Prof. Lavaley

ELEMENTI

DI

GEOMETRIA

DI

F. CORRIDI

PROFESSORE NELLA I. E R. UNIVERSITÀ DI PISA

FIRENZE

PRESSO GUGLIELMO PIATTI

1836.

Qualunque scrittore che si fa guida agli studiosi d'una scienza, mosso forse da certo sentimento di timida verecondia a giustificare l'ardito proposito, suol discorrere le cagioni che lo trassero a divulgare per le stampe i proprj insegnamenti. Simile costumanza consiglia me pure a far palese come chiamato da vero amore di logica precisione a dilucidare gli Elementi della Geometria, venni poco a poco nella fiducia che i miei tentativi avesser fruttato opera nè priva di novità nè difficile ai principianti, la quale potesse loro tornare gradita e utile ad un tempo. Avvalorava tal fiducia il voto di alcuni miei amici, buoni ed operosi cultori delle matematiche,

i quali fatto esame del disegno dell'opera non meno che de' suoi particolari mi animarono d'offerirla senz' altro alle scuole. Ora però che a tanto mi avanzo reputo convenevole fare aperto il mio divisamento, ed accennare per quali novità d'ordine, e di principj questi miei Elementi differiscano da quanti m'avvenne prenderne a esame.

Innanzi a tutto io fui d'avviso che in nove sezioni necessariamente si dovessero partire gli Elementi della Geometria; perocchè dovendo per consuetudine oggimai inveterata esser loro materia la linea retta, le superficie da essa conterminate, il circolo, il piano, i corpi solidi ai quali è superficie, infine i tre corpi rotondi, sei divisioni apertamente ne venivano. Ma riflettendo che le superficie facevano luogo a due speculazioni d'indole differentissima, l'una su le ragioni di equivalenza, l'altra su la misura, la quale poi si risolve nelle proporzioni delle figure, e che i solidi oltre la misura, e l'equivalenza addimandavano eziandio l'esame delle ragioni di simmetria, perciò nove sezioni o libri risultarono, i quali sono appunto quelli che il lettore nell' indice riscontrerà.

In questi nove libri si troveranno gli Elementi veri e proprj della Geometria, liberi da ogni minimo calcolo, e quali debbono essere, a mio avviso, per servire d'introduzione a ogni maniera di studj, non che a promuovere lo sviluppo delle facoltà intellettuali.

Coloro però che destinati a più larghi studj di Matematica non potranno ignorare alcuni rilevanti teoremi su i quadrilateri, e sul circolo omessi ne' libri suddetti, nè la dottrina geometrica de' massimi e minimi, nè il trattato de' triangoli e poligoni sferici, come quello pure dei poliedri regolari, si varranno dell'appendice dove a siffatte particolarità, e ad altre eziandio si è dato pieno sviluppamento. Queste però suppongono nello studioso alcuna istruzione ne' rudimenti del calcolo.

Ma oltre ai nove libri, e a quelle parti dell'appendice di che facevamo parola, tre serie di problemi completano il piano prefissomi. La prima posta a seguito del libro quarto, ultimo della Geometria piana, offre alcune applicazioni della linea retta, e del circolo alle più semplici operazioni da farsi pel mezzo del compasso, e della riga. La seconda posta a seguito del libro nono può aversi qual supplemento alla *Teoria dei piani perpendicolari, e paralleli:* in essa esponendo succintamente le *proprietà delle projezioni* si fa

cenno del modo di rappresentare su la carta le varie posizioni del piano, non che quelle della linea retta comunque situata nello spazio, ponendo per tal maniera i principj della *Geometria descrittiva.* Valgano le poche cose che ne ho toccate ad invogliare per tempo dello studio di questa bella parte della Geometria i giovani, cui è caro far fruttare le Matematiche a profitto delle arti. Finalmente i problemi della terza serie posti a principio dell'appendice si offrono agli studiosi nell' oggetto di far loro più efficacemente sentire l'importanza dei teoremi, ammaestrandoli ad un tempo nel *metodo di ricerca;* la cui cognizione, che solo per via di esempio si acquista, è rilevante abbastanza perchè non venga negletta siccome si vede nella più parte dei libri di Geometria elementare. Per servire a tal metodo il ragionamento della soluzione di ogni problema fu diviso in due parti denominandole *Analisi*, e *Sintesi.* La prima parte, cioè l'*Analisi*, suppone il problema risoluto, e per quella virtù di raziocinj di cui sarebbe malagevole indicare il magistero s'insinua nel fondo della quistione, fa chiara la mutua dipendenza di tutte le parti della figura ipotetica, e accortamente svolgendone le proprietà perviene a ritrovarne una che ne inchiude la regola della costruzione. La seconda, cioè la *Sintesi*, muovendo da questa regola prescrive le operazioni da farsi per costruire di fatto la figura medesima; dipoi con forma di ragionamento inverso all'analisi, prova per qual modo tal costruzione soddisfaccia alle condizioni del problema. Ma come questi problemi io propongo solo ad esercizio dei principianti, perciò dell'*Analisi* o della *Sintesi* ho accennato semplicemente i punti principali, e talora ho perfino interamente soppresso l'una o l'altra in considerazione, che i principianti stessi a meglio comprendere il metodo d'invenzione si faranno di buon grado a distendere su quella mia traccia tutte le particolarità del ragionamento.

Tanto, e non più della divisione della materia. Rispetto al metodo seguito nell'esporla, mi attenni a quello che meglio sembrò condurre alla chiarezza. Perciò posi le proposizioni nell'ordine della loro più semplice derivazione per guisa connettendole, che manifesta apparisse la correlazione di ogni teorema col suo antecedente.

Volli ritenere certe forme del metodo degli antichi geometri reputandole caratteristiche della Geometria, e veramente annesse al rigore delle dimostrazioni. Non per questo il mio metodo è

riuscito sintetico: perocchè, tacendo del resto, avvertirò quanto alle definizioni essermi scostato affatto da Euclide che le poneva in capo a ciascun libro, collocandole invece a' luoghi opportuni, e facendo loro strada negli *scolj*, con rendere manifeste le figure da prendersi in esame innanzi d'imporre loro un nome.

Vengo ad alcune particolarità delle *Teorie*. Nel primo libro si troveranno le definizioni del *piano*, e della *linea retta*, che ho sostituite alle usate fin qui per meglio servire al rigore delle mie dimostrazioni, e perchè mi è sembrato che contribuiscano a rendere assai più agevole la *teoria* della linea retta: oltre di chè esse concordano alquanto col significato volgare di quelle voci, e non peccano del vizio delle comuni loro definizioni; ad evitare il quale farebbe mestieri dimostrare, innanzi a tutto, la possibile esistenza d'una superficie cui possa combaciare una linea retta comunque posta, e descrivere la figura della linea rappresentante la più breve distanza fra due punti.

Alla definizione della linea retta consegue quella dell'angolo, essa pure assai diversa dalla nozione ordinaria, e più vicina all'idea che se ne ha volgarmente.

Per servire a quella chiarezza che parmi avere nel resto raggiunto, ho allontanato dalle nozioni primitive l'idea delle *dimensioni* riservandola a miglior luogo, quando cioè essa spontaneamente derivava dal misuramento dei corpi.

Proponendomi poi di non subordinare la scienza dell' estensione alla scienza de' numeri, e per giovare eziandio a coloro che bene stimano doversi nello studio delle Matematiche prender le mosse dalla Geometria, non presupposta nello studioso la cognizione dell' Aritmetica, mi son fatto carico di esporre le proprietà delle proporzioni con modi puramente geometrici, nulla attingendo per altro dai ragionamenti di che gli antichi geometri si valevano, i quali a dir vero sarebbero riusciti soverchiamente gravi. Io mi confido che niuno avrà per superflua questa cura, se ponga mente alla incommensurabilità in che talora si trovano le quantità continue, per cui non sempre ci è dato sostituir numeri alle linee in proporzione; nè basta il caso nel quale i quattro termini d' una proporzione possono divenire numerici per inferirne che sempre tali termini potranno considerarsi come numeri, mentre nel caso della incommensurabilità non v'ha modo di calcolo che valga a somministrarli. Nè però si ha diritto di

attribuire alle proporzioni delle linee le proprietà pertinenti alle proporzioni de' numeri, sul solo fondamento delle prove aritmetiche. Queste ragioni mi hanno indotto a svolgere tutta la *teoria* delle proporzioni, muovendola dalla primitiva nozione del rapporto di due quantità geometriche, che mi sono studiato di esporre con ogni possibile diligenza; ed ho fede che l'opera non sia tornata vana, perchè da questa nozione è discesa l' altra dell' uguaglianza dei rapporti commensurabili o incommensurabili, di cui senz' altro principio mi sono giovato ad evitare in tutte le dimostrazioni concernenti all'incommensurabilità quell' arido criterio della *riduzione all' assurdo*.

Quanto ai solidi non molte cose noterò, abbenchè molti sieno i cangiamenti introdotti, sempre nell' intendimento di giovare come meglio per me potevasi alla chiarezza. Avrei voluto nel sesto libro, senza toglier nulla alla teoria dei poliedri uguali e simmetrici ivi esposta, ridurre a minor numero le proposizioni; perocchè manifestamente i teoremi VII e XV sono inclusi nel teorema XXV, ed i teoremi VIII e XVI lo sono nel teorema XXVI. Pure a maggiore intelligenza delle dimostrazioni più generali ho stimato riuscir profittevoli alcune delle speciali che meglio manifestavano lo stato della figura. Taluno avrà per inutile questa sovrabbondanza di teoremi che di nulla avvantaggiano la teoria, ed io pure la riputava tale; ma l'esperienza mi ha convinto che siffatta prolissità non riusciva inutile nè discara ai principianti.

Il libro IX si aggira su i tre corpi rotondi; in esso le proposizioni attinenti alle superficie ed ai volumi loro vengono dimostrate pel così detto *principio de' limiti*, il quale (forse più pel modo del suo uso nelle dimostrazioni della geometria elementare che per la sua indole) da alcuni valenti geometri fu ritenuto come non confacente al rigore del ragionamento; ma avendolo posto sotto l'enunciato che *due quantità si debbono avere per uguali quando sono contenute fra due medesimi limiti, che possono per loro natura differire d' una quantità piccola quanto vuolsi*, si avrà luogo di conoscere come i ragionamenti che ne dipendono non potrebbero per alcun altro criterio di dimostrazione riuscire più convincenti nè più semplici.

Bastino queste poche avvertenze a fare aperto il mio disegno. Lungi poi dal volere con questo mostrare irreverenza a quei geometri insigni che non sdegnando piegare la mente alle cose elemen-

tari promossero grandemente la scienza, e procurarono a loro stessi durevole celebrità, dirò che a tutta ragione le scuole fanno plauso agli Elementi che al bene di esse dettarono, e specialmente a quelli del celebre Signor Legendre che mi sono tenuto a onore di seguitare nelle mie pubbliche lezioni, e da cui ora mi diparto (non senza tema di errare), solo per servire al desiderio di educare gli studiosi a più facili speculazioni non che a più accurato rigore di ragionamento.

Chiudo col fare manifesti i sensi d' animo grato verso il Signor Dottor Fabio Andreini, cui piacque con caldo amore, e rara intelligenza curare l' edizione del presente libro.

SPIEGAZIONE

DI ALCUNI TERMINI E DEI SEGNI.

Il metodo con che la Geometria si suole esporre consiste principalmente nel formare di tutte le verità dalle quali questa scienza risulta, altrettante proposizioni cui si danno i nomi di assioma, teorema, lemma, corollario, secondo la loro specie.

L'*assioma* è una verità che per divenire evidente non richiede altra spiegazione, che quella dei vocaboli con cui si enuncia.

La Geometria si vale degli assiomi seguenti:

1.° Il tutto è maggiore della sua parte.

2.° Il tutto è uguale alla somma delle parti nelle quali è stato diviso.

3.° Due quantità uguali ad una terza sono uguali fra loro.

4.° Se a due quantità uguali si aggiungono o si detraggono quantità uguali, ne risultano somme o residui uguali.

5.° Se a quantità disuguali si aggiungono o si detraggono quantità uguali, la somma o il residuo proveniente dalla quantità maggiore, sarà maggiore della somma o del residuo proveniente dalla quantità minore.

Il *teorema* è una proposizione la quale diviene evidente per mezzo d'un ragionamento, che appellasi *dimostrazione*.

Il *lemma* è una proposizione appositamente premessa ad un teorema per facilitarne la dimostrazione.

Il *corollario* è una proposizione che consegue immediatamente ad un'altra già dimostrata. I corollari si pongono perciò di seguito alle proposizioni da cui derivano.

Col titolo di *problema* distinguesi poi ogni quesito, il quale abbia per oggetto la determinazione di una o più cose incognite per mezzo di una o più cose cognite, le quali diconsi *dati* del problema.

La spiegazione del significato d'un vocabolo, o l'indicazione della cosa o dell'idea che vuolsi con esso significare appellasi *definizione*.

Sotto il nome di *scolio* si comprende qualunque osservazione sopra una o più proposizioni diretta a dimostrare il loro legame, le loro applicazioni, la loro generalità, ovvero la loro restrizione. Talvolta lo scolio servirà di preparazione alle dimostrazioni dei teoremi ad esso susseguenti; talvolta sarà diretto a legittimare o a dichiarare viemmeglio un qualche principio.

All'oggetto di abbreviare il discorso faremo uso dei segni qui appresso:

1.° Il segno $=$ il quale si pronunzia *uguale* indicherà l'uguaglianza tra due quantità; così $A = B$ esprimerà che le quantità A e B sono uguali.

2.° Il segno $>$ indicherà la disuguaglianza; così essendo A maggiore di B, scriveremo $A > B$, e leggeremo A *maggiore* di B; ovvero scriveremo $B < A$ leggendovi allora B *minore* di A.

3.° Il segno $+$ il quale si pronunzia *più*, indicherà l'addizione; laonde $A + B$ rappresenterà la somma di A e B.

4.° Il segno $-$ che si pronunzia *meno*, indicherà la sottrazione; $A - B$ esprimerà la differenza di A e B, ovvero l'eccesso di A sopra B.

5.° Il segno $\times$ o il punto . indicherà la moltiplicazione; $A \times B$, ovvero $A \,.\, B$ rappresenterà il prodotto di A per B.

6.° I due punti esprimeranno la divisione; $A : B$ esprimerà il quoziente di A diviso per B; lo stesso quoziente potrà pure rappresentarsi così $\frac{A}{B}$.

ELFMENTI
DI
GEOMETRIA.

LIBRO PRIMO

LA LINEA RETTA.

NOZIONI PRELIMINARI.

1. L' *estensione* è quella proprietà dei corpi per cui appare che essi sieno formati di molte parti unite insieme senza sensibile interruzione.

2. I termini o *limiti* della estensione propria d'un corpo sono le sue *facce*, le quali ne costituiscono la *superficie*.

3. Questi limiti determinano la *forma* del corpo.

4. L' impressione poi che la forma d' un corpo produce sull' organo della vista appellasi *figura;* il qual vocabolo si attribuisce perciò anche all' immagine, o rappresentazione di qualsiasi oggetto.

5. Il *luogo* occupato da un corpo può dirsi che sia un vuoto avente la sua stessa forma, e differente da esso per la sola ragione che un tal vuoto è penetrabile mentre il corpo non l' è. Or poichè tutti i corpi occupano un luogo c' immaginiamo che essi sieno collocati in un vuoto indefinito, il quale viene denominato *spazio.*

6. La superficie d' un corpo separa dal rimanente dello spazio quella porzione che da esso è occupata Laonde se vorremo concepire un corpo, o lo spazio che occupa, diviso

in due parti, ci figureremo la separazione delle medesime come rappresentata da una superficie: la quale non formerà parte del corpo, ma servirà di limite comune alle due parti in che esso si suppone diviso.

7. I limiti o termini d' una superficie si chiamano *linee.* Così dovendo immaginare una superficie divisa in due parti ci figureremo la loro separazione come rappresentata da una linea: la quale non formerà parte della superficie; servirà solò di comune limite alle due parti in che essa si suppone divisa.

8. I limiti d'una linea ovvero le sue estremità si chiamano *punti.* Perciò la separazione di due linee contigue, o di due parti d' una stessa linea verrà rappresentata da un punto: il quale non sarà parte di tal linea; servirà solo di limite comune alle due parti nelle quali si suppone divisa.

9. Adunque poichè ogni linea può esser divisa in due parti, e ciascuna di esse può esser suddivisa in altre due, e così di seguito, ne sarà dato di supporre situati sopra una stessa linea quanti punti si vogliono. Nello stesso modo potremo immaginare quante linee si vogliono giacenti sopra una stessa superficie, e quante superfici si vogliono dentro uno stesso corpo.

10. Una linea considerata relativamente alla grandezza sua prende il nome di *lunghezza.* Così tra le due voci *lunghezza* e *linea* è da notare questa differenza, che la prima va unita all' idea della quantità di estensione, l' altra a quella soltanto della sua figura; lo che meglio si scorgerà in appresso.

11. Si può por mente ad un punto prescindendo dalla linea su cui è situato; alla figura ed alla lunghezza d' una linea senza pensare alla superficie che la contenga; alla figura ed alla grandezza d' una superficie senza considerare il corpo cui appartiene, in quella guisa che si può por mente alla forma ed alla grandezza d' un corpo prescindendo dalla sua impenetrabilità.

12. Tali astrazioni sono la prima base della *Geometria*, la quale è scienza che *considera l' estensione rispetto alla figura ed alla grandezza.* È proprio di questa scienza il

considerare i punti indipendentemente dalle linee, le linee indipendentemente dalle superfici, e le superfici indipendentemente dai corpi.

13. E qui è da avvertire che questo vocabolo *corpo* o *solido*, viene talora preso dalla Geometria in un concetto ben differente dal concetto volgare; perocchè la Geometria non dovendo considerare nei corpi che la figura e la grandezza, attribuisce eziandio il nome di *corpo geometrico* o *solido geometrico* ad uno spazio comunque limitato, e penetrabile o vuoto.

14. Epperciò l'uguaglianza ossia la perfetta identità di due corpi quanto alla loro estensione si dimostra geometricamente mediante la *sovrapposizione*, ponendo cioè in evidenza che i due corpi ove fossero convenientemente posti uno dentro l'altro coinciderebbero perfettamente, e non ne formerebbero che uno solo. Anche l'identità di due superfici o di due linee può dimostrarsi per lo stesso principio; che in generale *due figure qualunque sono necessariamente uguali quando coincidono in tutta la loro estensione.*

15. Avvertiremo che il punto, sebbene privo di figura e di grandezza, suole rendersi sensibile per un minutissimo segno (.), chiamato male a proposito punto; stantechè esso è veramente un corpo fisico, avente figura e grandezza. La linea pure si rappresenta mediante la traccia che lascia dietro di se un punto fisico nel muoversi da luogo a luogo. Ma ben si comprende che dalla materialità di tali punti e linee, noi dovremo prescindere considerando il punto come privo di ogni estensione, e la linea estesa solamente in lunghezza.

16. Si chiama *piano* quella superficie di cui una parte qualunque, posta sopra una parte qualunque della superficie che resta, potrà combaciare con questa perfettamente, ove anche la sovrapposizione si faccia rovesciando una delle parti sull'altra.

17. Ogni superficie che non sarà piana in veruna sua parte si chiamerà superficie *curva*.

18. Ogni figura poi descritta sopra un piano dirassi *figura piana*. E tali saranno quelle che considereremo ne' primi quattro libri seguenti.

19. Da ciò risulta che una figura piana trasportata sopra qualunque piano e rovesciata eziandio, combacerà con esso perfettamente.

Fig. 1. 20. Perciò essendo $ABCD$ una linea descritta sopra un piano, potremo immaginare che essa venga rovesciata sul
Fig. 2. piano medesimo dando luogo alla linea $abcd$, la quale sarà identica alla linea primitiva; talmentechè se una di esse si porrà sull'altra in modo che il punto a cada in A, e d in
Fig. 3. D, avremo una figura piana ove ogni punto, per es., B della linea $ABCD$ avrà il suo corrispondente b sull'altra linea $AbcD$. Or supponiamo che la figura giri sopra i punti A, D fissi sul piano. È chiaro che abbassandosi il punto B al di sotto di esso piano il punto b salirà, e viceversa, e lo stesso avverrà di altri due punti corrispondenti C, c ec. Adunque ogni punto come M comune alle due linee $ABCD$, $AbcD$ non potendo ad un tempo portarsi al di sotto ed al di sopra del piano dovrà necessariamente rimanere fisso sul medesimo.

Fig. 4. E siccome può facilmente immaginarsi una linea $ABCD$ che dia luogo ad una figura analoga alla figura 3 con moltissimi punti d'incontro M, N, ec., perciò è pur facile concepire che tra A e D sieno quanti punti si vogliono tali che per il rivolgimento della linea sulla quale si trovano non sieno rimossi dal loro sito.

Tal rivolgimento può farsi sopra due qualunque di questi punti; poichè se la figura 3 girasse sopra i punti A ed M, si dimostrerebbe come sopra, dovere i punti N e D rimanere immobili.

21. Si diranno *punti posti nella medesima direzione* quelli che non cambierebbero di sito quando la linea sulla quale si trovano girasse sopra due qualunque di essi supposti fissi.

Tali sono i punti A, M, N, D.

22. Questa nozione ne porta a considerare i punti posti nella medesima direzione, sempre situati sopra uno stesso piano.

23. Una linea si chiamerà *retta* quando tutti i suoi punti

saranno nella medesima direzione. Così la linea AD ove essa sia linea retta non cambierà di sito allorchè si aggirerà intorno a due punti fissi presi a piacere sopra di essa. Fig. 4.

24. Ogni linea che non sarà retta in veruna sua parte si chiamerà *linea curva.*

25. *Linea convessa o concava* si dirà quella linea curva di cui tre punti presi a piacere non si troveranno giammai nella medesima direzione. Diciamo convessa o concava perocchè l'una si cambia nell'altra cambiando il lato dal quale viene osservata. Tale essendo $ACDB$ è manifesto che essa non potrà essere incontrata da una linea retta in più di due punti. Fig. 5.

26. Frattanto al §. 22 consegue che una linea retta AD come quella di cui tutti i punti sono in direzione uguale si deve considerare situata tutta intera sopra un medesimo piano. Fig. 4.

TEOREMA I.

27. *Da un punto ad un altro non si può condurre che una sola linea retta.*

Sia AB una linea retta condotta dal punto A al punto B. Se un'altra linea retta si potesse condurre da A a B, essa dovrebbe passare per un punto C almeno non situato su la linea AB. Fig. 6.

Si uniscano i punti A, C, B colla linea qualunque ACB; essa costituirà colla retta AB il contorno d'una superficie piana, la quale perciò potrà sempre essere rovesciata, ed in modo che tenuti fissi sul piano i punti A e B essa diventi AcB. Ora è chiaro che la linea AB la quale sappiamo essere retta rimarrà fissa sul piano essendo fisse le sue estremità *; * 23. perciò rovesciandosi la superficie dovrà cambiare di sito la linea ACB, e con essa il suo punto C; dunque tal punto non sarà nella medesima direzione di A e B; dal che si vede essere assurdo che pel punto C possa passare una linea retta avente le medesime estremità della linea AB; dunque dal punto A al punto B non si può condurre che una sola linea retta.

28. *Scolio.* La distanza d'un punto ad un altro è misurata dalla linea retta che congiunge questi due punti; perocchè essa è distinta da ogni altra linea che si può condurre fra i due punti medesimi.

TEOREMA II.

29. *Due linee rette che hanno due punti comuni coincidono l'una coll'altra in tutta la loro estensione, e non formano che una sola e medesima linea retta.*

Fig. 7. Sieno i due punti comuni A e B; è chiaro che da A in B le due rette coincideranno. Or se potessero disgiungersi in seguito una di esse passerebbe per un qualche punto F situato fuori del prolungamento BC dell'altra; frattanto F ed un punto qualunque D di questo prolungamento si troverebbero nella medesima direzione di A e B; cioè sarebbero nella medesima direzione i quattro punti A, B, F, D.

Ciò posto si uniscano i punti B, F, D colla linea qualunque BFD, e si rovesci la superficie BFD tenendo fissi sul piano i punti B, D; non potendo cambiar di sito BD, la quale
* 23. sappiamo essere linea retta *, cambierà di sito la linea BFD e con essa il suo punto F; perlochè è assurdo che F sia nella medesima direzione di B e D; ovvero è assurdo che una delle linee, le quali hanno insieme convenuto per tutta la lunghezza AB, passi per un punto F non situato sul prolungamento dell'altra.

30. *Scolio I.* Prolungare una linea retta AB vuol dire determinare de' nuovi punti nella medesima direzione delle sue estremità A e B; i quali saranno nel piano stesso dove si
* 22. trova la stessa linea AB *.

31. *Scolio II.* Scorgesi frattanto che una linea retta qualunque AB non può avere che un solo e medesimo prolungamento ne'due sensi BD, Ad situato nel piano di AB.

TEOREMA III.

32. *Se una linea retta avrà due punti A e B sopra un piano, combacerà col piano medesimo in tutta la sua estensione.* Fig. 7.

Infatti sul piano di cui si tratta si potrà tirare una linea retta da A in B *, e si potrà avere sopra questo piano anche il suo prolungamento *. Ond' è che un' altra linea retta avente due punti A e B sopra esso piano dovendo coincidere colla retta precedente in tutta la sua estensione * combacerà perfettamente col piano medesimo. * 26. * 31. * 29.

33. *Scolio.* Sieno AB ed AC due linee rette poste sopra un piano aventi una comune estremità A; la lontananza reciproca di queste due linee diminuirà quando AC girando intorno ad A, senza discostarsi dal piano, prenderà la posizione di AD compresa tra AC ed AB, e potrà sempre diminuire finchè AC non coincida con AB. Tal lontananza poi crescerà se AC prenderà la posizione di AE, e potrà sempre crescere finchè AC non coincida col prolungamento Ab di AB. Fig. 8.

34. *Definizione I.* La lontananza reciproca di due linee rette che hanno una comune estremità chiamasi *angolo;* le due rette medesime diconsi *lati* dell' angolo, ed il punto ad esse comune appellasi *vertice* dell' angolo stesso.

35. *Definizione II.* Due angoli si dicono *adiacenti* quando hanno un lato comune, e gli altri due in linea retta per modo che uno sia il prolungamento dell'altro. Tali sono gli angoli BAC, CAb.

36. *Definizione III.* Due angoli si dicono *opposti al vertice*, allorquando i lati dell' uno sono i prolungamenti dei lati dell' altro. Tali sono gli angoli BAC, bAc. Fig. 9.

37. *Scolio I.* Gli angoli sono suscettibili di addizione e di sottrazione. Chiaramente si vede essere l' angolo BAC la somma de' due angoli BAD, DAC; l' angolo BAD la differenza dei due angoli BAC, DAC. Fig. 8.

38. *Scolio II.* Due angoli sono uguali quando ponendo

convenientemente uno di essi sull'altro i loro lati coincidono. Or se i due angoli BAD, CAD saranno uguali ciascuno di essi sarà uguale alla metà dell' angolo BAC, cioè la retta AD dividerà in tal caso l'angolo BAC in due parti uguali.

TEOREMA IV.

Fig. 10. 39. *La somma di due angoli adiacenti è uguale alla somma di altri due angoli adiacenti qualunque.*

Sieno le rette AB, FE respettivamente incontrate dalle rette DC, HG; dico che la somma dei due angoli adiacenti ACD, DCB sarà uguale alla somma degli altri due angoli parimente adiacenti FGH, HGE.

Si prendano le due distanze uguali AC, FG; AC si potrà situare sopra FG in maniera che il punto A cada in F, ed il punto C in G; essendo queste due linee così situate AB
* 29. coinciderà con FE in tutta la sua estensione *. Quindi la CD, o converrà colla GH, o prenderà altra direzione GK. Nel primo caso essendo gli angoli ACD, DCB
* 38. respettivamente uguali agli angoli FGH, HGE * è manifesto che la somma de' due primi sarà uguale alla somma degli altri due. Nel secondo caso essendo $ACD + DCB = FGK + KGE$, e $KGE = KGH + HGE$, sarà $ACD + DCB = FGK + KGH + HGE$ ovvero, poichè $FGK + KGH = FGH$, $ACD + DCB = FGH + HGE$, come dovevasi dimostrare.

TEOREMA V.

Fig. 9. 40. *Gli angoli opposti al vertice sono uguali.*

Sieno Bb, Cc due linee rette che si tagliano in A; gli angoli BAC, bAc saranno adiacenti al medesimo angolo bAC; dunque la somma $bAC + BAC$ sarà uguale
* 39. alla somma $bAC + bAc$ *; or togliendo da tali somme
* Ass. 4. uguali lo stesso angolo bAC *, resterà l'angolo BAC uguale

al suo opposto bAc. Si dimostrerebbe nello stesso modo essere l'angolo bAC uguale al suo opposto BAc.

41. *Scolio*. La somma $bAD + DAB$ di due angoli adiacenti può supporsi divisa in due parti uguali dalla retta AC; in tal caso l'angolo CAB sarà uguale al suo adiacente CAb; ma gli angoli CAb, BAc sono uguali come opposti al vertice, dunque l'angolo CAB è uguale a ciascuno de' suoi angoli adiacenti BAc, CAb. Fig. 11.

42. *Definizione I*. Ogni angolo il quale è uguale al suo adiacente chiamasi angolo *retto*. Ogni angolo minore d'un retto si chiama angolo *acuto*. Ogni angolo maggiore di un retto chiamasi angolo *ottuso*.

43. *Definizione II*. Dicesi che due angoli sono *complementari*, ovvero uno di essi chiamasi *complemento* dell'altro, allorchè la loro somma equivale ad un angolo retto. Dicesi poi che due angoli sono *supplementari* ovvero uno di essi chiamasi *supplemento* dell'altro, allorchè la somma loro equivale a due angoli retti.

44. *Definizione III*. Quando due rette che s'incontrano formano un angolo retto, ciascuna di esse è detta *perpendicolare* rispetto all'altra. Quando poi formano un angolo acuto o ottuso, ciascuna di esse relativamente all'altra è detta *obliqua*.

Adunque la retta AC sarà perpendicolare sopra la retta Bb, se gli angoli adiacenti CAB, CAb saranno uguali, o ambedue retti; AD sarà obliqua sopra Bb se i due angoli adiacenti DAB, DAb non saranno uguali, essendo l'uno minore, l'altro maggiore di un angolo retto.

TEOREMA VI.

45. *Gli angoli retti sono tutti uguali fra loro.*

La somma di due angoli adiacenti è uguale alla somma di altri due angoli adiacenti qualunque; ma essendo uguali le somme sono pure uguali le loro metà, le quali vengono rappresentate da angoli retti *; dunque gli angoli retti sono sempre uguali fra loro. * 42.

46. *Corollario I*. Per un punto A dato sopra una linea
Fig. 11. retta Bb non si può condurre che una sola perpendicolare AC a questa linea. Perocchè se un'altra se ne potesse inalzare AD, l'angolo BAD sarebbe retto come lo è BAC, e la
* Ass. 1. parte sarebbe uguale al tutto, assurdo evidente *.

47. *Corollario II*. La somma di due angoli adiacenti è sempre uguale a due angoli retti, cioè uno è supplemento dell'altro.

48. *Corollario III*. Due angoli che respettivamente rappresentano i complementi o i supplementi di angoli uguali sono uguali.

49. *Corollario IV*. Tutti gli angoli consecutivi BAC,
Fig. 12. CAD, DAb formati da una medesima parte della linea retta Bb, presi insieme equivalgono a due angoli retti. Infatti la loro somma è uguale a quella di due angoli adiacenti BAC, CAb.

50. *Corollario V*. Tutti gli angoli consecutivi BAC, CAD, DAE, EAB formati da più rette che s'incontrano nel medesimo punto A presi insieme equivalgono a quattro angoli retti. Perocchè prolungando BA in b si vede che la loro somma comprende le due somme $BAC + CAD + DAb$, $bAE + EAB$, ciascuna delle quali è uguale a due angoli retti.

TEOREMA VII.

Fig. 13. 51. *Se la somma di due angoli ACD, DCB aventi un lato comune CD equivarrà a due angoli retti, gli altri due lati AC, CB saranno in linea retta.*

Perocchè se CB non fosse il prolungamento di AC lo sarebbe, per esempio, CF; quindi DCF sarebbe il supplemento di ACD; ma è dato che il supplemento di ACD
* 48. sia DCB, dunque avremmo DCB uguale a DCF *, as-
* Ass. 1. surdo evidente *. Dunque CB è il prolungamento di AC; ovvero AC e CB sono in linea retta.

52. *Scolio I*. Tal dimostrazione è del genere di quelle conosciute sotto il nome di dimostrazioni per *assurdo*. La

Geometria si vale di questo modo di raziocinio ogniqualvolta dimostra che una proposizione è vera, per la sola ragione che il non ammetterla ne indurrebbe in una manifesta impossibilità. Così il principio di contradizione è il criterio di verità delle dimostrazioni per assurdo; le quali perciò vengono chiamate dimostrazioni *indirette*. Al contrario si chiamano dimostrazioni *dirette* quelle che hanno per fondamento il principio della identità, il quale consiste nel rendere evidente la derivazione d' una proposizione dagli assiomi, e dalle proposizioni già dimostrate.

53. *Scolio II*. Altra avvertenza è da farsi, cioè che ogni proposizione consta d'una *ipotesi*, e d'una *conclusione*. L'ipotesi è una condizione che si pone in principio, la conclusione è la conseguenza che ne deriva. La condizione richiesta nella precedente proposizione è che la somma dei due angoli ACD, DCB equivalga a due angoli retti, questa ne è l'ipotesi: la conclusione è che i lati AC, CB sono in tal caso disposti in linea retta.

Talvolta la conclusione e l' ipotesi d' una proposizione sono respettivamente l' ipotesi e la conclusione d' un altra; allora questa si chiama proposizione *reciproca*, o *inversa* della prima. La proposizione summentovata ha la sua inversa in quella enunciata al §. 47. Lo che si vedrà chiaramente quando si richiami la definizione degli angoli adiacenti *. * 35.

54. *Scolio III*. Due linee rette poste sopra un piano non determinano alcuna parte di questo piano; perocchè esse o hanno un punto comune, o non ne hanno veruno; in ambedue i casi comprendono una estensione indeterminata. Quando però le due rette come AB, AC hanno un Fig. 14. punto comune A; un'altra retta soltanto che unisca un punto B della prima con un punto C della seconda, basta a determinare una parte ABC del piano su cui sono situate. Questa parte ABC sarà un piano terminato da tre linee rette AB, BC, AC congiunte ne' punti A, B, C, i quali sono i vertici dei tre angoli formati da esse rette.

55. *Definizione I*. Un piano terminato da tre linee rette dicesi *triangolo*.

Le tre rette medesime si chiamano *lati del triangolo*.

Gli angoli poi formati dai lati diconsi *angoli del triangolo*.

56. *Definizione II*. Un triangolo appellasi *equilatero* quando ha i tre lati uguali; *isoscele* se ha due soli lati uguali; *scaleno* quando ha i tre lati disuguali.

57. *Definizione III*. Triangolo *rettangolo* dicesi quello che ha un angolo retto. Il lato opposto all' angolo retto chiamasi *ipotenusa*

58. *Definizione IV*. La perpendicolare CD abbassata da un vertice C del triangolo sopra il lato opposto si chiama *altezza* del triangolo; questo lato poi prende il nome di *base* del triangolo.

Ogni lato del triangolo può esser preso per base; ma ai diversi lati considerati come basi corrispondono generalmente diverse altezze.

Nel triangolo isoscele si suole considerare come base il lato che differisce dagli altri due.

Vertice del triangolo si chiama più particolarmente quello dell'angolo opposto alla base; l'angolo medesimo prende il nome di *angolo al vertice*; gli altri due si chiamano *angoli alla base*.

TEOREMA VIII.

59. *Due triangoli sono uguali quando hanno un angolo uguale compreso fra lati respettivamente uguali.*

Fig. 15. Sia l'angolo A del triangolo ABC uguale all'angolo D del triangolo DEF, il lato $AB = DE$, ed il lato $AC = DF$; dico che questi due triangoli saranno uguali.

Infatti questi due triangoli, ponendo convenientemente l'uno sull'altro, coincideranno perfettamente; poichè se DE si porrà sul suo uguale AB il punto D cadrà in A, ed E in B; ed essendo l'angolo $D = A$ la retta DF converrà con AC; ed il punto F cadrà in C poichè $DF = AC$; dunque il terzo lato FE coinciderà esattamente col terzo lato CB, e i due triangoli ne formeranno un solo; dunque questi
* 14. triangoli sono uguali *.

60. *Scolio I*. In ogni triangolo si considerano sei cose, tre

angoli, e tre lati Nel precedente teorema si suppone che nei due triangoli tre di tali cose sieno respettivamente uguali, cioè $A = D$, $AB = DE$, $AC = DF$, e se ne inferisce l'uguaglianza totale dei due triangoli, e conseguentemente quella delle altre tre cose, cioè $B = E$, $C = F$, $BC = EF$.

61. *Scolio II* Si osservi che gli angoli uguali sono opposti ai lati uguali.

TEOREMA IX.

62. *Due triangoli sono uguali quando hanno un lato uguale comune a due angoli respettivamente uguali.*

Sia il lato $AB = DE$, l'angolo $A = D$, e l'angolo $B = E$; dico che i due triangoli saranno uguali. Fig. 15.

Avendo posto DE sul suo uguale AB in modo che il punto D cada in A, ed il punto E in B, per l'uguaglianza degli angoli A e D, la retta DF converrà con AC, ed il punto F si troverà su qualche punto della retta AC; per l'uguaglianza poi degli angoli B ed E, la retta EF converrà con BC, ed il punto F si troverà su qualche punto della retta BC; dunque il punto F dovendosi trovare ad un tempo su le due linee AC e BC cadrà su la loro unica intersezione C; dunque i due triangoli coincideranno, e saranno perfettamente uguali*. * 14.

63. *Scolio.* Qui pure dall'uguaglianza di tre cose cioè $A = D$, $B = E$, $AB = DE$ si deduce l'uguaglianza totale dei due triangoli, e conseguentemente quelle delle altre tre cose cioè $C = F$, $AC = DF$, $BC = EF$.

TEOREMA X.

64. *Due linee rette AB, CD perpendicolari ad una terza HI non possono incontrarsi ancorchè si prolunghino fino a qualunque distanza.* Fig. 16.

Prolungando AB e CD avremo al di sotto di HI la stessa figura che si ha al di sopra; infatti i prolungamenti

Ab, Cd formeranno colla retta HI angoli retti come formano angoli retti colla stessa HI le due rette date AB,
* 40. CD*; cioè Ab, Cd saranno perpendicolari ad HI, come sono perpendicolari alla stessa HI le due date rette AB, CD; laonde se le linee AB, CD prolungate sufficientemente potessero incontrarsi in un punto M, anche le linee Ab, Cd prolungate s'incontrerebbero in un punto N; quindi da M ad N si potrebbero condurre due linee rette,
* 27. lo che è assurdo*; dunque le linee AB, CD non possono mai incontrarsi ancorchè si prolunghino sino a qualunque distanza.

65. *Definizione.* Due linee rette che non possono incontrarsi benchè prolungate sino a qualunque distanza, e che sono situate nel medesimo piano, diconsi *parallele*.

66. *Corollario I.* Due linee rette perpendicolari ad una terza saranno parallele.

67. *Corollario II.* Da un punto M dato fuori d'una retta non si può condurre che una sola perpendicolare a questa retta.

TEOREMA XI.

Fig. 17. 68. *Se una linea retta CD sarà perpendicolare ad HI, ed un' altra linea retta AB sarà su la medesima HI obliqua queste due linee AB, CD prolungate sufficientemente s' incontreranno.*

1.° Sia l'angolo HAB ottuso. Primieramente si conduca la perpendicolare AF ad HI; la linea AB sarà contenuta fra i lati AF ed AI dell'angolo retto FAI. Quindi sopra AI si prenda $CE = AC$, e s'inalzi la perpendicolare EG; rovesciando la striscia $FACD$ su la striscia $DCEG$ con mantenere il lato comune CD, la CA dovrà
* 44. convenire colla CE poichè l'angolo $DCE = DCA$*, il punto A verrà in E poichè $CE = AC$, e la linea AF
* 45. converrà colla EG essendo l'angolo $FAC = GEC$*; laonde la striscia $FACD$ combacerà in tutta la sua estensione colla striscia $DCEG$.

Ciò posto, poichè su la linea retta indefinita AI si possono prender quante parti si vogliono CE, EK, ec., uguali ad AC senza giungere giammai al suo termine, potremo pure formare quante strisce si vogliono uguali ad $FACD$ senza giungere a coprire con esse l'estensione indefinita compresa fra i lati dell'angolo retto FAI.

D'altra parte aggiungendo l'angolo FAB a se stesso un numero sufficiente di volte portandolo successivamente in BAM, MAN, NAP, ec., perverremo sempre a formare un angolo FAQ maggior dell'angolo retto FAI.

Da ciò segue che l'angolo FAB comprende co' suoi lati una estensione maggiore di quella della striscia $FACD$. Dunque non potendo l'angolo FAB contenersi dentro i limiti della striscia $FACD$, la linea AB prolungata sufficientemente incontrerà CD.

2.° Sia l'angolo HAB acuto; ne risulterà l'angolo Fig. 18.
HAb ottuso; perciò in virtù della dimostrazione precedente le due linee AB, CD s'incontreranno dalla parte dei loro prolungamenti Ab, Cd.

69. *Corollario I.* Ogni linea retta perpendicolare ad una delle parallele sarà perpendicolare anco all'altra.

70. *Corollario II.* Per un punto A non si può condurre Fig. 17.
che una sola parallela AF alla retta CD.

Infatti una sola perpendicolare AC si può abbassare da A sopra CD, ed una sola retta AF si può condurre che faccia con AC un angolo FAC retto.

71. *Corollario III.* Due linee rette AB, CD parallele Fig. 19.
ad una terza EF sono parallele fra loro.

Perocchè GH perpendicolare ad EF sarà pure perpendicolare ad AB, ed a CD*; laonde AB e CD perpen- * 69.
dicolari alla stessa GH saranno parallele fra loro.

72. *Definizione.* Quando due linee rette AB, CD Fig. 20.
vengono incontrate da una *secante* HI, degli otto angoli, che ne risultano, quattro sono *interni* cioè compresi fra le rette AB, CD, e quattro *esterni* cioè formati al di fuori delle rette medesime. Or due di tali angoli, sieno essi esterni o interni, si chiamano *alterni* quando non sono situati dalla medesima parte della secante.

Così gli angoli AEF, EFD si diranno *alterni-interni*; BEH, CFI *alterni-esterni*; AEF, CFI *interni-esterni*. Gli angoli *interni-esterni* si appellano ancora *angoli corrispondenti*.

TEOREMA XII.

73. *Due triangoli rettangoli sono uguali quando hanno l'ipotenusa, ed un angolo respettivamente uguali.*

Fig. 21. Sia l'ipotenusa BC uguale all'ipotenusa EF, e l'angolo $B = E$; dico che i due triangoli ABC, DEF saranno uguali.

Avendo posto EF sopra BC, per l'uguaglianza degli angoli B ed E, il lato ED converrà col lato BA, ed il punto D si troverà su qualche punto di BA; inoltre la
* 67. perpendicolare FD converrà colla perpendicolare CA*, ed il punto D si troverà su qualche punto di CA; dunque il punto E dovendosi trovare ad un tempo sulle due linee BA, CA cadrà sull'unica loro intersezione A; dunque i due triangoli coincideranno, e saranno uguali.

TEOREMA XIII.

Fig. 20. 74. *Due linee parallele AB, CD incontrate da una secante HI formano sempre angoli alterni-interni uguali.*

Se la secante fosse perpendicolare ad una delle paral-
* 69. lele sarebbe perpendicolare anco all'altra*, ed in tal caso gli angoli alterni-interni sarebbero manifestamente uguali. Supponiamo perciò che la secante non faccia angoli retti colle parallele; e dal punto G mezzo di EF si abbassi una perpendicolare GM sopra AB, il suo prolungamento GN sarà pure perpendicolare a CD; talmentechè si avranno due triangoli rettangoli EGM, FGN uguali; infatti le ipotenuse EG, GF sono uguali per costruzione, e gli angoli EGM, FGN sono uguali come opposti al vertice;
* 73. dunque* il terzo angolo MEG del primo triangolo sarà

uguale al terzo angolo NFG del secondo triangolo; dunque gli angoli alterni-interni AEF, EFD saranno uguali.

75. *Corollario.* Quando sia l'angolo $AEF = EFD$ tutti gli angoli acuti AEF, EFD, BEH, CFI saranno uguali fra loro; ed uguali fra loro saranno pure gli angoli ottusi AEH, DFI, BEF, CFE. Di più un angolo ottuso qualunque CFE, e qualunque angolo acuto AEF presi insieme formeranno una somma uguale a due angoli retti. Dunque essendo due linee parallele incontrate da una secante, 1.° gli angoli alterni-interni AEF, EFD, oppure BEF, CFE saranno uguali; 2.° gli angoli alterni-esterni HEB, CFI, oppure AEH, DFI, saranno uguali; 3.° gli angoli interni-esterni o corrispondenti AEF, CFI, oppure AEH, CFE, saranno parimente uguali; 4.° la somma degli angoli interni da una medesima parte, oppure quella degli angoli esterni da una medesima parte equivarrà a due angoli retti.

TEOREMA XIV.

76. *Due linee rette AB, CD che incontrate da una terza HI formano angoli alterni-interni uguali sono parallele.*

Sia l'angolo $AEF = EFD$. Dal punto G mezzo di EF si abbassino le perpendicolari GM, GN l'una sopra AB l'altra sopra CD. Si avranno due triangoli rettangoli EGM, FGN uguali; perocchè le ipotenuse EG, GF sono uguali per costruzione, e gli angoli MEG, NFG sono uguali per ipotesi*; dunque il terzo angolo EGM del primo triangolo sarà uguale al terzo angolo FGN del secondo. Ma la somma degli angoli FGN, EGN è uguale a due angoli retti; perciò anche la somma degli angoli EGM, EGN sarà uguale a due angoli retti, cioè i lati MG, GN saranno in linea retta*. Adunque le linee AB, CD essendo ambedue perpendicolari alla linea retta MN saranno parallele.

* 73.
* 51.

77. *Corollario.* Dall' uguaglianza di due qualunque de-

gli angoli acuti AEF, EFD, BEH, CFI, oppure da quella di due qualunque degli angoli ottusi AEH, DFI, BEF, CFE, o finalmente dalla condizione che la somma di uno degli angoli acuti con uno degli ottusi equivalga a due angoli retti, si potrà sempre dedurre l'uguaglianza dei due angoli alterni-interni AEF, EFD. Dunque due linee rette saranno parallele quando, essendo esse incontrate da una secante, 1.° gli angoli alterni-interni risulteranno uguali, 2.° uguali gli angoli alterni-esterni, 3.° uguali gli angoli interni-esterni, 4.° e la somma di due angoli interni da una medesima parte, o la somma di due angoli esterni da una medesima parte sarà uguale a due angoli retti.

TEOREMA XV.

Fig. 22. 78. *Due angoli BAC, DEF aventi i lati respettivamente paralleli, e diretti nel medesimo senso saranno uguali.*

La retta EF prolungata sufficientemente dovrà incontrare AB in qualche punto G, perchè la parallela ED è l'unica linea che passando pel punto E non incontri AB*; pertanto risulterà l'angolo $BGF = BAC$, poichè GF è parallela ad AC*, e l'angolo $BGF = DEF$ poichè AB è parallela a DH, dunque l'angolo $BAC = DEF$.

* 70.
* 75.

79. *Corollario I.* Prolungando DE sarà $GEH = DEF$, e quindi $GEH = BAC$; così due angoli saranno uguali anche nel caso in cui i loro lati sieno paralleli, e diretti due a due in senso contrario.

80. *Corollario II.* Quando poi si osservi che l'angolo DEG supplemento dell'angolo DEF è pure il supplemento di BAC, concluderemo finalmente che due angoli i quali hanno due lati paralleli e diretti nel medesimo senso, e gli altri due paralleli e diretti in senso contrario sono supplementari.

81. *Scolio.* Segue da ciò che due angoli aventi i lati respettivamente paralleli, o sono fra loro uguali, o supplementari.

TEOREMA XVI.

82. *La somma degli angoli d' un triangolo qualunque è uguale a due angoli retti.*

Prolunghisi il lato AB del triangolo ABC in D, e conducasi la parallela BE ad AC; gli angoli ACB, CBE saranno uguali come alterni-interni rispetto alla secante CB; e gli angoli CAB, EBD saranno uguali come interni-esterni rispetto alla secante AD; perlochè la somma dei tre angoli del triangolo sarà uguale alla somma dei tre angoli ABC, CBE, EBD cioè uguale a due angoli retti. Fig. 23.

83. *Corollario I.* Due rette CA, CB, che s' incontrano in un punto C, formeranno con una terza AB due angoli CAB, e CBA la cui somma sarà minore di due angoli retti. Viceversa due rette che formeranno con una terza AB due angoli tali che la somma loro sia minore di due angoli retti prolungate a sufficienza s' incontreranno: infatti BE è la sola linea che non incontri AC*. * 70.

84. *Corollario II.* In un triangolo rettangolo la somma dei due angoli acuti è uguale ad un retto.

85. *Corollario III.* Se due angoli d' un triangolo sono respettivamente uguali a due angoli d' un altro triangolo, il terzo dell' uno sarà uguale al terzo dell' altro.

86. *Corollario IV.* L'angolo esterno CBD formato dal lato CB, e dal prolungamento del lato AB è uguale alla somma dei due interni opposti BCA, CAB.

87. *Corollario V.* La somma di tutti gli angoli esterni CBD, ACG, BAF è sempre uguale a quattro angoli retti.

TEOREMA XVII.

88. *In un triangolo isoscele gli angoli opposti ai lati uguali sono uguali.*

Fig. 24. Sia il lato $AC = BC$; dico che sarà l'angolo $A = B$.

Conducasi CD in modo che divida l'angolo al vertice C in due parti uguali; i due triangoli ACD, BCD avendo il lato CD comune, il lato $AC = BC$, e l'angolo ACD
* 59. $= DCB$ saranno uguali *; dunque sarà l' angolo $A = B$.

89. *Corollario.* Dall'uguaglianza dei medesimi triangoli si ricava che $AD = DB$, e che l'angolo $ADC = BDC$; dunque questi due angoli son retti; dunque *la linea che divide l' angolo al vertice d' un triangolo isoscele in due parti uguali risulta perpendicolare alla base, e passa pel suo punto di mezzo.*

TEOREMA XVIII.

90. *Se in un triangolo due angoli sono uguali, i lati opposti saranno uguali, ed il triangolo sarà isoscele.*

Abbiasi nel triangolo ABC l'angolo $A = B$; dico che sarà il lato $AC = BC$.

Conducasi la perpendicolare CD sopra AB; i triangoli ACD, BCD avendo il lato CD comune, l'angolo $A = B$ per ipotesi, l' angolo $ADC = BDC$ per costruzione,
* 85. e conseguentemente l' angolo $ACD = DCB$*, saranno
* 62. uguali *; dunque $AC = BC$.

91. *Corollario I.* Dall' uguaglianza dei medesimi triangoli si ricava che $AD = DB$, ed $ACD = BCD$; dunque la *perpendicolare abbassata dal vertice d' un triangolo isoscele sopra la sua base divide l' angolo al vertice in due parti uguali, e passa pel punto di mezzo della base medesima.*

92. *Corollario II.* Un triangolo equilatero sarà nel tempo stesso equiangolo cioè avrà tutti i suoi angoli uguali; e reciprocamente un triangolo equiangolo sarà equilatero.

TEOREMA XIX.

93. *Di due angoli d' un triangolo il maggiore è quello che trovasi opposto ad un lato maggiore, e reciprocamente di due lati d' un triangolo il maggiore è quello che trovasi opposto ad un angolo maggiore.*

1.° Sia $AC > CB$, dico che sarà l'angolo $CBA >$ Fig. 25.
CAB.

Si prenda una parte $CD = CB$, e si conduca BD, nel triangolo isoscele BCD sarà l'angolo $CDB = CBD$; ma considerando il triangolo ABD si ha l' angolo esterno
$CDB = DAB + DBA$*; dunque CDB ovvero CBD * 86.
$> DAB$, ed a più forte ragione $CBA > CAB$.

2.° Sia $CBA > CAB$, dico che sarà $AC > CB$. Infatti non potrebbe AC essere uguale a CB nè minore di CB; ammenochè non fosse l'angolo CBA uguale a CAB, oppure minore di CAB, lo che è contro l' ipotesi; dunque sarà $AC > CB$.

TEOREMA XX.

94. *In ogni triangolo un lato qualunque è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.*

1.° Prolunghisi il lato AB del triangolo ABC d' una Fig. 26.
quantità $BD = BC$, e conducasi CD; avremo il triangolo CBD isoscele e l' angolo $BCD = BDC$, e conseguentemente l' angolo $ACD > ADC$; dunque nel triangolo ACD il lato AC opposto all' angolo ADC
sarà minore del lato AD opposto all'angolo ACD*, ovvero * 93.
$AC < AB + BC$.

2.° Per la stessa ragione sarà $AB < AC + BC$; cosicchè supponendo $AB > BC$, e togliendo da ambe le
parti BC*, ne dedurremo $AC > AB - BC$. * Ass. 5.

95. *Scolio.* Potremmo aggiungere la condizione $BC <$

$AB + AC$ alle due precedenti; ma dessa è superflua tostochè colla seconda si pone l' ipotesi $AB > BC$; dunque tre rette AB, BC, AC potranno essere i tre lati d' un triangolo quando una di esse sia minore della somma delle altre due, e maggiore della loro differenza.

TEOREMA XXI.

Fig. 27. 96. *Se da un punto A situato fuori d' una retta B C si conducono sopra questa retta la perpendicolare A P, e differenti oblique A B, A C, A D;* 1.° *la perpendicolare A P sarà più corta d'ogni obliqua A C;* 2.° *le due oblique A C, A D i cui piedi C e D, si discostano ugualmente da una parte e dall' altra dal piede P della perpendicolare saranno uguali;* 3.° *di due oblique qualunque A D ed A B, o A C ed A B quella, che più si allontana dal piede della perpendicolare sarà la più lunga.*

1.° Nel triangolo APC essendo l' angolo P retto, l' angolo C sarà acuto; perlochè avremo $C < P$, e quindi
* 93. $AP < AC$*.

2.° Supponendo $PC = PD$ i due triangoli APC, APD i quali hanno inoltre il lato AP comune, e gli angoli in P uguali come retti, saranno uguali; dunque AC
* 59. $= AD$*.

3.° Nel triangolo ADP l'angolo ADP è acuto; perciò nel triangolo ADB l'angolo ADB sarà ottuso, e l' angolo ABD acuto; dunque $ADB > ABD$, e conseguentemente $AB > AD$, ovvero $AB > AC$.

97. *Corollario.* Da un medesimo punto non si possono condurre sopra una linea retta che due rette uguali, le quali saranno equidistanti dalla perpendicolare abbassata da quel punto su la retta stessa. Una terza retta sarebbe necessariamente più o meno distante dalla perpendicolare delle due precedenti, e perciò sarebbe più o meno lunga di esse.

98. *Scolio.* Dovendo la distanza d' un punto ad una retta essere distinta per una sua proprietà da tutte quelle che si

possono condurre da esso punto su la medesima retta, è naturale che tal distanza venga determinata dalla perpendicolare abbassata dal punto dato sopra la retta stessa.

TEOREMA XXII.

99. *Se pel punto C mezzo della retta AB si conduce una perpendicolare DE a questa retta; 1.° ogni punto di essa perpendicolare sarà ugualmente distante dalle due estremità di AB; 2.° ogni punto situato fuori della perpendicolare sarà più prossimo a quella estremità di AB che si trova dalla medesima parte di tal punto.* Fig. 28.

1.° Sia D un punto della perpendicolare; le distanze DA, DB saranno rispetto ad AB due oblique ugualmente distanti dalla perpendicolare; dunque saranno uguali*. * 96.

2.° Sia F un punto situato fuori della perpendicolare DE dalla parte della estremità B; le distanze FB, FA saranno due oblique disugualmente distanti dalla perpendicolare FG abbassata da F sopra AB; e poichè $GB < GA$ sarà $FB < FA$.

100. *Corollario I.* Ogni punto equidistante dalle estremità d'una retta appartiene alla perpendicolare inalzata nel mezzo di questa retta; lo che si esprime dicendo che la perpendicolare inalzata nel mezzo d'una retta è il *luogo geometrico* di tutti i punti ugualmente distanti dalle sue estremità.

101. *Corollario II.* Poichè due punti bastano a determinare la posizione d'una linea retta segue che essendo D ed E due punti respettivamente equidistanti da altri due punti A e B, la retta DE che unisce i due primi risulterà perpendicolare alla retta AB che unisce gli altri due, e la dividerà in due parti uguali.

TEOREMA XXIII.

102. *Essendo due lati d'un triangolo uguali ai due lati d'un altro triangolo, e l'angolo compreso dai primi maggiore dell'angolo compreso dagli altri due, il terzo lato del primo triangolo sarà maggiore del terzo lato del secondo.*

Fig. 29. Supponiamo che i due triangoli ABC, BCD abbiano il lato comune BC, il lato $AB = BD$, l'angolo $ABC > DBC$; dico che sarà $AC > DC$. Conducasi DA, e la retta BE in modo che divida l'angolo DBA in due parti uguali; avremo il triangolo ABD isoscele, e la retta
* 89. BE perpendicolare sul mezzo di AD*. Ora essendo $ABC > DBC$, l'angolo ABE, semisomma degli angoli ABC, DBC, sarà minore di ABC, perlochè la perpendicolare BE sarà compresa fra BA e BC, dunque i punti D, C si troveranno dalla medesima parte della perpendicolare,
* 99. per cui avremo $CA > DC$*.

103. *Scolio.* Reciprocamente essendo due lati AB, BC del triangolo ABC, uguali ai due lati DB, BC del triangolo DBC, ed il terzo lato AC del primo triangolo maggiore del terzo lato DC del secondo, l'angolo ABC del primo triangolo sarà maggiore dell'angolo DBC del secondo.

Perocchè essendo $CA > DC$ i punti D e C saranno dalla medesima parte della perpendicolare BE; ma l'angolo $DBE = ABE$; dunque $ABC > DBC$.

TEOREMA XXIV.

104. *Due triangoli sono uguali quando hanno i tre lati respettivamente uguali.*

Fig. 15. Sia il lato $AB = DE$, $AC = DF$, $BC = EF$; dico che avremo l'angolo $A = D$, $B = E$, $C = F$.

Infatti se l'angolo A fosse maggiore dell'angolo D, siccome i lati di questi angoli sono respettivamente uguali, il lato BC opposto ad A sarebbe maggiore del lato EF opposto a D*; e se l'angolo A fosse minore di D, il lato BC sarebbe minore di EF; ma $BC = EF$ dunque l'angolo A non può esser maggiore nè minore dell'angolo D, cioè $A = D$. Dimostrasi nello stesso modo che $B = E$, e $C = F$. * 102.

TEOREMA XXV.

105. *Due triangoli sono uguali quando hanno due lati respettivamente uguali, ed un angolo uguale opposto al maggiore di questi lati.*

Sia il lato $CA = FD$, il lato $CB = FE$, l'angolo $CAB = FDE$, e $CB > CA$, ovvero $FE > FD$; dico che i due triangoli saranno uguali, cioè sarà il lato $AB = DE$, l'angolo $ACB = DFE$, l'angolo $ABC = DEF$. Fig. 30.

Essendo $FE > FD$ necessariamente FE sarà obliqua sopra DE, e conducendo l'obliqua $Fe = FE$, la FD dovrà esser compresa fra FE ed Fe, senza di che FD non potrebbe esser minore di FE. Ciò posto pongasi AC sopra DF; stante l'uguaglianza degli angoli CAB, FDE il lato AB converrà con DE; inoltre CB dovrà coincidere con FE non potendo coincidere con Fe la quale è fuori dell'angolo FDE, nè con altra obliqua la quale sarebbe maggiore o minore di FE; dunque il triangolo ABC coincide col triangolo DEF; dunque questi due triangoli sono uguali.

TEOREMA XXVI.

106. *Due triangoli rettangoli sono uguali quando hanno l'ipotenusa ed un lato respettivamente uguali.*

Sia l'ipotenusa BC uguale all'ipotenusa EF, ed il lato $CA = FD$; i due triangoli ABC, DEF saranno uguali. Fig. 31.

Infatti quando si osservi essere gli angoli opposti alle ipotenuse BC, EF uguali come retti, e le ipotenuse medesime maggiori dei lati CA, FD*, apparirà che questo teorema è un caso particolare del teorema precedente.
* 96.

TEOREMA XXVII.

Fig. 31. 107. *Se la retta AD dividerà in due parti uguali l'angolo BAC; 1.° le perpendicolari abbassate da un punto qualunque della AD sopra i lati dell'angolo medesimo saranno uguali; 2.° delle due perpendicolari abbassate sopra i lati da un punto posto fuori di AD la maggiore sarà quella che taglierà AD.*

1.° Sia D un punto qualunque della retta AD; si abbassino sopra AB, ed AC le perpendicolari DB, DC; i due triangoli rettangoli ABD, ACD avendo l'ipotenusa AD comune, l'angolo $BAD = CAD$ per ipotesi, saranno uguali*; dunque avremo $DB = DC$.
* 73.

2.° Sia E un punto non situato su la retta AD; si abbassino sopra AB ed AC le perpendicolari EF, EG e supponiamo che AD sia tagliata da EG. Immaginiamo condotta Af per modo che risulti l'angolo $EAf = EAF$, e si abbassi la perpendicolare Ef sopra Af; questa perpendicolare non potrà confondersi con EH, poichè essendo retto l'angolo AGH, l'angolo AHG, ed il suo uguale EHf sarà acuto, ed EH sarà obliqua sopra Af; dunque avremo $EH > Ef$, ed a più forte ragione $EG > Ef$; ma poichè AE divide in due parti uguali l'angolo FAf, per la precedente dimostrazione avremo $Ef = EF$, e quindi $EG > EF$.

108. *Corollario.* Poichè le perpendicolari che abbiamo condotte misurano le distanze del punto donde si partono
* 98. dai lati dell'angolo*, concluderemo che tutti i punti ugualmente distanti dai lati d'un angolo si trovano su la retta da cui è diviso in due parti uguali; lo che si esprime con dire che tal retta è il *luogo geometrico* di tutti i punti equidistanti dai lati dell'angolo medesimo.

TEOREMA XXVIII.

109. *In ogni triangolo ABC le rette che dividono gli angoli in due parti uguali s' incontrano in un medesimo punto ugualmente distante dai lati di esso triangolo.* Fig. 32.

Sieno AD, BE le rette che dividono respettivamente in due parti uguali gli angoli CAB, CBA; esse dovranno incontrarsi in un punto O dentro al triangolo. Si abbassino dal punto O le perpendicolari OF, OG, OH su i lati AB, BC, AC; poichè O è un punto di AD sarà $OF = OH$*; * 107.
e poichè O è pure un punto di BE sarà $OF = OG$; e quindi $OH = OG$. Dunque la retta CI che dividerà in due parti uguali l' angolo ACB, su la quale sono tutti i punti equidistanti da CA, e CB, necessariamente passerà pel punto O. Dunque le tre rette AD, BE, CI, che dividono respettivamente in parti uguali gli angoli CAB, CBA, ACB del triangolo s' incontrano nel medesimo punto O ugualmente distante dai lati del triangolo medesimo.

110. *Scolio.* Il punto O è l' unico punto equidistante dai lati del triangolo ABC; infatti se ne esistesse un altro questo non potrebbe trovarsi fuori della linea AO senza essere disugualmente distante dai lati AB, AC; per la stessa ragione esso non potrebbe esser fuori della linea BO; dunque sarebbe nel tempo stesso su le due linee AO, BO; ora queste due linee non possono avere altro punto comune che quello della loro unica intersezione; dunque non v' ha che un solo punto equidistante dai tre lati d' un triangolo.

TEOREMA XXIX.

111. *In ogni triangolo ABC le perpendicolari inalzate sopra i mezzi dei lati s' incontrano in un medesimo punto ugualmente distante dai vertici di esso triangolo.* Fig. 33.

Sieno D ed E i mezzi dei lati AB, BC; s' inalzino le perpendicolari DG ed EH su i medesimi, e si conduca

DE. Essendo retti gli angoli GDB, HEB, gli angoli GDE, HED saranno acuti; cosicchè le perpendicolari DG ed EH dovranno incontrarsi in un punto O. Ciò posto. poichè tutti i punti di DG debbono essere equidistanti
* 99. da A e B*, sarà $OA = OB$; parimente, poichè tutti i punti di EH debbono essere equidistanti da B e C, sarà $OC = OB$; laonde avremo pure $OA = OC$; epperciò la perpendicolare FI inalzata sul mezzo del lato AC, su la quale si trovano tutti i punti equidistanti da A e C passerà necessariamente pel punto O. Adunque le tre perpendicolari DG, EH, FI inalzate su i mezzi dei lati del triangolo ABC s' incontrano nel medesimo punto O ugualmente distante dai vertici del triangolo medesimo.

112. *Scolio.* Il punto O è l' unico punto equidistante dai tre vertici del triangolo ABC; infatti se un altro ne esistesse questo non potrebbe essere fuori della linea DG, poichè allora sarebbe disugualmente distante da A e B; non potrebbe neppure trovarsi fuori della linea EH per la stessa ragione; dunque esso si troverebbe a un tempo su le due linee DG, EH; ma queste linee non hanno altro punto comune che quello della loro unica intersezione O; dunque non v' ha che un solo punto equidistante dai tre vertici d' un triangolo.

TEOREMA XXX.

Fig. 34. 113. *Se il triangolo ABC sarà rettangolo ambedue le perpendicolari inalzate su i mezzi dei lati AC, BC dell' angolo retto, passeranno pel punto di mezzo dell' ipotenusa.*

Si conduca la perpendicolare FO sul mezzo F del lato AC; poichè l' angolo A è acuto tal perpendicolare incontrerà l' ipotenusa in un qualche punto O, e sarà $AO = CO$, e l' angolo $ACO = CAO$; ma poichè in un triangolo rettangolo la somma de' due angoli acuti è uguale
* 84. ad un angolo retto*, sarà pure l'angolo $BCO = CBO$, e
* 90. conseguentemente $CO = BO$*; dunque la perpendicolare

EH inalzata sul mezzo E del lato CB dovrà passare per lo stesso punto O mezzo dell'ipotenusa.

114. *Corollario.* Di qui risulta che *in ogni triangolo rettangolo il mezzo della ipotenusa è ugualmente distante dai tre vertici.*

115. *Scolio.* La reciproca di questa proposizione è ugualmente vera cioè *un triangolo ABC sarà rettangolo quando il punto di mezzo O d'un suo lato si troverà ugualmente distante dai tre vertici, e questo lato sarà l'ipotenusa.* Infatti posto $AO = CO$, e $BO = CO$, si ha l'angolo $CAO = ACO$, e l'angolo $CBO = OCB$, donde consegue $CAO + CBO = ACB$; così ACB dovrà essere un angolo retto.

TEOREMA XXXI.

116. *Due parallele AB, CD intercette fra altre due parallele AC, BD sono uguali.* Fig. 35.

Conducasi la retta CB; i triangoli ABC, BCD avranno il lato CB comune, gli angoli ABC, DCB uguali come alterni-interni rispetto alle parallele AB, CD, e gli angoli ACB, CBD uguali come alterni-interni rispetto alle parallele AC, BD; dunque questi triangoli saranno uguali; per cui avremo $AB = CD$, $AC = BD$.

117. *Corollario I.* Le perpendicolari abbassate da due punti qualunque della retta CD sopra la sua parallela AB Fig. 36. saranno parallele fra loro, e quindi uguali; or queste perpendicolari misurano le distanze di due punti qualunque della CD dalla AB; dunque *due parallele sono ugualmente distanti in tutta la loro estensione.*

118. *Scolio.* È manifesto che $ABCD$ è una porzione del piano ove sono situate le parallele terminata dalle quattro linee rette AB, BD, DC, CA.

119. *Definizione I.* Un piano terminato da linee rette chiamasi *poligono.* Queste linee o *lati* formano il contorno o *perimetro* del poligono. Se i lati sono uguali il poligono dicesi *equilatero;* se sono uguali gli angoli dicesi *equiangolo.*

Il poligono di tre lati è quello che abbiamo chiamato *triangolo;* il poligono di quattro lati chiamasi *quadrilatero;* quello di cinque chiamasi *pentagono;* quello di sei *esagono*, ec.

120. *Definizione II.* Poligono *regolare* dicesi quello il quale è equilatero ed equiangolo.

121. *Definizione III.* Due poligoni che hanno i loro lati respettivamente uguali, e disposti nel medesimo ordine diconsi *equilateri fra loro.* Essi diconsi poi *equiangoli fra loro* se hanno gli angoli respettivamente uguali, e disposti nel medesimo ordine.

Fig. 35. 122. *Definizione IV.* Il quadrilatero che ha i lati opposti paralleli, dicesi *parallelogrammo.* Tale è il quadrilatero $ABCD$.

Fig. 36. Il parallelogrammo che ha gli angoli retti prende il nome di *rettangolo.*

L'*altezza* d'un parallelogrammo è la perpendicolare che misura la distanza di due lati opposti, ciascuno de' quali si chiamerà *base* del parallelogrammo. Nel rettangolo l'altezza è uguale al lato contiguo alla base.

123. *Definizione V.* Il quadrilatero poi di cui due soli lati sono paralleli si chiama *trapezio.*

L'*altezza* d'un trapezio è la perpendicolare che misura la distanza de'due lati paralleli, i quali si chiamano *basi* del trapezio.

124. *Definizione VI.* Si chiama *diagonale* la linea retta che in un poligono qualunque unisce i vertici di due angoli non contigui al medesimo lato.

TEOREMA XXXII.

125. *I lati opposti d'un parallelogrammo sono uguali come pure gli angoli opposti.*

Sia $ABCD$ un parallelogrammo; essendo AB parallela a CD, ed AC parallela a BD, AB e CD saranno Fig. 35. due parallele intercette fra le due parallele AC e BD; dunque sarà $AB = CD$ ed $AC = BD$*. * 116.

Gli angoli opposti poi, per es., CAB, CDB saranno uguali, avendo essi i lati respettivamente paralleli e diretti ambedue in sensi contrari *. Per la stessa ragione sarà l' angolo $ACD = ABD$. * 79.

126. *Corollario*. Se fosse $AB = AC$, i quattro lati del parallelogrammo sarebbero uguali.

127. *Definizione I*. Il parallelogrammo i cui lati sono uguali chiamasi *losanga*.

128. *Definizione II*. Il rettangolo i cui lati sono uguali dicesi *quadrato*. Il quadrato adunque è un quadrilatero il quale ha i lati uguali, e gli angoli retti.

TEOREMA XXXIII.

129. *Se in un quadrilatero* $ABDC$ *i lati opposti o gli angoli opposti saranno due a due uguali, la figura sarà un parallelogrammo.*

1.° Sia $AB = CD$, $AC = BD$; conducendo la diagonale CB i due triangoli ABC, BCD saranno uguali come aventi i tre lati respettivamente uguali; dunque gli angoli ABC, BCD opposti a lati uguali, saranno uguali; ma questi angoli sono alterni-interni rispetto alle linee AB, CD; dunque queste linee sono parallele. Provasi nello stesso modo che lo sono pure le due linee AC e BD. Fig. 35.

2.° Sia l'angolo $BAC = BDC$, ed $ABD = ACD$. Aggiungendo ai primi due gli altri due, avremo $BAC + ABD = BDC + ACD$; ma la somma di questi quattro angoli, è uguale a quattro angoli retti, poichè essa è uguale alla somma di tutti gli angoli dei due triangoli ABC, BCD; dunque la somma $BAC + ABD$ è uguale a due retti, perlochè le rette AC, BD saranno parallele *. Nello stesso modo si prova che lo sono pure AB, e CD. * 77.

TEOREMA XXXIV.

130. *Se in un quadrilatero due lati opposti* AB, CD *saranno uguali e paralleli, gli altri due* AC, BD *saranno uguali e paralleli, e la figura sarà un parallelogrammo.*

Fig. 35. Conducasi la diagonale BC; i due triangoli ABC, CBD avranno l'angolo $ABC = BCD$ come alterni interni, poichè AB e CD sono per ipotesi parallele, inoltre $AB = CD$, ed il lato CB comune; dunque questi triangoli saranno uguali; perlochè avremo $AC = BD$, e l'angolo $ACB = CBD$, cioè AC parallela a BD.

TEOREMA XXXV.

131. *Le due diagonali* AD, BC *d'un parallelogrammo si tagliano scambievolmente in parti uguali; nel rettangolo queste diagonali sono uguali; nella losanga una di esse è perpendicolare all' altra.*

Fig. 35. 1.° Essendo $ABDC$ un parallelogrammo, i triangoli AOB, COD saranno uguali; infatti il lato $AB = CD$, l'angolo $OAB = ODC$, e l'angolo $OCD = OBA$; dunque $OA = OD$, $OB = OC$.

Fig. 36. 2.° Essendo $ABDC$ un rettangolo, i triangoli ABD, BAC saranno uguali, poichè avranno un angolo retto compreso fra lati respettivamente uguali; dunque $CB = AD$.

Fig. 37. 3.° Essendo $ABDC$ una losanga, i punti A, e D saranno equidistanti dai punti C, e B; dunque la retta
* 101. AD risulterà perpendicolare a CB *.

TEOREMA XXXVI.

132. *La somma di tutti gli angoli interni d'un poligono è uguale a tanti angoli retti quante unità sono nel doppio del numero de' suoi lati meno quattro.*

Da un punto qualunque *K* preso dentro il poligono si conducano delle linee rette a tutti i suoi vertici; questo poligono risulterà diviso in tanti triangoli quanti sono i suoi lati. Togliendo dalla somma degli angoli di questi triangoli, la somma degli angoli che hanno il loro vertice nel punto *K*, cioè quattro angoli retti *, il resto indicherà la somma degli angoli del poligono: ma la somma degli angoli d'un triangolo è uguale a due angoli retti, dunque raddoppiando il numero dei triangoli, ovvero prendendo il doppio del numero dei lati del poligono, e togliendo da esso quattro unità, avremo un numero che indicherà quanti angoli retti sono nella somma degli angoli del poligono. Fig. 38. * 50.

133. *Corollario I.* Adunque nel quadrilatero la somma degli angoli è uguale a 4 angoli retti; nel pentagono è uguale a 6 angoli retti; nell' esagono è uguale a 8 angoli retti ec.

134. *Corollario II.* Quando il poligono sarà equiangolo potremo avere il valore di ciascuno de' suoi angoli dividendo il valore della somma di essi per il loro numero. Quindi si troveranno i valori degli angoli del poligono equiangolo di tre, quattro, cinque, sei ec., lati, respettivamente uguali a $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{8}{6}$, ec.

135 *Scolio.* Volendo applicare il precedente teorema * al poligono *ABCDEF* il quale ha un angolo *rientrante C*, converrà considerare questo angolo come uguale all' eccesso di quattro angoli retti sopra l' angolo *BCD*, eccesso che si troverà maggiore di due angoli retti. Ciò posto ad un angolo considerato fra i limiti di *zero* e di 4 angoli retti competerà o il nome di angolo *rientrante*, o quello di *saliente*, secondochè esso sarà maggiore o minore di due angoli retti. Ond' è che un poligono si dirà *convesso* quando tutti i suoi angoli saranno salienti, e si dirà *concavo* quando alcuno de' suoi * 132. Fig. 39.

angoli sarà rientrante. Il perimetro del poligono convesso è tale che non può essere in alcuna maniera segato dai prolungamenti dei suoi lati, mentrechè quello del poligono concavo può esser segato in due o più punti quando ne venga prolungato un qualche lato sufficientemente; cioè il perimetro convesso è tale che tre punti di esso presi a piacere, ma non sopra uno stesso lato, non sono mai nella medesima direzione; donde si vede che esso non differisce per tal proprietà
* 25. dalla linea curva convessa*. Intenderemo adunque che una linea curva o composta di più linee rette sia *convessa* ogniqualvolta non potrà essere incontrata da una linea retta in più di due punti.

TEOREMA XXXVII.

Fig. 38. 136. *In un poligono convesso qualunque ABCDE la somma degli angoli esterni aBC, bCD, cDE ec., formati da ogni lato, e dal prolungamento del suo contiguo è uguale a quattro angoli retti.*

È manifesto che ad ogni vertice del poligono v'ha un angolo esterno ed un interno adiacente, i quali presi insieme formano due angoli retti. La somma adunque degli angoli esterni ed interni sarà uguale a tanti angoli retti quante unità sono nel doppio del numero dei lati; togliendo da questa quantità la somma degli angoli interni, cioè tanti retti quante unità sono nel doppio del numero dei lati meno quattro, il resto è evidentemente di quattro angoli retti; la somma degli angoli esterni è adunque uguale a quattro angoli retti.

137. *Scolio.* Si vede che il corollario V. del teorema XVI.
* 87. L. I. * è un caso particolare del teorema precedente.

TEOREMA XXXVIII.

Fig. 40. 138. *La linea retta è il più breve cammino da un punto ad un altro.*

Se il più breve cammino da *A* in *B* non è la linea retta *AB*, esso sarà un'altra linea, per es., *AFCGB* di cui un

qualche punto non dovrà essere in direzione uguale con A e B; sia un tal punto C; potremo tirare le rette AC, CB e dar luogo al triangolo ACB. Prendasi $Ac = AC$, risulterà $Bc < BC$*; perlochè facendo girare AC intorno ad * 94.
A finchè convenga con AB la linea AFC verrà in Afc, e facendo girare BC intorno a B finchè convenga colla stessa AB la linea BGC verrà in Bgc'; e le due linee Afc, Bgc' necessariamente si segheranno nel punto K. Posto ciò se $AFCGB$ fosse il più breve cammino da A in B anche $Afc + Bgc'$ lo sarebbe; ma $AfK < Afc$, $BgK < Bgc'$, dunque $AfK + BgK < Afc + Bgc'$; dal che risulta essere la linea AKB minore dell'ipotetico più breve cammino $Afc + Bgc'$; dunque il più breve cammino da A in B non può avere un punto C che non sia in direzione uguale coi punti A e B, o in altri termini il più breve cammino da A in B avrà tutti i suoi punti nella medesima direzione di A e B; adunque la linea retta * è il * 23.
più breve cammino da un punto ad un altro.

139. *Scolio.* La figura 41. rende ragione del caso in cui la linea Afc viene al di sotto della AB; allora rovesciando la linea Afc si avrà la linea $Af'c$, e quindi avrà luogo come nel caso contemplato il punto d'incontro K di questa linea colla linea Bgc'.

140. *Corollario I.* Un lato d'un poligono è minore della somma di tutti gli altri.

141. *Corollario II.* La linea retta misura adunque la vera distanza d'un punto ad un altro. La perpendicolare condotta da un punto ad una linea essendo più corta di qualunque obliqua che parte dallo stesso punto è il più breve cammino di esso punto alla linea. Ciò legittima le convenzioni che abbiamo fatte ai §§. 28 e 98.

TEOREMA XXXIX.

142. *Essendo una linea convessa circondata da una estremità all'altra da un'altra linea, la linea circondante sarà più lunga della circondata.*

1.° Prendiamo primieramente a dimostrare che la linea Fig. 42.

spezzata ADB è maggiore della linea spezzata ACB, a tal uopo si prolunghi AC finchè incontri BD in F; le due linee spezzate ADB, AFB hanno una parte comune FB, la parte spezzata ADF della prima è maggiore della parte retta AF della seconda; dunque la linea spezzata ADB è maggiore della linea spezzata AFB. Parimente le due linee spezzate AFB, ACB hanno una parte comune AC; la parte spezzata CFB della prima è maggiore della parte retta CB della seconda, dunque la linea spezzata AFB è maggiore della linea spezzata ACB. Laonde delle tre linee ADB, AFB, ACB la prima eccede la seconda, e la seconda eccede la terza; a più forte ragione la prima eccederà la terza.

Fig. 43. 2.° Dimostriamo in secondo luogo che la linea convessa $AFGHD$ è maggiore della linea spezzata $ABCD$ da essa circondata. Si prolunghi AB in G, e BC in H. La linea $AFGHD$ è maggiore di $ABGHD$; $ABGHD$ è maggiore di $ABCD$; dunque a più forte ragione $AFGHD$ è maggiore di $ABCD$. Il medesimo ragionamento potrà farsi anche nel caso in cui la linea spezzata circondata sia composta d'un maggior numero di linee rette, ove però essa sia convessa, affinchè i prolungamenti BG, CH, ec., incontrino la linea circondante in punti successivamente più prossimi alla estremità D, e non cessi detta linea convessa di essere circondata da tutte le linee di cui i medesimi prolungamenti fanno parte.

Fig. 44. 3.° Dimostriamo finalmente che una curva convessa ADB è maggiore della curva convessa ACB. Il più corto cammino da A in B quando non si debba percorrere una linea circondata dalla linea ACB è la stessa ACB; perocchè se nello spazio che separa le due linee ADB, ACB si conduce una retta FG che non incontri la seconda, o solo la tocchi, avremo una nuova linea $AFCGB$ circondante ACB più corta della prima ADB, stantechè la retta FG è minore della linea FDG. Tirando dipoi HI nel medesimo modo, cioè in guisa che non incontri la linea ACB o solamente la tocchi avremo una terza linea $AHIGB$ circondante ACB più corta della seconda $AFCGB$ Prose-

guendo in tal modo otterremo delle linee circondanti ACB le quali diverranno successivamente più corte della circondante ADB; veruna di queste circondanti adunque non è il più corto cammino richiesto, imperocchè qualunque sia quella a cui ne piaccia fermarsi, sarà sempre possibile ottenerne una più corta di essa; la circondata ACB adunque, come ultimo loro limite è la più corta di una qualunque di esse; dunque $ADB > ACB$.

Questo ragionamento non avrebbe luogo se la circondata non fosse convessa; infatti rispetto alla linea $amcnb$, si osserverebbe che la parte rientrante mcn può esser circondata dalla retta mn più corta di essa.

143. *Scolio.* La stessa dimostrazione può farsi per provare che una linea convessa chiusa ABC è più corta d'ogni altra linea DEF da cui fosse circondata interamente; perocchè si potrebbe far vedere nello stesso modo che il più corto cammino per girare intorno alla linea ACB, tornando al punto da cui si parte, è la stessa linea ACB. Fig. 45.

LIBRO SECONDO

LE SUPERFICI EQUIVALENTI.

NOZIONI PRELIMINARI.

---

144. Una superficie considerata relativamente alla sua grandezza prende il nome di *area*. Così tra le due voci *area*, e *superficie* è da notare questa differenza; che la prima và unita all'idea della quantità di estensione d'una superficie, l'altra a quella soltanto della sua figura. Laonde si dirà correttamente *superficie*, e non *area*, *curva* o *piana;* perocchè in tal caso si vuol significare qual sia la figura della superficie, escludendo l'idea della sua grandezza, cioè lasciando indeterminata la quantità della sua estensione.

Si vede di qui che *area* è vocabolo analogo a quello di *lunghezza* usandosi il primo rispetto alle superfici nel medesimo significato che ha il secondo relativamente alle linee.

145. Due superfici che hanno la medesima area si dicono *superfici equivalenti*. Perocchè la denominazione di superfici uguali si attribuisce unicamente a quelle che essendo applicate l'una sull'altra, possono coincidere in tutta la loro estensione.

146. Chiameremo *dimensioni* del parallelogrammo la sua base e la sua altezza. Il medesimo nome attribuiremo ancora alla base, ed all'altezza d'un triangolo.

147. Ogni rettangolo si dirà contenuto, o compreso da quei due lati, che insieme formano uno de' suoi angoli.

Questi lati saranno le *dimensioni* del rettangolo dovendo, se uno di essi ne è la base, l'altro esserne l'altezza.

148. Ogni quadrato si dirà fatto, o costrutto sopra una linea, quando questa linea ne sarà il lato. Per esser più brevi, diremo pure quadrato di A, per indicar quello che avesse per lato A.

LEMMA

Fig. 45. 149. *I rettangoli* $ABCD$, $abcd$ *che hanno basi uguali, ed uguali altezze sono uguali.*

Si conducano le diagonali BD, bd; essendo per ipotesi $AB = ab$, $AD = ad$, il triangolo ABD sarà uguale
* 59. al triangolo abd*; ma il primo è la metà del rettangolo $ABCD$, l'altro è la metà del rettangolo $abcd$; dunque questi due rettangoli sono uguali.

TEOREMA I.

Fig. 46. 150. *Ogni parallelogrammo* $ABCD$ *è equivalente al rettangolo* $AEFD$, *che ha la medesima base* AD, *e la medesima altezza* DF.

Poichè $AB = DC$, $AE = DF$, e l'angolo $BAE = CDF$, i triangoli ABE, DCF saranno uguali. Ma se dal quadrilatero $AECD$ si toglie il triangolo ABE, resta il parallelogrammo $ABCD$, e se dallo stesso quadrilatero $AECD$ si toglie il triangolo DCF resta il rettangolo $AEFD$; dunque questo rettangolo è equivalente al parallelogrammo $ABCD$.

151. *Corollario.* Tutti i parallelogrammi della stessa base e della stessa altezza, sono equivalenti fra loro.

Infatti essi sono equivalenti ai rettangoli che avranno
* 149. basi uguali ed uguali altezze*.

TEOREMA II.

152. *Ogni triangolo $A B C$ è la metà del parallelogrammo $A B F C$, che ha la medesima base $A B$, e la medesima altezza $C D$.* Fig. 47.

Il triangolo $A B C$ è uguale al triangolo $B C F$*; dunque il triangolo $A B C$ è la metà del parallelogrammo $A B F C$. * 104.

153. *Corollario I.* Ogni triangolo è adunque equivalente alla metà del rettangolo che ha la medesima base, e la medesima altezza *. * 150.

154. *Corollario II.* Tutti i triangoli che hanno basi uguali ed altezze uguali, sono equivalenti fra loro. Infatti ciascuno di essi è equivalente alla metà del rettangolo avente la sua medesima base, e la medesima altezza.

TEOREMA III.

155. *Ogni trapezio $A B C D$ è equivalente al parallelogrammo che ha la medesima altezza $E F$, ed una base uguale alla semisomma delle sue basi parallele $A D$, $B C$.* Fig. 48.

Pel punto G mezzo di CD conducasi $I H$ parallela al lato $A B$, e si prolunghi $B C$ finchè incontri $I H$. Nei triangoli $I G D$, $C G H$ si ha $D G = G C$, per costruzione, l'angolo $H C G = G D I$, poichè $B H$ ed $A D$ sono parallele, e l'angolo $C G H = I G D$; questi triangoli sono adunque uguali, ed il trapezio $A B C D$ è equivalente al parallelogrammo $A B H I$.

Or l'altezza di questo parallelogrammo è la stessa altezza $E F$ del trapezio, ed $A I$ ne è la base; e poichè nei triangoli uguali $I G D$, $C G H$ si ha $C H = I D$, sarà $2 A I = A I + B H = A D + B C$, cioè $A I$ uguale alla semisomma delle basi $A D$, $B C$ del trapezio. Dunque il trapezio $A B C D$ è equivalente al parallelogrammo che ha la medesima altezza $E F$, ed una base uguale alla semisomma delle sue basi parallele $A D$, $B C$.

156. *Corollario.* Poichè nei triangoli $C G H$, $I G D$ si ha pure $G H = G I$, quando il punto K sia il mezzo di $B A$, avremo $A K$ metà di $A B$ uguale, e parallela ad $I G$ metà di $I H$; dunque sarà $K G = A I$; dunque *il trapezio è equivalente al parallelogrammo che ha la medesima altezza, ed una base uguale alla distanza dei due punti di mezzo dei lati non paralleli.*

TEOREMA IV.

Fig. 49. 157. *La somma di due, o più rettangoli aventi la medesima altezza è uguale ad un rettangolo, che abbia l'altezza stessa dei rettangoli dati, e la base uguale alla somma delle loro basi.*

Supponiamo che le basi dei due rettangoli dati si riuniscano in un punto B sopra una stessa linea retta $A C$; avendo essi per ipotesi la medesima altezza, le basi superiori $D E$, $E F$ si riuniranno in un punto E, sopra una medesima linea retta $D F$ parallela ad $A C$; dunque il rettangolo $A D F C$ sarà uguale alla somma dei due rettangoli dati, ed avrà l'altezza $E B$ comune altezza dei due rettangoli medesimi, e la base $A C$ uguale alla somma delle loro basi.

La stessa dimostrazione avrebbe luogo ove i rettangoli dati fossero in numero maggiore di due.

TEOREMA V.

Fig. 50. 158. *Il quadrato $A B D E$ della linea $A B$ somma delle due linee $A C$, $C B$ è uguale al quadrato di $A C$, più il quadrato di $C B$, più il doppio del rettangolo compreso fra $A C$ e $C B$.*

Prendasi $A F = A C$, e conducasi $F G$ parallela ad $A B$, e CH parallela ad $A E$. Le linee $A B$, $F G$, $E D$ risulteranno parallele fra loro; tali risulteranno pure le linee $A E$, $C H$, $B D$. Di più essendo $A E = A B$, ed $A F = A C$, sarà $F E = C B$; laonde per le proprietà delle parallele avremo $AC = FI = EH = AF = CI = BG$, e $CB = IG = HD = EF = HI = DG$; inoltre tutti gli angoli della figura saranno retti; adunque $ACIF$ sarà il quadrato di AC, $IGDH$ sarà il quadrato di CB, ed $FIHE$, $CBGI$ saranno due rettangoli ciascuno de' quali si può dire compreso fra AC e CB; dunque il quadrato di AB è uguale al quadrato di AC, più il quadrato di CB, più il doppio del rettangolo compreso fra AC, e CB.

159. *Corollario* Se $AC = CB$, cioè se la linea AB è il doppio della linea AC, il quadrato di CB è uguale al quadrato di AC, e ciascuno dei due rettangoli compresi fra AC e CB è uguale al quadrato di AC, donde si rileva essere il quadrato di AB uguale al quadruplo del quadrato di AC; dunque *il quadrato fatto sopra una linea è il quadruplo del quadrato fatto su la sua metà.* Fig. 51.

TEOREMA VI.

160. *Il quadrato $AFIC$ della linea AC differenza delle due linee AB e CB è uguale al quadrato di AB, più il quadrato di CB, meno il doppio del rettangolo compreso fra AB e CB.*

Infatti il quadrato $AFIC$ è uguale al quadrato $AEDB$ meno il rettangolo $CBDH$, e meno il rettangolo $EFIH$; ma in luogo di togliere il rettangolo $EFIH$ si può togliere il rettangolo $EFGD$, purchè quindi si aggiunga tutta la quantità di cui questo supera $EFIH$, cioè il quadrato $IHDG$; dunque il quadrato di AC è uguale al quadrato di AB più il quadrato di CB, meno il doppio del rettangolo compreso fra AB, e CB. Fig. 50.

TEOREMA VII.

161. *La differenza dei quadrati $AEDB$, $AFIC$ delle due linee AB, AC è uguale al rettangolo compreso dalla somma e dalla differenza di queste linee.* Fig. 50.

Infatti togliendo dal quadrato $AEDB$ il quadrato $AFIC$ il resto sarà la somma dei rettangoli $CHDB$,

$FEHI$; ora, poichè $EF = CB$, questi rettangoli si potranno considerare come aventi la medesima altezza CB; ond'è che la loro somma sarà un rettangolo avente la stessa altezza CB ed una base uguale alla somma delle loro basi
* 157. BD, FI*; ora $CB = AB - AC$, $BD + FI = AB + AC$; dunque la differenza dei quadrati $AEDB$, $AFIC$ delle due linee AB, AC è uguale al rettangolo compreso dalla somma $AB + AC$, e dalla differenza $AB - AC$ di queste linee.

TEOREMA VIII.

Fig. 52. 162. *Il quadrato $BCFE$ fatto su la ipotenusa BC d' un triangolo rettangolo è equivalente alla somma dei quadrati $ABHI$, $ACGL$ fatti sopra gli altri due lati AB, AC.*

Si abbassi dal vertice A dell' angolo retto una perpendicolare ADK sopra EF; e si conducano le linee AE, CH. Gli angoli CBH, ABE sono uguali, poichè ciascuno di essi contiene un angolo retto più l' angolo ABC; inoltre $AB = BH$ come lati del medesimo quadrato, e $BC = BE$ per la stessa ragione; da ciò risulta che i triangoli ABE, CBH sono uguali. Ma il triangolo ABE, avendo la medesima base BE, e la medesima altezza BD
* 153. del rettangolo $BDKE$ è la metà di questo rettangolo*, ed il triangolo CBH avendo la stessa base BH, e la stessa altezza AB del quadrato $ABHI$ è la metà di tal quadrato; dunque il rettangolo $BDKE$ è equivalente al quadrato $ABHI$. Dimostrerebbesi nello stesso modo essere il rettangolo $CDKF$ equivalente al quadrato $ACGL$. Ora i due rettangoli $BDKE$, $CDKF$ presi insieme formano il quadrato $BCFE$; dunque il quadrato $BCFE$ fatto su la ipotenusa equivale alla somma dei quadrati $ABHI$, ed $ACGL$ fatti su gli altri due lati.

TEOREMA IX.

163. *In un triangolo ABC il quadrato del lato BC opposto all' angolo ottuso A, equivale alla somma dei quadrati degli altri due lati AC, AB più il doppio del rettangolo compreso fra uno di essi AB, ed AD; essendo AD la distanza del vertice A dalla perpendicolare CD abbassata sopra lo stesso lato AB prolungato* Fig. 53.

Il quadrato di BC uguaglia la somma dei quadrati di CD e BD*; ma la linea BD è uguale alla somma delle due linee AD, AB, ed il quadrato di BD è perciò uguale al quadrato di AD più il quadrato di AB più il doppio del rettangolo compreso fra AB, ed AD*; dunque il quadrato di BC equivale alla somma dei quadrati di CD, di AD, e di AB, più il doppio del rettangolo compreso fra AB, ed AD; e poichè i quadrati di CD e di AD presi insieme equivalgono al quadrato di AC, ne segue che il quadrato di BC equivale alla somma dei quadrati di AC, e di AB, più il doppio del rettangolo compreso fra AB, ed AD.

* 162.
* 158.

TEOREMA X.

164. *In un triangolo ABC il quadrato del lato BC opposto ad un angolo acuto A, equivale alla somma dei quadrati degli altri due lati AC, AB meno il doppio del rettangolo compreso fra uno di essi AB, ed AD; essendo AD la distanza del vertice A dalla perpendicolare CD abbassata sopra lo stesso lato AB prolungato ove occorra.* Fig. 54.

Il quadrato di BC uguaglia la somma dei quadrati di DB, e di CD; ma poichè DB è la differenza di AB, ed AD, ed il quadrato di DB è perciò uguale al quadrato di AB, più il quadrato di AD, meno il doppio del rettangolo compreso fra AB, ed AD*; dunque il quadrato di BC equivale alla somma dei quadrati di AB, di AD, e di CD, meno il doppio del rettangolo compreso fra AB, ed AD; e poichè i quadrati di AD, e di CD presi insieme equivalgono al quadrato di AC, ne segue che il quadrato di BC equivale alla somma dei quadrati di AB, e di AC, meno il doppio del rettangolo compreso fra AB, ed AD.

* 160.

Fig. 55. Se la perpendicolare cadesse sul prolungamento di AB avrebbe luogo la medesima dimostrazione, come la figura comprova.

165. *Corollario.* Non v' ha che il triangolo rettangolo nel quale abbiasi la somma dei quadrati di due lati uguale al quadrato del terzo; perocchè ove l' angolo compreso da questi lati sia ottuso la somma de' loro quadrati sarà minore del quadrato del lato opposto, ed ove sia acuto essa sarà maggiore.

TEOREMA XI.

Fig. 56. 166. *In un triangolo qualunque ABC, la somma dei quadrati dei due lati AC, CB equivale al doppio del quadrato della metà AK del terzo, più il doppio del quadrato della linea CK condotta dal mezzo di questo terzo lato al vertice dell' angolo opposto.*

Si abbassi la perpendicolare CD; nel triangolo AKC il quadrato di AC equivale alla somma dei quadrati di CK e di AK, più il doppio del rettangolo compreso fra KD, ed AK; e nel triangolo BKC il quadrato di CB equivale alla somma dei quadrati di CK, e di BK ossia AK, meno il doppio del rettangolo compreso tra KD, e BK ossia AK; dunque la somma dei quadrati di AC, e di CB equivale al doppio del quadrato di CK, più il doppio del quadrato di AK.

TEOREMA XII.

167. *In ogni parallelogrammo $ABCD$ la somma dei quadrati dei quattro lati equivale alla somma dei quadrati delle diagonali.* Fig. 57.

Si conducano le diagonali AC, BD. Esse si taglieranno in parti uguali nel punto K; perciò nel triangolo ABC la somma dei quadrati di AB, e BC equivarrà al doppio del quadrato di BK più il doppio del quadrato di AK, e nel triangolo ACD la somma dei quadrati di CD, e DA equivarrà al doppio del quadrato di KD, ossia BK, più il doppio del quadrato di AK; dunque la somma dei quadrati di AB, BC, CD, DA equivale al quadruplo del quadrato di BK più il quadruplo del quadrato di AK; ma il quadruplo del quadrato di BK è uguale al quadrato di BD*, ed il quadruplo del quadrato di AK è uguale al quadrato di AC; dunque la somma dei quadrati dei quattro lati equivale alla somma dei quadrati delle diagonali. * 159.

LIBRO TERZO

LE PROPORZIONI DELLE FIGURE.

NOZIONI PRELIMINARI.

---

168. Sieno A e B due quantità della medesima specie, cioè due linee, o due superfici, ecc., e C una terza quantità anch' essa della loro specie contenuta un esatto numero di volte nella prima, e nella seconda; per esempio 5 volte in A, 6 volte in B: dividendo A in 5 parti uguali, B conterrà 6 di queste parti; laonde A sarà uguale a $\frac{5}{6}$ di B, ossia B uguale ai $\frac{6}{5}$ di A.

I numeri 5 e 6 in quantochè rappresentano le quantità A e B giovano dunque a far conoscere la loro grandezza relativa.

169. Il *rapporto*, o la *ragione*, di due quantità A e B s' intende che sia il quozieute dei numeri dai quali queste quantità vengono rappresentate; questo quoziente indica qual parte l' una è dell' altra.

Il numero $\frac{5}{6}$ è il rapporto di A a B; il numero $\frac{6}{5}$ è quello di B ad A; lo che si suole indicare in questo modo

$$\frac{A}{B}=\frac{5}{6},\ \frac{B}{A}=\frac{6}{5}.$$

170. I numeri 5, e 6 sono essi pure i respettivi rapporti delle quantità A, e B, paragonate a C; poichè essendo A, e B, rappresentate dai numeri 5, e 6, la quantità C è d' uopo che venga rappresentata dall' unità; per cui si ha

$$\frac{A}{C}=\frac{5}{1}=5,\quad \frac{B}{C}=\frac{6}{1}=6.$$

171. *Misurare* una quantità vuol dire trovare il suo rapporto con altra quantità nota della medesima specie, cui si dà il nome di *unità di misura*.

172. Così misurare una linea N significherà determinare il suo rapporto con altra linea di conosciuta grandezza, la quale sarà l'unità di misura delle linee cioè l' *unità lineare*. Questo rapporto rappresenterà la *lunghezza* della linea N.

173. Misurare una superficie M significherà parimente determinare il suo rapporto con altra superficie di nota grandezza che sarà l' *unità di superficie*. Tal rapporto rappresenterà l' *area* della superficie M.

174. Chiameremo *misura comune* di due quantità, una terza quantità della medesima specie contenuta un esatto numero di volte nell' una, e nell' altra. Tal è C relativa-
* 168. mente alle quantità A e B*.

175. Due quantità si diranno *commensurabili*, o *incommensurabili fra loro*, secondochè ammetteranno, o non ammetteranno una comune misura. Nelle medesime circostanze il loro rapporto si dirà esso pure *commensurabile*, o *incommensurabile*.

176. Di due quantità A e B tra loro incommensurabili non ci è dato avere in numeri il loro esatto rapporto; in questo caso ci contenteremo di determinare i limiti fra i quali questo rapporto deve essere contenuto.

A tale oggetto supponiamo B divisa, per esempio, in 100 parti uguali, ed A contenuta fra 45, e 46 di queste parti; prendendo per unità la centesima parte di B, B sarà rappresentata da 100, ed A da un numero che non sarà minore di 45 nè maggiore di 46; laonde il rapporto di A a B non sarà minore di $\frac{45}{100}$ nè maggiore di $\frac{46}{100}$; e perciò tali frazioni saranno i limiti del rapporto $\frac{A}{B}$.

In generale rappresenti n il numero delle parti in cui B si suppone divisa, ed A sia contenuta fra m ed $m+1$ di queste parti; i limiti del rapporto $\frac{A}{B}$ saranno $\frac{m}{n}$, $\frac{m+1}{n}$, i quali differiscono della quantità $\frac{1}{n}$ che può diventar piccola quanto vuolsi, potendosi il numero n delle parti di B farsi grande quanto ne piace, e supporsi maggiore di qualunque quantità data.

177. *Due rapporti commensurabili* $\frac{A}{B}$, $\frac{a}{b}$ *saranno uguali quando verranno rappresentati da numeri uguali.*

178. *Due rapporti incommensurabili* $\frac{A}{B}$, $\frac{a}{b}$ *si avranno per uguali quando saranno contenuti fra due medesimi limiti, che possano per loro natura differire d'una quantità piccola quanto vuolsi.*

Infatti in questo caso è chiaro che la differenza dei due rapporti contenuti fra i medesimi limiti, ove potesse esistere, dovrebbe riuscire minore di qualunque quantità data; ma se non v'ha quantità di cui questa differenza ipotetica non possa riuscire minore è manifesto che ad essa non si può attribuire alcun valore; adunque tal differenza sarà nulla.

179. *Due quantità A e B hanno il medesimo rapporto delle loro metà, dei loro terzi, come pure dei loro doppi, dei loro tripli, ed in generale dei loro multipli, e dei loro summultipli.*

Infatti 1.° sia il rapporto $\frac{A}{B}$ commensurabile, $\frac{A}{B}=\frac{5}{6}$; dividendo B in sei parti uguali, A conterrà 5 di queste parti; ed il doppio di B ne conterrà 12, il doppio di A ne conterrà 10; cioè sarà $\frac{2A}{2B}=\frac{10}{12}$; ma $\frac{5}{6}=\frac{10}{12}$; dunque $\frac{A}{B}=\frac{2A}{2B}$. Il qual ragionamento può estendersi a qualunque moltiplicatore, ed a qualunque divisore di A e B.

2.° Sia il rapporto $\frac{A}{B}$ incommensurabile, e compreso fra i limiti $\frac{m}{n}$, $\frac{m+1}{n}$; dividendo B in n parti uguali, A sarà compresa fra m ed $m+1$ di queste parti; ed in conseguenza $2B$ conterrà un numero di esse parti doppio di n, $2A$ sarà compresa fra due numeri che saranno i doppi di m ed

$m+1$; dunque il rapporto $\frac{2A}{2B}$ si troverà fra due limiti rispettivamente uguali ai limiti fra i quali è compreso $\frac{A}{B}$;

* 178. dunque* $\frac{A}{B}=\frac{2A}{2B}$. E lo stesso si dirà per qualunque altro moltiplicatore o divisore.

180. *Se due quantità A, e B saranno uguali, i loro rapporti con una comune unità C, risulteranno pure uguali.*

181. *Viceversa, se i rapporti di due quantità A, e B, ad una comune unità C risulteranno uguali, queste quantità saranno pure uguali.*

Le quantità A e B che vengono paragonate alla medesima unità C saranno necessariamente della stessa specie. Ciò posto, 1.° sieno i rapporti commensurabili; per esempio $\frac{A}{C}=\frac{7}{8}$, $\frac{B}{C}=\frac{7}{8}$; dividendo C in 8 parti uguali, poichè $\frac{A}{C}=\frac{7}{8}$, la quantità A dovrà comprendere 7 di queste parti; ma, poichè anche $\frac{B}{C}=\frac{7}{8}$, la quantità B comprenderà pure 7 delle parti medesime; dunque $A=B$.

2.° Sieno i rapporti incommensurabili; dovendo essere uguali saranno compresi nei medesimi limiti $\frac{m}{n}$, $\frac{m+1}{n}$, dove n potrà farsi grande quanto vogliamo; dividendo C in n parti uguali le quantità A e B si troveranno ambedue comprese fra m ed $m+1$ di queste parti; la loro differenza adunque, seppure esistesse, dovrebbe esser minore di una di esse parti; ma è in nostro potere che tal parte riesca piccola quanto vuolsi; dunque non potendosi a tal differenza ipotetica attribuire alcun valore essa sarà nulla, cioè sarà $A=B$.

182. Due rapporti uguali costituiscono una *proporzione*. La quale verrà indicata per l'uguaglianza

$$\frac{A}{B}=\frac{a}{b},$$

dei rapporti medesimi, oppure in quest' altro modo

$$A : B :: a : b$$

dove si legge che A sta a B, come a sta a b.

Così la proporzione si comporrà di quattro termini, dei quali il primo, ed il terzo si chiamano *antecedenti*, il secondo, ed il quarto *conseguenti*.

183. Il primo antecedente, ed il secondo conseguente formano i termini *estremi* della proporzione; il primo conseguente, ed il secondo antecedente ne formano i termini medi.

184. Quando i termini medi sono uguali tra loro, cioè sono una stessa quantità replicata la proporzione si chiama *continua*, le tre quantità diconsi continuamente proporzionali, e la quantità replicata dicesi *media proporzionale*.

Così le tre quantità A, B, C saranno continuamente proporzionali, cioè formeranno una proporzione continua, ove si abbia $A : B :: B : C$; ed in tal caso B sarà il termine medio proporzionale.

185. *Due proporzioni aventi un rapporto comune somministrano sempre una terza proporzione, che si ottiene uguagliando i due rapporti non comuni.*

Sia $A : B :: a : b$,

$C : D :: a : b$,

avremo $A : B :: C : D$;

infatti essendo i rapporti $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$ ambedue uguali al terzo rapporto $\frac{a}{b}$, debbono essere uguali tra loro *.

* Ass. 3.

TEOREMA I.

186. *Due rettangoli $ABCD$, $AEFD$ della medesima base AD, stanno fra loro come le respettive altezze AB, AE.* Fig. 58.

Supponiamo primieramente che le altezze sieno commen-

surabili, e che la loro comune misura sia contenuta, per esempio 7 volte in AE, e 3 volte in AB; dividendo AE in 7 parti uguali, AB conterrà 3 di queste parti; talmentechè sarà $\frac{AB}{AE}=\frac{3}{7}$.

Or pei punti di divisione di AE si conducano delle parallele alla base AD; ne risulteranno dei rettangoli parziali tutti uguali fra loro avendo essi basi uguali, ed altezze uguali; frattanto uno di questi rettangoli diverrà comune misura dei due rettangoli $ABCD$, $AEFD$; e poichè tal misura sarà contenuta 3 volte in $ABCD$, e 7 volte in $AEFD$, otterremo $\frac{ABCD}{AEFD}=\frac{3}{7}$.

Donde segue che

$$\frac{ABCD}{AEFD}=\frac{AB}{AE}.$$

Fig. 59. Supponiamo in secondo luogo che le altezze sieno incommensurabili. Dividasi AE in un numero n qualunque di parti uguali; il punto B cadrà fra due punti di divisione s e p consecutivi; talmentechè supposto che in As sieno contenute m parti, ed $m+1$ ne sieno contenute in Ap, il rapporto $\frac{AB}{AE}$ sarà compreso fra i limiti $\frac{m}{n}$, $\frac{m+n}{n}$.

Or se pei punti di divisione di AE si condurranno delle parallele alla base AD, BC cadrà fra due parallele consecutive st, pq, ed il rettangolo $AEFD$ risulterà diviso in n rettangoli parziali; dei quali m ne saranno contenuti nel rettangolo $AstD$, ed $m+1$ nel rettangolo $ApqD$; così il rapporto $\frac{ABCD}{AEFD}$ sarà compreso esso pure fra i limiti $\frac{m}{n}$, $\frac{m+1}{n}$.

Dunque avremo

$$\frac{ABCD}{AEFD}=\frac{AB}{AE};$$

cioè sussisterà la proporzione

$$ABCD : AEFD :: AB : AE,$$

qualunque sia il rapporto delle due basi.

187. *Corollario I.* Due rettangoli della medesima altezza stanno fra loro come le respettive basi.

Infatti se AD si prende per comune altezza dei rettangoli le loro basi saranno AB, AE.

188. *Corollario II.* I parallelogrammi della medesima base stanno fra loro come le altezze; ed i parallelogrammi della medesima altezza stanno fra loro come le basi.

Infatti tali parallelogrammi sono respettivamente equivalenti a rettangoli che avranno dimensioni respettivamente uguali alle loro*; epperciò la medesima base, o la medesi- * 149.
ma altezza secondochè i parallelogrammi avranno essi pure la medesima base, o la medesima altezza.

189. *Corollario III.* I triangoli della medesima base stanno fra loro come le loro altezze, ed i triangoli della medesima altezza stanno fra loro come le basi.

Infatti* questi triangoli sono le metà di parallelogrammi * 179.
che avranno dimensioni respettivamente uguali alle loro*; i * 152.
quali parallelogrammi avranno la medesima base, o la medesima altezza secondochè i triangoli avranno essi pure la medesima base, o la medesima altezza.

TEOREMA II.

190. *Se l'unità di superficie sarà il quadrato della unità lineare, l'area del rettangolo avrà per misura il prodotto delle sue dimensioni.*

Sia $ABCD$ un rettangolo, ed $MNPQ$ il quadrato Fig. 60.
che ha per lato l'unità lineare; $EFGH$ sia un'altro rettangolo, ove immagineremo che abbiasi il lato $EF = AB$, ed il lato $EH = MQ$.

In virtù del teorema precedente i due rettangoli $ABCD$, $EFGH$, che hanno la medesima altezza, stanno fra loro come le respettive basi AD, EH; ed i due rettangoli $EFGH$, $MNPQ$ che hanno la medesima base, stanno

come le respettive altezze EF ossia AB, ed NM. Laonde avremo $\frac{ABCD}{EFGH} = \frac{AD}{EH}$, $\frac{EFGH}{MNPQ} = \frac{AB}{NM}$.

Ciò posto sieno X, Y i numeri che rappresentano le
* 173. aree dei rettangoli $ABCD$, $EFGH$*, cioè i loro respettivi rapporti colla unità superficiale $MNPQ$; al rapporto
* 169. $\frac{EFGH}{MNPQ}$ potremo sostituire $\frac{Y}{1}$* ossia Y, ed al rapporto $\frac{ABCD}{EFGH}$ il quoziente $\frac{X}{Y}$; perlochè quando si osservi essere $EH = NM = 1$, avremo $\frac{X}{Y} = \frac{AD}{1}$, $Y = \frac{AB}{1}$; e poichè due numeri uguali moltiplicati respettivamente per numeri uguali somministrano prodotti uguali, il prodotto $\frac{AD}{1} \times \frac{AB}{1}$ sarà uguale al prodotto $\frac{X}{Y} \times Y$, il quale è X; dunque

$$X = \frac{AD}{1} \times \frac{AB}{1};$$

donde si rileva essere l'area del rettangolo $ABCD$, ossia il rapporto di questo rettangolo al quadrato dell'unità lineare, uguale al prodotto dei due rapporti delle sue dimensioni AD, AB alla medesima unità lineare. Ma siccome questa unità è arbitraria, perciò per esser brevi si pone

$$ABCD = AD \times AB,$$

e si dice che *l'area del rettangolo ha per misura il prodotto della base per l'altezza.* Avvertendo però che enunciando in tal modo il teorema deve sottintendersi, che, qualunque sia la linea presa per unità lineare, purchè si prenda per unità di superficie il quadrato fatto sopra la linea medesima, l'area del rettangolo vien espressa dal prodotto dei numeri che rappresentano le sue due dimensioni.

191. *Corollario I.* Viceversa qualunque prodotto $A \times B$ di due linee A, B dovrà considerarsi come esprimente l'area d'un rettangolo compreso dalle linee medesime. Infatti potremo sempre concepire tal rettangolo che abbia una di queste linee per base, l'altra per altezza.

Così i prodotti $A \times B$, $A \times b$ esprimeranno due rettangoli di cui A rappresenta la medesima altezza, oppure la medesima base. In guisa che sarà

$$A \times B : A \times b :: B : b.$$

192. *Corollario II.* L'area d'un quadrato $ABCD$, il quale è un rettangolo le cui dimensioni sono uguali*, avrà per misura la seconda potenza del suo lato. Fig. 61. * 128.

Questa seconda potenza espressa dal prodotto $AB \times AB$ s'indica generalmente così $\overline{AB}^2$.

193. *Corollario III.* L'area d'un parallelogrammo avrà anch'essa per misura il prodotto delle sue dimensioni. Infatti qualunque parallelogrammo è equivalente al rettangolo che ha la medesima base e la medesima altezza*. * 150.

194. *Corollario IV.* L'area d'un triangolo avrà per misura la metà del prodotto delle sue dimensioni. Infatti ogni triangolo è la metà del rettangolo che ha la medesima base e la medesima altezza*. * 153.

E poichè la metà d'un rettangolo si ha prendendo la metà della sua base conservando la stessa altezza, o la metà della sua altezza conservando la stessa base, perciò l'area d'un triangolo sarà pure espressa dal prodotto della metà della base per l'altezza, o della metà dell'altezza per la base.

195. *Corollario V.* L'area del trapezio avrà per misura* * 155.
il prodotto dell'altezza per la semi-somma delle due basi*, * 193.
ossia il prodotto dell'altezza per la distanza dei due punti* * 156.
di mezzo dei lati non paralleli.

TEOREMA III.

196. *Una proporzione $A : B :: C : D$ fra le quattro linee A, B, C, D non verrà alterata quando alle due prime, o alle due ultime, si sostituiranno due rettangoli, o due parallelogrammi, o due triangoli, di cui esse sieno le basi, ed una linea qualunque F sia la loro comune altezza.*

Infatti

* 191. $$A \times F : B \times F :: A : B^*;$$

ma per ipotesi

$$A : B :: C : D,$$

* 185. dunque*

$$A \times F : B \times F :: C : D.$$

dove i due termini del primo rapporto rappresentano i rettangoli, o parallelogrammi suddivisati, e prendendone le
* 179. metà, lo che può farsi senza alterare la proporzione*, verranno essi a rappresentare ancora i suddivisati triangoli

197. *Scolio I.* Per esser brevi questa proposizione si suole enunciare dicendo, che senza alterare una proporzione i due termini d'uno stesso rapporto possono essere moltiplicati per una medesima linea.

198. *Scolio II.* Viceversa potremo ricavare dalla proporzione $A \times F : B \times F :: C : D$ l'altra $A : B :: C : D$ con sopprimere il fattore F comune ai due termini del primo rapporto. Poichè al rapporto dei due rettangoli $A \times F$, $B \times F$, considerati come aventi la medesima altezza F, si può sostituire il rapporto delle due basi A e B.

TEOREMA IV.

199. *Se quattro linee A, B, C, D formeranno la proporzione $A : B :: C : D$, il rettangolo $A \times D$ compreso dalle estreme, sarà equivalente al rettangolo $B \times C$ compreso dalle medie.*

Si conducano le due linee perpendicolari BC, DE Fig. 62.
su le quali prenderemo le parti $AC = A$, $AB = B$, $AE = C$, $AD = D$; quindi compiremo i rettangoli $ADGC$, $ABFE$, e prolungheremo i lati GD, FB finchè s' incontrino in H.

I due rettangoli $ADGC$, $ABHD$, avendo la medesima altezza AD, stanno fra loro come le basi AC, AB; parimente i due rettangoli $ABFE$, $ABHD$, avendo la medesima altezza AB, stanno fra loro come le basi AE, AD; laonde sarà

$$\frac{ADGC}{ABHD} = \frac{AC}{AB}, \quad \frac{ABFE}{ABHD} = \frac{AE}{AD};$$

ma per ipotesi

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD},$$

dunque

$$\frac{ADGC}{ABHD} = \frac{ABFE}{ABHD};$$

dunque il rettangolo $ADGC$ è equivalente al rettangolo * 181.
$ABFE$ *.

200. *Scolio I.* Reciprocamente se due rettangoli $ADGC$, $ABFE$ sono equivalenti, la base del primo sta alla base del secondo, come l' altezza del secondo sta all' altezza del primo; lo che si esprime dicendo che le basi sono *inversamente* proporzionali alle altezze.

Infatti qualunque sieno i due rettangoli $ADGC$, $ABFE$ essi potranno disporsi in modo che gli angoli in A sieno opposti al vertice; essendo questi rettangoli equivalenti fra

* 180. loro sarà $\frac{ADGC}{ABHD} = \frac{ABFE}{ABHD}$ *; ma il primo rapporto è quello di AC ad AB, ed il secondo quello di AE ad AD; dunque $\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD}$, cioè $AC : AB :: AE : AD$.

201. *Scolio II.* I due rettangoli equivalenti verranno
* 190. talora espressi pei due prodotti uguali $A \times D = B \times C$ *; quindi i fattori del primo prodotto saranno *inversamente* proporzionali a quelli del secondo; dimodochè si avrà $A : B :: C : D$.

TEOREMA V.

202. *Se quattro linee A, B, C, D, saranno proporzionali, in guisa che abbiasi $A : B :: C : D$, lo saranno pure* alternando $A : C :: B : D$, *ed* invertendo $B : A :: D : C$.

1.° Essendo $A : B :: C : D$ si ha $A \times D = B \times C$; ma il rettangolo $B \times C$ non muta rappresentandolo con $C \times B$,
* 201. dunque $A \times D = C \times B$, e quindi * $A : C :: B : D$.

2.° Essendo $B \times C = A \times D$, sarà $B : A :: D : C$.

203. *Corollario I.* In generale potranno farsi nell' ordine dei termini d' una proporzione tutte le permutazioni che si vorranno, purchè il rettangolo o prodotto dei medi si mantenga uguale al rettangolo o prodotto degli estremi.

Col vocabolo *alternando* si sogliono indicare le permutazioni dei termini medi, o degli estremi; col vocabolo *invertendo* le sostituzioni dei medi agli estremi, e viceversa.

204. *Corollario II.* Senza alterare la proporzione $A : B :: C : D$ si possono moltiplicare o dividere per un medesimo numero i due antecedenti, o i due conseguenti.

* 202. Infatti alternando * avremo $A : C :: B : D$; quindi moltiplicando o dividendo per un numero qualunque i due termini del primo rapporto o quelli del secondo, lo che può
* 179. farsi senza alterare la proporzione *, e nuovamente alternando, apparirà chiara la proposizione enunciata.

205. *Corollario III.* Se in una proporzione i conseguenti

saranno uguali, saranno pure uguali gli antecedenti; e viceversa ove sieno uguali gli antecedenti, saranno eziandio uguali i conseguenti.

Sia $A : B :: C : B$ alternando sarà $A : C :: B : B$, e conseguentemente $A = C$.

Sia $A : B :: A : C$; alternando sarà $C : B :: A : A$, e perciò $C = B$.

206. *Corollario IV.* Se due proporzioni avranno tre termini comuni, cioè avranno i due antecedenti, e il primo, o il secondo conseguente, oppure i due conseguenti, ed il primo o il secondo antecedente, respettivamente uguali, i due termini rimanenti saranno anch' essi uguali fra loro.

Per esempio, sia $A : B :: C : D$, ed $A : B :: C : d$; primieramente avremo *, $C : D :: C : d$; e quindi * $D = d$. * 185. * 205.

TEOREMA VI.

207. *Se due proporzioni avranno i medesimi antecedenti, i conseguenti saranno respettivamente proporzionali tra loro.*

Infatti si abbiano le proporzioni

$$A : B :: C : D,$$
$$A : b :: C : d;$$

alternando avremo

$$A : C :: B : D,$$
$$A : C :: b : d;$$

dunque $\quad B : D :: b : d,$

ed anche $\quad B : b :: D : d.$

208. *Corollario.* E poichè invertendo, gli antecedenti divengono conseguenti, e viceversa, perciò se due proporzioni avranno i medesimi conseguenti, saranno proporzionali tra loro gli antecedenti.

TEOREMA VII.

209. *Se quattro linee A, B, C, D formeranno la proporzione $A : B :: C : D$, ed altre quattro a, b, c, d formeranno pure la proporzione $a : b :: c : d$, moltiplicando i termini della prima pei termini corrispondenti dell' altra, i quattro rettangoli risultanti costituiranno essi pure una proporzione.*

Infatti dalla proporzione

$$A : B :: C : D$$

* 196. si ha * $\quad A \times a : B \times a :: C \times c : D \times c;$

dall' altra proporzione

$$a : b :: c : d$$

si ha pure

$$B \times a : B \times b :: D \times c : D \times d,$$

ovvero invertendo

$$B \times b : B \times a :: D \times d : D \times c;$$

* 208. la quale paragonata alla precedente darà *

$$A \times a : B \times b :: C \times c : D \times d.$$

210. *Corollario I.* Se la seconda proporzione fosse identica alla prima, avremmo

$$A \times A : B \times B :: C \times C : D \times D,$$

cioè $\quad A^2 : B^2 :: C^2 : D^2;$

donde segue che allorquando quattro linee formano una proporzione, i loro quadrati formano pure una proporzione.

211. *Corollario II.* Se la seconda proporzione fosse

$$F : 1 :: F : 1$$

avremmo

$$A \times F : B :: C \times F : D,$$

dove conviene sottintendere che i conseguenti B, D sieno moltiplicati per l'unità, onde non apparisca l'assurdo che un rettangolo venga paragonato ad una linea.

Posta la medesima avvertenza avremo pure

$$A : B \times F :: C : D \times F;$$

per la qual cosa stabiliremo che senza alterare la proporzione $A : B :: C : D$ si possono i due antecedenti, o i due conseguenti moltiplicare per una medesima linea F.

Viceversa ogni fattore comune agli antecedenti, o ai conseguenti d'una proporzione si potrà sopprimere, senza alterare la proporzione medesima.

TEOREMA VIII.

212. *Se nel triangolo ABC la retta DE sarà parallela al lato BC, gli altri due lati AB, AC risulteranno divisi nei punti D, ed E in parti proporzionali; reciprocamente la retta DE, che dividerà in parti proporzionali i lati AB, AC sarà parallela al terzo lato BC.* Fig. 63.

1.° Si conducano le rette BE, CD; i due triangoli DEB, DEC avendo la medesima base DE e la medesima altezza, poichè i loro vertici B e C sono situati sopra una parallela alla base, saranno equivalenti. Perlochè si avrà

$$ADE : DEB :: ADE : DEC;$$

ma* il rapporto $ADE : DEB$ è uguale al rapporto $AD : DB$, ed il rapporto $ADE : DEC$ è uguale al rapporto $AE : EC$, dunque * 180.

$$AD : DB :: AE : EC;$$

dunque i lati AB, AC sono divisi nei punti D ed E in parti proporzionali.

2.° Essendo

$$AD : DB :: AE : EC,$$

sarà pure $ADE : DEB :: ADE : DEC$;

nella qual proporzione, poichè gli antecedenti sono uguali, i conseguenti ancora dovranno essere uguali, cioè dovrà il triangolo DEB essere equivalente al triangolo DEC; ma questi triangoli hanno una base comune DE, dunque hanno ancora la medesima altezza; dunque DE è parallela a BC.

213. *Corollario I.* Aggiungendo a ciascuno dei due triangoli equivalenti DEB, DEC il triangolo ADE concluderemo essere il triangolo ABE equivalente al triangolo ADC; perlochè si avranno le due proporzioni

$$ABE : ADE :: ADC : ADE,$$
$$ABE : DEB :: ADC : DEC;$$

dalle quali agevolmente si ricavano le due seguenti,

$$AB : AD :: AC : AE,$$
$$AB : BD :: AC : CE;$$

ovvero, alternando i medi,

$$AB : AC :: AD : AE :: BD : CE.$$

dunque quando DE è parallela ad un lato o base BC del triangolo ABC gli altri due lati AB, AC stanno fra loro come i loro segmenti AD, AE dalla parte del vertice, o come i loro segmenti BD, CE dalla parte della base.

Fig. 64. 214. *Scolio.* Se nel triangolo ABC dopo aver condotta DE parallela a BC, condurremo DF parallela ad AC,
* 215. avremo $AC : AE$ oppure $AB : AD :: BC : CF$*; ma la figura $FDEC$, essendo un parallelogrammo, dà $CF = DE$, dunque

$$AC : AE :: AB : AD :: BC : DE.$$

Di più sarà l'angolo $DAE = BAC$, l'angolo $ADE = ABC$, l'angolo $AED = ACB$: perlochè i due triangoli ABC, ADE avranno gli angoli respettivamente uguali, ed i lati opposti agli angoli uguali proporzionali.

215. *Definizione.* I poligoni che hanno gli angoli respettivamente uguali, ed i lati *omologhi* proporzionali, si chiamano poligoni simili. Lati *omologhi* diconsi quelli che nei

due poligoni sono comuni ad angoli uguali; questi stessi angoli diconsi angoli omologhi.

I triangoli ABC, ADE i quali sono equiangoli fra loro, ed hanno i lati respettivamente proporzionali sono simili. Il lato DE del primo è omologo al lato BC dell'altro, perocchè DE è comune ai due angoli ADE, AED, e BC è comune ai due angoli ABC, ACB respettivamente uguali ai due precedenti. Ma trattandosi dei triangoli, si vede chiaramente essere i lati omologhi opposti ad angoli uguali.

TEOREMA IX.

216. *Se quattro linee A, B, C, D formeranno la proporzione $A : B :: C : D$, la somma o la differenza delle due prime, termini del primo rapporto, starà ad A, o a B, cioè all'antecedente, o al conseguente di tal rapporto, come la somma o la differenza delle altre due, termini del secondo rapporto, sta a C, o a D, cioè all'antecedente, o al conseguente del rapporto medesimo.*

Supporremo che gli antecedenti A, e C, sieno maggiori dei conseguenti B, e D; ciò posto, si descrivano due rette indefinite MG, MH che facciano un angolo qualunque M, e sopra di esse si prendano le parti $ME = A$, $EG = EA = B$, $MF = C$, $FH = FC = D$; quindi si conducano le rette AC, EF, GH. Avendosi per ipotesi le proporzioni Fig. 65.

$$ME : EG :: MF : FH,$$
$$ME : EA :: MF : FC,$$

le rette GH, ed AC saranno parallele ad EF, epperciò avremo * * 212. e 213.

$$MG : ME :: MH : MF,$$
$$MG : EG :: MH : FH,$$
$$MA : ME :: MC : MF,$$
$$MA : EA :: MC : FC;$$

ovvero

$$A + B : A :: C + D : C,$$
$$A + B : B :: C + D : D,$$
$$A - B : A :: C - D : C,$$
$$A - B : B :: C - D : D;$$

come dovevasi dimostrare.

217. *Corollario I.* Poichè si ricava dalla proporzione $A : B :: C : D$, l'altra $A : C :: B : D$, applicando a questa il precedente teorema sarà facile concludere, che in ogni proporzione la somma, o la differenza degli antecedenti sta alla somma, o alla differenza dei conseguenti, come un antecedente qualunque sta al suo conseguente.

218. *Corollario II.* In generale abbiasi una serie di rapporti uguali $A : B :: C : D :: E : F :: G : H$; la somma di tutti gli antecedenti $A + C + E + G$ starà alla somma di tutti i conseguenti $B + D + F + H$, come un antecedente qualunque sta al suo conseguente.

TEOREMA X.

Fig. 66. 219. *Due triangoli ABC, DEF sono simili, quando hanno gli angoli respettivamente uguali.*

Sia l'angolo $A = D$, $B = E$, $C = F$; dico che questi due triangoli ABC, DEF hanno i lati omologhi proporzionali, e sono simili

Supponiamo che de' due lati omologhi AC, DF il maggiore sia AC; prendasi $CG = FD$, e si conduca GH parallela ad AB. Risulterà l'angolo $CGH = A = D$, e per conseguenza avremo il triangolo GHC uguale al
* 62. triangolo DEF*; e poichè *
* 214.

$$CG : CA :: CH : CB :: GH : AB,$$

sarà pure

$$FD : CA :: FE : CB :: DE : AB,$$

come dovevasi dimostrare.

220. *Corollario.* Affinchè due triangoli siano simili basta adunque che essi abbiano due angoli respettivamente uguali.

TEOREMA XI.

221. *Due triangoli ABC, DEF sono simili, quando hanno i lati respettivamente proporzionali.*

Sia $FD : CA :: FE : CB :: DE : AB$; dico che gli angoli opposti ai lati proporzionali saranno uguali.

Supponendo che de' due lati FD, CA il maggiore sia CA, si prenda $CG = FD$, e si conduca GH parallela ad AB. Otterremo

$$CG : CA :: CH : CB :: GH : AB,$$

ma per ipotesi

$$FD : CA :: FE : CB :: DE : AB,$$

dunque, poichè $CG = FD$, sarà* $CH = FE$, e $GH = DE$, ed i triangoli GHC, DEF come equilateri fra loro * 206.
saranno uguali; inguisachè avremo l'angolo $D = CGH = A$, l'angolo $E = CHG = B$, e l'angolo $F = GCH = C$, come dovevasi dimostrare.

222. *Scolio.* Dai due teoremi precedenti rilevasi che nei triangoli le due condizioni della uguaglianza degli angoli, e della proporzionalità dei lati sono intimamente legate insieme, per cui una qualunque di esse, non potendo aver luogo senza l'altra, è bastevole ad assicurare la similitudine dei triangoli. È facile convincersi non potere tal legame esistere nei poligoni simili d'un maggior numero di lati.

TEOREMA XII.

223. *Due triangoli ABC, DEF sono simili, quando hanno un angolo uguale compreso fra lati proporzionali.*

Sia l'angolo $C = F$, ed $FD : CA :: FE : CB$, dico che questi due triangoli ABC, DEF sono simili.

Supponendo che de' due lati AC, DF il maggiore sia AC, si prenda $CG = FD$, e si conduca GH parallela ad AB. Otterremo $CG : CA :: CH : CB$; ma per ipotesi

$$FD : CA :: FE : CB;$$

* 206. dunque, poichè $CG = FD$*, sarà $CH = FE$, ed il triangolo GHC sarà uguale al triangolo DEF; ora i triangoli ABC, GHC sono equiangoli fra loro, dunque i triangoli ABC, DEF sono pure fra loro equiangoli, e simili.

TEOREMA XIII.

224. *Due triangoli sono simili quando hanno i lati respettivamente paralleli.*

Fig. 67. Sieno i lati AB, BC, AC del triangolo ABC respettivamente paralleli ai lati DE, EF, FD; dico che sarà l'angolo $A = D$, $B = E$, $C = F$.

Infatti due angoli che hanno i lati respettivamente paralleli, o sono uguali, o sono supplementari; or non si può supporre che tutti gli angoli A, B, C sieno i supplementi degli angoli D, E, F, perocchè i sei angoli formerebbero sei angoli retti, assurdo evidente; nè si può supporre che due soli angoli A, e B sieno i supplementi degli angoli D, ed E, poichè questi quattro angoli formerebbero quattro angoli retti, assurdo anch' esso evidente; adunque è necessario che due angoli del primo triangolo sieno uguali a due angoli dell' altro; per conseguenza i due triangoli debbono
* 85. essere equiangoli fra loro*, e quindi simili.

225. *Scolio.* I lati omologhi sono i lati paralleli.

TEOREMA XIV.

Fig. 68. 226. *Due triangoli sono simili quando hanno i lati respettivamente perpendicolari.*

Sieno i lati EF, FD, ED del triangolo DEF, respettivamente perpendicolari ai lati AB, BC, AC del triangolo ABC.

Dal triangolo ACE rettangolo in C si deduce che l'angolo CAE è il complemento di AEC; ma lo stesso angolo CAE è pure complemento di BAC, dunque* l'angolo $BAC = E$: nello stesso modo, ponendo mente al triangolo ABF rettangolo in A, ricavasi che l'angolo $ABC = F$: donde consegue ancora essere l'angolo $ACB = D$. Dunque i triangoli ABC, DEF essendo equiangoli fra loro sono simili. * 48.

227. *Scolio I.* I lati omologhi sono i lati perpendicolari.

228. *Scolio II.* Il triangolo DEF presenterà talvolta una situazione diversa da quella che gli viene attribuita dalla figura; qual' è, per esempio, quella del triangolo def. Ma sempre sarà sempre possibile supporre costrutto tal triangolo DEF con tre linee EF, ED, FD respettivamente perpendicolari ai lati AB, AC, CB, e conseguentemente parallele ai lati ef, ed, fd del triangolo def; e si dimostrerebbe che i triangoli ABC, def come simili ambedue al triangolo DEF debbono esser simili fra loro.

TEOREMA XV.

229. *Due rette AB, CD incontrate da quante parallele si vogliono AC, EF, GH, BD sono divise in parti proporzionali, talmentechè si ha $AE : CF :: EG : FH :: GB : HD$.* Fig. 69.

Infatti sia M il punto d'incontro delle due rette AB, CD; dal triangolo MEF nel quale AC è parallela alla linea EF si avrà

$$ME : MF :: AE : CF;$$

dal triangolo MGH si avrà pure

$$ME : MF :: EG : FH;$$

dunque $$AE : CF :: EG : FH.$$

E nello stesso modo potrà dimostrarsi che

$$EG : FH :: GB : HD.$$

Dunque la linea AB è divisa nei punti E, G, come lo è la linea CD nei punti F, H.

230. *Corollario.* Dunque se la linea AB fosse divisa in parti uguali nei punti E, G, la CD sarebbe anch' essa divisa in parti uguali nei punti F, H.

TEOREMA XVI.

Fig. 70. 231. *Le linee AB, AD, AE, AC condotte a piacimento da un punto A su la retta BC dividono questa retta, ed ogni sua parallela FI in parti proporzionali; talmentechè si ha $FG : BD :: GH : DE :: HI : EC$.*

Infatti dai triangoli simili AFG, ABD si ha

$$AG : AD :: FG : BD;$$

dai triangoli AGH, ADE si ha pure

$$AG : AD :: GH : DE;$$

dunque a cagione del rapporto comune $AG : AD$,

$$FG : BD :: GH : DE.$$

Si troverà nello stesso modo

$$GH : DE :: HI : EC.$$

Dunque la linea FI è divisa nei punti G, H, come lo è la linea BC nei punti D, E.

232. *Corollario.* Dunque se BC fosse divisa in parti uguali nei punti D, E, la parallela FI sarebbe essa pure divisa in parti uguali nei punti G, H.

TEOREMA XVII.

233. *La retta CD che divide in due parti uguali l'angolo ACB d'un triangolo dividerà il lato opposto AB in due segmenti AD, DB proporzionali ai lati contigui.* Fig. 71.

Pel punto A conducasi AF parallela a CD, e prolunghisi BC finchè incontri la parallela medesima; otterremo il triangolo ACF, nel quale gli angoli CAF, CFA essendo respettivamente uguali agli angoli ACD, BCD stante le parallele CD, FA, saranno uguali fra loro, come lo sono questi ultimi; quindi sarà $CA = EF$. Ma dal triangolo BFA si ha

$$BD : DA :: BC : CF,$$

dunque

$$BD : DA :: BC : CA.$$

TEOREMA XVIII.

234. *Se dal vertice dell'angolo retto A d'un triangolo rettangolo si abbassa la perpendicolare AD su la ipotenusa, i due triangoli parziali ABD, ADC saranno simili fra loro, ed al triangolo totale ABC.* Fig. 72.

I due triangoli BAD, BAC hanno l'angolo comune B; gli angoli ADB, BAC sono uguali come retti; epperciò il terzo angolo BAD dell'uno sarà uguale al terzo angolo ACB dell'altro; dunque questi triangoli saranno equiangoli fra loro. Si dimostrerà nello stesso modo che il triangolo DAC è equiangolo col triangolo BAC. Dunque ciascun triangolo parziale è equiangolo col triangolo totale; dunque i tre triangoli sono equiangoli, e simili fra di loro.

235. *Corollario I.* I triangoli simili BAD, CAD avranno i lati omologhi proporzionali. Ora il lato BD del primo è omologo al lato AD del secondo, poichè essi sono

opposti agli angoli uguali BAD, ACD; ed il lato AD del primo è omologo al lato DC dell'altro, chè questi pure sono opposti agli angoli uguali ABD, CAD; dunque si ha

$$BD : AD :: AD : DC;$$

dunque *la perpendicolare abbassata dal vertice dell'angolo retto su la ipotenusa è media proporzionale fra i due segmenti della ipotenusa medesima.*

236. *Corollario II.* Nei triangoli simili ABC, BAD le ipotenuse BA, BC sono lati omologhi; il lato BD del triangolo BAD è omologo al lato BA del triangolo ABC, essendo essi opposti agli angoli uguali BAD, BCA; dunque

$$BD : BA :: BA : BC;$$

dai triangoli poi ABC, CAD si ha parimente

$$DC : AC :: AC : BC;$$

dunque *ogni lato dell'angolo retto è medio proporzionale fra l'ipotenusa ed il segmento contiguo.*

237. *Scolio.* Le due ultime proporzioni, facendo i prodotti dei medi, e degli estremi, danno

$$\overline{BA}^2 = BD \times BC, \quad \overline{AC}^2 = DC \times BC,$$

e quindi

$$\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 = BD \times BC + DC \times BC,$$

* 157. ma poichè il secondo membro si riduce a $(BD+DC) \times BC$*, cioè a $BC \times BC$ o $\overline{BC}^2$, dunque

$$\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2;$$

* 162. donde si rileva che la proposizione del quadrato dell'ipotenusa* si può considerare come una conseguenza della proporzionalità dei lati nei triangoli equiangoli.

TEOREMA XIX.

238. *Le aree di due triangoli ABC, ADE che hanno un angolo uguale o comune A, stanno fra loro come i rettangoli dei lati che comprendono l' angolo uguale o comune.* Fig. 73.

Si abbassino le perpendicolari BF, DG sopra AC; i triangoli ABF, ADG essendo equiangoli fra loro danno la proporzione

$$BF : DG :: AB : AD;$$

moltiplicando gli antecedenti per AC, ed i conseguenti per AE*, avremo * 211.

$$AC \times BF : AE \times DG :: AB \times AC : AD \times AE;$$

ma la metà dei termini del primo rapporto esprimono le aree dei triangoli ABC, ADE, dunque

$$ABC : ADE :: AB \times AC : AD \times AE.$$

TEOREMA XX.

239. *Due poligoni simili sono composti d' un medesimo numero di triangoli respettivamente simili, e similmente disposti.* Fig. 74.

Sieno $ABCDE$, $abcde$ due poligoni simili; dai vertici omologhi A, a si conducano le diagonali omologhe AC, ac; quindi AD, ad. Poichè i poligoni sono simili l' angolo $B = b$; di più $AB : ab = BC : bc$; dunque i triangoli ABC, abc hanno un angolo uguale compreso fra lati proporzionali e sono simili *. * 223.

Passiamo ai triangoli ACD, acd; dalla similitudine de' due precedenti si ricava essere l' angolo $ACB = acb$, e da quella dei due poligoni si ricava pure essere l' angolo $BCD = bcd$; sottraendo dagli angoli uguali BCD, bcd,

gli angoli uguali ACB, acb resterà l'angolo $ACD = acd$: di più la similitudine de' primi triangoli dà $AC : ac :: BC : bc$, e quella dei poligoni $CD : cd :: BC : bc$; donde viene $AC : ac :: CD : cd$; perlochè i due triangoli ACD, acd hanno come i due precedenti un angolo uguale compreso fra lati proporzionali, e sono simili.

Proseguendo in tal modo potremo dimostrare la similitudine de' triangoli susseguenti qualunque sia il loro numero.

TEOREMA XXI.

240. *Reciprocamente due poligoni sono simili, quando sono composti d'un medesimo numero di triangoli simili, e similmente disposti.*

Dall' uguaglianza degli angoli dei triangoli si deduce l'uguaglianza degli angoli dei poligoni; poichè gli angoli dei poligoni sono o i semplici angoli dei triangoli come B, b, o le somme di angoli respettivamente uguali come A, a.

Di più essendo per la similitudine dei triangoli ABC, abc

$$AB : ab :: BC : bc :: AC : ac,$$

e per quella dei triangoli ACD, acd,

$$AC : ac :: CD : cd,$$

concludesi che

$$AB : ab :: BC : bc :: CD : cd.$$

Nello stesso modo si può provare che tutti gli altri lati omologhi de' due poligoni sono proporzionali: questi due poligoni adunque avendo gli angoli uguali, ed i lati proporzionali sono simili.

TEOREMA XXII.

241. *Due poligoni regolari d' un medesimo numero di lati sono simili.*

Un poligono regolare è equiangolo; dunque il valore di uno de' suoi angoli sarà uguale alla loro somma divisa per il loro numero. Or la somma degli angoli è in ambedue i poligoni la stessa, stantechè avendo essi il medesimo numero di lati, il numero degli angoli è pure lo stesso; dunque il valore d'un angolo del primo poligono sarà uguale al valore d'un angolo dell'altro; cioè questi due poligoni sono equiangoli fra loro.

In secondo luogo un poligono regolare è pure equilatero; adunque il rapporto d'un lato del primo poligono ad un lato del secondo sarà il medesimo qualunque sieno i due lati che si paragonano; cioè i due poligoni avranno i lati proporzionali. Dunque essi sono simili.

TEOREMA XXIII.

242. *I perimetri di due poligoni simili stanno fra loro come i lati omologhi.*

Essendo i poligoni $ABCDE$, $abcde$ simili, avremo queste serie di rapporti uguali

$$AB : ab :: BC : bc :: CD : cd \text{ ec.},$$

donde si può conchiudere che la somma degli antecedenti $AB + BC + CD$ ec., ossia il perimetro del primo poligono, sta a quella dei conseguenti $ab + bc + cd$ ec., ossia al perimetro del secondo poligono, come un antecedente sta al suo conseguente, ovvero come un lato AB sta al suo omologo ab*; dunque i perimetri dei poligoni simili stanno fra loro come i lati omologhi. * 218.

TEOREMA XXIV.

243. *Le aree di due poligoni simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi.*

Si considerino in primo luogo i due triangoli ABC, abc. Fig. 75

Essendo AB, AC respettivamente omologhi ad ab, ac avremo

$$AB : ab :: AC : ac$$

e quindi moltiplicando gli antecedenti per AC, ed i conse-
* 211. guenti per ac*,

$$AB \times AC : ab \times ac :: \overline{AC}^2 : \overline{ac}^2.$$

Ma i due prodotti $AB \times AC$, $ab \times ac$ come quelli dei lati che comprendono gli angoli uguali A, a, stanno come
* 238. le aree dei triangoli*, dunque

$$ABC : abc :: \overline{AC}^2 : \overline{ac}^2,$$

cioè le aree dei triangoli simili ABC, abc stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi AC, ac, o come quelli di altri due lati omologhi qualunque.

Fig. 74. Ciò posto passiamo ai poligoni simili d'un numero qualunque di lati, e sieno $ABCDE$, $abcde$; essendo essi simili potranno decomporsi in un medesimo numero di triangoli simili, e similmente disposti mediante le diagonali AD, AC, e ad, ac condotte dai vertici A, a di due angoli
* 239. uguali*. Ora i due primi triangoli ABC, abc stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi AC, ac; i due susseguenti triangoli ACD, acd stanno pure come i quadrati dei medesimi lati; adunque si ha

$$ABC : abc :: ACD : acd.$$

Con un simile ragionamento si proverebbe che

$$ACD : acd :: ADE : ade$$

e così per tutti i triangoli corrispondenti; per cui sarà

$$ABC : abc :: ACD : acd :: ADE : ade \text{ ec.}$$

Frattanto da tal serie di rapporti uguali si ricaverà che la somma di tutti gli antecedenti, cioè l'area del poligono $ABCDE$, sta alla somma di tutti i conseguenti, cioè all'area del poligono $abcde$, come un antecedente ABC,
* 218. al suo conseguente abc*, o come $\overline{AB}^2$ sta ad $\overline{ab}^2$; adunque le aree dei poligoni simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi.

TEOREMA XXV.

244. *Se si costituiscono tre poligoni simili i di cui lati omologhi sieno uguali ai tre lati d' un triangolo rettangolo ABC, l'area del poligono P costrutto su la ipotenusa BC sarà uguale alla somma delle aree M, N degli altri due.* Fig. 72.

I poligoni P, M, N essendo simili, staranno fra loro come i quadrati dei lati omologhi BC, AB, AC*, ma abbassando la perpendicolare AD sulla ipotenusa i triangoli ABC, ABD, ADC, essendo anch' essi simili*, staranno fra loro come i quadrati dei medesimi lati; dunque avremo le proporzioni * 243. * 234.

$$P : ABC :: M : ABD :: N : ADC,$$

e conseguentemente * * 217.

$$P : ABC :: M + N : ABD + ADC;$$

ma $ABC = ABD + ADC$, dunque $P = M + N$; dunque il poligono fatto su la ipotenusa è uguale alla somma dei poligoni fatti su i lati dell' angolo retto.

245. *Scolio.* E di qui si rileva che la proposizione del quadrato della ipotenusa * non è che un caso particolare del teorema precedente. * 162.

LIBRO QUARTO

IL CIRCOLO.

NOZIONI PRELIMINARI.

---

246. La *circonferenza* è una linea curva piana, i cui punti sono tutti ugualmente distanti da un punto interno *A*, che è detto *centro*. Fig. 76.

Facile è convincersi della possibile esistenza di tale linea curva, essendochè essa è quella che si descrive dalla estremità *B* d'una linea retta, la quale, stando ferma coll'altra estremità *A*, gira sopra un piano intorno al punto *A*, finchè sia tornata alla situazione *AB* donde incomincia il giro. Il punto immobile *A* è appunto quello cui si dà il nome di *centro*.

247. La superficie piana terminata d'ogni intorno dalla circonferenza appellasi *circolo*.

248. La retta condotta dal centro ad un punto della circonferenza si chiama *raggio*.

Il raggio è la stessa retta *AB* presa in qualsivoglia delle situazioni in cui si è trovata nel suo giro, come in *AB*, in *AD*, in *AC*. Ond'è manifesto che tutti i raggi nel medesimo circolo sono uguali.

249. *Diametro* si dirà ogni linea retta come *BC* che passando pel centro *C* avrà le sue estremità su la circonferenza. Ogni diametro è doppio del raggio; conseguentemente tutti i diametri sono uguali.

250. La circonferenza non può essere incontrata da una linea retta in più di due punti; perocchè se essa potesse essere incontrata in tre punti vi sarebbero tre raggi, o tre rette uguali

condotte da uno stesso punto su la stessa retta; la qual cosa
* 25. è assurda; dunque la circonferenza è una linea convessa *.

251. Qualsivoglia porzione *BED* della circonferenza dicesi *arco*.

252. La *corda* o *sottesa* dell'arco è la linea che unisce le sue due estremità.

253. *Segmento* è la superficie, o porzione di circolo, compresa fra l'arco e la corda.

È da notare che alla medesima corda *BD* corrispondono due archi i quali presi insieme formano la circonferenza intera; vi corrispondono pure due segmenti che presi insieme formano l'intero circolo.

254. *Settore* è la superficie, o porzione di circolo compresa fra un arco e i due raggi condotti alle estremità di esso.

255. Una linea indefinita che taglia il circolo dicesi *secante*.

256. Una linea indefinita che ha un solo punto a comune col circolo dicesi *tangente*; e questo punto comune appellasi *punto di contatto*.

257. Chiamasi *linea iscritta* nel circolo quella le cui estremità sono alla circonferenza.

258. *Angolo iscritto* è quello il cui vertice è alla circonferenza, e che è formato da due linee iscritte, o più generalmente da due secanti.

259. *Angolo circoscritto* è quello il cui vertice è fuori del circolo, e che è formato da due tangenti.

260. Un poligono dicesi *iscritto* nel circolo, o nella circonferenza, quando tutti i suoi angoli vi sono iscritti, cioè hanno i loro vertici su la circonferenza medesima; ed allora il circolo è *circoscritto* ad esso poligono.

261. Un poligono s'intenderà poi *circoscritto* ad un circolo quando tutti i suoi angoli saranno ad esso circoscritti, cioè tutti i suoi lati ne saranno altrettante tangenti; ed in tal caso il circolo sarà *iscritto* nel poligono medesimo.

262. *Angolo al centro* intendesi quello il cui vertice è nel centro d'una circonferenza, ed è formato conseguentemente da due raggi.

TEOREMA I.

263. *Ogni diametro divide il circolo, e la sua circonferenza in due parti uguali.* Fig. 76.

Si applichi la figura *BEC* sopra *BFC* conservando la base comune *BC*; la curva *BEC* coinciderà colla curva *BFC*, senza di che si avrebbero nell'una o nell'altra dei punti disugualmente lontani dal centro; lo che è contro la definizione della circonferenza.

264. *Corollario.* Dei due archi, ne' quali resta divisa la circonferenza da una linea iscritta che non passa pel centro*, * 253.
l'uno è maggiore l'altro è minore della metà della circonferenza medesima; parimente dei due segmenti, ne' quali resta diviso il circolo da essa linea, l'uno è maggiore l'altro è minore della metà di tal circolo; nel seguito, non avvertendo il contrario, intenderemo che una corda competa all'arco, o al segmento minore.

TEOREMA II.

265. *In un medesimo circolo, o in circoli uguali, gli angoli al centro uguali BAC, bac intercettano su la circonferenza archi uguali; reciprocamente agli archi uguali BDC, bde corrispondono angoli al centro uguali.* Fig. 77.

1.° Essendo uguali i raggi *AB*, *ab*, se l'angolo *BAC* sarà uguale all'angolo *bac*, dico che l'arco *BDC* sarà uguale all'arco *bdc*; situando il lato *ab* sopra il lato *AB*, il lato *ac* converrà col lato *AC*, ed il punto *c* cadrà in *C*; laonde tutto l'arco *bdc* coinciderà coll'arco *BDC*, senza di che i punti di questi archi non sarebbero tutti equidistanti dal centro; dunque gli archi *BDC*, *bdc* sono uguali.

2.° Se l'arco *BDC* sarà uguale all'arco *bdc*, dico che l'angolo *BAC* sarà uguale all'angolo *bac*; poichè, ove questi angoli non sieno uguali sia *BAC* il minore; si

supponga *BAE* = *bac*; per la dimostrazione precedente sarà l'arco *BDE* = *bdc*; ma per ipotesi l'arco *BDC* = *bdc*, dunque si avrebbe *BDE* = *BDC*, assurdo evidente; dunque l'angolo *BAC* = *bac*.

Fig. 78. 266. *Corollario.* Se gli angoli formati dai due diametri *BC*, *DE* saranno retti, e perciò uguali fra loro, anche gli archi *BD*, *DC*, *CE*, *EB* saranno uguali. Dunque due diametri perpendicolari dividono la circonferenza in quattro parti uguali.

267. *Definizione.* La quarta parte d'una circonferenza appellasi *quadrante.*

TEOREMA III.

268. *In un medesimo circolo o in circoli uguali gli archi uguali sono sottesi da corde uguali; reciprocamente le corde uguali sottendono archi uguali.*

Fig. 77. 1.° Essendo uguali i raggi *AB*, *ab* se gli archi *BDC*, *bdc* saranno uguali, dico che le corde *BC*, *bc* saranno esse pure uguali. Poichè l'arco *BDC* = *bdc*, avremo
* 265. l'angolo *BAC* = *bac**; inguisachè i due triangoli *ABC*, *abc* avendo un angolo uguale compreso fra lati uguali saranno uguali; e conseguentemente *BC* = *bc*.

2.° Se le corde *BC*, *bc* saranno uguali, dico che gli archi *BDC*, *bdc* saranno essi pure uguali. Poichè *BC* = *bc*, i due triangoli *ABC*, *abc* saranno uguali come equilateri fra loro; dunque l'angolo *BAC* = *bac*, e conse-
* 265. guentemente l'arco *BDC* = *bdc**.

269. *Scolio.* Ma poichè ogni corda sottende due archi
* 264. differenti*, se, posta l'uguaglianza delle corde vorremo inferirne quella degli archi, converrà che d'altra parte si sappia se questi archi sono ambedue minori, o ambedue maggiori della mezza circonferenza.

TEOREMA IV.

270. *In un medesimo circolo, o in circoli uguali gli angoli al centro BAC, BAD stanno fra loro come gli archi BC, BD compresi fra i loro lati.* Fig. 79.

Sia primieramente il rapporto degli archi BC, BD commensurabile; essendo, per esempio, la comune loro misura contenuta 3 volte in BC, e 7 volte in BD, potremo supporre BD diviso in 7 parti uguali, 3 delle quali saranno contenute in BC; talmentechè sarà $\frac{BC}{BD}=\frac{3}{7}$ *. * 169.

Conducendo dei raggi a tutti i punti di divisione di BD, ne risulteranno degli angoli parziali tutti uguali fra loro *; cosicchè uno qualunque di questi angoli diverrà comune misura dei due angoli BAC, BAD; e dovendo tal misura essere contenuta 3 volte in BAC, e 7 volte in BAD, avremo $\frac{BAC}{BAD}=\frac{3}{7}$; donde segue * 265.

che
$$\frac{BAC}{BAD}=\frac{BC}{BD}.$$

In secondo luogo sia il rapporto degli archi BC, BD incommensurabile. Supponendo BD diviso in un numero n qualunque di parti uguali, il punto C cadrà fra due punti di divisione s, e t consecutivi; talmentechè, supposto che in Bs sieno contenute m parti, ed $m+1$ ne sieno contenute in Bt, il rapporto $\frac{BC}{BD}$ sarà compreso fra i limiti $\frac{m}{n}$, $\frac{m+1}{n}$ *. Fig. 80. * 176.

Or se pei punti di divisione di BD si condurranno dei raggi, AC cadrà fra i due raggi consecutivi As, At e l'angolo BAD risulterà diviso in n angoli parziali, dei quali m ne saranno contenuti nell'angolo BAs, ed $m+1$ nell'angolo BAt; cosicchè il rapporto $\frac{BAC}{BAD}$ sarà esso

pure compreso fra i limiti $\frac{m}{n}$, $\frac{m+1}{n}$; dunque avremo

* 178. $\frac{BAC}{BAD}=\frac{BC}{BD}$ *; cioè sussisterà la proporzione

$$BAC : BAD :: BC : BD$$

qualunque sia il rapporto de' due archi BC, BD.

Fig. 78. 271. *Scolio I.* L'angolo retto è la naturale unità di misura degli angoli; e l'arco intercetto fra i lati dell'angolo retto, cioè il quadrante, quella degli archi aventi il medesimo raggio di esso. Ciò posto sia BAD un angolo retto, e l'arco BD sia descritto dal vertice A con un raggio qualunque AB; si conduca il raggio AH a piacere. In virtù del teorema precedente avremo

$$\frac{BAH}{BAD}=\frac{BH}{BD};$$

e fatto $BAD=1$, e $BD=1$, risulterà

$$\frac{BAH}{1}=\frac{BH}{1};$$

dove si vede che il numero con che si può rappresentare un angolo, cioè il rapporto di questo angolo all'unità di misura angolare, è uguale al numero che rappresenta l'arco intercetto fra i lati dell'angolo stesso, cioè al rapporto di questo arco all'unità di misura degli archi. Ma per brevità alla precedente uguaglianza si sostituisce questa puramente convenzionale

$$BAH=BH,$$

per la quale si viene a stabilire che *la misura d'un angolo qualunque A è data dall'arco descritto dal suo vertice come centro con un raggio qualunque;* dovendo questo raggio mantenersi costante per tutti gli angoli che dovranno essere paragonati ad A mediante gli archi compresi fra i loro lati.

272. *Scolio II.* Poichè nel medesimo circolo o in circoli uguali i settori stanno come i loro angoli al centro, si con-

clude che questi settori stanno ancora come gli archi che servono loro di basi.

273. *Scolio III.* Considerando gli archi BH, bh corrispondenti al medesimo angolo al centro BAH, si vedrà che in virtù del teorema dimostrato *, ciascuno di essi sta alla circonferenza di cui è parte come l'angolo BAH, sta a 4 angoli retti; questi archi adunque stanno fra loro come le circonferenze cui appartengono. * 270.

Considerando poi i settori BAH, bAh si vedrà pure che ciascuno di essi sta al circolo di cui fa parte come l'angolo BAH sta a 4 angoli retti; questi settori adunque stanno come i circoli cui appartengono.

274. *Definizione.* Gli archi, o i settori, che in due circoli differenti corrispondono ad angoli al centro uguali, si chiamano *archi, o settori simili.* Gli archi simili stanno fra loro come le circonferenze cui appartengono; ed i settori simili stanno come i circoli.

TEOREMA V.

275. ***Il centro, il mezzo d'un arco, ed il mezzo della sua corda si trovano sopra una medesima linea perpendicolare ad essa corda.***

Essendo il punto F il mezzo dell'arco BC avremo la corda $BF = CF$ *, ed F sarà equidistante dai punti B e C; ma tutti i punti equidistanti da B e C si trovano sopra la perpendicolare inalzata sul mezzo della corda BC; dunque il centro A, il mezzo F dell'arco, ed il mezzo D della sua corda si trovano sopra una medesima linea perpendicolare ad essa corda. Fig. 81. * 268.

276. *Scolio.* Due punti bastano, come sappiamo, a determinare la posizione di una linea retta, dunque ove una linea retta passi per due dei tre punti A, D, F passerà anco pel terzo e riuscirà perpendicolare alla corda. Come pure se da uno di questi punti verrà condotta una perpendicolare alla corda, tal perpendicolare medesima passerà per gli altri due punti; di qui i tre corollari seguenti.

277. *Corollario I.* Il raggio condotto al mezzo d'un arco è perpendicolare alla sua corda, e la divide in due parti uguali.

278. *Corollario II.* Il raggio che passa pel mezzo d'una corda risulta perpendicolare a questa corda, e ne divide l'arco in due parti uguali.

279. *Corollario III.* Il raggio perpendicolare ad una corda divide questa corda in due parti uguali, e divide in due parti uguali anche l'arco sotteso.

TEOREMA VI.

Fig. 82. 280. *La retta perpendicolare all'estremità del raggio AB è una tangente del circolo; reciprocamente ogni tangente BC è perpendicolare al raggio condotto al punto di contatto.*

1.° L'obliqua AD condotta a piacere dal centro sopra BC è maggiore della perpendicolare AB, o della sua uguale AF; dunque l'estremità D di questa obliqua è fuori del circolo; dunque la linea BC non ha a comune col circolo che il solo punto B, ove lo tocca; perciò essa è
* 256. una tangente di tal circolo *.

2.° Reciprocamente se la linea BC tocca il circolo nel solo punto B, ogni linea, tranne AB, condotta dal centro sopra BC passerà fuori del circolo; dunque AB è la più corta linea che dal centro possa abbassarsi sopra BC; dunque AB è perpendicolare a BC.

281. *Corollario I.* Per un punto B della circonferenza non si può condurre che una sola tangente; infatti una sola perpendicolare si può condurre al raggio nel medesimo punto B.

282. *Corollario II.* Ogni circolo che tocca una linea retta in un punto solo, ha il centro su la perpendicolare condotta per esso punto alla retta medesima.

TEOREMA VII.

283. *Ogni angolo formato da una tangente e da una secante, o da due secanti, che si tagliano su la circonferenza ha per misura la metà dell' arco compreso fra i suoi lati.*

Fig. 83. 1.° L' angolo formato dalla tangente e dalla secante che s' incontrano su la circonferenza sia CBD, oppure CBE. Conducasi il raggio AB al punto di contatto, ed il raggio AG, ossia il diametro GH perpendicolare a BC; poichè ABD è un angolo retto, l' angolo CBD sarà il complemento dell' angolo ABF; e poichè il triangolo ABF è rettangolo, l' angolo FAB sarà esso pure il complemento dello stesso angolo ABF; perlochè avremo $CBD = GAB$; e l' arco BG, misura dell' angolo GAB, sarà pure la misura dell' angolo CBD; ma BG è la metà dell' arco BGC*; dunque l' angolo CBD avrà per misura la metà * 279. dell' arco BGC. Lo stesso dimostrasi relativamente all' angolo CBE, il quale essendo uguale all' angolo BAH, avrà per misura l' arco BH, cioè la metà dell' arco BHC. Dunque l' angolo formato dalla tangente, e dalla secante che si tagliano su la circonferenza ha sempre per misura la metà dell' arco compreso fra i suoi lati.

Fig. 84. 2.° L' angolo formato da due secanti che si tagliano su la circonferenza sia ABC. Supponiamo che pel punto B sia condotta una tangente DE al circolo; ne risulteranno due angoli ABD, CBE i quali per la dimostrazione precedente avranno respettivamente per misura le metà degli archi AB, CB; ma tali angoli sommati coll' angolo ABC formano due angoli retti, e la misura di due angoli retti dee formare due quadranti o la mezza circonferenza, dunque la misura dell' angolo ABC sarà necessariamente la metà dell' arco AHC. Dunque anche l' angolo formato da due secanti che si tagliano su la circonferenza ha per misura la metà dell' arco intercetto fra i suoi lati.

284. *Corollario I.* L' angolo iscritto e l' angolo formato

da una tangente e da una corda hanno per misura la metà dell' arco intercetto fra i lati; poichè ogni corda ossia ogni linea iscritta prolungata diviene una secante del circolo.

285. *Corollario II.* Gli angoli ABC, AFC iscritti nel medesimo arco $ABFC$ o in archi uguali, sono uguali; stantechè tutti hanno per misura la metà di un medesimo arco AHC o le metà di archi uguali.

Fig. 85. 286. *Corollario III.* Ogni angolo ABC iscritto nella mezza circonferenza è retto; avendo esso per misura la metà dell' altra mezza circonferenza AHC compresa fra i suoi lati cioè il quadrante. D' altra parte si vede che essendo il punto O ugualmente distante dai punti A, B, C il trian-
* 115. golo ABC dev' essere rettangolo in B*.

Fig. 84. 287. *Corollario IV.* Ogni angolo ABC iscritto in un arco ABC maggiore della mezza circonferenza è acuto, perchè ha per misura la metà dell' arco AHC minore della mezza circonferenza.

Ogni angolo AHC iscritto in un arco AHC minore della mezza circonferenza è ottuso, avendo esso per misura la metà dell' arco ABC maggiore della mezza circonferenza.

288. *Corollario V.* L' angolo al centro è doppio dell' angolo iscritto quando essi nella medesima circonferenza o in circonferenze uguali intercettano archi uguali. Così l' angolo AOC sarà doppio dell' angolo ABC; perchè l' arco AHC è la misura del primo, e la sua metà è la misura del secondo.

289. *Corollario VI.* Gli angoli opposti B ed H d' un quadrilatero iscritto $ABCH$ sono supplementari; perchè la somma dei due archi che misurano questi angoli è uguale alla metà della circonferenza.

TEOREMA VIII.

290. *Due rette parallele AB, CD intercettano su la circonferenza archi uguali; reciprocamente due rette che intercettano su la circonferenza archi uguali sono parallele.* Fig. 86.

Le rette AB, CD possono essere ambedue secanti, o l'una secante l'altra tangente, o ambedue tangenti; ma la dimostrazione seguente si applica ugualmente a tutti i casi.

1.° Conducendo MN gli angoli AMN, MND come alterni-interni saranno uguali; or questi angoli sono respettivamente misurati dalla metà degli archi MPN, MQN*; dunque questi archi sono uguali. * 283.

2.° Sieno gli archi MPN, MQN uguali; le loro metà saranno pure uguali, e l'angolo $AMN = MND$; conseguentemente AB è parallela a CD.

291. *Scolio.* È evidente che ove le due linee AB, CD sieno tangenti la retta MN sarà diametro della circonferenza.

TEOREMA IX.

292 *Ogni angolo BAC il cui vertice è fra il centro e la circonferenza ha per misura la semisomma de' due archi BC, DE l'uno compreso fra i suoi lati, l'altro fra i loro prolungamenti.* Fig. 87.

Conducendo DF parallela ad EB, avremo $BF = DE$*, e l'angolo $BAC = FDC$; ma FDC ha per misura la metà dell'arco CF*; e $CF = BC + BF = BC + DE$; dunque l'angolo BAC ha per misura la metà della somma de' due archi BC, DE. * 290. * 283.

TEOREMA X.

Fig. 88. 293. *Ogni angolo BAC il cui vertice è fuori del circolo ha per misura la semidifferenza de' due archi BC, DE compresi fra i suoi lati.*

Conducendo DF parallela ad AB, avremo qui pure $BF = DE$, e l'angolo $BAC = FDC$; ma FDC ha per misura la metà dell'arco CF, e $CF = BC - BF = BC - ED$; dunque l'angolo BAC ha per misura la metà della differenza de' due archi BC, DE.

Fig. 89. Fig. 90. Se l'angolo fosse formato da una tangente e da una secante o da due tangenti avrebbe pur luogo lo stesso teorema, lo che dimostrasi nel medesimo modo.

294. *Scolio.* L'angolo EAC formato dalle due tangenti AB, AC che partono dallo stesso punto A è quello cui abbiamo dato il nome di *angolo circoscritto**. * 259.

È da osservare che le parti AE, AD di queste tangenti comprese fra i punti E e D del loro contatto colla circonferenza, ed il vertice A sono uguali. Infatti condotta ED il triangolo AED avendo gli angoli AED, ADE uguali, come misurati dalla metà dell'arco ED*, è isoscele. * 284.

TEOREMA XI.

Fig. 91. 295. *In un medesimo circolo, o in circoli uguali di due archi ambedue minori d'una mezza circonferenza il maggiore è sotteso da una corda maggiore, e reciprocamente la corda maggiore sottende il maggiore arco*

1.° Sia l'arco $BC > AB$; conducendo AC avremo il triangolo ABC nel quale sarà l'angolo $A > C$, poichè la misura del primo è maggiore di quella del secondo; dunque il lato BC opposto all'angolo A sarà maggiore del lato AB opposto all'angolo C*; dunque l'arco maggiore è sotteso dalla corda maggiore. * 93.

2.° Sia la corda $BC > AB$, l'angolo A opposto alla prima sarà maggiore dell'angolo C opposto alla seconda; dunque l'arco BC, la cui metà serve di misura all'angolo A sarà maggiore dell'arco AB la cui metà serve di misura all'angolo C; dunque la maggior corda sottende il maggior arco.

296. *Scolio.* Conviene però che questi archi non sieno maggiori della mezza circonferenza affinchè le loro metà possano servire di misura agli angoli opposti alle loro corde. L'arco BAC maggiore di una mezza circonferenza circonda l'angolo A, e non lo misura, ed è chiaro che quanto più è grande l'arco circondante tanto più piccolo è l'angolo in esso iscritto; cosicchè, ove gli archi di cui si tratta fossero maggiori della mezza circonferenza, avrebbe luogo la proposizione contraria.

TEOREMA XII.

297. *Il diametro d'un circolo è maggiore di ogni corda.*

Sia AC un diametro, ed AB una corda condotta a piacere, dico essere $AC > AB$. Fig. 85.

Tirando BC otterremo il triangolo ABC, nel quale l'angolo B sarà retto, e per conseguenza C acuto; dunque il lato AC opposto a B sarà maggiore del lato AB opposto a C.

298. *Corollario.* Ne consegue che la maggior linea retta che si può iscrivere in un circolo è uguale al di lui diametro.

TEOREMA XIII.

299. *Due corde uguali sono ugualmente distanti dal centro, e di due corde disuguali la minore è la più distante dal centro.* Fig. 93.

1.° Sieno le corde BC, DE uguali; si abbassino dal centro le perpendicolari AF, AG, e si conducano i raggi

AB, AE. Poichè le perpendicolari AF, AG dividono le corde BC, DE in parti uguali, sarà BF la metà di BC, EG la metà di ED, e perciò $BF = EG$; laonde i due triangoli rettangoli ABF, AEG avendo un lato, e
* 106. l'ipotenusa respettivamente uguali, saranno uguali*; dunque $AF = AG$; dunque le perpendicolari che misurano le distanze del centro dalle corde sono uguali.

2.° Sia la corda BH maggiore di DE, l'arco BMH dovrà esser maggiore dell'arco DNE; perlochè potrà farsi $BMC = DNE$. Ciò posto si conduca la corda BC, e si abbassino le perpendicolari AK, AF sopra le corde BH,
* 96. BC; si vedrà che $AF > AI$; ma $AI > AK$*, dunque a più forte ragione $AF > AK$. Ma essendo per costruzione gli archi BMC, DNE uguali, le corde loro BC, DE sono pure uguali, ed equidistanti dal centro; dunque $AF = AG$, e perciò $AG > AK$; dunque di due corde disuguali la minore è la più distante dal centro.

TEOREMA XIV.

Fig. 93. 300. *Ad ogni triangolo può sempre circoscriversi un circolo.*

Poichè in ogni triangolo le tre perpendicolari FA, EA, HA inalzate su i mezzi dei lati s'incontrano nel medesimo
* 111. punto A equidistante dai vertici B, C, D* segue che la circonferenza descritta dal punto A come centro con raggio AB passerà pei vertici medesimi, e risulterà circoscritta al triangolo.

301. *Scolio I.* Osservando che A è l'unico punto che
* 112. sia ugualmente distante dai tre vertici B, C, D*, concluderemo che ad un triangolo dato non può circoscriversi che una sola circonferenza.

302. *Scolio II.* Per tre punti dati non disposti in linea retta può sempre passare una circonferenza, ma non ve ne può passare che una sola.

303. *Scolio III.* Due circonferenze non possono tagliarsi in più di due punti, perchè se avessero tre punti comuni si

confonderebbero, e non farebbero che una sola e medesima circonferenza.

TEOREMA XV.

304. *In ogni triangolo può sempre iscriversi un circolo.* Fig. 94.

Poichè in ogni triangolo le tre rette BA, CA, DA che dividono in due parti uguali ciascuno de' suoi angoli s' incontreranno in un punto A equidistante dai tre lati BC, CD, DB*, segue che abbassando da questo punto le tre perpendicolari AF, AG, AH sopra i lati medesimi, e descrivendo dal punto A come centro, e con raggio uguale ad AF una circonferenza, essa passando pei punti F, G, H risulterà iscritta nel triangolo; infatti il lato BC perpendicolare alla estremità del raggio AF è una tangente, e per la stessa ragione sono pure tangenti gli altri due lati CD, DB. * 109.

305. *Scolio.* Qui pure osservando che A è l'unico punto equidistante dai tre lati ne verrà che in un triangolo dato non può iscriversi che una sola circonferenza.

TEOREMA XVI.

306. *La linea retta che congiunge i centri A, B di due circonferenze che hanno due punti comuni C, D è perpendicolare alla retta che unisce questi punti, e la divide in due parti uguali.* Fig. 95.

Poichè i punti C, D appartengono alla circonferenza il cui centro è A, sarà $AC = AD$; e poichè i medesimi punti C, D appartengono pure alla circonferenza il cui centro è B, sarà $BC = BD$; adunque i punti A e B sono respettivamente equidistanti dai punti C e D; adunque la linea retta AB che congiunge i centri è perpendicolare a CD, e la divide nel punto I in due parti uguali *. * 101.

307. *Corollario I.* Essendo AI perpendicolare sopra CD avremo $AC > AI$, e per la stessa ragione $BC > BI$;

dal che risulta essere ciascun circolo tagliato dalla circonferenza dell' altro; adunque due circonferenze aventi due punti comuni s' intersecano, e si tagliano in essi punti

308. *Corollario II.* Sia $AC > BC$; il triangolo ABC darà $AB < AC + BC$, $AB > AC - BC$, donde segue che quando due circonferenze si tagliano la distanza de' centri è minore della somma dei raggi, e maggiore della loro differenza.

TEOREMA XVII.

309. *Quando due circonferenze si toccano in un sol punto, i centri ed il punto di contatto sono sulla medesima linea retta.*

Fig. 95. Sieno A e B i centri delle due circonferenze; supponendo che il punto ad esse comune sia in C fuori della linea de' centri avrebbe luogo il triangolo ABC, nel quale AC, BC sarebbero i raggi delle due circonferenze. Rovesciando questo triangolo ne otterremmo un altro ABD, e sarebbe $AD = AC$, $BD = BC$; cosicchè anche il punto D si troverebbe sopra le circonferenze medesime. Adunque toccandosi le due circonferenze in un punto solo non dee aver luogo il triangolo ABC, cioè la linea de' centri dee passare pel punto di contatto.

Fig. 96, e 97. 310. *Corollario I.* Due circoli si possono toccare in un punto C esternamente, ed internamente; e poichè la linea che congiunge i centri dee sempre passare pel punto di contatto, nel 1.° caso sarà la distanza de' centri uguale alla somma de' raggi, e nel 2.° uguale alla loro differenza.

Fig. 98. Quando due circoli non si toccano, ed uno di essi è fuori dell' altro la distanza de' centri è maggiore della somma dei raggi; infatti $AB > AC + BD$.

Fig. 99. Quando due circoli non si toccano, ed uno di essi è dentro l' altro la distanza de' centri è minore della differenza de' raggi; infatti $AB < AC - BD$.

Fig. 96, e 97. 311. *Corollario II.* La perpendicolare DF inalzata sulla linea retta de' centri nel punto di contatto C, sarà una
* 280. tangente comune ai due circoli *.

Adunque tutte le circonferenze che hanno i loro centri sopra una medesima retta AB, e che passano per lo stesso punto C di questa retta sono *tangenti fra loro*, ed alla perpendicolare DF inalzata nel punto del comune contatto su la linea dei centri. Fig. 100.

TEOREMA XVIII.

312. *Se la distanza de' centri di due circonferenze è minore della somma de' loro raggi, e nel tempo stesso maggiore della loro differenza, queste due circonferenze si taglieranno.*

Perocchè se non si tagliassero, o si toccherebbero in un punto solo, o non s'incontrerebbero in verun punto; nel 1.° caso la distanza de' centri esser dovrebbe uguale alla somma de' raggi, o uguale alla loro differenza *; nel 2.° caso la distanza de' centri sarebbe maggiore della somma de' raggi, o minore della loro differenza *; in ambedue i casi ne verrebbe una conseguenza contraria all' ipotesi. * 310. * 310.

TEOREMA XIX.

313. *Se la distanza de' centri di due circonferenze è uguale alla somma de' loro raggi, queste due circonferenze si toccheranno esteriormente; se tal distanza è uguale alla differenza dei raggi le due circonferenze si toccheranno interiormente.*

Perocchè se non s' incontrassero, o si tagliassero ne conseguirebbe una manifesta impossibilità contraria alle ipotesi*. * 308. e 310.

TEOREMA XX.

314. *Le parti di due corde BF, DE che si tagliano nel circolo sono inversamente proporzionali.* Fig. 101.

Conducendo BE, e DF si avranno i due triangoli

ABE, ADF simili; infatti gli angoli in A sono uguali come opposti al vertice, e gli angoli B e D sono uguali come misurati dalla metà dello stesso arco EF. Dunque sarà

$$BA : AD :: AE : AF;$$

donde si rileva che una parte della corda BF sta ad una parte della corda DE, come l' altra parte di questa sta all'altra della prima; lo che si esprime con dire che le parti di due corde BF, DE che si tagliano nel circolo, sono inversamente proporzionali.

315. *Corollario I.* Dalla precedente proporzione si ricava che $BA \times AF = AD \times AE$; dunque il rettangolo delle due parti d' una delle corde è equivalente al rettangolo delle due parti dell' altra.

Fig. 102. 316. *Corollario II.* Sia ED una corda perpendicolare al diametro BF; avremo $BA : AD :: AE : AF$, ovvero, poichè $AD = AE$ *,
* 279.

$$BA : AE :: AE : AF;$$

donde segue che *la perpendicolare EA abbassata da un punto della circonferenza sul diametro è media proporzionale fra i due segmenti BA, AF del diametro stesso.*

317. *Scolio.* Il triangolo BEF rettangolo in E somministra anch' esso la medesima proporzione *; e più quest' altra
* 235.

* 236.

$$BF : BE :: BE : BA^*,$$

dalla quale risulta che *ogni corda BE è media proporzionale fra il diametro ed il segmento adiacente.*

TEOREMA XXI.

Fig. 103. 318. *Due secanti AB, AD che partono dal medesimo punto A, e terminano alla circonferenza, sono inversamente proporzionali alle loro parti esterne AF, AE.*

Conducendo BE, DF i triangoli ABE, ADF saranno simili; infatti essi hanno un angolo in A comune, e gli angoli B e D uguali come misurati dalla metà dello stesso arco EF. Dunque avremo

$$AB : AD :: AE : AF,$$

come si doveva dimostrare.

319. *Corollario.* Rilevasi di qui essere il rettangolo $AB \times AF$ equivalente al rettangolo $AD \times AE$.

320. *Scolio.* Le due proposizioni XX, e XXI costituiscono veramente un solo teorema che può enunciarsi così; *se due secanti s' incontrano nel circolo o fuori del circolo, le quattro parti loro, comprese fra il punto d' intersezione e la circonferenza, sono inversamente proporzionali.*

TEOREMA XXII.

321. *Se da un punto A preso fuori del circolo si conduce una tangente AF, ed una secante AD, la tangente sarà media proporzionale fra la secante AD e la sua parte esterna AE.* Fig. 104.

Si conducano le corde FE, FD; ne risulteranno i triangoli AFD, AFE simili; poichè essi hanno l'angolo A comune, e l' angolo AFE formato dalla tangente AF e dalla corda FE, uguale all' angolo iscritto ADF *; dunque questi triangoli daranno la proporzione * 284.

$$AD : AF :: AF : AE.$$

322. *Corollario.* Laonde il quadrato $\overline{AF}^2$ della tangente sarà equivalente al rettangolo $AD \times AE$ compreso fra la secante e la sua parte esterna.

TEOREMA XXIII.

323. *Ogni poligono regolare può essere iscritto e circoscritto ad un circolo.* Fig. 105.

1.° Sia $ABCD$ ec., un poligono regolare; dividendo in due parti uguali ciascuno degli angoli A e B avremo il

triangolo AOB isoscele; quindi conducendo OC i triangoli AOB, BOC poichè hanno un angolo uguale in B compreso fra lati respettivamente uguali, saranno uguali; dunque $OB = OC$, e l' angolo C sarà esso pure diviso in due parti uguali dalla retta OC. Ora conducendo OD si proverà nello stesso modo essere $OC = OD$ e così di seguito. Adunque il punto O essendo ugualmente distante da tutti i vertici del poligono, sarà il centro del circolo, che avendo il raggio OA, si può circoscrivere al poligono medesimo. Dunque il poligono regolare può iscriversi in un circolo.

2.° Le corde uguali AB, BC, ec., sono equidistanti dal centro; dunque le perpendicolari abbassate dal centro O su le corde medesime saranno uguali; perciò la circonferenza descritta dal centro O e col raggio uguale ad una di esse perpendicolari toccherà tutti i lati del poligono; di più i punti di contatto saranno i punti di mezzo degli stessi lati. Dunque il poligono regolare può essere circoscritto al circolo.

324. *Scolio I.* Il punto O centro comune del circolo iscritto, e del circolo circoscritto, si considera pure come *centro del poligono;* cosicchè l'angolo AOB formato da due raggi del circolo circoscritto condotti alle estremità di un lato AB, chiamasi *angolo al centro del poligono.*

Poichè tutti gli angoli al centro del poligono sono uguali fra loro, e la loro somma è uguale a quattro angoli retti è manifesto che *il valore dell' angolo al centro si troverà dividendo quattro angoli retti pel numero dei lati del poligono.*

325. *Scolio II.* La perpendicolare OI abbassata dal centro sopra uno dei lati del poligono, divide l' angolo al centro AOB in due parti uguali. Infatti essendo il triangolo AOB isoscele la perpendicolare OI abbassata su la base
* 91. AB, divide l' angolo al vertice in due parti uguali *. La perpendicolare medesima, che è quanto dire il raggio del circolo iscritto, si chiama talora *apotema* del poligono regolare.

TEOREMA XXIV.

326. *Se si divide la circonferenza in un numero qualunque di parti uguali; 1.° unendo progressivamente i punti di divisione A, B, C, ec., con altrettante corde, si avrà un poligono iscritto regolare; 2.° conducendo pei punti di divisione altrettante tangenti, si avrà un poligono circoscritto anch' esso regolare.* Fig. 106.

1.° Infatti nel poligono iscritto gli angoli A, B, C, ec., saranno uguali come iscritti in archi uguali *, ed i lati AB, * 285.
BC, CD, ec., saranno uguali come corde di archi uguali.

2.° Rispetto al poligono circoscritto è da osservare che i triangoli isosceli * AHB, BIC, CKD, ec., sono ugua- * 294.
li, avendo essi un lato uguale contiguo ad angoli tutti uguali fra loro, come misurati dalle metà di archi uguali ad
AB*; perciò gli angoli H, I, K, ec., saranno uguali, * 284.
ed $AH = HB = BI$ ec., cioè i lati GH, HI, IK, ec., saranno essi pure uguali.

TEOREMA XXV.

327. *L' area d' un poligono ABCD circoscritto ad un circolo ha per misura il suo perimetro moltiplicato per la metà del raggio del circolo iscritto.* Fig. 107.

Dal centro O del circolo si conducano le rette OA, OB, OC, ec.; il poligono risulterà decomposto in tanti triangoli quanti sono i suoi lati; e prendendosi i lati del poligono per basi di questi triangoli il raggio OI del circolo iscritto sarà la loro comune altezza; cosicchè le loro aree avranno per misura i prodotti $AB \cdot \frac{OI}{2}$, $BC \cdot \frac{OI}{2}$, $CD \times \frac{OI}{2}$, ec.; la somma dei quali è espressa da
$(AB + BC + CD + \text{ec.}) \times \frac{OI}{2}$*; cioè dal perimetro del * 157.

poligono moltiplicato per la metà del raggio del circolo iscritto; dunque l' area d' un poligono circoscritto ad un circolo ha per misura il proprio perimetro moltiplicato per la metà del raggio del circolo iscritto.

328. *Corollario I.* L' area d' un triangolo può essere espressa dal suo perimetro moltiplicato per la metà del raggio del circolo iscritto; infatti in ogni triangolo può sempre
* 304. iscriversi un circolo *.

329. *Corollario II.* L' area del poligono regolare ha per misura il suo perimetro moltiplicato per la metà del raggio
* 325. del circolo iscritto, cioè per la metà della sua apotema *.

TEOREMA XXVI.

Fig. 108. 330. *I perimetri dei poligoni regolari d' un medesimo numero di lati stanno come i raggi dei circoli circoscritti, ed anche come i raggi dei circoli iscritti; le loro superficie stanno come i quadrati di questi medesimi raggi.*

Sieno AB, ed ab i lati di due poligoni regolari simili; O ed o i loro respettivi centri; AO, ed ao i raggi dei circoli circoscritti, e le perpendicolari OD, ed od abbassate dai centri sopra i lati i raggi dei circoli iscritti. Avendo i poligoni il medesimo numero di lati gli angoli al centro AOB, aob saranno uguali; e conseguentemente anche gli angoli AOD, aod essendo le metà degli angoli al cen-
* 325. tro *, saranno uguali; dunque i triangoli ADO, ado simili, ed i triangoli ABO, abo anch' essi per conseguenza simili, daranno le proporzioni

$$AB : ab :: OA : oa :: OD : od;$$

ma i perimetri dei due poligoni, poichè essi sono simili, stanno come i loro lati AB, ab, e le loro superfici come i quadrati di questi lati, dunque i perimetri dei poligoni staranno pure come i raggi OA, oa dei circoli circoscritti, o come i raggi OD, od dei circoli iscritti, e le loro superfici come i quadrati dei raggi medesimi.

LEMMA

331. *La differenza dei perimetri di due poligoni regolari l'uno iscritto in un circolo, l'altro circoscritto, e quella eziandio delle loro superficie, possono riuscire minori di qualunque quantità data.*

Si conducano due diametri perpendicolari; essi divide- Fig. 106.
ranno la circonferenza in quattro archi uguali; dividendo
ciascuno di tali archi in due parti uguali, divideremo la
circonferenza in otto parti uguali, e così continuando inde-
finitamente la bisezione degli archi, potremo pervenire a
dividere la circonferenza in un numero di parti grande
quanto vogliamo. Ad ognuna di queste divisioni della cir-
conferenza corrispondono un poligono iscritto, ed un poligo-
no simile circoscritto*; i perimetri di tali poligoni staranno * 326.
fra loro come le respettive apoteme OX, OA, e le loro
superfici come i quadrati delle apoteme medesime*; ma è da * 330.
osservare che quanto più l'arco AB è piccolo tanto più è
grande l'apotema OX', essendo essa la distanza della corda * 299.
di quest'arco dal centro; cosicchè moltiplicandosi il numero
dei lati dei poligoni l'apotema OX tenderà ad uguagliare
l'apotema OA, la quale è costante per tutti i poligoni
circoscritti, ed i rapporti $\frac{OX}{OA}$, $\frac{\overline{OX}'}{\overline{OA}}$, il primo uguale al
rapporto dei perimetri, l'altro uguale a quello delle superfici si approssimeranno continuamente all'unità; dunque i due poligoni si possono determinare in modo che la differenza dei loro perimetri, e quella delle loro superfici riescano minori di qualunque quantità data.

332. *Scolio I.* Poichè la circonferenza ed i perimetri dei
poligoni regolari sono linee convesse*, ne viene che una cir- * 135, e
conferenza è minore del perimetro di qualunque poligono 250.
ad essa circoscritto, e maggiore del perimetro di qualunque
poligono in essa iscritto*; i perimetri adunque P e P' di * 143.
due poligoni regolari simili l'uno circoscritto, l'altro iscritto

in un circolo, comprenderanno la circonferenza C di questo circolo; e poichè la loro differenza $P - P'$ può supporsi minore di qualunque quantità data, questi perimetri si potranno considerare come i limiti della medesima circonferenza.

333. *Scolio II.* Parimente la superficie S d'un circolo è evidentemente minore di quella di ogni poligono circoscritto, e maggiore di quella di ogni poligono iscritto; dunque le superfici s ed s' di due poligoni regolari simili l'uno circoscritto, l'altro iscritto in un circolo comprenderanno la superficie S di questo circolo; e poichè la loro differenza $s - s'$ può supporsi minore di qualunque quantità data, queste superfici si potranno considerare come i limiti del medesimo circolo S.

334. *Scolio III.* Sia R il raggio della circonferenza C cui è circoscritto P ed iscritto P'; r sia il raggio della circonferenza iscritta in P';

sarà $$P : P' :: R : r$$

ma $$\frac{R}{2} : \frac{r}{2} :: R : r;$$

dunque, moltiplicando queste due proporzioni termine a termine, avremo

$$P \times \frac{R}{2} : P' \times \frac{r}{2} :: R^2 : r^2$$

e poichè OX, ora rappresentato da r, moltiplicandosi i
lati dei poligoni si approssima continuamente ad OA ossia ad
R, perciò il rettangolo $P' \times \frac{r}{2}$ si approssima continuamen-
te al rettangolo $P \times \frac{R}{2}$; del che ci rendeva indiretta ragio-
* 331. ne anco il lemma dimostrato*, essendo questi rettangoli
respettivamente equivalenti alle superfici s, s'; dunque la
differenza di questi due rettangoli potrà riuscire piccola
quanto vuolsi.

Ma poichè la circonferenza è minore di P e maggiore di P', ed R è maggiore di r; dunque il rettangolo $C \times \frac{R}{2}$ costituito dalla circonferenza C e dalla metà del suo raggio è minore di $P \times \frac{R}{2}$, e maggiore di $P' \times \frac{r}{2}$. In conseguenza di tutto ciò questi due rettangoli si possono considerare come i limiti del rettangolo $C \times \frac{R}{2}$.

TEOREMA XXVII.

335. *Le circonferenze dei circoli stanno fra loro come i raggi, e le loro superfici come i quadrati dei medesimi raggi.*

1.° Sieno C e c due circonferenze, R ed r i loro raggi, dico che i rapporti $\frac{C}{R}$, $\frac{c}{r}$ sono uguali. Rappresentando P e p i perimetri di due poligoni regolari d'un medesimo numero di lati circoscritti alle due circonferenze, e P' e p' i perimetri di due poligoni iscritti simili ai precedenti, la circonferenza C sarà compresa fra i perimetri P e P', e la circonferenza c lo sarà fra i perimetri p e p'. Da ciò segue che i rapporti $\frac{P}{R}$, $\frac{P'}{R}$ comprendono il rapporto $\frac{C}{R}$; ed i rapporti $\frac{p}{r}$, $\frac{p'}{r}$ comprendono essi pure il rapporto $\frac{c}{r}$. Ma
$\frac{P}{R} = \frac{p}{r}$, $\frac{P'}{R} = \frac{p'}{r}$ *, dunque i rapporti $\frac{C}{R}$, $\frac{c}{r}$ sono ambedue * 330.
compresi fra i limiti $\frac{P}{R}$, $\frac{P'}{R}$; i quali, per la natura dei loro
numeratori *, differiranno fra loro d'una quantità, che potrà * 331.
riuscire minore di qualunque quantità data, stantechè il loro comune denominatore R qualunque sia il numero dei
lati dei poligoni P e P' rimane sempre lo stesso; dunque * * 178.
$\frac{C}{R} = \frac{c}{r}$.

2.° Sieno S ed s le superfici di due circoli; dico che i rapporti $\frac{S}{R^2}$, $\frac{s}{r^2}$ sono uguali.

* 331. Ponendo mente allo Scolio II. del Lemma *, la dimostrazione potrà farsi in un modo analogo al precedente.

336. *Corollario I.* I raggi di due circonferenze stanno evidentemente come i loro diametri; dunque due circonferenze di due circoli stanno anch'esse, come i loro diametri e le loro superficie come i quadrati dei medesimi diametri.

337. *Corollario II.* I tre circoli descritti coi tre lati d'un
Fig. 109. triangolo ABC rettangolo presi per diametri staranno fra loro come i quadrati dei medesimi lati; ma il quadrato della ipotenusa AB equivale la somma dei quadrati degli altri due lati AC, BC; dunque il circolo descritto su la ipotenusa equivale alla somma dei circoli descritti sopra i due lati dell'angolo retto.

Conseguentemente il semicircolo $AECGB$ equivarrà alla somma dei due semicircoli ADC, CFB; donde si ricava che il triangolo rettangolo ACB equivale alla somma dei due spazi curvilinei $ADCE$, $BFCG$ i quali son detti *lunule*.

338. *Corollario III.* Poichè gli archi simili stanno fra loro nella ragione delle circonferenze cui appartengono, ed
* 274. i settori simili stanno come i circoli *, ne consegue che gli archi simili stanno pure come i respettivi raggi, ed i settori simili come i quadrati dei raggi medesimi.

TEOREMA XXVIII.

339. *L'area del circolo ha per misura il prodotto della sua circonferenza per la metà del suo raggio.*

Sia R il raggio del circolo, C la sua circonferenza, S la sua superficie; P e P' sieno i perimetri di due poligoni regolari l'uno circoscritto, l'altro iscritto ad esso circolo, ed s, s' le loro superfici; finalmente sia r il raggio del circolo iscritto nel poligono P'.

* 333. Le superfici s, s' dei poligoni sono i limiti del circolo S *. D'altra parte i rettangoli $P \times \frac{R}{2}$, $P' \times \frac{r}{2}$ sono i limiti del rettangolo $C \times \frac{R}{2}$ costituito dalla circonferenza C e dalla

metà del suo raggio R*. Ma $s = P \times \frac{R}{2}$, $s' = P' \times \frac{r}{2}$; * 331.

dunque il circolo S, ed il rettangolo $C \times \frac{R}{2}$ si trovano ambedue fra i medesimi limiti, cioè fra i due poligoni P, P' la cui differenza può riuscire minore di qualunque quantità; dunque i rapporti del circolo S, e del rettangolo $C \times \frac{R}{2}$ ad una comune unità superficiale, si trovano ambedue fra i rapporti dei due poligoni P, P' alla medesima unità, la differenza de' quali potrà considerarsi minore di qualunque quantità data; dunque il rapporto del circolo S all' unità è uguale al rapporto del rettangolo $C \times \frac{R}{2}$ all' unità medesima; dunque il circolo è equivalente al rettangolo costituito dalla sua circonferenza e dalla metà del suo raggio, o in altri termini il circolo ha per misura la sua circonferenza moltiplicata per la metà del suo raggio.

340. *Scolio.* Rappresentando colla greca lettera π il rapporto costante della circonferenza al diametro, come si pratica dalla più parte dei geometri, una circonferenza qualunque di cui D sia il diametro, ed R il raggio, potrà rappresentarsi colla formula $\pi \times D$, o $2\pi \times R$.

Laonde, poichè la superficie del circolo ha per misura la sua circonferenza moltiplicata per la metà del raggio, ossia pel quarto del diametro, moltiplicando $\pi \times D$, o $2\pi \times R$, per $\frac{1}{4} D$, o per $\frac{1}{2} R$, avremo le formule $\frac{1}{4} \pi D^2$, o πR^2 delle quali la prima rappresenterà il circolo di cui D è il diametro, l' altra rappresenterà il circolo il cui raggio è R.

PROBLEMI

RELATIVI AI QUATTRO PRIMI LIBRI.

PROBLEMA I.

341. *Trovare un punto le cui distanze dal punto A e dal punto B sieno uguali ad una distanza data CD.* Fig. 110.

Fatto centro in A e con un raggio uguale alla distanza CD si descriva un arco, fatto centro in B e col medesimo raggio si descriva un altro arco che tagli il precedente; l' intersezione F di questi due archi sarà il punto richiesto. Infatti le distanze di F dal punto A, e dal punto B sono uguali alla distanza data CD.

342. *Scolio.* Il punto F sarà situato sopra la perpendicolare EG inalzata sul mezzo E della retta AB*. E * 100. siccome AE è la più corta distanza del punto A dalla perpendicolare medesima, perciò onde abbia luogo l' intersezione F degli archi conviene che il loro raggio, ossia la distanza data CD, sia maggiore della metà di AB.

PROBLEMA II.

343. *Trovare un punto che sia nella medesima direzione di altri due punti dati A e B.* Fig. 111.

Dai punti A e B come centri si descrivano col medesimo raggio o con raggi differenti due archi che s' incontrino in C, ed in D. Ogni punto K equidistante da C e da D sarà nella medesima direzione dei punti dati A e B.

Infatti la retta che congiunge i centri di due circonferenze che s' incontrano è perpendicolare alla retta che unisce i punti d' intersezione e la divide in due parti uguali; dunque

ogni punto equidistante da C e da D si trova sopra la perpendicolare che si potrebbe inalzare sul mezzo della retta
* 101. che congiungesse il punto C col punto D*; dunque i punti A, B, K trovandosi tutti sopra questa perpendicolare, saranno nella medesima direzione.

344. *Scolio I.* Come si è trovato il punto K così se ne troveranno molti altri nella medesima direzione di A e B; ed è chiaro che tra essi potrà mettersi la necessaria continuità onde la linea che si può far passare per tutti questi punti non presenti alcun sensibile seno, cioè non devii sensibilmente dalla linea retta.

345. *Scolio II.* Ma troppo lunga sarebbe questa pratica per la descrizione di una linea retta, e perciò si fa uso della *riga*, della cui esattezza si può giudicarè facendone scorrere il lembo su tre punti A, K, B che sieno rigorosamente nella medesima direzione.

PROBLEMA III.

346. *Condurre una perpendicolare ad una linea retta data.*

Fig. 112. 1.° La perpendicolare debba dividere in due parti uguali la retta data AB. Si cerchino due punti M, N respettivamente equidistanti da A e da B, e si tiri la linea retta MN, questa sarà perpendicolare ad AB e la dividerà in
* 101. in due parti uguali*.

Fig. 113. 2.° La perpendicolare debba inalzarsi sul punto dato C. Fatto centro in C, e con un raggio qualunque si descrivano i due archi A e B; dipoi si cerchi un punto M equidistante da A e da B, e si conduca MC; questà sarà la perpendicolare richiesta. Infatti il punto M essendo ugualmente distante da A e da B appartiene alla perpendicolare inalzata sul mezzo di BC.

Fig. 114. 3.° La perpendicolare debba inalzarsi su la estremità A della retta AB. Da un punto arbitrario C come centro e col raggio CA si descriva un arco che incontri AB in D; pei punti C e D si conduca la retta CD, la quale dovrà esser prolungata sino all' incontro F dell' arco medesimo;

la retta FA sarà la perpendicolare richiesta. Infatti FD è un diametro, e l'arco FAD è una mezza circonferenza, e siccome A è un punto di questa circonferenza l'angolo iscritto FAD sarà retto*. * 286.

Fig. 115. 4.° La perpendicolare debba abbassarsi dal punto M sopra la retta AB. Dal punto M come centro e con un raggio sufficentemente grande si descriva un arco che tagli la linea AB nei due punti C, D; quindi si segni un punto N ugualmente distante da C e da D, e si conduca MN; questa sarà la perpendicolare richiesta. Infatti i punti M ed N sono respettivamente equidistanti dai punti C e D.

PROBLEMA IV.

347. *Nel punto A della linea AB fare un angolo uguale all' angolo dato M.* Fig. 116.

Dal vertice M come centro e con un raggio qualunque si descriva un arco FE le cui estremità sieno su i lati dell' angolo; dal punto A come centro e col medesimo raggio si descriva l'arco indefinito CE; dipoi con raggio uguale alla corda EF e dal punto C come centro si descriva un altro arco che tagli in D l'arco indefinito CE, e si conduca AD; l'angolo DAC sarà uguale all'angolo dato M. Imperocchè i due archi FE, DC hanno raggi uguali e corde uguali*; dunque essi sono uguali; dunque gli angoli M ed A cui essi servono di misura sono parimente uguali*. * 268. * 265.

PROBLEMA V.

348. *Dividere un arco o un angolo dato in due parti uguali.* Fig. 117.

1.° Debbasi dividere in due parti uguali l'arco BC. Si cercheranno due punti A e D respettivamente equidistanti dalle estremità B, C dell'arco dato, e si condurrà la retta AD; il mezzo dell'arco sarà il punto F ove tal retta incontra l'arco medesimo. Imperocchè la retta AD risulta

perpendicolare alla corda BC, e divide questa corda ed il * 275. suo arco in due parti uguali*.

Fig. 118. 2.° Debbasi dividere l'angolo BAC in due parti uguali. Primieramente si descriverà dal vertice A come centro l'arco BC, quindi si cercherà un punto D equidistante dalle estremità B e C dell' arco medesimo, e si condurrà la retta AD, la quale dividerà l'angolo dato A in due parti uguali. Infatti quando si osservi che A è un punto equidistante da B e C, come lo è D, si vedrà come il punto F sia il mezzo dell' arco BC, cosicchè essendo uguali gli archi BF, FC gli angoli BAF, FAC sono essi pure uguali.

PROBLEMA VI.

Fig. 119. 349. *Per un punto dato E condurre una parallela alla linea retta data AB.*

Preso un punto K a piacere da esso come centro, e col raggio KE si descrivano due archi l'uno EC, l'altro DG indefiniti; dipoi si prenda del medesimo arco indefinito una parte $DF = EC$, e si conduca EF, che sarà la parallela * 290. richiesta*.

PROBLEMA VII.

Fig. 120. 350. *Costruire un triangolo essendo dati tre de' suoi elementi, purchè fra essi trovisi almeno un lato.*

1.° Sieno dati i tre lati. Condurremo AB uguale ad uno di questi lati; dal punto A come centro, con raggio uguale ad un secondo lato descriveremo un arco, e dal punto B come centro, con un raggio uguale al terzo lato descriveremo un altro arco, quindi dal punto C, ove questi archi s' incontrano, condurremo le rette CA, CB, per le quali si avrà il richiesto triangolo ABC. È da notare che tal costruzione suppone che AB sia minore della somma e * 95. maggiore della differenza di AC, e CB*.

Fig. 121. 2.° Sieno dati due angoli ed un lato. Se il lato sarà

comune ai due angoli dati, descriveremo questo lato AB, ed alle sue estremità faremo gli angoli DAB, EBA uguali ai due angoli dati conducendo opportunamente le rette AD, BE, le quali incontrandosi in C, determineranno il triangolo richiesto.

Se il lato AB dovesse essere opposto ad uno dei due dati angoli, si farà l'angolo DAB uguale all'angolo dato contiguo ad AB, e l'angolo DAE uguale all'altro angolo dato e si condurrà BC parallela ad AE*; ABC sarà il triangolo richiesto. Infatti l'angolo ACB opposto ad AB è uguale all'angolo DAE. Fig. 122. * 349.

3.° Sieno dati due lati ed un angolo. Fig. 123.

Se l'angolo dovrà esser compreso fra i lati dati formeremo un angolo A uguale all'angolo dato, e sopra i suoi lati prenderemo le parti AB, AC respettivamente uguali ai due lati dati, e condurremo BC, con che avremo il triangolo richiesto.

Se uno dei lati dovrà essere opposto all'angolo dato, fatto l'angolo A uguale all'angolo dato, e presa sopra uno de' suoi lati la parte AC uguale al lato dato contiguo all'angolo medesimo, dal punto C come centro e con raggio uguale all'altro lato dato si descriverà un arco, il quale taglierà AB in due punti B e b. Or se avverrà che questi due punti sieno dalla medesima parte del vertice A, lo che avrà luogo quando sia $CB < CA$, due saranno i triangoli che risolveranno il problema, cioè ACB, ACb. Fig. 124.

Se poi uno dei punti d'intersezione B', sarà alla destra di A, l'altro b' alla sinistra, nel qual caso dovremo avere $CB' > CA$, il solo triangolo ACB' corrisponderà agli elementi dati.

Ben si comprende che tal costruzione non potrà aver luogo quando si abbia il lato opposto all'angolo A minore della perpendicolare abbassata dal punto C sopra AB.

PROBLEMA VIII.

Fig. 125. 351. *Costruire un parallelogrammo essendo dati un angolo, e i due lati che lo comprendono.*

Avendo fatto l'angolo A uguale all'angolo dato si prendano su i suoi lati le due parti AB, AC uguali ai due lati dati; quindi dal punto B come centro, e con raggio uguale ad AC si descriva un arco, e dal punto C come centro con raggio uguale ad AB si descriva un altro arco che incontri il primo in D; e conducansi le rette DB, DC; la figura $ABDC$ sarà il parallelogrammo richiesto. Infatti $CD = AB$,
* 129. $BD = AC$*.

352. *Scolio.* Quando l'angolo CAB fosse retto la figura $ABDC$ sarebbe un rettangolo; e se di più i lati AB, AC fossero uguali la figura medesima sarebbe un quadrato. Per l'indicata costruzione potrà adunque farsi un rettangolo di cui sieno date le dimensioni, e costruirsi un quadrato sopra una data linea.

PROBLEMA IX.

Fig. 126. 353. *Trovare il centro d'un circolo o d'un arco dato.*

Si prendano su la circonferenza tre punti a piacere A, B, C; si congiungano questi punti o si suppongano congiunti per le rette AB, BC; su le quali s'inalzeranno due
* 346. 1.° perpendicolari, da cui esse rette sieno divise in parti uguali*; il punto d'incontro O di queste perpendicolari sarà il cen-
* 300. tro richiesto*.

354. *Scolio.* Si può far uso della medesima costruzione per far passare una circonferenza per tre punti dati A, B, C; come pure per circoscrivere una circonferenza ad un dato triangolo ABC.

PROBLEMA X.

355. *Per un punto dato condurre una tangente ad un circolo.*

1.° Sia il punto dato su la circonferenza; condurremo un raggio al punto medesimo; ed alla estremità di questo raggio inalzeremo una perpendicolare, la quale sarà la tangente cercata *. * 280.

Fig. 127. 2.° Sia il punto fuori del circolo, per esempio, in *A*. Uniremo il punto *A* ed il centro colla retta *AB*; divideremo *AB* in due parti uguali nel punto *O*; da questo punto come centro e col raggio *OA* descriveremo una circonferenza che taglierà l'altra circonferenza nei due punti *C*, *D*; i quali congiunti col punto *A* determineranno le due tangenti *AC*, *AD* che si possono condurre da questo punto *A* al circolo dato. Infatti conducendo i raggi *BC*, *BD* si vedrà che gli angoli *ACB*, *ADB*, l'uno iscritto nel semicircolo *ACB*, l'altro iscritto nel semicircolo *ADB*, sono retti; dunque *AC*, *AD* sono ambedue perpendicolari alle estremità dei raggi *BC*, *BD*; dunque esse sono tangenti al circolo dato.

PROBLEMA XI.

Fig. 128. 356. *Per le due estremità della linea data AB far passare al di sopra di questa linea un arco tale che tutti gli angoli in esso iscritti sieno uguali ad un angolo dato; cioè descrivere sopra AB un segmento capace di tale angolo.*

Al di sotto di *AB* si faccia un angolo *ABF* uguale all'angolo dato; pel punto *B* si conduca una perpendicolare *BG* a *BF*, la quale si dovrà porre al di sopra o al di sotto di *AB* secondochè l'angolo *ABF* sarà acuto, o ottuso; di poi sopra *AB* s'inalzi la perpendicolare *IK* che la divida in due parti uguali nel punto *I* *; il punto *O* ove *IK* e *BG* * 346. 1.°

s'incontreranno sarà il centro, donde col raggio $OB = OA$ dovrà descriversi al di sopra di *AB* l'arco richiesto. Imperocchè *BF*, perpendicolare all'estremità del raggio, sarà tangente, e l'angolo *ABF* costituito da una tangente e da una corda avrà per misura la metà dell'arco *AHB*; ma *ABF* è per costruzione uguale all'angolo dato; dunque ogni angolo iscritto nell'arco *AMB*, avendo anch'esso per misura la metà dell'arco *AHB*, sarà uguale all'angolo dato.

PROBLEMA XII.

357. *Dividere una linea in un numero dato di parti uguali, o in parti proporzionali a più linee date.*

Fig. 129. 1.° Debbasi dividere la linea *AB* in sette parti uguali. Dall'estremità *A* condurremo a piacere una linea indefinita *AG*, su la quale prenderemo sette parti uguali di quella grandezza che si vorrà, partendo dal punto *A*; uniremo l'ultimo punto di divisione *C* col punto *B*; e quindi pel primo punto di divisione *E* condurremo una parallela
* 230. *ED* a *CB*; *AD* sarà la settima parte di *AB* *.

Fig. 130. 2.° Debbasi dividere la linea *AB* in tre parti proporzionali a tre linee date. Dall'estremità *A* condurremo la linea indefinita *AG*, su la quale prenderemo tre parti *AC*, *CD*, *DE* respettivamente uguali alle tre linee date; uniremo il punto *E* col punto *B*, e pei punti *C* e *D* condurremo le parallele *CF*, *DH* ad *EB*, le quali determineranno i punti di divisione *F*, *H* della linea *AB*, e conseguentemente le sue parti *AF*, *FH*, *HB* proporzionali
* 229. alle tre linee date *.

PROBLEMA XIII.

358. *Trovare una quarta proporzionale dopo tre linee date.*

Fig. 131. Sopra una medesima retta prenderemo le parti *AB*,

BC respettivamente uguali alla prima ed alla seconda delle tre linee date; e sopra una seconda retta condotta a piacere dal punto A, prenderemo la parte AD uguale alla terza linea data; uniremo il punto D col punto B, e pel punto C condurremo una parallela CE a BD, la quale determinerà il punto E, e la parte DE che sarà la quarta proporzionale richiesta. Perocchè per la parallela condotta abbiamo $AB : BC :: AD : DE$*. * 212.

359. *Scolio.* Nello stesso modo si troverà una *terza proporzionale* dopo due linee date A, B; poichè è terza proporzionale dopo le due linee A, B quella che è quarta proporzionale dopo le tre linee A, B, B.

PROBLEMA XIV.

360. *Trovare una media proporzionale fra due linee date.*

Fig. 132. Sopra una medesima retta si prendano le parti AB, BC respettivamente uguali alle due linee date; e sopra AC come diametro si descriva una mezza circonferenza; quindi dal punto B s' inalzi sul diametro medesimo una perpendicolare prolungandola finchè incontri la circonferenza in D; BD sarà media proporzionale fra AB, BC*, cioè sarà la media proporzionale richiesta. * 316.

Fig. 133. In altro modo; si prendano le parti AB, AC respettivamente uguali alle due linee date; e sopra la maggiore di esse, AB, come diametro si descriva una mezza circonferenza; dipoi dal punto C s' inalzi su questo diametro una perpendicolare CD, e si conduca la corda AD; questa corda sarà media proporzionale fra AB ed AC*, cioè sarà la media proporzionale richiesta. * 317.

PROBLEMA XV.

361. *Dividere la linea data AB in media ed estrema ragione, cioè in due parti per modo che la parte maggiore sia media proporzionale fra la linea intera e l'altra parte.*

Fig. 134. All' estremità B della linea AB s' inalzi la perpendicolare BD uguale alla metà di AB; quindi si conduca AD, e dal punto D come centro col raggio BD si descriva una circonferenza che taglierà AD in E; AE sarà la parte maggiore richiesta di AB; e portandola sopra AB, per mezzo dell' arco EC, sarà AC media proporzionale fra CB ed AB.

Infatti prolungando AD sino all' incontro della circonferenza in F, poichè AB perpendicolare all' estremità del raggio DB è tangente, avremo

* 321. $$AE : AB :: AB : AF^*,$$

e conseguentemente

* 216. $$AB - AE : AF - AB :: AE : AB^*$$

ed osservando che $EF = AB$, $AE = AC$ sarà

$$CB : AC :: AC : AB;$$

come si doveva dimostrare.

PROBLEMA XVI.

362. *Fare un quadrato equivalente ad un parallelogrammo o ad un triangolo dato.*

Sieno A e B l' altezza e la base del parallelogrammo o del triangolo.

Si cerchi una media proporzionale X fra A e B; X sarà il lato del quadrato equivalente al parallelogrammo; infatti dalla proporzione $A : X :: X : B$, ricavasi che $A \times B = X \times X = X^2$.

Si cerchi una media proporzionale Y fra la metà di A e B; Y sarà il lato del quadrato equivalente al triangolo; infatti essendo $\frac{1}{2} A : Y :: Y : B$, avremo $\frac{1}{2} A \times B = Y^2$.

PROBLEMA XVII.

363. *Fare sopra una data linea C un rettangolo equivalente ad un rettangolo dato.*

Sieno A e B l'altezza e la base del rettangolo dato.

Si cerchi una quarta proporzionale Z dopo C, A, B; Z sarà l'altezza del rettangolo richiesto. Poichè dalla proporzione $C : A :: B : Z$ ricavasi l'uguaglianza $A \times B = C \times Z$.

PROBLEMA XVIII.

364. *Trovare due linee il cui rapporto sia uguale al rapporto di due quadrati dati, o di due dati rettangoli.*

1.° Costruendo un triangolo rettangolo coi lati AB, AC Fig. 135.
dei due quadrati dati, ed abbassando dal vertice A la perpendicolare AD sopra l'ipotenusa i segmenti BD, DC staranno fra loro come i quadrati dati. Infatti essendo $\overline{AB}^2 = BD \times BC$, $\overline{AC}^2 = DC \times BC$*, avremo * 237.
$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: BD \times BC : DC \times BC$, ovvero* * 191.
$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: BD : DC$.

2.° Sieno i due rettangoli espressi dai prodotti $A \times B$, $C \times D$; si cerchi una quarta proporzionale X dopo B, C, D; le due linee A ed X staranno fra loro come i rettangoli dati. Perocchè essendo $B : C :: D : X$ avremo $B \times X = C \times D$; per cui sarà $A \times B : C \times D :: A \times B : B \times X :: A : X$.

365. *Scolio I.* Ben si comprende che mediante la medesima operazione potrebbe trovarsi in linee il rapporto di due triangoli.

366. *Scolio II.* Trovate due linee il cui rapporto sia uguale a quello di due quadrati o di due rettangoli dati è cosa facile trovarne altre due che abbiano lo stesso rapporto; di più può una di queste esser data che allora l'altra si determinerà colla costruzione della quarta proporzionale.

PROBLEMA XIX.

367. *Trovare due quadrati il cui rapporto sia uguale a quello di due linee date.*

Fig. 136. Si prendano le due parti BD, DC uguali alle due linee date, e sopra BC come diametro si descriva una mezza circonferenza; quindi s'inalzi la perpendicolare DA; le
* 364. 1.° corde AB, AC saranno i lati dei quadrati richiesti*.

368. *Scolio.* Conducendo fra i lati dell'angolo BAC una parallela qualunque bc a BC, anche i quadrati delle linee Ab, Ac saranno proporzionali a BD, DC; lo che offre il mezzo di prendere uno dei quadrati a piacere.

PROBLEMA XX.

369. *Fare un quadrato equivalente alla somma o alla differenza di due quadrati.*

Fig. 137. 1.° Dovendosi trovare un quadrato equivalente alla somma dei quadrati dati, coi lati AB, AC di essi si formi un triangolo rettangolo; l'ipotenusa BC sarà il lato del qua-
* 162. drato richiesto*.

2.° Dovendosi trovare un quadrato equivalente alla differenza di due quadrati dati, si formi un triangolo rettangolo di cui AB, lato del quadrato minore, ne sia un lato, e BC, lato del quadrato maggiore ne sia l'ipotenusa; il terzo lato AC di questo triangolo sarà il lato del quadrato richiesto. Infatti essendo il quadrato di BC uguale alla somma dei quadrati di AB, e di AC, sarà il quadrato di BC meno il quadrato di AB uguale al quadrato di AC.

370. *Scolio.* Con questa costruzione potrà trovarsi un quadrato uguale alla somma di quanti quadrati si vorrà; poichè come a due ci è dato sostituirne uno, così a tre

potremo sostituirne due, e quindi uno solo ad essi; è così potremo proseguire qualunque sia il numero loro.

PROBLEMA XXI.

371 *Trasformare un poligono in un triangolo equivalente.*

Sia il poligono $ABCDE$; conducasi la diagonale AD Fig. 138.
che separi dal poligono il triangolo ADE; dal vertice E si conduca una parallela a questa diagonale che incontri in F il prolungamento di BA; quindi si conduca DF: i triangoli ADE, ADF saranno equivalenti, avendo essi la medesima base AD, e la medesima altezza, poichè i vertici loro E, F sono ambedue sopra la linea EF parallela ad AD; perciò se al triangolo ADE sostituiremo il triangolo ADF, il nuovo poligono $FBCD$ sarà equivalente al poligono $ABCDE$ ed avrà un lato meno di questo. La medesima costruzione applicata al secondo poligono $FBCD$ lo trasformerà in un terzo ad esso equivalente ed avente un lato meno; cosicchè qualunque sia il numero dei lati del poligono dato, proseguendo l' operazione indicata, agevolmente perverremo ad un triangolo equivalente al poligono medesimo.

372. *Scolio I.* Per esprimere in linee il rapporto di due poligoni li trasformeremo primieramente in due triangoli equivalenti, e dipoi ridurremo in linee il loro rapporto*. * 365.

373 *Scolio II.* Abbiamo veduto che ogni triangolo può esser cambiato in un quadrato equivalente*; laonde potremo * 362.
sempre trovare un quadrato equivalente ad un poligono dato, cioè sempre potremo *quadrare* il poligono; chè questa operazione è quella cui si dà il nome di *quadratura* delle figure.

Il problema della *quadratura del circolo*, sì famoso nella storia delle Matematiche, consiste anch' esso nel trovare un quadrato equivalente ad un circolo di cui sia noto il diametro. Ma avendo dimostrato essere il circolo equivalente al rettangolo compreso fra la sua circonferenza e la metà

* 339. del suo raggio*, il lato del quadrato equivalente al circolo sarà una media proporzionale fra la circonferenza e la metà del raggio medesimo; cosicchè il problema della quadratura del circolo si riduce a quello della *rettificazione* della circonferenza, che è quanto dire alla determinazione della lunghezza d' una circonferenza per mezzo del raggio; lo che suppone
* 340. che sia noto π* rapporto della circonferenza al diametro. Ogni tentativo diretto ad esprimere in numeri razionali questo rapporto riuscirebbe inutile, poichè è stato rigorosamente dimostrato essere la circonferenza incommensurabile col suo diametro, e non potersi per conseguenza assegnare ad esso rapporto che dei valori numerici approssimativi; ragione per cui la soluzione del problema della quadratura del circolo non è conseguibile in numeri.

Archimede dimostrò che essendo il rapporto della circonferenza al diametro compreso fra $3\,\frac{10}{71}$ e $3\,\frac{10}{70}$, il numero $3\,\frac{1}{7}$, ovvero $\frac{22}{7}$ è assai prossimo a quello che abbiamo rappresentato con π. Adriano Mezio trovò un valore più prossimo nel numero $\frac{355}{113}$. Dipoi, col lume de' moderni metodi, l' approssimazione è stata portata sì lungi che *la cognizione del rapporto esatto non avrebbe alcun vantaggio reale al di sopra di quella del rapporto approssimativo* (*).

Ne basti avvertire che si è trovato

$$\pi = 3{,}14159265358979323846 \text{ ec.},$$

numero, il quale con mirabile opera di calcolo è stato condotto sino alla centoquarantesima cifra. Nelle occorrenze ordinarie della geometria pratica, di tutta la parte decimale di questo numero si ritengono le tre prime cifre soltanto, perlochè esso si riduce a 3,141; a suo luogo si dirà per quali metodi elementari si possa giungere alla cognizione di questo rapporto.

(*) *Legendre Geom.* Lib. IV.

PROBLEMA XXII.

374. *Sopra una data retta descrivere un poligono simile ad un poligono dato.*

Dovendosi descrivere sul lato ab omologo ad AB, un triangolo simile al triangolo ABC faremo l'angolo $cab = CAB$, e l'angolo $cba = CBA$; le linee rette ac, bc si taglieranno in c, e abc sarà un triangolo simile ad ABC*. Fig. 75. * 219.

Dovendosi descrivere sopra ab omologo ad AB, un poligono simile ad $ABCDE$ condurremo le diagonali AC, AD; quindi sopra ab omologo ad AB, faremo il triangolo abc simile ad ABC; sopra ac omologo ad AC, faremo pure il triangolo acd simile ad ACD; e sopra ad il triangolo ade simile ad ADE; e così continueremmo ove il poligono dato avesse un numero maggiore di lati; il poligono $abcde$ risulterà simile al poligono dato $ABCDE$*. Fig. 74. * 240.

PROBLEMA XXIII.

475. *Essendo dati due poligoni simili, costruirne un terzo uguale alla loro somma o alla loro differenza.*

Sieno A e B due lati omologhi dei poligoni dati; si cerchi l'ipotenusa X d'un triangolo rettangolo di cui A e B sieno gli altri lati; oppure si cerchi il lato Y d'un triangolo rettangolo di cui il maggiore dei lati dati A, B, sia l'ipotenusa, l'altro sia il terzo lato; X e Y saranno i lati dei poligoni l'uno uguale alla somma, l'altro uguale alla differenza dei due poligoni dati*; e poichè X ed Y debbono essere omologhi ai lati A e B la costruzione dei poligoni richiesti si compirà ricorrendo al problema precedente. * 244.

PROBLEMA XXIV.

Fig. 139. 376. *Iscrivere un quadrato in una circonferenza.*

Si conducano due diametri AB, CD che formino angoli retti, e si uniscano le loro estremità colle corde AC, CB, BD, DA; la figura $ABCD$ sarà il quadrato richiesto. Infatti i suoi angoli sono retti ed i suoi lati uguali.

PROBLEMA XXV.

Fig. 140. 377. *Iscrivere un esagono regolare in una circonferenza.*

Il lato dell'esagono iscritto dico essere uguale al raggio OA. Infatti sia la corda AB uguale al raggio OA, il triangolo AOB sarà equilatero, e perciò equiangolo, ed il suo angolo AOB sarà uguale ai due $\frac{2}{3}$ o $\frac{4}{6}$ d'un retto; dunque l'arco AB è la sesta parte della circonferenza, e la corda AB è il lato dell'esagono regolare. Quindi è che per iscrivere l'esagono dovremo portare il raggio sei volte su la circonferenza, con che torneremo sul punto stesso donde saremo partiti.

378. *Scolio.* Essendo così iscritto l'esagono $ABCDEF$, unendo alternativamente i vertici dei suoi angoli con linee rette, formeremo il triangolo equilatero ACE.

PROBLEMA XXVI.

379. *Iscrivere un decagono in una circonferenza.*

Fig. 141. Il lato del decagono iscritto dico essere uguale alla parte maggiore del raggio diviso in media ed estrema ragione. Si supponga il raggio OA diviso in media ed estrema ragione nel punto C; si prenda la corda AB uguale alla parte maggiore OC e si conducano le rette BC, OB. Siccome per costruzione si ha $OA : OC :: OC : CA$, sostituendo AB ad OC otterremo $OA : AB :: AB : CA$,

donde si vede che i triangoli OAB, CAB, avendo un angolo comune compreso fra lati proporzionali sono simili*; ma il triangolo OAB è isoscele, dunque il triangolo CAB lo sarà pure, per lo che avremo $AB = BC = OC$; donde si ricava essere l'angolo $CBO = COB$, e l'angolo ACB esterno rapporto al triangolo COB, doppio dell'interno O; ora l'angolo $ACB = OAB = OBA$, dunque il triangolo OAB è tale che ciascuno degli angoli alla base è doppio dell'angolo al vertice; dunque i tre angoli di questo triangolo presi insieme equivalgono all'angolo O preso cinque volte, cioè l'angolo O è la quinta parte di due angoli retti o la decima di quattro; dunque l'arco AB è la decima parte della circonferenza, e la corda AB è il lato del decagono regolare. * 223.

380. *Scolio I*. Se dopo avere iscritto il decagono uniremo alternativamente i vertici de' suoi angoli formeremo il pentagono regolare.

381. *Scolio II*. Osservando che $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ si vedrà che la quindicesima parte della circonferenza è l'eccesso della sesta su la decima; dunque posto che le corde AB, Ab sieno respettivamente uguali ai lati dell'esagono, e del decagono regolare, la corda Bb sarà il lato del poligono di quindici lati altrimenti detto *pentadecagono*. Fig. 140.

382. *Scolio III*. Se dopo avere iscritto in un circolo un poligono regolare divideremo gli archi sottesi dai suoi lati in due parti uguali, e condurremo le corde dei mezzi-archi avremo un poligono regolare iscritto d'un doppio numero di lati. Laonde avendo noi indicato il modo di iscrivere in un circolo i poligoni di 4, 6, 10, 15 lati potremo facilmente iscrivere in un circolo un poligono quando il numero dei suoi lati sia un termine qualunque delle seguenti progressioni

4,	8,	16,	32,	ec.
6,	12,	24,	48,	ec.
10,	20,	40,	80,	ec.
15,	30,	60,	120,	ec.

LIBRO QUINTO

I PIANI.

NOZIONI PRELIMINARI.

383. Poichè, come abbiamo veduto*, una linea retta la * 32.
quale ha due punti sopra un piano combacia col piano medesimo in tutta la sua estensione, segue che una retta ed un piano non possono incontrarsi che in un punto.

384. Ciò posto supponiamo che due punti A, B d'un Fig. 142.
piano sieno fissi; questo piano potrà nondimeno girare liberamente intorno ad essi; ma se incontrerà nel muoversi un terzo punto fisso, non situato nella medesima direzione dei punti A e B, allora il piano si rimarrà immobile; cioè la sua posizione riuscirà determinata. Quindi è che *per tre punti non situati nella medesima direzione non può passare che un solo e medesimo piano.*

385. Or si uniscano i tre punti medesimi con tre linee rette; ne verrà un triangolo ABC che sarà situato sopra lo stesso piano; sul quale saranno pur situate le due rette AC, BC che s'incontrano nel punto C, come anche la retta AC ed ogni sua parallela, e per conseguenza quella eziandio che potrebbe passare pel punto B. Dunque *tre punti non situati nella medesima direzione, oppure un triangolo, o due rette che s'incontrano, o finalmente due parallele determinano la posizione d'un piano*

386. L'intersezione di due piani che si tagliano non può essere che una linea; poichè se fosse una parte della loro superficie i due piani coinciderebbero, e ne formerebbero uno solo*. Di più questa linea sarà retta; poichè se tra i suoi * 16.

punti se ne trovassero tre soli che non fossero nella medesima direzione i due piani passando ciascuno per questi tre punti, combacerebbero, cioè non si taglierebbero come si suppone; dunque *se due piani si tagliano, la loro comune intersezione sarà una linea retta.*

387. Una retta sarà parallela ad un piano, o un piano sarà parallelo ad una retta quando la retta ed il piano non potranno incontrarsi ancorchè si prolunghino sino a qualunque distanza.

388. Due piani poi saranno paralleli quando prolungati anch'essi fino a qualunque distanza non s'incontreranno.

TEOREMA I.

Fig. 143. 389. *Se una linea retta AP è perpendicolare a due altre PB, PC condotte pel suo piede in un piano MN, essa sarà perpendicolare ad ogni altra retta PD condotta anch'essa pel suo piede nel medesimo piano.*

Si prolunghi AP al di sotto del piano d'una quantità $Pa = PA$; su le linee PB, PC si prendano due punti B e C a piacere; si conduca BC, e D sia il suo punto d'incontro con PD; finalmente si conducano le rette AB, AC, AD, aB, aC, aD.

* 96. Ciò posto poichè $AB = aB$, ed $AC = aC$*, i triangoli ABC, aBC sono uguali, e per conseguenza l'angolo $ACB = aCB$, e l'angolo $ACD = aCD$; inguisachè i triangoli ACD, aCD avendo un angolo uguale compreso fra lati uguali sono essi pure uguali, ed $AD = aD$; dunque DP avendo due punti P, D, respettivamente equidistanti dalle estremità della linea Aa è perpendicolare a
* 101. questa linea*, cioè AP è perpendicolare a PD come si doveva dimostrare.

390. *Definizione.* Una linea retta è *perpendicolare ad un piano* quando essa è perpendicolare a tutte le linee che passano pel suo piede in questo piano. Lo che si verificherà ogniqualvolta essa sarà perpendicolare a due rette soltanto condotte nel piano,

391. *Corollario I.* Da un punto P dato sopra un piano non si può inalzare che una sola perpendicolare a questo piano. Infatti supposto che due se ne possano inalzare e che l'intersezione del piano che si può condurre per esse, col piano MN sia PD, esse sarebbero perpendicolari alla linea PD nel medesimo punto e nel medesimo piano, lo che è assurdo.

392. *Corollario II.* Parimente da un punto A dato fuori d'un piano non si può abbassare che una sola perpendicolare al piano medesimo. Poichè se due se ne potessero abbassare AP ed AB, il triangolo ABP avrebbe due angoli retti; assurdo evidente.

393. *Scolio.* La retta AB che non soddisfà alle condizioni cui dovrebbe soddisfare per essere perpendicolare al piano MN è detta *obliqua* a questo piano; viceversa il piano è *obliquo alla retta.* La retta PB esprimente la distanza fra il piede della perpendicolare ed il piede della obliqua chiamasi *projezione* dell'obliqua medesima. E l'angolo ABP che fa l'obliqua colla sua projezione appellasi *inclinazione dell' obliqua sul piano.*

TEOREMA II.

394. *Se da un punto A situato fuori d' un piano MN si conducono sopra questo piano la perpendicolare AP e differenti oblique AB, AD, AE, ec.; 1.° la perpendicolare AP sarà più corta d'ogni obliqua AB; 2.° le oblique AB, AD i cui piedi B, D si discostano ugualmente dal piede P della perpendicolare saranno uguali; 3.° di due oblique qualunque AE, AD quella che più si allontana dal piede della perpendicolare sarà più lunga.* Fig. 144

1.° La retta AP essendo perpendicolare al piano MN sarà pure perpendicolare alla retta PB che passa pel suo piede, ed è situata nel piano medesimo; dunque il triangolo ABP sarà rettangolo in P, ed AB sopra la medesima

retta PB sarà obliqua; dunque $AP < AB$; cioè la perpendicolare è più corta di ogni obliqua.

2.° Essendo $PB = PD$ i triangoli rettangoli APB, APD avranno un angolo uguale compreso fra lati uguali, e saranno uguali; dunque $AB = AD$, cioè le oblique che si discostano ugualmente dalla perpendicolare sono uguali.

3.° Essendo $PE > PD$ potremo fare $PB = PD$, e condurre AB; e sarà $AB = AD$; ma $AE > AB$, dunque $AE > AD$, cioè di due oblique quella che più si discosterà dalla perpendicolare è più lunga.

395. *Scolio I.* La perpendicolare essendo la più corta linea che si possa condurre da un punto sopra un piano misura la vera distanza di esso punto dal medesimo piano.

396. *Scolio II.* Poichè ogni punto della perpendicolare AP sarebbe ugualmente distante da tutti quelli d'una circonferenza il cui centro fosse P, segue che da un punto qualunque A della perpendicolare ad un piano si può descrivere una circonferenza il cui centro sia il piede della perpendicolare medesima. La retta CP perpendicolare ad un circolo, e che passa pel suo centro si chiama *asse del circolo.*

397. *Scolio III.* È manifesto che da un medesimo punto situato fuori d' un piano si possono condurre quante rette uguali si vogliono sul piano medesimo.

TEOREMA III.

Fig. 145. 398. *Se da un punto A della retta AB obliqua al piano MN si abbassa la perpendicolare AP a questo piano, e si congiungono i punti B e P con una retta, la retta CD condotta nel piano MN perpendicolarmente a PB sarà pure perpendicolare ad AB.*

Si faccia $BC = BD$, e si conducano le rette PC, PD, AC, AD; poichè $BC = BD$, avremo l'obliqua $PC = PD$; e rapporto alla perpendicolare AP poichè
* 394. $PC = PD$, avremo l'obliqua $AC = AD$*; dunque la

linea AB ha due dei suoi punti A, e B ugualmente distanti dai punti C e D; dunque CD è perpendicolare ad AB.

399. *Corollario.* La retta CD essendo a un tempo perpendicolare alle rette PB ed AB è perpendicolare al piano ABP che passa per le rette medesime.

TEOREMA IV.

400. *Se la linea AP è perpendicolare al piano MN ogni linea EB parallela ad AP sarà perpendicolare al piano medesimo*

Il piano su cui si suppongono situate le parallele AP, EB incontrerà il piano MN secondo la retta PB, e l'angolo PBE sarà retto, senza di che EB non sarebbe parallela ad AP. Ciò posto se nel piano MN si conduce la perpendicolare CD a PB, e si tira AB, la retta CD dovendo essere perpendicolare al piano ABP*, il quale è quello delle due parallele AP, EB, sarà pure perpendicolare ad EB; dunque EB è perpendicolare alle due rette PB, e CB; dunque essa è perpendicolare al loro piano MN. * 399

401. *Corollario I.* Reciprocamente due rette perpendicolari ad un medesimo piano sono parallele fra loro. Imperocchè se non lo fossero dal piede di una di esse si potrebbe condurre una parallela all'altra, la quale risulterebbe perpendicolare al piano. Quindi ne verrebbe che sopra un piano in uno stesso punto si potrebbero inalzare due perpendicolari, lo che è assurdo*. * 391.

402. *Corollario II.* Due linee A, e B parallele ad una terza C, sono parallele fra loro; infatti s' immagini che un piano sia perpendicolare alla linea C; le linee A, e B essendo parallele a C saranno perpendicolari al piano medesimo; dunque saranno parallele fra loro.

Qui si suppone che le tre linee non siano in un medesimo piano, senza di che la proposizione sarebbe identica a quella dimostrata al § 71.

TEOREMA V.

Fig. 146. 403. *Se una retta AB situata fuori del piano MN è parallela ad una retta qualunque CD condotta in questo piano, la retta AB sarà parallela al piano medesimo.*

Le rette AB, CD essendo parallele sono nel medesimo piano $ABCD$; perciò se la linea AB prolungata incontrasse il piano MN l'intersezione non potrebbe aver luogo che in qualche punto della linea indefiuita CD; ma AB e CD come parallele non possono incontrarsi; dunque AB non potrà neppure incontrare il piano MN, cioè AB sarà parallela a questo piano.

TEOREMA VI.

Fig. 147. 404. *Due piani MN, PQ respettivamente perpendicolari ad una medesima retta AB sono paralleli.*

Infatti se non fossero paralleli prolungati sufficentemente s'incontrerebbero, risultandone l'intersezione EF. Essendo O un punto della intersezione medesima si conducano le rette AO, BO; AO essendo nel piano MN sarà perpendicolare ad AB*, e BO essendo nel piano PQ sarà anch' essa perpendicolare ad AB; laonde si avrebbero due perpendicolari abbassate dal medesimo punto O su la medesima retta; lo che è assurdo; dunque i piani MN, PQ non potendosi incontrare sono paralleli.

* 390.

TEOREMA VII.

Fig. 148. 405. *Le intersezioni AB, CD di due piani paralleli MN, PQ con un terzo piano BC sono parallele.*

Infatti se le linee AB, CD, le quali si trovano nel medesimo piano BC, non fossero parallele prolungate s' incontrerebbero; e con esse s' incontrerebbero i piani MN,

PQ ove sono situate; lo che è impossibile essendo questi piani paralleli; dunque è pure impossibile che le linee AB, CD s' incontrino; dunque queste linee sono parallele.

TEOREMA VIII.

406. *Ogni linea AB perpendicolare al piano MN è pure perpendicolare al piano PQ parallelo ad MN.* Fig. 147.

Si conduca nel piano PQ una retta BD a piacere purchè passi pel punto B, e quindi per le linee AB e BD si conduca un piano; il quale incontrerà il piano MN secondo la retta AC, che sarà parallela ad AB*. Ora * 405.
AB essendo perpendicolare al piano MN è pure perpendicolare ad AC che si trova in questo piano e che passa pel suo piede, e conseguentemente è perpendicolare a BD parallela ad AC*; dunque AB è perpendicolare ad ogni * 23.
retta condotta pel suo piede nel piano PQ; dunque essa è perpendicolare a questo piano.

407. *Corollario.* Due piani A, B respettivamente paralleli ad un terzo C saranno paralleli fra loro. Infatti per un punto qualunque del piano C si conduca una perpendicolare a questo piano; essa risulterà perpendicolare ai piani A e B; questi adunque come perpendicolari alla medesima retta saranno paralleli fra loro*. * 404.

TEOREMA IX.

408. *Le parallele AC, BD comprese fra due piani paralleli MN, PQ sono uguali.* Fig. 148.

Infatti il piano delle due parallele AC, BD incontrerà i piani MN, PQ secondo le rette AB, CD le quali saranno parallele*, e la figura $ACDB$ sarà un parallelo- * 405.
grammo; dunque $AB = CD$.

409. *Corollario.* Le parallele intercette fra i due piani potrebbero essere perpendicolari a questi piani; ed in tal caso misurerebbero le distanze dei piani medesimi; si può

adunque stabilire che *due piani paralleli sono ugualmente distanti in tutta la loro estensione.*

410. *Scolio.* La più corta linea che si possa condurre fra due piani paralleli è manifestamente la loro comune perpendicolare.

TEOREMA X.

Fig. 149. 411. *Se due angoli BAC, DEF non situati nello stesso piano avranno i lati respettivamente paralleli e diretti nel medesimo senso, 1.° questi angoli saranno uguali, 2.° i loro piani saranno paralleli.*

1.° Si faccia $AB = ED$, $AC = EF$ e si conducano le rette AE, BD, CF, DF, BC. È manifesto che i due quadrilateri $ABDE$, $ACFE$ sono due parallelogrammi; perlochè le rette AE, BD, CF sono uguali e parallele fra loro, e la figura $BCFD$ è essa pure un parallelogrammo, e $BC = DF$; dunque i triangoli ABC, EDF come equilateri fra loro sono uguali; dunque l' angolo $BAC = DEF$.

2.° Il piano MN che passa per le due rette AB, AC sarà parallelo al piano PQ che passa per le due rette ED, EF; infatti se questi due piani non fossero paralleli si potrebbe condurre pel punto E un piano parallelo ad MN il quale dovrebbe incontrare le rette BD, CF, oppure i loro prolungamenti, in due punti d ed f differenti dai punti D ed F; e si avrebbe $AE = Bd = Cf$, e quindi $BD = Bd$, $CF = Cf$, assurdo evidente. Dunque i piani MN, PQ, sono paralleli fra loro.

412. *Corollario.* Se due piani $ABDE$, $ACFE$ incontreranno i due piani paralleli MN, PQ secondo le rette AC ed EF, AB ed ED gli angoli BAC, DEF saranno uguali. Perocchè questi angoli avranno i lati respettivamente paralleli e diretti nel medesimo senso.

TEOREMA XI.

413. *Se tre rette AE, BD, CF non situate nel medesimo piano sono uguali, e parallele, 1.° i triangoli ABC, EDF che si formano da una parte e dall' altra congiungendo le loro estremità saranno uguali, 2.° i loro piani saranno paralleli.*

1.° Le figure $ABDE$, $ACFE$, $BCFD$ sono manifestamente tre parallelogrammi; e perciò $AB = ED$, $AC = EF$, $BC = DF$; dunque il triangolo ABC è uguale al triangolo EDF.

2.° Che il piano ABC sia poi parallelo al piano EDF si dimostrerà come nella proposizione precedente.

TEOREMA XII.

414. *Due rette qualunque se non sono situate nel medesimo piano, saranno sempre situate in piani paralleli.* Fig. 150.

Poichè posto che le due rette AB, EF non sieno situate nel medesimo piano pel punto A della prima si conduca AC parallela ad EF, e pel punto E della seconda si conduca EG parallela ad AB; i piani dei due angoli BAC, GEF saranno paralleli*; dunque le due rette AB, EF non situate nello stesso piano, saranno situate in piani paralleli. * 411.

415. *Scolio I.* Questo sistema di due piani paralleli nei quali sono respettivamente contenute le due rette AB, EF è unico. Infatti ogni altro piano che passasse per la retta AB e facesse parte di un tal sistema di piani paralleli, dovrebbe contenere anch'esso tutte le rette parallele ad EF che incontrano AB; per conseguenza questo ipotetico piano non può differire dal piano ABC.

I piani ABC, EFG si distinguono col nome di *piani paralleli delle due rette AB, EF.*

TEOREMA XIII.

Fig. 151. 416. *Due rette AB, CD comprese fra tre piani paralleli MN, PQ, RS sono tagliate in parti proporzionali.*

Sieno A, I e B, C, K e D i punti ove i piani RS, PQ ed MN sono incontrati dalle rette AB, CD; si tiri AD che incontrerà il piano PQ in H, e si conducano le rette AC, IH, HK e BD. Le rette IH e BD rappresentando le intersezioni dei due piani MN, PQ col
* 405. piano ABD saranno parallele*; dimanierachè avremo $AI : IB :: AH : HD$. Parimente AC ed HK rappresentando le intersezioni dei due piani RS, PQ col piano ADC saranno esse pure parallele, ed avremo $CK : KD :: AH : HD$. Dunque stante il comune rapporto sarà $AI : IB :: AH : HD :: CK : KD$.

Fig. 152. 417. *Scolio.* Quando due piani AC, AE s'incontrano e si tagliano secondo una retta AB, alla loro reciproca lontananza può in qualche modo competere il nome di *angolo;* nome già attribuito alla lontananza reciproca di due rette che hanno una comune estremità; perocchè i due piani fanno per così dire l' ufficio di lati, e la loro intersezione fa quello di vertice; inoltre la lontananza dei due piani può crescere o decrescere come quella delle due rette facendo girare cioè convenientemente uno di essi intorno alla loro intersezione. Bensì a distinguere le due specie di angoli chiameremo *angolo diedro* quello che verrà formato dai piani, ritenendo il nome generale di angolo per indicare esclusivamente quello di due rette; benchè talvolta per maggior precisione questo si chiamerà *angolo rettilineo*, o *angolo piano.*

418. *Definizione I.* La reciproca lontananza di due piani che si tagliano si dirà *angolo diedro.* Questi due piani si chiameranno *facce* dell' angolo, e la loro comune intersezione *costola* o *spigolo* dell' angolo stesso.

L' angolo diedro si enuncierà con quattro lettere avendo cura di porre nel mezzo quelle che indicano la costola dell'angolo. Laonde l'angolo formato dai piani AC, AE la cui intersezione è AB s'indicherà colle lettere $FABD$.

419 *Definizione II.* Per *angolo piano corrispondente ad un angolo diedro* s'intenderà quello che formano due perpendicolari condotte respettivamente in ciascuna delle due facce dell'angolo in un punto qualunque della sua costola.

Perciò se pel punto G della costola AB si condurranno due perpendicolari GH, GI alla costola stessa l'una nel piano AC, l'altra nel piano AE; l'angolo IGH sarà l'angolo piano corrispondente all'angolo diedro $FABD$.

L'angolo piano corrispondente ad un angolo diedro è il medesimo in tutti i punti della sua costola; per esempio, se le perpendicolari si condurranno dal punto g sarà l'angolo $igh = IGH$, poichè questi angoli hanno i lati respettivamente paralleli e volti nel medesimo senso *. * 408.

TEOREMA XIV.

420. *Ad angoli piani uguali fra loro* IHG, ihg *corrispondono angoli diedri uguali anch' essi fra loro* $FABD$, $fabd$. Fig. 155.

Si faccia $HI = hi$, quindi ponendo hi sopra HI in modo che il punto h cada in H ed i in I queste due rette coincideranno e la retta hg converrà con HG stante l'uguaglianza degli angoli IHG, ihg, ed il piano ihg combacerà col piano IHG e la perpendicolare ab converrà colla perpendicolare AB; laonde i piani AE, ae si confonderanno dovendo ambedue passare per le rette HI, AB che si tagliano, e si confondono colle rette hi, ab*; per una simile ragione lo stesso avverrà dei piani AC, ac; dunque i due angoli diedri $FABD$, $fabd$ ne formeranno uno solo; dunque questi angoli sono uguali. * 385.

421. *Scolio.* È superfluo dimostrare che la proposizione inversa ha ugualmente luogo; poichè si vede chiaramente

che ove gli angoli diedri fossero uguali fra loro, gli angoli piani corrispondenti lo sarebbero parimente.

TEOREMA XV.

Fig. 154. 422. *Due angoli diedri qualunque* $FABD$, $fabd$ *stanno fra loro come gli angoli piani corrispondenti* IHG, ihg *o come gli archi* IG, ig *che misurano questi angoli piani.*

Sia il rapporto degli angoli piani IHG, ihg, ossia quello degli archi IG, ig commensurabile; essendo, per esempio, la comune misura di essi contenuta 3 volte in IG, e 7 volte in ig, potremo supporre ig diviso in 7 parti uguali, 3 delle quali saranno contenute in IG; talmentechè sarà $\frac{IG}{ig} = \frac{3}{7}$.

Conducendo dei raggi a tutti i punti di divisione degli archi, e quindi dei piani pei raggi medesimi e per le costole AB, ab ne risulteranno degli angoli diedri parziali tutti
* 420. uguali fra loro*; cosicchè uno qualunque di questi angoli diverrà comune misura dei due angoli diedri $FABD$, $fabd$; e dovendo tal misura essere contenuta 3 volte in $FABD$, e 7 volte in $fabd$, avremo $\frac{FABD}{fabd} = \frac{3}{7}$; donde segue che $\frac{FABD}{fabd} = \frac{IG}{ig}$; ovvero la proporzione

$$FABD : fabd :: IHG : ihg.$$

La quale avrà luogo ove anche il rapporto degli angoli IHG, ihg sia incommensurabile, come si dimostrerebbe con un ragionamento consimile a quello del § 270.

423. *Scolio I.* Avendo preso l'angolo retto per unità di misura degli angoli piani sarà opportuno prendere l'angolo diedro corrispondente al medesimo, cioè l'*angolo diedro retto* per unità degli angoli diedri. Perciò se nella precedente proporzione

$$\frac{FABD}{fabd}=\frac{IHG}{ihg}$$

supporremo che l'angolo piano ihg sia retto, l'angolo diedro $fabd$ lo sarà pure, talmentechè fatto

$$ihg=1,\ fabd=1,$$

avremo

$$\frac{FABD}{1}=\frac{IHG}{1};$$

donde s'inferisce che il numero con che si può rappresentare un angolo diedro, cioè il rapporto di questo angolo alla sua unità è uguale al numero che rappresenta l'angolo piano che gli corrisponde o l'arco da cui è misurato. Ma per brevità alla precedente uguaglianza vien sostituita questa, puramente convenzionale,

$$FABD=IHG;$$

per la quale si stabilisce che *un angolo diedro qualunque sia misurato dall'angolo piano corrispondente, cioè dall'arco che serve di misura all'angolo piano medesimo.*

424. *Scolio II.* Da questo teorema apparisce che gli angoli diedri godono in generale delle medesime proprietà degli angoli piani, da cui sono determinati; le quali proprietà si possono frattanto riepilogare nel seguente modo;

1.° Quando due piani si tagliano gli angoli opposti alla costola sono uguali.

2.° La somma degli angoli adiacenti dalla medesima parte d'uno stesso piano equivale due angoli retti.

3.° Se uno dei quattro angoli formati intorno alla comune costola è retto gli altri tre sono parimente retti, ed i piani sono fra loro perpendicolari.

4.° La somma degli angoli diedri formati da un numero qualunque di piani che hanno la medesima intersezione è uguale a quattro angoli retti

5.° Si aggiunga, che due piani paralleli tagliati da uno stesso piano formano degli angoli diedri alterni-interni, alterni-esterni, corrispondenti, le cui proprietà sono identiche a quelle già dimostrate rispetto alle linee parallele.

TEOREMA XVI.

Fig. 155. 425. *Essendo la retta AB perpendicolare ad un piano MN, ogni piano EH condotto per AB sarà perpendicolare al medesimo piano MN.*

Pel punto B della intersezione si conduca nel piano MN la retta BD perpendicolare ad EF; la retta AB essendo perpendicolare al piano MN, sarà perpendicolare alle rette EF e BD che passano pel suo piede in questo piano; dunque l'angolo piano ABD misura l'angolo dei
* 423. due piani MN, e EH *; ma l'angolo ABD è retto, dunque il piano EH è perpendicolare al piano MN.

426. *Scolio.* Quando tre linee come BA, BE, BD sono perpendicolari fra loro, ciascuna di queste linee è perpendicolare al piano che passa per le altre due; cosicchè ne vengono tre piani perpendicolari fra loro.

TEOREMA XVII.

427. *Quando due piani MN, EH sono perpendicolari fra loro, ogni linea AB condotta nel piano EH perpendicolarmente all'intersezione EF è perpendicolare all'altro piano MN.*

Nel piano MN si conduca la retta BD perpendicolare all'intersezione EF; l'angolo ABD misurando l'angolo dei due piani perpendicolari sarà retto; dunque la retta AB è perpendicolare alle due rette EF e BD; dunque essa è pure perpendicolare al loro piano MN.

428. *Scolio.* Reciprocamente quando due piani MN, EH sono perpendicolari fra loro, ogni linea BA inalzata in un punto B della loro comune intersezione sopra uno di questi piani MN, sarà situata nell'altro piano EH.

Poichè se non vi fosse situata si potrebbe condurre in questo piano EH pel punto B una perpendicolare all' intersezione EF, la quale in virtù del precedente teorema risulterebbe perpendicolare al piano MN. Vi sarebbero dunque nel punto B due perpendicolari al medesimo piano*; lo che è assurdo. * 391.

TEOREMA XVIII.

429. *Quando due piani EH e DG sono perpendicolari ad un terzo MN la loro intersezione AB è pure perpendicolare a questo terzo piano.*

Poichè se pel punto B si conducesse una perpendicolare al piano MN questa dovrebbe trovarsi ad un tempo nel piano EH e nel piano DG; essa dunque converrebbe colla loro intersezione AB; dunque questa intersezione è perpendicolare al piano MN.

TEOREMA XIX.

430. *Se due rette non saranno situate nello stesso piano, i piani ad esse respettivamente perpendicolari si taglieranno.*

Poichè questi piani non possono confondersi che in tal caso le rette proposte sarebbero, contro l' ipotesi, parallele*; * 401.
e non possono i piani medesimi essere paralleli che allora ciascuna delle rette stesse sarebbe perpendicolare all' uno ed all' altro*, e conseguentemente anche in questo caso sarebbero parallele fra loro. * 406.
Dunque necessariamente i due piani s' incontreranno.

431. *Scolio.* Poichè ciascuno dei due piani perpendicolari dei quali si tratta è perpendicolare a un tempo ai piani paralleli delle due rette*, segue che l' intersezione de' primi * 415.
sarà una perpendicolare comune a questi.

TEOREMA XX.

Fig. 156. 432. *La più corta distanza di due rette AB, EF non situate in uno stesso piano è una perpendicolare comune alle due rette medesime, ed al sistema dei loro piani paralleli.*

Supponiamo che la più corta distanza delle due rette AB, EF sia una terza retta GO, obliqua ad EF. Dal punto G si abbassi la perpendicolare GP sopra EF; avremo $CP < GO$; dunque GO non sarà la più corta distanza delle due rette; dunque la più corta distanza non può essere obliqua ad alcuna di esse.

Sia dunque questa più corta distanza rappresentata da MN perpendicolare comune alle rette AB ed EF; conducendo pei punti M, ed N due piani respettivamente perpendicolari alle rette stesse, questi piani dovranno ta-
* 430. gliarsi*, e dovranno ambedue contenere la retta MN*,
* 390. dunque questa retta rappresenta la loro intersezione; di più essa è perpendicolare ai piani paralleli delle due rette.

Fig. 157. 433. *Scolio I.* Per fissare la posizione della perpendicolare comune si osservi che se per AB e per EF si conducono respettivamente due piani ANB, EMF perpendicolari ai piani paralleli delle due rette, questi due piani perpendicolari dovranno a un tempo contenere la retta
* 431. MN*, la quale per conseguenza sarà la loro comune intersezione.

434. *Scolio II.* Quindi si rileva che la perpendicolare comune a due rette AB, EF non situate in un medesimo piano è unica.

435. *Scolio III.* L' angolo di due rette non situate in un medesimo piano s' intende che sia quello di altre due rette respettivamente parallele ad esse, e condotte per un punto qualunque dello spazio; ovvero l' angolo che fa una di esse con una parallela condotta da un suo punto qualunque all' altra retta. Quando quest' angolo è retto, le rette proposte sono dette perpendicolari fra loro. Pertanto due

rette possono esser perpendicolari fra loro, o fare qualunque angolo senza incontrarsi.

436. *Scolio IV.* Avendo distinto col nome di *angolo diedro*, l'angolo a due facce, cioè formato da due piani, siamo indotti a chiamare *angolo triedro* quello formato da tre piani ciascuno de' quali incontra gli altri due. Tali sono i piani ASB, BSC, CSA i quali si tagliano scambievolmente secondo le rette SA, SB, SC che si riuniscono necessariamente in un punto S comune ai tre piani medesimi. Parimente potremo chiamare *angolo tetraedro*, quello formato da quattro piani ciascuno de' quali incontra gli altri tre, passando tutti per un medesimo punto. Fig. 158.

437. *Definizione.* In generale appellasi *angolo poliedro* l'indefinito spazio compreso fra più piani che si tagliano due a due e si riuniscono tutti in un medesimo punto. Questo punto si chiama *vertice* dell'angolo; le intersezioni dei piani che in esso si riuniscono si dicono *costole;* e gli angoli che queste costole formano sopra ciascun piano sono gli angoli piani costituenti l'angolo poliedro medesimo. L'angolo poliedro prende il suo nome speciale dal numero di questi angoli piani; e così chiamasi come abbiamo detto angolo *triedro*, *tetraedro*, *pentaedro*, ec., secondochè tre, quattro, cinque, ec., sono gli angoli piani che lo costituiscono.

Per indicare un angolo poliedro si enuncia la lettera del suo vertice ponendo di seguito tutte le altre respettivamente situate sopra le sue costole.

TEOREMA XXI.

438. *In ogni angolo triedro $SABC$ uno qualunque de' suoi tre angoli piani è minore della somma degli altri due, e maggiore della loro differenza.*

1.° Non v'ha luogo di dimostrare la prima parte del teorema che rispetto all'angolo ASB maggiore di ciascuno degli altri due angoli ASC, BSC; in questa ipotesi dico essere $ASB < ASC + BSC$.

Nel piano ASB si conduca a piacere la retta AB e si faccia l'angolo $BSD = BSC$. Quindi avendo preso $SC = SD$ si conducano le altre rette AC, BC. I triangoli BSD, BSC sono uguali, poichè il lato SB è comune, il lato $SC = SD$, e l'angolo $BSD = BSC$; dunque $BD = BC$. Ma $AB < AC + BC$; dunque togliendo da una parte BD, e dall'altra la sua uguale BC, resterà $AD < AC$. Perciò avendosi nei due triangoli ASD, ASC il lato AS comune il lato $SD = SC$, ed il lato $AD < AC$, sarà
* 103. l'angolo $ASD < ASC$*; perlochè aggiungendo da una parte l'angolo DSB, e dall'altra il suo uguale BSC si avrà $ASB < ASC + BSC$.

2.° Dico in secondo luogo che il medesimo angolo ASC è maggiore della differenza degli altri due ASB, BSC; si osservi che in virtù dello stesso teorema $ASC < ASB + BSC$; cosicchè supponendo $ASC > BSC$ e togliendo da ambe le parti BSC, avremo $ASB > ASC - BSC$.

439. *Scolio.* In ogni angolo triedro si considerano sei cose tre angoli piani, e tre angoli diedri.

In generale un angolo poliedro avrà sempre tanti angoli diedri quanti sono i suoi angoli piani, o le sue facce. Or se avverrà che il piano di ciascuna faccia prolungato a piacere non possa mai tagliare l'angolo poliedro quest'angolo avrà tutti i suoi angoli diedri *salienti*, e si chiamerà angolo poliedro *convesso*. Nel caso contrario, quando cioè l'angolo poliedro potrà esser tagliato da una delle sue facce, l'angolo diedro cui questa faccia compete sarà *rientrante* e l'angolo poliedro medesimo sarà come suol dirsi *concavo*.

L'angolo poliedro è *regolare* quando ha tutti gli angoli piani uguali, e tutti gli angoli diedri parimente uguali: in tal caso esso è necessariamente convesso.

TEOREMA XXII.

440. *In ogni angolo poliedro convesso la somma degli angoli piani che lo costituiscono è sempre minore di quattro angoli retti.*

L' angolo poliedro sia S; si conduca un piano che incontri tutte le sue costole; le intersezioni di questo piano colle facce dell'angolo medesimo formeranno un poligono convesso $ABCDE$, il quale per le rette OA, OB, OC, OD, OE, condotte dal punto O preso su la sua superficie a tutti i suoi vertici, si potrà decomporre in tanti triangoli AOB, BOC, ec., quanti sono i triangoli ASB, BSC, ec. Or la somma degli angoli dei triangoli AOB, BOC, ec., che hanno il comune vertice O, sarà uguale alla somma degli angoli dei triangoli ASB, BSC, ec., che hanno il comune vertice S; ma poichè per gli angoli triedri $ABSE$, $BCSA$, ec., si ha* $ABC < SBA + SBC$, $BCD < SCB + SCD$, ec., segue che nei triangoli il cui vertice è in O la somma degli angoli contigui ai lati del poligono $ABCDE$ è minore della somma degli angoli contigui ai medesimi lati nei triangoli il cui vertice è in S; dunque la somma di tutti gli angoli piani dell'angolo poliedro sarà minore della somma degli angoli formati intorno al punto O, cioè minore di quattro angoli retti. Fig. 159. * 438.

441. *Scolio.* Agevolmente si vede che la precedente dimostrazione non potrebbe aver luogo ove l' angolo poliedro non fosse convesso.

TEOREMA XXIII.

Fig. 160. 442. *Se due angoli triedri S, s, sono composti di angoli piani respettivamente uguali, gli angoli diedri formati dai piani di questi angoli saranno essi pure uguali.*

Sieno gli angoli piani ASC, ASB, BSC dell' angolo triedro S respettivamente uguali agli angoli piani asc, asb, bsc dell' angolo triedro s. Da un punto B qualunque della costola SB si abbassino le perpendicolari BA, BC sopra le costole SA, SC, la perpendicolare BP sul piano ASC, e si conducano le rette PA, PC; queste rette resulteranno perpendicolari alle medesime costole SA, SC*. Fatto poi $sb = SB$ si ripeta nell'angolo triedro s la medesima costruzione. Due casi possono avvenire, cioè che le perpendicolari BP, bp cadano rapporto alle costole SA, sa dalla medesima parte delle costole SC, sc, oppure che cadano dalla parte opposta; nel 1.° caso agli angoli diedri $BSAC$, $bsac$ corrisponderanno gli angoli piani BAP, bap*; nel 2.° caso vi corrisponderanno i loro supplementi. Cosicchè ove si dimostri essere l'angolo $BAP = bap$ potremo inferirne l'uguaglianza degli angoli diedri $BSAC$, $bsac$ in ambedue i casi medesimi. * 398. * 419.

Essendo l' angolo $ASB = asb$, ed il lato $SB = sb$ i triangoli rettangoli SAB, sab saranno uguali; dunque $SA = sa$, ed $AB = ab$. Nello stesso modo per mezzo dei triangoli SCB, scb potrà dimostrarsi essere $SC = sc$, e $BC = bc$. Pertanto i quadrilateri $ASCP$, $ascp$ saranno uguali; perchè ponendo l'angolo asc sul suo uguale ASC i punti a, c cadranno respettivamente su i punti A, C; ap perpendicolare ad sa converrà con AP perpendicolare ad SA; cp perpendicolare ad sc converrà con CP perpendicolare ad SC; ed il punto p cadrà in P; dunque $AP = ap$. Dunque i triangoli rettangoli ABP, abp, avendo le ipotenuse AB, ab uguali, ed i lati AP, ap anch' essi uguali, saranno uguali; dunque l'angolo $BAP =$

bap, come si doveva dimostrare. E così potrà dimostrarsi essere anche gli altri due angoli diedri respettivamente uguali.

443. *Scolio.* Il precedente teorema avrebbe pur luogo ove gli angoli piani dei due angoli triedri fossero disposti in un ordine inverso; cioè si avesse l'angolo $ASC = A'S'C'$, $ASB = A'S'B'$, $BSC = B'S'C'$. Infatti preso $S'B' = SB$ e ripetuta nell'angolo solido S' la stessa costruzione fatta nell'angolo S dimostreremmo nello stesso modo che l'angolo $BAP = B'A'P'$.

TEOREMA XXIV.

444 *Due angoli triedri composti di angoli piani respettivamente uguali, sono uguali fra loro.*

Possono avvenire due casi, cioè che gli angoli piani respettivamente uguali sieno disposti ne' due angoli triedri nello stesso ordine, o che sieno disposti in ordine inverso.

1.° Sieno S, s due angoli triedri aventi gli angoli piani respettivamente uguali e disposti nello stesso ordine; ripetuta la costruzione indicata nella dimostrazione precedente, otterremo i quadrilateri $ASCP$, $ascp$ uguali; e l'uno si potrà porre sull'altro in modo che coincidano, e che nel tempo stesso PB perpendicolare al piano ASC convenga con pb perpendicolare al piano asc; e poichè $PB = pb$ in virtù della uguaglianza dei triangoli ABP, abp, i punti B, b coincideranno; laonde anche la costola SB converrà colla costola Sb, i piani ASB, BSC combaceranno respettivamente coi piani asb, bsc, e i due angoli triedri non ne formeranno più che uno solo.

2.° Sieno S, S' due angoli triedri aventi gli angoli piani respettivamente uguali e disposti in ordine inverso; tuttavia si avranno i quadrilateri $ASCP$, $A'S'C'P'$ uguali; ma ponendo l'uno di essi sull'altro in maniera che coincidano PB perpendicolare al piano ASC non potrà convenire con $P'B'$ perpendicolare al piano $A'S'C'$, vedendosi chiaramente che queste perpendicolari avranno direzioni contrarie.

In questo caso adunque il principio di sovrapposizione non sarà sufficiente a dimostrare l'identità de'due angoli solidi; motivo per cui ci limiteremo a dire che due angoli triedri, i quali hanno gli angoli piani respettivamente uguali e disposti in ordine inverso, sono uguali tra loro per la sola ragione che i loro elementi costituenti, angoli piani, ed angoli diedri, sono respettivamente uguali.

445. *Scolio I.* Ne' solidi adunque due specie d'uguaglianza si debbono distinguere; perocchè, come lo vediamo nel precedente esempio, ove anche due solidi abbiano tutte le loro parti costituenti respettivamente uguali, avviene talora, cioè quando queste parti sono disposte ne' due solidi in ordine inverso, che l'uno di essi non possa porsi nell'altro in modo da formare un solido solo; la qual cosa non avviene nelle superfici, perchè quando in due superfici i lati uguali fossero disposti in ordine inverso, per mezzo del rovesciamento, ciascuna di esse potrebbe acquistare un perimetro identico a quello dell'altra. I due casi d'uguaglianza nei solidi, vengono distinti con due diversi nomi, chiamandosi *uguaglianza per identità* o semplicemente *uguaglianza* quella assoluta o di sovrapposizione, e l'altra *uguaglianza per simmetria* o semplicemente *simmetria.* Per conseguenza due angoli triedri costituiti di tre angoli piani respettivamente uguali, ma disposti in ordine inverso, si diranno *angoli uguali per simmetria*, o più brevemente *angoli simmetrici.* In generale due angoli solidi potranno chiamarsi *simmetrici* quando essendo costituiti di angoli piani respettivamente uguali e disposti in un ordine inverso, gli angoli diedri formati dai piani nei quali si trovano gli angoli uguali saranno essi pure respettivamente uguali.

Fig. 161. 446. *Scolio II.* Essendo dato un angolo solido S potremo sempre formarne il simmetrico prolungandone le costole SA, SB, SC al di là del vertice S; infatti 1.° gli angoli piani aSc, aSb, bSc saranno respettivamente uguali agli angoli ASC, ASB, BSC e disposti in ordine inverso; 2.° l'angolo diedro dei piani dove si trovano due qualunque degli angoli ASC, ASB, BSC sarà manifestamente uguale all'angolo diedro dei piani dove

si trovano gli angoli respettivamente uguali nell' angolo solido opposto.

TEOREMA XXV.

447. *Due angoli poliedri S, s sono uguali fra loro quando sono costituiti di un medesimo numero di angoli triedri respettivamente uguali, e disposti nel medesimo ordine.*

Sieno gli angoli triedri $SABC$, $SACD$, $SADE$ che costituiscono l'angolo poliedro S respettivamente uguali agli angoli triedri $sabc$, $sacd$, $sade$ che costituiscono l'angolo poliedro s. Gli angoli triedri $SABC$, $sabc$, ponendo convenientemente l'uno sull'altro, coincideranno; lo stesso avverrà degli angoli triedri $SACD$, $sacd$, e di tutti gli altri angoli triedri omologhi susseguenti; dunque i due angoli poliedri proposti S, ed s coincideranno essi pure, e saranno per conseguenza uguali. Fig. 162.

448. *Scolio.* Due angoli poliedri sono simmetrici fra loro quando sono costituiti d'un medesimo numero di angoli triedri simmetrici e disposti in ordine inverso. Infatti questi angoli poliedri saranno costituiti di angoli piani respettivamente uguali, disposti in ordine inverso, e gli angoli diedri formati dai piani nei quali si trovano gli angoli uguali, saranno essi pure respettivamente uguali.

LIBRO SESTO

I POLIEDRI; I CASI DELLA LORO UGUAGLIANZA, E DELLA LORO SIMMETRIA.

NOZIONI PRELIMINARI.

449. Si chiama *poliedro* ogni solido le cui facce, cioè le superfici dalle quali è terminato, sono piane. Per molti modi si rende sensibile l'esistenza di questi solidi, e sarebbe superfluo dimostrarla.

Le facce d'un poliedro sono evidentemente dei poligoni; perchè l'intersezione di due piani che si tagliano è una linea retta. Or queste intersezioni, o linee, le quali sono i lati de' varj poligoni di che è costituita la superficie del poliedro, si chiamano *lati*, o *costole* del poliedro medesimo.

450. Sono necessarj almeno quattro piani per formare un poliedro; perocchè tre se ne richiedono almeno per costituire un angolo solido, ed un quarto per chiudere il vuoto compreso fra questi tre piani medesimi. Il più semplice poliedro adunque è quello che ha quattro facce; il quale si chiama *tetraedro*; di poi viene il *pentaedro* che ha cinque facce; l'*essaedro* che ne ha sei; ec. L'*ottaedro* ne ha otto; il *dodecaedro* ne ha dodici; l'*icosaedro* ne ha venti.

451. Si chiama *diagonale* d'un poliedro ogni retta, la quale penetrando nel suo interno, congiunge i vertici di due angoli solidi non consecutivi. Per analogia si chiama *piano diagonale* ogni piano che taglia un poliedro secondo due diagonali che partono da uno stesso vertice.

452. Intenderemo che un poliedro sia *convesso* quando la sua superficie non potrà essere intersecata da una linea retta in più di due punti: cosicchè prolungando in tutti i sensi una sua faccia qualunque il solido non verrà tagliato, ma resterà tutto dalla medesima parte di tale prolungamento.

Fig. 162. 453. Conducendo ad una certa distanza dal vertice di un angolo solido S un piano che ne incontri tutte le costole, la sezione sarà un poligono il quale avrà tanti lati quante sono le facce di esso angolo solido; e per tal modo verrà determinata una parte dello spazio contenuto fra queste facce; cioè verrà determinato il solido cui si dà il nome di *piramide*. La piramide adunque è un solido compreso fra più piani triangolari che partono da un medesimo punto S, e sono terminati ai differenti lati d'un medesimo piano poligono $ABCDE$.

Il poligono $ABCDE$ dicesi *base* della piramide; il punto S ne è il *vertice* il complesso de' triangoli SAB, SBC, ec., forma la superficie *convessa* o *laterale* della piramide.

L'*altezza* della piramide è la perpendicolare abbassata dal vertice sul piano della base prolungato ove occorra.

La piramide dicesi poi *triangolare*, *quadrangolare*, ec., secondochè la base è un triangolo, un quadrilatero, ec.

454. La superficie convessa della piramide si può concepire come prodotta dal movimento d'una linea retta indefinita fissa in un punto S e soggetta a rasentare il perimetro d'un poligono qualunque $ABCDE$. Il punto S è il vertice della piramide; la linea indefinita e fissa nel punto S dall'ufficio suo ha nome di *generatrice* della superficie che dal suo moto risulta; per brevità si chiama talora generatrice della piramide.

455. Dato il poligono $ABCDE$ ed un punto S fuori del piano di questo poligono facilmente si vede potersi determinare una piramide la quale abbia il medesimo poligono per base, ed il suo vertice in S, conducendo le rette SA, SB, SC, ec., dal punto S ai vertici di esso poligono; le

quali rette diverranno costole della superficie laterale della piramide.

456. Ogni piramide poligona può essere decomposta in piramidi triangolari. Infatti si conducano nella base *ABCDE* della piramide le diagonali *AC*, *AD*; questa base risulterà divisa in triangoli i quali potranno essere considerati come basi di altrettante piramidi aventi il comune vertice in *S* *; * 455. le quali sono quelle nelle quali si divide la piramide poligona mediante i piani diagonali *SAC*, *SAD*. È manifesto che queste piramidi parziali sono in numero uguale a quello delle facce triangolari della piramide poligona diminuito di due unità.

457. Abbiasi un poligono qualunque *ABCDE*; pei Fig. 163. punti *A*, *B*, *C*, *D*, ec., si conducano delle rette *AF*, *BG*, *CH*, *DI*, ec., perpendicolari, o oblique al piano *ABD*, ma tutte uguali fra loro e parallele; e si congiungano le loro estremità per le rette *FG*, *GH*, *HI*, ec. Manifestamente le figure *ABGF*, *BCHG*, *HCDI*, ec., saranno dei parallelogrammi *, ed i poligoni *ABCDE*, * 130. *FGHIK* saranno uguali, ed i loro piani paralleli *; il * 411. solido compreso fra queste facce si chiama *prisma*. Cioè il prisma è un solido compreso da più piani parallelogrammi terminati da una parte, e dall'altra da due piani poligoni uguali e paralleli. I due poligoni uguali e paralleli si chiamano *basi* del prisma; le facce parallelogrammiche ne costituiscono la *superficie laterale* o *convessa*.

L'*altezza* d'un prisma è la distanza delle sue due basi, cioè la perpendicolare abbassata da un punto della base superiore sopra il piano della base inferiore.

Il prisma prende il nome di *triangolare*, *quadrangolare*, ec., secondo che le sue basi sono triangoli, quadrilateri, ec.

458. Un prisma dicesi *retto* quando le costole della superficie convessa sono perpendicolari alle basi; nel qual caso le costole medesime sono uguali all'altezza, ed i parallelogrammi costituenti la superficie convessa sono rettangoli. *Obliquo* è il prisma quando i lati sono obliqui alle basi; essi lati sono allora maggiori dell'altezza.

459. La superficie convessa del prisma si può concepire come generata dal movimento d'una retta *AF* che si mantiene parallela a se stessa e di costante lunghezza mentre descrive colla sua estremità *A* il perimetro d'un poligono qualunque *ABCDE*. Per questo medesimo movimento l'altra estremità *F* descrive il perimetro del poligono *FGHIK* uguale e parallelo al poligono *ABCDE*. La retta *AF* si chiama *generatrice* del prisma. Le costole della superficie convessa non essendo che la generatrice considerata nelle sue varie stazioni nei punti *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, saranno tutte uguali alla generatrice stessa. Il prisma retto è manifestamente quello nel quale la generatrice è perpendicolare al piano del poligono descritto dalla sua estremità.

Fig. 164. 460. Il prisma la cui base è un parallelogrammo ha tutte le facce parallelogramme; esso chiamasi *parallelepipedo*. Tal è quello rappresentato dalla figura 164; dove supponendo che la base del parallelepipedo sia la faccia *ABCD* essa dovrà essere uguale alla faccia opposta, o base superiore *EFGH*.

Nel parallelepipedo retto quando la base è un rettangolo tutte le facce sono rettangolari; donde viene il suo nome di parallelepipedo *rettangolo*.

TEOREMA I.

Fig. 165. 461. *Se in una piramide la base ABCD ec., è un poligono regolare e le costole SA, SB, ec., della superficie laterale sono uguali fra loro 1.° gli angoli solidi alla base saranno uguali 2.° l'altezza SO della piramide cadrà sul centro della base.*

1.° Poichè $SA = SB =$ ec, ed $AB = BC =$ ec., i triangoli *ASB*, *BSC*, ec., saranno isosceli ed uguali fra loro; e poichè gli angoli *FAB*, *ABC*, ec., del poligono regolare *ABCD* ec., sono uguali, segue che gli angoli solidi triedri *A*, *B*, ec., alla base della piramide come composti di angoli piani respettivamente uguali, saranno fra loro uguali.

2.° Conducendo le rette *OA*, *OB*, ec., dal piede dell' altezza SO ai vertici A, B, ec., ne risulteranno i triangoli SAO, SBO, ec., manifestamente rettangoli*, ed uguali fra loro, avendo essi le ipotenuse SA, SB, ec., uguali ed il lato SO comune*; laonde $OA = OB =$ ec.; dunque il piede O dell' altezza della piramide è il centro della sua base.

* 390.
* 106.

462. *Definizione.* Una piramide dicesi *regolare* quando la sua base è un poligono regolare, e nel tempo stesso l' altezza cade sul centro di essa base. Tale è $SABCDE$.

L' altezza medesima prende allora il nome di *asse* della piramide. Una retta qual' è ST abbassata perpendicolarmente dal vertice S sopra un lato della base si chiama *apotema*.

TEOREMA II.

463. *Se una piramide* S *è tagliata da un piano* abcd *parallelo alla sua base* $ABCD$, 1.° *l' altezza* SO *e le costole* SA, SB *ec., saranno tagliate ne' punti* o, a, b, *ec., in parti proporzionali;* 2.° *la sezione* abcd *sarà un poligono simile alla base* $ABCD$. Fig. 166.

1.° Poichè i piani $ABCD$, $abcd$ sono paralleli, le loro intersezioni col piano SAB saranno parallele*; cosicchè i triangoli SAB, Sab sono simili; tali sono i triangoli SBC, Sbc, ec., finalmente lo sono pure i triangoli SAO, Sao stantechè ao è parallela ad AO: dunque avremo

* 405.

$$SO : so :: SA : Sa :: SB : Sb :: SC : Sc :: \text{ec.};$$

dunque l' altezza SO e le costole SA, SB, ec., sono tagliate in parti proporzionali.

2.° Essendo ab parallela ad AB, bc a BC, cd a CD, ec., evidentemente l' angolo $abc = ABC$, $bcd = BCD$, ec.; d' altra parte dai triangoli simili SAB, Sab si ha

$$AB : ab :: SB : Sb,$$

e dai triangoli simili SBC, Sbc, si ha pure

$$BC : bc :: SB : Sb;$$

perciò $$AB : ab :: BC : bc.$$

Nello stesso modo si otterrebbe

$$BC : bc :: CD : cd,$$

e così di seguito. Laonde i poligoni $ABCD$, $abcd$ avendo gli angoli respettivamente uguali, ed i lati omologhi proporzionali, sono simili.

464. *Corollario I.* In qualunque piramide le sezioni fatte da piani paralleli fra loro sono poligoni simili. Infatti una di queste sezioni si potrà sempre considerare come base d' una nuova piramide cui sia parallela l' altra sezione.

465. *Corollario II.* Poichè i poligoni $ABCD$, $abcd$ sono simili, le superfici loro staranno nella ragione dei quadrati dei lati omologhi AB, ab; ma

$$AB : ab :: SA : Sa = SO : So,$$

perciò avremo

$$ABCD : abcd :: \overline{SO}^2 : \overline{So}^2.$$

Ciò posto sia $TMNO$ altra piramide dove abbiasi l'altezza $TQ = SO$; fatto $Tq = So$ si conduce pel punto q un piano parallelo alla base MNP, e la sezione sia mnp; qui pure avremo

$$MNP : mnp :: \overline{SO}^2 : \overline{So}^2.$$

Conseguentemente

$$ABCD : abcd :: MNP : mnp;$$

dunque *le basi di due piramidi aventi la medesima altezza stanno fra loro come le sezioni fatte dai piani condotti nelle due piramidi parallelamente ad esse basi ad uguale distanza dai vertici.*

Dunque se le basi $ABCD$, MNP sono equivalenti, le sezioni MNP, mnp fatte ad uguale altezza saranno equivalenti, e viceversa.

TEOREMA III.

466. *Due piramidi triangolari sono uguali quando hanno tre facce respettivamente uguali e similmente disposte.* Fig. 167.

Sieno le facce SAB, SAC, SBC della piramide S respettivamente uguali alle facce sab, sac, sbc della piramide s, e similmente disposte; gli angoli triedri S, s saranno uguali * e gli angoli diedri SA, SB, SC saranno respettivamente uguali agli angoli diedri sa, sb, sc. Ciò posto poniamo la faccia sab sopra la faccia SAB; essendo l'angolo diedro sa uguale all'angolo diedro SA la faccia sac combacerà col piano della faccia SAC; ma queste due facce sono uguali e disposte nel medesimo modo, dunque esse coincideranno perfettamente, ed il punto c cadrà in C, e la costola sc si confonderà colla costola SC; cioè le due piramidi coincideranno in tutta la loro estensione; dunque esse sono uguali. * 444.

467. *Corollario.* Due piramidi triangolari sono uguali quando hanno tutte le costole respettivamente uguali e similmente disposte.

TEOREMA IV.

468. *Due piramidi triangolari sono uguali quando hanno un angolo diedro uguale compreso fra due facce respettivamente uguali e similmente disposte.*

Sia l'angolo diedro SA uguale all'angolo diedro sa, e le facce SAB, SAC sieno respettivamente uguali alle facce sab, sac e similmente disposte; situando la faccia sab sopra la faccia SAB con ragionamento in tutto simile al precedente, potremo dimostrare che le due piramidi coincidono in tutta la loro estensione, e sono perciò uguali.

TEOREMA V.

Fig. 167. 469. *Due piramidi triangolari sono uguali quando hanno una faccia uguale contigua a due angoli diedri respettivamente uguali, e similmente disposti.*

Sia la faccia ABC uguale alla faccia abc; e gli angoli diedri AB, AC respettivamente uguali agli angoli diedri ab, ac e similmente disposti; avendo posta la faccia abc su la faccia ABC stante l'uguaglianza degli angoli diedri AB, ab, la faccia sab combacerà col piano della faccia SAB, e la costola as si troverà sopra questo piano; e stante l'uguaglianza degli angoli diedri AC, ac la faccia sac combacerà col piano della faccia SAC, e la costola as si troverà sopra questo piano; perciò as dovendosi trovare a un tempo sopra i due piani SAB, SAC cadrà su la loro unica intersezione AS; e poichè la costola $AS = as$, a cagione della uguaglianza delle facce ASC, asc, il punto s cadrà in S; laonde le due piramidi coincideranno perfettamente; adunque esse sono uguali.

Fig. 161. 470. *Scolio.* Prolungando al di là di un vertice qualunque S della piramide triangolare $SABC$ le costole che in esso si riuniscono, e prendendo dei prolungamenti le parti Sa, Sb, Sc respettivamente uguali alle costole SA, SB, SC, e conducendo il piano abc, ne risulterà la piramide triangolare $Sabc$, nella quale le tre facce che si riuniscono nel vertice S saranno respettivamente uguali alle tre facce della piramide $SABC$ che si riuniscono nel vertice medesimo; inoltre gli angoli solidi che hanno il vertice comune S saranno simmetrici.

471. *Definizione.* Due piramidi triangolari si dicono *simmetriche* quando hanno un angolo simmetrico compreso fra facce omologhe respettivamente uguali.

TEOREMA VI.

472. *Due piramidi triangolari simmetriche hanno tutte le facce omologhe respettivamente uguali, e gli angoli diedri omologhi essi pure respettivamente uguali.*

Sieno le due piramidi $SABC$, $Sabc$, nelle quali i Fig. 161.
due angoli che hanno il vertice S comune sono fra loro simmetrici; il primo compreso fra le facce triangolari SAB, SAC, SBC respettivamente uguali alle facce triangolari Sab, Sac, Sbc che comprendono il secondo Per l'uguaglianza dei triangoli SAB, Sab sarà $AB = ab$; per quella dei triangoli SAC, Sac sarà $AC = ac$; e finalmente per quella dei triangoli SBC, Sbc sarà pure $BC = bc$; dunque i triangoli ABC, abc saranno equilateri fra loro e perciò uguali; dunque tutte le facce della piramide $SABC$ sono uguali alle facce omologhe della piramide $Sabc$.

Pertanto essendo uguali le facce omologhe, gli angoli piani omologhi di queste facce saranno respettivamente uguali; e gli angoli solidi triedri omologhi saranno costituiti di angoli piani respettivamente uguali; dunque l'angolo diedro di due facce contigue qualunque in una di queste piramidi è uguale all'angolo diedro delle facce omologhe nell'altra.

473 *Corollario I.* È da osservare che in due piramidi simmetriche gli angoli omologhi sono simmetrici; infatti prolungando al di là del vertice C le costole CA, CB, CS avremo un angolo solido $Csa'b'$ simmetrico all'angolo $CSAB$ della piramide $SABC$ e tale che potrebbe coincidere coll'angolo $cSab$ della piramide $Sabc$; essendochè gli angoli triedri $Csa'b'$, $cSab$ sono costituiti di angoli piani respettivamente uguali e similmente disposti; dunque gli angoli $CSAB$, $cSab$ sono simmetrici fra loro; tali sono pure gli angoli $BSAC$, $bSac$; tali gli angoli $ASBC$, $aSbc$; ec.

474. *Corollario II.* In due piramidi simmetriche tutti gli elementi omologhi, le costole, gli angoli piani, le facce

e gli angoli diedri, sono respettivamente uguali; nondimeno, poichè gli angoli triedri omologhi sono simmetrici, non v'ha modo alcuno di sovrapposizione in virtù del quale le due piramidi vengano a coincidere perfettamente in tutta la loro estensione; infatti qualunque sia la faccia della piramide $Sabc$ che ne piaccia far combaciare colla faccia corrispondente ed uguale della piramide $SABC$ una delle piramidi si collocherà al di sopra del comune piano di queste facce, l'altra al di sotto come si vede nella fig. 168.

Fig. 161. 475. *Corollario III. Una piramide triangolare non ha che una sola piramide simmetrica.* Veramente ai quattro vertici di una piramide triangolare corrispondono quattro piramidi simmetriche alla piramide medesima; ma esse sono uguali, e poste convenientemente l'una sull'altra potrebbero coincidere in tutta la loro estensione. In fatti facendo $Ca' = CA$, $Cb' = CB$, $Cs = CS$ si compisca la piramide $Csa'b'$; essa sarà simmetrica alla piramide $SABC$ come lo è $Sabc$; ma poichè gli angoli triedri $Csa'b'$, $cSab$ posti convenientemente l'uno nell'altro combaciano perfettamente in tutte le loro facce, perciò, ove si osservi che queste facce sono respettivamente uguali, si vedrà che le due piramidi $Sabc$, $Csa'b'$ debbono esse pure combaciare in tutta la loro estensione; lo stesso potrebbe dimostrarsi rispetto alle piramidi corrispondenti agli altri vertici A e B; dunque una piramide triangolare non ha che una sola piramide simmetrica.

* 466. 476. *Corollario IV.* Le proposizioni III, IV, V * hanno
468. pur luogo, quando gli elementi dati come respettivamente
469. uguali nelle due piramidi, sono in esse inversamente disposti; infatti se si suppone costrutta una piramide simmetrica ad una delle due proposte, essa in virtù delle proposizioni medesime dovrà risultare uguale all'altra piramide proposta; dunque le due piramidi proposte saranno simmetriche fra loro. Così alle tre proposizioni preindicate conseguono tre facili criterj di simmetria relativi alle piramidi triangolari; quello però cui dà luogo la proposizione III, se bene si osserva, è lo stesso criterio contenuto nella definizione che abbiamo data delle piramidi simmetriche.

LEMMA.

477. *Se pel punto C mezzo della retta A B si conduce un piano P Q perpendicolare a questa retta; 1.° ogni punto di esso piano sarà ugualmente distante dalle due estremità di A B; 2.° ogni punto situato fuori del piano sarà più prossimo a quella estremità di A B che si trova dalla medesima parte di tal punto.* Fig. 169.

1.° Sia E un punto del piano PQ; conducansi le rette AE, BE, CE; CE sarà perpendicolare sul mezzo di AB*; conseguentemente $AE = BE$*. * 390. * 99.

2.° Sia F un punto situato fuori del piano PQ; conducansi le rette AF, BF; quindi, D essendo il punto dove BF incontra il piano PQ, conducasi AD; sarà $AD = BD$; ma $AF < AD + DF$; dunque $AF < BF$.

478. *Corollario I.* Ogni punto adunque ugualmente distante dalle estremità della retta AB appartiene necessariamente al piano perpendicolare a questa retta, e che la divide in due parti uguali; cioè il piano perpendicolare condotto pel mezzo d'una retta è il *luogo geometrico* di tutti i punti equidistanti dalle estremità di essa retta. Questo piano chiamasi *piano di simmetria*.

479. *Corollario II.* Il piano che passa per tre punti A, B, C respettivamente equidistanti da altri due S, s taglia la retta Ss da cui sono uniti in due parti uguali, e le risulta perpendicolare. Infatti se pel punto O mezzo della retta Ss si conducesse un piano perpendicolare a questa retta, esso piano dovrebbe passare pei punti A, B e C; ma per tre punti non può passare che un solo e medesimo piano, dunque il piano che passa pei punti A, B, C sarà quello stesso che taglia la retta Ss in due parti uguali risultandole perpendicolare. Fig. 168.

TEOREMA VII.

480. *Se due piramidi triangolari simmetriche hanno una faccia A B C comune e sono costrutte l'una al di sopra l'altra al di sotto di questa faccia, la retta S s che unisce i vertici degli angoli solidi omologhi S, ed s sarà perpendicolare al piano della faccia medesima, e da esso divisa in due parti uguali.*

Poichè le piramidi sono simmetriche, le loro costole omologhe saranno uguali, per cui $AS = As$, $BS = Bs$, $CS = Cs$; ond'è che i tre punti A, B, C sono respettivamente equidistanti dai punti S, s; dunque il piano ABC è perpendicolare alla retta Ss, e divide questa retta in
* 477. due parti uguali*.

481. *Corollario.* Quando si consideri la faccia ABC come la base comune delle due piramidi le rette SO, Os rappresenteranno le loro respettive altezze; donde si rileva che le altezze omologhe di due piramidi simmetriche, cioè le altezze corrispondenti a due facce omologhe sono uguali.

TEOREMA VIII.

482. *Due piramidi triangolari S A B C, s A B C sono fra loro simmetriche quando avendo una comune faccia A B C, sono costrutte similmente l'una al di sopra l'altra al di sotto di questa faccia in modo che la retta S s, la quale unisce i vertici degli angoli omologhi S, ed s sia perpendicolare al piano della faccia medesima, e da esso divisa in due parti uguali.*

Infatti se il piano ABC è perpendicolare alla retta Ss e la divide in due parti uguali nel punto O, sarà $AS = As$, $BS = Bs$, $CS = Cs$; dunque le facce SAB, SAC, SBC della piramide $SABC$ saranno respettivamente uguali alle facce sAB, sAC, sBC della piramide $sABC$; dunque tutti gli angoli solidi omologhi delle due piramidi sono respettivamente simmetrici, e compresi fra facce omologhe uguali; dunque le piramidi *SABC*, *sABC* sono fra loro simmetriche.

TEOREMA IX.

483. *Due piramidi poligone SABCD*, sabcd *sono uguali quando hanno un angolo solido compreso fra tre facce omologhe respettivamente uguali, e similmente disposte.* Fig. 170.

Sieno gli angoli solidi *A*, *a* compresi fra facce omologhe uguali, e similmente disposte; è facile vedere che essi avranno i loro tre angoli piani respettivamente uguali e similmente disposti, e che per la sovrapposizione potranno coincidere perfettamente; perciò posta la base *abcd* su la base *ABCD*, la costola *as* converrà colla costola *AS*; e siccome queste costole sono uguali, il punto *s* cadrà in *S*, e la piramide *sabcd* coinciderà in tutta la sua estensione colla piramide *SABCD*.

484. *Definizione*. Due piramidi poligone s'intende che sieno simmetriche quando si possono decomporre in un medesimo numero di piramidi triangolari simmetriche, e disposte in ordine inverso.

TEOREMA X.

485. *Due piramidi poligone simmetriche hanno le facce omologhe respettivamente uguali, gli angoli diedri omologhi, essi pure respettivamente uguali, e gli angoli solidi omologhi simmetrici fra loro.*

Questa proposizione consegue alla definizione delle piramidi simmetriche, lo che agevolmente si dimostra.

486. *Corollario I.* Dalla stessa definizione delle piramidi poligone simmetriche e dal §. 475, segue che una piramide poligona qualunque non ha che una sola piramide simmetrica.

487. *Corollario II.* Bene si scorge aver luogo rispetto

* 480, e 482. alle piramidi poligone i teoremi VII, VIII*, dimostrati relativamente alle piramidi triangolari.

488. *Corollario III.* Le altezze di due piramidi poligone simmetriche sono uguali.

TEOREMA XI.

Fig. 171. 489. *In qualunque prisma la sezione* abcde *fatta da un piano parallelo alla sua base ABCDE è un poligono uguale alla base medesima.*

Infatti i lati *AB*, *ab* sono uguali fra loro come parallele comprese fra parallele; per la stessa ragione sono uguali i lati *BC*, *bc*; lo sono parimente i lati *CD*, *cd*, ec. D'altra parte sono uguali gli angoli *ABC*, *abc* avendo essi i lati respettivamente paralleli e diretti nel medesimo senso; tali sono pure gli angoli *BCD*, *bcd*, ec.; dunque la sezione *abcde* è un poligono uguale al poligono *ABCDE* base del prisma.

490. *Corollario.* In qualunque prisma le sezioni fatte da piani paralleli fra loro sono uguali. Infatti una di queste sezioni si può considerare come base d'un prisma cui è parallela l'altra sezione.

TEOREMA XII.

Fig. 172. 491. *Due prismi ABCDEF*, abcdef *sono uguali quando hanno un angolo solido compreso fra tre facce respettivamente uguali, e similmente disposte.*

Sieno gli angoli solidi *A*, *a* compresi fra facce omologhe uguali, e similmente disposte; si vede che essi avranno i loro tre angoli piani respettivamente uguali e similmente disposti, e che per la sovrapposizione potranno perfettamente coincidere; perciò posta la base *abcde* su la base *ABCDE* la costola *af* converrà colla costola *AF*; e siccome queste costole sono uguali fra loro, come lo sono le costole *BG*, *bg*, e le costole *EK*, *ek*, i punti *f*, *g*, *k* cadranno respettivamente su i punti F, G, K; dunque la faccia $fghik$ coinciderà interamente colla sua uguale $FGHIK$, e le costole ch, di coincideranno esse pure colle costole CH, DI; dunque i due prismi coincideranno perfettamente in tutta la loro estensione.

492. *Corollario.* Due prismi retti sono uguali quando hanno basi uguali, ed uguali altezze. Perocchè essendo in tal caso le altezze uguali alle costole dei prismi *, avremmo $AF = af$; e siccome stante l' uguaglianza delle basi si ha $AB = ab$, $AE = ae$, i rettangoli $ABGF$, $AEKF$ sarebbero respettivamente uguali ai due rettangoli $abgf$, $aekf$; e per tal modo i due prismi avrebbero un angolo solido compreso fra tre facce respettivamente uguali; dunque i due prismi sarebbero uguali. * 458.

493. *Scolio.* Ogni prisma poligono potrà sempre decomporsi in prismi triangolari i quali avranno la medesima altezza del prisma, e le loro basi saranno i vari triangoli ABC, ACD, ADE, ec., ne' quali si può decomporre la base $ABCD$ ec., per le diagonali AC, AD, ec. Fig. 163.

494. *Definizione.* Due prismi s' intende che sieno simmetrici quando sono composti di un medesimo numero di piramidi simmetriche, e disposte in ordine inverso.

Sieno $ABCDEF$, $abcdef$ due prismi triangolari; essi si reputeranno simmetrici fra loro quando le due piramidi $ABCE$, $ACFDE$ l' una triangolare, l' altra quadrangolare di che si compone il primo, saranno respettivamente simmetriche alle piramidi $abce$, $acfde$ delle quali è composto il secondo. Fig. 173.

Ben è chiaro poi che a soddisfare alla condizione richiesta dalla definizione, onde due prismi poligoni sieno simmetrici, basterà che sieno composti d'un medesimo numero di prismi triangolari simmetrici disposti in ordine inverso; dovendo poi i prismi triangolari omologhi essere composti di piramidi respettivamente simmetriche.

TEOREMA XIII.

495. *Due prismi simmetrici hanno le facce omologhe respettivamente uguali, gli angoli diedri omologhi essi pure respettivamente uguali, e gli angoli solidi omologhi simmetrici fra loro.*

Le facce omologhe dei due prismi saranno composte di facce omologhe ed uguali delle piramidi costituenti; dunque le facce omologhe dei due prismi saranno uguali

Due angoli diedri omologhi dei due prismi o saranno angoli diedri omologhi delle piramidi costituenti o si comporranno d' un medesimo numero di angoli diedri omologhi delle piramidi medesime; in ambedue i casi gli angoli diedri omologhi dei due prismi saranno uguali.

Finalmente gli angoli solidi omologhi nei due prismi saranno composti degli angoli solidi triedri omologhi delle piramidi costituenti, e disposti in ordine inverso, essendo queste stesse piramidi disposte in ordine inverso; ma gli angoli triedri omologhi delle piramidi sono simmetrici; dunque gli angoli solidi omologhi dei due prismi saranno essi pure simmetrici.

496. *Scolio.* Dalla definizione dei prismi simmetrici e dal §. 486 segue che un prisma qualunque non ha che un solo simmetrico.

TEOREMA XIV.

497. *Due prismi sono simmetrici fra loro quando hanno un angolo solido simmetrico compreso fra facce omologhe respettivamente uguali.*

Infatti un terzo prisma simmetrico ad uno dei prismi
* 491. proposti sarebbe uguale all'altro *; dunque i prismi proposti sono simmetrici fra loro.

TEOREMA XV.

498. *Se due prismi simmetrici hanno una faccia $ABCDE$ comune e sono costrutti l'uno al di sopra l'altro al di sotto di questa faccia, le rette* Hh, Ti, *ec., che uniscono i vertici degli angoli omologhi, sono perpendicolari al piano della faccia medesima, e da esso divisi in due parti uguali.* Fig. 174.

Essendo i prismi simmetrici le facce omologhe debbono essere uguali; perciò i parallelogrammi $BCHG$, $CDIH$ saranno respettivamente uguali ai parallelogrammi $BChg$, $CDih$; i lati omologhi di questi parallelogrammi e le loro omologhe diagonali saranno adunque respettivamente uguali; cosicchè avremo $HC = hC$, $HB = hB$, $HD = hD$; dunque il piano $ABCDE$ è perpendicolare alla retta Hh e divide questa retta in due parti uguali *. * 477.

Sarà superfluo ripetere la dimostrazione sopra le rette Ii, Kk, ec., quando si osservi che essendo IH, KI, ec., respettivamente uguali e parallele ad ih, ki, ec., anche Ii, Kk, ec., sono uguali e parallele ad Hh.

499. *Corollario.* Due prismi simmetrici hanno la medesima altezza.

TEOREMA XVI.

500. *Due prismi $ABCDEF$, $ABCDEf$, sono fra loro simmetrici quando avendo una faccia $ABCDE$ comune sono costrutti l'uno al di sopra l'altro al di sotto di questa faccia in modo che la retta* Hh, *che unisce i vertici H, ed* h *di due angoli omologhi qualunque sia perpendicolare al piano della faccia medesima, e da esso divisa in due parti uguali.*

Infatti se il piano $ABCDE$ è perpendicolare alla retta Hh e la divide in due parti uguali, si ha $DH = Dh$, $BH = Bh$, $CH = Ch$; perciò i triangoli CDH, CBH

sono respettivamente uguali ai triangoli CDh, CBh; dunque i parallelogrammi $DCHI$, $BCHG$ sono respettivamente uguali ai parallelogrammi $DChi$, $BChg$ e disposti in ordine inverso; dunque i due prismi $ABCDEF$, $ABCDEf$ avendo un angolo solido simmetrico compreso
* 497. fra tre facce respettivamente uguali sono simmetrici *.

TEOREMA XVII.

501. *In ogni parallelepipedo le facce opposte sono uguali e parallele.*

Fig. 164. La proposizione non ha bisogno di prova che per le facce della superficie laterale del parallelepipedo. Supponiamo pertanto che le basi del parallelepipedo sieno $ABCD$, $EFGH$, prendiamo a dimostrare l'uguaglianza delle facce $ABFE$, $DCGH$. Essendo $ADHE$ un parallelogrammo le rette AE, DH sono uguali e parallele fra loro; ed essendo anche $ABCD$ un parallelogrammo, le rette AB, DC sono parimente uguali e parallele fra loro; dunque
* 411. l'angolo BAE, è uguale all'angolo CDH*, ed il piano BAE è parallelo al piano CDH; dunque anche i parallelogrammi $ABFE$, $DCGH$ sono uguali e paralleli.

502. *Corollario I.* Poichè il parallelepipedo è un solido compreso da sei facce di cui le opposte sono uguali e parallele, segue che una faccia qualunque, e la sua opposta possono esser considerate come le basi del parallelepipedo.

503. *Corollario II.* Le costole opposte d'un parallelepipedo sono uguali e parallele. Quindi è che tre costole contigue d'un parallelepipedo AB, AD, AE, determinano il parallelepipedo medesimo; epperciò essendo date tre rette AB, AD, AE che partono da uno stesso punto A, e che formano fra loro dei dati angoli si potrà agevolmente costruire un parallelepipedo di cui le medesime rette sieno tre costole contigue. Perocchè conducendo dal punto B due linee BC, BF respettivamente parallele ed uguali ad AD, ed AE; dal punto D le linee DC, e DH respet-

tivamente uguali e parallele ad AB ed AE; dal punto E le linee EF, EH respettivamente uguali e parallele ad AB ed AD; e poi da un punto dove s'incontrano due delle parallele condotte, per es. C, una linea CG parallela ed uguale alla costola opposta AE; si avranno tutti i vertici del parallelepipedo.

504. *Corollario III.* In ogni parallelepipedo la sezione fatta da un piano che passa per due costole opposte è un parallelogrammo.

505. *Scolio.* Se le tre costole contigue d'un parallelepipedo saranno uguali le facce del parallelepipedo saranno altrettante losanghe; se le tre costole medesime oltre essere uguali formeranno fra loro angoli uguali, tutte le facce del parallelepipedo saranno losanghe uguali; finalmente se le tre costole saranno uguali, e formeranno scambievolmente degli angoli retti le facce del parallelepipedo saranno altrettanti quadrati.

506. *Definizione I.* Il parallelepipedo compreso da sei Fig. 175.
losanghe uguali si chiama *romboide*.

507. *Definizione II.* Il parallelepipedo compreso da sei Fig. 176.
quadrati si chiama *cubo*. Questi quadrati sono necessariamente uguali.

TEOREMA XVIII.

508. *In ogni parallelepipedo le quattro diagonali si tagliano scambievolmente in due parti uguali nel medesimo punto.*

Per le due costole opposte BF, DH si conduca un Fig. 164.
piano; la sezione sarà il parallelogrammo $BFHD$*; dun- * 504.
que le diagonali BH, ed FD si taglieranno scambievolmente in due parti uguali nel punto O. Per le due costole opposte AD, FG si conduca un altro piano; la sezione $ADGF$ sarà essa pure un parallelogrammo, e la diagonale AG taglierà in parti uguali la diagonale FD passando per conseguenza pel punto O; lo stesso si può dire della diagonale EC; dunque le quattro diagonali BH, FD, AG,

EC si tagliano scambievolmente in parti uguali nel medesimo punto.

509. *Scolio.* Il punto O si chiama *centro* del parallelepipedo.

TEOREMA XIX.

510. *In ogni parallelepipedo gli angoli solidi opposti sono fra loro simmetrici.*

Paragoniamo l'angolo solido A al suo opposto G;
* 125. l'angolo EAB uguale ad EFB* è pure uguale ad
* 411. HGC*; l'angolo $DAE = DHE = CGF$; e l'angolo
$DAB = DCB = HGF$; dunque i tre angoli piani che formano l'angolo solido A sono respettivamente uguali ai tre angoli piani che formano l'angolo solido G; ma prolungando le costole dell'angolo solido G al di là del suo vertice si dà luogo ad un angolo triedro simmetrico all'angolo solido G, e che potrebbe coincidere perfettamente coll'angolo solido A; dunque gli angoli solidi opposti A, e G sono simmetrici.

TEOREMA XX.

511. *Il piano che passa per due costole opposte BF, DH divide il parallelepipedo in due prismi triangolari $ABDEFH$, $BCDFGH$ simmetrici fra loro.*

Il solido $ABDEFH$ è un prisma perchè i triangoli ABD, EFH sono uguali come equilateri fra loro, ed i loro piani sono paralleli; ed inoltre perchè le facce laterali $ABFE$, $ADHE$, $BDHF$ sono parallelogrammi. Lo stesso è del solido $BCDFGH$. Questi due prismi hanno poi le facce $ABFE$, $GHDC$ uguali come facce opposte del parallelepipedo; hanno pure uguali le facce $ADHE$, $GCBF$, e le facce $ABCD$, $GHEF$ per la stessa
* 510. ragione; ma gli angoli solidi A e G sono simmetrici*,
dunque i due prismi hanno un angolo solido simmetrico

compreso fra facce omologhe respettivamente uguali; dunque essi sono simmetrici *. * 497.

TEOREMA XXI.

512. *In ogni parallelepipedo rettangolo il quadrato d'una diagonale* OG *è uguale alla somma dei quadrati delle tre costole contigue.* Fig. 177.

Infatti conducendo OF avremo $\overline{OG}^2 = \overline{OF}^2 + \overline{FG}^2$,
ma $\overline{OF}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BF}^2$, dunque $\overline{OG}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BF}^2 + \overline{FG}^2$,
ovvero $\overline{OG}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2$.

513. *Corollario.* Dunque le diagonali d'un parallelepipedo rettangolo sono uguali.

TEOREMA XXII.

514. *Un poliedro qualunque può sempre decomporsi in piramidi triangolari.*

Primieramente un poliedro qualunque può decomporsi in poliedri convessi; lo che si ottiene conducendo convenientemente un certo numero di piani secanti secondo le costole degli angoli solidi rientranti.

Ci limiteremo pertanto a considerare un poliedro convesso. Supponiamo che da un punto qualunque preso dentro il poliedro si conducano delle rette a tutti i suoi vertici: verranno così determinati tanti triangoli quante sono le costole del poliedro, le cui respettive basi saranno le costole medesime; il punto interno sarà loro comune vertice. E così il poliedro risulterà decomposto in piramidi le quali avranno questi triangoli per facce laterali, per basi le facce del poliedro, e per comune vertice il punto interno. E poichè ogni piramide poligona si può decomporre in piramidi triangolari *; segue che il poliedro potrà esser diviso in piramidi triangolari. * 456.

Il vertice comune delle piramidi, ove non si volesse dentro il poliedro, potrebbe ben anche situarsi sopra una

sua faccia, o sopra una sua costola, o ancora sul vertice d'un angolo solido del poliedro stesso. Sia A il vertice d'un angolo solido del poliedro; dal punto A si conducano delle rette a tutti gli altri vertici del poliedro, e s'immagini fatta una costruzione analoga alla precedente: il poliedro risulterà decomposto in piramidi le quali avranno per basi le sue diverse facce, quelle eccettuate che si riuniscono in A; in questo caso il numero delle piramidi sarà uguale al numero totale delle facce del poliedro diminuito del numero delle facce dell' angolo solido, nel di cui vertice si trova il vertice comune delle piramidi.

515. *Scolio I.* Due poliedri uguali possono decomporsi in un medesimo numero di piramidi uguali e similmente disposte. Reciprocamente, due poliedri sono uguali quando sono divisibili in un medesimo numero di piramidi respettivamente uguali e similmente disposte.

516. *Scolio II.* Due poliedri uguali hanno necessariamente le facce omologhe respettivamente uguali e similmente disposte, l'angolo diedro di due facce contigue in uno di questi poliedri uguale all'angolo diedro delle facce omologhe nell'altro, e gli angoli poliedri omologhi respettivamente uguali.

Reciprocamente due poliedri sono uguali quando hanno le facce respettivamente uguali e similmente disposte, e qualunque angolo diedro di due facce contigue in uno di essi uguale all'angolo diedro delle facce omologhe nell'altro. Infatti considerando nei due poliedri due piramidi triangolari esterne omologhe si vedrà che esse sono uguali avendo un angolo diedro uguale compreso fra facce respettivamente uguali, e similmente disposte. Togliendo ai due poliedri queste piramidi si avranno altri due poliedri nei quali le nuove facce saranno respettivamente uguali, e saranno pure respettivamente uguali i nuovi angoli diedri: potremo adunque operare sopra questi nuovi poliedri come su i precedenti, e così procedendo potremo decomporre i due poliedri in un medesimo numero di piramidi triangolari uguali e similmente disposte; dunque questi poliedri sono uguali. È d'uopo osservare però che questa proposizione contiene varie condizioni superflue; potendosi inferire l'uguaglianza dei due poliedri da un numero di condizioni minore di quello che tale proposizione suppone.

517. *Definizione.* Due poliedri s'intende che sieno *simmetrici* fra loro quando si possono decomporre in un medesimo numero di piramidi triangolari simmetriche, ed inversamente disposte.

TEOREMA XXIII.

518. *Due poliedri simmetrici hanno le facce omologhe respettivamente uguali, gli angoli diedri omologhi essi pure respettivamente uguali, e gli angoli solidi omologhi simmetrici.*

La dimostrazione è analoga a quella del teorema XIII. * * 495.

TEOREMA XXIV.

519. *Due poliedri sono simmetrici quando hanno le facce respettivamente uguali, inversamente disposte, e gli angoli diedri omologhi essi pure respettivamente uguali.*

Infatti ove un terzo poliedro fosse simmetrico ad uno dei proposti, esso sarebbe necessariamente uguale all'altro; perchè le loro facce omologhe sarebbero respettivamente uguali e similmente disposte, e gli angoli diedri omologhi sarebbero essi pure respettivamente uguali *. Dunque i due * 518.
poliedri proposti sono simmetrici fra loro. Questa proposizione contiene però delle condizioni superflue.

520. *Scolio I.* La costruzione d'un poliedro simmetrico ad uno dei proposti, suppone che questo si decomponga in piramidi triangolari; ora qualunque sia il modo di tale decomposizione il nuovo poliedro costrutto sarà sempre uguale all'altro dei proposti; stantechè le facce e gli angoli diedri omologhi saranno sempre in essi poliedri respettivamente uguali; di qui risulta che *un poliedro qualunque non può avere che un solo poliedro simmetrico.*

521. *Scolio II.* E da ciò rilevasi pure, che le piramidi triangolari nelle quali si possono decomporre due poliedri simmetrici, conducendo le rette che determinano i piani di divisione da due vertici omologhi H, h, sono sempre respettivamente simmetriche ed inversamente disposte, qualunque sieno essi vertici omologhi.

522. *Corollario* Adunque le diagonali omologhe di due poliedri simmetrici sono respettivamente uguali. Infatti sarà sempre possibile decomporre sì fattamente i poliedri che due diagonali omologhe qualunque, sieno le costole omologhe di due piramidi triangolari simmetriche.

TEOREMA XXV.

Fig. 178. 523. *Se due poliedri simmetrici hanno una faccia comune e sono costrutti l'uno al di sopra, l'altro al di sotto di questa faccia le rette che uniscono i vertici degli angoli omologhi sono perpendicolari al piano della faccia medesima, e da esso divise in due parti uguali.*

Essendo i poliedri simmetrici le costole omologhe e le diagonali omologhe, debbono essere respettivamente uguali; perciò supponendo che i punti H, h sieno i vertici di due angoli solidi omologhi avremo necessariamente $HB = hB$, $HC = hC$, $HD = hD$; dunque la retta Hh che congiunge i due vertici omologhi H, h è perpendicolare al piano $ABCDE$ ed è divisa da questo piano in due parti uguali.

524. *Scolio.* Questa proposizione comprende manifesta-
* 480. e 498. mente come casi particolari i teoremi VII, XV. *

TEOREMA XXVI.

525. *Due poliedri sono simmetrici quando avendo una faccia comune sono costrutti l'uno al di sopra l' altro al di sotto di questa faccia in modo che le rette* Aa, Bb, *ec., le quali uniscono i vertici degli angoli omologhi, sieno perpendicolari al piano della faccia medesima, e da esso divise in due parti uguali nei punti P, Q, ec.* Fig. 179.

Si rovesci il trapezio $APQB$ sul trapezio $aPQb$ facendolo girare intorno a PQ; le rette AP, aP uguali e perpendicolari a PQ coincideranno, come pure le rette BQ, bQ; perciò anche AB coinciderà con ab; dunque la linea retta che congiunge due vertici del poliedro superiore è uguale alla linea retta che congiunge i vertici omologhi dell' altro. Così supponendo che d, e c sieno vertici del secondo poliedro omologhi ai vertici D, e C del primo, avremo $AC = ac$, $BC = bc$; e conseguentemente il triangolo ABC uguale al triangolo abc; dunque il triangolo che unisce tre vertici qualunque del poliedro superiore è uguale al triangolo che unisce i tre vertici omologhi dell'altro poliedro. Perlochè i triangoli ADC, BDC saranno respettivamente uguali ai triangoli adc, bdc; e sarà l' angolo $DCB = dcb$, $ACD = acd$, $ACB = acb$. Ciò posto

1.° Se i triangoli ABC, ADC, BDC si troveranno nello stesso piano avremo l' angolo $DCB = ACD + ACB$; ma in tal caso dovendosi pure avere $dcb = acd + acb$ anche i triangoli abc, adc, bdc si troveranno in un medesimo piano. Dunque se più triangoli riuniti formeranno una faccia del poliedro superiore, i triangoli omologhi formeranno una faccia dell' altro poliedro; dunque ciascuna faccia triangolare o poligona d' un poliedro corrisponde ad una faccia uguale nell' altro.

2.° Se i triangoli ABC, ADC, BDC non si troveranno nello stesso piano, ma formeranno un angolo triedro in C avremo l' angolo $DCB < ACD + ACB$; ma

allora dovendosi pure avere $dcb < acd + acb$ anche i triangoli abc, adc, bdc formeranno in c un angolo triedro; e questi due angoli triedri, come costituiti di angoli piani respettivamente uguali, saranno uguali; l'angolo diedro adunque formato dai piani ABC, ADC sarà uguale all'angolo diedro formato dai piani abc, adc; ma si può supporre che le costole AC, ac di questi angoli diedri sieno costole omologhe dei poliedri, dunque gli angoli diedri omologhi dei due poliedri sono uguali. Dunque i due poliedri proposti sono simmetrici.

526. *Scolio I.* Questa proposizione, com' è chiaro, indica un facile mezzo di costruire un poliedro simmetrico ad un poliedro dato, sopra una sua faccia qualunque.

527. *Scolio II.* È manifesto che nella proposizione medesima sono incluse le due proposizioni VIII, XVI* come casi particolari di essa.

* 482, e 500.

LIBRO SETTIMO

I POLIEDRI EQUIVALENTI.

NOZIONI PRELIMINARI.

528. Un solido geometrico considerato rispetto alla sua grandezza prende il nome di *volume*. Inguisachè tra i due vocaboli *volume* e *solido geometrico* è questa differenza; che il primo si annette esclusivamente all' idea della quantità di estensione d'un corpo, l'altro a quella specialmente della sua forma. Si dirà adunque *solido*, anzichè *volume*, ogniqualvolta volendo prendere in considerazione la sola forma di un corpo escluderemo l' idea della sua grandezza, cioè lasceremo indeterminata la quantità della sua estensione.

Per tal modo la voce *volume* è analoga alla voce *area*, usandosi la prima relativamente ai solidi nel medesimo significato che si attribuisce alla seconda relativamente alle superfici.

529. Due solidi che hanno il medesimo volume si dicono *solidi equivalenti*; e si riserva la denominazione di solidi uguali ad indicar quelli che per qualche modo di sovrapposizione possono coincidere in tutta la loro estensione.

530. Comprenderemo sotto il nome di *dimensioni d'un parallelepipedo rettangolo*, le tre rette che rappresenteranno la sua altezza, e le due dimensioni della sua base. Queste due dimensioni della base sono quelle cui talvolta si attribuiscono i nomi di *lunghezza*, e *larghezza* del parallelepipedo.

531. Ogni parallelepipedo rettangolo si dirà contenuto o compreso fra tre costole, che concorrono nel vertice d'uno stesso angolo; queste tre costole saranno evidentemente le tre dimensioni del parallelepipedo.

532. Ogni cubo si dirà fatto, o costrutto sopra una linea quando questa linea ne sarà il lato. Si dice ancora cubo di A volendo indicar quello di cui la linea A è il lato.

533. Per esser brevi indicheremo talora un parallelepipedo per mezzo delle due sole lettere che si trovano ai vertici di due angoli opposti.

TEOREMA I.

534. *Due parallelepipedi che hanno basi uguali ed uguali altezze sono equivalenti.*

Fig. 180. Supporremo che i due parallelepipedi abbiano la base inferiore comune, e le loro basi superiori situate sopra uno stesso piano parallelo alla base medesima: or due casi debbonsi considerare, secondochè ambedue i parallelepipedi sono o no contenuti fra gli stessi piani paralleli di due facce laterali opposte.

Supponiamo che al primo caso corrispondano i due parallelepipedi AO ed AC ambedue lateralmente compresi fra i piani $ABB'M$ e $DCC'P$. I due prismi triangolari $AMA'DPD'$, $BNB'COC'$ saranno uguali fra loro; infatti i triangoli AMA', BNB' che loro servono di basi sono uguali stantechè AM e BN, AA' e BB' sono parallele, ed i parallelogrammi AP e BO, AD' e BC' sono essi pure uguali. Ma togliendo dal solido $AMPC'B'B$ il prisma $AMA'DPD'$ resta il parallelepipedo AC', e togliendo in vece dal solido stesso il prisma $BNB'COC'$ resta il parallelepipedo AO, dunque i due parallelepipedi AC', AO sono equivalenti.

L'altro caso cui supporremo che corrispondano i due parallelepipedi AC' ed AC'', si riconduce agevolmente al caso precedente. Perocchè prolungando le facce $A\,B'$, $D\,C'$ del parallelepipedo $A\,C'$, e le facce $A\,D''$, $B\,C''$ del parallelepipedo $A\,C''$, daremo luogo al parallelepipedo $A\,O$ che risulta dallo scambievole incontro di esse facce; or dalla dimostrazione precedente conseguc essere questo parallelepipedo $A\,O$ equivalente a ciascuno dei due parallelepipedi proposti $A\,C'$, $A\,C''$; essi adunque sono equivalenti fra loro.

TEOREMA II.

535. *Qualunque parallelepipedo $A\,G$ può essere trasformato in un parallelepipedo equivalente, il quale avrà la medesima altezza ed una base equivalente.* Fig. 181.

Si cambi il parallelogrammo $AEFD$, base del parallelepipedo proposto $A\,G$, nel rettangolo equivalente $A\,B\,C\,D$ conducendo dai punti A, D le rette $A\,B$, $D\,C$ perpendicolarmente sopra BF; quindi sul piano $A\,B\,C\,D$ s'inalzino le perpendicolari $A\,I$, $B\,K$, $C\,L$, $D\,M$ uguali all'altezza del parallelepipedo proposto, e si congiungano le loro estremità mediante le rette $I\,K$, $K\,L$, $L\,M$, $M\,I$; otterremo il parallelepipedo rettangolo $A\,L$ il quale dico essere equivalente al parallelepipedo proposto $A\,G$. Infatti costruendo un terzo parallelepipedo AH retto, la cui base sia $AEFD$ e l'altezza $A\,I$, si vedrà essere tale parallelepipedo equivalente al parallelepipedo $A\,G$; essi hanno infatti la medesima base $A\,E\,F\,D$ e la medesima altezza $A\,I$: ma lo stesso parallelepipedo retto $A\,H$ è ben anche equivalente al parallelepipedo rettangolo $A\,L$, perocchè si può dire avere essi pure una medesima base $A\,I\,M\,D$ ed una medesima altezza $A\,B$: dunque il parallelepipedo proposto $A\,G$ è equivalente al parallelepipedo rettangolo $A\,L$, che ha la medesima altezza $A\,I$, e la cui base $A\,B\,C\,D$ è equivalente alla base $A\,E\,F\,D$.

TEOREMA III.

Fig. 182. 536. ***Un prisma qualunque $A\,B\,C\,D\,E\,K$ è equivalente al prisma retto $A\,B'\,C'\,D'\,E'\,K'$ avente la stessa costola $A\,F$, e per base la sezione $A\,B'\,C'\,D'\,E'$ fatta nel primo prisma da un piano perpendicolare ad essa costola $A\,F$.***

Le basi del prisma retto $A\,B'\,C'\,D'\,E'\,K'$ sono le sezioni $A\,B'\,C'\,D'\,E'$, $F\,G'\,H'\,I'\,K'$ fatte nel prisma obliquo da due piani condotti pei punti A ed F perpendicolarmente alla costola $A\,F$, le quali sezioni debbono essere poligoni
* 489. uguali*. Ora siccome le costole della superficie laterale d'un prisma sono uguali, avremo nel prisma obliquo $AF = BG$, e nel prisma retto $A\,F = B'\,G'$; quindi $B\,G = B'\,G'$, e conseguentemente $B\,B' = G\,G'$; e per la stessa ragione $C\,C' = H\,H'$, $D\,D' = I\,I'$, $E\,E' = K\,K'$. Dunque situando il poligono $F\,G'\,H'\,I'\,K'$ sul suo uguale $A\,B'\,C'\,D'\,E'$ le rette $G\,G'$, $H\,H'$, $I\,I'$, $K\,K'$ perpendicolari al piano $FG'H'I'K'$ dovranno rispettivamente coincidere colle rette $B\,B'$, $C\,C'$, $D\,D'$, $E\,E'$ perpendicolari al piano $A\,B'C'D'E'$; cosicchè il solido $F\,G'\,H'\,I'\,K'\,K$ coinciderà in tutta la sua estensione col solido $A\,B'\,C'\,D'\,E'\,E$; donde risulta essere questi due solidi uguali; ma se essi tolgonsi a vicenda dal totale solido $A\,H\,C$ i resti sono il prisma obliquo $A\,H$, ed il prisma retto $A\,H'$; dunque questi prismi sono equivalenti fra loro.

537. *Corollario I.* Due prismi sono equivalenti fra loro quando si riscontra essere una costola laterale dell'uno uguale ad una costola laterale dell'altro, e le sezioni rispettivamente perpendicolari a queste costole uguali fra loro.

538. *Corollario II.* I due prismi triangolari simmetrici ne' quali si può dividere ogni parallelepipedo mediante un piano diagonale sono equivalenti fra loro.

539. *Corollario III.* Un prisma triangolare qualunque è la metà di un parallelepipedo avente una base doppia e la medesima altezza.

TEOREMA IV.

540. ***Due prismi che hanno basi uguali ed uguali altezze, sono equivalenti.***

Supponiamo che i prismi sieno triangolari; i parallelepipedi di cui essi prismi sono le metà avranno basi uguali ed uguali altezze, e saranno perciò equivalenti; i prismi adunque saranno essi pure equivalenti.

Supponiamo poi che si tratti di due prismi qualunque; essi poichè le loro basi sono poligoni uguali, si potranno decomporre in un medesimo numero di prismi triangolari che avranno basi respettivamente uguali e la medesima altezza; questi prismi triangolari saranno adunque respettivamente equivalenti; dunque i prismi poligoni saranno anch' essi equivalenti.

TEOREMA V.

541. ***Due piramidi triangolari che hanno basi uguali ed altezze uguali sono equivalenti.*** Fig. 183.

Sieno $SABC$, $sabc$ le due piramidi le quali hanno la medesima altezza AZ, e le basi ABC, abc, che supponiamo poste sopra uno stesso piano, uguali fra loro. Dividasi l'altezza AZ in un numero qualunque di parti uguali, e pei punti di divisione si conducano dei piani paralleli al piano delle basi; le sezioni DEF, GHI, ec., fatte da questi piani nella piramide $SABC$ saranno respettivamente uguali alle sezioni def, ghi, ec., fatte dai piani medesimi nella piramide $sabc$*. Ond' è che i prismi AC', DF', * 465.
GI' ec., costrutti sopra i triangoli ABC, DEF, GHI ec., in modo che abbiano per costole le parti AD, DG, GK ec., del lato SA, saranno respettivamente equivalenti ai prismi

ac', df', gi' ec., costrutti sopra i triangoli abc, def, ghi, ec., in modo che abbiano essi pure per costole le parti
* 540. ad, dg, gk, ec., del lato sa*. E parimente i prismi DE', GH', KL', ec., costrutti al di sotto dei triangoli DEF, GHI, KLM, ec., colle costole DA, GD, KG, ec., saranno respettivamente equivalenti ai prismi de', gh', kl', ec., costrutti al di sotto dei triangoli def, ghi, klm, ec., colle costole da, gd, kg, ec. Conseguentemente la somma che chiameremo S dei prismi eccedenti sarà in ambedue le piramidi la stessa; come pure sarà la stessa la somma che diremo s dei prismi deficienti; e siccome ciascuna piramide è compresa fra i prismi eccedenti e i deficienti, perciò tutte e due a un tempo saranno contenute fra i medesimi limiti S ed s. Ciò posto si osservi che in ambedue le piramidi i due prismi che si vedono costrutti l'uno al di sopra l'altro al di sotto di ciascun triangolo DEF, GHI, ec., sono uguali fra loro; per cui la differenza fra S ed s è evidentemente il primo prisma eccedente $ABCC'$, oppure $abcc'$, la cui altezza è una delle parti nelle quali si è divisa l'altezza AZ, delle piramidi; ma il numero delle parti di AZ può farsi grande quanto vogliamo, e piccola quanto vogliamo può in conseguenza divenire ciascuna di esse parti; dunque il prisma $ABCC'$ ossia $abcc'$, cioè la differenza dei limiti S, ed s in cui sono comprese le piramidi proposte può divenire piccola quanto vogliamo; dunque queste due piramidi sono equivalenti.

542. *Corollario I.* Due piramidi poligone sono equivalenti quando hanno basi uguali ed uguali altezze. Perocchè esse potranno dividersi in un medesimo numero di piramidi respettivamente equivalenti.

543. *Corollario II.* Due piramidi simmetriche sono equivalenti. Infatti nelle piramidi simmetriche le facce omologhe sono uguali, ed alle facce omologhe corrispondono
* 481, e 488. sempre altezze uguali*.

544. *Corollario III.* Due poliedri simmetrici sono equi-
* 517. valenti*.

TEOREMA VI.

545. *Ogni piramide è equivalente al terzo del prisma della medesima base, e della medesima altezza.* Fig. 184.

Supponiamo primieramente che si tratti di una piramide triangolare $ABCD$. Pei punti B, C si conducano le rette BE, CF uguali e parallele ad AD, e si compia mediante le rette DF, FE, ED la costruzione del prisma $ABCDEF$ il quale avrà la medesima base ABC, e la stessa altezza della piramide proposta. Posto ciò si conduca il piano CDE; il prisma risulterà decomposto nelle tre piramidi triangolari $ABCD$, $BCDE$, $CDEF$. La seconda di esse considerata come avente la base BCE ed il vertice D è equivalente alla terza, la quale si può considerare come avente la base CEF ed il vertice D*; ma questa di cui la faccia DEF si può prender per base, e C per vertice è equivalente alla prima, considerata come avente la base ABC ed il vertice D*; dunque le tre piramidi di che si compone il prisma $ABCDEF$ sono equivalenti; dunque la piramide $ABCD$ è il terzo di esso prisma.

* 541.

* 541.

Ciò posto si consideri una piramide qualunque; essa si potrà decomporre in piramidi triangolari aventi tutte la medesima altezza di essa, e per basi i varj triangoli ne' quali piacerà dividere la sua base poligona; ora immaginando un prisma costrutto su la base della piramide proposta, ed avente la medesima altezza, e diviso in quei prismi triangolari che hanno per basi i triangoli costituenti la base della piramide proposta, si vedrà che ciascuno di questi triangoli serve a un tempo di base ad un prisma e ad una piramide, la quale è il terzo di esso; dunque la somma di tutte le piramidi triangolari è il terzo della somma di tutti i prismi triangolari; dunque una piramide qualunque è il terzo del prisma che ha la medesima base, e la medesima altezza.

TEOREMA VII.

Fig. 185. 546. *Se una piramide triangolare è tagliata da un piano parallelo alla sua base, il tronco $ABCDEF$ che resta togliendo la piccola piramide è equivalente alla somma di tre piramidi la cui comune altezza fosse l' altezza del tronco, e le respettive basi fossero la base inferiore del tronco, la sua base superiore, ed una media proporzionale fra queste due basi.*

Si conducano i piani BCD, CDE; il tronco risulterà diviso in tre piramidi triangolari $ABCD$, $CDEF$, e $BCED$: la prima ha per base ABC, e per altezza, quella stessa del tronco: la seconda ha per base DEF e per altezza, essa pure quella del tronco: la terza può considerarsi come avente per base BCE, e per vertice D; ma se pel punto D, e nel piano della faccia $ABED$, conducesi DG parallela a BE, alla terza piramide $BCED$ potremo sostituire la piramide $BCEG$ avente la medesima base BCE e la medesima altezza; or questa piramide $BCEG$ ove si prenda la faccia GBC per base avrà il suo vertice in E, e perciò la medesima altezza del tronco.

Posto ciò sia GI parallela ad AC; il triangolo BGI sarà uguale al triangolo DEF; ma $ABC : GBC :: AB : GB :: BC : BI$, e $GBC : BGI :: BC : BI$; dunque $ABC : GBC :: GBC : BGI$ ossia DEF; donde si ricava essere la base GBC della piramide $BCEG$ media proporzionale fra le basi ABC, DEF del tronco.

TEOREMA VIII.

Fig. 186. 547. *Se si taglia un prisma triangolare di cui ABC è la base, con un piano DEF non parallelo a questa base, il tronco $ABCDEF$ sarà uguale alla somma di tre piramidi i vertici delle quali sono D, E, F, e la base comune ABC.*

Si conduca il piano BCD, ed il piano CDE; il tronco $ABCDEF$ risulterà diviso in tre piramidi $ABCD$,

$BCDE$ e $CDEF$. La prima ha per base ABC e per vertice il punto D. La seconda ove si prenda per base BCE e per vertice D può trasformarsi in altra avente per base BCE e per vertice A, la quale si può poi considerare come avente per base ABC e per vertice E. La terza piramide $CDEF$ di cui CEF è la base e D il vertice, può trasformarsi in altra che abbia la base CEF ed il vertice A, oppure la base ACF ed il vertice E; ma a questa potrebbe sostituirsi quella pure che avesse la base ACF ed il vertice B, oppure la base ACB ed il vertice F; dunque le tre piramidi nelle quali si divide il tronco sono respettivamente equivalenti a tre piramidi che avessero per base comune ABC e per vertici i punti D, E, F.

LIBRO OTTAVO

LE PROPORZIONI DELLE FIGURE SOLIDE.

NOZIONI PRELIMINARI.

---

548. *Misurare* un solido P significa determinare il suo rapporto con altro solido di nota grandezza che si chiama *unità dei solidi*, ovvero *unità di volume*. Tal rapporto rappresenterà il *volume* del solido P.

Nei solidi oltre l'equivalenza dei loro volumi, si considera la similitudine delle loro figure, come nelle superfici.

549. Due poliedri si chiameranno *simili* quando avranno tutte le loro facce simili, similmente disposte, e gli angoli diedri formati dalle facce omologhe respettivamente uguali.

550. Ponendo mente alla nozione della equivalenza e della similitudine di due poliedri, o di due superfici, si vede come la prima si trovi annessa esclusivamente alla quantità di estensione di tali poliedri, o di tali superfici, e sia indipendente dalla loro figura, mentre la seconda annessa esclusivamente alla loro figura è indipendente dalla loro estensione. Infatti le definizioni che abbiamo date della equivalenza e della similitudine si riducono a considerare come equivalenti quelle superfici o quei corpi che sotto diversa figura hanno la medesima estensione, e come simili quelle superfici o quei corpi che sotto diversa estensione hanno la medesima figura.

TEOREMA I.

Fig. 187. 551. *Due parallelepipedi rettangoli AM, AH della medesima base $ABCD$ stanno fra loro come le respettive altezze AK, AF.*

Supponiamo primieramente che le altezze sieno commensurabili, e che la loro comune misura sia contenuta per esempio 7 volte in AF, e 3 volte in AK; dividendo AF in 7 parti uguali, AB conterrà 3 di queste parti; talmentechè sarà $\frac{AK}{AF}=\frac{3}{7}$.

Or pei punti di divisione di AF si conducano dei piani paralleli alla base $ABCD$; ne risulteranno altrettanti parallelepipedi rettangoli parziali tutti uguali fra loro avendo essi basi uguali, ed altezze uguali; cosicchè uno di essi diverrà comune misura dei due parallelepipedi AM, AH; e poichè tal misura sarà contenuta 3 volte in AM, e 7 volte in AH avremo $\frac{AM}{AH}=\frac{3}{7}$.

Dunque

$$\frac{AM}{AH}=\frac{AK}{AF}.$$

Supponiamo in secondo luogo che le altezze sieno incommensurabili. Si divida AF in un numero n qualunque di parti uguali; il punto K cadrà fra due punti di divisione s e p consecutivi; talmentechè supposto che in As sieno contenute m parti, ed $m+1$ ne sieno contenute in Ap, il rapporto $\frac{AK}{AF}$ sarà compreso fra i limiti $\frac{m}{n}$, $\frac{m+1}{n}$. Or se pei punti di divisione di AF si condurranno dei piani paralleli alla base $ABCD$ il piano $KLMI$ cadrà fra i due piani secanti consecutivi st e pq, ed il parallelepipedo AH risulterà diviso in n parallelepipedi uguali dei quali m ne saranno contenuti nel parallelepipedo At, ed $m+1$

nel parallelepipedo Aq; così il rapporto $\frac{AM}{AH}$ sarà compreso esso pure fra i limiti $\frac{m}{n}$, $\frac{m+1}{n}$.

Dunque avremo * * 178.

$$\frac{AM}{AH}=\frac{AK}{AF},$$

cioè sussisterà la proporzione $AM : AH :: AK : AF$, qualunque sia il rapporto delle due basi.

TEOREMA II.

552. *Se l' unità di volume sarà il cubo della unità lineare il volume del parallelepipedo rettangolo sarà uguale al prodotto delle sue tre dimensioni.*

Sopra una base $A'C'E'D' = ACED$ si concepisca costrutto un parallelepipedo $A'F'$ la di cui altezza $A'B'$ sia uguale all' unità di misura lineare; e sopra una base $A''B''G''C'' = A'B'G'C'$ si concepisca costrutto un parallelepipedo $A''F''$ la cui altezza $A''D''$ sia essa pure uguale all' unità lineare. Essendo $A''B''$, $A''D''$ uguali ambedue all' unità lineare la faccia $A''B''H''D''$ sarà il quadrato della unità lineare, e perciò uguale alla faccia $MSTQ$ Frattanto in virtù del precedente teorema avremo

$$\frac{A''F''}{MN}=\frac{A''C''}{MP},\ \frac{A'F'}{A''F''}=\frac{A'D'}{A''D''},\ \frac{AF}{A'F'}=\frac{AB}{A'B'}.$$

E rappresentando con P, X, Y i volumi dei parallelepipedi AF, $A'F'$, $A''F''$, cioè i loro rapporti col cubo MN il quale si prende per unità di misura dei volumi *, quando si osservi che $A''C''=A'C'=AC$, $A'D'=AD$, $MP=A''D''=A'B'=1$, sarà * 548.

$$Y=\frac{AC}{1},\ \frac{X}{Y}=\frac{AD}{1},\ \frac{P}{X}=\frac{AB}{1};$$

e siccome il quoziente moltiplicato pel divisore dà il dividendo, la prima e la seconda uguaglianza somministreranno

$$X=\frac{AD}{1}\times\frac{AC}{1},$$

e questa congiunta alla terza somministrerà

$$P=\frac{AD}{1}\times\frac{AC}{1}\times\frac{AB}{1}.$$

Donde si rileva che il volume del parallelepipedo AF, ossia il rapporto di questo parallelepipedo al cubo dell'unità lineare è uguale al prodotto dei tre rapporti delle sue dimensioni AD, AC, AB alla medesima unità lineare. Ma siccome questa unità è arbitraria perciò per brevità si pone

$$AF=AD\times AC\times AB,$$

e si dice che *il volume di un parallelepipedo rettangolo è uguale al prodotto delle sue tre dimensioni.* Avvertendo però che enunciando in tal modo il teorema, deve sottintendersi, che qualunque sia la linea presa per unità lineare, purchè si prenda per unità di volume il cubo avente questa linea per lato, il volume del parallelepipedo rettangolo viene indicato dal prodotto dei numeri che rappresentano le sue due dimensioni.

553. *Corollario I.* Se delle tre dimensioni AD, AC, AB d'un parallelepipedo se ne prendono due a piacere, per es., AD, AC si vedrà che esse sono nel tempo stesso le dimensioni di una faccia di questo parallelepipedo; la quale avrà per misura il loro prodotto. E siccome prendendo una faccia per base del parallelepipedo la terza dimensione AB ne sarebbe l' altezza, perciò si può dire che il volume d' un parallelepipedo è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

554. *Corollario II.* Viceversa, qualunque prodotto $A\times B\times C$ di tre linee A, B, C o di un rettangolo $A\times B$ per una linea C si dovrà considerare come esprimente il volume di un parallelepipedo rettangolo avente le

dimensioni A, B, C, cioè il rettangolo $A \times B$ per base, e la linea C per altezza.

555. *Corollario III.* Il volume di un cubo AC il quale è un parallelepipedo rettangolo a dimensioni uguali sarà indicato dalla terza potenza del suo lato AB; questa terza potenza espressa dal prodotto $AB \times AB \times AB$ si rappresenta generalmente così $\overline{AB}^3$. Fig. 176.

556. *Corollario IV.* Il volume d' un parallelepipedo qualunque è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza. Infatti un parallelepipedo qualunque è equivalente ad un parallelepipedo rettangolo della medesima altezza e di base equivalente *. * 535.

557. *Corollario V.* In generale il volume d' un prisma è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza. Perocchè 1.° un prisma triangolare è la metà di un parallelepipedo avente una base doppia e la medesima altezza *; or se il vo- * 539.
lume di questo è espresso dalla sua base moltiplicata per la sua altezza, il volume del prisma dovrà esserlo dalla sua base, metà di quella del parallelepipedo, moltiplicata per la sua altezza; 2.° un prisma poligono può esser diviso in tanti prismi triangolari della medesima altezza quanti sono i triangoli ne' quali vuolsi dividere la sua base *; or se il vo- * 493.
lume d' un prisma triangolare è espresso dal triangolo che gli serve di base moltiplicato per la sua altezza, il volume del prisma poligono dovrà esserlo dalla somma di tutti i triangoli che compongono la sua base, cioè dalla sua base medesima, moltiplicata per la sua altezza.

558. *Corollario VI.* Il volume di una piramide è uguale al terzo del prodotto della sua base per la sua altezza. Infatti essa è sempre il terzo del prisma della medesima base e della medesima altezza *. * 545.

559. *Corollario VII.* Due parallelepipedi, o due prismi qualunque, o due piramidi sono equivalenti allorquando hanno la medesima altezza e basi equivalenti.

560. *Corollario VIII.* I tronchi a basi parallele di due piramidi sono equivalenti quando hanno la medesima altezza e le basi inferiori, oppure le superiori equivalenti. Infatti

si concepiscano due piramidi della medesima altezza colle loro basi sopra uno stesso piano; si conduca un piano parallelo a quello delle basi che tagli le due piramidi; esso separerà due piccole piramidi che avranno pure la medesima altezza. Or se le basi delle piramidi proposte fossero equivalenti le sezioni cioè le basi delle piccole piramidi sarebbero anch' esse equivalenti; viceversa se fossero equivalenti le sezioni lo sarebbero pure le basi*; dunque le piramidi totali sono equivalenti, * 466.
ed equivalenti sono le piramidi piccole; dunque i due tronchi sono parimente equivalenti fra loro.

561. *Corollario IX.* Or supponendo che uno di questi due tronchi equivalenti fra loro, sia triangolare, richiamando il teorema VII.* sarà facile concludere che il tronco * 546.
di una piramide qualunque è equivalente alla somma di tre piramidi la cui comune altezza fosse l' altezza del tronco, e le respettive basi fossero la base inferiore del tronco, la sua base superiore, ed una media proporzionale fra le due basi medesime.

562. *Corollario X.* Il volume d' un tronco di prisma è uguale al prodotto di una delle sue basi per il terzo della somma delle tre perpendicolari abbassate respettivamente sopra questa base da ciascuno dei vertici della base opposta*. * 547.

563. *Corollario XI.* Un parallelepipedo qualunque, ed in generale qualunque prisma, come pure qualunque piramide potranno essere rappresentati dal prodotto di tre linee; due delle quali esprimeranno le dimensioni del rettangolo equivalente alla base di ciascuno di tali solidi, la terza ne esprimerà l' altezza ove si tratti del parallelepipedo o del prisma, ed il terzo dell' altezza ove si tratti della piramide.

TEOREMA III.

564. *Il rapporto di due parallelepipedi rettangoli P, p potrà sempre esser dato in linee.*

Sieno A, B, C le dimensioni del parallelepipedo P, ed a, b, c sieno quelle del parallelepipedo p. Si cerchi una quarta proporzionale X dopo le tre linee c, A, B*, * 358.

ed una quarta proporzionale x, dopo le tre linee C, a, b. Dico che le due linee X, x staranno fra loro come i parallelepipedi P, p.

Infatti avendosi

$$c : A :: B : X,$$
$$C : a :: b : x,$$

sarà

$$A \times B = X \times c,$$
$$a \times b = C \times x;$$

donde si deduce che due parallelepipedi i quali avessero per basi i rettangoli $A \times B$, $X \times c$ ed una medesima altezza C sarebbero equivalenti *; come pure sarebbero equivalenti * 559.
due parallelepipedi che avessero per basi i rettangoli $a \times b$, $C \times x$, ed una medesima altezza c; perlochè

$$P = A \times B \times C = X \times c \times C,$$
$$p = a \times b \times c = c \times C \times x.$$

Ma i due parallelepipedi $X \times c \times C$, $c \times C \times x$ avendo una medesima faccia, o base $c \times C$, stanno fra loro nella ragione delle linee X, x dunque

$$P : p :: X : x.$$

565. *Corollario I.* Ond'è che il rapporto di due prismi o di piramidi, cui si potranno sempre sostituire due parallelepipedi rettangoli ad esse respettivamente equivalenti, potrà esser ridotto al semplice rapporto di due linee. Lo che, come abbiamo veduto *, si può pure ottenere rispetto a * 564.
due rettangoli, ed a due poligoni qualunque *. * 372.

566. *Corollario II.* Se quattro solidi, o quattro superfici formeranno una proporzione, saranno vere per essa tutte quelle proprietà che abbiamo dimostrate nel Libro III relativamente alle proporzioni delle linee. Imperocchè i quattro termini della proporzione si potranno sempre considerare come rappresentati da quattro linee delle quali le prime due avranno la medesima ragione dei primi due termini della proporzione data, le due ultime avranno la medesima ragione degli altri due termini della proporzione stessa.

TEOREMA IV.

567. *Due prismi qualunque, stanno fra loro come le respettive altezze quando hanno la medesima base, e stanno fra loro come le respettive basi quando hanno la medesima altezza.*

Supponiamo in primo luogo che i due prismi abbiano una medesima base equivalente al rettangolo $A \times B$; C, c sieno le loro respettive altezze; i due parallelepipedi rettan- $A \times B \times C$, $A \times B \times c$ saranno respettivamente equivalenti ai prismi medesimi; ma questi parallelepipedi avendo
* 551. la medesima base $A \times B$ stanno come le altezze C, c*; dunque due prismi della medesima base stanno fra loro come le respettive altezze.

In secondo luogo supponiamo che i due prismi abbiano la medesima altezza C, essendo le loro basi equivalenti ai rettangoli $A \times B$, $a \times b$; i due parallelepipedi rettangoli $A \times B \times C$, $a \times b \times C$ saranno respettivamente equivalenti ai prismi medesimi. Ciò posto si trovino due linee X, x in modo che abbiasi

$$C : A :: B : X,$$
$$C : a :: b : x;$$

sarà

$$A \times B = C \times X, \; a \times b = C \times x;$$

e conseguentemente

$$A \times B \times C = C \times C \times X, \;\; a \times b \times C = C \times C \times x;$$

* 186. ma $A \times B : a \times b :: C \times X : C \times x :: X : x$*,

* 551. ed $A \times B \times C : a \times b \times C :: C \times C \times X : C \times C \times x :: X : x$*;

dunque

$$A \times B \times C : a \times b \times C :: A \times B : a \times b.$$

Dunque due prismi della medesima altezza stanno fra loro come le respettive basi.

568. *Corollario I.* Due piramidi di qualunque nome stanno fra loro come le altezze quando hanno la medesima base, e stanno fra loro come le basi quando hanno la medesima altezza.

569. *Corollario II* Da ciò risulta che una proporzione non viene alterata quando al rapporto di due linee si sostituisce il rapporto di due parallelepipedi, o di due prismi qualunque, o di due piramidi di cui esse linee sieno le altezze, ed un poligono qualunque sia loro comune base.

570. *Corollario III.* Come pure non si altera una proporzione quando al rapporto di due rettangoli o di due poligoni qualunque vi si sostituisce quello di due prismi, o di due piramidi di cui essi poligoni sieno le basi, ed una linea qualunque sia loro comune altezza.

571. *Corollario IV.* Due parallelepipedi o due prismi qualunque le cui basi R, r sono inversamente proporzionali alle altezze A, a sono equivalenti. Infatti dalla proporzione

$$\frac{R}{r}=\frac{a}{A},$$

questa pure deriva * * 569, e 570.

$$\frac{R\times A}{r\times A}=\frac{r\times a}{r\times A};$$

donde si ricava essere i rapporti dei due parallelepipedi $R\times A$, $r\times a$ al parallelepipedo $r\times A$ ugnali fra loro; dunque il parallelepipedo $R\times A$ è equivalente al parallelepipedo $r\times a$*; cioè * 181.

$$R\times A=r\times a.$$

Per questo risultato si può stabilire che nella proporzione $R:r::a:A$ il prodotto dei termini medj è uguale a quello degli estremi; il qual teorema già dimostrato relativamente alle proporzioni delle linee, potrebbe qui pure comprovarsi mediante una figura di semplicissima costruzione.

572. *Corollario V.* Sia il rapporto dei due poligoni

R, R' uguale a quello delle due linee A, A'; ed il rapporto dei due poligoni r, r' uguale a quello delle due linee a, a'; dico che moltiplicando termine a termine le proporzioni

$$R:R'::A:A',$$
$$a:a'::r:r',$$

i quattro prodotti $R\times a$, $R'\times a'$, $r\times A$, $r'\times A'$ formeranno essi pure una proporzione.

Infatti dalla prima proporzione si ricava

* 569, e 570. $$R\times a:R'\times a::A\times r:A'\times r^{*};$$

e dalla seconda la quale può ben anche scriversi così

$$a':a::r':r,$$

si ricava parimente

* 569, e 570. $$R'\times a':R'\times a::A'\times r':A'\times r^{*};$$

ora, osservando che queste due proporzioni hanno i medesimi conseguenti, avremo

$$R\times a:R'\times a'::A\times r:A'\times r'.$$

LEMMA

Fig. 166. 573. *Se si taglia una piramide SABCD con un piano abcd parallelo alla sua base, la piramide Sabcd sarà simile alla piramide intera SABCD.*

Infatti tutte le facce dell' una sono simili alle facce
* 549. dell' altra; gli angoli diedri sono respettivamente uguali*.

TEOREMA V.

574. *Due piramidi triangolari sono simili quando hanno un angolo diedro uguale compreso fra due facce respettivamente simili, e similmente disposte.*

Fig. 189. Sia l' angolo diedro SA uguale all' angolo diedro sa; e le facce SAB, SAC che comprendono il primo sieno

respettivamente simili alle facce sab, sac che comprendono l' altro, cosicchè abbiasi

$$SA : sa :: SB : sb :: AB : ab :: SC : sc :: AC : ac.$$

Supponendo che la costola SA sia maggiore della costola sa, facciasi $SA = sa$, e pel punto A' conducasi un piano $A'B'C'$ parallelo ad ABC; la piramide risultante $SA'B'C'$ sarà simile alla piramide $SABC$*; e ne verranno le pro- * 573.
porzioni

$$SA : SA' :: SB : SB' :: AB : A'B' :: SC : SC' :: AC : A'C';$$

paragonando queste proporzioni colle precedenti, poichè $SA' = sa$, concluderemo essere $SB' = sb$, $A'B' = ab$, $SC' = sc$, $A'C' = ac$; dunque i triangoli $SA'B'$, $SA'C'$ sono respettivamente uguali ai triangoli sab, sac; dunque le piramidi $SA'B'C'$, $sabc$ sono uguali fra loro*; dunque * 468.
la piramide $SABC$ è simile alla piramide $sabc$*. * 573.

575. *Scolio.* Sieno SO, so le altezze delle piramidi $SABC$, $sabc$, e supponiamo che SO incontri il piano $A'B'C'$ nel punto O': siccome la piramide $sabc$ è uguale alla piramide $SA'B'C'$, sarà $SO' = so$; dunque *due piramidi simili hanno le loro costole omologhe proporzionali alle altezze**. * 463.

TEOREMA VI.

576. *Due piramidi triangolari sono simili quando hanno le loro costole respettivamente proporzionali.*

Poste le proporzioni Fig. 189.

$$SA : sa :: SB : sb :: AB : ab :: SC : sc :: AC : ac :: BC : bc;$$

da esse risulta che i triangoli o facce SAB, SAC sono simili alle facce sab, sac e similmente disposte; ed inoltre che il triangolo ABC è simile al triangolo abc; ragione per cui i tre angoli piani che formano l' angolo solido C saranno uguali respettivamente agli angoli piani che formano l' angolo solido c; donde segue che l' angolo

diedro SA formato dalle facce SAB, SAC è uguale all' angolo diedro sa formato dalle loro omologhe sab, sac, e che perciò le due piramidi $SABC$, $sabc$ sono
* 574. simili*.

577. *Scolio.* Da questa proposizione, e dalla precedente eziandio, raccogliesi che la definizione dei poliedri simili contiene delle condizioni superflue allorchè essa specialmente si applica alle piramidi triangolari; bastando come vediamo a comprovare la similitudine di due piramidi triangolari l' uno o l' altro dei criterj espressi dalle proposizioni medesime; ciascuno de' quali comprende cinque soli dati, cioè assegna cinque condizioni soltanto cui debbono soddisfare le piramidi triangolari onde sieno simili. In generale quando il poliedro è d' una specie determinata le condizioni della similitudine si riducono a numero tanto più piccolo quanto più piccolo è quello degli elementi che si richiedono per determinare un tal poliedro.

TEOREMA VII.

578. *Due poliedri simili sono composti d' un medesimo numero di piramidi triangolari simili, e similmente disposte.*

Fig. 190. Le facce omologhe dei due poliedri proposti, essendo poligoni simili, si potranno dividere in un medesimo numero di triangoli simili, e similmente disposti; avendo eseguita questa partizione supponiamo che dai vertici omologhi S, s dei due poliedri si conducano delle rette a tutti gli altri vertici; essi poliedri risulteranno divisi in un medesimo numero di piramidi. Ogni piramide del primo poliedro avrà la sua omologa nell' altro, ed i vertici di due piramidi omologhe saranno sempre vertici omologhi dei due poliedri. Ciò posto osservando che per la natura dei poliedri simili gli angoli diedri SD, sd sono uguali, e che i triangoli SDC, SDG sono simili ai triangoli sdc, sdg; potremo concludere essere la piramide $SCDG$ simile alla piramide
* 574. $scdg$*. Or si sopprimano dai due poliedri queste piramidi;

i due poliedri risultanti saranno essi pure simili; perocchè le facce SCG, $SABC$, $SFIG$, $CGPOM$ sono simili respettivamente alle facce scg, $sabc$, $sfig$, $cgpom$; altre delle loro facce sono le stesse facce dei poliedri primitivi: oltre a ciò nei due nuovi poliedri gli angoli diedri SC, CG, GS sono respettivamente uguali agli angoli diedri sc, cg, gs, come agevolmente si vede.

Or nel modo con cui nei due poliedri primitivi si è dimostrata la similitudine delle due piramidi $SCDG$, $scdg$, così in quelli che abbiamo ottenuti per la soppressione di esse piramidi si potrà dimostrare la similitudine delle due piramidi $SCGM$, $scgm$; laonde procedendo nella stessa guisa riscontreremo essere tutte le piramidi in che abbiamo diviso il primo poliedro respettivamente simili alle piramidi omologhe dell'altro; come si doveva dimostrare.

TEOREMA VIII.

579. *Reciprocamente due poliedri sono simili quando sono composti d'un medesimo numero di piramidi triangolari respettivamente simili, e similmente disposti.*

Le superficie dei due poliedri sono evidentemente composte di triangoli respettivamente simili, e similmente disposti; Fig. 190.
essendochè questi triangoli sono facce di piramidi triangolari simili, e similmente disposte; così il triangolo CGD è simile al triangolo cgd, il triangolo CGM è simile al triangolo cgm, ec.

Di più se i triangoli CGD, CGM fossero in uno stesso piano, avremmo l'angolo $MCD = MCG + GCD$, e conseguentemente l'angolo $mcd = mcg + gcd$, cioè anche i triangoli cgd, cgm sarebbero in uno stesso piano; dunque se più triangoli CGD, CGM, MGO, OGP sono in un medesimo piano, e formano una sola faccia $CDGPOM$, i loro omologhi cgd, cgm, mgo, ogp saranno anch'essi in un medesimo piano, e formeranno pure una sola faccia $cdgpom$ simile a $CDGPOM$; dunque ogni faccia poligona nel primo poliedro corrisponderà ad una faccia poligona simile nell'altro; dunque i due poliedri saranno compresi da un medesimo numero di piani simili, e similmente disposti. Dico di più, che gli angoli diedri omologhi saranno uguali; infatti nelle piramidi triangolari simili, gli angoli diedri formati da facce simili, sono uguali; or gli angoli diedri omologhi dei due poliedri o sono angoli diedri omologhi delle piramidi costituenti, o sono somme di angoli diedri omologhi di queste stesse piramidi; dunque in ogni caso essi sono uguali.

TEOREMA IX.

Fig. 190. 580. *Nei poliedri simili le costole omologhe, le diagonali omologhe delle facce omologhe, e le diagonali interne omologhe sono proporzionali.*

Sieno OP ed AE due costole qualunque del primo poliedro omologhe alle costole op, ae dell'altro; poichè le facce omologhe nei poliedri simili, sono poligoni simili, avremo $OP : op :: CD : cd$, $AE : ae :: AS : as$, $CD : cd :: AS : as$; e perciò $OP : op :: AE : ae$; le costole omologhe sono adunque proporzionali.

Sieno OG ed SE le diagonali di due facce qualunque del primo poliedro, omologhe alle diagonali og ed se; avremo $OG : og :: OP : op$, $SE : se :: AE : ae$; ma $OP : op :: AE : ae$; dunque $OG : og :: SE : se$; dunque le diagonali omologhe delle facce omologhe, sono anch'esse proporzionali.

Sieno SP ed NA due diagonali del primo poliedro omologhe alle diagonali sp, na; avremo $SP : sp : OP : op$. Ma poichè le piramidi costituenti aver potrebbero nel primo poliedro il comune vertice non in S, ma sibbene in N, e nell'altro poliedro in n, perciò sarà pure $NA : na :: AE : ae$; ora $OP : op :: AE : ae$; dunque $SP : sp :: NA : na$; dunque le diagonali interne omologhe, sono esse pure proporzionali.

TEOREMA X.

581. *Le superfici dei poliedri simili stanno fra loro come i quadrati delle costole omologhe.* Fig. 190.

Siccome le aree dei poligoni simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi, sarà

$$SABCD : sabcd :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2,$$

$$SAEF : saef :: \overline{SA}^2 : \overline{sa}^2,$$

$$SDGIF : sdgif :: \overline{SD}^2 : \overline{sd}^2,$$

e così di seguito; conseguentemente

$$SABCD : sabcd :: SAEF : saef :: SDGIF : sdgif \text{ ec.};$$

dunque la somma di tutte le facce del primo poliedro starà alla somma di tutte le facce del secondo, come una faccia qualunque dell' uno sta alla faccia omologa dell' altro, oppure come il quadrato di una costola del primo stà alla costola omologa del secondo: dunque le superfici dei poliedri simili stanno fra loro nella ragione dei quadrati delle costole omologhe.

TEOREMA XI.

582. *I volumi dei poliedri simili stanno fra loro come i cubi delle costole omologhe.* Fig. 189.

Si considerino in primo luogo le due piramidi triangolari simili $SABC$, $sabc$; avremo

$$SO : so :: AB : ab\,^{*};$$ * 463.

ma

$$ABC : abc :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2,$$

e per conseguenza

$$\tfrac{1}{3} ABC : \tfrac{1}{3} abc :: \overline{AB}^3 : \overline{ab}^3,$$

perciò, moltiplicando queste due proporzioni termine per termine, avremo

$$\tfrac{1}{3} ABC \times SO : \tfrac{1}{3} abc \times so = \overline{AB}^3 : \overline{ab}^3,$$

dunque le due piramidi triangolari simili $SABC$, $sabc$ stanno fra loro nella ragione dei cubi delle loro costole omologhe.

Fig. 190. Ciò posto passiamo a considerare due poliedri simili qualunque; le piramidi omologhe respettivamente simili ne' quali essi si decompongono daranno le proporzioni

$$SCDG : scdg :: \overline{CD}^3 : \overline{cd}^3,$$

$$SCGM : scgm :: \overline{CM}^3 : \overline{cm}^3,$$

$$SGOM : sgom :: \overline{OM}^3 : \overline{om}^3,$$

e così di seguito; conseguentemente

$$SCDG : scdg :: SCGM : scgm :: SGOM : sgom \text{ ec.};$$

dunque la somma di tutte le piramidi costituenti il primo poliedro starà alla somma di tutte le piramidi costituenti il secondo, come una piramide qualunque dell' uno stà alla piramide omologa dell' altro, oppure come il cubo di una costola del primo stà al cubo della costola omologa del secondo; dunque i volumi dei poliedri simili stanno fra loro nella ragione dei cubi delle costole omologhe.

LIBRO NONO

I TRE CORPI ROTONDI.

NOZIONI PRELIMINARI.

583. Oltre i poliedri di che abbiamo tenuto proposito ne' libri precedenti la Geometria elementare considera altri tre corpi, il *cono*, il *cilindro*, e la *sfera* cui si dà il nome di *corpi rotondi*; le forme de' quali noi definiremo accennando prima le forme di quei corpi del di cui genere essi sono casi particolari.

584. Sotto il nome di *superfici coniche* comprendonsi tutte quelle che si concepiscono come prodotte dal movimento d' una retta *generatrice* fissa in un punto, e soggetta a percorrere una linea qualunque, che chiamasi *direttrice*. La direttrice quando è una linea piana prende il nome di *base*; e quando tal base è una circonferenza di circolo la superficie conica corrispondente dicesi particolarmente *superficie conica circolare*. Finalmente secondochè il *vertice* della superficie conica cioè il punto fisso della generatrice è situato fuori dell' asse oppure sopra l'asse della base circolare *, la superficie conica è chiamata *circolare obliqua*, o *circolare retta*. * 396.

Perciò la superficie laterale della piramide è una superficie conica; è quella cui serve di base e conseguentemente di *direttrice* il perimetro di un poligono piano.

585. Il corpo o solido terminato da una superficie conica si chiama *cono*. L' *altezza* d' un cono è la perpendicolare abbassata sul piano della sua base.

Nel cono circolare la retta che congiunge il vertice col centro della base si dice *asse*.

Nel cono circolare retto l' asse è uguale all' altezza.

Le figure 191, e 192, rappresentano respettivamente un cono circolare obliquo, ed un cono circolare retto; il loro asse è indicato dalla retta SO.

586. Il cono circolare retto si può anche considerare come risultante dal rivolgimento d' un triangolo rettangolo ASO intorno ad uno dei lati dell' angolo retto preso per *asse*, mentre l' ipotenusa serve di generatrice. La ipotenusa medesima si chiama talora *lato*, o *apotema* del cono.

Questo è il solo cono che si consideri negli Elementi della Geometria.

587. Sotto il nome di *superfici cilindriche* si comprendono tutte quelle superfici, le quali si concepiscono come prodotte dal movimento d' una retta generatrice che si mantiene costantemente parallela a se stessa, percorrendo una linea direttrice qualunque. Questa linea direttrice, quando è piana, chiamasi *base*; e quando è la circonferenza d'un circolo, la superficie cilindrica che le corrisponde appellasi *superficie cilindrica circolare*. Quindi secondochè la generatrice è obliqua oppure perpendicolare al piano della base circolare, la superficie cilindrica è detta respettivamente *circolare obliqua* o *circolare retta*. Si vede manifestamente che la superficie laterale del prisma è anch' essa una superficie cilindrica cui serve di base, ossia di direttrice il perimetro d' un poligono piano.

588. Il solido terminato da una superficie cilindrica chiamasi *cilindro*. La superficie laterale d' un cilindro circolare è limitata nella sua lunghezza da due piani circolari paralleli. Questi piani paralleli sono le *basi* del cilindro; la distanza che li separa ne è l' *altezza*; e la retta che congiunge i centri delle due basi ne è l' *asse*.

Le figure 193, e 194, rappresentano respettivamente un cilindro circolare obliquo, ed un cilindro circolare retto; la retta OO' ne indica l' asse.

589. Il cilindro circolare retto si può anche considerare

come prodotto dal rivolgimento d' un rettangolo $AOO'A'$ Fig. 194.
intorno ad uno dei suoi lati OO' come *asse*; in tal caso il lato opposto AA' sarà la generatrice della sua superficie laterale. Questo è il solo cilindro che venga considerato negli Elementi della Geometria.

590. Or tutte quelle superfici le quali si possono immaginare come generate dal rivolgimento d'una linea sopra due suoi punti, o intorno alla retta che congiunge questi punti medesimi si chiamano *superfici di rivoluzione*; tali adunque sono le superfici del cono circolare retto, e del cilindro circolare retto; tale quella prodotta da una mezza circonferenza che gira intorno al proprio diametro.

591. Ogni superficie prodotta dal rivolgimento d'una mezza circonferenza intorno al proprio diametro chiamasi *superficie sferica*. Or poichè tutti i punti della mezza circonferenza sono ugualmente distanti dal centro, perciò una superficie sferica è quella di cui tutti i punti sono ugualmente distanti da un punto interno, che prende esso pure il nome di *centro* della superficie stessa.

592. Il solido terminato da una superficie sferica si chiama *sfera*. Il *raggio* della sfera è ogni linea retta condotta dal centro ad un punto della sua superficie; il *diametro* o *asse* è ogni linea che passando pel centro termina da ambe le parti alla superficie. Tutti i raggi della sfera sono uguali tutti i diametri sono uguali, e doppj del raggio.

TEOREMA I.

593. *Se un cono circolare retto è tagliato da un piano parallelo alla sua base ABC, la sezione $A'B'C'$ sarà un circolo.* Fig. 192.

Sieno O', B', C' le respettive intersezioni del piano $A'B'C'$ coll'asse SO e coi due lati qualunque SB, SC del cono. Evidentemente AB sarà parallela ad $A'B'$, e CD lo sarà a $C'D'$; per cui avremo le proporzioni

$$SO : SO' :: OB : O'B'$$
$$SO : SO' :: OC : O'C';$$

dalle quali, poichè $OB = OC$, si ricava $O'B' = O'C'$; dunque tutti i punti del perimetro $A'B'C'$ sono equidistanti dal punto O'; dunque questo perimetro è una circonferenza di cui O' è il centro.

594. *Scolio I.* La sezione ASB di un cono circolare retto con un piano condotto pel suo asse SO è un triangolo isoscele doppio del triangolo generatore SOB. L'angolo ASB si chiama *angolo al centro del cono*; l'angolo OSB del triangolo generatore è la metà dell'angolo al centro.

595. *Scolio II.* Pertanto il solido $SA'B'C'$ sarà esso pure un cono, che si può concepire generato dal triangolo $SO'B'$; i due coni $SA'B'C'$, $SABC$ sono adunque generati dai triangoli $SO'B'$, SOB simili; e siccome questi triangoli somministrano la proporzione $SO' : SO :: O'B' : OB$, segue che nei coni medesimi $SA'B'C'$, $SABC$ gli assi stanno nella ragione dei raggi delle loro basi.

596. *Definizione I.* Due coni circolari retti sono detti *simili* quando sono prodotti dai rivolgimenti di due triangoli rettangoli simili intorno a lati omologhi; quando cioè i loro assi stanno nella ragione dei raggi delle loro basi.

597. *Definizione II.* La parte d'un cono compresa fra la sua base, ed un piano ad essa parallelo si chiama *tronco di cono.* Tal'è il solido $ABCA'B'C'$; il quale si può considerare come generato dal trapezio $OBO'B'$, i cui angoli O, O' sono retti, girevole intorno al suo lato OO'. Questo lato OO' si chiama *asse* o *altezza* del tronco; i circoli ABC, $A'B'C'$ ne sono le *basi*; BB' ne è il *lato.*

598. *Definizione III.* I tronchi di due coni circolari retti sono detti *simili* quando sono generati da trapezj simili; quando cioè i loro assi sono proporzionali ai raggi delle basi corrispondenti.

LEMMA I.

599. *L'area della superficie laterale d' una piramide regolare $SABCDE$ è uguale alla metà del prodotto del perimetro $ABCDE$ della sua base per la sua apotema ST.* Fig. 165.

L' area del triangolo SAB è uguale alla metà del prodotto $AB \times ST$; ma la superficie laterale della piramide $SABCDE$ è costituita di tanti triangoli uguali ad SAB quanti lati ha il perimetro della sua base; dunque prendendo la metà del prodotto $AB \times ST$ tante volte quanti lati ha la base della piramide, il resultato esprimerà l'area della superficie laterale della piramide. Or poichè prendendo il lato AB tante volte quanti lati ha la base ne risulta il perimetro di essa base; dunque l'area della superficie laterale d' una piramide regolare è uguale alla metà del prodotto del perimetro della sua base per la sua apotema.

600. *Definizione I.* Ogni piramide avente il vertice stesso di un cono e per base un poligono iscritto nella base di questo cono è detta *iscritta* nel cono medesimo; reciprocamente il cono è detto *circoscritto* alla piramide.

601. *Definizione II.* Ogni piramide avente il vertice stesso di un cono e per base un poligono circoscritto alla base di questo cono è detta *circoscritta* al cono; reciprocamente il cono è detto *iscritto* nella piramide. È facile vedere che in tal caso le facce della piramide sono tangenti al cono, cioè ciascuna di esse ha di comune colla sua superficie una linea retta, la quale è appunto il lato del cono medesimo.

LEMMA II.

602. *La differenza delle superfici di due piramidi regolari l' una iscritta in un cono l' altra circoscritta, e quella eziandio dei loro volumi possono riuscire minori di qualunque quantità data.*

1.° Sieno p, p' i perimetri delle basi delle due piramidi l' una circoscritta ad un cono, l' altra iscritta; L, L' Fig. 195.

sieno le apoteme loro; le superfici di queste piramidi saranno respettivamente rappresentate dai prodotti $\frac{1}{2} p \times L$, $\frac{1}{2} p' \times L'$. Or l'apotema $SG = L$ della piramide circoscritta è il lato stesso del cono. Inoltre quanto più è piccola la corda ab, tanto più grande è la sua distanza Og dal centro O, e tanto più grande ancora è l' apotema $Sg = L'$ della piramide iscritta, come obliqua che allora più si discosta dalla perpendicolare SO. Cosicchè moltiplicandosi il numero dei lati dei perimetri p, p' l' apotema Sg tenderà ad uguagliare l' apotema SG senza giammai superarla, e nel tempo stesso il perimetro p' tenderà ad uguagliare il perimetro p; dunque il valore del prodotto $\frac{1}{2} p' \times L'$ si approssimerà continuamente al prodotto $\frac{1}{2} p \times L$; dunque il primo potrà differire dal secondo d'una quantità minore di qualunque quantità data; dunque la differenza delle superfici di due piramidi l'una circoscritta ad un cono, l'altra iscritta, potrà riuscire minore di qualunque quantità data.

2.° Sieno b, b' le superfici delle basi delle due piramidi medesime; A la comune altezza di esse; i volumi loro saranno respettivamente rappresentati dai prodotti $\frac{1}{3} b \times A$,
* 558. $\frac{1}{3} b' \times A$*; la differenza de' quali come bene si scorge potrà riuscire minore di qualunque quantità data; la differenza dei volumi può adunque riuscire anch' essa minore di qualunque quantità data.

603. *Scolio.* La superficie conica è tutta racchiusa fra le superfici della piramide iscritta e della circoscritta. Ora moltiplicandosi i lati dei poligoni iscritti e circoscritti il numero delle linee di contatto della superficie conica colle superfici della piramide iscritta, e della circoscritta si farà sempre più grande, mentrechè il volume della piramide iscritta e la sua superficie eziandio cresceranno, ed il volume della piramide circoscritta e la sua superficie decresceranno. Ed è da osservare che nel tempo stesso in cui la superficie del poligono iscritto, il suo perimetro, e l' apotema Sg crescono, il punto g si approssima alla superficie del cono, e nel tempo in cui la superficie del poligono circoscritto, ed il suo perimetro decrescono, l' apotema SG si mantiene

sempre costante. Da ciò si fa manifesto che la piramide circoscritta e la iscritta tendono a confondersi col cono; che la superficie della prima è maggiore, quella dell'altra è minore della superficie del cono; finalmente che le superfici convesse di queste piramidi si possono considerare come due limiti contenenti la superficie convessa del cono, i quali possono per loro natura differire d'una quantità piccola quanto vuolsi; ed i volumi loro come i limiti del volume di esso cono.

TEOREMA II.

604. *L'area della superficie convessa d'un cono circolare retto è uguale alla metà del prodotto del suo lato per la circonferenza della sua base.*

Sia S la superficie convessa del cono, L il suo lato, C la circonferenza della sua base; p, p' sieno i perimetri delle basi delle due piramidi l'una circoscritta al cono, l'altra in esso iscritta. Le superfici s, s' delle piramidi l'una circoscritta, l'altra iscritta sono i limiti della superficie S del cono*. D'altra parte i rettangoli $\frac{1}{2} p \times L$, $\frac{1}{2} p' \times L'$ * 603.
sono i limiti del rettangolo $\frac{1}{2} C \times L$. Ma $s = \frac{1}{2} p \times L$, $s' = \frac{1}{2} p \times L'$, dunque la superficie S, ed il rettangolo $\frac{1}{2} C \times L$ si trovano ambedue fra i medesimi limiti; cioè fra le due superfici s, s' la cui differenza può riuscire minore di qualunque quantità data; dunque $S = \frac{1}{2} C \times L$.

605. *Corollario I.* Conducasi pel punto A' mezzo del Fig. 192.
lato SA un piano parallelo alla base del cono; indicando con *circ.* OA, *circ.* $O'A'$ le circonferenze i cui raggi sono OA, $O'A'$, avremo la proporzione

$$circ.\ OA : circ.\ O'A' :: OA : O'A' :: SA : SA',$$

dalla quale, poichè SA' è la metà di SA, si deduce essere *circ.* $O'A'$ la metà di *circ.* OA, ed $S = circ.\ OA \times SA$; dunque *l'area della superficie convessa d'un cono è uguale al prodotto del suo lato per la circonferenza della sezione equidistante dal vertice, e dalla base.*

606. *Corollario II.* Si conduca pel punto A' una perpendicolare ad SA prolungandola fino all'incontro dell'asse del cono nel punto H; i triangoli $A'O'H$, AOS avendo i loro lati respettivamente perpendicolari saranno simili; per cui avremo

$$SA : SO :: A'H : O'A';$$

e conseguentemente

$$SA : SO :: circ.\ A'H : circ.\ O'A';$$

ovvero

$$S = circ.\ O'A' \times SA = circ.\ A'H \times SO;$$

dunque *l'area della superficie convessa del cono è uguale al prodotto della sua altezza per la circonferenza di raggio uguale alla perpendicolare $A'H$, inalzata sul mezzo d'un lato SB, e terminata all'asse.*

607. *Corollario III.* L'area della base del cono è uguale al prodotto della sua circonferenza per la metà del raggio; dunque *la superficie convessa del cono sta alla sua base come il lato del cono sta al raggio della base medesima.*

TEOREMA III.

608. *Il volume d'un cono circolare retto è uguale al terzo del prodotto della sua base per la sua altezza.*

Sia V il volume del cono, A la sua altezza, B la sua base; b, b' sieno le basi delle piramidi l'una circoscritta al cono, l'altra iscritta. I volumi v, v' di queste piramidi sono i limiti del volume V del cono. D'altra parte i prodotti $\frac{1}{3} b \times A$, $\frac{1}{3} b' \times A$ sono evidentemente i limiti
* 603. del prodotto $\frac{1}{3} B \times A$*. Ma $v = \frac{1}{3} b \times A$, $v' = \frac{1}{3} b' \times A$; dunque V, ed $\frac{1}{3} A \times B$ sono quantità contenute fra i medesimi limiti, cioè fra i due volumi v, v' la cui differenza
* 602. può riuscire minore di qualunque quantità data*; dunque $V = \frac{1}{3} B \times A$.

609. *Corollario I.* Un cono qualunque si può considerare come equivalente ad una piramide che abbia la mede-

sima altezza, e per base un poligono equivalente al circolo che serve di base al cono.

6 0. *Corollario II.* Segue da ciò che i coni della medesima altezza stanno fra loro come le respettive basi, ed i coni della medesima base stanno fra loro come le respettive altezze*. * 568.

611. *Corollario III.* I coni simili stanno fra loro come i cubi delle loro altezze A, A', o come i cubi dei raggi R, R' delle loro basi Infatti, i coni essendo simili, avremo

$$A : A' :: R : R';$$

ma $$B : B' :: R^2 : R'^2,$$

dunque

$$B \times A : B' \times A' :: R^3 : R'^3;$$

e per conseguenza

$$\tfrac{1}{3} B \times A : \tfrac{1}{3} B' \times A' :: R^3 : R'^3 :: A^3 : A'^3.$$

TEOREMA IV.

612. ***L'area della superficie convessa del tronco di cono** $ABA'B'$ **è uguale al prodotto del suo lato** AA' **per la semisomma delle circonferenze delle sue due basi.*** Fig. 196.

Nel piano SAB il quale passa per l'asse SO si conduca la retta AC perpendicolare ad SA ed uguale alla circonferenza di cui AO è il raggio; quindi si conduca SC; e finalmente $A'C'$ parallela ad AC. L'area del triangolo rettangolo SAC essendo espressa dal prodotto $\frac{1}{2} AC \times SA$ sarà equivalente all'area del cono SAB*. Di più avendosi * 604. dai triangoli simili SAC, $SA'C'$ la proporzione

$$AC : A'C' :: SA : SA',$$

quando si osservi che

$$circ.\ OA : circ.\ O'A' :: OA : O'A' :: SA : SA',$$

ne risulterà

$$circ.\ OA : circ.\ O'A' :: AC : A'C';$$

e poichè $circ.\ OA = AC$, segue che $circ.\ O'A' = A'C'$; ragione per cui l'area del triangolo $SA'C'$ espressa dal prodotto $\frac{1}{2} A'C' \times SA'$ sarà equivalente a quella del cono $SA'B'$; dunque l'area del trapezio $ACC'A'$ è equivalente all'area del tronco $ABB'A'$: or l'area del trapezio medesimo, poichè la retta AA' ne è l'altezza, è uguale al prodotto

$$\tfrac{1}{2}(AC + A'C') \times AA',$$

dunque l'area del tronco di cono è finalmente uguale al prodotto

$$\tfrac{1}{2}(circ.\ OA + circ.\ O'A')\ AA'$$

come si doveva dimostrare.

613. *Corollario I.* Conducasi pel punto A'' mezzo di AA' un piano parallelo alla base del cono, e la retta $A''C''$ parallela ad AC; si dimostrerà come qui sopra essere $A''C'' = circ.\ O''A''$. Ma $A''C'' = \frac{1}{2}(AC + A'C')$ dunque l'area del tronco risulta uguale a

$$circ.\ O''A'' \times AA'$$

dunque *l'area della superficie convessa del tronco di cono è uguale al suo lato moltiplicato per la circonferenza della sezione fatta ad uguale distanza dalle basi.*

614. *Corollario II.* Si abbassi dal punto A' la perpendicolare $A'P$ sopra AB, e pel punto A'' si conduca una perpendicolare ad AA', prolungandola sino all'incontro dell'asse del tronco nel punto H; i triangoli $AA'P$, $A''O''H$ avendo i lati respettivamente perpendicolari saranno simili; per cui avremo

$$AA' : A'P :: A''H : A''O'',$$

e conseguentemente

$$AA' : A'P :: circ.\ A''H : circ.\ A''O'';$$

ovvero

$$circ.\ A''O'' \times AA' = circ.\ A''H \times A'P.$$

Dunque *l'area della superficie convessa del tronco di cono* *è pure uguale al prodotto della sua altezza per la circonferenza di raggio uguale alla perpendicolare $A'H$ inalzata sul mezzo A'' d'un lato AA', e terminata all'asse OO'*

TEOREMA V.

615. *Il tronco di cono $ABA'B'$ a basi parallele è uguale alla somma di tre coni, che avessero per altezza comune l'altezza OO' del tronco, e le cui basi fossero la base inferiore AHB del tronco, la sua base superiore $A'H'B'$, ed una media proporzionale fra queste due basi.* Fig. 197.

Sia $TCDE$ una piramide della medesima altezza del cono SAB, la quale abbia una base CDE equivalente alla base del cono. Supponendo queste due basi situate sopra un medesimo piano, ed immaginando il piano della base superiore del tronco $A'H'B'$ prolungato finchè tagli la piramide $TCDE$ otterremo una nuova piramide $TC'D'E'$ della medesima altezza del cono $SA'B'$. Di più indicando con *sup.* OA, e *sup.* $O'A'$ i circoli i cui raggi sono OA, ed $O'A'$, avremo

$$sup.\ OA : sup.\ O'A' :: \overline{OA}^2 : \overline{O'A'}^2 :: \overline{SO}^2 : \overline{SO'}^2;$$

ed inoltre

$$CDE : C'D'E' :: \overline{TP}^2 : \overline{TP'}^2;$$

e quindi

$$sup.\ OA : sup.\ O'A' :: CDE : C'D'E';$$

ma per ipotesi *sup.* $OA = CDE$, dunque *sup* $O'A' = C'D'E'$. Dunque le piramidi $TCDE$, $TC'D'E'$ sono respettivamente equivalenti ai coni SAB, $SA'B'$; ed il tronco di piramide $CDEC'D'E'$ è equivalente al tronco di cono $ABA'B'$. Da ciò risulta che la somma delle tre piramidi di che è costituito il tronco di piramide * è uguale al tronco di * 546.
cono $ABA'B'$; le quali tre piramidi sono equivalenti a tre coni della medesima altezza di esso tronco avendo respettivamente per basi, la sua base inferiore, la sua base superiore, ed una media proporzionale fra queste due basi.

TEOREMA VI.

Fig. 194. 616. *Ogni sezione fatta in un cilindro circolare retto da un piano parallelo alla base è un circolo uguale a questa base.*

Sieno OA, OC due raggi qualunque della base, ed O'', A'', C'' le intersezioni respettive dell'asse OO', e dei due lati AA', CC' col piano secante $A''C''B''$ parallelo alla base. Le rette AA'', CC'', OO'' sono evidentemente uguali e parallele; dunque $AO = A''O''$, $CO = C''O''$, e per conseguenza $A''O'' = C''O''$; donde segue che tutti i punti del perimetro della sezione $A''C''B''$ sono equidistanti dal punto O''; dunque questa sezione è un circolo di cui O'' è il centro.

617. *Scolio.* Ogni sezione fatta in un cilindro circolare retto da un piano condotto per l'asse è un rettangolo doppio del rettangolo generatore.

618. *Definizione.* Due cilindri circolari si dicono simili quando sono generati dai ravvolgimenti di due rettangoli simili intorno a lati omologhi; cioè quando i loro assi sono proporzionali ai raggi delle loro basi.

LEMMA I.

Fig. 198. 619. *L'area della superficie convessa d'un prisma retto è uguale al prodotto del perimetro della sua base per la sua altezza.*

La superficie laterale del prisma retto $ABCDEF$ è composta dei rettangoli $ABGF$, $BCHG$, $CDIH$, ec., le altezze dei quali sono uguali all'altezza del prisma, e le loro basi AB, BC, CD, ec., prese insieme formano il perimetro della base del prisma medesimo. Dunque la somma di questi rettangoli *, o la superficie convessa del prisma è uguale al prodotto del perimetro della sua base per la sua altezza.
* 167.

620. *Definizione I.* Un prisma è detto *iscritto* in un cilindro quando ha per base un poligono iscritto nella base del cilindro, e le sue costole parallele ed uguali all'asse: reciprocamente il cilindro è detto circoscritto al prisma.

621. *Definizione II.* Un prisma è detto *circoscritto* ad un cilindro quando ha per base un poligono circoscritto alla base del cilindro, e le sue costole parallele ed uguali all'asse: reciprocamente il cilindro è detto *iscritto* nel prisma.

In questo caso le facce del prisma sono altrettanti piani tangenti della superficie convessa del cilindro; essendochè le perpendicolari inalzate sopra il piano della base ne' punti di contatto dei lati del poligono colla circonferenza iscritta sono comuni alle facce del prisma, ed alla superficie convessa del cilindro.

LEMMA II.

622. *La differenza delle superfici convesse di due prismi regolari l'uno iscritto in un cilindro, l'altro circoscritto, e quella eziandio dei loro volumi possono riuscire minori di qualunque quantità data.* Fig. 199.

Sia A l'altezza di un dato cilindro; b, b' sieno i due poligoni regolari l'uno circoscritto, l'altro iscritto alla sua base; e p, p' sieno i loro perimetri. I prodotti $p \times A$, $p' \times A$ rappresenteranno le aree s, s' delle superfici convesse di due prismi regolari l'uno circoscritto l'altro iscritto al cilindro dato*. Or poichè la differenza $p - p'$ può riuscire minore di qualunque quantità data*, manifestamente anche la differenza $p \times A - p' \times A$, quella cioè delle superfici dei due prismi suddivisati potrà riuscire minore di qualunque quantità data. *619. *31.

In secondo luogo i prodotti $b \times A$, $b' \times A$ rappresenteranno i volumi dei medesimi prismi; e poichè la differenza $b - b'$ può divenire piccola quanto vogliamo, così anche la differenza $b \times A - b' \times A$, cioè quella dei volumi di essi prismi, potrà riuscire minore di qualunque quantità data.

623. *Corollario.* Frattanto ove si ponga mente alle ragioni sviluppate al § 603 si potrà stabilire che la superficie cilindrica S è minore della superficie convessa s del prisma circoscritto, e maggiore della superficie convessa s' del prisma iscritto; e, poichè $s - s'$ può divenire minore di qualunque quantità data, s ed s' si potranno considerare come i limiti della superficie S.

Evidentemente poi il volume V del cilindro è minore del volume v del prisma circoscritto, e maggiore del volume v' del prisma iscritto; ragione per cui v, v' si potranno considerare come i limiti del volume V.

TEOREMA VII.

624. *L'area della superficie convessa d'un cilindro circolare retto è uguale al prodotto della circonferenza della sua base per la sua altezza.*

Sia S la superficie convessa del cilindro, A la sua altezza, C la circonferenza della sua base; p, p' sieno i perimetri delle basi dei prismi regolari l'uno circoscritto, l'altro iscritto nel cilindro medesimo. Le superfici s, s' di questi
623. prismi sono i limiti della superficie S del cilindro. D'altra parte i prodotti $p \times A$, $p' \times A$ sono i limiti del prodotto $C \times A$. Ma $s = p \times A$, ed $s' = p' \times A$; dunque S, e $C \times A$ sono quantità contenute fra i medesimi limiti, cioè fra le due superfici s, s' la cui differenza può riuscire minore di qualunque quantità data; dunque $S = C \times A$.

TEOREMA VIII.

625. *Il volume d'un cilindro circolare retto è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.*

I volumi v, v' dei prismi l'uno circoscritto, l'altro iscritto nel cilindro sono i limiti del volume V del cilindro medesimo; di più ove b, b' rappresentino le basi di tali prismi, i prodotti $b \times A$, $b' \times A$ saranno i limiti del prodotto $B \times A$. Ma $v = b \times A$, $v' = b' \times A$; dunque $V = B \times A$.

626. *Corollario I.* Un cilindro qualunque si può considerare come equivalente ad un prisma che abbia la medesima altezza, e per base un poligono equivalente al circolo che serve di base al cilindro.

627. *Corollario II.* Segue da ciò che i cilindri della medesima altezza stanno fra loro come le respettive basi, ed i cilindri della medesima base stanno fra loro come le respettive altezze.

628. *Corollario III.* I cilindri simili stanno fra loro come i cubi delle loro altezze, o come i cubi dei raggi delle loro basi.

TEOREMA IX.

629. *Ogni sezione fatta in una sfera da un piano è un circolo.*

Sia $EGFH$ il perimetro della sezione fatta da un piano Fig. 200.
nella sfera di cui O è il centro. Dal punto O si abbassi la perpendicolare OP sul piano della sezione medesima; quindi si conducano a differenti punti del perimetro $EGFH$ i raggi OE, OG, OF, e le rette PE, PG, PF. Poichè le oblique OE, OG, OF sono uguali come raggi della sfera, le rette PE, PG, PF saranno esse
pure uguali *; dunque i punti E, G, F del perimetro * 594.
della sezione sono ugualmente lontani dal punto P; dunque questo perimetro è una circonferenza di cui P è il centro.

630. *Scolio.* Quando il piano di sezione passa pel centro della sfera, il circolo che ne risulta avrà il medesimo centro, ed il medesimo raggio della sfera medesima. Segue da ciò che tutti i circoli i quali passano pel centro della sfera sono uguali. Di più ogni circolo il quale non passa pel centro della sfera sarà minore di essi; infatti $OF > OP$.

631. *Definizione. Gran circolo* d'una sfera dicesi quello che passa pel centro di essa sfera; *piccolo circolo* dicesi quello che non vi passa.

TEOREMA X.

632. *Ogni gran circolo divide la sfera, e la sua superficie in due parti uguali.*

Infatti se dopo aver separate le due parti in che viene divisa la sfera una di esse si porrà nell'altra per modo che le loro basi combacino, tutti i punti della superficie convessa di una di esse coincideranno coi punti dell'altra, poichè gli uni e gli altri si troveranno ad uguale distanza dal centro della comune base.

633. *Definizione I.* Ciascuna delle due parti uguali nelle quali risulta divisa la sfera da uno dei suoi grandi circoli si chiama *emisfero.*

634. *Definizione II.* Un piano indefinito che ha un solo punto a comune colla superficie di una sfera dicesi *piano tangente* della sfera medesima.

635. *Definizione III.* Si chiama *zona* la parte della superficie della sfera compresa fra due piani paralleli; i circoli che rappresenteranno le sezioni dei medesimi piani colla sfera si chiamano *basi* della zona.

Uno di questi piani può esser tangente alla sfera; allora la zona non ha che una base, e può anche chiamarsi *calotta.*

636. *Definizione IV.* Dicesi *segmento sferico* la porzione del solido della sfera compresa fra due piani paralleli; le cui sezioni colla sfera sono le *basi* del segmento stesso.

Se uno di questi piani è tangente alla sfera il segmento sferico non ha che una sola base.

637. *Definizione V.* L'*altezza d'una zona*, o *d'un segmento* è la distanza dei due piani paralleli che sono le basi della zona, o del segmento.

638. *Definizione VI.* Si chiama *settore sferico* la porzione del solido della sfera compresa fra una calotta, ed una superficie conica avente per base il circolo base della calotta medesima, e il suo vertice nel centro della sfera.

639. *Scolio I.* Segue da ciò che un settore è la somma di un segmento EAF, e di un cono OEF. Ma il settore

sarebbe al contrario la differenza di un segmento e di un cono, ove la calotta che ne è la base superasse la metà della superficie della sfera. Così il settore $OECBDFO$ è uguale al segmento $ECBDFPE$ meno il cono OEF. Inoltre si vede che il settore diverrebbe un emisfero quando la base della calotta fosse un gran circolo della sfera.

640. *Scolio II.* Una *calotta* EAF può considerarsi come generata dal ravvolgimento di un arco EA intorno al diametro AB che passa per una delle sue estremità.

Un *settore sferico* si può esso pure considerare come generato dal rivolgimento di un settore circolare OEA intorno ad uno dei suoi lati OA, OE.

TEOREMA XI.

641. *Ogni piano MN perpendicolare all' estremità d' un raggio OB è un piano tangente della sfera; reciprocamente ogni piano tangente è perpendicolare al raggio condotto al punto di contatto.*

1.° L' obliqua OM condotta a piacere dal centro della sfera sopra il piano MN è maggiore della perpendicolare OB, o della sua uguale OQ; dunque l' estremità M di questa obliqua è fuori del circolo; dunque il piano MN non ha a comune col circolo che il solo punto B ove lo tocca; perciò esso è un piano tangente alla sfera.

2.° Reciprocamente se il piano MN tocca la sfera nel solo punto B ogni linea, tranne OB, condotta dal centro sopra MN passerà fuori della sfera; dunque OB è la più corta linea che dal centro possa abbassarsi sopra MN; dunque OB è perpendicolare ad MN.

642. *Corollario.* La perpendicolare al piano tangente inalzata sul punto di contatto passa pel centro della sfera.

LEMMA I.

Fig. 201. 643. *L' area della superficie generata dal ravvolgimento d' una linea $ABCD$, porzione di poligono regolare, intorno ad un asse MN che passa pel suo centro senza tagliarla è uguale al prodotto della circonferenza iscritta in esso poligono moltiplicata per la parte $A'D'$ dell' asse compresa fra le perpendicolari AA', DD' abbassate sull' asse medesimo.*

Dal centro O si conducano le rette OP, OQ, OR respettivamente perpendicolari ai lati AB, BC, CD le quali divideranno in mezzo i lati medesimi; quindi dai punti B, C si abbassino le perpendicolari BB', CC' sull' asse. Il trapezio $AA'B'B$ ravvolgendosi intorno ad $A'B'$ produrrà un tronco di cono, la cui superficie convessa sarà quella generata dalla retta AB. Dunque (rappresentando l' area di tal superficie con *area* AB), avremo

* 614. $$\text{area } AB = \text{circ. } OP \times A'B' \text{*},$$

come pure $$\text{area } BC = \text{circ. } OQ \times B'C',$$
$$\text{area } CD = \text{circ. } OR \times C'D';$$

* 157. donde si ricava, osservando che $OP = OQ = OR$*,

$$\text{area } ABCD = \text{circ. } OP \times A'D'.$$

Fig. 202. 644. *Scolio* Il lato AB, ove la sua estremità fosse sull' asse, produrrebbe una superficie conica; e se alcuno dei lati della linea $ABCD$, per es. CD, fosse parallelo all'asse, esso lato produrrebbe una superficie cilindrica; ma pertanto non sarebbe meno vera la proposizione precedente avendosi sempre *area* $AB =$ *circ.* $OP \times AB'$, *area* $CD =$ *circ.* $OR \times CD'$.

Fig. 203. 645. *Corollario.* Dunque se $ABCDEF$ fosse la metà del perimetro d' un poligono regolare d' un doppio numero di lati inguisachè AF congiungesse due vertici opposti A, F di esso poligono, e passasse pel suo centro O, l' area della superficie generata dal rivolgimento di $ABCDEF$

intorno ad AF sarebbe uguale al prodotto della circonferenza iscritta nel poligono stesso moltiplicata per AF.

LEMMA II.

646. *La differenza di due superfici generate dalle porzioni di due poligoni regolari l'una ABCD circoscritta, l'altra* abcd *iscritta in un arco* ad, *le quali girano attorno a quel diametro di tale arco, che passa per una sua estremità* a, *può riuscire minore di qualunque quantità data.* Fig. 204.

Sia OM un raggio dell'arco $abcd$ condotto al punto di contatto M del lato AB coll'arco medesimo; questo raggio sarà pure perpendicolare ad ab; DD', dd' sieno due perpendicolari abbassate dai punti D, d sopra OA; avremo

$$\text{area } ABCD = \text{circ. } OM \times AD'$$
$$\text{area } abcd = \text{circ. } Om \times ad';$$

ciò posto si osservi che

$$\text{circ. } OM > \text{circ. } Om,$$

e che

$$AD' = D'a + aA, \quad ad' = D'a + d'D';$$

e siccome

$$dD : d'D' :: dO : d'O,$$

quando si rifletta che $dO > d'O$, ne inferiremo essere dD ovvero $aA > d'D'$, e conseguentemente $AD' > ad'$. Donde risulta che dei due rettangoli *circ.* $OM \times AD'$, e *circ.* $Om \times ad'$, il primo sarà sempre maggiore del secondo.

Ora è da avvertire che quanto più l'arco aMb è piccolo, tanto più è grande Om; cosicchè, moltiplicandosi il numero dei lati dei poligoni, Om tenderà ad uguagliare OM potendo la differenza $OM - Om$ cioè Mm, ed in

conseguenza aA divenire minore di qualunque quantità data; ma

$$OM : Om :: \text{circ. } OM : \text{circ. } Om,$$

dunque anche *circ.* OM tenderà ad uguagliare *circ.* Om, e la differenza *circ.* OM — *circ.* Om potrà essa pure divenire minore di qualunque quantità data. Inoltre dalla predetta proporzione

$$dD : d'D' :: dO : d'O$$

facilmente si deduce (perocchè dO, e $d'O$ ne' successivi cambiamenti de' poligoni non mutano mai) che $d'D'$ dee necessariamente decrescere mentre decresce dD ovvero aA, potendo perciò anche $d'D'$ divenire piccola quanto vogliamo; donde segue che AD' tenderà ad uguagliare ad', e che la differenza $AD' - ad'$ potrà divenire minore di qualunque quantità data. Dunque finalmente la differenza *circ.* $OM \times AD'$ — *circ.* $Om \times ad'$ potrà riuscire piccola quanto vogliamo, considerando questa differenza come quella di due rettangoli i quali e nelle altezze e nelle basi possono differire d'una quantità minore di qualunque quantità data.

647. *Scolio I.* La zona sferica generata dall'arco ad è tutta racchiusa fra le superfici generate dalle linee $ABCD$, $abcd$. Ora moltiplicandosi i lati che costituiscono queste linee, il numero delle circonferenze di contatto della zona colla superficie iscritta, e colla superficie circoscritta, cioè il numero delle circonferenze descritte dai punti a, b, c, ec., M, N, P, ec., si farà sempre più grande, mentrechè la superficie iscritta crescerà e la superficie circoscritta decrescerà. Ed è da osservare che nel tempo in cui la superficie iscritta, e la retta Om crescono i punti m, n, p, ec., si approssimano alla zona; e che nel tempo in cui la superficie circoscritta, e la retta OA decrescono anche i punti A, B, C, ec., si approssimano alla zona medesima. Da ciò si fa manifesto che la superficie circoscritta e la iscritta

tendono a confondersi colla zona; che l'una è maggiore, l'altra è minore di essa; finalmente che queste due superfici si possono considerare come due limiti contenenti la zona medesima, i quali possono per loro natura differire d'una quantità piccola quanto vuolsi.

648. *Scolio II.* Per la stessa ragione le superfici generate dai perimetri di due mezzi poligoni $ABCDEF$, $abcdef$ l'uno circoscritto l'altro iscritto nel semicircolo $abfO$ si possono considerare come i limiti della superficie sferica generata dalla semicirconferenza abf. Fig. 206.

TEOREMA XII.

649. ***L'area d'una zona sferica qualunque è uguale al prodotto della circonferenza d'un circolo grande per la sua altezza.***

Sia Z la zona descritta dall'arco ad. Le superfici s, s', descritte dalle linee $ABCD$, $abcd$ sono i limiti di Z *. D'altra parte i rettangoli $circ.\ OM \times AD'$, $circ.\ Om \times ad'$, sono i limiti del rettangolo $circ.\ OM \times ad'$ *. Ma $s = circ.\ OM \times AD'$, $s' = circ.\ Om \times ad'$; dunque la superficie Z, ed il rettangolo $circ\ OM \times ad'$ si trovano ambedue fra i medesimi limiti, cioè fra le due superfici s, s' la cui differenza può riuscire minore di qualunque quantità data; dunque $Z = circ.\ OM \times ad'$. Fig. 204. * 647. * 646.

Passiamo a considerare una zona qualunque a due basi generata dal rivolgimento dell'arco BC intorno al diametro AF. Si conducano le perpendicolari BB', CC' sopra questo diametro; si vedrà che la zona descritta dall'arco BC è la differenza delle due zone descritte dagli archi AC, AB le cui aree sono respettivamente uguali ai prodotti $circ.\ OA \times AC'$, $circ.\ OA \times AB'$; dunque l'area della zona descritta da BC sarà uguale al prodotto $circ.\ OA \times (AC' - AB')$, ovvero $circ.\ OA \times B'C'$. Dunque l'area d'una zona sferica ad una base o a due è Fig. 205.

sempre uguale al prodotto della circonferenza d'un circolo grande moltiplicata per la sua altezza.

650. *Corollario.* Due zone prese in una medesima sfera, o in sfere uguali stanno tra loro come le respettive altezze.

TEOREMA XIII.

Fig. 206. 651. ***L'area della superficie d'una sfera è uguale al prodotto della circonferenza d'un circolo grande pel suo diametro.***

Sia S la superficie della sfera il cui diametro è af. Le superfici s, s' descritte dai perimetri dei mezzi poligoni
* 648. $ABCDEF$, $abcdef$ sono i limiti di S *. I rettangoli poi $circ.\ OM \times AF$, $circ.\ Om \times af$ sono i limiti del rettangolo $circ.\ OM \times af$. Ma $s = circ.\ OM \times AF$, $s' = circ.\ Om \times af$; dunque $S = circ.\ OM \times af$; dunque l'area della superficie d'una sfera è uguale al prodotto della circonferenza d'un circolo grande pel suo diametro.

652. *Corollario I.* L'area d'un circolo grande è uguale alla sua circonferenza moltiplicata per la metà del suo raggio, ovvero per la quarta parte del suo diametro; dunque *la superficie della sfera è quadrupla di quella d'un suo gran circolo.*

653. *Corollario II.* L'area d'una zona qualunque sta a quella della sfera come l'altezza di questa zona sta al diametro.

654. *Corollario III.* Le aree di due sfere stanno fra loro come i quadrati dei respettivi diametri o raggi.

LEMMA I.

655. *Il volume del solido generato dal rivolgimento d'un triangolo qualunque OAB attorno un asse ST condotto nel suo piano da uno de' suoi vertici O è uguale al terzo della superficie generata dal lato AB opposto a questo vertice, moltiplicata per l'altezza OP del triangolo di cui AB si prende per base.* Fig. 207.

1.° Supponiamo in primo luogo che l'asse ST si confonda col lato OA. Dal vertice B si conduca la perpendicolare BB' sopra l'asse medesimo; e dal vertice O altra perpendicolare OP sopra la base AB del triangolo. Indicando con *vol.* OAB il volume generato dal triangolo OAB, con *sup.* AB la superficie generata da AB, avremo

$$\begin{aligned} vol.\ OAB &= vol.\ ABB' + vol.\ OBB' \\ &= \tfrac{1}{3}\ sup.\ BB' \times AB' + \tfrac{1}{3}\ sup.\ BB' \times OB' \\ &= \tfrac{1}{3}\ sup.\ BB' \times AO. \end{aligned}$$

Ma

$$sup.\ BB' : sup.\ AB :: BB' : AB\ ^{*},$$ * 607.

ed inoltre, stante la similitudine de' triangoli ABB', APO,

$$BB' : AB :: OP : AO,$$

perciò

$$sup.\ BB' : sup.\ AB :: OP : AO;$$

donde si ricava

$$sup.\ BB' \times AO = sup.\ AB \times OP;$$

e finalmente

$$vol.\ OAB = \tfrac{1}{3}\ sup.\ AB \times OP.$$

È da osservare che la perpendicolare OP potrebbe cadere fuori del triangolo, o confondersi col lato OB, ma il risultato non ne sarebbe in modo alcuno alterato.

2.° Supponiamo che l'asse sia incontrato in un punto R dalla base AB del triangolo sufficientemente prolungata. In virtù della precedente dimostrazione avremo Fig. 208.

$$\begin{aligned} vol.\ OAB &= vol.\ ORB - vol.\ ORA, \\ &= \tfrac{1}{3}\ sup.\ RB \times OP - \tfrac{1}{3}\ sup.\ RA \times OP, \\ &= \tfrac{1}{3}\ sup.\ AB \times OP. \end{aligned}$$

Fig. 209. 3.° Supponiamo finalmente che l'asse sia parallelo alla base AB del triangolo. Si abbassi in questo caso anche la perpendicolare AA' sopra l'asse ST; sarà $AA' = BB' = OP$ per cui avremo

$$\begin{aligned} vol.\ OAB &= vol.\ A'ABB' - vol.\ OAA' - vol.\ OBB', \\ &= sup.\ OP \times A'B' - \tfrac{1}{3}\ sup.\ OP \times OA' - \tfrac{1}{3}\ sup.\ OP \times OB', \\ &= sup.\ OP \times A'B' - \tfrac{1}{3}\ sup.\ OP \times A'B', \\ &= \tfrac{2}{3}\ sup.\ OP \times A'B'; \end{aligned}$$

or poichè

$$sup.\ OP : sup.\ AB :: \tfrac{1}{2}\ OP : A'B',$$

sarà

$$sup.\ OP \times A'B' = \tfrac{1}{2}\ sup.\ AB \times OP;$$

dunque

$$vol.\ OAB = \tfrac{1}{3}\ sup.\ AB \times OP.$$

LEMMA II.

Fig. 201. 656. *Il volume del solido generato dal rivolgimento d'un settore poligono regolare $OABCD$ attorno un asse ST che passa pel suo centro O è uguale al terzo della superficie generata dalla linea $ABCD$ che serve di base al settore moltiplicata pel raggio OP del circolo iscritto.*

Conducendo le perpendicolari OP, OQ, OR dal centro O sopra i lati AB, BC, CD avremo*
* 655

$$\begin{aligned} vol.\ OAB &= \tfrac{1}{3}\ sup.\ AB \times OP, \\ vol.\ OBC &= \tfrac{1}{3}\ sup.\ BC \times OQ, \\ vol.\ OCD &= \tfrac{1}{3}\ sup.\ CD \times OR; \end{aligned}$$

ma $OP = OQ = OR$, dunque

$$vol.\ OABCD = \tfrac{1}{3}\ sup.\ ABCD \times OP.$$

657. *Scolio.* Il lato AB ove la sua estremità A fosse sull'asse produrrebbe un cono, e se alcuno dei lati della linea $ABCD$ per es. CD fosse parallelo all'asse questo lato produrrebbe un cilindro, ma sempre si verificherebbe la precedente proposizione siccome è facile dimostrare. Fig. 202.

658. *Corollario.* Dunque il volume generato dal rivolgimento del semipoligono $ABCDEF$ attorno ad AF è uguale alla superficie descritta dal suo perimetro $ABCDEF$ moltiplicata pel raggio del circolo iscritto. Fig. 203.

LEMMA III.

659. ***La differenza de' solidi generati dai due settori poligoni regolari $OABCD$, $Oabcd$, l'uno circoscritto l'altro iscritto nel settore circolare Oad, che girano attorno ad un asse che passa pel suo centro O può riuscire minore di qualunque quantità data.*** Fig. 204.

Sia Om perpendicolare al lato ab della porzione di poligono regolare $abcd$ iscritta; sarà

$$vol.\ OABCD = \tfrac{1}{3}\ sup.\ ABCD \times OM,$$
$$vol.\ Oabcd = \tfrac{1}{3}\ sup.\ abcd \times Om;$$

ma abbiamo dimostrato che moltiplicandosi i lati delle linee $ABCD$, ed $abcd$, *sup.* $ABCD$ tenderà ad uguagliare *sup.* $abcd$, mentre l'apotema OM tenderà ad uguagliare l'apotema Om, cosicchè le differenze $OM - Om$, e *sup.* $ABCD$ — *sup.* $abcd$, potranno a un tempo divenire minori di qualunque quantità data; dunque anche il prodotto $\frac{1}{3}$ *sup.* $ABCD \times OM$ tenderà ad uguagliare il prodotto $\frac{1}{3}$ *sup.* $abcd \times Om$, e la differenza $\frac{1}{3}$ *sup.* $ABCD \times OM$ — $\frac{1}{3}$ *sup.* $abcd \times Om$, potrà riuscire piccola quanto vogliamo; perchè è chiaro che tal differenza è da considerarsi come quella di due piramidi le quali e nelle basi e nelle altezze, possono differire d'una quantità minore di qualunque quantità data.

660. *Scolio I.* Manifestamente il settore sferico è minore del solido generato dal settore poligono circoscritto, e maggiore del solido generato dal settore poligono iscritto; dunque dal precedente lemma risulta che moltiplicandosi i lati delle linee $ABCD$, $abcd$, il solido generato dal settore poligono circoscritto, ed il solido generato dal settore poligono iscritto tendono a confondersi col settore sferico, e che questi due solidi si debbono considerare come due limiti contenenti il settore sferico potendo questi limiti differire per loro natura d'una quantità piccola quanto vuolsi.

Fig. 206. 661. *Scolio II.* Per la stessa ragione i volumi generati da due mezzi poligoni $ABCDEF$, $abcdef$ l'uno circoscritto l'altro iscritto nel semicircolo abf si possono considerare come i limiti della sfera generata dal semicircolo stesso.

TEOREMA XIV.

662. ***Il volume d'un settore sferico è uguale all' area della calotta che gli serve di base moltiplicata pel terzo del raggio.***

Fig. 204. Sia V il volume del settore sferico generato dal settore circolare Oad; Z la zona che gli serve di base; v, v' sieno i volumi generati da' settori poligoni l'uno circoscritto, l'altro iscritto nel settore circolare Oad; z, z' le superfici l'una circoscritta, l'altra iscritta alla zona Z; $R = OM$ l'apotema di z, ossia il raggio della zona Z; $r = Om$ l'apotema di z'.

* 660. I volumi v, v' sono i limiti del volume V*. D'altra parte i prodotti $\frac{1}{3} z \times R$, $\frac{1}{3} z' \times r$ sono i limiti del prodotto $\frac{1}{3} Z \times R$. Ma $v = \frac{1}{3} z \times R$, $v' = \frac{1}{3} z \times r$; dunque il volume V della zona, ed il prodotto $\frac{1}{3} Z \times R$ esprimente il volume di una piramide di cui Z è la base, R l'altezza, si trovano ambedue fra i medesimi limiti v, v' la cui differenza può riuscire minore di qualunque quantità data; dunque $V = \frac{1}{3} Z \times R$.

Fig. 205. 663. *Corollario.* Il volume del segmento sferico generato dal mezzo segmento circolare ABB' si otterrà togliendo dal settore sferico descritto dal settore circolare ABO,

quello del cono descritto dal triangolo $BB'O$. Rispetto al segmento sferico a due basi descritto dalla porzione di semicircolo $BB'C'C$ dovremo osservare che esso è la differenza de' segmenti descritti dai mezzi segmenti circolari ACC', ABB'.

TEOREMA XV.

664. *Il volume della sfera è uguale alla sua superficie* Fig. 206.
moltiplicata pel terzo del suo raggio.

Sia V il volume della sfera generata dal semicircolo abf; S la sua superficie; v, v' sieno i volumi generati dai mezzi poligoni l'uno circoscritto l'altro iscritto nel semicircolo abf; s, s' le loro superfici; $R = OM$ l'apotema di s, $r = Om$ l'apotema di s'.

I volumi v, v' sono i limiti del volume V*. D'altra * 661.
parte i prodotti $\frac{1}{3} s \times R$, $\frac{1}{3} s' \times r$ sono i limiti del prodotto $\frac{1}{3} S \times R$. Ma $v = \frac{1}{3} s \times R$, $v' = \frac{1}{3} s' \times r$; dunque il volume V della sfera, ed il prodotto $\frac{1}{3} S \times R$ si trovano ambedue fra i medesimi limiti v, v' la cui differenza può riuscire minore di qualunque quantità data; dunque $V = \frac{1}{3} S \times R$.

665. *Corollario I.* L'area della sfera abbiamo veduto essere uguale al quadruplo dell'area d'uno dei suoi grandi circoli; dunque il volume della sfera è uguale ai quattro terzi dell'area d'uno dei suoi grandi circoli moltiplicata pel suo raggio. Ma poichè il raggio è uguale alla metà del diametro sarà *il volume della sfera uguale ancora ai due terzi dell'area d'uno dei suoi grandi circoli moltiplicata pel suo diametro.*

666. *Corollario II.* I volumi di due sfere stanno fra loro come i cubi dei loro raggi, o come i cubi dei loro diametri. Infatti le aree delle sfere stanno fra loro come i quadrati dei raggi*; perciò queste aree moltiplicate pe' raggi * 654
staranno fra loro come i cubi dei raggi; conseguentemente staranno pure come i cubi dei diametri.

TEOREMA XVI.

667. *L'area della sfera sta all'area della superficie totale del cilindro circoscritto come 2 sta a 3. I volumi di questi due solidi stanno fra loro nel medesimo rapporto.*

Fig. 210. Sia $CDFE$ un quadrato circoscritto al circolo $AGBH$; AB sia un diametro di questo circolo perpendicolare a CD; dal simultaneo rivolgimento del semicircolo AGB e del semiquadrato $AFDB$ intorno ad AB potremo ottenere una sfera, ed un cilindro ad essa circoscritto.

La superficie convessa di tal cilindro è uguale alla superficie della sfera; essendo l'una e l'altra espressa dal prodotto *circ.* $OG \times AB$. Ma la superficie della sfera è uguale
* 652. a quattro circoli grandi*; dunque se alla superficie convessa del cilindro si uniscono le due basi che equivalgono a due circoli grandi della sfera, la superficie totale del cilindro risulterà uguale a sei circoli grandi; dunque la superficie della sfera sta alla superficie del cilindro circoscritto come 4 sta a 6, o come 2 sta a 3.

Venendo alla considerazione dei volumi osserveremo esse-
* 665. re quello della sfera espresso dal prodotto $\frac{2}{3}$ *sup.* $OG \times AB$*, mentre quello del cilindro lo è dal prodotto *sup.* $OG \times AB$; donde rilevasi essere il volume della sfera i $\frac{2}{3}$ del volume del cilindro; dunque il volume della sfera sta al volume del cilindro come 2 sta a 3.

E da ciò risulta che i volumi di questi due corpi stanno fra loro nella ragione delle aree delle loro superfici.

PROBLEMI

RELATIVI AI CINQUE ULTIMI LIBRI.

PRINCIPJ DI GEOMETRIA DESCRITTIVA.

668. La posizione d'un punto M situato sopra un piano è nota quando sono date le sue distanze MM', MM'' dai lati AB, AC d'un angolo retto fra i quali esso punto è contenuto. Infatti sopra i lati AB, AC si prendano le parti AM', AM'' respettivamente uguali alle date distanze, MM', MM' e dai punti M', M'' si conducano le linee $M'M$, $M''M$ respettivamente parallele ad AC, ed AB; il punto proposto si dovrà trovare sopra $M'M$, perocchè essa è il luogo geometrico di tutti i punti che si trovano alla distanza MM'' da AC; esso si troverà pure sopra $M''M$ come luogo geometrico di tutti i punti che si trovano alla distanza MM' da AB; dunque il punto proposto dovendo esser comune alle due rette $M'M$, $M''M$ si troverà nella loro intersezione M. Fig. 211.

669. La posizione d'un punto M comunque situato nello spazio è nota quando sono date le sue distanze MM', MM'', MM''' da tre piani BAC, BAD, CAD scambievolmente perpendicolari. Infatti mediante le distanze date MM'', MM''' determineremo sul piano BAC il punto M'; dipoi da M' condurremo una perpendicolare al medesimo piano, e prenderemo di essa una parte $M'M$ uguale alla terza distanza; M sarà il punto proposto. Fig. 212.

670. Il piede della perpendicolare abbassata da un punto dato sopra un piano chiamasi *projezione ortogonale*, o semplicemente *projezione* di questo punto. Le projezioni del punto M sopra i piani BAC, BAD, CAD sono respettivamente M', M'', M'''.

671. I piani sopra cui si projettano i punti dello spazio si chiamano *piani di projezione*, oppure *piani coordinati*.

672. La projezione d'una linea retta sopra un piano è l'intersezione di questo piano con un altro, ad esso perpendicolare, e che passa per la retta proposta. Perciò la projezione d'una linea retta sopra un piano è una seconda linea retta costituita delle projezioni di tutti i suoi punti; la quale si può agevolmente determinare congiungendo le projezioni di due punti qualunque di essa.

673. *Rette projettanti*, *piani projettanti* diconsi le linee rette, ed i piani mediante i quali si fa la projezione dei punti, e delle linee rette.

674. Un punto è interamente determinato dalle sue projezioni sopra i piani coordinati. Perocchè conducendo per ogni projezione una perpendicolare al piano cui appartiene, il punto dovrà trovarsi sopra ciascuna di esse perpendicolari; conseguentemente questo punto sarà quello dove le perpendicolari medesime s'incontrano.

675. Una linea retta è interamente determinata dalle sue projezioni sopra i piani coordinati. Infatti inalzando sulle projezioni di questa retta dei piani respettivamente perpendicolari ai piani di projezione, ciascuno di essi conterrà la retta medesima; dunque essa sarà la comune intersezione di questi piani.

676. È manifesto che una delle tre projezioni d'un punto, o d'una retta su i piani coordinati dipende necessariamente dalle altre due; ragione per cui si considereranno in appresso due soli piani di projezione, uno de' quali si chiamerà *orizzontale*, l'altro *verticale*, ritenendo perciò la denominazione di *projezione orizzontale* ad indicare ciascuna di quelle che avranno luogo sul piano *orizzontale*, e la denominazione di *projezione verticale* per ciascuna di quelle che si faranno sul piano verticale, ove anche esse non sieno dirette verticalmente; perocchè la parola *verticale* è annessa all'idea d'una linea retta perpendicolare al piano orizzontale, mentre la projezione verticale d'una linea il più delle volte sarà rispetto al piano medesimo una obliqua.

677. Ciò posto supponiamo che il piano verticale si

abbassi sul piano orizzontale rivolgendosi a guisa di cerniera intorno alla linea AB secondo la quale questi piani si tagliano; le projezioni orizzontali e verticali delle linee verranno tutte a situarsi sopra un medesimo piano orizzontale; nondimeno la posizione di queste linee nello spazio si potrà agevolmente dedurre dalla stessa figura orizzontale che se ne ottiene. Infatti supponiamo che nella figura in Fig. 213. prospettiva $M'N'$, $M''N''$ sieno le projezioni della retta MN, l'una orizzontale, l'altra verticale; abbassando il piano AC per applicarlo sul piano KL i punti M'', N'' verranno in M''', N''' descrivendo gli archi $M''M'''$, $N''N'''$ ciascuno de' quali sarà uguale alla quarta parte della circonferenza; la projezione $M''N''$ diverrà $M'''N'''$, e le rette $M''m$, $N''n$ perpendicolari ad AB diverranno $M'''m$, $N'''n$, e si troveranno sopra i prolungamenti di $M'm$, $N'n$. Or se sarà dato sul piano orizzontale KL il trapezio $M'''N'''mn$, è chiaro che rivolgendo questo trapezio intorno ad AB, sinchè i suoi lati $M'''m$, $N'''n$ abbiano descritta la quarta parte d'una circonferenza esso potrà riacquistare la sua situazione primitiva; allora la posizione di MN si determinerà nel modo che abbiamo indicato *. * 675.

678. La linea retta AB esprimente l'intersezione dei piani di projezione si chiama *linea di terra*.

679. È facile vedere che nella figura piana KL le projezioni M', M''' d'un punto M comunque situato nello spazio, si trovano ambedue sopra una perpendicolare $M'M'''$ alla linea di terra.

680. La projezione d'ogni punto situato sopra uno dei piani di projezione si troverà su la linea di terra.

681. Quando una linea incontrerà i piani di projezione i punti d'incontro di questa linea con essi piani si chiameranno *tracce* della linea medesima. Perciò le *tracce* d'una linea sono due punti le cui projezioni si trovano su la linea di terra.

682. Quando un piano incontrerà i piani di projezione le intersezioni risultanti si chiameranno *tracce* di esso piano. Evidentemente le tracce d'un piano sono due linee rette le cui projezioni si trovano su la linea di terra.

683. Se una retta è parallela ad uno dei piani di projezione, la sua projezione sopra l'altro piano sarà parallela
* 405. alla linea di terra *.

684. Se una data retta è parallela a un tempo ai due piani di projezione lo sarà pure alla linea di terra. Infatti una parallela condotta da un punto della linea di terra alla retta data dovrebbe a un tempo trovarsi su i due piani di projezione; dunque sarebbe la medesima linea di terra.

685. Le projezioni d'una retta parallela ai piani di pro-
* 402. jezione sono parallele fra loro *.

686. Quando una linea retta è in un piano perpendicolare alla linea di terra, le sue projezioni sono ambedue
* 425. perpendicolari a questa linea *.

Fig. 214. 687. Quando due linee rette si tagliano le loro projezioni orizzontali $M'N'$, $P'Q'$ e le verticali $M''N''$, $P''Q''$ dovranno tagliarsi in due punti O', O'' i quali si troveranno sopra
* 679. una stessa perpendicolare alla linea di terra *, e saranno le projezioni del punto d'intersezione delle rette date. Ove poi le projezioni soddisfacciano a questa condizione le rette evidentemente si taglieranno.

Fig. 215. 688. Se due rette MN, PQ sono parallele le loro projezioni orizzontali $M'N'$, $P'Q'$ saranno parallele; lo
* 405. saranno pure le projezioni verticali $M''N''$, $P''Q''$ *.

689. Reciprocamente se le projezioni orizzontali $M'N'$, $P'Q'$ di due rette MN, PQ sono parallele, e lo sono pure le projezioni verticali $M''N''$, $P''Q''$ queste due rette saranno parallele fra loro. Infatti se si suppone che per un punto M della intersezione dei due piani MN', MN'' si conduca una parallela a PQ sarà facile il vedere come tal parallela debba trovarsi a un tempo sopra questi due piani, per cui essa non potrà essere che la loro medesima intersezione.

Fig. 216. 690. Ma se due projezioni soltanto, per esempio le projezioni verticali $M''N''$, $P''Q''$ fossero parallele, tali non essendo le orizzontali $M'N'$, $P'Q'$, evidentemente le due rette MN, PQ non si troverebbero in un medesimo piano, e perciò non sarebbero parallele; i loro piani paralleli sa-
* 415. rebbero orizzontali *; ed il punto d'intersezione O' delle projezioni orizzontali sarebbe la projezione della loro comune

perpendicolare OO la quale è in tal caso perpendicolare al piano orizzontale.

691. Se le projezioni si taglieranno due a due ne' punti Fig. 217.
O', O'' sopra due diverse perpendicolari $O'o'$, $O''o''$ alla linea di terra, le due linee rette MN, PQ non s' incontreranno, non saranno parallele, e la loro comune perpendicolare non sarà perpendicolare ad alcuno dei piani di projezione

692. Potrebbe avvenire che le rette fossero respettivamente situate in piani perpendicolari alla linea di terra, o che fossero ambedue situate in un medesimo piano perpendicolare esso pure alla linea di terra; in questi casi la posizione delle rette medesime non riuscirebbe completamente determinata dalla loro projezione su i piani dati; ragione per cui converrebbe ad essi sostituirne altri due.

693. Venendo alla considerazione d' un piano avvertiremo che la sua posizione nello spazio sarà determinata quando si conosceranno tre punti suoi o due sue rette. Perciò il più semplice mezzo con che si può fissare la posizione d' un piano consiste nell' indicare le sue tracce coi piani di projezione. Così nella fig. 218 le rette Mn, Pn rappresente- Fig. 218.
ranno le tracce d' un piano che chiameremo MnP.

È da osservare che le tracce d' un piano hanno per projezione comune la linea di terra.

694. La traccia orizzontale, ove fosse perpendicolare alla linea di terra, sarebbe pure perpendicolare al piano verticale *; conseguentemente anche il piano proposto sa- * 427.
rebbe perpendicolare al piano verticale medesimo *. * 425.

695. La traccia verticale ove fosse perpendicolare alla linea di terra sarebbe altresì perpendicolare al piano orizzontale *; ed il piano proposto sarebbe anch' esso perpendi- * 427.
colare al piano orizzontale *. * 425.

696. Se le due tracce fossero a un tempo perpendicolari alla linea di terra, il piano proposto sarebbe perpendicolare a questa linea, e ai due piani di projezione *. * 426.

697. Se le due tracce fossero parallele alla linea di terra anche il piano proposto sarebbe parallelo alla linea di terra *. * 405.

698. Facile è vedere che una di queste tracce non può

essere parallela alla linea di terra non essendolo nel tempo stesso anche l' altra.

699. Ogni linea retta situata in un piano, ove non sia parallela alle tracce di questo piano, prolungata sufficientemente dovrà incontrare le tracce medesime.

700. Reciprocamente ogni retta sarà situata in un piano quando essa avrà due punti l' uno su la traccia orizzontale,
* 52. l' altro su la traccia verticale di questo piano *.

Fig. 218. 701. Un punto Q apparterrà ad un piano quando la retta QM che congiunge questo punto con un punto M di una delle tracce di tal piano passerà per un punto P dell' altra traccia.

Fig. 219. 702. Ove una retta MN condotta in un piano $MNQP$ sia parallela ad una delle tracce di questo piano, per esempio alla traccia verticale, la sua projezione verticale sarà pure
* 405. parallela a questa traccia *, e la sua projezione orizzontale sarà parallela alla linea di terra.

Fig. 220. 703. Immaginiamo ora due piani MnP, QrS le cui tracce corrispondenti si taglino respettivamente in due punti H, K; questi due punti saranno manifestamente comuni ai due piani, e conseguentemente la retta HK rappresenterà la loro intersezione.

Fig. 221. 704. Se le tracce orizzontali nM, rQ dei due piani fossero parallele, e le verticali si tagliassero in un punto K, i due piani si taglierebbero secondo una retta parallela al piano orizzontale la quale passerebbe pel punto K. La projezione verticale KH'' della intersezione sarebbe parallela alla linea di terra, e la sua projezione orizzontale kH' sarebbe parallela alle tracce nM, rQ.

Fig. 222. 705. Se le tracce orizzontali nM, rQ fossero parallele fra loro, e tali fossero ancora le tracce verticali nO, rS i due piani sarebbero fra loro paralleli. Ma si esclude il caso
Fig. 223. nel quale le quattro tracce MN, PQ, RS, TU sono tutte parallele alla linea di terra; potendo allora come chiaramente si vede non essere altrimenti paralleli i due piani.

Fig. 222. 706. Resta che si riferiscano ai piani di projezione un piano ed una linea retta. Se una retta di cui S e Q sono le tracce sarà parallela ad un piano MnP converrà che questa

retta si possa situare in un piano QrS parallelo al piano proposto; or poichè le tracce dei piani paralleli sopra ciascun piano di projezione sono paralleli, perciò conducendo pei punti S e Q due rette respettivamente parallele ad nM, nP, queste due rette si dovranno incontrare in uno stesso punto r della linea di terra. Tale è la condizione di parallelismo della retta col piano; ed infatti quando questa condizione si verifichi le rette rQ, rS saranno le tracce d'un piano QrS parallelo al piano proposto MnP su cui sarà situata la retta data.

707. Se una retta ST sarà perpendicolare ad un piano MnP ogni piano $SS'HK$ condotto secondo questa retta dovrà essere perpendicolare al piano proposto MnP; conseguentemente posto che $SS'HK$ sia il piano projettante della retta ST sul piano orizzontale esso sarà a un tempo perpendicolare al piano proposto MnP, ed al piano orizzontale ABM; dunque la comune intersezione Mn de' due piani MnP, ABM, ossia la traccia orizzontale del piano proposto, sarà perpendicolare al piano projettante $SSHK$*; dunque la traccia orizzontale Mn è perpendicolare alla projezione orizzontale ST. Si ragionerebbe in ugual modo quanto alla projezione verticale Dunque quando una retta è perpendicolare ad un piano le projezioni di questa retta sono respettivamente perpendicolari alle tracce del piano. Fig. 224. * 429.

708. Reciprocamente una linea retta ed un piano saranno scambievolmente perpendicolari quando le projezioni di questa linea sul piano orizzontale, e sul piano verticale, saranno respettivamente perpendicolari alle tracce del piano proposto Infatti le tracce del piano proposto sono allora perpendicolari ai piani projettanti della retta, e questi sono perciò perpendicolari al piano proposto; conseguentemente il piano proposto è perpendicolare alla intersezione dei piani projettanti, cioè alla retta stessa.

709. Se poi la retta ed il piano non soddisfaranno alle condizioni del parallelismo nè a quelle della perpendicolarità la retta sarà obliqua al piano.

PROBLEMA I.

710. *Per due punti dati nello spazio condurre una linea retta.*

Fig. 225. Ricercheremo le tracce di tal retta su i piani coordinati; ed a tale uopo sieno M', N' le projezioni orizzontali, M'', N'' le projezioni verticali dei punti dati; le rette $M'N'$, $M''N''$ saranno le projezioni della retta richiesta.

Osservando che le projezioni di tutti i punti d'una linea retta sono in linea retta, facilmente si vedrà che la traccia orizzontale della retta richiesta dovrà essere un punto di $M'N'$; inoltre essendo esso situato sul piano orizzontale la sua projezione verticale si troverà su la linea di terra; e siccome questo punto deesi pur trovare sopra $M''N''$ segue frattanto che la projezione verticale della traccia orizzontale è il punto p della intersezione di AB con $M''N''$; dunque la traccia medesima sarà il punto P' della intersezione di $M'N'$ colla perpendicolare condotta pel punto p ad AB.

Per la stessa ragione avendo prolungato $M'N'$ sino all'incontro della linea di terra nel punto q la traccia verticale della retta sarà il punto Q' della intersezione di $M''N''$ colla perpendicolare condotta pel punto q ad AB.

PROBLEMA II.

711. *Trovare la distanza delle due tracce d'una linea retta, ossia la parte di tale linea intercetta fra i due piani di projezione.*

Questa parte è manifestamente l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo avente i lati dell'angolo retto respettivamente uguali a pQ', e pP', oppure a qP', e qQ'; cosicchè se fatto centro in p descriveremo col raggio pQ' l'arco $Q's$, la retta $P's$ sarà la distanza richiesta.

PROBLEMA III.

712. *Determinare la lunghezza d'una linea retta essendo date le projezioni M', M'', N', N'', delle sue estremità.* Fig. 225.

Questa lunghezza, come facilmente si vede, è l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo avente i lati dell'angolo retto respettivamente uguali ad $M'N'$ ed $N''K$ differenza delle rette mM'', nN'', oppure ad $M''N''$ ed $M'H$ differenza delle rette mM', nN'.

PROBLEMA IV.

713. *Condurre un piano per due rette che si tagliano nello spazio.*

La posizione d'un piano è determinata dalle tracce di questo piano su i piani di projezione. Perciò dovremo ricercare le tracce delle rette date; lo che si farà nel modo indicato nel Probl. I.*; la retta che congiungerà le loro * 710.
tracce orizzontali sarà la traccia orizzontale del piano richiesto; la retta che congiungerà le loro tracce verticali ne sarà la traccia verticale.

714. *Scolio.* Le tracce così determinate del piano si debbono incontrare su la linea di terra; ciò somministra il mezzo di verificare l'esattezza della costruzione.

PROBLEMA V.

715. *Condurre un piano per tre punti dati.*

Pei punti dati presi due a due si condurranno delle rette; ed a far ciò avremo ricorso al Probl. I; allora il problema proposto sarà ridotto ai termini del Probl. IV.

716. *Scolio.* Tre delle sei tracce dei punti dati bastano

a determinare la posizione del piano; ciascuna delle altre somministra il mezzo di verificare la costruzione.

PROBLEMA VI.

717. *Da un punto dato condurre una perpendicolare ad una retta data.*

Facendo passare un piano pel punto dato, e per la data retta il problema proposto sarà ridotto ad un quesito di
* 346. geometria piana *.

PROBLEMA VII.

Fig. 226. 718. *Trovare il punto d'incontro d'un piano con una linea retta.*

Cercheremo l'intersezione d'uno dei piani projettanti della retta data col piano proposto; perocchè questa intersezione, dovendosi trovare a un tempo sopra i due piani medesimi, incontrerà la linea data nel punto dove essa taglia il piano proposto. Sia MnP il piano proposto; sH, tK sieno le projezioni della retta; PsM sarà il piano projettante verticale della retta medesima; M e P saranno evidentemente due punti della intersezione di questo piano col piano proposto; e perciò Pm sarà la projezione verticale di questa intersezione, e Q'' la projezione verticale del punto d'incontro della intersezione indicata colla linea data.

Ora abbassando sopra AB la perpendicolare $Q''Q'$, essa determinerà sopra sH il punto Q' projezione orizzontale del punto d'incontro suddetto.

Adunque Q', Q'' sono le projezioni del punto d'incontro d'un piano con una linea retta.

PROBLEMA VIII.

719. ***Per un punto dato condurre una retta perpendicolare ad un piano dato.***

Se dalle projezioni H', H'' del punto dato si abbassano respettivamente sopra le tracce nM, nP del piano dato le perpendicolari $H's$, $H''t$, esse saranno le projezioni della perpendicolare richiesta. Fig. 227.

720. *Scolio.* Il punto d'incontro della perpendicolare col piano si potrà trovare mediante la costruzione indicata al § 718. Quindi si potrà agevolmente determinare la lunghezza della perpendicolare medesima.

PROBLEMA IX.

721. *Costruire un piano essendo date le sue tracce, cioè trovare i punti che in esso piano corrispondono a dei punti dati del piano orizzontale.* Fig. 228.

Sieno qP, qR le date tracce del piano, ed M' sia la projezione orizzontale di quel punto M di esso piano che deesi determinare.

Manifestamente ogni piano verticale condotto per M' dovrà passare pel punto M. Or si concepisca un piano verticale parallelo alla traccia qP; le intersezioni di questo piano col piano di projezione verticale, col piano di projezione orizzontale, e col piano da costruirsi saranno respettivamente rappresentate dalle rette nN, nM', ed NM la prima perpendicolare alla linea di terra, le altre due parallele alla traccia qP. Frattanto dovendo nN essere uguale ad $M'M$ è chiaro che se dopo avere condotta $M'n$ parallela a qP, ed nN perpendicolare ad AB, condurremo da M' una perpendicolare ad AB, e da N una parallela ad AB l'incontro M'' di queste due rette sarà la projezione verticale del punto richiesto: cosicchè mM'' rappresenterà la sua altezza al di sopra del piano orizzontale.

PROBLEMA X.

Fig. 228. 722. *Trovare l'angolo che un dato piano fa con ciascuno dei piani di projezione.*

Dal punto M si abbassi la perpendicolare MK sopra qP, e si tiri $M'K$; l'angolo MKM' sarà quello che si cerca. Laonde prendasi un punto M' a piacere sul piano orizzontale, e da questo punto si abbassi sopra qP la perpendicolare $M'T$; cerchisi come nel problema precedente la projezione verticale M'' del punto di cui M' è la projezione orizzontale, e prendasi sopra nK parallela a qP la parte $M'K = mM'' = MM'$, e si tiri TK: ne risulterà l'angolo $M'KT$, il quale sarà l'angolo richiesto.

PROBLEMA XI.

Fig. 229. 723. *Per un punto dato condurre un piano parallelo ad un altro piano dato.*

Le tracce del piano richiesto, dovendo essere parallele alle tracce del piano dato, si potrebbero facilmente condurre ove ne fosse noto un punto; di più se dal punto dato partisse una retta, parallela alla traccia orizzontale del piano dato, questa retta dovendosi trovare tutta intera sul piano richiesto, incontrerebbe in un punto la sua traccia verticale.

Ciò posto sia PqR il piano dato; M', M'' sieno le projezioni del punto dato. Si conduca $M'n$ parallela a qP, e s'inalzi nN'' parallela ed uguale ad mM''; N'' sarà il punto nel quale la linea condotta pel punto dato parallelamente a qP incontrerebbe il piano verticale; questo punto appartiene adunque alla traccia verticale del richiesto piano; dunque la retta rS condotta pel punto N'' parallelamente a qR sarà la stessa traccia verticale di questo piano; e per conseguenza rQ parallela a qP ne sarà la traccia orizzontale.

PROBLEMA XII.

724. ***Per un punto dato condurre un piano perpendicolare ad una retta data.***

Le projezioni della retta data, e le tracce del piano che si ricerca dovendo, sopra ciascun piano di projezione, essere perpendicolari fra loro, segue che ove si giunga a determinare un punto solo di queste tracce, esse si potranno agevolmente descrivere. Fig. 230.

Or sieno Ht, Ks le projezioni della retta data; M', M'' quelle del punto dato: conducasi $M'n$ perpendicolare sopra qP; questa linea $M'n$ sarà parallela alla traccia orizzontale del piano richiesto, e si potrà considerare come la projezione sul piano orizzontale di una linea ad esso parallela, la quale passasse pel punto dato. Se qui adunque si ripeterà la costruzione indicata al § 721. la traccia verticale di questa linea sarà N''; il qual punto N'' apparterrà necessariamente alla traccia verticale del richiesto piano. Talmentechè questa traccia sarà appunto la retta $N''R$ perpendicolare ad sK; e la traccia orizzontale sarà allora la retta qP condotta dal punto q parallelamente ad nM'.

PROBLEMA XIII.

725. ***Essendo dati i tre angoli piani ASB, ASC, BSC, che costituiscono un angolo triedro S, trovare l'angolo diedro che due di questi piani formano tra loro.*** Fig. 231.

Avendo abbassate da un punto qualunque B della costola SB le perpendicolari BA, BC su le costole SA, SC, e la perpendicolare BP sul piano ASC, le rette BA, BC risulteranno anch' esse respettivamente perpendicolari alle costole medesime; inguisachè BAP, BCP saranno gli angoli piani corrispondenti agli angoli diedri formati dai piani ASB, CSB col piano ASC.

Ciò posto si facciano sopra un piano gli angoli ASB', ASC, CSB'' respettivamente uguali agli angoli ASB,

ASC, CSB della figura in rilievo; prendasi $SB' = SB'' = SB$, e dai punti B', B'' si abbassino sopra le linee AS, CS le perpendicolari $B'A$, $B''C$ che s' incontreranno in P. Dal punto A come centro, e col raggio AB' descrivasi la semi-circonferenza $B'bD$; pel punto P conducasi sopra $B'D$ la perpendicolare Pb; allora tirando Ab ne risulterà l' angolo bAP, il quale sarà uguale all' angolo BAP, e misurerà per conseguenza l' angolo diedro dei due piani ASB, ASC. Ciò è chiaro perocchè il triangolo $B'SA$ è uguale al triangolo BSA, ed il triangolo $B''SC$ è uguale al triangolo BSC, ragione per cui il quadrilatero $ASCP$ della figura piana è uguale al quadrilatero $ASCP$ della figura in rilievo. Dunque anche i triangoli APb, APB sono uguali fra loro, e l'angolo $bAP = BAP$. Se nella figura piana il punto P cadesse fra A e B' l'angolo bAD sarebbe ottuso; esso tuttavia misurerebbe l' angolo diedro dei due piani ASB, ASC.

726. *Scolio.* Abbiamo dimostrato che la somma degli angoli piani costituenti un angolo solido è sempre minore
* 410. di quattro angoli retti *, e che in ogni angolo triedro uno qualunque de' suoi tre angoli piani è minore della somma
* 438. degli altri due, e maggiore della loro differenza *. Tre angoli piani potranno adunque costituire un angolo solido ogniqualvolta soddisfaranno a queste condizioni. D' altra parte si scorge che l' indicata costruzione riuscirebbe impossibile quando il punto P non cadesse fra B' e D; ovvero (essendo $B'H$, DK perpendicolari ad SC) quando il terzo angolo dopo i due $B'SA$, ASC non fosse minore di $HSC = B'SC = ASC + B'SA$, e maggiore di $KSC = ASC - ASD = ASC - B'SA$.

PROBLEMA XIV.

Fig. 231. 727. ***Essendo dati due dei tre angoli piani che costituiscono un angolo triedro, e l'angolo che i loro piani formano tra loro trovare il terzo angolo piano.***

I due angoli dati sieno $B'SA$, ASC; dal punto B' preso a piacere sopra SB' si abbassi la perpendicolare $B'A$

sopra SA; quindi si faccia l'angolo bAD uguale all'angolo dato dei due piani dati; e da A come centro, e con raggio uguale ad AB', si descriva un arco che dovrà essere prolungato sinchè incontri Ab in b; allora conducendo da questo punto b la perpendicolare bP sopra $B'D$, e dipoi dal punto P la perpendicolare PC sopra SC, e finalmente tirando SB'' in modo che abbiasi $SB'' = SB'$, l'angolo CSB'' sarà il terzo angolo richiesto.

Infatti se ai tre angoli $B'SA$, ASC, CSB'' si applicasse la costruzione indicata nel precedente problema, troveremmo l'angolo bAD uguale all'inclinazione dei piani $B'SA$, ASC.

PROBLEMI

RELATIVI AI POLIGONI REGOLARI ED AL CIRCOLO.

NOZIONI PRELIMINARI

728. Si chiama *quadrato d'un numero* il prodotto che si ottiene moltiplicando questo numero per se stesso; la quale denominazione è presa dalla Geometria, che c'insegna come ad avere l'area d'un quadrato debbasi moltiplicarne il lato per se stesso. Il quadrato di 3 è 9; lo che s'indica così $3^2 = 9$; nello stesso modo con n^2 s'indica il quadrato del numero n, con $(a+b)^2$ ed $(a-b)^2$ s'indicano quelli della somma, e della differenza de' numeri a, e b.

729. La *radice quadrata* d'un numero è un secondo numero, che moltiplicato per se stesso produce il primo. La radice quadrata del 16 è 4; lo che s'indica scrivendo $\sqrt{16} = 4$; nello stesso modo $\sqrt{n^2} = n$; $\sqrt{(a+b)^2} = a+b$.

730. Nozioni analoghe a queste si danno del *cubo*, e della *radice cubica*. Il cubo d'un numero è il prodotto che si trova moltiplicandone il quadrato pel numero stesso; cioè il prodotto che si trova prendendo esso numero tre volte come fattore. La qual denominazione è presa essa pure dalla Geometria come bene si scorge. Il *cubo* di 3 è 27; lo che s'indica così $3^3 = 27$; viceversa 3 è la *radice cubica* di 27, per cui si scrive $\sqrt[3]{27} = 3$. Conseguentemente $\sqrt[3]{n^3} = n$.

731. L'espressione $\sqrt{m \times n}$ indica la radice quadrata del prodotto $m \times n$, ossia una media proporzionale fra m ed n.

732 Questi modi di scrittura appartengono all'Algebra, e noi li ricordiamo per coloro che allo studio della Geometria non avessero fatto precedere quello di tale scienza. Bensì ne giova avvertire che le cose seguenti richiedono la cognizione de' primi rudimenti del calcolo.

PROBLEMA I.

Fig. 139. 733. *Trovare il rapporto del lato AD del quadrato $ABCD$ al raggio OA del circolo circoscritto.*

Il triangolo AOD rettangolo in O darà

$$\overline{AD}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OD}^2,$$

ovvero $$\overline{AD}^2 = 2 \, . \, \overline{OA}^2;$$

cosicchè sarà $$AD = OA \, . \, \sqrt{2},$$

ed $$AD : OA :: \sqrt{2} : 1;$$

donde si rileva che la seconda potenza del valore numerico del lato del quadrato è doppia della seconda potenza del valore numerico del raggio del circolo circoscritto, e che perciò il valore del lato sta al valore del raggio come $\sqrt{2} : 1$. Per tal modo il lato d'un quadrato è incommensurabile col raggio del circolo circoscritto.

734. *Scolio I.* Si ha pure

$$\overline{AB}^2 = 2 \, . \, \overline{AD}^2$$

e conseguentemente

$$AB : AD :: \sqrt{2} : 1;$$

per cui si può stabilire che la diagonale d'un quadrato è incommensurabile col suo lato.

735. *Scolio II.* Se adunque si avesse $AD = 1$, cioè si prendesse AD per unità di misura lineare, avremmo

$$AB = \sqrt{2}$$

donde si deduce che la radice quadrata del numero 2, come quella di ogni altro numero ancorchè non sia perfetto quadrato, si può esattamente determinare mediante una geometrica costruzione; la Geometria concorre però coll'Aritmetica a dimostrarne l'incommensurabilità.

Abbiasi infatti il quadrato $ACBD$. Da uno de' suoi vertici B come centro, e con un raggio uguale al suo lato descrivasi una mezza circonferenza che tagli la diagonale AB in E, ed il suo prolungamento in F. Prendendo il lato AD per unità di misura lineare avremo, Fig. 132.

$$AB = 1 + AE.$$

Ma $$AE : AD :: AD : AF,$$

ovvero $$AE : 1 :: 1 : 2 + AE,$$

donde $$AE = \frac{1}{2 + AE};$$

dunque

$$AB = \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + AE} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + AE}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + AE}}} = \text{ec.}$$

Per tal modo si troverà sempre un resto comunque si protragga l'operazione, cosicchè il valore di AB essendo espresso da una frazione continua periodica ne dà a conoscere l'incommensurabilità della diagonale del quadrato col suo lato. I valori che si trovano di essa frazione continua secondochè ne piacerà arrestarsi al primo, al secondo, al terzo termine ec., sono 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{29}$ ec.

PROBLEMA II.

Fig. 140. 736. *Trovare il rapporto del lato AC del triangolo equilatero ACE, al raggio del circolo circoscritto.*

Sia B il mezzo dell'arco AC; avremo la corda AB
* 377. uguale al raggio OA*; quindi supponendo che K sia il punto d'intersezione delle rette AC ed OB, dalla losanga $ABCO$ ricaveremo,

* 167. $$4\,\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$$

e quindi $$3\,.\,\overline{OB}^2 = \overline{AC}^2;$$

donde si ha $$AC = OB\sqrt{3},$$

ed $$AC : OB :: \sqrt{3} : 1;$$

il lato del triangolo equilatero è adunque incommensurabile col raggio del circolo circoscritto.

PROBLEMA III.

Fig. 141. 737. *Trovare il valore del lato AB del decagono regolare, prendendo il raggio OA del circolo circoscritto per unità lineare.*

Avendosi

* 379. $$OA : AB :: AB : OA - AB^*,$$

è manifesto che ove si faccia $OA = 1$, risulterà

$$1 : AB :: AB : 1 - AB;$$

e quindi, uguagliando il prodotto de' medj con quello degli estremi,

$$\overline{AB}^2 = 1 - AB,$$

ovvero $$\overline{AB}^2 + AB = 1,$$

ed aggiungendo da ambe le parti la frazione $\frac{1}{4}$,

$$\overline{AB}^2 + AB + \tfrac{1}{4} = \tfrac{5}{4},$$

ovvero $$(AB + \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{5}{4};$$

ed estraendo la radice da ambedue i membri

$$AB + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{5},$$

e finalmente $$AB = \tfrac{1}{2}\sqrt{5} - \tfrac{1}{2}.$$

PROBLEMA IV.

738. *Essendo dati i raggi de' circoli l'uno iscritto, l'altro circoscritto ad un poligono regolare, trovare i raggi del circolo iscritto e del circolo circoscritto ad un altro poligono dello stesso perimetro, e che abbia un numero doppio di lati.* Fig. 233.

Sia AB il semilato del poligono dato, ed O ne sia il centro; OA, ed OB saranno respettivamente i raggi dei circoli l'uno iscritto, l'altro circoscritto ad esso poligono; si prolunghi AO sino all'incontro del circolo circoscritto in C, e conducasi BC; il triangolo BOC sarà isoscele; laonde abbassando la perpendicolare OD sopra BC, si avrà $CD = \frac{1}{2} BC$, e conducendo DE parallela ad AB, si avrà parimente $DE = \frac{1}{2} AB$, ma l'angolo iscritto C è metà di AOB; dunque ove DE fosse il semilato d'un secondo poligono regolare avente per apotema CE l'angolo al centro di questo sarebbe metà di quello del primo; dunque esso avrebbe un numero doppio di lati, e siccome ciascun lato sarebbe metà d'un lato del primo, questi poligoni avrebbero il medesimo perimetro.

Ciò posto si osservi che

$$CE = \tfrac{1}{2} AC = \tfrac{1}{2}(AO + OC) = \tfrac{1}{2}(AO + OB);$$

e che dal triangolo rettangolo COD dove il lato CD è medio proporzionale fra OC e CE, oppure fra OB e CE, si ha $$CD = \sqrt{OB \times CE}.$$

Dunque rappresentando con r, R i raggi dei circoli l'uno iscritto, l'altro circoscritto nel primo poligono, con r', R' i raggi relativi al secondo poligono, il quale ha un numero doppio di lati, sarà

$$r' = \tfrac{1}{2}(r + R), \quad R' = \sqrt{R \times r'},$$

che è quanto dovevasi determinare.

PROBLEMA V.

Fig. 233. 739. *Trovare il rapporto approssimativo della circonferenza al diametro.*

Sia il lato dell'esagono $= 1$, il suo perimetro sarà $= 6$, ed ove AB ne sia il semilato avremo $OB = 1$, ed $OA = \sqrt{(1 - \frac{1}{4})} = \sqrt{\frac{3}{4}}$; se adunque nelle formule precedenti porremo $r = \sqrt{\frac{3}{4}}$, ed $R = 1$, da esse avremo i raggi relativi al decagono il cui contorno sarà esso pure $= 6$. Valendosi poi delle medesime formule, mediante questi nuovi raggi, otterremo i raggi relativi al poligono di ventiquattro lati, avente anch'esso il perimetro $= 6$; e procedendo in tal modo il raggio del circolo iscritto tenderà ad uguagliare quello del circolo circoscritto, e la loro differenza che sempre anderà decrescendo, finirà con non manifestarsi che nelle cifre d'un ordine molto elevato; e per conseguenza il perimetro di uno dei poligoni dell'ultima coppia non differirà sensibilmente dalla circonferenza iscritta o circoscritta; allora sarà noto il raggio del circolo la cui circonferenza è 6; lo che darà il mezzo di determinare il richiesto rapporto.

Ecco il quadro di queste operazioni dove i numeri r, R, r', R', r'', R'' ec., sono stati calcolati prendendo alternativamente la semi-somma, e la media proporzionale.

Numero dei lati	r, ossia raggio del circolo iscritto	R, ossia raggio del circolo circoscritto
6	0,8660254	1,0000000
12	0,9330127	0,9659258
24	0,9494693	0,9576622
48	0,9535657	0,9556118
96	0,9545887	0,9551001
192	0,9548444	0,9549723
384	0,9549083	0,9549403
768	0,9549243	0,9549323
1536	0,9549283	0,9549303
3072	0,9549293	0,9459298
6144	0,9549296	0,9549297

La differenza de' due ultimi raggi si manifesta dopo la sesta cifra decimale, per cui ciascuno di essi ne' limiti di questa approssimazione, si può considerare come uguale al raggio d'un circolo la cui circonferenza è 6; talmentechè la formula $C = 2\pi R$, darà $\pi = \frac{C}{2R} = \frac{6}{2 \times 0,9549296} = 3,141592$ ec. Sviluppando questo valore di π in frazione continua, e ricavandone le frazioni convergenti troveremo primieramente la frazione $\frac{22}{7}$ esprimente il rapporto trovato da Archimede; esso è esatto sino alla seconda cifra decimale inclusive; di poi troveremo la frazione $\frac{355}{113}$ o rapporto dato da Mezio esatto nelle sette prime cifre. Esistono delle vie di calcolo assai più brevi per la determinazione del numero π le quali si fanno palesi nello studio dell' Algebra; nostro ufficio era quello di additarne una che riuscisse agevole ai principianti.

740. *Scolio.* Trovato il valore di π si possono considerare come note tutte le quantità dipendenti dalla circonferenza alcune delle quali sono contenute nelle seguenti formule.

1.° Sia R il raggio di un circolo; la sua area sarà πR^2.* * 540.

2.° Sia R il raggio della base di un cono circolare retto, L il suo lato, A la sua altezza; la sua totale superficie

sarà $\pi RL + \pi R^2 = \pi R(L + R)$; ed il suo volume $\frac{1}{3}\pi R^2 A$.

2.° Sia R il raggio della base di un cilindro circolare retto, A ne sia l'altezza; la sua totale superficie sarà $2\pi RA + 2\pi R^2 = 2\pi R(A + R)$; ed il suo volume $\pi R^2 A$.

3.° Siano R, R' i raggi delle basi d'un tronco di cono, L ed A ne siano respettivamente il lato e l'altezza; la sua totale superficie sarà

$$\pi R^2 + \pi R'^2 + (\pi R + \pi R')L = \pi(R^2 + R'^2 + (R + R')L),$$

ed il suo volume

$$\tfrac{1}{3}\pi R^2 A + \tfrac{1}{3}\pi R'^2 A + \tfrac{1}{3}\pi RR'A = \tfrac{1}{3}\pi A(R^2 + R'^2 + RR').$$

4.° Sia R il raggio d'una sfera, D ne sia il diametro; la sua superficie sarà $4\pi R^2$ ovvero πD^2; il suo volume sarà $\frac{4}{3}\pi R^3$ ovvero $\frac{1}{6}\pi D^3$.

APPENDICE

I. *PROBLEMI*

CHE SI PROPONGONO AD ESERCIZIO DEI PRINCIPIANTI

IN APPLICAZIONE DEGLI ELEMENTI DI GEOMETRIA

PROBLEMA I.

Essendo dati due punti M, N ed una retta AB determinare sopra questa retta un punto X tale che conducendo le rette MX, NX gli angoli AXM, BXN risultino uguali. Fig. 234.

Analisi. Supponiamo il problema risoluto; sia X il punto richiesto; sarà l'angolo $AXM = BXN$; conseguentemente prolungando NX in C l'angolo AXC, il quale è uguale all'angolo BXN, sarà pure uguale all'angolo AXM; quindi abbassando sopra AB la perpendicolare MD, e prolungandola sino all'incontro di NXC in C, avremo il triangolo MDX uguale al triangolo CXD, e perciò $MD = DC$.

Sintesi. Quest' ultimo risultato comprende il modo di risolvere il problema graficamente; perocchè ne consegue 1.° Che da uno dei punti dati, per es. M, conviene abbassare una perpendicolare sopra AB. 2.° Prendere di questa perpendicolare una parte DC uguale a DM. 3.° Tirare la retta NC il cui incontro X con AB sarà il punto richiesto. Infatti in conformità dell'analisi precedente sarà l'angolo $AXM = BXN$.

PROBLEMA II.

Fig. 235. *Essendo dati due punti M, N ed un angolo BAC determinare sopra i lati di questo angolo i punti X, Y in modo che conducendo le rette MX, XY, NY si ottenga l'angolo BXM uguale ad AXY, e l'angolo CYN uguale ad AYX.*

L'analisi si farà come nel problema precedente; e ne risulterà la seguente costruzione.

Sintesi. 1.° Si conducano MF ed NG respettivamente perpendicolari ad AB, ed AC. 2.° Si prenda la parte $OF = OM$, e la parte $RG = NR$. 3.° Si tiri FG. I punti X, Y della intersezione di FG coi lati dell'angolo dato, saranno i punti richiesti.

PROBLEMA III.

Fig. 236. *Costruire un quadrato che sia triplo d'un quadrato dato $ABCD$.*

Analisi. Sia $MNPQ$ il quadrato richiesto; dovendo esso esser triplo del quadrato $ABCD$, avremo

$$\overline{MN}^2 = \overline{AB}^2 + 2\,\overline{AB}^2,$$

* 734. e perciò $$\overline{MN}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2\text{;}$$

dunque il lato del quadrato richiesto è uguale alla ipotenusa d'un triangolo rettangolo i cui lati sono AB e BD, cioè il lato del quadrato dato, e la sua diagonale.

Sintesi. 1.° Si conduca la diagonale BD, e DI perpendicolare alla diagonale medesima. 2.° Quindi si prenda $DI = DA$. 3.° Si tiri BC. Il lato del quadrato triplo del quadrato $ABCD$ sarà BI.

PROBLEMA IV.

Costruire un quadrato essendo dato l' eccesso K della sua diagonale sul suo lato. Fig. 237.

Analisi. Sia $ABCD$ il quadrato richiesto, di cui BD è la diagonale; prendendo $DF = DA$, dovrà risultare $FB = K$; perciò BF si potrà considerare come un lato cognito del triangolo ABF. Di questo triangolo si conosce di più l' angolo FBA, metà d' un angolo retto: quanto all' angolo AFB giova osservare com' esso sia il supplemento dell' angolo AFD, il quale è uguale ai $\frac{3}{4}$ d'un retto, poichè l' angolo ADF è metà d' un retto, ed il triangolo ADF è isoscele.

Sintesi. 1.° Si faccia l'angolo retto ABC, diviso da una linea indefinita BD in due parti uguali. 2.° Si prenda $BF = K$. 3.° Dal punto F si faccia partire la retta FA, il di cui angolo con BF sia uguale ai $\frac{3}{4}$ d' un retto, ed in conseguenza uguale all' angolo ABF accresciuto della sua metà. Ne risulterà AB lato del quadrato richiesto; quindi sarà facile costruire il quadrato medesimo.

In altro modo.

Sintesi. 1.° Si faccia un quadrato qualunque $ABCD$. 2.° Dipoi avendo preso della sua diagonale DB la parte $DF = DA$, si tiri AF. 3.° Prendasi $BH = K$, e dal punto H conducasi HG parallela ad FA. Il quadrato $GIKB$, costrutto sopra GB, sarà il quadrato richiesto. Infatti il triangolo GIH è simile al triangolo ADF; perciò essendo $AD = DF$, sarà pure $GI = IH$, e per conseguenza $IB - IH = IB - GI = K$.

PROBLEMA V.

Fig. 238. *Dal punto M dato fuori dell' angolo BAC condurre una retta MN in modo che le parti MN, MP abbiano il rapporto di due linee date A, e B.*

Analisi. Sia MN la richiesta retta, dimodochè abbiasi $MN : MP :: A : B$. Conducendo MA, e quindi PD parallela ad AB, avremmo $MA : MD :: MN : MP :: A : B$.

Sintesi. 1.° Condotta MA si divida questa retta nel punto D in modo che abbiasi $MA : MD :: A : B$. 2.° Pel punto D conducasi DP parallela ad AB. La retta richiesta si sarà quella che passa pei punti M e P.

PROBLEMA VI.

Fig. 239. *Dentro un angolo cognito HBK condurre la retta PQ la quale abbia una data lunghezza A, ed in maniera che l' angolo PQB sia uguale ad un angolo dato M.*

Analisi. Sia PQ la retta richiesta; se da P si conducesse una parallela PS a BH, e da un punto S qualunque di PS si conducesse pure una parallela a PQ, avremmo $SC = PQ = A$, e l' angolo $SCB = PQB = M$.

Sintesi. 1.° In un punto qualunque C del lato BH si faccia l'angolo $BCS = M$. 2.° Si prenda $CS = A$. 3.° Da S conducasi SP parallela a BH. 4.° Da P finalmente la retta PQ parallela ad SC. PQ sarà la retta richiesta.

PROBLEMA VII.

Fig. 240. *Condurre dal vertice d' un angolo dato BAC una linea AD in modo che le rette MP, MQ abbassate da uno qualunque de' suoi punti M, sopra i lati AC, AB, e formanti con essi dei dati angoli M, N abbiano il rapporto di due rette date A, B.*

Analisi. Sia AD la linea richiesta; supponendo che le rette MP, MQ abbassate dal punto M preso a piacere sopra i lati AC, AB formino coi lati medesimi gli angoli $MPA = M$, $MQA = N$ dovrà aver luogo la proporzione $MP : MQ :: A : B$, dove potrà supporsi pur anco $MP = A$, $MQ = B$. Or se dal punto M si condurranno le rette MG, MH parallele ai lati AC, AB, ogni parallela GE ad MP sarà uguale ad A, ed ogni parallela HF ad MQ sarà uguale a B.

Sintesi. 1.° In un punto qualunque E del lato AC facciasi l'angolo $GEA = M$, e prendasi $EG = A$. 2.° In un punto qualunque F del lato AB facciasi l'angolo $HFA = N$, e prendasi $FH = B$. 3.° Dal punto G si tiri una parallela ad AC, e dal punto H una parallela ad AB. Il punto M della intersezione di queste due parallele determinerà la posizione della richiesta linea AM.

PROBLEMA VIII.

Condurre pel punto M tal retta MB che tagli i lati di un angolo dato BAC in modo che AB risulti uguale ad AC. Fig. 241.

Analisi. Sia AB la retta richiesta; il triangolo ABC sarà isoscele, e l'angolo ABC sarà uguale all'angolo ACB; or l'angolo esterno $CAF = ABC + ACB$, dunque se per la retta AD si dividesse in due parti uguali l'angolo CAF, l'angolo CAD risulterebbe uguale all'angolo ACB, cioè la retta medesima sarebbe parallela a BC.

Sintesi. 1.° Si divida l'angolo CAF in due parti uguali colla retta AD. 2.° Nel punto dato M si conduca la parallela CB ad AD. Questa parallela determinerà le parti uguali AB ed AC.

PROBLEMA IX.

Costruire un triangolo rettangolo di cui è dato un lato AB dell'angolo retto, ed il perimetro AF. Fig. 242.

Analisi. Sia ABC il triangolo richiesto; prolungando BC onde si abbia $BG = BF$, e tirando AG il triangolo

ACG sarà isoscele; dunque la perpendicolare inalzata sul mezzo H della sua base passerà pel vertice C.

Sintesi. 1.° Avendo inalzata alla estremità dal lato dato AB la perpendicolare $BG = BF$ si tiri AG. 2.° Si divida AG in due parti uguali mediante la perpendicolare HC. L'incontro C di questa perpendicolare con BG determinerà il triangolo ABC richiesto.

PROBLEMA X.

Fig. 243. *Costruire un triangolo rettangolo di cui è data l'ipotenusa I, e la somma AD dei lati dell'angolo retto.*

Analisi. Sia ABC il triangolo richiesto, coll'angolo retto in C; avremo $AB = I$, e $BC = CD$; laonde conducendo BD, il triangolo BCD dovrà essere isoscele; e l'angolo D metà d'un angolo retto. Rilevasi da ciò che del triangolo ABD si conoscono i lati AD, AB, e l'angolo D.

Sintesi. 1.° Si faccia all'estremità D della retta data AD un angolo ADB uguale alla metà d'un angolo retto. 2.° Fatto centro in A e con raggio uguale alla data ipotenusa I si descriva un arco, il quale tagli DB in B, e si conduce AB. 3.° Finalmente dal punto B si abbassi la perpendicolare BC sopra AD; ABC sarà il triangolo richiesto.

PROBLEMA XI.

Fig. 244. *Costruire un triangolo rettangolo di cui è data l'ipotenusa I, e la differenza AD de' due lati dell'angolo retto.*

Analisi. Sia ABC il triangolo richiesto, coll'angolo retto in C; avremo $AB = I$, e $BC = CD$; perlochè conconducendo BD ne verrà il triangolo BCD isoscele; dove l'angolo CDB sarà la metà d'un angolo retto.

Sintesi. 1.° Si prolunghi AD, e si faccia l'angolo CDB uguale alla metà d'un angolo retto. 2.° Da A come centro, e con raggio uguale alla data ipotenusa I descrivasi un archetto che tagli DB in B. 3.° Dal punto B si abbassi la perpendicolare BC sopra AC. ABC sarà il triangolo richiesto.

PROBLEMA XII.

Costruire un triangolo di cui si conosce la base AB, l' altezza A, e l' angolo al vertice M. Fig. 245.

Analisi. Sia ABC il triangolo richiesto; avendo circoscritta ad esso la circonferenza $ACC'B$ l' arco ACB sarà capace dell' angolo dato M; di più il vertice C si dovrà trovare sopra una parallela CC' alla base AB, la cui distanza FG da essa base sia indicata dalla retta data A'.

Sintesi. 1.° Sopra la retta AB si descriva un arco capace dell' angolo dato M.* 2.° Sopra AB s' inalzi la perpendicolare $GF = A$. 3.° Pel punto F si conduca una parallela ad AB. I punti C, C' dove questa parallela incontra l' arco ACB sono i vertici dei due triangoli ABC, ABC' che risolvono ugualmente il problema. * 356.

PROBLEMA XIII.

Costruire un triangolo di cui si conosce un lato A un angolo M ad esso contiguo, e la somma B degli altri due lati. Fig. 246.

Analisi. Sia ABC il triangolo dove si verifichi essere $BC = A$, $BA + AC = B$, e l' angolo $ABC = M$. Prolungando BA onde abbiasi $BD = B$, e tirando DC, avremo $AD = AC$, e conseguentemente il triangolo DAC isoscele, e l' angolo $ADC = ACD$.

Sintesi. 1.° Facciasi l' angolo $DBC = M$. 2.° Sopra i suoi lati si prendano le parti $BC = A$, $BD = B$. 3.° Si tiri DC. 4.° Conducasi CA per modo che abbiasi l' angolo $ACD = ADC$. Il triangolo ABC risolverà il problema.

PROBLEMA XIV.

Fig. 246. *Costruire un triangolo di cui si conosce un lato A un angolo M ad esso contiguo, e la differenza C degli altri due lati.*

L' analisi si farà come nel problema precedente.

Sintesi. 1.° Facciasi l' angolo $DBC = M$. 2.° Sopra uno de' suoi lati si prenda la parte $BC = A$, e sul prolungamento dell' altro la parte $BF = C$. 3.° Si tiri FC. 4.° Conducasi CA per modo che abbiasi l'angolo $ACF = AFC$; ABC sarà il triangolo richiesto.

PROBLEMA XV.

Fig. 247. *Costruire un triangolo di cui si conoscono gli angoli A, B, C ed il perimetro.*

Analisi. Sia ABC il triangolo richiesto. Prolungando AB da ambe le parti cosicchè sia $AD = AC$, $BE = BC$, cioè DE uguale al perimetro del triangolo, e quindi tirando le rette CD, CE, avremo i triangoli ADC, BEC ambedue isosceli; l' angolo D sarà uguale alla metà di CAB, e l' angolo E uguale alla metà di CBA.

Sintesi. 1.° Dalla estremità d' una retta DE uguale al perimetro dato del trangolo si conducano le rette DC, EC in modo che gli angoli D, E sieno respettivamente la metà de' due angoli A e B del triangolo. 2.° Dal punto C incontro di queste rette si conducano le rette CA, CB in modo che abbiasi l' angolo $DCA = D$, e l' angolo $ECB = E$; ABC sarà il triangolo richiesto.

PROBLEMA XVI.

Fig. 248. *Descrivere un circolo nel quale due corde respettivamente uguali a due rette date A, e B sieno sottese da archi l' uno doppio dell' altro.*

L' analisi si rinverrà agevolmente riflettendo alla seguente costruzione.

Sintesi. 1.° Descrivasi la retta AB uguale alla corda maggiore A. 2.° Dai punti A e B come centri, e con raggio uguale a B si descrivano due archi i quali si taglieranno in C. La circonferenza che passerà pei punti A, B, C sarà la circonferenza richiesta.

PROBLEMA XVII.

Dato un circolo ed un punto K, dentro o fuori di esso condurre una corda d' una lunghezza data A. Fig. 249.

Analisi. Sia AB la richiesta corda; la quale passa pel punto K, e la cui lunghezza è A. Ogni altra corda $CD = A$ sarà uguale ad AB. Le perpendicolari OF, OG abbassate dal centro O sopra AB, e CD saranno uguali; epperciò una circonferenza descritta col raggio OF passerà pel punto G; cioè una circonferenza avente il suo centro in O, e cui sia tangente CD, sarà pure tangente ad AB. Dunque descrivendo in primo luogo la circonferenza FG sarà facile condurre la corda AB.

Agevolmente si potrà ritrovare la sintesi che alla precedente analisi consegue.

Scolio. Si hanno manifestamente due soluzioni AB, $A'B'$. Il problema sarebbe assurdo ove la retta data A fosse maggiore del diametro del circolo dato.

PROBLEMA XVIII.

Date due circonferenze concentriche, ed un punto qualunque K, condurre una linea KB in maniera che la parte CB intercetta fra le due circonferenze sia uguale ad una retta data A. Fig. 250.

Analisi. Sia KB la retta richiesta, la quale passa pel punto K, e di cui la parte $CB = A$. Ogni altra corda DF uguale ad AB avrà la parte EF, compresa fra le due circonferenze date, uguale a CB; perocchè posto $AB = DF$, ne consegue $OG = OH$, $GB = HF$, $GC = HE$, e $CB = EF$.

Sintesi. 1.° Fatto centro in un punto qualunque F della circonferenza maggiore, e con un raggio A si descriva un archetto che tagli la circonferenza minore in E. 2.° Si tiri FED. 3.° Si descriva dal centro O con raggio uguale alla perpendicolare OH abbassata sopra FED una circonferenza. 4.° Finalmente dal punto K dato si conduca una tangente KB alla circonferenza descritta. Questa tangente sarà la retta che dovevasi determinare.

PROBLEMA XIX.

Fig. 251. *Essendo date due circonferenze concentriche ed un triangolo ABC costruire altro triangolo ad esso simile, e tale che due suoi vertici sieno sopra la circonferenza maggiore, il terzo sull' altra.*

Analisi. Sia DEF il richiesto triangolo, il quale ha i vertici D, E sopra la circonferenza maggiore, ed il vertice F su la minore; e supponiamo $D = A$, $E = B$, $F = C$. Prolungando DF sinchè incontri la maggiore circonferenza in H vedremo che l' angolo D ha per misura la metà dell'arco EH; per cui se da A come centro, e col raggio della circonferenza maggiore descriveremo l'arco GI, sarà $GI = \frac{1}{2} EH$. Inoltre l' angolo EFH è manifestamente il supplemento dell' angolo C; perlochè se sopra EH descriveremo un arco capace dell'angolo BCI, questo arco passerà necessariamente pel punto F.

Sintesi. 1.° Da A come centro, e col raggio della circonferenza DEH descrivasi l' arco GI, e sopra la circonferenza medesima prendasi l' arco $EH = 2GI$. 2.° Sopra la corda EH di tale arco descrivasi un arco $EFF'H$ capace dell' angolo BCI. 3.° Uniscasi il punto F, dove esso arco incontra la circonferenza minore, col punto E, e conducasi HFD; quindi DE. DEF sarà il triangolo richiesto.

Scolio. L' arco $EFF'H$ incontra la circonferenza minore in due punti F, F'; ragione per cui anche il triangolo $D'EF'$ soddisfarà alle condizioni del problema.

PROBLEMA XX.

Determinare sopra la circonferenza ABC un punto A tale che le corde da esso condotte ad altri due punti B, C dati su la circonferenza medesima abbiano la ragione di due rette date M, N. Fig. 252.

Analisi. Sia A il punto richiesto; sarà $AB : AC :: M : N$. Or se s' immagina che la retta AD divida l' angolo BAC in due parti uguali, e conseguentemente anche l' arco BDC in due parti uguali nel punto D, conducendo BC avremo $AB : AC :: BF : CF :: M : N$. Di qui si rileva agevolmente come possano determinarsi i punti D, F da cui dipende la posizione della retta DA.

PROBLEMA XXI.

Pel punto B ove due circonferenze si tagliano condurre una retta, la quale abbia una data lunghezza A. Fig. 253.

Analisi. Sia AC la richiesta retta, la quale passa pel punto B ed è uguale ad A. Conduciamo una retta qualunque DF che passi essa pure pel punto B, ed uniamo E con D, A, F, e C. I triangoli EDF, EAC essendo simili danno la proporzione $DF : ED :: AC : EA$; dunque EA è una quarta proporzionale dopo DF, ED, ed $AC = A$.

Sintesi. 1.° Si conduca una retta qualunque DF pel punto B; quindi ED ed EF. 2.° Sopra questa retta si prenda $FK = A$. 3.° Pel punto K si conduca KH parallela ad FE. 4.° Fatto centro in E col raggio EH si descriva l' arco HA. La retta richiesta dovrà passare pei punti A e B.

Scolio. L' arco descritto col raggio EH somministra pure il punto A'; talmentechè anche la retta $A'BC$ soddisfarà alle condizioni del problema.

PROBLEMA XXII.

Fig. 254. *Trovare un punto X sul prolungamento del diametro AB della circonferenza AIB tale che la tangente XZ condotta alla circonferenza medesima risulti uguale ad una retta data A.*

Sintesi. Si conduca una tangente qualunque $AD = A$, e si prenda $OX = OD$; il punto X soddisfarà al problema.

PROBLEMA XXIII.

Fig. 255. *Descrivere un circolo BDX che tocchi la circonferenza data ACB in un punto B, per modo che conducendo da questo punto una secante qualunque BDC le corde BD, BC stieno fra loro nella ragione di due linee date P, Q.*

Analisi. Supponiamo il problema risoluto; sia BDX la circonferenza richiesta; il suo centro si dovrà trovare sul diametro AB della circonferenza data; or conducendo BC a piacere avremo la proporzione $P : Q :: BC : BD :: BA : BX$; dalla quale si rileva come il diametro della circonferenza incognita sia una quarta proporzionale dopo P, Q, ed AB Di qui agevolmente ricavasi la sintesi che conduce alla risoluzione del problema.

PROBLEMA XXIV.

Fig. 256. *Descrivere una circonferenza che sia tangente ad una retta data AB, e che passi per due punti dati M, N.*

Analisi. Sia MNX la circonferenza richiesta; X il punto di contatto di essa colla retta data AB; conducendo la corda MN e prolungandola sino all' incontro C della retta

AB, avremo $MC : CX :: CX : NC$; C è un punto noto, e si vede che la distanza del punto X ignoto da C è una media proporzionale fra MC, ed NC.

Sintesi. 1.° Avendo congiunti i punti M, N mediante la retta MNC, si descriva sopra essa come diametro una mezza circonferenza MDC, s' inalzi la perpendicolare ND sopra MC, e si tiri CD; CD sarà la media proporzionale fra MC ed NC. 2.° Fatto centro in C e con raggio CD si descriva un arco che tagli AB in X; X sarà il punto di contatto della circonferenza richiesta colla retta data AB. 3.° Si conducano due perpendicolari, l'una ad AB nel punto X, l'altra ad MN nel suo mezzo; l'incontro O di queste perpendicolari sarà il centro della richiesta circonferenza.

Scolio. L'arco descritto da C con raggio CD taglierà la retta AB anco nel punto X'; lo che dimostra l'esistenza d'altra circonferenza MNX' che soddisfà come la precedente alle condizioni del problema.

PROBLEMA XXV.

Condurre una tangente a due circoli dati AC, BD. Fig. 257. e 258.

Analisi. Sieno C, e D i punti di contatto di una tangente comune ai due circoli; i raggi AC, BD saranno perpendicolari a CD, e perciò paralleli fra loro. Or dal centro A del circolo maggiore, e con raggio AE uguale alla differenza, come nella figura 257, oppure uguale alla somma, come nella figura 258, de' raggi de' due circoli dati, si descriva la circonferenza AC; la quale supporremo che incontri il raggio AC in E. Dal centro B del circolo minore si tiri BE; questa BE sarà parallela a CD; ed in conseguenza perpendicolare al raggio AE, cioè tangente al circolo AE.

Sintesi. 1.° Dal centro A, e con un raggio AE uguale alla differenza, come nella figura 257, o uguale alla somma, come nella figura 258, descrivasi una circonferenza. 2.° Dal centro B si conduca una tangente BE alla circonferenza medesima, ed il raggio AC che passi pel punto E del suo contatto. 3.° Dal centro B la parallela BD ad AE. La retta CD sarà la tangente richiesta.

Scolio. Quando i due circoli dati non si tagliano e l'uno è fuori dell'altro, quattro sono le tangenti che soddisfanno al problema; CD, CD' della figura 257, e CD, CD' della figura 258. Quando i due circoli sono tangenti essendo l'uno fuori dell'altro, le tangenti saranno tre, perchè due di esse si confondono in una sola, la quale passa pel punto di contingenza di essi due circoli. Quando i due circoli si tagliano le tangenti saranno due. Finalmente quando i due circoli sono tangenti, essendo l'uno dentro l'altro, non vi sarà che la sola tangente condotta pel punto del loro contatto.

PROBLEMA XXVI.

Fig. 259. *Dividere il triangolo ABC in tre parti uguali per mezzo delle rette KM, KN che partono da uno stesso punto K della base AC.*

Sintesi. 1.° Congiungasi K con B mediante la retta KB. 2.° Si divida la base AC in tre parti uguali ne' punti D ed F. 3.° Dai punti D ed F si conducano le rette DM, FN parallele a KB. Le rette KM, KN divideranno il triangolo ABC in tre parti uguali.

II. TEOREMI

RELATIVI AI TRIANGOLI, AI QUADRILATERI, ED AL CIRCOLO.

TEOREMA I.

Le perpendicolari abbassate dai vertici d' un triangolo sopra i lati respettivamente opposti, s' incontrano in un medesimo punto. Fig. 260.

Dai vertici B e C si conducano le rette BE, e CF respettivamente perpendicolari ad AC, ed AB; quindi si congiunga il punto del loro incontro M col vertice A mediante la retta AMD; dico che questa retta risulterà perpendicolare a BC. Sopra BC come diametro descrivasi una mezza circonferenza; altra circonferenza si descriva che abbia per diametro AM; queste due circonferenze passeranno su i punti F ed E. Conducasi la corda EF. Gli angoli CFE, CBE saranno uguali; come pure gli angoli MFE, MAE. Gli angoli CBE, MAE sono adunque uguali, e perciò i triangoli BMD, AME sono equiangoli fra loro; or l'angolo MEA è retto per costruzione, dunque l'angolo MDB è anch'esso retto, ed AD è perpendicolare a BC, come si doveva dimostrare.

TEOREMA II.

Fig 261. *Se da un punto M preso nell' interno d' un triangolo ABC si conducono le perpendicolari MD, ME, MF sopra i suoi lati, ciascuno di questi lati risulterà diviso in due segmenti tali che la somma dei quadrati fatti sopra tre di essi, presi in modo che niuno sia consecutivo all' altro come AF, BD, CE, sarà uguale alla somma dei quadrati fatti sopra gli altri tre segmenti FB, DC, EA.*

Conducendo le rette MA, MB, MC avremo

$$\overline{MF}^2 = \overline{MB}^2 - \overline{BF}^2 = \overline{MA}^2 - \overline{AF}^2$$

$$\overline{MD}^2 = \overline{MB}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{MC}^2 - \overline{CD}^2$$

$$\overline{ME}^2 = \overline{MC}^2 - \overline{CE}^2 = \overline{MA}^2 - \overline{AE}^2;$$

donde si ha

$$\overline{AF}^2 - \overline{BF}^2 = \overline{MA}^2 - \overline{MB}^2,$$

$$\overline{BD}^2 - \overline{CD}^2 = \overline{MB}^2 - \overline{MC}^2,$$

$$\overline{CE}^2 - \overline{AE}^2 = \overline{MC}^2 - \overline{MA}^2;$$

e quindi, sommando,

$$\overline{AF}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{FB}^2 + \overline{DC}^2 + \overline{EA}^2,$$

come si doveva dimostrare.

TEOREMA III.

Fig. 262. *In ogni triangolo ABC il rettangolo di due lati AC, CB è uguale al quadrato della retta CD che divide l'angolo compreso ACB in due parti uguali, più il rettangolo dei segmenti AD, AB del terzo lato.*

Si circoscriva al triangolo ABC una circonferenza; si prolunghi CD sinchè incontri questa circonferenza in F, e si tiri AF; ne risulterà il triangolo AFC simile al triangolo BCD; perocchè l'angolo ACF è uguale all'angolo BCD per costruzione, e l'angolo AFC è uguale all'angolo DBC essendo ambedue iscritti nel medesimo arco $AFBC$. Questi due triangoli daranno perciò la proporzione

$$AC : CF :: CD : CB$$

ovvero $$AC : CD + DF :: CD : CB;$$

per cui facendo il prodotto de' medj, e quello degli estremi

avremo $$AC \times CB = \overline{CD}^2 + CD \times DF;$$

ma $$CD \times DF = AD \times DB; *$$ * 314

dunque $$AC \times CB = \overline{CD}^2 + AD \times DB.$$

TEOREMA IV.

Quando i tre lati d'un triangolo ABC indefinitamente prolungati saranno incontrati da una secante qualunque DF, sopra ciascuno di questi lati si riscontreranno due segmenti tali che il prodotto di tre di essi presi in modo che niuno sia consecutivo all'altro, come AE, BD, CF, sarà uguale al prodotto degli altri tre EB, DC, FA. Fig. 263.

Dal punto O preso a piacere si conducano le rette Od, Oe, Of respettivamente parallele ai lati CD, AE, AF del triangolo; dal confronto dei triangoli simili che risultano da questa costruzione avremo le proporzioni seguenti,

$$\frac{AE}{AF} = \frac{Oe}{Of}, \quad \frac{BD}{BE} = \frac{Od}{Oe}, \quad \frac{CF}{CD} = \frac{Of}{Od};$$

le quali moltiplicate termine a termine, danno

$$\frac{AE}{AF} \times \frac{BD}{BE} \times \frac{CF}{CD} = 1,$$

ovvero

$$AE \times BD \times CF = EB \times DC \times FA,$$

come dovevasi dimostrare.

Scolio. La secante FD può tagliare il triangolo, o essere interamente fuori della sua superficie; ma in qualunque caso sopra i lati del triangolo, o non vi sarà alcun punto di divisione, o ve ne saranno due; e perciò sopra i prolungamenti di questi lati vi saranno tre punti di divisione o non ve ne sarà che uno.

TEOREMA V.

Fig. 264. *Quando da un punto O preso sul piano del triangolo ABC si conducono le rette AD, BE, CF che passano pei vertici e terminano ai lati, sopra ciascuno di questi lati si riscontrano sempre due segmenti tali che il prodotto di tre di essi presi in modo che niuno sia consecutivo all'altro come AF, BD, CE sarà uguale al prodotto degli altri tre.*

Dal triangolo ACD, cui si può riferire la secante BOE, in virtù del precedente teorema avremo,

$$AE \times CB \times DO = EC \times BD \times OA;$$

parimente dal triangolo ABD, cui riferiremo la secante COF, ricaveremo

$$FB \times CD \times OA = AF \times BC \times DO;$$

cosicchè moltiplicando membro a membro, e sopprimendo di poi i fattori BC, DO, OA comuni ai due membri della equazione risultante, avremo

$$AF \times BD \times CE = FB \times DC \times EA.$$

Scolio I. Di questo teorema può darsi anche la dimostrazione seguente.

Osservando che

$$CAF : CBF :: AF : BF,$$

ed $$OAF : OBF :: AF : BF;$$

si ha

$$CAF : CBF :: OAF : OBF;$$

donde si deduce

$$CAF - OAF : CBF - OBF :: CAF : CBF :: AF : BF,$$

ovvero $$COA : COB :: AF : BF.$$

Nello stesso modo si prova che

$$AOB : AOC :: BD : CD,$$

e che $$BOC : BOA :: CE : AE.$$

Perlochè moltiplicando termine a termine queste tre ultime proporzioni, avremo una nuova proporzione nella quale i primi due termini saranno manifestamente uguali, e tali per conseguenza dovranno esser gli altri due, cioè sarà

$$AF \times BD \times CE = FB \times DC \times EA.$$

Scolio II. Il punto O può indifferentemente prendersi dentro, o fuori del triangolo.

Corollario I. Se uno dei lati del triangolo sarà diviso Fig. 265.
in due parti uguali dalla corrispondente secante, come se per esempio si avesse $AF = FB$, allora si otterrebbe

$$BD \times CE = DC \times EA,$$

e quindi $$CE : CD :: EA : BD,$$

cioè la retta ED sarebbe parallela ad AB. Dunque se dal vertice C condurremo al mezzo del lato opposto la retta CF, quindi dal vertice B la retta BE che incontri CF in un punto O, e finalmente dal vertice A la retta AD che passi per esso punto O, i punti E, e D si troveranno sopra una parallela ad AB; così i punti E', D' determinati nello stesso modo saranno anch'essi sopra una parallela ad AB; così i punti E'', D'', ec.; inguisachè AB, ED, $E'D'$, $E''D''$ ec. saranno tutte parallele fra loro.

Corollario II. Reciprocamente avendosi ED parallela ad AB, conducendo le rette AD, BE, le quali s'incontrano in O, e quindi CF che congiunga O col vertice C, il lato AB risulterà diviso in due parti uguali nel punto F.

Infatti poichè ED è parallela ad AB, sarà

$$CE : CD :: EA : BD,$$

ovvero $$CE \times BD = CD \times EA.$$

Ma le rette AD, BE, CF incontrandosi tutte nel punto O danno, pel teorema dimostrato, l'uguaglianza

$$AF \times BD \times CE = FB \times DC \times EA,$$

dunque $AF = FB$.

Corollario III. La retta CF passa dunque pei tre punti C, O, F; or siccome due di essi bastano a fissare la posizione di AF, potremo stabilire che una retta la quale congiunge il vertice C col punto di mezzo F del lato opposto, passa per ogni punto O dove s'incontrano le linee AD, BE che tagliano gli altri lati in parti proporzionali.

Corollario IV. Le rette condotte dai vertici d'un triangolo ai punti di mezzo dei lati opposti, s'incontrano in uno stesso punto.

TEOREMA VI.

Fig. 266. *La somma dei quadrati dei quattro lati d'un quadrilatero qualunque $ABCD$ è uguale alla somma dei quadrati delle due diagonali AC, BD più il quadruplo del quadrato della retta EF che unisce i punti di mezzo delle diagonali medesime.*

Conducendo le rette BE, DE i triangoli ABC, ACD daranno

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{BE}^2;$$

$$\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{DE}^2;$$

inoltre il triangolo BDE, raddoppiando i termini, darà

$$2\overline{BE}^2 + 2\overline{DE}^2 = 4\overline{BF}^2 + 4\overline{EF}^2;$$

ora sommando queste tre equazioni membro a membro, e facendo nel risultato le opportune riduzioni, avremo

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{AD}^2+\overline{CD}^2=4\,\overline{AE}^2+4\,\overline{BF}^2+4\,\overline{EF}^2;$$

ma $4\overline{AE}^2$ è quadrato di $2AE$, ossia di AC, e $4\overline{BF}^2$ è il quadrato di $2BF$, o di BD, dunque

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{AD}^2+\overline{CD}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+4\,\overline{EF}^2.$$

TEOREMA VII.

In ogni quadrilatero $ABCD$ iscritto nel circolo, il rettangolo delle due diagonali AC, BD è uguale alla somma de' rettangoli de' lati opposti. Fig. 267.

Conducasi BK in modo che abbiasi l'angolo $ABD = CBK$; aggiungendo a questi due angoli, l'angolo FBK si avrà pure l'angolo $ABK = CBD$. Or se si osserva che l'angolo $ADB = ACB$, essendo ambedue iscritti nel medesimo segmento, e che per la stessa ragione l'angolo $BAK = BDC$, potremo concludere essere il triangolo ABD simile al triangolo BCK, ed il triangolo BCD simile al triangolo ABK. Frattanto dai primi due si ha la proporzione

$$AD : BD :: CK : BC,$$

e quindi $\quad AD \times BC = BD \times CK;$

dagli altri due si ha pure

$$DC : BD :: AK : AB,$$

e $\quad DC \times AB = BD \times AK;$

sommando questi due risultati, ed osservando che $AK + CK = AC$, otterremo

$$AD \times BC + DC \times AB = BD \times AC.$$

Fig. 268. *Scolio I.* Gli stessi triangoli ABD, BCK somministrano pure la proporzione

$$AB : BD :: BK : BC;$$

dalla quale si ha

$$AB \times BC = BD \times BK.$$

Or se BD fosse un diametro, l'angolo BAD sarebbe retto; lo sarebbe ancora BKC; avremmo adunque BK perpendicolare ad AC. Laonde considerando il circolo come circoscritto al triangolo ABC, si può concludere che *in un triangolo qualunque il prodotto de' due lati AB, BC è uguale al prodotto del diametro del circolo circoscritto per l'altezza che corrisponde al terzo lato AC preso per base.*

Scolio II. Posta frattanto l'equazione

$$AB \times BC = BD \times BK,$$

e moltiplicandone i membri per AC, e poscia dividendo per $2\,BD$, avremo

$$\frac{AB \times BC \times AC}{2\,BD} = \frac{AC \times BK}{2};$$

donde si rileva che *l'area di un triangolo è uguale al prodotto de' suoi tre lati, diviso pel doppio del diametro del circolo circoscritto.*

TEOREMA VIII.

Fig. 267. *In ogni quadrilatero $ABCD$ iscritto nel circolo, le due diagonali stanno fra loro, come le somme dei rettangoli de' lati contigui alle loro estremità.*

Essendo K il diametro del circolo circoscritto, sarà in virtù del precedente scolio,

$$\text{area } ABC = \frac{AB \times BC \times AC}{2K},$$

$$\text{area } ACD = \frac{AD \times DC \times AC}{2K},$$

$$area\ ABD = \frac{AB \times AD \times BD}{2K},$$

$$area\ BCD = \frac{BC \times CD \times BD}{2K};$$

e poichè la somma delle aree ABC, ACD è uguale alla somma delle aree ABD, BCD, perciò sommando i valori di queste aree, e sopprimendo il comune denominatore $2K$ avremo

$$AB \times BC \times AC + AD \times DC \times AC = AB \times AD \times BD + BC \times CD \times BD,$$

ovvero

$$(AB \times BC + AD \times DC)\, AC = (AB \times AD + BC \times CD)\, BD;$$

$$AC : BD :: AB \times AD + BC \times CD : AB \times BC + AD \times DC.$$

TEOREMA IX.

Due angoli A, B al centro in due circoli differenti, stanno fra loro come gli archi CD, EF intercetti fra i lati, divisi pei respettivi raggi AD, BF. Fig. 269.

Col raggio $AF' = BF$ descrivasi l'arco $E'F'$ compreso fra i lati dell'angolo A; avremo

$$A : B :: E'F' : EF\,^{*};$$ * 270.

ovvero, dividendo i due termini del secondo rapporto per $AF' = BF$,

$$A : B :: \frac{E'F'}{AF'} : \frac{EF}{BF};$$

ma $$\frac{E'F'}{AF'} = \frac{CD}{AD}\,^{*},$$ * 338.

dunque $$A : B :: \frac{CD}{AD} : \frac{EF}{BF}.$$

TEOREMA X.

Fig. 270. *Se il raggio d'un circolo sarà medio proporzionale fra le distanze del centro C dai punti Q, e P situati sopra una stessa retta CQ, le rette MQ, MP condotte da un punto qualunque M della circonferenza ai punti Q, e P staranno fra loro nel rapporto costante di AQ, AP.*

Poichè il raggio è medio proporzionale fra CQ, e CP,

avremo $$CQ : CM :: CM : CP;$$

perlochè i triangoli CMP, CMQ avendo un angolo uguale compreso fra lati proporzionali saranno simili, e daranno inoltre

$$MQ : MP :: CQ : CM;$$

ma dalla precedente proporzione si rileva che

$$CQ : CM :: CQ - CM : CM - CP :: AQ : AP;$$

dunque $$MQ : MP :: AQ : AP,$$

come si doveva dimostrare.

Corollario. Rispetto ad altro punto M' della circonferenza, avremmo pure

$$M'Q : M'P :: AQ : AP;$$

e quindi

$$MQ : MP :: M'Q : M'P.$$

III. MAXIMA *E* MINIMA *NELLE FIGURE.*

1. Esistono delle quantità, le quali possono indefinitamente crescere, ed altre ne esistono che possono indefinitamente diminuire. Del primo genere sono la tangente *AT*, e la secante *BT*; perocchè immaginando che *BT* si aggiri intorno al punto fisso *B* preso su la circonferenza, l'incontro di questa retta colla tangente, avrà luogo in un punto *T* che si allontanerà indefinitamente dal punto di contatto *A*; per cui non vi sarà limite, in virtù del quale venga impedito alla tangente *AT*, ed alla secante *BT* di ulteriormente accrescersi. Del secondo genere poi è la corda *BC*, la quale per l'indicato movimento di *BT* si allontana successivamente dal centro, e và di mano in mano impiccolendo, e può per tal modo diventare più piccola d'ogni retta data. Fig. 271.

2. Ma esistono pur anche altre quantità, le quali giunte ad un certo punto crescendo, di là in poi decrescono, come ne esistono di quelle che fino a un certo punto vanno decrescendo, e dipoi crescono. Infatti la corda *BC* aggirandosi intorno al punto *B* cresce fino ad uguagliare il diametro *AB*, e dipoi proseguendo il giro decresce: anche la parte *OP* di una linea che gira intorno al punto fisso *O*, intercetta fra questo punto, e la retta *AB*, decresce fino ad uguagliare la perpendicolare *OQ*, e quindi proseguendo il giro indefinitamente cresce. Ciò posto una quantità che fra tutte quelle della sua specie è la più grande, si chiama *maximum*; ed una quantità che fra tutte quelle della sua specie è la più piccola, si chiama *minimum*. Fig. 272.

3. Perciò il diametro del circolo è un *maximum* fra tutte le linee che si possono iscrivere nella sua circonferenza, e la perpendicolare è un *minimum* fra tutte le rette condotte da un punto dato ad una linea data.

4. Si chiamano *figure isoperimetre* quelle che hanno i loro perimetri uguali.

TEOREMA I.

Fig. 273 5. *Fra tutte le linee che si possono condurre dal punto A, preso dentro o fuori della circonferenza BDC, ad un punto della circonferenza medesima, la retta AB che passa pel centro O è un* MAXIMUM, *ed AC, la quale passerebbe pel centro ove fosse sufficientemente prolungata, è un* MINIMUM.

Conducasi pel punto A altra linea qualunque AED; quindi si tirino i raggi OD, OE; avremo

$$AD < OA + OD,$$

ovvero $$AD < AB;$$

ed inoltre $$OC + CA < OE + AE,$$

ovvero $$AC < AE.$$

Lo stesso ragionamento avrà luogo, nel caso che il punto A sia dentro la circonferenza.

TEOREMA II.

Fig. 274. 6. *La somma delle due rette AC, CB condotte dai punti A, e B dati ad un punto C della retta GH, sarà un* MINIMUM, *quando gli angoli da esse formati con GH saranno uguali.*

Sia l'angolo $ACG = BCH$; prolungando AC sino all'incontro E della perpendicolare abbassata dal punto B sopra GH, avremo $DE = DB$; ond'è che ogni punto di GH sarà ugualmente distante da B ed E. Inguisachè se da un punto qualunque O di GH condurremo le rette OA, OB, OE avremo

$$AC + CB = AE,\ AO + OB = AO + OE;$$

ma $$AE < AO + OE.$$

dunque $$AC + CB < AO + OB,$$

come dovevasi dimostrare.

7. *Corollario I.* Il sistema delle due rette AC, CB costituisce il più corto cammino per andare da A in B, passando per un punto della retta GH.

8. *Corollario II.* Fra tutti i triangoli che hanno la medesima base AB, ed il vertice opposto sopra una retta data GH, quello il cui perimetro è un *minimum* sarà ABC, nel quale gli altri due lati AC, BC fanno angoli uguali con GH. Fig. 275.

9. *Corollario III.* Fra tutti i triangoli aventi la medesima base AB, e la medesima altezza espressa dalla distanza delle due parallele AB, GH, quello il cui perimetro è un *minimum* è ABC, nel quale gli altri due lati sono uguali. Fig. 276.

TEOREMA III.

10. *Di tutti i triangoli che hanno per base la corda d'un arco AMB, ed i loro vertici sopra lo stesso arco, il triangolo isoscele è quello nel quale la somma de' due lati non determinati è un* MAXIMUM. Fig. 277.

Sia M il mezzo dell'arco AMB, ed E un punto qualunque dello stesso arco; si conducano le rette AM, AE, BM, BE; quindi sul prolungamento di AM si prenda $MC = MB$, e sul prolungamento di AE si prenda $ED = EB$; finalmente si tirino le rette BC, BD. Poichè gli angoli AMB, AEB sono uguali, le loro metà ACB, ADB saranno esse pure uguali; e perciò la circonferenza descritta dal punto M come centro con raggio MA, la quale dee passare pei punti A, B, C, passerà eziandio pel punto D; adunque mentre AC è diametro, AD sarà corda d'una circonferenza medesima; per cui avremo $AC > AD$; ovvero $AM + MB > AE + EB$, come si doveva dimostrare.

TEOREMA IV.

Fig. 277. 11. *Di tutti i triangoli che hanno per base la corda d'un arco AMB, ed i loro vertici sopra lo stesso arco il triangolo isoscele AMB è un* MAXIMUM.

Le perpendicolari MH, EK abbassate dai punti M ed E sopra AB, saranno le altezze dei triangoli AMB, AEB; ora EK è evidentemente minore di MH, la quale ove fosse prolungata passerebbe pel centro del circolo; dunque poichè i triangoli hanno la base AB comune, si può concludere che il triangolo isoscele AMB abbia una superficie maggiore di AEB. Dunque il triangolo isoscele AMB è un *maximum*.

Fig. 278. 12. *Corollario I.* Fra tutti i triangoli rettangoli aventi la medesima ipotenusa AB il triangolo isoscele ABC è un *maximum*. Infatti la circonferenza descritta sopra AB come diametro dovrà passare necessariamente pei vertici C, C', C'' di tutti i triangoli.

Fig. 279. 13. *Corollario II.* Di tutti i rettangoli che si possono iscrivere in un circolo, il quadrato $AMBK$ è un *maximum*. Infatti la diagonale AB è evidentemente un diametro; ed i triangoli rettangoli AMB, ANB sono respettivamente le metà del quadrato $AMBK$, e del rettangolo $ANBK$. Ora il primo triangolo come isoscele è maggiore del secondo, dunque il quadrato $AMBK$ è maggiore del rettangolo $ANBH$.

TEOREMA V.

Fig. 280. 14. *Di tutti i triangoli aventi un angolo comune B compreso fra due lati la cui somma è data, il triangolo* MAXIMUM *è quello nel quale i due lati non determinati sono uguali.*

Sia $AB = BC$ ed $AB + BC = MB + BN$. Siccome i due triangoli ABC, MBN hanno un angolo comune in B, avremo

$$BAC : BMN :: AB \times BC : BM \times BN;$$

laonde ove si osservi che $AB = BC$, $CN = AM$, $BN = BC + CN$, $BM = BA - AM = BC - CN$, sarà pure

$$BAC : BMN :: \overline{BC}^2 : \overline{BC}^2 - \overline{CN}^2;$$

ma $\overline{BC}^2 > \overline{BC}^2 - \overline{CN}^2$, dunque $BAC > BMN$, come si doveva dimostrare.

TEOREMA VI.

15. *Fra tutti i triangoli della stessa base, e dello stesso perimetro il triangolo* MAXIMUM *è quello nel quale i due lati non determinati sono uguali.* Fig. 281.

Sia $AC = CB$, $AD > DB$, e $AC + CB = AD + DB$; pel vertice C, e pel punto F mezzo di AB, si conduca la retta CF, che prolungheremo sino all' incontro E della parallela condotta pel punto D ad AB. Manifestamente sarà CE perpendicolare ad AB; perciò avremo $AE = EB$; ma $AE + EB < AD + DB$*, dunque $AE + EB < AC + CB$; cioè $AE < AC$. Ora osservando che AE, ed AC sono rispetto ad AF due oblique, potremo conchiudere che $EF < CF$, e per conseguenza che il triangolo scaleno ADB è minore del triangolo isoscele ACB. * III. 9.

TEOREMA VII.

16. *Il quadrato avente per lato la metà d'una retta data AB è il* MAXIMUM *di tutti i rettangoli che si possono costruire con due parti AD, DB della retta medesima.* Fig. 282.

Sia C il mezzo della retta AB; avremo

$$\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2 = AD \times DB\,^*; \qquad \text{* 161.}$$

donde si ricava che il quadrato di AC supera il rettangolo

$AD \times DB$ di una quantità indicata dal quadrato di CD. Dunque il quadrato di AC è un *maximum* fra tutti i rettangoli che si possono formare colle due parti nelle quali ne piaccia dividere AB.

17. *Corollario.* Dunque fra tutti i rettangoli isoperimetri il quadrato è un *maximum*.

TEOREMA VIII.

Fig. 283. 18 *Fra tutti i rettangoli che si possono formare colle perpendicolari abbassate da un punto D del lato AB sopra gli altri due lati del triangolo ABG, quello delle due perpendicolari corrispondenti al punto di mezzo di esso lato è un* MAXIMUM.

Sia C il mezzo del lato AB, e D un punto qualunque del lato medesimo; CK, e DF sieno perpendicolari ad AG; CH, e DE sieno perpendicolari a GB. I triangoli ACK, ADF essendo simili danno la proporzione

$$AC : AD :: CK : DF;$$

i triangoli BCH, BDE anch' essi simili, danno l' altra proporzione

$$AC : BD :: CH : DE;$$

moltiplicando queste due proporzioni termine a termine, avremo

$$\overline{AC}^2 : AD \times BD :: CK \times CH : DF \times DE;$$

* III. 16. ma essendo il punto C mezzo di AB abbiamo $\overline{AC}^2 > AD \times BD$*, dunque $CK \times CH > DF \times DE$, come si doveva dimostrare.

TEOREMA IX.

19 *Di tutti i triangoli formati con due lati dati AB, AC, ed il terzo a piacimento, il* MAXIMUM *è ABC, nel quale essi lati formano un angolo retto.* Fig. 284.

Si conduca la retta $AD = AC$, e di poi si tiri DB; nel triangolo ABD l'angolo BAC formato dai due lati dati AB, AD non sarà retto; perciò abbassando dal punto D la perpendicolare DF sopra AB, sarà $DA > DF$, ovvero $CA > DF$; conseguentemente il triangolo ABC sarà maggiore del triangolo ABD, come si doveva dimostrare.

TEOREMA X.

20. *Di tutti i poligoni isoperimetri, e d'un medesimo numero di lati quello la cui superficie è un* MAXIMUM *ha tutti i suoi lati uguali.* Fig. 285.

Sia $ABCDE$ il poligono *maximum*; conducasi la diagonale AD, e costruiscasi il triangolo ADP, che sia isoperimetro al triangolo ADE. Il poligono $ABCDE$ essendo un *maximum*, sarà maggiore del poligono $ABCDP$; or poichè le superfici di questi due poligoni hanno una parte comune $ABCD$, ne consegue che il triangolo ADE fra tutti i suoi isoperimetri descritti sopra AD debb' essere un *maximum* anch' esso, e perciò maggiore del triangolo APD. Dunque il triangolo AED è isoscele, * cioè $AE = ED$. Nello stesso modo potremo dimostrare essere $ED = DC$, $DC = CB$, $CB = BA$, $BA = AE$. Dunque tutti i lati del poligono *maximum* sono uguali fra loro. * III. 15.

TEOREMA XI.

Fig. 286. 21. *Di tutti i poligoni formati con dei lati dati, ed un ultimo a piacimento, il* MAXIMUM *dev' esser tale che tutti i suoi angoli sieno iscritti in una semi-circonferenza avente per diametro il lato incognito.*

Sia $ABCDF$ il poligono *maximum* fra tutti quelli che si possono formare coi lati dati AB, BC, CD, DF ed un ultimo AF a piacimento; tirata la diagonale BF se l'angolo ABF non fosse retto si potrebbe, rimuovendo opportunamente i lati AB, BF renderlo tale senza alterare la parte $BCDF$; per tal modo si accrescerebbe la super-
* III. 19. ficie del triangolo ABF, * e con essa quella del poligono $ABCDF$; ma questo poligono essendo per ipotesi un *maximum* non può essere aumentato di più; dunque l'angolo ABF è retto: lo stesso è degli angoli ACF, ADF; dunque tutti gli angoli del poligono *maximum* sono iscrivibili in una mezza circonferenza avente il lato incognito di esso poligono per diametro.

22. *Scolio.* Questa proposizione dà luogo a ricercare se in più maniere si possa formare un poligono con dei lati dati, ed un ultimo a piacere che sia il diametro della mezza circonferenza nella quale gli altri lati sono iscritti. A ciò risponde la seguente proposizione.

TEOREMA XII.

23. *Non v' ha che una sola maniera di formare un poligono con dei lati dati, ed un ultimo incognito che sia il diametro della mezza circonferenza nella quale gli altri lati sono iscritti.*

Fig. 287. Conviene premettere che se una retta AB fa l'ufficio di corda rapporto a più archi AMB, $AM'B$ descritti con differenti raggi AC, AC', l'angolo al centro corrispondente a questa corda sarà minore nel circolo il cui raggio

è maggiore; così $ACB < A'C'B'$; perocchè essendo la somma degli angoli $A'CO$, $C'AC$ uguale all' angolo esterno $AC'O$, evidentemente ACO è minore di $AC'O$, e per conseguenza il doppio ACB dell'uno è minore del doppio $AC'B$ dell'altro.

Fig. 286. Ciò posto supponiamo che abbiasi un circolo nel quale avendo iscritti tutti i lati dati AB, BC, CD, DF, l'ultimo AF da determinarsi a piacere, risulti uguale al suo diametro. In altro circolo maggiore le corde AB, BC, ec. corrisponderanno ad angoli al centro minori; la somma di questi angoli, che nel circolo precedente costituiva due angoli retti, nel nuovo circolo sarà minore di questa quantità, cosicchè i punti A ed F non saranno altrimenti estremità d'un diametro. Non lo saranno neppure in altro circolo minore, come si può vedere mediante un ragionamento analogo al precedente. Dunque non v' ha che un circolo, cui possa corrispondere il poligono del quale si tratta.

24. *Scolio.* È manifesto che ai lati AB, BC, CD, DF si potrà dare quell'ordine che vorremo; perchè qualunque esso sia, il diametro del circolo circoscritto sarà sempre lo stesso come pure la superficie del poligono.

TEOREMA XIII.

Fig. 288. 25. *Di tutti i poligoni formati con dei lati dati il MAXIMUM è quello che si può iscrivere in un circolo.*

Sia $ABCDEF$ il poligono iscritto, ed $A'B'C'D'E'F'$ quello non iscrivibile avente i medesimi lati cioè $A'B' = AB$, $B'C' = BC$, $C'D' = CD$, ec. Conducasi il diametro AP; dipoi si tirino le corde CP, DP; sopra $C'D' = CD$ si faccia il triangolo $C'D'P'$ uguale al triangolo CDP; finalmente si conduca $A'P'$. Il poligono $ABCP$ sarà maggiore del poligono $A'B'C'P'$ *, ove però questo pure non sia iscrivibile in un circolo avente per diametro $A'P'$, nel qual caso i due poligoni si uguaglierebbero.* Parimente il poligono $ABDEF$ sarà maggiore del poligono $A'P'D'E'F'$, eccettuato il caso in cui vi fosse uguaglianza. Dunque il poligono intero $ABCDEF$ è maggiore del poligono $A'B'C'D'E'F'$,

* III. 21.
* III. 23.

ove però non sieno perfettamente uguali; ma essi non lo sono perchè l'uno è iscritto nel circolo, e l'altro per ipotesi non è iscrivibile; dunque il poligono iscritto è il maggiore. Togliendo i triangoli uguali CPD, $C'P'D'$ resterà il poligono iscritto $ABCDEF$ maggiore del non iscrivibile $A'B'C'D'E'F'$.

26. *Scolio.* Non v' ha che un solo circolo, e per conseguenza che un solo poligono MAXIMUM che soddisfaccia al quesito; lo che potrebbe dimostrarsi come nel Teor. XII. * * III. 23.

TEOREMA XIV.

27. *Il poligono regolare è un MAXIMUM fra tutti i poligoni isoperimetri, e d'un medesimo numero di lati.*

Sappiamo che di tutti i poligoni che hanno uno stesso perimetro, ed un medesimo numero di lati il più grande è quello nel quale questi lati sono uguali * ; inoltre sappiamo che di tutti i poligoni che si possono formare con dei lati dati, il più grande è quello che si può iscrivere in un circolo*; dunque il più grande di tutti i poligoni isoperimetri, e d'un medesimo numero di lati sarà, quello in cui questi lati saranno uguali, e che nel tempo stesso potrà iscriversi in un circolo; dunque questo poligono sarà regolare.

* III. 20.
* III. 25.

TEOREMA XV.

Fig. 289. 28. *Di due poligoni regolari isoperimetri quello che ha più lati è il maggiore.*

I due poligoni regolari sieno l'esagono $DFGHIK$, ed il triangolo $D'G'I'$; siccome essi si suppongono isoperimetri è manifesto che la superficie sarà maggiore di quella del triangolo, ove l'apotema OE del primo sia maggiore dell'apotema $O'E'$ del secondo; le quali apoteme si supporranno situate sopra una stessa retta PQ, cui per conseguenza risulteranno perpendicolari i lati DK, $D'I'$ dei poligoni; di più questi lati saranno divisi in parti uguali nei punti E, ed E. E siccome gli angoli DOE, $D'O'E'$ metà degli angoli al centro dei poligoni non sono uguali è manifesto che i raggi OD, $O'D'$ sufficientemente prolungati, si dovranno incontrare in un punto A. Or da A si abbassi la perpendicolare AB sopra PQ, e quindi coi centri O, O', e coi raggi OB, $O'B$ si descrivano gli archi BC, BC'; avremo

$$DOE : D'O'E' :: \frac{BC}{BO} : \frac{BC'}{BO'} {}^{*};$$

* II. Teor. IX.

ma l'angolo DOE stà a 4 angoli retti, come DE stà al perimetro $DFGHIK$, e l'angolo $D'O'E'$ stà a 4 angoli retti, come $D'E'$ stà al perimetro $D'G'I'$, dunque

$$DOE : D'O'E' :: DE : D'E',$$

e per conseguenza

$$DE : D'E' :: \frac{BC}{BO} : \frac{BC'}{BO'},$$

ovvero

$$DE \times BO : D'E' \times BO' :: BC : BC'.$$

Or si osservi che il paragone dei triangoli simili ODE, OAB, e quello dei triangoli $O'D'E'$, $O'AB$ anch'essi simili, somministra le seguenti proporzioni,

$$OE : DE :: BO : BA,$$

$$O'E' : D'E' :: BO' : BA;$$

donde si ricava

$$DE \times BO = OE \times BA,$$

$$D'E' \times BO' = O'E' \times BA;$$

e quindi

$$DE \times BO : D'E' \times BO' = OE : O'E';$$

cosicchè abbiamo

$$BC : BC' :: OE : O'E'.$$

Ciò posto si prolunghi l'arco BC' d'una quantità $C'b = C'B$,

e si congiungano i punti M, b coll'arco Mb il cui raggio sia uguale ad OB, cioè uguale al raggio dell'arco MB; la curva BMb sarà maggiore della curva da essa circondata $BC'b$; e perciò BM metà di BMb sarà maggiore di BC' metà di $BC'b$; a più forte ragione sarà $BC > BC'$; dunque, stante la proporzione che abbiamo ottenuta, sarà pure $OE > O'E'$, cioè l'apotema dell'esagono maggiore dell'apotema del triangolo; in generale l'apotema del poligono che ha più lati sarà maggiore dell'apotema dell'altro; dunque di due poligoni regolari isoperimetri quello che ha più lati è il maggiore.

TEOREMA XVI.

Fig. 320. 29. *Il circolo è maggiore d'ogni poligono isoperimetro.*

Basterà dimostrare essere il circolo maggiore di un poligono regolare qualunque isoperimetro; perocchè il poligono regolare, è maggiore d'ogni altro poligono avente il medesimo numero di lati. Sia DE la metà del lato del poligono regolare, OE ne sia l'apotema, ed EOD sia la metà del suo angolo al centro. Sia poi O' il centro del circolo isoperimetro; $O'E'$ ne sia il raggio: si faccia l'angolo $E'O'D' = EOD$; ciascuno di questi angoli sarà la medesima parte aliquota di 4 angoli retti; dunque le linee DE, $D'E'$ saranno la medesima parte aliquota l'una del perimetro del poligono, l'altra della circonferenza del circolo; dunque $DE = D'E'$. Or se si prolunga il raggio $O'D'$ sino all'incontro K della tangente condotta pel punto E' otterremo il triangolo $O'E'K$ simile al triangolo OED, e quindi la proporzione

$$OE : O'E' :: DE : KE',$$

ovvero

$$OE : O'E' :: D'E' : KE';$$

ed osservando che il triangolo $O'E'K = \frac{1}{2} O'E' \times KE'$ è maggiore del settore $O'E'D' = \frac{1}{2} O'E' \times E'D'$, potremo concludere che $KE' > E'D'$, e conseguentemente che $O'E' > OE$; ma il poligono sta al circolo isoperimetro, come l'apotema OE del primo sta al raggio $O'E'$ del secondo. Dunque il circolo è maggiore d'ogni poligono isoperimetro.

IV. I TRIANGOLI SFERICI.

1. Si chiama *fuso* la parte della superficie della sfera racchiusa fra due grandi semi-circoli che terminano a un diametro comune.

2. *Triangolo sferico* dicesi la parte della superficie della sfera compresa fra tre archi di circoli grandi.

3. Due circoli grandi d' una sfera ne dividono la superficie in quattro fusi, e tre circoli grandi la dividono in sei fusi, ove però questi circoli si taglino secondo il medesimo diametro; perchè tre circoli i quali non hanno l' intersezione comune, dividono la superficie sferica in otto parti, le quali sono *triangoli sferici*, essendo ciascuna racchiusa da tre archi di circoli grandi.

4. In generale una parte della superficie della sfera racchiusa da più archi di circoli grandi chiamasi *poligono sferico*.

5. Si possono concepire descritti su la superficie sferica, triangoli, e poligoni sferici formati dagli archi de' circoli minori, ma di questi non faremo proposito. Oltre a ciò intenderemo che il triangolo sferico abbia ciascuno de' suoi tre lati minori della circonferenza d' un circolo grande.

6. I *lati* d'un poligono sferico sono gli archi che ne costituiscono il perimetro. Il fuso è un poligono sferico di due lati.

7. Gli *angoli* poi d' un poligono sferico sono gli angoli dei piani in cui si trovano i loro lati. Per tal modo un angolo sferico sarà acuto, o retto, o ottuso secondo la specie dell' angolo diedro de'due piani, ne'quali si trovano i suoi lati.

8. Or siccome l' angolo di due piani s' intende che sia quello delle due perpendicolari condotte nei medesimi piani

sopra un punto della loro comune intersezione, perciò un angolo sferico qualunque sarà rappresentato dall' angolo che formano le due rette condotte pel vertice respettivamente tangenti a' suoi lati.

Fig. 290. 9. Sia DEF un triangolo sferico descritto su la superficie della sfera avente il suo centro in O; conducendo i raggi OD, OE, OF determineremo una porzione $DEFO$ della sfera compresa fra i piani DOE, DOF, EOF, ed il triangolo sferico DEF; questa porzione della sfera dicesi *piramide sferica*.

In generale chiamasi *piramide sferica* una parte della sfera compresa fra i piani d' un angolo solido avente il vertice nel centro della sfera, ed il poligono sferico intercetto fra i medesimi piani, cui si dà il nome di *base* della piramide sferica.

10. È da osservare che l' angolo solido al vertice d' una piramide sferica contiene tutti gli elementi del poligono sferico che le serve di base; essendochè gli angoli diedri di questo angolo solido sono evidentemente gli stessi angoli del poligono, e gli angoli piani sono respettivamente misurati dagli archi che fanno l' ufficio di lati del poligono stesso. Ciò si può apertamente riscontrare nella piramide sferica triangolare $ODEF$.

11. Ond'è che due triangoli sferici, ed in generale due poligoni sferici avranno i loro elementi respettivamente uguali ogniqualvolta gli angoli solidi cui essi corrispondono al centro della sfera saranno uguali.

Fig. 291. 12. Se i piani di due circoli $ABDC$, $AFDG$ si supporranno perpendicolari fra loro la superficie della sfera sarà evidentemente divisa da essi in quattro fusi uguali, ciascuno de' quali sarà perciò il quarto della superficie sferica. Di più se il piano di un terzo circolo $BFCG$ sarà perpendicolare al diametro AD comune agli altri due, cioè perpendicolare ai circoli $ABDC$, $AFDG$, ciascuno de' suddivisati fusi risulterà diviso in due parti uguali, come per la sovraposizione si può agevolmente dimostrare; inguisachè la superficie della sfera risulterà divisa in otto parti uguali fra loro, le quali saranno otto triangoli sferici con tutti i loro

angoli retti, cui perciò bene si conviene il nome di triangoli sferici *trirettangoli*. Il triangolo trirettangolo è l'ottava parte della superficie sferica.

13. Prendiamo a considerare i due fusi sferici opposti che risultano dai due grandi circoli $BFB'F'$, $BDB'D'$ che si tagliano secondo il diametro BB', e supponiamo che la sfera avendo il suo centro sul piano della *tavola* venga da essa divisa in due emisferi l'uno superiore, l'altro inferiore; le parti dei due fusi situate nell'emisfero superiore saranno i triangoli $D'BF'$, e DBF, e le parti situate nell'emisfero inferiore saranno i triangoli $D'B'F'$, e $DB'F$. Ponendo mente ai triangoli $D'B'F'$ e DBF si vedrà che i loro vertici D' e D, B' e B, F' e F sono punti diametralmente opposti della superficie sferica, dimodochè le rette da cui essi sono congiunti formeranno nel centro della sfera due angoli triedri opposti e simmetrici *, i quali bene dimostrano avere i triangoli sferici DBF, $D'B'F'$ tutti i loro elementi respettivamente uguali*. Ma quando si osservi che gli angoli solidi $ODEF$, $OD'E'F'$ stante la loro simmetria non possono coincidere si vedrà che per alcun modo di sovrapposizione neppure i triangoli DBF, $D'B'F'$ non ostante l'uguaglianza dei loro elementi potrebbero coincidere; ragione per cui si dà loro il nome di *triangoli sferici simmetrici*.

Fig. 292.

* 446.

*IV. 11.

14. Un triangolo sferico non può avere che un solo triangolo simmetrico.

15. Ne' triangoli sferici isosceli non si dà uguaglianza per simmetria, ma sempre uguaglianza assoluta, e di sovrapposizione.

TEOREMA I.

16 *Due punti della superficie d'una sfera determinano un gran circolo, purchè questi punti non sieno le estremità d'uno stesso diametro.*

Infatti pei due punti dati, ed il centro della sfera non si può condurre che un solo piano, e questo piano taglia la sfera secondo un circolo grande, il quale passa pei

due punti dati. Ma i due punti, se fossero le estremità d'uno stesso diametro, si troverebbero in linea retta col centro, ed il numero dei circoli grandi che passerebbero per questi due punti sarebbe indeterminato.

17. *Corollario I.* Per due punti della superficie d'una sfera che non sono le estremità d'uno stesso diametro non può passare che un solo arco di circolo grande.

18. *Corollario II.* Il circolo circoscritto ad un triangolo sferico non può essere che un piccolo circolo della sfera; infatti se questo fosse un gran circolo i tre lati del triangolo sarebbero situati in un medesimo piano, ed il perimetro del triangolo si ridurrebbe alla circonferenza di esso gran circolo.

TEOREMA II.

19. *Quattro punti non situati in un medesimo piano bastano a determinare una superficie sferica.*

La circonferenza che passa per tre dei punti dati può considerarsi come appartenente ad una infinità di superfici sferiche aventi i loro centri sopra la perpendicolare condotta pel centro, e sul piano del circolo determinato dalla circonferenza medesima; ma fra queste superfici sferiche non ve n'ha che una la quale passi pel quarto punto, essendochè uno solo è il punto della perpendicolare equidistante dalla circonferenza, e dal quarto punto dato; dunque i quattro punti dati bastano a determinare una superficie sferica.

TEOREMA III.

Fig. 200.

20. *La perpendicolare AB condotta sul piano, e pel centro d'un circolo qualunque $EGFH$ descritto su la sfera passa pel centro di essa sfera, e ne interseca la superficie in due punti A e B, ciascuno de' quali è ugualmente distante da tutti i punti della circonferenza del circolo $EGFH$.*

La perpendicolare AB dee passare per tutti i punti che sono equidistanti dai punti della circonferenza $EGFH$;

ora il centro O della sfera gode di questa proprietà, dunque esso dee trovarsi sopra AB. Inoltre se dai punti A e B che appartengano a un tempo alla superficie sferica, ed alla perpendicolare AB si conducono delle oblique ai diversi punti della circonferenza $EGFH$, quelle che partiranno dal punto A saranno uguali fra loro, e per la stessa ragione uguali fra loro saranno pur quelle che partiranno dal punto B; dunque ciascuno dei punti A, e B è ugualmente distante da tutti i punti della circonferenza $EGFH$.

21. *Corollario I.* Il punto O centro della sfera, il punto P centro di uno qualunque de' suoi circoli, ed i punti A e B della superficie di essa sfera ciascuno equidistante dai diversi punti della circonferenza $EGFH$, sono quattro punti situati sopra una stessa retta perpendicolare al circolo che si considera; cinque pertanto sono le condizioni cui soddisfà questa retta; ma siccome il punto A gode della proprietà medesima del punto B, perciò queste cinque condizioni si riducono a quattro realmente differenti. Ora è manifesto che due di tali condizioni bastano a determinare la retta AB; perciò ove due delle quattro suddette sieno date, le altre due ne conseguiranno necessariamente; quindi il numero delle combinazioni binarie che possono aver luogo fra i punti O, P, A, più quelle che risultano dall'unire ciascuno di essi colla condizione del perpendicolo cui soddisfà AB, sarà il numero appunto di altrettanti corollarj che risultano dalla proposizione dimostrata. Ci limiteremo ad enunciare i seguenti.

1.° La retta condotta pel centro d'una sfera perpendicolarmente al piano di uno qualunque de' suoi circoli passa pel centro di questo circolo, e determina sopra la superficie di essa due punti di cui ciascuno è ugualmente equidistante da tutti i punti della circonferenza del circolo stesso.

2.° La retta che congiunge il centro d'una sfera con quello d'uno qualunque de' suoi circoli è perpendicolare a questo circolo, e determina sopra la superficie della sfera medesima due punti ciascuno de' quali si trova equidistante da tutti i punti della circonferenza del circolo stesso.

3.° La retta che congiunge il centro d'una sfera, ed un

punto della sua superficie ugualmente distante da tutti punti d'una circonferenza descritta su la sfera stessa, passa pel centro di questa circonferenza, ed è perpendicolare al piano del circolo che essa determina.

22. *Corollario II.* Tutti gli archi di circolo grande condotti dai differenti punti d'una circonferenza $EGFH$ a uno dei punti A, B sono uguali fra loro; infatti le corde loro sono uguali. Così $AE = AG = AF$, ec.; e parimente $BE = BG = BF$; ec.

Di più i piani di questi archi sono perpendicolari alla circonferenza $EGFH$; perocchè essi passano tutti per la linea AB, la quale è perpendicolare al piano del circolo determinato dalla circonferenza medesima. Se tal circonferenza fosse quella d'un circolo grande come $CIDK$ ciascuno degli archi di gran circolo condotti dai suoi diversi punti a l'uno dei punti A, e B sarebbe un quadrante.

23. *Scolio I.* In virtù di questa proprietà i punti A e B si distinguono col nome di *poli* del circolo $EGFH$, mentre la retta AB, come sappiamo *, dicesi *asse* dello stesso
* 396. circolo. I punti A e B, e la retta AB sono pure i poli, e l'asse del circolo grande $CIDK$ parallelo al piccolo circolo $EGIK$. In generale l'asse d'un circolo qualunque della sfera è il diametro della sfera condotto perpendicolarmente a questo circolo, ed i poli di tal circolo sono le estremità del diametro stesso.

24. *Scolio II.* Le distanze de' poli di due circoli uguali descritti su la medesima sfera, o sopra sfere uguali sono uguali.

25. *Scolio III.* Poichè i poli d'un circolo si trovano all'intersezione degli archi di gran circolo condotti pei diversi punti della sua circonferenza perpendicolarmente al suo piano, segue che l'intersezione di due di tali archi basta a determinare uno dei poli.

Per trovare il polo d'un gran circolo $CIDK$ si conduca un arco IA di gran circolo, perpendicolare alla circonferenza $CIDK$ ed uguale ad un quadrante; l'estremità A di tale arco sarà il polo richiesto.

26. *Scolio IV.* Per le proprietà dei poli riesce age-

vole il descrivere su la superficie d' una sfera una circonferenza di cui sia dato un punto E unitamente ad uno dei suoi poli A. Perocchè facendo girare l' arco AE, o qualunque altra linea dello stesso intervallo, intorno al punto A, l' estremità E di questa linea descriverà la circonferenza richiesta.

Agevolmente potremo pure descrivere una circonferenza di circolo grande della quale sieno dati due punti C ed I. Perchè in primo luogo potremo determinare il polo A mediante l' intersezione di due archi descritti dai punti C ed I come centri, con un intervallo uguale ad un quadrante; poi mediante il polo A, e collo stesso intervallo di un quadrante si descriverà la circonferenza $CIDK$.

Finalmente se da un punto dato G dovremo abbassare un arco perpendicolare sopra una data circonferenza $CIDK$ determineremo tal punto D di essa la cui distanza da G uguagli un quadrante, dipoi dal polo D e col medesimo intervallo descriveremo l' arco GI, il quale sarà il richiesto arco perpendicolare a $CIDK$.

TEOREMA IV.

27. *In ogni triangolo sferico un lato è minore della somma degli altri due, e maggiore della loro differenza.* Fig. 290.

1.° Dai punti A, B, C si conducano i raggi OA, OB, OC; gli angoli AOB, AOC, BOC avranno respettivamente per misura gli archi AB, AC, BC; ora $AOB < AOC + BOC$, dunque

$$AB < AC + BC.$$

2.° Suppongasi $AC > BC$; poichè $BC + AB > AC$, togliendo da ambe le parti BC sarà

$$AB > AC - BC.$$

TEOREMA V.

Fig. 293. 28. *Se da un punto O preso dentro il triangolo sferico ABC si conducono alle estremità di un lato BC gli archi di circolo grande OB, OC, la somma di questi archi sarà minore di quella degli altri due lati AB, AC.*

Sia prolungato BO sino all' incontro del lato AB in D; siccome $OC < OD + DC$ aggiungendo da ambe le parti BO, avremo $BO + OC < BD + DC$. Parimente $BD < BA + AD$; aggiungendo da ambe le parti DC si avrà $BD + DC < BA + AC$. Dunque a più forte ragione $BO + OC < BA + AC$.

TEOREMA VI.

Fig. 294. 29. *Il più corto cammino fra due punti A, e B situati su la superficie d' una sfera è il più piccolo dei due archi del gran circolo che passa per questi due punti.*

A dimostrare tal teorema convien premettere un assioma; ed è che avendosi due circonferenze parallele il più corto cammino di uno dei loro comuni poli alla circonferenza che n' è più lontana è maggiore del più corto cammino del medesimo polo all' altra circonferenza.

Postociò se il più breve cammino da A in B non è l' arco di circolo grande AB esso sarà un altra linea, per esempio, $AFCGB$ di cui un qualche punto C non apparterrà all' arco AB; conducendo gli archi di gran circolo AC, BC daremo luogo al triangolo sferico ABC, nel quale ciascuno degli archi medesimi AC, BC sarà minore di AB; perocchè se AC, per esempio, fosse maggiore di AB i punti C, e B si potrebbero considerare come situati sopra due circonferenze parallele aventi per polo comune il punto A, e delle quali la prima sarebbe più lontana della seconda da esso polo, quindi per l' assioma premesso il più corto cammino da A in C sarebbe maggiore del più corto cammino da A in B contro l'ipotesi. Or poichè in ogni triangolo sferico un lato è minore della somma degli altri due, prendendo $Ac = AC$, risulterà $Bc < BC$, perlochè facendo girare il piano dell'arco AC intorno al diametro che passa per A finchè esso arco convenga con AB la linea AFC verrà in Afe, è facendo girare BC intorno a B finchè convenga colla stessa AB la linea BGC verrà in Bgc', e le due linee Afc, Bgc' si segheranno nel punto K. Posto ciò se $AFCGB$ fosse il suo breve cammino da A in B anche $Afc + Bgc$ lo sarebbe; ma $AfK < Afc$, $BgK < Bgc'$, dunque $AfK + BgK < Afc + Bgc'$; dal che risulta essere la linea AKB minore dell'ipotetico più breve cammino $Afc + Bgc'$; dunque il più breve cammino da A in B non può avere un punto C che non sia su l'arco di circolo grande AB, o in altri termini il più breve cammino da A in B avrà tutti i suoi punti su l'arco AB; quest'arco è il più breve cammino da A in B.

TEOREMA VII.

30. *La somma dei tre lati d'un triangolo sferico è minore della circonferenza d'un circolo grande.* Fig. 295.

Sia ABC un triangolo sferico formato dai tre archi di circolo grande AB, BC, AC: prolungando i lati AB, AC finchè s'incontrino in D, si avranno gli archi ABD, ACD i quali saranno due mezze circonferenze; ma nel triangolo BCD si ha $BC < BD + CD$; dunque aggiungendo da ambe le parti $AB + AC$ avremo $AB + AC + BC < ABD + ACD$; donde si rileva essere la somma dei tre lati d'un triangolo sferico minore d'una circonferenza di circolo grande.

TEOREMA VIII.

Fig. 296. 31. *Un angolo sferico BAC ha per misura l'arco MN compreso fra i suoi lati, e descritto dal suo vertice come polo alla distanza d'un quadrante.*

Difatti supponendo che ciascuno degli archi AM, AN sia uguale ad un quadrante, ambedue gli angoli AOM, AON saranno retti; inguisachè l'angolo MON corrisponderà all'angolo de' piani ne' quali si trovano gli archi
* 419. AM, AN *, e rappresenterà l'angolo sferico BAC. Or l'angolo MON è misurato dall'arco MN; dunque l'angolo BAC ha esso pure per misura lo stesso arco MN.

TEOREMA IX.

Fig. 297. 32. *Essendo dato il triangolo sferico ABC se da ciascuno dei vertici A, B, C come poli si descrivono gli archi EF, FD, DE che formino il triangolo DEF, reciprocamente i vertici D, E, F di questo secondo triangolo saranno i poli dei lati BC, AC, AB del primo.*

Il punto A essendo il polo dell'arco EF, la distanza AE è un quadrante; il punto C essendo il polo dell'arco DE, la distanza CE è parimente un quadrante; inguisachè il punto E trovandosi alla distanza d'un quadrante da ciascuno de' punti A, e C sarà il polo dell'arco AC. Nello stesso modo può dimostrarsi essere D il polo dell'arco BC, ed F quello dell'arco AB.

33. *Corollario.* Dunque il triangolo ABC potrà descriversi mediante il triangolo DEF, come il triangolo DEF è stato descritto mediante il triangolo ABC.

34. *Scolio.* A cagione della proprietà dimostrata i triangoli ABC, DEF si dicono *triangoli polari.*

TEOREMA X.

35. *Ciascun angolo d' un triangolo sferico ha per misura il supplemento del lato opposto, preso nel triangolo polare.* Fig. 297.

Si prolunghino gli archi AB, AC sino all' incontro del lato EF ne' punti G, ed H; essendo il punto A polo del lato EF l' angolo A del triangolo ABC sarà misurato dall' arco GH. Ma EH è un quadrante, e tal' è GF, poichè E è il polo di AH, ed F quello di AG; dunque la somma $EH + GF$, oppure $EF + GH$ sarà una mezza circonferenza; dunque l' arco GH che misura l' angolo A è il supplemento di EF.

In secondo luogo l' angolo D del triangolo DEF ha per misura l' arco MI; ma essendo C il polo di DE, e B quello di DF la somma $MC + BI$, o $MI + BC$ è manifestamente una mezza circonferenza; donde segue che MI è il supplemento di BC.

Per tal modo la proprietà di che si tratta è reciproca ad ambedue i triangoli ABC, DEF.

36. *Scolio.* Questa è la ragione per cui ai triangoli ABC, DEF si attribuisce talvolta il nome ancora di triangoli *supplementarj.*

TEOREMA XI.

37. *La somma degli angoli d' ogni triangolo sferico è minore di sei, e maggiore di due angoli retti.*

Perocchè essendo gli angoli A, B, C del triangolo ABC respettivamente misurati dai supplementi dei lati EF, FD, DE del triangolo polare DEF, la somma $A + B + C$ di questi angoli avrà per misura tre mezze circonferenze meno la somma $EF + FD + DE$ dei lati del triangolo polare. Ma la somma $EF + FD + DE$ dei tre lati di un triangolo è minore di una circonferenza, dunque ove essa si tolga da tre mezze circonferenze, il resto sarà sempre minore di tre mezze circonferenze, e maggiore di una mezza, cioè la somma $A + B + C$ degli angoli d' un triangolo sferico sarà minore di sei, e maggiore di due angoli retti.

38. *Corollario.* Da ciò si rileva che la somma dei tre angoli d' un triangolo sferico non è costante come quelle dei tre angoli d' un triangolo rettilineo; essa varia da due sino a sei angoli retti senza mai uguagliare nè l' uno nè l' altro limite; per conseguenza non si può essendo dati due angoli d' un triangolo sferico trovare il terzo.

39. *Scolio I.* Un triangolo sferico può avere uno, due, o tre angoli retti cioè può essere rettangolo, bi-rettangolo, o tri-rettangolo. Se il triangolo AFC fosse bi-rettangolo, vale a dire avesse due angoli retti AFC, ACF il vertice A sarebbe il polo della base FC, e ciascuno de' lati AF, AC uguaglierebbe un quadrante. Se inoltre l' angolo A fosse esso pure retto il triangolo AFC sarebbe tri-rettangolo, ed i suoi lati sarebbero tre quadranti. Fig. 291.

Fig. 298. 40 *Scolio II.* Se bene si osserva nelle precedenti proposizioni si suppone che i triangoli sferici abbiano i loro lati sempre minori della mezza circonferenza; allora ne segue che gli angoli sono sempre minori di due angoli retti; infatti i lati AC, AB quando sono minori della mezza circonferenza debbono essere prolungati ambedue onde s' incontrino in D. Ma la somma dei due angoli ABC, CBD uguaglia due angoli retti, dunque il solo angolo ABC è minore di due angoli retti. Per lo contrario ne' triangoli di cui qualche lato è maggiore della mezza circonferenza, come in quello, per esempio, che si ottiene togliendo dall' emisfero il triangolo ABC, l' angolo opposto ad un lato maggiore della mezza circonferenza, qual' è il lato $AEDC$, supera due angoli retti della quantità indicata dall' angolo DBC.

Ora vedendosi chiaramente che la cognizione degli elementi del triangolo ABC basta a determinare quelli del triangolo $AEDCB$ perciò la risoluzione di uno di tali triangoli, cioè la determinazione delle loro parti, si riduce sempre alla risoluzione d'un triangolo avente tutti i suoi lati minori della mezza circonferenza.

TEOREMA XII.

41. *Se due triangoli descritti su la medesima sfera, o sopra sfere uguali sono equilateri fra di loro, saranno pure equiangoli.* Fig. 299.

Sieno i due triangoli ABC, DEF descritti su le sfere i cui centri sono O, e P; ed abbiasi $AB = DE$, $BC = EF$, $CA = FD$. Conducendo le tangenti Ac, Ab agli archi AC, AB, e le tangenti De, Df agli archi DE, DF, dico che l'angolo BAC sarà uguale all'angolo DEF; in fatti prolungando i raggi OB, OC, PE, PF sino all'incontro delle tangenti che abbiamo condotte, e tirando le rette bc, ef, avremo i triangoli AOb, DPe evidentemente uguali, per cui sarà $Ab = De$, $Ob = Pe$, ed i triangoli AOc, DPf anch'essi uguali donde si avrà $Ac = Df$, ed $Oc = Pf$; cosicchè i triangoli bOc, e Pf avendo un angolo uguale compreso fra lati uguali sono uguali, per cui $bc = ef$; dunque anche i triangoli Abc, Def sono uguali, l'angolo $bAc = eDf$, e conseguentemente l'angolo sferico A è uguale all'angolo sferico D. Nello stesso modo si dimostrerebbe l'uguaglianza degli angoli B ed E, C ed F.

42. *Scolio.* È da osservare che gli angoli uguali si trovano respettivamente opposti ai lati uguali.

TEOREMA XIII.

43. *Se due triangoli descritti su la medesima sfera o sopra sfere uguali hanno un angolo uguale compreso fra lati respettivamente uguali avranno ancora il terzo lato, e gli altri due angoli respettivamente uguali.*

Sia l'angolo A del triangolo ABC uguale all'angolo D del triangolo DEF, il lato $AB = DE$, ed il lato

$AC = DF$; avendo ripetuta la costruzione precedentemente indicata, dall'uguaglianza dei triangoli AOb e DPe, AOc e DPf dedurremo che $Ab = De$, $Ob = Pe$, $Oc = Pf$, $Ac = Df$, e siccome l'angolo $bAc = eDf$, i triangoli bAc, eDf saranno uguali fra loro, e perciò tali saranno pure i triangoli bOc, ePf dai quali ricavasi esser l'angolo $bOc = ePf$, e conseguentemente l'arco $BC = EF$. Frattanto avendo i due triangoli sferici i lati respettivamente uguali per la dimostrazione della uguaglianza dei loro angoli si può ricorrere al teorema precedente.

TEOREMA XIV.

Fig. 300. 44. *Se due triangoli sferici descritti su la medesima sfera o sopra sfere uguali sono equiangoli fra di loro, saranno pure equilateri.*

Siano ABC, DEF i due triangoli dati; abe, def i loro triangoli polari. Poichè nei triangoli ABC, DEF sono uguali gli angoli, ne' triangoli abc, def dovranno essere uguali i lati; or questi essendo fra loro equilateri, saranno pure equiangoli. Finalmente dall'uguaglianza degli angoli de' triangoli abc, def si deduce quella dei lati nei loro polari ABC, DEF. Dunque i triangoli equiangoli ABC, DEF sono nel medesimo tempo equilateri fra di loro.

45. *Scolio.* Questa proposizione non ha luogo nei triangoli rettilinei ne' quali all'uguaglianza degli angoli non può conseguire che le proporzionalità dei lati; ma in due triangoli sferici descritti sopra la medesima sfera, i lati non possono essere proporzionali fra loro senza divenire uguali come archi simili di circonferenze i cui raggi sono uguali. Chè se i triangoli fossero descritti sopra sfere di diverso raggio, posta ne' due triangoli l'uguaglianza degli angoli nè risulterebbe la proporzionalità de' lati, cioè i due triangoli sarebbero fra di loro simili.

TEOREMA XV.

46. *Se due triangoli sferici ABC, DEF descritti su la medesima sfera o sopra sfere uguali hanno un lato uguale comune a due angoli respettivamente uguali, avranno pure il terzo angolo, e gli altri due lati respettivamente uguali.* Fig. 300.

I triangoli polari abc, def dei due triangoli dati avendo un angolo uguale compreso fra lati respettivamente uguali saranno uguali in tutti i loro elementi, cioè avranno gli altri due angoli, ed il terzo lato respettivamente uguali; dunque ne' triangoli dati ABC, DEF gli altri due lati, ed il terzo angolo saranno essi pure respettivamente uguali.

TEOREMA XVI.

47. *In ogni triangolo sferico isoscele ABC gli angoli opposti ai lati uguali sono uguali; e reciprocamente se due angoli d'un triangolo sferico sono uguali il triangolo sarà isoscele.* Fig. 301.

1.° Sia $AB = AC$; pel vertice A, e pel punto D mezzo di BC conduciamo l'arco di circolo grande AD; i due triangoli ABD, ACD avranno i loro lati respettivamente uguali; dunque essi saranno uguali; dunque l'angolo $B = C$.

2.° Reciprocamente se l'angolo $B = C$ sarà $AB = AC$. Infatti sia abc il triangolo supplementario del triangolo dato; essendo $B = C$ avremo $ac = ab$; e conseguentemente l'angolo $b = c$; dunque $AC = AB$.

48. *Corollario*. L'uguaglianza de' due triangoli ABD, ACD dimostra pure essere l'angolo $BAD = CAD$, e l'angolo $ADB = ADC$; donde segue che *in ogni triangolo sferico isoscele l'arco condotto dal vertice al mezzo della base risulta perpendicolare a questa base dividendo l'angolo al vertice in due parti uguali.*

TEOREMA XVII.

Fig. 302 49. *Di due lati d'un triangolo sferico ABC il maggiore è quello che trovasi opposto ad un angolo maggiore, e reciprocamente di due angoli d'un triangolo sferico il maggiore è quello che trovasi opposto ad un lato maggiore.*

Sia $B > A$; conducasi l'arco di circolo grande BD per modo che risulti l'angolo $ABD = A$; avremo $DB = AD$. Ma $BD + DC > BC$; dunque $AD + DC$ ovvero AC è pur maggiore di BC. La proposizione reciprova potrà dimostrarsi pel sussidio del triangolo polare.

TEOREMA XVIII.

Fig. 303. 50. *Se i due lati AB, AC del triangolo sferico ABC sono uguali ai due lati DE, DF del triangolo sferico DEF descritto sopra una sfera uguale, e se nello stesso tempo l'angolo A è maggiore dell'angolo D, il terzo lato BC del primo triangolo sarà maggiore del terzo EF del secondo.*

Si faccia l'angolo $CAG = D$, ed $AG = DE$, e si conduca l'arco di circolo grande GC; i triangoli GAC, DEF avendo un angolo uguale compreso fra lati uguali saranno uguali; si avrà dunque $CG = EF$. Or tre casi diversi possono avvenire, secondochè il punto G cade fuori del triangolo ABC, o sul lato BC, o su la superficie del triangolo.

Se il punto G cade fuori del triangolo ABC, avremo $AB < AI + BI$, $GC < IG + IC$; e quindi $AB + GC < AG + BC$; togliendo da una parte AB, e dall'altra la sua uguale AG, resterà $GC < BC$; dunque $EF < BC$.

Fig. 304. Se il punto G cade sul lato BC, manifestamente GC sarà parte di BC; dunque $EF < BC$.

Finalmente se il punto G cade su la superficie del triangolo ABC, si avrà $AG + GC < AB + BC$, e quindi $GC < BC$; dunque $EF < BC$. Fig. 305.

51. *Scolio.* Reciprocamente se i due lati AB, AC del triangolo ABC sono uguali ai due lati DE, DF del triangolo DEF, e se inoltre il terzo lato CB del primo triangolo è maggiore del terzo lato EF del secondo triangolo, l'angolo BAC del primo triangolo sarà maggiore dell' angolo EDF del secondo.

Perocchè se tal proposizione si nega, l'angolo BAC dovrebbe essere uguale o minore dell' angolo DEF, nel primo caso il lato CB sarebbe uguale ad EF, nel secondo CB sarebbe minore di EF; or l'uno, e l'altro sono contrari alla ipotesi; dunque l'angolo BAC è maggiore dell' angolo EDF.

TEOREMA XIX.

52. *Due triangoli sferici simmetrici sono uguali in superficie.* Fig. 306.

Sieno ABC, DEF due triangoli simmetrici, cioè due triangoli che sebbene abbiano i loro elementi respettivamente uguali non possono coincidere per alcun modo di sovrapposizione a cagione dell' ordine di questi elementi, avendosi $AB = DE$, $AC = DF$, $BC = EF$; dico che la superficie ABC è uguale alla superficie DEF. I lati dei due triangoli essendo uguali, le corde da essi sottese saranno pure uguali, e formeranno triangoli rettilinei uguali; conseguentemente i circoli circoscritti a questi triangoli saranno uguali, e gli archi di gran circolo condotti dai loro respettivi poli P e Q ai vertici dei triangoli sferici proposti saranno tutti uguali fra loro, e formeranno dei triangoli isosceli respettivamente uguali, cioè ABP uguale a DEQ, ACP uguale a DFQ, e BCP uguale ad EFQ, come si può dimostrare mediante la sovraposizione per la ragione stessa che essi triangoli sono isosceli; dunque $ABP + ACP + BCP = DEQ + DFQ + EFQ$; dunque i due triangoli simmetrici ABC, DEF sono uguali in superficie.

53. *Scolio.* I poli P, e Q potrebbero essere situati al di fuori dei triangoli ABC, DEF; allora la loro uguaglianza non risulterebbe altrimenti da quella delle due somme de' triangoli isosceli suindicati, ma da quella di due differenze, le quali agevolmente si potrebbero determinare.

54. *Corollario I.* La medesima dimostrazione vale a provare che le piramidi triangolari sferiche simmetriche sono equivalenti.

Fig. 192. 55. *Corollario II.* Se due grandi circoli DBD', FBF' si tagliano nell' emisfero $DFD'F'$ la somma de' triangoli opposti DBF, $D'BF'$ sarà uguale al fuso il cui angolo è B. Infatti il triangolo $D'B'F'$ è ciò che manca al triangolo $DB'F$ onde abbiasi il fuso avente l'angolo B; d'altra
* IV. 13. parte sappiamo*, che i triangoli $D'B'F'$, DBF sono simmetrici.

56. *Corollario III.* Chiamando *cuneo sferico* la parte della sfera compresa fra due grandi semi-circoli, ed il fuso da essi determinato, potremo pure concludere che le due piramidi sferiche che hanno per basi i triangoli DBF, $D'BF'$ prese insieme equivalgono al cuneo il cui angolo è B.

TEOREMA XX.

Fig. 307. 57. *L' area del fuso $AMBN$ stà all' area della sfera come l' angolo MAN di questo fuso stà a quattro angoli retti, o come l' arco MN che misura quell' angolo sta alla circonferenza.*

Sia in primo luogo l' arco MN commensurabile colla circonferenza $MNPQ$; e per esempio MN stia a questa circonferenza, come 3 sta a 10. Dividendo la circonferenza in 10 parti uguali, l'arco MN ne conterrà 3; conducendo dipoi pei punti di divisione, e pei punti A e B delle circonferenze, la superficie sferica risulterà divisa in 10 fusi uguali, 3 dei quali saranno contenuti nel fuso $AMBN$; difatti i triangoli sferici in che resta divisa la superficie della sfera, e che presi due a due formano i suddivisati fusi sono tutti uguali fra loro. Dunque il fuso $AMBN$ sta alla superficie della sfera, come l' arco MN sta alla circonferenza, oppure come l' angolo MAN del fuso a quattro angoli retti. In secondo luogo se l' arco MN non fosse commensurabile colla circonferenza, col ragionamento stesso di cui si sono veduti molti esempj si proverebbe che tal teorema avrebbe sempre luogo.

58. *Corollario I.* Rappresentando con F l' area di un fuso il cui angolo è A, con K l' area della sfera, con R l' angolo retto, porremo la proporzione

$$F : K :: A : 4R;$$

donde si ha

$$F = \frac{A \times K}{4R}.$$

Perlochè ove, si rifletta che la superficie della sfera consta di otto triangoli sferici trirettangoli *, e che prendendo uno * IV. 12.
di questi triangoli per unità di misura l'area della sfera medesima risulta rappresentata da 8, e finalmente che la quantità $4R$ può essa pure rappresentarsi dal solo numero 4 quando l' angolo retto si prende per unità di misura angolare, avremo

$$F = 2A;$$

equazione di convenzione, la quale vale ad esprimere che il rapporto del doppio dell' angolo del fuso all' unità angolare è uguale al rapporto dell'area del fuso medesimo all'unità superficiale.

59. *Corollario II.* Due fusi F, F' stanno fra loro come i loro respettivi angoli A, A'. Infatti

$$F : F' :: 2A : 2A' :: A : A'.$$

60. *Scolio.* Osservando che nella medesima sfera o in sfere uguali a fusi uguali corrispondono cunei sferici uguali, potremo concludere che il cuneo sferico sta alla sfera come l' angolo del fuso base di esso cuneo sta a quattro angoli retti; e quindi che due cunei sferici stanno fra loro nella ragione dei loro angoli diedri.

TEOREMA XXI.

Fig. 308. 61. ***L' area del triangolo sferico, sta all' area della sfera, come l'eccesso della somma de' tre angoli del triangolo sopra due angoli retti, sta a otto angoli retti.***

Sia ABC il triangolo proposto; prolunghiamo i suoi lati finchè incontrino il circolo massimo $EFGID$ descritto in modo che comprenda il triangolo dato. I due triangoli DAE, HAG presi insieme equivalgono al fuso il cui an-
* IV. 55. golo è A *, dunque in virtù del teorema precedente,

$$DAE + HAG = \frac{A \times K}{4R};$$

come pure $$GBF + IBD = \frac{B \times K}{4R},$$

$$HCI + FCE = \frac{C \times K}{4R};$$

ma la somma di questi sei triangoli supera la superficie della semi-sfera di due volte quella del triangolo ABC; dunque

$$\frac{K}{2} + 2ABC = \frac{A \times K}{4R} + \frac{B \times K}{4R} + \frac{C \times K}{4R};$$

e riducendo

$$ABC = \frac{K}{8R}(A + B + C - 2R),$$

ovvero

$$ABC : K :: A + B + C - 2R : 8R,$$

come si doveva dimostrare.

62. *Corollario.* Prendendo poi per unità delle superfici sferiche il triangolo trirettangolo, e per unità angolare l'angolo retto, avremo

$$ABC = A + B + C - 2;$$

equazione convenzionale, la quale vale ad esprimere che il rapporto dell'eccesso della somma degli angoli d'un triangolo sferico sopra due angoli retti all'unità angolare è uguale al rapporto dell'area del triangolo sferico all'unità superficiale.

63. *Scolio I.* La medesima dimostrazione applicata alla piramide triangolare sferica avente per base il triangolo ABC * ne porta a concludere, che la piramide sferica sta alla sfera, come l'eccesso della somma dei tre angoli diedri di tal piramide sopra due angoli retti, sta a otto angoli retti. * IV. 56.

64. *Scolio II.* È da osservare che mentre il triangolo sferico DEF vien paragonato al triangolo tri-rettangolo, la piramide sferica $DEFO$ avente per base DEF, vien paragonata alla piramide sferica tri-rettangola, e l'angolo solido O al vertice della piramide $DEFO$ vien esso pure paragonato all'angolo solido al vertice della piramide tri-rettangola, cui si dà il nome di *angolo solido retto.* Da ciò si raccoglie che due piramidi triangolari sferiche stanno fra loro come le loro basi, e come gli angoli solidi formati ai loro vertici: e poichè una piramide poligona può dividersi in più piramidi triangolari, segue che due piramidi qualunque stanno nella medesima proporzione dei poligoni che loro servono di basi, e degli angoli solidi al vertice delle medesime. Per la qual cosa ove fosse d'uopo determinare il rapporto di due angoli solidi qualunque dovremmo immaginare descritte dai loro vertici come centri due superficie sferiche dello stesso raggio, e paragonare le superficie dei poligoni intercetti fra le loro facce. V'ha più che prendendo per unità di misura degli angoli solidi l'angolo solido retto, il numero esprimente l'area del poligono indicherà pure la misura dell'angolo solido corrispondente. Così dato che l'area d'un poligono sia $\frac{2}{3}$, cioè che questo poligono sia i $\frac{2}{3}$ del triangolo tri-rettangolo, l'angolo solido che gli corrisponderà al centro della sfera sarà esso pure i $\frac{2}{3}$ della unità cui si riferisce, ovvero dell'angolo solido retto. Fig. 290.

TEOREMA XXII.

Fig. 309. 65. *Di tutti i triangoli sferici che si possono formare con due lati dati CA, CB prendendo il terzo a piacere, il* MAXIMUM *è quello nel quale l'angolo compreso fra i lati dati è uguale alla somma degli altri due angoli.*

Supponiamo che nel triangolo ABC abbiasi l'angolo $BCA = CBA + BAC$, e nel triangolo $A'BC$, dove $A'C = AC$, l'angolo $BCA' > BCA$; dico che l'area del primo, la quale è espressa dalla quantità

$$CAB + CBA + BCA - 2,$$

è maggiore dell'area del secondo espressa dalla quantità

$$CA'B + CBA' + BCA' - 2.$$

Si prolunghino i lati AB, AC finchè s'incontrino in D, ed i lati $A'B$, $A'C$ finchè s'incontrino in D'. Le due somme $BCD + BCA$, $CBA + CBD$ saranno uguali fra loro essendo ciascuna uguale a due angoli retti; quindi osservando che $BDC = BAC$, ne verrà

$$BCD + BCA + BDC = CBA + CBD + BAC;$$

ma per ipotesi, $BCA = CBA + BAC$, dunque anche $CBD = BCD + BDC$.

Ciò posto prendiamo a ricercare un punto equidistante dai punti B, C, D'; ed a tale uopo incominciamo dal condurre l'arco BI per modo che risulti l'angolo $CBI = BCD$, e conseguentemente l'angolo $IBD = BDC$; i due triangoli IBC, IBD saranno isosceli, donde si ricava che $IC = IB = ID$; e che il punto I mezzo di CD è equidistante dai tre punti B, D, C. Così può pure dimostrarsi essere K mezzo di AB ad uguale distanza dai tre punti A, B, C.

Or dal punto I si conduca un arco IF perpendicolare sopra BC; ogni punto M di questo arco sarà equidistante
* IV. 43. dai punti B, e C*; cosicchè un punto il quale sia equidistante da C, B, e D' si ritroverà necessariamente sul medesimo arco FIG; ma è facile dimostrare che questo punto non può essere I dove FIG incontra DC, nè un punto M situato fra I ed F. Infatti quanto ad I si vede

che $CI + ID' > CD'$; donde, togliendo da ambe le parti CI, si ha $ID' > CD' - CI$, cioè $ID' > ID$. Quanto ad M è da osservare che $BM + MC < BI + IC$*, e che perciò, prendendo la metà da ambe le parti $BM < BI$; ma $D'M > D'C - CM$, e con maggior ragione $D'M > DC - CI$, $D'M > ID$, $D'M > BI$, dunque $D'M > BM$. E da tutto ciò si raccoglie che un punto equidistante da C, B, e D' non potrà rinvenirsi che sul prolungamento IG dell'arco IF. Sia P questo punto per cui abbiasi $PC = PB = PD'$; i triangoli PBC, PCD', PBD' saranno isosceli, ne' quali dovendo gli angoli opposti ai lati uguali essere uguali, sarà l'angolo $PBC = PCB$, $PBD' = PD'B$, $PCD' = PD'C$. Si osservi adesso che essendo la somma $D'BC + CBA'$ uguale a due angoli retti, e tale ancora la somma $D'CB + BCA'$, si ha

* IV. 28.

$$D'BP + PBC + CBA' = 2,$$
$$BCP - PCD' + BCA' = 2;$$

e quindi, sommando,

$$2BCP + CA'B + CBA' + BCA' = 4,$$

ovvero $\quad CA'B + CBA' + BCA' = 4 - 2BCP.$

Venendo al triangolo ABC, ed osservando che

$$BCA + BCI = 2,$$
$$CBA + CBD = 2,$$

avremo

$$BCA + BCI + CBA + CBD = 4;$$

ma $\quad CBD = BCD + BDC = BCI + CAB,$

$$2BCI + CAB + CBA + BCA = 4,$$

ovvero

$$CAB + CBA + BCA = 4 - 2BCI.$$

E da ciò si rileva che le aree dei triangoli $A'BC$, ABC possono respettivamente esprimersi mediante le differenze

$$2 - 2BCP,\ 2 - 2BCI;$$

ma abbiamo veduto che l'angolo BCI è necessariamente

minore dell'angolo BCP, dunque l'area del triangolo $A'BC$ è minore dell'area del triangolo ABC, come si doveva dimostrare.

Fig. 310. Si potrebbe provare nel medesimo modo che l'area del triangolo $A''BC$, dove $A''C = AC$, e l'angolo $BCA'' < BCA$, è minore essa pure dell'area del triangolo ABC. Dunque ABC è il triangolo *maximum* di tutti quelli che si possono formare con due lati dati, ed il terzo a piacimento.

Fig. 311. 66. *Scolio I.* Il triangolo ABC, più grande tra tutti quelli che hanno due lati dati CA, CB può essere iscritto in un semi-circolo, il cui diametro sarà la corda del terzo lato AB. Infatti essendo il punto K, mezzo di AB, equidistante dai tre vertici A, B, C del triangolo è chiaro che la circonferenza del piccolo circolo descritta coll'intervallo KA passerà pei tre vertici stessi; di più ove si osservi che il centro di questo piccolo circolo dee trovarsi e sul piano dell'arco di circolo grande AB, e su quello del piccolo circolo circoscritto ad ABC, cioè su la intersezione di questi due piani, la quale è la retta AB, concluderemo che questa retta è appunto il diametro del medesimo piccolo circolo.

67. *Scolio II.* L'angolo C del triangolo *maximum* ABC è maggiore d'un angolo retto; perocchè essendo l'angolo C uguale alla somma degli altri due angoli A e B esso è per conseguenza uguale alla metà della somma dei tre angoli del triangolo, la quale è sempre maggiore di due angoli retti.

68. *Scolio III.* L'area del triangolo ABC' che si ottiene prolungando i lati CA, CB sino al loro incontro in C', il quale triangolo unito al triangolo *maximum* ABC forma il fuso avente per angolo C, sarà il quarto dell'area della sfera. Infatti *Area* $ABC' = BAC' + ABC' + AC'B - 2 = BAC' + ABC' + ACB - 2 = BAC' + ABC' + BAC + ABC - 2 = 4 - 2 = 2.$

63. *Scolio IV.* Affinchè possa aver luogo il triangolo *maximum* ABC la somma dei due lati dati CA, CB dovrà esser minore della mezza circonferenza d'un circolo

grande; infatti la somma dei due lati BC, CA essendo minore della semi circonferenza BCA, sarà a più forte ragione minore della semi circonferenza d'un circolo grande.

TEOREMA XXIII.

70. *Fra tutti i triangoli sferici della stessa base, e dello stesso perimetro il triangolo* MAXIMUM *è quello nel quale i due lati non determinati sono uguali.* Fig. 312.

Sia AB la base data comune ai due triangoli ACB, ADB, ne' quali supporremo $AC + CB = AD + DB$; dico che il triangolo ACB dove supporremo $AC = CB$ è maggiore del triangolo ADB dove $AD > DB$. Avendo questi due triangoli la parte AMB comune, basterà dimostrare essere il triangolo ACM maggiore del triangolo BDM. A tal uopo si osservi che BM è minore AM, perchè l'angolo MAB è minore di CAB, ovvero del suo uguale CBA; ragione per cui potrà farsi $MI = MB$, e quindi prendendo $MK = MD$, e conducendo KI potrà aversi il triangolo MKI uguale al triangolo MDB.

Ciò posto ricerchiamo se il punto K debba essere fra C ed M, oppure sul prolungamento di MC; sia esso per supposizione sul prolungamento di MC. Essendo CA il più certo cammino da C in A, avremo $CA < CK + KI + IA$; ora $CK = MD - CM$, $KI = BD$, $IA = AM - MB$, dunque $CA < MD - CM + BD + AM - MB$, ovvero $CA < AD - CB + BD$; ed aggiungendo da ambe le parti CB avremo ancora $CA + CB < AD + BD$. Ma per ipotesi $CA + CB = AD + BD$, dunque è assurdo che il punto K cada sul prolungamento di BC; dunque esso dovrà cadere fra C ed M, lo che vuol significare che il triangolo IKM uguale al triangolo MDB deve esser parte del triangolo ACM; per conseguenza il triangolo BMD è minore del triangolo ACM, ed il triangolo isoscele ABC è maggiore del non isoscele ADB.

V. I POLIGONI SFERICI.

TEOREMA I.

Fig. 313. 1. *La somma dei lati d'ogni poligono sferico è minore della circonferenza d'un circolo grande.*

Sia O il centro della sfera su la cui superficie si suppone descritto il poligono $ABCDE$; conducendo i raggi OA, OB, OC, OD, OE, formeremo un angolo solido S, i cui angoli piani AOB, BOC, COD, DOE, EOA, saranno respettivamente misurati dagli archi di circolo grande AB, BC, CD, DE, EA, cioè dai lati del poligono $ABCDE$; ma la somma di tali angoli è
* 440. sempre minore di quattro angoli retti *, dunque la somma dei lati del poligono sarà minore della circonferenza d'un circolo grande.

2. *Scolio.* Questa proposizione si può rendere indipendente dalla considerazione dell'angolo solido S; perocchè si prolunghino i lati DE, BA finchè s'incontrino in M; osservando che $AE < AM + ME$, potremo concludere essere il perimetro del pentagono $ABCDE$ minore del perimetro del quadrilatero $MBCD$. Prolungando dipoi i lati AB, DC sino al loro incontro in N si vedrà pure che il perimetro del quadrilatero $MBCD$ minore del perimetro del triangolo MDN; ma il perimetro del triangolo MDN è minore della circonferenza d'un circolo grande, dunque a più forte ragione il perimetro del poligono $ABCDE$ è minore della medesima circonferenza.

TEOREMA II.

3. *L' area d' un poligono sferico è uguale alla somma de' suoi angoli diminuita del prodotto di due angoli retti pel numero dei lati del poligono meno due.* Fig. 314.

Il poligono essendo $ABCDE$, si potrà mediante gli archi AD, AC decomporre in triangoli, il cui numero sarà uguale a quello dei lati del poligono meno due. Or l' area di ciascun triangolo è uguale all' eccesso della somma de' suoi angoli sopra due angoli retti *, dunque l' area del poligono è uguale alla somma di tutti gli angoli dei triangoli meno il prodotto di due angoli retti pel numero dei triangoli stessi; ovvero è uguale alla somma di tutti gli angoli del poligono diminuita del prodotto di due angoli retti pel numero de' suoi lati meno due. * IV. 58.

4. *Scolio.* Sia A l' area d' un poligono sferico, s la somma de' suoi angoli; ed n il numero de' suoi lati; ad avere A dovremo togliere da s il doppio del numero $n - 2$, cioè $2n - 4$, lo che darà $A = s - 2n + 4$.

Da tal teorema si può dedurre il seguente attinente ai poliedri.

TEOREMA III.

5. *Il numero degli angoli solidi d' un poliedro accresciuto del numero delle sue facce è uguale al numero delle sue costole accresciuto di due unità.*

Le lettere A, F, C rappresentino respettivamente il numero degli angoli, quello delle facce, e quello delle costole del poliedro; dico che avremo sempre

$$A + F = C + 2.$$

Da un punto preso a piacere dentro il poliedro si conducano delle linee rette ai vertici di tutti i suoi angoli; dipoi si concepisca una superficie sferica di cui esso punto sia il

centro, la quale venga incontrata da tutte queste linee in altrettanti punti; finalmente s' immagini che tali punti sieno insieme congiunti con archi di circoli grandi, per modo che ad ogni faccia del poliedro corrisponda un poligono sferico descritto su la superficie della detta sfera; la somma di tutte le aree dei poligoni sarà uguale all' area della sfera medesima; or se supponiamo che $ABCDE$ sia uno di questi poligoni, la cui area venga rappresentata da $s - 2n + 4$, e che nel medesimo modo sieno valutate le aree di tutti gli altri poligoni, sommando tutte le loro aree vedremo che l' area della sfera, rappresentata da 8, risulta uguale alla somma di tutti gli angoli dei poligoni, meno il doppio del numero dei loro lati più 4 moltiplicato pel numero delle facce del poliedro. Ma riflettendo che la somma di tutti gli angoli sferici che si formano intorno ad un medesimo punto A è uguale a 4 angoli retti, vedremo che la somma degli angoli di tutti i poligoni è rappresentata da 4 preso tante volte quanti angoli solidi vi sono, cioè dal numero $4A$. Oltre a ciò il doppio del numero dei lati di tutti i poligoni è uguale al quadruplo del numero delle costole del poliedro, cioè è rappresentato dal numero $4C$, essendochè ad ogni costola del poliedro corrisponde un arco AB, ed è manifesto che un arco qual' è AB fa l' ufficio di lato in due poligoni adiacenti. Dunque avremo $8 = 4A - 4C + 4$, ovvero, prendendo la quarta parte del primo, e del secondo membro, $2 = A - C + F$; per conseguenza $A + F = C + 2$. Fig. 314.

TEROEMA IV.

6. *La somma degli angoli piani costituenti gli angoli solidi d'un poliedro è uguale al prodotto di quattro angoli retti pel numero degli angoli solidi del poliedro diminuito di due unità.*

Sia n il numero dei lati d' una faccia del poliedro; la somma degli angoli di questa faccia sarà rapprentata da $2n - 4$; cosicchè la somma degli angoli di tutte le facce sarà uguale al doppio del numero dei lati di tutte le facce, meno 4 angoli retti presi tante volte quante sono esse facce; cioè tal somma sarà uguale a $4C - 4F$; ma in virtù del teorema precedente $C - F = A - 2$; e $4C - 4F = 4A - 8 = 4 \times (A - 2)$; dunque la somma di tutti gli angoli piani d'un poliedro è uguale al prodotto di quattro angoli retti pel numero de' suoi vertici diminuito di due unità.

TEOREMA V.

7. *Di tutti i poligoni sferici isoperimetri, e d'un medesimo numero di lati quello la cui superficie è un* MAXIMUM *ha tutti i suoi lati uguali.*

La dimostrazione è in tutto somigliante a quella del Teor. X. pag. 285.

TEOREMA VI.

8. *Di tutti i poligoni sferici formati con dei lati dati, ed un ultimo a piacimento il* MAXIMUM *è quello che si può iscrivere in un semi-circolo, il cui diametro sia la corda del lato non determinato.*

La dimostrazione si farà in quel modo stesso di cui si è dato un esempio sopra i poligoni rettilinei alla pag. 286, e profittando dello Scolio I, pag. 312. Qui affinchè abbia luogo il *maximum* vuolsi che la somma dei lati dati sia il minore della semi-circonferenza d'un gran circolo.

TEOREMA VII.

9. *Il* MAXIMUM *dei poligoni sferici formati con dei lati dati è quello che si può iscrivere in un circolo della sfera.*

Per la dimostrazione V. il Teor. XIII pag. 287.

TEOREMA VIII.

10. *Il* MAXIMUM *dei poligoni sferici che hanno lo stesso perimetro, ed il medesimo numero di lati è quello che ha i suoi angoli uguali, ed i suoi lati uguali.*

Ciò risulta evidentemente dai Teor. V, e VII.

Scolio. Tutte le proposizioni precedenti che attengono alla determinazione del *maximum* ne' poligoni sferici si possono riferire eziandio agli angoli solidi di cui tali poligoni sono la misura.

VI. IL SEGMENTO SFERICO.

TEOREMA I.

Il volume del solido generato dal rivolgimento d' un segmento circolare AKB intorno ad un asse OC che passa pel centro, senza tagliare tal segmento, è uguale ai due terzi d' un cilindro avente per diametro la corda AB del segmento stesso, e per altezza la projezione DE in essa corda su l' asse. Fig. 315.

Sia OP la perpendicolare abbassata dal centro su la corda AB; e BL la perpendicolare abbassata dal punto B su la retta AD. Avremo manifestamente

$$vol.\ OAKB = vol.\ OABC - vol.\ OBC,$$

$$vol.\ OAKB = \tfrac{2}{3}\pi\,\overline{OA}^2 \times DC - \tfrac{2}{3}\pi\,\overline{OA}^2 \times EC^{*}$$ * 662.

$$vol.\ OAKB = \tfrac{2}{3}\pi\,\overline{OA}^2 \times DE,$$

ma $$vol.\ OAB = \tfrac{2}{3}\pi\,\overline{OP}^2 \times DE^{*},$$ * 655.

dunque sottraendo dal *vol.* $OAKB$ il *vol.* OAB, otterremo

$$vol.\ AKB = \tfrac{2}{3}\pi\,(\overline{OA}^2 - \overline{OP}^2) \times DE = \tfrac{2}{3}\pi.\overline{AP}^2 \times DE.$$

Corollario I. Sostituendo $\frac{1}{2}AB$ ad AP, avremo

$$vol.\ AKB = \tfrac{1}{6}\pi\,\overline{AB}^2 \times DE.$$

Corollario II. Dunque il solido descritto dal segmento AKB sta alla sfera avente per diametro la sua corda AB, come $\frac{1}{6}\pi\,\overline{AB}^2 \times DE$, ad $\frac{1}{6}\pi\,\overline{AB}^{3\,*}$, ovvero come DE ad AB. * 740. 4.°

TEOREMA II.

Fig. 315. *Un segmento di sfera compreso fra due piani paralleli è equivalente alla semi-somma di due cilindri della medesima altezza DE del segmento, che abbiano respettivamente per basi quelle del tronco, più una sfera avente per diametro quest' altezza DE.*

Prendiamo a considerare il segmento sferico generato dal rivolgimento del mezzo segmento circolare $AKBED$ intorno al suo lato DE.

In virtù del precedente teorema abbiamo

$$vol.\ AKB = \tfrac{1}{6}\pi\,\overline{AB}^2 \times DE;$$

or si osservi che

* 740. 3.° $$vol.\ APBED = \tfrac{1}{3}\pi\,(\overline{AD}^2 + \overline{BE}^2 + AD \times BE) \times DE^{*};$$

dunque sommando, avremo

$$vol.AKBED = \tfrac{1}{6}\pi(2\overline{AD}^2 + 2\overline{BE}^2 + 2AD \times BE + \overline{AB}^2) \times DE.$$

Ma $$\overline{AB}^2 = \overline{BL}^2 + \overline{AL}^2 = \overline{DE}^2 + (AD - BE)^2,$$

ovvero $$\overline{AB}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{BE}^2 - 2AD \times BE,$$

dunque, sostituendo,

$$vol.\ AKBED = \tfrac{1}{6}\pi\,(3\overline{AD}^2 + 3\overline{BE}^2 + \overline{DE}^2)\,DE;$$

oppure finalmente

$$vol.\ AKBED = \tfrac{1}{2}\pi\,(\overline{AD}^2 + \overline{BE}^2) \times DE + \tfrac{1}{6}\pi\,\overline{DE}^3,$$

come dovevasi dimostrare.

Corollario. Ove una delle basi fosse nulla, il segmento di che si tratta avrebbe solo una base, ed il suo volume, fatto $BE = 0$, risulterebbe espresso così

$$\tfrac{1}{2}\pi\,\overline{AD}^2 \times DE + \tfrac{1}{6}\pi\,\overline{DE}^3;$$

dunque *un segmento sferico a una base è equivalente alla metà del cilindro della medesima base, e della medesima altezza, più la sfera avente quest' altezza per diametro.*

VII. I POLIEDRI REGOLARI.

Un poliedro dicesi *regolare* ogniqualvolta tutte le sue facce sono poligoni regolari uguali, e tutti i suoi angoli diedri sono pure uguali.

Ciò ne conduce a stabilire che un poliedro regolare è necessariamente convesso.

TEOREMA I.

Non esistono che cinque specie di poliedri regolari.

Prendiamo a considerare in primo luogo i poliedri a facce triangolari. Quando le facce sono triangoli regolari è manifesto che all'oggetto di formare un angolo solido, non se ne potranno prendere più di 5; perchè l'angolo del triangolo equilatero è i $\frac{2}{3}$ d'un angolo retto, ed il prodotto di tal quantità per 6 è 4 limite cui non può giungere giammai la somma degli angoli piani di un angolo solido.

Ciò posto le lettere A, F, C, rappresentino respettivamente il numero degli angoli quello delle facce, e quello delle costole del poliedro; dato che ad ogni vertice del poliedro facciano capo 3, o 4, o 5 triangoli equilateri sarà $C = \frac{3}{2} F$, perchè ogni faccia avrà tre lati, ed il numero delle costole è metà del numero di questi lati; quindi in forza della equazione $A + F = C + 2$* avremo * V. 5.

$$2A = F + 4.$$

Or riunendo 3 triangoli ad ogni vertice del poliedro, il il numero di tutti angoli piani sarà 3 F, ma dovendo a tre di essi corrispondere un solo angolo solido, avremo

$$A = \frac{1}{3}\ 3F = F, \text{ donde } 2F = F + 4, F = 4;$$

in guisa che la figura sarà allora un *tetraedro regolare*.

In secondo luogo riunendo 4 triangoli ad ogni vertice avremo $A = \frac{3}{4} F$; e quindi $\frac{3}{2} F = F + 4$, $F = 8$, e la figura sarà un *ottaedro regolare*.

In terzo luogo riunendo ad ogni vertice 5 triangoli avremo

$$A = \frac{3}{5} F; \text{ e quindi } \frac{6}{5} F = F + 4, F = 20;$$

cioè la figura sarà un *icosaedro regolare*.

Passando ai poliedri le cui facce sono dei *quadrati*, avremo $C = \frac{4}{2} F = 2F$; per cui risulta $A = F + 2$. Evidentemente non si possono riunire i quadrati che 3 a 3: dunque $A = \frac{4}{3} F$; donde si ha $\frac{4}{3} F = F + 2$, ed $F = 6$; così la figura sarà un *essaèdro*.

Finalmente prendendo per facce dei *pentagoni*: avremo

$$C = \frac{5}{2} F; \text{ e quindi } A = \frac{3}{2} F + 2, \text{ e } 2A = 3F + 4.$$

I pentagoni pure non si possono riunire che 3 a 3; così sarà

$$A = \frac{5}{3} F; \text{ e quindi } \frac{10}{3} F = 3F + 4, \text{ o } F = 12;$$

la figura sarà perciò un *dodecaedro*.

Riesce impossibile il formare un angolo triedro con angoli di esagoni regolari, ed a più forte ragione con quelli di poligioni regolari, d'un maggior numero di lati; dunque cinque solamente sono i poliedri regolari che possono esistere. Passiamo a dimostrare che questi poliedri possono realmente costruirsi.

PLOBLEMA I.

Fig. 316. *Costruire il tetraedro regolare essendo data una delle sue facce.*

Tre triangoli equilateri SAB, SAC, SBC uguali alla faccia data del tetraedro da costruirsi, potranno insieme congiungersi in modo che ne risulti l'angolo triedro S; ciò fatto il triangolo ABC risulterà esso pure eguale alla faccia data; per la qual cosa tutti gli angoli diedri del solido così formato saranno tutti uguali fra loro; cioè esso solido sarà il richiesto tetraedro regolare.

Scolio. Per trovare l' angolo diedro che formano due facce del tetraedro ricercheremo quelle che formano due facce d' un angolo triedro formato da tre angoli di triangolo equilatero *. * 725.

PROBLEMA II.

Costruire l' ottaedro regolare essendo data una delle sue facce. Fig. 317.

Sia AC il lato del triangolo equilatero, che dev' essere la faccia dell' ottaedro da costruirsi; sopra questo lato si descriva il quadrato $ACA'C'$, e pel centro O di esso indicato dall' incontro delle sue diagonali AA', CC' si conduca la perpendicolare BB' al suo piano; quindi si prenda $OB = OB' = OA$ e si tirino le rette BA, BC, BA', BC', $B'A$, $B'C$, $B'A'$, $B'C'$; da tal costruzione si avranno otto tetraedri regolari uguali fra loro, dalla cui somma risulterà il solido $ACA'C'BB'$; questo solido adunque avrà tutte le facce ABC, $BA'C$, $A'B'C$, $B'AC$, ABC', $BA'C'$, $A'B'C'$, $B'AC'$ uguali fra loro che formeranno scambievolmente angoli diedri uguali; dunque tal solido sarà il poliedro regolare a otto facce.

Scolio. L' angolo diedro formato da due facce adiacenti dell' ottaedro regolare si troverà immaginando un angolo solido formato con due angoli di triangolo equilatero, ed un angolo retto, e ricercando l' angolo diedro de' due piani ove sono gli angoli dei triangoli, il quale sarà quello appunto di due facce adiacenti dell' ottaedro *. * 725.

PLOBLEMA III.

Costruire l' icosaedro regolare essendo data una delle sue facce.

Fig. 318. Sia ABC una delle facce dell' icosaedro da costruirsi. In primo luogo con cinque triangoli uguali ad ABC formeremo un angolo solido regolare, ed a tal uopo ci varremo della costruzione seguente; sopra il lato bc si faccia un pentagono regolare $bchid$; dal centro o di questo pentagono s' inalzi sul suo piano una perpendicolare oa la quale dovrà prolungarsi finchè abbiasi $ba = bc$; conducendo le rette ac, ah, ai, ad, l' angolo solido a formato dei cinque angoli piani bac, cah, ec. sarà l' angolo solido richiesto. Infatti essendo le oblique ab, ac, ec. uguali fra loro, ciascuna di esse sarà uguale al lato bc; cosicchè tutti i triangoli bac, cah ec. sono uguali fra loro, ed uguali al triangolo dato ABC. Inoltre gli angoli diedri che questi triangoli formano fra loro sono uguali; perocchè, come agevolmente si scorge, gli angoli solidi b, c, ec. sono uguali fra loro

Ciò posto supponiamo che al punto A si formi un angolo pentaedro regolare uguale ad a di cui una faccia sia ABC; e che al punto B si formi altro angolo pentaedro regolare uguale esso pure ad a, e di cui ABC sia parimente una faccia; questo secondo angolo pentaedro sarà uguale al precedente; i loro angoli diedri saranno per conseguenza tutti uguali; dunque questi due angoli pentaedri avranno due facce comuni ABC, ABD. Parimente i due triangoli ICG, GCF basteranno a formare nel punto C un terzo angolo pentaedro regolare, il qual avrà tre facce comuni con ciascuno dei due precedenti: infatti gli angoli diedri AC, CB hanno quel giusto valore che si richiede onde tal costruzione abbia luogo. Avremo per tal modo riuniti dieci triangoli uguali al triangolo ABC i quali formeranno scambievolmente angoli diedri uguali, e costituiranno la superficie $ABCDEFGIK$; ed è da osservare che nei punti D, E, F, ec. del contorno di essa faranno alternativamente capo tre e due angoli di triangoli equilateri.

Or s' immagini una seconda superficie identica alla precedente; è manifesto che queste due superficie si potranno insieme connettere per modo che i punti D, F, I dove fanno capo tre triangoli si congiungano a quei punti dell' altra superficie dove fanno capo due triangoli; infatti tutti gli angoli diedri di queste due superficie hanno il valore che loro conviene per costituire un angolo solido pentaedro uguale ed a. Dunque le due superficie riunite costituiranno una sola superficie continua composta di venti triangoli equilateri uguali, e formanti angoli diedri uguali; tal superficie sarà adunque quello dell' icosaedro regolare.

Scolio. Per determinare l' angolo diedro di due facce adiacenti dell' icosaedro regolare immagineremo un angolo solido formato da due angoli di triangoli equilateri, ed un angolo di pentagono regolare; quindi ricercheremo l' angolo diedro dei due piani ove sono gli angoli dei triangoli, il quale sarà quello appunto di due facce adiacenti dell' icosaedro.

PROBLEMA IV.

Costruire l' essaedro regolare essendo data una delle sue facce. Fig. 319.

Sia $ABCD$ un quadrato il quale dev' essere una faccia, dell' essaedro da costruirsi; inalzando sul suo piano le perpendicolari AE, BF, CG, DH tutte uguali ad AB, e congiungendo le loro estremità mediante le rette EF, FG, GH, HE avremo un prisma retto le cui sei facce saranno altrettanti quadrati uguali ad $ABCD$; questo prisma adunque sarà il richiesto essaedro.

Scolio. Nell' essaedro regolare l' angolo di due facce adiacenti è un angolo retto.

PROBLEMA V.

Costruire un dodecaedro essendo data una sua faccia.

Sia il pentagono $ABCDE$ la faccia data del dodecaedro da costruirsi. Si formi un angolo triedro A con tre pentagoni uguali ad $ABCDE$ uno de' quali sia, come si vede nella figura, questo stesso pentagono $ABCDE$; i tre angoli diedri di questo angolo triedro saranno uguali. Or se con altri pentagoni uguali ai precedenti formeremo nei punti B, C, D, E altri angoli triedri nel medesimo modo, questi angoli saranno tutti uguali fra loro, e frattanto otterremo una superficie costituita di sei pentagoni uguali al pentagono $ABCDE$ dove tutti gli angoli diedri saranno uguali; e nei punti D, E, F ec. del contorno di essa avremo alternativamente un angolo, o due angoli dei poligoni.

Or costruiscasi altra superficie identica alla precedente; quindi queste due superfici si connettano per modo che gli angoli semplici dell' una si congiungano agli angoli doppj dell' altra. Così otterremo una superficie continua composta di dodici facce uguali, formanti angoli diedri uguali; tal superficie sarà quella del pentaedro regolare.

Scolio. L' angolo diedro che formano due facce del tetraedro potrà determinarsi ricercando quello che formano due facce d' un angolo triedro formato da tre angoli di pentagono regolare.

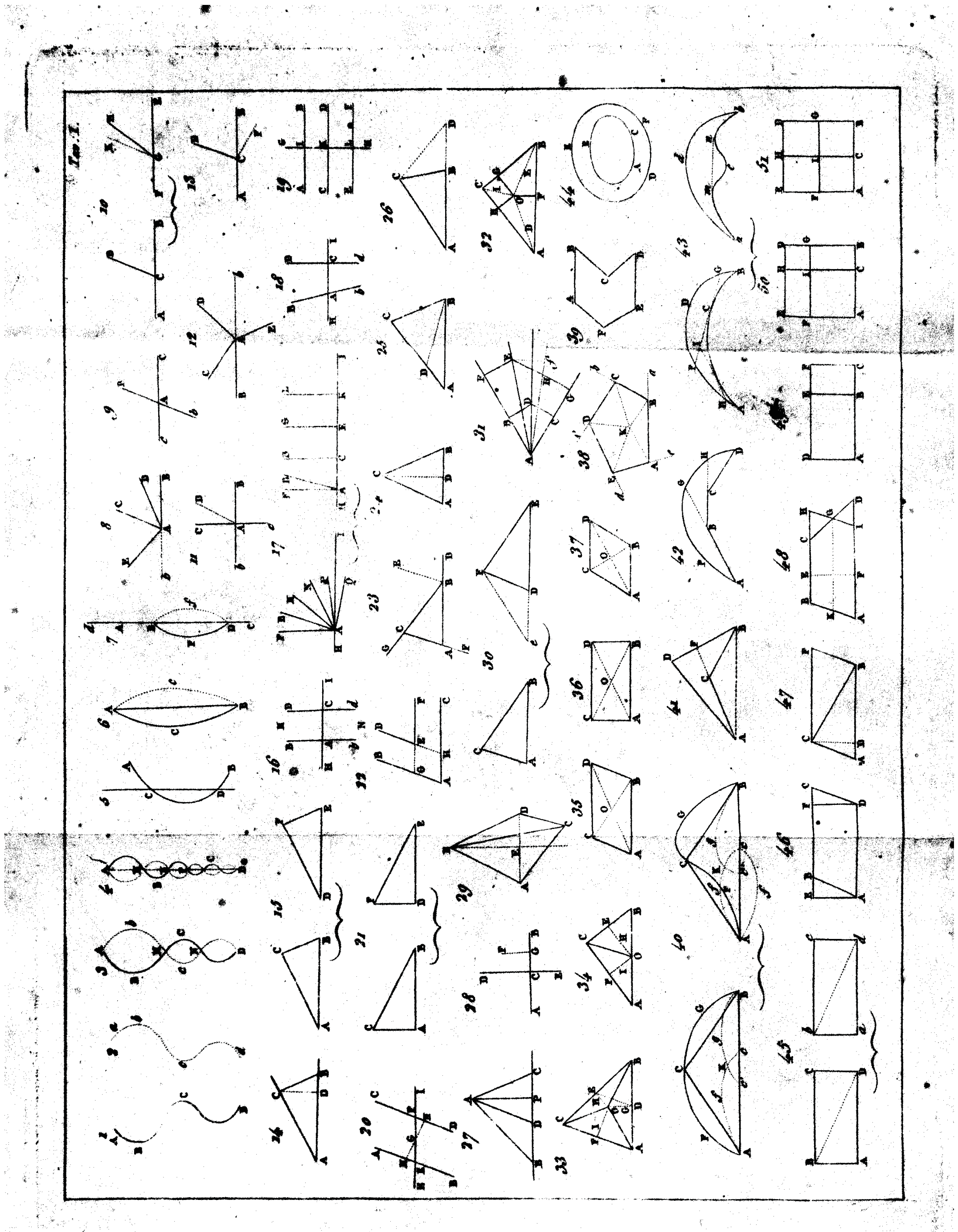
F I N E.

INDICE

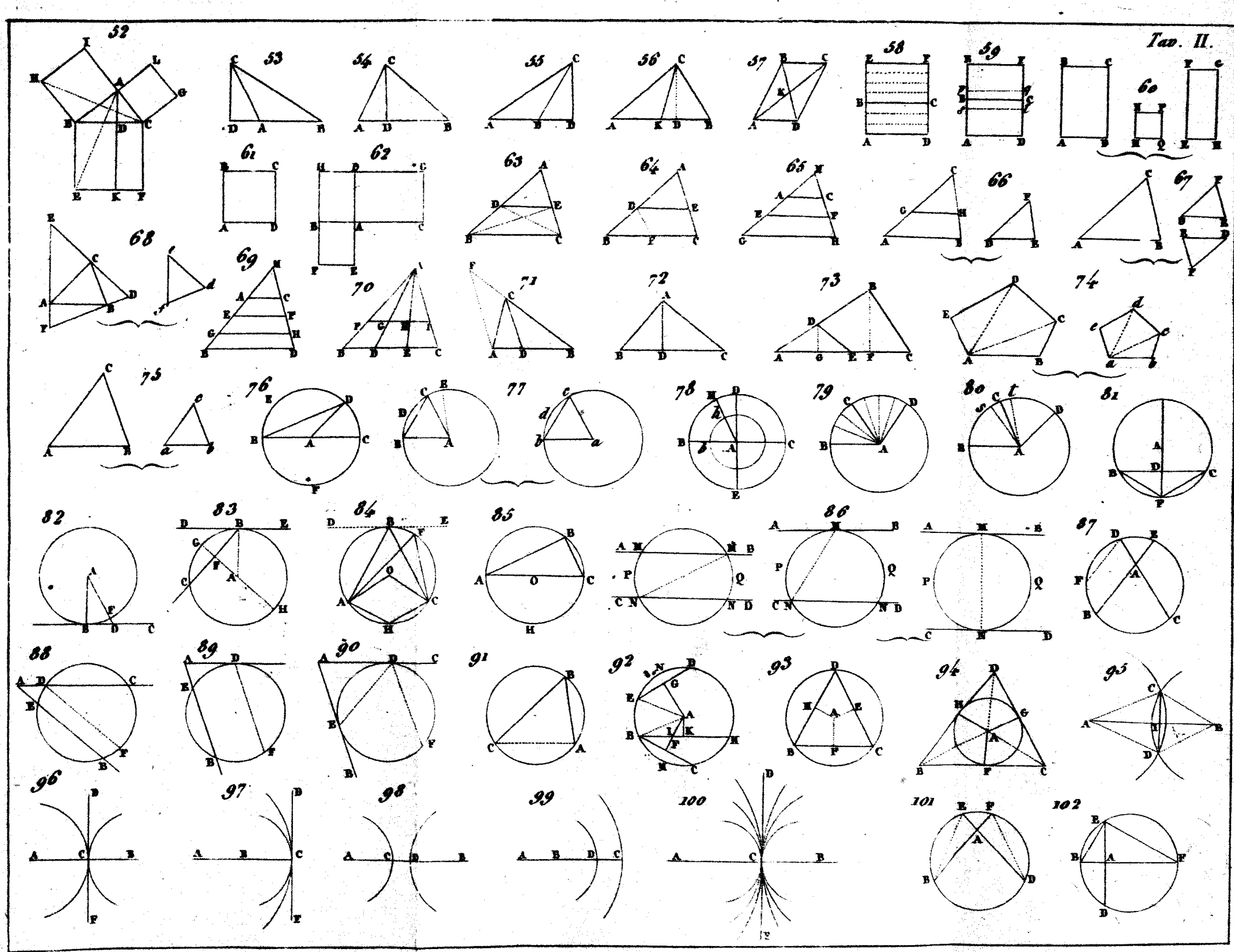
APPENDICE

N. B. I numeri arabi posti in margine richiamano i paragrafi cui si dovrà ricorrere per l'intelligenza delle dimostrazioni: i numeri romani seguiti da numeri arabi si riferiscono all'appendice, di cui il numero romano indicherà la parte, l'altro il paragrafo della parte medesima.

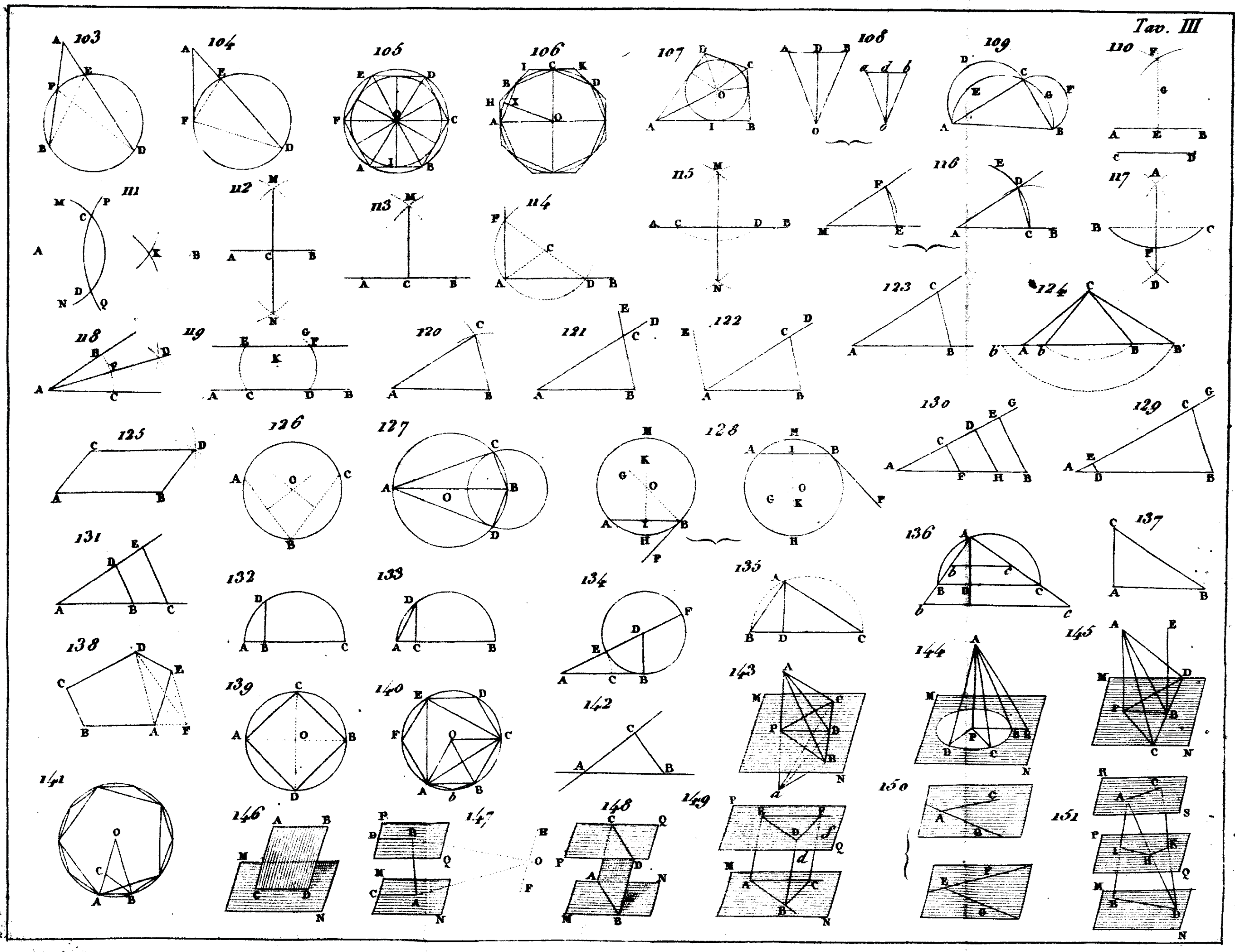
Pag.	verso	ERRORI	CORREZIONI
5	2	superfici	superficie
18	16	*E*	*D*
41	2	superfici	superficie
41	15	superfici	superficie
41	18	superfici	superficie
56	19	$m+n$	$m+1$
57	2	basi	altezze
71	15	Ma sempre sarà	Ma sarà
73	11	*EF*	*CF*
110	31	*BC*	*AB*
112	17	indefiniti	indefinito
288	27	superficie	superficie dell' esagono

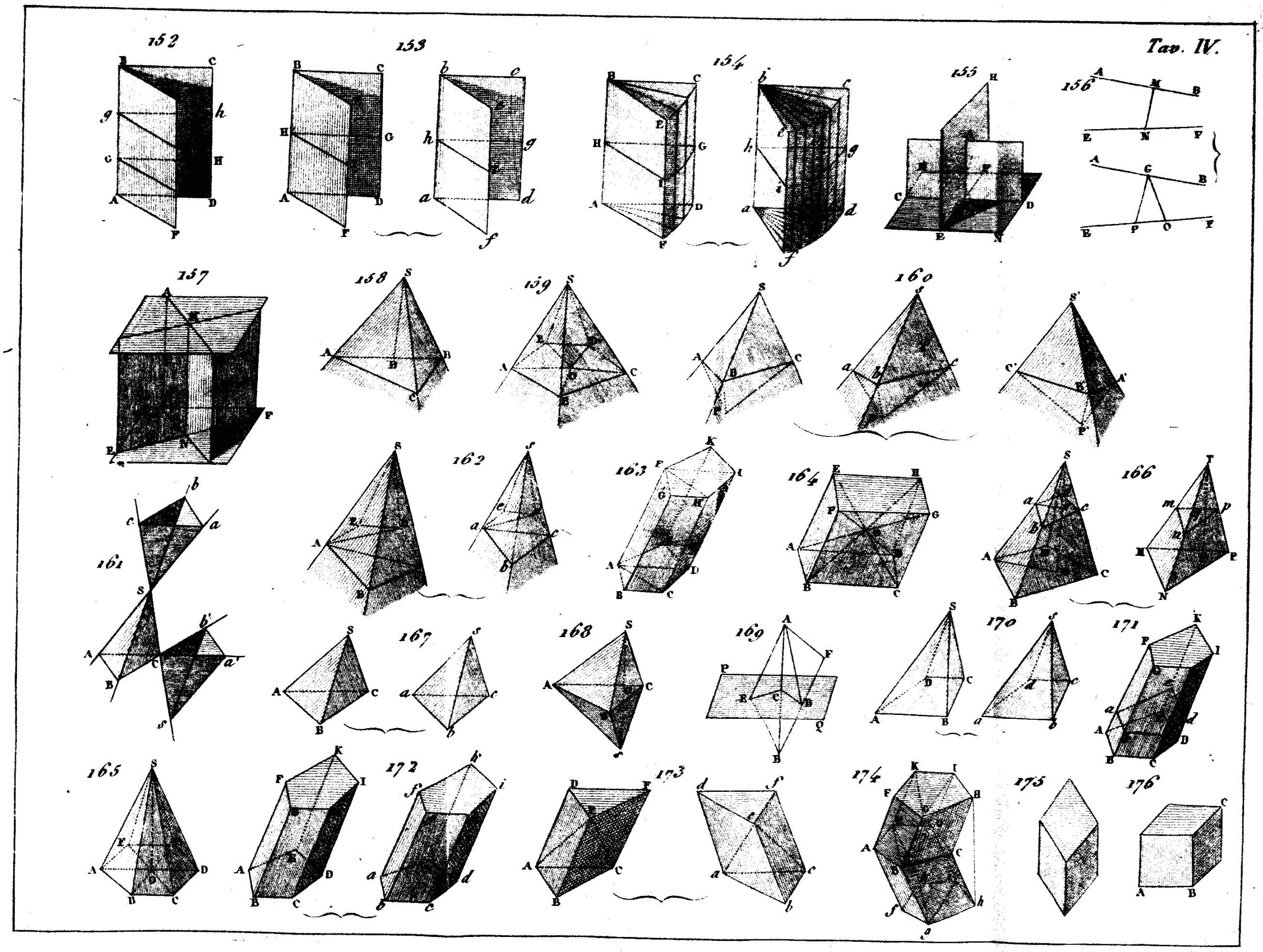


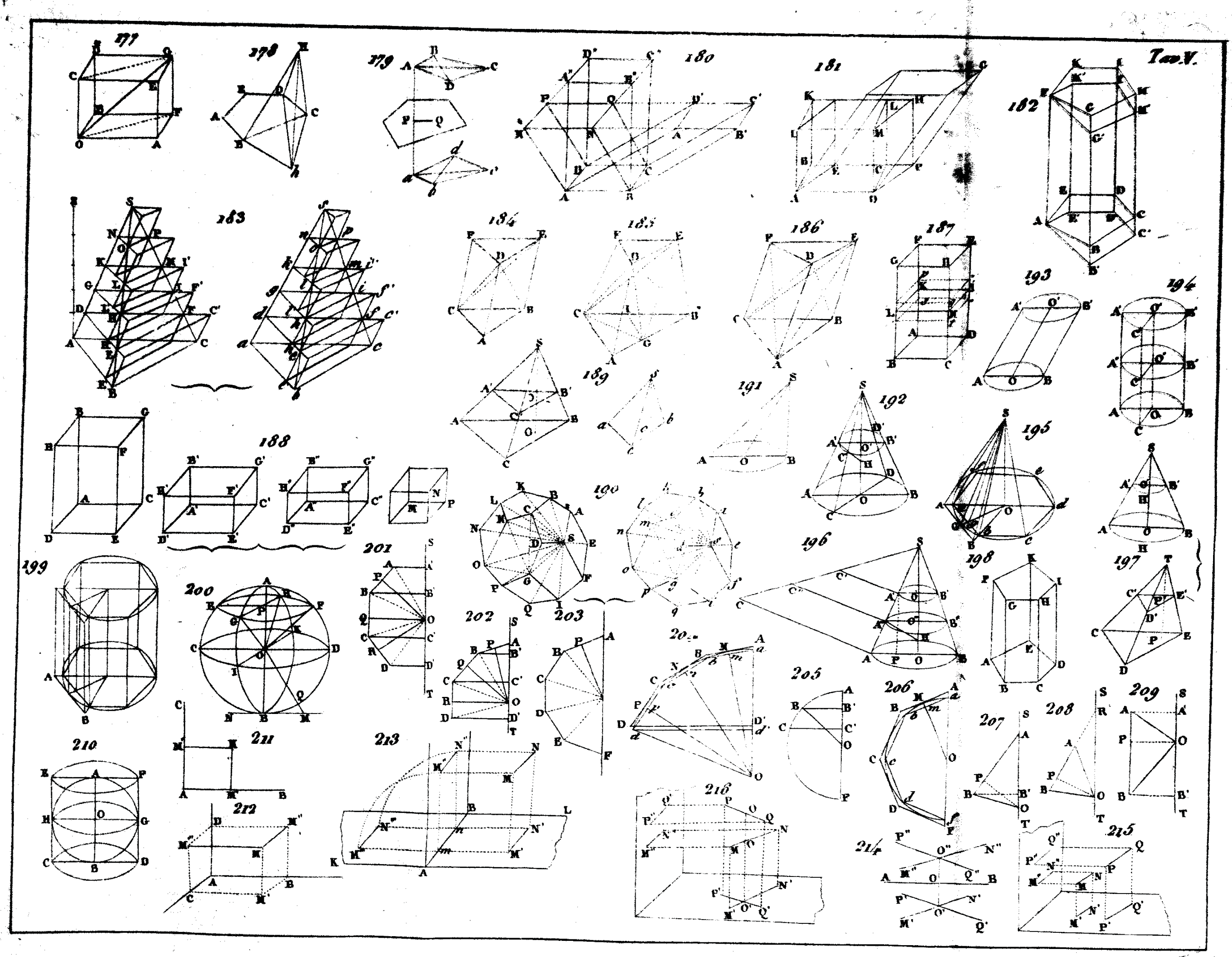
Tav. II.

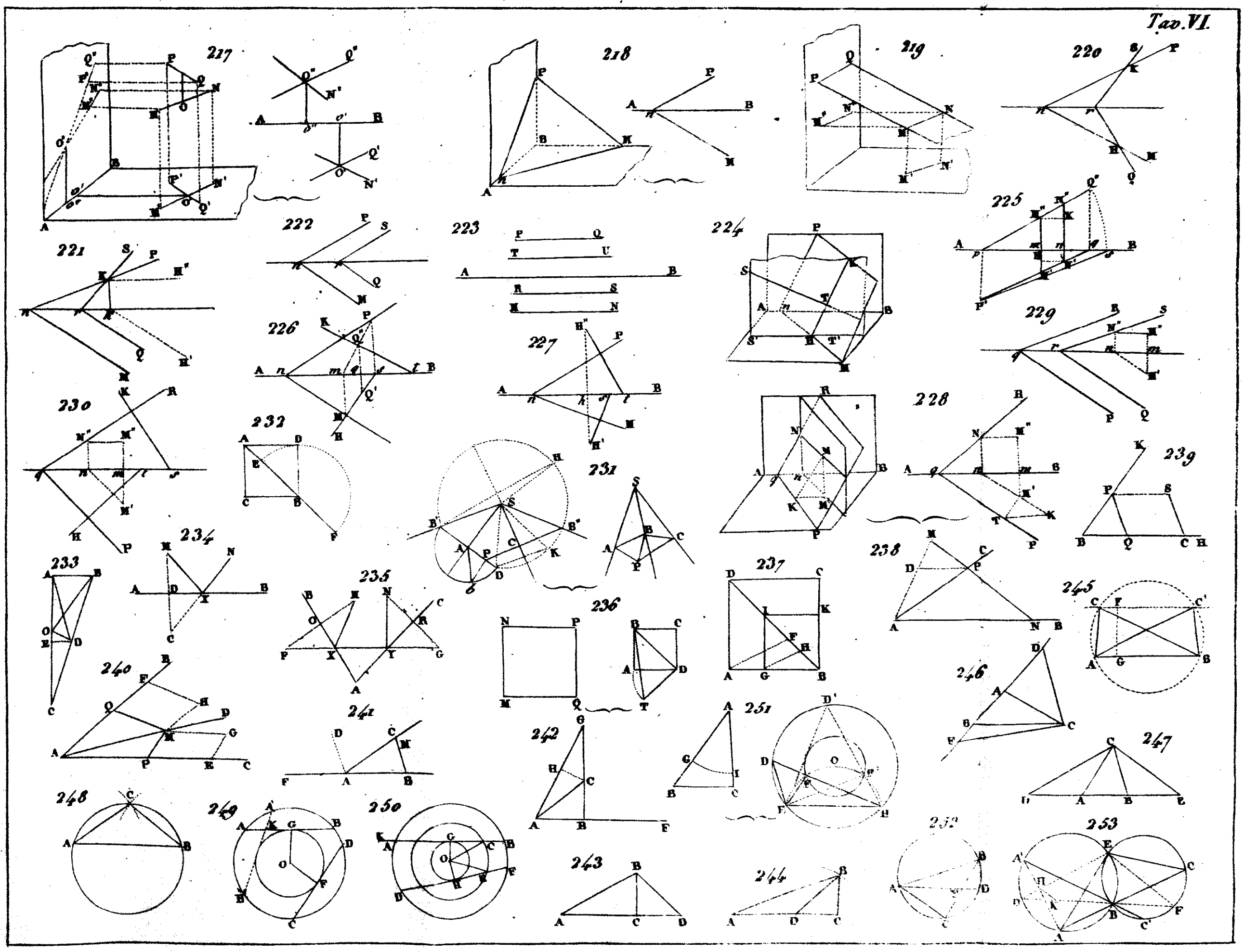


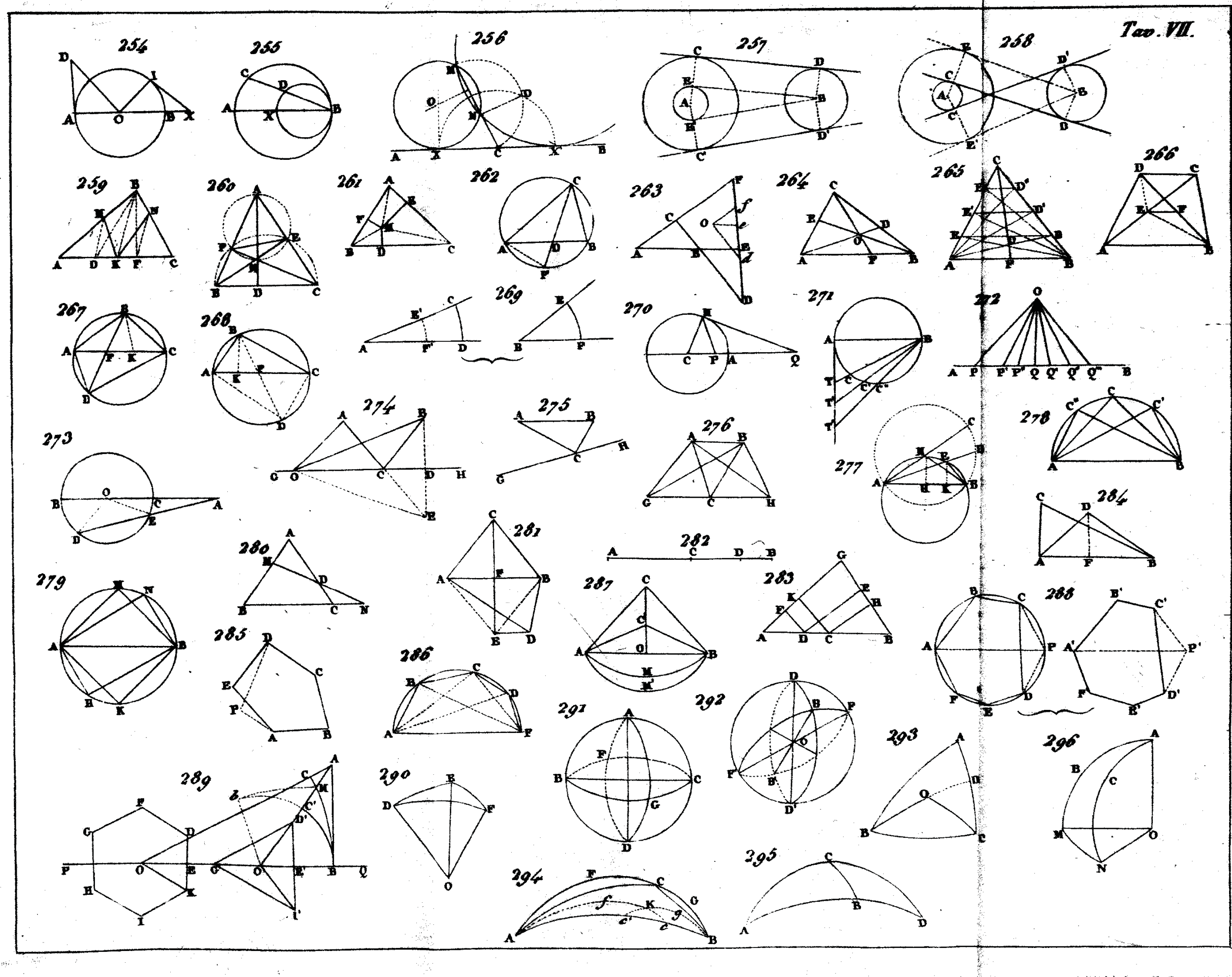
Tav. III




Tav. IV.


Tav. V.


Tav. VI.


Tav. VII.

Tav. VIII