ELEMENTI

DI

GEOMETRIA ANALITICA

CAPITOLO I.

NOZIONI PRELIMINARI.

1. Come l'Algebra si applica alle quistioni numeriche così pure può impiegarsi nelle ricerche di geometria. In effetti rappresentando con lettere le grandezze note ed ignote che entrano in una ricerca di tal natura, e traducendo convenientemente in linguaggio algebrico le condizioni che vi si rapportano, giovandosi ove occorra delle conosciute verità di geometria che vi si possono riferire, verranno a stabilirsi delle relazioni tra le quantità cognite e le incognite; e così queste ultime diveranno note anch'esse applicando a quelle relazioni i processi per la risoluzione delle equazioni.

2. Il ramo delle matematiche che insegna a far uso dell'algebra nelle ricerche di geometria dicesi *Applicazione dell' algebra alla geometria*, o con nome meno esatto, ma reso ormai comune, *Geometria analitica*.

Lasciando però da banda ogni astratta indicazione noi passeremo immediatamente a qualche esempio.

PROBLEMA I.

3. *Condurre in un triangolo ABC [fig. 1.] la retta DE per modo che sia parallela alla base AC, ed eguale alla somma dei due segmenti AD, CE.*

Si cominci dal riflettere che per risolvere questo problema basta conoscere il punto D, o il punto E, e quindi la lunghezza di uno dei quattro segmenti AD, DB, CE, EB, de' quali perciò potrà prendersi per incognito qual meglio aggrada; porremo adunque AD $= x$, ed inoltre AB $= a$, AC $= b$, BC $= c$. Ciò posto dovendo essere la retta DE eguale alla somma delle AD, CE, e trovandosi di queste tre rette denominata la sola AD, che si è chiamata x, per poter tradurre siffatta condizione in linguaggio algebrico è necessario di esprimere le DE, CE nella stessa x, o come suol dirsi *in funzione di* x. Ora per la condizione di DE parallela ad AC si hanno le due proporzioni

$$AB : AC :: BD : DE \quad , \quad AB : BC :: AD : CE \, ,$$

le quali, sostituendo i simboli alle rette, ed osservando che si ha BD $=$ AB $-$ AD $= a - x$, si cangiano in

$$a : b :: a - x : DE \quad , \quad a : c :: x : CE \, ;$$

quindi per le rette DE, CE si hanno le seguenti espressioni

$$DE = \frac{ba - bx}{a} \quad , \quad CE = \frac{cx}{a} \, ;$$

dovendo adunque essere DE $=$ AD $+$ CE, rimpiazzando ciascuna retta con la corrispondente espressione, tra le quantità conosciute a, b, c, e l'incognita x, si avrà la relazione

$$\frac{ba - bx}{a} = x + \frac{cx}{a} \, ,$$

in cui sono espresse tutte le condizioni del problema, e che perciò suol dirsi *equazione del problema*.

4. Risolvendo quest' equazione ch' è del 1° grado si ha

$$x = \frac{ab}{a + b + c},$$

e ne risulta che il segmento incognito AD $= x$ eguaglia il prodotto dei due lati a, b, cioè di AB, AC, diviso per la somma dei tre lati; in conseguenza se questi lati fossero espressi in numeri si conoscerebbe il valore numerico di AD, e 'l problema sarebbe *aritmeticamente* risoluto.

5. Ma i valori delle incognite nei problemi geometrici possono determinarsi, indipendentemente da valutazioni numeriche, mediante processi somministrati dalla stessa geometria. Così nell' esempio recato è manifesto che AD $= x$ è quarta proporzionale in ordine alla somma dei tre lati ed ai due lati AB, AC; cercando adunque questa quarta proporzionale come insegna la geometria si avrà in essa la lunghezza del segmento AD, ossia della incognita x.

6. Giova per tanto osservare, che non è necessario di formare una nuova figura per trovare questa quarta proporzionale, potendo determinarsi immediatamente nel proprio sito sulla stessa figura ch' è il soggetto del problema; in fatti prendendo sulla base AC prolungata la CH eguale alla somma degli altri due lati AB, BC, e congiungendo BH, la parallela tirata da C a BH determinerà su di AB la AD$= x$, giacchè si ha AH : AB :: AC : AD, ossia $a + b + c : a$ :: b : AD, e quindi

$$\text{AD} = \frac{a\,b}{a + b + c} = x.$$

Quando un' incognita nei problemi di geometria è determinata con somiglianti processi si dice *geometricamente costruita*; e si vedrà tra poco che qualunque sia la formola algebrica, che la rappresenta, è sempre possibile di costruirla geometricamente.

Problema II.

7. *In un triangolo ABC [fig. 2.] iscrivere un quadrato che abbia un lato nella base AC.*

Supponendo che DEFG sia il quadrato che si cerca è manifesto che la quistione si riduce a conoscere uno dei suoi vertici, D per esempio, e quindi la lunghezza di uno dei segmenti AD, DB. Ciò posto dovendo essere DE parallela ad AC si ha la proporzione AB : AC :: BD : DE; laonde messo AB $= a$, AC $= b$, BD $= x$, si avrà in simboli $a : b$ :: x : DE, e ne risulta

$$\text{DE} = \frac{b\,x}{a};$$

ma dev' essere DE $=$ DG, dunque si avrà pure

$$\text{DG} = \frac{bx}{a}.$$

Rimane ora ad esprimere la condizione che DG sia perpendicolare alla base AC; e perciò si rifletta che se da B si conduca BP perpendicolare alla stessa base, i triangoli ABP, ADG risultano simili, e quindi si ha la proporzione AB : BP :: AD : DG. Essendo adunque AD $=$ AB $-$ AD $= a - x$, e ponendo di più BP $= h$, la proporzione precedente diviene in simboli $a : h :: a - x : \frac{b\,x}{a}$, e si ha quindi pe 'l problema la seguente equazione

$$hx = h\,(\,a - x\,),$$

osservando che per esser dato il triangolo ABC, anche la sua altezza BP $= h$ è una quantità data. Risolvendo per tanto l' equazione ottenuta si ha

$$x = \frac{a\,h}{b + h};$$

e quindi si rileva che il segmento incognito BD $= x$ è quarto proporzionale in ordine alla somma della base e dell'altezza, alla stessa altezza, ed al lato AB, e si costruisce come segue. Presa sulla base AC prolungata la CH $=$ BP, si tiri CD parallela a BH; sarà BD $= x$; in fatti in virtù della costruzione si ha AH : HC :: AB : BD, vale a dire in simboli $b + h : h :: a :$ BD, e perciò sarà

$$\text{BD} = \frac{a\,h}{b + h} = x.$$

8. Nel risolvere questo problema siamo stati condotti ad introdurre l'altezza BP del triangolo, la quale quantunque sia data quando il triangolo è dato, pure non è uno dei dati immediati della quistione. Del rimanente è chiaro che sia lecito in ogni caso di ricorrere a delle costruzioni ausiliarie, come a tirare perpendicolari, parallele, ec. e quindi introdurre nel calcolo le nuove linee che ne risultano; e spesso con tai mezzi la risoluzione di un problema si rende più facile e semplice.

Problema III.

9. *Trovare sopra una data retta AB* [*fig. 3.*] *il punto V tale che il rettangolo dei segmenti AV, VB sia eguale al quadrato di un' altra data retta PQ.*

Si ponga AB $= a$, PQ $= b$, AV $= x$, sarà VB $= a - x$; si avrà quindi AV VB $= x\,(a - x)$; ma dev' essere AV VB $= b^2$; adunque l' equazione del problema sarà

$$x^2 - ax + b^2 = o,$$

e ne risulta che l' incognita x ha due valori, cioè

$$x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - b^2\right)}$$

$$x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - b^2\right)}.$$

In conseguenza possono determinarsi due diversi segmenti come AV, AV' tali che ciascuno dei punti V, V' risolverà la quistione.

Or si osservi che la quantità $\frac{1}{4}a^2 - b^2$ esistente sotto il radicale equivale alla differenza dei quadrati delle rette $\frac{1}{2}a$ e b, ossia di AM metà di AB e di PQ; perciò il radicale $\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - b^2\right)}$ sarà eguale al cateto di un triangolo rettangolo di cui l' ipotenusa sia quanto $\frac{1}{2}a =$ AM, e l'altro cateto quanto $b =$ PQ. Se dunque intorno ad AM si descriva il semicerchio e vi si adatti la corda AD $= b$, risulterà MD $= \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - b^2\right)}$. Dopo ciò è manifesto, che se dai due lati del punto M si prendano sopra di AB le parti MV, MV' eguali ciascuna ad MD, i due valori di x saranno rappresentati da AV ed AV', mentre si ha

$$\text{AV} = \text{AM} + \text{MV} = \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - b^2\right)}$$

$$\text{AV}' = \text{AM} - \text{MV}' = \frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - b^2\right)};$$

e 'l problema sarà risoluto da ciascuno dei due punti V, V'; i quali sono equidistanti dal punto M medio di AB, e quindi anche dagli estremi B, B' della data retta AB.

Importa di rimarcare, che dovendo nel semicerchio ADM adattarsi la corda AD $=$ PQ, la costruzione cade di difetto se è AD maggiore di AM, vale a dire quando è $b > \frac{1}{2}a$; ma in fatti in questa ipotesi la quantità sotto il radicale è negativa; quindi immaginarii i due valori di x, e però in tal caso il problema è impossibile. Che se la corda AD, ossia PQ, fosse eguale ad AM, il punto D cadrebbe nel punto M, ed i due segmenti AV, AV', che in generale son disuguali, per questo caso, si eguaglierebbero, riducendosi ad AM, e però i due punti V, V' si confonderebbero raccogliendosi nel punto M. Si rileva altrettanto dalle espressioni di x, mentre si ha nella ipotesi attuale $\frac{1}{2}a=b$, ed $\frac{1}{4}a^2=b^2$; quindi il radicale si annulla, ed i due valori di x si eguagliano riducendosi ad $\frac{1}{2}a$, vale a dire ad AM.

10. Nel porre in equazione i problemi che precedono si è fatto uso di una sola quantità incognita; ma in generale, se ciò torni a grado, o a vantaggio del calcolo, si possono introdurre anche più incognite. Così nell'ultimo problema potrebbe porsi $AV=x$, $VB=y$ ed allora è chiaro che le condizioni del problema sarebbero comprese nelle due equazioni

$$x+y=a \quad , \quad xy=b^2,$$

dalle quali si dedurrà poi mediante i processi di eliminazione l'equazione finale in x, o in y.

Quando il problema è *determinato*, cioè a dire quando ammette un numero limitato di soluzioni, come sono i precedenti, allora il numero delle incognite si troverà, com'è noto dall'algebra, sempre eguale a quello delle equazioni dalle quali dipende la sua risoluzione. Se poi le incognite sorpassano il numero delle equazioni, allora l'equazione finale conterrà più di una incognita, e 'l problema sarà *indeterminato*, vale a dire ammetterà una infinità di soluzioni. Che se il numero delle incognite sia inferiore a quello delle equazioni, allora il problema è *più che determinato*, vale a dire esso è proposto con delle condizioni eccedenti, ch'è necessario di sopprimere, perchè la quistione si possa risolvere rendendola determinata.

11. Nei problemi recati finora ad esempio siamo stati condotti ad equazioni finali di 1° e 2° grado; ma ve n'ha di quelli pei quali esse si elevano a gradi superiori. Per tanto anche in geometria, come in aritmetica diconsi problemi di 1°, 2°, 3°, grado ec., quelli le di cui equazioni finali ascendono al 1°, 2°, 3° grado ec.

12. Si scorge assai bene dagli addotti esempii che la soluzione algebrica di un problema di geometria costa di due parti distinte; la *prima* riguarda il modo di tradurre l'enunciato in linguaggio algebrico, o, ch'è lo stesso, il modo di *porlo in equazione*; la *seconda* poi riguarda la *costruzione* di queste equazioni, vale a dire il modo di assegnare geometricamente i valori delle incognite, il che propriamente non è che il ritorno dall'algebra alla geometria, ossia la interpetrazione geometrica dei risultamenti algebrici.

Relativamente alla prima parte faremo riflettere che quantunque i ragionamenti che ci hanno guidati alle equazioni dei problemi risoluti, siano speciali ad essi, pure dee presentirsi che in ogni caso convenga istituire dei ragionamenti consimili, da modificarsi a seconda delle condizioni delle quistioni; ed aggiungiamo che basta anche un lieve esercizio per abituarsi a porre i problemi in equazione. Del rimanente verranno esposte in luoghi opportuni altre norme ed altri principii che grandemente facilitano siffatto scopo.

Per quanto poi riguarda la seconda parte, vale a dire la costruzione dei valori delle incognite, esistono dei precetti speciali, che brevemente andremo ad esporre; se non che per ora dovremo limitarci ai soli problemi di 1° e 2° grado, che rientrano per così dire nella parte elementare della geometria analitica, mentre son dessi i soli ch'è lecito di risolvere col mezzo di linee *rette* e *circolari*, e che corrispondono a quelli che diceansi *piani* dagli antichi geometri. Rispetto ai problemi di gradi superiori, e specialmente a quelli di 3°. e 4° grado, chiamati *solidi* dagli antichi, andremo ad occiparcene testochè avremo fatto conoscere alcune linee curve diverse dal cerchio necessarie alla loro risoluzione.

Costruzioni geometriche delle formole algebriche.

13. Adoprandosi comunemente le semplici lettere a, b, c, ec. per indicare lunghezze di linee, i prodotti di due lettere, ossia di due fattori lineari, come ab, a^2, esprimeranno superficie, e quelli di tre lettere, come abc, $a^2 b$, a^3 esprimeranno volumi. I prodotti di più di tre lettere non hanno alcun significato in geometria, ma pure si debbono ammettere nei calcoli, perchè traggono origine da operazioni legittime di algebra, come sarebbe dal ridurre una proporzione ad eguaglianza ed altre simili.

14. Ora i prodotti di *due* e *tre* lettere pe 'l significato che hanno in geometria sogliono anche dirsi di *due* e *tre dimensioni*; e per analogia diconsi pure di *quattro*, *cinque dimensioni*, *ec.* quelli di quattro, cinque lettere, *ec.*

15. La dimensione di un termine frazionario razionale è misurata per le ragioni, che or ora si vedranno, dall' eccesso della dimensione del numeratore sù quella del denominatore; e la dimensione di un termine irrazionale, il di cui coefficiente sia soltanto numerico, è definita dal quoziente che si ottiene dividendo la dimensione della quantità sotto il segno per l' indice del radicale. Così sono di una dimensione i termini

$$\frac{ab}{c},\ \frac{a^3 b}{c^2 d},\ \sqrt{ab},\ \sqrt{\frac{a^2 b}{c}},\ \sqrt[3]{a^2 b},\ ec.;$$

sarebbero di due dimensioni

$$\frac{abc}{d},\ \frac{a^3 b^2}{cde},\ \sqrt{a^3 b},\ \sqrt[3]{a^4 b^2},\ ec.$$

E così di seguito. I termini di una dimensione diconsi ancora lineari, poichè esprimono, come va a vedersi, lunghezze di linee.

16. Una formola algebrica si dice *omogenea* se i suoi termini sono tutti della stessa dimensione; ed è questa dimensione che chiamasi grado di omogeneità della formola. Così sono omogenee di 1°. grado, od anche lineari, le espressioni

$$a+\frac{bc}{d},\ a+\sqrt{(c^2+b^2)},\ a+\frac{bcd}{ef}+\sqrt{\frac{ab(c^2+de)}{fg}}\ ec.$$

Le seguenti

$$a^2+\frac{b^2 c}{d},\ a^2+\sqrt{\left(a^4+\frac{b^3 c^2}{d}\right)},\ ec.$$

sono omogenee di 2° grado; e così in prosieguo.

17. Egli è manifesto che le relazioni algebriche corrispondenti alle condizioni di un problema geometrico non possono che consistere o in pareggiamenti di linee a linee, di superficie a superficie, e di volumi a volumi, od ancora in proporzioni, che pur si riducono ad eguaglianze tra termini di eguali dimensioni. Segue da ciò che queste relazioni, e quindi anche le equazioni finali dei problemi di geometria, non che i valori delle incognite che ne risultano, sono formole algebriche necessariamente omogenee.

18. Ma queste conchiusioni suppongono che niuna delle grandezze messe a calcolo sia stata presa per unità; mentre nel caso opposto l' omogeneità non più si avvera nelle formole. Per esempio se nel risolvere un certo problema senza aver preso per unità alcuna linea, il valore della incognita x risultasse dato dalla formola

$$x=\frac{a^2 b+abc+cd^2}{ab+c^2},$$

ove invece si ponesse $a=1$ si troverebbe

$$x=\frac{b+bc+cd^2}{b+c^2}.$$

Del rimanente è sempre possibile di rendere omogenee queste formole introducendo come fattori nei termini, che non sono della più alta dimensione, le convenienti potenze della linea ch' erasi assunta per unità. Così si vede che al primo termine del numeratore convenga dare il fattore a^2, al secondo il fattore a, e lo stesso fattore a anche al primo termine del denominatore.

19. I termini componenti il valore di un' incognita lineare dedotto da un' equazione di 1°. grado non possono che consistere in frazioni razionali di una dimensione, come sarebbero

$$\frac{ab}{c}, \quad \frac{a^2}{c}, \quad \frac{abc}{de}, \quad \frac{a^2bc}{d^2e}, \quad \frac{a^2b}{c^2+dc+cf} \quad cc.$$

ed è chiaro che, sapendo costruirli separatamente, si otterebbe subito la lunghezza della retta nascente dall' aggregato di due, tre, o più termini.

Or la prima frazione $\frac{ab}{c}$ si costruisce, come già si è veduto (n. 5.), mediante la quarta proporzionale in ordine alle rette c, a, b; ed è chiaro che l'altra $\frac{a^2}{c}$ è costruita dalla terza proporzionale in ordine a c ed a. La frazione $\frac{abc}{de}$ si può scrivere $\frac{ab}{d} \times \frac{c}{e}$; ma $\frac{ab}{d}$ equivale ad una quarta proporzionale che diremo f; dunque la frazione proposta si riduce all' altra $\frac{fc}{e}$ che si costruisce ancora mercè di una quarta proporzionale. L' espressione $\frac{a^2bc}{d^2e}$ si può scrivere $\frac{a^2}{d} \times \frac{bc}{de}$, e quindi, ponendo $\frac{a^2}{d} = f$, si riduce ad $\frac{fbc}{de}$: la frazione ridotta si costruirà poscia come la terza. Ma senza moltiplicare esempi è chiaro che procedendo in un

modo consimile è sempre possibile di costruire qualunque frazione il cui numeratore e denominatore siano monomii.

Se fosse monomio il solo denominatore, allora la frazione si può scindere in tante altre frazioni per quanti sono i termini del numeratore.

Che se il denominatore non è monomio vi si può sempre ridurre; avendosi per esempio la frazione

$$\frac{a^2b}{c^2+de+cf},$$

si troverà una retta h tale che sia $de = ch$, ossia $h = \frac{de}{c}$, così il denominatore si cangerà dapprima in $c(c+h+f)$, e poscia in cg, prendendo la retta g eguale alla somma delle tre rette c, h, f.

20. I valori delle incognite nascenti da equazioni di 2.° grado, oltre ai termini razionali, contengon poi sempre dei radicali di 2.° grado, riducibili mercè le costruzioni precedenti ad una delle tre forme.

$$\sqrt{ab}, \quad \sqrt{(a^2+b^2)}, \quad \sqrt{(a^2-b^2)}$$

Egli è chiaro che $\sqrt{ab}$ si costruisce con la media proporzionale tra a e b. È pur manifesto che $\sqrt{(a^2+b^2)}$ rappresenta l' ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha per cateti le rette a, b. Ed in fine è evidente che $\sqrt{(a^2-b^2)}$ è costruito dal cateto di un triangolo rettangolo di cui sia a l' ipotenusa e b l' altro cateto (n.° 9); costruzione la quale diviene impossibile nel caso di $a<b$; ed in fatti in questa ipotesi il proposto radicale è immaginario. Mettendo lo stesso radicale sotto la forma $\sqrt{(a+b)(a-b)}$ si vede che potrebbe ancora costruirsi con la media proporzionale tra $a+b$, ed $a-b$, somma e differenza delle rette a, b.

21. Risulta da ciò che precede, che il valore di un' incognita lineare nascente da espressioni sia razionali sia irrazionali può sempre ridursi alla forma

$$x=(a+b+c+\ldots) - (g+h+i+\ldots)$$

ossia ad

$$x = p - q,$$

essendo p la somma di tutte le rette positive, e q quella delle negative. Prendendo poi la retta s eguale alla differenza delle rette p e q si ha semplicemente

$$x = s,$$

e 'l valore di x resta così definitivamente determinato.

Or sia XX′ [*fig. 4.*] la retta indefinita data di posizione nella quale dee trovarsi il punto sconosciuto che risolve il problema, e questo punto siasi supposto in V. Sia inoltre A il punto fisso dal quale si è contata l' incognita $AV = x$; tagliando $AV = s$ si otterrà l' ignoto punto V.

Ma quì si presenta una importante osservazione. Il valore s di x si è tacitamente supposto positivo, cioè si è supposto

$$x = + s,$$

com' è in effetti quando nell' equazione $x = p - q$ si ha $p > q$; ma se è invece $p < q$, allora si avrebbe

$$x = - s,$$

vale a dire il valore di x sarebbe negativo, e non sarebbe più costruito da $AV = s$, poichè ne verrebbe $+s = -s$, ossia $s = o$, ch' è contro l' ipotesi. Si rifletta intanto che il punto fisso A da cui si è contata l' incognita x, cioè AV, potea supporsi in qualunque altro sito della retta XX′, e per esempio in A′ da A verso X′, alla sinistra di A; allora l' incognita sarebbe stata A′V; e però messo $A'V = y$, $AA' = a$, tra le due incognite si avrebbe la relazione $A'V = AA' + AV$, cioè

$$y = a + x,$$

ma è $x = - s$, dunque sarà

$$y = a - s.$$

Questa equazione determina il valore della nuova incognita $y = A'V$, e quindi lo stesso punto V che si sarebbe ottenuto mediante il valore della prima incognita $x = AV$. Intanto per costruire il valore di y convien tagliare da AA′ a contare da A la parte $AV' = s$; dunque sarà V′ e non V il punto che risolve il problema, punto il quale perciò dovrà trovarsi alla sinistra di A e non alla destra, com' erasi supposto nel porre il problema in equazione.

Per verità se $AA' = a$ è minore di s, si ritorna di nuovo ad un risultamento negativo; ma si può evitare questa circostanza prendendo il punto A′ per modo che AA′ risulti maggiore di s.

Segue da tutto ciò, che: *il valore negativo di un' incognita esprimente sopra una retta indefinita la distanza da un punto dato ad un punto sconosciuto si costruisce come fosse positivo per ciò che riguarda la sua grandezza assoluta; ma in quanto al sito conviene che si riporti sulla retta dal punto dato non già nel senso ch' erasele attribuito nel calcolo, ma precisamente in senso opposto.*

22. Questo principio può ancora enunciarsi come segue: *quando si riguardano come positive le rette contate da un punto fisso sopra una linea indefinita in una certa direzione, debbono riguardarsi come negative quelle che si contano nella direzione opposta.*

Costruzioni dirette delle equazioni di secondo grado.

23. Per costruire secondo i principi esposti le due radici di un' equazione di 2° grado, si richiede la sua preventiva risoluzione; ma questa costruzione può effettuirsi senza risolvere l' equazione.

Si osservi dapprima che ogni equazione di 2° grado può ridursi alla forma $x^2 + ax + p = o$. Ora supponendosi lineare l' incognita x, e che niuna delle linee messe a calcolo sia stata presa per unità, anche a esprimerà una linea, e p sarà un prodotto di due dimensioni, riducibile perciò ad un quadrato b^2. Ciò posto modificando in tutt' i modi i segni dei termini dell'equazione si hanno le quattro forme

$$1.^a \ldots x^2 - ax + b^2 = o$$
$$2.^a \ldots x^2 + ax + b^2 = o$$
$$3.^a \ldots x^2 - ax - b^2 = o$$
$$4.^a \ldots x^2 + ax - b^2 = o$$

che andremo separatamente a considerare.

24. L'equazione $x^2 - ax + b^2 = o$, che ha positive entrambe le radici purchè non sieno immaginarie, si può scrivere $x(a-x) = b^2$, e così si vede che x ed $a-x$ sono due linee tali che la loro somma è eguale ad a, e'l prodotto eguale a b^2. In conseguenza se intorno ad una retta AB $= a$ [*fig.5.*] si descriva il semicerchio, e sulla perpendicolare ad AB si prenda AE $= b$; indi condotta ED parallela alla stessa AB, pel punto F si abbassi la FV perpendicolare ad AB saranno AV, VB i valori delle radici della data equazione: si ha in fatti AV $\times$ VB $=$ FV^2 $=$ AE^2; ora facendo AV $= x$, risulta VB $= a - x$, ed è di più AE $= b$; sostituendo si avrà dunque $x(a-x)=b^2$ cioè l'equazione proposta; e la stessa equazione si avrebbe se invece di AV, si ponga VB $= x$.

Quando è AE$=\frac{1}{2}$AB, cioè $b=\frac{1}{2}a$, e quindi $b^2=\frac{1}{4}a^2$, la retta ED diviene tangente del cerchio, ed i due segmenti AV, VB risultano eguali tra loro e ad $\frac{1}{2}a$: questo caso corrisponde a quello, in cui le due radici dell'equazione sono eguali. Se poi è AE$>\frac{1}{2}$AB, ossia $b^2 > \frac{1}{4}a^2$, la retta ED più non incontra il cerchio, e quest'altro caso corrisponde a quello delle radici immaginarie.

25. L'equazione $x^2+ax+b^2=o$ ha negative le radici, quando non siano immaginarie; se vi si cangia x in $-x$, si ha l'equazione $x^2-ax+b^2=o$, ch'è simile alla precedente, e le cui radici sono eguali a quelle della proposta, ma coi

segni cambiati. In conseguenza le due radici dell'equazione attuale si costruiscono come quelle della prima; ma nella figura relativa al problema converrà prenderle negativamente.

26. La terza equazione $x^2 - ax - b^2 = o$ ha una radice positiva, ed un'altra negativa, e sono sempre reali. Mettendola sotto la forma $x(x-a)=b^2$ si scorge che x ed $x-a$ sono due linee tali che la loro differenza è eguale ad a, e 'l prodotto eguale a b^2, e quindi si palesa la seguente costruzione. Presa [*fig. 6*] la retta AB$=a$, sulla perpendicolare in A si tagli AE $= b$; indi si descriva il cerchio che abbia il centro nel punto C medio di AB, e per raggio CE; questo cerchio segherà in ogni caso la AB prolungata in due punti V, V', e saranno AV, AV' i valori delle radici dell'equazione proposta, positiva la prima e negativa la seconda. In fatti si ha AV $\times$ AV'$=$AE^2; ma facendo AV$= x$ risulta AV'$=$BV$=$AV$-$AB$=x-a$, ed è di più AE$=b$, perciò sostituendo si avrà $x(x-a)=b^2$, ch'è la data equazione, e ne segue che AV n'è la radice positiva. Se poi si fa AV'$= -x$, essendo AV$=$AB$+$AB'$=a-x$, sostituendo si avrà $-x(a-x)=b^2$ ossia $x(x-a) = b^2$, ch'e pure l'equazione proposta; quindi AV' è la sua radice negativa.

27. La quarta equazione finalmente, $x^2+ax-b^2=o$, si cangia nella terza cambiandovi x in $-x$; in conseguenza le sue radici si costruiranno nello stesso modo, ma converrà prenderle co' segni cambiati; vale a dire sarà AV' la radice positiva, ed AV la negativa.

28. Si è già potuto scorgere che le costruzioni delle incognite nei problemi geometrici possono variarsi in molte guise; ma è naturale che le più semplici sieno preferite, quelle cioè che richieggono un minor numero di operazioni geometriche; e quanto più semplici sono queste costruzioni tanto più si tiene in conto di elegante la risoluzione del problema. Le equazioni stesse dei problemi possono variare

a seconda delle quantità che si scelgono per incognite e delle linee ausiliari che s' introducono ; ed è chiaro che per quanto più semplici sono queste equazioni tanto più sarà agevole di pervenire a soluzioni eleganti. Non possono dettarsi a tal' uopo delle norme assolute, e solo l' abitudine e l' ingegno del geometra possono supplire a questo difetto ; pur nondimeno v' ha qualche precetto che spesso riesce utilissimo di tenere in veduta, e che verremo dichiarando nel seguente

PROBLEMA IV.

29. *Da un punto P (fig. 7) dato sulla bisecante di un angolo retto XAY condurre una linea retta per modo che la parte VU intercetta tra i lati dell' angolo risulti eguale ad una retta data* d.

Si ponga $AV=x$, e compiuto il quadrato PIAL si faccia $PI=PL=AI=AL=a$. Pe'l triangolo rettangolo UAV si avrà

$$UV^2=AV^2+AU^2;$$

ma è $UV=d$, $AV=x$, ed inoltre essendo simili i triangoli UAV, PIV si ha $AU : AV :: PI : IV$, cioè $AU : x :: a : x-a$, donde

$$AU=\frac{ax}{x-a};$$

sostituendo si avrà dunque

$$d^2=x^2+\frac{a^2x^2}{(x-a)^2},$$

ovvero, facendo sparire il fratto, e sviluppando

$$x^4-2ax^3+(2a^2-d^2)x^2+2ad^2x-d^2a^2=0$$

e ne risulta che il problema dipende da un' equazione di 4° grado.

30. Traducendo il problema in equazione la retta UV si è supposta nell'angolo XAY, ma è ben chiaro che, oltre la retta

UV, esiste in quest' angolo un' altra retta U'V' che pur soddisfa alla quistione. Di più nel problema si è richiesto che questa retta dovesse trovarsi nell' angolo compreso dalle rette XX', YY' le quali formano non uno ma quattro angoli retti ; ed è manifesto che evvi un'altra soluzione nell' angolo XAY', come U''V'', ed un'altra nell'angolo X'AY, qual sarebbe U'''V'''. Quindi è che si può soddisfare alle condizioni della quistione in quattro modi diversi ; e si riconosce facilmente che le due soluzioni negli angoli XAY', X'AY sono sempre possibili, mentre le due nell'angolo XAY esigono per esser possibili che la data linea d sia sufficientemente grande.

31. Se invece di AV si ponesse AV', ovvero $AV''=x$ si perverrebbe alla stessa equazione di poc' anzi ; ma se per l'incognita x si prendesse AV''' si giungerebbe all' equazione

$$x^4+2ax^3+(2a^2-d^2)x^2-2ad^2x-d^2a^2=0.$$

Or cade sotto l' occhio che quest' ultima equazione si trasmuta nella precedente cambiando x in $-x$; perciò le due equazioni hanno le stesse radici, ma co' segni invertiti , val dire che le positive dell' una sono negative nell' altra, e viceversa. Da ciò risulta che una sola di queste due equazioni, per esempio la prima, basta per dare tutte le quattro soluzioni del problema, purchè si avverta di portare i valori negativi da A verso X', quandochè i positivi sono contati da A verso X.

Per tanto le quattro radici di ciascuna delle due equazioni in x saranno rappresentate nella figura da' quattro segmenti AV , AV' , AV'' , AV''' ; ed è chiaro che dei quattro punti V , V' , V'' , V''' tre , come V , V' , V'' deggiono trovarsi da A verso X , ed un solo , V''' , da A verso X' ; perciò la prima equazione, in cui l' incognita x si è contata A verso X, avrà tre radici positive AV, AV', AV'', ed una negativa , ch'è AV''' . Per l' opposto la seconda equazione per la quale l' incognita è contata da A verso X' avrebbe tre radici negative, cioè AV, AV', AV'', ed una sola positiva, ch' è AV'''.

32. Dipendendo il problema da un' equazione di 4° grado i valori della incognita non potrebbero costruirsi co' mezzi finora esposti; ma un esame più accurato farà riconoscere che può farsi dipendere da equazioni di 2° grado. Adoprando due incognite per porre il problema in equazione faremo AV$=x$, AU$=y$, e come poc' anzi PI$=a$, UV$=d$; allora avendosi AU: AV:: PI: IV, sarà in simboli $y:x::a:x-a$, e ne conseguita $y(x-a)=ax$; inoltre essendo AV^2+AU^2=UV^2 sarà $x^2+y^2=d^2$; e così tutte le condizioni del problema saranno comprese nelle due equazioni

$$xy=a(x+y) \qquad (1)$$

$$x^2+y^2=d^2 \qquad (2)$$

Se si elimina y si perviene alla medesima equazione di 4° grado in x ottenuta da principio, ed è chiaro che eliminando x si avrebbe ancora la stessa equazione, cangiatavi però la x in y. Segue da ciò che i quattro valori di x sono eguali ai quattro valori di y, il che del resto si rileva a colpo di occhio dalla figura, mentre i valori di x essendo rappresentati da AV, AV', AV'', AV''', e quelli di y da AU, AU', AU'', AU''', si ha evidentemente AV=AU', AV'=AU, AV''=AU''', AV'''=AU''.

Intanto senza eseguire queste eliminazioni si può dalle equazioni (1) e (2) ricavare un' equazione capace di condurre alla determinazione del valore della somma delle incognite $x+y=$ AV+AU. In fatti sommandole membro a membro, dopo aver moltiplicato la prima per 2, si ha

$$(x+y)^2-2a(x+y)=d^2; \qquad (3)$$

e facendo $x+y=z$ verrà

$$z^2-2az=d^2 \qquad (4)$$

Quindi è che la somma delle incognite ha due valori uno

positivo, l' altro negativo espressi da

$$z=x+y=a\pm\sqrt{(a+d^2)}.$$

Se invece di VU si considera la soluzione V'U' è chiaro che si perviene allo stesso risultamento, poichè si ha AV+AU= AU'+AV'. Volendo poi le equazioni corrispondenti alla soluzione V''U'' basterà cangiare nelle (1) e (2), o solo nella (3) la y in $-y$, e così si avrà

$$(x-y)^2+2a(x-y)=d^2,$$

equazione conducente alla determinazione della differenza delle incognite $x-y=$ AV'' $-$ AU''; differenza la quale del resto non è che la somma algebrica delle incognite x e $-y$. Ponendo $z=x-y$ si ha l' equazione

$$z^2-2az=d^2,$$

la quale è identica alla (4); e perciò le due radici di questa equazione esprimeranno una la somma AV + AU, equivalente ad AV'+AU', e l'altra la differenza AV''—AU'' equivalente ad AV''' — AU'''; e poichè questa differenza è quantità negativa, per essere evidentemente AV'' < AU'', ne segue che il valore di AV + AU è dato dalla radice positiva, e quello di AV'' — AU'' dalla radice negativa.

Per costruire le due radici dell' equazione $z^2-2az=d^2$ si prenderà AN$=d$, e poscia le IB, IB' eguali ciascuna ad IN, si avrà così

$$AB = a+\sqrt{(a^2+d^2)} = AV + AU$$

$$AB' = a-\sqrt{(a^2+d^2)} = AV''-AU''.$$

Intanto per compiere la risoluzione del problema si osservi che essendo AB = AV + AU si ha BV = AU; or se da V si tiri VQ perpendicolare ad AB risulta AV = VQ; perciò il triangolo BVQ sarà eguale e simile ad UAV, e quindi eguale, simile, e similmente posto a V'AU'. Segue da ciò che la retta BQ è eguale e parallela a V'U' che pareggia la retta d. Nel modo stesso conducendo V' Q' perpendicolare alle stessa AB si riconoscerà BQ' eguale e parallela a V U, e quindi eguale a BQ $= d$. In conseguenza il cerchio che ha il centro in B e per raggio la retta d passa pei punti Q, Q' incontri di AP con le perpendicolari ad AB in V,V', e i raggi BQ,BQ' saranno paralleli alle due soluzioni V'U', VU. Si vedrebbe in simil guisa che il cerchio avente il centro in B',e d per raggio, passa pei punti Q'',Q''' segnati sù di AP dalle perpendicolari in V'',V''', e che i raggi B'Q'', B'Q''', son paralleli alle altre due soluzioni V'''U''',V''U''. Ed in riassunto il problema proposto si risolverà come segue.

Presa AN $= d$ si taglino le IB, IB' eguali ciascuna ad IN. Indi co' centri B, B' si descrivano i cerchi che abbiano per raggi la stessa d, e siano Q, Q', Q'', Q''' i punti ov' essi incontrano la AP. Le parallele condotte da P ai quattro raggi BQ, BQ', B'Q'', B' Q''' risolveranno il problema.

33 L'analisi precedente ci ha condotti a considerare come una sola incognita la somma delle rette AV, AU, e si è trovato che questa incognita ha due valori dipendendo da un' equazione di 2° grado; ma così in fatti esser dovea, dapoichè questa somma ha un valore unico per le due soluzioni VU, V'U', come unico è per le altre due V''U'',V'''U'''. Per l'opposto prendendosi per incognita l'una o l'altra della rette AV, AU l'equazione ascende al 4° grado, mentre ciascuna di esse ha quattro valori diversi. Or da ciò si trae questa regola importante, che: *per determinarsi alla scelta della incognita conviene esaminare qual' è quella che deve avere un minor numero di valori.*

34. La stessa analisi ha fatto vedere che si ottiene una medesima equazione di 4° grado prendendo per incognita o la retta AV, o la AU, mentre poi se si prende per incognita la loro somma si perviene ad un' equazione di 2° grado; ma in simili casi può conseguirsi lo stesso scopo adottando per incognita qualunque altra quantità che abbia una medesima relazione con quelle che producono identiche equazioni, come sarebbe la loro somma, o differenza, o la media proporzionale, o finalmente ogni altra quantità convenientemente scelta.

35 La scelta della incognita dee certamente destare tutta l'attenzione del geometra se intenda di pervenire alla risoluzione più semplice ed elegante; ma la più propria non sempre si presenta a prima vista e senza un accurato e diligente esame. Così nel problema risoluto evvi ancora a fare una scelta più conveniente; in fatti il geometra esercitato vede all'istante che la retta VE (*fig. 8.*) elevata perpendicolarmente a VU, e la V'P sono egualmente inclinate ad LP, mentre i triangoli VPE, LPU' risultano simili, e perciò è l'angolo VEP $=$ LPU' $=$ V'PE. Ei quindi conchiude che VE sia eguale a V'P, e di seguito la V'E perpendicolare a V'U': da ciò poi risulta che la distanza dal punto P al punto E è la stessa per le due soluzioni VU, V'U'. Similmente si vedrebbe che la distanza dal punto P al punto E', segnato sopra LP dalla perpendicolare in V'' a V'' U'' sia la stessa anche per l' altra soluzione V'''U'''; e ne risulta che prendendo per incognita o PE, e PE' l'equazione non possa essere di grado superiore al 2°. Altronde conosciuti i punti E, E' è chiaro che si otterrebbero i punti V,V', V'',V''' nelle intersezioni della retta XX' co' semicerchi descritti intorno alle rette PE, PE' come diametri.

Pongasi adunque PE $= x$, e si dinotino ancora con t, u i cateti PV, VE del triangolo PVE, vale a dire i segmenti PV, PU della retta VU; sarà $t + u = d$, ed essendo $PE^2 = PV^2 + VE^2$, sarà ancora $x^2 = t^2 + u^2$; ma è di più PV$\times$VE $=$ PE$\times$PI, cioè $tu = ax$, e quindi $2tu = 2ax$; perciò si avrà ancora $x^2 + 2ax = (t+u)^2$

vale a dire si avrà l'equazione di 2° grado in x

$$x^2 + 2ax = d^2 .$$

Risolvendola si ha

$$PE = -a + \sqrt{(a^2 + d^2)};$$

$$PE' = -a - \sqrt{(a^2 + d^2)},$$

e quindi si ricava la seguente elegantissima soluzione.

Si prenda $PN = d$; poscia le LE, LE' eguali ciascuna ad LN, e si descrivano i cerchi che abbiano per diametri le PE, PE'. Le rette condotte da P ai quattro punti V, V', V'', V''' in cui questi cerchi segano la retta AP risolveranno il problema.

36. Spesso, essendo data la grandezza, ovvero le espressioni algebriche di alcune parti di una figura, e che possono esser composte di elementi cogniti, e incogniti, è necessario di conoscere le espressioni di altre parti, che dipendono dalle prime, vale a dire che ne sono funzioni; e ciò sia per esser nel caso di porle a calcolo, sia per averne la valutazione numerica. Noi passeremo quindi a far conoscere nel seguente problema talune rimarchevoli espressioni di cui si fa un uso frequente.

Problema V.

Dati i tre lati di un triangolo determinare le seguenti cose: I°. le sue altezze; II° la sua superficie; III° il raggio del cerchio circoscrittibile; IV° il raggio del cerchio iscrittibile.

Supposto che ABC (*fig.* 9.) sia il triangolo, di cui trattasi, si dinotino con a, b, c i suoi lati opposti rispettivamente agli angoli A, B, C; vale a dire pongasi

$$BC = a, \quad CA = b, \quad AB = c.$$

Si chiamino inotre α, β, γ le altezze corrispondenti a questi lati; S la superficie del triangolo; R il raggio del cerchio circoscrittibile; ed r quello dell'iscrittibile.

37. 1°. *Espressioni delle altezze* α, β, γ. Sia nella figura $AA' = \alpha$ l'altezza corrispondente al lato $BC = a$; per un conosciuto teorema di geometria si avrà

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \times CA',$$

vale a dire

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \times CA';$$

e da ciò risulta

$$CA' = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a};$$

ma è $AA'^2 = AC^2 - CA'^2$, sarà dunque

$$AA'^2 = \alpha^2 = b^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2} = \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2};$$

quindi per la perpendicolare $AA' = \alpha$ si ha la seguente espressione

$$\alpha = \frac{1}{2a}\sqrt{\left(4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2\right)}.$$

Ma la quantità sotto il radicale si può cangiare in un prodotto di fattori, il che specialmente è opportuno se debba valutarsi per mezzo dei logaritmi. In fatti osservando ch'essa è la differenza di due quadrati, si potrà dapprima porre sotto la forma

$$(2ab + a^2 + b^2 - c^2)\,(2ab - a^2 - b^2 + c^2),$$

ovvero

$$\left((a + b)^2 - c^2\right)\left(c^2 - (a - b)^2\right);$$

e poichè ciascuno di questi due fattori si può assoggettare alla stessa decomposizione, si avrà infine

$$\alpha = \frac{1}{2a}\sqrt{(a+b+c)\,(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}.$$

In simil guisa possono ottenersi le espressioni delle altre due altezze β e γ corrispondenti ai lati b, e c; ma poichè la quantità sotto il radicale deve, com' è chiaro, rimanere identicamente la stessa, così è manifesto che non è necessario di ripetere il calcolo, bastando di cangiare nel fattore $\frac{1}{2a}$, che moltiplica il radicale, la lettera a in b per l' altezza β, ed in c per l' altezza γ.

Se si dinoti con $2p$ il perimetro del triangolo, cioè si faccia

$$a+b+c=2p,$$

si avrà

$$(a+b-c)=2(p-c),$$
$$(a+c-b)=2(p-b),$$
$$(b+c-a)=2(p-a);$$

ed allora le espressioni delle tre altezze saranno come segue

$$\alpha=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\beta=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\gamma=\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

38. 2°. *Espressione della superficie S.* Essendo, com' è noto, $S=\frac{1}{2}BC\times AA'=\frac{1}{2}a\alpha$, in virtù del precedente valore di α risulterà

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

ovvero

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}.$$

39. 3°. *Espressione di R, ossia del raggio del cerchio circoscrittibile.* Dal centro O [*fig. 10.*] si conduca ad un vertice il raggio OB, e la perpendicolare OD ad un lato adjacente; gli angoli BOD, BAC saranno eguali; e perciò se dal vertice B si meni la perpendicolare BE al lato che gli è opposto, i triangoli BOD, BAE risulteranno simili, e si avrà BE : BA :: BD : BO, vale a dire $\beta : c :: \frac{1}{2}a : R$, e quindi $R=\frac{1}{2}\frac{ac}{\beta}$. Sostituendo all' altezza β il suo valore poc' anzi scritto, si avrà pe 'l raggio R la seguente espressione

$$R=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

E se piaccia di introdurre in questa formola la superficie S equivalente appunto al radicale, si avrà ancora

$$R=\frac{abc}{S^4}.$$

40. 4°. *Espressione di r, ossia del raggio del cerchio iscrittibile.* Dal centro O [*fig. 11*] si tirino ai vertici le OA, OB, OC; la superficie del triangolo essendo composta dai tre triangoli BOC, COA, AOB, i quali sono espressi da $\frac{1}{2}ar$, $\frac{1}{2}br$, $\frac{1}{2}cr$, si avrà

$$\frac{1}{2}r(a+b+c)=S,$$

e quindi

$$r=\frac{2S}{a+b+c};$$

ovvero

$$r = \frac{S}{p};$$

od ancora

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}};$$

o finalmente

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{a+b+c}}.$$

41. È mestieri di rimarcare che oltre il cerchio che s'iscrive nel triangolo, se ne possono descrivere tre altri [*fig. 12*] che adempiono egualmente alla condizione di toccarne i lati, se non che questi cadono esternamente, e sogliono perciò distinguersi col nome di cerchi *ex—iscritti*; ma in generale quattro cerchi deggiono considerarsi come iscrittibili in un triangolo. Egli è manifesto che i centri A′, B′, C′ di questi tre cerchi deggiono trovarsi tanto sulle bisecanti AO, BO, CO degli angoli interni del triangolo, quanto sulle bisecanti degli angoli esterni, che sono alle prime perpendicolari; in conseguenza quei centri si otterranno ne' vertici del triangolo A′ B′ C′ formato dagl' incontri scambievoli delle perpendicolari condotte ad AO, BO, CO. Cerchiamo ora le espressioni de' raggi di questi nuovi cerchi, e per chiarezza dinotiamo con r_a il raggio del cerchio il di cui centro A′ è sulla bisecante dell' angolo interno in A, e cade perciò esternamente sul lato BC $= a$; parimenti dinoteremo con r_b il raggio del cerchio che cade sul lato AC $= b$, e con r_c quello del cerchio che cade sul lato AB $= c$. Ciò posto è chiaro che si hanno le tre relazioni

triang. AA′B + *triang.* AA′C − *triang.* A′BC = *triang.* ABC
triang. AB′B + *triang.* CB′B − *triang.* B′AC = *triang.* ABC
triang. AC′C + *triang.* BC′C − *triang.* C′AB = *triang.* ABC

le quali si traducono nelle seguenti

$$r_a\,(b+c-a) = 2S$$
$$r_b\,(a+c-b) = 2S$$
$$r_c\,(a+b-c) = 2S;$$

e così le espressioni dei raggi de' rimanenti tre cerchi risulteranno come appresso

$$r_a = \frac{2S}{b+c-a},\quad r_b = \frac{2S}{a+c-b},\quad r_c = \frac{2S}{a+b-c}.$$

42. Faremo in questo punto osservare che ogni formola algebrica esprimente una relazione tra le diverse parti di una figura può dar luogo ad un teorema di geometria, e per ciò non si ha che a tradurla convenientemente in linguaggio geometrico. Così esaminando le espressioni or ora trovate de' quattro raggi dei cerchi tangenti i lati di un triangolo si ha il seguente teorema:

Il raggio del cerchio interno è eguale al doppio della superficie divisa pe 'l perimetro; e 'l raggio di un cerchio esterno è eguale ancora al doppio della superficie divisa per la differenza tra la somma dei due lati che comprendono l' angolo interno in cui cade il cerchio, e 'l lato opposto a quest' angolo.

43. Altri teoremi potrebbero dedursi combinando tra loro le espressioni dei quattro raggi; così facendo il prodotto di tutti si ha

$$r\,r_a\,r_b\,r_c = S^2$$

e si traduce come segue:

Il prodotto de' raggi de' quattro cerchi che toccano i lati di un triangolo è eguale alla superficie quadrata dello stesso triangolo.

44. Le espressioni dei quattro raggi divengono assai più semplici quando il triangolo è rettangolo. In fatti supposto che sia retto l'angolo in A, si avranno la due relazioni.

$$2S = bc \quad , \quad a^2 = b^2 + c^2.$$

Ora essendo

$$r(a+b+c) = 2S,$$

si avrà invece

$$r(a+b+c) = bc;$$

e passando al 2° membro il termine in a verrà

$$r(b+c) = bc - ra.$$

Elevando a quadrato, e poi riducendo in virtù dell' altra relazione $a^2 = b^2 + c^2$, si troverà

$$2r(r+a) = bc;$$

e di seguito si avrà

$$2r(r+a) = r(a+b+c)$$

donde

$$r = \frac{1}{2}(b+a-c).$$

Operando le stesse trasformazioni sulle relazioni che danno i valori degli altri raggi si avrà

$$r = \frac{1}{2}(b+c-a)$$

$$r_a = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

$$r_b = \frac{1}{2}(a+b-c)$$

$$r_c = \frac{1}{2}(a+c-b);$$

e quindi si ha la seguente proposizione relativa al triangolo rettangolo:

Il raggio del cerchio interno è eguale alla metà della differenza tra la somma dei cateti e l' ipotenusa; il raggio del cerchio esterno sull' ipotenusa è eguale al semiperimetro; e 'l raggio di un cerchio esterno sopra un cateto è metà della differenza tra la somma dell' ipotenusa e dello stesso cateto sul cateto rimanente.

45. Combinando i valori dei quattro raggi si hanno tra essi altre rimarchevoli relazioni. Così si ha

$$r + r_a + r_b + r_c = a + b + c = 2r_a.$$

quindi

$$r_a = r + r_b + r_c.$$

Inoltre

$$r_a - r = a = r_b + r_c,$$

$$r + r_b = b \quad , \quad r + r_c = c;$$

e di più

$$r r_a = \frac{1}{2} bc = r_b r_c.$$

Di qui le seguenti proposizioni.

La somma dei quattro raggi è eguale al perimetro del triangolo.

Il raggio del cerchio esterno sulla ipotenusa pareggia la somma degli altri tre raggi.

La differenza tra il raggio del cerchio esterno sull' ipotenusa e quello del cerchio interno è eguale alla somma degli altri due raggi, ed è eguale ancora alla ipotenusa.

La somma del raggio del cerchio interno e del raggio di un cerchio esterno corrispondente ad un cateto è eguale allo stesso cateto.

Finalmente il prodotto dei raggi dei due cerchi esterni corrispondenti ai cateti eguaglia il prodotto degli altri due rag-

gi , e ciascuno di questi prodotti è quanto la superficie del triangolo.

46. Per tradurre in linguaggio algebrico le condizioni relative alle ricerche di geometria possono utilmente impiegarsi le linee trigonometriche ; e ciò specialmente quando è mestieri tener conto della scambievole situazione delle rette , che entrano nella figura che si considera. Nel problema 2° in cui si è richiesto di iscrivere nel triangolo ABC [*fig. 2.*] il quadrato DEFG che avesse un lato nella base AC, si è subito per mezzo dei triangoli simili BDE, BAC espressa la condizione di DE parallela ad AC , ed essendosi messo AB $= a$, AC $= b$, BD $= x$ si è trovato

$$\mathrm{DE} = \frac{bx}{a} ;$$

ma per esprimere la condizione di DG perpendicolare ad AC è stato mestieri d'introdurre l'altezza BP del triangolo , e quindi considerare gli altri triangoli simili ADG, ABP. Intanto poichè il triangolo ADG dev' essere rettangolo , si ha, com' è noto dalla trigonometria , DG=AD $\times$ *sen* BAC , ovvero in simboli

$$\mathrm{DG} = (a - x)\ sen\ \mathrm{A} ;$$

in conseguenza, dovendo essere DE $=$ DG, si ha , senza che siavi bisogno di ricorrere all' altezza del triangolo , l'equazione del problema

$$\frac{bx}{a} = (a - x)\ sen\ \mathrm{A},$$

che risoluta da

$$x = \frac{a^2\ sen\ A}{b + a\,sen\,A}.$$

Egli è ben facile di costruire geometricamente questo valore di x. In fatti essendo $a =$ AB, l'espressione $a\ sen\ A$ indica precisamente l'altezza BP$=h$ del triangolo, e si ha però

$$a\ sen\ \mathrm{A} = h.$$

Quindi il valore precedente di x si cangia in

$$x = \frac{ah}{b+h}$$

identico a quello trovato al §. 7, e che perciò si costruisce nello stesso modo.

47. Il problema 4° , nel quale si cerca di condurre per un punto P [*fig. 7*] dato sulla bisecante di un angolo retto XAY una retta tale che la parte VU intercetta tra i lati dell'angolo risultasse eguale ad una data retta d si può rendere più generale sostituendo all' angolo retto un angolo qualunque. In questa ipotesi sarà [*fig. 13*]

$$\mathrm{VU}^2 = \mathrm{AV} +^2 \mathrm{AU}^2 - 2\,\mathrm{AV} \times \mathrm{AU}\ cos\ \mathrm{XAY};$$

laonde messo ancora

$$\mathrm{AV} = x,\ \mathrm{AU} = y,\ \mathrm{VU} = d$$

risulterà

$$d^2 = x^2 + y^2 - 2\,xy\ cos\ \mathrm{A}.$$

Inoltre compiuto il rombo PIAL , e posto PI $=$ AI $= a$; poichè si ha PI : IV :: AU AV, si avrà in simboli

$$a : x - a = : y : x ,$$

e si otterrà

$$xy = a(x + y) ;$$

in conseguenza le equazioni del problema saranno

$$x^2 + y^2 - 2\,xy\ cos\ \mathrm{A} = d^2$$
$$xy = a(x + y).$$

Egli è chiaro che queste due equazioni condurrebbero alla medesima equazione finale di 4° grado sia in x sia in y ; ma sommandole membro a membro dopo aver moltiplicato la seconda per 2, e sostituito nella prima ad xy il valore, che si ha nella stessa seconda equazione , si otterrà la seguente equazione di 2° grado in $x + y$

$$(x + y)^2 - 2(a\ cos\ A + a)(x + y) = d^2$$

la quale determina il valore della somma delle incognite

$$x+y=AV+AU.$$

Si osservi intanto che essendo $a=PI$, e l' angolo $A=PIK$, l' spressione $a\cos A$ indica il cateto KI del triangolo rettangolo PIK, che risulta tirando da P la PK perpendicolare ad AX; in conseguenza poichè si ha $AI=a$, risulterà $a\cos A+a=AK$; e facendo $AK=p$, si avrà $a\cos A+a=p$. Ponendo adunque $x+y=z$ la precedente equazione si cangerà in

$$z^2-2pz=d^2,$$

e sarà

$$z=p\pm\sqrt{(p^2+d^2)}.$$

Per costruire questi due valori di z si porrà AN perpendicolare ad AX ed eguale a d, e quindi si prenderanno le KB, KB', eguali ciascuna a KN; saranno AB, AB' i due valori di z, positivo il primo, e negativo il secondo. Osservando poscia come al §. 32 che anche attualmente è $BV=AU$ si vede che la risoluzione del problema si può compiere esattamente come in quel caso, e quindi in riassunto si ha la seguente costruzione:

Si tiri PK perpendicolare ad AX, ed AN perpendicolare alla stessa AX ed eguale alla data retta d. Si taglino poscia le KB, KB' eguali ciascuna a KN; si descrivano i cerchi che avendo per centri i punti B, B', abbiano per raggi la medesima retta d; e siano Q, Q', Q'', Q''' i punti in cui questi cerchi segano la AP; le quattro parallele condotte dal punto P a' quattro raggi BQ, BQ', $B'Q''$, $B'Q'''$ risolveranno il problema.

CAPITOLO II.

NOZIONI SU LA GENERAZIONE DELLE LINEE CURVE E LORO EQUAZIONI.

48. I problemi recati finora ad esempio sono di quelli che si dicono *determinati* perchè ciascuno ha un numero limitato di soluzioni, e perciò le loro equazioni finali non contengono che una sola incognita. Ma se il problema è *indeterminato*, vale a dire se ammette un numero infinito di soluzioni, allora la sua equazione finale conterrà più di una incognita. Quindi è che nell' imprendere a risolvere un problema non è già necessario di sapersi *a priori* se sia determinato o indeterminato, dapoichè la sua natura sarà sempre definita dall' equazione finale; ma del rimanente l' indeterminazione si ravvisa di ordinario fin dall'enunciato della quistione. Così se sia data una retta AB [*fig. 14*] terminata nei punti A, B e si cerchi fuori di essa un punto P tale che la somma dei quadrati delle rette PA, PB risulti eguale al quadrato di AB, si vede all' istante che questo problema è indeterminato, dapoichè è risoluto dal vertice di qualunque triangolo rettangolo descritto sopra di AB. Conducendo adunque da uno dei punti A, B, da A per esempio, delle rette in direzione arbitraria, come AQ, AQ', AQ'', *ec.*, e poscia tirando sopra di esse da B le perpendicolari BP, BP', BP'', *ec.* i loro piedi P, P', P'', *ec.* saranno tanti punti che risolvono la proposta quistione.

49. Ma in un problema di tal natura è importante di considerare l' insieme dei punti che lo risolvono, vale a dire la linea costituita dal loro complesso; linea che s' immagina più agevolmente riguardando il problema sotto altro aspetto cioè supponendo che un punto si vada movendo in un piano per modo che in ciascuna delle sue posizioni sieno soddisfatte le condizioni del problema, le quali costituiscono ciò che dicesi *Legge del movimento del punto*. Nell'esempio precedente

è chiaro che il punto P descriverebbe la circonferenza del cerchio che ha per diametro la retta AB.

50. Una stessa linea può dunque supporsi generata in due modi diversi; vale a dire o riguardandola come il complesso di una serie di punti costruiti uniformemente; o come descritta da un punto che si muove con legge determinata: il primo di questi modi dicesi *per assegnazione di punti*, e l' altro *per movimento continuo*.

51. Noi chiameremo *geometriche* (*V. le note*) le linee generate in siffatta guisa; v' ha dei casi in cui sono linee rette, ma in generale son linee curve. Le medesime sogliono anche chiamarsi *luoghi geometrici*, luoghi cioè dei punti costruiti secondo la data legge.

52. Risulta per tanto da ciò che precede che tutt' i punti di una stessa linea geometrica sono in generale dotati di una proprietà comune, la quale non conviene che ad essi soltanto, facendo così distinguere i punti che le appartengono da quelli che non le appartengono; ed è perciò che questa proprietà costituisce la natura o l' essenza di quella linea. Traducendola in linguaggio algebrico la relazione analitica che ne risulta è ciò che chiamasi *equazione della linea*, mentre la linea alla sua volta chiamasi *luogo dell' equazione*.

53. Le linee geometriche inoltre si dividono in *algebriche*, e *trascendenti* secondochè le loro equazioni sono algebriche o trascendenti.

Molti metodi possono adoperarsi per istabilire le equazioni delle linee; ma quello che più opportunamente si presta a quest' uopo si è il metodo delle coordinate rettilinee, del quale passeremo in conseguenza ad esporre i principii.

Principii del metodo delle coordinate rettilinee.

54. Sia P [*fig. 15*] un punto ovunque situato su di un piano, nel quale si traccino ad arbitrio due rette indefinite Ax, Ay

sotto qualsivoglia angolo, e da quel punto si tirino a queste rette le parallele PT, PS. Se il sito del punto P è conosciuto si conosceranno anche le lunghezze delle PT, PS, o delle loro eguali AS, AT; e per l' opposto, conoscendosi queste due rette, si conoscerà pure il sito del punto P, mentre esso risulta dalla intersezione delle parallele condotte pei punti T, S ad Ax, Ay rispettivamente.

In tal guisa può dunque determinarsi la posizione dei diversi punti che si considerano nelle ricerche geometriche sul piano, cioè per mezzo delle distanze che ciascuno di essi serba da due rette fisse, contate parallelamente alle rette medesime.

Le due distanze PT, PS si chiamano *coordinate* del punto P; le rette fisse, arbitrarie, ed indefinite Ax, Ay si chiamano *assi delle coordinate*, o *assi coordinati*, e 'l punto A in cui si tagliano si dice *origine* delle coordinate.

55. Il punto P può ancora riguardarsi come l' estremo della retta SP eguale ad AT applicata al punto S parallelamente ad Ay; ed è manifesto che le due rette AS, PS non sono altra cosa che le stesse coordinate del punto P; ma in tal caso la AS che vien tagliata sull' asse Ax si dice più particolarmente *ascissa* del punto P, mentre la PS si chiama *ordinata* corrispondente a quell' ascissa. Quindi l' asse Ax prende il nome di *asse delle ascisse*, ed Ay quello di *asse delle ordinate*.

56. Dinotando con α e β le coordinate AS, PS di un punto qualunque P la sua posizione sarà dunque analiticamente determinata dalle due equazioni di condizione

$$\textit{ascissa} = \alpha \quad , \quad \textit{ordinata} = \beta \, ,$$

ma questa scrittura si rende più semplice sostituendo dei simboli alle voci *ascisse* ed *ordinata*; così, adottando, come ordinariamente si usa, x per le ascisse, ed y per le ordinate, le due equazioni del punto saranno

$$x=\alpha \quad , \quad y=\beta.$$

57. Un punto così determinato suole anche indicarsi con la notazione (α, β), scrivendo cioè tra parentesi le sue coordinate, e prima l'ascissa.

58. Se il punto è nell'asse delle ascisse la sua ordinata è *zero*, laonde sarà espresso dalle equazioni $x=\alpha$, $y=o$. Per l'opposto un punto dell'asse delle ordinate avrebbe per equazioni $x=o$, $y=\beta$. E finalmente se il punto coincide con l'origine le sue equazioni saranno $x=o$, $y=o$.

59. Finora si è tacitamente supposto che il punto P cadesse nell'angolo $y\mathrm{A}x$; ma potendo trovarsi o in uno degli angoli adjacenti [*fig. 16*] o in quello che gli è opposto al vertice, è necessario di esaminare quali modifiche subiscano le sue equazioni. A tal effetto si prendano sugli assi le parti AS′, AT′, eguali rispettivamente ed opposte alle AS, AT, e si menino pei punti S′, T′ le parallele agli assi per modo da compiere il parallelogrammo PP′ P″ P‴, i suoi quattro vertici cadranno appunto ne' quattro angoli formati dagli assi coordinati; ed intanto le coordinate di ciascuno saranno, in quanto a grandezza, eguali a quelle del punto P; ma non così per il loro sito. Ora considerando come positive le AS, AT, saranno negative le AS′, AT′ (§. 22); e perciò il punto P′ sarà definito delle equazioni $x=-\alpha$, $y=+\beta$; il punto P″ da $x=+\alpha$, $y=-\beta$; è 'l punto P‴ da $x=-\alpha$, $y=-\beta$. Per tanto è manifesto che le equazioni

$$x=\alpha \quad , \quad y=\beta$$

valgono genericamente ad esprimere un punto ovunque situato nel piano degli assi coordinati, ma nei casi particolari dovrà tenersi conto dei segni che possono convenire a ciascuna delle sue coordinate.

60. Considerando queste due equazioni separatamente è chiaro che la prima di esse altro non indica che la distanza dal punto P all'asse yy' è eguale ad α, cioè ad AS; ma questa distanza è la stessa per tutt' i punti della parallela menata per S ad yy', dunque questa parallela sarà appunto rappresentata dall'equazione

$$x=\alpha.$$

E così si vedrebbe che l'altra equazione

$$y=\beta$$

è quella di una parallela all'asse delle x, esprimendo β la lunghezza di AT, cioè la distanza dall'origine al punto in cui la parallela taglia l'asse delle y.

Quando α è *zero* la parallela all'asse yy' si confonde con esso; e perciò

$$x=o$$

è l'equazione dell'asse delle y. Si vedrebbe allo stesso modo che

$$y=o$$

è l'equazione dell'asse delle x.

61. Noi abbiamo riguardate come positive le ascisse contate da A verso x; ma era in nostro arbitrio di riguardar come tali quelle contate da A verso x', ed allora sarebbero negative quelle da A verso x. La stessa inversione potrebbe operarsi rispetto alle ordinate; ma importa di osservare che fissato una volta in qualunque ricerca il senso positivo delle ascisse e delle ordinate, non è più lecito d'invertirlo.

62. Nel punto A origine delle coordinate ciascuno degli assi è diviso in due parti indefinite, che possono chiamarsi asse positivo, ed asse negativo. D'ora innanzi supporremo che le ascisse positive siano contate da A verso la destra, e le ordinate positive da A verso la parte superiore; allora sarà Ax l'asse positivo delle ascisse ed Ax' il negativo; Ay l'asse positivo delle ordinate ed Ay' il negativo.

63. Gli assi coordinati formano due angoli $y\mathrm{A}x$, $y\mathrm{A}x'$, i quali in generale son disuguali; ma va specialmente indicato sotto il nome di *angolo degli assi coordinati*, o di *angolo*

delle coordinate il primo di essi yAx compreso dagli assi positivi. Que' due angoli sono eguali nel solo caso che gli assi sieno tra loro perpendicolari, sistema che più comunemente si adotta, e che dicesi *rettangolare* o *ortogonale*; mentre quando formano un angolo qualunque chiamasi *obbliquo*.

64. Quando son dati due punti, è dato egualmente il punto medio della loro distanza, vale a dire della loro congiungente, ma ciò che spesso importa di conoscere sono le coordinate di questo punto medio, date che siano quelle dei punti. Or sieno P, P' [*fig. 17*] due punti qualunque, ed M il punto medio di PP'; prese per assi due rette qualsivogliano Ax, Ay, si compia la figura con tutte le coordinate dei punti P, M, P', e si chiamino α, β, ed α', β' le coordinate dei punti P, P', ed x', y' quelle del punto M. Attesa la costruzione i punti F, E saranno medii delle rette SS', TT'; perciò si avrà

$$AS - AF = AF - AS' \quad , \quad AT - AE = AE - AT';$$

vale a dire

$$\alpha - x' = x' - \alpha' \quad , \quad \beta - y' = y' - \beta'.$$

Traendo da queste due relazioni i valori di x' ed y' risulterà

$$x' = \frac{\alpha + \alpha'}{2} \quad , \quad y' = \frac{\beta + \beta'}{2};$$

e si rileva che: *l' ascissa del punto medio della congiungente di due punti è eguale alla semisomma delle ascisse dei punti medesimi; e l'ordinata è eguale alla semisomma delle ordinate.*

65. Anche la distanza PP' [*fig. 18*] di due punti P, P' si può esprimere per mezzo delle loro coordinate, ma per trovare questa espressione supporremo dapprima ortogonali gli assi coordinati; allora conducendo P'D parallela ad Ax, si for-

ma il triangolo rettangolo PDP', e sarà $PP'^2 = PD^2 + P'D^2$; ma è $PD = \beta - \beta'$, e $P'D = \alpha - \alpha'$, in conseguenza chiamando D la distanza PP', si avrà

$$D^2 = (\beta - \beta')^2 + (\alpha - \alpha')^2,$$

ed estraendo la radice quadrata risulterà

$$D = \sqrt{(\beta - \beta')^2 + (\alpha - \alpha')^2}.$$

66. Se uno dei punti, P' per esempio, coincide con l' origine, si ha $\alpha' = o$, $\beta' = o$; laonde per questo caso si ha semplicemente

$$D = \sqrt{\beta^2 + \alpha^2}.$$

67. Supponendo poi obbliqui gli assi coordinati, si avrà

$$D^2 = PP'^2 = PD^2 + P'D^2 - 2\,PD + P'D \times \cos PDP'.$$

Ora è manifesto che l' angolo PDP' è supplemento dell' angolo delle coordinate yAx; perciò ponendo $yAx = \theta$ sarà $\cos PDP' = -\cos.\theta$; sostituendo adunque i simboli alle rette, e poi estraendo la radice verrà

$$D = \sqrt{(\beta-\beta')^2 + (\alpha-\alpha')^2 + 2(\beta-\beta')(\alpha-\alpha')\cos\theta}.$$

E se il punto P' coincide con l' origine sarà

$$D = \sqrt{\beta^2 + \alpha^2 + 2\,\alpha\,\beta\cos\theta}.$$

68. Per applicare ad un esempio i principii e le formole precedenti, andremo a risolvere il seguente

PROBLEMA

Dati due punti B, B' [fig. 19] trovare un punto P tale che le congiungenti PB, PB' sieno tra loro perpendicolari.

Prendendo per semplicità assi coordinati ortogonali si dinotino con α, β, ed α', β' le coordinate dei punti dati B, B', e con x, y quelle del punto incognito P. Pe 'l triangolo rettangolo BPB' sarà $PB^2 + PB'^2 = BB'^2$; ma è (§. 65)

$$PB^2 = (y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2$$
$$PB'^2 = (y-\beta')^2 + (x-\alpha')^2$$
$$BB'^2 = (\beta-\beta')^2 + (\alpha-\alpha')^2;$$

in conseguenza sostituendo e poi riducendo si avrà

$$y^2 + x^2 - (\beta + \beta')y - (\alpha + \alpha')x = -(\beta\beta' + \alpha\alpha').$$

Non essendovi a tener conto di alcun' altra condizione, quest' equazione sarà l'equazione finale del problema proposto; e poichè vi si contiene più di una incognita, vale a dire x ed y, così questo problema è, come in fatti esser dovea, indeterminato; e l' equazione cui siamo giunti sarà perciò quella del luogo geometrico di tutti gl' innumerevoli punti, che risolvono il problema; o, in altri termini, sarà l' equazione della linea, che passa per essi.

69. È chiaro intanto che qualunque di questi punti si prenda a considerare dovrà sempre ritrovarsi la stessa equazione; ma se le quantità cognite α, α', β, β' vi conservano costantemente lo stesso valore, quelli delle incognite x, y varieranno da un punto ad un altro; quindi è che queste ultime quantità prendono più esattamente il nome di *variabili*, per opposizione alle prime che si dicono *costanti*. Ben vero è da rimarcare che in virtù dell' equazione che sussiste tra le variabili x, y è lecito di attribuire valori arbitrarii ad una soltanto di esse, che perciò suol chiamarsi *variabile indipendente*, rimanendo i valori dell' altra in conseguenza determinati; e di ordinario suol prendersi per indipendente la variabile x, o meglio quella che figura l' ascissa.

70. L' equazione dell' esempio precedente risulterebbe molto più complicata se invece di assi ortogonali si prendessero assi obbliqui; ma quella già ottenuta può divenire an-

che più semplice dando agli assi una situazione più conveniente. In fatti se l' asse delle x si fa coincidere con la retta che unisce i punti B, B', allora si avrà $\beta = o$, $\beta' = o$, e l' equazione si riduce ad

$$y^2 + x^2 - (\alpha + \alpha')x = -\alpha\alpha'.$$

L' origine delle coordinate è attualmente un punto qualunque della retta BB'; ma se si fa cadere nel suo punto di mezzo C, allora α, ed α' ascisse dei punti B, B' saranno eguali e di segno contrario, e perciò sarà $\alpha = -\alpha'$, ed $\alpha + \alpha' = o$; quindi l' ultima equazione diverrà ancora più semplice riducendosi ad

$$y^2 + x^2 = \alpha^2.$$

Da ciò si rileva che ad una stessa linea possono convenire diverse equazioni; diversità dipendenti com' è manifesto dalla varia posizione degli assi coordinati, la di cui scelta è interamente nel nostro arbitrio.

71. Per vedere intanto in qual modo il contorno di una linea è rappresentato dalla sua equazione bisogna concepire che l' ascissa x, ch' è zero all' origine, vada crescendo per tutt' i gradi possibili fino all' infinito tanto positivo che negativo; o, in altri termini, che x varii in modo continuo da $x = o$ fino ad $x = \pm\ \infty$. Allora se per ogni valore di x s'immagina determinato il corrispondente valore di y, si avrà una serie di coppie di valori di x ed y, le quali costruiscono le coordinate di tanti punti dotati della proprietà comune espressa dall' equazione; e perciò la linea che passa per essi sarà quella rappresentata dall' equazione istessa. Che se per ogni valore di x si hanno più valori di y, vi saranno altrettante ordinate che corrispondono ad una medesima ascissa, e la linea in tal caso sarà composta di altrettanti rami.

72. Si può dunque in ogni caso costruire per assegnazione di punti il luogo geometrico di una data equazione; e perciò non si ha che prendere delle ascisse arbitrarie, e poi

determinare mercè la stessa equazione le corrispondenti ordinate. Ora a misura che si dà ad x un valore arbitrario converrebbe ogni volta risolvere l' equazione in y; ma allora ciò potrà farsi una volta per tutte (almeno quando è possibile) risolvendo da principio l' equazione rispetto ad y, o meglio rispetto alla variabile, che si riguarda come indipendente.

73. Applicando queste considerazioni all' equazione

$$y^2 + x^2 = \alpha^2,$$

la più semplice di quelle ottenute nell' esempio precedente, si avrà, risolvendola rispetto ad y,

$$y = \pm \sqrt{(\alpha^2 - x^2)}$$

e si rileva :

1°. che per ogni valore di x si hanno due diversi valori di y, i quali sebbene eguali in grandezza, sono però di segno contrario; quindi per qualunque ascissa, come CS [*fig. 20.*] si avranno per la curva due ordinate eguali ed opposte SP, SQ.

2°. Che la massima di tutte le ordinate corrisponde ad $x = o$, cioè all' origine; ma si ha in questa ipotesi $y = \pm \alpha$; dunque prese le CD, CD′ eguali ciascuna ad α, ossia a CB metà di BB′, la curva passerà pe' punti D, D′, e nel senso delle ordinate sarà limitata tra le parallele condotte per essi all' asse delle x, dapoichè non può avere alcun' ordinata maggiore di CD o CD′.

3°. Che le ordinate decrescono a misura che cresce x, da $x = o$ fino ad $x = +\alpha$; nè può essere $x > \alpha$, perchè le ordinate sarebbero immaginarie; il massimo valore positivo dell' ascissa è dunque $x = +\alpha$, ipotesi in cui si ha $y = o$; ma $+\alpha$ è l' ascissa del punto B, perciò la curva passerà per questo punto, e nel senso delle x positive sarà limitata dalla parallela condotta per esso all' asse delle y.

4°. Che per ogni ascissa compresa tra i limiti $x = o$, $x = +\alpha$, cioè tra i punti C, B, le ordinate sono costantemente reali e di grandezza finita; laonde tra i punti B, D, e B, D′ vi saranno due archi di curva continui, perfettamente eguali, e simmetricamente situati rispetto all' asse delle x.

5°. Che il radicale $\sqrt{(\alpha^2 - x^2)}$ conserva lo stesso valore per due valori di x eguali e di segno contrario; quindi per due ascisse eguali ed opposte CS, CS′ saranno eguali tanto le ordinate positive SP, S′P′ quanto le negative SQ; S′Q′; e da ciò risulta che la parte di curve esistente dal lato delle ascisse negative è esattamente eguale a quella che si trova dal lato delle positive; in conseguenza la curva passerà ancora per l' altro punto B′; e tra i punti B′, D, e B′, D′ si avranno due altri archi eguali tra loro ed ai primi due.

Dunque in fine la curva intera costa di quattro archi eguali BD, BD′, B′D, B′D′ simmetricamente situati rispetto agli assi, e che riuniti nei punti B, B′, D, D′ costituiscono una sola linea continua, e chiusa da per ogni dove a guisa del cerchio.

Ma da un altro lato essendo

$$\sqrt{(y^2 + x^2)} = \alpha$$

e 'l primo membro esprimendo la distanza dall' origine ad un punto qualunque P della curva di cui trattasi, e 'l secondo additando che questa distanza è costante ed eguale ad α metà di BB′; si riconosce che questa curva altro in effetti non è che una circonferenza di cerchio, che ha per centro il punto C preso per origine, vale a dire il punto medio di BB′, e per raggio la sua metà CB. Ed è in fatti già noto negli elementi di geometria che le rette condotte da qualunque punto di un cerchio agli estremi di un suo diametro sono l' una all' altra perpendicolari, come richiedeasi nel proposto problema.

74. Abbiamo poc' anzi riconosciuto i punti in cui gli assi coordinati incontrano la linea dell' equazione $y^2+x^2=\alpha^2$; ma giova di osservare che questi punti possono in generale determinarsi più immediatamente qualunque sia la linea di cui è data l' equazione. In fatti se si tratta di trovare le sue intersezioni con l' asse delle x, basta riflettere che le ordinate di questi punti sono nulle, e perciò ponendo nell' equazione $y=o$, le radici della risultante equazione in x esprimeranno le distanze dall' origine ai diversi punti in cui la linea può tagliare l' asse delle x. Per l' opposto ponendo $x=o$, le radici dell' equazione in y dinoteranno le distanze dall' origine ai punti in cui essa incontra l' asse delle y. Così nell' equazione precedente messo $y=o$ si ha $x=\pm\alpha$; e perciò, prese le CB, CB′ eguali ciascuna ad α, saranno B, B′ i punti in cui il suo luogo geometrico taglia l' asse delle x. Facendovi poi $x=o$, si ha $y=\pm\alpha$, laonde prese le CD, CD′ eguali ciascuna ad α, saranno D, D′ i punti in cui è incontrato dall' asse delle y.

Passeremo ora alla ricerca delle equazioni, e delle proprietà principali di alcune linee, di cui si fa un uso frequentissimo sia nelle ricerche di geometria che nelle applicazioni alla fisica matematica. E cominceremo dal considerare la linea retta la di cui teorica dee riguardarsi come la base e 'l fondamento della geometria analitica.

CAPITOLO III.

DELLA RETTA.

75. Cercando l' equazione di una linea retta EF [*fig.* 21 e 23] gioverà distinguere due casi secondochè l' origine A delle coordinate si trovi sulla stessa retta o fuori di essa.

Equazione della retta che passa per l' origine. Siano AS, PS [*fig.* 21] le coordinate x, y di qualsivoglia punto P della retta EF, il rapporto di PS ad AS avrà sempre lo stesso valore ovunque prendasi sù di essa il punto P; se dunque questo rapporto si dinoti con a, cioè si ponga

$$\frac{PS}{AS}=a,$$

essendo

$$\frac{PS}{AS}=\frac{y}{x},$$

tra le coordinate x, y si avrà la relazione

$$\frac{y}{x}=a,$$

la quale sarà perciò l' equazione della retta EF, e che facendo sparire il fratto prende la forma

$$y=ax.$$

Secondo la figura la retta EF cade nell' angolo degli assi positivi y A x; ma se cadesse nel supplemento [*fig.* 22] si avrebbe

$$\frac{PS}{AS}=\frac{y}{-x}=a$$

e la sua equazione sarebbe in conseguenza

$$y=-ax.$$

76. *Equazione della retta cömunque situata rispetto agli assi.* Siano ancora AS, PS [*fig. 23*] le coordinate x, y di un punto qualunque P della retta EF. Tirando dall' origine A ad EF la parallela che incontri in p l' ordinata PS, quest' ordinata risulterà composta delle due parti p S, p P, l' una variabile ed eguale ad $a \times$ AS, l' altra costanstante ed eguale ad AB, ordinata di EF corrispondente all' origine; perciò si avrà

$$PS = pS + pP = a \times AS + AB;$$

ponendo adunque $AB = b$, l' equazione della retta EF sarà

$$y = ax + b.$$

Nella figura che si è considerata la retta EF taglia in B l' asse delle y dal lato positivo, ma se lo tagliasse dal lato negativo [*fig. 24*] si avrebbe

$$PS = pS - AB = a \times AS - AB,$$

e l' equazione di EF sarebbe

$$y = ax - b.$$

Inoltre nei due casi esaminati la parallela condotta ad EF dall' origine cade nell' angolo degli assi positivi yAx; ma se cada nel supplemento [*fig. 25 e 26*], l' equazione di EF sarà

$$y = -ax + b$$

ovvero

$$y = -ax - b$$

secondocchè taglia l' asse positivo delle y o il negativo.

Quindi è manifesto, che qualunque sia la posizione della retta relativamente agli assi, la sua equazione avrà sempre la forma

$$y = ax + b.$$

mentre la sua varia posizione non influisce che sui segni delle due costanti a, b.

77. Reciprocamente: *Ogni equazione riducibile alla forma*

$$y = ax + b$$

ha per luogo geometrico una linea retta. E dapprima si osservi che per ogni valore di x si ha un valore unico e reale di y; ond' è che, se gli assi sieno Ax, Ay [*fig. 27.*] ad ogni ascissa AS corrisponderà sempre un' ordinata PS della linea rappresentata dalla data equazione; inoltre questa ordinata diviene infinita con l' ascissa, mentre per $x = \pm \infty$, si ha $y = \pm \infty$, e da ciò segue che questa linea si estende all' infinito tanto dal lato delle x positive, che delle negative; e perciò essa avrà due rami necessariamente infiniti.

Ciò premesso siano (α, β), (α', β') due punti qualunque P, P$'$ della linea di cui si tratta; e poichè la sua equazione dev' esser soddisfatta dalle coordinate di ogni suo punto, si avranno le due relazioni

$$\beta = a\alpha + b \quad , \quad \beta' = a\alpha' + b,$$

nella cui differenza si ha l' altra

$$\beta - \beta' = a(\alpha - \alpha'),$$

e da quest' ultima si trae

$$\frac{\beta - \beta'}{\alpha - \alpha'} = a.$$

Or si conduca P$'$ D$'$ parallela ad A x, sarà $PD' = \beta - \beta'$, $P'D' = \alpha - \alpha'$, e quindi $\frac{P\,D'}{P'\,D'} = a$. Nella stessa guisa, se P$''$ sia un terzo punto della stessa linea, si troverà $\frac{PD''}{P''D''} = a$, e sarà perciò $\frac{P\,D'}{P'\,D'} = \frac{PD''}{P''D''}$. Si rileva da questa relazione che i punti P, P$'$ sono per dritto col punto P$''$, e quindi con qualunque altro punto appartenente al luogo geometrico della data equazione, il quale in conseguenza è una linea retta.

78. L'equazione generale di 1°. grado a due variabili

$$Ay + Bx + C = o$$

si può sempre ridurre alla forma $y = ax + b$, bastando perciò di risolverla rispetto ad y; adunque: *la retta è il luogo geometrico di ogni equazione di 1° grado.*

79. Essendo α, β, ed α', β' le coordinate di due punti qualunque della retta $y = ax + b$, si ha come poc' anzi

$$\frac{\beta - \beta'}{\alpha - \alpha'} = a\,;$$

in conseguenza: *il rapporto della differenza delle ordinate di due punti qualsivogliano di questa retta alla differenza delle loro ascisse è costante, ed eguale ad a coefficiente di x.*

80. Poichè due punti bastano per fissare la posizione di una retta, così per costruire quella dell' equazione $y = ax + b$ si possono assegnarne due punti qualunque mediante le norme generali già date (§. 72); vale a dire prendendo due ascisse arbitrarie, e poi determinando per mezzo dell' equazione le corrispondenti ordinate; ma spesso è più semplice di cercare i punti in cui essa incontra gli coordinati (§. 74). Ora per $x = o$ si ha $y = b$, e per $y = o$ si $x = -\frac{b}{a}$, quindi presa $AB = b$, ed $AC = -\frac{b}{a}$ la retta indefinita EF condotta pei punti B, C sarà il luogo geometrico dell' equazione proposta.

81. Modificando in tutt' i modi i segni de' termini dell' equazione $y = ax + b$, si hanno le quattro seguenti combinazioni

1ª. $y = +ax + b$

2ª. $y = -ax + b$

3ª. $y = +ax - b$

4ª. $y = -ax - b$

e si rileva dalla precedente costruzione:

I. Che la retta corrispondente alla *prima* cade come BC [*fig. 28*] segando positivamente l' asse delle y, e negativamente quello delle x.

II. Che la retta nascente dalla *seconda* ha la posizione di BC' incontrando positivamente i due assi.

III. Che la retta della *terza* cade come B'C', tagliando l' asse positivo delle x, e 'l negativo delle y.

IV. E che la retta della *quarta* sia situata come B'C incontrando negativamente l' uno e l' altro asse.

La stessa costruzione della retta $y = ax + b$ fa vedere inoltre, che: *la costante* b *esprime la distanza dall' origine al punto in cui essa taglia l' asse delle y*, il che pur si rileva dal §. 76.

Se dunque questa distanza è nulla, cioè se è $b = o$, l' origine si troverà nella retta; e perciò l' equazione

$$y = ax$$

rappresenta, com' era già noto (§. 75) una retta passante per l' origine.

82. La retta EF [*fig. 29*] forma con l' asse xx' due angoli FCx, FCx', che in generale son disuguali, e sono supplementi l' un dell' altro; ma noi intenderemo per *angolo che la retta fa con l' asse delle x* quello propriamente che la parte CF della retta esistente nella regione delle y positive comprende con la parte Cx dell' asse delle x procedente nel senso positivo, vale a dire l' angolo FCx, e lo indicheremo con φ, cioè porremo

$$FCx = \varphi.$$

Ciò posto si tiri da B ad Ax la parallela che incontri in D un' ordinata PS della retta EF; sarà $PD = y - b$, $BD = x$, ma è $y - b = ax$, si avrà dunque $PD = a \times BD$, e

$$\frac{PD}{BD} = a.$$

Ora se gli assi sono ortogonali, il triangolo PBD sarà rettangolo, e sarà

$$\frac{\text{PD}}{\text{BD}}=tang\,\text{PBD}=tang\,\text{FC}x=tang\,\varphi\,;$$

quindi si avrà

$$tang\,\varphi=a.$$

In conseguenza: *se gli assi sono ortogonali la costante* a *nell' equazione* $y=ax+b$ *esprime la tangente trigonometrica dell' angolo che la retta corrispondente fa con l' asse delle* x.

Perciò quest' angolo sarà *acuto*, *ottuso*, *retto*, *o nullo* secondochè a è *positiva*, *negativa*, *infinita*, *o nulla*; ed è chiaro che nel caso di $a=\infty$ la retta è parallela all' asse delle y; e sarà invece parallela all' asse delle x nel caso di $a=o$.

Essendo $tang\,\varphi=a$, si avrà pure $\dfrac{sen\,\varphi}{cos\,\varphi}=a$; mediante questa relazione e l' altra $sen^2\varphi+cos^2\varphi=1$, si possono calcolare i valori di $sen\,\varphi$ e $cos\,\varphi$; e si trova

$$sen\varphi=\frac{a}{\sqrt{(a^2+1)}}\quad,\quad cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{(a^2+1)}}.$$

83. Se poi gli assi sono obbliqui si ha

$$a=\frac{\text{PD}}{\text{BD}}=\frac{sen\text{PBD}}{sen\text{BPD}}=\frac{sen\text{PBD}}{sen\text{PB}y}\;;$$

laonde in questa ipotesi: *la costante* a *nell' equaz.* $y=ax+b$ *esprime il rapporto tra i seni degli angoli che la retta corrispondente fa con gli assi delle* x *e delle* y *rispettivamente.*

Dinotando con θ l' angolo yBD, ch' è l' angolo degli assi yAx, poichè si ha P$By=y$BD—PBD$=\theta-\varphi$, si avrà

$$a=\frac{sen\varphi}{sen(\theta-\varphi)}\;.$$

Sviluppando il denominatore di questa espressione, e tenendo conto delle due relazioni $sen^2\varphi+cos^2\varphi=1$, $sen^2\theta+cos^2\theta=1$, si dedurrà

$$sen\varphi=\frac{a\,sen\,\theta}{\sqrt{(a^2+2a\,cos\theta+1)}}\,,\;cos\varphi=\frac{a\,cos\theta+1}{\sqrt{(a^2+2a\,cos\theta+1)}}\;;$$

e di seguito

$$tang\,\varphi=\frac{a\,sen\,\theta}{a\,cos\,\theta+1}\;.$$

84. In questo caso degli assi obbliqui il segno di a non più vale a far decidere sol' esso se l' angolo φ sia acuto o ottuso; ma rimane sempre vero che la retta è parallela all' asse delle y o delle x a misura che si ha $a=\infty$, ovvero $a=o$. In fatti se è $a=\infty$, sarà pure $\dfrac{sen\,\varphi}{sen(\theta-\varphi)}=\infty$, e ne risulta $sen\,(\theta-\varphi)=o$; quindi $\theta-\varphi=o$, e $\theta=\varphi$; perciò l' angolo degli assi è lo stesso che l' angolo compreso dalla retta con l' asse delle x; laonde la retta sarà parallela all' asse delle y. Se poi si ha $a=o$, sarà benanche $\dfrac{sen\,\varphi}{sen(\theta-\varphi)}=o$; quindi $sen\,\varphi=o$, e $\varphi=o$; in conseguenza la retta sarà parallela all' asse delle x.

85. Risulta da ciò che precede che qualunque sia il sistema degli assi coordinati la costante a nell' equazione $y=ax+b$, determina sempre l' angolo che la retta corrispondente forma con l' asse delle x; per tal ragione noi chiameremo questa costante *determinante della inclinazione della retta* ovvero *determinante della sua direzione*.

86. L' equazione della retta si modifica in diverse guise quando debba soddisfare con la sua posizione a determinate condizioni, ed è manifesto che in questi casi tutto si riduce alla conveniente determinazione de' valori delle due costanti a, b, o di una di esse secondochè debba soddisfarsi a due o ad una sola condizione. Nei problemi che seguono percorreremo i più comuni di questi casi, ed esporremo

alcune altre formole di uso frequentissimo nelle ricerche di geometria analitica.

PROBLEMA I.

87. *Trovare l'equazione della retta assoggettata a passare per un punto* (α , β).

Dinotando con a il determinante della direzione della retta, e con b l'ordinata corrispondente all'origine la sua equazione sarà dapprima

$$y = a x + b.$$

Intanto non essendo data alcuna condizione che influisca sulla direzione della retta si vede che la costante a dee rimanere indeterminata; sicchè non resta che a determinare il valore di b. Ora poichè questa retta dee passare pe'l punto (α , β), le coordinate α e β dovranno verificarne l'equazione, e perciò si avrà la relazione

$$\beta = a \alpha + b ,$$

da cui si trae

$$b = \beta - a \alpha ;$$

quindi l'equazione della retta diviene

$$y = a x + \beta - a \alpha ,$$

e passando β al primo membro prende la forma

$$y - \beta = a (x - \alpha).$$

88. Egli è chiaro che lo scopo del calcolo eseguito si è quello di eliminare la incognita b tra l'equazione assunta

$$y = a x + b ,$$

e la relazione

$$\beta = a \alpha + b ;$$

ma allora ciò può subito effettuirsi sottraendo l'una dall'altra, e così si perviene più semplicemente all'equazione

$$y - \beta = a (x - \alpha).$$

89. Del rimanente questa stessa equazione può ottenersi immediatamente dal principio del §. 79, cioè che il rapporto tra la differenza delle ordinate di due punti qualunque della retta e quella delle loro ascisse è costante ed eguale ad a. Poichè dunque (α , β) dev' essere un punto della retta di cui trattasi, supposto che (x , y) ne sia un altro punto qualunque si avrà

$$\frac{y - \beta}{x - \alpha} = a ,$$

e facendo sparire il fratto si ritorna all'equazione precedente

PROBLEMA II.

90. *Trovare l'equazione della retta assoggettata a passare per due punti* (α , β) *ed* (α' , β').

Si supponga che l'equazione della retta sia

$$y = a x + b ,$$

e poichè i due punti (α , β), (α' , β') deggiono trovarsi su di essa, si avranno così le due relazioni

$$\beta = a \alpha + b$$
$$\beta' = a \alpha' + b$$

le quali determinano i valori delle incognite a e b. Avendosi per tanto da esse

$$a = \frac{\beta - \beta'}{\alpha - \alpha'} \quad , \quad b = \frac{\alpha \beta' - \alpha' \beta}{\alpha - \alpha'}$$

sostituendo questi valori nell'equazione assunta, l'equazione cercata sarà

$$y = \frac{\beta-\beta'}{\alpha-\alpha'}\,x + \frac{\alpha\beta'-\alpha'\beta}{\alpha-\alpha'}, \qquad (1)$$

91. Questo problema si può anche risolvere come segue. Esprimendo con a il determinante della direzione della retta, poichè la medesima dee passare pe 'l punto (α, β), la sua equazione in virtù del problema precedente sarebbe

$$y-\beta = a(x-\alpha);$$

ma quest' equazione dev' essere verificata dalle coordinate dell' altro punto (α', β'), perciò si avrà la relazione

$$\beta'-\beta = a(\alpha'-\alpha),$$

da cui si trae

$$a = \frac{\beta-\beta'}{\alpha-\alpha'};$$

e perciò l' equazione cercata sarà in fine

$$y-\beta = \frac{\beta-\beta'}{\alpha-\alpha'}(x-\alpha). \qquad (2)$$

92. Se invece di far passare da principio la retta pe 'l punto (α, β) si faccia passare pe 'l punto (α', β'), si perviene all' equazione

$$y-\beta' = \frac{\beta-\beta'}{\alpha-\alpha'}(x-\alpha'); \qquad (3)$$

e così parrebbe che la retta di cui trattasi possa essere rappresentata da tre diverse equazioni, cioè da (1), da (2), e da (3); ma è chiaro che queste tre equazioni non sono che una stessa cosa, mentre passando nelle due ultime β e β' nei rispettivi secondi membri, le medesime si riducono l' una e l' altra alla prima.

93. Ma anche questo problema può ricevere una soluzione più immediata dal principio del §. 79. In fatti dinotando con (x,y) un punto qualunque della retta si hanno subito in virtù di quel principio le due equazioni

$$\frac{y-\beta}{x-\alpha} = \frac{\beta-\beta'}{\alpha-\alpha'}, \quad \frac{y-\beta'}{x-\alpha'} = \frac{\beta-\beta'}{\alpha-\alpha'},$$

le quali riproducono, com' è manifesto, la (2), e la (3).

94. Se uno dei punti proposti coincida con l' origine, e sia per esempio (α', β'), si ha $\alpha' = o$, $\beta' = o$; ed in questa ipotesi le equazioni precedenti si riducono ad

$$y = \frac{\beta}{\alpha}\,x;$$

così quest' equazione è quella della retta che passa per l' origine e per un punto (α, β).

95. Merita di esser notato il caso in cui i due punti dati si trovano sugli assi coordinati, e possono perciò dinotarsi con (α, o), (o, β). L' equazione della retta che passa per questi due punti sarebbe

$$y-o = \frac{o-\beta}{\alpha-o}(x-\alpha),$$

ma poi riducesi ad

$$\alpha y + \beta x = \alpha\beta;$$

e qui è da por mente che α e β non sono altra cosa che le parti che la retta taglia dagli assi a contar dall' origine.

PROBLEMA III.

96. ***Determinare le espressioni delle coordinate del punto d'incontro di due rette***

$$y=ax+b \quad , \quad y=a'x+b'.$$

Si dinotino con x', y' le coordinate del punto comune alle due rette; e poichè le medesime deggiono verificarne le equazioni, si avranno le due relazioni

$$y'=ax'+b \quad , \quad y'=a'x'+b',$$

le quali determinano i valori delle incognite x', y'. In conseguenza le espressioni richieste saranno

$$x'=\frac{b'-b}{a-a'} \quad , \quad y'=\frac{ab'-a'b}{a-a'}.$$

97. Queste espressioni sono infinite se è *zero* il loro denominatore, cioè se si abbia $a-a'=o$; allora le rette proposte non potranno incontrarsi e saranno parallele. Ma in fatti essendo in questa ipotesi $a=a'$, le rette di cui trattasi avranno una stessa direzione, e saranno perciò parallele.

98. Quando le due rette s'intersegano formano due angoli che in generale son disuguali, e sono supplementi l'un dell'altro. Ora di questi due angoli converremo per ragion di chiarezza di chiamare *angolo compreso dalle due rette*, e lo designeremo in ciò che segue col simbolo V, quello propriamente contenuto dalle loro parti procedenti nel senso delle ordinate positive; in somma quello che racchiuderebbero le parti delle parallele alle rette istesse condotte per l'origine, e procedenti dal lato superiore.

PROBLEMA IV.

99. *Determinare l'angolo V compreso da due rette*

$$y=ax+b \quad , \quad y=a'x+b'.$$

Si dinotino con φ e φ' gli angoli che le due rette formano rispettivamente con l'asse delle x. Conducendo dall'origine due rette parallele alle proposte, saranno egualmente φ e φ' gli angoli ch'esse comprendono con l'asse delle x; laonde, supponendo $\varphi > \varphi'$, si avrà

$$V=\varphi-\varphi'$$

e sarà quindi

$$tang\, V=\frac{tang\,\varphi - tang\,\varphi'}{1+tang\,\varphi\, tang\,\varphi'}.$$

Ciò premesso, distingueremo per chiarezza due casi: 1° se gli assi coordinati sono ortogonali; 2° Se sono obbliqui:

1°. *Per gli assi ortogonali.* In questa ipotesi si ha (§. 82)

$$tang\,\varphi=a \quad , \quad tang\,\varphi'=a'$$

e quindi risulta

$$tang\, V=\frac{a-a'}{1+aa'}.$$

100. Essendo ancora

$$sen\, V= sen\,\varphi \cos\varphi' - sen\,\varphi' \cos\varphi$$
$$\cos V= \cos\varphi \cos\varphi' + sen\,\varphi\, sen\,\varphi',$$

e di più (§. 82)

$$sen\,\varphi=\frac{a}{\sqrt{(a^2+1)}} \quad , \quad sen\,\varphi'=\frac{a'}{\sqrt{(a'^2+1)}}$$
$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{(a^2+1)}} \quad , \quad \cos\varphi'=\frac{1}{\sqrt{(a'^2+1)}},$$

sostituendo questi valori in quelli di $sen\, V$ e $\cos V$ si avrà

$$sen\, V=\frac{a-a'}{\sqrt{(a^2+1)}\sqrt{(a'^2+1)}} \quad , \quad \cos V=\frac{1+aa'}{\sqrt{(a^2+1)}\sqrt{(a'^2+1)}}.$$

101. Si rileva da questi valori, e più immediatamente da quello di $tang\, V$, che ove sia $a-a'=o$, cioè $a=a'$, sarà $V=o$; laonde in questo caso le due rette saranno, com'è già noto (§. 97) parallele.

102. Se poi si abbia $1+aa'=o$, l'angolo V sarà retto; in conseguenza affinchè le rette proposte possano essere l'una all'altra perpendicolari si richiede che tra i determinanti delle loro direzioni a ed a' sia soddisfatta la relazione

$$1+aa'=o.$$

103. *Per gli assi obbliqui.* Per questo caso dinotando con l'angolo degli assi si ha (§. 83)

$$tang\,\varphi=\frac{a\, sen\,\theta}{a\cos\theta+1}\quad,\quad tang\,\varphi'=\frac{a'\, sen\,\theta}{a'\cos\theta+1},$$

e ne conseguita

$$tang\, V=\frac{(a-a')\, sen\,\theta}{aa'+(a+a')\cos\theta+1}.$$

Inoltre sostituendo nei valori di $sen\,V$ e $cos\,V$ scritti poc'anzi quelli che dal §. 83 si ottengono pe' seni e coseni degli angoli φ e φ' si avrà

$$sen\,V=\frac{(a-a')\, sen\,\theta}{\sqrt{(a^2+2a\cos\theta+1)}\,\sqrt{(a'^2+2a'\cos\theta+1)}}$$

$$cos\,V=\frac{aa'+(a+a')\cos\theta+1}{\sqrt{(a^2+2a\cos\theta+1)}\,\sqrt{(a'^2+2a'\cos\theta+1)}}.$$

104. Risulta da queste formole che anche nel caso degli assi obbliqui le due rette proposte saranno parallele se si abbia $a-a'=o$; ma perchè possano essere tra loro perpendicolari conviene che sia soddisfatta la condizione

$$aa'+(a+a')\cos\theta+1=o.$$

PROBLEMA V.

105. *Trovare l'equazione della retta che passando per un punto (α,β) sia perpendicolare ad una retta*

$$y=ax+b.$$

Si supponga essere a' il determinante della direzione della perpendicolare; e poichè la medesima dee passare pe'l punto (α,β) la sua equazione sarebbe (§. 87)

$$y-\beta=a'(x-\alpha).$$

Ciò posto:

I°. *Se gli assi sono ortogonali* sarà (§°. 102)

$$1+aa'=o;$$

quindi

$$a'=-\frac{1}{a};$$

e l'equazione della perpendicolare alla retta proposta sarà in conseguenza

$$y-\beta=-\frac{1}{a}(x-\alpha).$$

106. II°. *Sei poi gli assi sono obbliqui* dev'essere (§. 104)

$$aa'+(a+a')\cos\theta+1=o;$$

e ne risulta

$$a'=-\frac{a\cos\theta+1}{a+\cos\theta};$$

laonde l'equazione della perpendicolare alla data retta sarà nel caso attuale

$$y-\beta=-\frac{a\cos\theta+1}{a+\cos\theta}(x-\alpha).$$

PROBLEMA VI.

107. *Trovare l' espressione della lunghezza della perpendicolare condotta da un punto (α,β) ad una retta*

$$y = ax + b.$$

I°. *Per gli assi ortogonali.* Si dinoti con L la lunghezza della perpendicolare, e con x',y' le coordinate del punto in cui essa incontra la data retta; sarà L la distanza tra i due punti (α,β) ed (x',y'); e perciò si avrà (§. 65)

$$L = \sqrt{(y'-\beta)^2+(x'-\alpha)^2}\ .$$

Ora l' equazione della perpendicolare in virtù del precedente problema è

$$y-\beta = -\frac{1}{a}(x-\alpha);$$

e poichè il punto (x',y') si trova tanto su questa perpendicolare che sù la retta proposta, così si avranno le due relazioni

$$y' - \beta = -\frac{1}{a}(x'-\alpha)$$
$$y' = ax' + b.$$

Traendone i valori di x' ed y' e sostituendoli in quello di L si otterrà l' espressione cercata; ma occorrendo in sostanza i valori dei binomi $y'-\beta$ ed $x'-\alpha$, gioverà porre l' ultima relazione sotto la seguente forma

$$y' - \beta = a(x'-\alpha) - \beta + a\alpha + b,$$

e così si troverà immediatamente

$$x' - \alpha = a\frac{\beta - (a\alpha + b)}{a^2+1}\ ,\ y' - \beta = -\frac{\beta - (a\alpha + b)}{a^2+1}.$$

Eseguendo ora la sostituzione, la lunghezza della perpendicolare risulterà espressa da

$$L = \frac{\beta - (a\alpha + b)}{\sqrt{(a^2+1)}}\ .$$

108. Ma questa formola si può ricavare in un modo più semplice. Siano in fatti AS, PS [*fig. 30.*] le coordinate α, β del punto P, e PD = L la perpendicolare menata da esso sulla retta EF. Pel triangolo rettangolo PDQ si ha

$$L = PD = PQ \times sen\ PQD = (PS - QS)\ cos\ FCx;$$

ma è $PS = \beta$, $QS = a\alpha + b$; $cos\ FCx = \dfrac{1}{\sqrt{(a^2+1)}}$,

sostituendo si avrà dunque la stessa formola di poc' anzi.

109. Conviene intanto osservare che il radicale che entra in questa formola ammette il doppio segno $\pm$; però siccome si cerca il valore assoluto della perpendicolare dovrà preferirsi quello che rende positivo il numeratore. Ora se il punto P cade al di sopra di EF si ha PS > QS, e quindi $\beta > a\alpha + b$; ma se cade al di sotto si ha invece PS < QS, e quindi $\beta < a\alpha + b$; in conseguenza si adotterà il segno + o il — secondochè il punto dato cada al di sopra o al di sotto della data retta.

110. II°. *Per gli assi obbliqui.* Per questo caso le due relazioni nascenti dalla esistenza del punto (α, β) sulla perpendicolare e sulla data retta saranno (§. 106)

$$y' - \beta = -\frac{a\cos\theta + 1}{a + \cos\theta}(x' - \alpha)$$

$$y' - \beta = a(x' - \alpha) - \beta + a\alpha + b$$

e se ne ricava

$$x'-\alpha=(a+\cos\theta)\frac{\beta-(a\alpha+b)}{a^2+2a\cos\theta+1}$$

$$y'-\beta=-(a\cos\theta+1)\frac{\beta-(a\alpha+b)}{a^2+2a\cos\theta+1}.$$

Ma è attualmente (§.° 66)

$$L=\sqrt{(y'-\beta)^2+(x'-\alpha)^2+2(y'-\beta)(x'-\alpha)\cos\theta}$$

sostituendo adunque i precedenti valori di $x'-\alpha$, ed $y'-\beta$, ed osservando che si ha $1-\cos^2\theta=\operatorname{sen}^2\theta$, risulterà

$$L=\frac{\beta-(a\alpha+b)}{\sqrt{a^2+2a\cos\theta+1}}\operatorname{sen}\theta.$$

Ma si giunge a questa formola in un modo assai più semplice seguendo il metodo tenuto in secondo luogo nel caso degli assi ortogonali. In fatti si ha

$$L=(PS-QS)\operatorname{sen}PQD=(\beta-a\alpha-b)\operatorname{sen}(\theta-\varphi)$$

posto che φ dinoti l'angolo FCx; ma essendo (§. 83)

$$a=\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}(\theta-\varphi)},\ \text{si ha}\ \operatorname{sen}(\theta-\varphi)=\frac{\operatorname{sen}\varphi}{a},$$

dunque si avrà

$$L=\frac{\beta-(a\alpha+b)}{a}\operatorname{sen}\varphi;$$

e sostituendo a $\operatorname{sen}\varphi$ il valore scritto al §. 83 si ritorna alla formola precedente.

PROBLEMA VII.

111. *Determinare la direzione della bisecante dell' angolo compreso da due rette*

$$y=ax+b\quad,\quad y=a'x+b'.$$

Limiteremo la risoluzione di questo problema al solo caso degli assi ortogonali; e però supposto che l'equazione della bisecante sia

$$y=px+q,$$

gli angoli che questa retta forma con ciascuna delle proposte saranno rispettivamente determinati (§. 99) da $\frac{a-p}{1+ap}$, e $\frac{p-a'}{1+ap}$; dovendo adunque questi due angoli essere eguali si avrà la relazione

$$\frac{a-p}{1+ap}=\frac{p-a'}{1+a'p}$$

per mezzo della quale rimane determinato il valore di p; e poichè la medesima dà luogo all' equazione di 2°. grado

$$p^2-2\frac{aa'-1}{a+a'}p-1=0$$

le di cui radici sono entrambe reali, così è che il problema è risoluto da due rette, ma in questo senso che mentre una biseca l'angolo compreso dalle due rette (§°. 98), l'altra biseca il supplemento, al quale in effetti conviene la stessa analisi.

112. Dinotando con p' e p'' le due radici della precedente equazione, e con x',y' le coordinate del punto in cui

s' incontrano le rette date, le equazioni delle due bisecanti saranno (§. 87)

$$y-y'=p'(x-x') \quad , \quad y-y'=p''(x-x') ;$$

ma per la teorica delle equazioni di 2° grado si ha $p'p''=-1$ e quindi $p'p''+1=o$, perciò le due bisecanti saranno tra loro perpendicolari (§. 102).

113. Se una delle rette date, per esempio la seconda, coincida con l' asse delle x o gli sia parallela, si ha $a'=o$, e l' equazione di 2° grado in p riducendosi in tal caso a

$$p^2+\frac{2}{a}p-1=o ,$$

risulterà

$$p'=\frac{-1+\sqrt{(a^2+1)}}{a}=\frac{a}{1+\sqrt{(a^2+1)}}$$

$$p''=\frac{-1-\sqrt{(a^2+1)}}{a}=\frac{a}{1-\sqrt{(a^2+1)}}$$

PROBLEMA VIII.

114. *Date le ascisse o le ordinate di due punti* P , P' *[fig. 17.] situati sopra una retta EF di conosciuta direzione trovare l'espressione della distanza dei punti medesimi.*

Sia a il determinante della direzione della retta, e si dinotino con (α,β) ed (α',β') i due punti P e P': tra la differenza delle ordinate e quella delle ascisse di questi due punti si avrà la relazione (§. 79)

$$(\beta-\beta')=a(\alpha-\alpha')$$

e quindi

$$\alpha-\alpha'=\frac{\beta-\beta'}{a} .$$

Ciò posto si dinoti con D la distanza dei due punti, ed essendo in generale

$$D=\sqrt{(\beta-\beta')^2+(\alpha-\alpha')^2+2(\beta-\beta')(\alpha-\alpha')\cos\theta}$$

se in questa formola si sostituisce il precedente valore di $\beta-\beta'$ si avrà la distanza D espressa in funzione delle ascisse dei due punti, e sostituendovi invece quello di $\alpha-\alpha'$ si otterrà la distanza medesima espressa in funzione delle ordinate. Così nel primo caso trovasi

$$D=(\alpha-\alpha')\sqrt{a^2+2a\cos\theta+1}$$

e nel secondo

$$D=\frac{(\beta-\beta')}{a}\sqrt{a^2+2a\cos\theta+1} .$$

115. Se da due punti si conducono due parallele che incontrano una retta qualunque la parte di questa retta interposta tra le due parallele suol chiamarsi *projezione* della distanza dei due punti sulla retta medesima.

Ciò posto sieno PT, PS le coordinate α, β del punto P, e P'T', P'S' le coordinate α', β' del punto P'; sarà $SS'=\alpha-\alpha'$ la projezione della retta PP' sull' asse delle x, e $TT'=\beta-\beta'$ la projezione della stessa retta sull' asse delle y.

Or s' indichi con φ l' angolo che la retta EF forma con l' asse delle x; si avrà (§. 83).

$$\sqrt{a^2+2a\cos\theta+1}=a\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\varphi} \quad , \quad a=\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}(\theta-\varphi)}$$

e quindi

$$\sqrt{a^2+2a\cos\theta\times 1}=\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}(\theta-\varphi)} , \quad \frac{\sqrt{a^2+2a\cos\theta+1}}{a}=\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\varphi}$$

In virtù di questi valori le formole precedenti si cangiano in

$$D = (\alpha - \alpha') \frac{sen\,\theta}{sen\,(\theta - \varphi)} \quad , \quad D = (\beta - \beta') \frac{sen\,\theta}{sen\,\varphi} ,$$

e tradotte in linguaggio geometrico si possono comprendere nel seguente enunciato : *Una parte qualunque di una retta è eguale alla sua projezione sopra uno degli assi moltiplicata pe 'l rapporto del seno dell' angolo degli assi al seno dell' angolo che la stessa retta forma con l' altro asse.*

116. Quando gli assi sono ortogonali si ha $cos\,\theta = o$. In tal caso le formole precedenti si riducono a

$$D = (\alpha - \alpha') \sqrt{(a^2 + 1)} = (\alpha - \alpha')\, sec\,\varphi$$

$$D = \frac{\beta - \beta'}{a} \sqrt{(a^2 + 1)} = (\beta - \beta')\, sec\,(90^\circ - \varphi) ;$$

e possono comprendersi nell'enunciato seguente : *Una parte qualunque di una retta è eguale alla sua projezione sopra uno degli assi moltiplicata per la secante dell' angolo ch' essa forma con l' asse medesimo.*

Applicazione delle formole precedenti alla risoluzione di alcuni problemi.

117. Si è detto (§. 74) che la teorica della retta dee riguardarsi come la base e 'l fondamento della geometria analitica , ed ora ci proponiamo di mostrare con degli esempii com' essa grandemente faciliti la traduzione in linguaggio algebrico delle condizioni relative alle quistioni geometriche (§. 12.) . E perchè meglio possa valutarsi l' uso e lo scopo delle formole poc' anzi esposte , troviamo opportuno di ritornare sulle stesse quistioni già trattate in altra guisa fin dalla introduzione all' opera presente . Del rimanente le cose delle quali in appresso avremo ad occuparci non presenteranno che una continuata applicazione delle formole medesime ; ed è perciò che inculchiamo ai giovani a porre ogni studio onde rendersele al più possibile familiari.

PROBLEMA I.

(*Vedi il* §. 3.).

118. *Condurre in un triangolo ABC* [*fig. 1*] *la retta DE che sia parallela alla base AC ed eguale alla somma dei segmenti AD , CE.*

Si prendano per assi delle x e delle y la base AC e la perpendicolare in A , e si dinotino i punti dati B e C con (α , β) ed (α' , o) , ed i punti sconosciuti D ed E con (x' , y') ed (x'' , y'') ; sarà (§. 65).

$$AD = \sqrt{(x'^2 + y'^2)} \quad , \quad CE = \sqrt{(\alpha' - x'')^2 + y''^2} ,$$

ed inoltre dovendo essere DE parallela ad AC si avrà

$$DE = x'' - x' ,$$

e di più $y''=y'$. In conseguenza sarà per la condizione del problema

$$\sqrt{(x'^2+y'^2)} + \sqrt{(\alpha'-x'')^2+y''^2} = x''-x' \qquad (1).$$

Ciò posto trovandosi i punti D ed E sulle rette AB, BC che hanno rispettivamente per equazioni (§§. 94 e 90)

$$y = \frac{\beta}{\alpha}x' \quad , \quad y = -\frac{\beta}{\alpha'-\alpha}(x'-\alpha')$$

le medesime dovranno essere verificate dalle loro coordinate, e quindi si avranno le due relazioni

$$y' = \frac{\beta}{\alpha}x' \quad , \quad y' = -\frac{\beta}{\alpha'-\alpha}(x''-\alpha')$$

donde si ricava

$$x' = \frac{\alpha y'}{\beta} \quad ; \quad x'' = \alpha' - \frac{(\alpha'-\alpha)y'}{\beta}.$$

Sostituendo questi valori in (1) risulta l'equazione

$$y'\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)} + y'\sqrt{(\alpha'-\alpha)^2+\beta^2} = \alpha'\beta - \alpha' y' ,$$

la quale risolve il problema, dapoichè non vi ha d'incognito che la sola ordinata y', che rappresenta la distanza tra le parallele DE, AC, e si ha

$$y' = \frac{\alpha'\beta}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)} + \alpha' + \sqrt{(\alpha'-\alpha)^2+\beta^2}}.$$

Per costruire questa espressione si rifletta che i tre termini del denominatore

$$\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)} \quad , \quad \alpha' \quad , \quad \sqrt{(\alpha'-\alpha)^2+\beta^2}$$

esprimono ordinatamente i tre lati AB, AC, BC; laonde

dinotandoli rispettivamente con a, b, c l'espressione precedente diverrà

$$y' = \frac{b\beta}{a+b+c},$$

e potrebbesi costruire mediante la quarta proporzionale in ordine al perimetro del triangolo, alla base AC $= b$, ed all'altezza rappresentata da β; ma poichè $b\beta$ equivale al doppio della superficie, così, indicandola con S, si avrà

$$y' = \frac{2S}{a+b+c},$$

e si riconosce che y', distanza delle parallele DE, AC, è quanto il raggio del cerchio iscrittibile nel triangolo (§. 40.). Da ciò risulta che il centro O di questo cerchio dee trovarsi sulla retta DE, e ne segue che il problema si risolve conducendo da O la parallela alla base AC.

Del resto la geometria rende evidentissima questa risoluzione, dapoichè congiungendo le rette AO, CO gli angoli DOA ed EOC saranno rispettivamente eguali ad OAC ed OCA, e quindi ancora ad OAD ed OCE; perciò i due triangoli ADO, CEO saranno isosceli, e risultandone AD $=$ DO, CE $=$ EO, si avrà AD $+$ CE $=$ DO $+$ EO $=$ DE.

Problema II.

(*Vedi il* §. 7)

119. *In un triangolo ABC* [*fig.* 2] *iscrivere il quadrato DEFG, che abbia un lato nella base AC.*

Presi per assi delle x e delle y la base AC e la perpendicolare in A esprimeremo come poc'anzi con (α, β) ed (α', o) i punti B e C; e con (x',y') ed (x'',y') i punti D ed E; si avrà così DE $=x''-x'$; ma dev' essere DE=DG=EF$=y'$, sarà perciò

$$x''-x'=y'. \qquad (1)$$

Ciò posto dovendo le coordinate dei punti D, E verificare rispettivamente le equazioni delle rette AB, BC, e queste equazioni essendo

$$y=\frac{\beta}{\alpha}x \qquad , \qquad y=-\frac{\beta}{\alpha'-\alpha}(x-\alpha'),$$

si avranno le due relazioni

$$y'=\frac{\alpha}{\beta}x' \quad (2), \qquad y'=-\frac{\beta}{\alpha'-\alpha}(x''-\alpha'), \ (3)$$

le quali congiuntamente alla (1) determinano i valori delle tre incognite x',y',x''. Traendo dalla (2) il valore di x' e sostituendolo in (1) si ha l' altra relazione

$$y'=\frac{\beta}{\alpha+\beta}x'', \qquad (4)$$

e questa e la (3) determinerebbero i valori di x'' ed y', coordinate del punto E.

120. Intanto si rifletta che se le relazioni (3) e (4) si riguardano separatamente allora le coordinate x'', y' non hanno più valori determinati ma diventano variabili, e quindi esse saranno le equazioni di due luoghi geometrici, i quali se sapessero costruirsi darebbero nel loro incontro il punto definito dalle coordinate x'', y', vale a dire il punto E.

Sotto questo punto di veduta le due equazioni (3) e (4) si possono per maggior semplicità scrivere come segue

$$y=-\frac{\beta}{\alpha'-\alpha}(x-\alpha') \ (5) \quad , \quad y=\frac{\beta}{\alpha+\beta}x, \qquad (6)$$

cioè togliendo gli apici dalle variabili; ed è manifesto che la prima altro non è che l' equazione del lato BC, e la seconda esprime una retta che passa per l' origine, e per un altro punto la di cui ascissa è $\alpha+\beta$ e β l' ordinata (§. 94). Basterà dunque costruire soltanto quest' ultima retta, dapoichè essa segnerà sul lato BC il punto cercato E. Or sia BP la perpendicolare menata da B ad AC; sarà AP $=\alpha$, BP $=\beta$; prendendo PQ$=$BP$=\beta$, risulterà AQ $=\alpha+\beta$, e perciò applicando al punto Q la QK eguale e parallela a BP, sarà K il punto che ha per ascissa $\alpha+\beta$, e β per ordinata, e quindi AK sarà la retta dell' equazione (6). Ma questa costruzione si riduce evidentemente a formare sulla perpendicolare BP il quadrato BPQK, ed a congiungere la retta AK; questa congiungente segnerà sul lato BC il vertice E del quadrato richiesto.

Ed in effetti risulta da questa costruzione che il rapporto di BK a KQ sia eguale a quello di DE ad EF; e però essendo BK $=$ KQ sarà DE $=$ EF, e quindi la figura DEFG sarà un quadrato.

Problema III.

(*Vedi il* §. 29)

121. *Da un punto dato sulla bisecante di un angolo retto condurre una retta per modo che la parte intercetta tra i lati dell' angolo risulti eguale ad una retta data* d.

Si prendano per assi coordinati gli stessi lati dell' angolo, e si chiamino x', y' le parti che la retta cercata taglia da essi; si avrà per tal modo l' equazione di condizione

$$x'^2+y'^2=d^2 \qquad (1)$$

e l' equazione di quella retta sarà (§. 95)

$$x'y+y'x=x'y' \qquad (2)$$

Trovandosi intanto il punto dato sulla bisecante dell' angolo compreso dagli assi, le sue coordinate saranno eguali in grandezza, e potrà quindi dinotarsi con $(\alpha.\alpha)$; ma lo stesso punto trovasi ancora sulla retta (2), perciò si ha l' altra equazione di condizione

$$x'\alpha + y'\alpha = x'y',$$

ossia

$$\alpha\,(x'+y') = x'y'\ ; \qquad (3)$$

ed i valori delle incognite x', y' saranno in conseguenza determinati dalle equazioni (1) e (3). Queste equazioni coincidendo evidentemente con quelle ottenute al §.32, la risoluzione del problema si potrà compiere nello stesso modo.

Problema IV.

122. *Trovare il centro del cerchio circoscrittibile ad un dato triangolo.*

Supporremo attualmente presi per assi coordinati due rette qualunque tra loro perpendicolari, e dinoteremo i vertici del triangolo con (α,β), (α',β'), (α'',β''), e con (x',y') il centro del cerchio che gli è circoscritto. Chiamando r la distanza comune da questo centro ai vertici, distanza ch' è il raggio del cerchio, si avranno le tre equazioni di condizione

$$(y'-\beta)^2 + (x'-\alpha)^2 = r^2$$
$$(y'-\beta')^2 + (x'-\alpha')^2 = r^2$$
$$(y'-\beta'')^2 + (x'-\alpha'')^2 = r^2$$

mediante le quali restano determinati i valori delle tre incognite x', y', ed r, cioè delle coordinate del centro e del raggio. Ma da queste tre equazioni possono subito ricavarsene due con le sole incognite x', y', bastando perciò di sottrarre una di esse da ciascuna delle altre due ; che in tal guisa spari-

sce l' incognita r. Sottraendo per tanto la prima dalla seconda e dalla terza si hanno le due seguenti equazioni

$$y'(\beta-\beta') - \frac{\beta^2-\beta'^2}{2} = -(\alpha-\alpha')\,x' + \frac{\alpha^2-\alpha'^2}{2}$$

$$y'(\beta-\beta'') - \frac{\beta^2-\beta''^2}{2} = -(\alpha-\alpha'')\,x' + \frac{\alpha^2-\alpha''^2}{2}$$

dalle quali possono ricavarsi i valori delle coordinate incognite del centro x' ed y'. Ma considerando separatamente queste equazioni, e però come variabili le x', y', si vede come a §. 120 ch' esse rappresentano due rette, costruendo le quali si avrebbe nella loro intersezione il centro (x',y'). Intanto ponendo le equazioni medesime sotto la forma

$$y' - \frac{\beta+\beta'}{2} = -\frac{\alpha-\alpha'}{\beta-\beta'}\left(x' - \frac{\alpha+\alpha'}{2}\right) \qquad (1)$$

$$y' - \frac{\beta+\beta''}{2} = -\frac{\alpha-\alpha''}{\beta-\beta''}\left(x' - \frac{\alpha+\alpha''}{2}\right) \qquad (2)$$

si scorge che la retta rappresentata dalla (1) passa pe 'l punto definito dalle coordinate $\frac{\alpha+\alpha'}{2}$, $\frac{\beta+\beta'}{2}$ (§. 87) ; punto nel quale si riconosce il mezzo del lato (§. 64) che unisce i vertici (α,β), (α',β') ; e si ravvisa inoltre ch' essa è perpendicolare ad una retta la di cui direzione è determinata da $\frac{\beta-\beta'}{\alpha-\alpha'}$ (§ 105) ed è perciò perpendicolare allo stesso lato, il quale ha per equazione (§. 91)

$$y-\beta = \frac{\beta-\beta'}{\alpha-\alpha'}\,(x-\alpha').$$

Si vedrebbe egualmente che la retta (2) passa pe'l punto medio del lato che ha per vertici i punti (α,β), (α'',β''), ed è di più perpendicolare al lato medesimo. E ne risulta in fine che: *il centro del cerchio circoscrittibile si ottiene nella intersezione delle rette che passano pe' punti medii di due lati del triangolo e sono ad essi perpendicolari :* costruzione esattamente conforme a quella che insegna là geometria.

Problema V.

123. *Determinare il centro del cerchio iscrittibile in un triangolo ABC [fig. 12].*

Prendendo per asse delle x un lato BC e per asse delle y la perpendicolare in un vertice B, gli altri due vertici A, B potranno dinotarsi con (α, β), (α', o), e le equazioni dei lati BA, AC saranno

$$y = \frac{\beta}{\alpha}x \quad (1) \quad , \quad y = -\frac{\beta}{\alpha' - \alpha}(x - x'). \quad (2)$$

Ciò posto s' indichino con x', y' le coordinate del centro ; le perpendicolari condotte da esso sù questi due lati saranno eguali ciascuna ad y' ; laonde cercandone le espressioni mediante la formola del §. 107, ed osservando che il centro è al di sotto di ciascuna delle rette BA, AC (§. 109) si avranno le due equazioni di condizione

$$y' = \frac{\beta x' - \alpha y'}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}} \quad , \quad y' = \frac{\beta \alpha' - \beta x' - (\alpha' - x)y'}{\sqrt{(\alpha' - x)^2 + \beta^2}},$$

le quali determinano i valori delle coordinate x' ed y', l' ultima delle quali esprime ancora il raggio del cerchio. Liberarandole dai fratti e sommandole si ha l' equazione soltanto in y'

$$y'\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)} + y'\sqrt{(\alpha' - \alpha)^2 + \beta^2} = \beta\alpha' - \alpha' y' \quad (3)$$

da cui si trae

$$y' = \frac{\beta\alpha'}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)} + \sqrt{(\alpha' - \alpha)^2 + \beta^2} + \alpha'}$$

espressione identica a quella ottenuta al §. 118; e di seguito si ha

$$x' = \frac{\alpha'(\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)} + \alpha)}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)} + \sqrt{(\alpha' - \alpha)^2 + \beta^2} + \alpha'}.$$

Dividendo y' per x' risulta

$$\frac{y'}{x'} = \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)} + \alpha}$$

e però l' equazione della retta che unisce l' origine al centro sarà

$$y = \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)} + \alpha}x;$$

ma quest' equazione è anche quella della retta che biseca l' angolo ABC (§.113), dunque il centro si troverà sù questa bisecante. Riflettendo poi che ciascuno dei vertici può esser preso per origine si ha come dagli elementi di geometria che : *il centro del cerchio iscrittibile in un triangolo si trova nella intersezione delle bisecanti dei suoi angoli, e che queste rette debbono concorrere in un medesimo punto.*

124. In un modo consimile potrebbero determinarsi i valori dei raggi degli altri tre cerchi (§.41) che toccano esternamente i lati del triangolo, e si troverebbero espressioni uniformi a quella di y', però con segni diversi ai radicali. Intanto se si libera dà radicali l' equazione (3), si ha l' equazione di 4° grado in y'

$$y'^4 - 2\frac{\beta^2 + \alpha^2 - \alpha\alpha'}{\beta}y'^3 + (\beta^2 + \alpha^2 - \alpha'^2 + \alpha\alpha')y'^2 + \beta\alpha'^2 y' - \frac{\beta^2\alpha'^2}{4} = o,$$

le di cui radici saranno i raggi de' quattro cerchi, o meglio le coordinate dei loro centri; e poichè tre di essi cadono dal lato delle ordinate positive, ed un solo dal lato delle negative, così l'equazione precedente avrà tre radici positive ed una negativa, la quale appartiene al centro del cerchio che cade esternamente sul lato BC opposto all' angolo A. Dinotando adunque queste quattro radici con r, r_b, r_c, e $-r_a$ si avrà per la teorica delle equazioni $-rr_ar_br_c = -\frac{1}{4}\beta^2\alpha'^2$, ovvero $rr_ar_br_c = (\frac{1}{2}\beta\alpha')^2$, e ne risulta che: *il prodotto dei raggi dei quattro cerchi iscrittibili in un triangolo è quanto la sua superficie quadrata*, come al §. 43.

125. Se il triangolo proposto abbia un angolo retto, e sia per esempio l'angolo in A, allora le rette (1) e (2) essendo tra loro perpendicolari, si avrà (§. 102) $1-\frac{\beta^2}{\alpha(\alpha'-\alpha)}=o$, ossia $\beta^2+\alpha^2-\alpha\alpha'=o$. Quindi l'equazione di 4° grado si riduce ad

$$y'^4-\alpha'^2y'^2+\beta\alpha'^2y'-\frac{1}{4}\beta^2\alpha'^2=o,$$

e poichè manca del 2° termine avviene che la somma delle sue radici negative è eguale a quella delle positive, cioè si ha

$$r_a=r+r_b+r_c.$$

In conseguenza: *il raggio del cerchio esterno sulla ipotenusa è eguale alla somma degli altri tre raggi*; come al §. 45.

Dinotando con a, b, c, i lati del triangolo opposti rispettivamente agli angoli A, B, C, si avrà $\alpha'=a$, e $\beta\alpha'=bc$, dapoichè ciascuno di questi due prodotti eguaglia il doppio della superficie del triangolo; quindi l'ultima equazione di 4° grado si cangia in

$$y'^4=a^2y'^2-abcy'+\frac{1}{4}b^2c^2=(ay'-\frac{1}{2}bc)^2,$$

ed estraendo la radice si hanno le due equazioni di 2° grado

$$y'^2-ay'+\frac{1}{2}bc=o \qquad (4)$$

$$y'^2+ay'-\frac{1}{2}bc=o \qquad (5)$$

L'equazione (4) ha le radici entrambe positive, e la (5) ne ha una positiva e l'altra negativa, la quale in conseguenza è rappresentata da r_a, cioè dal raggio del cerchio esterno sulla ipotenusa; ma è facile a riconoscere che la radice positiva della stessa (5) è l'ordinata del centro del cerchio interno al triangolo, vale a dire è il suo raggio r. In fatti l'equazione (3) che determina questo raggio equivale ad $y'(b+c)=bc-ay'$; elevandone i due membri a quadrato, e riducendo in virtù della relazione $a^2=b^2+c^2$ nascente dal triangolo rettangolo, quell'equazione diviene $y'^2+ay'-\frac{1}{2}bc=o$; coincidendo esattamente con la (5). Perciò le radici di questa equazione saranno r e $-r_a$; e ne risulta che le due radici della (4) sono r_b ed r_c. Quindi per le proprietà delle equazioni si avranno le seguenti relazioni

$$\text{dalla (4)}\ \begin{cases} r_b+r_c=a \\ r_br_c=\frac{1}{2}bc \end{cases},\quad \text{dalla (5)}\ \begin{cases} r_a-r=a \\ rr_a=\frac{1}{2}bc, \end{cases}$$

le quali riproducono gli altri teoremi enunciati a §. 45.

CAPITOLO IV.

DEL CERCHIO.

126. L'equazione del cerchio già trovata altrove (§. 68) si ottiene in un modo più semplice riguardando questa curva come il luogo de' punti equidistanti da un punto fisso C [*fig. 19*]. In fatti se si prendono per assi due rette tra loro perpendicolari condotte per questo punto, e si dinoti con (x, y) un punto qualunque della curva, si avrà $CP=\sqrt{y^2+x^2}$; in conseguenza dinotando con r questa distanza, l'equazione del cerchio sarà $\sqrt{y^2+x^2}=r$, ovvero

$$y^2+x^2=r^2. \qquad (1)$$

127. Se un solo degli assi passa per C e sia per esempio quello delle x, rimanendo l'origine in un punto qualunque di quest' asse, l'equazione sarebbe invece

$$y^2+(x-\alpha)^2=r^2, \qquad (2)$$

essendo α la distanza dal centro all' origine. Che se l'origine si faccia cadere in un vertice del diametro che or fa da asse delle x, sarà $\alpha=r$, e l'equazione diviene in tal caso

$$y^2=2rx-x^2. \qquad (3)$$

Se poi si prende per origine un punto qualunque e si dinoti il centro con (α, β), l'equazione del cerchio sarà

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=r^2,$$

ovvero, sviluppando le potenze ed ordinando

$$y^2+x^2-2\beta y-2\alpha x+(\beta^2+\alpha^2-r^2)=o; \qquad (4)$$

e dicesi *equazione generale del cerchio in coordinate ortogonali* mentre da essa possono desumersi le equazioni che gli

convengono per ogni particolare posizione di assi ortogonali. Così ponendovi $\beta=o$ si ritorna alla (2); se oltre a $\beta=o$ si faccia $\alpha=r$ si ritorna alla (3); e ponendovi ad un tempo $\beta=o$ $\alpha=o$ si ha di nuovo l'equazione (1).

128. Qualora l'origine cadesse in un pnnto qualunque del cerchio sarebbe $\beta^2+\alpha^2=r^2$, e l'equazione (4) perdendo l'ultimo termine, cioè il termine indipendente dalle variabili, si ridurrebbe ad

$$y^2+x^2-2\beta y-2\alpha x=o.$$

E quest' equazione è, com' esser dovea, verificata dalle coordinate $x=o$, $y=o$, che definiscono l'origine, la quale è attualmente un punto della curva. Del rimanente è chiaro che questa circostanza non è già particolare al cerchio, ma dee verificarsi in generale per qualunque linea la cui equazione manchi di termine noto.

129. Egli è ben chiaro che in tutte queste diverse forme l'equazione conserverà sempre i due termini in y^2 ed x^2, mentre nell' equazione generale essi hanno l'unità per coefficiente, e quindi non possono annullarsi; ed inoltre è manifesto che questi due termini ridotti ad un membro avranno i medesimi segni. Segue da ciò che la forma generica dell' equazione del cerchio in coordinate ortogonali è

$$y^2+x^2+Dy+Ex+F=o, \qquad (5)$$

ovvero

$$Ay^2+Ax^2+Dy+Ex+F=o$$

mentre l'ultima prende la forma della prima col dividerne tutt' i termini per A.

Viceversa ogni equazione riducibile a queste forme ha un cerchio per luogo geometrico se gli assi sono ortogonali. In fatti, se ciò è vero, chiamando α, β le coordinate del suo centro ed r il raggio, dovrà l'equazione (5) essere identica alla (4), e quindi si avranno le relazioni

$$-2\beta=D \quad , \quad -2\alpha=E \quad , \quad \beta^2+\alpha^2-r^2=F$$

dalle quali si ricava

$$\beta=-\frac{1}{2}\,D \quad , \quad \alpha=-\frac{1}{2}\,E \quad , \quad r=\sqrt{\frac{D^2+E^2}{4}-F}.$$

Ora il cerchio il cui centro e 'l raggio sono determinati da questi valori ha per equazione

$$(y+\frac{1}{2}\,D)^2+(x+\frac{1}{2}\,E)^2=\frac{D^2+E^2}{4}-F\ ,$$

e quest' equazione sviluppata coincide con la proposta, dunque quel cerchio sarà il suo luogo geometrico.

130. Mediante i precedenti valori di α, β, ed r può determinarsi il centro e 'l raggio di un cerchio del quale sia data l'equazione, e quindi descrivere la curva; ma è bene di tener presente che, essendo $\alpha=-\frac{1}{2}E$, e $\beta=-\frac{1}{2}D$, così: *il centro si determina prendendo sugli assi delle x e delle y le parti AN ed AM [fig. 31] eguali alle metà dei coefficienti dei termini in x ed y a 1° grado co' segni cambiati, e poscia elevando agli assi le perpendicolari NC, MC*; il punto C sarà il centro cercato.

131. Se gli assi sono obbliqui e ad angolo θ l'equazione del cerchio sarebbe (§. 66)

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2+2(y-\beta)\,(x-\alpha)\cos\theta=r^2,$$

ossia

$$\left.\begin{array}{r} y^2+2\cos\theta xy+x^2-2(\beta+\alpha\cos\theta)\,y-2\,(\alpha+\beta\cos\theta)\,x \\ +\beta^2+\alpha^2+2\,\alpha\,\beta\cos\theta-r^2 \end{array}\right\}=0\,;$$

e la sua forma generica sarà

$$y^2+2\cos\theta xy+x^2+Dy+Ex+F=0, \qquad (6)$$

forma la quale non differisce dalla (5) che per trovarvisi di più il termine in xy, moltiplicato per $2\cos\theta$, cioè *il prodotto delle variabili moltiplicato pe 'l doppio coseno dell' angolo degli assi.*

132. Per l'opposto ogni equazione riducibile a questa forma ha un cerchio per luogo geometrico, se θ sia l'angolo degli assi; e ciò si dimostra come nel caso delle coordinate ortogonali. Paragonando l'ultima con la penultima equazione si hanno le tre relazioni

$$\beta+\alpha\cos\theta=-\frac{1}{2}D,\ \alpha+\beta\cos\theta=-\frac{1}{2}E,\ \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\theta-r^2=F,$$

dalle quali si traggono per α,β,r i seguenti valori

$$\alpha=\frac{D\cos\theta-E}{2(1-\cos^2\theta)},\ \beta=\frac{E\cos\theta-D}{2(1-\cos^2\theta)},\ r=\sqrt{\frac{D^2+E^2-2DE\cos\theta}{4(1-\cos^2\theta)}-F}.$$

Però il centro si può costruire come nel caso degli assi ortogonali, cioè: *prendendo sugli assi delle x e delle y le parti AN ed AM [fig. 32], eguali rispettivamente a $-\frac{1}{2}E$ e $-\frac{1}{2}D$, e poi tirando pei punti N ed M le perpendicolari NC, MC;* così sarà C il centro del cerchio. In fatti dinotando con α', β' le coordinate CM', CN' di questo punto, pei triangoli CMM', CNN', che hanno gli angoli in M', N', eguali a θ si ha $MM'=\alpha'\cos\theta$, $NN'=\beta'\cos\theta$; ma è $AM'+MM'=AM$, ed $AN'+NN'=AN$, dunque si avrà pure

$$\beta'+\alpha'\cos\theta=-\frac{1}{2}\,D \quad , \quad \alpha'+\beta'\cos\theta=-\frac{1}{2}\,E\ ;$$

e perciò i valori di α', β' saranno identici a quelli di α, e β poc' anzi scritti; quindi il punto C sarà il centro del cerchio rappresentato dall' equazione (6).

133. Ciascuna delle diverse equazioni rappresentanti il cerchio può dar luogo immediatamente a qualche proprietà

di questa curva. Così dall' equazione $y^2 + x^2 = r^2$ traendosi $y^2 = r^2 - x^2 = (r + x)(r - x)$, se PS [*fig. 19*] sia un' ordinata all' asse delle x, cioè al diametro BB', sarà $r + x = SB'$, $r - x = SB$, e quindi

$$PS^2 = SB' \times SB;$$

vale a dire : *Il quadrato dell' ordinata ad un diametro è eguale al rettangolo de' due segmenti in cui quella lo divide.*

Se si considera l' equazione $y^2+x^2=2rx$, per la quale l' origine è in un vertice B' del diametro, si ha $y^2 + x^2 = B'P^2$, $2rx = BB' \times B'S$; e perciò

$$B'P^2 = BB' \times B'S;$$

in conseguenza : *la corda B'P è media proporzionale tra il diametro e 'l segmento B'S.*

134. Consideriamo ancora l' equazione generale in coordinate obblique

$$y^2 + 2\cos\theta\, xy + x^2 + Dy + Ex + F = o,$$

e supponiamo presi per assi due rette qualunque Ax, Ay [*fig. 33*]; se si fa nell' equazione una volta $y=o$, ed una volta $x=o$, si hanno le due equazioni di 2° grado in x ed y

$$x^2 + Ex + F = o \quad , \quad y^2 + Dy + F = o,$$

e da ciò risulta che ciascuno degli assi può solo in due punti segare il cerchio ; ma questi assi son due rette arbitrarie, adunque: *Una retta non può incontrare un cerchio in più di due punti.*

Ora le due rette Ax, Ay segheranno effettivamente il cerchio se sono reali tanto le radici della equazione in x quanto quelle dell' equazione in y; il che esige che sieno soddisfatte le due condizioni $\frac{1}{4}E^2 > F$, $\frac{1}{4}D^2 > F$; e supposto che ciò abbia luogo sieno B, B' i punti

d' incontro con Ax, e D, D' quelli con Ay; saranno AB, AB' le due radici della prima equazione, ed AD, AD' quelle della seconda. Ma il prodotto delle due radici della prima è eguale al prodotto delle due radici della seconda, perchè i loro ultimi termini sono eguali, in conseguenza si avrà

$$AB \times AB' = AD \times AD',$$

e da ciò il conosciuto teorema : *Se nel cerchio si segano due rette il prodotto dei segmenti dell' una è eguale al prodotto dei segmenti dell' altra.*

Ma non tutte le proprietà del cerchio possono leggersi *immediatamente* nelle equazioni che gli convengono, e per alcune si richiede uno studio più diligente ed accurato. Intanto or ci faremo a sviluppare quelle che s' imparano a conoscere negli elementi di geometria.

135. Si è riconosciuto poc' anzi (§. *prec.*) che una retta ed un cerchio non possono intersegarsi in più di due punti ; ma questa circostanza merita di essere rilevata in un modo più diretto. Sieno

$$y = px + q \qquad (7)$$

$$y^2 + x^2 = r^2 \qquad (8)$$

le equazioni di una retta e di un cerchio ; se queste due linee hanno un punto di comune dinotando con x' ed y' le sue coordinate le medesime dovranno verificare le equazioni di entrambe, e quindi si avranno le due relazioni

$$y' = px' + q$$

$$y'^2 + x'^2 = r^2$$

le quali determinano i valori delle incognite x', y'. Ma è chiaro che tutto ciò equivale a supporre coesistenti le equazioni (7) e (8); val quanto dire a supporre che le variabili x, y abbiano rispettivamente nell' una e nell' altra i medesimi valori; ipotesi che da variabili le cangià in incognite; ed allora sarà lecito di combinare le due equazioni nel modo che si conviene affin di trarne quei valori di x ed y che possono soddisfare ad entrambe. Ora questi valori sono evidentemente determinati da equazioni di 2° grado; quindi v' ha due coppie di valori di x ed y che possono verificare ad un tempo le due equazioni, e perciò due punti che possono esser comuni alle due linee.

136. Eliminando y si ha l' equazione di 2°. grado in x

$$(p^2+1)x^2+2pqx=r^2-q^2,$$

e le sue radici esprimeranno le ascisse dei due punti in cui la retta può segare il cerchio. Dinotando queste ascisse con x' ed x'' si avrà

$$x'=\frac{-pq+\sqrt{r^2(p^2+1)-q^2}}{p^2+1},\quad x''=\frac{-pq-\sqrt{r^2(p^2+1)-q^2}}{p^2+1}$$

ed è poi manifesto che per avere le ordinate corrispondenti a ciascuna ascissa convenga sostituirle ad una ad una nell' equazione della retta ch' è di 1° grado, e così chiamandole y' ed y'' si otterrà

$$y'=\frac{q+p\sqrt{r^2(p^2+1)-q^2}}{p^2+1},\quad y''=\frac{q-p\sqrt{r^2(p^2+1)-q^2}}{p^2+1}.$$

Si scorge da queste espressioni che le due intersezioni tra la retta e 'l cerchio saranno reali e distinte se la quantità $r^2(p^2+1)-q^2$ esistente sotto il radicale sia positiva; che se questa quantità sia negativa le due intersezioni saranno entrambe immaginarie; vale a dire in questo caso le due linee non potranno incontrarsi; e finalmente se quella quantità sia nulla allora eguagliandosi tanto le ascisse delle due intersezioni quante le loro ordinate, le due intersezioni saranno bensì reali, ma coincidenti, cioè raccolte e confuse in punto solo; quindi la retta potrà solo in questo punto incontrare il cerchio, e gli sarà perciò tangente.

137. Perchè dunque la retta (7) possa essere tangente del cerchio fa d' uopo sia verificata la relazione

$$r^2(p^2+1)=q^2,$$

ed in tal caso le coordinate x', y' del punto di contatto saranno espresse da

$$x'=\frac{-pq}{p^2+1},\quad y'=\frac{q}{p^2+1}$$

ovvero, per essere $p^2+1=\frac{q^2}{r^2}$, da

$$x'=-\frac{pr^2}{q},\quad y'=\frac{r^2}{q};$$

e ne risulta

$$p=-\frac{x'}{y'},\quad q=\frac{r^2}{y'}.$$

Se questi valori di p e q si sostituiscono nell' equazione (7) ch' esprime una retta comunque situata a riguardo del cerchio, la medesima si cangerà nell' equazione della retta che tocca il cerchio nel punto (x', y'); laonde l'equazione della tangente in questo punto sarà

$$y=-\frac{x'}{y'}x+\frac{r^2}{y'}$$

ed ancora, facendo sparire i fratti,

$$yy'+xx'=r^2.$$

Sotto la prima di queste due forme si vede che la tangente è perpendicolare alla retta che ha per equazione $y=\frac{y'}{x'}x$ (§. 105), cioè al raggio che passa pe 'l contatto; in conseguenza se si tratta di condurre la tangente al cerchio per un punto (x', y') esistente sulla curva, non si ha che a tirare in quel punto la perpendicolare al raggio corrispondente, com' è già noto.

138. Se poi debba tirarsi la tangente per un punto (α,β) esteriore al cerchio, le coordinate x', y' del contatto saranno incognite; ma trovandosi questo punto sul cerchio, e 'l punto (α,β) sulla tangente, si hanno le due relazioni

$$y'^2+x'^2=r^2 \quad , \quad \beta y'+\alpha x'=r^2$$

dalle quali si ottengono i valori delle incognite x', y'. L' eliminazione per tanto condurrebbe ad equazioni di 2° grado in x', ed y'; e ne risulta, com' è già noto, che due tangenti possono condursi al cerchio per un punto dato.

Se si elimina y' e si risolva la risultante equazione di 2° grado in x'; indi le due radici si sostituiscano nell'equazione di 1° grado $\beta y' + \alpha y' = r^2$, si troveranno le ordinate dei due contatti ordinatamente espresse da

$$x'=r\frac{r\alpha \pm \beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2-r^2}}{\alpha^2+\beta^2} \quad , \quad y'=r\frac{r\beta \mp \alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2-r^2}}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Queste espressioni sono reali se si abbia $\alpha^2+\beta^2>r$, ovvero $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}>r$; e sono immaginarie nel caso opposto. Ora $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ dinota la distanza dal centro al punto dato (α, β); distanza ch' è maggiore di r se il punto è fuori del cerchio, e minore se è dentro; in conseguenza nel primo caso si possono sempre condurre due tangenti; ma se il punto è dentro della curva le due tangenti sono, come ben si sapeva, impossibili.

139. Del rimanente per costruire i due contatti non è necessario di risolvere alcuna equazione, ma possono ottenersi nella intersezione dei due luoghi geometrici che rappresentano le due precedenti relazioni (§.120) considerate isolatamente, ipotesi che rende variabili le incognite x', y', e che permette di scriverle

$$y^2+x^2=r^2 \quad , \quad \beta y+\alpha x=r^2.$$

Or la prima di queste equazioni altro non indica che lo stesso

cerchio, e la seconda esprime una linea retta; in conseguenza costruendosi questa retta, le sue intersezioni col cerchio dato farebbero conoscere i due punti di contatto.

140. Intanto se le equazioni di questi due luoghi geometrici si combinano in un modo qualunque, ogni altra equazione che ne deriva sarà verificata dalle coordinate dei punti comuni alle due linee, e quindi rappresenterà un luogo geometrico che avrà la proprietà di passare pei punti medesimi. Sottraendo la seconda dalla prima si ha l' equazione

$$y^2+x^2-\beta y-\alpha x=0$$

che dinota un cerchio passante per l' origine (§. 128), il cui centro essendo determinato (§. 130) dalle coordinate $+\frac{\alpha}{2}$ e $+\frac{\beta}{2}$, si troverà nel mezzo della retta che unisce l' origine al punto (α, β); in conseguenza descrivendosi questo cerchio le sue intersezioni col cerchio dato saranno i due punti di contatto. Quindi se Q [*fig. 34*] sia il punto da cui si debbano condurre le tangenti, si dividerà la CQ in due parti eguali nel punto E; e 'l cerchio descritto col centro E e raggio EC segnerà sul dato cerchio i due contatti P e P'.

141. Se piaccia invece di costruire la retta

$$\beta y+\alpha x=r^2$$

che passa pei contatti si potrebbero determinare i due punti in cui essa taglia gli assi coordinati. Ora facendo $y=0$ si ha $x=\frac{r^2}{\alpha}$, e perciò prendendo CG terza proporzionale dopo CD e 'l raggio del cerchio dato, sarebbe G il punto in cui la retta tra i contatti taglia l' asse delle x; e nello stesso modo si determinerebbe il punto ov' essa taglia l' asse delle y. Intanto è da rimarcarsi che se il punto Q cambia di sito rimanendo però sulla retta MDN, la corrispondente retta tra i contatti avrebbe per equazione

$$\beta' y + \alpha x = r^2$$

e però taglierebbe l'asse delle x nello stesso punto G. Quindi la seguente proprietà del cerchio : *Le corde tra i contatti di tutte le coppie di tangenti menate ad un cerchio dai diversi punti di una stessa retta s'intersegano in un medesimo punto.*

Questo punto trovasi sul diametro perpendicolare alla retta , e la sua distanza dal centro è terza proporzionale in ordine alla distanza dallo stesso centro alla retta ed al raggio del cerchio. È poi manifesto che se la retta cade tutta al di fuori del cerchio, quel punto cadrà al di dentro ; e per l'opposto se la retta incontra il cerchio il punto cadrà fuori di esso. Nel primo caso il punto starà tra il centro e la retta ; e nel secondo è invece la retta che trovasi tra il punto e 'l centro. Del rimanente , se sia data la retta MN [*fig.* 35] e debbasi costruire il punto G , potrebbero da due punti Q , q arbitrariamente presi in questa retta condursi le due coppie di tangenti , e quindi le corde tra' rispettivi contatti PP' , pp' ; che desse nella loro intersezione determineranno il punto cercato G.

142. Egli è ben chiaro, che la proposizione precedente ammette la sua reciproca, vale a dire che : *Tutte le coppie di tangenti menate ad un cerchio per le estremità delle corde che passano per uno stesso punto G debbano concorrere sopra una medesima retta MN.* Ma volendo comprovare questa proposizione direttamente si dinotino con α, β le coordinate del punto G da cui si tirano le corde , e con x' , y' quelle del concorso delle tangenti negli estremi di una di esse ; l'equazione di questa corda, come quella ch'è tra i contatti delle tangenti che partono dal punto (x' , y') , sarà (§. *prec.*)

$$yy' + xx' = r^2 ;$$

ma trovandosi il punto (α, β) sulla corda istessa le sue coordinate deggiono verificarne l'equazione ; in conseguenza tra le coordinate x',y' si avrà la relazione

$$\beta y' + \alpha x' = r^2,$$

la quale perciò sarà l'equazione della linea che passa pe 'l concorso delle due tangenti nelle estremità di ciascuna delle corde condotte pel punto (α, β) ; e questa equazione esprime in effetti una linea retta.

È rimarchevole che l'equazione di questa retta è identicamente la stessa di quella che rappresenta la retta tra i contatti delle tangenti menate al cerchio dal punto (α,β), e si costruisce in conseguenza nello stesso modo. Ma possono ancora pe 'l dato punto menarsi due corde arbitrarie PP' , pp' , e quindi le tangenti nelle loro estremità, che s'incontreranno in due punti Q , q ; la retta MN condotta per questi punti sarà quella di cui si tratta ; ed è chiaro che dessa non può segare il cerchio se il punto è dentro, e dovrà invece necessariamente incontrarlo se il punto è fuori.

Il punto intorno a cui circolano le corde tra i contatti delle tangenti menate al cerchio dai punti di una stessa retta suol chiamarsi per brevità *polo* di questa retta , la quale alla sua volta dicesi *polare* di quel punto. I poli e le polari costituiscono attualmente una teorica importantissima della geometria , ed in luogo opportuno ne faremo conoscere quanto basta per una istituzione elementare.

143. Passeremo ora a riconoscere altre proprietà del cerchio risolvendo il seguente problema : *Dati sul cerchio due punti A , B* [*fig.* 36] *trovare sullo stesso cerchio un punto P tale che l'angolo in P contenuto dalle due rette PA, PB risulti eguale ad un angolo dato.* Prendendo per asse delle x la retta che unisce i punti A, B, e per asse delle y la perpendicolare in uno dei suoi estremi, A per esempio, e di-

notando inoltre con α, β le coordinate AN, CN del centro C, l' equazione del cerchio sarà (§. 128)

$$y^2 + x^2 - 2\beta y - 2\alpha x = o.$$

Ciò posto, essendo AB $= 2\alpha$, se si dinotano con x', y' le coordinate del punto cercato P, le equazioni delle due rette PA, PB saranno

$$y = \frac{y'}{x'}\,x \quad , \quad y = \frac{y'}{x'-2\alpha}(x-2\alpha).$$

Ora supponendo il punto P nell'arco superiore APB si ha

$$ang.\,\mathrm{P} = ang.\ \mathrm{PB}x - ang.\ \mathrm{PA}x$$

e quindi si trova (§. 99)

$$tang.\ \mathrm{P} = \frac{2\alpha y'}{y'^2 + x'^2 - 2\alpha x'},$$

ma il punto (x', y') essendo sul cerchio si ha

$$y'^2 + x'^2 - 2\alpha x' = 2\beta y',$$

si avrà dunque

$$tang.\ \mathrm{P} = \frac{2\alpha y'}{2\beta y'} = \frac{\alpha}{\beta},$$

e si vede che l'angolo P non dipende già dal nostro arbitrio, ma è costante per tutt' i punti dell' arco APB.

Se in vece di supporre il punto P nell' arco APB si supponga nell' arco inferiore, come in P', sarebbe allora

$$ang.\ \mathrm{P}' = ang.\ a\mathrm{A}x - ang.\ b\mathrm{B}x,$$

e si troverebbe nel modo di poc' anzi.

$$tang\ \mathrm{P}' = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Da ciò risulta che anche gli angoli nell' arco AP'B sono

eguali tra loro, e di più che gli angoli P e P' sono supplementi l' un dell' altro; e si hanno in conseguenza le seguenti conosciute proprietà del cerchio:

Gli angoli che sono nello stesso segmento di cerchio sono eguali tra loro.

In ogni quadrilatero iscritto nel cerchio la somma di due angoli opposti è eguale a due retti.

144. Se l'arco superiore APB è maggiore del semicerchio, il centro C cadrà al di sopra di AB; quindi la sua ordinata CN $= \beta$ sarà positiva, e positiva sarà perciò la frazione $\frac{\alpha}{\beta}$; se invece quell' arco è minore del semicerchio sarà β negativa, e quindi anche negativa sarà la frazione $\frac{\alpha}{\beta}$; che se quell' arco fosse eguale al semicerchio, sarà $\beta = o$, e la frazione $\frac{\alpha}{\beta}$ avrà in questo caso un valore infinito. Dunque: *È acuto l' angolo nel segmento maggiore del semicerchio; è ottuso l' angolo nel segmento minore; ed è retto l' angolo nel semicerchio.*

145. Essendo $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{CN}} = tang.$ ACN, si vede che l' angolo ACN è eguale a P; ma ACN è metà di ACB; perciò: *L' angolo al centro è doppio di quello alla circonferenza.*

146. L' equazione del raggio AC essendo $y = \frac{\beta}{\alpha}x$, quella di EF, perpendicolare ad AC sarà $y = -\frac{\alpha}{\beta}x$; e quindi si avrà $tang.$ EA$x = -\frac{\alpha}{\beta}$, e $tang.$ FA$x = \frac{\alpha}{\beta}$; in conseguenza risulterà $ang.$ EA$x = ang.$ P', ed $ang.$ FA$x = ang.$ P; ma la retta EF è tangente del cerchio in A (§. 137); dunque: *L' angolo formato dalla tangente e dalla secante è eguale all angolo formato nella porzione alterna del cerchio.*

CAPITOLO V.

FORMOLE PER LA TRASFORMAZIONE DELLE COORDINATE

147. Per essere nel grado di progredire con maggior franchezza nello studio di altre linee è necessario di premettere le nozioni relative alla trasformazione delle coordinate. Si è già veduto (§§. 70, 75, 127) che una stessa linea può essere rappresentata con diverse equazioni, e si è fatto rimarcare che queste diversità dipendono unicamente dalla varia posizione degli assi coordinati; ma, data che sia l'equazione di una linea per un certo sistema di assi, importa di saper trovare l'equazione che le conviene relativamente ad un alto sistema di assi; ed è in ciò che consiste la *trasformazione delle coordinate*.

148. È chiaro intanto che questa ricerca si riduce a risolvere il seguente problema: *Supposto che x, y sieno le coordinate AS, PS [fig. 37 e 38] di un punto qualunque P nel sistema degli assi Ax, Ay, e che x', y' siano le coordinate $A'S'$, PS' dello stesso punto nel sistema di due altri assi $A'x'$, $A'y'$, di posizione conosciuta per rispetto ai primi, trovare le espressioni delle primitive coordinate x, y in funzione delle nuove x', y'.* Conoscendosi queste espressioni si sostituirebbero in luogo di x ed y nella data equazione, e l'equazione risultante in x',y' rappresenterebbe la stessa linea, ma sarebbe rapportata ai nuovi assi $A'x'$, $A'y'$.

149. Supponendo in primo luogo che i nuovi assi sieno paralleli ai primi [*fig.* 37], si ha

$$AS=A'S'+AB \quad , \quad PS=PS'+A'B\,;$$

in conseguenza, dinotando con α e β le coordinate AB ed A'B della nuova origine A', e poichè si ha $AS=x$, $A'S'=x'$, $PS=y$, $PS'=y'$ le formole cercate per questo caso saranno

$$x=x'+\alpha \quad , \quad y=y'+\beta.$$

Ma in queste formole, come in quelle che seguono, si vuol notare che i segni di α e β deggiono esser modificati a seconda della posizione della nuova origine A' per rispetto agli assi antichi. Per esempio se la nuova origine fosse in A'' nell'angolo adjacente ad yAx, le formole diverrebbero $x=x'-\alpha$, $y=y'+\beta$; e così per altre posizioni.

150. Passando al caso generale si conduca da A' [*fig.* 38] la retta A'X parallela ad Ax, e siano AB, A'B le coordinate α,β della nuova origine, ed AC, S'C quelle del punto S', dal quale si tiri S'E parallela ad Ax; sarà

$$AS=AB+BC+CS \quad , \quad PS=A'B+S'D+PE$$

ovvero

$$x=\alpha+BC+CS \quad , \quad y=\beta+S'D+PE. \qquad (1)$$

Intanto si dinotino con p e p' i determinanti delle direzioni dei nuovi assi $A'x'$ ed $A'y'$, vale a dire i determinanti degli angoli $x'A'X$ ed $y'A'X$, che chiameremo rispettivamente φ e φ', e s'indichi con θ l'angolo yAx compreso dagli assi antichi; si avrà per tal modo (§. 115)

$$A'S'=BC\times\frac{sen\,\theta}{sen\,(\theta-\varphi)} \quad , \quad PS'=CS\times\frac{sen\,\theta}{sen\,(\theta-\varphi')}$$

$$A'S'=S'D\times\frac{sen\,\theta}{sen\,\varphi} \quad , \quad PS'=PE\times\frac{sen\,\theta}{sen\,\varphi'}$$

ma è $AS'=x'$, $PS'=y'$, quindi si otterrà

$$BC=\frac{sen\,(\theta-\varphi)}{sen\,\theta}\,x' \quad , \quad CS=\frac{sen\,(\theta-\varphi')}{sen\,\theta}\,y'$$

$$S'D=\frac{sen\,\varphi}{sen\,\theta}\,x' \quad , \quad PE=\frac{sen\,\varphi'}{sen\,\theta}\,y'.$$

Sostituendo ora questi valori nelle relazioni (1) si hanno le seguenti formole

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha + \frac{sen(\theta-\varphi)}{sen\ \theta}\, x' + \frac{sen\,(\theta-\varphi')}{sen\ \theta}\, y' \\ y &= \beta + \frac{sen\ \varphi}{sen\ \theta}\, x' + \frac{sen\ \varphi'}{sen\theta}\, y' \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

le quali risolvono nel modo il più generale il problema della trasformazione.

151. Se la nuova origine debba coincidere con l'antica sarà $\alpha = o$, $\beta = o$, e le formole si riducono ad

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{sen(\theta-\varphi)}{sen\ \theta}\, x' + \frac{sen(\theta-\varphi')}{sen\ \theta}\, y' \\ y &= \frac{sen\ \varphi}{sen\ \theta}\, x' + \frac{sen\ \varphi'}{sen\ \theta}\, y' \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

152. Percorrendo ora le ipotesi principali che possono farsi intorno ai due sistemi di assi cominceremo dal supporre *ortogonali gli assi primitivi ed obbliqui i nuovi*. In questo caso si ha $\theta = 90°$, quindi $sen\ \theta = 1$, $cos\ \theta = o$, $sen\,(\theta-\varphi) = cos\ \varphi$, $sen\,(\theta-\varphi') = cos\ \varphi'$. In virtù di questi valori le formole precedenti, se l'origine è la stessa, si cangiano in

$$x = cos\ \varphi\ x' + cos\ \varphi'\ y' \quad , \quad y = sen\ \varphi\ x' + sen\ \varphi'\ y' \quad (4)$$

e se l'origine è diversa non si ha che aggiungere α al valore di x, e β a quello di y; il che valga in generale anche per le formole che seguono.

153. *Se i due sistemi sono entrambi ortogonali* si ha di più $\varphi'-\varphi = 90°$, e $\varphi' = 90° + \varphi$; quindi $sen\ \varphi' = cos\ \varphi$, $cos\ \varphi' = -\ sen\ \varphi$, e le ultime formole si riducono ad

$$x = cos\varphi\ x' - sen\varphi\ y' \quad , \quad y = sen\varphi\ x' + cos\varphi\ y' \qquad (5)$$

154. Finalmente, *se gli assi primitivi siano obbliqui*, *ed*

ortogonali i nuovi si ha soltanto $\varphi'-\varphi = 90°$ e $\varphi' = 90° + \varphi$; quindi $sen\ \varphi' = cos\ \varphi$, $cos\ \varphi' = -sen\ \varphi$, $sen\,(\theta-\varphi') = -\ cos\,(\theta-\varphi)$, e le formole generali divengono

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{sen\,(\theta-\varphi)}{sen\ \theta}\, x' - \frac{cos\,(\theta-\varphi)}{sen\ \theta}\, y' \\ y &= \frac{sen\ \varphi}{sen\ \theta}\, x' + \frac{cos\ \varphi}{sen\ \theta}\, y'. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

155. Abbiamo presentato le formole di trasformazione sotto la forma con cui vengono comunemente adoperate; ma ora passeremo ad esporle sotto altra forma che si presta alle applicazioni con più nettezza e semplicità. Poichè p e p' dinotano i determinanti degli angoli φ e φ' che i nuovi assi $A'x'$ ed $A'y'$ comprendono con l'asse antico della x si ha (§. 115)

$$\frac{sen(\theta-\varphi)}{sen\ \theta} = \frac{1}{\sqrt{p^2+2p\ cos\theta+1}}, \quad \frac{sen\ \varphi}{sen\ \theta} = \frac{p}{\sqrt{p^2+2p\,cos\theta+1}}$$

$$\frac{sen(\theta-\varphi')}{sen\ \theta} = \frac{1}{\sqrt{p'^2+2p'cos\theta+1}}, \quad \frac{sen\ \varphi'}{sen\ \theta} = \frac{p'}{\sqrt{p'^2+2p'cos\theta+1}}$$

ma se si ponga per brevità

$$R^2 = p^2 + 2p\ cos\theta + 1 \quad , \quad R'^2 = p'^2 + 2p'\ cos\ \theta + 1 \qquad (7)$$

e poi si faccia la sostituzione dei precedenti valori nelle formole generali (2) le medesime si cangiano in

$$x = \alpha + \frac{x'}{R} + \frac{y'}{R'} \quad , \quad y = \beta + p\frac{x'}{R} + p'\,\frac{y'}{R'} \,. \quad (8)$$

Queste formole adunque possono essere adoperate invece delle (2), e le applicazioni che ne faremo mostreranno com' esse sieno di gran lunga preferibili.

156. Se la nuova origine debba coincidere con l' antica le nuove formole si riducono ad

$$x=\frac{x'}{R}+\frac{y'}{R'} \quad , \quad y=p\,\frac{x'}{R}+p'\,\frac{y'}{R'}. \qquad (9)$$

157. *Se gli assi primitivi sono ortogonali ed obbliqui i nuovi*, si ha $\cos\theta=o$, il che riduce i valori di R ed R' a $\sqrt{p^2+1}$ e $\sqrt{p'^2+1}$. Essendo per tanto questo caso di frequente applicazione per distinguerlo dal caso generale dinoteremo i radicali con le lettere piccole r ed r', cioè porremo

$$r=\sqrt{(p^2+1)} \quad , \quad r'=\sqrt{(p'^2+1)}\ ; \qquad (10)$$

ed allora le formole per passare da assi ortogonali ad assi obbliqui saranno

$$x=\frac{x'}{r}+\frac{y'}{r'} \quad , \quad y=p\,\frac{x'}{r}+p'\,\frac{y'}{r'}. \qquad (11)$$

158. *Se i due sistemi sono entrambi ortogonali*, si avrà $\cos\theta=o$, e $pp'+1=o$ (§. 102); quindi per passare da assi ortogonali ad assi ortogonali si potrà far uso delle formole (11) congiuntamente alla relazione

$$pp'+1=o. \qquad (12)$$

Ma si trae da questa

$$p'=-\frac{1}{p},$$

ed allora sostituendo questo valore di p' in quelle formole, le medesime si renderanno indipendenti dalla relazione e diverranno

$$x=\frac{x'+p\,y'}{r} \quad , \quad y=\frac{p\,x'-y'}{r}. \qquad (13)$$

Del rimanente, poichè nei calcoli è interessante di conservare la simmetria per quanto è possibile, tornerà sempre più utile di ritenere le formole (11) congiuntamente alla relazione (12).

159. Finalmente *se gli assi primitivi essendo obbliqui, i nuovi debbano essere ortogonali*, tra i determinanti p e p' delle loro direzioni dovrà sussistere la relazione (§. 104)

$$pp'+(p+p')\cos\theta+1=o\ ; \qquad (14)$$

laonde in questa ipotesi potranno ritenersi le formole (9) avendosi però conto nel tempo istesso della relazione (14). Ma se piacesse rendere le formole indipendenti dalla relazione basterebbe sostituirvi in luogo di p' il valore che da essa si deduce.

160. Si comprende benissimo che unicamente per chiarezza si sono apposti gli apici ai simboli che esprimono le nuove coordinate; ma nelle applicazioni, se piaccia, e se ciò non debba ingenerare confusione, possono per maggior semplicità sopprimersi gli apici, i quali, eseguita la trasformazione, diventano perfettamente inutili.

161. Importa di rimarcare che in tutte le formole per la trasformazione delle coordinate le nuove coordinate x' ed y' vi si trovano sempre a 1° grado; e ne segue che sostituendosi in luogo di x ed y nell'equazione di qualunque linea, la trasformata sarà necessariamente dello stesso grado della prima. In fatti è chiaro che questo grado non potrebbe esser maggiore; ma appunto da ciò deriva che non potrebbe neppure esser minore; dapoichè rapportando la novella equazione agli antichi assi, vale a dire ritornandosi agli assi primitivi, dovrebbe aversi un' equazione di grado maggiore, il che è impossibile. Da ciò risulta adunque che: *L'equazione di una linea si conserva sempre dello stesso grado qualunque siano gli assi coordinati ai quali si rapporta.*

162. Il principio che abbiamo enunciato è di massimo interesse per la geometria analitica, ed è fecondo di rilevanti conseguenze; ma in questo punto ci limiteremo a porre in veduta la seguente importantissima proposi-

zione, che immediatamente ne deriva; cioè: *Se una linea curva può essere rappresentata da un' equazione algebrica tra le coordinate dei suoi punti, questa curva non può essere intersegata da una linea retta in un numero di punti superiore al grado della sua equazione.*

In fatti per determinare i punti d' incontro della curva con una retta qualunque, che possiamo rappresentare con l' equazione

$$y=px+q$$

converrà (§. 136 e 137) eliminare y tra questa equazione e quella della curva; e le radici della risultante equazione in x esprimeranno le ascisse dei punti comuni alle due linee; sostituendo poscia ad una ad una le espressioni di queste radici nell' equazione della retta si avranno le corrispondenti ordinate. Ora è chiaro che il grado della eliminata in x è *necessariamente* eguale al grado dell' equazione della curva, e si è veduto (§. *prec.*) che questo grado rimane immutato qualunque sia il sistema degli assi coordinati; dunque il numero possibile delle intersezioni comuni all' una ed all' altra linea sarà precisamente eguale al grado dell' equazione della curva. Intanto è da rimarcare che solo le radici reali dell' equazione in x daranno luogo ad intersezioni reali, mentre le radici immaginarie daranno luogo ad intersezioni egualmente immaginarie.

163. Inoltre se due delle radici dell'equazioni in x sieno tra loro eguali anche eguali risulteranno le ordinate corrispondenti, ed in tal caso le due corrispondenti intersezioni non più saranno separate e distinte, ma saranno confuse e raccolte in un punto solo, il quale non pertanto deve sempre esser considerato come la riunione di due intersezioni. Un punto di tal natura prende il nome speciale di *punto di contatto* e la retta da cui risulta dicesi *tangente* della curva nel punto medesimo. (*V. le note*).

CAPITOLO VI.

DELL' ELLISSE.

164. Se un filo FPF′ (*fig. 39*) fissato con gli estremi in due punti F,F′ si tenga sempre teso e combaciante col piano mediante uno stiletto che si farà muovere fino a compiere una intera rivoluzione, la punta dello stiletto descriverà una curva che si chiama *ellisse*.

165. I punti F,F′ si chiamano *fuochi* dell' ellisse; CF, o CF′, metà di FF′ si chiama *eccentricità*; e dicesi *ramo* o *raggio vettore* ogni retta come FP tirata da un fuoco ad un punto della curva.

166. Egli è chiaro che la somma di due rami PF, PF′ appartenenti ad uno stesso punto P è costante ed eguale alla lunghezza del filo; e perciò: *l' ellisse è il luogo geometrico dei vertici di tutt' i triangoli che essendo descritti sopra una stessa base hanno costante la somma degli altri due lati.*

167. Essendo dati i fuochi dell' ellisse e la lunghezza del filo che dovrebbe impiegarsi volendo descriverla per movimento continuo, si potrà ancora questa curva descrivere per assegnazione di punti. In fatti siano F,F′ i fuochi, e rappresenti la retta MN la lunghezza del filo; se questa retta si divida ad arbitrio in un punto K, e poi si descrivano due cerchi che abbiano per centri i fuochi F,F′, e per raggi le parti KM, KN, questi cerchi si taglieranno in due punti che apparterranno all' ellisse; e così cangiando il punto di divisione della retta MN si avranno quanti altri punti si vogliano di questa curva.

168. Per avere un' equazione dell' ellisse prenderemo per asse delle x la retta FF′ e per asse della y la perpendicolare nel suo punto di mezzo C; allora dinotando con c l' eccentricità, cioè ponendo $CF=CF'=c$, i punti F ed F′ sa-

ranno espressi da (c, o) e $(-c, o)$; laonde chiamando z e z' i raggi vettori FP, F'P, e $2a$ la loro somma, si avranno le tre relazioni

$$z^2=y^2+(x-c)^2 \ , \ z'^2=y^2+(x+c)^2 \ , \ z+z'=2a \ ;$$

ed eliminandone z e z' l'equazione risultante in x, y sarà quella dell'ellisse. Ora la differenza delle prime due da $(z'+z)(z'-z)=4cx$, e per la terza si avrà $z'-z=\frac{2cx}{a}$; quindi in virtù della stessa terza relazione verrà

$$z=a-\frac{cx}{a} \ , \ z'=a+\frac{cx}{a} \ .$$

Eguagliando attualmente il quadrato dell'uno o dell'altro di questi valori a quello di z^2 o di z'^2 si ha per l'ellisse la seguente equazione

$$a^2y^2+(a^2-c^2)\,x^2=a^2(a^2-c^2),$$

la quale essendo di 2° grado fa vedere che: *Una retta non può incontrare l'ellisse in più di due punti* (§. 162.)

169. Essendo $2c$ eguale ad FF' base del triangolo FPF', e $2a$ eguale alla somma dei lati PF, PF', sarà $2a > 2c$, e di seguito $a^2 > c^2$; se dunque si costruisca una retta b tale che sia

$$a^2 - c^2 = b^2$$

l'equazione dell'ellisse diverrà

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \ ,$$

e da ciò che precede risulta che a^2 e b^2 coefficienti di y^2 ed x^2 sono essenzialmente positivi.

170. Ponendo $y=o$ si ha $x=\pm a$; in conseguenza prese le CA, CA' eguali ciascuna ad a, saranno A, A' i punti in cui la curva taglia l'asse delle x. Facendo poi $x=o$, risulta $y=\pm b$; e perciò prese le CB, CB' eguali ciascuna à b, saranno B, B' i punti in cui la curva incontra l'asse delle y. È chiaro intanto che si otterranno su quest'asse i punti B, B' descrivendo un cerchio che abbia il centro in un fuoco F e per raggio la FB eguale ad a; che per tal modo le tre grandezze a, b, c sono ordinatamente rappresentate dai lati FB, BC, CF del triangolo rettangolo FBC e quindi si ha $CB=\sqrt{a^2-c^2}=b$.

171. Il corso e la configurazione della linea ellittica si palesano con molta evidenza dalla sua descrizione, ma noi dobbiamo trarre queste nozioni dalla sua equazione come se nulla ci fosse noto intorno alla sua figura. Risolvendo a tal fine (§§. 71 e 73) l'equazione rispetto ad y si ha

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \ ,$$

e si rileva

1°. Che ad ogni ascissa, come CS, corrispondono due diverse ordinate SP, SQ, le quali, sebbene eguali in grandezza, sono però opposte per sito; quindi avviene che la retta AA' biseca tutte le corde che le sono perpendicolari, e perciò la parte di curva situata da un lato di AA' è esattamente eguale alla parte situata dall'altro lato.

2°. che $+x$ e $-x$ danno uno stesso valore per y, e quindi ad ascisse ed eguali ed opposte, come CS, CS', corrisponderanno eguali ordinate. Da ciò deriva che anche la parte di curva esistente da un lato della retta BB' è esattamente eguale a quella esistente dall'altro lato; il che potrebbe rilevarsi eziandio riducendo l'equazione alla forma

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2} \ ,$$

vale a dire risolvendola rispetto ad x; mentre subito si deduce che anche la BB' biseca le corde che le sono perpendicolari.

3°. che il valore più grande di y corrisponde ad $x=o$; ipotesi che da $y=\pm b$; in conseguenza CB e CB' sono le massime ordinate, e ne risulta che nel senso delle ordinate la curva è limitata dalle parallele condotte ad AA′ pei punti B, B′ ove dev' esser toccata dalle parallele istesse.

4°. che i valori di y decrescono continuamente e sono costantemente reali da $x=o$ fino ad $x=\pm a$, cioè fino ai punti A ed A′, e poi divengono immaginarii al di là di questi limiti, vale a dire per $x>\pm a$; quindi è che CA e CA′ sono le massime ascisse della curva, la quale perciò nel senso delle ascisse è limitata dalle parallele condotte a BB′ dai punti A, A′, ed ivi queste parallele debbono necessariamente toccarla.

Dunque infine la curva ellittica è chiusa da per ogni dove a guisa del cerchio, ed ha la forma AB A′B′, rimanendo circoscritta nel rettangolo che risulta dalle perpendicolari alle rette AA′, BB′ ne' loro estremi A, A′, B, B′. Essa inoltre è divisa da ciascuna di queste rette in due parti perfettamente eguali, e quindi anche eguali saranno i quattro archi AB, AB′, A′B, A′B′.

172. L' ellisse com' è delineata non presenta veruna sinuosità e vedesi concava ad ogni istante verso la parte interna; ciò non risulta in vero dall' analisi precedente, ma è conseguenza necessaria della proprietà di cui è dotata di non poter esser tagliata da una retta in più di due punti (§. 168); il che non potrebbe aver luogo in generale se potesse avere archi sporgenti ed archi rientranti. *(V. le note).*

173. Si chiama *diametro* di una curva ogni retta che divida in parti eguali tutte le corde parallele in una medesima direzione, e diconsi *vertici* del diametro i punti in cui esso incontra la curva. Un diametro poi si dice *principale*, o *primario*, oppure chiamasi *asse* della curva, se di più le corde che divide in parti eguali gli riescono perpendicolari; ed i vertici di un asse prendono anche il nome di vertici della curva; quindi le due rette AA′, BB′ sono assi dell' ellisse, ed i quattro punti A, A′, B, B′ ne sono altrettanti vertici.

174. Si chiama *centro* di una curva un punto che abbia la proprietà di dividere in parti eguali tutte le corde che passano per esso e le metà di queste corde, cioè le rette che uniscono il centro ai punti della curva, sogliono, a somiglianza del cerchio, prendere la denominazione di *raggi*. Risulta chiaramente dalla configurazione della linea ellittica che ogni sua corda come PQ′ condotta pe'l punto C debba rimanervi bisecata, dapoichè essa è interamente simmetrica intorno a questo punto; ma in fatti sia $y=px$ l' equazione della retta PQ′; eliminando y tra quest' equazione e quella delle ellisse si ha l' equazione pura di 2° grado in x

$$x^2 - \frac{a^2 b^2}{a^2 p^2 + b^2} = o ,$$

le di cui radici esprimeranno le ascisse dei due punti che possono esser comuni alle due linee; e poichè l' equazione ha reali entrambe le radici e di segno contrario, così si rileva in primo luogo che una retta comunque condotta pe'l punto C deve *necessassariamente* incontrar la curva in due punti P, Q′ separati e distinti. Ora è noto che l' ascissa del punto medio della corda PQ′ equivale (§. 64) alla semisomma delle ascisse dei punti P, Q′, e questa semisomma nel caso attuale è *zero* perchè l' equazione precedente in x manca del 2°. termine, perciò il punto medio della corda PQ′ cadrà nell' origine, vale a dire nel punto C, il quale in conseguenza sarà centro dell' ellisse.

175. Essendo $a>b$ sarà CA > CB; quindi è che dei due assi dell' ellisse il maggiore è quello che passa pei fuochi. Per tal motivo AA′ suol chiamarsi *asse maggiore o primario*, e BB′ asse *minore o secondario*.

176. Esprimendo con (x', y') un punto qualunque dell' ellisse, e dinotando con A il raggio corrispondente a

questo punto sarà $A = \sqrt{x'^2 + y'^2}$; ma è in virtù dell'ellisse

$$y'^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2);$$

perciò verrà sostituendo

$$A = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}x'^2 + b^2}.$$

Ora essendo $a > b$ si vede che questa espressione ha il minimo valore quando è $x = o$, ipotesi che riduce il raggio ad $A = b$. Quel valore va poi crescendo continuamente da $x = o$ fino ad $x = a$, ch' è il massimo valore di cui l'ascissa è suscettibile (§.171 n.° 4); e poichè in questa ultima ipotesi il raggio si riduce ad a; così è, che: *Di tutt' i raggi dell' ellisse il minimo è il semiasse minore; il massimo è il semiasse maggiore; e degli altri i più vicini al minore sono più piccoli de' più lontani.*

177. Ciò posto s' indichi con A' il raggio corrispondente al punto $(-x', y')$; si rileverà dall' espressione di A scritta poc' anzi che i due raggi A ed A' sono tra loro eguali. Or sieno CP, CP' questi due raggi eguali; le loro equazioni saranno rispettivamente $y = \frac{y'}{x'}x$ ed $y = -\frac{y'}{x'}x$, e si riconosce che gli angoli PCx, P'Cx ch' essi formano con l' asse delle x (§. 82) sono supplementi l'un dell' altro; donde avviene che sono eguali tra loro gli angoli PCx, P'Cx', e quindi anche gli altri PCy, P'Cy; dunque: *Due raggi dell'ellisse egualmente inclinati ad un asse di figura sono eguali tra loro.* E viceversa è chiaro, che: *Due raggi eguali, se non si trovano per dritto, sono egualmente inclinati a ciascuno degli assi* *. Ma tutto ciò del resto

* Se due rette CP, CP' [*fig.39*] sono talmente inclinate ad una terza AA' che sieno eguali tra loro gli angoli PCA, P'CA' che formano con quella

risulta con la massima evidenza dalla stessa configurazione della curva.

178. Segue dalle cose precedenti che se si descriva un cerchio concentrico all' ellisse queste due linee non potranno incontrarsi se il raggio del cerchio sia o più grande del semiasse maggiore o più piccolo del minore; se poi il raggio del cerchio abbia una lunghezza intermedia tra quelle dei semiassi, le due linee si segheranno necessariamente ed in quattro punti soltanto; finalmente se il raggio sia eguale al semiasse maggiore [*fig. 40*] il cerchio incontrerà l' ellisse nei soli due vertici dell' asse medesimo; e tutti gli altri punti dell' ellisse cadranno dentro del cerchio; che se invece sia eguale al semiasse minore vi saranno soltanto due incontri nei vertici dell' asse istesso, ed in questo caso tutti gli altri punti del cerchio staranno dentro dell' ellisse.

Del rimanente si può subito riconoscere che un cerchio ed un ellisse comunque situati non possono intersegarsi in più di quattro punti. Imperciocchè rapportando il cerchio agli assi dell' ellisse, e dinotando con α e β le coordinate del suo centro e con d il raggio, la sua equazione sarà

$$(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = d^2;$$

Intanto ragionando come al §. 135 si ravvisa che le coordinate dei punti che possono esser comuni alle due linee si hanno nelle coppie di valori di x ed y capaci di soddisfare ad un tempo all' equazione del cerchio e dell' ellisse; ma queste coppie, com' è noto dalla teorica dell' eliminazione, non possono essere più di quattro, giacchè le due

a parti opposte, noi diremo per brevità che le due rette sono *egualmente inclinate* all' altra. Dopo questa dichiarazione è manifesto che, trattandosi di coordinate ortogonali, le due rette $y = px + q$ ed $y = -px + q'$ sono egualmente inclinate all' asse delle x, e quindi ancora a quello delle y.

equazioni sono entrambe di 2° grado ; dunque neppure le intersezioni tra le due linee potranno essere più di quattro ; e toccheranno esattamente questo numero qualora le quattro coppie sien tutte reali.

179. Il cerchio concentrico che ha per raggio il semiasse maggiore suol dirsi *circoscritto* all'ellisse ; e dicesi *iscritto* quello il cui raggio è eguale al semiasse minore. E da ciò che precede si rileva , che : *Un angolo qualunque APA' iscritto nell' ellisse e sotteso dall'asse maggiore è necessariamente ottuso; e che un angolo qualunque iscritto ancora nell' ellisse, ma sotteso dall' asse minore, è necessariamente acuto.*

180. I due assi e l'eccentricità di un ellisse son tre rette così collegate tra loro mediante la relazione $a^2=b^2+c^2$ che date due di esse può determinarsi la terza; e poichè le quantità a,b,c, sono ordinatamente rappresentate dai lati FB , BC , CF [*fig. 39*] del triangolo rettangolo FBC , è facile a rilevare le costruzioni a doversi eseguire per la determinazione di una di queste quantità date che ne siano due. In particolare se son dati i due assi e si cerchi l'eccentricità si descriverà il cerchio che avendo il centro in un vertice B dell' asse minore abbia il raggio eguale al semiasse maggiore CA ; questo cerchio segnerà nell' asse maggiore i fuochi F, F', e CF=CF' sarà l' eccentricità.

181. Intorno ad uno stesso asse maggiore si possono descrivere innumerevoli ellissi con eccentricità diverse, ossia con fuochi diversi : supponendo che questi fuochi si vadano tra loro accostando, e quindi impicciolendo l' eccentricità, crescerà invece l' asse minore , come si rileva dalla relazione $a^2=b^2+c^2$; in questa ipotesi l' ellisse rendendosi sempreppiù meno schiacciata si andrà approssimando alla figura circolare ; ed in fine giungendo i fuochi a coincidere , e perciò ad annullarsi l'eccentricità, risulterà $a^2=b^2$, e l' equazione dell' ellisse si cangerà

in $a^2y^2+a^2x^2-a^2a^2=0$, ossia in $y^2+x^2=a^2$; vale a dire in tal caso l' ellisse si riduce al cerchio di raggio a. Quindi è che il cerchio si riguarda come una specie particolare di ellisse, e propriamente come un ellisse ad assi eguali o di eccentricità nulla.

182. Rapportando il cerchio circoscritto agli stessi assi coordinati ai quali è riferito l' ellisse le equazioni delle due curve saranno rispettivamente

$$y^2=a^2-x^2 \quad , \quad y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2) ;$$

laonde se si dinotino con x',y' le cordinate di un punto qualunque del cerchio, e con y'' l'ordinata dell'ellisse corrispondente alla medesima ascissa x' , si avrà

$$y'=\sqrt{(a^2-x'^2)} \quad , \quad y''=\frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x'^2)},$$

e quindi starà

$$y' : y'' :: a : b ;$$

vale a dire : *Le ordinate del cerchio circoscritto e dell' ellisse, corrispondenti ad una medesima ascissa , stanno tra loro nel rapporto costante dell' asse maggiore al minore.* Da ciò segue che se le ordinate al diametro di un cerchio si dividano in uno stesso rapporto, i punti di divisione saranno situati sopra un ellisse ; ed in tal guisa si ha un altro modo da descrivere questa curva per assegnazione di punti.

183. Riducendo l' equazione dell' ellisse alla forma

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

si rileva, che : *Il quadrato di un' ordinata all' asse maggiore sta al rettangolo delle due distanze del piede dell' ordinata a' vertici dello stesso asse nel rapporto costante del quadrato dell' asse minore a quello del maggiore* ; ma è chiaro che in questo teorema si può l' asse maggiore scambiare col minore e questo con quello, mentre si ha pure

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2).$$

Il rapporto di cui è parola nella proposizione enunciata diviene di eguaglianza nel caso particolare in cui gli assi sono eguali, e si ritorna così ad una conosciuta proprietà del cerchio (§. 133). Del rimanente essendo il cerchio una specie particolare di ellisse (§. 181) si può già prevedere che anche le proprietà dell' una debbono essere casi particolari delle proprietà dell'altra curva; il che verrà confermato dalla esposizione che passiamo a fare di quelle tra esse che meritano essenzialmente di essere conosciute.

Dei diametri dell' ellisse.

184. Per meglio studiar l' ellisse andremo a discutere le sue intersezioni con una retta. Siano per tanto

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

$$y = px + q$$

le equazioni di queste due linee. Eliminando y si ha

$$(a^2p^2+b^2)\,x^2+2a^2pqx + a^2(q^2-b^2) = o\,;$$

sostituendo le due radici di questa equazione in quella della retta (§. 136 e 162), le coordinate dei punti in cui le due linee possono incontrarsi si troveranno ordinatamente epresse da

$$x = \frac{-a^2pq \pm ab\sqrt{a^2p^2+b^2-q^2}}{a^2p^2+b^2},\; y = \frac{b^2q \pm abp\sqrt{a^2p^2+b^2-q^2}}{a^2p^2+b^2}$$

e si rileva, che le due intersezioni saranno *reali e distinte*, *reali e coincidenti*, o *immaginarie* secondochè la quantità $a^2p^2 + b^2 - q^2$ sia *positiva*, *nulla*, o *negativa*.

185. Conosciute le coordinate dei due punti in cui la retta incontra l'ellisse, potrà calcolarsi la loro distanza, vale a dire la corda intercettata dalla curva sulla retta. Per tanto se questa corda si dinoti con 2X, e si ponga per brevità (§. 157)

$$p^2 + 1 = r^2,$$

si avrà

$$X = \frac{ab\,r}{a^2p^2+b^2}\sqrt{(a^2p^2+b^2-q^2)} \text{ ed } X^2 = \frac{a^2b^2r^2}{a^2p^2+b^2}\left(1 - \frac{q^2}{a^2p^2+b^2}\right).$$

186. È noto che la semisomma delle ascisse o delle ordinate di due punti esprime l' ascissa o l' ordinata del punto medio della loro distanza (§. 64); chiamando dunque x', y' le coordinate del punto medio della corda intercettata dall' ellisse sulla retta, si avrà

$$x' = -\frac{a^2pq}{a^2p^2+b^2}, \quad y' = \frac{b^2q}{a^2p^2+b^2}.$$

Eliminando q si ottiene tra x' ed y' la relazione

$$a^2py' + b^2x' = o$$

ed è poi chiaro che la stessa relazione si ritroverebbe tra le coordinate del punto medio di ogni altra corda parallela a quella che si è considerata. Questa relazione in conseguenza è (§. 52) l' equazione del luogo geometrico dei punti medii di tutte le corde parallele alla retta proposta: equazione che ora scriveremo

$$a^2py + b^2x = o\,,$$

ed esprime una retta passante per l' origine, ossia pel centro della curva. Dunque: *I punti medii di tutte le corde dell' ellisse tra loro parallele sono situati sopra una retta che passa pe'l centro.* Questa retta in conseguenza è un diametro (§. 173), il quale biseca le corde parallele la cui direzione è determinata da p; ma p è suscettibile di un numero infinito di valori reali, perciò: *È infinito il numero de' diametri dell' ellisse, e tutti s' intersegano nel centro.*

187. Mettendo l' equazione precedente sotto la forma

$$y = -\frac{b^2}{a^2 p}x$$

si scorge che il diametro corrispondente fa con l' asse delle x un angolo la di cui tangente è espressa da $-\frac{b^2}{a^2p}$, angolo che varia a misura che varia p; ma questa espressione, dando a p un valore conveniente, è suscettibile di qualsivoglia valore determinato ed arbitrario, o, in altri termini, può divenire la tangente di qualsivoglia angolo dato; dunque: *Ogni retta condotta pe 'l centro è diametro dell' ellisse;* e perciò i suoi raggi non sono che semidiametri.

188. Le formole del §. 185 somministrano immediatamente l' espressione della lunghezza del diametro rappresentato dall' equazione $y = px$, bastando perciò di porvi $q = o$; per tal modo chiamando A il semidiametro o raggio si ha

$$A^2 = \frac{a^2b^2r^2}{a^2p^2+b^2} = \frac{a^2b^2(p^2+1)}{a^2p^2+b^2}.$$

Osservando che questa espressione conserva lo stesso valore quando si cambia p in $-p$, si rileva, come già si è veduto in altra guisa (§. 177), che sono eguali due diametri aventi per equazioni $y = px$ ed $y = -px$. Dunque: *Due diametri dell' ellisse egualmente inclinati ad un asse di figura sono eguali tra loro;* E viceversa: *Due diametri eguali sono egualmente inclinati a ciascuno degli assi.*

189. Due diametri si dicono *conjugati* se ciascuno biseca le corde parallele all' altro; l' asse maggiore e 'l minore sono evidentemente in questa condizione, e quindi essi formano un sistema di diametri conjugati. Ma sieno in generale

$y = px$ ed $y = p'x$ due diametri qualunque; supponendo che il secondo bisechi le corde parallele al primo si avrà

$$p' = -\frac{b^2}{a^2p}, \text{ ovvero } a^2pp' + b^2 = o, \text{ od ancora } p = -\frac{b^2}{a^2p'}.$$

L' ultima forma fa vedere che anche il primo diametro biseca le corde parallele al secondo, e quindi saranno conjugati. In conseguenza: *Due diametri qualunque $y = px$ ed $y = p'x$ saranno conjugati se tra i determinanti p, p' delle loro direzioni sussista la relazione $a^2pp' + b^2 = o$.*

In virtù di questa relazione data p può determinarsi p', e viceversa; vale a dire data la posizione di un diametro può determinarsi quella del conjugato. E poichè il valore che risulta per p, o per p' è unico, reale, e sempre determinabile, ne segue, che: *Ogni diametro ha un sol conjugato e lo ha necessariamente.*

190. L' esistenza di innumerevoli sistemi di diametri conjugati si palesa immediatamente nella figura. Di fatti da' vertici Q, Q', *(fig. 41)* di qual si voglia diametro si tirino ad un punto qualunque P dell' ellisse le corde QP, Q'P, e poscia i diametri EE', DD' paralleli a ciascuna; egli è chiaro che il primo di essi passa pe 'l punto medio della corda PQ', e l' altro pe 'l punto medio di PQ; e ne avviene che mentre il diametro EE' biseca le corde parallele a DD', questo alla sua volta biseca anch' esso le corde parallele ad EE'; perciò i due diametri DD' ed EE' sono conjugati; ed è poi chiaro che a misura che cangia il punto P così cangia pure il sistema di diametri conjugati che risulta dalla costruzione.

191. Viceversa se dai vertici Q, Q' di un diametro si tirano le rette Qq, Q'q' parallele a due diametri conjugati EE', DD' quelle rette dovranno incontrarsi in un punto P dell' ellisse, dapoichè in virtù della costruzione ciascun dei lati PQ, PQ' del triangolo QPQ' è bisecato dal dia-

metro parallelo all' altro ; e quindi , essendo conjugati i due diametri, i due lati saranno corde dell' ellisse , e 'l punto P in conseguenza cadrà sulla curva.

Ma volendo comprovarlo per mezzo dell' algebra sieno $y=px$ ed $y=p'x$ le equazioni dei due diametri conjugati DD', EE', e s' indichi con (α,β) il punto Q ; il punto Q' sarà espresso da $(-\alpha,-\beta)$, e perciò le equazioni delle rette $Q'q'$ e Qq parallele rispettivamente a quei diametri saranno

$$y+\beta=p(x+\alpha) \qquad y-\beta=p'(x-\alpha).$$

Ciò posto si dinoti con (x', y') il punto d' incontro di queste rette ; dovendo le sue coordinate verificarne le equazioni si avranno le due relazioni

$$y'+\beta=p(x'+\alpha) \qquad y'-\beta=p'(x'-\alpha),$$

le quali, moltiplicate membro a membro dan luogo all' altra

$$y'^2-\beta^2=pp'(x'^2-\alpha^2).$$

Or trovandosi il punto (α, β) sull' ellisse si ha $\beta^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-\alpha^2)$, ed essendo conjugati i due diametri si ha di più $pp'=-\frac{b^2}{a^2}$; in conseguenza sostituendo questi valori nella relazione precedente risulterà

$$y'^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x'^2),$$

e si rileva per tal modo che il punto (x', y'), incontro delle rette Qq, $Q'q'$, si trova sull' ellisse.

192. Due corde dell' ellisse le quali uniscono un punto della curva ai vertici di un diametro qualunque , ovvero che , mentre s' incontrano sulla curva son parallele a due diametri conjugati , sogliono chiamarsi *corde supplementali.* Ciò posto sieno $y=px+q$ ed $y=p'x+q'$

le equazioni di due rette qualunque ; le coordinate del punto in cui s' incontrano saranno espresse da

$$x=\frac{q'-q}{p-p'} \quad , \quad y=\frac{pq'-p'q}{p-p'} .$$

Ora se questo punto è sull' ellisse le sue coordinate dovranno verificarne l' equazione , e quindi dovrà sussistere la relazione

$$(a^2p'^2+b^2)q^2+(a^2p^2+b^2)q'^2-2(a^2pp'+b^2)qq'=a^2b^2(p-p')^2.$$

Se di più quelle corde son parallele a due diametri conjugati si avrà $a^2pp'+b^2=o$, ed allora la relazione precedente si può ridurre a

$$\frac{q^2}{a^2p^2+b^2}+\frac{q'^2}{a^2p'^2+b^2}=\frac{a^2b^2(p-p')^2}{(a^2p^2+b^2)\,(a^2p'^2+b^2)} .$$

ma per essere $b^2=-a^2pp'$ si ha

$$(a^2p^2+b^2)\,(a^2p'^2+b^2)=a^2b^2(p-p')^2;$$

in conseguenza : *Due corde di un ellisse rappresentate dalle equazioni* $y=px+q$, $y=p'x+q'$ *saranno supplementali se tra i loro determinanti sussistano le due relazioni*

$$a^2pp'+b^2=o \quad , \quad \frac{q^2}{a^2p^2+b^2}+\frac{q'^2}{a^2p'^2+b'^2}=1.$$

193. Ciò posto si dinotino con 2 X e 2 Y le lunghezze delle corde supplementali PQ' e PQ parallele ai diametri conjugati DD' ed EE', e si chiamino A e B i semidiametri CD e CE ; si avrà (§. 185)

$$X^2=\frac{a^2b^2r^2}{a^2p^2+b^2}\left(1-\frac{q^2}{a^2p^2+b^2}\right),\ Y^2=\frac{a^2b^2r'^2}{a^2p'^2+b^2}\left(1-\frac{q'^2}{a^2p'^2+b^2}\right)$$

ma è (§. 188)

$$\frac{a\,b^2r^2}{a^2p^2+b^2}=A^2 \quad , \quad \frac{a^2b^2r'^2}{a^2p'^2+b^2}=B'^2$$

perciò verrà sostituendo

$$\frac{X^2}{A^2}=1-\frac{q^2}{a^2p^2+b^2}\quad,\quad\frac{Y^2}{B^2}=1-\frac{q'^2}{a^2p'^2+b^2}$$

Sommando queste due eguaglianze membro a membro, ed osservando che la somma degli ultimi due termini frazionarii equivale ad 1 (§. *prec.*), risulterà tra le lunghezze di due corde supplementali e quelle dei diametri che sono ad esse parallele la seguente rilevantissima relazione

$$\frac{X^2}{A^2}+\frac{Y^2}{B^2}=1\;;$$

vale a dire: *La somma dei quadrati di due corde supplementali divisi pei quadrati dei rispettivi diametri paralleli è costante ed eguale all' unità.*

194. Poichè per due diametri conjugati $y=px$, $y=p'x$, si ha $a^2pp'+b^2=o$, p e p' saranno di segni contrarii, e quindi di specie diversa gli angoli ch' essi formano con l' asse delle x, cioè se uno è acuto l' altro è ottuso, e viceversa. Supponendo p positiva, p' sarà negativa, e perciò se DD' ed EE' rappresentano rispettivamente i due diametri $y=px$ ed $y=p'x$, l' angolo DCx sarà acuto, ed ECx sarà ottuso. Segue da ciò, che: *Gli assi di figura BB', AA' cadono uno per ciascuno de' due angoli ECD, DCE' che fanno due diametri conjugati, e che sono supplementi l' un dell' altro.*

195. Di questi due angoli converremo per ragion di chiarezza di chiamare *angolo compreso da due diametri conjugati* quello propriamente in cui cade l' asse minore com' è ECD, ed allora il supplemento sarà l' angolo DCE' in cui cade l' asse maggiore. Ciò posto dinotando con ω l' angolo compreso ECD, si avrà $\omega=$ ECx — DCx, e quindi

$$tang\,\omega=\frac{p'-p}{1+pp'}\;;$$

ma è $a^2pp'+b^2=o$; in conseguenza secondochè si elimina p' o p verrà

$$tang\,\omega=-\frac{a^2p^2+b^2}{p(a^2-b^2)},\quad\text{ovvero}\quad tang\,\omega=\frac{a^2p'^2+b^2}{p'(a^2-b^2)}\;.$$

Essendo p positiva e p' negativa, e di più $a>b$, $tang\,\omega$ sarà negativa; perciò: *L' angolo ECD di due diametri conjugati è ottuso, e quindi acuto il supplemento DCE'.*

Ma ciò si rileva ancora osservando che se dai vertici dell' asse maggiore si tirano le corde supplementali AP, A'P [*fig. 40*] parallele ai diametri conjugati EE', DD', risulta l' angolo ECD eguale ad APA' e si è veduto che quest' angolo è ottuso (§. 179).

196. Nei soli due casi di $p=o$, e $p=\infty$ si ha $tang\,\omega=\infty$; quindi: *Tra gl' infiniti sistemi di diametri conjugati di un ellisse i soli assi di figura sono tra loro perpendicolari.*

197. Se due diametri $y=px$, $y=p'x$, oltre di essere conjugati fossero anche eguali, si avrebbe non solo $a^2pp'+b^2=o$, ma anche $p=-p'$ (§. 188); quindi i valori di p e p', che determinano le direzioni di siffatti diametri, si avranno nelle radici dell' equazione $p^2-\frac{b^2}{a^2}=o$, le quali sono espresse da $p=\pm\frac{b}{a}$: adottando la positiva per p, la negativa apparterrà a p'; perciò i diametri conjugati ed eguali saranno dati dalle equazioni

$$y=+\frac{b}{a}x\quad,\quad y=-\frac{b}{a}x$$

e sono evidentemente costruiti dalle diagonali TT' ed UU' (*fig. 42*) del rettangolo formato dalle perpendicolari elevate agli assi pe' loro vertici, diagonali le quali passano altresì pei punti medii delle corde supplementali ed eguali. Dunque: *Esiste nell' ellisse un sol sistema di dia-*

metri conjugati eguali i quali passano pe' punti medii delle corde che uniscono i vertici degli assi della curva.

198. Per mezzo delle due formole scritte nel §. 195 si ottiene l'angolo ω compreso da due diametri conjugati quando è dato il valore di p o p'; e viceversa; laonde per esse si possono risolvere i due seguenti problemi:

1. Data la posizione di un diametro trovare l' angolo ω ch' esso comprende col conjugato.

2. Dato l' angolo ottuso ω che dev' esser compreso da due diametri conjugati trovare la loro posizione.

Il primo problema è sempre possibile ed ammette una sola soluzione, giacchè il valore di $tang\,\omega$ è unico, e reale.

Rispetto al secondo problema, facendo uso della prima formola, si ha l' equazione di 2° grado in p

$$a^2 p^2 + tang\,\omega\,(a^2 - b^2)\,p + b^2 = o$$

da cui si traggono per p i due valori

$$p = \frac{-tang\,\omega(a^2-b^2) \pm \sqrt{tang^2\omega(a^2-b^2)^2 - 4a^2b^2}}{2a^2},$$

i quali sono reali se si ha $tang^2\omega(a^2-b^2)^2 > 4a^2b^2$, ed immaginarii nel caso opposto; in conseguenza il problema sarà possibile ed ammetterà due soluzioni se il valore assoluto della tangente dell' angolo dato ω sia maggiore di $\frac{2ab}{a^2-b^2}$; in questo caso adunque vi saranno due diametri che comprendono coi loro conjugati uno stesso angolo. Se poi si abbia $tang\,\omega < \frac{2ab}{a^2-b^2}$, il problema sarà impossibile. Intanto l' angolo ω essendo ottuso per ipotesi è chiaro che il più piccolo valore della tangente, e quindi l' angolo massimo, si avrà per $tang\,\omega = \frac{2ab}{a^2-b^2}$.

Quando i due valori di p sono reali, sono entrambi po-

sitivi, perchè la tangente dell' angolo ω è negativa; essi in conseguenza determinano le posizioni di due diametri come DD', KK' *(fig. 43)* i quali formano angoli acuti con l' asse delle x e possono perciò dinotarsi con $+p_1$ e $+p_2$. Sostituendoli ad uno ad uno nella relazione $a^2pp'+b^2=o$ si trovano ordinatamente per p', cioè pei determinanti delle direzioni dei corrispondenti conjugati EE', LL', i due valori negativi $-p_2$ e $-p_1$; e perciò i due sistemi di diametri conjugati che risolvono il problema saranno espressi l' uno da $y=+p_1x$, $y=-p_2x$, e l' altro da $y=+p_2x$, $y=-p_1x$. Di questi quattro diametri il primo e quarto essendo egualmente inclinati a ciascuno degli assi saranno eguali in lunghezza (§. 188); ed altrettanto avviene tra il secondo e terzo; in conseguenza: *Esistono nell' ellisse due sistemi di diametri conjugati che comprendono uno stesso angolo; ed i quattro diametri sono a due a due eguali tra loro, ed egualmente inclinati a ciascuno degli assi.*

199. Se si verifica la condizione $tang\,\omega = \frac{2ab}{a^2-b^2}$, che ha luogo per l' angolo massimo, i due valori di p si eguagliano al pari di quelli di p', e si ha $p = \frac{b}{a}$, $p' = -\frac{b}{a}$. In questa ipotesi i due sistemi di diametri conjugati si riducono al solo $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$; e vi si riconoscono i diametri conjugati eguali (§. 197); dunque: *Nell' ellisse i diametri conjugati eguali comprendono il massimo angolo ottuso, e quindi il supplemento (§. 195) è il minimo degli angoli acuti.*

200. Quando l' ellisse è delineata i due problemi di cui ci siamo occupati si possono risolvere con semplicissime costruzioni geometriche mediante le proprietà delle corde supplementali.

Costruzione pe 'l problema 1°. Sia DD' *(fig. 41)* il diametro dato, e condotto ad arbitrio un altro diametro QQ′, da uno dei suoi vertici si tiri la corda Q′P parallela a DD′, e si congiunga PQ; il diametro EE′ parallelo a questa congiungente sarà il conjugato di DD′.

Costruzione pe 'l problema 2°. Segnato ad arbitrio un diametro QQ′ *(fig. 43)* si descriva sù di esso un segmento di cerchio capiente dell' angolo dato; questo cerchio, segando già l' ellisse in due punti Q, Q′, dovrà, se il problema è possibile, incontrarlo ancora in due altri punti (§. 178) come P, P′; e sarà risoluto tanto dai diametri paralleli alle corde supplementali PQ, P′Q, quanto da quelli paralleli alle altre P′Q, P′Q′.

201. Supponendosi descritta l' ellisse, la costruzione del problema 2.° fa pur conoscere le lunghezze dei due diametri che comprendono l' angolo dato; vale a dire resta con essa anche risoluto il seguente problema: *Determinare le lunghezze di due diametri conjugati, che comprendono un angolo dato* ω; ma se l' ellisse non è descritta è necessario di trovare le espressioni di queste lunghezze. A tal' effetto si chiamino A, B i semidiametri cercati, e p, p' i determinanti rispettivi degli angoli uno acuto e l' altro ottuso, ch' essi formano con l' asse delle x (§. 194). Per tal modo le incognite A, p saranno determinate dalle relazioni (§§. 188 e 195)

$$A^2(a^2p^2+b^2)=a^2b^2(p^2+1)\ ,\quad a^2p^2+b^2=-tang_{\omega}\,(a^2-b^2)p\ ,$$

e le incognite B, p' dalle altre

$$B^2(a^2p^2+b^2)=a^2b^2(p'^2+1)\ ,\quad a^2p'^2+b^2=tang_{\omega}\,(a^2-b^2)p'.$$

Traendo dalla prima il valor di p^2 e sostituendolo nella seconda, dopo averne elevato a quadrato i due membri, e scrivendo inoltre $\frac{sen\,\omega}{cos\,\omega}$ in luogo di $tang\,\omega$, si avrà nella incognita A la seguente equazione di 4.° grado derivativa del 2°.

$$A^4-(a^2+b^2)A^2+\frac{a^2b^2}{sen^2}=o.$$

Nello stesso modo potrebbe eliminarsi p' tra le due ultime relazioni, e si avrebbe un' equazione nella sola B; ma è chiaro che questa equazione deve risultare identica a quella in A, ed avrà quindi le stesse radici. Dunque le quattro radici dell' equazione in A, che sono eguali a due a due e di segno contrario, esprimono i quattro semidiametri, che risolvono il problema.

202. Segue dalla natura dell' equazione precedente che i valori di A^2 e B^2 sono sue radici quadratiche e quindi per teoriche conosciute si hanno le due relazioni *

$$1^a\quad A^2+B^2=a^2+b^2$$

$$2^a\quad AB\,sen\,\omega=ab.$$

Si rileva dalla 1ª, che: *La somma dei quadrati di*

* Abbiamo preferito la deduzione di queste relazioni, anzichè dimostrarle, perchè il primo procedimento è più conforme all'analisi; ma del rimanente eccone ancora le dimostrazioni. Supponendo che A, B sieno due semidiametri e p, p' i determinanti delle loro direzioni si avrà

$$A^2=\frac{a^2b^2r^2}{a^2p^2+b^2}\quad ,\quad B^2=\frac{a^2b^2r'^2}{a^2p'^2+b^2}\ ,$$

ma se di più son conjugati, essendo $b^2=-a^2pp'$ risulterà

$$A^2=\frac{-a^2p'r^2}{p-p'}\quad ,\quad B^2=\frac{a^2p^2r'^2}{p-p'}\ .$$

Sommando queste espressioni si ha per numeratore

$$(p-p')(a-a^2pp')\ ,\quad \text{ovvero}\quad (p-p')(a^2+b^2),$$

e ne conseguita la prima 1ª relazione $A^2+B^2=a^2+b^2$.

Facendone invece il prodotto, ed estraendo la radice dopo aver sostituito b^2 in luogo di $-a^2pp'$, verrà $AB=ab\,\frac{rr'}{p-p'}$, e quindi $AB\,\frac{p-p'}{rr'}=ab$; ma il fattore frazionario equivale al seno dell' angolo compreso dalle due rette $y=px$, $y=p'x$ (§. 100), val quanto dire al seno dell' angolo ω, perciò si avrà $AB\,sen\,\omega=ab$, ch' è la 2ª relazione.

due diametri conjugati qualunque dell' ellisse è costante ed eguale alla somma dei quadrati degli assi.

E risulta dalla 2^a, che : *Il parallelogrammo che si forma da due semidiametri conjugati è pur costante ed eguale al rettangolo dei semiassi.*

203. Se pei vertici di ciascuno di due diametri conjugati si conducano le parallele all' altro si forma un parallelogrammo quadruplo di quello che risulta dai semidiametri, e che suol dirsi *circoscritto* all' ellisse ; allora l' ultima proposizione può così enunciarsi : *I parallelogrammi circoscritti all' ellisse co' lati paralleli a due diametri conjugati son tutti eguali tra loro.*

La stessa proposizione si modifica evidentemente anche nei modi che seguono : *I triangoli che hanno per lati due semidiametri conjugati son tutti eguali.* Ovvero : *Son tutti eguali i parallelogrammi iscritti che hanno per vertici quelli di due diametri conjugati.*

204. Indicando con φ e φ' gli angoli, uno acuto e l' altro ottuso, che due semidiametri conjugati A, B formano con l' asse delle x, si ha $p = tang\,\varphi$, $p' = tang\,\varphi'$, perciò sarà $a^2\, tang\,\varphi\, tang\,\varphi' + b^2 = o$, e di più si avrà $\omega = \varphi' - \varphi$. In conseguenza tra i sette elementi

$$a,\ b,\ A,\ B,\ \omega,\ \varphi,\ \varphi'$$

si hanno le quattro relazioni

$$\omega = \varphi' - \varphi$$

$$a^2\, tang\,\varphi\, tang\,\varphi' + b^2 = o$$

$$a^2 + b^2 = A^2 + B^2$$

$$ab = AB\, sen\,\omega\,,$$

le quali valgono a determinarne quattro, dati che ne sieno tre; e quindi per esse si potranno, in generale, risolvere i diversi problemi che possono occorrere intorno ai

diametri conjugati. Abbiano già risoluto due di siffatti problemi, ma ad essi dobbiamo aggiungere il seguente, ch' è il più importante :

205. *Dati di grandezza e posizione due diametri conjugati determinare la grandezza e posizione degli assi.*

Per ciò che riguarda la grandezza degli assi può subito ottenersi dalle sole due ultime relazioni, nelle quali A, B, ω saranno elementi conosciuti, ed a, b incogniti. Se di esse si prenda or la somma ed or la differenza, dopo aver moltiplicata l' ultima per 2, si avrà

$$a+b=\sqrt{A^2+B^2+2AB\,sen\,\omega}\,,\quad a-b=\sqrt{A^2+B^2-2AB\,sen\,\omega}$$

e quindi risulteranno per gli assi le seguenti espressioni

$$2a = \sqrt{A^2+B^2+2AB\,sen\,\omega} + \sqrt{A^2+B^2-2AB\,sen\,\omega}$$

$$2b = \sqrt{A^2+B^2+2AB\,sen\,\omega} - \sqrt{A^2+B^2-2AB\,sen\,\omega}\,,$$

le quali si possono costruire in modo molto semplice. Sieno in fatti CD, CE [*fig.* 44] i dati semidiametri A, B nell' angolo ECD $= \omega$; elevando per C a CD la perpendicolare MN, sarà l' angolo ECM complemento di ECD, ossia di ω ; e perciò $sen\,\omega = cos$ ECM ; inoltre essendo l' angolo ECN supplemento di ECM si ha cos ECN $= -\, cos$ ECM $= -\, sen\,\omega$; ma se si tagliano le parti CM, CN eguali ciascuna a CD si ha per un conosciuto teorema di trigonometria

$$EM^2 = CM^2 + CE^2 - 2CM \times CE \times cos\,ECM$$

$$EN^2 = CN^2 + CE^2 - 2CN \times CE \times cos\,ECN\,,$$

in conseguenza sostituendo i simboli alle rette risulterà

$$EM = \sqrt{A^2+B^2-2AB\,sen\,\omega}\,,\qquad EN = \sqrt{A^2+B^2+2AB\,sen\,\omega}$$

e quindi si avrà

$$2a = EN + EM\,,\quad 2b = EN - EM\,;$$

vale a dire l'asse maggiore è quanto la somma delle congiungenti EN, EM, e l'asse minore quanto la loro differenza.

Rimarrebbe ora a determinare la posizione degli assi, il che si otterrebbe determinando per mezzo delle altre due formole l'angolo φ, o φ', ma ci riserbiamo di dare da qui a poco una soluzione più semplice di questa seconda parte del problema, facendola dipendere da altri principii.

206. Abbiamo fino a questo punto considerato due diametri conjugati, ed ora diremo brevemente qualche cosa di due diametri ortogonali.

E dinotando al solito con A, B [*fig. 45*] due semidiametri CD, CE, e con p, p' i determinanti delle lore direzioni, se i medesimi formano un angolo retto sarà $pp'+1=o$ (§. 109); quindi $p'=-\frac{1}{p}$; e perciò sostituendo questo valore di p' in quello di B² si avrà

$$A^2=\frac{a^2b^2(p^2+1)}{a^2p^2+b^2}\;,\;B^2=\frac{a^2b^2(p^2+1)}{a^2+b^2p^2}\;;$$

dividendo il prodotto di queste espressioni per la loro somma risulterà

$$\frac{A^2B^2}{A^2+B^2}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

Ciò posto si chiami α l'altezza CV del triangolo rettangolo ECD, e β l'ipotenusa ED; sarà $A^2B^2=\alpha^2\beta^2$, ed $A^2+B^2=\beta^2$; laonde sostituendo verrà

$$\alpha^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\;;$$

e ne segue che: *I triangoli rettangoli formati da due semidiametri ortogonali di un ellisse hanno tutti una medesima altezza.*

207. Il cerchio che abbia il centro in C e per raggio CV tocca la ED in V, e perciò: *Le ipotenuse dei triangoli che hanno per cateti due semidiametri ortogonali son tutte tangenti ad uno stesso cerchio concentrico all'ellisse.*

Altre equazioni dell' ellisse.

208. L'equazione con la quale si è finora rappresentata l'ellisse si dice *rapportata al centro ed agli assi della curva*, perchè il centro è preso per origine ed i suoi assi son pure quelli delle cordinate. Intanto da quest' equazione potrebbe subito dedursi l'equazione dell'ellisse rapportata a due rette qualunque mediante le formole per la trasformazione delle coordinate; ma, se si tratta di prendere per assi due diametri conjugati, possiamo dispensarci dall' impiego di quelle formole, dapoichè la relazione che già conosciamo tra le lunghezze di due corde supplementali (§. 193) dà immediatamente l'equazione dell'ellisse per questo caso.

Ed in vero sien presi per assi delle x e delle y due diametri conjugati CDx, CEy (*fig. 46*), e sieno PT, PS le coordinate x, y di un punto P dell'ellisse; saranno PT, PS le metà di due corde supplementali; laonde chiamando a', b' i semidiametri CD, CE si avrà tra x ed y la relazione

$$\frac{y^2}{b'^2}+\frac{x^2}{a'^2}=1\;,$$

la quale in conseguenza è l'equazione dell'ellisse *rapportata al centro e a due diametri conjugati.*

Facendo sparire i fratti quest' equazione diviene

$$a'^2y^2+b'^2x^2=a'^2b'^2\;;$$

ed è marchevole che non solo ha in quanto alle variabili la stessa forma dell'equazione primitiva; ma di più che i semidiametri a', b' vi entrano precisamente come i semiassi a, b entrano in quella.

209. Supponendo che l' equazione $y=px+q$ sia rapportata agli stessi assi coordinati CDx, CEy, la costante p, determinante della direzione della retta corrispondente non più sarà la tangente dell' angolo ch' essa forma con l' asse delle x, ma sivvero esprimerà il rapporto tra i seni degli angoli ch' essa forma con gli assi delle x e delle y rispettivamente (§. 83). Pur tuttavolta è manifesto che le espressioni delle coordinate dei punti comuni alle due linee si comporrebbero esattamente come quelle ottenute nella ipotesi delle coordinate ortogonali (§. 184); e quindi è facile a riconoscere le modifiche da apportarsi alle diverse formole rilevate in quella ipotesi onde renderle applicabili al caso attuale; ma del rimanente è chiaro che quasi in tutte non evvi che a cangiare la r in R (§. 157), cioè la quantità p^2+1 in $p^2+2p\cos\theta+1$, supposto che θ dinoti l' angolo degli assi. Inoltre anche nella presente ipotesi degli assi obbliqui due diametri $y=px$ ed $y=p'x$ saranno conjugati se tra i determinanti delle loro direzioni sussista la relazione $a'^2pp'+b'^2=o$ (§. 189).

210. Da ora innanzi per maggior semplicità noi supporremo che l' equazione

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2 \qquad (1)$$

sia rapportata ad un sistema qualunque di diametri conjugati; allora a dinoterà il semidiametro che fa da asse delle x e b quello che fa da asse delle y.

E qui cade in acconcio un' osservazione che tornerà utile di tener presente. Sia K un punto ovunque situato nel piano dell' ellisse, e si congiunga CK, che incontri la curva in P; sarà manifesto che se il punto K cade fuori di essa le sue coordinate che diremo α, β saranno maggiori di quelle del punto P, ed invece saranno minori se cade al di dentro. Ora poichè se il punto K cade sulla curva si ha

$$a^2\beta^2+b^2\alpha^2=a^2b^2,$$

così se cade al di fuori sarà

$$a^2\beta^2+b^2\alpha^2>a^2b^2$$

e se cade al di dentro sarà invece

$$a^2\beta^2+b^2\alpha^2<a^2b^2.$$

211. Se gli assi coordinati sono i diametri conjugati eguali (§.197), si ha $a=b$, e l' equazione della curva diviene

$$y^2+x^2=a^2,$$

prendendo così esattamente la forma di una delle equazioni del cerchio; ma mentre pe 'l cerchio le coordinate sono essenzialmente ortogonali, per l' opposto trattandosi dell' ellisse le coordinate saranno essenzialmente obblique.

212. Volendo trasportar l' origine in uno dei vertici del diametro DD', per esempio in D', conservando all' asse delle y la stessa direzione del conjugato EE', il che equivale a prendere per quest' asse la D'Y parallela ad EE', allora essendo $-a$ l' ascissa del punto D', basterà cangiare nell' equazione (1) la x in $x-a$ (§. 149), e per tal modo la medesima si trasmuta in

$$a^2y^2+b^2x^2-2ab^2x=o \qquad (2)$$

e dicesi *equazione dell' ellisse rapportata al vertice di un diametro.*

213. Ponendo nella (2) $x=o$ le radici dell' equazione $y^2=o$ esprimeranno le distanze dall' origine D' ai due punti in cui la curva può essere incontrata dall' asse delle y, ossia dalla retta D'Y; ma queste radici essendo $y=o$, $y=o$, sono nulle, e quindi eguali; perciò quei due punti saranno raccolti e confusi nel solo punto D', il quale in conseguenza è un punto di contatto e la retta D'Y sarà tangente della curva (§. 163). Da ciò risulta, che: *La parallela condotta pe 'l vertice di un diametro al suo conjugato è tangente dell' ellisse.*

Ma ciò si rileva ancora evidentemente dalla proprietà che ha un diametro di bisecare ogni corda parallela al suo conjugato. In fatti la lunghezza della corda che passa per uno dei suoi vertici è necessariamente nulla; che se così non fosse dovrebbe incontrar la curva in due altri punti; ed allora una retta segherebbe l'ellisse in tre punti, ch'è impossibile. Essendo adunque nulla la corda intercettata dall'ellisse sulla parallela condotta pe 'l vertice di un diametro al suo conjugato, essa incontrerà la curva toccandola, e non già segandola, come l'algebra ha mostrato in altra guisa.

214. Per avere l'equazione dell'ellisse rapportata a due rette qualunque VX, VY [*fig. 47*], non si ha che a sostituire nell'equazione (1) in luogo di x ed y i valori dati dalle formole (§. 155)

$$x = \frac{x'}{R} + \frac{y'}{R} + \alpha \quad , \quad y = p\frac{x'}{R} + p'\frac{y'}{R'} + \beta$$

nelle quali α, β sono le coordinate della nuova origine V, e p, p' i determinanti degli angoli che i nuovi assi VX, VY formano con l'asse antico delle x. Eseguendo la sostituzione, e poscia togliendo gli apici dalle variabili (§. 160), l'equazione cercata risulta come segue

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{a^2p^2+b^2}{R'^2}y^2 + 2\,\dfrac{a^2pp'+b^2}{RR'}\,xy + \dfrac{a^2p^2+b^2}{R^2}\,x^2 \\ +2\dfrac{a^2\beta p'+b^2\alpha}{R'}\,y + 2\dfrac{a^2\beta p+b^2\alpha}{R}x \\ + a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2 \end{array}\right\} = o$$

ovvero, scrivendo in compendio i cooefficienti,

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = o\,;$$

quindi si vede che la forma generica dell'equazione dell'ellisse rapportata a due rette qualunque è quella del-

l'equazione generale di 2° grado a due variabili. Nulla or diremo intorno alla proposizione reciproca, cioè se l'equazione generale esprima in ogni caso un ellisse, dapoichè ciò sarà l'oggetto di una speciale discussione, che dobbiamo rimandare in luogo più opportuno.

215. Esporremo attualmente alcune importanti proprietà dell'ellisse, le quali, se derivano immediatamente dall'ultima equazione, non si palesano così bene per altre vie.

Supponendo che gli assi coordinati VX, VY seghino ciascuno la curva in due punti, sieno P, Q gl'incontri col primo, ed R, S quelli col secondo; allora le distanze VP, VQ, e le altre VR, VS saranno rispettivamente espresse dalle radici delle due equazioni

$$Cx^2 + Ex + F = o \quad , \quad Ay^2 + Dy + F = o\,,$$

che risultano dall'ultima equazione dell'ellisse ponendovi ora $y = o$, ed ora $x = o$. Si avrà dunque

$$VP \times VQ = \frac{F}{C} \quad , \quad VR \times VS = \frac{F}{A}\,,$$

e quindi starà

$$VP \times VQ : VR \times VS :: \frac{1}{C} : \frac{1}{A} :: \frac{R^2}{a^2p^2+b^2} : \frac{R'^2}{a^2p'^2+b^2}\,;$$

ma se le due espressioni che compongono l'ultimo rapporto si moltiplicano entrambe per a^2b^2 esse allora divengono quelle dei quadrati dei semidiametri CD, CE paralleli a VX, VY; perciò starà pure

$$VP \times VQ : VR \times VS :: CD^2 : CE^2\,,$$

e ne segue, che: *Se da un punto si tirano due seganti all'ellisse i rettangoli dei rispettivi segmenti tra il punto e la curva staranno tra loro come i quadrati dei semidiametri rispettivamente paralleli.*

216. Qualora si abbia A=C, o ch'è lo stesso, qualora sieno eguali i semidiametri paralleli alle rette VX, VY,

queste rette saranno egualmente inclinate a ciascuno degli assi dell' ellisse (§. 188), ed intanto i due rettangoli di cui è parola nel teorema saranno eguali ; quindi i quattro punti P , Q , R , S staranno sulla circonferenza di un cerchio ; e ne avviene che saranno eguali anche i due rettangoli UR $\times$ UP , US $\times$ UQ , non che gli altri ZP $\times$ ZS , ZR $\times$ ZQ . Da ciò poi risulta che le corde PR , QS sono anch' esse egualmente inclinate a ciascun degli assi della curva , al pari delle altre PS , RQ ; e si ha in conseguenza che : *Se un cerchio sega un ellisse in quattro punti , due lati opposti qualunque del quadrilatero che si forma con essi, saranno egualmente inclinati a ciascuno degli assi , al pari delle due diagonali.*

217. Quindi si ha pure, che : *Se un cerchio sega un ellisse in quattro punti gli assi di questa curva saranno paralleli alle bisecanti dei due angoli supplementi l' un dell' altro compresi o da due de' lati opposti del quadrilatero che si forma con essi , o dalle due diagonali* *.

---

* Questo teorema conduce a risolvere in modo semplicissimo il problema di: *Determinare la posizione degli assi di un ellisse di cui son dati due semidiametri conjugati di grandezza e posizione* (§.205). In fatti sieno CD, CE [*fig.48*] i semidiametri dati a, b nell'angolo DCE $= \omega$; sia inoltre DQ il diametro doppio di CD ; il cerchio che passa pei tre punti D , Q , E segherà l' ellisse in un quarto punto ; e , supposto che sia P , si congiunga PE che tagli DQ in S. In virtù del teorema gli assi dell' ellisse saranno paralleli alle bisecanti degli angoli ESD , ESQ ; laonde il problema si riduce alla determinazione del punto P ; ed ecco l' analisi per quest' oggetto.

Prendendo per assi coordinati i diametri CD x, CEy sarà

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

l' equazione dell'ellisse. Quella del cerchio poi avrà la forma (§.131)

$$y^2 + 2\cos\omega\, xy + x^2 + Dy + Ex + F = o\,;$$

ma questo cerchio passa pe' tre punti D , Q , E i quali sono espressi da (a , o) , ($-a$, o) , (o , b) ; così , sostituendo volta per vol-

218. L' equazione dell' ellisse rapportata al centro ed a due diametri conjugati ridotta alla forma

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\,(a^2 - x^2)$$

---

ta le coordinate di ciascuno , si avranno per determinare i valori di D , E , F le tre relazioni

$a^2 + Ea + F = o$, $a^2 - Ea + F = o$, $b^2 + Db + F = o$.

Risultando dalle prime due $E = o$, si ha di seguito $F = -a^2$, $D = \frac{a^2 - b^2}{b}$, e per tal guisa l' equazione del cerchio sarà

$$y^2 + 2\cos\omega\, xy + x^2 + \frac{a^2 - b^2}{b}\,y = a^2\,.$$

Ciò posto moltiplicando quest' equazione per b^2 , e sottraendola poscia da quella dell' ellisse , si ha l' altra equazione

$$(a^2 - b^2)y^2 - 2b^2\cos\omega\, xy - b\,(a^2 - b^2)\,y = o\,,$$

la quale rappresenta una qualche linea che ha la proprietà di passare pei punti comuni al cerchio ed all' ellisse (§. 140) , cioè pe' punti D , Q , P , E . Intanto questa equazione si scinde nelle due

$$y = o \quad , \quad y = \frac{2b^2\cos\omega}{a^2 - b^2}\,x + b$$

esprimenti due rette ; e perciò ciascuna di queste rette conterrà due dei quattro punti ; ma la prima ch' è l' asse delle x contiene i punti D , Q ; dunque la seconda conterrà i punti P , E , e sarà quindi la retta PE. Per costituire questa retta , essendochè il punto E è dato , basterà che si determini il punto S in cui taglia l'asse delle x ; a tal' effetto si porrà $y = o$ nella sua equazione , e per tal modo risulterà

$$CS \times \cos\omega = -\frac{a^2 - b^2}{2b}\,.$$

Ora il 2° membro essendo nella equazione del cerchio la metà del coefficiente del termine in y a 1.° grado col segno cambiato equivale alla parte dell' asse delle y interposta tra l' origine e 'l piede della perpendicolare menatagli dal centro (§. 132), perciò, se OK sia questa perpendicolare , risulterà

$$CS \times \cos SCK = CK\,;$$

fa vedere che : *Il quadrato di un' ordinata ad un diametro qualunque sta al rettangolo dei due segmenti in cui essa lo divide come sta al quadrato dello stesso diametro quello del conjugato* ; e resta così generalizzata una proprietà analoga ch' erasi veduta appartenere agli assi della curva (§. 183) ; ma è poi ben chiaro che questa proprietà è essa stessa un caso particolare del teorema relativo alla seganti poc' anzi enunciato (§. 115).

219. Si chiama *parametro* di un diametro la terza proporzionale in ordine allo stesso diametro ed al conjugato ; indicandolo con $2m$ si ha

$$m = \frac{b^2}{a} ;$$

e l'equazione dell' ellisse introducendovi il parametro diviene

$$y^2 = \frac{m}{a}(a^2 - x^2) .$$

Il parametro che appartiene all'asse maggiore suole contraddistinguersi con la denominazione di *parametro principale*.

Delle tangenti dell' ellisse.

220. Prendendo per assi coordinati due diametri conjugati dell' ellisse , questa curva ed una retta qualunque potranno essere rappresentate con le equazioni

quindi si vede che anche SK è perpendicolare a CK , e perciò il punto S rimane determinato sopra di DQ dal prolungamento di OK. Trovato il punto S la retta ES sarà quella che passa pe 'l quarto punto P comune al cerchio ed ellisse , e 'l problema proposto si risolverà come segue : *Dal centro O del cerchio che passa pei punti D , Q , E si meni a CE la perpendicolare che incontri in S il diametro DQ ; e congiunta ES, si bisechino gli angoli ESD , ESQ ; le parallele menate dal centro C alle due biseeanti saranno gli assi dell' ellisse.*

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

$$y = px + q ,$$

e segue dal §. 184 che, ove si abbia

$$a^2p^2 + b^2 = q^2 ,$$

le due linee s' incontreranno in due punti reali , ma coincidenti in un punto solo , il quale perciò sarà un punto di contatto (§. 163) . In questo caso adunque la retta sarà tangente della curva , e dinotando con x' , y' le coordinate del contatto , si avrà

$$x' = \frac{-a^2pq}{a^2p + b^2} = -\frac{a^2p}{q} \quad , \quad y' = \frac{b^2q}{a^2p^2 + b^2} = \frac{b^2}{q} .$$

Quindi si ottiene

$$p = -\frac{b^2x'}{a^2y'} \quad , \quad q = \frac{b^2}{y'} ,$$

e per tal modo l' equazione della tangente dell' ellisse nel punto (x' , y') sarà

$$y = -\frac{b^2x'}{a^2y'}x + \frac{b^2}{y'} , \text{*}$$

* Il punto di contatto tra una retta ed una curva dovendo considerarsi come la riunione in una di due intersezioni tra le due linee , se s' immagina che una retta , segante la curva in due punti , circoli intorno ad uno di essi per modo che l' altro se gli vada continuamente avvicinando , i due punti dovranno finalmente confondersi in un solo , ed allora la retta da segante diverrà tangente in questo punto. L' analisi può benissimo imitare questo procedimento , e ne risulta un metodo molto semplice per trovar l' equazione della tangente : lo applicheremo all' ellisse , ma può uniformemente applicarsi a qualsivoglia altra linea.

Esprimendo con (x' , y') , (x'' , y'') due punti dell' ellisse, l'equazione della retta che lo sega in questi due punti sarà

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x') .$$

ovvero, facendo sparire i fratti,

$$a^2 yy' + b^2 xx' = a^2 b^2.$$

221. Ponendo $p' = \frac{y'}{x'}$, sarà $y = p'x$ il diametro che passa pe 'l contatto, ed intanto l' equazione della tangente sotto la prima delle due forme si cangia in

$$y = -\frac{b^2}{a^2 p'} x + \frac{b^2}{y'},$$

e si riconosce parallela al diametro $y = -\frac{b^2}{a^2 p'} x$ ch' è il conjugato di $y = p'x$ (§. 189). Segue da ciò che:

---

ed intanto per l' esistenza dei due punti sulla curva si hanno le due relazioni

$$a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2 \quad , \quad a^2 y''^2 + b^2 x''^2 = a^2 b^2.$$

Prendendone la differenza si ha

$$a^2 (y'^2 - y''^2) + b^2 (x'^2 - x''^2) = o,$$

e ne risulta

$$\frac{y' - y''}{x' - x''} = -\frac{b^2 (x' + x'')}{a^2 (y' + y'')};$$

quindi l' equazione della segante diverrà

$$y - y' = -\frac{b^2 (x' + x'')}{a^2 (y' + y'')} (x - x').$$

Ciò posto supponendo che questa segante circoli intorno al punto (x', y'), quando l' altro punto (x'', y'') coinciderà con esso si avrà $x'' = x'$, $y'' = y'$; basterà dunque introdurre queste ipotesi nell' equazione della segante affinchè si cambii in quella della tangente nel punto (x', y'); e perciò l' equazione di questa tangente sarà

$$y - y' = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'} (x - x');$$

equazione la quale ritorna a quella di poc' anzi col portare y' al secondo membro, ed osservando che si ha $a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2$.

La tangente in un punto qualunque dell' ellisse è parallela al conjugato di quello che passa pe 'l contatto; proposizione reciproca dell' altra enunciata a §. 213; e ne risulta, che: *Le tangenti nei due vertici di un diametro son tra loro parallele.*

222. Quindi è manifesto che la tangente in un punto dato dell' ellisse si costruisce conducendo per questo punto la parallela al diametro conjugato a quello, che passa per esso; ma può ancora costruirsi determinando la parte che taglia da uno degli assi coordinati. Ponendo $y = o$ nella sua equazione si ha $x = \frac{a^2}{x'}$; supposto adunque che PQ [*fig.* 49] sia la tangente nel punto P, e CS, PS le sue coordinate x', y', si avrà

$$CQ = \frac{a^2}{x'} = \frac{CA^2}{CS};$$

in conseguenza prendendo CQ terza proporzionale dopo CS e 'l semidiametro CA, sarà PQ la tangente in P.

223. Sia PP′ la corda dell' ellisse doppia dell' ordinata PS; la retta QP′ sarà tangente dell' ellisse in P′; quindi è manifesto, che: *Il diametro che passa pe 'l punto di concorso di due tangenti qualunque divide in due parti eguali la corrispondente corda tra' contatti.*

224. Or sieno PE, AE (*fig.* 50) due tangenti dell' ellisse nei punti P, A, e BB′ il conjugato ad AA′, sarà AE parallela a BB′ (§. 221). Ciò posto si tirino le corde PA, PA′, e l' ultima si prolunghi in K; la retta CE dovendo, pe 'l teorema precedente, bisecare la corda PA, sarà parallela ad A′K, e quindi il punto E sarà medio di AK. Da ciò risulta la seguente semplicissima costruzione della tangente in un punto P dell' ellisse, di cui si conosca la grandezza e posizione di un diametro AA′, e la sola direzione del conjugato BB′. *Dal punto P si tiri la retta PA′ ad un dei*

vertici del dato diametro, e si produca fino ad incontrare in K la parallela condotta per l' altro vertice al conjugato; la retta PE che unisce il punto P al punto medio di AK sarà la tangente richiesta.

225. Essendo E, E′ i punti in cui la tangente in P incontra le tangenti parallele in A, A′, le lunghezze delle parti AE, A′ E′ si avranno nei valori che risultano per y dall' equazione della tangente ponendovi ora $x=+a$, ed ora $x=-a$. Si ha per tal modo

$$\mathrm{AE}=\frac{b^2(a-x')}{ay'}\ ,\quad \mathrm{A'E'}=\frac{b^2(a+x')}{ay'};$$

moltiplicando tra loro queste espressioni, e ricordando che si ha $y'^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x'^2)$, risulterà

$$\mathrm{AE}\times\mathrm{A'E'}=b^2\ ,$$

e da ciò il seguente teorema: *Se una tangente dell' ellisse incontra due tangenti parallele il rettangolo delle parti che taglia su di esse a contar dai contatti è eguale al quadrato del semidiametro parallelo alle tangenti.*

226. Vediamo ora come debba condursi la tangente all' ellisse da un punto Q, (α, β), non esistente sulla curva [*fig. 51*]. In questo caso le coordinate x', y' del contatto P saranno incognite, e si determineranno mediante le due relazioni (§. 138)

$$a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2\quad ,\quad a^2\beta y'+b^2\alpha x'=a^2b^2\ ,$$

le quali conducono ad equazioni di 2° grado, e perciò due tangenti come QP, QP′ si possono condurre all' ellisse da un punto non esistente sulla curva. Si trova intanto per le coordinate de' due contatti (§. 138).

$$x'=a^2\ \frac{b^2\alpha+\beta\sqrt{(a^2\beta^2+b^2\alpha^2-a^2b^2)}}{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}$$

$$y'=b^2\ \frac{a^2\beta\mp\alpha\sqrt{(a^2\beta^2+b^2\alpha^2-a^2b^2)}}{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}$$

e poichè la quantità sotto il radicale è positiva, nulla, o ne-

gativa secondo che il punto (α,β) è fuori, sopra, o dentro la curva (§.210), così nel primo caso si possono condurre due tangenti, una nel secondo, e niuna nel terzo.

227. Ragionando intanto come al §. 139 si riconosce che la seconda delle due equazioni poc' anzi scritte, ossia

$$a^2\beta y+b^2\alpha x=a^2b^2$$

esprime la retta che passa pei due contatti P, P′, i quali perciò si otterranno costruendo questa retta, e possono all' uopo determinarsi i punti G, H in cui essa incontra gli assi coordinati.

Or sieno CD, QD le coordinate α, β del punto Q; ponendo $y=o$ risulta $x=\frac{a^2}{\alpha}$, ossia

$$\mathrm{CG}=\frac{\mathrm{CA}^2}{\mathrm{CD}};$$

e si ravvisa come nel caso del cerchio (§. 141) che il punto G non cambia se il punto Q cambia di sito rimanendo sulla retta MDN; quindi si ha parimenti, che: *Le corde tra i contatti di tutte le coppie di tangenti, menate all' ellisse da' diversi punti di una stessa retta s' intersegano in un medesimo punto.*

228. Se si determina come pel cerchio (§. 142) il luogo dei punti di concorso delle coppie di tangenti nelle estremità delle corde dell' ellisse che passano per uno stesso punto (α, β) si ritrova l' equazione di poc' anzi

$$a^2\beta y+b^2\alpha x=a^2b^2\ ,$$

e si ha così la proposizione reciproca: *Le coppie di tangenti menate all' ellisse nelle estremità delle corde che passano per uno stesso punto concorrono sopra una medesima retta.*

229. Anche nell' ellisse il punto intorno a cui circolano le corde tra' contatti delle coppie di tangenti condotte dai diversi punti di una retta dicesi *polo* di questa retta, la quale prende il nome di *polare* di quel punto.

Risulta da ciò che precede che il polo G di una retta MN trovasi sul diametro CD conjugato a quello ch' è parallelo ad MN, e si determina prendendo GG terza proporzionale in ordine a CD ed al semidiametro CA. Ovvero possono da due punti Q, q di MN condursi le due coppie di tangenti; ed allora le corde tra' contatti PP', pp' determineranno nel loro incontro il polo P.

Reciprocamente la polare MN di un dato punto G è parallela al conjugato del diametro CD che passa per G, e quindi per costruirla basterà conoscere il solo punto D, il quale si determina prendendo CD terza proporzionale in ordine a CG ed al semidiametro CA. Ma possono ancora condursi pel polo G due corde arbitrarie PP', pp', e poscia le tangenti nelle loro estremità, che s' incontreranno in due punti Q, q; la retta MN che passa per questi punti sarà la polare del punto G.

230. Si rileva da queste costruzioni che se la polare cade tutta fuori della curva il polo cadrà dentro di essa e viceversa. Nel primo caso il polo starà tra il centro e la polare; e nel secondo la polare cadrà tra il centro e 'l polo.

Delle normali dell' ellisse, ed espressioni delle quattro rette denominate

tangente, sottangente, normale, sunnormale.

231. In ciò che segue supporremo che l' equazione

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

sia rapportata agli assi dell' ellisse; di tal che le coordinate saranno ortogonali, ed a, b saranno i semiassi.

232. Una retta si dice normale o perpendicolare ad una curva in un punto del suo perimetro se è perpendicolare alla tangente in questo punto. L' equazione della tangente dell' ellisse nel punto (x',y') essendo

$$y = -\frac{b^2x'}{a^2y'}\,x + \frac{b^2}{y'}$$

l' equazione della normale nello stesso punto sarà (§.105)

$$y - y' = \frac{a^2y'}{b^2x'}\,(x - x')\,.$$

233. Sia GH [*fig.52*] tangente dell'ellisse in P; la retta indefinita PL perpendicolare a GH sarà la normale dell' ellisse nel punto P. Ciò posto sieno CS, PS le coordinate x', y' del punto P, e K il punto in cui la normale incontra l' asse maggiore AA', ch' è quello delle x; ponendo $y=o$ nell' equazione della normale, il valore che ne risulta per x sarà quello di CK, e si avrà

$$x = \text{CK} = \frac{a^2 - b^2}{a^2}\,x'.$$

Essendo $a > b$ è chiaro che CK debba avere lo stesso segno di x', ossia di CS, e di più che sia CK minore di CS; in conseguenza il punto K e 'l punto S si troveranno sempre da una stessa parte del centro; ed inoltre il primo starà sempre tra il centro e 'l punto S.

234. Quando è $x'=o$ si ha CK$=o$; perciò la normale in un vertice B dell' asse minore incontra il maggiore nel centro. Il valore di CK cresce a misura che cresce quello di x', ossia di CS, ed acquista il massimo valore quando è $x'=a=$CA, cioè a dire quando il punto P, cui corrisponde la normale, coincide col vertice A dell' asse maggiore. In questa ipotesi il valore di x si riduce ad $\frac{a^2 - b^2}{a}$; e supposto che sia CT, sarà T il punto in cui la normale in A incontra l'asse AA'. Questo risultamento può forse sembrar paradossale, mentre ognun vede che la normale in A si confonde con AA', ma finisce ogni pa-

radosso riguardando il punto T come un limite cui le normali si accostano indefinitamente a misura che il punto P si approssima ad A ; di manierachè l' intervallo CT si può rendere minore di qualsivoglia dato prendendo il punto P convenientemente vicino ad A.

235. Per ogni punto di una curva si considerano dai geometri le lunghezze di quattro rette , frequentemente adoperate , ed hanno i nomi di *tangente* , *sottangente*, *normale* , e *sunnormale* ; la *tangente* è le parte della retta indefinita dello stesso nome interposta tra il punto del contatto e l' asse dell' x : la *sottangente* è la parte dell' asse delle x interposta tra la tangente e l' ordinata pe 'l contatto ; la *normale* è la parte della retta indefinita di egual nome interposta tra l' asse delle x e 'l punto della curva al quale appartiene : e finalmente la *sunnormale* è la parte dell' asse delle x compresa tra l' ordinata del punto e la normale.

236. Applicando queste definizioni al punto P dell'ellisse sarà PQ la sua tangente , PK la normale , SQ la sottangente e KS la sunnormale . Del rimanente segue dalle stesse definizioni che le lunghezze di queste quattro rette non sono già assolute , ma variano a misura che variano gli assi delle coordinate ; pur tuttavolta nell' ellisse , eccetto la sottangente , esse sogliono comunemente riferirsi agli assi principali ; ed è quindi rapporto a questi assi che or passeremo a cercarne le espressioni.

237. *Sunnormale.* Si ha KS=CS—CK ; ma è $CS = x'$, $CK = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x'$; sostituendo verrà dunque

$$Sunnormale = \frac{b^2}{a^2} x'.$$

Quando è $x' = o$ si ha pure *surnorm.* $= o$; vale a dire è nulla la surnormale di un vertice dell' asse minore. Il valore della sunnormale cresce a misura cresce x' , e diventa un *massimo* quando è $x' = a$; in questa ipotesi si ha *sunnorm.* $= \frac{b^2}{a}$; e quindi si vede , uniformemente a ciò che poc' anzi si è detto (§. 234), che la lunghezza della sunnormale corrispondente al vertice A dell' asse maggiore è finita , e non indefinita.

Esprimendo $\frac{b^2}{a}$ il semiparamento dell' asse AA' (§.219), si ha , che : *La sunnormale appartenente ad un vertice dell' asse maggiore è eguale alla metà del suo parametro.*

Si può rimarcare che prendendo AT eguale al semiparametro $\frac{b^2}{a}$, il punto T è, come dev' essere, quello stesso che si è costruito (§. 234) prendendo $CT = \frac{a^2 - b^2}{a}$; dapoichè risulta $AT = CA - CT = a - \frac{a^2 - b^2}{a} = \frac{b^2}{a}$.

238. *Normale* . Essendo $PK = \sqrt{(PS^2 + KS^2)} = \sqrt{(y'^2 + \frac{b^4}{a^4} x'^2)}$; ponendo per y'^2 il valore che ne dà l'equazione dell' ellisse , ed inoltre c^2 in luogo di $a^2 - b^2$, (§. 169) verrà

$$Normale = \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - \frac{c^2 x'^2}{a^2})}.$$

Questa espressione ha il massimo valore quando è $x' = o$, ipotesi da cui si trae *norm.* $= b$; crescendo x' il valore della normale diminuisce , e diviene un *minimo* per $x' = a$, ipotesi che da *norm.* $= \frac{b^2}{a}$; dunque. *Le normali più grandi corrispondono ai vertici dell' asse maggiore , e sono ciascuna eguale al semiparametro principale , e quindi alle rispettive sunnormali con le quali si confondono.*

239. *Sottangente.* Si ha $SQ = CQ - CS$; ma è $CS = x'$, $CQ = \frac{a^2}{x'}$ (§. 222); quindi si avrà

$$\textit{Sottangente} = \frac{a^2}{x'} - x'.$$

240. *Tangente*. Essendo $PQ = \sqrt{(PS^2 + SQ^2)} = \sqrt{y'^2 + (\frac{a^2}{x'} - x')^2}$, sostituendo ad y'^2 il valore che ne dà l' equazione dell' ellisse, verrà

$$\textit{Tangente} = \sqrt{(a^2 - x'^2)(\frac{a^2}{x'^2} - \frac{c^2}{a^2})}.$$

241. Si può rimarcare che di tutte queste espressioni quella solo della sottangente conserva la stessa forma se si prendono per assi due diametri conjugati qualunque.

Dei fuochi dell' ellisse.

242. Si è già veduto che i fuochi dell'ellisse son due punti situati sull'asse maggiore ad egual distanza dal centro; e tali che la somma dei raggi vettori condotti da essi a qualunque punto della curva è costante; ma questa proprietà sulla quale abbiamo fondato la generazione dell'ellisse merita di esser dedotta dalla sua equazione; ed a tale uopo è necessario di dar dei fuochi una definizione che permetta di far dipendere questi punti rimarchevoli della stessa equazione.

Sia F [*fig. 53*] un punto ovunque situato nel piano dell' ellisse; l' espressione della sua distanza ai diversi punti della curva è *in generale* una funzione irrazionale dell' ascissa x; ma se esiste nel piano dell' ellisse un punto tale che l' espressione della sua distanza a qualunque punto della curva sia funzione razionale di x, noi daremo a questo punto il nome di *fuoco* della curva.

243. Ciò premesso rapportando l'ellisse agli assi principali la sua equazione sarà

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

Intanto sieno α, β le coordinate del punto qualunque F, e s' indichi con z la sua distanza da un punto (x, y) della curva; si avrà dapprima

$$z = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2};$$

ma poscia, sostituendo ad y il valore che ne da l' equazione dell' ellisse, verrà

$$z = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 - 2\frac{\beta b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)} - 2\alpha x + b^2 + \alpha^2 + \beta^2}.$$

Or se si vuole che questa espressione sia funzione razionale di x, la quantità sotto il radicale dev' essere un quadrato perfetto; ma ciò non sarà possibile fino a che vi esista l' altro radicale $\frac{2\beta b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, il quale non può sparire altrimenti che con l' annullamento di β. Se dunque un fuoco esiste nell' ellisse, conviene che sia $\beta = o$; donde risulta che non può trovarsi in altro luogo che nell' asse delle x; e 'l valore della distanza z si ridurrà a

$$z = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 - 2\alpha x + (b^2 + \alpha^2)}$$

rimanendo così sotto il radicale un trinomio di 2°. grado in x, il quale sarà quadrato perfetto quante volte si abbia

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} (b^2 + \alpha^2) = \alpha^2,$$

vale a dire, riducendo, quando sia

$$\alpha^2 = a^2 - b^2, \quad \text{cioè} \quad \alpha = \pm \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Affinchè questo radicale possa essere reale si richiede che

a sia maggiore di b; e da ciò risulta che solamente sull' asse maggiore esistono due punti pei quali è soddisfatta la condizione voluta pei fuochi; essi sono determinati dalle ascisse eguali e di segno contrario $+\sqrt{a^2-b^2}$, $-\sqrt{a^2-b^2}$, e perciò si trovano ad egual distanza dal centro; inoltre in ciascuna di queste ascisse si riconosce l' eccentricità $c = CF$, mentre si ha $c = \sqrt{a^2-b^2}$; e quindi i punti F, F' che ne risultano sono quei medesimi cui fu dato da principio il nome di fuochi.

244. È chiaro intanto che, per avere le espressioni dei raggi vettori che partono dal fuoco F, convenga porre $+c$ in luogo di α nell' ultimo valor di z, e $-c$ pei raggi vettori che partono dal fuoco F'. Quindi per un raggio vettore z appartenente al fuoco F si avrà

$$z = \sqrt{\frac{c^2 x^2}{a^2} - 2cx + a^2} = \pm\left(\frac{cx}{a} - a\right),$$

e per un raggio vettore z' appartenente al fuoco F'

$$z' = \sqrt{\frac{c^2 x^2}{a^2} + 2cx + a^2} = \pm\left(\frac{cx}{a} + a\right).$$

Trattandosi di lunghezze assolute, del doppio valore che presenta ciascuna di queste formole dovrà ritenersi il solo positivo. Ora essendo per tutt' i punti dell' ellisse $x < a$, ed inoltre $c < a$, con più ragione sarà $\frac{c}{a}x < a$; da ciò risulta che nella prima formola converrà ritenere il segno $-$, e 'l $+$ nella seconda; di tal che si avrà

$$z = a - \frac{cx}{a} \quad , \quad z' = a + \frac{cx}{a}$$

245. Se da uno stesso punto P della curva si conducano ai fuochi i raggi vettori FP, F'P allora l' ascissa x avrà nelle ultime due formole un valor comune; laonde prendendone la somma quest' ascissa sparisce e si ha

$$z + z' = 2a;$$

quindi si ritorna alla proprietà già conosciuta, che: *Nell' ellisse la somma dei due raggi vettori condotti da qualunque punto della curva ai due fuochi è costante ed eguale all' asse maggiore.*

246. Occorrendo in molte ricerche di valutare l' angolo QPF che la tangente in un punto P dell' ellisse forma con uno dei due raggi vettori condotti per lo stesso punto, cercheremo l' espressione della sua tangente. Dinotando adunque con x', y' le coordinate del punto P, e supposto che il raggio vettore sia quello che passa pe 'l fuoco F esistente sull' asse positivo delle x, il quale è espresso da (c, o), le equazioni delle due rette PQ, PF saranno

$$y = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}x + \frac{b^2}{y'} \quad , \quad y = \frac{y'}{x'-c}(x-c)$$

e quindi essendo *ang.* QPF $=$ PQx $-$ PFx, si avrà

$$tang\ \mathrm{QPF} = \frac{-\dfrac{b^2 x'}{a^2 y'} - \dfrac{y'}{x'-c}}{1 - \dfrac{b^2 x'}{a^2 y'} \times \dfrac{y'}{x'-c}}:$$

eseguendo in questa espressione i convenienti sviluppi, e poscia sostituendo, nel numeratore, a^2b^2 in vece di $a^2y'^2 + b^2x'^2$, e nel denominatore, c^2 in vece di a^2-b^2, verrà nel numeratore e denominatore il fattor comune $a^2 - cx'$, che potrà sopprimersi; e così risulterà

$$tang\ \mathrm{QPF} = \frac{b^2}{cy'}.$$

Nella stessa guisa si troverebbe la tangente dell' angolo QPF' formato dalla tangente PQ con l' altro raggio vettore PF' condotto al fuoco F' ch' è sull' asse negativo delle x; ma si comprende che non è necessario di ripetere il calcolo bastando di cambiare nella formola precedente c in $-c$; di tal che si avrà

$$tang\ QPF' = -\frac{b^2}{cy'}.$$

247. Dunque i due angoli QPF, QPF′ sono supplementi l'un dell'altro, e ne segue che gli angoli QPF, Q′PF′ sono tra loro eguali. Quindi: *I due raggi vettori condotti da un punto dell'ellisse ai due fuochi sono egualmente inclinati alla tangente nel punto medesimo.*

248. Sia PL la normale in P; anche eguali saranno gli angoli FPL, F′PL; e quindi: *La normale in un punto dell'ellisse divide in due parti eguali l'angolo compreso dai due raggi vettori appartenenti allo stesso punto.*

249. Da un fuoco F si meni FH perpendicolare a PQ, ed incontri in E l'altro raggio vettore PF′; gli angoli PFE, PEF saranno eguali (*teor. prec.*), e'l triangolo FPE sarà isoscele. Adunque FE sarà bisecata in H; ed è pure FF′ bisecata in C; perciò sarà CH parallela ad F′E, e quindi metà di questa retta. Ma per essere PF = PE, si ha F′E = AA′; in conseguenza sarà CH = CA. Così, menando F′H′ perpendicolare a QQ′ si rileva CH′ = CA; e ne deriva che i punti H, H′ si trovano sulla circonferenza del cerchio che ha il centro in C e per raggio CA. Dunque: *I piedi delle perpendicolari condotte dai fuochi dell'ellisse sopra le sue tangenti si trovano nella circonferenza del cerchio concentrico avente per raggio il semiasse maggiore.*

250. Le due polari dei fuochi cioè le rette sulle quali concorrono le due tangenti nelle estremità di ciascuna delle corde che passano per quei punti, sono assai rimarchevoli per l'ellisse, ed hanno ricevuto il nome di *direttrici*. Prendendo sull'asse maggiore a parti opposte del centro

le CD, CD′ (*fig. 54*) eguali ciascuna alla terza proporzionale in ordine a CF e CA, le MDN, MDN′ perpendicolari ad AA′ saranno le due direttrici, e le loro equazioni saranno $x = \frac{a^2}{c}$, $x = -\frac{a^2}{c}$.

251. Ciò posto da un punto P dell'ellisse si meni PK perpendicolare ad una delle direttrici, e'l raggio vettore PF al fuoco corrispondente; dinotando al solito con x', y' le sue coordinate CS, PS, si avrà $PK = \frac{a^2}{c} - x' = \frac{a^2 - cx'}{c}$;

ma è (§.244) $PF = a - \frac{cx'}{a} = \frac{a^2 - cx'}{a}$; starà perciò PF : PK :: c : a; e similmente PF′ : PK′ :: c : a. Quindi si ha, che: *Il raggio vettore condotto da qualunque punto dell'ellisse ad uno dei fuochi sta alla perpendicolare menata dallo stesso punto alla direttrice corrispondente come sta l'eccentricità al semiasse maggiore.* Ed essendo l'eccentricità minore del semiasse così quel raggio vettore sarà sempre minore della perpendicolare.

252. Sia GF l'ordinata dell'ellisse corrispondente ad un fuoco F; si avrà

$$GF^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - c^2) = \frac{b^4}{a^2}$$

ed estraendo la radice

$$GF = \frac{b^2}{a};$$

dunque GF è eguale al semiparametro di AA′; e perciò: *La corda dell'ellisse, che passando per un fuoco è perpendicolare all'asse maggiore, è eguale al parametro di quest'asse.*

CAPITOLO VII.

DELL' IPERBOLE.

253. Sia FG [*fig.* 55.] una riga la quale con una delle estremità possa circolarmente aggirarsi in un piano intorno ad un punto fisso F′, ed un filo di essa più corto sia fissato con un estremo al suo estremo mobile G, e con l'altro in un dato punto F. Ciò posto se si dà moto alla riga mediante uno stiletto che la spinga tenendole il filo sempre teso d'accanto, la punta dello stiletto descriverà una linea curva PAQ chiamata *Iperbole*.

Dal modo onde l'iperbole è descritta ei parrebbe che questa curva fosse limitata, ma potendo prendersi una riga più lunga e quindi un filo corrispondentemente più lungo, nè essendovi limitazione di sorta intorno a questa lunghezza, si riconosce che i due rami dell'arco PAQ possono protrarsi quanto si voglia, e sono perciò infiniti.

Se il centro di rivoluzione della riga si trasporta dal punto F′ in F ov'era l'estremo immobile del filo, e questo si trasporti in quello, si potrà descrivere nella stessa guisa un altro arco curvilineo che sarà esattamente eguale ed opposto al primo; ed è perciò che dessi sogliono chiamarsi *Iperboli opposte*. Ma si vuole avvertire che le due iperboli opposte deggiono riputarsi come costituenti una sola linea, il che verrà messo tra poco in evidenza; e però sotto la denominazione di iperbole bisogna in generale intenderle comprese amendue.

254. I due centri di rivoluzione F ed F′ si chiamano *fuochi* dell'iperbole; CF, o CF′ metà di FF′ si chiama *eccentricità*; e dicesi *ramo* o *raggio vettore* ogni retta tirata da un fuoco ad un punto della curva.

255. Rappresenti F G una delle posizioni della riga, e P il

punto corrispondente dell'iperbole; la MN rappresenti inoltre la differenza tra la riga ed il filo, e si tagli F′H eguale ad MN; per tal modo esprimerà GH la lunghezza del filo; quindi sarà PH = PF, e ne risulta PF′ — PF = MN. Dunque è costante la differenza tra due raggi vettori appartenenti ad uno stesso punto della curva; e perciò: *L'iperbole è il luogo geometrico dei vertici di tutt' i triangoli che essendo descritti sopra una stessa base hanno costante la differenza degli altri due lati.*

256. Essendo dati i fuochi dell'iperbole, ed una lunghezza eguale alla differenza tra quelle della riga e del filo che dovrebbero impiegarsi volendo descriverla per movimento continuo, si potrà questa curva descrivere ancora per punti. In fatti sieno F, F′ i fuochi, ed MN la data differenza; prendendo sul prolungamento di MN un punto qualunque K, si descrivano coi raggi KM, KN due cerchi che abbiano i centri in F, F′; i loro incontri P, Q saranno due punti dell'iperbole; e così facendo variare il punto K, se ne avranno quanti altri punti se ne vogliono.

257. Si ottiene un'equazione dell'iperbole seguendo parola a parola il metodo con cui fu trovata quella dell'ellisse (§. 168). Prendendo per asse delle x la retta FF′, e per asse delle y la perpendicolare nel suo punto di mezzo C, s'indichi con c l'eccentricità CF, con z, z' i raggi vettori PF, PF′, e con $2a$ la loro differenza PF′—PF; si avrà

$$z'^2 = y^2 + (x+c)^2 \quad , \quad z^2 = y^2 + (x-c)^2 \quad , \quad z' - z = 2a\,;$$

quindi si trova

$$z' = \frac{cx}{a} + a \quad , \quad z = \frac{cx}{a} - a\,,$$

e si ha per l'iperbole l'equazione di 2° grado

$$a^2y^2 + (a^2 - c^2)\,x^2 = a^2(a^2 - c^2)\,;$$

perciò : *Una retta non può incontrare una iperbole in più di due punti. Ed un cerchio ed un' iperbole non possono incontrarsi in più di quattro punti* (§. 178).

258. Questa equazione sembra a prima giunta identica a quella dell' ellisse (§.168); ma mentre per quest' ultima curva la quantità a^2-c^2 è positiva, per l' iperbole è negativa. In fatti nel triangolo FPF' si ha $PF+FF'>PF'$; ma è per ipotesi $PF'=PF+2a$, sarà perciò $PF+FF'>PF+2a$, e quindi $FF'>2a$, vale a dire $c>a$ e $c^2>a^2$. Così essendo, se si prenda una retta b tale che sia

$$c^2-a^2=b^2,$$

l' equazione dell' iperbole diverrà

$$a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2.$$

In conseguenza, mentre nell' ellisse a^2 e b^2 hanno segni simili, per l' iperbole avranno segni contrarii.

259. Ponendo $y=o$ si ha $x=\pm a$, laonde prese le CA, CA' eguali ciascuna ad a, saranno A, A' i punti in cui la curva taglia l' asse delle x. Facendo poi $x=o$ si trovano i valori immaginarii $y=\pm b\sqrt{-1}$, e perciò l' iperbole non incontra l' asse delle y.

260. Risolvendo l' equazione rispetto ad y si ha

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

e si rileva

1°. Che ad ogni ascissa come CS positiva, o negativa, corrispondono due ordinate eguali ed opposte SP,SQ; e ne risulta che l' asse delle x biseca tutte le corde che gli sono perpendicolari.

2°. Che $+x$ e $-x$ danno uno stesso valore per y, e perciò ad ascisse eguali ed opposte CS, CS' corrispondono

eguali ordinate. Quindi anche l' asse delle y biseca le corde che gli sono perpendicolari, com' è PP'.

3°. Che i valori di y sono immaginarii per ascisse minori di a, e che le più piccole ascisse possibili sono $x=\pm a$. Quindi avviene che tra le parallele condotte pei punti A, A' all' asse delle y non esiste alcun punto di curva.

4°. Che per ogni altra ascissa maggiore di CA e di CA' si hanno due ordinate costantemente reali eguali ed opposte, le quali crescono al crescere dell' ascissa, e divengono con essa infinite, mentre tanto per $x=+\infty$, quanto per $x=-\infty$ si ha sempre $y=\pm\infty$. Da ciò si rileva che l' iperbole si compone di due archi PAQ, P'A'Q' separati e distinti i quali si estendono all' infinito coi loro rami in direzioni opposte, e prendono perciò il nome di Iperboli opposte. Dunque l' iperbole ha quattro rami infiniti, e perciò quattro punti a distanza infinita.

261. Risulta da quest' analisi che gli assi delle coordinate son diametri primarii, o assi dell' iperbole (§. 173), e sono di più tra loro conjugati; ma di essi soltanto il primo incontra la curva in due punti, ed è perciò dotato di due vertici A, A', essendone l'altro sfornito. Quindi è che mentre l' ellisse ha quattro vertici, l' iperbole ne ha due solamente, uno per ciascuna delle iperboli opposte.

262. E ne risulta ancora che il punto C è *centro* dell' iperbole (§. 174)

263. Dei due assi dell' iperbole quello che incontra la curva cioè AA', e che contiene i fuochi, suole anche chiamarsi *asse trasverso*, o *primario*, o *asse reale*; mentre quello che non la incontra dicesi *asse secondario*, o *conjugato*, o ancora *asse immaginario*.

264. Pur tuttavolta se si prendano sù quest' asse secondario le parti CB,CB' eguali ciascuna a b, ossia a $\sqrt{c^2-a^2}$,

la retta BB′ si considera come la sua lunghezza, ed allora i punti B, B′ ne sono i vertici.

265. Per tanto è manifesto che se dei tre elementi a, b, c, cioè *semiasse primario*, *semiasse secondario*, ed *eccentricità* dell' iperbole ne siano dati due qualunque, si può determinare il terzo mediante la relazione

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

e poichè a, b, c sono rispettivamente rappresentati dai lati CA, CB, AB del triangolo rettangolo ABC, è facile la determinazione di una di queste rette date che ne sieno due. In particolare se sono dati gli assi AA′, BB′ e si cerchi l'eccentricità si descriverà il cerchio concentrico al l' iperbole che abbia il raggio uguale ad AB; e supposto che AA′ sia l' asse reale, i punti F, F′ segnati su di esso dal cerchio saranno i fuochi dell' iperbole, e CF = CF′ ne sarà l' eccentricità.

266. Supponendo invece che l'asse reale sia BB′ [*fig.56*] i punti f, f' saranno i fuochi di un'altra iperbole che ha lo stesso centro, ed i medesimi assi della prima, però invertiti, val dire che il reale dell' una è immaginario per l' altra, e viceversa. La nuova iperbole suol dirsi *conjugata* della prima la quale allora prende il nome di iperbole principale ed è chiaro che la sua equazione è

$$b^2x^2 - a^2y^2 = -a^2b^2 \quad , \quad ovvero \ a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2 \ ;$$

quindi si rileva che l' equazione di un' iperbole si trasmuta in quella della conjugata cambiandovi a^2 in $-a^2$ e $b^2 - b^2$; o, ch' è lo stesso, a e b in $a\sqrt{-1}$ e $b\sqrt{-1}$,

267. Essendo $c^2 = a^2 + b^2$ sarà $c > a$, ossia CF > CA; perciò i vertici di un' iperbole sono compresi tra i fuochi. Inoltre essedo questa relazione compatibile con ciascuna delle ipotesi $a > b$, $a = b$, $a < b$ si vede che nell' i-

perbole l' asse primario può essere maggiore, eguale, o minore del secondario.

268. Quando gli assi son disuguali l' iperbole suol dirsi *scalena*; e dicesi *equilatera*, o *parilatera* se ha gli assi eguali: ipotesi per cui la sua equazione si riduce ad

$$y^2 = x^2 - a^2.$$

269. Avendosi dall' equazione di un iperbole qualunque

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) = \frac{b^2}{a^2}(x - a)(x + a)$$

si ha nella figura

$$PS^2 : SA \times SA' :: b^2 : a^2 ;$$

cioè: *Il quadrato di un' ordinata all'asse primario sta al rettangolo delle distanze dal suo piede ai vertici dell'asse come sta al quadrato di quest' asse quello del conjugato.*

Esiste nell' ellisse una proprieta uniforme (§.183); ma in questa curva il piede dell'ordinata cade tra i vertici dell' asse, mentre nella iperbole cade fuori di essi. Inoltre nell' ellisse il teorema si applica all' uno ed all'altro asse; ma nell' iperbole ha luogo soltanto per l' asse primario, dappoichè, ridotta l' equazione alla forma

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2}(y^2 + b^2)$$

non è più suscettibile della stessa decomposizione.

270. Del rimanente non deve sorprendere la rassomiglianza di proprietà tra l' ellisse e l' iperbole, mentre la rassomiglianza comincia dalle loro equazioni

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \quad , \quad a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

tra cui non evvi altro divario che nel segno di b^2; in guisa che l' una si trasmuta nell' altra cangiandovi b^2 in

$-b^2$, ovvero b in $b\sqrt{-1}$. Anzi è chiaro che siffatto cangiamento rende tutte le formole ottenute per l' ellisse applicabili all' iperbole; ma esso ne modifica talvolta siffattamente il significato geometrico da far ritrovare nella iperbole proprietà che non si rinvengono nell' ellisse.

Degli assintoti dell' iperbole.

271. Nell'ellisse ogni retta che passa pe'l centro incontra la curva in due punti reali; ma nell' iperbole accade altrimenti. Sia $y = px$ una retta tirata pe 'l centro dell' iperbole; le coordinate dei due punti comuni a queste due linee si troveranno ordinatamente espresse (§. 162) da

$$x = \pm \frac{ab}{\sqrt{-(a^2p^2-b^2)}} \quad , \quad y = \pm \frac{abp}{\sqrt{-(a^2p^2-b^2)}}$$

Or queste espressioni sono *reali* se è $a^2p^2 - b^2 < o$; *immaginarie* se è $a^2p^2-b^2>o$; ed *infinite* se si ha $a^2p^2-b^2=o$. In conseguenza se, *in valore assoluto*, è $p < \frac{b}{a}$, la retta $y=px$ incontrerà la curva in due punti reali; se è invece $p > \frac{b}{a}$ le due intersezioni saranno immaginarie; ed ove sia $p = \frac{b}{a}$ le due intersezioni cadranno entrambe a distanza infinita; il che torna a dire che la retta e la curva non s' incontrano mai come avviene con le parallele.

272. L' ultimo caso avrà dunque luogo quante volte sia $p = \pm \frac{b}{a}$; e ne risulta che l' iperbole è incontrata in due punti all' infinito solamente da ciascuna delle due rette

$$y = \frac{b}{a}x \quad , \quad y = -\frac{b}{a}x,$$

le quali esprimono le diagonali TT′, UU′ [*fig.* 56] del rettangolo *ut u′t′* formato sopra i due assi della curva.

273. Intanto è manifesto che per tutte le rette condotte dal centro nell' angolo TCU si ha $p < \frac{b}{a}$, mentre per quelle che cadono nell'angolo TCU′ si ha $p > \frac{b}{a}$. Quindi le rette che cadono nell'angolo TCU segano l' iperbole in due punti reali, ma le due intersezioni sono immaginarie per quelle che cadono nel supplemento TCU′.

274. Le rette TT′, UU′ sono egualmente inclinate a ciascuno degli assi, e perciò simmetricamente situate rispetto all' iperbole, ma importa di rimarcare che a ciascuna delle due parti indefinite in che le divide il centro C corrisponde un ramo di iperbole, con cui va ad incontrarsi all' infinito.

275. Ciò premesso sieno GS, PS le ordinate di una delle due rette e del ramo corrispondente d' iperbole appartenenti ad una medesima ascissa CS; ed essendo

$$GS = \frac{b}{a}x \quad , \quad PS = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

si avrà GS>PS e di seguito HS>QS. Da ciò risulta che l' arco iperbolico PAQ cade dentro l'angolo TCU; e quindi anche l' opposto P′A′Q′ cadrà nel verticale UCT′. Dunque negli altri due angoli TCU′, T′CU non esiste alcun punto di curva; ed in effetti, se fosse altrimenti, qualcuna delle rette condotte pe 'l centro in questi angoli avrebbe con la curva intersezioni reali, il che è impossibile (§. 273).

276. Essendo PG la differenza delle rette GS, PS, si ha

$$PG = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2-a^2}\right);$$

ma questa espressione moltiplicata e divisa ad un tempo per $x + \sqrt{x^2-a^2}$ si cangia in

$$PG = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2-a^2}}.$$

Quindi si vede che il valore di PG diviene più piccolo crescendo x, vale a dire a misura che il punto P si allontana dal vertice A ; in altri termini il ramo iperbolico AP si accosta continuamente alla retta CA , e mai la raggiunge.

277. Ma la differenza PG può ancora diventar minore di qualunque retta data ε per quanto piccola si voglia supporre ; vale a dire si può sempre determinare un valore reale di x per modo che soddisfi alla ineguaglianza

$$\frac{a}{b}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) < \varepsilon;$$

mentre risolvendola si ha l'ineguaglianza di 1.° grado

$$x > a\,\frac{b^2 + \varepsilon^2}{2b\varepsilon}\,.$$

In conseguenza supposto che CS sia un' ascissa maggiore di quella che risulta da questa espressione, la differenza PG risulterà minore di ε per quanto piccola sia questa retta.

Dunque il ramo iperbolico AP non solo si accosta continuamente alla retta CT, ma la loro distanza può diventar minore di qualunque data ; e pur tuttavolta le due linee non si raggiungon mai.

278. Ora, in generale, una retta si dice *assintoto* di un ramo infinito di curva se le due linee si avvicinano continuamente per un intervallo minore di qualunque data, senza mai incontrarsi. Perciò la retta TT' è assintoto del ramo iperbolico AP ; ma, così essendo , lo sarà ancora del ramo A'Q'; e quindi anche l'altra retta UU' sarà assintoto dei due rami AQ, A'P' . Dunque infine le due rette TT', UU' sono assintoti dell'iperbole, ciascuna di due rami situati a parti contrarie della retta.

279. È conseguenza immediata di ciò che precede che : *Qualunque parallela ad un assintoto incontra , e necessariamente, l'iperbole in un punto solo.* In fatti questa parallela dovendo attraversare l'altro assintoto , segherà pure uno dei due rami iperbolici che gli corrispondono. Nè poi può esservi un secondo incontro ; che allora vi sarebbero due punti di uno stesso ramo iperbolico ad egual distanza dall' assintoto , il che non può aver luogo (§. 276).

280. I due assintoti formano due angoli TCU, TCU' in generale disuguali , ma dicesi *angolo compreso dagli assintoti* , o *assintotico*, l'angolo TCU, o il verticale U'CT' in cui cadono le iperboli opposte. Ed essendo U'CT=U'Cx—TCx , sarà *tang* U'CT = *tang* (U'Cx — TCx) ; ma è

$$tang\, U'Cx = -\frac{b}{a} \quad , \quad tang\, TCx = \frac{b}{a}\,;$$

si avrà dunque ,

$$tang\, U'CT = \frac{-2ab}{a^2 - b^2} \text{ e però } tang\, TCU = \frac{2ab}{a^2 - b^2}\,.$$

Quindi si vede che l'angolo assintotico è *acuto* , *retto* , o *ottuso* secondoche sia $a > b$, $a = b$, $a < b$; vale a dire secondochè l'asse primario sia maggiore , eguale , o minore del secondario . Ma ciò del resto risulta ancora evidente dalla stessa costruzione degli assintoti.

281. Giova rimarcare che l'equazione dell'iperbole si può porre sotto la forma

$$(ay - bx)(ay + bx) = -a^2 b^2\,,$$

e le equazioni degli assintoti sono precisamente i due fattori del primo membro , eguagliati a zero , cioè

$$ay - bx = o \quad , \quad ay + bx = o.$$

282. Se si cercano le coordinate dei due punti comuni alla retta $y = px$ ed all'iperbole conjugata (§. 266)

$$a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2$$

si trovano per le medesime le espressioni

$$x = \pm\,\frac{ab}{\sqrt{a^2p^2 - b^2}} \quad , \quad y = \pm\,\frac{abp}{\sqrt{a^2p^2 - b^2}}$$

le quali non differiscono in altro da quelle ottenute per l'iperbole principale che nei segni delle quantità sotto i radicali; ma così in fatti esser dovea, dappoichè quelle espressioni deggiono cangiarsi in queste mutando a^2 in $-a^2$, e b^2 in $-b^2$ (§. 266). Da ciò risulta che delle rette condotte pel centro quelle che incontrano l'iperbole principale non incontrano la conjugata; e viceversa. Dunque i due archi opposti della conjugata cadono uno per ciascuno dei due angoli TCU′, UCT′; ed è poi chiaro che i loro lati TT′, UU′ mentre sono assintoti della iperbole principale, lo sono ancora della conjugata.

283. Chiamando 2A la corda intercettata dall'iperbole principale sulla retta $y = px$ si avrà

$$A = \frac{ab\sqrt{p^2+1}}{\sqrt{(-a^2p^2-b^2)}} = \frac{ab\,r}{\sqrt{-(a^2p^2-b^2)}} = \frac{abr}{\sqrt{(a^2p^2-b^2)}\sqrt{-1}}$$

espressione reale se la retta cade nell'angolo assintotico; ed immaginaria se cade nel supplemento. Supponendo che la retta si trovi in quest'ultimo caso sarà invece reale la corda che intercetta sù di essa l'iperbole conjugata; ed è chiaro che la formola per calcolarne la lunghezza è quella stessa di poc'anzi, sopprimendovi però il fattore $\sqrt{-1}$. In conseguenza di ciò se s'indichi con 2B la corda intercettata dalla iperbole conjugata sulla retta $y = px$ si avrà

$$B = \frac{abr}{\sqrt{a^2p^2-b^2}}.$$

Dei diametri dell'iperbole

284. Se si elimina y tra l'equazione dell'iperbole, e quella di una retta $y = px + q$ si ha l'equazione

$$(a^2p^2-b^2)\,x^2 + 2a^2pqx + a^2(b^2+q^2) = o, \qquad (1)$$

e le coordinate dei due punti in cui possono incontrarsi le due linee saranno ordinatamente espresse (§. 162, 184) da

$$x = \frac{-a^2pq \pm ab\sqrt{(q^2+b^2-a^2p^2)}}{a^2p^2-b^2},$$

$$y = \frac{-b^2q \pm abp\sqrt{(q^2+b^2-a^2p^2)}}{a^2p^2-b^2}.$$

Quindi le due intersezioni saranno *reali e distinte*, *reali e coincidenti*, *o immaginarie* secondochè la quantità $q^2+b^2-a^2p^2$ sia *positiva*, *nulla*, *o negativa*.

285. Dinotando con 2X la corda intercettata dalla iperbole sulla retta si avrà

$$X^2 = \frac{-a^2b^2r^2}{a^2p^2-b^2}\left(1 - \frac{q^2}{a^2p^2-b^2}\right)$$

ov'è messo come al solito, per brevità, $p^2 + 1 = r^2$.

286. Le precedenti espressioni delle coordinate sono infinite, o prendono la forma illusoria $\frac{o}{o}$ se è $a^2p^2-b^2 = o$; ma allora, supponendo q diverso da *zero*, l'equazione (1) perde il termine in x^2, e dalla teorica delle equazioni si sa che in questi casi delle due radici una è finita, e l'altra infinita. Da ciò risulta che ove sia $p = \pm\frac{b}{a}$ la retta segherà l'iperbole in un punto a distanza finita, ed in un punto all'infinito; e si ritorna così alla proprietà delle rette parallele agli assintoti (§. 279). Intanto l'ascissa del punto a distanza finita sarà data dal valore di x risultante dall'equazione di 1°. grado

$$2pqx + (b^2+q^2) = o,$$

cui si riduce la (1) perdendo il termine in x^2, e l'ordinata corrispondente si avrà sostituendo questo valore di x nell'equazione della retta; quindi le coordinate di questo punto saranno espresse da

$$x = -\frac{b^2+q^2}{2pq}, \qquad y = -\frac{b^2-q^2}{2q}:$$

287. Ma queste espressioni divengono anch'esse infinite se è

$q=o$, cioè se la retta passa pe 'l centro; in questo caso adunque anche l'altra intersezione cadrà all'infinito; e si ritorna così ai due assintoti $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$.

288. Da ciò si ritrae ancora che due solamente sono gli assintoti dell'iperbole, mentre oltre di quelli già riconosciuti, non esistono altre rette cui convengano gli stessi caratteri.

289. Siccome nell'ellisse, così pure nell'iperbole avviene (§. 186), che: *Il luogo dei punti medii di tutte le corde* * *parallele in una data direzione è una retta che passa pe'l centro*, dappoichè, supposto che p sia il determinante della direzione delle corde, si trova per questo luogo l'equazione

$$a^2py-b^2x=o \quad , \quad \text{ovvero} \quad y=\frac{b^2}{a^2p}x.$$

290. E dopo ciò è manifesto (§. 187) che: *Ogni retta condotta pe 'l centro è diametro dell'iperbole.*

291. Se le corde son parallele ad uno degli assintoti, per esempio ad $y=\frac{b}{a}x$, si ha $p=\frac{b}{a}$; e l'equazione del diametro che le biseca si riduce ad $y=\frac{b}{a}x$; vale a dire questo diametro è lo stesso assintoto; e così in fatti esser dovea, giacchè le corde di cui si tratta, segando la curva in un punto a distanza finita, ed in un altro punto a distanza infinita, sono di grandezza infinita, quindi i loro punti medii son pure all'infinito, e ne risulta che la retta che passa per essi è parallela alle rette sù cui si trovano. Da ciò segue che un assintoto è un diametro al pari di ogni

* Nell'iperbole si distinguono due specie di corde; cioè, le *interne*, e sono quelle che congiungono due punti appartenenti entrambi all'una, o all'altra delle due iperboli opposte, come sarebbe PQ, e le *esterne* che congiungono due punti esistenti uno per ciascuna delle due iperboli opposte.

altra retta che passa per lo centro; se non che le corde parallele che biseca son quelle che gli sono parallele.

292. Nell'iperbole sono da distinguersi due specie di diametri; quelli che la incontrano cadendo nell'angolo assintotico, e sogliono dirsi *diametri reali*, o *trasversi*; e quelli che non la incontrano, cadendo nel supplemento e soglion dirsi diametri *immaginarii*, o *non trasversi*. Dunque gli assintoti dell'iperbole sono i limiti di separazione tra i diametri reali e gl'immaginarii, ovvero tra i diametri trasversi, ed i non trasversi.

293. Dinotando con 2A la lunghezza di un diametro $y=px$, si ha pe 'l semidiametro l'espressione (§. 283)

$$A=\frac{abr}{\sqrt{(a^2p^2-b^2)}}\sqrt{-1},$$

la quale è reale se il diametro è trasverso, ed immaginaria se è non trasverso.

294. Or quantunque sia immaginaria la lunghezza di un diametro non trasverso $y=px$, pure si considera come tale quella che si determina sù di esso, tagliandovi dai due lati del centro due parti ciascuna eguale alla lunghezza, che si costruisce dalla formola di poc'anzi, riguardata come reale, vale a dire sopprimendo il fattore $\sqrt{-1}$; allora, le due estremità della intera retta così costruita saranno i vertici del diametro non trasverso, e dinotandone con 2B la lunghezza pe 'l semidiametro si avrà l'espressione

$$B=\frac{abr}{\sqrt{(a^2p^2-b^2)}};$$

ma questa espressione è ancora quella della distanza tra il centro e 'l punto in cui la retta $y=px$ incontra l'iperbole conjugata (§. 283); dunque: *I vertici di tutt'i diametri non trasversi dell'iperbole principale sono situati sulla iperbole conjugata.*

295. Risulta da ciò che precede che se A e B sieno due se-

midiametri uno trasverso e l'altro non trasverso rappresentati dalle equazioni $y = px$ ed $y = p'x$ si avrà

$$A^2 = \frac{-a^2b^2r^2}{a^2p^2 - b^2} \quad , \quad B^2 = \frac{a^2b^2r'^2}{a^2p'^2 - b^2} .$$

E poichè queste espressioni non cangiano se si cangia nell' una p in $-p$, e nell' altra p' in $-p'$, ne segue, che: *Due diametri dell' iperbole della stessa specie, cioè entrambi reali, o entrambi immaginarii, se sono egualmente inclinati ad un asse di figura sono eguali tra loro*; e viceversa: *Se due diametri sono eguali e della stessa specie saranno egualmente inclinati a ciascuno degli assi.*

296. Applicando all' iperbole la definizione dei diametri conjugati data per l'ellisse (§. 189) si rileva, come per questa curva, che: *Son conjugati due diametri dell' iperbole $y = px$, $y = p'x$ se sussista la relazione $a^2pp' = b^2$.* E di più che: *Ogni diametro ha un sol conjugato, e lo ha necessariamente.*

297. Nel caso particolare di $p = \frac{b}{a}$ si ha $p' = \frac{b}{a}$; quindi è che il conjugato di un assintoto si confonde con l' assintoto medesimo, come in fatti esser doveva (§. 291)

298. Dovendo per due diametri conjugati $y = px$, $y = p'x$, aversi $a^2pp' = b^2$, è manifesto che p e p' sono di segni simili. Quindi se DD', EE' [*fig. 57*] sieno questi diametri, gli angoli DCx, ECx saranno della stessa specie; essi perciò cadranno entrambi o nell' angolo degli assi BCA, o nel supplemento BCA', e sarà acuto l' angolo ECD compreso dalle loro parti procedenti nel verso delle ordinate positive.

299. Inoltre essendo $pp' = \frac{b^2}{a^2} = \frac{b}{a} \times \frac{b}{a}$ avviene che, se è $p < \frac{b}{a}$, sarà per l' opposto $p' > \frac{b}{a}$, e viceversa. Da ciò risulta (§. 271) che se il diametro $y = px$ incontra l' iperbole, l' altro $y = p'x$ non può incontrarla; e viceversa. In altri

termini: *Di due diametri conjugati DD', EE' uno è trasverso o reale; e l' altro non trasverso o immaginario.*

300. Siccome nell' ellisse, così pure nell' iperbole si dicono *supplementali* (§. 192) due corde PQ, PQ' [*fig. 58*] le quali uniscono un punto P della curva ai vertici di un diametro trasverso QQ', e sono conjugati i diametri che passano pei loro punti medii. Quì pure avviene che le rette Qq, Q'q', menate dai vertici di un diametro trasverso parallelamente a due diametri conjugati, s'incontrano sull'iperbole, sicchè ne risultano le corde supplementali QP, Q'P; e viceversà sono supplementali le corde PQ, PQ' condotte da un punto P dell' iperbole parallelamente a due diametri conjugati. E due corde aventi per equazioni $y = px + q$, $y = p'x + q'$ saranno supplementali se sussistano le due relazioni

$$a^2pp' = b^2 \quad , \quad \frac{q^2}{a^2p^2 - b^2} + \frac{q'^2}{a^2p'^2 - b^2} = 1$$

301. Se si dinotano con 2X e 2Y le lunghezze delle corde supplementali PQ' e PQ si avrà

$$X^2 = \frac{-a^2b^2r^2}{a^2p^2 - b^2}\left(1 - \frac{q^2}{a^2p^2 - b^2}\right),$$

$$Y^2 = \frac{-a^2b^2r'^2}{a^2p'^2 - b^2}\left(1 - \frac{q'^2}{a^2p'^2 - b^2}\right).$$

Ciò posto sieno CD, CE i semidiametri conjugati paralleli rispettivamente a quelle corde; e supposto che di essi sia trasverso il primo, si dinotino con A e B; sarà per tal modo

$$A^2 = \frac{-a^2b^2r^2}{a^2p^2 - b^2} \quad , \quad B^2 = \frac{a^2b^2r'^2}{a^2p'^2 - b^2} ;$$

e quindi le formole precedenti si cangeranno in

$$\frac{X^2}{A^2} = 1 - \frac{q^2}{a^2p^2 - b^2} \quad , \quad \frac{Y^2}{B^2} = -1 + \frac{q'^2}{a^2p'^2 - b^2} .$$

Sottraendo la prima eguaglianza dalla seconda, ed osservando che la somma degli ultimi due termini equivale ad 1, risulterà tra le lunghezze di due corde supplementali e quelle dei diametri che sono ad esse parallele la seguente relazione

$$\frac{Y^2}{B^2}-\frac{X^2}{A^2}=-1.$$

302. Indicando con ω l'angolo ECD[*fig. 57*] compreso da due diametri conjugati $y=px$, $y=p'x$, cioè DD',EE' che supporremo entrambi nell'angolo yCx (§. 298), sarà ECD=ECx—DCx; e quindi *tang* ECD=*tang* (ECx—DCx); ma è *tang* EC$x=p'$, *tang* DC$x=p$, si avrà perciò

$$tang\,\omega=\frac{p'-p}{1+pp'};$$

Ora per essere conjugati i due diametri si ha $a^2pp'=b^2$; in conseguenza secondo che si elimina p' o p verrà

$$tang\,\omega=-\frac{a^2p^2-b^2}{p(a^2+b^2)}\quad,\text{ ovvero }\quad tang\,\omega=\frac{a^2p'^2-b^2}{p'(a^2+b^2)}.$$

303. Solamente nei casi di $p=o$, e $p=\infty$ si ha $tang\,\omega=\infty$; perciò: *Tra gl' infiniti sistemi di diametri conjugati dell' iperbole i soli assi di figura sono tra loro perpendicolari.*

304. Anche nell'iperbole, siccome nell'ellisse, per mezzo dell' una o l' altra delle due formole poc' anzi scritte per *tang* ω si possono risolvere i due seguenti problemi * :

1°. *Data la posizione di un diametro* $y=px$ *trovare l' angolo* ω *ch' esso comprende col conjugato.*

2°. *Dato l'angolo* ω *che dev' esser compreso da due diametri conjugati trovare la loro posizione.*

Il primo, sempre possibile, ha una sola soluzione.

Rispetto al secondo facendo uso della prima formola si ha l'equazione di 2°. grado in p

$$a^2p^2+tang\,\omega(a^2+b^2)p-b^2=o,$$

le cui radici sono sempre reali; quindi il problema è sempre possibile qualunque siasi l' angolo dato ω, ed ammette due soluzioni. E, come per l'ellisse (§. 198) or può conchiudersi, che: *Nell' iperbole esistono due sistemi di diametri conjugati, che comprendono uno stesso angolo; ed i quattro diametri sono a due a due egualmente inclinati a ciascuno degli assi, e quindi eguali tra loro.*

* Questi due problemi, supponendo descritta l' iperbole, si possono risolvere mediante le stesse costruzioni date per l' ellisse (§. 200).

305. Uniformemente all' ellisse (§. 201) si può risolvere il problema di: *Determinare le lunghezze di due diametri conjugati dell' iperbole che comprendano un angolo dato* ω. Dinotando i semidiametri cercati con A e B si rileverà nello stesso modo che i loro valori quadrati sono le due radici quadratiche dell' equazione

$$A^4-(a^2-b^2)A^2-\frac{a^2b^2}{sen^2\omega}=o,$$

che sono di segni contrarii; e perciò uno dei semidiametri sarà, com' esser doveva, immaginario. Supposto che A sia il reale, le radici quadratiche saranno A², e —B², e si avranno quindi le due relazioni

1.ª $A^2-B^2=a^2-b^2$

2.ª $AB\,sen\,\omega=ab.$

Risulta dalla 1.ª, che: *Nell' iperbole è costante la differenza dei quadrati di due semidiametri conjugati.* Quindi nell' iperbole scalena non esiste alcun diametro che sia eguale al conjugato; ma, per l' opposto: *Nell' iperbole equilatera ogni diametro è eguale al suo conjugato.*

Si rileva poi dalla 2.ª relazione, che: *Il parallelogrammo che si compie da due semidiametri conjugati è di grandezza costante.*

Quindi si ha pure che: *I triangoli formati da due semidiametri conjugati son tutti eguali tra loro.*

Ed ancora: *Son tutti eguali tra loro i parallelogrammi formati da' vertici di due diametri conjugati.*

306. Se pe' vertici di ciascuno di due diametri conjugati DD', EE' [*fig. 58*] si conducono le parallele al-

l'altro, si forma un parallelogrammo quadruplo di quello che si compie dai semidiametri, e che può dirsi *circoscritto* (*V.* il §. 310) alle iperboli opposte ed alle conjugate. Quindi: *Son tutti eguali tra loro i parallelogrammi circoscritti alle iperboli opposte ed alle conjugate, aventi i lati paralleli a due diametri conjugati.*

307. Chiamando φ e φ' gli angoli DCx, ECx che formano con l'asse delle x due semidiametri conjugati A, B, ed ω l'angolo da essi compreso, tra i sette elementi

$$a,\ b,\ A,\ B,\ \omega,\ \varphi,\ \varphi'$$

si hanno (§. 204) le quattro relazioni

$$\omega = \varphi' - \varphi \quad , \quad a^2 \, tang\, \varphi \, tang\, \varphi' = b^2$$
$$a^2 - b^2 = A^2 - B^2 \quad , \quad ab = AB \, sen\, \omega$$

mediante le quali si possono risolvere le diverse quistioni intorno ai diametri conjugati dell'iperbole. Le ultime due valgono sol' esse a risolvere algebricamente il problema di: *Determinare la grandezza degli assi di un iperbole, di cui son dati due diametri conjugati di grandezza e posizione*; però la loro determinazione geometrica non potrebbe effettuirsi come nell'ellisse; ma questo problema sarà tra poco risoluto in altra guisa, e sarà pure in un modo semplicissimo determinata la posizione degli assi.

308. I teoremi relativi a due diametri ortogonali dell'ellisse (§§. 206, 207) si verificano egualmente nell'iperbole; ma per questa curva si esige che essi sieno della stessa specie; quindi si ha che: *Nell' iperbole i triangoli rettangoli formati da due semidiametri ortogonali della stessa specie hanno tutti una medesima altezza.* Ed ancora: *Le ipotenuse dei triangoli formati da due semidiametri ortogonali della stessa specie son tutte tangenti ad uno stesso cerchio concentrico all' iperbole.*

Altre equazioni dell' iperbole.

309. Se si prendono per assi coordinati due diametri conjugati CAx, CBy [*fig. 59*], e si dinotino con a', b' i semidiametri CA, CB, si trova mediante la relazione tra le corde supplementali PRP$''$, PSP$'$ parallele a CA, CB (§. 301) che *l' equazione dell' iperbole rapportata al centro e a due diametri conjugati* è

$$a'^2 y^2 - b'^2 x^2 = - a'^2 b'^2$$

equazione in tutto uniforme alla primitiva.

310. Quindi *l' equazione dell' iperbole rapportata al vertice di un diametro trasverso, ed alla parallela al conjugato* sarà (§. 212)

$$a'^2 y^2 = b'^2 (x^2 + 2a'x) \quad , \text{ ovvero } \quad a'^2 y^2 = b'^2 (x^2 - 2a'x),$$

secondochè l'origine è A, o A'; e può dedursene, che: *La parallela condotta dal vertice di un diametro trasverso al conjugato è tangente dell' iperbole* (§. 213).

311. Anche nell' iperbole si chiama *parametro* di un diametro la terza proporzionale in ordine allo stesso diametro ed al conjugato, e dicesi *principale* quello dell' asse primario. Sia $2\,m$ il parametro del diametro $2\,a'$; sarà $m = \frac{b'^2}{a'}$; e l'equazione dell' iperbole si potrà scrivere

$$y^2 = \frac{m}{a'} (x^2 - a'^2) \quad , \text{ ovvero } \quad y^2 = \frac{m}{a'} (x^2 \pm 2\,a'\,x)$$

secondochè si rapporti al centro o ad un vertice del diametro.

312. Poichè l' equazione dell' iperbole rapportata al centro ed a due diametri conjugati è uniforme a quella relativa al centro ed agli assi, avviene che ai diametri conjugati competono le proprietà che competono agli assi, ove siano indipendenti dalla inclinazione delle coordinate.

Per ciò che riguarda le diverse formole ottenute nella ipotesi delle coordinate ortogonali è chiaro ch' esse si adattano alla ipotesi attuale degli assi obbliqui mediante le stesse modifiche accennate per l' ellisse (§. 209); ma due diametri $y = px$, $y = p'x$ rapportati a questi assi saranno tuttavia conjugati se sussista la relazione $a'^2 pp' = b'^2$, cioè la stessa che ha luogo per le coordinate ortogonali.

313. È poi marchevole che ciò che si è detto intorno alle intersezioni tra un diametro e l' iperbole nella ipotesi delle coordinate ortogonali (*dal* §. 271 *a* 279) regge parola a parola anche nella ipotesi delle coordinate obblique. Quindi si riproducono le equazioni

$$y = \frac{b'}{a'}x \quad , \quad y = -\frac{b'}{a'}x ,$$

esprimenti due rette che hanno tutt' i caratteri degli assintoti; e perciò sono gli stessi assintoti dapprima riconosciuti (§. 288). Ma queste equazioni son costruite dalle diagonali del parallelogrammo circoscritto $nmn'm'$ [*fig. 60*], formato sopra i diametri conjugati AA', BB'; dunque: *Gli assintoti dell' iperbole passano pei vertici di tutt' i parallelogrammi circoscritti co' lati paralleli a due diametri conjugati.*

314. Risulta dalla costruzione del parallelogrammo circoscritto $nmn'm'$ che i punti medii dei suoi lati sono i vertici del parallelogrammo iscritto ABA'B' che ha per diagonali i diametri conjugati AA', BB'; quindi i lati dell' ultimo sono paralleli alle diagonali del primo; e ne segue; che: *I lati dei parallelogrammi iscritti che hanno per diagonali due diametri conjugati dell' iperbole son tutti paralleli tra loro ed agli assintoti.*

315. Or sieno M ed N i punti in cui gli assintoti incontrano i lati AB, AB' del parallelogrammo iscritto; la figura AMCN sarà un parallelogrammo eguale al triangolo ACB; ma questo triangolo è formato dai semidiametri conjugati CA, CB; perciò l' area di quello sarà costante al

pari dell' area di questo (§. 305.); e ne segue, che: *I parallelogrammi racchiusi dagli assintoti e dalle parallele condotte ai medesimi da' punti dell' iperbole son tutti eguali tra loro, ed alla metà del rettangolo dei semiassi.*

316. Per mezzo di questa proprietà dell' iperbole può subito aversi la sua equazione rapportata agli assintoti CUX, CTY, mentre i lati AM, AN, o CN, AN del parallelogrammo AMCN sono, rispetto a questi assi, le coordinate di un punto A della curva. Chiamando V l' angolo TCU, il parallelogrammo AMCN sarà espresso da $xy \, sen \, V$, e si avrà quindi $xy \, sen \, V = \frac{1}{2} ab$; ma essendo (§. 280) $tang \, V = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$, si trova $sen \, V = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$; perciò l' equazione dell' iperbole rapportata agli assintoti sarà

$$xy = \frac{1}{4} (a^2 + b^2).$$

La quantità che figura nel 2.° membro equivale, com' è chiaro, al quadrato della metà dell' eccentricità dell' iperbole (§.265), ossia ad ($\frac{1}{2} c$)^2, e suol chiamarsi *potenza* dell' iperbole; il lato poi di quel quadrato, cioè $\frac{1}{2} c$, dicesi ancora *lato della potenza*. Per tanto se questo lato s' indichi con k l' equazione precedente diviene

$$xy = k^2 ,$$

e può tradursi nel seguente enunciato: *Nell' iperbole rapportata agli assintoti il rettangolo delle coordinate è di costante grandezza ed eguale alla potenza dell' iperbole.*

317. Rapportando l' iperbole *a due rette qualunque* VX, VY [*fig. 61*] si ha (§. 214) l' equazione

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = o$$

nella quale è messo per compendio

$$A = \frac{1}{r'^2}(a^2 p'^2 - b^2) \quad , \quad D = \frac{2}{r}(a^2 \beta p - b^2 \alpha)$$

$$B = \frac{2}{rr'}(a^2 pp' - b^2) \quad , \quad E = \frac{2}{r'}(a^2 \beta p' - b^2 \alpha)$$

$$C = \frac{1}{r^2}(a^2 p^2 - b^2) \quad , \quad F = a^2 \beta^2 - b^2 \alpha^2 + a^2 b^2 ,$$

essendosi operata la trasformazione nella ipotesi che gli assi primitivi siano quelli della curva.

318. Se la nuova origine coincida con l' antica, ossia col centro, gli assi coordinati saranno due diametri qualunque CDX, CEY [*fig. 58*], e si avrà $\alpha = o$, $\beta = o$. In questa ipotesi i valori di A, B, C rimangono come sopra; ma quelli di D, E, F si riducono a $D = o$, $E = o$, $F = a^2 b^2$; e però *l' equazione dell' iperbole rapportata a due diametri qualunque* sarà

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + F = o$$

319. Che se i diametri CDX, CEY siano conjugati, si avrà $a^2pp' - b^2 = o$ (§. 296); in tal caso sarà $B = o$, e l' equazione della curva si riduce ad

$$Ay^2 + Cx^2 + F = o ;$$

ma la medesima non è che quella del §. 309; dapoichè chiamando a', b' i semidiametri CD, CE si ha

$$\frac{a^2 b^2 r'^2}{a^2 p'^2 - b^2} = b'^2 \quad , \quad \frac{-a^2 b^2 r^2}{a^2 p^2 - b^2} = a'^2 ;$$

quindi risulta

$$A = \frac{F}{b'^2} \quad , \quad C = -\frac{F}{a'^2} ,$$

ed in virtù di questi valori l'ultima equazione si trasmuta in quella del §. 309.

320. Se i diametri CX, CY invece di essere conjugati si

confondono con gli assintoti [*fig. 60*], si ha (§. 272) $p = \frac{b}{a}$, $p' = -\frac{b}{a}$; quindi $a^2p^2 - b^2 = o$ ed $a^2 p'^2 - b^2 = o$, e ne deriva $C = o$, $A = o$. In conseguenza l' equazione del §. 318 si riduce a

$$Bxy + F = o ;$$

ma poichè si ha

$$B = \frac{2}{rr'}(a^2 pp' - b^2) = -\frac{4a^2 b^2}{a^2 + b^2} \quad , \quad F = a^2 b^2 ,$$

si vede che l' ultima è identica a quella del §. 316.

321. L'equazione generale del §. 317 ch'è quella della iperbole rapportata a due rette qualunque VX, VY [*fig. 61*] da luogo a teoremi analoghi a quelli ottenuti per l' ellisse (§. 215). Supposto che queste due rette seghino ciascuna la curva in due punti, e che CD, CE sieno i semidiametri paralleli alle medesime, si ha parimenti

$$VP \times VQ : VR \times VS :: CD^2 : CE^2 ;$$

e perciò: *Se da un punto si tirano due seganti all' iperbole i rettangoli dei rispettivi segmenti tra il punto e la curva staranno tra loro come i quadrati dei semidiametri rispettivamente paralleli.*

322. I due rettangoli VP × VQ, VR × VS saranno eguali se sono eguali i semidiametri CD, CE paralleli alle seganti; laonde: *Se un cerchio sega un' iperbole in quattro punti, due lati opposti qualunque del quadrilatero che si forma con essi saranno egualmente inclinati a ciascuno degli assi al pari delle sue diagonali.* Ed ancora: *Se un cerchio sega un' iperbole in quattro punti gli assi di questa curva saranno paralleli alle bisecanti dei due angoli supplementi l' un dell' altro compresi o da due dei lati opposti del quadrilatero che si forma con essi, o dalle due diagonali.*

Delle tangenti dell' iperbole.

323. Rapportando l'iperbole a due diametri conjugati CAx, CBy [*fig. 59*] la sua equazione sarà

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = - a^2 b^2.$$

Or sia (x',y') un punto P della curva; mediante le teoriche già conosciute (§. 220 e *nota*) si trova per la tangente in questo punto l'equazione

$$y = \frac{b^2 x'}{a^2 y'} x - \frac{b^2}{y'} \quad , \text{ ovvero } \quad a^2 yy' - b^2 xx' = - a^2 b^2.$$

Quindi si rileva (§.221), che: *La tangente in un punto dell' iperbole è parallela al diametro conjugato a quello che passa pe'l contatto.*

324. Segue da ciò che la direzione di una tangente dell' iperbole è necessariamente quella di un diametro non trasverso; e ne avviene che non può tirarsi a questa curva una tangente parallela ad un diametro trasverso.

325. La tangente in un punto P dell' iperbole può ancora costruirsi determinando una delle parti CQ, CQ' che essa taglia dagli assi coordinati. Ponendo nell' equazione della tangente ora $y = o$ ed ora $x = o$ si ha

$$CQ = \frac{a^2}{x'} = \frac{CA^2}{CS} \quad , \quad CQ' = - \frac{b^2}{y'} = - \frac{CB^2}{PS} ;$$

laonde tagliate le CQ, CQ' terze proporzionali l'una dopo CS, CA, e l'altra dopo PS, CB, la congiungente del punto P con l'uno o l'altro dei punti Q, Q' sarà la tangente in P. Ma conviene avvertire che la parte CQ sull' asse delle x siegue sempre il segno di x', cioè di CS ascissa del punto dato P, mentre all' opposto la parte CQ' sull' asse delle y è di segno contrario a quello dell' ordinata PS, ovvero di CR, supponendo condotta PR parallela a Cx.

326. Dunque l'incontro della tangente con un diametro

trasverso avviene tra il centro e l'arco iperbolico cui la tangente appartiene; e perciò questo punto cade dentro l'angolo assintotico in cui si trova l'arco medesimo. Ma il punto del contatto e l'incontro della tangente con un diametro non trasverso si trovano necessariamente a parti opposte del suo conjugato.

327. Si prolunghi PS in P', sarà QP' tangente in P'; e se si prolunghi PR in P'' risulterà parimenti Q'P'' tangente in P''; ma è PP' bisecata in S dal diametro CQ, e PP'' bisecata in R dal diametro CQ'; dunque: *Il diametro che passa pe'l punto di concorso di due tangenti qualunque dell' iperbole divide in due parti eguali la corrispondente corda tra i contatti.*

328. Risulta dalla espressione di CQ che il suo valore diminuisce a misura che cresce quello di CS, e può diventar minore di qualunque retta data; ma non sarà mai nullo fino a che CS sia di grandezza finita. Segue da ciò che la tangente PQ tende continuamente ed indefinitamente ad accostarsi al centro, senza però che possa raggiungerlo fino a che il punto di contatto si trovi a distanza finita. Ponendo CS $= \infty$, cioè considerando il punto P all' infinito, si ha CQ $= o$; ma la retta che unisce il centro dell' iperbole con un suo punto all' infinito è un' assintoto; dunque gli assintoti dell' iperbole possono riguardarsi come le sue tangenti nei punti all' infinito. Ed in effetti si è veduto (§. 284) che una retta qualunque $y = px + q$ è tangente dell' iperbole se sussista la relazione $a^2 p^2 - b^2 - q^2 = o$; la quale, se la retta passa pe'l centro, si riduce ad $a^2p^2 - b^2 = o$, ed è necessariamente verificata nel caso degli assintoti.

329. Conoscendosi la grandezza e posizione di un diametro AA' [*fig. 62.*] dell' iperbole e la sola direzione del conjugato Cy può applicarsele la tangente in un punto P mediante la stessa costruzione indicata per l'ellisse (§. 224); vale a

dire: ***Da P si condurrà la retta PA' ad uno dei vertici del diametro, e posto che sia K il punto ov' essa incontra la parallela menata al conjugato per l' altro vertice A, si bisechi AK in E; sarà PE la tangente richiesta.***

330. Sieno E, E' i punti in cui la tangente in P incontra le tangenti ne' vertici A, A' di un diametro trasverso AA', e CB il semidiametro conjugato, si avrà (§. 225)

$$AE \times A'E' = CB^2;$$

e quindi: *Se una tangente dell' iperbole incontra due tangenti parallele il rettangolo delle parti che taglia su di esse a contar dai contatti è eguale al quadrato del semidiametro parallelo alle tangenti.*

331. Per condurre la tangente all' iperbole da un punto Q (α,β) [*fig. 63.*] non esistente sulla curva può seguirsi lo stesso metodo tenuto per l' ellisse (§.226); e però le coordinate incognite del punto del contatto P si avranno nei valori di x ed y comuni alle due equazioni

$$a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2 \quad , \quad a^2\beta y-b^2\alpha x=-a^2b^2.$$

Quindi si conchiuderà che da un dato punto si possono condurre due tangenti alla iperbole, le quali saranno possibili se il punto è fuori della curva; impossibili se è dentro di essa; e si riducono ad una se il punto si trova sulla curva.

332. Segue per tanto dal §. 326 che se il punto dato Q [*fig. 59*] cade dentro l' angolo assintotico le due tangenti QP, QP' cadranno sullo stesso arco iperbolico che si trova in quest' angolo. Se poi il punto dato cade in uno degli angoli supplementi degli assintotici, come in Q', le due tangenti Q'P, Q'P'' cadranno una sopra ciascuna delle due iperboli opposte. Inoltre è chiaro che da un punto dato sopra un assintoto non può condursi che una sola tangente, dappoichè l' altra non è che l' assintoto istesso. E finalmente se il punto coincide col centro le due tangenti si riducono agli assintoti medesimi.

333. I due punti di contatto delle tangenti menate all' iperbole da un punto (α,β) possono, come nel caso dell' ellisse costruirsi mediante l' intersezione dei due luoghi geometrici che risultano dalle due equazioni poc' anzi scritte, la prima delle quali null' altro esprime che la stessa iperbole. La seconda poi

$$a^2\beta y-b^2\alpha x=-a^2b^2$$

rappresenta (§. 227) la corda dei contatti PP' [*fig. 63*] e può costruirsi determinando le parti, ch'essa taglia dagli assi coordinati. Ponendovi $y=o$ si ha $x=CG=\frac{a^2}{\alpha}$, e si rileva che il punto G non cambia se il punto Q cambia di sito rimanendo sulla retta MDN parallela all' asse delle y. Quindi si ha come per l' ellisse, che: *Le corde tra i contatti di tutte le coppie di tangenti menate all' iperbole dai diversi punti di una stessa retta s' intersegano in un medesimo punto.*

E reciprocamente: *Le due tangenti menate all' iperbole nelle estremità di ciascuna delle corde che passano per uno stesso punto, concorrono sopra una medesima retta.*

334. Anche nell' iperbole il punto G intorno a cui circolano le corde trai contatti delle coppie di tangenti condotte dai diversi punti di una retta MN dicesi *polo* di questa retta la quale prende il nome di *polare* di quel punto. E la costruzione del polo, data la polare, e viceversa si può effettuare esattamente nello stesso modo indicato per l' ellisse.

Alcune proprietà dell' iperbole in rapporto agli assintoti.

335. Rapportando l' iperbole a due diametri conjugati CAx, CBy [*fig.60*], e dinotando con a, b i semidiametri CA, CB, le equazioni degli assintoti CT, CU sono, come si è veduto (§. 313)

$$y = \frac{b}{a} x \quad , \quad y = -\frac{b}{a} x$$

e dalla loro costruzione risulta che se si formano i due parallelogrammi ABA′B′, $mn'm'n$, il primo dai vertici dei due diametri, ed il secondo dalle parallele condotte a ciascuno di essi dai vertici dell' altro, gli assintoti saranno paralleli ai lati del primo, e passeranno pe' vertici del secondo (§§. 313, 314); ma queste proposizioni si scindono in altre che meritano di essere distintamente enunciate.

336. Si osservi dapprima che la retta mn è eguale e parallela a BB′, e tocca la curva in A ov' è bisecata; ma il punto A è arbitrario; dunque: *La parte di una tangente intercettata tra gli assintoti è eguale al diametro conjugato a quello che passa pe 'l contatto ov' è divisa in parti eguali.*

337. Essendo le rette AB, AB′ bisecate da CT e CU in M ed N, ed essendo di più AB parallela a CU ed AB′ a CT; ne segue, che: *La congiungente i vertici di due diametri conjugati è biseccata da un assintoto, ed è parallela all' altro.*

338. Se sono dati gli assintoti di un' iperbole ed un suo diametro, per mezzo delle proprietà enunciate si determina immediatamente la grandezza e posizione del conjugato. In fatti supposto che CU, CT sieno i dati assintoti, e CA il dato semidiametro, basterà condurre sopra uno degli assintoti la AM parallela all' altro e prolungarla in B sicchè sia MB = AM; per tal modo sarà CB il semidiametro conjugato a CA.

339. Egli è chiaro che con la risoluzione di questo problema si ha una costruzione molto semplice della tangente in un punto dato di un' iperbole di cui si conoscano gli assintoti; dapoichè, supposto che A sia il dato punto, la mn condotta per esso parallelamente a CB sarà la tangente richiesta. Intanto, essendo $Am = An$, è pure $Mm = CM$, ed $Nn = CN$, di tal che la tangente in A si può ancora

costruire menando da A sopra uno degli assintoti la AM parallela all' altro, e poscia prendendo sul primo la Mm eguale ed opposta a CM; così la congiungente dei punti A, m sarà la tangente in A.

340. Se si riguardano gli assintoti come assi coordinati, allora AM, AN sono le coordinate del punto A; ed in tal caso la retta Mm, o l' altra Nn è sottangente del punto A (§. 235), secondochè si prenda come asse delle x o l' assintoto CT, o l' altro CU. Si ha in conseguenza, che: *Nell' iperbole rapportata agli assintoti la sottangente è eguale ed opposta all' ascissa corrispondente.*

341. Poichè la retta mn è bisecata in A, il triangolo mCn sarà doppio di ACm, e perciò eguale al parallelogrammo $ACBm$, il quale, essendo formato dai semidiametri conjugati CA, CB, è di grandezza costante (§. 305): dunque: *Il triangolo che risulta dagli assintoti e da una tangente è di grandezza costante ed eguale al rettangolo dei semiassi.*

342. Si tiri ad mn una parallela qualunque GH, la quale seghi gli assintoti in G, H, l' iperbole in P, Q, e 'l diametro CAx in S; ed essendo mn bisecata in A, lo sarà anche GH in S; ma S è pure il punto medio di PQ; perciò sarà PG = QH. Parimenti tirando ad mn' una parallela qualunque gh, segante gli assintoti in g, h, e l' iperbole in p, q, si conchiuderebbe $pg = qh$; e si ha in conseguenza, che: *Se una retta sega gli assintoti e l' iperbole, i due segmenti intercettati tra ciascuno assintoto, e 'l ramo corrispondente d' iperbole sono eguali tra loro.*

343. Se si dinotano con y', y'' le GS, PS ordinate di un assintoto e dell' iperbole corrispondenti ad un' ascissa comune CS, che indicheremo con x, si avrà $y'^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2$, $y''^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 - b^2$, e ne risulta $y'^2 - y''^2 = b^2$; cioè PG × PH = CB². In un modo consimile si trova $pg \times ph = CA^2$; e si ha per-

ciò il seguente teorema: *Se una retta sega gli assintoti e l'iperbole il rettangolo dei due segmenti compresi tra una delle due intersezioni con la curva e gli assintoti pareggia il quadrato del semidiametro parallelo alla retta.*

344. Quando son dati gli assintoti ed un punto di un'iperbole, si può questa curva descrivere in un modo semplicissimo per assegnazione di punti. Ed in fatti supposto che CT, CU [*fig. 64*] sieno i dati assintoti, e P il punto dato, si condurranno per esso tra gli assintoti delle rette arbitrarie, come GH, gh, *ec.* e vi si taglieranno le parti QH, qh, *ec.* eguali rispettivamente alle PG, Pg, *ec.*; per tal modo i punti Q, q, *ec.* apparterranno alla iperbole che ha per assintoti le rette CT, CU, e passa per P.

345. Ma del rimanente la descrizione della curva in questa ipotesi si può subito ricondurre ad uno dei metodi da principio indicati determinandone i fuochi ed i vertici, vale a dire la posizione e grandezza dell'asse reale. Per ciò si osservi in primo luogo che dei due angoli TCU, TCU′ l'assintotico è quello in cui trovasi il punto P; laonde nella Cx bisecante dell'angolo TCU si avrà la posizione dell'asse reale della curva. Ciò posto si tiri da P tra gli assintoti la Pgh parallela a Cx, e si prenda CA media proporzionale tra Pg, Ph; sarà CA il semiasse reale; At perpendicolare a Cx, esprimerà la lunghezza del semiasse immaginario, e Ct sarà quella dell'eccentricità; in conseguenza prese sull'asse reale le CF, CF′ eguali tra loro ed a Ct, saranno F, F′ i fuochi dell'iperbole.

346. Le proprietà dell'iperbole potrebbero facilmente derivarsi dall'equazione rapportata agli assintoti

$$xy = k^2,$$

ma lasciamo quest'assunto ad esercizio dei giovani. Solo faremo osservare che in questa ipotesi due diametri $y = px$, $y = p'x$ saranno conjugati ove sussista la relazione $p + p' = o$;

vale a dire che un diametro qualunque $y = px$ ha per suo conjugato il diametro $y = -px$. E di più che l'equazione della tangente in un punto (x', y') della curva è

$$yx' + xy' = 2x'y' \quad , \text{ ovvero } \quad yx' + xy' = 2k^2.$$

Alcune proprietà particolari all'iperbole equilatera.

347. L'iperbole equilatera, oltre delle proprietà che ha comuni con ogni altra iperbole, ne ha delle altre a se particolari, e gioverà porne alcune in veduta.

Si è già detto che nell'iperbole equilatera ogni diametro è eguale al suo conjugato (§. 305); ma due diametri eguali e di specie diversa, non sono necessariamente tra loro conjugati. In fatti sieno CD, CE [*fig. 65*] due semidiametri conjugati; ciascuno ne avrà un altro eguale della stessa specie (§. 295); laonde, se CL sia quello ch'è uguale a CD e della medesima specie, i due semidiametri CE, CL saranno eguali e di specie diversa, ma non saranno già tra loro conjugati.

Intanto, supponendo rapportata l'iperbole agli assi principali CAx, CBy, sia $y = px$ l'equazione di CD; quelle di CE, CL saranno (§§. 295, 296) rispettivamente $y = \frac{1}{p}x$, ed $y = -px$, e ne risulta che i semidiametri CE, CL sono tra loro perpendicolari: Dunque: *Due diametri dell'iperbole equilatera eguali e di specie diversa saranno conjugati se formano un angolo obbliquo; e se sono l'uno all'altro perpendicolari saranno conjugati nel solo caso che sieno gli assi stessi della curva.*

Reciprocamente: *Due diametri dell'iperbole equilatera sono eguali tra loro o se sono conjugati, o se comprendono angolo retto.*

348. Tra le molte conseguenze che possono trarsi da questo teorema accenneremo la seguente, la quale costituisce una

delle più belle e rilevanti proprietà dell' iperbole equilatera. Sia QRS [*fig. 66*] un triangolo qualunque iscritto in una curva di tal natura, e da un vertice Q si meni al lato opposto la perpendicolare QV, la quale segherà di nuovo la curva in un certo punto P; pel teorema precedente i diametri paralleli alle rette QV, RS saranno eguali, e quindi anche eguali saranno i rettangoli $VQ \times VP$, $VR \times VS$ (§.321). Risulta da ciò che se il punto P si congiunga agli altri due vertici S, R, le congiungenti PS, PR riusciranno anch' esse perpendicolari ai rispettivi lati opposti QR, QS; e si ha in conseguenza che: *Le tre altezze di qualunque triangolo iscritto nell' iperbole equilatera s' intersegano in un punto situato sulla stessa curva.*

349. Un' altra proprietà dell' iperbole equilatera, da non doversi ignorare, si legge per così dire immediatamente nella sua equazione

$$y^2 = x^2 - a^2,$$

che supporremo rapportata a due diametri conjugati CAx, CBy [*fig. 67*]. Quest' equazione fa vedere che un' ordinata qualunque PS è media proporzionale tra SA, SA', e perciò simili i triangoli PAS, PA'S. Quindi gli angoli APS, PA'A saranno eguali, e ne segue che la differenza de' due angoli PAA', PA'A è eguale a PSA; ma questo angolo non varia comunque varii il punto P sulla curva; adunque: *In tutt' i triangoli che hanno per base un diametro trasverso dell' iperbole equilatera ed i vertici sulla curva, la differenza degli angoli alla base è costante.*

350. Se il diametro AA' sia l'asse reale si avrà $PAA' - PA'A = 90°$; ma è $PAA' = 180° - PAS$, sarà perciò $180° - PAS - PA'A = 90°$, e quindi $90° = PAS + PA'A$; in conseguenza: *Se da un punto qualunque dell' iperbole equilatera si conducano le corde ai due vertici dell' asse trasverso, la somma degli angoli acuti, ch' esse formano con quest' asse è costante ed eguale ad un retto.*

Del resto quest' ultimo teorema si rende quasi evidente ricordando che le corde PA, PA' sono supplementali (§.300), di tal che se si dinotano con p e p' i determinanti degli angoli PAx, $PA'x$ si avrà $pp' = 1$, donde risulta che i detti angoli sono complementi l' un dell' altro.

Delle normali dell' iperbole, ed espressioni delle quattro rette tangente, sottangente, normale, sunnormale.

351. In ciò che segue supporremo rapportata l' iperbole agli assi di figura ed al centro; di tal che le coordinate saranno ortogonali, a e b saranno i semiassi, e l' equazione della curva sarà

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2.$$

Or l'equazione della tangente in un punto della curva (x', y') essendo

$$y = \frac{b^2 x'}{a^2 y'} x - \frac{b^2}{y'},$$

quella della normale nello stesso punto sarà

$$y - y' = -\frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x - x').$$

Ciò posto sia GH [*fig. 68*] tangente in un punto P, e CS, PS le sue coordinate x', y'; sia inoltre PL normale in P, e K il punto ov' essa incontra l' asse delle x. Ponendo nell' equazione della normale $y = o$, si ha

$$x = CK = \frac{a^2 + b^2}{a^2} x'$$

quindi è che il segno di CK sarà sempre quello di x', ossia di CS e ne avviene che i punti K ed S cadranno da una stessa parte del centro C.

352. Il più piccolo valore di x ossia di CK si ha quando l' ascissa x' ovvero CS è la più piccola possibile, e perciò

quando è $x'=CA=a$, vale a dire quando il punto P cui corrisponde la normale coincide col vertice A. In questa ipotesi il valore di x si riduce ad $\frac{a^2+b^2}{a}$; e supposto che sia costruito da CT, sarà T il punto in cui la normale in A incontra l'asse reale, vale a dire il punto T sarà il limite (§. 234) cui le normali si accostano indefinitamente a misura che il punto P si accosta al punto A; e poichè si ha

$$AT = CT - CA = \frac{a^2+b^2}{a} - a = \frac{b^2}{a},$$

ne segue che AT è quanto il semiparametro principale (§. 237 in fine).

353. Sia Q il punto in cui la tangente GH incontra l'asse reale; sarà (§. 235) PQ la *tangente* del punto P; e QS la *sottangente*; sarà di più PK la sua *normale*, e KS la *sunnormale*. Per tanto le espressioni di queste quattro rette si troveranno come fu praticato per l'ellisse (§. 237 a 240), e si avrà

$$\textit{Sunnormale}\ KS = \frac{b^2}{a^2}x'$$

$$\textit{Normale}\ PK = \frac{b}{a}\sqrt{\left(\frac{c^2}{a^2}x'^2 - a^2\right)}$$

$$\textit{Sottangente}\ QS = x' - \frac{a^2}{x'}$$

$$\textit{Tangente}\ PQ = \sqrt{(x'^2 - a^2)\left(\frac{c^2}{a^2} - \frac{a^2}{x'^2}\right)}$$

354. La sunnormale appartenente al vertice A si avrà ponendo nella sua espressione $x' = a$; ipotesi che la riduce a $\frac{b^2}{a}$; e perciò: *La sunnormale appartenente ad un*

vertice dell' iperbole è eguale alla metà del parametro principale.

Essendo $x' = a$ l'ascissa più piccola di cui l'iperbole sia suscettibile, ne segue che la sunnormale di un vertice è la più piccola di tutte; dessa va poi crescendo a misura che cresce l'ascissa, e diviene con questa infinita.

355. L'espressione della normale ha anch'essa il minimo valore quando è $x'=a$, e va poi crescendo fino all'infinito, crescendo l'ascissa; ma la ipotesi di $x' = a$ la riduce a $\frac{b^2}{a}$; in conseguenza: *Le normali più piccole dell'iperbole corrispondono ai due vertici della curva, e sono ciascuna eguale al semiparametro principale, e quindi alle rispettive sunnormali con le quali si confondono.*

Dei fuochi dell' iperbole.

356. Applicando all'iperbole la definizione del fuoco data per l'ellisse (§. 242) si trova in un modo affatto consimile che esistono sull'asse reale due fuochi ad egual distanza dal centro determinati dalle ascisse $\pm\sqrt{a^2+b^2}$, in ciascuna delle quali si ravvisa l'eccentricità già designata con c; e perciò i punti F, F' [*fig. 69*] che ne risultano sono quelli stessi, cui venne da principio imposto il nome di fuochi.

357. Se si dinotano con z, z' i raggi vettori PF, PF' appartenenti ad uno stesso punto P dell'iperbole si ha (§.244)

$$z = \frac{cx}{a} - a \quad , \quad z' = \frac{cx}{a} + a;$$

prendendo la differenza di queste espressioni verrà

$$z' - z = 2a;$$

e si riproduce così la proprietà già nota dell'iperbole, che : *La differenza dei due raggi vettori appartenenti ad uno stesso punto della curva è costante ed eguale all' asse trasverso.*

358. Sia PQ la tangente in P si avrà

$$ang.\ QPF = PFx - PQx \quad , \quad ang.\ PQF' = PQx - PF'x.$$

Intanto chiamando x', y' le coordinate del punto P, si trova, mediante le equazioni delle rette PF, PF', PQ,

$$tang\ QPF = \frac{b^2}{cy'} \quad , \quad tang\ QPF' = \frac{b^2}{cy'}$$

dunque gli angoli QPF, QPF' sono eguali; e perciò : *La tangente in un punto dell' iperbole divide in due parti eguali l' angolo compreso dai due raggi vettori appartenenti allo stesso punto.*

359. Essendo LPL' la normale in P è chiaro che sono anche eguali gli angoli FPL, F'PL'; laonde : *I due raggi vettori appartenenti ad uno stesso punto dell' iperbole sono egualmente inclinati alla normale nel punto medesimo.*

360. Conducendo dai fuochi alla tangente PQ le perpendicolari FH, F'H', si rileverà come al §. 249 che ciascuna delle rette CH, CH' sia eguale al semiasse CA; e perciò : *Nell' iperbole i piedi delle perpendicolari menate dai fuochi alle sue tangenti si trovano nella circonferenza del cerchio concentrico avente per raggio il semiasse trasverso.*

361. Le due polari dei fuochi MN ed M'N' [*fig.70*], le quali hanno per equazioni $x = \frac{a^2}{c}$, $x = -\frac{a^2}{c}$ (§.333), son pure chiamate *direttrici* dell' iperbole, e sono costruite dalle perpendicolari all' asse reale nei punti D, D' determinati dalle ascisse eguali ed opposte CD, CD', ciascuna terza proporzionale in ordine a c ed a, ossia in ordine a CF e CA.

Ciò posto da un punto P dell' iperbole si meni il raggio vettore PF, e la perpendicolare PK alla direttrice

corrispondente, e si dinoti con x' la sua ascissa CS; si avrà

$$PF = \frac{cx'}{a} - a = \frac{cx' - a^2}{a} \quad , \quad PK = x' - \frac{a^2}{c} = \frac{cx' - a^2}{c},$$

quindi PF : PK :: c : a; e si troverebbe egualmente PF' : PK' :: c : a : Dunque : *Il raggio vettore condotto da qualunque punto dell' iperbole ad un fuoco sta alla perpendicolare menata dallo stesso punto alla direttrice corrispondente come sta l' eccentricità al semiasse trasverso.*

Ed essendo l' eccentricità maggiore del semiasse, ne segue che nell' iperbole il raggio vettore è sempre maggiore della perpendicolare, al contrario di ciò che avviene nell' ellisse (§. 251).

362. Sia FG l' ordinata dell' iperbole corrispondente ad un fuoco F, si avrà

$$GF^2 = \frac{b^2}{a^2}(c^2 - a^2) = \frac{b^4}{a^2}, \text{ e quindi } GF = \frac{b^2}{a};$$

perciò, come nell' ellisse, così pure : *Nell' iperbole il parametro principale è eguale alla corda che, passando per un fuoco, è perpendicolare all' asse trasverso.*

CAPITOLO VIII.

DELLA PARABOLA.

363. Un filo FPG [*fig.* 71] lungo quantò il lato KG di una squadra LKG sia fissato con un estremo in G, e con l' altro in un dato punto F; se si fa scorrere la squadra col lato KL lungo una riga fissa MM' mediante uno stiletto che la spinga tenendo il filo sempre teso d' accanto a KG, la punta dello stiletto descriverà una linea curva PAQ chiamata *Parabola*.

Questa curva è dunque situata tutta da quella parte della riga MM' in cui trovasi il punto F; e potendo la squadra farsi scorrere dall' una e dall'altra parte di questo punto, si vede che la parabola ha la forma di un arco continuo PAQ, i di cui rami AP, AQ procedono nella direzione di K verso G; e poichè KG, e quindi il filo, si può prendere di qualsivoglia lunghezza, è manifesto che i due rami della parabola sono infiniti.

Inoltre è chiaro che due punti di curva P, Q messi ad egual distanza, ed a parti opposte del punto F, sono ancora equidistanti dalla retta DFB perpendicolare ad MM'; in conseguenza ogni sua corda PQ perpendicolare a DB è bisecata da questa retta, la quale perciò è un asse della parabola (§. 173).

364. Or sia A il vertice di quest' asse, vale a dire quel punto di curva che si ottiene quando il lato KG della squadra passa per F, e pongasi DB = KG; per questa posizione della squadra rappresenterà AF una parte del filo, ed AB la rimanente porzione, laonde sarà AF + AB=DB, e quindi AF=AD. Da ciò si vede che il vertice della parabola cade nel mezzo della distanza dal punto fisso F alla riga MM'.

365. Del rimanente essendo per qualunque posizione del-

la squadra PF + PG = PK + PG, sarà sempre PF=PK; e perciò: *La parabola è il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto fisso, e da una data retta.*

366. Il punto fisso F chiamasi *fuoco* della parabola; si dice *ramo*, o *raggio vettore* ogni retta FP tirata dal fuoco alla curva; e chiamasi *direttrice* la retta MM'.

367. Egli è chiaro che la direttrice ed il fuoco sono gli elementi bastevoli a determinare compiutamente una parabola, ed è cosa molto agevole di descriverla per assegnazione di punti. In fatti supposto che sia F il fuoco, ed MM' la data direttrice, si segnerà l' asse DB e si bisecherà FD in A; sarà A il vertice della parabola. Dopo ciò prendendo sull' asse qualunque parte DS>DA, si eleverà da S la perpendicolare HH', e fatto centro in F si descriverà il cerchio con un raggio FP eguale a DS; i punti P, Q segnati da questo cerchio sulla HH' apparterranno entrambi alla parabola; e così, facendo variare il punto S, se ne avranno quanti altri punti se ne vogliano.

368. Prendendo per asse delle x l' asse istesso DB della parabola, e per asse delle y la direttrice MM' si ha un'equazione molto semplice di questa curva. In fatti dette al solito x, y le coordinate di un suo punto P, e messa FD $= a$ si ha

FP $=\sqrt{y^2+(x-a)^2}$; ma è FP=PK=DS$=x$; perciò l' equazione della parabola sarà $\sqrt{y^2+(x-x)^2}=x$, ovvero elevandone a quadrato i due membri e riducendo,

$$y^2=2ax-a^2\,;$$

ed essendo di 2° grado ne risulta che: *La parabola non può essere incontrata da una retta in più di due punti.*

369. Dando a quest' equazione la forma

$$y^2=2a\left(x-\frac{1}{2}a\right)$$

si vede ch'essa diverrà più semplice cangiandovi $x - \frac{1}{2} a$ in x; il che equivale (§. 149) a trasportare l'asse delle ordinate parallelamente a se stesso, ed a prendere per origine il punto A. In conseguenza l'equazione della parabola rapportata all'asse di figura Ax ed alla perpendicolare Ay nel vertice A sarà

$$y^2 = 2a\,x.$$

370. Ei sarebbe cosa facilissima di desumere da questa equazione la figura, e 'l corso della linea, che rappresenta, quando nulla di ciò si conoscesse. Supposto che Ax, Ay sieno gli assi coordinati, poichè per $y = o$ si ha $2ax = o$, cioè $x = o$, si vede che la curva incontra in un punto solo l'asse delle ascisse, cioè nell'origine A. Facendo poi $x = o$ si ha $y^2 = o$, e ne segue che l'asse delle y è tangente della curva nello stesso punto A (§. 213).

Ciò posto risolvendo l'equazione rispetto ad y si ha

$$y = \pm \sqrt{2ax}$$

e si sorge che ad ogni ascissa positiva AS corrispondono due ordinate eguali ed opposte SP, SP'; quindi l'asse attuale delle x biseca tutte le corde che gli sono perpendicolari, ed è perciò un diametro principale, vale a dire un asse della parabola. Inoltre essendo immaginari i valori di y per valori negativi di x ne risulta che alla sinistra dell'asse Ay non esiste alcun punto di curva, la quale in conseguensa è tutta situata alla dritta di questa retta. In fine è a marcarsi che da $x = o$ fino ad $x = +\infty$ le ordinate sono sempre reali e crescenti, e divengono infinite con l'ascissa. E da tutto ciò poi segue che la curva si divide nel punto A in due rami continui e perfettamente simmetrici, i quali si estendono all'infinito nel senso dell'asse positivo delle ascisse; ed a misura che s'inoltrano vieppiù si allontanano da quest'asse.

371. Traducendo nella figura l'equazione $y^2 = 2ax$ si ha

$$PS^2 = 2a \times AS;$$

vale a dire che il quadrato di un'ordinata qualunque PS all'asse della curva eguaglia il rettangolo della corrispondente ascissa AS nella retta costante $2a$. Questa retta costante si chiama *parametro* dell'asse della parabola; e quindi può dirsi che: *Il quadrato di un'ordinata qualunque all'asse della parabola è eguale al rettangolo dell'ascissa corrispondente nel parametro.*

Dei diametri della parabola

372. Eliminando y tra le due equazioni

$$y^2 = 2ax \quad , \quad y = px + q$$

esprimenti una parabola, ed una retta qualunque, si ha l'equazione di 2° grado in x

$$p^2x^2 - 2(a - pq)x + q^2 = o$$

mediante la quale le coordinate delle due intersezioni possibili tra le due linee saranno espresse da

$$x = \frac{a - pq \pm \sqrt{a^2 - 2apq}}{p^2}, \quad y = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2apq}}{p},$$

e si riconosce che le due intersezioni saranno *reali e distinte*, *reali e coincidenti*, o *immaginarie* secondoche la quantità

$$a^2 - 2apq$$

sarà *positiva*, *nulla*, o *negativa*.

373. I precedenti valori di x ed y divengono infiniti, o prendono forme illusorie quando è $p = o$, ipotesi che riduce l'equazione della retta ad $y = q$, e diviene così una retta qualunque parallela all'asse delle x, cioè all'asse della parabola; ma in tal caso l'equazione di 2° grado in x, perdendo il primo termine, si riduce all'equazione di 1° grado

$$2ax - q^2 = o;$$

laonde delle due radici una diviene infinita (§. 286), e non ne resta che una sola finita e reale espressa da

$$x = \frac{q^2}{2a}$$

Segue da ciò che : *Qualunque retta parallela all' asse della parabola deve incontrarla, e necessariamente, in un punto solo a distanza finita.* Quindi una retta non parallela all'asse o incontra la curva in due punti, o non la incontra affatto ; e se nel primo caso i due punti si riuniscano in uno, allora questo incontro si cangerà in contatto ; vale a dire la retta diverrà tangente della curva.

374. Supponendo ora che la retta $y = px + q$ interseghi effettivamente la parabola in due punti, si dinotino con x', y' le coordinate del punto medio della loro distanza, ch' è la corda intercettata dalla curva sulla retta, si avrà così (§. 186)

$$x' = \frac{a - pq}{p^2} \quad , \quad y' = \frac{a}{p} ;$$

e si troverebbero espressioni uniformi per le coordinate del punto medio di ogni altra corda parallela a quella che si è considerata, e che ha per equazione $y = px + q$. È però osservabile che, mentre per ciascuna corda si avrebbe un valore diverso per l' ascissa x', perchè contiene la q, che diversifica una corda dall' altra, all' opposto quello dell' ordinata y' conserva sempre lo stesso valore, giacchè la sua espressione $\frac{a}{p}$ contiene le sole costanti a, p, niuna delle quali cangia di valore. Segue da ciò che l' equazione $y' = \frac{a}{p}$, o più semplicemente

$$y = \frac{a}{p} ,$$

è quella del luogo geometrico dei punti medii di tutte le corde parallele, la cui direzione è determinata da p ; ma quest' equazione esprime una retta parallela all' asse della parabola ; adunque : *I punti medii di tutte le corde della parabola tra loro parallele sono situati sopra una retta parallela all' asse.* Ma una retta così condizionata è diametro della curva, e potendo inoltre darsi a p innumerevoli valori, ne risulta che : *I diametri della parabola sono in numero infinito, e son tutti paralleli tra loro.*

375. Segue ancora da ciò che precede che : *Ogni retta parallela all' asse della parabola è un suo diametro.* In fatti una retta qualunque come parallela all' asse potrà rappresentarsi con l' equazione $y = \beta$; ma se questa retta può essere diametro dovrà pure convenirle l' altra equazione $y = \frac{a}{p}$, esprimendo p il determinante della direzione delle corde parallele ch' essa biseca ; così si avrà $\beta = \frac{a}{p}$; d' onde poi si deduce $p = \frac{a}{\beta}$; ma questo valore di p è necessariamente reale ; adunque necessariamente esiste un sistema di corde parallele bisecate dalla proposta retta $y = \beta$, la quale perciò è diametro della parabola.

376. Si è visto altronde (§. 373) che una retta parallela all' asse incontra la curva in un punto solo a distanza finita ; dunque : *Ogni diametro della parabola ha un vertice solo, ed è di lunghezza infinita.*

377. Essendo di lunghezza infinita i diametri della parabola, e finite le corde ch' essi bisecano, si comprende che un diametro di questa curva non può avere un diametro conjugato nel senso della definizione data per l' ellisse e per l' iperbole ; ma pure si dice che un diametro della parabola è conjugato alle corde parallele ch'esso biseca, o meglio alla loro direzione. Ed ancora suol dirsi che una retta qualunque è conjugata ad un diametro della parabola, quando è parallela alle corde ch' esso biseca. Risulta per tanto dal §. 375 che una retta qualunque ed un diametro della parabola

rappresentati rispettivamente dalle equazioni $y=px+q$, ed $y=\beta$ saranno tra loro conjugati se sussista la relazione

$$\beta=\frac{a}{p} \text{ equivalente a } p\beta-a=o.$$

378. Supposto che una corda rappresentata dall' equazione $y=px+q$ sia conjugata al diametro $y=\beta$, l' angolo compreso da queste due rette sarà lo stesso che l' angolo formato da quella corda con l' asse delle x; e quindi sarà p la sua tangente trigonometrica. Or questa tangente diventa infinita nel solo caso che la corda sia parallela all' asse delle y; ma allora il diametro esso stesso diventa l' asse delle x; e da ciò risulta che un solo è il diametro principale della parabola; o, in altri termini: *La parabola è una curva che ha un asse solo.*

379. Considerando due diametri equidistanti dall' asse, cioè due diametri rappresentati dalle equazioni $y=\beta$, $y=-\beta$, risulta dal §. 375 che la direzione delle corde conjugate al primo è determinata da $\frac{a}{\beta}$, e quella delle corde conjugate al secondo da $-\frac{a}{\beta}$. Quindi è manifesto (§. 177) che: *Le corde conjugate a due diametri equidistanti dall' asse sono egualmente inclinate all' asse della parabola.*

Altre equazioni della parabola.

380. Volendo rapportare la parabola a due rette qualunque VX, VY, [*fig.* 72] bisogna sostituire nell' equazione $y^2=2ax$ in luogo di x ed y i valori

$$x=\frac{x'}{r}+\frac{y'}{r'}+\alpha \quad , \quad y=p\frac{x'}{r}+p'\frac{y'}{r'}+\beta.$$

Eseguita la sostituzione e tolti gli apici si ha la seguente equazione della parabola

$$\frac{p'^2}{r'^2}y^2+\frac{2pp'}{rr'}xy+\frac{r^2}{p^2}x^2+2\frac{p'\beta-a}{r'}y+2\frac{p\beta-a}{r}x+(\beta^2-2a\alpha)=o,$$

la quale, come vedesi, ha la forma dell' equazione generale a due variabili

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=o.$$

381. Se la nuova origine V, ossia il punto (α,β) cadesse sulla curva [*fig.73*] si avrebbe $\beta^2=2a\alpha$, cioè $\beta^2-2a\alpha=o$; ed allora l'equazione precedente perderebbe, com'esser dovea, il termine indipendente dalle variabili. Se di più uno dei nuovi assi, quello delle x per esempio, fosse parallelo all' asse primitivo delle ascisse, o, in altri termini fosse un diametro della parabola, in tal caso si avrebbe $p=o$, $r=1$, e la trasformata, perdendo ad un tempo i due termini in xy ed in x^2 diverrebbe

$$\frac{p'^2}{r'^2}y^2+2\frac{p'\beta-a}{r'}y-2ax=o.$$

Finalmente, se oltre le precedenti condizioni, il nuovo asse delle y fosse conjugato al diametro ch' è il nuovo asse delle x, si avrebbe (§.377) ancora $p'\beta-a=o$, e l'equazione della parabola si ridurrebbe a

$$y^2=2a\frac{r'^2}{p'^2}x \text{ , ossia ad } y^2=2a'x$$

ponendo per brevità

$$a'=a\frac{r'^2}{p'^2}=a\frac{p'^2+1}{p'^2}$$

e si ritorna così alla forma semplicissima dell' equazione primitiva. Tal' è dunque l'equazione della par abola quando si prendono per assi coordinati un diametro qualunque VX, e la retta VY, che gli è conjugata; e questa passa pel suo vertice.

382. Bisogna intanto rimarcare che si giunge a quest'equazione della parabola in virtù delle due condizioni $p'\beta = a$, $\beta' = 2a\alpha$, dalle quali si ricava $p'^2 = \frac{a}{2\alpha}$; e perciò risulta

$$a' = a + 2\alpha,$$

ossia , nella figura,

$$a' = a + 2\text{AC} .$$

383. Si ricava dall' ultima equazione della parabola che VY, asse attuale delle ordinate, è tangente della curva nel punto V (§. 213) ; e ne risulta inoltre che il quadrato di un' ordinata qualunque PS è eguale al rettangolo della corrispondente ascissa VS nella retta costante $2a'$. Questa retta costante si chiama, come nel caso dell' asse, *parametro* del diametro VX. E perciò si ha in generale, che : *Nella parabola il quadrato di un' ordinata a qualunque diametro è eguale al rettangolo dell'ascissa corrispondente nel parametro.*

384. Poichè ogni diametro della parabola ha il suo parametro , quello che appartiene all' asse si suol chiamare *parametro principale*. Ora dinotando $2a$ il parametro dell' asse AB , e $2a'$ quello del diametro VG, ed avendosi

$$2a' = 2a + 4\text{AC} ,$$

ne risulta che : *Il parametro principale è il più piccolo di tutt' i parametri ;* ed inoltre che : *Il parametro di un diametro supera quello dell'asse pe'l quadruplo della distanza tra il vertice dell' asse istesso, e 'l piede della perpendicolare abbassatagli dal vertice del diametro.* Giova inoltre di rimarcare, che : *Due diametri equidistanti dall' asse hanno eguali parametri.*

385. L' equazione generale scritta al §. 380 dà luogo a teoremi analoghi a quelli rilevati per l' ellisse e per l' iperbole. In fatti, supposto che le rette VX, VY [*fig.* 72.] seghino ciascuna la curva in due punti, saranno VP, VQ le radici dell' equazione in x, che risulta da quella ponendovi $y = o$; e VR, VS le radici dell' altra in y nascente dal porvi $x = o$; quindi verrà

$$\text{VP} \times \text{VQ} = \frac{r^2}{p^2}(\beta^2 - 2a\alpha) \quad , \quad \text{VR} \times \text{VS} = \frac{r'^2}{p'^2}(\beta^2 - 2a\alpha) ;$$

e di seguito

$$\text{VP} \times \text{VQ} : \text{VR} \times \text{VS} = \frac{r^2}{p^2} : \frac{r'^2}{p'^2} = 2a\frac{r^2}{p^2} : 2a\frac{r'^2}{p'^2} .$$

Ma i due termini dell' ultimo rapporto equivalgono ai parametri dei diametri conjugati alle rette VX, VY (§. 381) ; adunque : *Se da un punto si tirano due seganti ad una parabola , i rettangoli dei rispettivi segmenti tra il punto e la curva saranno proporzionali ai parametri dei diametri conjugati rispettivamente alle direzioni delle due seganti.*

386. Qualora sieno eguali i parametri dei diametri conjugati alle rette VX , VY , o , ch' è lo stesso , se questi diametri sieno equidistanti dall' asse (§. 384) , quelle rette saranno egualmente inclinate all' asse medesimo ; ed intanto i due rettangoli VP × VQ , VR × VS saranno eguali tra loro , e quindi i quattro punti P , Q , R , S si troveranno sulla circonferenza di un cerchio. Di qui poi risulta il seguente teorema : *Se un cerchio sega una parabola in quattro punti, due lati opposti qualunque del quadrilatero che si forma con essi saranno egualmente inclinati all' asse della curva, al pari delle sue diagonali.* Ed ancora : *Se un cerchio sega una parabola in quattro punti, l' asse di questa curva sarà parallelo alla biseccante di uno dei due angoli supplementi l' un dell' altro compresi o da due dei lati opposti del*

quadrilatero che si forma con essi, o dalle due diagonali.

Delle tangenti della parabola.

387. L' equazione della parabola rapportata ad un diametro Cx [*fig. 74*], ed alla retta conjugata Cy condotta pe 'l vertice è, come si è visto (§. 384)

$$y^2 = 2\,ax\,,$$

dinotando $2a$ il parametro del diametro. In conseguenza le coordinate dei punti comuni alla curva e ad una retta avente per equazione

$$y = px + q$$

saranno tuttavia espresse (§. 372) da

$$x = \frac{a - pq \pm \sqrt{a(a-2pq)}}{p^2}\quad,\quad y = \frac{a \pm \sqrt{a(a-2pq)}}{p}\,;$$

ma se la retta è tangente della curva, allora riunendosi in una le due intersezioni, i due valori di x diverranno eguali, al pari de' due valori di y; e perciò dovendo annullarsi il radicale sarà

$$a = 2\,pq.$$

Chiamando adunque x', y' le coordinate del contatto si avranno le due relazioni

$$x' = \frac{q}{p}\quad,\quad y' = \frac{a}{p}\,,$$

dalle quali si trae

$$p = \frac{a}{y'}\quad,\quad q = \frac{ax'}{y'}\,;$$

e però l' equazione della tangente nel punto (x', y') sarà

$$y = \frac{a}{y'}\,x + \frac{a}{y'}\,x'\,,\quad \text{ovvero}\quad yy' = a\,(\,x + x'\,).\ (*)$$

(*) Si può giungere a questa equazione della tangente col metodo sviluppato nella nota al § 220

388. La prima di queste equazioni mostra che la tangente nel punto (x', y') è parallela alle corde conjugate al diametre che ha per vertice lo stesso punto (§. 375); laonde conoscendosi la direzione di queste corde si avrà in pari tempo quella della tangente.

389. Ma la tangente in un punto P della parabola si può costruire più semplicemente determinando una delle parti CQ, CQ′ ch' essa taglia dagli assi coordinati. A tal effetto si porrà nella sua equazione $y=o$, e risultando $x = -x'$, vale a dire CQ = CS, bisognerà prendere sul diametro Cx la parte CQ eguale ed opposta a CS ascissa del dato punto P; e per tal guisa la congiungente PQ sarà la tangente in P.

390. Essendo QS la sottangente del punto P, segue da questa costruzione, che: *Nella parabola la sottangente è doppia dell' ascissa corrispondente.*

391. Se si prolunga PS in P′, e si congiunga QP′ sarà questa retta anch' essa tangente in P′, ma è SP=SP′; adunque: *Il diametro che passa pe'l punto di concorso di due tangenti della parabola divide in due parti eguali la corrispondente corda tra i contatti.*

392. Volendo condurre la tangente alla parabola da un punto Q, (α, β), non esistente sulla curva (*fig.* 75), allora le coordinate del punto di contatto P saranno incognite; ma è chiaro (§. 226) che le medesime si ottengono nei valori di x ed y comuni alle due equazioni

$$y^2 = 2ax\quad,\quad \beta y = a\,(x + \alpha)\,;$$

e ne risulta agevolmente che da un dato punto si possono condurre alla parabola due tangenti, le quali saranno possibili se il punto è fuori della curva; impossibili se è dentro; e si riducono ad una se il punto si trova sulla curva.

393. Egli è manifesto che l' equazione

$$\beta y = a\,(\,x + \alpha\,)$$

esprime la retta che passa pei due contatti P, P′ (§§. 139, 227, 333); i quali perciò si otterranno con la costruzione della stessa retta. Or sia G il punto, in cui essa taglia l' asse delle x, e sieno inoltre CD, QD le coordinate α, β del punto Q; ponendo $y = o$ nella sua equazione si ha

$$x = -\alpha \quad \text{, ossia CG=CD;}$$

e di quì si rileva che il punto G rimane invariato se il punto Q cambia di sito rimanendo sulla retta MDN parallela all' asse delle y. Quindi anche per questa curva avviene come per l' ellisse e per l' iperbole, che: *Le corde tra i contatti di tutte le coppie di tangenti menate alla parabola dai diversi punti di una stessa retta s' intersegano tutte in un medesimo punto.*

E reciprocamente: *Le due tangenti menate alla parabola nelle estremità di ciascuna delle corde che passano per uno stesso punto, concorrono sopra una medesima retta.* Questa retta adunque è la *polare* di quel punto, il quale alla sua volta è il *polo* di quella retta.

Delle normali della parabola, ed espressioni delle quattro rette tangente, sottangente, normale, sunnormale.

394. In tutto ciò che segue la parabola sarà tuttavia rappresentata con l' equazione $y^2 = 2ax$; ma le coordinate saranno ortogonali; vale a dire sarà rapportata all' asse di figura Ax [*fig.76*] ed alla perpendicolare nel vertice A, e sarà $2a$ il parametro principale.

Ciò posto dinotando con x', y' le coordinate AS, PS di un punto qualunque P della curva sarà $\frac{a}{y'}$ il determinante della direzione della tangente PG in questo punto, e quindi l' equazione della normale PL nello stesso punto sarà

$$y - y' = -\frac{y'}{a}\left(x - x'\right).$$

Ponendo $y = o$, si ha $x = x' + a$, ossia AK = AS + a; e ne risulta che per costruire la normale nel punto P bisogna aggiungere alla sua ascissa AS la parte SK eguale al semiparametro principale; e così la congiungente de' punti P, K sarà la normale richiesta.

395. La retta SK costruita in siffatta guisa essendo la sunnormale del punto P, segue, che: *Nella parabola la sunnormale è di grandezza costante ed eguale al semiparametro principale.*

Essendosi già detto che nella parabola la sottangente di un punto è doppia dell' ascissa corrispondente (§. 390), non evvi altro ad aggiungere all'espressione di questa retta. E si troverà poi facilissimamente

$$\text{Tangente PQ} = \sqrt{y'^2 + 4x'^2} = \sqrt{2x'(a + 2x')}$$

$$\text{Normale PK} = \sqrt{y'^2 + a^2} = \sqrt{a(a + 2x')}$$

Si può rimarcare che la normale ha il minimo valore quando è $x' = o$, e va poi crescendo fino all' infinito crescendo l' ascissa x'; ma l' ipotesi di $x' = o$ la riduce ad a; perciò: *La normale più piccola della parabola è quella che corrisponde al vertice della curva, ed è eguale al semiparametro principale.*

Del fuoco della parabola

396. Ritenuta per la parabola la definizione del fuoco data per l' ellisse (§. 242) si trova in un modo consimile (§. 243) che esiste in questa curva un fuoco solo F [*fig.77*] determinato dell' ascissa $\frac{a}{2}$ e dall'ordinata *zero*; vale a dire esiste sull' asse, e si ottiene tagliando l' ascissa positiva AF eguale ad $\frac{a}{2}$, cioè alla quarta parte del parametro

principale. Questo punto F è dunque quell' istesso, cui venne dato da principio il nome di fuoco.

397. Chiamando z un raggio vettore FP si ha per tanto

$$z = \sqrt{x^2+ax+\frac{a^2}{4}} = \sqrt{(x+\frac{a}{2})^2} = x+\frac{a}{2} = \mathrm{AS}+\mathrm{AF},$$

e quindi presa AD = AF, risulterà z = FP = DS; in conseguenza se pe 'l punto D si meni all' asse la perpendicolare indefinita MDN, e poi da P si tiri PK parallela all' asse medesimo, risulterà ancora PF = PK; vale a dire: *Ogni raggio vettore FP è eguale alla perpendicolare condotta dal punto P alla retta fissa MN.* Così si ritorna alla proprietà, che servì di regola alla primitiva descrizione della parabola; e si vede nella retta MN ripsodotta la direttrice della curva, nella quale altronde si riconosce la polare del fuoco (§.393).

398. Anche in questa curva merita di essere valutato l' angolo FPQ compreso dal raggio rettore e dalla tangente appartenenti ad uno stesso punto P. Ora essendo

FPQ = PFS — PQS, sarà *tan.* FPQ = *tan.* (PFS — PQS); ma dette x', y' le coordinate del punto P si ha

$$\tan \mathrm{PFS} = \frac{y'}{x'-\frac{1}{2}a}, \quad \tan. \mathrm{PQS} = \frac{a}{y'},$$

si avrà dunque

$$\tan. \mathrm{FPQ} = \tan. (\mathrm{PFS} - \mathrm{PQS}) = \frac{a}{y'}$$

e perciò

$$\mathrm{FPQ} = \mathrm{PQS}.$$

vale a dire: *L' angolo compreso dal raggio vettore e dalla tangente è eguale all' angolo compreso dalla tangente e dall' asse.*

399. Sia PG il diametro corrispondente al punto P, sarà l' angolo GPQ' = PQS = FPQ; in consegnenza: *Il raggio rettore ed il diametro corrispondenti ad uno stesso punto sono egualmente inclinati alla tangente nel punto medesimo.*

Dopo ciò è manifesto che la normale PL divide in due parti eguali l' angolo FPG; e quindi: *La normale in un punto della parabola divide in due parti eguali l' angolo compreso dal ramo e dal diametro corrispondenti allo stesso punto.*

400. Dal fuoco F si conduca FH perpendicolare alla tangente PQ; ed essendo isoscele il triangolo PFQ (§.398), sarà PQ bisecata in H; ma è pure QS bisecata in A; perciò risulterà AH parallela a PS e quindi perpendicolare all' asse; adunque il punto H si trova sulla tangente nel vertice della curva, e ne segue, che: *I piedi delle perpendicolari condotte dal fuoco di una parabola sulle sue tangenti sono tutti situati sulla tangente nel vertice della curva.*

401. Si è veduto che nell' ellisse, e nell' iperbole la corda condotta per un fuoco perpendicolarmente all' asse su cui si trova è eguale al parametro principale; ed altrettanto avviene nella parabola. In fatti l' equazione di questa curva estendo $y^2 = 2ax$, pe 'l caso del fuoco si ha $x = \frac{1}{2}a$, e quindi $y^2 = \frac{2a^2}{2} = a^2$; donde $y = a$; perciò l' intera corda $2y$ eguaglia il parametro principale $2a$.

402. Chiamando $2a'$ il parametro del diametro PG ed x' l'ascissa AS del punto P si ha (§. 382) $a' = a + 2x'$, e quindi

$$\frac{1}{2}a' = \frac{1}{2}a + x' = \mathrm{AD} + \mathrm{AS} = \mathrm{PK} = \mathrm{PF};$$

sarà dunque

$$2a' = 4\mathrm{PF};$$

cioè: *Il parametro del diametro appartenente ad un qualunque punto della parabola è quadruplo del raggio vettore appartenente al punto istesso.*

CAPITOLO IX.

Riavvicinamento tra le equazioni dell' ellisse, dell' iperbole, e della parabola

403. Le tre curve finora esaminate, cioè l' ellisse, l' iperbole, e la parabola, non ostante la loro diversa figura, hanno molte proprietà comuni, e si comprende che ciò è una conseguenza della quasi uniformità delle loro equazioni; ma ora andiamo a mostrare di più che queste tre curve si possono comprendere in una sola equazione.

Per ciò che riguarda l' ellisse e l' iperbole si è già veduto che, quando si prendono per assi coordinati due diametri conjugati qualunque, l' equazione dell' una e dell' altra curva ha la forma

$$Ay^2 + Cx^2 + F = o; \qquad (1)$$

ed è manifesto che *reciprocamente* ogni equazione di questa forma non può che rappresentare o un ellisse, o un iperbole. In fatti è chiaro dapprima che, qualunque sia questa curva, gli assi coordinati ne sono diametri, e conjugati tra loro, mentre risolvendola o rispetto ad y o rispetto ad x si riconosce subito che ciascuno biseca le corde parallele all' altro. Inoltre è pure evidente che l' origine delle coordinate è centro della curva, giacchè ogni sua corda condotta per quel punto debbe rimanervi bisecata (§. 174.). Noi abbiamo supposto che le tre costanti A, C, F avessero dei segni qualunque, cioè che siano indistintamente positive, o negative; ma ora porremo questi segni in veduta, ed allora supposto, com' è permesso, che A sia essenzialmente positiva, l' equazione (1) darà luogo alle seguenti quattro equazioni distinte

$$\begin{array}{ll} \text{I}^a. & Ay^2 + Cx^2 - F = o \\ \text{II}^a. & Ay^2 - Cx^2 + F = o \\ \text{III}^a. & Ay^2 - Cx^2 - F = o \\ \text{IV}^a. & Ay^2 + Cx^2 + F = o \end{array}$$

le quali meritano di essere separatamente esaminate.

404. Chiamando a, b i semidiametri conjugati che fanno rispettivamente da assi delle x e delle y, risulta dalla equazione I^a, ponendo ora $y = o$, ed ora $x = o$,

$$a = \sqrt{\frac{F}{C}} \quad , \quad b = \sqrt{\frac{F}{A}},$$

valori necessariamente reali, essendo tutte positive le costanti A, C, F. E poichè ne deriva

$$C = \frac{F}{a^2} \quad , \quad A = \frac{F}{b^2}$$

così l' equazione I si cangerà in

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} - 1 = o$$

e si riconosce appartenente all' ellisse. Dunque l' equazione (1) esprime un ellisse quando sieno entrambe positive le due costanti A, C, e sia negativo l' ultimo termine F. Qualora fusse A = C, e fussero di più rettangolari le coordinate, si avrebbe $a = b$, e l' ellisse si volterebbe in cerchio di raggio a.

405. Dall' equazione II si ha poi

$$a = \sqrt{\frac{F}{C}} \quad , \quad b = \sqrt{-\frac{F}{A}}.$$

Di questi due valori il primo è reale, e l' altro immaginario; ma costruendo anche questo come fusse reale, cioè a dire ponendo $b = \sqrt{\frac{F}{A}}$, risulta egualmente

$$C = \frac{F}{a^2} \quad , \quad A = \frac{F}{b^2} ;$$

e però l'equazione II cangiandosi in

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} + 1 = o ,$$

si vede ch' esprime un iperbole, in cui l'asse delle x è diametro trasverso, o reale; ed è immaginario il conjugato, ch' è l'asse delle y.

406. L'equazione III, mutando i segni, diviene

$$- Ay^2 + Cx^2 + F = o \quad , \quad \text{ovvero } Cx^2 - Ay^2 + F = o ,$$

e prende così la stessa forma della II. In conseguenza anche l'equazione III esprime un iperbole; ma per questo caso è invece l'asse delle x diametro immaginario, ed è diametro reale l'asse delle y. Dopo ciò dobbiamo conchiudere che l'equazione (1) esprime l'iperbole quante volte i segni delle costanti A, C sieno contrarii, qualunque sia d'altronde il segno dell'ultimo termine F. Ed è poi chiaro che questa iperbole sarebbe equilatera qualora fusse $A = C$.

407. Finalmente per ciò che riguarda l'equazione IV cade sotto l'occhio ch' essa è impossibile, mentre, quali che siano i valori di x ed y, il primo membro sarà sempre una quantità positiva, che non può mai essere eguale a *zero*; e perciò questa equazione non può rappresentare alcuna linea. Ma in fatti risolvendola si ha

$$y = \pm \sqrt{-\frac{Cx^2}{A} - \frac{F}{A}}$$

e si vede che i valori di y sono costantemente immaginarii, qualunque sia quello di x: Non esistendo adunque alcun sistema di valori reali di x ed y capaci di soddisfare all'equazione IV, ne segue che la medesima non può dar

luogo ad alcun punto di curva; ed in tal caso suol dirsi ch' essa esprime una curva immaginaria, e propriamente un ellisse immaginaria; dappoichè la costanti A, C, coefficienti dei termini variabili, hanno gli stessi segni; ch'è la condizione determinatrice dell'ellisse.

408. L'equazione (1), qualora sia $F = o$, si modifica nelle due

$$Ay^2 + Cx^2 = o \quad , \quad Ay^2 - Cx^2 = o ;$$

ma niuna più rappresenta una linea *curva* propriamente. In fatti, quantunque la prima sia generalmente impossibile, pure essa è soddisfatta dall'unico sistema di valori reali $y = o$, $x = o$; laonde tutta la linea rappresentata dalla prima equazione si riduce ad un punto, cioè all'origine delle coordinate.

Rispetto alla seconda, risolvendola si ha

$$y = \pm x \sqrt{\frac{C}{A}} ,$$

e così si vede ch' essa esprime il sistema di due rette passanti per l'origine.

Concorrendo nella prima la condizione che determina l'ellisse, cioè l'eguaglianza dei segni de' coefficienti di y^2 ed x^2, può dirsi in questo caso che la linea da essa rappresentata è un' ellisse ridotta ad un punto, e propriamente al suo centro. E per la stessa ragione può dirsi che la linea rappresentata dall'altra è una iperbole ridotta a due rette, cioè ai suoi assintoti.

409. Ma l'ellisse e l'iperbole si possono comprendere in un altra equazione, che ha il vantaggio di racchiudere anche quella della parabola. In fatti se si prende per asse delle x un diametro qualunque trasverso $2a$, e per asse delle y la tangente in uno dei suoi vertici, e si dinoti di più con m il semiparametro dello stesso diametro, allora le equazioni dell'ellisse e dell'iperbole sono rispettivamente

$$y^2 = \frac{m}{a}(\pm 2ax - x^2) \quad , \quad y^2 = \frac{m}{a}(\pm 2ax + x^2),$$

ovvero

$$y^2 = \pm 2mx - \frac{m}{a}x^2 \quad , \quad y^2 = \pm 2mx + \frac{m}{a}x^2 ;$$

ancora se si fa

$$\frac{m}{a} = n ,$$

queste equazioni divengono

$$y^2 = \pm 2mx - nx^2 \quad , \quad y^2 = \pm 2mx + nx^2 ;$$

e però, supposto che i segni di m ed a sieno qualunque, è chiaro che ogni equazione riducibile alla forma

$$y^2 = 2mx + nx^2 \qquad (2)$$

esprimerà l' ellisse, o l' iperbole, secondoche n, coefficiente di x^2, sia negativo, o positivo, qualunque sia d' altronde il segno del coefficiente di x a primo grado. Per questa equazione l' asse delle x è diametro trasverso della curva, e quello delle y è tangente in uno dei suoi vertici ; inoltre $2m$ vi esprime il parametro dello stesso diametro, ed n è il rapporto del parametro al diametro.

410. Ponendo nella (2) $y = o$ risulta $2mx + nx^2 = o$, e se ne traggono per x due valori cioè

$$x = o \quad , \quad x = -\frac{2m}{n}$$

i quali sono le ascisse dei due vertici del diametro trasverso, e però l' ultimo di essi esprime la lunghezza dello stesso diametro. Adunque dinotando con a l' ascissa del centro (ascissa ch' è pure la lunghezza del semidiametro) si avrà

$$a = -\frac{m}{n} .$$

Se questo valore si sostituisca in (2) in vece di x, il risultante valore di y esprimerà l' ordinata della curva corrispondente al centro, vale a dire il semidiametrò conjugato al trasverso ; e però dinotandolo con b verrà

$$b = \sqrt{-\frac{m^2}{n}} ,$$

espressione reale o immaginaria secondochè n sia negativa, o positiva ; o, ch' è lo stesso, secondoche l' equazione (2) esprime l' ellisse, o l' iperbole.

411. Supponendo che nella equazione (2) rimanga invariata la costante m, e che l'altra n vada continuamente impicciolendo, allora il valore assoluto del diametro trasverso $2a$, vale a dire il valore della frazione $\frac{2m}{n}$ si farà continuamente più grande, e finalmente diverrà infinito quando n si è annullata ; ma in questa ipotesi l' equazione (2) si riduce ad

$$y^2 = 2mx$$

e si trasmuta in quella di una parabola, di cui l' asse delle x è diametro, che ha per parametro $2m$. Adunque la sola equazione

$$y^2 = 2mx + nx^2$$

comprende le tre curve ellisse, iperbole, e parabola : essa rappresenta l' ellisse quando n è negativa ; l'iperbole quando n è positiva ; e finalmente la parabola, quando è $n = o$. E quindi è manifesto che da questa sola equazione si potrebbero trarre le diverse proprietà che appartengono a ciascuna delle tre curve.

CAPITOLO X.

Classificazione delle linee curve.

412. Dopo la equazione della linea retta e circolare abbiamo creduto ben fatto di far conoscere ancora le equazioni, e quindi la figura, e le proprietà di tre altre linee curve di cui si fa un uso frequentissimo e nella geometria, e nelle applicazioni alla fisica matematica. E queste linee sono state da noi studiate con una certa accuratezza non solo per la loro importanza, ma anche per presentare ai giovani un competente esercizio nel maneggio dei principi più necessarii ed elementari della geometria analitica. Del resto è chiaro che il numero delle linee curve è infinito, siccome infinite sono le leggi con le quali si può supporre che un punto si vada movendo per generare una linea; e può ciascuno immaginarne a suo talento creandosi di queste leggi a piacese. E quì dobbiamo aggiungere che qualunque sia questa legge sarà sempre agevole di ottenere l' eguazione della linea corrispondente; ed in conferma di ciò stimiamo opportuno di recare ancora alcuni altri esempii della stessa natura, limitandoci ad enunciare la generazione e l' equazione di qualche linea che può meritare di esser conosciuta.

413. Della *Cissoide*. Da un punto fisso A [*fig.78*] sulla circonferenza di un cerchio si tiri quasivoglia secante che incontri in D la tangente opposta ad A, e sù di essa si tagli da D verso A la parte DP eguale alla corda corrisponde AC. Il luogo geometrico di tutt' i punti P determinati in tal guisa è una linea curva così detta *Cissoide* dà greci geometri. Prendendo per assi delle x e delle y il diametro AB la perpendicolare in A, si trova fa-

cilmente per questa curva l' equazione di 3° grado

$$y^2(2a-x)=x^3,$$

essendo a il raggio del cerchio. Risulta dalla generazione della cissoide, ed agevolmente si rileverebbe ancora dalla sua equazione, ch' essa si compone di due rami infiniti nel senso delle ordinate positive e negative, i quali si riuniscono nel punto A e sono simmetrici per rispetto ad AB. È chiaro inoltre ch' essi hanno per assintoto comune la tangente MM'.

I due rami della Cissoide sono delineati per modo da rivolgere costantemente la loro convessità all' asse delle x, il quale è tangente all' uno ed all' altro; ma non essendo attualmente luogo da addurne le ragioni faremo qui soltanto osservare che per questa circostanza accade ch' essi si riuniscono nel punto A formando un angolo curvilineo. Ora un punto di tal natura è una tra altre singolarità che sogliono aver luogo nelle linee curve, e che punto non presentano quelle di cui ci siamo precedentemente occupati. Dessi infatti si considerano come *punti singolari* delle curve; e ve n' ha di diverse specie con nomi diversi.

Al punto A, costituito come quello della cissoide, cioè per modo da risultare dall' incontro di due rami, i quali senza proceder oltre, vi formano un angolo curvilineo, si da il nome di punto di *regresso*; e si distinguono due specie di regressi dicendosi di *1ª specie* se i due rami per un tratto comunque piccolo si guardano con le loro convessità come accade attualmente; e di *2ª specie*, se i due rami sono entrambi concavi, o entrambi convessi da da una stessa parte e per un tratto comunque piccolo. Tale sarebbe il punto A nella curva della figura 79 la quale ha per equazione

$$(y-x^2)^2=x^5.$$

414. Della *Concoide*. Da un punto fisso A [*fig. 80*] situato fuori di una data retta MM' sian condotte quante rette

si vogliano AP, e tagliate sopra ciascuna le parti EP, EP′ eguali e di grandezza costante. Il luogo geometrico dei punti P, P′ è una linea curva chiamata dagli antichi *Concoide*. Il punto fisso A si chiama *polo* della concoide, e dicesi *direttrice* la retta MM′.

Risulta ben chiaro dalla generazione della concoide ch' essa si compone di due archi separati e continui situati a parti opposte della direttrice MM′; e di più che i due rami di ciascuno sono infiniti, ed hanno per assintoto comune la direttrice.

Prendendo per assi delle x e delle y la perpendicolare e la parallela condotte pe 'l polo A alla direttrice, e detta a la distanza AB, b la lunghezza costante PE, o BC si trova facilmente che l' arco superiore e l' inferiore hanno rispettivamente per equazioni

$$bx = +\sqrt{x^2+y^2}\,(x-a)\ ,\quad bx = -\sqrt{x^2+y^2}\,(x-a)\ ;$$

ma rendendo razionale o l' una o l'altra si ha sempre l' equazione di 4°. grado

$$b^2x^2 = (x^2+y^2)(x-a)^2\ ,$$

che perciò conviene ad entrambi gli archi, i quali, com' è per l' iperbole, debbono in conseguenza riguardarsi come una linea sola.

Cade sotto l' occhio che questa equazione è verificata dal sistema di coordinate $x=o$, $y=o$, e da ciò segue che l' origine A è un punto della concoide, quantunque non sembri che ciò debba risultare dalla sua generazione. Il punto A è dunque un punto singolare della concoide, ed è detto punto *isolato*, o *conjugato*, così chiamandosi un punto di curva allorchè le sue coordinate soddisfano all' equazione della curva, senza pertanto che vi passi alcuno dei suoi rami.

Merita però di essere osservato che la concoide è propriamente conformata come nella figura 80 quando AB, distanza dal polo alla direttrice, è maggiore della lunghezza co-

stante BC, cioè quando è $a > b$. In questo caso l' arco superiore e l' inferiore, dopo aver presentato fino ad un certo segno dai due lati della retta AC la loro concavità alla direttrice, finiscono per rivolgerle entrambi la convessità. Ora un punto di curva ove accada un cangiamento di direzione, vale a dire che da concava divenga convessa, o viceversa, chiamasi in generale punto *d' inflessione*, o di *flesso contrario*; e perciò la concoide della figura 80 ha quattro punti d' inflessione, cioè i due i, i nell' arco superiore, ed i due i', i' nell' inferiore. É manifesto che la tangente in un punto d' inflessione sega in pari tempo la curva nello stesso punto.

Che se per l' opposto AB sia minore di BC [*fig. 81*] allora l' arco superiore conserva lo stesso andamento, ma spariscono dall' inferiore i due punti d' inflessione, ed invece si forma nel polo una specie di nodo. Ma il polo nel caso attuale non è più un punto isolato della curva, e deve anzi riguardarsi come risultante dalla intersezione di due dei suoi rami. Ora, in generale, quando più rami di una curva passano per uno stesso punto, questo punto prende il nome di punto *multiplo*, e dicesi *doppio*, *triplo*, ec. secondochè i rami che passano per esso sono *due*, *tre*, ec; adunque quando è AB > BC, il polo A è un punto doppio della concoide.

Finalmente se sia AB = BC [*fig. 82*], allora sparisce il nodo, e 'l polo A diventa un regresso di prima specie.

415. Della *Cicloide*. Se un dato cerchio vada rotolando sopra una retta fissa, e si supponga segnato sulla sua circonferenza un qualche punto; questo punto nel movimento del cerchio cangerà continuamente di sito, ed il luogo geometrico delle sue diverse posizioni è una linea curva chiamata *Cicloide*, o ancora *Trocoide*; curva famosa ed interessante per utili applicazioni alla geometria ed alla meccanica.

Così supposto che AA′ [*fig. 83*] sia la retta fissa sulla quale debba rotolare un dato cerchio AB, e supposto inoltre, che il punto segnato sulla sua circonferenza sia lo stesso punto di contatto A, questo punto dopo una intera rivoluzione del cerchio avrà descritto la cicloide APFA'.

È manifesto che nel detto movimento del cerchio tutti i punti della sua circonferenza si sono successivamente adattati sopra quelli della retta AA', la quale in conseguenza sarà eguale alla stessa circonferenza. Questa retta AA' che sottende l'intera cicloide AFA' si chiama *base* della cicloide; e perciò: *La base della cicloide è eguale alla circonferenza del cerchio generatore.*

Dinoti EIF la posizione del cerchio generatore corrispondente al punto E, medio della base AA'; il punto di cicloide nascente da questa posizione sarà l'altro vertice F del diametro EF, il quale è perpendicolare ad AA'. È chiaro che il punto F è il punto della cicloide più distante dalla base, e che ivi essa si divide in due archi eguali e simmetrici FA, FA', di talche ogni sua corda PP' perpendicolare ad FE resta divisa da questa retta in due parti eguali. Adunque EF è asse della cicloide, ed il punto F è vertice della curva.

Ora indichi CPD un'altra posizione qualunque del cerchio generatore; sia C il contatto con la base, e P il punto corrispondente della cicloide; è evidente che, per giungere il cerchio dalla prima a questa posizione tutt'i punti dell'arco circolare PC hanno dovuto successivamente applicarsi sui punti della retta AC; laonde sarà per qualunque posizione

$$\text{arco PC} = \text{retta AC}.$$

Da qualunque punto P della cicloide si conducano le PS, PG perpendicolari alla base ed all'asse, e sia I il punto in cui PG incontra la semicirconferenza FIE giacente dalla parte del punto P; la figura PCEI sarà un parallelogrammo, e quindi saranno eguali gli archi PC, IE; e perciò lo stesso arco IE sarà eguale alla retta AC; ma

è l'intera semicirconferenza FIE eguale alla semibase AE, risulterà dunque

$$\text{arco FI} = \text{retta PI}.$$

Dopo aver accennato queste pochissime tra le numerose ed importanti proprietà della cicloide passeremo a cercarne l'equazione, e prenderemo per assi delle ascisse e delle ordinate la stessa base AA', e la perpendicolare in A. Dette per tanto x ed y le coordinate AS, PS di un punto qualunque P della curva, ed a il raggio del cerchio generatore converrà distinguere due casi secondochè il punto P appartenga all'arco AF, che diremo *ascendente*, ovvero all'arco FA', che chiameremo *discendente*. Ora per qualunque punto P dell'arco ascendente si ha

$$\text{AS} + \text{PH} = \text{arco PC};$$

ma è $\text{AS}=x$, ed è $\text{PH} = \sqrt{\text{CD}\times\text{HC} - \text{HC}^2} = \sqrt{2ay-y^2}$, perciò, ritenuto questo radicale come positivo, si avrà

$x + \sqrt{2ay-y^2} = \text{arco PC}$. Intanto l'arco PC è quello che ha per coseno OH, cioè $a-y$; ed è poi manifesto che questa espressione rimane sempre la stessa per qualsivoglia punto P dell'arco ascendente, giacchè se il punto H cadesse al di sopra del centro O, la sua espressione sarebbe nella figura $y-a$; ma dovendo allora il coseno riguardarsi come negativo, ne segue che la sua espressione è tuttavia $a-y$. In conseguenza l'equazione dell'arco ascendente della cicloide sarà

$$x + \sqrt{2ay-y^2} = \text{arco cos}\,(a-y).$$

Considerando poi un punto P' dell'arco discendente, e supposto per chiarezza che sia l'estremo della corda PP' parallela alla base, si ha

$$\text{AS}' = \text{A'S} = \text{AA}' - \text{AS}.$$

Or si dinotino con x, y le coordinate AS', P'S' del punto P', e s' indichi con x' l'ascissa AS del punto P; la relazione precedente diverrà $x = AA' - x'$; ma avvertendo che l'ordinata y è la stessa pe' punti P, P' si ha $x' = -\sqrt{2ay - y^2} + arc.\ cos.\ (a-y)$; in conseguenza per qualsivoglia punto dell' arco discendente si avrà $x = AA' + \sqrt{2ay-y^2} - arc.\ cos\ (a-y)$. Ora essendo AA' eguale alla circonferenza del centro generatore, il di cui raggio è a, si avrà $AA' = 2\pi a$; e perciò l'equazione dell' arco discendente della cicloide sarà in fine

$$x = 2\pi a + \sqrt{2ay-y^2} - arc.cos\,(a-y).$$

L'equazione della cicloide non è dunque della natura delle equazioni algebriche, dappoichè per determinare la relazione tra le coordinate x, y è mestieri di ridurre a rette archi di cerchio, il che non saprebbe eseguirsi mediante un numero limitato e finito di algebriche operazioni; e si sa che queste equazioni vanno sotto la denominazione di *trascendenti;* quindi anche le curve cui competono di siffatte equazioni son dette *trascendenti*, e però tra esse va annoverata la cicloide.

416. Di qui sorge pertanto una prima distinzione delle linee geometriche in due classi generali, cioè in *algebriche*, e *trascendenti*, secondochè le loro equazioni sono algebriche, o trascendenti. Ed è poi chiaro che le une e le altre sono in numero infinito, giacchè senza stare ad immaginare che un punto debba muoversi con una certa legge per avere la generazione di una linea, basta scrivere a piacere un' equazione algebrica, o trascendente per avere una linea sia dell' una, sia dell' altra natura.

Così per esempio le equazioni algebriche

$$a^2y = x^3,\ ay^2 = x^3,\ y^3 - 3axy + x^3 = o,\ (y^2+x^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

darebbero linee algebriche rappresentate rispettivamente dalle figure 84, 85, 86, 87; linee le quali hanno ancora una

certa celebrità, e nomi particolari, chiamandosi la prima *prima parabola cubica;* la seconda *seconda parabola cubica*, la terza *foglia di Cartesio*; e l'ultima *lemniscata.*

Si avrebbero poi linee trascendenti dalle equazioni trascendenti $y = log.\ x$, $y = sen.\ x$, ecc. nella prima delle quali si ha una linea egualmente famosa detta *logaritmica*, ed è tale, com' è chiaro, che ciascuna ordinata è il logaritmo della corrispondente ascissa.

417. Lasciando però da banda le linee trascendenti, aggiungeremo rispetto alle algebriche ch' esse sono ancora distinte per ordini, essendo l'ordine di una linea definito dal grado della sua equazione; vale a dire diconsi linee dell' ordine 1°, 2°, 3°, ec. quelle le di cui equazioni sono rispettivamente di grado 1°, 2°, 3°, ec. Ed in generale si dice di grado n.*esimo* ogni linea la di cui equazione è di grado n.*esimo*. Quindi la retta sarebbe una linea di 1° ordine; il cerchio, l'ellisse, l'iperbole, e la parabola sarebbero del 2° ordine; la cissoide, le due parabole cubiche, e la foglia di Cartesio apparterrebbero al 3° ordine; la concoide, e la lemniscata al 4° ordine; e così per altre linee. Inoltre per ciascun ordine v' ha delle altre suddivisioni in generi, specie, ec.

Si è già veduto che una stessa linea può essere rappresentata con diverse equazioni, diversità per altro dipendenti unicamente dalla diversa posizione degli assi coordinati; ma, quale che sia questa posizione, il grado dell' equazione rimane sempre lo stesso (§. 161); e ciò rende ragione della classificazione adottata, imperciocchè la medesima non avrebbe avuto alcun senso qualora il grado dell' equazione di una qualche linea avesse potuto rimanere alterato col rapportarla a nuovi assi.

418. È noto che per ogni grado esiste una equazione generale tra due variabili composta di un numero finito, e determinato di termini; ed è chiaro che, qualunque sia la

data equazione di un certo grado, rapportandola ad un sistema arbitrario di assi coordinati mediante le formole stabilite a quest' uopo, la medesima si cangia appunto nell' equazione più generale di questo grado. Quindi è che ogni linea di 1° ordine può rappresentarsi con l' equazione

$$ay + bx + c = o\,;$$

ogni linea del 2° ordine con l' equazione

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = o\,;$$

ogni linea di 3° ordine con l' equazione

$$ay^3 + by^2x + cyx^2 + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = o$$

e così in prosieguo.

Ora tra le quistioni cui da luogo cosiffatta classificazione sorge naturalmente quella di conoscere quali, e quante sono per ciascun ordine le linee essenzialmente diverse per forma, per affezioni, per rami infiniti, ecc.; quistione vasta ed interessante, e la di cui risoluzione è interamente riposta nella discussione completa ed accurata dell' equazione generale del grado corrispondente. S' intende agevolmente che questa quistione dee rendersi tanto più difficile a misura che cresce il grado dell' equazione; ma, che che ne sia, noi andremo nel capo seguente ad occuparci della sola discussione dell'equazione generale di 2° grado, essendo ciò bastevole pei limiti di una istituzione elementare.

419. Per ciò che riguarda l' equazione generale di 1° grado la medesima è stata già discussa (§. 77 ad 81), e si vide che ogni equazione di 1° grado avea per luogo geometrio una linea retta. Quindi ora possiamo aggiungere, che: *Tutte le linee del 1° ordine si riducono alla sola retta.*

CAPITOLO XI.

Discussione dell' equazione generale di 2° grado

$$ay^2 + 2\,bxy + cx^2 + 2\,dy + 2\,ex + f = o \text{ * } (1)$$

420. L' oggetto della presente discussione è, come si è detto (§. 418), quello di riconoscere tutte le linee diverse cui può dar luogo l' equazione soprascritta, vale a dire tutte le linee del 2° ordine. Siffatta discussione si può compiere in molte guise; ma noi troviamo opportuno di farla dipendere dalla trasformazione delle coordinate, cercando con tal mezzo di ridurre l' equazione (1) alle forme più semplici, di cui è suscettibile.

Per tanto qualunque sia la curva rappresentata da questa equazione, se in luogo di x ed y vi si sostituiscano i valori dati dalle formole (§. 155) **

$$x = \frac{x'}{R} + \frac{y'}{R'} + \alpha \quad , \quad y = p\frac{x'}{R} + p'\frac{y'}{R'} + \beta$$

la trasformata in x', y' esprimerà la stessa curva, ma sarà rapportata ad un nuovo sistema di assi coordinati; e saranno α, β le coordinate della novella origine, e p, p' i determinanti delle direzioni dei nuovi assi, cioè p per quello delle x', e p' per quello delle y'. Ciò posto riguardando come indeterminata la posizione dei nuovi assi,

* Nel maneggio di questa equazione torna utile di apporre il coefficiente numerico ai termini in cui le variabili congiunte o separate hanno per esponente l' unità, perchè le formole cui si perviene risultano più simmetriche.

** Giova rammentare che in queste formole si ha

$$R^2 = p^2 + 2p\cos\theta + 1 \quad , \quad R'^2 = p'^2 + 2p'\cos\theta + 1,$$

dinotando θ l' angolo degli assi. Se gli assi sono ortogonali si ha $\cos\theta = o$; ma in questa ipotesi cangeremo le R grandi in r piccole, ed avremo

$$r^2 = p^2 + 1 \quad , \quad r'^2 = p'^2 + 1.$$

anche indeterminate saranno le quattro costanti α, β, p, p', di cui son funzioni, in generale, i coefficienti della trasformata; laonde noi ci proporremo ad esaminare se sia possibile di determinarle in modo da ridurre a zero qualcuno dei coefficienti medesimi, nel fine di rendere la trasformata più semplice con la scomparsa dei termini corrispondenti.

Eseguendo la sostituzione indicata, faremo per brevità nella trasformata

$$A = \frac{1}{R'^2}\left(ap'^2 + 2bp' + c\right)$$

$$B = \frac{2}{RR'}\left(app' + b(p+p') + c\right)$$

$$C = \frac{1}{R^2}\left(ap^2 + 2bp + c\right)$$

$$D = \frac{2}{R'}\Big((b\alpha + a\beta + d)p' + c\alpha + b\beta + e\Big)$$

$$E = \frac{2}{R}\Big((b\alpha + a\beta + d)p + c\alpha + b\beta + e\Big)$$

$$F = a\beta^2 + 2b\alpha\beta + c\alpha^2 + 2d\beta + 2e\alpha + f;$$

quindi, togliendo ancora per più semplicità gli apici dalle variabili, la trasformata istessa sarà

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = o; \qquad (2)$$

e per procedere con maggior chiarezza andremo a vedere se si possa farne sparire un termine qualunque scelto a piacere, cominciando questo esame dall' ultimo termine F.

421. Ei cade sotto l' occhio che il termine F è ciò che diviene il primo membro dell' equazione (1) cangiandovi x ed y in α e β; da ciò segue che se la nuova origine è un punto della curva ch' essa rappresenta, si avrà

$$F = a\beta^2 + 2b\alpha\beta + c\alpha^2 + 2d\beta + 2e\alpha + f = o.$$

Ora se la curva esiste potrà costruirsene un punto a pia-

cere; e preso questo punto per origine la sua equazione risulterà mancante dell' ultimo termine.

422. Ma bisogna osservare che, ove si mirasse unicamente alla scomparsa dell' ultimo termine, sarebbe superflua la trasformazione generale che si è fatta, bastando allora di far uso delle formole $x = x' + \alpha$, $y = y' + \beta$ per cui si passa ad un sistema di assi paralleli agli antichi, e per le quali la trasformata diviene

$$\left.\begin{array}{l} ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2(b\alpha + a\beta + d)y + 2(c\alpha + b\beta + e)x \\ \qquad + a\beta^2 + 2b\alpha\beta + c\alpha^2 + 2dy + 2ex + f \end{array}\right\} = o,$$

acquistando lo stesso ultimo termine della trasformata generale.

423. Questa trasformazione più semplice sarebbe pur sufficiente a far sparire l' uno o l' altro dei due termini in x, y a 1° grado, i di cui coefficienti contengono entrambi le due costanti α, β, e può in conseguenza esser posta l' una o l' altra delle due relazioni

$$c\alpha + b\beta + e = o \quad , \quad b\alpha + a\beta + d = o,$$

ciascuna delle quali può essere separatamente verificata in modi infiniti.

424. Quindi è chiaro che, mediante la stessa trasformazione, i due termini in x ed y a 1° grado possono ancora farsi sparire contemporaneamente, supponendo che abbiano luogo ad un tempo le due precedenti relazioni; e però quando si faccia

$$\alpha = \frac{ae - bd}{b^2 - ac} \quad , \quad \beta = \frac{cd - be}{b^2 - ac};$$

ma perciò è necessario che la quantità $b^2 - ac$ sia diversa da *zero*; che altrimenti i valori di α, e β sarebbero infiniti, e quindi inassegnabili.

425. La scomparsa o isolata, o simultanea dei due termini in x, y a 1° grado si è quì fatta dipendere dal solo cangiamento di origine. Intanto la scomparsa isolata di

uno di essi può ancora farsi dipendere dal cangiamento di direzione dell' asse corrispondente, mentre la simultanea è assolutamente subordinata al cangiamento di origine. In fatti ritornando alla trasformata generale si vede che per far sparire l'uno o l'altro dei due termini in x, y convenga porre l' una o l' altra delle due relazioni

$$E=(b\alpha+a\beta+d)p+(c\alpha+b\beta+e)=o$$

$$D=(b\alpha+a\beta+d)p'+(c\alpha+b\beta+e)=o$$

ed è chiaro che facendo, come risulta dalla prima,

$$p=-\frac{c\alpha+b\beta+e}{b\alpha+a\beta+d}$$

sparirà il termine in x, e sparirebbe invece quello in y attribuendo lo stesso valore a p', sieno qualunque i valori di α e β, vale a dire sia qualunque la nuova origine. Se poi si vuole che questi due termini spariscano insieme, le relazioni $E=o$, $D=o$ dovranno verificarsi ad un tempo. Ora, se si prende la loro differenza, risulta la relazione $(p-p')(b\alpha+a\beta+d)=o$, scindibile nelle due $p-p'=o$, $b\alpha+a\beta+d=o$; ma la prima è impossibile, perchè ne verrebbe $p=p'$, vale a dire i nuovi assi sarebbero coincidenti, il che è assurdo; adunque la sola relazione possibile che si ha in quella differenza è $b\alpha+a\beta+d=o$; relazione la quale poi trae seco anche l' altra $c\alpha+b\beta+e=o$. Queste due relazioni indipendenti da p e p' rimpiazzano in conseguenza le due relazioni $E=o$, $D=o$ per la scomparsa dei termini in x, y, cui perciò non può in nulla influire il cangiamento di direzione degli assi. Del rimanente è da osservare che le due relazioni $b\alpha+a\beta+d=o$, $c\alpha+b\beta+e=o$ altro non sono che quelle scritte nel §. 423., e perciò ne risultano per α, e β gli stessi valori del §.424.

426. Dopo ciò è manifesto che mediante il cangiamento

simultaneo della direzione di un asse e dell' origine si può sempre far sparire uno dei due termini in x,y a 1° grado congiuntamente all' ultimo F. E basta per ciò di prendere per origine un punto della curva, e dare a p il valore di sopra scritto, se voglia farsi sparire il termine in x; e darlo invece a p' se debba farsi sparire il termine in y.

427. Riassumendo ciò che si è detto intorno agli ultimi tre termini della trasformata conchiuderemo:

1°. Che in ogni caso si può la medesima ridurre ad una di queste due forme

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy=o\quad,\quad Ay^2+Bxy+Cx^2+Ex=o.$$

2°. E che nel caso in cui la quantità b^2-ac è diversa da *zero*, la trasformata si potrà ridurre ad

$$Ay^2+Bxy+Cx+F=o.$$

428. In quest' ultima ipotesi, cioè quando b^2-ac è quantità diversa da *zero* l' espressione di F si rende suscettibile di trasformazioni che giova di rimarcare. In fatti si ha

$$F=(a\beta+b\alpha+d)\beta+(b\beta+c\alpha+e)\alpha+d\beta+e\alpha+f;$$

ed essendo nulle le quantità chiuse tra parentesi (§. 424), il valore di F si ridurrà ad

$$F=d\beta+e\alpha+f,$$

ovvero ponendo per β ed α i loro valori, (§. cit.)

$$F=\frac{ae^2+cd^2+fb^2-acf-2bde}{b^2-ac}.$$

429. Passando ora ad esaminare i tre termini di 2°. grado Ay^2, Bxy, Cx^2, ossia

$$\frac{ap'^2+2bp'+c}{R'^2}y^2,2\frac{app'+b(p+p')+c}{RR'}xy,\frac{ap^2+2bp+c}{R^2}x^2$$

faremo dapprima osservare che i loro coefficienti A, B, C contengono le sole due costanti p, p', non entrandovi per nulla le altre due α, β; perciò la scomparsa di questi termini non può affatto dipendere dal cangiamento di origine, ma solo dal cangiamento delle direzioni degli assi.

430. Ciò premesso se voglia farsi sparire il termine in xy converrà porre la relazione $B=o$, che riducesi ad

$$app'+b(p+p')+c=o.$$

Contenendosi in questa relazione entrambe le costanti p, e p', sarà lecito di attribuire valori arbitrarii ad una di esse, e quelli dell' altra risulteranno sempre reali. Segue da ciò che, se si prenda qualunque retta per uno dei nuovi assi coordinati, sarà sempre possibile di determinare l' altro asse per modo che l' equazione della curva risulti mancante del termine in xy.

431. La scomparsa del termine in x^2 esige la relazione $C=o$, ossia

$$ap^2+2bp+c=o,$$

la quale contiene soltanto p, ma a 2° grado; di tal che la scomparsa in parola può essere operata con due diverse direzioni del nuovo asse delle ascisse, determinate da

$$p=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}.$$

Ma per ciò si richiede che la quantità b^2-ac sia positiva; mentre, se fusse negativa, i due valori di p sarebbero immaginarii; ed allora sarebbe impossibile di far sparire il termine in x^2.

432. Ora è ben chiaro che la scomparsa del termine in y^2 è subordinata alla stessa condizione, mentre importa la relazione $A=o$, cioè

$$ap'^2+2bp'+c=o,$$

la quale può essere soddisfatta da due valori di p', le di cui espressioni sono quelle stesse scritte poc' anzi per p.

433. Adunque se la quantità b^2-ac è negativa non sarà possibile di far sparire dall' equazione della curva alcuno dei termini in x^2 ed y^2; ma se invece questa quantità è

positiva, potrà farsene sparire o uno, o entrambi. Benvero in quest' ultimo caso è da osservare che prendendo per p uno dei due soprascritti valori converrà prendere l'altro per p'; e viceversa; giacchè se si adottasse uno stesso valore per p e p', ne seguirebbe $p=p'$, e quindi la coincidenza dei due assi; il che è impossibile.

434. I due valori di p prendono forme illusorie quando è nulla la quantità b^2-ac, ossia quando si ha $b^2-ac=o$; e quindi più non reggono le conchiusioni che precedono. Si sa per tanto che in questo caso i due trinomii $ap^2+2bp+c$, ed $ap'^2+2bp'+c$ sono quadrati perfetti; ed in fatti sostituendovi per c il valore che si ha dalla relazione $b^2-ac=o$, si ridurranno subito alle forme $\frac{(ap+b)^2}{a}$, $\frac{(ap'+b)^2}{a}$. Inoltre per la stessa sostituzione la quantità $app'+b(p+p')+c$ si cangia in $\frac{(ap+b)(ap'+b)}{a}$; e così i termini Ay^2, Bxy, Cx^2 si trasmutano nel caso attuale in

$$\frac{(ap'+b)^2}{a\,R'^2}y^2,\ 2\frac{(ap+b)(ap'+b)}{a\,RR'}xy,\ \frac{(ap+b)^2}{a\,R^2}x^2.$$

Ciò posto, se voglia farsi sparire il termine in x^2 dovrà porsi la relazione $C=o$, la quale or si riduce ad

$$ap+b=o;$$

ma allora si avrà pure $(ap+b)(ap'+a)=o$, e quindi anche $B=o$; di tal che congiuntamente al termine in x^2, sparirà pure quello in xy. Ed è poi chiaro che se in vece si volesse far sparire il termine in y^2, a che si richiede la relazione

$$ap'+b=o,$$

sparirebbe egualmente con esso il termine in xy. Segue per tanto da tutto ciò che quando è $b^2-ac=o$, è sempre possibile di far sparire dalla trasformata l'uno o l'altro dei due termini in x^2 ed y^2; ma con questo termine sparisce, e necessariamente, anche il termine in xy.

435. Riavvicinando ora i risultamenti ottenuti intorno agli ultimi tre termini della trasformata a quelli relativi ai primi vedremo immediatamente tutte le riduzioni di cui essa è suscettibile mediante una conveniente determinazione delle quattro costanti α, β, p, p'. Si è già veduto che questa equazione si può sempre ridurre ad una delle forme scritte nel § 427 n° 1°, ma è chiaro che desse non deggiono riguardarsi come diverse; giacchè l'una rientra nell'altra mutando x in y e viceversa; vale a dire riguardando l'asse delle ascisse come quello delle ordinate; e viceversa. Quindi è che basta di considerarne una, per esempio la seconda

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Ex = o \qquad (3)$$

ove manca il termine in y e l'ultimo, scomparsi in virtù delle due relazioni $D=o$, $F=o$, in cui non entra la costante p. Si può dunque alle medesime aggiunger l'altra $B=o$, contenente p e p', e per la quale sparisce il termine in xy. E da ciò poi segue ch'è sempre possibile di ridurre la trasformata all'equazione di tre termini

$$Ay^2 + Cx^2 + Ex = o;$$

riduzione la quale si effettua mediante le tre relazioni

$$B=o\,, \quad \text{ovvero} \quad app' + b\,(p+p') + c = o$$
$$D=o\,, \quad \text{ovvero} \quad (b\alpha+a\beta+d)\,p'+(c\alpha+b\beta+e) = o$$
$$F=o\,, \quad \text{ovvero} \quad a\beta^2+2b\alpha\beta+c\alpha^2+2d\beta+2e+f = o.$$

436. L'ultima equazione non è suscettibile di ulteriori riduzioni, eccetto il caso in cui si abbia $b^2-ac=o$; mentre allora nel far sparire il termine in xy, sparisce da se anche quello in x^2; e così la trasformata in questa ipotesi si riduce all'equazione di due termini

$$Ay^2 + Ex = o. \qquad (4)$$

Bisogna osservare che nel caso attuale la relazione $B=o$, o l'equivalente $app'+b\,(p+p')+c=o$, si riduce alla forma $(ap'+b)\,(ap+b)=o$; ma di questi due fattori è solo il secondo ch'è permesso di eguagliare a zero; giacchè, se si adottasse il primo, l'equazione (3) perderebbe col termine in xy anche quello in y^2, e si ridurrebbe così ad un'equazione solo in x; il che è impossibile. Risulta da tutto ciò che quando è $b^2-ac=o$ la trasformata si riduce alla forma (4) mediante le tre relazioni

$$ap + b = o$$

$$(b\alpha+a\beta+d)\,p'+(c\alpha+b\,\beta+e) = o$$
$$a\beta^2+2b\alpha\beta+c\alpha^2+2d\,\beta+2e\,\alpha+f = o$$

437. Si è pur veduto (§. 427) che quando b^2-ac non è zero, la trasformata si può ridurre ad

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + F = o \qquad (5)$$

mediante le due relazioni $c\alpha+b\beta+c=o$, $b\alpha+a\beta+d=o$, funzioni soltanto di α e β. Si può dunque a queste aggiunger l'altra $app'+b\,(p+p')+c=o$, che fa sparire il termine in xy; e così l'equazione della curva si riduce all'altra equazione di tre termini.

$$Ay^2 + Cx^2 + F = o; \qquad (6)$$

riduzione che ha luogo mediante le tre relazioni

$$c\alpha+b\beta+e=o\,,\ b\alpha+a\beta+d=o\,,\ app'+b(p+p')+c=o.$$

Ed è poi manifesto che quest'ultima equazione non è suscettibile di ulteriori riduzioni.

438. Se la quantità b^2-ac è non solo diversa da *zero* ma anche positiva, invece di far sparire dalla (5) il termine in xy, si potranno far sparire entrambi i termini in x^2, y^2 (§. 433). Laonde in questa ipotesi la trasformata si potrà ridurre invece all'equazione di due termini

$$Bxy + F = o;$$

il che si consegue mediante le quattro relazioni

$$A = o\,,\; C = o\,,\; D = o\,,\; E = o$$

439. Risulta per tanto da ciò che precede che l'equazione (1) si può sempre, mediante una conveniente determinazione delle quattro costanti α, β, p, p', vale a dire mediante un convenevole cangiamento di assi, trasformare in una delle tre seguenti equazioni più semplici

I.a $Ay^2 + Cx^2 + F = o$, trasformazione possibile se la quantità $b^2 - ac$ è diversa da zero.

II.a $Bxy + F = o$, trasformazione possibile se $b^2 - ac$ è quantità positiva.

III.a $Ay^2 + Ex = o$, trasformazione possibile se si ha $b^2 - ac = o$.

Ma si è già veduto (403) che l'equazione I.a non può dar luogo ad altre linee che all' ellisse o all' iperbole; che la II.a dà luogo all' iperbole (320); e che la III.a esprime la parabola (381); perciò l'equazione (1) anch'essa non può esprimere che una di queste tre linee; e si ha in conseguenza che: *Tutte le linee di 2° ordine consistono nell' ellisse, nell' iperbole, e nella parabola.*

440. Si è visto inoltre (404 a 406) che la curva nascente dall' equazione I.a è ellisse, o iperbole secondochè A e C hanno segni simili o dissimili. Ora quando l'equazione (1) si riduce alla I.a, si ha $B = o$, cioè

$$app' + b\,(p + p') + c = o,$$

donde si trae

$$p' = -\frac{bp + c}{ap + b};$$

in conseguenza essendo

$$A = \frac{ap'^2 + 2bp' + c}{R'^2}\,, \qquad C = \frac{ap^2 + 2bp + c}{R^2},$$

sostituendo nel solo numeratore di A * il valore precedente di p', verrà

* Lo scopo di questa sostituzione essendo quello di riconoscere

$$A = \frac{-(b^2 - ac)\,(ap^2 + 2bp + c)}{R'^2\,(ap + b)^2}.$$

Paragonando questo valore di A con quello di C, se si osserva che i denominatori sono quantità essenzialmente positive, si riconosce subito che i loro segni sono simili o dissimili secondochè $b^2 - ac$ è quantità negativa o positiva. Quindi segue che la curva costruita dall' equazione (1) è ellisse se si ha $b^2 - ac < o$; ed è iperbole se sia invece $b^2 - ac > o$. Ma si è già detto (439) che questa curva è parabola ove sia $b^2 - ac = o$; adunque la curva nascente dall' equazione di 2° grado

$$ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + f = o \qquad (1)$$

sarà
ellisse se è $b^2 - ac < o$,
iperbole se è $b^2 - ac > o$,
parabola se è $b^2 - ac = o$.

§. 441. Qui giova rimarcare che il trinomio

$$ay^2 + 2bxy + cx^2,$$

formato con tutt' i termini di 2° grado dell' equazione (1), si può scindere in due fattori di 1° grado, e decomporre perciò nel prodotto

$$a\left(y + \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}\,x\right)\left(y + \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}\,x\right).$$

Ora, se è $b^2 - ac < o$, i due fattori sono immaginarii; e saranno reali e disuguali, ove sia $b^2 - ac > o$: se poi

---

il segno di A, si rende inutile la sostituzione in R'^2, ossia in

$$p'^2 + 2p'\cos\theta + 1,$$

giacchè questa quantità è sempre positiva, qualunque valore vi si ponga per p'. Non essendovi alcun dubbio pel caso in cui il secondo termine del trinomio è positivo, noi andremo a provarlo pel caso in cui questo termine è negativo. In fatti essendo $p^2 - 2p + 1$ quantità essenzialmente positiva, perchè quadrato perfetto, ed essendo $\cos\theta < 1$ sarà in valore assoluto $2p > 2p\cos\theta$, e quindi sarà $p^2 - 2p + 1 < p^2 - 2p\cos\theta + 1$; laonde [illegible] è con più ragion[illegible] è $b^2-ac=o$ essi saranno reali ed eguali, talchè allora il prodotto si trasformerà nel quadrato $a\left(y+\frac{b}{a}\right)^2$.

Dunque potrà anche dirsi che il luogo geometrico dell'equazione (1) è o ellisse, o iperbole, o parabola a misura che i due fattori di 1.° grado del trinomio $ay^2+2bxy+cx^2$ sono o immaginari, o reali e disuguali, o reali ed eguali.

442. Con ciò rimane esaurito l'oggetto che ci eravamo proposti fin dal principio del presente capitolo; ma restano a cercarsi i determinanti necessarii alla descrizione della curva corrispondente all'equazione (1), come sarebbe la posizione degli assi, la loro lunghezza, il centro, gli assintoti, ec. Noi dunque passeremo brevemente ad occuparci di tali ricerche; ed a tal effetto andremo ad esaminare con maggiore accuratezza le equazioni trasformate I.ª, II.ª, III.ª.

Per le curve a centro nascenti da (1) *trasformata in*
I.ª $Ay^2+Cx^2+F=o$

443. Quando può darsi luogo a siffatta trasformazione, la curva è ellisse o iperbole, e però è dotata di centro, il quale è la nuova origine delle coordinate (403); ma questa origine è per rispetto agli assi antichi il punto che ha per coordinate i valori di α, β dati dalle relazioni $D=o$, $E=o$ (437), ossia da

$$b\alpha+a\beta+d=o \quad , \quad c\alpha+b\beta+e=o\ ;$$

adunque le coordinate α, β del centro della curva saranno determinate dalle formole

$$\alpha=\frac{ae-bd}{b^2-ac}\ , \quad \beta=\frac{cd-be}{b^2-ac}\ .$$

444. Se nella I.ª si fa $y=o$, il valore che ne risulta

per x esprimerà la lunghezza di quel semidiametro della curva la cui direzione per rispetto all'asse antico delle x è determinata da p; ma per $y=o$ si ha

$$x^2=-\frac{F}{C}\ ;$$

in conseguenza chiamando a' il semidiametro sarà

$$a'^2=-F\frac{R^2}{ap^2+pb+c}=-F\frac{p^2+2p\cos\theta+1}{ap^2+2bp+c}\ ,$$

ove si ha (428) $F=d\beta+e\alpha+f$, ovvero

$$F=\frac{ae^2+cd^2+fb^2-acf-2bde}{b^2-ac}\ .$$

Se gli assi primitivi sieno ortogonali, si avrà $\cos\theta=o$, quindi $R^2=p^2+1$; ed in tal caso verrà

$$a^2=-F\frac{p^2+1}{ap^2+2bp+c}\ .$$

445. Trasformandosi l'equazione (1) nella I.ª, i nuovi assi coordinati formano nella curva corrispondente un sistema di diametri conjugati (403), il che, com'è chiaro, dipende unicamente dalla scomparsa del termine in xy; vale a dire dalla relazione $B=o$. Quindi due diametri della curva (1) che possono rappresentarsi con le equazioni

$$y-\beta=p\,(x-\alpha) \quad , \quad y-\beta=p'\,(x-\alpha)\ ,$$

saranno tra loro conjugati ove sussista la relazione

$$app'+b\,(p+p')+c=o.$$

446. Se questi diametri, oltre di essere conjugati fossero tra loro perpendicolari, essi allora sarebbero gli assi della curva; supposto adunque per semplicità che gli assi primitivi siano ortogonali, le direzioni degli assi di figura saranno determinate dai valori di p e p' dati dalle due relazioni

$$app'+b\,(p+p')+c=o \quad , \quad pp'+1=o\ ;$$

è che esprimeranno le tangenti degli angoli ch' essi formano con l' asse delle x. Si può osservare che o si elimina p tra queste due relazioni, o si elimina p', si perverrà sempre alla stessa equazione

$$p^2 - \frac{a-c}{b}\, p = 1,$$

e perciò i valori di p e p' saranno le due radici di questa equazione, le quali sono evidentemente sempre reali. Risolvendola, potremo statuire

$$p = \frac{a-c+\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2b}\ ,\quad p' = \frac{a-c-\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2b},$$

è così resta determinata la direzione dei due assi di una curva a centro data dall' equazione (1) (*).

(*) Se gli assi sono obbliqui, le due relazioni da cui dipendono i valori di p e p' saranno (104)

$$app' + b(p+p') + c = o$$
$$pp' + \cos\theta\,(p+p') + 1 = o$$

ed in tal caso l'equazione di cui sono radici sarà

$$(b-a\cos\theta)\,p^2 - (a-c)\,p - (b-c\cos\theta) = o$$

Risolvendola e messo per brevità

$$H = \sqrt{(a-c)^2+4(b-a\cos\theta)(b-c\cos\theta)},$$

risulterà

$$p = \frac{a+c+H}{2(b-a\cos\theta)}\ ,\quad p' = \frac{a+c-H}{2(b-a\cos\theta)}$$

Questi due valori di p e p' sono necessariamente reali. Infatti il prodotto $(b-a\cos\theta)(b-c\cos\theta)$ sviluppato divien dapprima

$$b^2 - b(a+c)\cos\theta + ac\cos^2\theta\,;$$

ma poscia aggiungendovi, e togliendovi ad un tempo $\frac{(a+c)^2}{4}\cos^2\theta$, si cangia in

$$\left(b - \frac{a+c}{2}\cos\theta\right)^2 - \frac{(a-c)^2}{4}\cos^2\theta\,;$$

447. Ma si può ottenere lo stesso intento per mezzo di una formola più semplice. Dinotando con ω l'angolo che uno degli assi di figura fa con l' asse delle x, si ha

$$\frac{\operatorname{sen}\omega}{\cos\omega} = \operatorname{tang}\omega = p\,;$$

così l' equazione in p si trasmuta dapprima in

$$(a-c)\operatorname{sen}\omega\cos\omega = -b\,(\cos^2\omega - \operatorname{sen}^2\omega)$$

e poscia, per le conosciute relazioni trigonometriche, in $(a-c)\operatorname{sen}2\omega = -2b\cos 2\alpha$; quindi si ricava

$$\frac{\operatorname{sen}2\omega}{\cos 2\alpha} = -\frac{2b}{a-c}\,;$$

e da ultimo

$$\operatorname{tang}2\omega = -\frac{2b}{a-c}.$$

Menando adunque pe'l centro della curva una retta che formi con l' asse delle x l' angolo ω così determinato, sarà questa retta uno degli assi, e l' altro sarà quello che gli è perpendicolare.

448. Conosciuta la posizione degli assi non resta che a determinarsi la loro lunghezza. A tal effetto, ritenuta tuttavia l' ipotesi che gli assi coordinati siano ortogonali, e detti rispettivamente s ed s' i semiassi le di cui direzioni sono determinate da p e p', si avrà (444)

$$s^2 = \frac{-F(p^2+1)}{ap^2+2bp+c}\ ,\quad s'^2 = \frac{-F(p'^2+1)}{ap'^2+2bp'+c},$$

e sarà ad un tempo

$$app' + b(p+p') + c = o\ ,\quad pp' + 1 = o.$$

---

e però, essendo $1-\cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta$, si otterrà

$$H = \sqrt{(a-c)^2\operatorname{sen}^2\theta + 4\left(b - \frac{a+c}{2}\cos\theta\right)^2}$$

Per tal modo si vede che il radicale è necessariamente reale perchè la quantità sottoposta al segno è la somma di due quadrati.

Traendo da queste due ultime relazioni i valori di p e p' e sostituendoli in quelli di s^2 ed s'^2, si avranno le formole per la determinazione delle lunghezze dei semiassi. Ma ad ottenerle con più semplicità si osservi che al denominatore di s^2 si può dar la forma $p\,(ap+b)+(bp+c)$, e che la prima delle due relazioni equivale a $p'(ap+b)+(bp+c)=o$, donde si trae $ap+b=-\frac{1}{p'}(bp+c)$; e poichè dalla seconda relazione si ha $p=-\frac{1}{p'}$, così verrà $ap+b=p\,(bp+c)$. Il denominatore di s^2 si cangia adunque in $(p^2+1)\,(bp+c)$; e ne risulta.

$$s^2=\frac{-F}{bp+c}.$$

In un modo consimile si troverebbe

$$s'^2=\frac{-F}{bp'+c}.$$

E però sostituendo i valori di p e p' (446) si avrà

$$s^2=\frac{-2F}{a+c+\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}\,,\quad s'^2=\frac{-2F}{a+c-\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}\ (*)$$

(*) Quando gli assi sono obbliqui si ha (444, e nota 446)

$$s^2=-F\frac{p^2+2p\cos\theta+1}{ap^2+2bp+c}\,,\quad s'^2=-F\frac{p'^2+2p'\cos\theta+1}{ap'^2+2bp'+c}$$

$$pp'+\cos\theta(p+p')+1=o\,,\quad app'+b(p+p')+c=o.$$

Intanto i due termini della frazione ch'è nella espressione di s^2 equivalgono rispettivamente a

$$p\,(p+\cos\theta)+p\cos\theta+1\,,\quad p\,(ap+b)+bp+c\,;$$

e le due relazioni danno

$$p\cos\theta+1=-p'(p+\cos\theta)\,,\quad bp+c=-p'(ap+b).$$

Così sostituendo i secondi invece dei primi membri nei due termini suddetti, e trasformando allo stesso modo i due termini della frazione ch'è nella espressione di s'^2, si avrà

Si può dare a queste espressioni un' altra forma, moltiplicando i due termini di ciascuna frazione pe 'l proprio denominatore, cambiato però il segno al radicale. Così si trova

$$s^2=F\frac{a+c-\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2\,(b^2-ac)}\,,\quad s'^2=F\frac{a+c+\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2\,(b^2-ac)}$$

449. Se la curva è ellisse s^2 ed s'^2 avranno i medesi-

$$s^2=-F\frac{p+\cos\theta}{ap+b}\,,\quad s'^2=-F\frac{p'+\cos\theta}{ap'+b}.$$

Prendendo ora una volta la somma ed una volta differenza di questi valori di s^2 ed s'^2, e riducendo i risultamenti mediante le relazioni soprascritte, verrà

$$s^2+s'^2=F\frac{a+c-2b\cos\theta}{b^2-ac}\,,\quad s^2-s'^2=F\frac{(b-a\cos\theta)\,(p'-p)}{b^2-ac}\,;$$

Ma da' valori già trovati di p e p' (nota al 446) risulta

$$(b-a\cos\theta)\,(p'-p)=-H\,;$$

in conseguenza, se delle quantità $s^2+s'^2$ ed $s^2-s'^2$ si prenda una volta la somma, ed una volta la differenza, si avrà

$$s^2=F\frac{a+c-2b\cos\theta-H}{2\,(b^2-ac)}\,,\quad s'^2=F\frac{a+c-2b\cos\theta+H}{2\,(b^2-ac)}$$

Se la curva è cerchio dovrà essere $s^2=s'^2$, e quindi $H=o$; ma essendo

$$H=\sqrt{(a-c)^2\,sen^2\,\theta+4\left(b-\frac{a+c}{2}\cos\theta\right)^2}$$

si vede che la quantità sotto il radicale non può essere nulla senzachè lo sieno separatamente le radici dei due quadrati. Ciò dunque da luogo alle due condizioni $a=c$, $b=\frac{a+c}{2}\cos\theta$; ma riducendo la seconda in virtù della prima, ne segue che il luogo geometrico dell' equazione (1) è cerchio quando sussistono le due relazioni $a=c$, $b=a\cos\theta$; il che, supposta l' equazione divisa per a, coincide con ciò che si disse al §. 131.

Se poi la curva è un' iperbole equilatera, dovendo essere $s^2=-s'^2$, converrà che sia nulla la parte razionale dei loro valori. Dunque l' equazione (1) avrà per luogo geometrico un' iperbole equilatera ove sussista la relazione $a+c-2b\cos\theta=o$.

mi segni, e se di più sono eguali, allora la curva sarà cerchio. Ma in questa ipotesi l'eguaglianza $s^2 = s'^2$ trae con se l'annullamento del radicale, il quale può solo aver luogo quando sia ad un tempo $b = o$, $a = c$; perciò l'equazione (1) (gli assi essendo ortogonali) finchè contenga il termine in xy non può mai rappresentare un cerchio; mancando poi questo termine, il suo luogo geometrico sarà cerchio ove sia $a = c$; vale a dire ove i coefficienti dei termini in y^2 ed x^2 siano eguali e di segni simili.

Se poi la curva è iperbole s^2 ed s'^2 avranno segni contrarii; e se di più sono eguali in valore, l'iperbole sarà equilatera. Or l'eguaglianza $s^2 = - s'^2$ conduce all'altra $a + c = o$, ossia ad $a = - c$; in conseguenza quando nell'equazione (1) i coefficienti dei termini in y^2 ed x^2 sono eguali e di segni contrarii, il suo luogo geometrico è un'iperbole equilatera.

450. Evvi ora a soggiungere una osservazione importante intorno a ciò che precede. Si è detto che la curva costruita dall'equazione (1) è un ellisse o un'iperbole allorchè si trova che la quantità $b^2 - ac$ è diversa da zero; e ciò perchè in questa ipotesi quell'equazione si può sempre trasmutare in un'altra della forma

$$Ay^2 + Cx^2 + F = o .$$

Intanto posto che si verifichi la condizione $b^2 - ac < o$, la quale determina l'ellisse, è ancora necessario di assicurarsi che sia negativo l'ultimo termine F * della trasformata; giacchè l'ellisse sarebbe immaginaria (407) quantevolte si trovasse $F > o$, ed ove fusse $F = o$; tutta la curva si ridurrebbe ad un punto, vale a dire alla

* E qui si rammenti che la quantità F equivale a $d\beta + e\alpha + f$, ovvero ad $ae^2 + cd^2 + fb^2 - acf - 2bde$.

nuova origine delle coordinate, e quindi al punto il quale per rispetto agli assi primitivi è definito dalle coordinate

$$\alpha = \frac{ac - bd}{b^2 - ac}, \quad \beta = \frac{cd - be}{b^2 - ac}.$$

Verificandosi poi l'altra condizione $b^2 - ac > o$, la quale determina l'iperbole, perchè si abbia effettivamente una linea curva, converrà assicurarsi che F sia diverso da zero; mentre se è nullo, allora la linea finisce di essere propriamente una curva, e si riduce al sistema di due rette, le di cui equazioni per rispetto ai nuovi assi sarebbero

$$y = \pm x \sqrt{- \frac{C}{A}};$$

ma faremo or ora conoscere le equazioni delle stesse rette per rispetto agli assi antichi.

Per l'iperbole nascente dall'equazione (1) *trasformata in*

III. $$Bxy + F = o$$

451. Questa trasformazione, ch'è subordinata alla condizione $b^2 - ac > o$, operandosi mediante le quattro relazioni $A = o$, $C = o$, $D = o$, $E = o$, ne risultano determinate tutte le quattro costanti α, β, p, p', e quindi compiutamente fissati i nuovi assi. Le due prime, $A = o$, $C = o$ danno i valori di p e p', da cui dipende la loro direzione, talchè potrà statuirsi (433)

$$p = \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad p' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}:$$

le altre due poi, $D = o$, $E = o$, somministrano i valori di

α e β, coordinate della nuova origine e si riproducono così le espressioni (424, 425)

$$\alpha = \frac{ae-bd}{b^2-ac}\ ,\ \beta = \frac{cd-be}{b^2-ac}\ ,$$

in cui si ravvisano le coordinate del centro della iperbole nascente dall' equazione (1). Ma in fatti la trasformata dimostra che questo centro è precisamente la nuova origine.

452 Si rileva dalla stessa trasformata che i nuovi assi coordinati sono gli assintoti della iperbole (320); ma le equazioni dei nuovi assi per rispetto agli antichi sono

$$y-\beta=p(x-\alpha)\quad ,\quad y-\beta=p'(x-\alpha)\ ;$$

perciò le equazioni degli assintoti dell' iperbole costruita dell' equazione (1) saranno

$$y-\frac{cd-be}{b^2-ac} = \frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{a}\left(x-\frac{ae-bd}{b^2-ac}\right)$$

$$y-\frac{cd-be}{b^2-ac} = \frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{a}\left(x-\frac{ae-bd}{b^2-ac}\right).$$

453. Queste equazioni danno luogo ad un' importante osservazione. Se per l' antica origine si tirano due rette parallele agli assintoti, le loro equazioni saranno

$$y-\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{a}\,x=o\ ,\ y-\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{a}\,x=o,$$

e cade sotto l' occhio che i loro primi membri sono i due fattori del trinomio $ay^2+2bxy+cx^2$, formato dai tre termini di 2° grado dell' equazione (1).

Or da ciò segue che se l'espressione formata con tutt' i termini di 2° grado di un' equazione esprimente un' iperbole si decomponga n i suoi due fattori di 1° grado, questi fattori eguagliati a zero saranno le equazioni di due rette parallele agli assintoti; il che sovente facilita molto la loro determinazione. A questo proposito bisogna ramen-

mentare (441) che i detti fattori nel caso dell' iperbole sono necessariamente reali, laonde se la data equazione abbia la forma

$$(my+nx)(m'y+n'x)+hy+lx+k=o\ ,$$

ed m, n, m', n' siano quantità reali, il suo luogo geometrico sarà un' iperbole, i di cui assintoti saranno paralleli alle rette nascenti dalle equazioni

$$my+nx=o\quad ,\quad m'y+n'x=o.$$

E più generalmente è manifesto che anche l' equazione

$$(my+nx+s)(m'y+n'x+s')+hy+lx+k=o$$

debba esprimere un' iperbole, i di cui assintoti saranno paralleli alle rette date dalle equazioni

$$my+nx+s=o\quad ,\quad m'y+n'x+s'=o.$$

454. Conosciute le equazioni dei due assintoti si può calcolare l' angolo da essi compreso. Dinotandolo con V si trova (supposto retto l' angolo degli assi) (*).

$$\tang V = \frac{2\sqrt{b^2-ac}}{a+c}\ .$$

Ove fusse $a+c=o$, cioè $a=-c$, l' angolo assintotico sarebbe retto; e si riproduce in tal guisa la condizione che determina l' iperbole equilatera (449).

455. Supponendo tuttavia ortogonali gli assi si ha

$$B=\frac{app'+b(p+p')+c}{\sqrt{p^2+1}\ \sqrt{p'^2+1}}\ ;$$

(*) Per gli assi obbliqui si ha

$$\tang V=\frac{2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\sqrt{b^2-ac}}{a+c-2b\cos\theta}\ ,$$

e l' iperbole sarà equilatera ove sia $a+c-2b\cos\theta=o$; risultamento già conosciuto (nota al § 448 in fine).

ma poscia restituendo a p e p' i loro valori scritti poc' anzi (452), o meglio facendo uso delle relazioni $p+p'=-\frac{b}{a}$, $pp'=\frac{c}{a}$, nascenti da che p, p' son radici dell' equazione $ap^2+2bp+c=o$, risulta

$$B=\frac{-2(b^2-ac)}{\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}.$$

Quindi la trasformata diviene

$$2(b^2-ac)xy-F\sqrt{(a-c)^2+4b^2}=o;$$

e così si rileva che la potenza della iperbole (316) sia espressa da

$$\frac{F\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2(b^2-ac)}.$$

456. In riguardo alla trasformata $Bxy+F=o$ bisogna rimarcare che ove fusse $F=o$, essa si ridurrebbe ad $xy=o$, ed equivarrebbe alle due equazioni $x=o$, $y=o$ esprimenti i nuovi assi coordinati. In tal caso adunque l' iperbole cesserebbe di essere propriamente una linea curva, riducendosi al sistema di due rette, vale a dire ai suoi assintoti. Segue da ciò che quando nell' equazione (1) oltre alla condizione $b^2-ac>o$ si verifica anche l' altra $F=o$, essa allora esprime il sistema di due linee rette, il che era già noto (450); ma ora si scorge di più che le equazioni di queste rette rispetto agli assi primitivi sono quelle stesse scritte per gli assintoti al §. 452.

Per la parabola nascente dall' equazione (1) *trasformata in*

III. $$Ay^2+Ex=o$$

457. La forma di quest' equazione mostra (381) che

il nuovo asse delle ascisse è un diametro della parabola e poichè la sua direzione è determinata dal valore di p dato dalla relazione (436) $ap+b=o$, ed è noto inoltre che tutt' i diametri della parabola sono trà loro paralleli (374); così è manifesto che i diametri della parabola costruita dall' equazione (1) formano con l' asse delle x un angolo determinato da

$$p=-\frac{b}{a}.$$

458. Da ciò risulta che tutt' i diametri della parabola si possono rappresentare con l' equazione $y=-\frac{b}{a}x+h$, ov' è indeterminata la sola h, la quale varia a misura che varia la posizione del diametro; e però l' equazione del diametro che passa per l' origine sarà $y=-\frac{b}{a}x$, ovvero $ay+bx=o$. Faremo intanto rimarcare che il trinomio $ay^2+2bxy+cx^2$ formato con tutt' i termini di 2° grado dell' equazione (1) è un quadrato perfetto a causa della relazione $b^2=ac$ (441); cosicchè la detta equazione si può scrivere

$$\frac{1}{a}(ay+bx)^2+2dy+2ex+f=o;$$

e quindi avviene che la retta nascente dall' equazione, che si forma eguagliando a zero la radice del quadrato, è il diametro della curva che passa per l' origine.

459. Dopo ciò è manifesto che un' equazione di 2° grado data sotto l' una, o l' altra delle due forme

$$(my+nx)^2+hy+lx+k=o$$
$$(my+nx+s)^2+hy+lx+k=o$$

esprime una parabola, i cui diametri sono paralleli alla retta dell' una o dell' altra equazione

$$my+nx=o \quad , \quad my+nx+s=o.$$

460. Ritornando ora alla trasformata osserveremo che essendo essa subordinata alle tre relazioni

$$ap + b = o \qquad 1.^a$$

$$(a\beta + b\alpha + d)\, p' + (b\beta + c\alpha + e) = o \qquad 2.^a$$

$$a\beta^2 + 2b\alpha\beta + c\alpha^2 + 2d\beta + 2e\alpha + f = o \qquad 3.^a$$

contenenti le quattro costanti α, β, p, p', si potrà tra esse statuire anche l'altra

$$pp' + 1 = o. \qquad 4.^a$$

la quale, nella ipotesi che gli assi primitivi sieno ad angolo retto, rende ancora i nuovi ortogonali, e quindi farà sì che quello delle ascisse divenga diametro principale, vale a dire l'asse della parabola. Allora la nuova origine, ch'è un punto della curva, ne sarà il vertice principale, e le sue coordinate si avranno nei valori che per α a β si traggono dalle quattro soprascritte relazioni. Ora avendosi dalla 1^a. $p = -\frac{b}{a}$, la 4^a. darà $p' = \frac{a}{b}$;

e però la 2^a, messovi ac in luogo di b^2, si cangerà in

$$a\beta\,(b + c) + b\alpha\,(a + c) + ad + be = o,$$

od ancora in

$$a\beta + b\alpha + \frac{ad + be}{a + c} = o.$$

Inoltre è chiaro che alla 3^a relazione si può dar la forma

$$\frac{1}{a}\,(a\beta + b\alpha)^2 + 2d\beta + 2e\alpha + f = o;$$

laonde se si faccia per brevità

$$\frac{ad + be}{a + c} = \mathrm{M},$$

la determinazione dei valori di α e β si vedrà ridotta alla risoluzione delle due equazioni

$$a\beta + b\alpha + \mathrm{M} = o$$

$$d\beta + e\alpha + \frac{1}{2a}\,(\mathrm{M}^2 + af) = o;$$

e quindi risulta che le coordinate del vertice della parabola sono determinate dalle formole (*)

$$\alpha = \frac{(\mathrm{M}^2 + af) - 2d\mathrm{M}}{2(ae - bd)}, \qquad \beta = \frac{b(\mathrm{M}^2 + af) - 2ac\mathrm{M}}{2a(ae - bd)}$$

Trovato il vertice, la posizione dell'asse di figura si avrà nella retta che passa per questo punto, e forma con l'asse delle ascisse un angolo determinato da $p = -\frac{b}{a}$.

461. Ma per descrivere la curva è ancora necessario a conoscersi il parametro dell'asse. Scrivendo come segue la trasformata $y^2 + \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{A}}x = o$ si ha (383) *par.* $= -\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{A}}$.

Ora essendo

$$\mathrm{A} = \frac{ap'^2 + 2bp' + c}{p'^2 + 1}, \qquad \mathrm{E} = 2\,\frac{(a\beta + b\alpha + d)\,p + b\beta + c\alpha + e}{\sqrt{p^2 + 1}}$$

ed è poi $p = -\frac{b}{a}$, $p' = \frac{a}{b}$, sostituendo questi valori nelle espressioni di A ed E, e poscia ponendo nei risultati ac in luogo di b^2, verrà

$$\mathrm{A} = a + c, \qquad \mathrm{E} = \frac{2(ae - bd)}{\sqrt{a(a + c)}}.$$

In conseguenza l'equazione della parabola rapportata al suo asse ed alla tangente nel vertice sarà

$$y^2 + \frac{2\,(ae - bd)}{(a + c)\sqrt{a(+a)}}\,x = o,$$

(*) Queste formole istesse si possono ritenere quando gli assi primitivi sono obbliqui; allora però la quantità rappresentata in compendio con M non e più quella scritta di sopra, ma è invece

$$\mathrm{M} = \frac{ad + be - \cos\theta\,(ae + bd)}{a + c - 2b\cos\theta}.$$

Vi si perviene con un procedimento analogo a quello seguito per gli assi ortogonali, ed osservando che la relazione $4.^a$ per gli assi obbliqui si cangia in (104)

$$pp' + \cos\theta\,(p + p') + 1 = o$$

e quindi si avrà

$$parametro = -\frac{2(ae-bd)}{(a+c)\sqrt{a(a+c)}}.$$

Per tal guisa, conosciuta la posizione dell' asse e del vertice, e conosciuta la lunghezza del parametro, si hanno tutti gli elementi necessari alla descrizione della curva.

462. Evvi ora ad osservare che, ove fusse

$$ae-bd=o,$$

l' ultima equazione si ridurrebbe ad $y^2=o$, ossia ad $y=o$; e parrebbe doversi conchiudere che in tal caso il luogo geometrico dell' equazione (1) è una retta invece di una curva; però questa conchiusione non sarebbe legittima, mentre evvi ancora a rimarcare che i valori di α e β, coordinate della nuova origine, divengono infiniti, e ne risulta che la trasformazione precedente è impossibile. Sono perciò incompatibili le due relazioni 1ª e 2ª, cioè $D=o$, $E=o$, da cui sono tratti i valori di α e β, e non è quindi possibile, se è $ac-bd=o$, di far sparire contemporaneamente dalla trasformata il termine Dy, e l' ultimo F.

463 Se fosse permesso di farne sparire il solo termine in y a 1° grado e ridurla ad

$$Ay^2+Ex+F=o,$$

converrebbe porre la relazione $D=o$, ossia

$$(a\beta+b\alpha+d)\,p'+b\beta+c\alpha+e=o,$$

la quale moltiplicata per a, e messo b^2 per ac, e bd per ae, si muta in

$$(ap'+b)\,(a\beta+b\alpha+d)=o$$

o solo in

$$a\beta+b\alpha+d=o, \qquad 5^a$$

mentre essendo già $ap+b=o$ non può supporsi $ap'+b=o$, poichè ne verrebbe $p=p'$, il che è impossibile (425); ma, così essendo, si avrà pure

$$b\beta+c\alpha+e=o. \qquad 6^a$$

Dunque la relazione $D=o$ porta con se necessariamente le due relazioni 5ª e 6ª, le quali non essendo distinte, perchè l' una conseguenza dell' altra, non valgono a determinare i valori delle due indeterminate α, β. Quindi si può prendere per origine un punto qualunque, e basta che tra le sue coordinate α, β sussista una dalle soprascritte relazioni, perchè sparisca dalla trasformata il termine in y. Ma bisogna osservare che sparisce ad un tempo anche il termine in x, giacchè si ha

$$E=\frac{2}{R}\Big((a\beta+b\alpha+d)\,p+b\beta+c\alpha+e\Big);$$

ond' è che la trasformata si riduce all' equazione

$$Ay^2+F=o,$$

nella quale più non figura la variabile x. Questa equazione si sciude nelle due

$$y=+\sqrt{-\frac{F}{A}}\ ,\ y=-\sqrt{-\frac{F}{A}}$$

esprimenti due rette parallele; e perciò nella ipotesi attuale il luogo geometrico dell' equazione (1) si riduce al sistema di due rette tra loro parallele.

464 Segue per tanto da ciò che precede che quando si verificano le due condizioni

$$b^2-ac=o\quad ,\quad ae-bd=o\ ,$$

allora il luogo geometrico dell' equazione (1), che in virtù della prima sarebbe una parabola, si riduce per virtù della seconda a due rette parallele; donde risulta che in tal caso quell' equazione debba potersi sciudere in due fattori di 1° grado. Ma in fatti la detta equazione moltiplicata per a si cangia, mediante le soprascritte relazioni, in

$$a^2y^2+2abxy+b^2x^2+2ady+2bdx+af=o\ ,$$

ovvero in

$$(a^2y^2+b^2x^2+d^2+2abxy+2ady+2bdx)-(d^2-af)=o,$$

od ancora in

$$(ay+bx+d)^2-(d^2-af)=o.$$

Quindi essa si decompone in

$$(ay+bx+d-\sqrt{d^2-af})(ay+bx+d+\sqrt{d^2-af})=o,$$

e così nelle quantità chiuse tra le parentesi si hanno i suoi due fattori di 1° grado. Le equazioni adunque delle due rette, che risultano dall' equazione (1), rapportate agli assi primitivi, che possono essere o obbliqui, o ortogonali, saranno

$$ay+bx+d-\sqrt{d^2-af}=o\quad ,\quad ay+bx+d+\sqrt{d^2-af}=o$$

e queste due rette sono evidentemente parallele.

Importa però di rimarcare che ove fosse $d^2-af<o$, le due equazioni, e quindi le due rette sarebbero immaginarie. Sicchè in tal caso l' equazione (1) è assurda, e non può costruire alcuna linea.

Se poi si avesse $d^2-af=o$, le due rette diverrebbero coincidenti, ed in tal caso l' equazione (1) prenderebbe la forma

$$(ay+bx+d)^2=o,$$

cioè il suo primo membro sarebbe un quadrato perfetto. Quindi il suo luogo geometrico sarebbe l' unica retta data dall' equazione

$$ay+bx+d=o.$$

Da ciò risulta che quando nell' equazione (1) si verificano le tre condizioni

$$b^2-ac=o\ ,\ ac-bd=o\ ,\ d^2-af=o\ ,$$

allora il suo primo membro è un quadrato perfetto; ed il suo luogo geometrico è una retta la di cui equazione è la radice di quel quadrato eguagliata a zero.

CAPITOLO XII.

Delle Sezioni del cono

465 Si sa dagli elementi che la linea nascente dalla comune intersezione della superficie di un cono retto con un piano perpendicolare all' asse è una circonferenza di cerchio; ed ora andremo a dimostrare che, se il piano segante ha qualunque altra direzione, questa linea è in generale una curva di 2° ordine.

Ma quì, generalizzando alquanto le nozioni elementari, noi intenderemo per cono la superficie generata da una retta indefinita che gira intorno ad un punto fisso, e fa sempre uno stesso angolo con una retta fissa menata per quel punto. Questo punto sarà il vertice del cono; la retta fissa ne sarà l' asse; e la mobile ne sarà la generatrice. E poichè la generatrice è illimitata dai due lati del vertice, così è che il cono si compone di due parti indefinite perfettamente simili, situate a parti opposte del vertice, ed alle quali suol darsi il nome di *nappi*.

Risulta dalla generazione del cono che ogni piano perpendicolare all' asse debba tagliarlo secondo un cerchio; e di più che ogni piano condotto per l' asse istesso debba tagliarlo secondo due generatrici, vale a dire secondo due rette che passano pe 'l vertice, e fanno tra loro un angolo costante.

466. Or sia IIh l' asse e B il vertice di un cono generato nel modo prescritto; e sia KAK' [*fig. 88*] la sua comune intersezione con un piano comunque diretto; per definire la natura di questa linea andremo a cercarne l' equazione. A tal' effetto si conduca per l' asse un piano perpendicolare a quello di KAK'; esso taglierà la superficie secondo due generatrici GBg, G'Bg', e taglierà il piano di KAK' secondo una retta Ax. Inoltre da qualunque P

della linea KAK' si meni ad Ax la perpendicolare PS, la quale riuscirà perpendicolare al piano GBG'; ed intanto presa la Ax per asse delle ascisse con l'origine in A saranno AS, PS le coordinate rettangole del punto P; e come all'ordinario le indicheremo con x ed y. Ciò posto si meni da S la DE perpendicolare ad Hh; e per le rette SP, DE si faccia passare un piano; sarà questo piano anch'esso perpendicolare ad Hh, e quindi segherà il cono secondo un cerchio DPE, che avrà per diametro DE, cui sarà perpendicolare la retta SP, ordinata della curva KAK'; Perciò si avrà $y^2 = DS \times SE$; ma resta ora a cercare le espressioni di DS ed SE in funzione di AS, ossia dell'ascissa x.

Si meni BI parallela ad Ax, ed AQ parallela a DE, e sia C il punto in cui AQ incontra BI; indi si ponga

$$BC = a\ ,\ AC = b\ ,\ AB = c\ ,\ AQ = q.$$

Pei triangoli simili BAC, ADS si hanno le due proporzioni

$BC : AC = AS : DS$, ossia $a : b = x : DS$, donde $DS = \frac{bx}{a}$

$BC : BA = AS : AD$, ossia $a : c = x : AD$, donde $AD = \frac{cx}{a}$

Inoltre per essere AQ parallela a DE si ha

$BA : AQ = BD : DE$, cioè $c : q = c + \frac{cx}{a} : DE$;

sarà perciò $DE = \frac{q(a+x)}{a}$; e quindi risulta

$$SE = DE - DS = \frac{q\,(a+x)}{a} - \frac{bx}{a} = q + \frac{q-b}{a}\,x.$$

L'equazione della linea KAK' sarà dunque

$$y^2 = \frac{b(q-b)}{a^2}\,x^2 + \frac{bq}{a}\,x\ ;$$

ed è perciò una curva di 2° ordine.

467 Questa curva per tanto sarà ellisse, iperbole, o parabola secondochè il coefficiente di x^2 è negativo, positivo, o nullo; vale a dire secondochè b è maggiore, minore, o eguale a q; e nella figura, a misura che AC è maggiore, minore, o eguale ad AQ, e quindi a misura che la BI parallela ad Ax cade o fuori dell'angolo GBG' [*fig. 88*] o dentro di esso [*fig. 89*]; o coincida con uno dei suoi lati [*fig. 90*]. Or si osservi che BG cade fuori dell'angolo GBG' quando la Ax incontra le due generatrici BG, BG' da una stessa parte del vertice B; e cade invece al di dentro se le incontra a parti opporte; ed è poi manifesto che la BI coincide con una delle due generatrici nel solo caso che la Ax sia alla generatrice istessa parallela. Dunque in fine possiamo conchiudere che la linea nascente dalla intersezione di un piano con la superficie di un cono retto è ellisse se la comune intersezione di questo piano con quello che gli è condotto perpendicolarmente per l'asse del cono, incontra le due corsispondenti generatrici da una stessa parte del vertice; è iperbole se l'incontro avviene a parti opposte del vertiee; e finalmente è parabola se la comune intersezione dei due piani suddetti sia parallela ad una delle generatrici.

468 Poichè le comuni intersezioni de' piani e coni retti sono linee di 2° ordine, queste curve sono indifferentemente chiamate o linee di 2° ordine, o sezioni coniche; ma vedremo a suo luogo riprodotte ancora le stesse curve nelle intersezioni dei piani non solo con coni obbliqui, ma ancora con altre superficie.

CAPITOLO XIII.

Centri, Diametri, Tangenti, ed Assintoti delle curve considerati in generale.

CENTRO

469 Essendo il centro di una curva quel punto in cui restano bisecate le corde che vi passano, si rende manifesto che non tutte le curve son dotate di centro; e di più che, nelle curve algebriche propriamente dette, questo punto è necessariamente unico.

Risulta ancora dalla definizione del centro che, ov'esso coincida con l'origine, qualunque sia d'altronde la direzione degli assi, tutt'i punti della curva avranno due a due coordinate eguali e di segno contrario; laonde in questa ipotesi la sua equazione non dovrà soffrire alcun cangiamento se vi si cangino simultaneamente i segni delle due variabili. E viceversa è chiaro che, se l'equazione di una curva rimane inalterata col cambiarvi ad un tempo la x in $-x$, e la y in $-y$, allora l'origine è necessariamente centro della curva. Così si riconosce che le curve $ay^2+bxy+cx^2+f=o$, $ay^2+cx^2+f=o$ hanno per centro l'origine delle coordinate, al pari delle altre $y=x^3$, $(y^2+x^2)^2=a^2(x^2-y^2)$. E qui faremo osservare che, se l'equazione è di grado pari, perchè possa col detto cangiamento rimanere inalterata, dovrà solo contenere termini di grado pari, compresi tra questi il termine costante, e quelli della forma $x^m\, y^n$, essendo m ed n numeri entrambi pari, o entrambi dispari. Che se poi l'equazione sia di grado impari, dovrà invece contener soltanto termini di grado impari, compresi quelli della forma $x^m\, y^n$, m ed n essendo numeri uno pari e l'altro dispari; e non dovrà in questo caso esistere termine costante.

470 Se un'equazione rimane alterata pe'l cangiamento di

cui si è discorso, non bisogna già conchiudere che la curva corrispondente sia sfornita di centro, potendo accadere che questo punto manchi effettivamente; ma potendo anche darsi che esista, e sarà allora necessariamente diverso dall'origine. Supposto che esista e siano α, β le sue coordinate, trasportandovi l'origine col sostituire nell'equazione $x+\alpha$ ed $y+\beta$ in luogo di x ed y, la nuova equazione non dovrà contenere che soli termini di grado pari, o soli termini di grado impari, secondochè la proposta è di grado pari, o di grado impari.

471. Da tutto ciò risulta pertanto il seguente metodo per riconoscere se una curva sia dotata di centro, ed assegnare un tal punto. Si porrà nell'equazione della curva $x+\alpha$ in luogo di x, ed $y+\beta$ in luogo di y; e poi si cercherà di disporre delle indeterminate α, β per modo da far sparire tutt'i termini di grado impari se la proposta è di grado pari, ed invece tutti quelli di grado pari, compreso il termine costante, se la proposta è di grado impari.

472. Se si tratta, per esempio, di un'equazione di 2° grado, la trasformata avrà in generale sei termini, tre dei quali di grado pari, e due di grado impari, cioè quelli in x ed y a 1° grado; saranno questi adunque i soli termini che in tal caso dovranno farsi sparire, e la determinazione delle due costanti α, β sarà generalmente possibile, perchè dipendente da due sole condizioni. Supposto pertanto che la proposta equazione di 2° grado sia come all'ordinario

$$ay^2+2bxy+cx^2+2dy+2ex+f=o, \qquad (1)$$

cangiando x in $x+\alpha$ ed y in $x+\beta$, la trasformata sarà

$$\left.\begin{aligned} ay^2+2bxy+cx^2+2(a\beta+b\alpha+d)y+2(b\beta+c\alpha+e)\,x \\ +(a\beta^2+2b\alpha\beta+c\alpha^2+2d\beta+2ex+f) \end{aligned}\right\}=o;$$

e però la determinazione delle due costanti α e β dipenderà dalle due condizioni

$$b\beta+c\alpha+e=o \quad , \quad a\beta+b\alpha+d=o \; ,$$

da cui si ricava

$$\alpha=\frac{ae-bd}{b^2-ac} \quad , \quad \beta=\frac{cd-be}{b^2-ac} \, .$$

Dunque le curve nascenti dall' equazioni (1) sono in generale dotate di centro; ed in queste espressioni si veggono riprodotte le sue conosciute coordinate.

Forma eccezione il caso in cui si ha $b^2-ac=o$, perchè allora i valori di α e β divengono infiniti e quindi inassegnabili. Ma già sappiamo che in questa ipotesi la curva è parabola, la quale è sfornita di centro; se pure non piaccia di dire che per questa curva il centro è situato a distanza infinita.

473. Se si tratta di un'equazione di 3° grado, dovranno in tal caso farsene sparire i termini di grado pari, cioè quelli in x^2, y^2, xy, e'l termine costante; e però la determinazione delle due indeterminate α e β dipenderà da quattro equazioni di condizione; ma poichè due sono già sufficienti a questo scopo, così sarà necessario che i valori di α e β ricavati da due qualunque tra esse soddisfino ancora alle altre due. Verificandosi questa circostanza la curva corrispondente sarà dotata di centro, il quale non potrà esistere nel caso opposto. Questa eccedenza di condizioni fa si che per le curve di 3° ordine quelle dotate di centro costituiscano una eccezione molto ristretta a fronte di quelle che ne sono sfornite; e questa eccezione si fa manifestamente di più in più rara a misura che si eleva il grado della curva, giacchè il numero delle condizioni eccedenti a doversi verificare va sempreppiù diventando maggiore del numero fisso delle costanti disponibili, ch' è sempre di due.

474. Porremo fine a queste osservazioni facendo rimarcare che quando una curva di ordine dispari ammette un cen-

tro, questo centro deve necessariamente esistere sulla curva, dappoichè tra i termini da farsi sparire dalla trasformata v'ha in tal caso quello indipendente dalle due coordinate. Se poi la curva è di ordine pari il centro può trovarsi così bene o fuori della curva, o sul suo perimetro, come per esempio avviene per la curva dell' equazione $(y^2+x^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, che appartiene alla lemniscata.

Diametri

475. La definizione del diametro data al §° 173 è suscettibile di maggiore estensione, mentre per una curva qualunque si da il nome di diametro alla linea che passa pei punti medii di una serie di corde parallele: linea, retta qualche volta, ma curva in generale.

Nella curve di 2° ordine si riconosce quasi a colpo di occhio l'esistenza di diametri rettilinei. In fatti ordinando la loro equazione generale rispetto ad y si ha

$$y^2+2\,\frac{bx+d}{a}\,y+\frac{cx^2+2ex+f}{a}=o,$$

e le sue radici saranno le ordinate di due punti della curva corrispondenti ad una medesima ascissa. Ma la semisomma delle due ordinate equivale all' ordinata del punto medio della distanza di que' due punti (64); distanza ch' è attualmente una corda della curva parallela all' asse delle ordinate; e la semisomma delle due radici equivale $a-\frac{bx+d}{a}$; perciò tra le coordinate x, y del punto medio di questa corda si avrà la relazione $y=-\frac{bx+d}{a}$ ossia

$$ay+bx+d=o\,;$$

e quest' equazione, che appartiene ad una retta, sarà in conseguenza quella del diametro che divide in parti eguali le corde parallele all' asse delle y. Ordinando invece l' equazione della curva rispetto ad x si troverebbe in un modo consimile che anche il diametro passante pei punti medii delle corde parallele all' asse delle x è una retta data dall' equazione

$$by+cx+e=o\ ^*.$$

Dopo ciò riflettendo che le direzioni degli assi si posseno cangiare a piacere, si ha subito la conchiusione che i diametri delle curve di 2° ordine sono tutti rettilinei.

476. Ma la ricerca de' diametri in generale mena al seguente problema: *Trovare il luogo geometrico dei punti medii di un sistema di corde parallele di una data curva.* Noi lo risolveremo per le curve di 2° ordine date dall' equazione (1); ma il metodo semplicissimo di cui faremo uso, ha il vantaggio di potersi estendere alle curve di qualsivoglia ordine. Sia

$$y=px+q$$

l' equazione di una delle corde; x', x'' le ascisse delle sue estremità; e t, u le coordinate del suo punto medio; si avrà così

$$2t=x'+x'' \quad , \quad u-pt=q.$$

Ciò posto eliminando y tra le equazioni della curva e della corda si ha l' equazione

$$(ap^2+2bp+c)x^2+2((ap+b)q+dp+e)x+aq^2+2pq+f=o.$$

le cui radici sono i valori di x', x''; e quindi si hanno le due relazioni

$$(ap^2+2bp+c)\,x'^2+2\,((ap+b)q+dp+e)x'+aq^2+2dq+f=o.$$
$$(ap^2+2bp+c)\,x''^2+2\,((ap+b)q+dp+e)x''+aq^2+2dq+f=o.$$

* È opportuno di rimarcare che le due equazioni $ay+bx+d=o$, $by+cx+e=o$, appartenenti ai diametri che pasano pei punti medii delle corde parallele rispettivamente agli assi delle y e delle x, sono le due derivate dell' equazione della curva prese l' una rispetto ad y e l' altra rispetto ad x.

Prendendone la differenza, il risultamento sarà divisibile per $x'-x''$, e si otterrà

$$(ap^2+2bp+c)\,(x'+x'')+2\,((ap+b)q+dp+e)=o.$$

Ponendo in fine $2t$ in luogo di $x'+x''$, ed $u-pt$ in luogo di q, si avrà pe 'l luogo geometrico cercato l' equazione seguente

$$(ap+b)\,u+(bp+c)\,t+dp+e=o$$

o, ch' è lo stesso,

$$(ap+b)\,y+(bp+c)\,x+dp+e=o\,;$$

e si ritorna di nuovo alla conchiusione che nelle curve di 2° ordine ogni diametro è una linea retta.

L' equazione or ora trovata appartiene adunque al diametro che passa pei punti medii delle corde parallele la di cui direzione è determinata da p. Scrivendola come segue

$$p\,(ay+bx+d)+by+cx+e=o.$$

si fa palese ch' essa, qualunque sia p, è soddisfatta dai valori di x e y comuni alle due equazioni

$$ay+bx+d=o \quad , \quad by+cx+e=o\,;$$

e da ciò risulta che tutt' i diametri passano pe 'l punto d' incontro delle due rette nascenti da queste due equazioni, le quali del resto esprimono esse stesse i diametri che bisecano le corde parallele agli assi coordinati (475). Ma era in fatti già noto che tutt' i diametri s' intersecano nel centro della curva. Traendo dalle due ultime equazioni i valori di x ed y si trova

$$x=\frac{ae-bd}{b^2-ac} \quad , \quad y=\frac{cd-be}{b^2-ac}\,,$$

e si riproducono così le conosciute coordinate del centro. Queste coordinate sono infinite, e quindi inassegnabili se è $b^2-ac=o$, cioè se la curva è parabola; dunque i diametri della parabola s' incontrano a distanza infinita; il che equivale a dire, com' è già noto, ch' essi son tutti tra loro paralleli. Ma ciò risulta ancora direttamente dall' osservare che l' equazione generale dei diametri moltiplicata per a, e messovi poscia b^2 per ac si può mettere sotto la forma

$$ay+bx+a\frac{dp+e}{ap+b}=o,$$

la quale dimostra che per questa curva la direzione dè diametri è costante e determinata da $-\frac{b}{a}$.

Suppongasi ora che la curva sia dotata di centro, e siano

$$y=px+q\ldots(d) \quad , \quad y=p'x+q'\ldots(d')$$

le equazioni di due diametri qualunque. Se uno di questi diametri, per esempio il secondo, biseca le corde parallele al primo, si avrà tra p e p' la relazione

$$p'=-\frac{bp+c}{ap+b}\ , \text{ ossia } app'+b(p+p')+c=o.$$

Traendone il valore di p risulta

$$p=-\frac{bp'+c}{ap'+b}$$

e quindi si vede che anche il primo diametro (d) biseca le corde parallele al secondo (d'). Segue da ciò che se un diametro biseca le corde parallele ad un altro diametro, questo alla sua volta biseca le corde parallele al primo; e però i due diametri son tra loro conjugati. Ed è manifesto che due diametri di una curva a centro saranno conjugati se tra i determinanti delle loro direzioni p e p' sussista la relazione

$$app'+b(p+p')+c=o.$$

la quale era già per altre vie conosciuta.

Delle tangenti

477. Un metodo acconcio per trovare l' equazione della tangente di qualunque curva è quello già messo in uso per le curve di 2° ordine date dalle loro equazioni più semplice (nota al §. 220), e che consiste nel supporre che una retta, secante la curva in due punti, circoli intorno ad uno per modo che l' altro se gli avvicini continuamente. Quando il secondo punto è giunto a coincidere col primo, allora la retta da secante diviene tangente in questo punto; e questa coincidenza sarà espressa algebricamente col supporre tra loro uguali tanto le ascisse quanto le ordinate dei due punti.

Sia (x', y') il punto della curva cui debba condursi la tangente, e sia

$$y-y'=p(x-x')$$

la sua equazione; esprimendo con (x'', y'') un altro punto qualunque della curva, l' equazione della retta che lo congiunge al primo sarà

$$y'-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x')$$

e però il valore di p, determinante della direzione della tangente, sarà quello che prende la frazione $\frac{y'-y''}{x'-x''}$ quando vi si fa $x''=x'$ ed $y''=y'$. Ma prima è uopo di esprimere che i due punti esistono sulla nuova; senza di che la frazione prenderebbe la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, da cui nulla sarebbe più lecito di conchiudere. Or sia $F(x,y)=o$ l' equazione della curva: equazione che supporremo algebrica, razionale, ed intera; l' esistenza dè due punti sopra di essa darà luogo alle due relazioni $F(x', y')=o$, $F(x'', y'')=o$; ed or vedremo che la relazione

$$F(x',y') - F(x'',y'') = o$$

formata con la differenza di quelle, somministra una espressione equivalente ad $\frac{y'-y''}{x'-x''}$, e che acquista un valore determinato quando vi si fa $x''=x'$ ed $y''=y'$.

Bisogna riflettere che qualunque sia il grado dell'equazione $F(x,y)=o$, oltre al termine indipendente dalle variabili, gli altri saranno di tre specie, o solo in x, o solo in y, o in x ed y insieme; e poichè basta al nostro scopo di porre in vista un termine generale per ciascuna specie, così supporremo che questa equazione sia

$$mx^a + ny^b + qx^c y^d + s = o.$$

Allora la relazione accennata di sopra sarà

$$m\,(x'^a - x''^a) + n\,(y'^b - y''^b) + q\,(x'^c\,y'^d - x''^c\,y''^d) = o\,;$$

ma essendo identicamente

$$x'^c\,y'^d - x''^c\,y''^d = x''^c\,(y'^d - y''^d) + y'^d\,(x'^c - x''^c)\,,$$

la medesima prenderà la forma

$$m(x'^a - x''^a) + n(y'^b - y''^b) + qx''^c(y'^d - y''^d) + qy'^d(x'^c - x''^c) = o.$$

È noto intanto che il binomio $(x'^a - x''^a)$ si può decomporre in un prodotto di due fattori, un de' quali è il binomio di 1°. grado $(x' - x'')$, e l'altro è il polinomio $(x'^{a-1} + x'^{a-2}\,x'' + x'^{a-3}x''^2 + \ldots + x''^{a-1})$; il di cui grado è $a-1$; perciò dinotando questo polinomio con X^{a-1}, si avrà $(x'^a - x''^a) = (x' - x'')\,X^{a-1}$; ed applicando la stessa decomposizione agli altri termini della precedente relazione, la medesima si muterà in

$$m(x'-x'')X^{a-1} + n(y'-y'')Y^{b-1} + qx''^c(y'-y'')Y^{d-1} + qy'^d(x'-x'')X^{c-1} = o$$

Quindi si ricava l'espressione cui si è poc'anzi accennato

$$\frac{y'-y''}{x'-x''} = -\frac{mX^{a-1} + qy'^dX^{c-1}}{nY^{b-1} + q\,x''^cY^{d-1}}\,.$$

La legge onde i suoi termini derivano da quelli della

data equazione è ben manifesta. Il numeratore si forma da tutt'i termini in cui trovasi la x, cioè dà termini mx^a, $qx^c\,y^d$, cangiandovi x in X, e diminuendo i rispettivi esponenti di 1. Per l'opposto il denominatore si forma da tutt'i termini ove trovasi la y, cioè ny^b, $qx^c\,y^d$, cangiando pure y in Y, e diminuendo di 1 i rispettivi esponenti. Ma per compiere la trasformazione converrà ancora cangiare nel numeratore la y in y', e nel denominatore la x in x''.

Resta ora a vedere qual sia il valore che prende la nuova espressione quando vi si fa $x''=x'$ ed $y''=y'$; e perciò si osservi che il polinomio X^{a-1}, ossia

$$x'^{a-1} + x'^{a-2}\,x'' + x'^{a-3}\,x''^2 + \ldots\,x''^{a-1}\,,$$

essendo omogeno di grado $a-1$, nel caso particolare di $x''=x'$, tutt'i suoi termini, che sono al numero di a, divengono ciascuno eguale ad x'^{a-1}; e quindi il polinomio di riduce al monomio $a\,x'^{a-1}$, che è il *derivato* dell'altro monomio x'^a. Dopo ciò è manifesto che quando nell'espressione precedente si fa $x''=x'$ ed $y''=y'$, il numeratore e denominatore divengono rispettivamente le due derivate del primo membro dell'equazione della curva, l'una rispetto ad x, l'altra rispetto ad y, e poi cangiandovi x ed y in x' ed y', coordinate del punto di contatto. Così nell'esempio proposto si ha

$$p = \frac{0}{0} = -\frac{amx^{a-1} + cq\,y'^d\,x'^{c-1}}{bn\,y^{b-1} + dqx'^c\,y'^{d-1}}\,.$$

Ma in generale, dinotando con X ed Y le due derivate di $F(x,y)=o$ l'una rispetto ad x, l'altra rispetto ad y, e quindi con X' ed Y' ciò che esse divengono quando si cangiano le x ed y in x' ed y', il valore di p sarà determinato dalla formola

$$p = -\frac{X'}{Y'}\,,$$

e l'equazione della tangente nel punto (x', y') sarà

$$y-y' = -\frac{X'}{Y'}(x-x').$$

478. Spesso è più comodo di dare a questa equazione la forma

$$y\,Y' + x\,X' = y'\,Y' + x'\,X',$$

e bisogna avvertire che mediante la relazione $F(x', y') = o$ il secondo membro sarà sempre suscettibile di riduzioni.

479. Applicando il metodo esposto consideriamo in primo luogo il cerchio di equazione $y^2 + x^2 - r^2 = o$; sarà per questa curva $X'=2x'$, $Y'=2y'$; quindi si avrà $y'Y'+x'X'= 2y'^2+2x'^2=2r^2$; e però l'equazione della tangente divisa per 2 sarà $yy'+xx'=r^2$.

Consideriamo in secondo luogo le curve di 2° ordine date dall'equazione generale

$$ay^2+2bxy+cx^2+2dy+2ex+f=o.$$

In questo caso si ha

$$X'=2(by'+cx'+e) \quad , \quad Y'=2(ay'+bx'+d)\,;$$

quindi l'equazione della tangente sarà

$$y-y' = -\frac{by'+cx'+e}{ay'+bx'+d}(x-x').$$

Se piaccia di ridurla all'altra forma (478), si troverà

$$(ay'+bx'+d)\,y+(by'+cx'+e)\,x+dy'+ex'+f=o$$

Da ultimo sia la curva di equazione

$$y^3 - 2axy + x^3 = o\,;$$

sarà $\quad X'=3(x'^2-ay') \quad , \quad Y'=3(y'^2-ax')\,,$

e quindi per l'equazione della tangente verrà

$$(y'^2-ax')\,y+(x'^2-ay')\,x=ax'y'.$$

Degli assintoti

480. Poichè l'assintoto di una curva è una retta che deve avvicinarla indefinitamente senza mai incontrarla, ne segue che le solo curve a rami infiniti ne possono essere fornite; e che l'assintoto è il limite delle tangenti ad un ramo infinito di curva; ond'è ch'esso dev'essere riguardato come una tangente per la quale il punto di contatto cade a distanza infinita.

Ma l'assintoto dev'essere ancora considerato come una retta, la quale ha comune con la curva due punti all'infinito. In fatti è chiaro in primo luogo che ogni parallela condotta all'assintoto da qual si voglia punto della curva ha comune con essa una intersezione all'infinito; se poi si supponga che anche quel punto si allontani all'infinito, allora la parallela dovrà coincidere con l'assintoto, il quale perciò avrà con la curva due intersezioni all'infinito.

Segue da ciò che se $y=px+q$ sia l'equazione di un assintoto della curva $F(x,y)=o$, e si elimini y tra le equazioni di queste due linee, l'eliminata in x dovrà avere due radici infinite. Quindi se l'equazione $F(x, y) = o$ sia di grado m, l'eliminata in x che pur sarebbe in generale di grado m, dovrà, a causa delle due radici infinite, risultar mancante delle due più alte potenze di x, vale a dire dei termini in x^m ed x^{m-1}. Viceversa se si riguardano come indeterminate le costanti p e q nell'equazione della retta $y=px+q$, e poi si determinano per modo che eliminando y tra essa e l'equazione della curva $F(x, y)=o$, l'eliminata in x risulti mancante dei termini in x^m ed x^{m-1}, la retta sarà assintoto della curva. Adunque supposto che l'eliminata sia

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + K = o.$$

i valori di p e q che formano un assintoto della retta $y=px+q$, saranno quelli che si traggono dalle due relazioni

$$A = o \quad , \quad B = o.$$

Che se tali relazioni diano più sistemi di valori di p e q, questi sistemi diversi daranno luogo ad altrettanti assintoti.

481. Giova di rimarcare che l'eliminazione di y tra le equazioni $y=px+q$ e $F(x,y)=o$ eseguendosi con la semplice sostituzione di $px+q$ in luogo di y nella seconda equazione, così A coefficiente di x^m sarà funzione della sola p, mentre B coefficiente di x^{m-1} conterrà ad un tempo la p e la q. Segue da ciò che le radici dell'equazione $A=o$ sono i determinanti delle direzioni dei diversi assintoti; e però se volessero solamente conoscersi queste direzioni basterebbe di porre nell'equazione della curva $y=px$; che in tal guisa nel coefficiente di x^m si avrebbe sempre la stessa equazione $A=o$.

482. Come un'applicazione del metodo esposto considereremo le curve di 2° ordine date dall'equazione generale

$$ay^2+2bxy+cx^2+2dy+2ex+f=o.$$

Eliminando y tra questa equazione e l'altra $y=px+q$, si ha l'equazione di 2° grado

$$(ap^2+2bp+c)x^2+2((ap+b)q+dp+e)x+aq^2+2dq+f=o;$$

laonde le due equazioni $A=o$, $B=o$ che determinano i valori di p e q saranno attualmente

$$ap^2+bp+c=o \quad , \quad (ap+b)q+dp+e=o.$$

Dalla prima si ricavano per p i due valori

$$p=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a};$$

e quindi dalla seconda si hanno per q i due valori corrispondenti

$$q=\pm\frac{ae-bd}{a\sqrt{b^2-ac}}-\frac{d}{a}.$$

Se la curva è parabola si avrà $b^2-ac=o$, ed in tal

caso i due valori di p si eguagliano e si riducono al solo $p=-\frac{b}{a}$; la curva adunque potrebbe avere un assintoto parallelo ai suoi diametri; ma risultando infinito il valore di q, avviene che questo assintoto cade a distanza infinita, ed è quindi come per noi inesistente. Se poi si abbia $b^2-ac<o$, i due valori di p e con essi quelli di q saranno immaginarii; laonde in tal caso la curva sarà sfornita di assintoti. Ma è noto che in questa ipotesi la curva è ellisse, la quale, perchè mancante di rami infiniti non può essere dotata di assintoti.

I due valori di p, e con essi quelli di q, sono adunque reali, disuguali, e finiti nel solo caso che si abbia $b^2-ac>o$ vale a dire quando la curva è iperbole; ed era già noto che questa è la sola tra le curve di 2° ordine che sia fornita di due assintoti.

483. Gli assintoti paralleli all'asse delle y debbono, com'è ben chiaro, sfuggire a questo metodo, giacchè per essi la x invece di essere infinita, è necessariamente di grandezza finita; ma, così essendo, si comprende che essi si possono riconoscere quasi alla sola ispezione dell'equazione della curva, essendo determinati dai valori di x che rendono y infinita. Quindi si vede a colpo di occhio che la curva di equazione

$$(y-\beta)(x-\alpha)=a^2$$

la quale non è che un iperbole, ha per assintoto la retta $x-\alpha=o$ parallela all'asse delle y. Ma osservando che anche gli assintoti paralleli all'asse delle x debbono essere determinati dai valori di y che rendono x infinita, si ravvisa che anche la retta $y-\beta=o$ è un assintoto parallelo all'asse delle x.

CAPITOLO XIV.

DELLE CURVE SIMILI

484. Due curve MN, mn [*fig.* 91] diconsi simili se esistano a riguardo di esse due punti P, p tali che i raggi vettori PQ, PQ′, ... menati da P ai diversi punti della prima siano proporzionali ai raggi vettori pq, pq', ..., menati all' altra dal punto p parallelamente ai primi, e diretti nello stesso senso.

Due raggi vettori paralleli e diretti nello stesso senso sono adunque rette omologhe rispetto alle due curve, e possono dirsi punti omologhi i loro estremi Q e q. I punti P e p poi donde partono i raggi vettori chiamansi *centri di similitudine*, o *di omologia*.

Dunque nelle curve simili e similmente poste il rapporto tra due raggi vettori omologhi è costante; e però dinotandolo con K si avrà

$$\frac{PQ}{pq}=\frac{PQ'}{pq'}=\ldots\ldots=K.$$

485. È per tanto quasi evidente che se due curve ammettano due centri di similitudine P e p, ne debbano ammettere una infinità di altri. In fatti, preso nell' una ad arbitrio un punto P′, si tiri nell' altra la pp' parallela a PP′, diretta nello stesso senso, e tale che il rapporto $\frac{PP'}{pp'}$ sia uguale a K; per tal guisa i triangoli PQP′, PQ′P′, ec. saranno rispettivamente simili ai triangoli pqp', $pq'p'$, ec.; quindi i nuovi raggi vettori P′Q, P′Q′ ec., risulteranno paralleli e proporzionali agli altri $p'q$, $p'q'$, ec.; e però i due punti P′ e p' saranno centri di similitudine delle due curve.

Segue da ciò che due curve simili e similmente poste

ammettono una infinità di coppie di centri di similitudine, e che prendendosi un punto qualunque per centro di similitudine di una di esse si potrà sempre determinare il centro corrispondente per l' altra curva.

486. Merita di essere osservato che il rapporto di due raggi vettori omologhi rimane invariabile quali che siano i centri di similitudine, mentre si ha $\frac{P'Q}{p'q}=\frac{pp'}{pp'}=K.$

Questo rapporto costante dicesi *rapporto di similitudine*, ed è uguale all' unità nel caso che le curve siano uguali.

487. Supponiamo ora che una delle due curve cangi di situazione, e si trasporti in altro sito; se nella nuova posizione i raggi vettori omologhi si conservano paralleli, le due curve non cessano di essere simili e similmente poste; ma se questa condizione non è adempiuta allora le due curve finiscono di essere similmente poste, e si dicono soltanto *simili*.

488. La teorica analitica delle curve simili è fondata sù tre principii seguenti.

I.° *Se in una equazione* $\varphi(x,y)=o$ *si cangiano le variabili* x, y *in* Kx, Ky *rispettivamente, la nuova equazione* $\varphi(Kx, Ky)=o$ *esprimerà una curva simile e similmente posta a quella di* $\varphi(x,y)=o$; *le due curve avranno l' origine delle coordinate per centro comune di similitudine, e sarà* K *il rapporto di similitudine.*

In fatti sia Mn (*fig.* 91.) la curva di equazione $\varphi(x,y)=o$ rapportata agli assi Px, Py, e su' raggi vettori PQ, PQ′, ... si prendano le parti Pq, Pq', ... tali che sia $\frac{PQ}{Pq}=\frac{PQ'}{Pq'}=\ldots K$; il luogo geometrico dei punti q sarà una curva mn simile e similmente posta ad MN, e le due curve avranno il punto P per centro comune di similitudine. Or siano x, y le coordinate del punto Q, ed

x' y' quelle del punto q; si avrà manifestamente $y=Ky'$, $x=Kx'$; quindi l'equazione della curva mn sarà $\varphi(Kx', Ky') = o$, ovvero, togliendo gli apici, $\varphi(Kx, Ky) = o$.

L'equazione $\varphi(Kx, Ky) = o$, a misura che si da alla costante indeterminata K un valore diverso, somministra una curva diversa; ma tutte saranno simili e similmente poste a quella di $\varphi(x, y) = o$; e di più avranno l'origine per centro comune di similitudine.

489. II.° *Se in una equazione $\varphi(x, y)=o$ si cangiano le x ed y in $x-\alpha$ ed $y-\beta$, la nuova equazione esprimerà una curva eguale assolutamente a quella di $\varphi(x, y)=o$, e similmente posta ad essa; l'origine delle coordinate, ed il punto (α, β) saranno centri di similitudine delle due curve.*

Sia MN (*fig.* 92.) la curva di equazione $\varphi(x,y)=o$ costruita relativamente agli assi Ax, Ay; ed mn la curva nascente dalla stessa equazione, però costruita relativamente a due nuovi assi $A'x'$, $A'y'$ paralleli ai primi; queste due curve saranno eguali e similmente poste; ed avranno i punti A ed A' per centri di similitudine: Intanto servendo i simboli x ed y per le primitive coordinate, e x ed y' per le nuove, l'equazione della curva mn dovrà rappresentarsi un $\varphi(x', y')=o$. Ciò posto chiamando α e β le coordinate della nuova origine A', tra le primitive e le nuove coordinate avremo le relazioni

$$x=x'+\alpha,\ y=y'+\beta,$$

le quali risolute rispetto ad x' ed y' danno

$$x'=x-\alpha,\ y'=y-\beta.$$

In conseguenza volendo l'equazione della curva mn rapportata agli assi Ax, Ay, converrà sostituire i valori trovati di x' ed y' in $\varphi(x'\ y') = o$; e però l'equazione cercata sarà $\varphi(x-\alpha, y-\beta) = o$.

490. Combinando questo principio col precedente si fa ma-

nifesto che se in $\varphi(x, y)=o$ si cangiano le variabili x ed y in K $(x-\alpha)$ e K $(y-\beta)$ la nuova equazione

$$\varphi(K(x-\alpha), K(x-\beta))=o,$$

ove si hanno tre costanti indeterminate K, α, β, ed alle quali perciò è permesso di dare valori arbitrarii, comprenderà tutte le curve simili e similmente poste a quella di $\varphi(x, y)=o$. Ma attualmente questa curva, e quelle date dall'altra equazione avranno per centri rispettivi di similitudine l'origine ed il punto (α, β).

491. III.° *Se in una equazione $\varphi(x, y)=o$ si sostituiscano in luogo di x ed y i valori che si ottengono per x' ed y' dalle formole generali per la trasformazione delle coordinate, la nuova equazione esprimerà una curva eguale e quindi simile a quella di $\varphi(x, y)=o$, senza però rimanere similmente posta ad essa.*

La dimostrazione è identica a quella del principio precedente, dovendo solo avvertirsi che l'angolo dè nuovi assi dev' essere eguale a quello degli antichi; e poichè si ha

$$x = \frac{x'}{R} = \frac{y'}{R'} + \alpha,\ y = \frac{px'}{R} + \frac{p'y}{R'} + \beta,$$

risolvendo queste formole rispetto ad x' ed y' risulterà

$$x' = \frac{R}{p-p'}\left\{y-p'x-(\beta-p'\alpha)\right\},\ y'=-\frac{R}{p-p'}\left\{y-px-(\beta-p\alpha)\right\}.$$

Qui pure l'origine ed il punto (α, β) sono centri rispettivi di similitudine della curva data dall'equazione $\varphi(x, y) = o$, e di quella che si ottiene dal sostituirvi in luogo di x ed y i precedenti valori di x', ed y'.

492. Segue da questo principio combinato col primo che l'equazione generale delle curve simili a quella data dall'equazione $\varphi(x, y) = o$ si ottiene sostituendo nella equazione $\varphi(Kx, Ky) = o$ ad x ed y gli stessi valori di x' ed y' scritti poi anzi.

493. Per fare qualche applicazione della teorica esposta cerchiamo in primo luogo l' equazione delle curve simili e similmente poste ad un ellisse di equazione $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, ed aventi l' origine per centro comune di similitudine. Cambiando x ed y in Kx e Ky (§.488.) si ha l'equazione $a^2K^2y^2+b^2K^2x^2=a^2b^2$, esprimente ellissi concetriche alla proposta. Questa equazione divisa per K^2 diviene

$$\frac{a^2}{K^2}y^2+\frac{b^2}{K^2}x^2=\frac{a^2}{K^2}\frac{b^2}{K^2},$$

e si ravvisa che i semiassi della nuova curva sono espressi da $\frac{a}{K}$, $\frac{b}{K}$, e sono in conseguenza proporzionali ai semiassi della ellisse data.

Dunque due ellissi sono simili se hanno gli assi proporzionali; e viceversa; e per essere ancora similmente poste basterà che siano tra loro paralleli o gli assi maggiori, o i minori. Quindi segue, in particolare, che tutt' i cerchi sono curve simili, e similmente poste.

494. Considerando l'iperbole $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$, o la sua conjugata, $a^2y^2-b^2x^2=a^2b^2$ si trovano risultamenti uniformi; ma quì avviene che per la somiglianza di due iperboli si richiede che gli assi reali siano proporzionali agli assi immaginari; e perchè siano ancora similmente poste basta che siano inoltre paralleli o i primi, o i secondi assi. Quindi è chiaro che le iperboli equilatere sono tutte simili tra loro.

Si perverrebbe ai medesimi risultamenti considerando l' iperbole tra gli assintoti $xy=a^2$, o la sua conjugata $xy=-a^2$, mentre per le rispettive iperboli simili si trovano le equazioni $xy=\frac{a^2}{K^2}$, ed $xy=-\frac{a^2}{K^2}$, dalle quali risulta che sono simili le iperboli se sono descritte in eguali

angoli assintotici. Così essendo ne conseguita ancora, com'è chiaro, la proporzionalità degli assi reali agl' immaginarii. E può dirsi eziandio che sono simili e similmente poste tutte le iperboli descritte nello stesso angolo assintotico.

495. Per le curve simili alla parabola $y^2=2ax$ si ha l'equazione $y^2=\frac{2a}{K}x$; e ne risulta che tutte le parabole sono curve simili, e per essere similmente poste dovranno avere i diametri paralleli, ed i rami rivolti nella stesso senso.

496. Tenineremo questo capitolo cercando in generale le condizioni che debbono verificarsi perchè siano simili e similmente poste due curve di 2° ordine date dalle equazioni

$$ay^2+2bxy+cx^2+2dy+2ex+f=o \qquad (1)$$

$$a'y^2+2b'xy+c'x^2+2d'y+2e'x+f'=o \qquad (2)$$

Se nella prima si ponga $K(x-\alpha)$ e $K(y-\beta)$ in luogo di x ed y (§. 490.) la nuova equazione

$$aK^2y^2+2bKxy+cK^2x^2+2Dy+2Ex+F=o \qquad (3)$$

ov' è messo per brevità

$$D=-a\beta K^2-b\alpha K^2+dK \quad , \quad E=-c\alpha K^2-b\beta K^2+cK$$

$$F=aK^2\beta^2+2bK^2\alpha\beta+eK^2\alpha^2-2d\beta K-2e\alpha K+f$$

comprenderà tutte le curve simili e similmente poste alla (1); laonde se le curve date siano effettivamente simili e similmente poste, dovrà esser possibile di determinare per α, β, K tali valori da rendere l' equazione (3) identica alla (2); e ciò esige che dopo aver divisa la (2) per a', a la (3) per aK^2, i coefficienti de' termini simili siano tra loro eguali. Quindi per determinare siffatti valori di α, β, K si avranno le seguenti cinque relazioni

$$\left.\frac{b'}{a'}=\frac{b}{a} \quad , \quad \frac{c'}{a'}=\frac{c}{a}\right\} \quad (4)$$

$$\left.\frac{d'}{a'}=\frac{D}{aK^2}\ ,\ \frac{e'}{a'}=\frac{E}{aK^2}\ ,\ \frac{f'}{a'}=\frac{F}{aK^2}\right\}\ ;\quad (5)$$

ma, essendo le tre ultime già sufficienti a questo scopo, ne segue che le due prime, che sono indipendenti da α, β, K, sono appunto le condizioni a doversi verificare acciò le curve date siano simili e similmente poste. Quelle due relazioni si possono mettere sotto la forma

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\ ;$$

e così si vede che le due condizioni di cui si tratta equivalgono a dire che: *i coefficienti de' termini di 2° grado debbano nelle due equazioni essere proporzionali.*

Resta ora a ricavare dalle tre equazioni (5) i valori di α, β, K. Restituendo a D, E, F i loro valori si vedrà cha la prima e seconda contengono α e β a 1°. grado, mentre la terza le contiene a 2° grado, ma può da esse dedursene un'altra in cui α e β si trovino del pari a 1° grado. Basterà infatti liberarle dalle frazioni, e addizionarle, dopo aver moltiplicata la prima per βK, e la seconda per αK; così in luogo della terza si avrà la seguente

$$ad'\beta K^2+ae'\alpha K^2+af'K^2+da'\beta K+ea'\alpha K-fa'=o. \qquad (6)$$

Ciò posto risolvendo le due prime rispetto ad α e β si trova

$$\alpha=\frac{aK(ac'-bd')-a'(ae-bd)}{a'K(b^2-ac)}\ ,\ \beta=\frac{aK(cd'-be')-a'(cd\ be)}{a'K(b^2-ac)}$$

e quindi sostituendo questi valori nella (6) risulterà

$$K^2=\frac{a'}{a}\times\frac{ea'(ae-bd)+da'(cd-be)+af(b^2-ac)}{ae'(ae'-bd')+ad'(cd'-bc')\ a'f'(b^2-ac)}\ .$$

497. Questa equazione darebbe per K due valori eguali e di segni contrarii; ma di essi bisognerà ritenere il solo positivo, poichè trattasi di rapporto, vale a dire di valore numerico. Inoltre essendo necessario che questo valore di K sia reale, quello di K^2 dovrà essere positivo, e perciò fa mestieri che il numeratore e denominatore della espressione precedente siano quantità dello stesso segno; così essendo, anche i valori di α e β risulteranno reali. Se poi quelle quantità siano di segni contrarii, le due curve date non saranno più simili, non ostante i coefficienti de' termini di 2° grado siano nelle loro equazioni proporzionali, e può dirsi in tal caso che la somiglianza delle due curve è immaginaria.

CAPITOLO XV.

COSTRUZIONE DELLE EQUAZIONI DETERMINATE

498. Data un' equazione $F(x)=o$, dove supponiamo che la incognita x rappresenti una lunghezza determinata, trattasi di assegnare il valore, o i valori di questa incognita senza risolvere l' equazione. È in ciò che consiste la costruzione dell' equazione proposta; ed è per lo appunto ciò ch' è stato già praticato per quelle di 1° e 2° grado (da 13 a 28).

Il principio che serve di fondamento alla quistione attuale si è quello di considerare l' equazione $F(x)=o$ come risultante dall' eliminazione di y fra due equazioni $\varphi(x,y)=o$, $\Psi(x,y)=o$; allora, descrivendo i luoghi geometrici di queste due equazioni, le ascisse dei loro punti d' intersezione saranno precisamente le radici dell' equazione $F(x)=o$. Così la quistione si riduce alla ricerca di due equazioni in x ed y tali, che eliminando tra esse la y, ne risulti $F(x)=o$; ed è poi chiaro che questa equazione può risultare dall' eliminazione di y tra una infinità di diverse equazioni in x ed y; sicchè la sua costruzione potrà effettuirsi mediante infinite diverse linee. Per esempio se si tratta dell' equazione di 2° grado

$$x^2+ax+b=o,$$

si vede subito che la medesima può considerarsi come risultata dall' eliminazione di y tra le due equazioni

$$y=o \quad , \quad y^m+x^2+ax+b=o,$$

essendo m un numero qualunque positivo. Or a il luogo geometrico della prima equazione non è altro che l' asse delle ascisse, ma quello dell' altra cangia a misura che cangia il valore di m; ed intanto le due radici dell' equazione proposta si avranno sempre nelle distanze dall' ori-

gine ai due punti in cui una delle linee nascenti dalla seconda equazione può incontrare l' asse delle ascisse.

499. Essendo però conveniente di preferire le equazioni più semplici, o meglio quelle i cui luoghi geometrici sono di ordine inferiore, così nell' esempio recato potrebbe farsi m eguale ad 1, ovvero a 2, perchè i luoghi geometrici delle equazioni

$$y+x^2+ax+b=o \quad , \quad y^2+x^2+ax+b=o,$$

nascenti dall' una e dall' altra ipotesi, sono sempre di 2° ordine. Il primo di essi rappresenta una parabola, e l' altro un cerchio; ma essendo il cerchio la più semplice tra le linee di 2° ordine, deve in ogni caso esser preferito a qualunque altra curva. Quindi la data equazione di 2° grado potrà essere costruita mediante le intersezioni dell' asse delle ascisse col cerchio di equazione

$$y^2+x^2+ax+b=o,$$

il di cui centro si trova (§.129) sull'asse delle x alla distanza $-\frac{a}{2}$ dall'origine, e'l di cui raggio è espresso da $\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}-b\right)}$

500. È qui luogo da far rimarcare che se si abbiano due equazioni simultanee

$$\varphi(x,y)=o \quad , \quad \Psi(x,y)=o$$

e siano $F_1(x,y)=o$, $F_2(x,x)=o$, $F_3(x,y)=o$, ec. altre equazioni ricavate dal combinar tra loro le prime in qualsivoglia modo, i luogi geometrici di queste equazioni avranno la proprietà di passare per tutt' i punti in cui s' incontrano quelli corrispondenti alle prime. In conseguenza trovate una volta le equazioni di due linee opportune alla costruzione dell' equazione $F(x)=o$, potranno facilmente assegnarsene delle altre, e sceglierne due a piacere; ma però si esige che il prodotto dei loro gradi sia eguale a quello di $F(x)=o$. Se mancasse questa condi, zione, le due linee corrispondenti s' incontrerebbero in un numero di punti maggiore di quello che si richiede per costruire le radici di $F(x)=o$, e quindi sarebbe uopo di esaminare quali sono quelli che non soddisfano a quest' equazione, e rigettarli.

501. Poichè il grado dell' eliminata tra due equazioni è in generale eguale al prodotto dei loro gradi ne segue che per mezzo di due linee di specie data si possono costruire le sole equazioni i di cui gradi sono eguali al prodotto de' gradi delle equazioni delle due linee. Quindi la retta ed il cerchio serviranno soltanto a risolvere i problemi le di cui equazioni possono ridursi al 2° grado; e due linee di 2° ordine potranno unicamente adoperarsi pei problemi le di cui equazioni non supereranno il 4° grado. Lasciando pertanto le generalità or passeremo brevemente a mostrare come possano costruirsi le equazioni di questo grado, e quelle del terzo, e per maggior semplicità supporremo che queste equazioni sieno mancanti del secondo termine, essendo sempre possibile di farlo sparire.

502. Sia in primo luogo l' equazione di 4° grado

$$x^4+ax^2+bx+c=o\,;$$

ponendo $x^2=Ky$, la medesima potrà esser costruita con due delle linee corrispondenti alle tre equazioni

$$x^2-Ky=o\ ,\quad K^2y^2+ax^2+bx+c=o\ ,\quad K^2y^2+aKy+bx+c=o$$

delle quali la prima ed ultima rappresentano parabole, e la seconda l' ellisse, o l' iperbole secondochè a è positiva, o negativa. Quando a è positiva si potrà prendere $K^2=a$, cioè $K=\sqrt{a}$, ed allora l' ellisse si volterà in cerchio; se poi a è negativa, non è più possibile di avere un cerchio allo stesso modo, perchè K risulta immaginaria; ma allora moltiplicando l'equazione della prima parabola per K^2 e sommandola con l'ultima si ha l'equazione

$$K^2(y^2+x^2)+K(a-K^2)y+bx+c=o\ ,$$

che rappresenta un cerchio, qualunque siano K ed a; laonde la data equazione potrà essere costruita con questo cerchio e con una delle linee suddette; e da taluni si reputa più semplice la sua combinazione con la parabola $x^2-Ky=o$. I determinanti del cerchio corrispondente all' equazione sopra scritta, vale a dire le coordinate del centro ed il raggio, si ottengono agevolmente con le norme già date al §°. 129; ma è opportuno di avvertire che se in qualchè caso particolare si sappia che il cerchio debba passare per un punto conosciuto, allora per descrivere questa linea basterà di assegnarne il centro, essendo superflua la determinazione del raggio.

503. Per l' equazione di 3° grado

$$x^3+ax+b=o,$$

ponendo l' equazione $x^2=Ky$, ch' esprime una parabola, si avrebbe l' equazione $xy+ax+b=o$, che rappresenta una iperbole, e da queste si potrebbero ricavare altre linee; ma senza più dilungarci osserveremo che la costruzione di questa equazione di 3° grado è compresa in quella del 4° giacchè moltiplicata per x, si cangia appunto nell' equazione di questo grado

$$x^4+a^2x^2+bx=o\ ,$$

mancante non solo del secondo, ma ancora dell' ultimo termine; e però la sua costruzione potrà effettuirsi mediante la parabola ed il cerchio di equazioni

$$x^2-Ky=o\ ,\quad K^2(y^2+x^2)+K(a-K^2)y+bx=o.$$

le quali passano l' una e l' altra per l' origine delle coordinate. Queste linee si segano in generale in quattro punti, e quindi vi dev' essere una intersezione che non risolve l' equazione data, la quale essendo di 3° grado non ha che tre radici; ma è chiaro che la intersezione da rigettarsi ora è per lo appunto l' origine, che costruisce la radice $x=o$, la quale, essendo stata introdotta per rendere l' equazione di 4° grado, è estranea alla quistione.

Andremo ora a risolvere qualche problema onde applicare a degli esempi i precetti esposti.

Problema I°.

Trovare due medie proporzionali tra due rette date

504. Chiamando a, b le rette date, ed x, y le medie cercate, si avranno le due proporzioni $a : x :: x : y$, ed $x : y :: y : b$, e quindi le due equazioni $x^2=ay$, ed $y^2=bx$. Eliminando y si avrebbe per determinare l'incognita x l' equazione di 4° grado $x^4=a^2bx$; ma questa equazione essendo divisibile per x si abbassa al 3° grado, e diviene $x^3=a^2b$. E così per determinare la y si avrebbe l' equazione di 3° grado $y^3=b^2a$. Ciascuna di queste equazioni ha una sola radice reale, e così tra le rette date esistono, come era chiaro, due sole medie proporzionali; ma quì bisogna osservare che avremmo potuto dispensarci dal cercare le due eliminate in x ed y, giacchè essendo date queste due incognite dai valori di x ed y comuni alle due equazioni $x^2=ay$, $y^2=bx$ le medesime sono costruite dalle coordinate AS, PS (*fig.* 93) dell' unico punto in cui s' incontrano i loro luoghi geometrici, che sono due parabole.

Sommando queste due equazioni si avrebbe il cerchio $y^2+x^2-ay-bx=o$, che può sostituirsi ad una delle parabole; cerchio il quale incontra questa curva anche in un secondo punto, cioè nell' origine, ma questa intersezione non dà luogo a nuovi valori delle incognite.

Se si moltiplicano membro a membro le stesse equazioni $x^2=ay$, $y^2=bx$, e si sopprima nel prodotto il fattor comune xy, si avrebbe l' iperbole tra gli assintoti $xy=ab$ che potrebbe impiegarsi alla risoluzione del problema congiuntamente ad una delle parabole, o del cerchio; e così combinando tutte queste equazioni in altra guisa, potreb-

bero aversi ancora altri luoghi geometrici da adoperarsi in luogo dei precedenti.

Problema II.

Dividere un angolo o un arco di cerchio in tre parti eguali.

505. Sia BC l' arco dato [*fig. 94.*] ed A il suo centro. Si prendano per assi coordinati il raggio ACx e la perpendicolare in A; e, supposto che CP sia la terza parte dell' arco, si chiamino x, y le coordinate AS, PS del punto P, ed α, β le altre AD, BD del punto B. E poichè l' arco BP è doppio di PC, sarà la corda BP doppia di PS; ma è BP espressa (65) da $\sqrt{((y-\beta)^2+(x-\alpha)^2)}$; perciò si avrà la relazione $2y=\sqrt{((y-\beta)^2+(x-\alpha)^2)}$, la quale, facendo sparire il radicale, diviene

$$4y^2+2\beta y+2\alpha x=y^2+x^2+\beta^2+\alpha^2.$$

Inoltre, chiamando r il raggio del cerchio, si hanno le altre due relazioni $y^2+x^2=r^2$, $\beta^2+\alpha^2=r^2$, in virtù delle quali la precedente si riduce a $2y^2+\beta y+\alpha x=r$. In conseguenza i valori di x ed y coordinate incognite del punto P saranno determinati dalle due equazioni

$$2y^2+\beta y+\alpha x=r^2 \quad , \quad y^2+x^2=r^2,$$

e possono costruirsi mediante le intersezioni dei loro luoghi geometrici, il secondo dei quali non è che lo stesso cerchio dato, ed il primo è una parabola (440) che ha i diametri paralleli all'asse delle x (457), ossia al raggio AC.

Sarebbe assai facile di assegnare la posizione dell' asse, il vertice, ed il parametro di questa parabola, mercè le formole generali già esposte a tale oggetto (460, 461), ma ora preferiamo di tenere altra via per mostrare sempreppiù le risorse inesauribili dell' analisi.

Si osservi dapprima che, se si escluda dall'equazione della parabola il termine di 2° grado, si formerà l'equazione di 1° grado

$$\beta y + \alpha x = r^2 ,$$

la quale esprime la tangente del cerchio (137) nel punto (α,β), cioè nel punto B. E poichè sottraendo la sua equazione da quella della parabola si ha per risultato $2y^2 = o$, dobbiamo conchiudere che essa incontra la parabola in due punti riuniti in uno sull' asse delle x, ossia, in altri termini, che essa è pure tangente della parabola nel punto E.

Ciò posto cercando i punti in cui la retta BD incontra la parabola, converrà porre $x = \alpha$ nell' equazione di questa curva; e così, tenendo conto della relazione $\beta^2 + \alpha^2 = r^2$, troveremo l' equazione di 2° grado in y

$$2y^2 + \beta y = \beta^2 ,$$

la quale risoluta dà per y i due valori $y = \frac{\beta}{2}$, $y = -\beta$. Segue da ciò che se la BD si divida per metà in H, e la stessa BD si prolunghi finchè incontri di nuovo il cerchio in G, la parabola passerà pei punti H, G; di tal che HG sarà una corda di questa curva perpendicolare al suo asse di figura. Quest' asse adunque sarà la retta KI menata parallelamente ad AC dal punto K medio di HG; e può notarsi che in tal guisa risulta $DK = \frac{1}{4} DG$.

Essendo IK l' asse delle parabola, e BET tangente in E, se tiriamo EL perpendicolare ad IK, sarà LI sottangente del punto E. Quindi il vertice della parabola si avrà nel punto V medio di LI (390).

In fine menando EF normale in E, nel doppio della sunnormale FL si avrebbe il parametro (395); ma se si paragonano i triangoli simili ELF, BDA e si osservi che è $EL = \frac{1}{4}$ BD, si vedrà ch' è pure $FL = \frac{1}{4}$ AD; e però il parametro sarà $\frac{1}{2}$ AD. Del resto dalla stessa equazione si rileverebbe immantinenti, che il valore del parametro è per lo appunto (461) $\frac{1}{2}\alpha$, cioè $\frac{1}{2}$ AD.

Riassumendo per tanto ciò che precede, la trisezione dell' arco CB mediante la parabola potrà effettuirsi come segue. *Sul prolungamento di BD si prenda DK eguale ad $\frac{1}{4}$ BD, e da K si tiri ad AC la parallela KI che incontri in I la BE perpendicolare ad AB. Indi dal punto U medio di EI si meni UV perpendicolare a KI, ed intorno all'asse IK con un parametro eguale ad $\frac{1}{2}$ AD si descriva la parabola che abbia per vertice il punto V, ed i rami rivolti da V verso K.* Il punto P segnato da questa parabola sull'arco BC ne determinerà la terza parte CP.

506. La parabola descritta in tal guisa deve, come si è veduto, incontrare il cerchio nel punto G; però essa lo incontra nel tempo stesso in tre altri punti P, P′, P″, il primo dei quali triseca l' arco BC; ma bisogna osservare che anche gli altri punti P′, P″ risolvono il problema guardato sotto un aspetto più generale; mentre se invece dell' arco BC volesso trisecarsi o il suo supplemento BC′, o l' arco CC′B, compimento di tutta la circonferenza, i dati della quistione e l' analisi per l' uno, e per l' altro caso sarebbe precisamente la stessa di quella istituita per la trisezione dell' arco BC; laonde si perverrebbe ai medesimi risultamenti. Quindi è che l' arco C′ P′ sarà terza parte dell' arco C′P′B, e CGP″ sarà il terzo dell' arco CC′B.

507 Se si elimini y tra le due equazioni della parabola e del cerchio, e si ponga per maggior semplicità $r = 1$, si perverrà all' equazione di 4° grado

$$4x^4 - 4\alpha x^3 - 3x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 = o ,$$

le di cui quattro radici saranno le ascisse dei quattro punti comuni alle due linee. Tra questi quattro punti essendovi il punto G, che ha per ascissa α, l' equazione dovrà essere divisibile per $x - \alpha$; e si ha di fatti per quoziente esatto l' equazione di 3° grado

$$x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{\alpha}{4} = o,$$

le di cui tre radici sono in conseguenza le ascisse dei tre punti P, P′, P″, che risolvono il problema. Si riconosce facilmente che questa equazione rientra nel caso *irriduttibile*, e però che le sue tre radici sono sempre e necessariamente reali.

Chiamando φ l'arco dato BC, si avrà $\alpha = \cos\varphi$, $x = \cos {}^1/_3\, \varphi$; sostituendo questi valori nell'equazione precedente, la medesima si cangia in

$$4\cos^3 {}^1/_3\, \varphi - 3\cos {}^1/_3\, \varphi - \cos\varphi = o,$$

e coincide in tal guisa con la formola che dà la trigonometria per determinare il coseno dell'arco terza parte di un arco dato.

508. Tra i molti luoghi geometrici che potrebbero ancora adoperarsi per risolvere il problema, di cui ci siamo occupati, faremo notare quello dell'equazione

$$y^2 - x^2 + \beta y + \alpha x = o,$$

che risulta sottraendo l'equazione del cerchio da quella della parabola, e ch'è una iperbole equilatera di facilissima costruzione. Essa in fatti passa per l'origine, cioè pe'l punto A; il suo centro ha per coordinate le due rette $x = {}^1/_2\, \alpha$, $y = -{}^1/_2\, \beta$, ed è quindi situato nel punto O [*fig. 95.*] medio del raggio AG; e finalmente i suoi assintoti dovendo fare con l'asse delle x due angoli, che hanno per tangenti $+1$ e -1 (453), si vede ch'essi sono egualmente inclinati a quest'asse, e formano con lo stesso angoli semiretti. L'iperbole descritta con siffatti elementi passerà per gli stessi quattro punti G, P, P′, P″.

Problemi III°

509. *Dato un punto P ed un angolo retto xAy (fig. 96.), condurre per quel punto una retta per modo che la parte UV intercetta tra i lati dell'angolo risulti eguale ad una data retta d.*

Questo problema è più generale di quello risoluto ai §§. 29 e 121, mentre il punto P che ora si suppone ovunque avea allora una posizione particolare, poichè situato sulla bisecante dell'angolo xAy. Or vedremo quale influenza abbia nella quistione questa diversa posizione del punto, ma è chiaro fin da ora che anche attualmente il problema deve ammettere in generale quattro soluzioni.

Si prendano per assi coordinati gli stessi lati dell'angolo, e si dinotino con α, β le coordinate AI, PI del dato punto P. Supponendo risoluto il problema, e compiuto il rettangolo AVBU, noi ci proporremo a determinare il vertice B di questo rettangolo, vale a dire prenderemo per incognite le sue coordinate BU, BV, che indicheremo con x, y, e che equivalgono alle parti AV, AU che la retta taglia dai lati dell'angolo a contar dal vertice. Ciò posto noi troveremo attualmente come al §° 121 che i valori di x ed y sono determinati dalle due equazioni

$$y^2 + x^2 = d^2 \quad , \quad xy = \alpha y + \beta x$$

e potranno costruirsi mediante i loro corrispondenti luoghi geometrici. Il primo di cui è il cerchio che ha il centro nel vertice A dell'angolo, e per raggio la retta data d; l'altro poi è una iperbole che passando per lo stesso vertice A, ha per centro il punto (α, β) (443), cioè il punto dato P, e per assintoti due rette parallele agli assi coordinati (453). Quindi il problema proposto potrà risolversi con la seguente costruzione. *Si descriva un cerchio che abbia per centro il vertice dell'angolo e per raggio la data retta; e poscia descrivasi ancora un' iperbo-*

le che, passando per lo stesso vertice, abbia per centro il punto dato e per assintoti le rette menate per questo punto parallelamente ai lati dell' angolo. Queste due linee s' incontreranno in generale in quattro punti, che saranno i vertici di quattro rettangoli, che danno le quattro soluzioni del problema.

510. Se si elimina y tra le due equazioni

$$y^2+x^2=d^2 \quad , \quad xy=\alpha y+\beta x$$

si ottiene l' equazione di 4° grado in x

$$x^4-2\alpha x^3+(\beta^2+\alpha^2-d^2)x^2-2\alpha d^2x-d^2\alpha^2=0\,,$$

le di cui quattro radici sarebbero le ascisse dei quattro vertici dei rettangoli poc' anzi costruiti.

Nel problema particolare risoluto al §. 29 l' equazione di quarto grado che somministra i valori delle stesse ascisse è dedotta dalle due equazioni

$$y^2+x^2=d^2 \quad , \quad xy=\alpha y+\alpha x\,,$$

nella seconda delle quali si osserva l' eguaglianza dei coefficienti di y ed x a 1° grado, il che non accade nell'equazione $xy=\alpha y+\beta x$ da cui dipende quella del §. precedente. Ciò nasce pertanto dalla situazione del punto dato, le di cui coordinate α, β, quando trovasi ovunque, sono in generale disuguali, mentre poi diventano eguali in valore quando esiste sulla bisecante dell' angolo. Or è questa eguaglianza che allora permise di costruire le quattro radici dell'equazione di 4° grado come quelle di 2° grado, vale a dire con le combinazioni di sole rette e cerchi; ma se α e β son disuguali ciò diventa impossibile, ed è necessario l'intervento delle curve di 2° ordine. In altri termini adunque il problema è piano quando il punto è sulla bisecante, ed è solido nel caso opposto.

511. Quì cade in acconciò di far rimarcare che il problema particolare del §°. 29 potrebbe risolversi con la medesima costruzione data attualmente, vale a dire con la combinazione di un cerchio, e di altra curva del 2° ordine; ma questa risoluzione sarebbe difettosa e da riprovarsi, perchè lo impiego di linee rette, e circolari dev' esser sempre quando è possibile preferito a quello di linee diverse. Ed in generale la risoluzione di un problema di qualsivoglia grado si terrà come la più plausibile, quando sia effettuita con l' intervento di linee delle più semplici equazioni, che sia permesso di adoperare (499, 500).

Gli esempi che abbiamo recati deggiono esser sufficienti per un libro destinato ad istituzione; ma l' arte di risolver bene e con facilità i problemi geometrici, essendo, come per gli aritmetici, tutta riposta nell' abitudine e nell' esercizio, i giovani non potrebbero far di meglio che fortificarsi con lungo esercizio in risolvere altri problemi, che potranno trarre o dai loro Professori, o da buoni libri, o ancora escogitare di propria mente.

CAPITOLO XVI.

Coordinate polari

512 Oltre al sistema delle coordinate rettilinee adottato per stabilire le equazioni delle curve, è talvolta adoperato anche quello delle coordinate *polari*, il quale spesso conduce a risultamenti più semplici. In questo sistema la posizione de' diversi punti di un piano è determinata dalla *distanza* di ciascuno di essi da un punto fisso, e dall'*angolo* che la distanza medesima fa con una retta fissa arbitrariamente condotta pe 'l punto fisso. La distanza chiamasi *raggio vettore* del punto; il punto fisso chiamasi *polo*; e diremo *asse polare* la retta fissa terminata al polo. Il *raggio vettore e l' angolo corrispondente* che esso fa con l' asse polare sono in questo sistema le due coordinate del punto. Così [*fig.* 97.] preso per polo il punto A, e per asse polare la retta Au, le due coordinate polari del punto P saranno il raggio vettore PA, e l' angolo corrispondente PAu.

513. Descrivendo un cerchio col centro in A e con un raggio arbitrario, che porremo eguale ad 1, potremo agli angoli contati dall' asse polare sostituire gli archi rispettivi di questo cerchio contati da C verso B; e quindi potremo anche dire che le coordinate polari del punto P sono il raggio vettore PA e l' arco CB; siccome per un' altro punto P' sarebbero il raggio vettore P'A e l'arco CBB''.

514. Fissato una volta il senso verso cui si contano gli angoli o archi, s' intende che non sia più lecito d' invertirlo, e nel calcolo si riguarderanno come positivi; quindi saranno negativi gli angoli o archi contati in senso opposto da C verso B''.

515. Segue dalle premesse definizioni che gli angoli corrispondenti a' punti dell' asse polare (il quale, come si

è detto, termina al polo) son tutti nulli, mentre poi quelli che corrispondono ai punti del suo prolungamento son tutti eguali a π, ossia a 180°.

Ne segue inoltre che tutt' i punti di una retta qualunque AQ terminata al polo sono determinati dallo stesso angolo o arco CB. Rispetto ai punti situati sul suo prolungamento AQ', essi son pure determinati dallo stesso arco CBB'; ma potrebbero ancora esser determinati dall' arco CB, però riguardandosi in tal caso come positivi i raggi vettori dei punti di AQ, saranno negativi quelli dei punti appartenenti al suo prolungamento AQ'. Da ciò dunque siamo indotti a riconoscere che, potendo il raggio vettore prendere valori positivi e negativi, i primi serviranno a determinare i punti della retta che, terminando al polo, forma con l' asse polare gli angoli corrispondenti, ed i secondi serviranno a determinare i punti del suo prolungamento dall' altro lato del polo.

516. Per ciò che segue adotteremo la lettera greca ρ per significare in generale il raggio vettore di un punto qualunque, e la lettera latina u per l' angolo corrispondente. Quindi a dinotar quel punto potremo valerci della notazione (ρ, u), scrivendo tra parentesi prima il suo raggio vettore, e poscia la sua coordinata angolare. Se faccia d' uopo considerar più punti varieremo le stesse lettere con accenti, o adotteremo ancora altre lettere se torni acconcio.

517. Ciò premesso la ricerca principale che quì dobbiamo proporci. Si è la risoluzione del seguente problema. *Data l' equazione di una linea tra le coordinate rettilinee x, y trovare l' equazione della medesima linea tra le coordinate polari ρ, u.* Or questo problema riducesi, com' è chiaro, a trovare i valori di x ed y in funzione di ρ ed u, mentre basterà sostituire questi valori in luogo di x ed y nella

data equazione per avere la trasformata in ρ ed u.

518. Il caso più semplice per siffatta trasformazione (e ch'è del resto quello che più comunemente occorre) si è quando le coordinate rettilinee sono ortogonali e di più il polo e l'asse polare coincidono rispettivamente con l'origine e con uno degli assi coordinati. Siano per questo caso AS,PS le coordinate rettilinee x, y del punto P, saranno PA e l'angolo PAu le sue coordinate polari ρ, u; e però dalla considerazione del triangolo rettangolo PAS si otterranno immantinenti pe 'l caso di cui trattasi le seguenti formole

$$x=\rho\cos u \quad , \quad y=\rho\,\mathrm{sen}\,u \qquad (a)$$

Se le coordinate rettilinee OS, PS del punto P [*fig.98.*] siano tuttavia ortogonali; ma il polo A diverso dall'origine e l'asse polare Au parallelo ad Ax, risulterà subito dall'esame della figura che chiamate α, β le coordinate OD, AD del polo A debbano aversi le formole

$$x=\alpha+\rho\cos u \quad , \quad y=\beta+\rho\,\mathrm{sen}\,u \qquad (b)$$

bene inteso che nei casi particolari convien dare ad α e β coordinate del polo quei segni che loro convengono dipendentemente dalla situazione di questo punto rispetto agli assi coordinati.

Che se le coordinate rettilinee siano oblique (*fig.99.*), e ad angolo θ, il polo diverso dall'origine, e sia qualunque la direzione dell'asse polare Au, dinoteremo con φ l'angolo uAx' formato dell'asse polare e dalla retta Ax' parallela ad Ax, così avremo l'angolo PAE$=u+\varphi$, e l'angolo APE$=\theta-u-\varphi$. Quindi dal triangolo obbliquangolo PAE trarremo

$$\mathrm{AE}=\rho\frac{\mathrm{sen}(\theta-u-\varphi)}{\mathrm{sen}\,\theta} \quad , \quad \mathrm{PE}=\rho\frac{\mathrm{sen}(u+\varphi)}{\mathrm{sen}\,\theta};$$

e dopo ciò si ottengono manifestamente le seguenti formolà

$$x=\alpha+\rho\frac{\mathrm{sen}(\theta-u-\varphi)}{\mathrm{sen}\,\theta} \quad , \quad y=\beta+\rho\frac{\mathrm{sen}(u+\varphi)}{\mathrm{sen}\,\theta} \quad , (c)$$

che sono le più generali per la trasformazione delle coordinate rettilinee in coordinate polari.

Se l'asse polare fosse parallelo all'asse delle ascisse, si avrebbe $\varphi=o$, e le formole diverrebbero più semplici.

Se le coordinate rettilinee fossero ortogonali, ma qualunque la direzione dell'asse polare, sarebbe $\theta=90°$; quindi $\mathrm{sen}\,\theta=1$, $\mathrm{sen}(\theta-u-\varphi)=\cos(u+\varphi)$, e le formole si ridurrebbero ad

$$x=\alpha+\rho\cos(u+\varphi) \quad , \quad y=\beta+\rho\,\mathrm{sen}(u+\varphi).$$

Proseguendo a fare altre ipotesi ritorneressimo ancora alle formole trovate pei due casi particolari trattati in principio; ma abbiamo preferito di ricavarle direttamente, essendo esse le più comunemente adoperate.

Applicazioni delle formole precedenti

519. *Equazione polare della retta.* Una retta rapportata a coordinate obblique ha per equazione $y=ax+b$, la quale, chiamando φ l'angolo che la stessa retta forma con l'asse delle x, diviene

$$y=\frac{\mathrm{sen}\,\omega}{\mathrm{sen}(\theta-\omega)}x+b.$$

Ciò posto se prediamo l'origine per polo, e l'asse dell'x per asse polare, allora nelle formole (c) avremo $\alpha=o, \beta=o$, $\varphi=o$; e quindi esse si ridurranno ad

$$x=\rho\frac{\mathrm{sen}(\theta-u)}{\mathrm{sen}\,\theta} \quad , \quad y=\rho\frac{\mathrm{sen}\,\omega}{\mathrm{sen}\,\theta}.$$

Per siffatti valori l'ultima equazione della retta si troverà, dopo le debite riduzioni, cangiata nella seguente equazione in coordinate polari

$$\rho=\frac{b\,\mathrm{sen}(\theta-\varphi)}{\mathrm{sen}(u-\varphi)},$$

la quale si può rendere più semplice osservando che, essendo $\theta-\varphi$ l'angolo che la retta forma con l'asse delle ordinate, e b la parte ch'essa taglia su quest'asse a contar dall'origine, sarà $b\,sen(\theta-\varphi)$ l'espressione della perpendicolare menata sulla retta medesima dall'origine, ossia dal polo; in conseguenza, chiamando p questa perpendicolare, l'equazione polare della retta sarà

$$\rho=\frac{p}{sen(u-\varphi)},$$

risultando in tal guisa indipendente dall'angolo delle coordinate rettilinee.

Del rimanente cade sotto l'occhio che questa equazione altro non esprime che il noto rapporto tra l'ipotenusa ed un cateto di un triangolo rettangolo, vale a dire tra il raggio vettore ρ di un punto qualunque della retta e la perpendicolare p menatale dal polo, essendo manifesto che l'angolo opposto a p è precisamente $u-\varphi$.

520. *Equazione polare del cerchio* — Chiamando α, β le coordinate ortogonali del centro di un cerchio, ed r il raggio, la sua equazione sarà

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=r^2.$$

Ciò posto, prendendo l'origine per polo, e l'asse delle x per asse polare, e dinotando di più con ρ', u' le coordinate polari del centro del cerchio, in virtù delle formole (A) avremo

$$y=\rho\,sen\,u \quad , \quad x=\rho\cos u$$
$$\beta=\rho'sen\,u' \quad , \quad \alpha=\rho'\cos u',$$

e però, sostituendo e sviluppando troveremo pe 'l cerchio la seguente equazione polare

$$\rho^2-2\cos(u-u')\,\rho\rho'+(\rho'^2-r^2)=o$$

521. Se il polo è sul cerchio si ha $\rho'=r$, e l'equazione polare di questa curva si riduce in tal caso a

$$\rho=2p'\cos(u-u')$$

522. Se di più l'asse polare passa pe 'l centro, si ha ancora $u'=o$, e quindi risulta pe 'l cerchio l'equazione polare assai più semplice

$$\rho=2\rho'\cos u.$$

523. *Equazione polare dell'ellisse.* Chiamando a, b i semiassi dell'ellisse l'equazione di questa curva è

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$$

Qui trovasi pertanto opportuno di prendere per polo uno dei fuochi; laonde prendendo per esempio, quello sull'asse negativo della x, le di cui coordinate sono c, e o, essendo c l'eccentricità, avremo dalle formole (b),

$$x=c+\rho\cos u \quad , \quad y=\rho\,sen\,u.$$

Sostituendo questi valori nell'equazione dell'ellisse si ha dapprima

$$a^2\rho^2sen^2u+b^2\rho^2\cos^2u=b^2(a^2-c^2)-2\varphi\cos u\,;$$

quindi ponendo nel primo membro a^2-c^2 in luogo di b^2, e nel secondo b^2 per a^2-c^2, dipoi trasportando nel secondo il termine negativo che emerge nel primo, risulterà

$$a^2\,p^2=(b^2-c\,p^2\cos u)^2$$

ed estraendo la radice verrà

$$a\,\rho=b^2-c\,\rho\cos u.$$

In conseguenza l'equazione polare dell'ellisse sarà

$$\rho=\frac{b^2}{a-c\cos u}$$

525. *Equazione polare dell'iperbole.* In un modo perfettamente uniforme, e preso per polo il fuoco sull'asse negativo delle x, si trova per questa curva l'equazione polare

$$\rho=\frac{b^2}{a-c\cos u},$$

la quale in nulla differisce da quella dell'ellisse in quanto alla forma; ma le figure delle due curve risultano diverse per la circostanza che nella prima si ha $a > c$, mentre nella seconda è per l'opposto $a < c$.

625. Dividendo per a il numeratore e denominatore del valore di ρ, e poi facendo $\frac{c}{a} = e$, e ricordando inoltre che $\frac{b^2}{a}$ è l'espressione del semiparametro principale, chiamando m questo semiparametro, risulterà

$$\rho = \frac{m}{1 - e \cos u}$$

per l'equazione polare dell'ellisse e dell'iperbole; ben vero per la prima sarà $e < 1$, e per la seconda viceversa sarà $e > 1$.

326. *Equazione polare della parabola.* Chiamando m il semiparametro principale l'equazione della curva sarà

$$y^2 = 2mx,$$

e le coordinate del fuoco saranno m, e o; quindi avremo

$$x = \frac{m}{2} + \rho \cos u \quad , \quad y = \rho \operatorname{sen} u,$$

sostituendo, e cangiando $\operatorname{sen}^2 u$ in $1 - \cos^2 u$, risulterà

$$\rho^2 = (\rho \cos u + m)^2;$$

donde verrà per la parabola la seguente equazione polare

$$\rho = \frac{m}{1 - \cos u}.$$

527. Dopo ciò possiamo conchiudere che l'equazione

$$\rho = \frac{m}{1 - e \cos u}$$

rappresenterà un'ellisse, un'iperbole, o una parabola secondochè sia e *minore*, *maggiore*, o *eguale* ad 1.

Fine.

INDICE

DEGLI

Elementi di Geometria Analitica

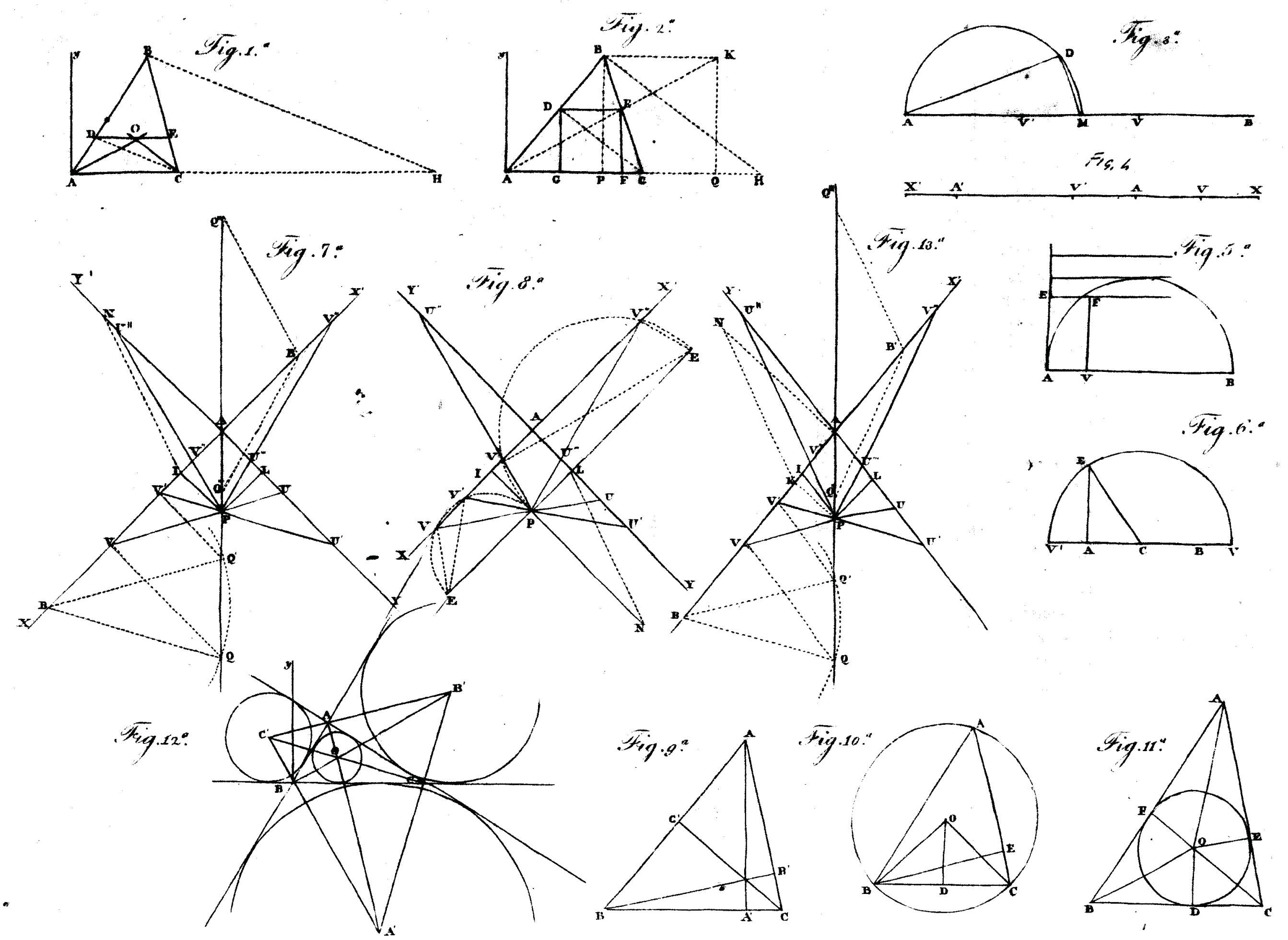


Fig. 1.a
Fig. 2.a
Fig. 3.a
Fig. 4
Fig. 5.a
Fig. 6.a
Fig. 7.a
Fig. 8.a
Fig. 13.a
Fig. 12.a
Fig. 9.a
Fig. 10.a
Fig. 11.a

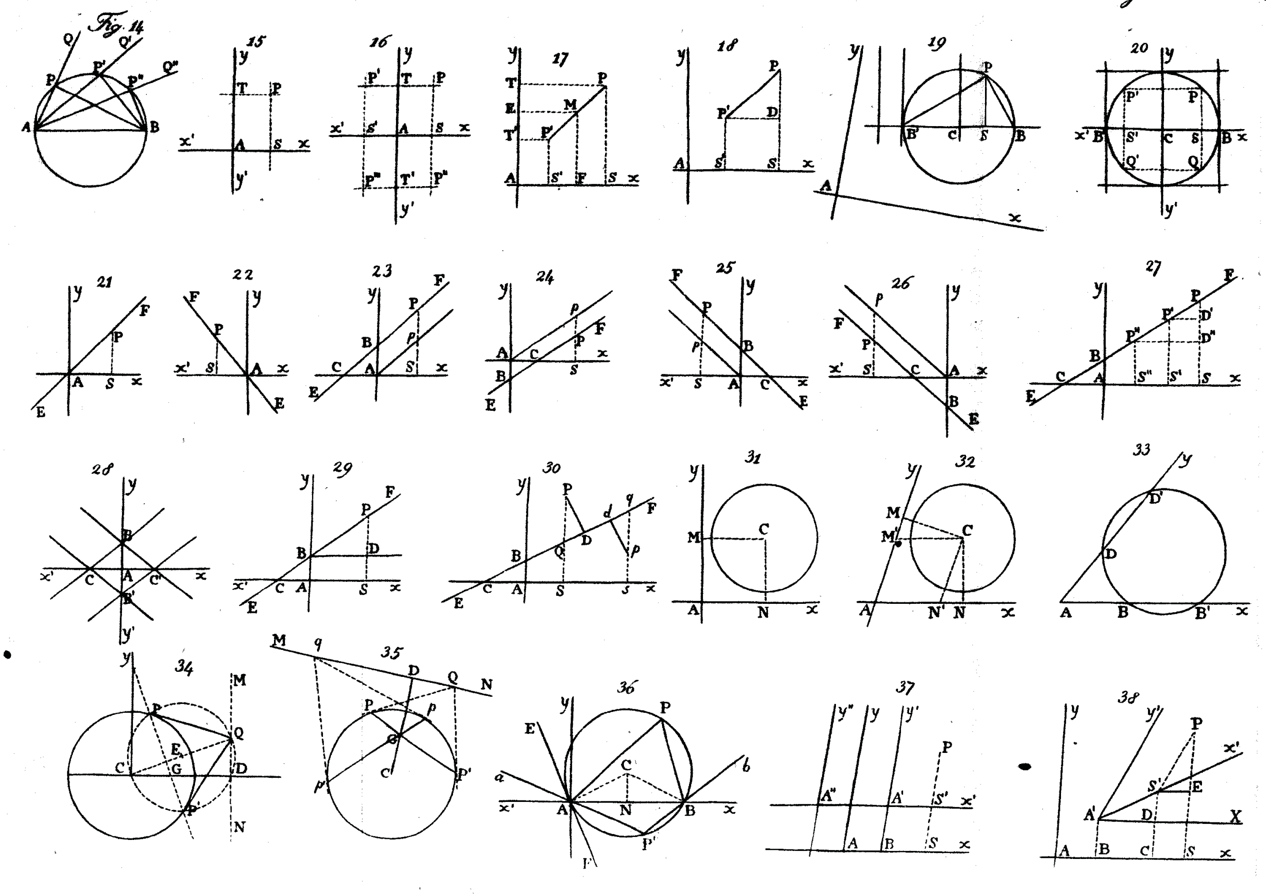
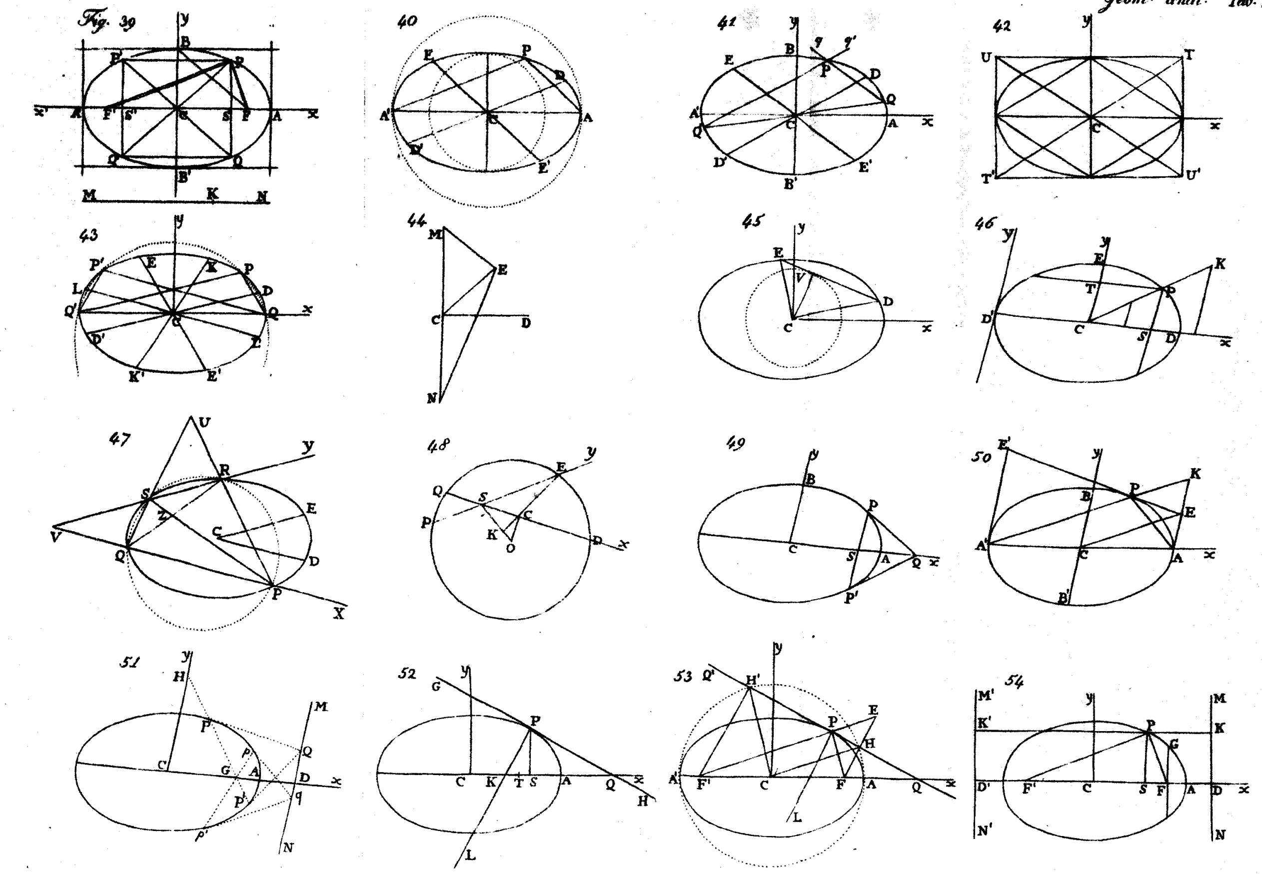


Fig. 14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38

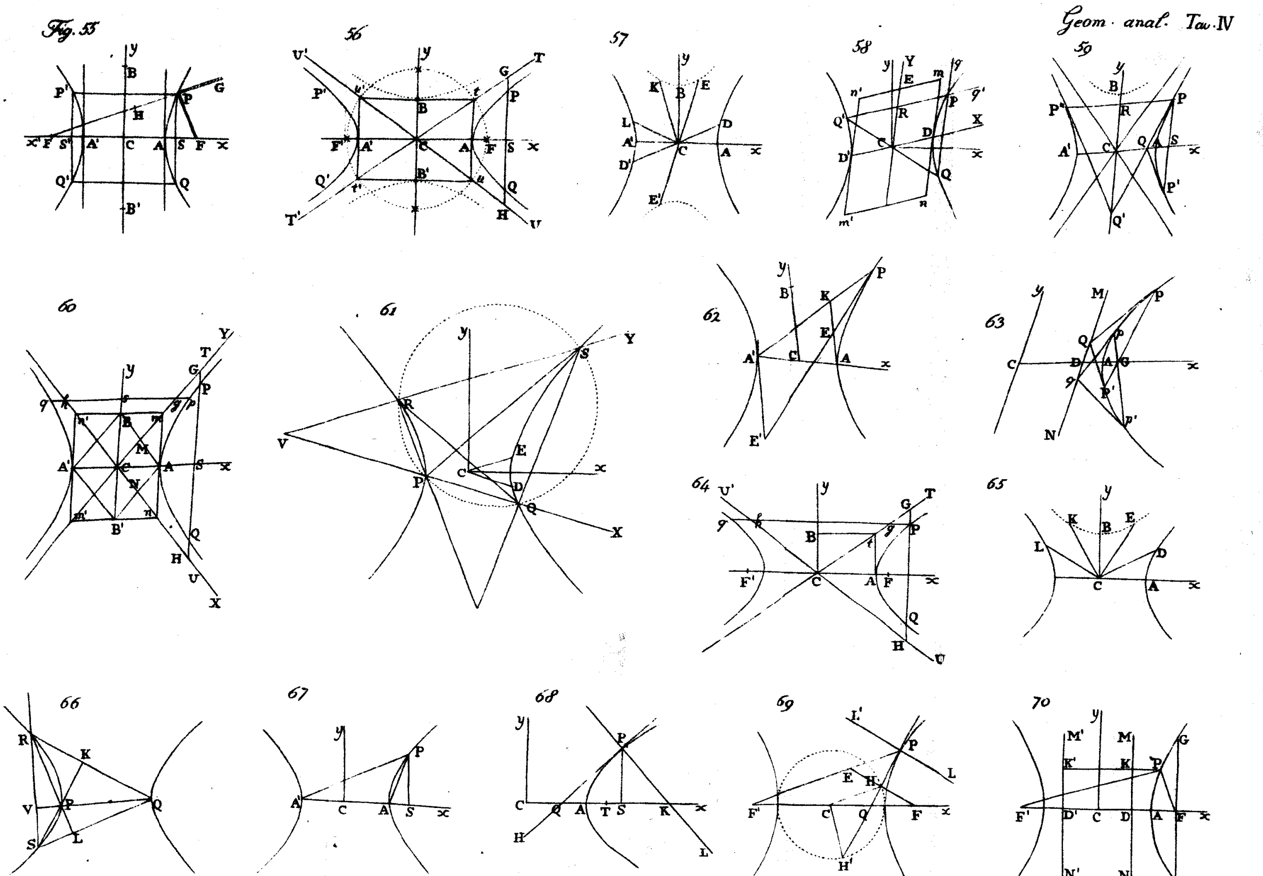
Trudi

Geom. anal. Tav. III



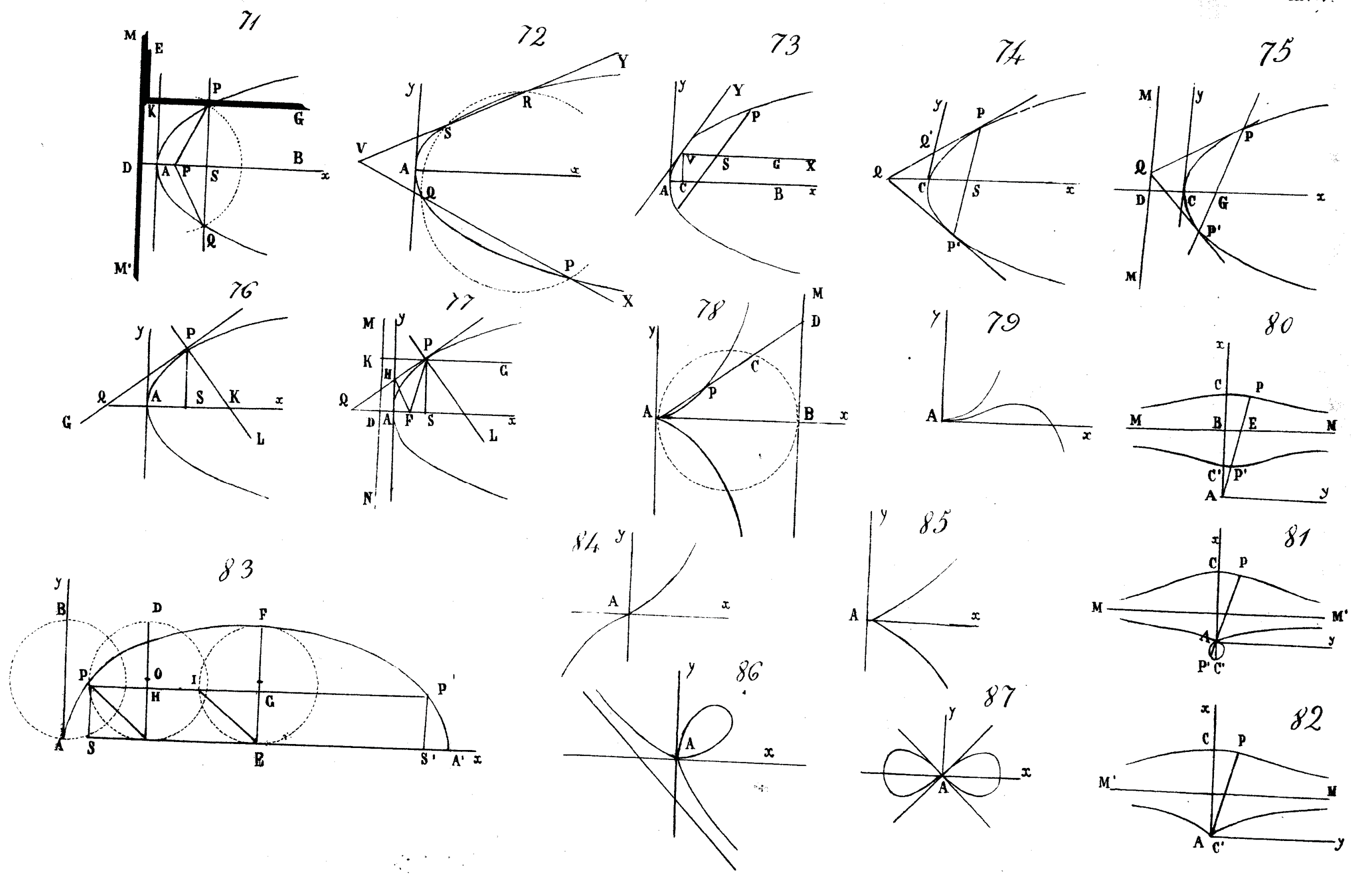
Trudi

Geom. anal. Tav. IV



Studi: Geom: Analit.

Tav. V.



Tav. VI