angolo è stato da noi chiamato *angolo misuratore*.

C A P. IV.

Delli piani, che si incontrano, o si intersecano perpendicolarmente.

29. Due piani si dicono *perpendicolari* l'uno all' altro, qualora uno di essi cadendo sopra dell' altro fa con esso gli angoli diedri uno da una parte l' altro dall' altra eguali, o ciò che vale lo stesso, qualora cadendo sopra dell'altro non inclina più da una parte, che dall' altra.

30. Teor. 1. *Un piano è perpendicolare ad un altro piano che esso incontra, quando una retta tirata in esso perpendicolarmente alla comune intersezione è perpendicolare all'altro piano.*

(Fig. 16). Sia AB la comune intersezione delli due piani AC, LM, e la retta EF tirata nel piano AC perpendicolarmente alla comune intersezione AB sia perpendioolare al piano LM: dico che il piano AC è perpendicolare al piano LM.

Dim. Dal punto F si tiri nel piano LM la retta HG perpendicolare ad AB.

Essendo la retta FE perpendicolare al piano LM, sarà perpendicolare a tutte le rette, che dal suo piede si possono tirare nel piano LM, dunque è perpendicolare a GH, ma la retta EF è anche perpendicolare ad AB, dunque gli angoli EFG, EFH sono gli angoli misuratori degli angoli diedri, che il piano AC fa col piano LM, ma questi angoli sono eguali poichè sono retti, dunque anche eguali sono gli angoli diedri, che il piano AC forma dall' una parte, e dall' altra col piano LM, e perciò AC è perpendicolare ad LM. Sicchè, ec.

31. Teor. 2. *Se per una retta perpendicolare ad un piano si faccia passare qualunque altro piano, esso sarà perpendicolare al primo.*

Sia la retta EF perpendicolare al piano LM, e per essa si faccia passare qualunque piano AC; Dico, che il piano AC è perpendicolare al piano LM.

Dim. Per la ipotesi la retta EF è perpendicolare al piano LM, dunque essa è perpendicolare a tutte le rette, che dal suo piede si possono tirare nel piano LM, e perciò è perpendicolare ad AB comune sezione delli piani AC, ed LM, dunque nel piano AC che incontra il piano LM, vi è la retta EF perpendicolare alla comune intersezione di essi, la quale è anche perpendicolare al piano LM, dunque il piano AC è perpendicolare al piano LM. Sicchè ec.

32. Teor. 3. *Se due piani, che si intersecano sono perpendicolari ad un terzo piano anche la comune intersezione di essi è perpendicolare al medesimo piano.*

(Fig. 17.) Sieno li due piani AB, EF, li quali si intersecano nella retta GH, e sieno amendue perpendicolari al piano LM; Dico che GH è anche perpendicolare al medesimo piano LM.

Dim. Se dal punto G si tiri nel piano AB una perpendicolare ad AD comune sezione del piano AC col piano LM, essa sarà perpendicolare al piano LM, similmente se dal medesimo punto G si tiri nel piano FE una altra retta, la quale sia perpendicolare ad IF comune sezione del piano FE col piano LM, anche esso sarà perpendicolare al piano LM; Ma dal punto G non si può inalzare più di uua retta, la quale sia perpendicolare al medesimo piano LM, dunque la retta GH, la quale esiste nelli due piani, poichè è comune sezione di essi, sarà perpendicolare ad LM. Sicchè, ec.

33 Teor. 4. *Se due piani sono l'uno perpendicolare all' altro, e da un punto di uno di essi si cali una perpendicolare sopra dell' altro, questa perpendicolare deve cadere sopra la comune intersezione di essi.*

(Fig. 16.) Sia il piano AC perpendicolare al piano LM; Dico che se da un punto E del piano AC si cali una perpendicolare sopra del piano LM, essa incontrerà la comune sezione AB.

Dim. Se si nieghi, che la perpendicolare incontri la comune sezione AB, allora dal punto E si potrà nel piano AC tirare la retta EF perpendicolare alla comune sezione AB; ma qualora due piani sono l' uno all' altro perpendicololari, qualunque retta tirata in uno di essi perpendicolarmente alla comune sezione è anche perpendicolare all'altro piano, dunque EF sarà anche perpendicolare ad LM; e perciò dal medesimo punto E si sarebbero calate due perpendicolari sopra del piano LM, il che è assurdo, dunque è anche assurdo, che la perpendicolare calata dal punto E sopra del piano LM non incontri la comune sezione AB delli due piani AC, LM. Sicchè, ec.

CAP. V.

Delli piani paralleli.

34. Due piani si dicono *paralleli* qualora prolungati per tutte le direzioni non possono incontrarsi.

35. Teor. 1. *Se una retta è perpendicolare a due piani, questi due piani sono paralleli.*

(Fig. 18). Sia la retta AB perpendicolare alli due piani PQ, RS. Dico che questi due piani sono paralleli.

Dim. Se si niega, che li due piani PQ, RS sieno paralleli, essi prolungati si incontreranno, ed allora dalli punti A, B ad un punto della comune intersezione di essi si potranno tirare due linee rette, le quali formeranno con la retta AB un triangolo; ma poichè la retta AB è perpendicolare alli due piani PQ, RS essa formerà con ciascuna di queste due rette un angolo retto, e si avrebbe un triangolo, nel quale vi sarebbero due angoli retti, il che è assurdo, dunque è anche assurdo che ti piani PQ, RS prolungati possano incontrarsi, e perciò essi sono paralleli. Sicchè, ec.

36. Teor. 2. *Se una retta, che incontra due piani è perpendicolare ad uno di essi ed obliqua all' altro, li due piani non possono essere paralleli.*

(Fig. 19). Sia la retta AB perpendicolare al piano LM, ed obliqua al piano NO, dico che li due piani LM, NO non sono paralleli.

Dim. La retta AB essendo obliqua al piano NO deve fare una infinità di angoli acuti con le infinite rette, che dal suo piede si possono tirare nel piano NO, sia ABD uno di questi angoli acuti, per le rette AB, BD si concepisca passare un piano, il quale incontra il piano LM, e sia AC la comune sezione di essi; dippiù essendo la retta AB perpendicolare al piano LM sarà perpendicolare ancora alla retta AC dal suo piede tirata nel medesimo piano, quindi la somma degli due angoli CAB, ABD è minore di due angoli retti, dunque le rette AC, BD non sono parallele, e perciò esse prolungate debbono incontrarsi, ma di queste rette una esiste nel piano LM, l'altra nel piano NO, dunque anche li due piani LM, NO prolungati si incontreranno. Sicchè, ec.

37. Cor. Dunque una retta, la quale è perpendicolare ad uno de' due piani paralleli, è anche perpendicolare all' altro, poichè altrimenti li due piani si incontrerebbero.

38. Teor 3. *Se due rette, che si incontrano in un piano sono respettivamente parallele a due altre rette, che si incontrano in un altro piano, il piano determinato dalle due prime è parallelo al piano determinato dalle altre due.*

(Fig. 18). Dal punto A del piano PQ sieno in esso tirate le rette AD, AC, le quali sieno respettivamente parallele alle due EH, EF dal punto E tirate nel piano RS. Dico che il piano PQ è parallelo al piano RS.

Dim. Dal punto A si cali sopra del piano RS la perpendicolare AB, e dal suo piede B si tirino le rette BM parallela ad EF, e BL parallela ad EH.

La retta BL è parallela ad EH per costruzione, e per la ipotesi AD è anche parallela ad EH, dunque BL, AD sono parallele. Della stessa maniera si dimostra, che AC è parallela a BM; inoltre le parallele AD, BL sono tagliate dalla terza AB, dunque gli angoli DAB, ABL interni posti dalla medesima parte presi insieme sono eguali a due retti, ma ABL è retto, dunque anche DAB è retto; con lo stesso raziocinio si dimostra, che CAB è anche retto, dunque la retta AB essendo perpendicolare alle due rette AD, AC, che si incontrano al suo piede, è perpendicolare al piano PQ, ma la stessa AB è per costruzione perpendicolare al piano RS, dunque è perpendicolare alli due piani PQ, RS, e per ciò il piano PQ è parallelo ad RS. Sicchè, ec.

39. Teor. 4. *Se dalli punti di un piano si calino delle perpendicolari sopra di un altro piano ad esso parallelo, tutte queste perpendicolari saranno eguali.*

(Fig. 20). Sieno li piani LM, NO paralleli, e dalli punti B, C presi nel piano NO sieno calate sopra di LM le perpendicolari CA, BD; dico che CA=BD.

Dim. Si tirino le rette BC, AD.

Le rette AC, BD sono parallele, poichè sono perpendicolari al medesimo piano, dunque il quadrilatero ABCD è tutto in un piano, dippiù li due piani paralleli LM, NO vengono tagliati dal piano BC, dunque le loro comuni sezioni AC, BD sono ancora parallele, e perciò il quadrilatero ABCD è un parallelogrammo, ma in un parallelogrammo li lati opposti sono eguali, dunque AC=BD. Sicchè, ec.

40. Cor. Quindi li piani paralelli sono da per tutto ad eguali distanze.

41. Teor. 5. *Se due piani paralleli vengono tagliati da un terzo piano, le comuni sezioni di essi saranno parallele.*

(Fig. 20). Sieno li piani paralleli NO, LM tagliati dal terzo piano CD, dico che le comuni sezioni BC, AD sono parallele.

Dim. Se si nieghi, che queste comuni sezioni BC, AD sieno parallele, esse prolungate si incontreranno, e per conseguenza li piani paralleli NO, LM, in cui esse esistono, prolungati anche si incontreranno, il che è assurdo, dunque è anche assurdo, che BC, AD non sieno parallele. Sicchè, ec.

42. Teor. 6. *Le porzioni di rette parallele comprese tra due piani paralleli sono eguali.*

(Fig. 21). Siano le parallele AB, CD comprese fra li due piani paralleli LM, NO; dico che AB=CD.

Dim. Dalli punti A, C si abbassino sopra del piano NO le perpendicolari AE, CF, e si uniscano le rette BE, DF.

Essendo le rette AB,CD parallele, esse saranno egualmente inclinate al piano NO, dunque l'angolo ABE=CDF. Dippiù le perpendicolari AE, CF conprese fra due piani paralleli sono eguali, quindi li due triangoli rettangoli ABE, CDF avendo l'angolo ABE=CDF, sono equiangoli, hanno di più eguali li lati AE, CF opposti agli angoli B, D, dunque essi sono eguali, e perciò AB=CD; Sicchè, ec.

43. Teor. 7. *Se si tiri una obliqua fra due piani paralleli, essa sarà egualmente inclinata alli medesimi piani.*

(Fig. 20). Tra li piani LM, NO sia tirata la obliqua AB, e dalli punti A, B sieno tirate le rette AC perpendicolare ad NO, e BD perpendicolare ad LM, e si uniscano le rette CB, AD; Dico che gli angoli ABC, BAD delle inclinazioni della retta AB con li due piani NO, LM sono eguali.

Dim. Le rette CA, BD sono perpendicolari al piano LM, e perciò sono nel medesimo piano con le rette CB, AD; dippiù esse sono parallele, dunque anche sono eguali e parallele le due CB, AD, che ne uniscono gli estremi dalla medesima parte, e perciò esse formano con la secante AB gli angoli CBA, BAD eguali, come alterni interni. Sicchè, ec.

44. Teor. 8. *Se due piani, che si incontrano sono respettivamente paralleli a due altri piani, la comune sezione delli due primi sarà parallela alla comune sezione degli altri due.*

(Fig. 22). Li due piani BD, BE, che si incontrano nella comune sezione BC, sieno respettivamente paralleli alli due piani HK, HL, che si tagliano nella comune sezione HI. Dico che BC, HI sono parallele.

Dim. Si prolunghi il piano AC fino a tanto, che incontri il piano LM, e sia ON la comune sezione di essi.

Per la ipotesi li piani HL, BE sono paralleli, essi vengono tagliati dal terzo piano AN, dunque le comuni sezioni di essi CB, NO sono parallele; similmente poichè li piani paralleli AN, GI sono tagliati dal terzo piano HL, le comuni sezioni IH, NO sono parallele, ma le rette parallele ad una terza sono parallele fra esse, dunque BC è parallela ad IH. Sicchè, ec.

45. Teor. 9. *Se due rette comunque situate sono tagliate da più piani paralleli, esse vengono tagliate in parti proporzionali.*

(Fig. 23). Sieno le due rette LD, MH comunque situate, e vengano tagliate dalli piani paralleli NO, PQ, RS, TV nelli punti A, B, C, D, E, F, G, H. Dico che AB: BC : CD : : EF : FG : GH.

Dim. Li punti A, H si uniscano con la retta AH, la quale incontra li piani paralleli nelli punti A, I, K, H; e si uniscano le rette EA, FI, GK, HD, KC, IB.

Li piani paralleli NO, PQ, RS, TV sono tagliati dal piano EHA, dunque le comuni sezioni EA, FI, GK sono parallele; Similmente li medesimi piani paralleli sono tagliati dal piano DAH, dunque le comuni sezioni HD, KC, IB sono anche parallele. Ma quando in un triangolo si tirino delle rette parallele ad un lato, gli altri due lati sono divisi in parti proporzionali, dunque alle rette AI, IK, HK sono proporzionali tanto le rette AB, AC, CD, quanto le rette EF, FG, GH, dunque avremo AB : BC : : EF : FG : : CD : GH. Sicchè, ec.

46. Cor. Essendo le rette AB, BC, CD proporzionali alle rette AI, IK, KH, ne segue, che se due rette, le quali si incontrano sono tagliate da più piani paralleli, le parti dell'una sono proporzionali alle parti dell'altra.

CAP. VI.

Problemi relativi alli piani, che si incontrano, ed alli piani paralleli.

47. *Prob.* 1. *Per una retta data in un piano fare passare un altro piano, che faccia col piano dato un angolo diedro, il quale abbia per angolo misuratore un angolo eguale ad un angolo dato.*

(Fig. 24). Sia data la retta DE nel piano EM, e l'angolo ABC, si vuole fare passare per la retta DE un piano, che faccia col

piano EM un angolo diedro, che abbia per angolo misuratore un angolo eguale all'angolo ABC.

Sol. Nella retta DE si prenda ad arbitrio il punto F, e dal punto F si tiri nel piano EM la retta FG perpendicolare a DE, dal medesimo punto F si tiri la retta FH perpendicolare al piano EM, e per le rette FH, FG si faccia passare il piano FN, che esse determinano, nel punto F della retta FG si faccia nel piano FN l'angolo IFG=ABC; finalmente per DE, FI si faccia passare il piano EO, che esse determinano. Dico che EO è il piano dimandato.

Dim. La retta HF è perpendicolare al piano EM, dunque essa è perpendicolare alla retta FE tirata dal suo piede nel piano; ma per la costruzione FE è perpendicolare ad FG, dunque FE è perpendicolare al piano FN da esse determinato, e perciò è perpendicolare ad FI tirata dal suo piede in questo piano FN; ma per costruzione FE è perpendicolare ad FG, dunque l'angolo IFG è l'angolo misuratore dell'angolo diedro formato dalli due piani EM, EO, che hanno per comune sezione la retta ED; ma l'angolo IFG è per costruzione eguale all'angolo ABC, dunque EO è il piano dimandato. Sicchè, ec.

48. Prob. 2. *Data una retta fuori di un piano, e dato un angolo, fare passare per la retta data un altro piano, che incontri il piano dato, e faccia con esso un angolo diedro,*

il quale abbia per angolo misuratore un angolo eguale ad un angolo dato.

(Fig. 25). Sia data la retta AB fuori del piano LM, si vuole fare passare per questa retta AB un altro piano, che faccia col piano LM un angolo diedro, il quale abbia per suo angolo misuratore un angolo eguale all' angolo dato O.

Possono darsi due casi, 1.° Che la retta AB incontri il piano dato 2.° Che non lo incontri.

Sol. 1. Dal punto A preso ad arbitrio nella retta AB si abbassino sopra del piano LM la perpendicolare AD, e la obliqua AC, la quale faccia col piano LM un angolo di inclinazione eguale all' angolo O, si uniscano li punti D, C con la retta DC; indi col centro D e col raggio DC si dscriva il cerchio CEF nel piano LM, finalmente dal punto B si tiri al cerchio CEF la tangente BE, e si unisca la retta AE. Dico che il piano determinato da AB, BE è il piano dimandato.

Dim. Si tiri il ragio DE.

Le rette AC, AE incontrano il piano LM nelli punti C, E egualmente distanti dal piede D della perpendicolare AD, e perciò sono eguali, quindi li due triangoli ADC, ADE avendo il lato AD comune, il lato DC=CE, ed il lato AC=AE, saranno eguali, ed avranno l' angolo ACD=AED, ma ACD=O, dunque AED=O. Dippiù la tangente BE è perpendicolare al raggio ED, ma BE è comune sezione delli piani LM, ed AED, dunque BE

è una retta tirata nel piano LM perpendicolarmente alla comune sezione delli piani LM, ed AED, e per conseguenza è perpendicolare ad AE, e perciò l' angolo AED è l' angolo misuratore dell'angolo diedro fatto dalli due piani LM, ed ABE, ma l' angolo AED=O, dunque per la retta AB si è fatto passare il piano ABE, che fa col piano LM un angolo diedro, che ha per angolo misuratore un angolo eguale all' angolo dato O. Sicchè ec.

(Fig. 26). Sol. 2. Dal punto A preso ad arbitrio nella retta AB, si cali sopra del piano LM la perpendicolare AP, e per AB, AP si faccia passare il piano APQB, che esse determinano, indi dal medesimo punto A si abassi sopra del piano LM la retta AC, la quale faccia col piano l' angolo della inclinazione ACP=O, e si unisca CP; indi si faccia centro il punto P, e con lo intervallo PC si descriva il cerchio CDE, e si tiri nel piano LM dal punto P la PD perpendicolare alla PQ comune sezione delli piani LM, PB, finalmente dal punto D si tiri la FG tangente al cerchio CDE. Dico che il piano FB determinato dalle rette AB, FG è il piano dimandato.

Dim. Le rette FG, PQ sono parallele, poichè sono perpendicolari alla medesima retta PD, le rette PQ, AB sono anche parallele, poichè se non fossero parallele, la retta AB, ed il piano LM si incontrerebbero contro la ipotesi; dunque FG è parallela ad AB, e per conseguenza le tre rette AB, AD, FG sono in un medesimo piano. Dippiù essendo AP perpendicolare al piano LM, il piano APD, che passa per questa retta, deve essere perpendicolare al piano LM, e la retta FG, che è perpendicolare alla comune sezione di questi due piani, è perpendicolare ancora al piano APD, e per conseguenza è perpendicolare alle rette AD, DP tirate dal suo piede nel piano APD. Dunque l' angolo ADP è l'angolo misuratore dell' angolo diedro fatto dalli piani LM, ed ADGB, ma l'angolo ADP=ACP, il quale è eguale all' angolo O; dunque l'angolo ADP=O, dunque per la retta data AB abbiamo fatto passare il piano ADGB, che fa col piano LM un angolo diedro, che ha per suo misuratore l' angolo dato O. Sicchè, ec.

48. Avv. 1. Nel primo caso, se il punto B cade fuori del cerchio CEF, allora vi faranno due piani, che sciolgono il problema, poichè da un punto dato fuori di un cerchio si possono tirare due tangenti al cerchio. Se il punto B cade sopra la circonferenza CEF, vi sarà un solo piano, che scioglie il problema, poichè da un punto preso nella circonferenza di un cerchio non si può tirare più di una tangente, se finalmente il punto B cade dentro del cerchio, il problema sarà insolubile, poichè da un punto preso dentro di un cerchio non si può tirare una tangente al cerchio.

49. Avv. 2. Nel secondo caso, poichè la retta DP perpendicolare a PQ incontra la circonferenza in due punti diametralmente opposti, per

ciascuno de' quali si può tirare una tangente al cerchio CDE, vi saranno due piani, che sciolgono il problema. Ma se il raggio del cerchio diviene zero, il che accade, quando l'angolo dato O è un angolo retto, allora vi è un solo piano, che scioglie il problema.

C A P. VII.

Degli angoli Poliedri.

50. Qualora più piani passano per un medesimo punto, e si incontrino a due a due, comprendono fra essi uno spazio illimitato dalla parte opposta al punto, nel quale essi si incontrano, questo spazio illimitato si chiama angolo *poliedro*, oppure angolo *a più facce*, oppure angolo *solido* e specialmente si dice angolo *triedro*, *tetraedro*, *pentaedro ec.* secondo che esso ha tre, quattro, cinque facce Il punto in cui si incontrano tutte le facce dell' angolo poliedro si dice *vertice*, e le intersezioni di essi si chiamano *spigoli*, oppure *costole*, e si nomina l' angolo poliedro nominando in prima la lettera del vertice, ed appresso le lettere, che sono nelle estremità delle costole, alcune volte si nomina per la sola lettera del vertice. Per distinguere un angolo poliedro da un altro angolo poliedro del medesimo numero di facce, si deve badare agli angoli piani compresi tra le costole consecutive, ed agli angoli diedri, che queste facce formano tra esse.

Quindi in un angolo triedro debbono essere considerate sei cose, cioè tre angoli piani, e tre angoli diedri.

51. Teor. 1. *Un sòlo delli tre angoli piani di un angolo triedro è minore della somma degli altri due.*

(Fig. 27). Sia un angolo triedro A ; Dico che un suo angolo piano qualunque è minore della somma degli altri due.

Dim. Se li tre angoli CAB , BAD , CAD sono eguali , è evidente , che ciascuno di essi è minore della somma degli altri due.

Se poi essi sono diseguali , suppponiamo , che il massimo sia l' angolo CAD.

Nelli due lati AB , AD dell' angolo CAD si prendano ad arbitrio li due punti C , D , e si unisca la retta CD , indi nel punto A della retta AC si faccia nel piano CAD l'angolo CAE=CAB , e si prolunghi il lato AE fino a tanto , che incontri la retta CD , indi si tagli AB=AE , e si uniscano le rette CB , BD.

Li due triangoli CAB , CAE hanno il lato AC comune , il lato AB=AE , e gli angoli CAB , CAE da essi compresi eguali , dunque sono eguali , e perciò CB=CE ; in oltre nel triangolo CBD il lato CD è minore della somma CB+BD degli altri due lati , toltone le porzioni eguali CB , CE , resterà ED<BD ; Finalmente nelli due triangoli DAB, DAE il lato AD è comune , il lato AB=AE , ed il lato DE<DB, dunque l'angolo DAE<DAB , aggiungendo a questi angoli diseguali gli angoli eguali EAC, BAC, avremo DAE+EAC<DAB +BAC, ma DAE+EAC=DAC , dunque DAC <DAB+BAC. Sicchè , ec.

52. Teor. 2. *La somma di tutti gli angoli piani di un angolo poliedro è minore di quattro angoli retti.*

(Fig. 28). Sia A un angolo poliedro qualunque , dico che la somma degli angoli piani BAC, CAD, DAB , EAF , FAB è minore di quattro angoli retti.

Dim. Si tiri un piano qualunque , che incontri gli spigoli ne' punti B , C, D , E, F, e si uniscano con le rette BC, CD, DE, EF, FB.

La somma di tutti gli angoli di un triangolo equivale a due retti , dunque la somma di tutti gli angoli delli triangoli BAC , CAD, DAE , ec. è eguale a tante volte due angoli retti, quante ne indica il numero delli triangoli , ma il numero delli triangoli è lo stesso del numero de'lati del poligono BCDEF, dunque la somma di tutti gli angoli di tutti li triangoli equivale a tante volte due retti, quante ne indica il numero de' lati del poligono BCDEF. Dippiù la somma degli angoli del poligono BCDEF unita a quattro retti equivale ancora a tante volte due angoli retti, quante ne indica il numero de' lati del poligono , dunque la somma di tutti gli angoli delli triangoli BAC, CAD , DAE ec. equivale alla somma degli angoli del poligono BCDEF unita a quattro retti. Dippiù nell' angolo triedro C l' angolo piano BCD è minore della somma $ABC+ACD$ degli altri due, per la stessa ragione $CDE<CDA+ADE$, e $DEF<DEA+AEF$ ec., dunque la somma degli angoli alle basi de' triangoli è maggiore della somma degli angoli del poligono, quindi togliendo dalla somma degli angoli delli triangoli la somma degli angoli alle basi, e dalla somma degli angoli del poligono unita a quattro retti la somma degli angoli del poligono, la quale è minore della somma degli angoli alle basi de' triangoli, resterà la somma degli angoli fatti intorno al punto A minore di quello, che resterà quando dalla somma degli angoli del poligono unita a quattro retti se ne tolgono gli angoli del poligono, ossia di quattro retti; dunque tutti gli angoli piani dell' angolo poliedro A è minore di quattro retti. Sicchè ec,

53. Cor. 1. Ciascuno degli angoli di un triangolo equilatero è $\frac{2}{3}$ di un retto, quindi tre di essi sono eguali a due retti, quattro di essi vagliono $\frac{8}{3}$ di un retto, cinque sono eguali $\frac{10}{3}$ di un retto; quindi impiegando gli angoli de' triangoli equilateri, noi potremo formare un angolo triedro, un angolo tetraedro, ed un angolo pentaedro; ma poichè sei di essi formerebbero quattro angoli retti, non potremo formare un angolo poliedro, combinando sei angoli di un triangolo equilatero, ed a più forte ragione non potremo formare un angolo poliedro combinando un numero maggiore di angoli di un trianglo equilatero.

54. Cor. 2. Ciascuno degli angoli di un quadrato è retto, e per conseguenza tre di essi vagliono tre angoli retti, e perciò nella formazione di un angolo poliedro potremo combinare tre angoli di quadrato, ma non possiamo impiegarne quatro, ed a più forte ragione non possiamo impiegarne un numero maggiore.

55. Cor. 3. Ciascuno degli angoli di un pentagono regolare è di 108°, e perciò tre angoli di pentagono regolare vagliono 324°; quindi nella costruzione di un angolo poliedro potremo combinare tre angoli di un pentagono regolare, ma non potremo combinarne quattro, o un numero maggiore.

56. Cor. 4. Ciascuno degli angoli di esagono regolare vale 120° gradi, e perciò tre di essi vagliono 360°, ossia quattro retti, quindi nella formazione degli angoli poliedri non possiamo combinare gli angoli dell' esagono regolare.

57. Cor. 5. Della medesima maniera si può dimostrare, che nella formazione degli angoli poliedri non si possono combinare gli angoli delli poligoni regolari di 7, 8, 9, ec. lati.

58. Cor. 6. Quindi combinando gli angoli delle figure regolari della medesima specie possiamo avere soltanto cinque angoli poliedri, ciò è tre combinando gli angoli del triangolo equilatero, uno combinando gli angoli del quadrato, ed uno combinando quelli del pentagono regolare.

59. Teor. 3. *Due angoli triedri sono eguali, qualora hanno due angoli piani dell'uno respettivamente eguali a due angoli piani dell' altro, e l' angolo diedro compreso frà le due facce delli due primi eguale all'angolo diedro compreso fra le due facce delli secondi.*

(Fig. 29). Rappresentino A, B due angoli triedri, li quali abbiano gli angoli piani CAE =HBL, CAD=HBK, e sia l'angolo diedro compreso tra CAE, EAD eguale all' angolo diedro compreso tra HBL, HBK. Dico che essi sono eguali.

Dim. Si concepisca l'angolo triedro A sovrapposto all' angolo triedro B in modo, che l'angolo piano CAE coincida col suo eguale HBL; poichè l' angolo diedro compreso tra CAE, CAD è eguale all' angolo diedro compreso tra HBL, HBK, il piano CAD si confonderà col piano HBK, ma per la ipotesi l'angolo piano CAD=HBK, dunque lo spigolo AD si confonderà con lo spigolo BK, e poichè lo spigolo AE si è confuso con lo spigolo BL, il piano DAE coincidera col piano KBL, giacchè due rette le quali si incontrano determinano la posizione di un piano, dunque li due angoli triedri A, B combaciando in tutte le loro parti sono eguali. Sicchè ec.

60. Teor. 4. *Due angoli triedri sono eguali qualora hanno un angolo piano dell'uno eguale ad un angolo piano dell' altro, e li due angoli diedri adjacenti ad uno di tali angoli, respettivamente eguali alli due angoli diedri adjacenti all' altro angolo.*

Nelli due angoli triedri A, B sieno eguali li due angoli piani CAE, HBL, e sieno l'angolo diedro compreso tra le due facce CAE, CAD eguale all' angolo diedro compreso tra HBL, HBK, e l' angolo diedro compreso tra CAE, DAE eguale all'angolo diedro compreso tra HBL, KBL, dico che gli angoli triedri A, B sono eguali.

Dim. Si concepiscano li due angoli triedri A, B posti l' uno sopra dell' altro in modo, che coincidano li due angoli piani eguali CAE, HBL, questi angoli piani eguali essendo adiacenti ad angoli diedri respettivamente eguali, le due facce CAD, DAE dovranno cadere sopra delle due facce HBK, KBL, e le comuni sezioni di essi, ossia lo spigolo AD dovrà cadere sopra dello spigolo BK, e per conseguenza li due angoli triedri A, B combaciando in tutte le loro parti, sono eguali. Sicchè ec.

61. Teor. 5. *Due angoli triedri sono eguali qualora li tre angoli piani dell' uno sono respettivamente eguali alli tre angoli piani dell' altro, e sono similmente situati.*

Nelli due angoli triedri A, B sia l'angolo piano CAE=HBL, CAD=HBK, DAE=KBL. Dico che l' angolo triedro A è eguale all' angolo triedro B.

Dim. Nelli spigoli omologhi AC, BH si prendano ad arbitrio le due porzioni eguali AG, BN, e dal punto G si tirino nelli due piani CAE, CAD, le rette GF, GO perpendicolari ad AC, e dal punto N si tirino nelli piani HBL, HBK le rette NM, NP perpendicolari a BN, e si uniscano le rette OF, PM.

Li due triangoli GAF, NBM hanno l' angolo AGF=BNM, poichè sono retti, hanno l' angolo GAF=NBM per la ipotesi, ed eguali i lati AG, BN adjacenti a tali angoli, dunque essi sono eguali, e perciò GF=MN, AF=BM; con lo stesso raziocinio si dimostra, che il triangolo GAO è eguale al triangolo NBP, e che per conseguenza GO=NP, ed AO=BF; in oltre li due triangoli OAF, PBM, hanno il lato AO=BP, il lato AF=BM, ed eguali gli angoli OAF, PBM compresi da tali lati eguali, dunque essi sono eguali, e perciò OF=PM. Finalmente li due triangoli FGO, MNP sono eguali, poichè hanno li tre lati dell'uno respettivamente eguali alli tre lati dell' altro, dunque l' angolo FGO=MNP, ma questi angoli sono gli angoli misuratori degli angoli diedri compresi uno dalle facce CAE, CAD, l' altro dalle facce HBL, HBK, dunque questi angoli diedri sono eguali, con lo stesso raziocinio si può dimostrare, che gli altri angoli diedri compresi tra le altre facce sono anche eguali, dunque se li due angoli triedri si pongano l' uno sopra dell' altro essi combaceranno, e per conseguenza saranno eguali. Sicchè ec.

CAP. VIII.

Delli solidi racchiusi da superficie piane.

ART. I.

Nozioni preliminari.

62. Li solidi racchiusi da superficie piane si chiamano *solidi poliedri*, o semplicemente *poliedri*.

(Fig. 30). Non si può racchiudere per tutte le direzioni una porzione dello spazio da piani, li quali sieno in numero minore di quattro. Il solido ABCD racchiuso dalli quattro piani BCD, BAC, CAD, DAB si chiama *tetraedro*.

63. Un solido, nel quale una delle facce è un poligono di qualsivoglia numero di lati, e le altre facce sono tutte triangoli, li quali mettono li vertici nel medesimo punto, si chiama *Piramide*, il poligono sopra del quale essa appoggia si dice *base* di essa; ed il vertice comune di tutti li triangoli si dice *Vertice* della piramide. La piramide poi si dirà *triangolare*, *quadrangolare*, *pentagona ec.* secondo che la sua base è un triangolo, un quadrilatero, un pentagono, ec., Quindi il tetraedro è una piramide triangolare, ed in qualunque piramide ciascuno degli angoli solidi alla base è sempre un angolo triedro. Di qualunque piramide si chiamerà *altezza* la perpen-

dicolare calata dal suo vertice sopra del piano della base.

64. Tra li poliedri si chiamano *prismi* quelli, che hanno due facce opposte eguali e parallele, le quali si chiamano *basi* del prisma, e tutte le altre facce sono parallelogrammi.

(Fig. 31). Noi possiamo costruire sopra di un poligono ABCDE un prisma, inalzando dalli vertici A, B, C, D, E degli angoli del poligono le rette EF, AG, BH ec. parallele fra esse, e tirando per un punto qualunque F di una di esse un piano parallelo al poligono ABCDE, che incontri le altre rette nelli punti G, H, I ec. e finalmente unendo questi punti con le rette GH, HI, IK ec.

In fatti essendo li piani paralleli AC, GI, tagliati dalli piani AF, AH, BI ec., le comuni sezioni di essi saranno parallelle, e perciò gli angoli correspondenti delli due poligoni saranno eguali, poichè essi hanno i lati paralleli, e le aperture dalla medesima parte; dippiù essendo gli spigoli paralleli a due a due, le facce AF, AH, BI ec. sono tutte parallelogrammi, e perciò AE=GF, AB=GH ec., e per conseguenza li due poligoni paralleli ABCDE, FGHIK avendo li lati respettivamente eguali, e gli angoli eguali, sono eguali, e paralleli, ma abbiamo dimostrato, che le altre facce del solido sono parallelogrammi, dunque esso è un prisma.

65. (Fig. 32). Il prisma ABCDEFGH, il quale ha per sue basi li due parallelogrammi AC, FH, si chiama *parallelepido*, il quale evidentemente ha tutte le sue facce, che sono parallelogrammi, dippiù le facce opposte AF, DG sono parallele, poichè AB, BF, che si uniscono nel punto B sono respettivamente parallele a DC, CG, che si incontrano nel punto C, di più questi parallelogrammi hanno BF =CG, AB=DC, e l'angolo ABF=DCG, poichè hanno li lati paralleli, e le aperture rivolte della medesima parte, dunque essi sono eguali; con lo stesso raziocinio si dimostra, che BG, AH sono anche eguali, e parallele, dunque in ogni parallelepido li piani opposti sono eguali, e paralleli.

Dippiù in ogni parallelepipedo gli angoli solidi diametralmente opposti sono simmetrici, in fatti consideriamo gli angoli solidi A, G diametralmente opposti del parallelopipedo, ACGE.

Nel parallelogrammo AF gli angoli opposti EAB, EFB sono eguali, ma EFB=HGC, dunque EAB=HGC, per la medesima ragione DAE=EHD=CGF, e DAB=BCD=FGH, dunque li tre angoli piani dell' angolo triedro A sono respettivamente eguali alli tre angoli piani dell' angolo triedro G; ma se si prolungano li tre spigoli, che si incontrano nel punto G, si formerà dalli piani, che essi determinano un altro angolo triedro, il quale è simmetrico con l' angolo G del parallelepipedo, e questo angolo triedro coinciderà con l'angolo triedro A del parallelepipedo, poichè li tre angoli piani fatti intorno al punto A, e quelli dell' angolo triedro opposto all' angolo G sono eguali, e similmente disposti. Con lo stesso raziocinio si dimostra, che gli altri angoli triedri opposti del parallelepipedo ACGE sono simmetrici, dal che generalmente conchiudiamo, che in ogni parallelepipedo gli angoli triedri diametralmente opposti sono simmetrici.

66. Un prisma, o un parallelepipedo si dice *retto* se gli spigoli, che cadono sopra le basi sono ad esse perpendicolari, e se il parallelepipedo ha le basi rettangole, e gli spigoli ad esse perpendicolari, si dice *rettangolo*, ed in questo caso è evidente, che tutte le sue facce sono rettangoli, e si dicono *altezze* delli prismi, e delli parallelepipedi le perpendicolari calate da qualsivoglia punto di una delle basi sopra dell' altra.

67. Reciprocamente il solido, che è terminato da sei facce tali, che le opposte sieno parallele, è un parallelepipedo. In fatti il piano BCGF tagliando li due piani paralleli AF, DG, le comuni sezioni BF, CG sono parallele; il medesimo piano tagliando gli altri due piani AC, EG paralleli, le comuni sezioni FG, BC sono anche parallele, dunque BG è un parallelogrammo; con lo stesso raziocinio si può dimostrare, che tutte le altre facce del solido BH sono parallelogrammi. In oltre le rette FB, BC sono parallele ad EA, AD, dunque l' angolo EAD=FBC, poichè hanno i lati paralleli, e le aperture rivolte alla medesima parte; ma il lato EA=FB, come lati opposti del parallelogrammo AF; AD=BC, come lati opposti del parallelogrammo AC, dunque li parallelogrammi AH, BG avendo due angoli eguali compresi fra lati respettivamente eguali, sono eguali; con lo stesso razicinio si dimostra, che gli altri parallelogrammi opposti sono respettivamente eguali, dunque il solido terminato da sei piani tali, che gli opposti sono paralleli è un parallelepipedo.

Art. II.

Delli Caratteri da conoscere la eguaglianza delli prismi, e delle piramidi, e delle proprietà delli prismi, e delle piramidi.

68. Teor. I. *Due prismi sono eguali, qualora un angolo triedro dell'uno è compreso tra facce respettivamente eguali, e similmente situate alle tre facce, che comprendono un angolo triedro dell' altro.*

(Fig. 33). Li due prismi AK, LT abbiano la faccia AH=LS, AF=LQ, e la base AD=LO; Dico, che il prisma AK=LT.

Dim. Si concepisca il prisma AK sovraposto al prisma LT in modo, che la base AD combaci con la sua eguale LO; poichè li tre angoli piani dell' angolo triedro A sono respettivamente eguali alli tre angoli piani dall' angolo triedro L, e dippiù essi sono similmente disposti intorno alli punti A ed L, coincideranno, e perciò il lato AB combacerà col suo eguale LM, il lato AE combacerà con LP, ed AG combacerà con LR, e poichè dal punto R non si può tirare più di un piano parallelo ad LO, la base GI combacerà con RT, e tutti li vertici degli angoli triedri delli due prismi si confonderanno, e perciò li due prismi combaceranno, e saranno eguali. Sicchè ec.

69. Teor. 2. *Due piramidi sono eguali, qualora esse hanno un angolo triedro dell'una compreso da tre facce respettivamente eguali, e similmente situate alle tre facce, che comprendono l'angolo triedro dell'altra.*

(Fig. 34). Le piramidi PABCD, REFGH abbiano li due angoli triedri A, E compresi tra le tre facce PAD, PAB, DAB respettivamente eguali alle tre facce REH, REF, HEF, e similmente situate; dico che queste piramidi sono eguali.

Dim. Si concepisca la piramide PABCD sovraposta alla piramide REFGH in modo, che la base AC combaci con la base EG; poichè l'angolo triedro A è eguale all'angolo triedro E, e le facce di essi sono similmente situate, lo spigolo PA cadrà sopra dello spigolo RE, ma AP=ER, dunque il punto P cadrà sopra del punto R, e per conseguenza tutti gli spigoli della piramide PABCD combaceranno con gli spigoli della piramide REFGH, e le intere piramidi combaceranno, e perciò saranno eguali. Sicchè ec.

70. Teor. 3. *Qualunque sezione fatta in un prisma parallelamente alle sue basi è sempre un poligono eguale alle basi.*

(Fig. 35). Nel prisma AG sia fatta la sezione MP parallela alle basi AC, GH, dico che MP=GH=AD.

Dim. Le rette MN, NO, OP ec. sono respettivamente eguali ad AB, BC, CD ec., come parti di parallele comprese tra le parallele AH, BI, CL ec., quindi li due poligoni MO, AD hanno li lati respettivamente eguali; dippiù questi poligoni hanno gli angoli eguali, poichè hanno i lati paralleli, e le aperture rivolte alla medesima parte, dunque li poligoni AD, MO avendo li lati, e gli angoli dell'uno respettivamente eguali alli lati, ed agli angoli dell'altro, sono eguali. Sicchè ec.

71. Teor. 4. *Se in una piramide si fa una sezione parallela alla base, 1.° Essa dividerà gli spigoli, e la altezza in parti proporzionali. 2.° Essa sarà un poligono simile alla base.*

(Fig. 36). Nella piramide PABCD sia fatta la sezione EFGH parallela alla base ABCD, ed in essa sia tirata la altezza PM; dico 1.° Che AP : PE : : PB : PF : : PC : PG : : PD : PH : : PM : PK. 2.° Che EFGH è un poligono simile ad ABCD.

Dim. Noi abbiamo dimostrato, che quando due piani paralleli sono tagliati da un terzo piano, le comuni sezioni sono parallele, quindi essendo li due piani ABCD, EFGH paralleli tagliati dal terzo piano APB, le comuni sezioni EF, AB saranno parallele, e perciò il triangolo APB sarà simile al triangolo EPF: per la medesima ragione li triangoli BPC, CPD, DPA saranno respettivamente simili alli triangoli FPG, GPH, HPE, dunque avremo AP : PE : : PB : PF : : PC : PG : : PD : PH ; dippiù abbiamo dimostrato, che se due rette, che si incontrano sono tagliate da due piani paralleli, esse sono divise in parti proporzionali, dunque AP: PE:: PM: PK. Sicchè ec.

2.° Li due poligoni ABCD, EFGH hanno gli angoli respettivamente eguali, poichè essi hanno li lati respettivamente paralleli, e le aperture rivolte alla medesima parte; dippiù hanno li lati, che comprendono gli angoli eguali proporzionali, giacchè abbiamo AB : EF : : PB: PF : : BC : FG : : PC : PG : : CD: GH ec: Dunque sono simili. Sicchè ec.

72. Teor. 5. *Se due piramidi qualunque hanno la medesima altezza, ed in essa si fanno sezioni parallele alle basi; quelle sezioni, che sono ad eguale distanza dalli vertici delle piramidi sono tutte nella ragione delle basi,* (Fig: 37). Sieno le due piramidi PABCD. REFG, le quali abbiano eguali le altezze PM, RN, ed in esse sieno fatte le sezioni HIKQ, STU, le quali sieno parallele alle basi ABCD, EFG, ed incontrino le altezze PM, RN nelli punti L, O, e sia PL=RO; Dico che HIKQ: STU : : ABCD : EFG.

Dim. Essendo ABCD simile ad HIKQ; sarà ABCD: HIKQ:: AB^2 : HI^2 : mà per la simiglianza de' triangoli APB, HPI abbiamo AB^2: HI^2: : PA^2: PH^2:: PM^2: PL^2, dunque ABCD: HIKQ:: PM^2: PL^2; Similmente essendo EFG simile ad STV, sarà EFG : STV : : EF^2 : ST^2 ; ma per la simiglianza de' triangoli REF, RST abbiamo EF^2 : ST^2 : : RF^2 : RT^2 : : RN^2 : RO^2, dunque EFG : STV : : RN^2 : RO^2 ; ma PM=RN, PL=RO; dunque avremo EFG : STV : : PM^2 : PL^2 ; ma abbiamo dimostrato ABCD: HIKQ: : PM^2 : PL^2; dunque ABCD : HIKQ: : EFG: STV; ed alternando ABCD: EFG:: HIKQ: STV. Sicchè ec.

73. Cor. Quindi se le basi ABCD, EFG sono equivalenti, anche le sezioni fatte nelle piramidi PABC, REFG parallelamente alle basi ad eguali distanze dalli vertici di esse sono equivalenti.

74. Prob. *Date di un tronco di piramide a basi parallele le due basi, e l'altezza del tronco, trovare l'altezza della parte mancante della piramide.*

Sia la piramide PABCD tagliata per lo piano HIKQ parallelo alla base ABCD, che incontra l' altezza PM nel punto L ; e siano date le basi ABCD, HIKQ, e la altezza LM del tronco ACHK, si vuole determinare la altezza PL della parte mancante.

Sol. Essendo la sezione HIKQ parallela alla base ABCD, sarà il triangolo PAB simile al triangolo PHI, ed avremo AB : HI : : PB :

PI ; ma abbiamo dimostrato che PB : PI : : PM : PL ; dunque avremo AB : HI : : PM : PL, e perciò AB-HI: HI: : PM-PL : PL : : LM : PL ; Dunque la altezza PL della parte mancante della piramide si determina trovando la quarta proporzionale in ordine alla differenza di due lati omologhi della base , e della sezione , al lato medesimo della sezione , ed alla altezza data del tronco. Sicchè ec.

75. Teor. 6. *Se le perpendicolari calate sopra delle basi delli triangoli laterali dal vertice di una piramide sono eguali , la somma di tutti questi triangoli , ossia l' aja convessa della piramide si determinerà multiplicando il perimetro della base per la metà della altezza comune delli triangoli.*

Rappresenti PABCD una piramide, la quale abbia li triangoli laterali tutti della medesima altezza, e sia PE la altezza comune di essi , dico , che la sua aja convessa si determina multiplicando AB+BC+CD+DA per $\frac{1}{2}$ PE:

Dim L'aja convessa della piramide PABCD è eguale alla somma delli triangoli APB , BPC , CPD , DPA, ma ciascuno di questi triangoli ha per misura la base multiplicata per la metà della comune altezza, dunque tutta la somma di essi , ossia l' aja convessa delle piramide PABCD si determina multiplicando la somma delle basi, ossia il perimetro della base ABCD per la metà della altezza comune PE delli triangoli laterali. Sicchè , ec.

76. Se li triangoli laterali hanno diseguali altezze , allora si deve fare la somma delle misure di tutti li triangoli laterali , per determinare l' aja convessa della piramide.

77. Teor. 7. *Se in una piramide , la quale ha tutti li triangoli laterali della medesima altezza si fa una sezione parallela alla base , l' aja laterale del tronco piramidale equivale al rettangolo fatto da due rette , delle quali una è eguale alla metà della somma delli contorni della base , e della sezione , e l' altra è la altezza di uno delli trapezi laterali del tronco.*

(Fig. 40.) Rappresenti PABCDE una piramide , nella quale tutti li triangoli laterali hanno la medesima altezza , ed in essa sia fatta la sezione FGHIK parallela alla base , dico, che l' aja laterale del tronco ADIF equivale al rettangolo fatto dalla metà della somma delli perimetri della base ABCDE , e della sezione FGHIK , e dalla altezza di uno delli trapezi laterali.

Dim. Dal vertice P della piramide si concepiscano calate le perpendicolari sopra le respettive basi delli triangoli taterali , esse saranno divise dalli piani paralleli AD,IF in parti proporzionali alle altezze intere , ma per la ipotesi le altezze intere sono eguali , dunque anche le altezze delli trapezi sono eguali, dippiù ciascheduno delli trapezi equivale al rettangolo fatto dalla metà della somma delli lati paralleli , e dalla comune altezza di tutti li trapezi, dunque la somma di tutti li trapezi equivale al rettangolo fatto dalla metà della somma di tutti li lati paralleli, e dalla comune altezza di tutti li trapezi, ma la somma di tutti li trapezi è l'aja laterale del tronco della piramide, e la metà della somma delli lati paralleli di tutti li trapezi è la metà della somma delli contorni della base, è della sezione, dunque l'aja laterale del tronco piramidale ADIF equivale al rettangolo fatto dalla metà della somma delli perimetri della base ABCDE, e della sezione FGHIK, e dalla altezza di uno delli trapezi laterali. Sicchè etc.

78. Qui è buono di avvertire, che se la piramide proposta non ha li triangoli laterali della medesima altezza, l'aja laterale del tronco di essa non può essere determinata per mezzo di un solo triangolo, ma essa si determinerà valutando ciascuno delli trapezi, dalli quali essa è composta.

79. Teor 8. *L'aja laterale di un prisma obliquo equivale al rettangolo fatto da uno degli spigoli, e dal perimetro di qualsivoglia sezione fatta in esso perpendicolarmente ad uno degli spigoli.*

(Fig. 38.) Rappresenti ACGE un prisma obliquo, nel quale sia fatta la sezione LMNO perpendicolare allo spigolo AF. Dico, che l'aja laterale di questo prisma equivale al rettangolo fatto dallo spigolo AF, e dal perimetro della sezione LMNO, e che perciò essa sarà espressa da AF(LM+MN+NO+OL).

Dim. Poichè tutti gli spigoli del prisma ACHF sono paralleli, è evidente, che il piano LMNO, il quale è perpendicolare allo spigolo AF, è perpendicolare a tutti gli altri, e perciò il parallelogrammo AG equivale al rettangolo fatto dallo spigolo AF, e da LM ad esso perpendicolare, il parallelogrammo BH è eguale al rettangolo fatto dallo spigolo BG e da MN ad esso perpendicolare, e così per gli altri parallelogrammi, quindi l'aja laterale del prisma ACHF, la quale equivale alla somma di tutti li parallelogrammi laterali, sarà espressa da AF×LM+BG×MN+CH×NO+DE×OL, ma AF=BG=CH=DE, dunque essa sarà espressa da AF(LM+MN+NO+OL), ma questa espressione è quella del rettangolo fatto dallo spigolo AF e dal perimetro della sezione LMNO fatta perpendicolarmente allo stesso spigolo, dunque l'aja laterale del prisma obliquo ACHF equivale al rettangolo fatto dallo spigolo AF e dal perimetro della sezione LMNO ad esso perpendicolare, ed è espressa da AF(LM+MN+NO+NL). Sicchè, etc.

80. Cor. Se il prisma sarà retto, la sezione LMNO sarà eguale, e parallela alla base ABCD, e lo spigolo AF sarà eguale alla altezza del medesimo prisma, dal che ricaviamo, che *l'aja laterale di un prisma retto equivale al rettangolo fatto da due rette, delle quali una eguaglia il contorno della base, e l'altra la altezza del prisma.*

*

C A P. II.

Delli poliedri simili.

81. Si da il nome di *poliedri simili* a quelli poliedri, li quali hanno le facce, le quali sono poligoni simili, hanno il medesimo numero di facce similmente disposte, e che formano angoli diedri eguali.

82. Teor. I. *Due piramidi triangolari sono simili*, 1. *qualora li triangoli, che comprendono due angoli triedri omologhi sono simili, e similmente situati.* 2. *Qualora esse hanno due facce dell' una simili a due facce dell' altra, le quali si riuniscono in due lati omologhi, e comprendono tra esse due angoli diedri eguali.*

(Fig. 39.) 1. Le due piramidi triangolari PABC, RDEF abbiano li triangoli APB, BPC, CPA, che comprendono l' angolo triedro P, similmente disposti, e simili alli triangoli DRE, ERF, FRD; dico, che le piramidi PABC, RDEF sono simili.

Dim. Per la ipotesi li triangoli APB, BPC, CPA sono similmente disposti alli triangoli DRE, ERF, FRD, e perciò gli angoli triedri P, R sono eguali; Si prenda nello spigolo PA la porzione PL eguale allo spigolo omologo RD, e per lo punto L si tiri il piano LMN parallelo ad ABC, avremo la piramide PLMN, nella quale essendo i lati LM, MN, LN paralleli ad AB, BC, CA, il triangolo ABC è simile al triangolo LMN, il triangolo PBC è simile ad MPN; ed il triangolo CPA è simile ad NPL, dippiù li triangoli LMN, ABC, avendo li lati respettivamente paralleli, avranno gli angoli respettivamente eguali, e perciò sono anche simili, e per conseguenza le due piramidi PABC, PLMN avendo le facce simili, e gli angoli triedri omologhi formati da angoli piani eguali, avranno ancora gli angoli diedri eguali, e saranno simili.

Abbiamo dimostrato, che li triangoli LPM, LPN, NPM sono simili alli triangoli APB, APC, BPC, li quali per la ipotesi sono simili alli triangoli DRE, DRF, FRE, dunque anche li triangoli LPM, LPN, NPM saranno simili alli triangoli DRE, DRF, FRE; ma li triangoli DRE, PLM hanno li lati omologhi RD, PL eguali, dunque essi sono eguali, con lo stesso raziocinio si dimostra essere li triangoli PLN, NPM eguali respettivamente alli triangoli DRF, FRE, dunque le due piramidi PLMN, RDEF avendo gli angoli triedri P, R compresi tra triangoli eguali, e similmente disposti, sono eguali, ma la piramide PLMN si è dimostrata simile alla piramide PABC, dunque anche la piramide PABC è simile alla piramide RDEF.

2. Abbia la piramide triangolare PABC, le due facce PAC, PAB respettivamente simili alle facce omologhe RDF, RDE della piramide RDEF, riunite nelli spigoli omologhi

PA, RD, e sieno eguali gli angoli diedri CPAB, FRDE; dico che esse saranno simili.

Dim. Si concepisca fatta la costruzione precedente, e si dimostri come nel caso precedente, che la piramide PABC è simile alla piramide PLMN, indi si concepisca la piramide PLMN posta nella piramide RDEF in modo, che la faccia NPL combaci con la sua eguale RDF, a cagione degli angoli diedri NPLM, FRDE eguali, la faccia LPM combacerà con la sua eguale DRE, e combaciando PN con RF, PM con RE, tutta la piramide PLMN combacerà con tutta la piramide RDEF, e perciò esse sono eguali; ma la piramide PABC è simile a PLMN, dunque anche RDEF è simile a PABC. Sicchè, etc.

83. Teor. 2. *Qualora due piramidi qualunque sono terminate da un eguale numero di facce simili, e similmente disposte, esse sono simili.*

(Fig. 34.) La due piramidi PABCD, REFGH abbiano le facce respettivamente simili, e similmente disposte, dico che esse avranno tutti gli angoli diedri anche eguali, e che per conseguenza saranno simili.

Dim. Li poligoni ABCD, EFGH per la ipotesi sono simili; quindi se dalli vertici di due angoli eguali si tirano alli vertici degli angoli opposti le diagonali, essi vengono divisi in un medesimo numero di triangoli simili, e similmente disposti e perciò il triangolo ABC sarà simile al triangolo EFG, e gli angoli

triedri in B, ed in F saranno formati da angoli piani eguali, ed in conseguenza le facce si incontreranno facendo angoli diedri eguali, similmente si dimostrerebbe per gli angoli diedri appartenenti agli angoli triedri, C, e G, D ed H, A ed E etc. Sicchè, etc.

84. Teor. 3. *Due poliedri simili possono essere divisi in un medesimo numero di piramidi triangolari respettivamente simili, e similmente disposte.*

Dim. Imperocchè se nelle facce omologhe di ciascuno delli poliedri proposti si congiungono gli angoli omologhi, mediante le diagonali occorrenti sopra tali facce, si formerà un medesimo numero di triangoli simili, e similmente situati, quindi tutti li triangoli, che compongono le aje delli due poliedri, ad eccezione di quelli, che comprendono due angoli triedri delli poliedri proposti, possono essere considerati come basi di altrettante piramidi triangolari, le quali hanno per vertici li vertici degli angoli solidi sopranominati, e poichè il numero delli triangoli respettivamente simili, che servono di basi alle sudette pirami è lo stesso nelle superficie di ciascheduno delli due poliedri, ne segue, che il numero delle piramidi delli due poliedri è lo stesso. Dippiù sì fatte piramidi saranno respettivamente simili, perchè hanno per basi triangoli simili, ed hanno per facce laterali triangoli simili, e similmente disposti, poichè di essi alcuni sono facce simili de' poliedri, e gli altri sono le sezioni similmente fatte nelli medesimi poliedri. Sicchè, ec.

85. Corol. Dal che ricaviamo, che le costole omologhe delli poliedri simili sono proporzionali, come ancora sono proporzionali le diagonali delle facce omologhe, e le diagonali interne delli poliedri.

86. Teor. 4. Le *aje delli poliedri simili sono nella ragione delli quadrati di due spigoli omologhi.*

Dim. Gli spigoli omologhi delli poliedri simili sono proporzionali, e per conseguenza anche li quadrati di essi sono proporzionali, ma le facce omologhe delli poliedri simili sono anche simili, e perciò sono fra esse nella ragione delli quadrati delli loro lati omologhi, li quali sono spigoli omologhi delli poliedri, dunque le facce omologhe saranno fra loro proporzionali, e perciò sarà la somma delle facce omologhe del primo poliedro alla somma delle facce omologhe del secondo come una delle facce del primo poliedro alla faccia omologa del secondo, ma la somma delle facce del primo poliedro è la sua aja, la somma delle facce del secondo è l'aja del secondo poliedro, e le facce omologhe de' due poliedri sono fra esse come li quadrati delli correspondenti spigoli omologhi, dunque le aje delli poliedri simili sonó come li quadrati degli spigoli omologhi. Sicchè, etc.

C A P. III.

Delli volumi delli poliedri.

87. Si dice *volume* di un corpo lo spazio, che è racchiuso tra le superficie, che lo terminano.

Noi abbiamo osservato nella Geometria piana, che due poligoni quantunque di forme differenti possono racchiudere la medesima aja, e da noi si sono chiamati *equivalenti*, similmente li poliedri, li quali avendo forme differenti racchiudono spazi eguali, sono detti *equivalenti.*

88. Teor. 1. *Due parallelepipedi, li quali hanno la medesima base, e sono terminati nella parte superiore da un medesimo piano parallelo alla base, sono equivalenti.*

Possono darsi due casi 1. Che li parallelepipedi sieno racchiusi tra li medesimi piani laterali. 2. Che essi non sieno racchiusi fra li medesimi piani laterali.

(Fig. 41.) 1. Rappresentino ACHF: ACKM due parallelepipedi, li quali abbiano la medesima base AC, e sieno racchiusi fra li medesimi piani paralleli AC, GL, e sieno compresi fra li medesimi piani laterali BCKG, ADLF. Dico che essi sono equivalenti.

Dim. Le rette FG, MI sono eguali, e parallele ad AB, dunque esse sono anche eguali e parallele, e per conseguenza eguali, e parallele sono anche le rette GI, FM, che congiungono dalla medssima parte gli estremi di esse, dnnque GM è un parallelogrammo; con lo stesso raziocinio si dimostra, che HELK è un parallelogrammo; Dippiù GH ed IK sono amendue eguali a BC, dunque GH=IK, aggiuntovi di comune HI, sarà GI=HK; Dippiù per le parallele FG, EH tagliate dalla secante GK gli angoli correspondenti KHE, IGF sono eguali, dunque li due parallelogrammi GM, HL sono eguali. Dippiù li due triangoli BGI, AFM sono eguali, e paralleli, e le altre facce del solido ABGFMI sono parallelogrammi; dunque ABGFMI è un prisma triangolare; similmente si dimostra, che il solido DCKLEH è anche un prisma triangolare, ma questi prismi triangolari hanno le tre facce, che comprendono l'angolo triedro B similmente disposte, ed eguali alle tre facce, che comprendono l'angolo triedro C; dunque essi sono eguali; Quindi se dal solido intero ABCDLFGK si toglie il prisma ABGFMI resterà il parallelepipedo ACKM, il quale sarà eguale al parallelepipedo ACHF, il quale resterà, quando dal medesimo solido ABCDLFGK si toglie il prisma CDEHKL, il quale si è dimostrato eguale al prisma ABGFMI, dunque li parallelepidedi ACHF, ACKM, li quali hanno la medesima base, e sono terminati nella parte superiore da un medesimo piano parallelo alla base, e sono racchiusi fra li medesimi piani laterali sono equivalenti.

2. (Fig. 42.) Sieno ora li parallelepipedi ABCDEFGH, ABCDLMIK, li quali abbiano

la medesima base ABCD, e sieno compresi fra li medesimi piani paralleli, ma non fra li medesimi piani laterali; dico che essi sono anche equivalenti.

Dim. Si prolunghino le rette FE, GH fino a tanto, che incontrino le rette MI, KL prolungate in Q, N, O, P, e si uniscano le rette QA, NB, PD, OC.

Li piani FH, AC sono paralleli, dunque QO prolungamento di FH è parallelo ad AC; Della medesima maniera si dimostra, che QB è parallelo a PC, e che BO è parallelo ad AP, quindi ABCDPQNO è un parallelepipedo; In oltre li parallelepipedi ABCDPQNO, ed ABCDLMIK hanno la medesima base, sono racchiusi fra li medesimi piani paralleli, e fra li medesimi piani laterali, dunque essi sono equivalenti. Il medesimo parallelepipedo ABCDPQNO, è equivalente al parallelepipedo ABCDLMIK, dunquc li parallelepipedi ABCDEFGH, ed ABCDLMIK sono equivalenti. Sicchè, etc.

89. Cor. 1. Li piani paralleli sono da per tutto ad eguali distanze, dunque li parallelepipedi, che hanno la medesima base, e la medesima altezza sono equivalenti.

90. Cor. 2. (Fig. 43). Supponiamo, che vi sia un parallelepipedo, il quale abbia per base il parallelogrammo obliquangolo ABCD, e gli spigoli comunque inclinati alla base, esso potrà essere trasformato in un altro parallelepipedo, il quale conservando la medesima base abbia gli

spigoli perpendicolari alla base, e sia ad esso equivalente, poichè basterà dalli vertici degli angoli A, B, C, D della base elevare sopra di essa delle perpendicolari, e prolungarle fino all'incontro del piano NP opposto alla base, e sopponiamo, che il parallelepipedo a spigoli perpendicolari alla base, ed equivalente al parallelepipedo dato sia ACPN. Se ora sopra del lato AB della base parallelogramma di questo parallelepipedo si costruisce il rettangolo AR equivalente al parallelogrammo AC, e sopra di esso si costruisce il parallelepipedo rettangolo ARTN, esso sarà equivalente al parallelepipedo ACPN, poichè li parallelepipedi ACPN, ARTN si possono considerare come posti sopra della medesima base ABON, e racchiusi fra li medesimi piani paralleli ABON, SCPV, ma il parallelepipedo ACPN si era fatto equivalente al parallelepipedo obbliquangolo dato, dunque anche il parallelepipedo rettangolo ARTN è equivalente al parallelepipedo obbliquangolo dato; quindi sempre possiamo trasformare un parallelepipedo obbliquangolo in un parallelepipedo rettangolo ad esso equivalente, *facendo sopra di un lato della base di esso il rettangolo ad essa equivalente*, e *costruendo sopra di tale rettangolo il parallelepipedo rettangolo, il quale abbia la altezza eguale alla altezza del parallelepipedo dato.*

91. Teor. 2. Se *per le correspondenti diagonali di due parallelogrammi opposti di un parallelepipedo si fa passare un piano, esso divderà il parallelepipedo in due prismi triangolari eguali.*

(Fig. 44). Rappresenti ABCDHGFE un parallelepipedo, e nelle sue facce opposte AC, EG sieno tirate le correspondenti diagonali BD, FH, per le quali si concepisca passare il piano BDHF, il quale divide il parallelepipedo ACGE in due porzioni ABDHEF, BDCGHF, dico che questi due solidi sono due prismi triangolari eguali.

Dim. Li due piani AC, EG paralleli sono tagliati dal piano BDHF, dunque le loro comuni sezioni BD, HF sono parallele; similmente li piani AH, BG paralleli venendo tagliati dal medesimo piano BH, le comuni sezioni BF, HD sono anche parallele, e perciò il quadrilatero BDHF è un parallelogrammo. In oltre li triangoli BCD, FGH hanno li lati respettivamente eguali, e paralleli, dunque essi sono eguali, e paralleli, ed il solido BDCFGH è terminato da due triangoli eguali, e paralleli, e dalle facce laterali BDHF, BCGF, DCGH, le quali sono tutte parallelogrammi, dunque il solido DBCHFG è un prisma triangolare, con lo stesso raziocinio si dimostra, che il solido ABDHFE è anche un prisma triangolare, ma li triangoli ABD, DBC sono eguali, essendo ciascono di essi metà del medesimo parallelogrammo, per la stessa ragione il triangolo EHF = FGH; Dippiù nelli parallelepipedi le facce opposte sono eguali, dunque AF = DG, AH = BG, quindi li due prismi triangolari ABDHFE, DCBFGH hanno la faccia BDHF comune, e le altre facce respettivamente eguali, dunque questi prismi essendo terminati da un equale numero di facce eguali, e similmente disposte sono eguali. Sicchè, etc.

92. Cor. Dunque il prisma trangolare ABDFEH è metà del parallelepipedo, che ha con esso la medesima altezza, e la base ABCD doppia della base del medesimo prisma, e per conseguenza due prismi triangolari, che hanno eguali le basi, e le altezze, sono equivalenti, poichè sono metà di parallelepipedi equivalenti.

93. Teor. 3. Li *parallelepipedi rettangoli, li quali hanno eguali basi sono nella ragione delle loro altezze.*

(Fig. 45). Rappresentino AG, IP due parallelepipedi rettangoli, li quali abbiano per basi li rettangoli AC, IL equali, dico che AG : IP : : AE : IN.

Due casi possono accadere 1. Che le altezze AE, IN sieno commensurabili.

2. Che esse sieno incommensurabili.

Dim. 1. Essendo AE, IN commensurabili esse avranno una comune misura, suppponiamo, che essa sia Aa, e che AE contenga Aa un numero m di volte, e che IN la contenga n volte, avremo AE : IN : : m : n. In oltre se dalli punti di divisione delle parti eguali ad Aa, in cui verrebbero divise AE, IN si concepiscano tirati delli piani paralleli alle

espettive basi AC, IL, il parallelepipedo AG verrà diviso in m parallelepipedi rettangoli, ed il parallelepipedo IP verrà diviso in n parallelepipedi, e poichè tutti questi piccoli parallelepipedi sono eguali, perchè hanno le basi, e le altezze eguali, sarà il parallelepipedo AG : IP : : m : n, ma anche le altezze AE, IN souo nella medesima ragione di m : n; dunque sarà il parallelepipedo AG al parallelepipedo IP come la altezza AE alla altezza IN. Sicchè, etc

Dim. 2. Supponiamo ora, che le altezze AE, IN siano incommensurabili; in questo caso possiamo supporre, che possano esistere tre proporzioni

1. Che sia AG : IP : : AE : IR supponendo IR > IN.

2. Che sia AG : IP : : AE : IR', supponendo IR' < IN

3. Che sia AG : IP : : AE : IN.

Quindi se noi dimostriamo essere assurde le proporzioni, 1, 2, avremo verificata la proporzione 3.

Supponiamo in prima, che abbia luogo la proporzione

AG : IP : : AE : IR; Noi possiamo concepire la altezza AE divisa in parti tutte eguli, e tanto piccole quanto a noi piacerà, e per conseguenza in parti minori di NR, allora dividendo IR in parti tutte eguali a tale particella, almeno un punto di divisione cadrà tra li punti N, R, sia questo punto il punto n, e per n si faccia passare il piano np parallelo ad IL, e si compisca il parallelepipedo Ip; Essendo AE, In commensurabili avremo AG : Ip : : AE : In, ma per la supposizione abbiamo AG : IP : : AE : IR, Quindi avremo le due proporzioni

AG : IP : : AE : IR

AG : Ip : : AE : In, le quali avendo li medesimi antecedenti danno la proporzione IP : Ip : : IR : In, la quale è assurda, poichè IP < Ip; nel mentre IR > In, dunque la prima proporzione non può avere luogo.

Supponiamo potere aver luogo la seconda proporzione AG : IP : : AE : IR' Noi possiamo dividere AC in parti tutte eguali tanto piccole quanto sarà necessario, perchè dividendo in parti eguali ad esse la retta IN un punto di divisione n' cada tra N ed R', per lo quale facendo passare il piano $n'p'$ parallelo ad IL, e completando il parallelepipedo Ip', riprendendo il raziocinio precedente avremo la proporzione AG : Ip' : : AE : In', ed avremo le due proporzioni

AG : Ip' : : AE : In'

AG : IP : : AE : IR', le quali avendo li medesimi antecedenti con li loro conseguenti ci forniscono la proporzione IP : Ip' : : IR' In', la quale è anche assurda, poichè IP > Ip', nel mentre IR' < In', quindi essendo assurde le due prime proporzioni, dovrà necessariamente aver luogo la terza, ed avremo AG : IP : : AE : IN. Sicchè, etc.

94. Teor. 4. *Due parallelepipedi rettangoli qualunque, sono in ragione composta da quelle degli spigoli, che formano due angoli triedri omologhi di essi; o ciò che vale lo stesso, essi sono fra loro nella ragione del prodotto, che si ha multiplicando li numeri astratti, che esprimono gli spigoli, che formano un angolo triedro dell' uno al prodotto degli numeri astratti, che esprimono gli spigoli omologhi, che formano il corrispondente angolo triedro dell' altro, essendo questi numeri rapportati alla medesima unità lineare.*

(Fig. 46). Rappresentino AG, IP due parallelepipedi rettangoli qualunque, dico che IP : AG : : IK×IM×IN : AB×AD×AE.

Dim. Dallo spigolo IN del parallelepipedo IP si tagli II' = AE, e per lo punto I' si faccia passare il piano I'L' parallelo al piano IL; similmente da AD si tagli AD' = IM, e per lo punto D' si facci passare il piano D'G' parallelo al piano DG, avremo così costruiti li due parallelepipedi rettangoli IL', AG'

Li parallelepipedi AG', IL' hanno le basi AH', IM' eguali, quindi sono fra essi nella ragione delle loro altezze AB, IK, cioè AG' : IL' : : AB : IK, e sarà $AG' = IL' \times \frac{AB}{IK}$;

Dippiù li parallelepipedi AG, AG' avendo la medesima base AF sono fra essi come le altezze AD, AD', cioè sarà AG : AG' : :

$AD : AD' :: AD : IM$, e perciò $AG' = AG \times \frac{IM}{AD}$; ed avremo $IL' \times \frac{AB}{IK} = AG \times \frac{IM}{AD}$

e dividendo per $\frac{AB}{IK}$, avremo $IL' = AG \times \frac{IM}{AD} \times \frac{IK}{AB} = AG \times \frac{IM \times IK}{AD \times AB}$.

In oltre li due parallelepidedi IL', IP avendo la medesima base IL sono fra essi nella ragione delle altezze, cioè $IL' : IP :: IL' : IN :: AE : IN$, e perciò $IP = IL' \times \frac{IN}{AE}$; e sostituendo in vece di IL' il suo valore $AG \times \frac{IM \times IK}{AD \times AB}$, avremo $IP = AG \times \frac{IM \times IK}{AD \times AB} \times \frac{IN}{AE} = AG \times \frac{IM \times IK \times IN}{AD \times AB \times AE}$; e dividendo per AG, avremo $\frac{IP}{AG} = \frac{IM \times IK \times IN}{AD \times AB \times AE}$, ossia $IP : AG :: IM \times IK \times IN : AD \times AB \times AE$. Sicchè, etc.

95. Av: Se si prenda per termine di paragone di tutti li parallelepipedi rettangoli il cubo P, gli spigoli del quale sieno tutti eguali alla linea retta presa per unità lineare, il prodotto degli spigoli, che in esso formano un angolo triedro è eguale alla unità; ed avremo il parallelepipedo rettangolo AG al cubo P : : $AB \times AD \times AE : 1$.; Dal che conchiudiamo, che il *parallelepipedo rettangolo AG contiene tante volte il cubo P, quante volte il prodotto degli spigoli rapportati alla unità lineare contiene la unità.* Quindi se noi diciamo, che il *volume di un parallelepipedo rettangolo si ha multiplicando li tre spigoli, che formano in esso un angolo triedro*, questa frase si deve intendere come una espressione abbreviata della seguente, *qualunque parallelepipedo rettangolo contiene tante volte il cubo formato sopra una retta eguale alla unità lineare, a cui si rapportano gli spigoli, che formano un angolo triedro del parallelepipedo, quante volte il prodotto, che nasce multiplicando li numeri astratti, che esprimono li tre spigoli relativamente alla medesima unità lineare contiene la unità.*

Di più se noi consideriamo, che $AB \times AD$ esprime l'aja della base AC del parallelepipedo AG, noi conchiudiamo, che il *volume di un parallelepipedo rettangolo ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza.*

96. Cor 1. Se il parallelepipedo rettangolo avesse gli spigoli, che formano uno delli suoi angoli triedri tutti eguali, esso diverrà un cubo, e il suo volume sarà determinato dalla moltiplicazione del numero, che esprime uno delli suoi spigoli preso tre volte come fattore nella moltiplicazione per se medesimo; ossia il *volume del cubo è misurato dalla terza potenza del numero, che esprime uno delli suoi spigoli.*

97. Cor. 2. Noi abbiamo dimostrato, che un parallelepipedo qualunque può essere sempre trasformato in un parallelepipedo rettangolo della medesima altezza, e costruito sopra una base rettangola equivalente, dunque un parallelepipedo qualunque ha *sempre per misura del suo volume il prodotto della sua base per la sua altezza, e che li parallelepipedi, che avendo la medesima altezza hanno le basi equivalenti, hanno volumi eguali.*

98. Cor. 3. (Fig. 44.) Noi abbiamo ancora dimostrato, che il volume del prisma triangolare ABDHEF equivale alla metà del volume del parallelepipedo ABCDHEFG, dunque il suo volume è misurato dal prodotto della metà della base AC del parallelepipedo per la altezza di esso, ma il triangolo ABD, il quale serve di base al prisma è la metà del parallelogrammo AC, il quale serve di base al parallelepipedo, dunque il *volume di un prisma triangolare ha per misura il prodotto, che si ha multiplicando la sua base per la sua altezza.*

99. Cor. 4. (Fig. 48). Se si ha un prisma qualunque BEKH, il quale abbia per base qualsivoglia poligono ABCDE è evidente, che se noi dividiamo il poligono ABCDE in triangoli per mezzo delle diagonali AC, AD, e per li spigoli paralleli, che ad esse sono contigui AG e DK, AG e CI si facciano passare li piani ADKG, ACIG il prisma BEKH verrà diviso nelli prismi triangolari, li quali hanno tutti la medesima altezza, ed hanno per basi li triangoli BAC, CAD, DAE, ed essi avranno per misure rispettive delli loro volumi li prodotti delle rispettive basi per la loro comune altezza, quindi denotando con A la comune altezza di essi, le misure delli loro respettivi volumi saranno
ABC×A, CAD×A, DAE×A, e la somma di esse (ABC+CAD+DAE) A=ABCD×A sarà la misura del volume dello intero prisma BEKG. Dal che generalmente conchiudiamo, che li *volumi di due prismi qualunque sono fra essi nella ragione delli prodotti delle loro basi per le loro altezze, e che per conseguenza qualora essi hanno le basi equivalenti sono fra essi nella ragione delle altezze, e che se essi hanno eguali le altezze sono nella ragione delle basi; e finalmentè che due prismi sono equivalenti qualora hanno la*

medesima altezza, e le basi equivalenti, quantunque queste basi sieno di figure differenti.

100. Cor. 5. Di due prismi qualunque si disegnino con A, A' le altezze, con B, B' le basi, e con P, P' li volumi, avremo $P : P' :: A \times B : A' \times B'$, quindi se $P = P'$, avremo $A \times B = A' \times B'$, e per conseguenza $A : A' :: B' : B$. Dunque qualora *due prismi qualunque hanno eguali volumi essi avranno le basi in ragione reciproca delle altezze*; e se essi avranno le basi in ragione reciproca delle altezze avremo $A \times B = A' \times B'$, e perciò anche $P = P'$, e conchiudiamo, che *qualora due prismi hanno le basi in ragione reciproca delle altezze, essi sono equivalenti.*

101. Teor. 5. *Due piramidi triangolari, le quali hanno le basi equivalenti, ed eguali le altezze sono equivalenti.*

(Fig. 49*.) Siano le due piramidi triangolari SABC, *sabc* le quali abbiano le basi ABC, *abc* equivalenti, e supponiamo esse situate nel medesimo piano, ed abbiano AT per comune altezza. Dico che esse sono equivalenti.

Dim. Se si nega, che queste due piramidi sono equivalenti, sia *sabc* la minore di esse, e supponiamo che AX sia la altezza di quel

prisma triangolare, il quale avendo per base ABC sia eguale alla differenza delle due piramidi.

Potendo noi concepire la altezza AT comune alle due piramidi divisa in parti tutte eguali, e tanto piccole quanto a noi piacerà, noi la concepiremo divisa in parti eguali tali, che ciascuna di esse sia minore di AX, e supponiamo, che una di queste particelle sia disegnata da K, indi per ciascheduno delli punti di divisione si concepisca passare un piano parallelo a quello in cui sono le basi ABC, *abc*, per mezzo di essi noi avremo fatte nelle due piramidi un eguale numero di sezioni parallele alle loro basi, delle quali quelle prodotte dal medesimo piano sono tutte egualmente distanti dalli vertici S, *s*, e perciò sono nella ragione delle basi ABC, *abc*, e per conseguenza equivalenti, cioè saranno equivalenti ABC con *abc*, GHI con *ghi* etc, quindi se sopra delli triangoli ABC, DEF, GHI etc. prese per basi si concepiscano fatti delli prismi triangolari eccedenti, li quali abbiano per costole le parti AD, DG, GK etc. dello spigolo AS, e della medesima maniera sopra delli triangoli *def*, *ghi*, *klm* si concepiscano formati delli prismi deficienti li quali abbiano per costole le parti *ad*, *dg*, *gk* dello spigolo *as*, tutti questi prismi avranno la medesima altezza K.

E' evidente che la somma delli prismi eccedenti della piramide SABC è maggiore della piramide SABC, e che la somma delli prismi deficienti della piramide *sabc* è minore della piramide *sabc*, quindi la differenza tra la somma delli prismi eccedenti della piramide SABC e la somma delli prismi deficienti della piramide *sabc* è maggiore della differenza delle due piramidi.

In oltre il secondo prisma eccedente della piramide SABC cioe il prisma DEFG è equivalente al primo prisma deficiente della piramide *sabc*, cioè al prisma *defa*, poichè essi hanno la medesima altezza K, e le basi DEF, *def* equivalenti, per la medesima ragione sono equivalenti il terzo prisma eccedente GHIK, ed il secondo deficiente *ghcd*, etc. fino agli ultimi delle due piramidi; quindi tutti li prismi eccedenti della piramide SABC, fuori del primo, hanno li loro equivalenti nelli deficienti della piramide *sabc*, e perciò il prisma ABCD è la differenza, che passa tra la somma delli prismi eccedenti della piramide SABC, e la somma delli prismi deficienti della piramide *sabc*, ma abbiamo dimostrato, che la differenza di queste due somme deve essere maggiore della differenza delle due piramidi, dunque il prisma ABCD dovrebbe essere maggiore del prisma ABCX, ma questo è impossibile, poichè questi prismi hanno la medesima base ABC, e la altezza K

del primo è minore della altezza X del secondo, dunque la supposizione fatta, cioè che le due piramidi non sieno equivalenti è assurda; e conchiudiamo che le piramidi triangolari, le quali hanno eguali altezze, e le basi equivalenti sono equivalenti. Sicchè, etc.

102. Teor. 6. *Qualunque prisma triangolare è composto da tre piramidi triangolari equivalenti.*

(Fig. 47.) Rappresenti BCADEF un prisma triangolare; dico che esso è composto da tre piramidi triangolari equivalenti.

Dim. Nelle due facce ABED, CBEF del prisma si tirino le diagonali DB, BF, e per esso si faccia passare il piano DBF, questo piano taglierà il prisma nella piramide triangolare BDEF, e nella piramide quadrangolare BACFD, la piramide triangolare BDEF ha per base la base DEF del prisma, e poichè il suo vertice è posto sul piano superiore del prisma ha la stessa altezza del prisma; Si tagli ora la piramide quadrangolare BACFD per mezzo di un piano tirato dal vertice B della medesima piramide, e per la diagonale DC del parallelogrammo ADFC, essa sarà divisa nelle due piramidi triangolari BACD, BDFC, le quali avendo le basi ACD, CDF eguali, e la medesima altezza, perchè hanno il vertice nel medesimo punto B, sono equivalenti.

Dippiù la piramide BACD si può considerare avere per base il triangolo ABC, e per vertice il punto D, quindi le due piramidi BDEF, BACD avranno le basi DEF, ABC eguali, ed eguali altezze, perchè esse sono comprese fra li medesimi piani paralleli DEF, ABC, quindi esse sono ancora equivalenti, e le tre piramidi BCFD, BCAD, BDEF sono equivalenti. Sicchè, etc.

103. Cor. 1. Essendo il prisma triangolare BACDEF composto da tre piramidi triangolari equivalenti alla piramide BDEF, la quale ha la base, e la altezza eguali alla base ed alla altezza del prisma, ne segue, che la *piramide triangolare è la terza parte del prisma triangolare, che ha con essa la medesima base, e la medesima altezza.*

104. Cor. 2. Qualsivoglia piramide poligona è anche la terza parte del prisma poligono, che ha con essa la medesima base, e la medesima altezza, poichè si può sempre concepire un prisma qualunque come composto da tanti prismi triangolari; e la piramide come composta da altrettante piramidi triangolari quanti triangoli possono farsi nel poligono, che serve di base sì all'uno, che all'altra, e poichè ciascuna di sì fatte piramidi triangolari è la terza parte del prisma trtangolare corrispondente, ne segue, che la intera piramide è la terza parte dello intero prisma, che ha con essa la medesima base; e la medesima altezza.

105. Cor. 3. Sapendo che il rapporto, che hanno fra esse due quantità intere esiste ancora fra le terze parti di esse, conchiudiamo, che le proprietà, che hanno li prismi sono applicabili ancora alle piramidi; dunque

1.° Le piramidi qualunque di eguali basi sono nella ragione delle altezze.

2.° Due piramidi qualunque sono in ragione composta da quella delle basi, e da quella delle altezze.

106. Due piramidi equivalenti hanno le basi in ragione reciproca delle loro altezze, e le piramidi le quali hanno le basi in ragione reciproca delle altezze sono equivalenti.

107. La misura del volume di una piramide si ha multiplicando la sua base per la terza parte della sua altezza.

108. Cor. 3. Se si ha una piramide troncata da un piano parallelo alla sua base, per avere la misura del tronco piramidale basterà calcolare prima il volume della piramide intera, indi quello della parte mancante, il che faremo determinando la altezza della parte mancante, indi multiplicando la base della piramide intera per la terza parte della sua altezza, la quale si ha addizionando la altez-

za del tronco con la altezza della parte mancante, e dal prodotto sottraendo il prodotto della base superiore per la terza parte della altezza della parte mancante.

109. Cor. 4. Abbiamo dimostrato, che un poliedro qualunque può essere sempre decomposto in piramidi, quindi il suo volume sarà sempre valutato determinando il volume di ciascheduna delle piramidi, ed addizionando i risultati.

110. Teor. 7. *Un prisma triangolare troncato da un piano non parallelo alla base equivale ad un tetraedro, il quale ha la base eguale alla base del prisma, ed ha per altezza la somma delle tre perpendicolari abbassate sopra del piano della base del prisma dalli vertici delli tre angoli trietri formati dalli spigoli del prisma, e dalli lati della sezione.*

(Fig. 52.) Rappresenti ABCDEF il tronco di un prisma triangolare terminato dal piano FED non parallelo alla base ABC, e dalli punti E, F, D, sieno calate sopra del piano ABC le tre perpendicolari EO, FP, DQ. Dico che il solido ABCDEF equivale al tetraedro, il quale ha per base la base ABC del prisma, e per altezza la somma delle tre perpendicolari EO, FP, DQ.

Dim. Per lo punto P si tiri il piano GFH parallelo ad ABC, che incontra EO, DQ nelli punti R, S, e si tirino le rette DG, HE.

Il piano GFH divide il solido ABCDEF in due parti, una delle quali è il prisma ABCHFG, l'altra è FGHDE, questa seconda parte si risolve nelle due piramidi triangolari GFHE, EFHD, quindi il solido ABCDEF equivale alla somma del prisma triangolare ABCHFG, e delle due piramidi triangolari GFHE, EFHD, ma la piramide EFHD equivale alla piramide GHFD, dunque il solido ABCDEF equivale alla somma del prisma ABCHFG, e delle due piramidi GFHE, GHFD, ma la somma di queste due piramidi equivale alla piramide, la quale ha per base la loro comune base GHF, o la sua eguale ABC, e per altezza la somma delle loro altezze ER, DS, ed il prisma ABCHFG equivale alla piramide, che ha per base ABC, e per altezza il triplo della sua altezza, ossia RO, FP, SQ, dunque il solido intero sarà equivalente ad una piramide triangolare, di cui la base è ABC, e la altezza è la somma di EO, FP, DQ. Sicchè, ec.

111. Cor. Quindi ricaviamo, che la misura del volume di un prisma triangolare troncato per mezzo di un piano non parallelo alla base si ha multiplicando la base del prisma per la terza parte della somma delle tre perpendicolari abbassate da ciascuno delli vertici del piano, che tronca il prisma sopra del piano della base del prisma.

112. Teor. 8. *Due piramidi simili sono fra esse nella ragione delli cubi degli spigoli omologhi.*

(Fig. 53). Sieno le due piramidi SABCDE, VFGHIK simili, dico che SABCDE : VFGHIK : : SA^3 : VF^3 : : AB^3 : FG^3.

Dim. Dalli vertici S, V delle piramidi si abbassino le altezze SP, VQ. Noi abbiamo dimostrato, che nelle piramidi simili gli spigoli omologhi, i lati omologhi delle basi, e le altezze sono proporzionali, dunque avremo

$$AB : FG : : SP : VQ : : \frac{1}{3} SP : \frac{1}{3} VQ;$$

Dippiù ABCDE : FGHIK : : AB^2 FG^2, quindi avremo le due proporzioni

ABCDE : FGHIK : : AB^2 : FG^2,

$\frac{1}{3}$ SP : $\frac{1}{3}$ VQ : : AB : FG, dalle quali multiplicando li termini in correspondenza ricaveremo la porzione ABCDE $\times \frac{1}{3}$ SP : FGHIK $\times \frac{1}{3}$ VQ : : AB^3 : FG^3 : : SB^3 VF^3 ma ABCDE $\times \frac{1}{3}$ SP è la misura del volume della piramide SABCDE, e IGHFK $\times \frac{1}{3}$ VQ è la misura del volume della piramide VFGHIK, ed AB^3, FG^3, sono li cubi delli lati omologhi delle basi di esse, ed SB^3, VF^3; sono li cubi degli spigoli omologhi delle piramidi, dunqne etc.

113. Noi abbiamo dimostrato, che due poliedri simili si possono concepire divisi in un medesimo numero di piramidi simili, e similmente disposte, quindi ciascuna delle piramidi di uno delli poliedri sarà alla sua correspondente nell' altro poliedro come il cubo di uno degli spigoli della prima al cubo dello spigolo omologo della seconda, ma sì fatti spigoli, li quali o sono gli spigoli medesimi delli poliedri proposti, o le diagonali delle facce omologhe di essi, o infine le diagonali, che interiormente uniscono li vertici degli angoli poliedri di essi, hanno rapporti eguali fra loro, dunque li cubi di essi formano una serie di rapporti eguali, ma ciascuno di questi rapporti è lo stesso di quello delle piramidi alle quali essi appartengono, dunque li rapporti, che hanno fra esse le correspondenti piramidi delli due poliedri formano una serie di rapporti eguali, ma quando si ha una serie di rapporti eguali la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti li conseguenti come uno degli antecedenti sta al suo conseguente, dunque la somma di tutte le piramidi dalle quali è composto il primo poliedro sta alla somma di tutte le piramidi dalle quali è composto il secondo poliedro come una piramide del primo sta alla piramide correspondente del secondo, ossia il volume del primo poliedro sta

al volume del secondo come una delle piramidi, che compongono il primo poliedro alla piramide correspondente di quelle, che compongono il secondo poliedro, ma queste due piramidi sono nella ragione delli cubi de'due loro spigoli omologhi, dunque anche li *volumi delli due poliedri simili sono fra essi nella ragione delli cubi delli loro spigoli omologhi.*

CAPO IV.

Delli corpi rotondi.

ARTICOLO I.

Del cono.

114. Si da il nome di *corpi rotondi* a quelli solidi, li quali nascono dalla rivoluzione di una figura piana, la quale gira intorno ad una linea retta; La linea retta intorno alla quale la figura piana fà la sua rivoluzione si dice *asse* del solido. Noi ci occuperèmo specialmente del *cono retto*, del *cilindro retto*, e della *Sfera.*

115. (Fig. 54). Se si fa girare il triangolo rettangolo SAC intorno al suo cateto SC, la sua ipotenusa SA descrive la superficie di un solido, che noi chiameremo *cono retto*, il cateto SC, intorno al quale fa la sua rivoluzione il triangolo, si chiama *asse* del cono, il punto S in cui termina la superficie del cono, si dice *vertice* del cono, il cerchio, che descrive la base CA del triangolo nella rivoluzione sua, si chiama *base* del cono, e qualunque retta tirata dal vertice del cono ad un punto della circonferenza della base, si dice *spigolo*, o *lato del cono.*

116. Se da qualsivoglia punto E della ipotenusa si cala sopra dell' asse SC la perpendicolare EF, nella rivoluzione del triangolo essa descrive un cerchio parallelo allla base ADB, il quale ha

per centro il punto F dell' asse, dal che conchiudiamo, che *se in un cono retto si fa una sezione parallela alla base di esso, questa sezione è un cerchio, il quale ha per centro il punto in cui l' asse lo incontra, ed ha la sua periferia descritta sopra la superficie del cono.*

117. Li triangoli SCA, SFE, essendo simili, danno li seguenti rapporti eguali

AC : EF : : SC : SF : : SA : SE, ma AC, EF sono raggi delli cerchi ADB, EGH, ed SC, SF sono le distanze, che questi cerchi hanno dal vertice S del cono, SA, SE sono le porzioni dello spigolo SA corrispondenti alli medesimi piani; dunque *se in un cono retto si fanno delle sezioni parallele alla base, queste sezioni sono cerchi, e li raggi delle sezioni sono proporzionali alle distanze, che esse hanno dal vertice, ed alle porzioni corrispondenti dello spigolo.*

118. Dippiù noi sappiamo, che le circonferenze delli cerchi sono nella ragione delli raggi, e che le aje delli cerchi sono nella ragione de' quadrati delli raggi, quindi avremo le seguenti serie di rapporti eguali.

Perif. ADB : Perif. EGH : : AC : EF : : SC : SF : : SA : SE

Cer. ADB : Cer. EGH : : AC^2 : EF^2 : : SC^2 : SF^2 : : SA^2 : SE^2.

E conchiudiamo, che se in *un cono retto si fanno delle sezioni parallele alla base, le circonferenze delli cerchi, che esse producono sono fra esse nella ragione delle distanze, che esse hanno dal vertice del cono, e nella ragione delle porzioni correspondenti degli spigoli, e che le aje delle sezioni sono nella ragione delli quadrati delle distanze, che esse hanno dal vertice, e delli quadrati delle porzioni degli spigoli del cono ad esse correspondenti.*

119. Da quanto abbiamo detto ricaviamo il processo, per mezzo del quale possiamo determinare la altezza della parte mancante di un tronco di cono a basi parallele, qualora a noi sono note le basi del tronco, e la sua altezza.

In fatti supponiamo, che nel cono SADB sia fatta la sezione EGH parallela alla base ADB, e che noi conosciamo la base ADB, la sezione EGH, e la altezza FC del tronco, a noi saranno noti li raggi AC, EF; a cagione della simiglianza delli triangoli SCA, SFE si ha la proporzione AC : EF : : SC : SF, e per conseguenza AC—EF : EF : : SC—SF : SF, dalla quale ricaviamo la seguente verità. Qualora *un cono retto è tagliato da un piano parallelo alla sua base, e si conoscono le basi superiore, ed inferiore, e la altezza del tronco, si avrà la altezza della parte mancante, trovando la quarta proporzionale in ordine alla differenza delli raggi delle due basi del tronco, al raggio della base superiore, ed alla altezza del tronco.*

Articolo II.

Della determinazione delle aje, e delli volumi delli coni retti.

201. Teor. 1. *L'aja convessa d'un cono retto equivale al triangolo, il quale ha per base una retta eguale alla circonferenza della base del cono, e per altezza uno spigolo di esso.* (Fig. 55). Rappresenti KLM la base di un cono retto, ON il suo asse, e P uno delli suoi spigoli. Dico che il triangolo, che ha la sua base eguale alla circonferenza KLM e per altezza P equivale alla aja convessa del cono NKLM.

Dim. Se si niega, che il triangolo, che ha per base la circonferenza KLM e per altezza P sia equivalente alla aja convessa del cono NKLM, esso sarà equivalente alla aja convessa di un cono maggiore, o minore di NKLM.

Sia se mai è possibile il triangolo, che ha per base la circonferenza KLM e per altezza P, equivalente alla aja convessa del cono retto, il quale avendo il vertice nel punto N abbia per base il cerchio ABC>KLM.

Al cerchio KLM si circoscriva il poligono regolare DEFGH, il quale con li suoi lati non incontri la circonferenza ABC, e sopra di esso si concepisca descritta una piramide, la quale abbia il suo vertice nel punto N, è evidente, che li triangoli laterali di questa piramide avranno per comune altezza uno spigolo del cono, e che per conseguenza l'aja convessa di essa equivale al triangolo, il qnale ha per base una retta eguale al perimetro DEFGH, e per altezza lo spigolo P del cono, ma il contorno del poligono DEFGH è maggiore della circonferenza del cerchio KLM, dunque anche il triangolo, il quale ha per base una retta eguale al perimetro DEFGH e per altezza P è maggiore del triangolo, che ha per base la periferia KLM, e per altezza P; ma il triangolo, che ha per base la circonferenza KLM e per altezza P si è supposto equivalente alla aja convessa del cono NABC, dunque il triangolo, che ha per base il contorno DEFGH e per altezza P è maggiore dell'aja convessa del cono NABC, ma il triangolo che ha per base il contorno DEFGH, e per altezza P equivale alla aja convessa della piramide NDEFGH, dunque l'aja convessa della piramide NDEFGH è maggiore della aja convessa del cono NABC, il che è assurdo, dunque anche è assurdo, che il triangolo, il quale ha per base una retta eguale alla circonferenza KLM e per altezza P sia equivalente all'aja convessa di un cono retto maggiore del cono retto NKLM.

Supponiamo ora, che vi sia un cono retto, del quale ABC sia la base, N il vertice, ed il suo spigolo sia P, e se mai è possibile supponiamo, che il triangolo che ha la base eguale alla circonferenza ABC, e per altezza P sia equivalente alla aja convessa di un altro cono, che abbia il suo vertice in N, e per base un cerchio KLM<ABC.

Si circoscriva al cerchio KLM il poligono regolare DEFGH, li lati del quale non incontrino la circonferenza ABC, e sopra di questo poligono si concepisca descritta la piramide, che abbia per vertice il punto N; li triangoli di essa avranno per comune altezza uno spigolo del cono NKLM, dunque la aja laterale di questa piramide equivale al triangolo, che ha per base il contorno del poligono DEFGH, e per altezza uno spigolo del cono NKLM, ma il contorno del poligono DEFGH è minore della circonferenza ABC, e lo spigolo del cono NKLM è minore dello spigolo del cono NABC, dunque anche il triangolo che ha per base il contorno del poligono DEFGH e per altezza lo spigolo del cono NKLM è minore del triangolo, che ha per base una retta eguale alla circonferenza ABC e per altezza lo spigolo del cono NABC, ma per la supposizione il triangolo, che ha per base la circonferenza ABC, e per altezza lo spigolo del cono NABC equivale alla aja convessa del cono NKLM, dunque il triangolo che ha per base il contorno DEFGH, e per altezza P è minore della aja convessadel cono NKLM, ma il triangolo che ha per base il contorno DEFGH e per altezza lo spigolo del cono NKLM equivale alla aja convessa della piramide NDEFGH, dunque la aja convessa della piramide NDEFGH è minore della aja convessa del cono NKLM,

il che è assurdo, dunque anche è assurdo, che il triangolo, che ha per base la circonferenza di un cono retto, e per altezza uno spigolo di esso sia equivalente alla aja convessa di un cono retto minore del medesimo cono, ma noi abbiamo dimostrato, che il medesimo triangolo non può esser equivalente alla aja convessa di un cono maggiore, dunque questo triangolo equivale alla aja convessa del cono dato. Sicchè, etc.

121. Cor. 1. Quindi la misura della aja convessa di un cono retto si ha multiplicando la metà della circonferenza della sua base per lo spigulo, ma l'aja della base si ha multiplicando la metà della sua circonferenza per lo raggio, dunque l'aja convessa di un cono retto sta alla sua base come il prodotto della metà della circonferenza della base per lo spigolo al prodotto della metà della medesima circonferenza per lo raggio della base, o sia come lo spigolo al raggio della base.

122. Cor. 2. Supponiamo, che vi sieno due coni retti, e con C, C' si disegnino le circonferenze delle basi di essi, con P, P', sieno disegnati gli spigoli, e con A, A' le aje convesse; avremo $A : A' : : \frac{1}{2} C \times P : \frac{1}{2} C' \times P' : : C \times P : C' \times P'$, cioè le aje convesse di due coni retti sono fra esse nella ragione composta da quelle delle circonferenze delle basi, e da quella degli spigoli, ma le circonferenze

delle basi sono nella ragione delli loro raggi, dunque le aje convesse di due coni retti sono fre esse in ragione composta da quella delli spigoli, e da quella delli raggi delle basi. Se li coni sono tali, che li raggi delle basi sieno nella ragione delle altezze, nel quale caso li coni si dicono *simili*, le aje convesse di essi sono nella ragione delli quadrati de' raggi delle basi, o delli quadrati delle altezze, e poichè li cerchi, che servono ad essi da basi, sono anche nella ragione delli quadrati delli raggi, conchiudiamo, che le aje convesse di due coni simili sono nella ragione delle loro basi, e che aje convesse di due coni simili unite alle loro correspondenti basi sono nella ragione delli quadrati delli raggi delle basi, ed in quella delli quadrati delle altezze.

123. Teor. 2. *Se un cono retto è tagliato da un piano parallelo alla sua base, nascerè un tronco di cono a basi parallele, l' aja convessa del quale equivale al rettangolo fatto della metà della somma delle circonferenze delle sue basi, e dalla porzione correspondente dello spigolo del cono.*

(Fig. 54). Rappresenti SADB un cono retto, nel quale sia fatta la sezione EGH parallela alla base ADB; Dico, che l' aja convessa del tronco ADBHGE equivale al rettangolo formato dalla metà della somma delle circonferenze ADB, EGH, e dalla porzione BH dello spigolo del cono:

Dim. Dal punto B si inalzi sopra di SB la

perpendicolare BK eguale alla periferia ADB, e si unisca SK, e per lo punto H si tiri HL parallela a BK, che incontra SK nel punto L.

Per la ipotetesi li due piani AB; EH sono paralleli, essi vengono tagliati dal piano SAB, dunque le comuni sezioni AB, EH sono parallele, ed i due triangoli SFH, SCB sono simili, e perciò SB : SH : : CB : FH : : perif. ADB : perif.EGH; ma per la simiglianza delli triangoli SBK : SHL abbiamo SB : SH : : BK : HL, dunque perif, ADB : perif. EGH : : BK : HL, ma perif. ADB=BK, dunque perif.EGH=HL. In oltre l' aja convessa del cono SADB è eguale al triangolo, che ha per base la periferia ADB, e per altezza lo spigolo SB, e l' aja convessa del cono SEGH è eguale al triangolo, il quale ha per base la circonferenza EGH e per altezza lo spigolo SH, dunque sarà l' aja convessa di SADB eguale al triangolo SBK, e l' aja convessa di SEGH sarà eguale al triangolo SHL, e la differenza delle aje convesse di SADB, SEGH ossia l'aja convessa del tronco conico ADBHGE equivalerà alla differenza delle aje delli triangoli SBK, SHL, ossia al trapezio BKLH; ma l' aja del trapezio BKLH equivale al rettangolo fatto dalla metà della somma di BK, HL e da BH, dunque l'aja convessa del tronco conico equivale al rettangolo fatto dalla metà della somma di BK, ed HL, e da BH; ma BH =perif.ADB, HL=perif.EGH, dunque l' aja laterale del tronco conico ADBHGE equivale al rettangolo fatto della metà della somma delle circonferenze delle basi ADB , EGH e dalla porzione correspondente dello spigolo SB del cono. Sicchè , etc.

124. Avv. Qui è buono di avvertire, che se si divide lo spigolo BH in due parti eguali nel punto M , e per M si fa passare il piano PM parallelo alla base ADB del tronco , e per lo punto M si tiri MN parallela a BK , sarà BK eguale alla periferia PRM ; ma il trapezio BKLH avendo li lati BK , HL paralleli equivale al rettangolo fatto dalla retta MN e da BH , ossia dalla circonferenza PRM e da BH, *dunque anche l'aja convessa del tronco conico ADBHGE equivale al rettangolo fatto dalla circonferenza della sezione , che passa ad eguali distanze dalle basi del tronco parallelamente alle medesime basi , e dallo spigolo del tronco.*

125. Teor. 3. *Il volume di un cono retto equivale alla terza parte del volume del parallelepipedo rettangolo , che ha la base equivalente alla base del cono , ed ha per altezza l' asse del cono.*

(Fig. 55). Rappresenti KLM la base di un cono retto , ON l' asse , ed N il vertice. Dico che il volume del cono NKLM equivale ad $\frac{1}{3}$ del volume del parallelepipedo rettangolo , il quale ha la base equivalente alla base KLM del cono , e la altezza eguale all' asse ON.

Dim. Se si niega , che $\frac{1}{3}$ del volume del parallelepipedo rettangolo , il quale ha la base equivalente a KLM , e la altezza eguale ad NO sia equivalente al volume del cono NKLM, esso sarà equivalente al volume di un altro cono retto , il quale avendo il medesimo vertice N e per conseguenza il medesimo asse NO abbia per base un cerchio maggiore , o minore di KLM.

1. Sia se mai è possibile il volume di $\frac{1}{3}$ di questo parallelepipedo equivalente al volume del cono retto , il quale avendo il medesimo vertice N, e per conseguenza il medesimo asse, abbia per base il cerchio ABC maggiore del cerchio KLM.

Al cerchio KLM si circoscriva il poligono regolare DEFGH , li lati del quale non incontrino la circonferenza ABC , e dalli vertici degli angoli di questo poligono si concepiscano tirate al vertice N del cono delle rette , noi avremo circoscritta al cono una piramide, la altezza della quale è l' asse ON , ma noi abbiamo dimostrato , che questa piramide equivale ad $\frac{1}{3}$ del parallelepipedo rettangolo , il quale ha la base equivalente al poligono DEFGH , e la altezza eguale ad NO, quindi essendo il poligono maggiore del cerchio KLM, ne segue che $\frac{1}{3}$ del parallelepipedo rettangolo, che ha la base equivalente al poligono DEFGH e la altezza eguale all' asse ON, è maggiore di $\frac{1}{3}$ del parallelepipedo rettangolo, che ha la base equivalente a KLM, e per altezza l' asse ON; ma $\frac{1}{3}$ del parallelepipedo rettangolo, che ha la base equivalente a KLM e la altezza ON si è supposto equivalente al cono NABC, dunque $\frac{1}{3}$ del parallelepipedo rettangolo, che ha la base equivalente al poligono DEFGH e la altezza ON, è maggiore del cono NABC, ma il volume di $\frac{1}{3}$ del parallelepipedo rettangolo, che ha la base equivalente al poligono DEFGH e la altezza ON è il volume della piramide NDEFGH, dunque il volume della piramide NDEFGH è maggiore del volume del cono NABC, il che è assurdo, dunque anche è assurdo, che $\frac{1}{3}$ del parallelepipedo, che ha la base equivalente alla base di un cono retto,

e la altezza eguale all' asse del cono, sia equivalente a qualunque altro cono, il quale avendo lo stesso asse del cono dato avesse una base maggiore della base del cono.

Supponiamo ora, che $\frac{1}{3}$ del parallelepipedo rettangolo, che ha la base equivalente alla base ABC del cono, e la altezza NO, sia equivalente al cono, il quale avendo per asse ON abbia per base il cerchio KLM minore di ABC.

Si circoscriva al cerchio KLM il poligono regolare DEFGH, il quale con li suoi lati non incontri la circonferenza del cerchio ABC. Sopra di questo poligono si concepisca descritta una piramide, la quale abbia per vertice il punto N, e per conseguenza per altezza NO; si è dimostrato, che questa piramide è $\frac{1}{3}$ del parallelepipedo rettangolo, che ha per altezza NO, e la base equivalente al poligono DEFGH, ma il poligono DEFGH è minore del cerchio ABC, che lo contiene, dunque $\frac{1}{3}$ del parallelepipedo rettangolo, che ha la base equivalente a DEFGH, e l' altezza eguale ad ON è minore di $\frac{1}{3}$ del parallelepipedo rettangolo, il quale avendo la altezza ON ha la base equivalente ad ABC, ma $\frac{1}{3}$ del parallelepipedo rettangolo, che avendo la altezza eguale ad ON e la base equivalente ad ABC, per la supposizione, è equivalente al cono NKLM, dunque $\frac{1}{3}$ del parallelepipedo rettangolo, che ha per altezza ON e la base equivalente a DEFGH è minore del cono NKLM, ma $\frac{1}{3}$ del parallelepipedo rettangolo, che ha la altezza ON e la base equivalente al poligono DEFGH equivale alla piramide NDEFGH, dunque il volume della piramide NDEFGH è minore del volume del cono NKLM, che in essa è contenuto, il che è impossibile, dunque è anche impossibile, che $\frac{1}{3}$ del parallelepipedo rettangolo, che avendo la base equivalente alla base di un cono retto, e per altezza l' asse del medesimo cono, sia equivalente ad un altro cono, il quale avendo il medesimo asse abbia una base minore della base del cono dato, ma abbiamo dimostrato, che non può essere equivalente ad un cono, che avendo il medesimo asse avesse la base maggiore della base del cono dato, dunque equivale al cono, che ha la medesima base, e lo stesso asse col cono dato, Sicchè, etc.

126. Cor. 1. Quindi la misura del volume di un cono retto si ha multiplicando la sua base per $\frac{1}{3}$ della sua altezza, e perciò li volumi di due coni retti sono fra essi nella ragione delle basi multiplicate per $\frac{1}{3}$ delle loro respettive altezze, e per conseguenza nella ragione delli prodotti delle basi per le respettive altezze, cioè due coni retti sono fra essi nella ragione composta da quella delle basi, e da quella delle altezze, e poichè le basi sono nella ragione delli quadrati delli raggi, li coni retti sono fra essi in ragione composta da quella delli quadrati delli raggi delle basi, e da quella delle loro altezze; e nel caso delli coni simili li volumi di essi sono nella ragione delli cubi delli raggi delle basi, e delli cubi delli loro assi.

Dippiù essendo la misura di un cono retto il prodotto della sua base per $\frac{1}{3}$ della altezza, e quella di una piramide essendo similmente il prodotto della base per $\frac{1}{3}$ della sua altezza, ne segue, che una piramide ed un cono retto, che hanno la medesima altezza, e le basi equivalenti hanno eguali volumi.

127.(Fig.54)Cor.2.Se il cono SADB è troncato dal piano EGH parallelo alla sua base ADB, noi potremo facilmente determinare il volume del tronco ADBHGE, determinando prima il volume del cono intero SADB, indi il volume del cono mancante SEGH, e facendo di essi la differenza. Si trova il volume del cono intero, determinando prima la altezza della parte mancante SF, ed addizionandola con la altezza FC del tronco, ed avremo la altezza del cono intero, dipoi multiplicando la base ADB per $\frac{1}{3}$ SC, avremo il volume del cono intero SADB, indi troveremo il volume della parte mancante, multiplicando la base EGH per $\frac{1}{3}$ della sua altezza SF, ed avremo il volume della parte mancante SEGH; finalmente facendo la differenza di questi prodotti avremo determinato il volume del tronco ADBHGE.

Articolo III.

Del Cilindro retto.

128.(Fig. 56.) Se si concepisce il rettangolo ABCD girare con una perfetta rivoluzione intorno al suo lato AD, esso genererà un solido, che chiameremo *cilindro retto*, il suo lato BC descriverà l'aja convessa di esso, li due lati

AB, DC descriveranno li due cerchi FGC, BHE, che chiameremo le *basi* del cilindro. Se da qualsivoglia punio K del lato BC si cala la perpendicolare KL sopra di AD, essa sarà eguale a DC, e nella rivoluzione del rettangolo ABCD intorno ad AD descriverà il cerchio KNP eguale e parallelo alle basi CGF, EHB del cilindro; dal che ricaviamo, che qualora in un cilindro retto si fa una sezione parallela alle basi, essa è un cerchio eguale e parallelo alle basi; il cilindro retto è terminato da una base EHB eguale, e parallela alla base inferiore CGF, e nel lato AD intorno al quale fa la sua rivoluzione il rettangolo ABCD, il quale si chiama *asse* del cilindro, si trovano li centri di tutte le sezioni, che in esso si fanno parallelamente alle basi.

Articolo IV.

Della determinazione delle aje convesse delli cilindri retti.

129. Teor. 1. *L'aja convessa di un cilindro retto equivale all'aja del rettangolo fatto da due rette, delle quali una è eguale alla circonferenza della base del cilindro, e l'altra è eguale all'asse del cilindro.*

(Fig. 55). Rappresenti ABC la base di un cilindro retto, il quale abbia per asse ON. Dico che l'aja convessa di esso equivale al rettangolo fatto dalla circonferenza ABC e dall'asse ON.

Dim. Se si niega, che il rettangolo fatto da una retta equivalente alla circonferenza ABC e da ON sia equivalente all' aja convessa del cilindro, che ha per base ABC, e per asse ON, esso equivalerà all' aja convessa di un altro cilindro retto, il quale avendo lo stesso asse ON avrà una base maggiore, o minore della base ABC.

Sia se mai è possibile questo rettangolo equivalente all' aja convessa del cilindro retto, il quale avendo lo stesso asse ON, abbia per base il cerchio KLM minore di ABC.

Al cerchio KLM si circoscriva il poligono regolare DEFGH, il quale con li suoi lati non incontri la circonferenza ABC, e sopra di esso si costruisca il prisma retto, il quale abbia la sua altezza eguale ad ON. L' aja convessa del prisma retto, che ha per base il poligono DEFGH e per altezza ON, equivale al rettangolo fatto dal contorno di DEFGH e da ON, ma il contorno del poligono DEFGH è minore della circonferenza ABC, dunque l' aja laterale di questo prisma è minore del rettangolo fatto dalla circonferenza ABC e da ON, ma per la supposizione il rettangolo fatto dalla periferia ABC e da ON equivale alla aja convessa del cilindro retto, che ha per base KLM e per asse ON, dunque l' aja convessa del prisma retto, che ha per base DEFGH e per altezza ON è minore dell' aja convessa del cilindro retto, che ha per base KLM e per altezza ON, il che è assurdo, dunque an-

che è assnrdo, che il rettangolo fatto dalla circonferenza ABC e da ON sia equivalente alla aja convessa di un cilindro retto, che abbia per altezza ON e per base un cerchio minore di ABC.

Sia ora se mai è possibile il rettangolo fatto dalla circonferenza KLM e da ON equivalente alla aja convessa del cilindro retto, che avendo l' asse ON abbia per base il cerchio ABC>KLM.

Si circoscriva al cerchio KLM il poligono regolare DEFGH, li lati del quale non incontrino la circonferenza ABC, e sopra di esso si concepisca descritto il prisma retto, il quale abbia per altezza ON, l' aja laterale di questo prisma equivale al rettangolo fatto da una retta eguale al contorno DEFGH e da ON, ma il contorno DEFGH è maggiore della periferia KLM, dunque anche l' aja convessa del prisma è maggiore della aja convessa del cilindro retto, che ha per asse ON e per base ABC, il che è assurdo, dunque è anche assurdo, che il rettangolo fatto dalla periferia ABC e da ON sia equivalente alla aja convessa di un cilindro retto minore del cilindro, che ha per base il cerchio ABC, e per altezza ON; ma noi abbiamo dimestrato, che il rettangolo il quale ha per base la circonferenza di un cilindro retto, e per altezza il suo asse non può essere equivalente all' aja convessa di un altro cilindro che avendo lo stesso asse abbia una base minore di quella del cilindro, dunque l'aja convessa di un cilindro retto equivale al rettangolo fatto dalla circonferenza della sua base, e dall'asse. Sicchè, etc.

130. Cor. 1. L'aja convessa di un cilindro retto equivale al rettangolo fatto dalla circonferenza della sua base, e dal suo asse; e la sua base equivale al rettangolo fatto dalla medesima circonferenza e dalla metà del raggio, dunque l'aja convessa di un cilindro retto sta alla sua base come l'asse alla metà del raggio della base.

131. Cor. 2. Le aje convesse di due cilindri retti sono equivalenti alli rettangoli fatti dalle circonferenze delle rispettive basi, e dalle altezze, e perciò sono fra loro nella ragione di tali rettangoli, e per conseguenza in ragione composta da quella delle circonferenze delle basi, e da quella delle altezze, ma le circonferenze delle basi sono nella ragione delli raggi, dunque le aje covesse delli cilindri retti sono nella ragione composta da quella delle altezze, e da quella delli raggi delle basi, e nel caso in cui li cilindri hanno le altezze nella ragione delli raggi delle basi, nel quale caso essi si dicono *simili*, essi hanno le aje convesse nella ragione delli quadrati delli raggi delle basi, ed in quella delli quadrati delle altezze.

132. Teor. 2. *Il volume di un cilindro retto equivale al volume del parallelepipedo rettangolo, il quale ha la base equivalente alla base del cilindro, e la altezza eguale alla altezza del cilindro.*

(Fig. 55). Rappresenti ABC la base di un cilindro retto, del quale l'asse sia ON; dico che questo cilindro equivale al parallelepipedo rettangolo, il quale avendo per altezza ON ha la sua base equivalente al cerchio ABC.

Dim. Se si niega che, il parallelepipedo rettangolo, il quale ha la base equivalente al cerchio ABC e la altezza eguale all'asse ON, sia equivalente al cilindro retto, che ha per base il cerchio ABC e per asse ON, questo parallelepipedo sarà equivalente ad un altro cilindro, il quale avendo il medesimo asse ON avrà la base maggiore, o minore di ABC.

Se mai è possibile, il parallelepipedo rettangolo, che ha per altezza ON, e la base equivalente al cerchio ABC sia equivalente ad un altro cilindro retto, il quale avendo lo stesso asse ON abbia la base KLM, minore del cerchio ABC.

Si circoscriva al cerchio KLM il poligono regolare DEFGH, il quale con li suoi lati non incontri la circonferenza ABC, e per gli punti del contatto delli suoi lati tiriamo gli spigoli correspendenti del cilindro, li quali incontreranno la circonferenza del cerchio opposto a KLM, e dalli punti dello incontro si tirino le tangenti a questo cerchio, queste tangenti formeranno un poligono eguale, e parallelo al poligono DEFGH, e similmente situato, in fine li vertici degli angoli correspondenti di questi poligoni si uniscano per mezzo delle rette; avremo così circoscritto al cilindro un prisma retto, il quale ha per base il poligono DEFGH, e per altezza l' asse ON del cilindro; questo prisma sarà equivalente ad un parallelepipedo rettangolo, che avendo la medesima altezza ON ha la base equivalente al poligono DEFGH, ma DEFGH è minore del cerchio ABC, dunque questo parallelepipedo è minore del parallelepipedo, che avendo per altezza ON ha la base equivalente ad ABC, ma il parallelepipedo, che ha per altezza ON, e la base equivalente al cerchio ABC per la supposizione equivale al cilindro, che ha per base il cerchio KLM e per asse ON, dunque il prisma, che ha per altezza ON e per base DEFGH è minore del cilindro, che ha per base il cerchio KLM, e per asse ON, ma questo è assurdo, poichè il cilindro è contenuto nel prisma, dunque è anche assurdo, che il parallelepipedo, che ha per altezza ON, e la base equivalente ad ABC sia equivalente ad un cilindro, il quale conservando il medesimo asse ON abbia la base minore di ABC.

Sia ora se mai è possibile il parallelepipedo rettangolo, il quale avendo per altezza ON e la base equivalente al cerchio KLM, equivalente ad un cilindro retto, il quale avendo per asse ON abbia per base il cerchio ABC maggiore di KLM.

Si circoscriva al cerchio KLM un poligono regolare, li lati del quale non incontrino la circonferenza ABC, ed intorno al cilindro che

ha per base KLM e per asse ON si circoscriva il prisma, che ha per altezza ON e per base il poligono DEFGH; questo prisma sarà equivalente al parallelepipedo rettangolo, che ha per altezza ON, e la base equivalente al poligono DEFGH, ma il poligono è maggiore del cerchio KLM, dunque il parallelepipedo, che ha per altezza ON e la base equivalente al poligono DEFGH è maggiore del parallelepipedo, che ha per altezza ON, e la base equivalente a KLM, ma il parallelepipedo che avendo per altezza ON ha la base equivalente KLM si è supposto eguale al cilindro, che ha per asse ON, e per base il cerchio ABC, dunque il parallepipedo, che avendo ON per altezza, e la base equivalente a DEFGH è maggiore del cilindro che ha per asse ON e per base ABC, ma il parallelepipedo, che ha per altezza ON e la base equivalente al poligono DEFGH equivale al prisma circoscritto al cilindro, che ha per base KLM e per asse ON, dunque il prisma circoscritto al cilindro, che ha per asse ON e per base DEFGH è minore del cilindro ad esso iscritto, il che è assurdo, dunque è anche assurdo, che il parallelepipedo, che ha per altezza ON, e la base equivalente ad ABC, sia equivalente ad un cilindro, che avendo il medesimo asse ON abbia una base minore di ABC, si è dimostrato, che il medesimo parallelepipedo non può essere equivalente ad un cilindro retto, che avendo il medesimo asse avesse la base maggiore, dunque sarà equivalente al cilindro dato. Sicchè, etc.

133. Cor. 1. Essendo un cilindro retto sempre equivalente al parallelepipedo, che ha con esso la base equivalente e la altezza eguale all' asse del cilindro, ne segue, che li cilindri retti sono nelle ragione delli parallelepipedi, che hanno con essi le basi equivalenti, e le altezze eguali alli loro assi, ma questi parallelepipedi, sono come basi multiplicate per le loro rispettive attezze, dunque anche li cilindri retti sono come li prodotti delle loro basi per le loro altezze, ed il volume di un cilindro retto avrà per misura la sua base multiplicata per la sua altezza.

Abbiamo dimostrato, che qualunque cono retto equivale alla piramide, che ha la medesima altezza del cono, e la sua base equivalente a quella del cono, ma la misura del volume della piramide si ha multiplicando la sua base per la terza parte della sua altezza, dunque anche il volume di un cono retto si ha multiplicando la sua base per $\frac{1}{3}$ della sua altezza, ed i volumi di due coni retti sono fra loro come li prodotti che si hanno multiplicando le loro basi per le loro respettive altezze, Dal cho ricaviamo in generale che li volumi de' cilindri retti sono in ragione composta da quelal delle basi, e da quella delle altezze, e che li volumi delli coni retti sono nella ragione composta da quella delle loro basi, e da quella delle terze parti delle loro altezze, o ciò che vale lo stesso li coni retti sono in ragione composta da quella delle basi, e da quella delle altezze, e poichè le basi sono nella ragione delli quadrati de' loro raggi, ne segue che li volumi delli cilindri, e quelli delli coni retti sono fra essi in ragione composta da quella delli quadrati delli raggi delle basi, e da quella delli loro assi, e nel caso, che essi sieno coni, o cilindri simili li volumi di essi sono fra loro nella ragione delli cubi delli diametri delle basi, o delli cubi delli loro assi.

134. Cor. 2. Ricaviamo ancora, che qualora due coni retti, o due cilindri retti sono equivalenti debbono avere le basi in ragione reciproea delle altezze, e se essi hanno le basi in ragione reciproca delle altezze sono equivalenti.

135. Cor. 3. Abbiamo dimostrato, che la misura del volume di un cilindro retto si ha multiplicando la sua base per lo asse, e che il volume di un cono retto si ha multiplicando la sua base per $\frac{1}{3}$ del suo asse, ne segue, chê il cono retto è la terza parte del cilindro retto, che ha con esso eguale la base, e l'asse.

CAP. V.

Di alcuni solidi li volumi delli quali si determinano in conseguenza della teoria precedente.

136. Teor. 1. *Se un triangolo qualunque fa una perfetta rivoluzione intorno alla sua base genera un solido, il volume del quale è eguale al volume del cono retto, il quale ha per base il cerchio, che ha per raggio la altezza del triangolo, e per altezza la base del triangolo.*

(Fig. 57, 58). Rappresenti ABC un triangolo, il quale abbia per base AC, e per altezza BD, il quale si faccia girare con una perfetta rivoluzione intorno ad AC. Dico, che il volume del solido da esso generato è eguale al volume del cono retto, il quale ha la base eguale al cerchio, che ha per raggio BD, e per altezza la base AC del triangolo.

Due casi possono darsi. 1. Che la altezza BD cada dentro del triangolo. 2. Che cada fuori.

(Fig. 57.) Dim. 1. Il triangolo ABC è composto dalli due triangoli rettangoli ADB, BDC, quindi in vece di considerare, che il triangolo ABC fa la sua rivoluzione intorno ad AC, noi posiamo immaginare, che girino li due triangoli rettangoli ADB, BDC intorno alli loro respettivi cateti AD, DC, ma questi triangoli generano due coni retti, li quali hanno per comune base il cerchio, che ha per raggio BD, ed hanno per le respettive altezze AD, DC; dunque il volume del solido generato dal triangolo ABC è eguale alla somma delli volumi dalli due coni retti, li quali hanno per base comune il cerchio, che ha per raggio BD, e per le loro respettive altezze, AD, DC, ma la somma delli volumi di questi due coni è eguale al volume del cono, che ha per base la loro comune base, cioè il cerchio che ha per raggio BD, e per altezza la somma delle loro altezze AD, DC, dunque il volume del solido generato dalla rivoluzione del triangolo ABC è eguale al volume del cono, che ha per base il cerchio, che ha per raggio la altezza BD del triangolo, e per altezza la base AC del triangolo. Sicchè, etc.

(Fig. 58) Dim. 2. Il solido generato dalla rivoluzione del triangolo ABC intorno ad AC equivale alla differenza delli due coni retti generati dalla rivolunione delli due triangoli ABD, BCD intorno ad AD; ma questi coni hanno per comune base il cerchio, il quale ha per raggio BD, e per altezze respettive le rette AD, CD, dunque la differenza di essi, e per conseguenza il solido generato dal triangolo ABC equivale al cono retto, il quale ha per base il cerchio, che ha per raggio AD, e per altezza AD—CD, ossia la base AC del triangolo. Sicchè, etc.

137. Cor. Poichè il volume di un cono retto si determina per lo prodotto della sua base

per $\frac{1}{3}$ della altezza, ne segue, che il volume del solido generato dalla rivoluzione del triangolo ABC intorno alla sua base si determina multiplicando il cerchio, che ha per raggio la altezza per $\frac{1}{3}$ della base del triangolo, e per conseguenza equivale al parallelepipedo rettangolo, il quale ha per base un rettangolo equivalente al cerchio, che ha per raggio la altezza del triangolo, e per altezza $\frac{1}{3}$ della base del triangolo.

138.Teor. 2. *Se un triangolo fa una perfetta rivoluzione intorno ad una retta, la quale passa per lo vertice, genererà un solido, il volume del quale sarà eguale alli $\frac{2}{3}$ del volume del parallelepipedo rettangolo, il quale ha la base equivalente al triangolo, e la altezza eguale alla circonferenza del cerchio, il quale per raggio la perpendicolare calata sopra dell' asse di rivoluzione dal punto, in cui la base è divisa in due parti eguali.*

(Fig. 59, 60.) Rappresenti ABC un triangolo qualunque, del quale AB sia la base, e per lo vertice C sia tirato l' asse di rivoluzio-

ne CD, e dal punto E, in cui la base AB è divisa in due parti eguali, sia calata sopra di CD la perpendicolare EF. Dico che se il triangolo ACB fa una intera rivoluzione intorno a CD, esso produce un solido il volume del quale è eguale a $\frac{2}{3}$ del volume del parallelepipedo rettangolo, il quale ha per base un rettangolo equivalente al triangolo ABC, e pel altezza una retta eguale alla circonferenza, che ha per raggio EF.

Possono darsi due casi. 1. Che la base AB incontri l'asse CD; 2. Che la base non lo incontri.

Dim. 1. (Fig. 59). Dalli punti A, B si calino sopra di CD le perpendicolari AG, BH, dal vertice C si abbassi la perpendicolare CI sopra della base AB, e per lo punto B si tiri BK parallela all' asse CD.

Il solido prodotto dalla rivoluzione del triangolo ABC intorno a CD equivale alla differenza delli due solidi, li quali nascerebbero dalla rivoluzione di CAD, e di BCD intorno a CD; ma il solido generato da CAD equivale ad $\frac{1}{3}$ del parallelepipedo rettangolo, la base del quale è un rettangolo equivalente al cerchio, che ha per raggio AG e la altezza CD, ed il solido generato da BCD equivale ad $\frac{1}{3}$ del parallelepipedo rettangolo, la base del quale è un rettangolo equivalente al cerchio, che ha per raggio BH, e la altezza CD; dunque il solido generato dalla rivoluzione del triangolo CAB intorno a CD equivale ad $\frac{1}{3}$ della differenza delli paralleledipedi rettangoli, che hanno per comune altezza CD, e che hanno le respettive basi equivalenti alli cerchi, che hanno per raggi AG, BH; dunque questo solido equivale ad $\frac{1}{3}$ del parallelepipedo rettangolo, il quale ha la base equivalente alla differenza delli due cerchi, li quali hanno per raggi AG, BH, e per altezza CD.

In oltre abbiamo dimostrato, che il cerchio, che ha per raggio $AG=\pi AG^2$, e quello che ha per raggio $BH=\pi BH^2$, dunque il solido generato dalla rivoluzione di ACB intorno a CD equivale ad $\frac{1}{3}$ del parallelepipedo rettangolo, di cui la base è equivalente a $\pi(AG^2-BH^2)$, ed ha per altezza CD; ma $AG^2-BH^2=(AG+BH)(AG-BH)$; dunque il solido generato dal triangolo ACB equivale ad $\frac{1}{3}$ del parallelepipedo rettangolo, la cui base è $\pi(AG+BH)(AG-BH)$, e la altezza è CD; Ma $AG+BH=2EF$, $AG-BH=AK$, dunque questo solido equivale ad $\frac{1}{3}$ del parallelepipedo rettangolo, che ha per base il rettangolo, fatto da AK, e da CD, e per altezza $2\pi EF$, ma $2\pi EF$ equivale alla circonferenza del cerchio che ha per raggio EF; dunque il solido generato dalla rivoluzione del triangolo ABC equivale ad $\frac{1}{3}$ del parallelepipedo rettangolo, che ha per base il rettangolo fatto da AK, e da CD, e per altezza la circonferenza, che ha per raggio EF.

Finalmente essendo BK parallela a DC, l'angolo $ABK=IDC$, ed i triangoli rettangoli ABK, IDC sono simili, quindi avremo $KA : AB :: CI : CD$, e per conseguenza sarà $KA\times CD=AB\times CI$, dunque il solido generato dal triangolo ABC equivalerà ad $\frac{1}{3}$ dal parallelepipedo rettangolo, il quale ha per base il rettangolo fatto da AB e da CI, e per altezza la circonferenza del cerchio, che ha per raggio EF, ma il rettangolo fatto da AB, CI è il doppio del triangolo ABC, dunque il solido generato dal triangolo ABC girando intorno a CD equivale ad $\frac{1}{3}$ del parallelepipedo rettangolo, che ha per base un rettangolo doppio del triangolo ABC, e la altezza eguale alla circonferenza, che ha per raggio EF, e per conseguenza è eguale alli $\frac{2}{3}$ del parallelepipedo rettangolo, il quale ha per base un rettangolo equivalente al triagolo ABC, e per altezza la circonferenza, che ha per raggio EF. Sicchè, etc.

(Fig. 60). Sia ora l'asse di rivoluzione CD parallelo alla base AB del triangolo ABC.

Dim. 2. Dalli punti A, B si calino sopra dell'asse CD le perpendicolari AG, BH.

Il solido generato dalla rivoluzione del triangolo ABC intorno a CD equivale alla differenza delli due solidi generati dal trapezio CABH, e dal triangolo BCH girando intorno a CD; ma il solido generato dal trapezio CABH è composto dal cilindro retto descritto dal rettangolo AGHB, e dal cono retto descritto dal triangolo rettangolo ACG, ma il primo di questi solidi equivale al parallelepipedo rettangolo, il quale ha per base un rettangolo equivalente al cerchio, che ha per raggio AG, e per altezza GH, ed il secondo equivale al parallelepipedo rettangolo, la base del quale equivale al medesimo cerchio, che ha per raggio AG, e la altezza è $\frac{1}{3}$ CG; dunque il solido intero de-

scritto dal trapezio ABHC equivale al parallelepipedo rettangolo, il quale ha per base un rettagolo equivalente al cerchio, che ha per raggio AG, e la altezza eguale ad $HG + \frac{1}{3}CG$, ed il cono descritto da BCH equivale al parallelepipedo rettangolo, il quale ha per base un rettangolo equivalente al cerchio, che ha per raggio AG e per altezza $\frac{1}{3}CH$, ossia $\frac{1}{3}CG + \frac{1}{3}GH$; dunque il solido generato dal triangolo ABC equivale al parallelepipedo rettangolo, il quale ha per base il medesimo rettangolo equivalente al cerchio, che ha per raggio AG; ed ha per altezza $GH + \frac{1}{3}CG - \frac{1}{3}GH - \frac{1}{5}CG$ ossia $GH - \frac{1}{3}GH$ ossia $\frac{2}{3}GH$, ma il cerchio che ha per raggio AG equivale al rettangolo fatto dalla circonferenza di AG e da $\frac{1}{2}AG$; dunque il solido generato dalla rivoluzione del triangolo ABC equivale al parallelepipedo rettangolo fatto da $\frac{1}{2}AG$, dalla circonferenza che ha per raggio AG, e da $\frac{2}{3}$ GH ossia $\frac{2}{3}$ AB, e perciò eguale a $\frac{2}{3}$ del parallelepipedo rettangolo, che ha per base il rettangolo fatto da $\frac{1}{2}$ AG, e da AB, e che ha per altezza la periferia, che ha per raggio AG, ma il rettangolo fatto da $\frac{1}{2}$ AG, e da AB equivale al triangolo ABC, e la circonferenza, che ha per raggio AG è la medesima di quella, che ha per raggio la perpendicolare EF calata dal punto, in cui la baso AB è divisa in due parti eguali, sopra l'asse di rivoluzione CD, dunque il solido generato dal triangolo ABC girando intorno a CH equivale alli $\frac{2}{3}$ del parallelepipedo rettangolo, il quale ha per base il rettangolo equivalente al triangolo ABC, e per altezza la circonferenza, che ha per raggio EF. Sicchè, ec.

139. Cor. 1. Quindi il solido generato dalla rivoluzione del triangolo ABC intorno all'asse di rivoluzione CD, che passa per lo vertice, è $\frac{1}{3}$ del parallelepipedo rettangolo, che ha per base un rettangolo doppio del triango-

lo ABC, e per altezza una retta eguale alla circonferenza, che ha per raggio EF, ma un cono retto equivale ad $\frac{1}{3}$ del parallelepipedo rettangolo, che ha con esso la medesima altezza, e la base equivalente alla base del cono, dunque il solido generato dal triangolo ABC equivale al cono retto, il quale ha la base doppia del triangolo ABC di rivoluzione, e per altezza la circonferenza, che ha per raggio EF; Dunque se un triangolo fa una rivoluzione intorno ad un asse, che passa per lo vertice di esso, genera un solido equivalente ad un cono retto, il quale ha per base un cerchio doppio del triangolo generatore e per altezza la circonferenza del cerchio, che ha per raggio la perpendicolare calata sul medesimo asse dal punto in cui la base del triangolo è divisa in due parti eguali.

140. Cor. 2. (Fig. 59) Se il triangolo ABC è un triangolo isoscele, la retta CE, la quale divide la base AB in due parti eguali è ad essa perpendicolare, ed i triangoli AKB, CEF avendo li loro lati perpendicolari sono simili, e daranno la proporzione AB : BK ossia GH : : CE : EF : : perif. CE : perif. EF, e perciò sarà il rettangolo fatto da GH e da perif. CE equivalente al rettangolo fatto da AB e da perif. EF. Di più il rettangolo fatto da AB e da CE equivale al doppio del triangolo ACB, dunque il solido generato dalla rivoluzione del

triangolo ABC equivale ad $\frac{1}{3}$ del parallelepipedo rettangolo fatto dalla perif. CE, da CE, e da GH, e per conseguenza al cono retto, che ha per base un cerchio equivalente al rettangolo fatto da CE e dalla perif. CE, e per altezza GH, ma il rettangolo fatto da CE e dalla sua periferia è il doppio del cerchio, che ha per raggio CE; dunque lo stesso solido equivale ad un cono retto, il quale ha per sua base il cerchio doppio del cerchio, che ha per raggio CE, e per altezza GH. Dunque *se un triangolo isoscele fa una perfetta rivoluzione intorno ad un asse, che passa per lo suo vertice equivale ad un cono retto, il quale ha per base un cerchio doppio del cerchio, che ha per raggio la altezza del triangolo, e per altezza la porzione dell' asse intercetta fra le due perpendicolari calate sopra dell' asse dalle due estremità della base.*

141. Cor. 3. (Fig. 61) Se in un semicerchio AFB si iscrive un mezzo poligono regolare ACDB, si tirano li raggi OC, OD alli vertici di due angoli C, D, e dal medesimo punto si calano sopra del diametro AB le due perpendicolari CG, DH, facilmente si potrà dimostrare, che il solido generato dalla rivoluzione dello spazio poligonale DOC girando intorno al punto O, equivale al cono retto, il quale ha per base un cerchio doppio di quello, il quale ha per raggio la perpendicolare OI calata del centro O sopra un lato del poligono, e per altezza la porzione GH dell' asse di rivoluzione determinata dalle perpendicolari sopra di esso abbasste dalle estremità C, D del contorno dello spazio poligonale.

In fatti li triangoli COE, EOF, FOD sono tutti isosceli, ed hanno le basi, e le altezze eguali, dunque il solido generato da ciascuno di tali triangoli equivale al cono retto, che ha per base un cerchio doppio di quello che ha per raggio OI, e per altezza la porzione correspondente dell' asse AB, per conseguenza lo intero solido generato dalla rivoluzione di COD equivale al cono retto, che ha per base il cerchio doppio di quello, che ha per raggio OI, e per altezza la somma delle altezze delli tre coni, ma OI è il raggio del cerchio iscritto nel poligono ACDB, dunque il solido generato dalla rivoluzione dello spazio poligonale COD intorno al diametro AB del cerchio ad esso circoscritto equivale al cono retto, il quale ha per base il cerchio doppio del cerchio iscritto nel poligono, e per altezza la porzione correspondente dell' asse di rivoluzione.

CAP. VI.

Teoria della Sfera.

ARTICOLO I.

Nozioni preliminari.

142. Si dice *Sfera* quel solido, il quale è terminato da una superficie curva continuata, la quale ha tutti li suoi punti egualmente distanti da un punno interno, il quale si chiama *centro* della Sfera.

(Fig. 62) Noi possiamo concepire la sfera generata dalla rivoluzione di un semicircolo intorno al suo diametro AB, il quale resta immobile, la superficie così generata dalla circonferenza ADB avrà tutti li suoi punti egualmente distanti dal punto C, centro comune della sfera, e del semicircolo ADB, il suo diametro AB si chiamerà *asse* della sfera, ed il semicircolo ADB *generatore* della sfera.

Qualunque retta tirata dal centro alla superficie della sfera si dice *raggio* della sfera; e qualunque retta, la quale passando per lo centro della sfera incontra da ambe le parti la superficie della sfera, si dice *diametro* della sfera; essendo il diametro della sfera sempre composto da due raggi, ed essendo li raggi tutti eguali, ne segue, che li diametri sono tutti eguali, ed ogni raggio è un semidiametro.

Se sopra del diametro AB del semicerchio generatore si inalzino le perpendicolari FM, CD, GL etc.; il semicerchio generatore girando intorno all' asse immobile AB genererà la sfera, e ciascheduna di queste perpendicolari genererà un circolo; dal che ricaviamo, che tutte le sezioni fatte nella sfera perpendicolarmente al diametro AB del circolo generatore sono circoli; e potendosi prendere per asse della sfera qualunque altro diametro di essa, per esempio NO, si vede chiaramente, che mentre il semicircolo girerà intorno ad NO tutte le perpendicolari inalzate sopra di NO, anche descriveranno un cerchio; quindi generalmente couchiuderemo. 1. Che tutte le sezioni fatte in una sfera sono circoli. 2. Che quelle sezioni, le quali passano per lo centro della sfera sono tutte circoli eguali, poichè tutte hanno per raggi li raggi della sfera, li quali sono tutti eguali. 3. Che essendo le corde de' cerchi, le quali sono più vicine al centro maggiori di quelle, che più se ne allontanano, le sezioni saranno tanto più grandi, quanto più saranno vicine al centro della sfera. 4. Che li circoli, li quali passano per lo centro della sfera, avendo per diametri li diametri della sfera, sono maggiori di tutti quelli, che non vi passano; e che per consegnenza essi non solamente sono tutti egnali, ma ancora sono li maggiori, ed in fine conchiudiamo, che tutte le sezioni, che si fanno in una sfera sono circoli, li quali hanno per centri li punti, nelli quali sono incontrate dalla perpendicolare abbassata sopra di esse dal centro della sfera, quelle, che passano per lo centro della sfera sono *circoli massimi*, tutte le altre sono *circoli minori*, e tra essi quelli che sono più vicini al centro sono maggiori di quelli, che ne sono più distanti, e quelli che sono ad eguale distanza dal centro sono eguali; finalmente che li circoli massimi passando tutti per lo centro della sfera avranno per comune sezione un diametro, e perciò si tagliano scambievolmente in due parti eguali, e le loro circonferenze si tagliano in punti diametralmente opposti.

Qualunque circolo massimo divide la sfera, e la sua superficie in due parti eguali, imperciocchè se le due porzioni, nelle quali la sfera viene divisa dal circolo massimo si intendano applicate sulla base comune, facendo rivolgere le convessità di esse dalla medesima parte, le due superficie sferiche dovranno combaciare, poichè altrimenti vi sarebbero in esse delli punti più lontani dal centro gli uni, che gli altri, il che ripugna alla definizione della sfera.

Potendosi considerare qualunque cerchio minore come generato da una semicorda perpendicolare all' asse della sfera, ne segue, che il centro di qualsivoglia cerchio minore, e quello della sfera sono nella medesima retta perpendicolare al cerchio minore.

Un piano si dice *tangente* della sfera, quando incontra la superficie della sfera, ed ha un solo punto comune con la superficie della sfera.

Il *polo* di un cerchio della sfera è quel punto della superficie sferica, il quale ha la medesima distanza da qualunque punto dalla circonferenza di esso.

Quindi li poli di un cerchio massimo sono gli estremi del diametro della sfera ad esso perpendicolare, e generalmente li poli di qualunque cerchio sono li punti della perpendicolare elevata dal centro sopra di esso, nelli quali essa incontra la superficie della sfera, e per conseguenza li circoli minori hanno i poli comuni con li cerchi massimi ad essi paralleli.

Si dà il nome di *fuso* sferico ad una porzione della superficie sferica terminata da due semiperiferie di cerchi massimi, che si intersecano in un diametro comune.

Si chiama *unghia*, o *fetta sferica* il solido racchiuso da due semicircoli massimi, che si intersecano in un diametro comune, e dal fuso sferico correspondente.

Si dice *triangolo sferico* una porzione di superficie sferica terminata da tre archi di cerchio, e gli archi, che lo terminano si dicono *lati* di esso.

Quantunque li tre lati di un triangolo sferico possano essere indifferentemente archi di cerchi massimi, ed archi di cerchi minori, pure noi con questo nome designiamo sempre quelli, che hanno per lati archi di cerchi massimi, dippiù li lati di un triangolo sferico si suppongono sempre minori della semicirconferenza, alla quale essi appartengono, e gli angoli, che formano li piani, alli quali appartengono li lati del triangolo sferico sono gli *angoli* del triangolo; il triangolo sferico si dice *equilatero*, qualora ha tutti li suoi lati eguali, si dice *isoscele* se ha soltanto due lati eguali, e *scaleno* qualora tutti li lati di esso sono diseguali.

Diamo il nome di *zona sferica* ad una porzione della superficie della sfera, la quale è terminata dalle periferie di due cerchi paralleli, e queste periferie si dicono *basi* della zona.

Si dice *segmento*, o *porzione* sferica il solido racchiuso fra una porzione della superficie della sfera, e da un cerchio; e di essa si dice *base* il cerchio, che la termina, e si dice *calottae* o *beretta* sferica la porzione della superficie sferica, che la racchiude, si dice *altezza* della porzione sferica, e della calotta la perpendicolare elevata dal centro della base del segmento prolungata fino alla superficie correspondente, e *vertice* del segmento, e della calotta il punto, nel quale la altezza incontra la superficie sferica.

Due calotte, e due segmenti sferici si dicono *simili*, quando le loro altezze sono proporzionali alli diametri delle loro basi.

Si dà il nome di *settore sferico* al solido, il quale è terminato da una calotta sferica, e

dalla superficie convessa di un cono retto, il quale ha per base la base della calotta e per vetice il centro della sfera, ed i settori sferici si dicono *simili*, qualora sono terminati da calotte simili.

(Fig. 63). Se dal centro P del cerchio LM si inalzi sopra di esso la perpendicolare PO, la quale si prolunghi fino a tanto, che incontri la superficie della sfera nelli punti A, B, le parti PA, PB di essa sono le allezze respettivo delle due calotte LAM, LBM, li punti A, B saranno li vertici di esse, la retta AB sarà l'asse, ed i punti A, B li poli del cerchio LM.

Tutti li punti della circonferenza LM sono egualmente distanti dal piede P della perpendicolare AB, dunque tutte le rette, che dal punto A di essa si possono tirare alli punti della circonferenza LM sono eguali, come ancora sono eguali quelle, che dal punto B si possono tirare alli punti della medesima periferia, e perciò tutti gli archi di cerchi massimi, che passando per lo punto A incontrano la periferia LM sono eguali, come sottesi da corde eguali, e per la medesima ragione sono eguali gli archi di cerchi massimi, che passando per lo punto B incontrano la circonferenza LM; Dunque tutte le rette tirate dal vertice di una calotta alla circonferenza della sua base sono eguali, e tutti gli archi di cerchi massimi compresi tra un polo di un cerchio e la circonferenza di esso sono eguali.

Finalmente sia CE un circolo massimo,

del quale AB sia l'asse, ed i punti A, B sieno li poli, gli archi di cerchi massimi, che passano per gli punti A, B, ed incontrano la circonferenza CE misurano gli angoli retti fatti al centro O con li raggi tirati alla circonferenza CE, dunque essi sono tutti di 90.°

143. Teor. 1. *Per due punti della superficie di una sfera non diametralmente opposti può passare una sola circonferenza di circolo massimo, e può passarvi una infinità di circonferenze di cerchi minori, e di tutti gli archi, che per questi due punti possono passare il più breve è l'arco di cerchio massimo minore della semiperiferia.*

(Fig. 64). Rappresenti ECFD una sfera, e sulla sua superficie sieno presi li due punti A, B non diametralmente opposti. Dico 1. Che per li punti A, B può passare una sola circonferenza di cerchio massimo, ma vi possono passare infinite circonferenze di circoli minori. 2. Che l'arco di cerchio massimo minore della semicirconferenza è minore dell'arco di qualsivoglia cerchio minore, che passa per gli medesimi punti.

Dim. 1. Il cerchio massimo, che passa per gli punti A, B deve ancora passare per lo centro O della sfera, ma per tre punti dati non in linea retta può passare un solo piano, dunque per gli punti A, B può passare una sola circonferenza di cerchio massimo ACBD, dippiù nella geometria piana abbiamo dimostrato, che per due punti dati si possono fare

passare le circonferenze di infiniti cerchi, dunque per gli punti A, B possono passare le circonferenze di infiniti cerchi minori.

Dim. 2. Sia ACB l'arco di cerchio massimo minore della semicirconferenza, che passa per gli punti A, B e sia AEB un arco di cerchio minore, che passa per gli medesimi punti, si unisca la retta AB, ed intorno ad essa si concepisca girare uno di essi fino a tanto, che pervenga nel piano dell'altro, allora la medesima corda AB sottende l'arco ACB di cerchio massimo, e l'arco AEB di cerchio minore, ma noi abbiamo dimostrato, che qualora per gli estremi di una retta passano gli archi di due cerchi, quello, che appartiene al cerchio maggiore ed è minore della semiperiferia, è minore di quello, che appartiene al cerchio minore; dunque di tutti gli archi, che possono passare per due punti non diametralmente opposti della superficie di una sfera, l'arco di cerchio massimo minore della semicirconferenza è il minimo. Sicchè etc.

Cor. Quindi volendo misurare la distanza di due punti presi sopra della superficie di una sfera, noi la determineremo per mezzo dell'arco di cerchio massimo minore della semicirconferenza, il quale passa per li medesimi punti.

144. Teor. 2. *Se più piani paralleli tagliano una sfera, le sezioni circolari, che esse determinano avranno tutte il medesimo asse, ed i medesimi poli.*

(Fig. 65.) La sfera ABH sia tagliata dalli due cerchi paralleli EF, GH, e sia BA l'asse del cerchio EF, e sieno A, B li poli di esso, dico che il cerchio GDH ha il medesimo asse AB, ed i medesimi poli A, B.

Dim. Li piani EF, GH sono pararalleli, dunque la retta BA, la quale è perpendicolare ad EF è perpendicolare ancora a GH, dippiù questa retta deve passare per lo centro Q di GH, poichè se essa non vi passasse, allora si potrebbe dal centro O della sfera tirare al punto Q una altra retta, la quale è perpendicolare al piano GH, e dal punto B si sarebbero calate sopra del piano GH due perpendicolari, il che è assurdo, dunque AB è un diametro della sfera, il quale passa per gli centri P, Q delli cerchi paralleli EF, GH, ed è ad amendue perpendicolare, dunque questo diametro è l'asse di questi due cerchi, ed A, B sono li poli di essi. Sicchè, etc.

145. Cor. 1. Tutti li cerchi massimi, le circonferenze delli quali passano per lo punto A debbono ancora passare per lo punto B diametralmente opposto al punto A, ed avere per comune sezione il medesimo diametro AB, ma li punti, A, B sono li poli delli cerchi paralleli EF, IK, GH, ed AB è l'asse comune di tutti questi cerchi, dunque tutti li cerchi massimi, li quali passano per lo polo A debbono passare ancora per lo polo B, e debbono avere per comune sezione il diametro AB, il quale è l'asse comune di tutti li cerchi paralleli EF, IK, GH etc., e perciò è a tutti essi perpendicolare, dunque tutti li cerchi massimi, li quali passano per uno delli poli di più cerchi paralleli debbono passare ancora per lo polo opposto, hanno per comune sezione l'asse di essi, e sono alli medesimi piani perpendicolari.

146. Cor. 2. Tutti li cerchi massimi, che passano per lo polo A delli cerchi paralleli EF, GH, IK hanno per comune sezione l'asse AB, il quale passa per gli centri di essi, ed è ad essi perpendicolare, dunque le intersezioni di essi con li cerchi EF, GH, IK sono diametri di questi medesimi cerchi, e perciò tutti li cerchi massimi, che passano per gli poli di più cerchi paralleli sono ad essi perpendicolari e li dividono in due parti eguali.

Cor. 3. Per i poli A, B delli cerchi paralleli EF, IK, GH si concepiscano passare li cerchi massimi AIB, ALB, li quali con le loro circonferenze incontrano quelle delli cerchi EF, IK, GH, e ne determinano gli archi EC, IL, GD. Le comuni sezioni delli cerchi paralleli EF, IK, GH tagliati dalli piani AEB, ACB sono parallele, e perciò EF, GH, IK, sono parallele come ancora sono parallele CP, LO, DQ, e perciò gli angoli EPC, IOL, GQD sono eguali; ma questi angoli hanno i vertici alli centri delli cerchi EF, IK, GH, dunque se due cerchi massimi passano per uno delli poli di più cerchi paralleli, le circonferenze di essi tagliano archi simili dalle circonferenze delli cerchi paralleli.

Cor. 4. (Fig. 66.) Nella sfera ACBD sieno tirati li due cerchi massimi AB, CD, li quali si intersecano, e sia Q il polo dell' arco AB, e P quello di CD; si concepisca tirato il cerchio massimo QCB, il quale passi per gli poli P, Q, e che taglia le circonferenze AB, CD nelli punti A, C, e si uniscano le rette OA, OC.

Tutti li punti delle circonferenze delli cerchi massimi sono distanti dalli loro poli per un arco di 90°, dunque gli archi AQ, CP sono eguali, toltone di comune l'arco PA, sarà AC=PQ, ma AC misura l'angolo AOC, il quale è l' angolo misuratore dell' angolo diedro compreso tra li due cerchi AB, CD; dunque l' arco di cerchio massimo, che unisce i punti P, Q è la misura dell' angolo diedro compreso tra li due cerchi AB, CD, sicchè se due cerchi massimi si tagliano sopra di una sfera, la distanza delli poli di essi è eguale alla misura dell'angolo diedro tra essi compreso.

147. (Fig 67.) Avvert. Rappresenti AEB un cerchio qualunque della sfera, sia H uno delli suoi poli, per lo quale si faccia passare il cerchio massimo AHB, il quale sarà perpendicolare al cerchio AEB, e lo intersecherà nel suo diametro AB, e da qualsivoglia punto C diverso dal polo H preso sopra dell' arco ACB si facciano passare gli archi di cerchi massimi CD, CE, CF, CG, che incontrano la circonferenza AEB nelli punti D, E, F, G, tra li quali li punti E, G sieno egualmente distanti dal punto B, o dal punto A, e si

tirino le corde CB, CD, CE, CF, CA, CG, ed in fine dal punto C si abbassi la perpendicolare CK sopra AB, e si unisca il raggio CO.

Essendo il piano ACB perpendicolare al cerchio AEBG, anche la retta CK sarà al medesimo piano perpendicolare. Di tutte le rette, che si possono tirare dal punto C a punti egualmente distanti dal piede della retta CO obliqua al piano ADB, e per conseguenza alla circonferenza dal cerchio ADBG, quella che giugne al punto A è la massima, poichè è la più lontana dal piede della perpendicolare, quella che giugne al punto B è la minima, poichè è la più vicina al piede della perpendicolare, quella che giugne al punto D, come più vicina alla minima è minore di quella, che giugne al punto E, che ne è più lontana; e le due che giungono alli punti G, E egualmente distanti dal piede B della minima sono eguali, dunque ancora di tutti gli archi di cerchi massimi, li quali passando per lo punto C incontrano la circonferenza ADBG, l'arco AC, che passa per lo polo H è il massimo, BC è il minimo, li più vicini al minimo sono minori di quelli, che ne sono più distanti, e quelli che giungono a punti egualmente distanti da quelli, alli quali giungono il massimo o il minimo sono eguali.

148. Teor. 3. *Se due cerchi massimi si intersecano, e dal punto in cui si incontrano, si tirino ad essi le tangenti, esse comprenderanno un angolo eguale all' angolo*

misuratore dell' angolo diedro compreso tra essi, ed esso è misurato dal arco di cerchio massimo compreso tra questi cerchi, e che ha per polo il punto, in cui le circonferenze si incontrano.

(Fig. 68) Rappresentino BCA, BDA due cerchi massimi, li quali si incontrano con le loro periferie nel punto A, e da questo punto A sieno tirate alli due cerchi le tangenti AF, AE, dal centro O della sfera sieno tirate nelli medesimi piani le perpendicolari OC, OD sopra AB, e col centro O, ed intervallo del raggio OC sia descritto nel piano dell' angolo COD l' arco CD, dico che l' angolo sferico CAD ha per suo angolo misuratore l' angolo EAF fatto dalle tangenti, ed ha per misura l'arco CD di cerchio massimo, il quale ha per polo il punto A.

Dim. L' angolo misuratore dell' angolo diedro compreso fra due piani è compreso tra due rette tirate nelli medesimi piani, che incontrano perpendicolarmente nel medesimo punto la loro comune sezione, ma le due tangenti tirate alli due cerchi dal punto A sono amendue perpendicolari alla loro comune senzione, dunque esso è l' angolo misuratore dell' angolo diedro, che li cerchi comprendono, l' angolo COD è anche misuratore dell' angolo diedro compreso tra li due cerchi ACB, ADB, ed esso è misurato dall' arco CD sopra del quale esso appoggia, dunque anche l' angolo compreso fra le due tangenti tirate del punto A è dal medesimo arco misurato. Sicchè, etc.

Articolo II.

Delli triangoli sferici.

149. Teor. 1. *In qualunque triangolo sferico un lato è sempre minore della somma degli altri due.*

(Fig. 69). Rappresenti ABC un triangolo sferico qualunque, dico che uno qualunque delli suoi lati è minore della somma degli altri due.

Dim. Dal centro O della sfera si tirino alli vertici A, B, C degli angoli del triangolo ABC li raggi OA, OB, OC; nel centro O avremo così formato un angolo triedro compreso fra li tre angoli piani AOB, AOC, COB, ciascuno delli quali è minore della somma degli altri due, ma questi angoli piani hanno per misura respettivamente gli archi AB, BC, CA, dunque anche ciascuno di questi archi è minore della somma degli altri due. Sicchè, etc.

150. Teor. 2. *La somma delli tre lati di qualsivoglia triangolo sferico è sempre minore della intera circonferenza.*

(Fig. 69.) Rappresenti ABC un triangolo sferico, dico, che la somma delli suoi tre lati è minore della intera circonferenza.

Dim. Dal centro O della sfera alli tre vartici A, B, C degli angoli del triangolo sferico ABC si tirino li raggi OA, OB, OC, nel centro della sfera sarà formato un angolo

*

triedro compreso tra li tre angoli piani AOB, BOC, COA, la somma delli quali è minore di quattro retti, ma questi tre angoli sono misurati dalli tre archi AB, BC, CA, dunque la somma delli tre archi AB, BC, CA, è minore della misura di quattro retti, ma la misura di quattro retti è la intera circonferenza, dunque la somma delli tre archi AB, BC, CA è minore di una intera circonferenza. Sicchè etc.

151. Cor. La somma delli tre lati di un triangolo sferico è sempre minore della periferia intera, ma qualunque lato del triangolo è minore della somma degli altri due, dunque qualunque lato di un triangolo sferico è sempre minore della semiperiferia.

152. Teor. 3. *Se due triangoli sferici sono tali, che li vertici delli tre angoli di uno di essi sieno rispettivamente li poli delli tre lati dell' altro, li tre lati di quello avranno per poli li vertici degli angoli di questo, e qualunque angolo di ciascuno di questi triangoli avrà per misura la semicirconferenza diminuita del lato, che ad esso è opposto nell' altro triangolo.*

(Fig. 70). Sieno ABC, DEF due triangoli sferici tali, che li vertici degli angoli A, B, C del triangolo ABC sieno poli respettivamente delli lati EF, FD, DE del triangolo DEF. Dico 1. Che li vertici D, E, F saranno li poli delli lati BC, AC, AB del triangolo ABC, 2. Che ciascuno degli angoli A, B, G del triangolo ABC è misurato dalla semicirconferenza diminuita del lato, che ad esso è opposto nel triangolo DEF. 3. Che ciascuno degli angoli D, E, F del triangolo DEF ha per misura la circonferenza diminuita del lato del triangolo ABC ad esso opposto.

Dim. Il punto A essendo polo dell' arco EF, tutti li punti dell' arco EF saranno a 90° di distanza dal punto A, dunque l' arco che unisce li punti A, E è di 90°. Similmente essendo C polo dell' arco DE, l' arco che unisce li punti C, E è anche di 90°, dunque il punto E è distante da tutti li punti dell' arco AC per 90°, e perciò E è il polo dell' arco AC; col medesimo ragionamento si dimostra, che il punto F è polo dell' arco AB, ed il punto D è polo dell' arco BC. Sicchè, etc.

Dim. 2. Si prolunghino se bisogna li lati AB, AC fino allo incontro del lato EF nelli punti L, M.

Il punto E è polo dell' arco AM e perciò $EM=90^\circ$; similmente il punto F è polo dell' arco AL, e perciò anche $FL=90^\circ$, e perciò $EM+LF=180^\circ$, osia ad una semiperiferia, ma $EM+LF=EF+LM$, dunque $EF+LM$ è eguale alla semicirconferenza, si tolga di comune EF, avremo LM eguale alla semicirconferenza diminuita di EF; ma essendo il punto A polo dell' arco LM l' angolo A è misurato dall' arco LM, dunque l' angolo A è misurato dalla semiperiferia diminuita dell' arco EF. Con lo stesso raziocinio si può dimostrare, che l' angolo B ha per misura la semicirconferenza diminuita dell' arco DF, e che l' angolo C è misurato dalla semicirconferenza diminuita dell' arco DE. Dunque etc.

Dim. 3. Il punto B è polo dell' arco DF, dunque $BH=90°$, similmente il punto C è polo dell'arco DE, dunque anche $CG=90°$, dunque $CG+BH=180°$, ma $CG+BH=GH+BC$, dunque $GH+BC=180°$; da queste quantità si tolga l' arco comune BC, avremo $GH=180°-BC$; ma essendo il punto D polo dell' arco GH, questo arco GH sarà la misura dell' angolo D, e perciò l' angolo D è misurato dalla semicirconferenza diminuita di BC. Con lo stesso raziocinio si dimosira che l' angolo E è misurato dalla semiperiferia diminuita dell' arco AC, e che l' angolo F è misurato dalla semicirconferenza diminuita dell' arco AB. Sicchè, etc.

153. Avv. Li Geometri hanno dato differenti nomi alli triangoli, che abbiamo considerati nel teorema precedente, noi li chiameremo *triangoli polari l' uno dell' altro.*

154. Teor. 4. *La somma di tutti gli angoli di un triangolo sferico è sempre maggiore della somma di due angoli retti, e minore della somma di sei angoli retti.*

(Fig. 70) Rappresenti ABC qualsivoglia triangolo sferico, dico che la somma delli suoi angoli A, B, C è sempre maggiore della somma di due retti, e minore di quella di sei angoli retti.

Dim. Sia EDF il triangolo polare del triangolo ABC. Li tre angoli del triangolo ABC sono misurati dalla somma di tre semicirconferenze diminuita dalla somma delli tre lati del triangolo polare EDF, ma la somma delli tre lati del triangolo EDF è minore della somma di due semicirconferenze, dunque la misura delli tre angoli del triangolo ABC è maggiore di una semicirconferenza, ma la semicirconferenza è la misura di due angoli retti, dunque la somma delli tre angoli del triangolo ABC è maggiore di due retti.

In oltre se nel triangolo ABC si prolungano li lati dalla medesima parte, ciascuno degli angoli del triangolo unito col suo esterno correspondente equivale a due retti, dunque la somma delli tre angoli del triangolo unita con la somma delli tre angoli esterni equivale a sei retti, dunque la somma delli tre angoli del triangolo ABC è minore di sei retti. Sicchè, etc.

155. Teor. 5. *Se in un triangolo sferico due lati sono eguali, anche gli angoli ad essi opposti sono eguali.*

(Fig. 71.) Nel triangolo sferico ABC sia il lato $AC=BC$, dico che l' angolo $CAB=CBA$.

Dim. Dal centro O della sfera si tirino alli punti A, B, C li raggi OA, OB, OC, e dal punto C del raggio OC si calino sopra OA, OB le perpendicolari CF, CG, indi dal punto F nel piano AOB si inalzi FH perpendicolare ad AO, e dal punto G nel medesimo piano si inalzi sopra di OB la perpendicolare GH, la quale incontra FH nel punto H, finalmente si uniscano li punti C, H con la retta CH.

La retta OF è perpendicolare alle rette FC, FH, le quali si incontrano al suo piede, e perciò è perpendicolare al piano CFH, ma qualora una retta è perpendicolare ad un piano, anche il piano in cui essa esiste è al medesimo piano perpendicolare, dunque al piano CFH è perpendicolare il piano AOB; con lo stesso raziocinio si dimostra, che lo stesso piano AOB è perpendicolare al piano CGH, dunque la retta CH in cui questi due piani si intersecano è al medesimo piano AOB perpendicolare.

In oltre per la ipotesi li due lati AC, CB del triangolo sferico sono eguali, dunque anche gli angoli AOC, COB, che sono da essi misurati sono eguali, quindi li due triangoli COF, COG hanno gli angoli F, G retti, hanno la ipotenusa CO comune, e l'angolo COF=COG, dunque essi avranno le altre parti eguali, e perciò CF=CG. Finalmente li due triangoli CFH, CGH hanno gli angoli CHF, CHG retti, le ipotenuse CF, CG eguali, ed il cateto CH comune, dunque essi avranno tutte le altre parti eguali, perciò l'angolo CFH =CGH, ma questi due angoli sono gli angoli misuratori degli angoli A, B, dunque gli angoli A, B del triangolo sferico ACB sono eguali. Sicchè ec.

156. Teor. 6. *Se in un triangolo sferico due angoli sono eguali, anche li lati ad essi opposti debbono essere eguali.*

(Fig. 71.) Nel triangolo sferico ACB sia l'angolo CAB=CBA, dico che il lato CA=CB.

Dim. Si concepisca fatta la preparazione medesima, che abbiamo fatta nel teorema precedente, avremo li due triangoli CHF, CHG rettangoli in H, li quali hanno il cateto CH comune, ed i due angoli CFH, CGH eguali, poichè essi sono gli angoli misuratori degli angoli sferici A, B, li quali per la ipotesi sono eguali, dunque essi debbono avere le altre parti eguali, e perciò CF=CG. Finalmente li triangoli COF, COG hanno gli angoli F, G retti, la ipotenusa CO comune, ed il cateto CF=CG, dunque essi debbono avere le altre parti eguali, e perciò l'angolo COF=COG, ma questi due angoli sono misurati dagli archi AC, CB, dunque AC=CB. Sicchè ec.

157. Cor. Quindi il triangolo sferico equilatero è anche equiangolo, e reciprocamente il triangolo sferico equiangolo è anche equilatero.

158. Teor. 6. *Se in un triangolo sferico un angolo è maggiore di un altro, anche il lato opposto all'angolo maggiore deve essere maggiore del lato opposto all'angolo minore.*

(Fig. 72.) Nel triangolo sferico ABC sia l'angolo A maggiore dell'angolo B; dico che il lato BC opposto all'angolo A è anche maggiore del lato CA opposto all'angolo minore B.

Dim. Si faccia passare per lo punto A un arco di cerchio massimo AD, il quale faccia con AD l'angolo sferico BAD=CBA, questo arco incontrerà l'arco BC in un punto D.

Poichè nel triangolo sferico ADB l'angolo DBA=BAD, sarà AD=DB, aggiungendo ad essi di comune l'arco DC; sarà AD+DC =BD+DC, ma AD+DC è maggiore di AC, dunque anche BD+DC o sia BC è maggiore di AC. Sicchè ec.

159. Teor. 7. *Se in un triangolo sferico un lato è maggiore di un altro, anche l'angolo opposto al lato maggiore è maggiore dell'angolo opposto al lato minore.*

Nel triangolo sferico ABC sia il lato BC maggiore del lato AC, dico che l'angolo A opposto al lato maggiore BC è maggiore dell'angolo B opposto al lato minore AC.

Dim. Se si niega, che l'angolo A sia maggiore dell'angolo B, allora l'angolo A dovrebbe essere eguale, o minore dell'angolo B, ma se A fosse eguale all'angolo B, allora il lato AC dovrebbe essere eguale al lato CB, e se l'angolo A fosse minore dell'angolo B, dovrebbe il lato BC essere minore di AC, ma queste due cose ripugnano alla ipotesi, dunque BC è maggiore di AC. Sicchè ec.

160. Teor. 8. *Se in un triangolo sferico si prolunga un lato, l'angolo esterno sarà eguale al suo interno opposto, se la somma degli altri due lati è eguale alla semicirconferenza. 2. Sarà maggiore del suo interno opposto se la somma degli altri due lati è minore della semicirconferenza. 3. Sarà minore del suo interno opposto, se la somma degli altri due lati è maggiore della semicirconferenza.*

Fig. 73.) Rappresenti ABC un triangolo sferico, nel quale il lato AC sia prolungato verso D, e sia I°. La somma AB+BC degli altri due lati eguale alla semicirconferenza, dico che l'angolo esterno BCD è eguale al suo interno opposto BAC.

Dim. Si prolunghino li due lati AB, AC fino a tanto, che si incontrino nel punto D. Li due angoli in A, D saranno eguali.

Per la ipotesi AB+BC=ABD, se ne tolga di comune AB, sarà BC=BD, e per conseguenza gli angoli BCD, BDC del triangolo DBC ad essi opposti sono eguali, ma l'angolo BDC =BAC, dunque anche l'angolo esterno BCD è eguale a BAC suo interno opposto. Sicchè etc.

2.° Sia la somma AB+BC minore della semicirconferenza, dico che l'angolo esterno DCB è maggiore del suo interno opposto BAC.

Dim. Per la ipotesi AB+BC è minore della semicirconferenza ABD, se ne tolga di comune l'arco AB, sarà BC minore di BD, e perciò nel triangolo BCD essendo BC minore di BD, sarà l'angolo BDC opposto al lato minore BC minore dell'angolo BCD opposto al lato maggiore BD, ma l'angolo BDC=BAC, dunque anche BAC è minore di BCD, e perciò l'angolo esterno BCD è maggiore del suo interno opposto BAC. Sicchè etc.

3.° Sia finalmente la somma AB+BC maggiore della semicirconferenza, dico che l' angolo esterno BCD è minore del suo interno opposto BAC.

Dim. Per la ipotesi la somma AB+BC è maggiore della semiperiferia ABD, se ne tolga di comune AB, resterà CB maggiore di BD, e perciò nel triangolo BCD essendo CB maggiore di BD, sarà l' angolo DCB opposto al lato minore BD minore dell' angolo BDC opposto al lato maggiore BC, ma CDB=CAB, dunque l' angolo esterno DCB è anche minore del suo interno opposto CAB. Sicchè etc.

161. Cor. Abbiamo dimostrato, che qualora la somma delli due lati AB, BC del triangolo ABC è eguale alla semiperiferia, l' angolo esterno BCD è eguale al suo interno opposto BAC, aggiungasi ad essi di comune l' angolo ACB, avremo la somma BAC+ACB=ACB+BCD=2R, dunque qualora la somma di due lati di un triangolo sferico è eguale alla semicirconferenza la somma degli angoli ad essi opposti è eguale a due retti.

2.° Abbiamo dimostrato, che qualora la somma delli due lati AB, BC è minore della semiperiferia, l' angolo esterno BCD è maggiore del suo interno opposto BAC, aggiugnendo ad essi di comune l' angolo ACB, avremo BAC+ACB minore di ACB+BCD, e perciò minore della somma di due retti. Dunque qualora la somma di due lati di un triangolo sferico è minore della semicirconferenza la somma degli angoli ad essi opposti è minore di due retti.

3.° Abbiamo finalmente dimostrato, che qualora la somma AB+BC delli due lati del triangolo sferico ABC è maggiore della semicirconferenza, l' angolo esterno BCD è minore del suo interno opposto BAC, quindi aggiugnendo ad essi di comune l' angolo BCA, avremo la somma BAC+ACB maggiore di ACB+BCD, e perciò maggiore di due retti, dunque qualora la somma di due lati di un triangolo sferico è maggiore della semicirconferenza la somma degli angoli ad essi opposti è maggiore di due retti.

Articolo III.

Caratteri da conoscere la eguaglianza di due triangoli sferici.

162. Teor. 1. *Se due triangoli sferici appartenenti alla medesima sfera, o a sfere eguali hanno due lati dell' uno respettivamente eguali a due lati dell' altro, e l' angolo compreso fra li due lati del primo eguale all' angolo compreso fra li due lati del secondo, essi sono eguali.*

(Fig. 57.) Rappresentino ABC, DEF due triangoli sferici appartenenti ad una medesima sfera, o a due sfere eguali, li quali abbiano il lato AB=DE, il lato BC=EF, e l' angolo ABC compreso tra li due lati del primo eguale all' angolo DEF compreso tra li due lati del secondo, Dico che essi sono eguali.

Dim. Si concepisca il triangolo DEF sovraposto al triangolo ABC in maniera, che il lato DE combaci col suo eguale AB, e poichè l' angolo ABC è eguale all' angolo DEF il lato EF cadrà sopra del lato BC, e per la eguaglianza di EF, BC il punto F cadrà sopra del punto C, dunque essendo caduti il punto D sopra del punto A, ed il punto F sopra del punto C, l'arco DF combacerà con l' arco AC, poichè per due punti presi sopra la superficie di una sfera vi può passare un solo arco di cerchio massimo, dunque il triangolo EDF combacia col triangolo ABC, e perciò essi sono eguali. Sicchè

163. Teor. 2. *Se due triangoli sferici appartenenti ad una medesima sfera, o a sfere eguali hanno li tre lati dell' uno respettivamente eguali alli tre lati dell' altro, essi sono eguali.*

Rappresentino ABC, DEF due triangoli sferici appartenenti alla medesima sfera, o a sfere eguali, ed abbiano AB=DE, BC=EF, AC=DF. Dico che questi due triangoli sono eguali.

Dim. Si uniscano le corde AB, BC, CA, DE, EF, FD, le quali saranno tutte respettivamente eguali, e perciò saranno eguali li triangoli rettilinei ABC, DEF; ciò posto si concepisca il triangolo sferico DEF sovraposto al triangolo sferico ABC, in modo che il lato DE combaci col suo eguale AB, allora la corda DE combacerà con la corda AB, e perchè li triangoli rettilinei ABC, DEF sono eguali, la cor-

da BC combacerà con EF, ed AC con DF, per conseguenza li vertici D, E, F delli treangoli del triangolo sferico DEF si confonderanno con li tre vertici A, B, C delli tre angoli del triangolo sferico ABC, e per conseguenza tutte le parti del triangolo sferico DEF combaceranno con le correspondenti parti del triangolo sferico ABC, e perciò esse sono tutte respettivamente eguali. Sicchè. etc.

164. Teor. 3. *Se due triangoli sferici appartenenti alla medesima sfera, o a sfere eguali hanno li tre angoli dell' uno respettivamente eguali alli tre angoli dell' altro, essi sono eguali.*

Rappresentino ABC, DEF due triangoli sferici appartenenti alla medesima sfera, o a due sfere eguali, li quali abbiano li tre angoli A, B, C dell' uno respettivamente eguali alli tre angoli D, E, F dell' altro, dico che essi sono eguali.

Dim. Si concepiscano descritti li due triangoli polari delli triangoli ABC, DEF, saranno gli archi BC, EF supplementi degli archi, che misurano gli angoli A, D, ma A=D, dunque BC=EF, con lo stesso raziocinio si dimostra essere AB=ED, ed AC=DF; e per conseguenza, che li triangoli sferici ABC, DEF hanno li tre lati dell' uno respettivamente eguali alli tre lati dell' altro, e perciò sono eguali. Sicchè. etc.

165. Teor. 4. *Se due triangoli sferici appartenenti alla medesima sfera, o a sfere eguali*

ed hanno due angoli dell'uno rispettivamente eguali a due angoli dell' altro , ed il lato adjacente alli due angoli del primo eguale al lato adjacente alli due angoli del secondo , essi sono eguali.

Rappresentino ABC , DEF due triangoli sferici appartenenti alla medesima sfera, o a sfere eguali , li quali abbiano l' angolo B=E , l' angolo C=F , ed il lato BC adjacente alli due angoli B , C eguale al lato EF adjacente alli due angoli E , F ; dico che essi sono eguali.

Dim. Si concepisca il triangolo ABC sovrapposto al triangolo DEF in modo , che il lato BC combaci col suo eguale EF ; ma per la eguaglianza degli angoli E , B il lato BA deve cadere sopra del lato DE , ed il punto A deve trovarsi sopra di un punto del lato DE, similmente per la eguaglianza degli angoli C, F il lato CA deve cadere sopra di FD, e per conseguenza il punto A deve trovarsi sopra di un punto di FD , quindi dovendo il punto A trovarsi sopra delli lati DE, FD, deve essere sopra del punto D comune alli due lati DE , FD , e perciò li due triangoli ABC , DEF combaciano , e per conseguenza sono eguali. Sicchè etc.

CAP. VII.

Articolo I.

Della grandezza delle aje della sfera, della calotta sferica , e della zona sferica.

166. Lemma. *Se un semipoligono regolare di un numero pari di lati fa una intera rivoluzione intorno al suo diametro , l' aja descritta dal contorno del semipoligono equivale al triangolo fatto dalla periferia iscritta nel poligono e dal diametro di esso.*

(Fig. 75.) Rappresenti ABCDEFG un semipoligono regolare di un numero pari di lati, e si concepisca questo semipoligono fare una intera rivoluzione intorno al suo diametro AG; Dico che l' aja descritta dal semicontorno ABCDEFG equivale al rettangolo fatto da una retta eguale alla periferia iscritta , e dal diametro AG.

Dim. Dimostriamo in primo luogo , che l'aja descritta da AB equivale al rettangolo fatto da una retta eguale alla periferia iscritta nel poligono , e da AL porzione del diametro AG determinata dalla perpendicolare BL calata dal punto B sopra di AG.

Dal centro H si cali sopra di AB la perpendicolare HK , la quale dividerà AB in due parti eguali , e sarà il raggio della periferia iscritta nel poligono , e dal punto K si cali sopra del diametro AG la perpendicolare KP.

Li triangoli ABL,HKP avendo li lati dell'uno perpendicolari alli lati dell' altro sono simili ,

12

e danno la porzione BA : AL : : HK : KP, ma HK : KP : : perif. HK : perif. KP; dunque BA : AL : : perif. HK : perif. KP, e perciò perif. KP×BA=perif. HK×AL, ma perif. KP×BA equivale all' aja convessa del cono retto generato dalla rivoluzione del triangolo rettangolo ABL girando intorno ad AL, dunque anche perif. HK×AL equivale all' aja convessa del medesimo cono, ma HK è il raggio della periferia iscritta nel poligono, dunque l' aja descritta dal lato AB equivale al rettangolo fatto dalla periferia iscritta e dalla porzione AL del diametro AG; col medesimo raziocinio si può dimostrare, che l' aja descritta da GF equivale al rettangolo fatto dalla periferia iscritta e da GO.

Dimostriamo ora, che l' aja descritta da CB equivale al rettangolo fatto dalla periferia iscritta, e dalla porzione LM del diametro AG determinata dalle perpendicolari calate sopra di esso dalli punti B, C.

Dal centro H si cali sopra di CB la perpendicolare HQ, la quale sarà il raggio della periferia iscritta, e dividerà CB in due parti eguali, finalmente dalli punti Q, B si calino QR perpendicolare sopra del diametro AB, e BS perpendicolare sopra di CM.

Per la simiglianza delli triangoli HRQ, BSC abbiamo CB : BS : : HQ : QR; ma HQ : QR : : perif. HQ : perif. QR, e perciò CB : BS : : perif. HQ : perif. QR, e per conseguenza perif. QR×CB=perif. HQ×BS. In oltre il solido generato da CB è un tronco di cono retto, terminato da due cerchi parallelli, quindi la sua aja convessa descritta da CB equivale a perif. QR×CB, dunque anche perif. HQ×BS equivale all' aja convessa del medesimo tronco di cono, ossia all' aja descritta da BC, ma la periferia, che ha per raggio HQ è la periferia iscritta, e BS=LM, dunque l' aja descritta da BC equivale al rettangolo fatto dalla periferia iscritta e dalla porzione del diametro AG ad essa correspondente.

Col medesimo raziocinio si dimostra, che le aje descritte da CD, DE, EF equivalgono alli rettangoli fatti dalla periferia iscritta nel poligono e dalle corrispondenti porzioni del diametro AG; dal che ricaviamo, che la intera aja descritta dal contorno del semipoligono ABCDEFG equivale al rettangolo fatto dalla periferia iscritta, e dalla somma di tutte le parti del diametro, o sia dall' intero diametro AG. Sicchà etc.

167. Teor. 1. *L' aja di una sfera equivale al rettangolo fatto dalla periferia del cerchio massimo e dal diametro.*

(Fig. 76.) Rappresanti ABC un semicerchio, dico che l' aja della sfera generata dalla rivoluzione del semicerchio ABC equivale al rettangolo fatto dalla periferia ABC e dal diametro AC.

Dim. Se si niega, che il rettangolo fatto dalla periferia ABC e dal diametro AC sia eguale all' aja della sfera descritta da ABC, esso equivalerà all' aja di una sfera concentrica maggiore, o minore.

Supponiamo 1. che questo rettangolo equivalga all' aja di una sfera concentrica minore di quella, che ha per diametro AC, per esempio sia equivalente all' aja della sfera, che ha per diametru DF.

Alla semiperiferia DLF si circoscriva il semipoligono regolare GHKLMNO di un numero pari di lati, e che li suoi lati non incontrino la semiperiferia ABC, e supponiamo che questo semipoligono faccia una rivoluzione intorno al suo diametro DF, l' aja descritta dal semicontorno GHKLMNO equivalerà al rettangolo fatto dalla periferia DLF ad esso iscritta, e dal diametro GO; ma il rettangolo fatto dalla periferia DLF, e da GO è minore del rettangolo fatto dalla periferia ABC, e da AC, il quale si è supposto essere equivalente all' aja della sfera descritta da DEF, dunque l' aja descritta dal semiperimetro GHKLMNO è minore dell' aja della sfera descritta da DLF, il che è assurdo, dunque anche è assurdo, che il rettangolo fatto dalla periferia ABC e da AC sia equivalente all' aja di una sfera minore di quella descritta dal semicerchio ABC.

Supponiamo 2. che il medesimo rettangolo fatto dalla periferia ABC e dal diametro AC, sia equivalente all' aja di una sfera concentrica maggiore, per esempio all' aja della sfera, che ha per diametro G'O'.

Si iscriva nella semiperiferia G'L'O' il semipoligono regolare G'H'K'L'M'N'O' il quale abbia un numero pari di lati, e che non incontri con li suoi lati la periferia ABC, e supponiamo che questo semipoligono faccia una intera rivoluzione intorno a G'O', esso descriverà un solido, del quale l'aja convessa equivalerà al rettangolo fatto dalla periferia in esso iscritta e dal diametro G'O', e questo rettangolo è maggiore del rettangolo fatto dalla periferia ABC, e da AC, ma il rettangolo fatto dalla periferia ABC e da AC per la supposizione equivale all' aja della sfera descritta dalla semiperiferia G'L'O', dunque anche l' aja convessa del solido descritto dal semipoligono G'H'K'L'M'N'O' è maggiore dell' aja della sfera descritta da G'L'O', il che è assurdo, dunque è anche assurdo, che il rettangolo fatto dalla semiperiferia ABC e da AC sia equivalente all' aja di una sfera maggiore di quella descritta da ABC, ma noi abbiamo dimostrato, che il medesimo rettangolo non può essere equivalente all'aja di una sfera minore di quella descritta da ABC, dunque il rettangolo fatto dalla periferia ABC, e da AC equivale all' aja della sfera descritta da ABC, Sicchè etc.

168. Cor. 1. Un cerchio massimo equivale al rettangolo fatto dalla sua periferia, e dalla quarta parte del suo diametro, dunque la somma di quattro cerchi massimi equivale al rettangolo fatto dalla medesima sua periferia e dal diametro, ma il rettangolo fatto dalla pe-

riferia del cerchio massimo e dal suo diametro equivale all' aja della sfera, dunque l' aja della sfera equivale al quadruplo del suo cerchio massimo.

169. Cor. 2. Il cerchio, che ha per raggio il diametro della sfera sta al cerchio massimo come il quadrato del diametro della sfera al quadrato del raggio, ma il quadrato del diametro è quadruplo del quadrato del raggio, dunque il cerchio, il quale ha per raggio il diametro della sfera è quadruplo del cerchio massimo, ma noi abbiamo dimostrato che l'aja della sfera è anche quadrupla del suo cerchio massimo, dunque l' aja della sfera equivale al cerchio, che ha per raggio il diametro della sfera.

170. Cor. 3. Le aje delle sfere sono equivalenti alli cerchi, li quali hanno per raggi li diametri di esse, ma si fatti cerchi sono tra essi nella ragione delli quadrati de' loro raggi, dunque anche le aje delle sfere sono fra esse nella ragione delli quadrati delli loro diametri, e per conseguenza anche in ragione delli quadrati delli loro raggi.

171. Teor. 2. *L' aja convessa di una calotta sferica non maggiore dell' emisfero equivale al rettangolo fatto dalla periferia del cerchio massimo della sfera, e della sua altezza.*

(Fig. 77.) Rappresenti ABC una semiperiferia di cerchio, o sopra di essa sia preso l' arco AB non maggiore di un quadrante. Supponiamo che la semiperiferia ABC faccia una intera rivoluzione intorno ad AC, in si fatto movimento la semiperiferia ABC descriverà la superficie della sfera, e l' arco AB la superficie convessa di una calotta sferica non maggiore dell' emisfero. Dico che l' aja convessa della calotta descritta dall' arco AB equivale al rettangolo fatto dalla periferia ABC e da AD.

Dim. Se si nieghi che il rettangolo fatto dalla periferia ABC, e dalla altezza AD sia equivalente all' aja convessa della calotta descritta da AB, questo rettangolo equivalerà all' aja convessa di una calotta maggiore, o minore.

Sia 1. Se mai è possibile, questo rettangolo sia equivalente all' aja convessa della calotta descritta dall' arco EF simile all' arco AB ed appartenente alla periferia QFE maggiore di ABC.

Si concepisca nell' arco EF iscritta la porzione EGF del contorno di un poligono regolare di un numero pari di lati iscrittibile nel cerchio AFQ, e che con li suoi lati non incontri la periferia ABC. Dal centro O si abbassi sopra uno delli lati di questo poligono la perpendicolare OK, la quale sarà il raggio del cerchio iscrittibile nel medesimo poligono, dal punto F si cali sopra EQ la perpendicolare FI, e si uniscano le rette EF, AB, OF, OB.

Li triangoli EIF, ADB sono simili, come ancora sono simili li triangoli EOF, AOB, quindi avremo, EF : AB : : EO : OA : : EI : AD : : IF : DB; ma EO>AO, dunque EI>AD. Dippiù per la supposizione OK >OA, dunque il rettangolo fatto dalla circonferenza, che ha per raggio OK e da EI è maggiore del rettangòlo fatto dalla circonferenza ABC e da AD; ma il rettangolo fatto dalla periferia che ha per raggio OK e da EI equivale all'aja convessa del solido che genererebbe GEHF nella sua rivoluzione intorno ad EI, ed il rettangolo fatto dalla periferia ABC e da AD equivale all' aja convessa della calotta descritta da EF; dunque l' aja del solido generato da EGHF è maggiore dell' aja della calotta descritta dall' arco EF, il che è assurdo, dunque è anche assurdo, che il rettangolo fatto dalla circonferenza ABC e da AD equivalga all' aja di una calotta maggiore di quella della calotta descritta dall' arco AB; e generalmente conchiudiamo che il rettangolo fatto dalla periferia del cerchio massimo di una sfera, e dalla altezza di una calotta appartenente alla medesima sfera equivalga all' aja convessa di una calotta maggiore.

Sia 2. Se mai è possibile, il rettangolo fatto dalla periferia EFQ e da EI equivalente all' aja convessa della calotta descritta dall' arco AB simile all' arco EF, ma minore di EF.

Facendo la medesima costruzione, che abbiamo fatta nel caso precedente, avremo il rettangolo fatto dalla periferia, che ha per raggio OK e da EI equivalente all' aja convessa del

solido descritto da EGHF, ma OK < OE; dunque il rettangolo fatto dalla periferia di OK e da EI è minore del rettangolo fatto dalla periferia EFQ e da EI; ma per la supposizione il rettangolo fatto dalla periferia EFQ e da EI equivale all' aja convessa della calotta descritta da AB, dunque l' aja descritta da EGHF è minore dell' aja convessa della calotta descritta da AB, il che è assurdo, dunque è anche assurdo che il rettangolo fatto dalla circonferenza di un circolo massimo e dalla altezza di una calotta equivalga alla aja di una calotta minore di essa, ma si è dimostrato, che lo stesso rettangolo non può essere equivalente all' aja convessa di una calotta maggiore, dunque esso equivale all' aja della medesima calotta. Sicchè ec.

172. Cor. 1. (Fig. 78.) Rappresenti ABF una sfera, il suo centro sia O, ed in essa sieno iscritti li cerchi paralleli AB, CD, EF, delli quali H, G sieno li poli, ed HG l' asse di essi, il quale incontra li cerchi nelli punti P, Q, R.

L' aja della sfera GEF equivale al rettangolo fatto della periferia di un cerchio massimo, e dal diametro GH, l' aja della calotta AGB equivale al rettangolo fatto dalla periferia del cerchio massimo e dalla sua altezza GP, dunque l' aja della calotta restante AHB equivale al rettangolo fatto dalla periferia del cerchio massimo e da HP. Similmente l' aja della calotta AHB equivale al rettangolo fatto dalla periferia del cerchio massimo e da PH, e quella della calotta EHF equivale al rettangolo fatto dalla ciconferenza del cerchio massimo, e da HR; dunque la zona sferica ABFE equivale al rettangolo fatto dalla periferia del cerchio massimo e da PR.

Dunque l'aja della sfera, quella di una calotta qualunque, e quella di una zona sferica sono rispettivamente equivalenti alli rettangoli, che hanno per comune base la periferia del cerchio massimo, e per loro respettive altezze il diametro, la altezza della calotta, e la altezza della zona. Perciò esse sono nella ragione di sì fatti rettangoli, ma sì fatti rettangoli hanno per comune base la periferia del cerchio massimo, e perciò sono fra essi come le loro altezze, dunque l'aja della sfera, quella di una calotta, e quella della zona sono fra loro nella ragione del diametro della sfera, della altezza della calotta, e della altezza della zona.

173. Cor. 2. Abbiamo dimostrato che $HG^2 : AG^2 : : GH : GP$, ma HG^2 sta ad AG^2 come il cerchio, che ha per raggio HG al cerchio che ha per raggio AG, dunque GH : GP : : cerchio GH : ; cerchio AG; ma GH : GP come l'aja della sfera all'aja della calotta AGB; dunque l'aja della sfera sta all'aja della calotta AGB come il cerchio, che ha per raggio GH al cerchio, che ha per raggio AG, ma il cerchio, che ha per raggio GH equivale all'aja della sfera, dunque il cerchio che ha per raggio AG equivale all'aja

della calotta AGB; quindi l'aja di una calotta sferica equivale al cerchio, il quale ha per raggio la retta tirata dal suo vertice ad un punto qualunque della periferia della sua base.

Di più per lo triangolo rettangolo AGP il cerchio, che ha per raggio la ipotenusa AG è maggiore del cerchio, che ha per raggio AP di tanto quanto è il cerchio, che ha per raggio GP, dunque l'aja della calotta, la quale equivale al cerchio, che ha per raggio AG supera la sua base di tanto quanto è il cerchio, che ha per raggio la altezza GP della calotta.

174 Cor. 3. Si è dimostrato, che HG : GA : : GA : GP, e che HP : PA : : PA : PG, quindi avremo $GA^2 = HG \times GP$, e $PA^2 = HP \times PG$, e per conseguenza avremo $GA^2 : PA^2 : : HG \times GP : HP \times GP : : HG : HP$, ma $AG^2 : AP^2 : :$ cerchio AG : cerchio AP, dunque cerchio AG : cerchio AP : : HG . HP; ma il cerchio GA equivale all' aja della calotta ed il cerchio AP è la base della calotta, dunque l'aja della calotta sta alla sua base come il diametro della sfera sta alla altezza della calotta rimanente.

Cor. 4. (Fig. 79.) Rappresentino ABC, EFG due calotte sferiche appartenenti alle due sfere ACD, EGH, delle quali AC, EG sieno le basi, le quali abbiano BD, FH per assi, ed AO, EP per raggi, e si uniscano le rette AB, EF.

Le aje delle calotte ABC, EFG sono

equivalenti alli cerchi, che hanno per raggi le corde AB, EF, quindi esse sono nella ragione delli quadrati di AB, e di EF, ma per la proporzione DB : BA : : BA : BO si ha $BA^2 = DB \times BO$, e per la proporzione HF : FE : : FE ; FP, si ha $FE^2 = HF \times FP$, dunque avremo aja ABC : aja EFG : : $BD \times BO$: $HF \times FP$, e per conseguenza le aje di due calotte sferiche appartenenti a due sfere diverse sono in ragione composta da quella delli diametri delle sfere alle quali esse appartengono, e da quella della delle loro altezze.

175 Cor. 4. Essendo le rette AO, EP perpendicolari alli diametri BD, FH avremo le proporzioni DO : OA : : OA : OB, HP : PE : : PE : PF, ma se le due calotte ABC, EFG sono simili abbiamo AO : OB : : PE : EF; dunque sarà DO : HP : : AO : EP : : OB : PF, e per conseguenza la somma DB degli antecedenti alla somma HF delli conseguenti come OB : PF; ma abbiamo dimostrato, che le aje convesse di due calotte ABC, EFG sono tra esse in ragione composta da quella delli diametri BD, HF, e da quella delle loro altezze BO, EP, dunque quando le calotte sono simili la aje convesse di esse sono fra loro nella ragione delli quadrati delli diametri delle sfere, alle quali esse appartengono, e nella ragione delli quadrati delle loro altezze.

In oltre nelle calotte simili le altezze sono

nella ragione delli raggi delle loro basi, dunque le aje convesse di due calotte simili sono anche della ragione delli quadrati delli raggi delle loro basi, e per conseguenza nella ragione delle basi; dunque le aje convesse di due calotte simili sono fra esse nelle ragione delli quadrati delli diametri delle sfere alle quali appartengono, nella ragione delli quadrati delle loro altezze, nella ragione delli quadrati delli raggi delle basi, e nella ragione delle basi

176. Cor. 5. (Fig. 80.) Rappresenti ABC un semicerchio, del quale AC sia il diametro, e dal centro O sia elevata sopra di AC la perpendicalare OB, per gli punti A, C, B sieno tirate le tangenti AD, CE, ED, le quali si prolunghino fino a tanto, che si incontrino nelli punti D, E, al semicerchio ABC avremo circoscritto il rettangolo CD, Supponiamo, che intorno al diametro AC facciano una intera rivoluzione il semicerchio ABC, ed il rettangolo CD, il semicerchio descriverà una sfera, ed il rettangolo CD descriverà un cilindro retto ad essa circoscritto. L'aja della sfera equivale al rettangolo fatto dalla periferia, che ha per raggio AO, e da AC, e l'aja convessa del cilindro retto descrtto dal rettangolo CD equivale al rettangolo fatto dalla periferia del cerchio descritto da CE, ossia da OB=OA, e da ED=AC, dunque l'aja della sfera equivale all'aja convessa del cilindro retto ad essa circoscritto.

Dippiù se si concepiscano tirati quanti piani si vorranno paralleli alla base del cilindro, le porzioni del cilindro da essi tagliate saranno anche cilindri retti, e le aje convesse di essi saranno equivalenti alli rettangoli fatti dalla periferia del cerchio, che ha per raggio OB, e dalle correspondenti porzioni del diametro AC; ciascuna delle zone sferiche correspondenti equivale ancora al rettangolo fatto dalla periferia del medesimo cerchio, che ha per raggio OB, e dalle porzioni correspondenti di AC; dunque se intorno ad una sfera si circoscrive un cilindro retto, l'aja della sfera equivalerà all'aja convessa del cilindro circoscritto, e se il cilindro e la sfera si tagliano per mezzo di piani paralleli alla base del cilindro, l'aja convessa di ciascuna delle porzioni del cilindro sarà equivalente all'aja della zona sferica correspondente.

Articolo II.

Della grandezza delle aje delli triangoli sferici, e delli fusi sferici.

177. Teor. I. *L'aja convessa di un emisfero sta all'aja del triangolo sferico, che ha per base un arco della base dello emisfero, e per vertice il polo della base dell'emisfero come la periferia della base dell'emisfero all'arco, che serve di base al triangolo sferico.*

(Fig. 81.) Rappresenti CAE un emisfero, ed A il suo vertice, e sia CAD un triangolo sferico, che abbia per base l'arco CD della periferia delle base CDEF dell'emisfero, ed A sia il suo vertice. Dico, che l'aja convessa dell'emisfero sta all'aja del triangolo sferico CAD come la periferia CDEF sta all'arco CD.

Due casi possono darsi. I. Che le periferia CDEF e l'arco CD sieno commensurabili 2°. Che sieno incommensurabili.

Dim. I. Essendo la periferia CDEF e la base CD commensurabili, esse avranno una particella, che le divide esattamente, si concepiscano dal punto A a tutti li punti nelli quali l'arco e la periferia vengono divisi, passare degli archi di cerchi massimi, questi divideranno il triangolo sferico, e l'aja convessa dell'emisfero in triangoli sferici tutti eguali, poichè essi hanno i lati rispettivamente eguali, e supponendo che la misura comune dell'arco, e della periferia si contenga n volte nell'arco, ed m volte nella periferia, è evidente che sarà la periferia all'arco come m sta ad n, e che l'aja dell'emisfero sarà all'aja del triangolo nella stessa ragioue di $m : n$, quindi conchiudiamo che l'aja dell'emisfero sta all'aja del triangolo CAD come la periferia CDEF all'arco CD. sicchè, etc.

Dim. II. Per dimostrare questo secondo caso si farà uso del medesimo raziocinio, che abbiamo continuamente adoperato in simili casi. Sicchè. etc.

178. Cor. I. L'aja convesse dell'emisfero CAE sta all'aja del triangolo sferico CAD come la periferia CDE all'arco CD, osia come CDE×AO : CD×AO; ma l'aja dell'emisfero equivale a periferia CDE×AO, dunque l'aja del triangolo sferico CAD equivale a CD×AO, dal che conchiudiamo, che l'aja del triangolo sferico, nel quale due lati sono quadrati equivale al rettangolo fatto dal terzo lato, e dal raggio della sfera.

179. Cor. 2. Concepiamo nella sfera ACBE tirate le due semiperiferie ACB, ADB di cerchi massimi, l'aja di ciascuno delli triangoli sferici CAD, CBD aquivale al rettangolo fatto dell'arco CD, e dal raggio della sfera, dunque l'aja del fuso sferico ACBD equivale al rettangolo fatto dal diametro della sfera, e dall'arco CD di cerchio massimo, il quale è l'arco misuratore dell'angolo dietro compreso tra li semicerchi massimi alle periferia delli quali appartengono gli cerchi, che racchiudono lo spigolo.

180. Cor. 3. Si concepisca nella sfera descritto un cerchio minore GI parallelo al cerchio massimo CE, di questo cerchio minore AB sarà l'asse, ed A sarà uno delli suoi poli; se sopra della periferia GHI si prendano degli archi eguali, e per gli estremi di essi, e per lo polo A si concepiscano passare degli archi di cerchi massimi, si formeranno così delli triangoli sferici tutti eguali, poichè se si soprapponessero gli uni sopra degli altri

essi combacerebbero, quindi facendo uso del raziocinio da noi adoperato nella proposizione precedente ricaveremo, che il triangolo sferico GAH sta all'aja convessa della calotta sferica GAI come l'arco GH che termina il triangolo sta alla periferia GHI, ma essendo simili gli archi CD, GH, essi saranno proporzionali alle periferie CDE, GHI, alle quali essi appartengono, e perciò CD : perif. CDE : : GH : perif. GHI, ma noi abbiamo dimostrato, che il triangolo GAH sta all'aja convessa della calotta GAI come l'arco GH sta alla periferia GHI, dunque sarà ancora il triangolo sferico GAH all'aja convessa della calotta GAI come l'arco CD alla periferia CDE, e per conseguenza come l'arco CD×AP alla periferia CDE×AP, ma l'aja convessa della calotta GAI equivale a perif. CDE×AP, dunque l'aja del triangolo sferico GAH equivale a CD×AP.

In oltre il fuso sferico ACBD equivale al rettangolo fatto dall'arco CD e dal diametro AB, ed il triangolo sferico GAH equivale al rettangolo fatto dello stesso arco CD e da AP, dunque il triangolo sferico GBH equivale al rettangolo fatto dall'arco CD e da BP.

Finalmente nella sfera sia tirato il cerchio minore KLM parallelo a CDE, e per conseguenza a GHI. Il triangolo sferico KAL equivale al rettangolo fatto dall'arco CD e da AR, ed il triangolo GAH equivale al rettangolo fatto dal medesimo arco CD e da AP, dunque il quadrilineo sferico KGHL equivale al rettangolo fatto dall' arco CD e da PR.

Da quanto abbiamo detto ricaviamo 1. che un triangolo sferico terminato da tre archi di cerchi massimi due delli quali sieno quadranti, equivale al rettangolo fatto dal terzo lato, e dal raggio. 2. Che il triangolo sferico terminato da due archi di cerchi massimi e da un arco di cerchio minore, il quale abbia per polo il vertice dell' angolo sferico compreso fra li due cerchi massimi alli quali appartengono li suoi lati, equivale al rettangolo fatto dall' arco di cerchio massimo, che misura l'angolo diedro compreso fra li due cerchi massimi, alle periferie delli quali appartengono, e dalla sua altezza. 3. Che un quadrilineo sferico terminato da due archi di cerchi minori paralleli, e da due archi di cerchi massimi, li quali prolungati si incontrano alli poli delli cerchi minori paralleli, equivale al rettangolo fatto dall' arco di cerchio massimo, che misura l'angolo diedro compreso fra li due cerchi massimi, alli quali appartengono li due lati, che terminano il quadrilineo sferico, e dalla porzione dell' asse delli due cerchi minori paralleli compresa fra li medesimi cerchi.

181. Cor. 4. Il triangolo sferico CAD equivale al rettangolo fatto dall' arco CD e dal raggio CO della sfera, ma il settore circolare COD equivale al rettangolo fatto dal medesimo arco CD, e dalla metà del raggio CO, dunque il triangolo sferico CAD equivale al doppio del settore circolare COD, per la medesima ragione il triangolo sferico CBD equivale al doppio del settore circolare COD, dunque il fuso sferico ACBD equivale al quadruplo del settore circolare COD; Dunque il triangolo sferico terminato da tre archi di cerchi massimi, delli quali due sono quadranti è doppio del settore circolare terminato dal terzo lato, ed il fuso sferico equivale al quadruplo dello stesso settore.

182. Teor. 2. *Un triangolo sferico terminato da tre archi di cerchi massimi equivale al residuo, che si ha sottraendo un cerchio massimo dal rettangolo fatto dalla somma delli tre archi di cerchi massimi, che misurano li tre angoli del triangolo, e dal raggio della sfera.*

(Fig. 82.) Rappresenti ABC un triangolo sferico terminato da tre archi di cerchio massimo, dico che questo triangolo equivale al residuo, che si ottiene sottraendo un cerchio massimo dal rettangolo fatto dalla somma delli tre archi di cerchi massimi, che misurano gli angoli A, B, C del triangolo, e dal raggio AO della sfera.

Dim. Si concepiscano compite la sfera, e le periferie CBFE, CAFD, ABDE.

Le due semiperiferie ABD, BDE sono eguali, si tolga da esse la parte comune BD, resterà AB=DE; similmente DCA=CAF, tolta di essi la parte comune CA resterà CD=AF; finalmente ECB=CBF, tolta da essi la parte comune CB, avremo CE=BF, quindi li due triangoli sferici DCE, BFA essendo equilateri sono eguali. In oltre l'aja dell' emisfero, che ha per base ABDE equivale alla somma del fuso sferico ABDCA, e delli due triangoli ACE, ECD; ma il triangolo DCE = BFA, dunque l' aja dell' emisfero, che ha per base ABDE equivale al fuso sferico ABDCA unito alla somma delli triangoli sferici BFA, ACE, ma l' aja dell' emisfero equivale alla somma di due cerchi massimi, dunque la somma del fuso sferico ABDCA, e delli due triangoli sferici BFA, ACE equivale alla somma di due cerchi massimi, a queste due somme eguali si aggiunga il doppio del triangolo sferico ABC; ed avremo la somma di due cerchi massimi, e del doppio del triangolo ABC equivalente alla somma delli tre fusi ABDC, CBFA, BAEC, ma ciascuno di questi fusi equivale al rettangolo fatto dal diametro della sfera, e dall' arco di cerchio massimo misuratore dell' angolo dietro compreso fra li due cerchi alle periferie delli quali appartengono li due cerchi, che lo terminano, dunque la somma del doppio del cerchio massimo, e del doppio del triangolo sferico ABC equivale al rettangolo fatto dal diametro della sfera e dall' arco di cerchio massimo eguale alla somma delli tre archi di cerchi massimi misuratori delli tre angoli diedri compresi tra li semicerchi, alli quali appartengono le semiperiferie, che li racchiudono, per conseguenza la somma di un solo cerchio massimo e di un solo triangolo ABC equivale al rettangolo fatto dal raggio e dal medesimo arco eguale alla somma delli tre archi di cerchi massimi, che misurano li tre angoli del triangolo, da queste quantità eguali si tolga sì dall' una che dall' altra un cerchio massimo, avremo il solo triangolo sferico ABC equivalente al residuo, che si avrà togliendo un cerchio massimo dal rettangolo fatto da un arco di cerchio massimo equivalente alla somma delli tre archi, che misurano li tre angoli del triangolo sferico e dal raggio della sfera. Sicchè etc.

183. Cor. 1. Se si volesse determinare l'aja sferica compresa tra un arco di cerchio massimo ed un arco di cerchio minore, allora dal centro del cerchio minore eleveremo sopra di esso la perpendicolare, la quale prolungheremo fino a tanto, che essa incontri la superficie della sfera, il punto dell' incontro sarà il polo del cerchio minore, se per questo polo e per gli vertici degli angoli formati dalli due archi, che racchiudono l' aja, che vogliamo determinare, si fanno passare due archi di cerchi massimi, noi avremo due triangoli sferici, delli quali uno è racchiuso da un arco di cerchio minore e da due archi di cerchi massimi, che si incontrano ad un polo del cerchio minore, e l' altro è racchiuso da tre archi di cerchi massimi, quindi determineremo ciascheduno di questi triangoli, e sottraendo dall' uno di essi l'altro, avremo il valore dell' aja sferica compresa tra li due ar-

chi dati appartenenti uno ad un cerchio massimo, l' altro ad un cerchio minore.

184. Cor. 2. Volendo determinare l'aja compresa tra due archi di cerchi minori basterà fare passare un arco di cerchio massimo per gli due punti, in cui li due archi si incontrano, e determinare separatamente le due aje comprese tra l' arco di cerchio massimo, e li due archi di cerchi minori, ed avremo il valore dell' aja data facendo la differenza delle due aje determinate.

185. Cor. 3. (Fig. 74.) Se si vuole determinare l' aja di un triangolo sferico ABC terminato da tre archi di cerchi minori, faremo passare un arco di cerchio massimo per gli punti A, B, un altro per gli punti A, C, ed un terzo per gli punti B, C. Ciò fatto si vede chiaramente, che determinando l' aja del triangolo sferico terminato dalli tre archi di cerchi massimi, e ciascuna delle aje terminate da ciascuno degli archi AB, BC, CA di cerchi minori e dagli archi correspondenti di cerchi massimi, si può determinare l'aja del triangolo sferico ABC terminato da tre archi di cerchi minori.

C A P. VIII.

Della grandezza delli volumi delle sfere, delli settori, e degli segmenti sferici.

186. Teor. 1. *Un settore sferico equivale al cono retto, il quale ha per base un cerchio, il quale è eguale all' aja della calotta, che termina il settore, e per altezza il raggio della sfera.*

(Fig. 83.) Rappresenti AOB un settore circolare, il quale facendo la sua rivoluzione intorno ad AO descrive un settore sferico; dico che si fatto settore sferico equivale ad un cono retto, il quale ha la base equivalente alla calotta descritta dall' arco AB e la altezza eguale al raggio AO.

Dim. Se si niega, che il cono, il quale ha la base equivalente alla calotta descritta da AB, e la altezza eguale ad AO sia eguale al settore sferico descritto dal settore circolare AOB, questo cono equivalerà ad un settore sferico maggiore, o minore.

Sia se è possibile questo cono equivalente al settore sferico descritto dal settore circolare COD maggiore del settore circolare AOB, supponiamo che CHID sia una porzione del contorno di un poligono regolare iscritto nell' arco CD, i lati del quale non incontrino l' arco AB. Dal centro O si cali sopra CH la perpendicolare OG, la quale sarà il raggio del cerchio iscrittibile nel poligono CHID, e dalli punti D, B si calino sopra di OC le perpendicolari DE, BF, e si uniscano le corde DC, AB.

Li triangoli isosceli DOC, BOA sono simili, poichè hanno l'angolo comune O, quindi avremo la proporzione CD : AB : : OD : OB, ma per la supposizione OD è maggiore di OB, dunque DC è maggiore di AB. Dippiù li due triangoli rettangoli DEC, BFA sono simili, e perciò l'angolo DCE=BAF, e danno la proporzione DC : BA : : CE : AF; ma DC è maggiore di BA, dunque anche CE è maggiore di AF, ma per la supposizione OG è maggiore di OA, dunque se si costruiscono due coni retti, uno delli quali abbia per base il doppio del cerchio, che ha per raggio OG e per altezza CE, e l'altro abbia per base il doppio del cerchio che ha per raggio OA e per altezza AF, il primo di questi coni sarà maggiore del secondo; ma il cono, che ha per base il doppio del cerchio che ha per raggio OG e per altezza CE equivale al solido generato dal settore poligonale DOC nella sua rivoluzione intorno a CE, dunque il solido generato dal settore poligonale DOC è maggiore del cono che ha per base il doppio del cerchio, che ha per raggio OA, e per altezza AF; Dippiù il doppio del cerchio, che ha per raggio OA equivale al rettangolo fatto da OA e dalla sua periferia, dunque il cono, che ha per base il doppio del cerchio che ha per raggio OA e per altezza AF equivale a $\frac{2}{3}$ del parallelepipedo rettangolo, che

ha per base il rettangolo fatto dalla periferia di AO da AF, e da AO; ma il rettangolo fatto dalla periferia di AO, e da AF equivale alla calotta sferica descritta dall' arco AB, dunque il cono, che ha per base il doppio del cerchio che ha per raggio AO, e per altezza AF equivale alli $\frac{2}{3}$ del parallelepipedo rettangolo, che ha la base equivalente alla calotta, e la altezza eguale ad AO, ma il solido descritto dal settore poligonale COD è maggiore del cono, che ha per base il doppio del cerchio che ha per raggio OA e per altezza AF, dunque il solido descritto dal settore poligonale COD è maggiore del cono, che ha la base equivalente alla calotta descritta dall' arco AB e per altezza OA, ma per la supposizione questo cono equivale al settore sferico descritto dal settore circolare COD, dunque il solido descritto dal settore poligonale COD è maggior del settore sferico descritto dal settore circolare COD, il che è impossibile, dunque è anche impossibile, che il cono che ha per base la calotta sferica, che termina un settore sferico, e per altezza il raggio della sfera, sia equivalente ad un settore sferico maggiore di quello al quale la calotta appartiene.

Dobbiamo ora dimostrare, che il cono, il quale ha la base equivalente alla calotta, che termina un settore sferico, e per altezza il raggio della sfera, a cui il settore appartiene, non può essere equivalente ad un settore sferico minore di quello, che è terminato da si fatta calotta.

Sia se mai è possibile il cono, il quale ha la base equivalente alla calotta descritta dall'arco DC, e la altezza eguale al raggio OC equivalente al settore sferico descritto dal settore circolare BOA minore di COD.

Si costruisca la figura, come nel caso precedente, ed immaginiamo due coni l'uno delli quali abbia per base un cerchio equivalente al doppio del cerchio, che ha per raggio OC, e per altezza CE, e l'altro abbia per base un cerchio doppio di quello che ha per raggio CE e la altezza eguale ad OG, è evidente che il primo di questi coni è maggiore del secondo; ma ragionando come nel caso precedente si dimostrerà, che il cono, il quale ha per base il cerchio equivalente al doppio di quello, che ha per raggio OC e per altezza CE equivale al cono che ha la base equivalente alla calotta descritta dall'arco CD e per altezza OC, e che il cono, che ha per base il cerchio equivalente al doppio del cerchio, che ha per raggio OG e per altezza CE, equivale al solido descritto dalla rivoluzione del settore poligonale DOC, dunque il cono che ha la base equivalente alla calotta descritta dall'arco CD e per altezza OC è maggiore del solido descritto dal settore poligonale DOC, ma per la supposizione il cono, che ha la base equivalente alla calotta descritta da CD, e per altezza OC equivale al

settore sferico descritto dal settore circolare AOB, dunque il settore sferico descritto da AOB è maggiore del solido descritto dal settore poligonale DOC, il che è assurdo, dunque è anche assurdo, che il cono che ha la base equivalente alla calotta, che termina un settore sferico e per altezza il raggio della sfera sia equivalente ad un solido minore del medesimo settore, ma abbiamo dimostrato, che non può equivalere ad un solido maggiore, dunque deve essere al medesimo settore equivalente. Sicchè, etc.

187. Cor. 1. Se il settore circolare AOB diviene eguale ad un quadrante esso descriverà un emisfero, il quale equivalerà al cono, che avrà la base equivalente alla metà dell' aja della sfera, e per altezza il raggio, quindi la sfera intera equivalerà al cono retto il quale ha la base equivalente all' aja intera della sfera, e la altezza eguale al raggio della sfera.

Cor. 2. Essendo qualunque sfera sempre equivalente al cono, che ha la base equivalente alla sua aja, e la altezza eguale al raggio, ne segue che due sfere sono fra esse nella ragione delli coni, che hanno le basi equivalenti alle loro respettive aje, e le altezze eguali agli assi di esse, e perciò esse saranno fra loro nella ragione composta da quelle delle loro aje, e da quella delli loro raggi, ma le aje delle sfere sono come li quadrati delli raggi di esse, dunque le sfere sono fra esse in ragione delli cubi delli loro raggi.

188. Cor. 3. L' aja di una sfera è quadrupla del suo cerchio massimo, dunque una sfera è quadrupla del cono, che ha per base un cerchio massimo, e per altezza il raggio, ed un emisfero è doppio del cono massimo iscrittibile in esso.

189. Cor. 4. La sfera equivale al cono, che ha la base equivalente alla sua aja, e per altezza il raggio. Un settore sferico equivale al cono, che la base equivalente alla calotta, che lo termina, e per altezza il raggio, dunque la sfera, ed un settore ad essa appartenente sono nella ragione di sì fatti coni, ma questi due coni hanno la medesima altezza, e perciò sono nella ragione delle loro basi, dunque una sfera, ed un settore sferico ad essa appartenente sono fra loro come l' aja della sfera all' aja della calotta, che termina il settore, ma l' aja della sfera sta all' aja della calotta, come il diametro alla altezza della calotta, dunque la sfera sta ad un settore ad essa appartenente come il diametro della sfera alla altezza della calotta che termina il settore.

Cor. 5. L' aja della sfera sta all' aja della calotta, che termina un settore ad essa appartenente come il diametro della sfera alla altezza della calotta, dunque $\frac{1}{4}$ dell' aja della sfera, ossia un cerchio massimo sta all' aja della calotta, che termina il settore come $\frac{1}{4}$ del diametro ossia $\frac{1}{2}$ raggio alla altezza della calotta, ossia come il raggio al doppio della altezza della calotta, quindi se si formano due coni retti uno delli quali abbia per base un cerchio massimo e per altezza il doppio della altezza della calotta, l' altro abbia la base equivalente all' aja della calotta, e la altezza eguale al raggio, essi avranno le basi in ragione reciproca delle altezze, e perciò saranno equivalenti, ma il cono retto, che ha la base equivalente all' aja della calotta, e per altezza il raggio equivale al settore sferico terminato da questa calotta, dunque anche il cono retto, che ha per base un cerchio massimo e per altezza il doppio della altezza della calotta equivale al medesimo settore, ma questo cono equivale al cilindro retto che ha la medesima base, e per altezza $\frac{1}{3}$ dell' altezza del cono, dunque il settore sferico equivale al cilindro retto, che ha per base un cerchio massimo e per altezza $\frac{2}{3}$ della altezza della calotta.

190. Cor. 6. Due settori sferici appartenenti ad una medesima sfera sono proporzionali alli coni retti, che hanno per base comune il medesimo cerchio massimo, e per altezze li doppi delle altezze delle respettive calotte, che terminano li settori, ma questi coni sono nella ragione

delle loro altezze, dunque due settori sferici appartenenti ad una medesima sfera sono fra essi nella ragione del doppio delle altezze delle calotte, e perciò anche delle semplici altezze.

Due settori sferici appartenenti a due sfere differenti sono fra loro nella ragione di due coni retti, li quali hanno per loro basi li cerchi massimi delle sfere, alle quali appartengono, e per altezze il doppio delle altezze delle calotte correspondenti, ma questi coni sono in ragione composta da quelle delle loro basi, e da quelle delle loro altezze, dunque due settori sferici appartenenti a due sfere differenti sono in ragione composta da quella delli cerchi massimi delle sfere, alle quali essi appartengono, e da quella del doppio delle altezze delle calotte, dalle quali sono terminati, e per conseguenza in ragione composta da quella delle quadrati delli raggi delle sfere, alle quali appartengono, e da quella delle altezze delle calotte, che li terminano, e se li settori sono simili, nel quale caso le altezze delle calotte sono proporzionali alli raggi delle sfere, essi saranno nelle ragione delli cubi delli raggi delle sfere, alle quali essi appartengono.

191. Teor. 2. *Un segmento sferico equivale ad un cilindro retto, il quale ha per base il cerchio, che ha per raggio la altezza della calotta e per altezza il raggio della sfera diminuito della terza parte della altezza del segmento.*

(Fig. 84.) Rappresenti ABC un segmento sferico appartenente alla sfera ABCE, di cui EB sia il diametro, che passa per lo centro D della base del segmento, e per conseguenza la altezza del segmento sia BD; Dico che il segmento ABC equivale al cilindro retto, il quale ha per base il cerchio, del quale BD è il raggio, e per altezza $OB - \frac{1}{3}BD$.

Dim. Si uniscano le rette AB, AD; Il settore sferico ABCO equivale al cono retto, il quale ha la base equivalente alla calotta ABC, e la altezza eguale ad OB; Ma l'aja della calotta ABC equivale al cerchio, che ha per raggio AB, e per conseguenza alla somma delli cerchi, che hanno per raggi AD, e DB, dunque il settore sferico ABCO equivale alla somma delli coni, che hanno per basi li cerchi, che hanno per raggi AD, DB, e per altezza BO, ma il segmento sferico ABC equivale al settore sferico ABCO diminuito del cono retto AOC, dunque lo stesso segmento sferico ABC equivale alla somma de' coni retti, che hanno per basi li cerchi che hanno per raggi AD, DB, e per altezza OB, diminuito del cono, che ha per base il cerchio che ha per raggio AD, e per altezza OD, e per conseguenza al cono, che ha per base il cerchio, che ha per raggio BD, e per altezza BO unito al cono, che ha per base il cerchio, che ha per raggio AD, e per altezza BD ; ma il cono retto, che ha per base il cerchio, che ha per raggio AD, e per altezza DB equivale al cono, che ha per base il cerchio, che ha per raggio BD e per altezza DE; dunque il segmento sferico ABC equivale alla somma delli coni retti, che hanno per comune base il cerchio, che ha per raggio BD, e per altezze DE, BO, e per conseguenza equivale al cono, che ha per base il cerchio, che ha per raggio BD, e per altezza DE+BO, ma $DE+BO=3DO\times 2DB$, dunque il segmento ABC equivale al cono retto, il quale ha per base il cerchio, il quale ha per raggio BD, e per altezza $3DO+2DB$; ma questo cono equivale al cilindro retto, il quale avendo la medesima base avrebbe per altezza la terza parte della altezza del cono, dunque il segmento sferico ABC equivale al cilindro retto, il quale ha per base il cerchio, che ha per raggio BD, e per altezza $OD + \frac{2}{3}DB$, cioè OB diminuito di $\frac{1}{3}$ DB. Sicchè.

192. Cor. 1. Li segmenti sferici sono equivalenti alli cilindri retti, che hanno per basi li cerchi, li quali hanno per raggi le altezze delli segmenti, e per altezze li raggi delle sfere, alle quali appartengono diminuiti delle terze parti della loro respettive altezze, dunque due segmenti sferici sono fra essi in ragione composta da quella delli cerchi, li quali hanno per raggi le respettive altezze, e da

quella delli raggi delle sfere, alle quali esse appartengono diminuiti della terza parte delle loro altezze respettive, ma li cerchi sono fra loro nella ragione delli quadrati de' loro raggi, dunque due segmenti sferici sono fra loro in ragione composta da quella delli quadrati delle loro altezze, e da quella delli raggi delle sfere, diminuiti delle terze parti delle altezze delli segmenti.

Se li segmenti sferici sono simili, le loro altezze sono proporzionali alli raggi delle sfere, quindi chiamando R, r li raggi delle sfere, A, a le altezze delli segmenti simili,

avremo $R : r :: A : a :: \frac{1}{3}A : \frac{1}{3}a$, e

perciò $R - \frac{1}{3}A : r - \frac{1}{3}a :: \frac{1}{3}A : \frac{1}{3}a$ $:: A : a$, dunque le altezze delli segmenti sferici simili sono nella ragione delli raggi delle sfere diminuiti delle terze parti delle altezze rispettive delli segmenti. Dunque due segmenti sferici simili sono fra essi in ragione composta dalla ragione delli quadrati della loro altezze, e dalla ragione delle medesime altezze; e perciò nella ragione delli cubi delle loro altezze, oppure nella ragione delli cubi delli raggi delle sfere, alle quali essi appartengono.

193. Cor. 2. Abbiamo dimostrato, che un settore sferico equivale al cilindro retto, il qua-

le ha per base il cerchio massimo e per altezza $\frac{2}{3}$ della altezza della calotta, che lo termina, abbiamo dimostrato ancora, che un segmento sferico equivale al cilindro retto, che ha per base il cerchio che ha per raggio la sua altezza e per altezza il raggio della sfera diminuito di $\frac{1}{3}$ della altezza del segmento; Dunque un settore sferico ed un segmento sferico ancorchè appartenenti a due sfere diverse sono fra loro in ragione composta da quella del cerchio massimo della sfera a cui appartiene il settore, al cerchio che ha per raggio la altezza del segmento, e da quella delli $\frac{2}{3}$ della altezza della calotta che termina il settore, al raggio della sfera alla quale appartiene il segmento, diminuito di $\frac{1}{3}$ della altezza del medesimo segmento.

194. Cor. 3. Abbiamo dimostrato I.° Che una sfera equivale al cono, il quale ha per base un cerchio equivalente all' aja della sfera, e per altezza il raggio, ma l' aja della sfera equivale al cerchio, che ha per raggio il diametro della sfera, dunque la sfera equivale al cono, che ha per base il cerchio, che ha

per raggio il diametro della sfera, e per altezza il raggio, e per conseguenza al cilindro retto, il quale ha per base il cerchio, che ha per raggio il diametro della sfera, e per altezza $\frac{1}{3}$ del raggio. II.° Che un settore sferico equivale al cilindro retto, che ha per base il cerchio massimo, e per altezza $\frac{2}{3}$ della altezza della calotta, che lo termina. III.° che un segmento sferico equivale al cilindro retto, il quale ha per base il cerchio che ha per raggio l' altezza della calotta, e per altezza il raggio della sfera diminuito di $\frac{1}{3}$ della altezza del segmento. Dunque una sfera, un settore, ed un segmento sferico sono fra essi nella ragione composta da quelli delli quadrati delli raggi delle base delli cilindri retti alli quali questi solidi equivalgono, e da quella delle altezze delli medesimi cilindri, e perciò una sfera, un settore sferico, ed un segmento sferico sono fra essi in ragione composta da quelle del quadrato del diametro della sfera, del quadrato del raggio di essa, e del quadrato della altezza del segmento, e dalla ragione di $\frac{1}{3}$ del raggio della sfera, delli $\frac{2}{3}$

della altezza della calotta, che termina il settore, e del raggio della sfera diminuito di $\frac{1}{3}$ della altezze del segmento sferico.

C A P. VXI.

Delli rapporti, che hanno fra loro si le aje, che li volumi delle sfere e di alcuni solidi ad esse circoscritti.

195. *Lemma.* Se un piano è tangente ad una sfera, il raggio tirato al punto del contatto è ad esso piano perpendicolare.

(Fig. 82.) Sia il piano LM tangente della sfera nel punto A, al quale punto sia tirato il raggio OA; dico che OA è perpendicolare al piano LM.

Dim. Se si niega, che il raggio OA sia perpendicolare al piano LM, dal centro O si potrà abbassare sopra di esso una perpendicolare, sia OD questa perpendicolare, la quale incontri la superficie della sfera nel punto B. Di tutte le rette, che dal punto O si possono calare sopra del piano LM la perpendicolare è la minima, dunque OD è minore di OA; ma OA=OB, dunque OD è minore di OB, il che è impossibile, dunque è anche impossibile che AO non sia perpendicolare al piano LM. Sicchè ec.

196. Teor. I. *Il volume di qualsivoglia solido terminato da superficie piane, e circoscritto ad una sfera sta al volume della sfera, come l'aja del solido all' aja della sfera.*

Dim. Si concepiscano tirate dal centro della sfera alli vertici di tutti gli angoli del solido delle rette, queste rette divideranno il solido in piramidi, ciascuna delle quali avrà per base uno delli piani, che racchiude il solido, e per altezza il raggio tirato al punto del contratto, e per conseguenza il volume di questo solido equivalerà alla piramide, che ha la base equivalente alla somma di tutti questi piani, e l'altezza eguale al raggio. Di più la sfera equivale alla piramide, la quale ha la base equivalente all'aja della sfera, e per altezza il raggio, dunque il solido circoscritto alla sfera sta alla sfera, come la piramide, la quale ha la base equivalente all' aja del solido circoscritto, e la altezza eguale al raggio, sta alla piramide, che ha la base equivalente all'aja della sfera, e la altezza eguale al raggio, ma queste due piramidi avendo le altezze equali sono nella ragione delle loro basi, dunque il solido circoscritto alla sfera sta alla sfera, come l'aja del solido a quella della sfera. Sicchè.

197. Cor. L'aja della sfera equivale al cerchio, che ha per raggio il diametro di essa, ma l'aja di un cerchio sta al quadrato del suo raggio come 3. 141 : 1, dunque l'aja

della sfera sta al quadrato del suo diametro come 3. 141 : 1, e moltiplicando per 6 li conseguenti di questa proporzione avremo l'aja della sfera al sestuplo del quadrato del suo diametro come 3. 141 : 6, ma il sestuplo del quadrato del diametro della sfera equivale all' aja del cubo circoscritto alla sfera, dunque l'aja della sfera sta all'aja del cubo ad essa circoscritto come 3. 141 : 6, ma abbiamo dimostrato, che il volume della sfera sta al volume del cubo circoscritto come l'aja della sfera all' aja del cubo circoscritto, dunque il volume della sfera sta al volume del cubo ad essa circoscritto come 3. 141 : 6.

198. Teor. 2. *Se ad una sfera è circoscritto un cilindro retto: tanto le aje intere quanto li volumi di questi due solidi sono nella ragione di* 3 : 2.

Dim. 1. L' aja convessa del cilindro retto circoscritto ad una sfera equivale a quella della sfera; ma l'aja della sfera è quadrupla del suo cerchio massimo, dunque l' aia convessa del cilindro retto circoscritto alla sfera equivale a quattro cerchi massimi, e per conseguenza l'aja intera del cilindro equivale a 6 cerchi massimi, dunque l'aja intera del cilindro retto circoscritto ad una sfera sta all' aja della sfera come 6 : 4 ossia come 3 : 2 Sicchè.

Dim. 2. Il volume del cilindro retto circoscritto alla sfera è triplo del volume del cono retto, che ha la medesima base, e la medesima altezza, e per conseguenza è sestu-

plo del cono che ha per base un cerchio massimo e per altezza il raggio della sfera, ma si è dimostrato che il volume della sfera è quadruplo del volume del medesimo cono, dunque il volume del cilindro retto circoscritto ad una sfera sta al volume della sfera come 6 : 4 ossia come 3 : 2. Sicchè ec.

199. Cor. Dunque il cilindro retto circoscritto ad una sfera, la sfera iscritta, ed il cono retto che ha per base un cerchio massimo, e per altezza il diametro della sfera sono fra loro nella ragione delli numeri 3, 2, 1; quindi se dal cilindro retto circoscritto alla sfera se ne toglie la medesima sfera, il volume restante equivalerà al volume del cono retto, il quale ha per base un cerchio massimo e per altezza il diametro della sfera, e se da un cilindro retto circoscritto ad un emisfero se ne toglie il volume dell'emisfero il residuo equivalerà al volume del cono, che ha per base un cerchio massimo, e per altezzo il raggio della sfera, ma questo cono è il cono massimo iscrittibile nell' emisfero, dunque se dal volume del cilindro retto circoscritto ad un emisfero si toglie il volume dell' emisfero il residuo equivale al cono massimo iscrittibile nell'emisfero.

200. Lemma. *Il raggio del cerchio circoscritto ad un triangolo equilatero è doppio del raggio del cerchio iscritto nel medesimo triangolo.*

(Fig. 83.) Nel triangolo equilatero ABC sia iscritto il cerchio DEF, ed al medesimo triangolo sia circoscritto il cerchio ABC, e dal centro comune al D sia tirato il raggio OD il quale sia prolungato fino a tanto, che incontri la circonferenza ABC nel punto G. Dico che OG è doppio di OD.

Dim. Si uniscano le rette AO, AG. Essendo AG il lato del triangolo equilatero iscritto nel cerchio ABC, sarà AG il lato dell' esagono regolare iscrittibile nel medesimo cerchio, dunque AG=AO, e perciò gli angoli AOG, ed AGO opposti a tali lati sono anche eguali. In oltre i triangoli rettangoli ADO, ADG hanno li due angoli ADO, ADG eguali, ed il lato OAD comune sono eguali, dunque OD=DG, e per conseguenza OG è doppio di OD. Sicchè ec.

201. Teor. 3. *Se ad una sfera si circoscrive un cono retto equilatero, l' aja intera di esso sta all' aja della sfera come 9 : 4, e nella medesima ragione di 9 : 4 sono anche i loro volumi.*

(Fig. 84.) Alla sfera DEF sia circoscritto il cono retto equilatero ABC, dico 1. Che l' aja intera del cono ABC sta all' aja della sfera DEF come 9 : 4. Dico 2. Che il volume del cono ABC sta al volume della sfera DEF pure nella ragione di 9 : 4.

Dim. 1. Si tiri l' asse CP del cono, il quale passerà per lo centro O della sfera, e sia ACB il piano che passando per l' asse taglia il cono, sarà ACB un triangolo equilatero, ed il raggio OC del cerchio ad esso circoscritto sarà doppio del raggio OF della sfera.

Il quadrato fatto sopra del lato AC del triangolo equilatero ACB è triplo del quadrato fatto sopra del raggio OC del cerchio ad esso circoscritto, quindi il quadrato fatto sopra $\frac{1}{2}$ AC è triplo del quadrato fatto sopra di OF. Ma il quadrato di AP sta al quadrato di OF come la base AB del cono sta al cerchio massimo della sfera; dunque il cerchio AB equivale al triplo di un cerchio massimo. Dippiù l' aja convessa del cono retto ABC sta alla sua base AB come lo spigolo AC sta al raggio AP della base, dunque essendo AC=2AP, anche l' aja convessa del cono ABC equivalerà al doppio della base AB, ma la base AB equivale a 3 cerchi massimi della sfera iscritta, dunque l' aja convessa del cono ACB equivale a sei cerchi massimi, e per conseguenza l' aja intera del cono ACB equivale a nove cerchi massimi, ma l' aja della sfera equivale a quattro cerchi massimi, dunque l' aja intera del cono ABC sta all' aja della sfera ad esso scritta come nove cerchi massimi a quattro cerchi massimi, ossia come 9 : 4. Sicchè ec.

Dim. 2. La base del cono ABC equivale a tre cerchi massimi, dunque il cono ABC equivale alla somma di tre coni retti ciascuno delli quali abbia per base un cerchio massimo, e per altezza CP, dunque il cono ABC equivale alla somma di nove coni retti, li quali hanno per base un cerchio massimo e per altezza il raggio OP della sfera iscritta, ma il volume della sfera equivale al volume della somma di quattro coni ciascuno delli quali abbia per base un cerchio massimo, e per altezza il raggio, dunque il cono ABC sta alla sfera ad esso iscritta come 9 : 4. Sicchè ec.

202. Cor. 1. Abbiamo dimostrato, che l'aja intera del cono equilatero circoscritto alla sfera equivale alla somma di nove circoli massimi, che l'aja convessa del cilindro retto alla medesima sfera circoscritto equivale alla semma di quattro cerchi massimi, e che l'aja intera del medesimo cilindro equivale a sei cerchi massimi. Dippiù abbiamo ancora dimostrato, che il volume del cono equilatero circoscritto alla sfera equivale alla somma delli volumi di nove coni retti ciascuno de' quali abbia per base un cerchio massimo e per altezza il raggio, che il volume della sfera equivale alla somma delli volumi di quattro delli medesimi coni, ed il volume del cilindro retto circoscritto equivale alla somma delli volumi di sei delli medesimi coni, quindi conchiudiamo, che tanto li volumi, quanto le aje del cono equilatero circoscritto alla sfera, della sfera iscritta, e del cilindro circoscritto sono nella ragione delli numeri 9, 4, 6, e che le aje, ed i volumi del cono equilatero, e del cilindro retto circoscritti ad una sfera sono nella ragione di 9 : 4 ossia di 3 : 2.

203. Cor. 2. La base del cono equilatero circoscritto ad una sfera equivale alla somma di tre cerchi massimi, e la base del cilindro retto circoscritto è un cerchio massimo, dunque la base del cono equilatero circoscritto alla sfera sta alla somma delli due cerchi, che terminano il cilindro retto circoscritto come 3 : 2; finalmente la altezza CP del cono ABC equivale a tre raggi della sfera, e la altezza PF del cilindro equivale a due raggi, dunque la altezza del cono equilatero circoscritto sta alla altezza del cilindro retto circoscritto alla sfera anche nelle ragioni di 3 : 2.

204. Cor. 3. Finalmente l'aja convessa del cono retto ABC equivale a sei cerchi massimi, e l'aja convessa del cilindro retto circoscritto equivale alla somma di quattro cerchi massimi, dunque se ad una sfera si circoscrivono un cono equilatero ed un cilindro retto, l'aja convessa del cono sta all' aja convessa del cilindro come 6 : 4 ossia come 3 : 2.

Fine della Geometria Solida.

TAV. I.

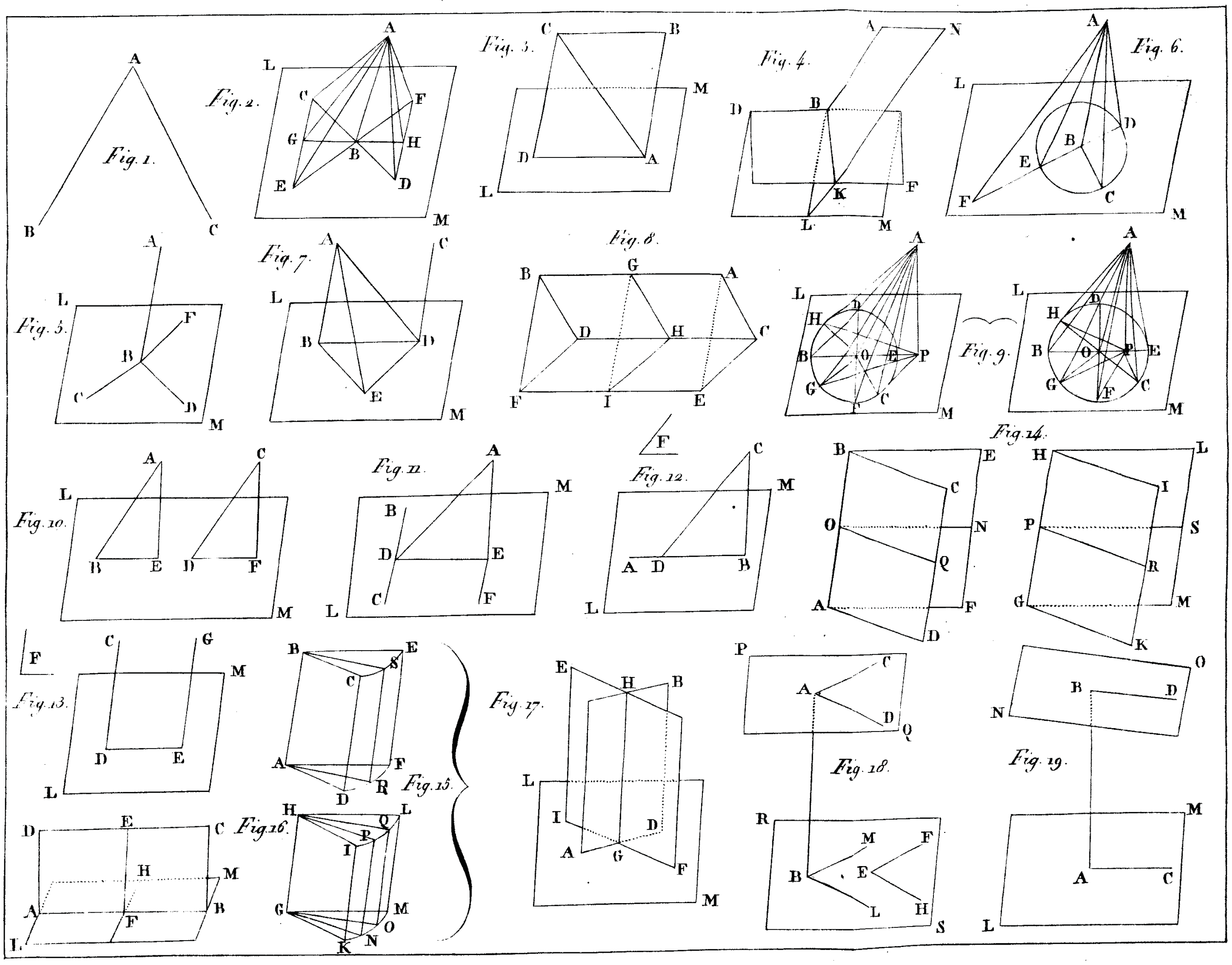


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.

TAV. II.

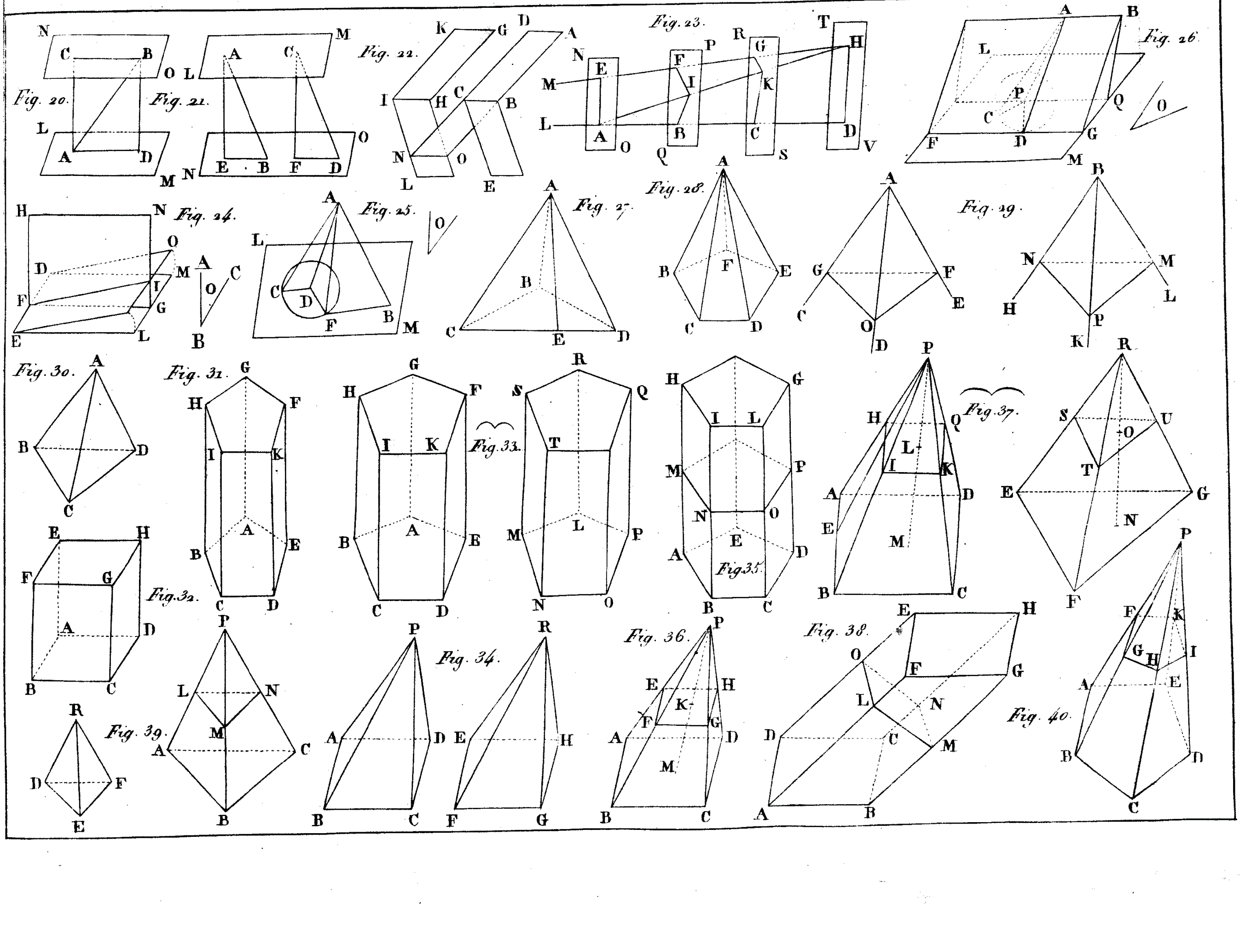
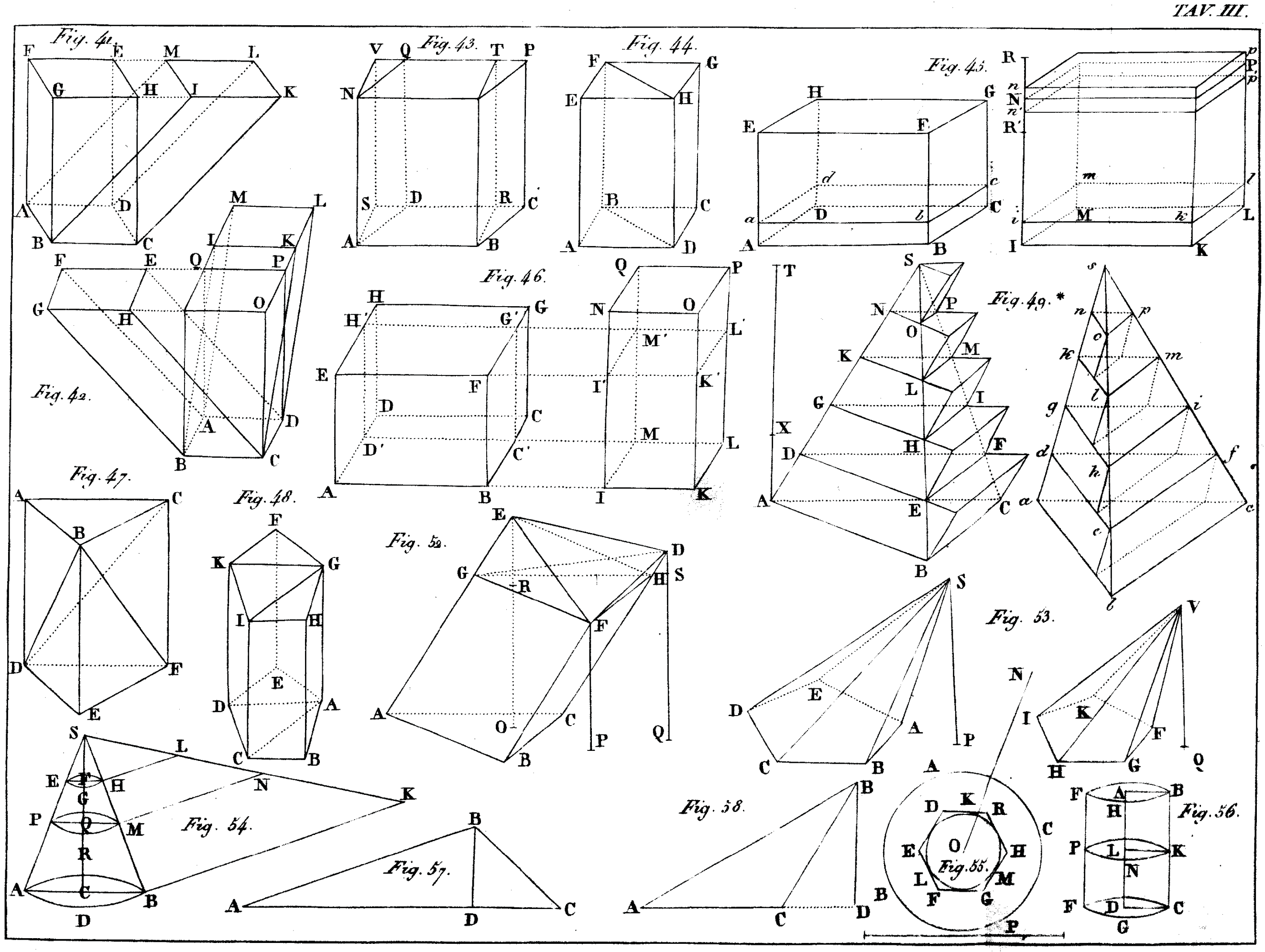


Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.

TAV. III.



TAV. IV.