ELEMENTI

DELL'

ARITMETICA UNIVERSALE

E DELLA

GEOMETRIA PIANA E SOLIDA

DI FILIPPO ANTONIO

REVELLI

DOTTORE DEL COLLEGIO DELLE ARTI LIBERALI GIA' PROFESSORE DI GEOMETRIA PEL CORSO D'ANNI 26 IN QUESTA REGIA UNIVERSITA', ORA MASTRO AUDITORE NELL' ECCELLENTISSIMA REGIA CAMERA DE' CONTI.

PARTE II.

TORINO

PRESSO IGNAZIO G. GENOVA

In vicinanza della Chiesa di S. Tommaso

M. DCC. XCIX.

ELEMENTI

DELLA GEOMETRIA

LIBRO SECONDO

DEFINIZIONE I.

Il corpo, o *solido* è quella quantità, che ha lunghezza, larghezza, e grossezza.

DEFINIZIONE II.

La superficie è quella quantità, che ha soltanto lunghezza, e larghezza.

DEFINIZIONE III.

La linea è una quantità, che ha solamente lunghezza, ed è senza larghezza, e senza spessezza.

DEFINIZIONE IV.

Il punto geometrico è un segno nella quantità continua, che dalla mente nostra si concepisce senza veruna estensione, egli è il fine, o termine della linea, o il segno della divisione della linea in due parti.

ANNOTAZIONE. La linea, i cui termini sono i punti, si concepisce generarsi dal flusso, o scorrimento del punto. La superficie, che terminata viene dalle linee, si concepisce formarsi dal flusso della linea; ed il corpo, che ha per termini la superficie, si concepisce descriversi dal flusso della superficie.

Perlaqualcosa i punti diconsi *elementi della linea*; le linee sono *gli elementi della superficie*, e le superficie sono *gli elementi del corpo*, o *solido*.

DEFINIZIONE V.

La linea retta è la più corta di tutte quelle, che da un punto ad un altro si possono tirare.

Linea curva dicesi ogni linea, che non è la più corta di tutte quelle, che si possono condurre da un punto ad un altro punto.

COROLLARIO. Dunque una sola linea retta si può condurre da un punto ad un altro; essendo una sola la più corta strada, che si possa fare da un punto ad un altro punto.

Conseguentemente se gli estremi, o fini di una retta saranno posti sopra i termini di un' altra linea retta, allora necessariamente quelle due rette saranno uguali fra loro, e l' una cadrà sopra l' altra, cioè perfettamente si combacieranno.

DEFINIZIONE VI.

La superficie piana è quella, sulla quale perfettamente si puo adattare in ogni verso una linea retta.

Superficie curva dicesi quella, su di cui non si può da tutte le parti adattare una linea retta; e nomasi *superficie convessa*, quando è la superficie esterna di un corpo rotondo, e *superficie concava*, quando è l'interna superficie d' un corpo rotondo.

DEFINIZIONE VII.

L' angolo piano è quella inclinazione, che fanno due linee, che si toccano in un punto, e non sono poste per diritto fra loro.

Il punto, in cui concorrono le linee, ed in cui si fa l' angolo, chiamasi *vertice*, o *cima*, o *apice dell' angolo*; e le linee, che formano l' angolo, diconsi *lati dell' angolo*.

L' angolo piano dicesi *rettilineo*, quando è fatto da linee rette; *curvilineo*, se è formato da linee curve; e *mistilineo* si dice l' angolo piano fatto da una linea retta, e da una curva.

Perlaqualcosa l' inclinazione delle due rette AB, AC (Tav. I. Fig. 1.) che si toccano nel punto A, è un angolo piano rettilineo.

L' inclinazione delle due curve FL, LE (Tav. I. Fig. 2.) che s' incontrano nel punto L è un angolo piano curvilineo.

L' angolo fatto dalla retta BC, e dalla curva BM (Tav. I. Fig. 3.) nel punto B, è un angolo piano mistilineo.

Qualsivoglia angolo piano si suole indicare con tre lettere dell' alfabeto, mettendo sempre nel mezzo quella, che sta scritta vicino al vertice dell' angolo. Così nella Fig. 1. l' angolo fatto in A dalle linee BA, CA si noma l' angolo BAC, oppure CAB.

Alcune volte l' angolo piano si indica con la sola lettera posta presso al vertice dell' angolo, e ciò soltanto quando due sole linee concorrono in esso punto. Come il suddetto angolo CAB si chiama anche l' angolo A.

Inoltre qualsivoglia angolo piano si può indicare con una lettera minuscola posta tra i due lati nel vertice dell' angolo. Così l' angolo ACL (Tav. I. Fig. 5.) formato dai lati AC, LC è indicato dalla lettera minuscola x; e la lettera m indica l' angolo ACB.

Corollario. Giacchè l' angolo piano consiste nella sola inclinazione delle linee, che s' incontrano in un punto, perciò la maggiore, o minor lunghezza di esse non accresce, nè diminuisce l' angolo. Esempigrazia l' angolo CAB (Tav. I. Fig. 1.) non si cangia quantunque i lati AB, AC si prolungassero infinitamente al di là di B, e di C.

Parimente l' angolo DER (Tav. I. Fig. 4.) è maggiore dell' angolo LEF (Ass. 10.) quantunque le linee DE, ER, che formano il primo, sieno molto minori qelle linee LE, FE, che fanno l' altro angolo LEF.

DEFINIZIONE VIII.

Stando una linea retta sopra un' altra retta, fa due angoli, che si chiamano *angoli conseguenti*; quali sono i due angoli m, ed x nella figura 5; medesimamente i due angoli ABC, ABL (Fig. 6.) sono angoli conseguenti.

DEFINIZIONE IX.

TAV. I. FIG. 6.

Quando una linea retta (AB) stando sopra un'altra retta (CL) non s' inclina più da una parte, che dall' altra, e perciò fa gli angoli conseguenti (ABC, ABL) fra loro uguali; allora ciascuno di essi chiamasi *angolo retto*, e la retta (AB), che sta sopra l' altra (CL) dicesi *linea perpendicolare* a quella (CL) alla quale ella soprastà.

Corollario. Dunque ad una retta CL, e ad un punto in essa B, una sola linea retta perpendicolare BA si può condurre; perchè in una sola posizione BA, la linea non s' inclina più dall' una, che dall'altra parte.

DEFINIZIONE X.

TAV. I. FIG. 5.

Quando una linea retta (AC) stando sopra un' altra retta (BL) s' inclina più verso una parte, che verso l' altra, e che per conseguenza fa gli angoli conseguenti (m, x) disuguali, allora la retta (AC), che sta sopra l' altra, chiamasi *linea obliqua*, ed i due angoli conseguenti, e disuguali (m, x) diconsi *angoli obbliqui*; ma quello (ACB, o sia m), che è maggiore del retto, chiamasi *angolo ottuso*, e l' altro (ACL, o sia x), che è minore del retto, dicesi *angolo acuto*.

COROLLARIO. Dunque l' angolo retto (ABC, Fig. 6.) è quello, di cui un lato prolungato (CB verso L) forma un angolo conseguente (ABL) uguale al medesimo angolo dato (ABC).

L' angolo ottuso (m, Fig. 5.) si può definire quello, un lato di cui prolungato (BC verso L) fa un angolo conseguente (x) minore d' esso angolo dato (m).

L' angolo acuto (x) è quello, del quale un lato prolungato (LC verso B) forma un angolo conseguente (m) maggiore di esso angolo (x).

DEFINIZIONE XI.

TAV. I. FIG. 7.

Linee parallele, o *equidistanti* diconsi quelle, che essendo poste in un medesimo piano, conservano sempre la medesima distanza fra loro; onde quantunque si prolunghino in infinito da ambedue le parti non si congiungeranno giammai insieme.

Fingasi, che la retta terminata AB si muova, e scorra perpendicolarmente sopra la retta AL, in esso movimento l' estremo punto B descriverà la linea retta BBM parallela, o sia equidistante alla retta AL. Conseguentemente quando le perpendicolari frapposte tra due linee sono uguali fra loro, quelle due linee sono parallele. Scambievolmente quando due linee sono parallele, le perpendicolari interposte fra di esse sono uguali fra loro.

DEFINIZIONE XII.

La *figura* è uno spazio chiuso d' ogni intorno da uno, o da più termini.

DEFINIZIONE XIII.

La *figura piana* è una superficie piana terminata d' ogni intorno da una, o da più linee.

La figura piana dicesi *rettilinea*, quando è chiusa d' ogni intorno da linee rette. Chiamasi *curvilinea* quella, che è terminata da una, o da più linee curve; e *mistilinea* si dice la figura piana terminata in parte da linee rette, e parte da linee curve.

Le linee, che circondano, o terminano la figura piana, si chiamano *lati della figura piana*.

Tutte le linee, che terminano la figura, insieme prese, diconsi *perimetro della* medesima *figura*.

COROLLARIO. Dunque due linee rette non possono formare una figura, perchè con due linee rette non si può chiudere intorno intorno uno spazio.

DEFINIZIONE XIV.

La *figura solida* è uno spazio chiuso d' ogni intorno da una, o da più superficie.

ANNOTAZIONE. Due sono le principali parti della geometria, la prima delle quali chiamasi *geometria piana*, ed in essa si dimostrano le proprietà delle linee, degli angoli, e delle figure piane, e trattasi della loro uguaglianza, e proporzione, e degli altri accidenti di esse quantità: nell' altra parte si dimostrano le proprietà, ed accidenti delle figure solide, e nomasi *geometria solida*.

DEFINIZIONE XV.

Il cerchio è una figura piana curvilinea terminata da una sola linea curva, alla quale quante linee rette pervengono tirate da un punto, che è dentro alla figura, tutte sono uguali fra loro.

Se per esempio si concepisca, che qualsivoglia linea retta terminata (AC) intorno all'uno, o all'altro (Tav. I. Fig. 8.) de' suoi estremi (C) fisso, ed immobile si rivolga nel piano (da A per B, D, E, F, ec.) sino a che essa ritorni al medesimo punto (A), o sia alla medesima positura (AC) dalla quale dipartissi, lasciando in ogni positura il vestigio, o stampa di se stessa; allora la figura piana curvilinea (ABDEFGL) descritta dal rivoltolare della stessa retta (AC) chiamasi *cerchio*, o *circolo*.

La linea curva (ABDEFGLA) descritta dall'altro termine (A) della rivoltolata retta (AC) dicesi *circonferenza*, o *periferia*, o *perimetro del cerchio*.

Qualunque parte della circonferenza come ABD, o EF, o AL, ec.) si dice *arco del circolo*.

Il punto di mezzo, o sia l'estremo immobile (C) della linea genitrice (AC) si noma *centro del circolo*.

Le linee rette (CA, CB, CD, ec.) tirate dal centro alla periferia si chiamano *raggi*, o *semidiametri del circolo*, i quali sono tutti uguali fra loro.

DEFINIZIONE XVI.

TAV. I. FIG. 9.

Diametro del cerchio dicesi qualunque retta, che passa pel centro, ed è terminata dall'una, e dall'altra parte dalla circonferenza, come la retta AB, e divide il cerchio in due parti uguali, le quali addimandansi *semicircoli*, o *mezzi cerchi*.

Perlaqualcosa il *semicircolo*, o *mezzo cerchio* è una figura piana mistilinea contenuta dal diametro, e dalla metà della circonferenza, come la figura AFB, o ABM.

DEFINIZIONE XVII.

TAV. I. FIG. 10.

Corda, o *sottesa* del cerchio si addimanda qualunque linea retta terminata da amendue le parti dalla circonferenza, e che non passa pel centro del cerchio, come la retta AM, e divide il cerchio in due parti disuguali, che diconsi *segmenti*, o *porzioni del circolo*.

Laonde il *segmento*, o *porzione del cerchio* è una figura piana mistilinea circoscritta da un arco di cerchio, e dalla corda, che sottende lo stesso arco. Dicesi *segmento maggiore* quello (AEM), che contiene il centro del circolo; e l'altro (ABM) chiamasi *segmento minore*.

DEFINIZIONE XVIII.

Triangolo rettilineo è una figura piana rettilinea terminata da tre linee rette, le cui specie per rapporto ai lati sono tre, cioè

DEFINIZIONE XIX.

TAV. I. FIG. 11.

Il triangolo equilatero, che ha tutti tre i lati uguali.

DEFINIZIONE XX.

TAV. I. FIG. 12.

Il triangolo isoscele, o *equicrure*, il quale ha solamente due lati uguali.

DEFINIZIONE XXI.

TAV. I. FIG. 13.

Il *triangolo scaleno*, che ha tutti tre i lati disuguali.

ANNOTAZIONE. Tre parimente sono le specie di triangoli in risguardo agli angoli, e sono

DEFINIZIONE XXII.

TAV. I. FIG. 14.

Il *triangolo rettangolo*, il quale ha un angolo retto.

DEFINIZIONE XXIII.

TAV. I. FIG. 15.

Il *triangolo ottusiangolo*, che ha un angolo ottuso.

DEFINIZIONE XXIV.

TAV. I. FIG. 16.

Il *triangolo acuziangolo*, che ha tutti tre gli angoli acuti.

DEFINIZIONE XXV.

TAV. I. FIG. 14.

Nel triangolo rettangolo il lato (AC) opposto all' angolo retto (B) chiamasi *ipotenusa*, e gli altri due lati (BA , BC) formanti l' angolo retto appellansi *cateti*.

ANNOTAZIONE. In ogni triangolo rettilineo si debbono considerare sette cose, che sono i tre lati, i tre

angoli, e lo stesso triangolo, vale a dire la superficie piana terminata dai tre lati.

Inoltre quando sono già stati nominati due lati d' un triangolo, il rimanente lato si noma *base* del medesimo *triangolo*, e nel triangolo isoscele dicesi *base* il lato disuguale. E generalmente base del triangolo si chiama quel lato, su cui pare, che il triangolo s'appoggi.

DEFINIZIONE XXVI.

Figura *rettilinea quadrilatera*, o *quadrangolare* è quella, che è contenuta da quattro linee rette.

DEFINIZIONE XXVII.

Il *parallelogrammo* è una figura quadrilatera, che ha i lati opposti due a due, paralleli fra loro.

Il parallelogrammo dicesi *rettangolo*, quando ha tutti quattro gli angoli retti (Tav. I. Fig. 17, 19); ed *obbliquangolo*, quando ha gli angoli obbliqui (Tav. I. Fig. 18 , 20).

Inoltre si chiama *equilatero*, quando ha tutti quattro i lati uguali fra loro (Tav. I. Fig. 17, 18).

DEFINIZIONE XXVIII.

TAV. I. FIG. 17.

Il *quadrato*, o *tettragono* è un parallelogrammo equilatero, e rettangolo.

DEFINIZIONE XXIX.

TAV. I. FIG. 18.

Il *rombo* è un parallelogrammo equilatero, ed obbliquangolo.

DEFINIZIONE XXX.

TAV. I. FIG. 19.

La *figura dall' una parte più lunga*, la quale più semplicemente *rettangolo*, o *quadrilungo* si noma, è un parallelogrammo rettangolo, ma non equilatero.

DEFINIZIONE XXXI.

TAV. I. FIG. 20.

Il *romboide* è un parallelogrammo obbliquangolo, e non equilatero.

DEFINIZIONE XXXII.

TAV. I. FIG. 21. 22.

Ogni altra figura quadrilatera, che non è parallelogrammo si addimanda *trapezio*.

DEFINIZIONE XXXIII.

Le figure piane rettilinee contenute da più di quattro lati generalmente si chiamano *figure moltilatere*, o *poligoni*, o *rettilinei*, che prendono il loro nome particolare dal numero de' lati; laonde il poligono contenuto da cinque lati si dice *pentagono*, o *quinquangolo* (Tav. I. Fig. 23.); se è contenuto da sei lati, chiamasi *esagono*, o *sessagono*; (Tav. I. Fig. 24).

Se da sette *ettagono*; se da otto *ottagono*, o *ottangolo*; se da nove *ennagono*; se da dieci *decagono*; se da undici *undecagono*; da dodici *dodecagono*; da cento *ecatogono*; da mille *chiliogono* ec.

DEFINIZIONE XXXIV.

TAV. I. FIG. 23. 25.

Linea *diagonale* di qualsivoglia figura è una linea retta tirata entro la figura da un angolo ad un altro angolo opposto, come AC; e nel parallelogrammo essa linea chiamasi *diametro del parallelogrammo*.

DEFINIZIONE XXXV.

Area, o *aia* di qualunque figura piana è la superficie della medesima figura, cioè lo spazio chiuso dal perimetro della stessa figura. Come *l' area del triangolo* è la superficie contenuta dai tre lati del medesimo triangolo. *L' area del circolo* è lo spazio chiuso intorno intorno dalla circonferenza del medesimo circolo ec.

DEFINIZIONE XXXVI.

TAV. I. FIG. 26.

Se una linea retta terminata AC si concepirà muoversi, e scorrere perpendicolarmente sopra un' altra retta terminata AB, e che in ogni sito, o positura AC, EF, GH, ec. lasci la stampa, o vestigio di se stessa sinattantochè giunga nel sito BL; allora la retta AC col suddetto movimento descriverà il rettangolo ACLB.

Lo stesso rettangolo AL si descriverà, se concepirassi, che la retta AB perpendicolarmente scorra sopra tutta la retta AC. Perlaqualcosa il rettangolo AL s' immagina, e si concepisce essere composto da altrettante linee rette, uguali alla retta AC, quanti sono gli elementi, o diciamo punti formanti la retta AB; ovveramente, che è la stessa cosa, il rettangolo AL si concepisce composto da tante rette linee uguali alla retta AB, quanti sono gli elementi, che formano la retta AC.

Quindi qualsivoglia *rettangolo* AL dicesi *contenuto dai due lati contigui* AB, AC, che formano l' angolo retto; ed il lato AB chiamasi *base*, e la perpendicolare AC dicesi *altezza del* medesimo *rettangolo*.

COROLLARIO I. (Tav. I. Fig. 27.) Perlaqualcosa l' area, o superficie di qualunque rettangolo ABCF si otterrà moltiplicando la base AB nell' altezza BC. Se, verbigrazia la base AB sarà di 4 oncie nostrali di lunghezza, e l' altezza BC di 3 oncie; moltiplicando il 4 nel 3, il prodotto 12 esprimerà l' area del dato rettangolo AC.

Ma se la base di qualsivoglia rettangolo si nomerà b, e l' altezza si chiami m, allora il prodotto bm significherà l' area dello stesso rettangolo; e questa è la ragione, per cui nell' aritmetica al numero 150. abbiamo detto, che il prodotto di due quantità disuguali, come bm, si chiama rettangolo.

(Tav. I. Fig. 28.) Ma quando la base AB è uguale all' altezza AC, allora il rettangolo AF contenuto da esse linee dicesi quadrato della linea AB, o della AC; e se la base AB sarà 5 oncie di lunghezza, anche l' uguale altezza AC avrà 5 oncie di lunghezza; ed il prodotto del 5 nel 5, cioè il 25, esprimerà l' area del medesimo quadrato.

Se la base AB del quadrato AF si nomerà a, l' altezza uguale AC si chiamerà pure a, ed il prodotto aa, o sia a^2 indicherà l' area, o superficie del quadrato della linea AB, o AC. Per questa ragione (arit. 142.) si chiamò *quadrato* il prodotto di qualsivoglia quantità moltiplicata per se stessa.

COROLLARIO II. (Tav. I. Fig. 27.) Dalle antecedenti nozioni ne segue, che una linea moltiplicata per un' altra linea dà per prodotto, non una linea, ma una superficie; come moltiplicando la linea BA di oncie 4 per la linea BC di oncie 3 di lunghezza, il prodotto è veramente 12, ma non sono 12. oncie di lunghezza, sono bensì, come ocularmente si vede, dodici piccole superficie, od aree quadrate, ciascuna delle quali ha un' oncia di lunghezza, ed un altr' oncia di larghezza; ed una tale piccola superficie quadrata appellasi *oncia quadrata*.

COROLLARIO III. Quindi ne viene, che le *misure* altre sono *lineari*, colle quali si misurano le distanze, cioè le lunghezze, le larghezze ec.; altre poi diconsi *misure superficiali*, con cui si misurano le superficie. Sonovi inoltre le misure solide per misurare la mole de' corpi, delle quali parleremo nel sesto libro, nell' annotazione della proposizione 20.

Le nostrali misure lineari sono il *piede liprando*, che è diviso in dodici parti uguali, che chiamansi *oncie lineari*. Ciascun' oncia è divisa in dodici parti uguali, che nomansi *punti lineari*. Ciascun punto lineare dividesi in dodici parti uguali nomate *atomi lineari*. Abbiamo inoltre *il trabucco*, che ha sei piedi liprandi di lunghezza. *La pertica*, che è lunga due trabucchi, o sia dodici piedi liprandi; e per misurare i panni abbiamo il *raso*, che ha quattordici oncie lineari di lunghezza. Inoltre ci serviamo in alcune misure del *piede manuale*, che è lungo due terzi del piede liprando, cioè oncie otto, e della *tesa*, che ha cinque piedi manuali di lunghezza, cioè oncie quaranta.

Le superficiali misure, di cui ci serviamo, sono formate dai quadrati, o da' rettangoli delle misure lineari. Come *la tavola* è il quadrato di una pertica, cioè un quadrato che ha due trabucchi di lunghezza, e due trabucchi di larghezza. Il *trabucco quadrato*, che è la quarta parte della *tavola*, è lungo sei piedi, e altrettanti largo. Il *piede quadrato*, che è la trentaseesima parte pel trabucco quadrato, è il quadrato d' un piede lineare.

L' oncia quadrata, che è il quadrato di un' oncia lineare, ed è la cenquarantaquattresima parte del piede quadrato. Il *punto quadrato*, e *l' atomo quadrato*.

Inoltre il *piede di tavola*, che è la dodicesima parte di una *tavola*, è un rettangolo, che ha la lunghezza di una pertica, e l' altezza di un piede, perciò contiene dodici piedi quadrati.

Il *piede di trabucco quadrato* è un rettangolo lungo un trabucco, e largo un piede; ed è la sesta parte del trabucco quadrato; onde contiene sei piedi quadrati.

L' *oncia di tavola* è un rettangolo lungo due trabucchi, o sia una pertica, e largo un' oncia lineare, e contiene 144. oncie quadrate.

L' *oncia di trabucco quadrato* ha di lunghezza un trabucco, e di larghezza un' oncia lineare; e però contiene 72. oncie quadrate. Lo stesso intendasi del *punto*, e dell' *atomo* superficiale di tavola, e di trabucco ec.

DEFINIZIONE XXXVII.

TAV. I. FIG. 29.

Il rettangolo ABFC contenuto dalle rette AB, AC alcune volte viene indicato scrivendo AB×AC; e se la linea E sarà uguale al lato AB, e la linea G sia uguale al lato AC, allora il rettangolo AF si potrà anche dire contenuto dalle linee E, G.

(Tav. I. Fig. 28.) Ma il quadrato FA della retta AB si indica così $\overline{AB}^2$; e leggesi *AB quadrato*, e se la retta L sarà uguale al lato AB di esso quadrato FA, in tal caso il medesimo quadrato dirassi ancora quadrato della linea L.

DEFINIZIONE XXXVIII.

TAV. I. FIG. 30. 31. 32.

L' *altezza di una figura rettilinea* è la linea perpendicolare alla base, tirata dal vertice, o dal lato posto alla stessa base, come AM, la qual perpendicolare può cadere entro la figura, come nelle figure 30, 32, o cadere fuori di essa sopra la base prolungata, come si vede nella figura 31.

POSTULATO I.

Addimandasi da un punto dato ad un altro punto dato tirare una linea retta.

POSTULATO II.

Prolungare una data linea retta terminata dirittamente, ed indefinitamente.

POSTULATO III.

Da qualsivoglia centro, e con qualsivoglia intervallo, o sia raggio descrivere un cerchio.

Annotazione. Tredici assiomi sono stati posti nel secondo libro degli elementi dell' aritmetica universale ne' numeri 103, 104, ec., laonde sia

ASSIOMA XIV.

TAV. I. FIG. 33.

Quelle cose, che soprapposte l' una all' altra si adattano bene insieme, e perfettamente si combaciano, sono uguali fra loro.

Così il cerchio A, se si sovrapporrà al cerchio B, e posto il centro del circolo A sopra 'l centro del cerchio B, la circonferenza del cerchio A si adatti perfettamente colla circonferenza del cerchio B; allora i due circoli si combacieranno perfettamente, e saranno uguali fra loro.

Similmente tutti i circoli, che hanno i raggi uguali soprapposti l'uno all'altro, si combacieranno bene insieme, e conseguentemente saranno uguali fra loro.

Inoltre tutte le linee rette uguali sovrapposte l'una all'altra si adatteranno bene insieme.

Medesimamente gli angoli rettilinei uguali soprapposti l'uno all'altro si combacieranno perfettamente; il che tutto facilmente si deduce dalle definizioni decimaquinta, quinta, e settima.

ASSIOMA XV.

Se un tutto sarà doppio d'un altro tutto, e la parte tolta dal primo sia doppia della parte tolta dal secondo tutto, anche la rimanente parte del primo tutto sarà doppia della rimanente parte del secondo.

Se dal 24, doppio del 12, si sottrarrà il 10, doppio del 5, che si sottragga dal 12, resterà 24—10 doppio di 12—5, cioè il residuo 14 doppio del residuo 7.

ASSIOMA XVI.

TAV. I. FIG. 34.

Tutti gli angoli retti sono uguali fra loro. Sieno le rette AB, LG perpendicolari alle rette CD, EF, gli angoli retti in B saranno uguali agli angoli retti in G. Imperciocchè se la retta CD si soprapporrà alla retta EF in guisa, che il punto B cada sopra il punto G, allora la perpendicolare BA dovrà neces-

sariamente adattarsi colla retta GL, perchè se cadesse o di quà, o di là da essa perpendicolare, sarebbe obbliqua, e non più perpendicolare, il che è contro l'ipotesi; conseguentemente gli angoli retti in B sono uguali agli angoli retti in G, poichè si adattano bene insieme.

ASSIOMA XVII.

TAV. II. FIG. 35.

Due lati di qualsivoglia triangolo rettilineo, insieme presi, sono maggiori del rimanente lato.

Come nel triangolo ABC egli è evidente, che due lati insieme presi a piacere, verbigrazia AB, e BC, sono maggiori del rimanente lato AC, che è la più corta strada, che si possa fare dal punto A al punto C.

È la propos. 20. del lib. 1. d'Euclide.

Similmente del triangolo mistilineo ALCB, i due lati AB, CB insieme presi sono maggiori della curva, o sia rimanente lato, ALC, quando la convessità di essa è rivolta verso l'angolo ABC contenuto dalle due rette AB, BC, essendo cosa evidente, che la strada, che si fa dal punto A passando per B, per arrivare al punto C, è più lunga della strada curva ALC.

ASSIOMA XVIII.

TAV. II. FIG. 36.

Se da' termini (A, e C) d'un lato (AC) di qualunque triangolo rettilineo (ABC) e qualsivoglia punto (D) preso, o dato entro lo stesso triangolo, si condurranno due linee rette (AD, CD); allora esse linee insieme prese saranno minori de' due rimanenti lati (AB, CB) del triangolo, insieme presi; essendo cosa evidente, che la strada da A passando per D per andare al punto C è più breve di quella, che si farebbe da A passando per B per giugnere allo stesso punto C.

È la prima parte della propos. 21. del lib. 1. di Euclide.

PROPOSIZIONE I.

PROBLEMA TAV. II. FIG. 37.

Sopra una data linea retta terminata costituire un triangolo equilatero.

Sia data la retta linea AC terminata ne' punti A, e C, bisogna sopra essa costituire il triangolo equilatero.

Costruzione. Dal centro A, coll' intervallo, o sia raggio AC, (post. 3.) descrivasi il cerchio CDF.

Similmente dal centro C coll' intervallo medesimo CA descrivasi un altro circolo ADE, la cui periferia segherà in qualche punto la periferia dell' altro cerchio come in D, perchè hanno il raggio comune; da esso punto D ai punti A, e C (post. 1.) si tirino le linee rette DA, DC; dico essere equilatero il triangolo ADC.

Dimostrazione. Le rette linee AD, AC sono raggi del medesimo circolo FDC, perciò (def. 15.) sarà AD=AC. Similmente abbiamo CD=AC, perchè sono raggi dello stesso cerchio ADE; dunque (ass 1.) sarà AD=CD, poichè amendue sonosi dimostrati uguali alla medesima linea retta AC. Adunque le tre linee rette AD, AC, CD sono uguali fra loro, conseguentemente (def. 19.) il triangolo ADC è equilatero, ed è costituito sopra la data linea retta terminata AC. Il che bisognava fare, e dimostrare.

È la prop. 1. del lib. 1. d' Euclide.

PROPOSIZIONE II.

PROBLEMA TAV. II. FIG. 38.

Da un punto dato tirare una linea retta uguale ad una data linea retta terminata.

Sia data la linea retta terminata AB, e dato sia il punto D, dal quale si debba tirare una linea retta uguale alla data AB.

Costruzione. Dal centro A coll' intervallo AB (post. 3.) descrivasi il cerchio BEF; indi dal punto A al punto dato D (post. 1.) tirisi la retta linea AD, e sopra essa (prop. antec.) costituiscasi il triangolo equilatero ADC, il cui lato CA (post. 2.) si prolunghi sino alla periferia in F, poscia dal centro C con l' intervallo CF (post. 3.) si descriva il cerchio FGL. Finalmente (post. 2.) si prolunghi il lato CD sino alla periferia di questo cerchio in L, sarà DL la ricercata linea retta.

Dimostrazione. Il triangolo CDA è di costruzione equilatero, onde (def. 19.) sarà il lato CD=CA; ma (def. 15.) la retta CL è uguale alla CF, perchè sono raggi del cerchio FGL: dunque dalle uguali linee CL, CF togliendo le parti uguali CD, CA (ass. 3.) rimarrà DL=AF; ma la retta AB (def. 15.) è uguale alla medesima AF, perchè sono raggi del cerchio BEF; adunque (ass. 1.) sarà DL=AB. Perlaqualcosa dal punto dato si è tirata una linea retta uguale ad un' altra data linea retta terminata. Il che si dovea fare, e dimostrare.

È la prop. 2. del lib. 1. d' Euclide.

PROPOSIZIONE III.

PROB. TAV. II. FIG. 39.

Date duè linee rette disuguali, dalla maggiore tagliarne una parte uguale alla minore.

Sieno date le due linee rette disuguali AB maggiore, e CD minore, bisogna dalla maggiore AB tagliarne una parte uguale alla minore CD.

Costruzione. Dall' estremo punto A della maggiore AB (prop. ant.) tirisi la linea retta AE=CD, e dal centro A coll' intervallo AE (post. 3.) descrivasi il cerchio EFG, la cui circonferenza segherà in qualche punto F la retta maggiore AB; e sarà AF la ricercata parte.

Dimostrazione. Essendo il punto A centro del cerchio EFG, sarà (def. 15.) il raggio AF=AE; ma (costruz.) abbiamo AE=CD; dunque (ass. 1.) sarà ancora AF=CD. Adunque dalla data linea retta maggiore si è tagliata una parte uguale alla data linea minore. Il che bisognava fare, e dimostrare.

È la prop. 3. del lib. 1. d' Euclide.

PROPOSIZIONE IV.

PROB. TAV. II. FIG. 40.

Date tre linee rette terminate, due delle quali insieme prese in qualsivoglia modo, sieno maggiori della rimanente, costituire sopra una di esse un triangolo, che abbia gli altri due lati uguali alle altre due date linee rette.

Sieno date le tre linee rette A, C, GH, due delle quali insieme prese, ed in qualsivoglia modo, sieno maggiori della rimanente (ass. 17.); bisogna sopra la GH descrivere un triangolo, che abbia gli altri due

lati uguali alle altre due date linee rette A, C, ciascuno a ciascuna.

Costruzione. La retta terminata GH prolunghisi (post. 2.) indefinitamente da ambedue le parti verso E, ed F; indi (prop. antec.) si taglino le parti GE uguale alla linea retta A, ed HI uguale alla retta linea C; e dal centro G con l' intervallo GE (post. 3.) descrivasi il cerchio ELM, e dal centro H col raggio HI si descriva l' altro cerchio ILK. Finalmente dal punto L, in cui le circonferenze si tagliano ai punti G, H (post. 1.) tirinsi le linee rette LG, LH; sarà LGH il ricercato triangolo.

Dimostrazione. Imperciocchè il lato GL (def. 15.) è uguale alla GE; ma la GE (costr.) è uguale alla A, dunque (ass. 1.) eziandio il lato GL è uguale alla linea retta A. Similmente (def. 15.) abbiamo HL=HI, ma (costr.) si è fatta HI=C; adunque (ass. 1.) sarà ancora HL=C. Conseguentemente sopra la GH si è costituito il triangolo GLH, che ha gli altri due lati GL, HL uguali alle altre due linee rette date, A, C. Il che si dovea fare, e dimostrare.

È la prop. 22. del lib. 1. d' Euclide.

Corollario. Se le tre linee date saranno tutte tre uguali fra loro, il descritto triangolo sarà equilatero (def. 19.); ma se due soltanto saranno fra loro uguali, il triangolo sarà isoscele (def. 20.); e se tutte tre le linee date saranno disuguali, il triangolo sarà scaleno (def. 21.).

PROPOSIZIONE V.

TEOR. TAV. II. FIG. 41.

Se due triangoli hanno due angoli uguali a due angoli, l' uno all' altro, ed un lato uguale ad un lato, che è fra gli angoli uguali, avranno ancora gli altri lati uguali agli altri lati, l' uno all' altro, il rimanente angolo uguale all' angolo rimanente, e tutto il triangolo sarà uguale a tutto il triangolo.

I due triangoli ABC, EFM abbiano l' angolo A uguale all' angolo E, l' angolo C uguale all' angolo M, ed il lato frapposto AC uguale al lato frapposto EM; dico, che sarà il lato AB uguale al lato EF, il lato BC uguale al lato FM, che sono sottoposti agli angoli uguali, l' angolo B uguale all' angolo F, e tutto il triangolo ABC sarà uguale al triangolo EFM.

Dimostrazione. Prendasi il triangolo ABC, e sovrappongasi al triangolo EFM di maniera, che il punto A si metta sopra 'l punto E, ed il lato AC sopra l' ugual lato EM, il punto C cadrà necessariamente sopra il punto M, e perfettamente si combacieranno questi due lati uguali (cor. def. 5.); ma perchè d' ipotesi l' angolo A è uguale all' angolo E, ed il lato AC è stato posto sopra EM, perciò il lato AB necessariamente cadrà sopra il lato EF.

Similmente perchè il lato AC sta sopra EM, e l' angolo C è d' ipotesi uguale all' angolo M, il lato CB dovrà necessariamente cadere sopra MF; conseguentemente il punto B, comune a due lati AB, CB, dovrà cadere sopra il punto F comune ai due lati EF, MF, ed il triangolo ABC si adatterà perfettamente al triangolo EFM; adunque (ass. 14.) sarà il lato AB uguale al lato EF, il lato BC=FM, l' angolo B uguale all' angolo F, ed il triangolo ABC uguale al triangolo EFM.

Perlaqualcosa se due triangoli avranno due angoli uguali a due angoli l'uno all' altro, ed un lato uguale ad un lato, che è fra gli angoli uguali, avranno eziandìo gli altri lati uguali agli altri lati l'uno all' altro, il rimanente angolo uguale all' angolo rimanente, e tutto il triangolo sarà uguale a tutto il triangolo. Il che bisognava dimostrare.

È la prima parte della propos. 26. del lib. 1. di Euclide.

PROPOSIZIONE VI.

TEOR. TAV. II. FIG. 42.

Se due triangoli avranno due lati uguali a due lati l' uno all' altro, e l' angolo uguale all' angolo, contenuto dai lati uguali, avranno ancora la base uguale alla base, il triangolo sarà uguale al triangolo, e gli altri angoli saranno uguali agli altri angoli l' uno all' altro, fra loro quelli, ai quali sono sottoposti i lati uguali.

I due triangoli ADE, BCF abbiano il lato AD uguale al lato BC, il lato AE=BF, e l' angolo A uguale all' angolo B, che sono contenuti dai lati uguali; dico, che la base DE sarà uguale alla base CF, il triangolo ADE uguale al triangolo BCF, l' angolo D uguale all' angolo C, e l' angolo E uguale all' angolo F, ai quali sono sottotesi i lati uguali.

Dimostrazione. Il triangolo ADE s' intenda posto sopra il triangolo BCF talmentechè il punto A cada sopra il punto B, ed il lato AD si stenda sopra l' ugual lato BC, allora il punto D cadrà necessariamente sopra il punto C, perchè d' ipotesi è il lato AD=BC.

Inoltre, perchè l' angolo A è d' ipotesi uguale all' angolo B, il lato AE cadrà sopra il lato BF, ed il punto E cadrà sopra F, perchè d' ipotesi è il lato AE uguale al lato BF; e perchè si è dimostrato, che i due punti D, ed E cadono sopra i punti C, ed F, perciò (cor. def. 5.) la base DE si combacierà colla base CF, e tutto il triangolo ADE si adatterà perfettamente a tutto il triangolo BCF; adunque (ass. 14.) sarà la base DE uguale alla base CF, il triangolo ADE uguale al triangolo BCF, l' angolo D uguale all' angolo C, e l' angolo E=F. Dunque se due triangoli hanno due lati ec. Il che si dovea dimostrare.

È la prop. 4. del lib. 1. d' Euclide.

Annotazione. Dalla dimostrazione di questa proposizione facilmente si può comprendere, che posti i lati uguali AD=BC, ed AE=BF, se l' angolo A fosse maggiore dell' angolo B, anche la base DE sarebbe maggiore della base CF; perciocchè la maggiore, o minor lunghezza della base dipende dalla maggiore, o minor grandezza dell' angolo sottoposto, quando i lati, che contengono l' angolo, si mantengono della medesima lunghezza; come si suppone nella seguente proposizione, nella quale con raziocinio convincente si dimostra questa verità.

PROPOSIZIONE VII.

TEOR. TAV. II. FIG. 43.

Se due triangoli avranno due lati uguali a due lati, l' uno all' altro, e l' angolo maggiore dell' angolo, che è contenuto dai lati uguali, avranno ancora la base maggiore della base.

I due triangoli ABC, EFL abbiano il lato AB=FE, il lato BC=EL, e l' angolo ABC maggiore dell' angolo E; dico che la base AC sottoposta al maggior angolo sarà maggiore della base FL sottendente l' angolo minore.

Costruzione. Prendasi il triangolo EFL, e si sovrapponga al triangolo ABC in maniera, che il punto E si metta sul punto B, ed il lato EF sopra l' uguale lato BA, il punto F cadrà necessariamente sul punto A a cagione dell' uguaglianza de' lati EF, BA. Inoltre, perchè l' angolo E è minore dell' angolo ABC, il lato EL cadrà al di sotto del lato BC, come in BR, ed il lato FL in AR; e sarà il triangolo ABR come la stampa del triangolo FEL.

Dimostrazione. Abbiamo d' ipotesi BC=EL, e per costruzione egli è BR=EL; dunque (ass. 1.) sarà eziandio BC=BR; ma nel triangolo BIC (ass. 17.)

i due lati BI, IC presi insieme sono maggiori del rimanente BC; adunque per la seconda parte del primo assioma, saranno anche maggiori del lato BR dimostratosi uguale al BC. Ma (ass. 11.) abbiamo BR=BI+IR; perciò (seconda parte ass. 1.) i due lati BI, IC saranno anche maggiori dei due BI, IR insieme presi; cioè sarà BI+IC>BI+IR, e da queste disuguali somme togliendo la parte comune BI (ass. 7.) resterà IC>IR, ed a queste linee disuguali aggiugnendo la parte IA comune si avrà (ass. 6.) IC+IA>IR+IA, cioè AC>IR+IA; ma nel triangolo IAR (ass. 17.) i due lati IR, IA insieme presi sono maggiori del rimanente lato AR; dunque (ass. 13.) il lato AC sarà eziandio maggiore di AR, ed è per costruzione AR=FL; laonde (seconda parte dell'ass. 1.) il lato AC sarà parimente maggiore di FL. Adunque se due triangoli avranno ec. Il che si dovea dimostrare. È la prop. 24. del lib. 1. d' Euclide.

Annotazione. Se i due triangoli dati saranno tali, che il lato BA sia maggior di BC, e per conseguenza anche EF maggiore di EL, in tal caso mettendo il lato EF sopra BA, ed il triangolo EFL in BAR, come si è fatto nell' antecedente costruzione, può accadere, che il punto L non cada in R sotto la base CA, ma cada nella stessa base CA, o sopra la medesima base entro al triangolo ABC, ed allora per non essere obbligato a ricorrere ad altra dimostrazione, ed acciocchè il punto R sempre sia sotto la base AC si cangino le lettere, si metta la C nel luogo dell' A, ed A nel luogo della C; medesimamente si trasporti F in L, ed L si metta in luogo della F, e si faccia la medesima costruzione, che troverassi dall' altra parte, come si può vedere nella figura 44., e la dimostrazione sarà la stessa di prima, e non s'incontrerà più verun caso diverso da questo.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOR. TAV. II. FIG. 45.

Ogniqualvolta due triangoli avranno due lati uguali a due lati, l' uno all' altro, e la base maggiore della base, avranno eziandio l' angolo maggiore dell' angolo contenuto dai lati uguali.

I due triangoli ABC, EFL abbiano i lati uguali AB=FE, BC=EL, e la base AC maggiore della base FL; dico, che l' angolo B sarà maggiore dell' angolo E.

Dimostrazione. Imperciocchè se l' angolo B fosse uguale all' angolo E, allora, perchè d' ipotesi sono uguali i lati AB=FE; e BC=EL, anche la base AC (prop. 6.) sarebbe uguale alla base FL, il che è contro l' ipotesi, e se l' angolo B fosse minore dell' angolo E, allora (prop. antec.) anche la base AC sarebbe minore della base FL, il che parimente è contro l' ipotesi. Adunque l' angolo B (ass. 12.) sarà maggiore dell' angolo E, essendosi dimostrato, che non gli può essere uguale, nè minore di esso. Perlaqualcosa ogniqualvolta due triangoli avranno, ec. Il che ec.

È la prop. 25. del lib. 1. d' Euclide.

PROPOSIZIONE IX.

TEOR. TAV. II. FIG. 46.

Quando due triangoli hanno tutti i lati uguali a tutti i lati, l' uno all' altro, avranno ancora tutti gli angoli uguali a tutti gli angoli, l' uno all' altro, e fra loro quelli, che sono sottesi da' lati uguali, e tutto il triangolo sarà uguale a tutto il triangolo.

Sieno dati i due triangoli ACF, EBL, i quali abbiano il lato AC=BE; il lato CF=EL, e la base AF uguale alla base BL, si dee dimostrare, che l' angolo C sia uguale all' angolo E, l' angolo A=B, l' angolo F=L, ed il triangolo ACF uguale al triangolo EBL.

Dimostrazione. Perchè, d' ipotesi, i due lati AC, CF sono uguali ai due lati EB, EL l' uno all' altro, se l' angolo C non fosse uguale all' angolo E, ma fosse maggiore, o minore di esso, allora (prop. 7.) la base AF sarebbe ancora maggiore, o minore della base BL, la qual cosa è contro l' ipotesi. Adunque essendo la base AF uguale alla base BL, necessariamente sarà l' angolo C uguale all' angolo E, i quali sono contenuti da' lati uguali; dunque (prop. 6.) sarà eziandio l' angolo A=B, l' angolo F=L, che sono sottesi da' lati uguali, ed il triangolo ACF sarà uguale al triangolo EBL. Perlaqualcosa quando due triangoli hanno ec. Il che ec. È la prop. 8. del lib. 1. d' Euclide.

PROPOSIZIONE X.

PROBL. TAV. II. FIG. 47

Nella data retta linea indeterminata, ed in un punto dato in essa costituire un angolo rettilineo uguale ad un altro angolo rettilineo dato.

Sia dato l' angolo rettilineo A, e sia data la linea retta CE, ed il punto in essa dato C, bisogna in essa linea CE, e nel punto in essa dato C costituire un angolo rettilineo uguale al dato angolo A.

Costruzione. Tirisi la retta FG, che unisca due punti F, G presi a piacere ne' lati AF, AG, che contengono l' angolo A, e si avrà il triangolo AFG. Quindi dalla retta indeterminata CE (propos. 3.) si tagli la parte CI uguale al lato AG, e sopra la retta CI (propos. 4.) si descriva il triangolo CMI, che abbia il lato CM uguale al lato AF, ed il lato MI uguale al lato FG del triangolo AFG; sarà MCI l' angolo ricercato.

Dimostrazione. I due triangoli MCI, AFG hanno (costr.) i lati uguali CI=AG, CM=AF, ed MI=FG; dunque (prop. antec.) sarà l' angolo MCI uguale al dato angolo A, che sono sottesi dai lati uguali MI, FG. Adunque nella data retta linea ec. Il che si dovea fare, e dimostrare.

È la prop. 23. del lib. 1. d' Euclide.

PROPOSIZIONE XI.

PROBL. TAV. II. FIG. 48.

Dividere per mezzo un angolo rettilineo dato.

Sia dato l' angolo rettilineo CAB, che si debba dividere in due parti uguali.

Costruzione. Prendasi nel lato AB qualsivoglia punto F, e dall' altro lato AC prolungato indeterminatamente verso C (prop. 3.) si seghi la parte AE uguale alla parte AF, e (post. 1.) si tiri la retta FE, e sopra di essa (prop. 1.) si costituisca il triangolo equilatero EFL, indi del punto L al punto A (post. 1.) tirisi la retta AL, che dividerà il dato angolo CAB in due angoli uguali CAL, LAB.

Dimostrazione. I due triangoli EAL, LFA hanno il lato AL comune, il lato AE (costr.) uguale al lato AF, ed il lato EL (def. 19.) uguale al lato FL, essendo lati del triangolo equilatero EFL; adunque (prop. 9.) sarà l' angolo EAL uguale all' angolo LAF, che sono sottesi dai lati uguali EL, FL. Ma i due angoli EAL, LAF (ass. 11.) formano tutto l' angolo CAB. Dunque il dato angolo CAB è stato diviso in due parti uguali. Il che si dovea fare, e dimostrare.

È la prop. 9. del lib. 1. d' Euclide.

PROPOSIZIONE XII.

PROBL. TAV. II. FIG. 49.

Data una linea retta terminata, dividerla per mezzo.

Sia data la retta AE terminata ne' punti A, ed E, che si debba dividere in due parti uguali.

Costruzione. Sopra la data retta AE (prop. 1.) descrivasi il triangolo equilatero ABE, indi (prop. ant.) l' angolo ABE si divida per mezzo colla linea retta BC, la quale segherà la retta data AE in due parti uguali, cioè sarà AC=CE.

Dimostrazione. I due triangoli ABC, BCE hanno il lato BC comune, il lato AB=BE (def. 19.), e l' angolo ABC, contenuto dai lati AB, BC, per la costruzione, è uguale all' angolo CBE contenuto dai lati EB, BC; adunque (prop. 6.) avranno ancora la base AC uguale alla base CE, le quali insieme prese (ass. 11.) uguagliano la data retta AE. Dunque si è divisa per mezzo la data linea retta terminata. Il che ec.

È la prop. 10. del lib. 1. d' Euclide.

Corollario. Inoltre ne' due triangoli ABC, BCE, (prop. 6.) sarà ancora l' angolo ACB uguale all' angolo BCE, che sono sottesi dagli uguali lati AB, BE, e questi due angoli uguali sono angoli conseguenti, perciò (def. 9.) sono amendue retti, e la linea BC è perpendicolare alla AE. Perlaqualcosa la linea retta BC, che divide per mezzo l' angolo ABE contenuto da' lati uguali AB, BE, non solamente divide per mezzo la base AE, ma di più è perpendicolare alla medesima base; le quali cose tutte si verificano, quantunque il triangolo ABE non si faccia equilatero, ma isoscele, i cui lati uguali sieno AB, BE, come si prova colla medesima dimostrazione.

PROPOSIZIONE XIII.

PROBL. TAV. II. FIG. 50.

Innalzare una linea retta perpendicolare ad una data retta linea da un punto dato in essa.

Sia data la retta AB, ed in essa il punto C, dal quale si debba tirare una linea retta perpendicolare alla data linea AB.

Costruzione. Nella parte CA piglisi qualsivoglia punto E, e dall' altra parte CB (prop. 3.) taglisi la parte CF=CE, e sopra EF (prop. 1.) descrivasi il triangolo equilatero ELF; indi (post. 1.) tirisi la retta LC, che sarà la perpendicolare ricercata.

Dimostrazione. I due triangoli LCF, LCE hanno il lato CF=CE per costruzione, il lato CL comune; ed il lato LF=LE (def. 19.); dunque (prop. 9.) sarà l' angolo LCF uguale all' angolo LCE, che sono sottesi da' lati uguali LF, LE, conseguentemente (def. 9.) la retta LC sarà perpendicolare alla retta linea EF, o sia AB. Il che ec.

È la prop. 11. del lib. 1. d' Euclide.

Annotazione. Quando il punto dato è un estremo della data linea, allora (post. 2.) si prolunghi indeterminatamente la data linea retta, e nel resto si operi come sopra.

Inoltre si può invece del triangolo equilatero ELF, descriverlo isoscele, purchè i due lati uguali sieno LE, LF, e la dimostrazione sarà la medesima.

PROPOSIZIONE XIV.

PROBL. TAV. II. FIG. 51.

Sopra una data linea retta infinita, e da un punto

dato, che non sia in essa, tirare una linea retta perpendicolare.

Sia data la retta infinita AB, e fuori di essa, sia dato il punto C, dal quale si debba tirare una retta linea perpendicolare alla AB.

Costruzione. Dall' altra parte della data retta AB prendasi qualsivoglia punto L, e dal centro C col raggio CL (post. 3.) descrivasi il cerchio, o arco ELF, che seghi la data retta in F, ed in E; poscia (prop. 12.) si divida per mezzo in G la sottesa EF, e (post. 1.) tirisi la retta GC, che sarà la ricercata perpendicolare. Tirinsi i raggi CE, CF.

Dimostrazione. I due triangoli GCF, GCE hanno il lato comune GC, e, di costruzione, il lato GF=GE, ed il lato CF=CE (def. 15.); perciò (prop. 9.) sarà l' angolo CGF uguale all' angolo CGE; conseguentemente (def. 9.) la retta CG è perpendicolare alla retta EF, o sia alla data retta AB. Dunque sopra una data linea retta infinita, e da un punto dato fuori di essa si è tirata una linea retta perpendicolare. Il che bisognava fare, e dimostrare.

È la prop. 12. del lib. 1. d' Euclide.

PROPOSIZIONE XV.

TEOR. TAV. II. FIG. 52.

Cadendo una linea retta sopra un' altra linea retta, fa i due angoli conseguenti, o amendue retti, o uguali a due angoli retti.

Cada la retta AB sopra la retta CE, farà i due angoli conseguenti ABC, ABE, i quali (def. 9.) saranno amendue retti, quando la retta AB è perpendicolare alla CE. Ma se la retta AB cade obbliquamente sopra la CE, i due angoli obbliqui ABC ottuso, ed ABE acuto, insieme presi, sono sempre uguali a due retti.

COSTRUZIONE. Sopra la retta CE, e dal punto in B (prop. 13.) s' innalzi la perpendicolare FB.

DIMOSTRAZIONE. I due angoli FBC, FBE (def. 9.) sono amendue retti; ma l' angolo ottuso ABC supera l' angolo retto FBC dell' angolo FBA; e l' angolo acuto ABE manca dal retto FBE dell' istesso angolo FBA; perciò levando dall' ottuso ABC la parte FBA, rimane l' angolo retto FBC; ed all' angolo acuto ABE aggiugnendo l' angolo FBA, tolto dall' ottuso, si forma (ass. 11.) un altro angolo retto FBE. Dunque i due angoli conseguenti ABC, ABE insieme presi, sono uguali a due angoli retti. Il che ec.

È la prop. 13. del lib. 1. d'Euclide.

COROLLARIO I. Adunque tutti gli angoli CBF, FBA, ABE ec., che si fanno nel medesimo punto B da quante si vogliano linee rette concorrenti nello stesso punto, e tirate da una sola parte della linea CE, insieme presi (ass. 11.) sempre sono uguali a due angoli retti.

COROLLARIO II. (Tav. II. Fig. 53.) Inoltre i quattro angoli CBA, CBE, FBA, FBE, che si fanno in B dalle due rette AE, CF, che si segano nel punto B insieme presi, sono uguali a quattro angoli retti.

COROLLARIO III. Conseguentemente tutti gli angoli, che si possono formare in un medesimo punto B da linee rette concorrenti d' ogni intorno ad esso punto B, presi insieme, sono uguali a quattro angoli retti; perchè (ass. 11.) insieme presi uguagliano i quattro angoli fatti dalle due rette AE, CF segantesi nello stesso punto B.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOR. TAV. II. FIG. 54.

Se ad un punto preso in una data linea retta saranno tirate da parti opposte due linee rette, che facciano gli angoli conseguenti uguali a due retti, esse linee saranno per diritto fra loro.

Sia la data retta AC, ed al punto in essa C, da parti opposte, vi concorrano le due rette BC, FC, che facciano gli angoli conseguenti ACF, ACB uguali a due angoli retti; dico la retta BC essere per diritto alla FC.

DIMOSTRAZIONE. Imperciocchè se la CF non è posta per diritto alla BC, sia la CI, se è possibile, per diritto alla BC; ed allora cadendo la retta AC sopra la retta BCI (prop. antec.) farà i due angoli ACB, ACI uguali a due retti; ma, d' ipotesi, abbiamo i due angoli ACB, ACF anche uguali a due retti; onde (ass. 1.) i due angoli ACB, ACI saranno uguali ai due angoli ACB, ACF, e tolto il comune angolo ACB (ass. 3.), rimarrà l' angolo ACI uguale all' angolo ACF, cioè la parte al tutto, la qual cosa (ass. 10.) è impossibile; dunque la CI non è per diritto alla BC. Nella stessa maniera si dimostra non essere alcun' altra linea, fuori che la CF per diritto alla BC. Adunque la CF è per diritto alla BC. Perlaqualcosa, se ad un punto preso in una data linea retta ec. Il che ec.

È la prop. 14 del lib. 1. d' Euclide.

COROLLARIO. Conseguentemente due linee rette non possono avere veruna parte comune, fuorchè il punto, nel quale si segano. Perciocchè, se la linea quantunque brevissima BC fosse per diritto alle due CI, CF, allora, tirata al punto C, la retta AC, per l' antecedente dimostrazione, sarebbe l' angolo ACI uguale all' angolo ACF, il che (ass. 10.) è impossibile; adunque la linea BC, quantunque menomissima, non può star per diritto a due linee rette CI, CF; perciò due linee rette non possono avere veruna parte comune, fuorchè il punto, in cui si segano.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA TAV. II. FIG. 55.

Se due linee rette si segheranno insieme, faranno gli angoli opposti alla cima uguali fra loro.

Le due rette linee AB, EF si seghino fra loro nel punto C; dico, che l' angolo x sarà uguale all' angolo C, e l' angolo m uguale all' angolo z, che sono alla cima opposti.

Dimostrazione. La retta AC cadendo sopra la retta FE (prop. 15.) fa i due angoli conseguenti m, ed x uguali a due retti. Per la stessa ragione la retta FC cadendo sopra AB fa eziandio i due angoli conseguenti z, ed x uguali a due retti; adunque (ass. 1.) i due angoli m, ed x sono uguali ai due angoli z, ed x, e levando l' angolo comune x (ass. 3.) rimarrà l'angolo m uguale all' angolo z, cioè l' angolo ACE uguale all' angolo FCB, i quali sono alla cima opposti.

Inoltre, perchè i due angoli C, ed m (prop. 15.) sono uguali a due retti; perciò (ass. 1.) saranno eziandio uguali ai due z, ed x, che sono parimente uguali a due retti; cioè sarà $C+m=z+x$, e togliendo i due angoli m, e z già dimostrati uguali (ass. 3.) resterà $C=x$, cioè l' angolo ECB uguale all' angolo ACF, che sono parimente opposti alla cima. Adunque se due linee rette ec. Il che ec.

È la prop. 15. del lib. 1. d' Euclide.

Corollario. Se ad un punto C di una linea retta AB saranno tirate dalle parti opposte due linee rette FC, EC, che facciano gli angoli alla cima opposti m, z uguali fra loro, quelle due linee rette saranno poste per diritto fra loro; perciocchè agli angoli uguali m, z, aggiugnendovi l' angolo x comune, saranno (ass. 2.) i due angoli m, ed x presi insieme uguali ai due z, ed x insieme presi; ma i due angoli conseguenti z, ed

x (prop. 15.) sono uguali a due retti; dunque (ass. 1.) i due angoli m, ed x saranno anch' essi uguali a due retti; conseguentemente (propos. 16.) le due rette EC, FC saranno poste per diritto.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA TAV. II. FIG. 56.

Le rette linee perpendicolari ad una medesima linea retta sono parallele fra loro.

Sieno due linee rette FE, LM amendue perpendicolari alla medesima linea retta AB; dico, che esse rette FE, LM saranno fra loro parallele.

Costruzione. Da qualsivoglia punto S preso nella retta FE si tiri (prop. 14.) la retta SI perpendicolare alla retta LM; indi dall' altra parte BM (prop. 3.) si tagli la parte $BC=BI$, e dal punto C sopra la linea LM (prop. 13.) s' innalzi la perpendicolare CR, e tirinsi le rette CA, IA.

Dimostrazione. I due triangoli ABC, ABI hanno di costruzione il lato $BC=BI$, il lato BA comune, e l' angolo ABC (ass. 16.) uguale all' angolo ABI, essendo ambedue retti, d' ipotesi; dunque (prop. 6.) sarà la base CA uguale alla base IA, l' angolo $z=x$, e l' angolo $t=y$, che sono sottesi da lati uguali. Inoltre perchè le linee RC, SI sono di costruzione perpendicolari alla retta LM, gli angoli retti RCB, SIB sono fra loro uguali, da' quali levando le parti dimostrate uguali, cioè gli angoli z, ed x, resterà (ass. 3.) l'angolo ACR uguale all' angolo AIS. Similmente dagli angoli BAR, BAS, d' ipotesi, retti, ed uguali si tolgano le parti dimostrate uguali, cioè gli angoli t, ed y, (ass. 3.) rimarrà l' angolo RAC uguale all' angolo IAS. Perlaqualcosa i due triangoli ACR, IAS hanno i due angoli RCA, RAC uguali ai due angoli AIS, IAS l' uno all' altro, ed il lato frapposto AC uguale al lato interposto IA. Laonde (prop. 5.) sarà il lato, o la perpendicolare CR uguale al lato, o alla perpendicolare IS, che sottendono angoli uguali; conseguentemente le due rette FE, LM (def. 11.) saranno parallele, essendosi dimostrato, che le perpendicolari IS, CR frapposte fra di esse sono uguali fra loro; la qual cosa ovunque si verifica, sia che le perpendicolari IS, CR sieno più vicine, o più lontane dalla retta AB. Adunque le linee rette perpendicolari ad una terza sono parallele fra loro. Il che ec.

COROLLARIO. Se dunque una linea retta cadrà perpendicolarmente sopra altre linee rette, vale a dire, se farà con esse gli angoli retti, quelle linee rette saranno parallele fra loro.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA TAV. II. FIG. 57.

Cadendo una linea retta obbliquamente sopra due linee rette, se fa gli angoli alterni uguali fra loro; o l' angolo esterno uguale all' angolo interno, ed opposto dalle medesime parti; ovvero i due angoli interni, e dalle medesime parti, uguali a due retti; quelle due linee rette saranno parallele fra loro.

1. La retta GF seghi obbliquamente le due rette AB, CL, e faccia l' angolo $x=z$, (che sono angoli interni, ed opposti, e chiamansi *angoli alterni*); dico, che le linee AB, CL saranno parallele.

COSTRUZIONE. Dividasi per mezzo (prop. 12.) la retta GF nel punto I, dal quale si tiri (prop. 14.) sopra la CL la perpendicolare IS; indi (prop. 3.) dalla indeterminata GA si tagli la parte GR uguale alla SF, e (post. 1.) tirisi la retta IR.

DIMOSTRAZIONE. I triangoli RGI, ISF hanno (costruz.) il lato GI=IF, ed il lato RG=SF, e, d' ipotesi l' angolo $x=z$, che sono contenuti da lati uguali;

dunque (prop. 6.) sarà l' angolo RIC uguale all' angolo alla cima opposto SIF; perciò (cor. prop. 17.) le rette RI, IS stanno per diritto fra loro, e formano una sola retta RS; inoltre sarà l' angolo IRG uguale all' angolo ISF, ma l' angolo ISF è retto, di costruzione; perciò anche l' angolo IRG (ass. 1.) sarà retto; laonde (def. 9.) la retta SR sarà perpendicolare alla retta AB, ed è per costruzione eziandìo perpendicolare alla retta CL. Dunque (prop. antec.) le linee AB, CL sono parallele fra loro, perchè sono perpendicolari alla medesima retta SR.

Ma se saranno fra loro uguali i due angoli t, ed o, che sono parimente alterni; allora perchè (prop. 15.) tanto la somma degli angoli $x+t$, quanto la somma $o+z$ è uguale a due retti, perciò (ass. 1.) sarà $x+t=o+z$, e togliendo gli angoli t, ed o, d' ipotesi uguali fra loro (assioma 3.) rimarrà l' angolo $x=z$, e però, per l' antecedente dimostrazione, le linee AB, CL saranno parallele. Adunque se una linea retta, cadendo sopra due rette linee, farà gli angoli alterni uguali fra loro, quelle due rette saranno parallele. Il che ec.

2. (Tav. II. Fig. 58.) La retta CI cadendo sopra le due rette AF, GH faccia l' angolo esteriore s uguale all' angolo m interiore, ed opposto, dalle medesime parti; le rette AF, GH saranno eziandìo parallele fra loro.

DIMOSTRAZIONE. L' angolo t (prop. 17.) è uguale all' angolo s alla cima opposto; ma, d' ipotesi, l' angolo m è uguale al medesimo angolo s; dunque (ass. 1.) sarà l' angolo t uguale al suo alterno m, per conseguenza le rette AF, GH saranno parallele per l' antecedente dimostrazione. Col medesimo raziocinio si dimostra, che le rette AF, GH sono fra loro parallele, se l' angolo esteriore CLF sarà uguale all' angolo z suo interiore, ed opposto, dalle medesime parti.

Perlaqualcosa se una retta, cadendo sopra due linee rette, farà l' angolo esteriore uguale all' interiore, ed opposto, dalle medesime parti, quelle due rette saranno parallele fra loro. Il che si dovea in secondo luogo dimostrare.

3. (Tav. II. Fig. 59.) La retta LI cadendo sopra le rette AF, GH faccia gli angoli m, ed x (oppure t, e z) interiori, e dalle medesime parti, insieme presi, uguali a due angoli retti; le rette linee AF, GH saranno parallele fra loro.

Dimostrazione. I due angoli conseguenti z, ed m insieme presi (prop. 15.) sono uguali a due retti; ma, d' ipotesi, i due angoli m, ed x sono anch' essi uguali a due angoli retti; perciò (ass. 1.) i due angoli z, ed m saranno uguali ai due m, ed x; e levando l' angolo comune m (ass. 3.) resterà l' angolo z uguale al suo alterno x. Dunque per la prima dimostrazione le rette GH, AF saranno parallele fra loro.

Nella stessa guisa si dimostra, che le linee GH, AF sono parallele, se gli altri due angoli t, z interiori, e posti dalle medesime parti saranno uguali a due angoli retti.

Dunque se, cadendo una linea retta sopra due linee rette, farà i due angoli interiori, e dalle medesime parti, uguali a due angoli retti, quelle due rette linee saranno parallele, o equidistanti fra loro. Il che ec.

Sono le prop. 27, e 28 del lib. 1. d' Euclide.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA TAV. II. FIG. 56.

Se una linea retta, cadendo sopra due linee rette parallele, sarà perpendicolare all' una di esse, sarà eziandio perpendicolare all' altra.

Sopra le due rette parallele FE, LM cada la retta AB,

e sia perpendicolare alla retta LM, dico, che sarà anche perpendicolare alla retta FE.

Costruzione. Nella parte BL si prenda a piacere il punto I, e (prop. 3.) si tagli dalla BM la parte BC=BI; indi (propos. 13.) dai punti C, ed I s' innalzino le perpendicolari IS, CR, e tirinsi le rette IA, CA.

Dimostrazione. I due triangoli ABI, ABC intorno agli angoli (ass. 16.) uguali ABI, ABC, hanno i lati uguali BI=BC, e BA comune; perciò (prop. 6.) saranno uguali le basi IA=CA, l' angolo $x=z$, e l' angolo $y=t$. Che però dagli uguali angoli retti SIB, RCB togliendo gli angoli uguali x, e z, (ass. 3.) rimarrà l' angolo AIS=ACR. Perlaqualcosa i due triangoli AIS, ACR hanno, di dimostrazione, l' angolo AIS=ACR, il lato IA=CA; ed il lato SI (def. 11.) uguale al lato RC, perchè sono linee perpendicolari interposte tra due linee parallele; laonde (prop. 6.) sarà l' angolo IAS uguale all' angolo RAC; ai quali si aggiungano gli angoli y, e z dimostrati uguali, e (ass. 2.) sarà tutto l' angolo SAB uguale a tutto l' angolo RAB; dunque (def. 9.) la retta BA è anche perpendicolare alla retta FE. Il che ec.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA TAV. II. FIG. 60.

Cadendo una linea retta obbliquamente sopra due rette parallele farà gli angoli alterni uguali fra loro; e ciascun angolo esteriore uguale al suo interiore, ed opposto, e dalle medesime parti; e gli angoli interiori, e dalle medesime parti, uguali a due retti.

1. La retta GF seghi obbliquamente le due rette AB, CL; dico, che farà gli angoli alterni uguali fra loro, cioè $x=z$, e l' angolo BGF=CFG.

COSTRUZIONE. Dai punti F, G sopra le rette AB, CL (prop. 14.) tirinsi le perpendicolari FE, GI.

DIMOSTRAZIONE. Perchè la retta FE è, di costruzione, perpendicolare alla retta AB, perciò (prop. antec.) sarà eziandìo perpendicolare alla parallela CL; conseguentemente le due rette EF, GI, che sono perpendicolari alla stessa CL, saranno (prop. 18.) parallele fra loro. Adunque i due triangoli EFG, IGF hanno (def. 11.) il lato FE=GI, che sono linee perpendicolari frapposte tra due parallele AB, CL. Similmente hanno il lato EG=FI, perchè sono perpendicolari interposte fra le linee EF, GI dimostrate parallele; hanno inoltre il lato FG comune; laonde sarà (prop. 9.) l' angolo $x=z$, che sono sottesi da lati uguali EF, GI, e sono angoli alterni. Inoltre sarà eziandìo l' angolo $o=t$, ai quali aggiugnendovi gli uguali angoli retti EFC, IGB; sarà (ass. 2.) tutto l'angolo CFG uguale a tutto l' angolo BGF, i quali sono parimente angoli alterni. Dunque cadendo una linea retta sopra due linee rette parallele, farà sempre gli angoli alterni uguali fra loro. Il che si dovea in primo luogo dimostrare.

2. (Tav. II. Fig. 58.) Cadendo la retta CI obbliquamente sopra le due parallele AF, GH, farà l' angolo esteriore s uguale all' angolo m interiore, ed opposto, dalle medèsime parti.

DIMOSTRAZIONE. L' angolo s (prop. 17.) è uguale all' angolo t alla cima opposto, e per l' antecedente dimostrazione l' angolo m è uguale al medesimo angolo t suo alterno; dunque (ass. 1.) sarà l' angolo $s=m$. Collo stesso raziocinio si dimostra l' angolo CLF$=z$, perchè sono amendue uguali all' angolo x. Perlaqualcosa cadendo una retta linea sopra due rette parallele, farà l' angolo esteriore uguale all' angolo interiore, ed opposto, dalle medesime parti. Il che bisognava in secondo luogo dimostrare.

3. (Tav. II. Fig. 59.) Cadendo la retta LI obbliquamente sopra due rette parallele AF, GH, farà i due angoli x, ed m interiori, e dalle medesime parti, insieme presi, uguali a due angoli retti.

DIMOSTRAZIONE. Gli angoli alterni z, ed x, per la prima parte di questa proposizione sono uguali fra loro; aggiungasi ad essi il comune angolo m, ed (ass. 2.) i due angoli z, ed m saranno uguali ai due x, ed m; ma i due angoli conseguenti z, ed m (prop. 15.) sono uguali a due retti, adunque (ass. 1.) anche i due angoli x, ed m saranno uguali a due retti. Nella stessa maniera si dimostrano uguali a due retti gli angoli t, e z. Dunque una retta linea, segando due linee rette parallele, fa i due angoli interiori, e dalle medesime parti, insieme presi, uguali a due angoli retti. Il che ec.

È la prop. 29. del lib. 1. d' Euclide.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA TAV. II. FIG. 61.

Le linee rette (AE, CF), che sono parallele ad una medesima linea retta (DL), saranno eziandìo parallele fra loro.

Tirisi la retta IM, che le seghi tutte tre ne' punti I, G, M.

DIMOSTRAZIONE. Perchè le due rette AE, DL sono, d' ipotesi, parallele, perciò (parte 1. della propos. antec.) sarà l' angolo x uguale al suo alterno z. Inoltre essendo le linee CF, DL, d' ipotesi, parallele, sarà (parte 2. della prop. antec.) l' angolo interiore s uguale all' angolo z esteriore, ed opposto dalle medesime parti; però sarà (ass. 1.) l' angolo x uguale all' angolo alterno s; dunque (parte 1 della prop. 19.) le due rette AE, CF sono parallele. Il che, ec.

È la prop. 30. del lib. 1. d' Euclide.

PROPOSIZIONE XXIII.

PROBLEMA TAV. II. FIG. 62.

Per un punto dato (C) tirare una linea retta parallela ad una data retta linea (AF).

Costruzione. Dal dato punto C a qualunque punto L preso nella data retta AF tirisi la retta CL, e nel punto in essa C (prop. 10.) costituiscasi l'angolo LCE uguale all'angolo FLC, e si prolunghi EC verso D, sarà ED la ricercata linea.

Dimostrazione. Gli angoli alterni ECL, FLC sono uguali fra loro per costruzione; adunque (parte 1. prop. 19.) le rette AF, ED sono parallele. Dunque per un punto dato, ec. Il che ec.

È la prop. 31. del lib. 1. d' Euclide.

PROPOSIZIONE XXIV.

PROBLEMA TAV. II. FIG. 63.

In ogni triangolo rettilineo i tre angoli interiori, presi insieme, sono uguali a due angoli retti; e prolungandosi qualsivoglia lato l' angolo esteriore è uguale ai due angoli interiori, ed opposti.

1. Sia dato il triangolo rettilineo ACD, dico, che i tre angoli interni t, m, x insieme presi sono uguali a due angoli retti.

Costruzione. Pel punto C (prop. antec.) tirisi la retta GCF parallela alla base AD.

Dimostrazione. Perchè le rette GF, AD sono, di costruzione, parallele, però la retta CA cadendo sopra di esse (prop. 21.) farà gli angoli alterni x, e z uguali fra loro. Similmente cadendo la retta CD sopra le stesse parallele, farà gli angoli alterni t, ed s uguali fra loro; ed aggiugnendo cose uguali a cose

uguali (ass. 2.) sarà $x+t=z+s$, ed aggiugnendovi di comune l'angolo m, (ass. 2.) si avrà $x+t+m=z+s+m$. Ma (cor. 1. prop. 15.) la somma degli angoli z, m, s è uguale a due retti; dunque (ass. 1.) anche gli angoli x, t, m insieme presi sono uguali a due angoli retti. Il che ec.

2. Si prolunghi qualsivoglia lato AD verso E, e l'angolo esteriore r sarà uguale ai due angoli x, ed m interiori, ed opposti.

Dimostrazione. I due angoli conseguenti t, ed r (prop. 15.) sono uguali a due retti, ma i tre angoli interiori x, t, m, per l' antecedente dimostrazione, sono anch' essi uguali a due retti; dunque (ass. 1.) i due angoli conseguenti t, ed r saranno uguali ai tre x, t, m, e togliendo l'angolo comune t, (ass. 3.) rimarrà l' angolo esteriore r uguale ai due angoli x, ed m interiori, ed opposti, insieme presi. Adunque in ogni triangolo rettilineo ec. Il che ec.

È la prop. 32. del lib. 1. d' Euclide.

Corollario i. Dalla prima parte di questa proposizione chiaramente si vede, che due angoli di qualunque triangolo rettilineo, insieme presi, sono sempre minori di due retti; perchè tutti tre insieme presi fanno soltanto la somma di due retti.

È la prop. 17. del lib. 1. d' Euclide.

Corollario ii. In qualsivoglia triangolo rettilineo, prolungandosi un lato, l'angolo esteriore è maggiore dell'uno, e dell' altro interiore, ed opposto; poichè, per la seconda dimostrazione, l' angolo esteriore r uguaglia i due angoli interiori, ed opposti m, ed x presi insieme; conseguentemente l' angolo esteriore r è maggiore tanto dell' angolo m, quanto dell'angolo x.

È la prop. 16. del lib. 1. d' Euclide.

Corollario iii. (Tav. II. Fig. 64.) Se una retta linea BL, cadendo sopra due linee rette AF, ME, farà due angoli interiori, e dalle medesime parti ABL, MLB, insieme presi, maggiori di due angoli retti;

allora gli altri due angoli interiori FBL, ELB, insieme presi, saranno minori di due angoli retti; perchè i due angoli conseguenti in B (prop. 15.) insieme ai due angoli conseguenti in L uguagliano quattro retti, dai quali levandone i due ABL, MLB d' ipotesi maggiori di due retti, i due rimanenti FBL, ELB saranno minori di due retti.

Inoltre le linee ME, AF non saranno parallele, perchè quando le linee sono parallele (prop. 21.) gli angoli interiori, e dalle medesime parti, uguagliano due retti.

Che se le due rette AF, ME si prolungheranno da amendue le parti, certamente concorreranno da quella parte, verso la quale fanno gli angoli interiori FBL, ELB minori di due retti, perchè (cor. 1.) due angoli di qualunque triangolo rettilineo, presi insieme, sono sempre minori di due retti. Ma dall'altra parte, verso la quale fanno gli angoli interiori ABL, MLB maggiori di due retti, esse linee rette prolungate non mai concorreranno, anzi sempre più si allontaneranno l' una dall' altra. Perlaqualcosa le linee ME, AF diconsi *convergenti* verso la parte FE, e *divergenti* dall'altra parte AM.

Corollario iv. (Tav. II. Fig. 65.) Se dagli estremi A, ed F d'un lato AF di un triangolo rettilineo ACF saranno tirate due linee rette AE, FE ad un punto E preso nel triangolo; esse linee conterranno un angolo AEF maggiore dell'angolo ACF contenuto dai rimanenti lati del dato triangolo CAF. Perciocchè, tirata la retta CEL, l' angolo AEL esteriore del triangolo AEC (cor. 2.) è maggiore dell' angolo ACE interiore, ed opposto. Medesimamente l' angolo esteriore LEF è maggiore dell' angolo ECF interiore, ed opposto; dunque tutto l' angolo AEF è maggiore di tutto l' angolo ACF.

È la parte 2. della prop. 21. del lib. 1. d' Euclide.

Corollario v. Perchè i tre angoli interiori di qualsivoglia triangolo rettilineo sono uguali a due soli angoli retti, come si è dimostrato: perciò se un angolo sarà ottuso, cioè maggiore del retto, gli altri due saranno necessariamente acuti, ed insieme presi saranno minori d' un angolo retto. Ma se un angolo d'un triangolo rettilineo sarà retto, gli altri due saranno acuti, e presi insieme uguaglieranno un angolo retto.

Perlaqualcosa quando un angolo d' un triangolo rettilineo è uguale agli altri due angoli insieme presi, allora esso angolo è retto, perchè è uguale alla metà della somma di due retti.

Corollario vi. Inoltre perchè tutti tre gli angoli d' un triangolo rettilineo uguagliano due retti, perciò i tre angoli d' un triangolo rettilineo insieme presi saranno sempre uguali alla somma dei tre angoli di qualunque altro triangolo rettilineo.

Corollario vii. Conseguentemente se due angoli d' un triangolo rettilineo saranno uguali a due angoli d' un altro triangolo rettilineo, anche il rimanenre angolo del primo triangolo sarà uguale all' angolo rimanente dell' altro triangolo.

Scambievolmente se un angolo d' un triangolo rettilineo sarà uguale ad un angolo d' un altro triangolo rettilineo, anche i due rimanenti angoli del primo triangolo insieme presi saranno uguali ai rimanenti due angoli dell' altro triangolo insieme presi.

Corollario viii. (Tav. II. Fig. 66.) La somma di tutti gli angoli interiori di qualunque figura rettilinea è uguale a tanti angoli retti, quanto è il doppio numero de' lati diminuito di quattro; vale a dire si raddoppi il numero de' lati della data figura, e da esso numero doppio costantemente si sottragga il numero quattro, ed il residuo esprimerà a quanti angoli retti sia uguale la somma di tutti gli angoli interiori della data figura.

Come dato il pentagono ILCGF, la somma di tutti gli angoli interiori FIL, ILC, LCG, ec. di essa figura sarà uguale a dieci angoli retti meno quattro; cioè sarà uguale a sei angoli retti. Imperciocchè se da qualsivoglia punto A, preso entro la figura, a ciascun angolo di essa si tireranno le linee rette AC, AL, AG, ec., la figura rimarrà divisa in tanti triangoli, quanti sono i lati, cioè in cinque triangoli AGF, AFI, ACG, ec. Ma i tre angoli di ciascun triangolo sono uguali a due retti, per la prima parte di questa proposizione, dunque la somma di tutti gli angoli di quei cinque triangoli sarà uguale a dieci angoli retti, doppio numero de' lati; ma gli angoli di essi triangoli, che si fanno nel punto A, non appartengono alla data figura, e presi insieme (cor. 3. prop. 15.) sono uguali a quattro angoli retti; onde da dieci retti (che è la somma di tutti gli angoli di quei cinque triangoli) si levino quattro retti (somma degli angoli fatti in A) i rimanenti sei saranno uguali ai rimanenti angoli di essi triangoli; cioè saranno uguali alla somma di tutti gli angoli interiori del pentagono dato.

Nella stessa maniera si dimostra, che, se la data figura avrà quindici lati, tutti gli angoli interiori di essa saranno uguali a trenta angoli retti meno quattro, cioè formeranno ventisei angoli retti, e così discorrendo di qualunque altra figura rettilinea.

Corollario IX. Adunque tutti i poligoni, che hanno lo stesso numero di lati, avranno eziandio le somme degli angoli interiori uguali fra loro.

Corollario X. (Tav. II. Fig. 67.) Prolungando tutti i lati di qualunque figura rettilinea verso una sola parte in giro, tutti gli angoli esteriori insieme presi saranno sempre uguali a quattro angoli retti. Imperciocchè nella figura CLFGE i due angoli conseguenti LCE interiore, ed LCD esteriore, presi insieme (prop. 15.) sono uguali a due angoli retti, la qual cosa si verifica in tutti gli altri punti L, F, G, E, conseguentemente gli angoli esteriori insieme cogli interiori formano tante paja di retti, quanti sono i lati della figura, fanno

cioè un numero d'angoli retti doppio del numero de'lati; ed in questa figura formano dieci angoli retti, dai quali levando tutti gli angoli interiori, che in questa figura (ant. cor. 8.) sono uguali a sei angoli retti, i rimanenti quattro angoli retti saranno uguali alla somma di tutti gli angoli esteriori di essa figura. La stessa cosa si dimostra di qualunque altro poligono.

Corollario XI. Adunque la somma degli angoli esteriori di qualsivoglia figura rettilinea è uguale alla somma di tutti gli angoli esteriori di qualunque altra rettilinea figura.

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA TAV. III. FIG. 68.

In ogni triangolo isoscele gli angoli sopra la base sono uguali fra loro; e prolungandosi i due lati uguali, gli angoli sotto la base saranno ancora uguali fra loro.

Sia il triangolo isoscele ABC, i cui lati uguali sieno AB, AC, e la base BC; dico, che sarà l'angolo x uguale all'angolo z, che sono sopra la base BC, e prolungati sotto la base BC i lati uguali, AB verso R, ed AC verso E, sarà l'angolo m uguale all'angolo s, che sono sotto la base.

Costruzione. Dividasi per mezzo in F la base BC (prop. 12.), e tirisi al vertice A la retta FA.

Dimostrazione. I due triangoli ABF, AFC hanno, d'ipotesi, il lato AB=AC, e per costruzione, il lato BF=FC; ed il lato AF comune all'uno, e all'altro triangolo; perciò (prop. 9.) sarà l'angolo x uguale all'angolo z, che sono sottesi dal lato comune AF.

Inoltre i due angoli conseguenti x, ed m insieme presi (prop. 15.) sono uguali a due angoli retti; similmente i due angoli conseguenti z, ed s presi insieme uguagliano due retti; dunque (ass. 1.) i due angoli x, ed m sono uguali ai due z, ed s, cioè

$x+m=z+s$, e da queste somme uguali levando gli angoli x, e z dimostrati uguali, resterà (ass. 3.) l' angolo $s=m$ adunque in ogni triangolo equicrure, ec. Il che, ec.

È la prop. 5. del lib. 1. d' Euclide.

Corollario I. Essendosi dimostrato, che i due triangoli ACF, ABF hanno tutti i lati uguali a tutti i lati l' uno all' altro, perciò sarà eziandio (prop. 9.) l' angolo AFB uguale all' angolo AFC, che sono sottesi dagli uguali lati AB, AC; e però la retta AF tirata dal vertice A del triangolo isoscele ABC al punto di mezzo, F, della base (def. 9.) sarà perpendicolare alla medesima base; ed inoltre divide l' angolo verticale CAB in due angoli uguali FAB, FAC, che sono sottesi dai lati uguali BF, FC.

Corollario II. Scambievolmente se dal vertice A del triangolo equicrure ABC si tirerà (prop. 14.) alla base BC una retta perpendicolare AF, questa segherà per metà la base BC, e l' angolo verticale CAB; perciocchè (ass. 16.) l' angolo AFB è uguale all' angolo AFC, e l' angolo x dimostrato uguale all' angolo z; perciò (cor. 7. prop. 24.) il rimanente angolo FAB sarà uguale all' angolo rimanente FAC; ed il lato AB è, per ipotesi, uguale al lato AC, che sono frapposti tra gli angoli uguali; dunque (prop. 5.) sarà il lato BF=FC, che sottendono angoli uguali.

Corollario III. (Tav. III. Fig. 69.) Ogni triangolo equilatero, ACF, è ancora equiangolo. Imperciocchè essendo fra loro uguali i lati CA, CF, prendendo AF per base, sarà per l' antecedente dimostrazione, l' angolo A=F. Similmente essendo il lato AC=AF, prendendo CF per base, sarà pure l' angolo C=F; laonde (ass. 1.) sarà l' angolo A uguale all' angolo C; adunque tutti e tre gli angoli saranno uguali fra loro, e ciascuno di essi sarà la terza parte di due angoli retti.

Corollario IV. Dunque ciascun angolo del triangolo

equilatero è uguale a due terze parti d' un angolo retto; poichè sei terze parti d' un intero costituiscono due interi, ed i tre angoli del triangolo equilatero si sono dimostrati uguali, ed insieme presi uguagliano due retti; perciò ciascuno di essi sarà uguale a due terzi d' un angolo retto.

PROPOSIZIONE XXVI.

PROBLEMA TAV. III. FIG. 70.

Se un triangolo avrà un lato maggiore di un altro, avrà ancora l' angolo sotteso dal maggior lato, maggiore dell' angolo sotteso dal lato minore.

Il triangolo ACD abbia il lato AC maggiore del lato CD; dico, che l' angolo CDA sotteso dal maggior lato CA sarà maggiore dell' angolo CAD, a cui è sottoposto il minor lato CD.

Costruzione. Dal maggior lato CA si tagli (prop. 3.) la parte CE uguale al minor lato CD, e tirisi la retta DE (post. 1.).

Dimostrazione. Nel triangolo CDE, isoscele di costruzione, abbiamo (prop. antec.) l' angolo $x=z$; perciò tutto l' angolo CDA, che (ass. 10.) è maggiore dell' angolo z sua parte, sarà (parte 2. ass. 1.) anche maggiore dell' angolo x. Ma l' angolo x esteriore del triangolo ADE (cor. 2. prop. 24.) è maggiore dell' angolo A interiore, ed opposto; dunque (ass. 13.) l' angolo CDA, dimostrato maggiore dell' angolo x, sarà parimente maggiore dell' angolo A. Che però il lato maggiore di ciascun triangolo è sottoposto all' angolo maggiore, ed il lato minore sottende un angolo minore. Il che ec.

È la prop. 18. del lib. 1. d' Euclide.

Corollario. Adunque il triangolo scaleno, avendo tutti i lati disuguali, avrà ancora tutti gli angoli disuguali.

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA.

Se un triangolo avrà due angoli uguali, avrà parimente uguali tra loro i due lati sottoposti ad essi angoli.

Ma se un triangolo avrà un angolo maggiore d'un angolo, avrà ancora il lato sottoposto al maggior angolo maggiore del lato sottoposto all' angolo minore.

1. (Tav. III. Fig. 71.) Nel triangolo ACF sia l'angolo A uguale all' angolo F; dico, che il lato CF sarà uguale al lato CA.

Dimostrazione. Imperciocchè se il lato CF fosse maggiore, o minore del lato CA; allora, per la proposizione antecedente, l' angolo sotteso A sarebbe anche maggiore, o minore dell' angolo F, il che è contro l' ipotesi; dunque (ass. 12.) il lato CF sarà necessariamente uguale al lato CA. Il che ec.

È la prop. 6. del lib. 1. d' Euclide.

2. (Tav. III. Fig. 72.) Il triangolo ACF abbia l' angolo A maggiore dell' angolo F; sarà ancora il lato CF, sottoposto al maggior angolo, maggiore del lato CA sottoposto all' angolo minore.

Dimostrazione. Perciocchè se il lato CF fosse uguale al lato CA, allora (prop. 25.) sarebbe l' angolo A uguale all' angolo F, il che è contro la supposizione; e se il lato CF fosse minore del lato CA, anche l' angolo A (prop. ant.) sarebbe minore dell' angolo F, il che parimente è contro l' ipotesi; adunque il lato CF (ass. 12.) sarà necessariamente maggiore del lato CA, quando l' angolo A è maggiore dell' angolo F. Il che ec.

È la prop. 19 del lib. 1. d' Euclide.

Corollario i. Dunque ogni triangolo, che ha due angoli uguali, è isoscele; ma se avrà tutti gli angoli uguali, cioè se sarà equiangolo, sarà eziandio equilatero, e se avrà tutti gli angoli disuguali, sarà scaleno.

Corollario ii. (Tav. III. Fig. 73.) Di tutte le linee rette, che da qualunque punto C si possono tirare a qualsivoglia linea retta FE, la più corta è la perpendicolare CL; perciocchè, tirata qualunque altra retta CA, nel triangolo ACL l' angolo retto ALC è maggiore dell' acuto CAL; perciò il lato CA sottoposto al maggior angolo ALC (parte 2. di questa proposizione) sarà maggiore del lato CL sottoposto all' angolo minore CAL; la qual cosa sempre si verifica, ovunque prendasi il punto A nella retta FE. Perciò la distanza tra la linea FE, ed il punto C è misurata dalla perpendicolare CL, e dallo stesso punto C alla retta FE una sola perpendicolare CL si può tirare.

PROPOSIZIONE XXVIII.

TEOREMA TAV. III. FIG. 74.

Ogni parallelogrammo ha i lati, e gli angoli opposti fra loro uguali, ed è segato per mezzo del diametro.

Sia dato il parallelogrammo ABFC; dico, che sarà il lato AB=CF, il lato AC=FB, l' angolo A=F, l' angolo ACF=FBA, e tirato il diametro CB, sarà il triangolo ABC uguale al triangolo CFB.

Dimostrazione. Cadendo la retta BC sopra le due parallele AB, CF (prop. 21.) farà gli angoli alterni z, ed x uguali fra loro. Similmente perchè le rette AC, FB sono, d' ipotesi, parallele, ed in esse cade la retta BC, sarà l' angolo t uguale al suo alterno s. Laonde i due triangoli ACB, FCB hanno i due angoli s, ed x uguali a due angoli t, e z, l' uno all' altro, ed il lato CB frapposto tra gli angoli uguali è comune all' uno, e all' altro triangolo. Dunque (prop. 5.) sarà il lato AB=FC, il lato AC=FB, l' angolo A=F, ed il triangolo ABC uguale al triangolo FCB. Inoltre perchè gli angoli s, e z si sono dimostrati uguali agli angoli t, ed x, perciò (ass. 2.) sarà tutto l' angolo ACF uguale all' angolo FBA. Adunque ogni parallelogrammo ec. Il che ec.

È la prop. 34. del lib. 1. d' Euclide.

PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA TAV. III. FIG. 75.

Se una figura quadrilatera avrà due lati paralleli, ed uguali, anche gli altri due lati saranno paralleli, ed uguali; cioè essa figura sarà un parallelogrammo.

Il quadrilatero ACFE abbia il lato AC parallelo, ed uguale al lato EF, avrà ancora il lato AE parallelo, ed uguale al lato CF.

Dimostrazione. Tirisi la diagonale EC, che cadendo sopra le due rette AC, EF, d' ipotesi, parallele, fa (prop. 21.) gli angoli alterni x, e z uguali fra loro; laonde i due triangoli ACE, EFC hanno il lato EC comune, e, d' ipotesi, il lato AC=EF, e l' angolo $x=z$, che sono contenuti dai lati uguali. Dunque (prop. 6.) sarà il lato AE uguale al lato FC, e l' angolo $s=m$, che sono angoli alterni; perciò (prop. 19.) le rette EA, FC sono parallele, e la figura FA (def. 27.) è un parallelogrammo; e però il quadrilatero, che ha due lati paralleli, ed uguali, è un parallelogrammo. Il che ec.

È la prop. 33. del lib. 1. d' Euclide.

Corollario. Da questa dimostrazione ne segue, che se un quadrilatero, AF, avrà i lati opposti a due a due uguali fra loro, EA=FC, ed EF=AC, sarà un parallelogrammo; poichè tirata la diagonale EC,

i due triangoli EFC, AEC sono tra di loro equilateri, perciò (prop. 9.) saranno fra loro equiangoli; e saranno gli angoli $z=x$, ed $s=m$, che sono alterni, però i lati opposti saranno paralleli.

PROPOSIZIONE XXX.

PROBLEMA TAV. III. FIG. 76

Sopra una data linea retta terminata, AC, descrivere un quadrato, o qualunque altro parallelogrammo.

Costruzione. Sopra la retta AC, prolungata, se fia d' uopo, e dai punti A, e C (prop. 13.) s' innalzino le perpendicolari indefinite AB, CF; indi (prop. 3.) da esse si taglino le parti AB, CF, amendue uguali alla data AC, e tirisi la retta BF (post. 1.); sarà AF il ricercato quadrato.

Dimostrazione. Le rette AB, CF, di costruzione, perpendicolari alla stessa linea AC (prop. 18.) sono parallele, e sono uguali di costruzione; dunque per l' antecedente proposizione sarà il lato BF uguale, e parallelo al lato AC, e la figura AF sarà un parallelogrammo; ma allo stesso lato AC sono, di costruzione, uguali i due lati AB, CF, e però (ass. 1.) tutti i lati sono uguali fra loro; e gli angoli A, e C sono retti, di costruzione, perciò gli angoli F, e B ad essi opposti, ed uguali (prop. 28.) saranno eziandio retti, e la figura BC sarà un quadrato (def. 28.), essendosi dimostrato, che è un parallelogrammo equilatero, e rettangolo. Il che ec.

È la prop. 46. del lib. 1. d' Euclide.

2. (Tav. III. Fig. 77.) Se le uguali perpendicolari AB, CF si faranno maggiori, o minori della retta AC, allora la descritta figura sarà un rettangolo, o figura dall' una parte più lunga, o sia quadrilungo, come chiaramente si vede.

3. (Tav. III. Fig. 78.) Dovendo descrivere il Rom-

bo, sopra la data retta AC si tiri dal punto A la retta AB=AC, che faccia l' angolo in A obbliquo, cioè acuto, oppure ottuso; poscia dal punto C (prop. 21.) tirisi la retta CF parallela, ed uguale alla AB, e giungasi la retta FB, e sarà AF il Rombo, che si cercava.

4. (Tav. III. Fig. 79.) Ma se fatto l' angolo A obbliquo, si segherà AB maggiore, o minore della data AC, e si termini come sopra il parallelogrammo, sarà descritto il Romboide BC. Il che ec.

Corollario. Dunque se un parallelogrammo avrà un angolo retto, tutti gli altri ancora saranno retti.

PROPOSIZIONE XXXI.

TEOREMA TAV. III. FIG. 80.

I parallelogrammi descritti sopra la medesima base, e nelle medesime parallele, sono uguali fra loro.

I due parallelogrammi ABCE, BCFG abbiano la base BC comune, e sieno costituiti tra le medesime parallele AF, BR; sarà il parallelogrammo AC uguale al parallelogrammo BF.

Dimostrazione. Imperciocchè (prop. 28.) hanno i lati opposti uguali AE=BC, e GF=BC, perciò (ass. 1.) sarà AE=GF, ed aggiuntavi la parte comune EG (ass. 2.) si avrà AE+EG=GF+EG, cioè AG=FE. Laonde i due triangoli ABG, EFC (prop. 28.) hanno i lati uguali BG=FC, AB=EC, ed il lato AG=FE per dimostrazione, dunque (prop. 9.) il triangolo ABG sarà uguale al triangolo EFC, dai quali si levi la parte comune, cioè il triangolo EIG, e (ass. 3.) resterà il trapezio ABIE uguale al trapezio CFGI, a' quali si aggiunga di comune il triangolo IBC, e (ass. 2.) sarà ABIE+IBC=CFGI+IBC, cioè il parallelogrammo ABCE uguale al parallelogrammo BCFG. Adunque i parallelogrammi descritti, ec. Il che ec.

È la prop. 35. del lib. 1. d' Euclide.

Corollario i. L' area, o superficie del parallelogrammo rettangolo ABCE (def. 36.) ritrovasi moltiplicando la base BC nell' altezza BA, uguale alla FE (def. 11.). Ma il parallelogrammo obliquangolo BCFG si è dimostrato uguale al rettangolo ABCE; perciò l' area di qualunque parallelogrammo BCFG si otterrà moltiplicando la base BC nell' altezza BA, o sia FE.

Dunque se la base del parallelogrammo si chiamerà m, e la sua altezza si chiami a, allora il prodotto am esprimerà l' area del parallelogrammo, cioè significherà lo stesso parallelogrammo.

Corollario ii. (Tav. III. Fig. 81.) Ma l' area di qualsivoglia triangolo rettilineo ABC è uguale alla metà del prodotto della base AC moltiplicata per l' altezza BM (def. 38.). Perciocchè dai punti A, e B tirate (prop. 23.) le rette, AE parallela al lato BC, e BE parallela al lato AC, si avrà il parallelogrammo ACBE (prop. 28.) doppio del triangolo ABC, ma (cor. ant.) l' area del parallelogrammo ACBE è AC×BM, la cui metà $\frac{AC\times BM}{2}$ sarà l' area del triangolo ABC.

Se dunque la base AC si chiamerà b, e l' altezza BM si chiami c, il prodotto bc significherà l' area, o superficie del parallelogrammo ACBE, e $\frac{bc}{2}$ sarà l' area del triangolo ABC. Ma (aritmetic. 134.) abbiamo $\frac{bc}{2}=\frac{b}{2}\times c=b\times\frac{c}{2}$. Dunque *la superficie del triangolo rettilineo si ottiene ancora, moltiplicando la metà della base per tutta l' altezza, o pure la metà dell' altezza per tutta la base.*

Sia la base AC piedi 8, e l' altezza BM piedi 12, l' area del parallelogrammo CE sarà 8×12, cioè 96 piedi quadrati, e l' area del triangolo ABC sarà $\frac{96}{2}=4\times12=8\times6$, cioè 48 piedi quadrati.

Corollario iii. (Tav. III. Fig. 82.) L' area di un trapezio, ABCD, che abbia due lati AB, DC paralleli, si troverà moltiplicando la metà della somma de' due lati paralleli, cioè $\frac{AB+DC}{2}$ per la perpendicolare frapposta tra essi lati paralleli.

Imperciocchè, tirata la diagonale DB, e ad esse parallele una perpendicolare DL; l' area del triangolo ADB (cor. antec.) sarà $\frac{AB}{2}\times DL$, e l' area del triangolo BCD sarà $\frac{DC}{2}\times DL$ (perchè DL è anche l'altezza del triangolo BCD posto tra le parallele AB, DC); dunque l' area del trapezio, composto da questi due triangoli, sarà $\frac{AB}{2}\times DL+\frac{DC}{2}\times DL$, cioè $\overline{\frac{AB+DC}{2}}\times DL$, oppure sarà $\overline{AB+DC}\times\frac{DL}{2}$ (arit. 134), $\frac{\overline{AB+DC}\times DL}{2}$; perciò l' area di esso trapezio è la metà del prodotto della somma de' due lati paralleli nella perpendicolare frapposta tra esse parallele; o pure si troverà moltiplicando la suddetta somma per la metà della perpendicolare suddetta; ovvero moltiplicando tutta la perpendicolare per la metà della somma di essi lati paralleli.

Quando il trapezio ha i due lati paralleli, che sono perpendicolari ad uno degli altri due lati, allora comunemente si chiama *capotagliato*, quale è il trapezio della Figura 21. Tav. I., che ha i lati AB, CD paralleli, e amendue perpendicolari al lato BD; ed allora si moltiplica la semisomma di essi lati paralleli per la perpendicolare. Per esempio. Sia CD piedi 6., ed AB piedi 4, e BD piedi 8, moltiplicando $\frac{6+4}{2}$ cioè 5 per 8., il prodotto 40. significherà, che la superficie del trapezio, o capotagliato AD è 40. piedi quadrati.

PROPOSIZIONE XXXII.

TEOREMA TAV. III. FIG. 83.

I triangoli (ABC, FBC) costituiti sopra la medesima base (BC), e nelle medesime parallele (LI, BC) sono uguali fra loro.

Costruzione. Pei punti B, C (prop. 23.) tirinsi le rette, BL, parallela al lato AC, e CI parallela al lato EB.

Dimostrazione. I parallelogrammi ACBL, FBCI costituiti sulla medesima base, e nelle medesime parallele (prop. antec.) sono uguali fra loro; dunque (ass. 9.) i due triangoli ABC, FBC saranno eziandio uguali fra loro, perchè (prop. 28.) sono le metà degli uguali parallelogrammi LC, BI. Adunque i triangoli costituiti, ec. Il che ec.

È la prop. 37. del lib. I. d' Euclide.

PROPOSIZIONE XXXIII.

TEOREMA TAV. III. FIG. 84.

Se un parallelogrammo (ABCF), ed un triangolo (LBC) saranno costituiti sopra la medesima base (BC), e nelle medesime parallele (AL, BC), il parallelogrammo sarà doppio del triangolo.

Dimostrazione. Conducasi il diametro AC, ed il triangolo ABC (prop. antec.) sarà uguale al triangolo LBC. Ma il parallelogrammo ABCF (prop. 28.) è doppio del triangolo ABC; dunque (parte 2. ass. I.) esso parallelogrammo sarà ancora doppio del triangolo LBC. Adunque se un parallelogrammo, ed un triangolo, ec. Il che ec.

È la prop. 41. del lib. I. d' Euclide.

PROPOSIZIONE XXXIV.

PROBLEMA TAV. III. FIG. 85.

Descrivere un parallelogrammo uguale ad un dato triangolo (ABC), e che abbia un angolo uguale a un dato angolo (Z).

Costruzione. Da qualsivoglia angolo B del dato triangolo al lato opposto AC, prolungato, se fia d' uopo, tirisi (prop. 14.) la retta perpendicolare BE, che (prop. 12.) dividasi per mezzo in E, e per esso punto F (prop. 23.) conducasi la retta RFM parallela alla base AC, nel cui punto A (prop. 10.) costituiscasi l' angolo HAC uguale al dato angolo Z. Finalmente pel punto C (prop. 23.) tirisi la retta CI parallela alla retta HA; sarà AHIC il ricercato parallelogrammo.

Dimostrazione. L' area del parallelogrammo AHIC (cor. 1. prop. 31.) è uguale al prodotto della base AC nella retta FE, che (def. 38.) è l' altezza del medesimo parallelogrammo. Ma l' area del triangolo ABC (cor. 2. prop. 31.) è anche uguale al prodotto della base AC nella retta FE, che, di costruzione, è la metà dell' altezza BE di esso triangolo. Dunque (ass. 1.) le aree sono uguali, cioè il parallelogrammo CH è uguale al triangolo ABC, ed ha l' angolo HAC uguale all' angolo dato Z. Il che ec.

È la prop. 42. del lib. 1. d' Euclide.

Corollario. Se l' angolo dato Z è retto, il descritto parallelogrammo sarà rettangolo; e se l' angolo Z è obbliquo, il parallelogrammo sarà obbliquangolo.

ELEMENTI DELLA GEOMETRIA

LIBRO TERZO

DEFINIZIONE I.

TAV. III. FIG. 86.

Figure simili diconsi quelle, che, avendo lo stesso numero di lati, ed angoli, hanno inoltre ciascun angolo uguale a ciascun angolo, e proporzionali fra loro i lati frapposti tra gli angoli uguali.

Ciascun angolo del pentagono M sia uguale a ciascun angolo del pentagono N, cioè A=F, B=G, C=H, D=I, E=L; abbiano inoltre i lati interposti tra gli angoli uguali proporzionali ciascuno a ciascuno, cioè sia AB : FG : : BC : GH : : CD : HI : : DE : IL : : AE : FL, ovvero alternando sia AB : BC : : FG : GH, BC : CD : : GH : HI, e CD : DE : : HI : IL, DE : EA : : IL : LF, allora i due pentagoni M, ed N saranno due figure rettilinee simili, o due poligoni simili. Lo stesso si dee intendere delle altre figure simili.

Corollario. Se dunque due rettilinei, o poligoni M, ed N saranno ambedue simili ad un terzo poligono R, saranno eziandio simili tra di loro. Imperciocchè gli angoli de' poligoni M, ed N, perchè sono, d' ipotesi, uguali agli angoli del poligono R, ciascuno a ciascuno, perciò (ass. 1.) saranno eziandio uguali fra loro. Similmente perchè le ragioni de' lati de' poligoni M, ed N sono, d' ipotesi, uguali alle ragioni de' lati del poligono R, però (ass. 1.) saranno anche uguali fra loro. Dunque i poligoni simili ad un terzo sono ancora simili fra loro.

È la prop. 21. del lib. 6. d' Euclide.

DEFINIZIONE II.

Nelle figure simili i lati interposti tra gli angoli uguali si chiamano *lati omologhi*. Così negli antecedenti poligoni simili M, ed N, i lati AB, e GF sono omologhi fra loro; come anche lo sono tra di loro i lati BC, GH, e fra loro CD, HI, ec.

DEFINIZIONE III.

TAV. III. FIG. 87.

Figure reciproche diconsi quelle, che hanno i lati reciprocamente proporzionali, quelle cioè, nelle quali sta un lato della prima figura ad un lato della seconda, come un altro lato della stessa seconda ad un altro lato della prima figura. Così i due triangoli ABC, DEF sono due figure reciproche, perchè egli è AB : DE :: DF : BC, o AB : DF :: DE : BC.

DEFINIZIONE IV.

TAV. III. FIG. 88.

I triangoli (ABF, ACF, AFG, ec.), che hanno il vertice comune (A), e le basi (BF, CF, FG, ec.) poste nella medesima retta (BG) sono *ugualmente alti*; poichè l' altezza loro (def. 38. lib. 2.) è la perpendicolare tirata dal vertice comune (A) sopra la retta (BG), in cui ritrovansi le basi.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

I parallelogrammi ugualmente alti, o costituiti nelle medesime parallele sono fra loro nella ragione delle loro basi.

Similmente i triangoli, che hanno le altezze uguali, o sono entro le medesime parallele, stanno tra di loro nella ragione delle proprie loro basi.

1. (Tav. III. Fig. 89.) I due parallelogrammi ABCR, FGHL sieno costituiti nelle medesime parallele AL, BI, o abbiano le altezze uguali AM=LI; starà il parallelogrammo AC al parallelogrammo FH; come la base BC alla base GH; vale a dire se sarà la base BC=GH, anche il parallelogrammo BR sarà uguale al parallelogrammo FH; se la base BC sarà doppia della base GH, il parallelogrammo AC sarà ancora doppio del parallelogrammo FH, ec.

Dimostrazione. La base BC del parallelogrammo BR si chiami b, e l' altezza AM chiamisi c, e (cor. 1. prop. 31. lib. 2.) l' area dello stesso parallelogrammo BR sarà bc. Similmente del parallelogrammo FH la base GH si chiami m, e la sua altezza LI, perchè, d' ipotesi, è uguale all' altezza AM, sarà ancora c; laonde (cor. 1. prop. 31. lib. 2.) sarà cm l' area del parallelogrammo HF. Ma essendo $bc \times m = cm \times b$, perciò (prop. 2. lib. 1.) starà $bc : cm :: b : m$, cioè il parallelogrammo BR al parallelogrammo FH, come la base BC alla base GH. Dunque i parallelogrammi ugualmente alti sono fra loro nella ragione delle basi. Il che ec.

2. (Tav. III. Fig. 90.) I triangoli BCR, HLI ugualmente alti, o costituiti nelle medesime parallele EM, BI sono fra loro come le basi BR, LI.

Costruzione. Dalla retta ME (prop. 3. lib. 2.) si taglino CM=BR, ed HE=LI, e tirinsi le rette BM, IE, e si avranno (prop. 29. lib. 2.) i due parallelogrammi RM, LE ugualmente alti.

Dimostrazione. Il triangolo BCR è la metà del parallelogrammo RM (prop. 28. lib. 2.), ed il triangolo HIL è la metà del parallelogrammo LE.

Ma (cor. 1. prop. 16. lib. 1.) la metà di qualunque quantità sta alla metà di qualsivoglia altra quantità, come la prima quantità alla seconda; perciò il triangolo BCR starà al triangolo HLI come il parallelogrammo RM al parallelogrammo LE; ma per l'antecedente dimostrazione il parallelogrammo RM sta al parallelogrammo LE come la base BR alla base LI. Dunque (ass. 1.) sarà $\triangle BCR : \triangle HLI :: BR : LI$, cioè il triangolo BCR al triangolo HLI starà come la base BR alla base LI. Il che ec.

È la prop. 1. del lib. 6. d'Euclide.

Corollario i. Adunque se le basi de' parallelogrammi, che hanno la medesima, o uguale altezza, saranno uguali fra loro, i parallelogrammi saranno ancora uguali tra di loro.

È la prop. 36. del lib. 1. d'Euclide.

Corollario ii. Medesimamente saranno fra loro uguali i triangoli ugualmente alti, se avranno le basi uguali.

È la prop. 38. del lib. 1. d'Euclide.

Corollario iii. (Tav. III. Fig. 91.) Se due parallelogrammi am, e bm avranno le basi uguali, o la medesima base m, e le altezze disuguali a, e b, allora essi parallelogrammi saranno fra loro nella ragione delle altezze; poichè (prop. 2. lib. 1.) abbiamo $am : bm :: a : b$.

La medesima cosa si verifica de' triangoli aventi la medesima base, o basi uguali, perchè sono la metà de' parallelogrammi, che hanno le stesse basi, ed altezze di essi triangoli.

Corollario iv. (Tav. III. Fig. 92.) Che se due parallelogrammi am, e bc saranno uguali, ed avranno

le basi a, e b uguali fra loro, avranno parimente le altezze m, e c tra di loro uguali. Perciocchè essendo $am = bc$, ed $a = b$, d'ipotesi, dividendo am per a, e bc per b (ass 5.) resterà $m = c$. Adunque i parallelogrammi uguali, posti dalla medesima parte, e che hanno la medesima, o uguali basi costituite nella medesima linea retta, saranno costituiti nelle medesime parallele.

Corollario v. (Tav. III. Fig. 93.) Conseguentemente i triangoli uguali, ABC, EFG, posti dalla medesima parte, e che hanno le basi uguali costituite nella medesima linea retta, saranno ancora costituiti nelle medesime parallele, cioè saranno ugualmente alti. Perciocchè essi triangoli (prop. 28. lib. 2.) sono metà de' parallelogrammi BL, FS, che hanno le basi, ed altezze comuni coi medesimi triangoli.

È la prop. 40. del lib. 1. d'Euclide.

Corollario vi. (Tav. III. Fig. 94.) Per la medesima ragione i triangoli uguali (ABC, RBC) costituiti sopra la stessa base (BC), e dalla medesima parte, saranno eziandio nelle medesime parallele (AR, BC), avranno cioè la medesima altezza.

È la prop. 39. del lib. 1. d'Euclide.

Avvertimento. Perchè in avvenire occorrerà sovventemente di enunciare proporzioni di triangoli, e parallelogrammi, per non ripetere sì spesso gli stessi vocaboli, e per maggior brevità invece della parola *Triangolo* si porrà questo segno $\triangle$, e quest'altro $\square$ in luogo di *Parallelogrammo*.

PROPOSIZIONE II.

TEOR. TAV. III. FIG. 95.

Se in qualsivoglia triangolo rettilineo (ABC) sarà tirata una retta (FG) parallela alla base (AC), essa retta segherà in parti proporzionali i due rimanenti lati (AB, CB, cioè farà AF : FB : : CG : GB).

Ma se due lati (BA, BC) d'un triangolo (ABC) saranno segati in parti proporzionali da una linea retta (FG, cioè sia AF : FB : : CG : GB) allora essa retta sarà parallela al rimanente lato, o sia base (AC) del triangolo.

Dimostrazione della prima parte. Condotte le rette AG, FC, i due triangoli AFG, FCG, costituiti nelle medesime parallele, AC, FG, e sopra la stessa base FG (prop. 32. lib. 2.) sono uguali fra loro; laonde (cor. 5. prop. 2. lib. 2.) avranno la medesima ragione ad un terzo triangolo BFG, sarà dunque △AGF : △BGF : : △CFG : △BGF; ma, per la seconda parte della proposizione antecedente, i triangoli ugualmente alti sono fra loro nella ragione delle basi; perciò sarà △AGF : △BFG : : AF : FB, e △CFG : △BFG : : CG : GB; dunque (ass. 1.) sarà AF : FB : : CG : GB. Il che ec.

Dimostrazione della seconda parte. Abbiamo, d'ipotesi, AF : FB : : CG : GB, e, tirate le rette AG, FC, per la parte 2. della proposiz. antec., avremo △AFG : △BFG : : AF : FB, e △CFG : △BFG : : CG: GB, perciò (ass. 1.) sarà △AFG : △BFG : : △CFG : △BFG, sicchè i due triangoli AFG, CFG, che hanno la stessa ragione al terzo triangolo BFG (cor. 2. propos. 3. lib. 1.) saranno uguali fra loro, ed hanno la medesima base FG, e sono posti dalla stessa parte; dunque (cor. 6. prop. antec.) saranno nelle medesime parallele, cioè sarà FG parallela alla base AC.

Adunque se in qualsivoglia triangolo rettilineo, ec. Il che ec.

È la prop. 2. del lib. 6. d'Euclide.

PROPOSIZIONE III.

PROBL. TAV. III. FIG. 96.

Da una data linea retta terminata (AB) tagliare una parte proposta; per esempio la terza parte.

Costruzione Tirisi dal punto A la retta indefinita AC, che colla data AB faccia qualsivoglia angolo CAB, e da essa retta AC si seghino a piacere tre parti uguali fra loro AE, EF, FG. Poscia tirisi la retta GB, e pel punto E (prop. 23. lib. 2.) conducasi la retta EL parallela alla GB. Sarà AL la terza parte della data retta AB.

Dimostrazione. Nel triangolo BGA la retta EL è, di costruzione, parallela al lato GB; laonde per la parte 1. della prop. antec., sarà GE : EA : : BL : LA, e componendo (prop. 4. lib. 1.) si avrà GE+EA : EA : : BL+LA : LA, cioè GA : EA : : BA : LA. Ma, per costruzione, la retta GA è tripla della retta EA; dunque la BA sarà anche tripla della LA, vale a dire sarà LA la terza parte della BA. Il che ec.

È la prop. 9. del lib. 6. d'Euclide.

PROPOSIZIONE IV.

PROBL. TAV. IV. FIG. 1.

Dividere una data retta terminata (AL) in parti proporzionali alle parti di un'altra data retta terminata (AM segata ne' punti B, C).

Costruzione. Le date rette AL, AM pongansi di modo, che contengano qualsisia angolo LAM, e, congiunta la retta LM, per i punti B, C (propos. 23. lib. 2.) tirinsi le rette BE, CF parallele alla retta LM, le quali segheranno la retta AL in parti proporzionali alle parti della retta AM. Dal punto B tirisi la retta BGI parallela ad AL.

Dimostrazione. Ne' triangoli ACF, BIM (parte 1. prop. 2.) abbiamo AB : BC : : AE : EF, e BC : CM : : BG : GI. Ma (prop. 28. lib. 2.) abbiamo BG=EF, e GI=FL; e però, sostituendo cose uguali a cose uguali, sarà BC : CM : : EF : FL, e ordinando (propos. 7. lib. 1.) sarà AB : CM : : AE : FL. Che però la retta AL è divisa in parti proporzionali alle parti della retta AM. Il che ec.

È la prop. 10. del lib. 6. d' Euclide.

PROPOSIZIONE V.

PROBL. TAV. IV. FIG. 2.

Date due linee rette (F, G) trovare la terza proporzionale.

Costruzione. Facciasi qualsivoglia angolo rettilineo LCB, e dal lato CB (prop. 3. lib. 2.) taglisi la parte CA=F, ed AB=G; e dall'altro lato CL seghisi CE=G, e tirisi la retta EA, alla quale pel punto B, (prop. 23. lib. 2.) si tiri la retta BL parallela; sarà EL la ricercata linea.

Dimostrazione. Imperciocchè (parte 1. prop. 2.) abbiamo CA : AB : : CE : EL, cioè sostituendo cose uguali a cose uguali, sarà F : G : : G : EL. Adunque alle due date rette si è trovata la terza proporzionale. Il che ec.

È la prop. 11. del lib. 6. d' Euclide.

Corollario i. Se la prima linea F si chiamerà a, e la seconda G si chiami c; allora la terza trovata EL (cor. prop. 10. lib. 1.) sarà $\frac{c^2}{a}$; perciò la terza proporzionale trovata EL esprime il quoziente, che nasce dividendo il quadrato dalla seconda G per la prima F.

Corollario ii. Inoltre, perchè si è dimostrato essere F : G : : G : EL; perciò (cor. prop. 1. lib. 1.) sarà $F \times EL = G^2$. Vale a dire il rettangolo contenuto dalla prima linea data F, e dalla trovata EL è uguale al quadrato dell' altra data linea G. E però sopra una data linea retta F si potrà descrivere un rettangolo uguale al quadrato d' un' altra data retta, G, trovando la terza proporzionale EL.

PROPOSIZIONE VI.

PROBL. TAV. IV. FIG. 3.

Date tre linee rette (F, G, L) trovare la quarta proporzionale.

Costruzione. Tirinsi due linee rette CB, CM, che formino qual angolo si voglia, e dai lati CB, CM (propos. 3. lib. 2.) si taglino le parti CA=F, AB=G, e CE=L; indi tirisi la retta AE, a cui, pel punto B (prop. 23. lib. 2.) si conduca la parallela BM, sarà EM la ricercata linea.

Dimostrazione. Nel triangolo ABM (parte 1. prop. 2.) abbiamo CA : AB : : CE : EM, cioè F : G : : L : EM, sostituendo le cose uguali alle uguali cose. Adunque alle tre date linee rette si è trovata la quarta proporzionale. Il che ec.

Corollario i. Supponendo, che le date linee sieno $F=a$, $G=c$, $L=m$; allora la linea trovata EM (prop. 10. lib. 1.) sarà $\frac{cm}{a}$; perciò la retta EM è il quoziente, che ritrovasi dividendo, per la prima F, il rettangolo contenuto dalla seconda G, e dalla terza L.

Corollario ii. Perchè abbiamo F : G : : L : EM, perciò (prop. 1. lib. 1.) sarà $F \times EM = G \times L$. Dunque per descrivere sopra la linea F un rettangolo uguale al rettangolo contenuto dalle due G, ed L, alle tre linee F, G, L si trovi la quarta proporzionale EM.

PROPOSIZIONE VII.

TEOR. TAV. IV. FIG. 4.

I triangoli equiangoli hanno i lati sottoposti agli angoli uguali proporzionali fra loro.

Sieno i due triangoli ABC, EFG equiangoli, abbiano cioè gli angoli uguali A=E, B=F, e C=G; avranno i lati frapposti tra gli angoli uguali proporzionali; cioè sarà AB : EF :: AC : EG :: BC : FG.

Costruzione. Pongasi l'angolo F sopra l'angolo uguale, B, ovvero dai lati BA, BC (prop. 3. lib. 2.) si taglino BI=FE, e BL=FG, e tirisi la retta IL.

Dimostrazione. I due triangoli IBL, EFG, che hanno i lati uguali BI=FE, BL=FG, e, d'ipotesi, l'angolo B=F saranno uguali fra loro (prop. 6. lib. 2), e sarà la base IL=EG, l'angolo LIB=E, e l'angolo ILB=G. Ma, d'ipotesi, abbiamo l'angolo E=A, e l'angolo G=C; dunque (ass. 1.) sarà l'angolo LIB=A, e l'angolo ILB=C, cioè l'angolo esteriore uguale all'interiore, ed opposto dalle medesime parti; perciò (parte 2. prop. 19. lib. 2.) sarà IL parallela alla retta AC; laonde, (parte 1. prop. 2.) si avrà AI : IB :: CL : LB, e componendo (prop. 4. lib. 1.) sarà
AI+IB : IB :: CL+LB : LB, cioè AB : BI :: CB : LB, e sostituendo i lati FE, FG agli uguali BI, LB, sarà AB : EF :: CB : FG.

Nella stessa maniera se l'angolo G si soprapporrà all'ugual angolo C, dimostrerassi CB : FG :: AC : EG. Perciò i lati sottoposti agli angoli uguali sono proporzionali fra loro, cioè AB : EF :: AC : EG :: BC : FG, ed alternando (pr. 3. lib. 1.) si avrà AB : AC :: EF : EG, ed AC : CB :: EG : FG, ed AB : BC :: EF : FG. Il che ec.

È la prop. 4. del lib. 6. d'Euclide.

Corollario. Adunque la retta IL, parallela al lato AC, taglia il triangolo ILB simile al triangolo ABC, essendosi dimostrati equiangoli.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOR. TAV. IV. FIG. 5.

I triangoli, che hanno i lati proporzionali, sono equiangoli fra loro.

I due triangoli ABC, EFG abbiano i lati proporzionali, cioè AB : BC :: EF : FG, ed AC : CB :: EG : FG, avranno uguali gli angoli, a' quali sono sottoposti i lati omologi, cioè A=E, B=EFG, e C=EGF.

Costruzione. Sopra la FG, e nel punto in essa F costituiscasi l'angolo CFL=B (prop. 10. lib. 2.), e nel punto G facciasi l'angolo FGL=C, sarà il rimanente angolo L=A (cor. 7. prop. 24. lib. 2.)

Dimostrazione. I due triangoli ABC, FGL, di costruzione, equiangoli avranno (prop. antec.) i lati proporzionali, cioè sarà AB : BC :: FL : FG, ed AC : CB :: LG : FG : ma, d'ipotesi, abbiamo AB : BC :: EF : FG, ed AC : CB :: EG : FG; e però (ass. 1.) sarà FL : FG :: EF : FG, ed LG : FG :: EG : FG; conseguentemente (cor. 2. prop. 3. lib. 1.) sarà FL=EF, ed LG=EG. Inoltre la base FG è comune ai due triangoli FEG, FLG; perciò (prop. 9. lib. 2.) essi triangoli avranno gli angoli uguali E=L, EFG=LFG, ed EGF=LGF. Ma, di costruzione, è l'angolo LGF=C, l'angolo LFG=B, ed L=A; dunque (ass. 1.) sarà l'angolo A=E, l'angolo B=EFG, e l'angolo C=EGF; e però sono equiangoli. Il che ec.

È la prop. 5. del lib. 6. d'Euclide.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA TAV. IV. FIG. 6.

Se due triangoli (ABC, EFG) avranno un angolo (B) uguale ad un angolo (F), ed i lati, che formano essi angoli, sieno proporzionali (AB : EF :: BC : FG); avranno ancora i rimanenti angoli uguali (A=E, e C=G) che sono sottesi da lati proporzionali, e saranno simili i triangoli dati.

COSTRUZIONE. Dai lati BA, BC (prop. 3. lib. 2.) si taglino le parti BI=EF, BL=FG, e tirisi la retta IL.

DIMOSTRAZIONE. I due triangoli ILB, EFG hanno di costruzione il lato BI=EF, il lato BL=FG, e, d' ipotesi, l' angolo B=F, perciò (prop. 6. lib. 2.) sarà il lato IL=EG, l' angolo LIB=E, e l' angolo ILB=G. Ma, d' ipotesi, abbiamo AB : EF :: BC : FG; onde, sostituendo BI per l' uguale EF, e BL in luogo del suo uguale FG, si avrà AB : BI :: BC : BL; e dividendo (prop. 5. lib. 1.) si otterrà
AB—BI : BI :: BC—BL : BL, cioè AI : BI :: CL : LB. Adunque (parte 2. prop. 2.) la retta LI è parallela al lato CA; laonde (parte 2. prop. 21. lib. 2.) sarà l' angolo esteriore ILB=C, e l' angolo LIB=A; ma superiormente si è dimostrato l' angolo ILB=G, e l' angolo LIB=E, perciò (ass. 1.) sarà l' angolo A=E, e l' angolo C=G; e però (prop. 7.) i triangoli ABC, EFG, dimostrati equiangoli, saranno simili. Il che ec.

È la prop. 6. del lib. 6. d' Euclide.

PROPOSIZIONE X.

TEOR. TAV. IV. FIG. 7.

Se per qualsivoglia punto (I) del diametro (BR) d' un parallelogrammo (AC) si condurranno due linee rette (GL, FE), parallele ai lati dello stesso parallelogrammo, esse rette linee divideranno il parallelogrammo in quattro parallelogrammi, de' quali i due (GF, ed EL) che sono intorno al diametro (BR) saranno simili al tutto (AC), e simili fra loro. Ma gli altri due (GE, ed LF) saranno uguali fra loro,

e chiamansi *complementi di que' due, che sono intorno al diametro.*

DIMOSTRAZIONE DELLA PRIMA PARTE. Nel triangolo BRC la retta IL, d' ipotesi, parallela al lato RC (cor. prop. 7.) taglia il triangolo ILB simile al tutto BRC. Dunque (def. 1.) sarà RC : CB :: IL : LB, e sostituendo le linee AB, BE alle uguali linee RC, IL si avrà AB : CB :: BE : BL; e nuovamente sostituendo cose uguali a cose uguali, sarà eziandìo
RC : RA :: LI : IE; e però i parallelogrammi AC, EL hanno i lati proporzionali. Inoltre hanno gli angoli eguali contenuti dai lati proporzionali; poichè (parte 2. prop. 21. lib. 2.) l' angolo interiore A è uguale all' esteriore, ed opposto dalle medesime parti IEB, e l' angolo C=ILB; e l' angolo ARC=EIL, perchè (prop. 28. lib. 2.) sono amendue uguali all' angolo comune, ed opposto ABC. Adunque il parallelogrammo EL (def. 1.) è simile al parallelogrammo AC; al quale nello stesso modo simile si dimostra il parallelogrammo GF; laonde (cor. def. 1.) i due parallelogrammi EL, GF saranno eziandìo simili tra di loro. Il che ec.

È la prop. 24. del lib. 6. d' Euclide.

DIMOSTRAZIONE DELLA SECONDA PARTE. Il diametro BR (prop. 28. lib. 2.) sega per mezzo i parallelogrammi AC, GF, EL, perciò abbiamo
△ABR=△BCR, △IGR=△IRF, e △EIB=△ILB, e dagli uguali triangoli ABR, BCR levando parti uguali, cioè i triangoli IGR, EIB dal primo, ed i triangoli IFR, ILB dal secondo (ass. 3.) resterà il parallelogrammo GE uguale al parallelogrammo FL, cioè i complementi saranno uguali fra loro. Il che ec.

È la prop. 43. del lib. 1. d' Euclide.

COROLLARIO 1. Se il dato parallelogrammo sarà un quadrato, anche i due parallelogrammi intorno al suo diametro saranno due quadrati; perchè, per la prima dimostrazione, sono simili al dato parallelogrammo.

COROLLARIO II. Se accadrà di dover descrivere sopra una data linea retta un parallelogrammo, che sia uguale ad un dato triangolo, e che abbia un angolo uguale ad un angolo dato: in tal caso si descriva primieramente (prop. 34. lib. 2.) il parallelogrammo uguale al triangolo dato, e che abbia un angolo uguale all' angolo dato; e supponiamo, che quel parallelogrammo descritto sia AEIG coll' angolo GIE uguale al dato angolo, e che la data linea retta sia IF posta per diritto al lato EI; indi pel punto F tirata la retta RFC parallela alla AE, che incontri in R il lato AG prolungato; poscia tirisi la RI, che prolungata s' incontri in B col lato AE prolungato, e pel punto B si tiri BC parallela alla AR, o FE, e si compia la figura prolungando GI in L, sarà il parallelogrammo FL descritto sopra la linea data IF con l' angolo FIL=GIE (prop. 17. lib. 2.), e perciò uguale all' angolo dato, ed esso parallelogrammo FL, per l' antecedente dimostrazione, è uguale al parallelogrammo GE, e per conseguenza uguale al dato triangolo (ass. 1.).

È la propos. 44. del lib. 1. d' Euclide.

PROPOSIZIONE XI.

TEOR. TAV. IV. FIG. 8.

I parallelogrammi simili, e similmente posti, che hanno un angolo comune, sono posti intorno al medesimo diametro.

I due parallelogrammi BM, LG abbiano l' angolo in A comune, sieno simili, e similmente posti; cioè sia l' angolo B=ILA, ed i lati proporzionali AB : BC : : AL : LI; dico, che saranno intorno al medesimo diametro AC, cioè che il diametro AI cadrà sopra AC.

DIMOSTRAZIONE. Imperciocchè, d' ipotesi, l' angolo B è uguale all' angolo ILA, ed i lati, che formano essi angoli, sono proporzionali AB : BC : : AL : LI; dunque (propos. 9.) sarà l' angolo CAB uguale all' angolo IAL; ma il lato AL cade sul lato AB, perchè l' angolo in A è comune a tutti due i parallelogrammi; adunque anche il lato AI cadrà sopra AC; perciò i parallelogrammi BM, LG sono posti intorno al medesimo diametro AIC. Il che ec.

È la prop. 26. del lib. 6. d' Euclide.

PROPOSIZIONE XII.

PROB. TAV. IV. FIG. 9.

Sopra una data linea retta terminata (AB) descrivere un rettilineo, o sia poligono simile, e similmente posto ad un rettilineo dato (EFGC).

COSTRUZIONE. Da qualunque angolo F del dato poligono a ciascun angolo opposto tirinsi le rette diagonali, come FC, le quali segheranno il poligono in triangoli. Quindi sopra la data AB (prop. 10. lib. 2.) si costituiscano gli angoli LBA=FEC, ed LAB=FCE, e (cor. 7. prop. 24. lib. 2.) sarà il rimanente angolo $x=m$.

Similmente sopra AL facciansi gli angoli $r=s$, ed $t=z$, e sarà il rimanente I uguale all' angolo rimanente G; e così proseguendo, se il poligono dato conterrà più triangoli. Sarà ABLI il ricercato poligono.

DIMOSTRAZIONE. I triangoli AIL, FGC sono, di costruzione, equiangoli; onde (proposiz. 7.) sarà AI : AL : : CG : CF.

Similmente ne' triangoli ABL, CEF equiangoli (costruz.) sarà AL : AB : : CF : CE; perciò ordinando (prop. 7. lib. 1.) si avrà AI : AB : : CG : CE. Col medesimo raziocinio si dimostra essere BL : LI : : EF : FG.

Inoltre (prop. 7.) abbiamo LI : IA :: FG : GC, ed AB : BL :: CE : EF; laonde i lati sono proporzionali, e gli angoli sono, di costruzione, uguali, B=E, I=G, IAB=GCE, ed ILB=GFE. Adunque (def. 1.) il poligono ILBA è simile al poligono EFGC, e similmente posto sopra la data retta AB. Il che ec.

È la prop. 18. del lib. 6. d' Euclide.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA TAV. IV. FIG. 10.

I triangoli simili sono fra loro in ragione duplicata, cioè come i quadrati de' lati omologi.

Sieno dati i due triangoli simili ABC, EFI, i quali cioè abbiano (def. 1.) gli angoli uguali B=F, A=E, C=I, ed i lati proporzionali

AC : EI :: AB : EF :: BC : FI; dico, che il triangolo ABC al triangolo EFI ha una ragione duplicata di quella, che ha il lato AC al lato EI, o il lato AB al lato EF ec., vale a dire sarà

$$\Delta ABC : \Delta EFI :: \overline{AC}^2 : \overline{EI}^2, \text{ o } :: \overline{AB}^2 : \overline{EF}^2, \text{ ec.}$$

Costruzione. Prendasi il triangolo EFI, e soprappongasi al triangolo ABC, in guisa che l' angolo E cada in A, il lato EF in AZ sopra il lato AB, e, per essere l' angolo A=E, l' altro lato EI cadrà sopra AC, come in AL, ed il lato FI caggia in ZL, e tirisi la retta LB.

Dimostrazione. I triangoli ABC, ABL, (def. 4.) sono ugualmente alti, e similmente sono ugualmente alti i triangoli ALB, ALZ. Ma i tre triangoli ABC, ABL, ALZ (aritm. 26.) sono quantità omogenee; perciò la ragione del primo ABC al terzo ALZ (prop. 17. lib. 1.) è composta dalle ragioni del primo ABC al secondo ABL, e del secondo ABL al terzo ALZ. Ma (parte 2. prop. 1.) abbiamo

ΔABC : ΔABL :: AC : AL, e ΔABL : ΔALZ :: AB : AZ; e però alle ragioni de' triangoli sostituendo le uguali ragioni delle loro basi, la ragione del primo triangolo ABC al terzo ALZ, o sia al suo uguale EFI, è composta dalle due ragioni AC : AL, ed AB : AZ; cioè dalle ragioni AC : EI, ed AB : EF (essendo AL=EI; ed AZ=EF di costruzione). Ma, d' ipotesi, le ragioni AC : EI, ed AB : EF sono uguali, essendo AC : EI :: AB : EF; perciò la ragione del triangolo ABC al triangolo EFI è composta da due ragioni uguali AC : EI, ed AB : EF; adunque (cor. 1. def. 7. lib. 1.) è duplicata di ciascuna di esse, cioè (cor. 2. def. 7. lib. 1.) sarà $\Delta ABC : \Delta EFI :: \overline{AC}^2 : \overline{EI}^2$, o $:: \overline{AB}^2 : \overline{EF}^2$, ed anche $:: \overline{BC}^2 : \overline{FI}^2$ (propos. 14. lib. 1.); perchè, d' ipotesi, sono

AB : EF :: BC : FI :: AC : EI. Adunque i triangoli simili sono fra loro in ragione quadrata de' lati omologi. Il che ec.

È la prop. 19. del lib. 6. d' Euclide.

Corollario i. Se alle due rette AC, EI (prop. 5.) si troverà la terza proporzionale M; allora la prima AC starà alla terza M, come il triangolo ABC descritto sopra la prima AC al triangolo simile EFI, e similmente descritto sopra la seconda EI Imperciocchè essendo, di costruzione, ∺ AC : EI : M, perciò (cor. 4. prop. 2. lib. 1.) sarà $AC : M :: \overline{AC}^2 : \overline{EI}^2$; e per l' antecedente dimostrazione, avendo

$\Delta ABC : \Delta EFI :: \overline{AC}^2 : \overline{EI}^2$, però (ass. 1.) sarà AC : M :: ΔABC : ΔEFI.

Corollario ii. Perchè si è dimostrato essere

$\Delta ABC : \Delta EFI :: \overline{AC}^2 : \overline{EI}^2$, perciò se il lato AC sarà doppio del lato omologo EI, il triangolo ABC sarà quadruplo del triangolo EFI; se il lato AC sarà dieci volte il lato EI, il triangolo ABC conterrà cento volte il triangolo EFI; e così discorrendo.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA TAV. IV. FIG. 11.

I parallelogrammi equiangoli (R, ed S) sono fra loro in ragione composta dalle ragioni (AB : BE, e BC : BG) de' lati, che contengono gli angoli eguali; (cioè sarà R : S :: AB×BC : BE×BG).

Costruzione. I lati AB, BE si mettano per diritto fra loro, ma in guisa, che gli angoli uguali ABC, GBE sieno opposti alla cima, ed allora (cor. prop. 17. lib. 2.) i lati CB, CG staranno anche per diritto fra loro. Indi si prolunghino i lati DC, FE finattantochè concorrano in qualche punto L.

Dimostrazione. I tre parallelogrammi R, X, ed S (aritmet. 26.) sono quantità omogenee; perciò (prop. 17. lib. 1.) la ragione del primo R al terzo S sarà composta dalle intermedie ragioni del primo R al secondo X, e del secondo X al terzo S. Ma (parte 1. prop. 1.) abbiamo $\square$R : $\square$X :: AB : BE, e $\square$X : $\square$S :: BC : BG, e però la ragione del parallelogrammo R al parallelogrammo S è composta dalle due ragioni AB : BE, e BC : BG. Adunque (cor. 3. def. 6. lib. 1.) sarà $\square$R : $\square$S :: AB×BC : BE×BG. Il che ec.

È la prop. 23. del lib. 6. d' Euclide.

Corollario I. Se dunque sarà $\square$R $=$ $\square$S, e l' angolo ABC $=$ GBE, si avrà ancora AB×BC $=$ BE×BG, e dissolvendo (cor 1. prop. 2. lib. 1.) sarà AB : BE :: BG : BC; che però i *parallelogrammi uguali, ed equiangoli hanno i lati reciprocamente proporzionali*, cioè *sono figure reciproche*.

Che se i parallelogrammi equiangoli avranno i lati reciprocamente proporzionali AB : BE :: BG : BC, allora (prop. 1. lib. 1.) si avrà AB×BC $=$ BE×BG, ed in conseguenza sarà parimente il $\square$R $=$ $\square$S, perchè

si è dimostrato essere il $\square$R : $\square$S :: AB×BC : BE×BG; perciò *i parallelogrammi equiangoli, che hanno i lati reciprocamente proporzionali, sono uguali fra loro.*

È la prop. 14. del lib. 6. d' Euclide.

Corollario II. Medesimamente i triangoli equiangoli (ABC, GBE) se saranno fra loro uguali, avranno i lati reciprocamente proporzionali; e scambievolmente, essendo equiangoli se avranno i lati reciprocamente proporzionali, saranno uguali fra loro.

Perciocchè i triangoli (cor. 1. prop. 16. lib. 1.) stanno tra di loro nella ragione medesima, nella quale sono i parallelogrammi, che sono doppi di essi triangoli (prop. 28. lib. 2.)

È la prop. 15. del lib. 6. d' Euclide.

PROPOSIZIONE XV.

TEOR. TAV. IV. FIG. 12.

I poligoni simili (ABMRC, EFILG) sono fra loro in ragione duplicata, cioè come i quadrati de' lati omologi.

Si ha dunque da dimostrare, che il poligono ABMRC sta al poligono EFILG :: $\overline{AC}^2 : \overline{EG}^2$, o sia :: $\overline{CR}^2 : \overline{GL}^2$, ec.

Dagli uguali angoli M, ed I agli angoli opposti tirinsi le diagonali MA, MC, IE, IG, che divideranno i poligoni in triangoli simili, e uguali di numero.

Dimostrazione. Perchè i poligoni sono, d' ipotesi, simili, perciò (def. 1.) è l' angolo B $=$ F, ed i lati proporzionali AB : BM :: EF : FI; laonde (prop. 9.) i triangoli ABM, EFI saranno simili. Nella stessa maniera si dimostrano simili triangoli MCR, ILG. Inoltre dagli angoli, d' ipotesi, uguali CAB, GEF levando parti uguali, cioè gli angoli BAM, IEF, dimostrati uguali, rimarrà l' angolo CAM (ass. 3.)

uguale all'angolo IEG; ma abbiamo, d'ipotesi, BA : FE :: AC : EG, e di dimostrazione, BA : FE :: AM : EI; onde (ass. 1.) sarà AM : EI :: AC : EG, e per dimostrazione, è l'angolo CAM=IEG; perciò (prop. 9.) anche i triangoli AMC, EIG saranno simili tra di loro. Ma i triangoli simili (propos. 13.) sono fra loro come i quadrati de' lati omologi, sarà dunque

$\triangle ABM : \triangle IEF :: \overline{AB}^2 : \overline{FE}^2$, e

$\triangle AMC : \triangle IEG :: \overline{AC}^2 : \overline{EG}^2$, e

$\triangle MCR : \triangle IGL :: \overline{CR}^2 : \overline{GL}^2$. Inoltre, d'ipotesi, abbiamo AB : EF :: AC : EG :: CR : GL, ec. onde (prop. 14. lib. 1.) sarà $\overline{AB}^2 : \overline{EF}^2 :: \overline{AC}^2 : \overline{EG}^2 :: \overline{CR}^2 : \overline{GL}^2$ ec. Adunque (ass. 1.) sarà $\triangle ABM : \triangle IEF :: \triangle AMC : \triangle IEG :: \triangle MCR : \triangle IGL$, e raccogliendo (prop. 9. lib. 1.) sarà $\triangle ABM + \triangle AMC + \triangle MCR : \triangle IEF + \triangle IEG + \triangle IGL$. $:: \triangle ABM : \triangle IEF$; cioè il poligono ABMRC al poligono IFEGL come il triangolo ABM al triangolo IEF. Ma (prop. 13.) abbiamo

$\triangle ABM : \triangle IEF :: \overline{AB}^2 : \overline{EF}^2$, e però (ass. 1.) sarà il poligono ABMRC al poligono

IFEGL $:: \overline{AB}^2 : \overline{EF}^2$, o $:: \overline{AC}^2 : \overline{EG}^2$, ec.

essendosi dimostrato $\overline{AB}^2 : \overline{EF}^2 :: \overline{AC}^2 : \overline{EG}^2$ ec. Dunque i poligoni simili sono fra loro in ragione duplicata, o sia come i quadrati de' lati omologi. Il che ec.

È la prop. 20. del lib. 6. d'Euclide.

Corollario. Se dunque saranno tre linee rette continuamente proporzionali $\div$ AC : EG : Z, allora il poligono descritto sopra la prima AC starà al poligono simile, e similmente descritto sopra la seconda EG (ass. 1.) come la prima AC alla terza Z; perchè

(cor. 4. prop. 2. lib. 1.) abbiamo anche AC : Z :: $\overline{AC}^2 : \overline{EG}^2$.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOR. TAV. IV. FIG. 13.

Se saranno quattro linee rette proporzionali (AB : CD :: EF : GH), anche i poligoni simili, e similmente descritti da esse linee, saranno proporzionali (cioè M : N :: R : S).

Vicendevolmente se saranno proporzionali i poligoni (M : N :: R : S) simili, e similmente descritti sopra quattro rette linee (AB, CD, EF, GH), esse linee saranno ancora proporzionali (AB : CD :: EF : GH).

Dimostrazione della prima parte. Abbiamo d'ipotesi AB : CD :: EF : GH, onde (prop. 14. lib. 1.) sarà eziandio $\overline{AB}^2 : \overline{CD}^2 :: \overline{EF}^2 : \overline{GH}^2$; ma (per la propos. antec.) i poligoni simili sono fra loro come i quadrati de' lati omologi, cioè M : N :: $\overline{AB}^2 : \overline{CD}^2$, ed R : S :: $\overline{EF}^2 : \overline{GH}^2$; dunque (ass. 1.) sarà M : N :: R : S. Il che ec.

Dimostrazione della seconda parte. Perchè, d'ipotesi, abbiamo M : N :: R : S, e (prop. antec.) si ha M : N :: $\overline{AB}^2 : \overline{CD}^2$, ed R : S :: $\overline{EF}^2 : \overline{GH}^2$; però (ass. 1.) sarà $\overline{AB}^2 : \overline{CD}^2 :: \overline{EF}^2 : \overline{GH}^2$; laonde (prop. 14. lib. 1.) avremo AB : CD :: EF : GH.

Il che ec. È la prop. 22. del lib. 6. d'Euclide.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA TAV. IV. FIG. 14.

In ogni triangolo rettangolo (ABC) se dall'angolo retto (in B) sopra l'ipotenusa (AC) si tirerà una perpendicolare (BL), questa dividerà tutto il triangolo in due triangoli (ABL, BLC) simili al tutto (ABC), e simili fra loro.

Dimostrazione. I due triangoli ABC, ABL hanno l'angolo A comune, e l'angolo retto ABC (ass. 16.) uguale all'angolo retto ALB; onde (cor. 7. propos. 24. lib. 2.) sarà il rimanente angolo C uguale al rimanente angolo ABL; perciò (prop. 7.) i triangoli ABC, ABL sono simili. Dunque starà l'ipotenusa AC all'ipotenusa AB, come lo stesso lato AB sottoposto all'angolo C nel triangolo ABC, al lato AL sottoposto all'ugual angolo ABL; cioè sarà ∺ AC : AB : AL. Col medesimo raziocinio il triangolo BC si dimostra simile al triangolo BLC. Perciocchè hanno l'angolo C comune, e l'angolo retto ABC=BLC, onde sarà il rimanente angolo A=CBL; laonde (prop. 7.) sarà AC : CB : : CB : CL, cioè ∺ AC : CB : CL.

Conseguentemente (cor. def. 1.) saranno ancora simili fra loro i triangoli ABL, BLC; essendosi dimostrato l'angolo A=CBL, l'angolo ALB=BLC, e l'angolo LBA=C; e però sarà AL : LB : : LB : LC, cioè ∺ AL : LB : LC. Il che ec.

È la prop. 8. del lib. 6. d'Euclide.

Corollario I. Adunque ciascun cateto, AB, o BC, è medio proporzionale tra l'ipotenusa AC, ed il suo segmento AL, o LC, frapposto tra il medesimo cateto, e la perpendicolare tirata dall'angolo retto all'ipotenusa. Perciocchè si è dimostrato essere ∺ AC : AB : AL, e ∺ AC : CB : CL. Quindi (cor. prop. 1. lib. 1.) si avrà $AC\times AL=\overline{AB}^2$, ed $AC\times CL=\overline{CB}^2$, e dividendo queste due equazioni per AC (ass. 5.) sarà $AL=\frac{\overline{AB}^2}{AC}$, e $CL=\frac{\overline{CB}^2}{AC}$, vale a dire se il quadrato di qualsivoglia cateto si dividerà per l'ipotenusa, il quoziente esprimerà la lunghezza

del segmento, o sia porzione dell'ipotenusa frapposto tra l'istesso cateto, e la suddetta perpendicolare tirata sopra l'ipotenusa.

Corollario II. Inoltre si è dimostrato essere ∺ AL : LB : LC, cioè, che la perpendicolare BL tirata dall'angolo retto su l'ipotenusa è media proporzionale tra i segmenti AL, LC della stessa ipotenusa; onde (cor. prop. 1. lib. 1.) sarà $AL\times LC=LB^2$.

Corollario III. Perchè la media proporzionale (LB) tra due rette (AL, LC) è determinata, e non si può accrescere, nè sminuire; perciò se in qualche triangolo (ABC) la linea perpendicolare tirata da un angolo (ABC) al lato opposto (AC) sarà media proporzionale tra i segmenti, o parti (AL, LC) di esso lato (AC), allora l'angolo (ABC), dal quale si è tirata la perpendicolare, necessariamente sarà retto.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA TAV. IV. FIG. 15.

Se sopra l'ipotenusa (AC) d'un triangolo rettangolo (ABC) si descriverà qualsivoglia figura rettilinea (M), e sopra i cateti (AB, BC) si descriveranno due figure (S, T) simili alla figura medesima (M), e similmente poste; sarà sempre la figura (M) descritta sopra l'ipotenusa uguale alle due figure descritte sopra i cateti presi insieme.

Dall'angolo retto B all'ipotenusa AC (prop. 14. lib. 2.) si tiri la perpendicolare BL.

Dimostrazione. Perchè dall'antecedente proposizione abbiamo ∺ AC : AB : AL, perciò (cor. prop. 15.) sarà il rettilineo M descritto sopra la prima AC al rettilineo simile S, e similmente descritto sopra la seconda AB, come la prima linea AC alla terza AL; cioè sarà M : S : : AC : AL. Similmente, perchè (prop. ant.) abbiamo ∺ AC : CB : CL; però (cor. prop. 15.)

sarà M : T :: AC : CL ; laonde le due proporzioni M : S :: AC : AL, ed M : T :: AC : CL hanno gli stessi antecedenti M, ed AC, conseguentemente (cor. prop. 12. lib. 2.) sarà M : S+T :: AC : AL+CL ; ma (ass. 11.) AC è uguale ad AL+CL ; dunque sarà ancora M=S+T. Il che ec.

È la propos. 31. del lib. 6. d' Euclide.

Corollario I. (Tav. IV. Fig. 16.) Perchè tutti i quadrati sono (def. 1.) figure rettilinee simili ; perciò in ogni triangolo rettangolo (ABC) il quadrato (AF) dell' ipotenusa (AC) è uguale ai due quadrati (AR, BI) de' due cateti (AB, BC), abbiamo cioè $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$, conseguentemente per antitesi (aritm. 106.) sarà $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$, cioè il quadrato di qualsivoglia cateto è uguale alla differenza tra 'l quadrato dell' ipotenusa, e il quadrato dell' altro cateto.

È la prop. 47. del lib. 1. d' Euclide.

Corollario II. (Tav. IV. Fig. 17.) Se un triangolo rettangolo ACD sarà isoscele, allora il quadrato dell' ipotenusa CD sarà doppio del quadrato di ciascun cateto AC, o AD. Perciocchè dal corollario antecedente abbiamo $\overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2$; ma i quadrati delle linee uguali AD, AC (aritm. 179.) sono uguali fra loro ; e però il quadrato dell' ipotenusa CD sarà doppio, tanto del quadrato di AC, quanto del quadrato di AD. Sarà dunque il quadrato dell' ipotenusa CD al quadrato di uno dei cateti, AD, come il due all' uno ; cioè $\overline{CD}^2 : \overline{AD}^2 :: 2 : 1$.

Corollario III. (Tav. IV. Fig. 18.) Dall' antecedente corollario ne segue, che il diametro (AC) d' un quadrato è incommensurabile al lato (AB) di esso quadrato. Perciocchè nel triangolo rettangolo isoscele ABC abbiamo $\overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 :: 2 : 1$, ed estraendo

la radice quadrata da ciascun termine della proporzione (prop. 14. lib. 1.) si avrà $AC : AB :: \sqrt{2} : 1$; Ma $\sqrt{2}$ (aritm. nn. 151. 153.) è un numero irrazionale ; perciò il diametro AC sta al lato AB, come un numero irrazionale all' unità, conseguentemente il diametro AC non è commensurabile col lato AB, poichè (aritm. 151. 152.) le quantità commensurabili sono tra loro, o come un numero razionale all' unità, o come un numero razionale ad un altro numero razionale. Dunque non mai si potrà trovare una linea quantunque minimissima, che replicata intere volte possa misurare esattamente il diametro, ed insieme il lato d' un quadrato.

È la prop. 117. del lib. 10. d' Euclide.

PROPOSIZIONE XIX.

PROBLEMA TAV. IV. FIG. 19.

Trovare una linea retta, il cui quadrato sia uguale ai quadrati di molte linee rette date A, B, C.

Tirisi nel piano una retta EF=A, ed alla retta EF (prop. 13. lib. 2.) si innalzi la perpendicolare EG=B, e si tiri l' ipotenusa EG, il cui quadrato (cor. 1. prop. antec.) sarà uguale ai due quadrati de' cateti EF, FG ; cioè ai quadrati delle linee A, B, che sono uguali ai cateti. Parimente alla retta EG s' innalzi la perpendicolare GL=C, e tirisi l' ipotenusa EL, il cui quadrato è uguale ai due quadrati de' due cateti EG, GL, o sia ai quadrati di EG, e di C, che è uguale a GL. Ma il quadrato di EG si è dimostrato uguale ai due quadrati di A, e di B. Adunque il quadrato della retta LE è uguale ai tre quadrati delle tre linee date A, B, C ; e così proseguendo, se saranno di più le linee date, sempre si troverà la ricercata linea. Il che ec.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA TAV. IV. FIG. 20.

Se una retta linea (BL) taglierà per mezzo qualsivoglia angolo (ABC) d' un triangolo (ABC); essa retta prolungata segherà il lato (AC) sottoposto ad esso angolo in parti (AL, LC) proporzionali ai rimanenti lati (AB, BC) del medesimo triangolo.

Ma se un lato (AC) di un triangolo sarà segato (in L) in parti (AL, LC) proporzionali ai rimanenti lati (AB, BC) del dato triangolo, allora la retta linea (BL) tirata dall' angolo opposto (ABC) al punto (L) della divisione del lato (AC) segherà esso angolo per mezzo.

Si prolunghi AB verso R (prop. 3. lib. 2.) facciasi BR=BC; e tirisi la retta CR.

Dimostrazione della prima parte. Abbiamo di costruzione BR=BC; perciò (prop. 25. lib. 2.) sarà l' angolo $s=m$; ma l' angolo CBA esteriore del triangolo CRB (parte 2. prop. 24. lib. 2.) è uguale ai medesimi angoli s, ed m insieme presi; e però sarà doppio di ciascuno di essi, come di m, e lo stesso angolo ABC è d' ipotesi doppio dell' angolo z; dunque (ass. 9.) sarà l' angolo $m=z$ suo alterno; laonde (parte 1. prop. 19. lib. 2.) la retta BL sarà parallela al lato CR nel triangolo ARC, onde (prop. 2.) si avrà AL : LC : : AB : BR, e sostituendo BC in luogo dell' uguale BR, sarà AL : LC : : AB : BC. Il che ec.

Dimostrazione della seconda parte. Prolungata AB sino ad R in guisa che sia BR=BC, e tirata RC, come nell' antecedente costruzione; perchè d' ipotesi abbiamo AL : LC : : AB : BC, sostituendo BR in luogo dell' uguale BC, si avrà AL : LC : : AB : BR; onde (parte 2. prop. 2.) sarà BL parallela al lato

CR, e (prop. 21. lib. 2.) sarà l' angolo $m=z$ suo alterno, e l' angolo interiore $s=x$ esteriore, ed opposto dalle medesime parti. Ma (propos. 25. lib. 2.) abbiamo l' angolo $m=s$; perciò (ass. 1.) sarà ancora l' angolo $x=z$; vale a dire la retta BL divide per mezzo l' angolo ABC sotteso dal lato AC. Il che ec. È la prop. 3. del lib. 6. d' Euclide.

ELEMENTI

DELLA GEOMETRIA

LIBRO QUARTO

DEFINIZIONE I.

Circoli concentrici diconsi quelli, che hanno il centro comune. Come i cerchi AL, BS (Tav. IV. Fig. 21.) che hanno lo stesso centro C.

Circoli eccentrici sono quelli, che hanno centri diversi, quali sono i cerchi BA, CA (Tav. IV. Fig. 22.) che hanno i centri diversi E, D.

I circoli si dicono *segarsi tra di loro*, quando le loro circonferenze si segano fra loro: come (Tav. IV, Fig. 23.) i due circoli MRS, ZRS.

I circoli si dicono *toccarsi l' un l' altro*, quando le loro periferie si toccano, ma non si segano, come (Tav. IV. Fig. 22.) i circoli BA, CA, che si toccano interiormente in A: oppure i due cerchi AB, RB, che si toccano esteriormente in B.

DEFINIZIONE II.

TAV. IV. FIG. 24.

Tangente del circolo dicesi ogni linea retta, che tocca in un solo punto la periferia del circolo, e prolungata da ambedue le parti non la sega. Come la retta EB, che tocca il cerchio AFC nel solo punto L.

Angolo del contatto chiamasi l' angolo mistilineo (ELA, o BLC) formato dalla tangente, e dalla circonferenza del cerchio.

DEFINIZIONE III.

Cerchi uguali diconsi quelli, che hanno i diametri, o raggi uguali, e sopraapposti l' uno all' altro si adattano bene insieme.

DEFINIZIONE IV.

TAV. IV. FIG. 25.

Un angolo rettilineo (ABC) dicesi *inscritto*, o *contenuto nel segmento* (ABC) *del cerchio* (AECB), quando è formato da linee rette (AB, CB) tirate dagli estremi (A, e C) del medesimo segmento a qualsivoglia punto (B) della periferia dello stesso segmento.

Inoltre il medesimo *angolo* ABC si dice *insistere*, o *appoggiarsi sopra l' arco opposto* AEC.

Similmente l' angolo BCA dicesi inscritto nel segmento BCEA, ed insistere sopra l' arco AB.

Angolo del segmento si noma l' angolo contenuto dalla tangente, e dalla corda tirata dal punto del contatto, e che sottende l' arco di esso segmento. Così

se (Tav. IV. Fig. 26.) la retta AR toccherà il cerchio BMCS nel punto C, e da esso punto C del contatto sarà tirata la corda CB; allora ACB sarà l' angolo del segmento minore BSC, e BCR sarà l' angolo del segmento maggiore BMC.

DEFINIZIONE V.

TAV. IV. FIG. 27.

Dato un angolo rettilineo (EAB) se, fatto centro il vertice (A) di esso, con qualsivoglia intervallo (AB), si descriverà un cerchio (BCFE); allora l' arco ELB, frapposto tra i lati (AB, AE) di esso angolo si chiami *la misura di esso angolo*. Imperciocchè quanto è maggiore l' angolo EAB, altrettanto sarà più grande l' arco opposto ELB; e diminuendosi l' angolo, si diminuisce ancora l' arco opposto. Parimente l'arco FE è la misura dell' angolo EAF: e l' arco EFC è la misura dell' angolo EAC, e così degli altri.

Corollario I. Per la qual cosa se l' angolo EAF sarà uguale all' angolo FAC, anche l' arco EF sarà uguale all' arco FC. Vicendevolmente se i due archi FE, FC saranno fra loro uguali; anche gli angoli EAF, FAC saranno tra di loro uguali.

Corollario II. Adunque gli angoli uguali hanno le lor misure uguali; e scambievolmente gli archi uguali misurano angoli uguali.

DEFINIZIONE VI.

TAV. IV. FIG. 28.

La circonferenza di qualunque circolo (ABEL) si divide in 360. parti, o archi uguali, che chiamansi *gradi del cerchio*. Ciascun grado si divide in altre 60.

parti uguali, che diconsi *minuti primi del circolo*. Ciascun minuto primo si suddivide in altre 60. parti uguali, che si nomano *minuti secondi del cerchio*; e così proseguendo ciascun minuto secondo si suddivide in 60. *minuti terzi*, ogni minuto terzo in 60. *minuti quarti* ec. Perlaqualcosa il semicircolo ABE, o ALE contiene 180. gradi, e la quarta parte EB, o AB dell' intera circonferenza contiene 90. gradi.

Conseguentemente l' intero cerchio contiene 360×60, cioè 21600. minuti primi; e 21600×60, cioè 1296000 minuti secondi.

DEFINIZIONE VII.

Se dal centro C al diametro AE s' innalzerà la perpendicolare CB, sarà l' arco AB uguale all' arco BFE, come chiaramente ne segue dalla definizione 15. del lib. 2.; e perchè la linea BC (def. 9. lib. 2.) non s' inclina più verso A, che verso E; perciò *la misura dell' angolo retto*) ACB) *è l' arco opposto* (AB) *di 90. gradi*. Medesimamente l' arco BFE di 90. gradi è la misura dell' angolo retto BCE, e così degli altri.

Ma *la misura dell' angolo ottuso* (ACF) è l'arco opposto (ABF) maggiore dell' arco (BA) di 90. gradi. *La misura di un angolo acuto* (FCE) è l' arco opposto (FE) minore dell' arco (BFE) di 90. gradi.

Corollario. Adunque la semicirconferenza (ABE) di gradi 180. è la misura di due angoli retti (ACB, BCE); e l' intera periferia di 360. gradi è la misura di quattro angoli retti.

DEFINIZIONE VIII.

TAV. IV. FIG. 29.

Il *settore del cerchio* è una figura mistilinea (CAB) terminata da due raggi (CA, CB), e dall' arco interposto (AB).

Quando l' angolo (ACB) contenuto dai raggi è retto, allora l' arco frapposto (BA) è la quarta parte della circonferenza, ed il settore (CAB) si chiama *quadrante del circolo*, perchè è la quarta parte dell' intero cerchio.

DEFINIZIONE IX.

TAV. IV. FIG. 28.

Complemento d' un angolo, o d' un arco dato si è quell' angolo, o arco, che aggiunto al dato, forma un angolo retto, o un arco di 90. gradi.

Così l' angolo BCF è complemento dell' angolo FCE; scambievolmente dato l' angolo BCF, il suo complemento sarà l' angolo FCE. Medesimamente dato l' arco BF, sarà suo complemento l' arco FE; e dato l' arco FE, sarà l' arco BF suo complemento.

Supplemento di un dato angolo, o arco, è un altro angolo, o arco, che col dato fa la somma di due angoli retti, o un arco di 180. gradi, cioè la semicirconferenza. Come il supplemento dell' angolo FCE è il suo conseguente FCA. Vicendevolmente l' angolo FCE è supplemento dell' angolo FCA. Similmente l' arco ABF è il supplemento dell' arco EF, e scambievolmente l' arco FE è supplemento dell' arco ABF.

Corollario. Adunque i complementi di due angoli, o di due archi uguali, sono uguali fra loro. Parimente sono uguali fra loro i supplementi di due angoli, o di due archi uguali.

DEFINIZIONE X.

TAV. IV. FIG. 30.

1. Dato qualsivoglia angolo acuto (TCV), se fatto centro il suo vertice (C), con qualsivoglia raggio (CR) si descriverà un arco (RV), o un circolo (AEMVR), e dall' estremo punto (R) d' un raggio, o lato (CR) si tirerà una retta (RS) perpendicolare all' altro raggio (CV), essa perpendicolare si chiami *seno retto* del dato angolo (RCV) o sia dell' arco (RV), che è la misura del medesimo angolo.

2. Ma se al punto estremo (V) del raggio (CV) s' innalzerà una perpendicolare (VT), che incontri in qualche punto (T) l' altro raggio (CR) prolungato, quella perpendicolare (VT) si dirà *tangente dell' angolo dato* (RCV), o dell' arco (RV) dato.

3. Il raggio prolungato, o sia la retta (CT) terminata dal centro, e dalla tangente, dicesi *segante dell' angolo, o arco dato.*

4. La porzione (SV) del raggio (CV) frapposta tra 'l seno retto (RS), e l' arco dato (RV), si chiama *seno verso*, o *saetta* del medesimo angolo (RCV), o dell' arco (RV) dato.

5. Il seno retto (RS), la tangente (TV), e la segante (CT) del dato angolo acuto (RCV) sono ancora seno retto, tangente, e segante dell' angolo (ECR), o arco (EAR), del supplemento.

Ma il *seno verso del supplemento* (ECR, o EAR) è la porzione (SE) del diametro (EV) terminata dal seno retto, e dall' arco (EAR) del supplemento.

6. Tirando il raggio CA perpendicolare al raggio CV, e le rette RF, AB perpendicolari allo stesso raggio CA; allora (def. antec.) l' angolo ACR, o l' arco AR sarà il complemento del dato angolo RCV,

o arco RV; e saranno RF *seno retto del complemento*, o *seno retto secondo*; AB *tangente del complemento*, *tangente seconda*; CB *segante del complemento*, o *segante seconda*; ed AF *seno verso del complemento*, o *seno verso secondo.*

Ma per maggior brevità il seno retto, la tangente, la segante, ed il seno verso del complemento ACR chiamasi *cosseno retto*, *cosegante*, *cotangente*, e *cosseno verso dell' angolo dato* (RCV), o *dell' arco dato* (RV).

Corollario I. Adunque quanto sarà maggiore il dato angolo acuto (RCV), altrettanto sarà maggiore il seno retto (RS), e scambievolmente diminuendosi l' angolo acuto, si diminuirà ancora il seno retto, come chiaramente si vede. La stessa cosa s' intenda del seno verso, della tangente, e della segante. Inoltre quanto minore sarà il dato angolo acuto (RCV) altrettanto più piccola sarà la differenza tra 'l seno retto (RS), e la tangente (TV).

Corollario II. Perlaqualcosa il seno retto (AC) dell' angolo retto (ACV) è il massimo di tutti i seni retti, essendo lo stesso raggio, che è la massima di tutte le perpendicolari, che si possano tirare sopra il diametro dai punti della circonferenza; e per questa ragione il seno retto dell' angolo retto, cioè il raggio del circolo si chiama *seno totale.*

La tangente poi *dell' angolo retto è infinita*, perchè parallela all' altro lato. Come dell' angolo retto ACV il lato AC, e la tangente VT, benchè si prolunghino infinitamente, non mai s' incontreranno (prop. 18. lib. 2.), perchè sono perpendicolari alla stessa retta CV; perciò sono parallele; laonde la tangente dell' angolo retto ACV sarà la VT prolungata all' infinito; conseguentemente anche *la segante dell' angolo retto sarà infinita*, cioè il lato CA prolungato infinitamente.

1. Corollario III. Essendo le rette AC, RS, VT parallele fra loro (prop. 18. lib. 2.); siccome ancora

sono parallele tra di loro le rette AB, ER, CV; perciò (prop. 27. lib. 2.) nel parallelogrammo ES sarà FC uguale al seno retto RS, e CS uguale al coseno retto RF; che però *se dal raggio* CA *si sottrae il seno retto* RS=FC, *rimarrà* FA *coseno verso*. Ma se dal raggio CV si toglierà il coseno retto FR=CS, il residuo sarà SV seno verso.

2. Inoltre perchè (propos. 21. lib. 2.) gli angoli alterni sono uguali ABC=BCV, ed ACB=CTV, perciò i triangoli ABC, CTV saranno simili, e (prop. 7. lib. 3.) si avrà TV : VC :: CA : AB, cioè sarà proporzione continua *la tangente* TV *al raggio* CV, o sia CA, *alla cotangente* AB. Vale a dire il raggio del cerchio è medio proporzionale tra la tangente, e la cotangente di qualsivoglia angolo acuto.

3. Oltrecciò (cor. propos. 7. lib. 3.) abbiamo CS : SR :: CV : VT; *cioè il coseno retto* FR=CS *sta al seno retto* RS, *come il raggio* CV *alla tangente* VT; e CF : FR :: CA : AB, vale a dire *il seno retto* RS=CF *sta al coseno retto* FR, *come il raggio* CA *alla cotangente* AB.

4. Medesimamente (prop. 2. lib, 3.) sarà CS : SV :: CR : RT, cioè *il coseno retto al seno verso sta come il raggio all'eccesso della segante sopra il raggio*, ed inoltre sarà CF : FA :: CR : RB, cioè *il seno retto al coseno verso sta come il raggio all'eccesso della cosegante sopra lo stesso raggio*.

5. Finalmente perchè l'angolo FCR (propos. 21. lib. 2.) è uguale al suo alterno CRS, ed FR, o l'uguale linea CS, è seno retto dell'angolo RCF; perciò la linea CS sarà eziandio il seno retto dell' uguale angolo CRS.

Corollario IV. Adunque dato qualunque triangolo rettangolo (CRS), se l'ipotenusa (CR) si prende per raggio, o sia per seno totale, allora i cateti saranno seni retti degli angoli opposti; sarà perciò il cateto RS seno retto dell'angolo RCS, ed il cateto CS sarà seno retto dell'angolo CRS.

Corollario v. Che se in un dato triangolo rettangolo (CTV) si prenderà un cateto (CV) per raggio, o seno totale, allora l'altro cateto (TV) sarà la tangente dell'opposto angolo acuto (VCT), e l'ipotenusa (CT) sarà la segante del medesimo angolo.

Annotazione. I seni, i coseni, le tangenti ec. sono linee, delle quali si servono i Geometri per ritrovare gli angoli, ed i lati de' triangoli; quando cioè di qualsivoglia triangolo rettilineo sono dati o i tre lati, o due lati, ed un angolo, o due angoli, ed un lato, allora per mezzo de' seni, o delle tangenti, o delle seganti si trovano le rimanenti cose del medesimo triangolo. A questo fine molti Geometri rinomatissimi, supponendo il raggio diviso in 100,000 parti uguali, o in 10 000,000, o pure in 10,000 000,000, ec. di parti uguali, costrussero canoni, o tavole numeriche, nelle quali ritrovansi i seni, le tangenti, le seganti, i coseni, le cotangenti, e le coseganti di ciascun angolo, o arco del quadrante, incominciando dall'angolo, o sia dall' arco d' un minuto primo, e proseguendo sino all'angolo retto, o sia fino all'arco di 90. gradi. Coteste tavole chiamansi *tavole de' seni tangenti, e seganti*, ed in esse comunemente il raggio, o seno totale è diviso in 10 000,000 di parti uguali. Alle suddette tavole altri chiarissimi Geometri hanno aggiunte le tavole de' logaritmi de' numeri naturali (def. 13. lib. 1.) e de' logaritmi de' seni, e delle tangenti di ciascun angolo, o arco del quadrante; ed in queste tavole il seno totale, o raggio si suppone di 100 000,000 di parti uguali, e tutte le suddette tavole servono mirabilmente per abbreviare, e rendere più facili i calcoli trigonometrici.

PROPOSIZIONE I.

TEOR. TAV. IV. FIG. 31.

I circoli concentrici (BCFG, ILER) hanno le circonferenze parallele, o equidistanti.

Dimostrazione. Dal comune centro A si tirino quanti si vogliano raggi AB, AC, AF, AG, ec. del cerchio maggiore, i quali (def. 15. lib. 2.) saranno tutti uguali fra loro; e da essi levando le parti uguali AL, AI, AR, AE ec. raggi del cerchio minore, le rimanenti parti LB, IC, RF, EG ec. (ass. 3.) saranno tutte uguali fra loro, il che si verifica di tutti i raggi. Dunque le periferie BCFG, IRFL sono equidistanti, o sia parallele. Il che ec.

Corollario I. Adunque i cerchi, le cui periferie si segano, non sono concentrici, non potendo avere le periferie parallele.

È la prop. 5. del lib. 3. d' Euclide.

Corollario II. Per la medesima ragione i cerchi, le cui circonferenze si toccano, non possono essere concentrici.

È la prop. 6. del lib. 3. d' Euclide.

PROPOSIZIONE II.

TEOR. TAV. IV. FIG. 32.

Nel cerchio qualsivoglia retta linea (CE) tirata dal centro (C) alla metà (E) di qualunque corda (BR) è perpendicolare alla stessa corda.

Scambievolmente se dal centro (C) sopra qualsisia corda (BR) si tirerà una linea perpendicolare (CE), questa segherà per mezzo la corda (BR).

Dimostrazione della prima parte. Tirati i raggi CB, CR, nel triangolo isoscele CBR (cor. 1.

prop. 25. lib. 2.) la retta CE tirata dal vertice C al punto di mezzo E della base BR, è perpendicolare alla medesima base. Il che ec.

Dimostrazione della seconda parte. Tirati parimente i raggi CB, CR, perchè nel triangolo isoscele CBR, la retta CE è tirata perpendicolarmente dal vertice C sopra la base BR, perciò (cor. 2. propos. 25. lib. 2.) dividerà la base per mezzo. Il che ec. È la prop. 3. del lib. 3. d' Euclide.

Corollario I. (Tav. IV. Fig. 33.) Perchè dal mezzo C della corda AB una sola linea si può tirare, che sia perpendicolare alla stessa corda (cor. def. 9. lib. 2.), e la linea tirata dal centro al mezzo della corda si è dimostrata perpendicolare alla medesima corda, però se in un cerchio (AFBE) dal mezzo (C) di qualsivoglia corda (BA) s' innalzerà una linea (CF) perpendicolare alla stessa corda, essa perpendicolare passerà pel centro del cerchio, e prolungata da amendue le parti sino alla periferia, sarà (FE) diametro dello stesso cerchio.

Corollario II. (Tav. IV. Fig. 34.) Nel triangolo isoscele BCR, la perpendicolare CE (cor. 2. prop. 25. lib. 2.) divide anche per mezzo l' angolo verticale BCR; però se la stessa perpendicolare CE si prolungherà sino alla periferia in F, allora la retta CF dividerà per mezzo l' arco BFR sotteso dalla corda BR, cioè sarà l' arco BF uguale all' arco FR (cor. 1. def. 5.) perchè l' angolo BCF è uguale all'angolo FCR.

Medesimamente se la retta EC si prolungherà sino alla periferia in A (cor. 1. def. 5.) sarà l' arco BA uguale all' arco AR; perchè l' angolo BCA è uguale all' angolo ACR (cor. def. 9.), essendo supplementi degli angoli uguali BCF, RCF.

Inoltre se dal centro C al punto di mezzo F dell' arco BFA si tirerà il raggio CF, esso dividerà per mezzo l' angolo BCR, e però esso raggio CF sarà perpendicolare alla corda BR, e la segherà per mezzo in E.

Corollario III. Adunque *il seno retto* (BE) *di un angolo* (BCF), *o d' un arco* (BF) *è sempre la metà della corda* (BR) *che sottende un arco* (BFR) *doppio del dato arco* (BF).

PROPOSIZIONE III.

PROBL. TAV. IV. FIG. 33.

Trovare il centro d' un dato cerchio (AFBE). Nel dato cerchio si tiri a piacere una corda AB, la quale (propos. 12. lib. 2.) si divida per mezzo nel punto C, da cui (propos. 13. lib. 2.) s' innalzi sopra essa AB una perpendicolare CF, che si prolunghi da ambedue le parti sino alla periferia in F, ed E. Finalmente la retta EF si divida per mezzo in I; sarà il punto I il ricercato centro del cerchio.

Dimostrazione. Imperciocchè la linea perpendicolare FE (cor. 1. prop. antec.) è diametro del cerchio; dunque (def. 15. lib. 2.) il centro di esso cerchio sarà il punto I, che taglia per mezzo il diametro FE. Il che ec.

È la prop. 1. del lib. 3. d' Euclide.

PROPOSIZIONE IV.

PROBL. TAV. IV. FIG. 35.

Dato un arco (ABL) di cerchio, ritrovare il centro, e descrivere l' intera circonferenza.

Nel dato arco si tirino due corde AB, BL, che (prop. 12. lib. 2.) si dividano per mezzo in E, ed F, e (prop. 13. lib. 2.) s' innalzino sopra di esse le perpendicolari CF, CE, le quali prolungate (cor. 3. prop. 24. lib. 2.) si segheranno in qualche punto, come C, che sarà il ricercato centro.

Dimostrazione. Le linee rette hanno un solo punto comune (cor. prop. 16. lib. 2.), nel quale si segano; ma il centro del cerchio (cor. propos. 2.) ritrovasi tanto nella perpendicolare EC, quanto nella FC; perciò sarà il punto C comune ad amendue le perpendicolari; e però fatto centro C col raggio CA, o CB, ec. si descriverà l' intera circonferenza. Il che eç.

È la prop. 25. del lib. 3. d' Euclide.

Corollario (Tav. IV. Fig. 36.). Nella stessa maniera si descrive un cerchio, la cui periferia passi per tre punti dati A, B, L, che non sieno posti per diritto, tirando le due rette BA, BL, vale a dire intorno ad un dato triangolo ABL sempre si può descrivere un cerchio, la cui circonferenza passi per i tre angoli di esso.

È la prop. 5. del lib. 3. d' Euclide.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA TAV. IV. FIG. 37.

Se da un punto (C) preso dentro d' un cerchio (EAB) saranno tirate alla periferia tre linee rette (CA, CB, CE) uguali fra loro; esso punto sarà il centro del cerchio.

Tirinsi le corde BE, BA, e (prop. 12. lib. 2.) si dividano per mezzo ne' punti F, ed L, da' quali si tirino al punto C le rette LC, FC.

Dimostrazione. I due triangoli CLA, CLB hanno il lato comune CL, il lato LA=LB, di costruzione, e d' ipotesi il lato CA=CB; perciò (prop. 9. lib. 2.) sarà l' angolo CLA uguale all' angolo CLB, conseguentemente (def. 9. lib. 2.) la retta CL è perpendicolare sul mezzo della corda BA; onde (cor. 1. prop. 2.) il centro del cerchio ritroverassi in essa CL. Similmente i due triangoli CFB, CFE hanno ciascun lato uguale a ciascun lato; perciò gli angoli CFB, CFE saranno uguali, e retti, ed il centro del cerchio ritroverassi ancora nella perpendicolare FC. Adunque il centro del cerchio è il punto C comune alle due perpendicolari LC, FC. Il che ec.

È la propos. 9. del lib. 3. d' Euclide.

Corollario. Dunque nel medesimo piano, da un punto, che non sia centro del cerchio, non si possono tirare alla periferia più di due linee rette, che sieno uguali fra loro; perchè (antec. dimostr.) se si potranno tirare, allora quel punto sarà centro del circolo.

PROPOSIZIONE VI.

PROB. TAV. IV. FIG. 38.

Per qualsivoglia punto (L) della periferia tirare una linea retta tangente del circolo.

Dal punto L dato nella periferia al centro C si tiri il raggio LC, o il diametro LF, al quale dal punto L (propos. 13. lib. 2.) s' innalzi la perpendicolare BLA, che sarà la ricercata tangente, e toccherà il cerchio nel solo punto L.

Dimostrazione. Dal centro C a qualunque altro punto E della retta AB si tiri la retta CE; il triangolo CLE è, di costruzione, rettangolo in L; perciò l' angolo retto CLE è maggiore dell' angolo (cor. 5. propos. 24. lib. 1.) acuto CEL; laonde (parte 2. prop. 27. lib. 2.) il lato CE sottoposto al maggior angolo CLE sarà maggiore del lato CL sottoposto al minor angolo CEL. Ma la retta CL è raggio del cerchio; onde la linea CE è maggiore del raggio, ed è tirata dal centro C. Dunque l' altro suo estremo E sarà fuori del cerchio. Nella stessa guisa si dimostra, che tutti gli altri punti della linea AB, eccetto il punto L, cadono fuori del cerchio; però la retta AB è tangente del cerchio, e lo tocca nel solo punto L. Il che ec.

Corollario i. Adunque la retta, AB, perpendicolare all' estremità, L, del raggio CL, o del diametro, FL, è tangente del cerchio. Inoltre perchè all' estremità (L) del diametro (FL) si può tirare una sola perpendicolare (cor. def. 9. lib. 2.); perciò una sola linea retta può toccare il cerchio in un medesimo punto della circonferenza; conseguentemente ogni altra linea retta tirata pel punto del contatto segherà il cerchio.

È la prop. 16. del lib. 3. d' Euclide.

Corollario ii. (Tav. IV. Fig. 39.) Quindi ne viene in conseguenza, che la retta linea (CM) tirata dal centro (C) al punto del contatto (M) è sempre perpendicolare alla tangente (AB).

È la prop. 18. del lib. 3. d' Euclide.

Corollario iii. Similmente è chiaro, che la perpendicolare (MC), innalzata dal punto del contatto (M) sopra la tangente (AB) passa pel centro del cerchio.

È la prop. 19. del lib. 3. d' Euclide.

PROPOSIZIONE VII.

TEOR. TAV. V. FIG. 40.

L' angolo del segmento ha per misura la metà dell' arco dello stesso segmento.

La retta AB tocchi il cerchio EMLR nel punto R, dal quale si tiri qualsivoglia corda RS; dico, che l' angolo ARS del segmento minore ha per misura la metà dell' arco SER dello stesso segmento; e la misura dell' angolo SRB del segmento maggiore sarà la metà del suo arco SMLIR.

Pel centro C (propos. 23. lib. 2.) si tiri la retta MCI parallela alla corda SR, a cui dallo stesso centro C (prop. 14. lib. 2.) si tiri il raggio perpendicolare CDE, il quale (prop. 20. lib. 2.) sarà eziandlo perpendicolare al diametro MCI. Finalmente al punto del contatto si tiri il raggio CR.

DIMOSTRAZIONE. L'angolo ARC (cor. 2. propos. anteced.) è retto, e (ass. 16.) uguale all' angolo ECI anch' esso retto, di costruzione. Ma (prop. 21. lib. 2.) l' angolo SRC, o sia x è uguale al suo alterno RCI, o sia z. Adunque dagli uguali angoli retti ARC, ECI si levino gli angoli uguali x, e z e (ass. 3.) rimarrà l' angolo SRA uguale all' angolo ECR. Ma (def. 5.) la misura dell' angolo ECR è l' arco opposto ER, metà dell' arco SER (cor. 2. prop. 2.). Dunque la misura dell' ugual angolo SRA (cor. 2. def. 5.) sarà parimente la metà del medesimo arco SER.

Oltreciò, perchè la metà dell' intera circonferenza ELMR (cor. def. 7.) è la misura di due angoli retti, ed i due angoli conseguenti SRA, SRB (prop. 15. lib. 2.) sono uguali a due retti; perciò la metà dell' intera periferia EMLR è la misura di essi angoli SRA, SRB. Ma si è dimostrato, che la misura dell' angolo SRA è la metà dell' arco SER, dunque la metà del rimanente arco SMLIR è la misura del rimanente angolo SRB. Adunque l' angolo del segmento ha per misura la metà dell' arco del medesimo segmento. Il che ec.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOR. TAV. V. FIG. 41.

L' angolo (SRM) alla periferia ha per misura la metà dell' arco opposto (SM).

Pel punto R vertice dell' angolo alla periferia (prop. 6.) si tiri la tangente ARB.

DIMOSTRAZIONE. I tre angoli ARS, SRM, MRB (cor. 1. prop. 15. lib. 2.) insieme presi sono uguali a due retti; onde (cor. def. 7.) hanno per misura

la metà di tutta la circonferenza del cerchio SRM, cioè la metà dell' arco SR, più la metà dell' arco SM, più la metà dell' arco MR; ma (prop. antec.) la misura dell' angolo ARS è la metà dell' arco SR, e la misura dell' angolo MRB è la metà dell' arco MR; dunque la misura del rimanente angolo SRM sarà necessariamente la metà del rimanente arco SM. Adunque l' angolo alla periferia ec. Il che ec.

COROLLARIO I. Perlaqualcosa l' angolo (SCM) al centro è doppio dell' angolo (SRM) alla circonferenza, quando s' appoggiano sopra il medesimo arco; perciocchè la misura dell' angolo (SCM) al centro (def. 5.) è tutto l' arco opposto (SM), e la misura dell' angolo (SRM) alla periferia (dimostr. antec.) è la metà del medesimo arco opposto (SM).

È la prop. 20. del lib. 3. d' Euclide.

COROLLARIO II. (Tav. V. Fig. 42.) Quindi tutti gli angoli (ALB, AIB, AMB ec.) inscritti nel medesimo segmento (ALIMB) del cerchio, cioè che s' appoggiano sopra il medesimo arco (AEB) del cerchio, saranno fra loro uguali; poichè hanno la stessa misura, cioè la metà dell' arco opposto (AEB).

È la prop. 21. del lib. 3. d' Euclide.

COROLLARIO III. (Tav. V. Fig. 43.) 1. L' angolo (ACL) inscritto nel semicircolo (ACFL) è sempre retto; poichè (dimostraz. antec.) la misura di esso è la metà della semicirconferenza (ABL), cioè un arco di 90. gradi, che (def. 7.) è la misura dell' angolo retto.

2. L' angolo (CAL) inscritto nel segmento maggiore (CABL) è acuto, perchè la misura di esso è la metà d' un arco (CFL) minore della semicirconferenza, e però essa metà è minore d' un arco di 90. gradi.

3. L' angolo (CFL) inscritto nel segmento minore (CFL) è ottuso; perchè la sua misura è la metà d' un arco (LBAC) maggiore della semicirconfe-

renza; e perciò essa metà è maggiore d'un arco di 90. gradi.

È la prop. 31. del lib. 3. d'Euclide.

Corollario iv. (Tav. V. Fig. 44.) Inoltre l'angolo (ECB) del segmento minore (ELIC) è sempre uguale all'angolo (CFE) inscritto nel segmento maggiore (CRFE); perciocchè amendue (prop. 7, ed 8) hanno per misura la metà dell'arco (ELIC) del segmento minore. Similmente l'angolo (ECA) del segmento maggiore (CRFE) è uguale all'angolo (ELC) contenuto nel segmento minore (ELIC); perchè tutti due (prop. 7., ed 8) hanno per misura la metà dell'arco (CRFE) del segmento maggiore.

Corollario v. (Tav. V. Fig. 45.) Ogni quadrilatero (ABCL) inscritto nel cerchio, cioè che ha tutti gli angoli nella periferia del cerchio, ha gli angoli opposti (A, e C, parimente B, ed L) insieme presi, uguali a due angoli retti; perciocchè hanno per misura la metà di tutta la circonferenza, che (cor. def. 7.) è la misura di due retti. Conseguentemente niun parallelogrammo obbliquangolo può essere inscritto nel cerchio.

È la prop. 22. del lib. 3. d'Euclide.

PROPOSIZIONE IX.

TEOR. TAV. V. FIG. 46.

Se due linee rette parallele segheranno un cerchio, gli archi frapposti tra di esse saranno uguali fra loro.

Le linee parallele AB, CL seghino il cerchio ACRLB; dico, che gli archi interposti AC, BL saranno uguali fra loro. Tirisi la retta AL.

Dimostrazione. Perchè gli angoli alterni x, z sono uguali (prop. 21. lib. 2.); perciò (cor. 2. def. 5.) le misure di essi, cioè (propos. anteced.) le metà degli archi opposti AC, BL saranno eziandìo uguali

fra loro. Adunque gli stessi archi AC, BL (ass. 8.) saranno parimente uguali tra di loro.

Che se delle parallele CL, EF, la EF sarà tangente del cerchio in R; allora, tirata la retta CR, perchè gli angoli alterni LCR, ERC sono uguali fra loro, anche le misure di essi saranno tra di loro uguali; cioè la metà dell'arco CR, che (prop. 7.) è la misura dell'angolo ERC, sarà uguale alla metà dell'arco RL, che (prop. 8.) è la misura dell'angolo LCR; conseguentemente (ass. 8.) essi archi CR, RL saranno uguali. Il che ec.

PROPOSIZIONE X.

TEOR. TAV. V. FIG. 47.

1. Se in qualsivoglia punto (R) posto tra la periferia, ed il centro del cerchio si costituirà un angolo rettilineo (ARC), i cui lati sieno prolungati da ambedue le parti fino alla circonferenza; la misura del medesimo angolo, saranno le metà degli archi (AC, MS) frapposti tra i lati di esso angolo, prolungati fino alla periferia.

Dimostrazione. Imperciocchè tirata la MB parallela al lato AR (propos. 23. lib. 2.); allora si avrà l'angolo interiore BMC (propos. 21. lib. 2.) uguale all'esteriore ARC. Ma la misura dell'angolo BMC (prop. 8.) è la metà dell'arco BAC; cioè la metà dell'arco BA, più la metà dell'arco AC; ma l'arco BA (prop. antec.) è uguale all'arco MS, e però (sostituendo l'arco MS invece dell'arco uguale BA) la misura dell'angolo BMC sarà la metà dell'arco MS, più la metà dell'arco AC; adunque la misura dell'ugual angolo ARC sarà eziandìo la metà dell'arco MS colla metà dell'arco AC. Il che ec.

2. (Tav. V. Fig. 48.) La misura d'un angolo (ABM) formato fuori della circonferenza è la metà

dell' opposto arco concavo (ARM) meno la metà dell' opposto arco convesso (CS) frapposti tra i lati del medesimo angolo.

Dimostrazione. Condotta la retta CR (prop. 23. lib. 2.) parallela al lato BM, sarà l' arco RM (prop. antec.) uguale all' arco CS; e l' angolo ACR (prop. 21. lib. 2.) uguale all' angolo dato ABM. Ma la misura dell' angolo ACR è la metà dell' arco AR, cioè la metà di tutto l' arco ARM meno la metà dell' arco RM, o sia meno la metà dell' arco uguale CS. Dunque la misura dell' angolo ACR, o sia dell' ugual angolo ABM è la metà dell' opposto arco concavo ARM, meno la metà dell' opposto arco convesso CS.

Che se dell' angolo (ABE) fatto fuori della periferia un lato (BE) sarà tangente del cerchio, collo stesso raziocinio si dimostrerà, che la sua misura è la metà dell' opposto arco concavo (ARME) meno la metà dell' opposto arco convesso (CSE), interposti tra i lati del medesimo angolo. La medesima cosa si dimostra dell' angolo costituito da due linee tangenti dello stesso cerchio.

PROPOSIZIONE XI.

PROBL. TAV. V. FIG. 49.

Tirare una linea retta tangente del circolo (LGM) da un punto (R) dato fuori dello stesso cerchio.

Dal punto dato R al centro C del dato cerchio si tiri la retta RC, che (prop. 12. lib. 2.) si tagli per mezzo in A, e fatto centro A, col raggio AC, o AR, descrivasi il mezzo cerchio CGBR, e dal punto G, in cui si segano fra loro le circonferenze, al punto dato R tirisi la retta GR, che sarà la tangente ricercata.

Dimostrazione. Imperciocchè, tirato il raggio CG, l' angolo CGR inscritto nel mezzo cerchio CGBR (cor. 3. prop. 8.) è retto; laonde la retta GR, perpendicolare all' estremità G del raggio CG (cor. 1. prop. 6.) è tangente del cerchio LGM. Il che ec.

Corollario. Se dal centro A, e col raggio AC si descriverà l'altro mezzo cerchio CLR, e si tirerà la retta LR, nella stessa maniera si dimostrerà, che la retta LR è anche tangente del cerchio in L. Adunque da un punto dato fuori del cerchio si possono tirare due tangenti del medesimo cerchio.

PROPOSIZIONE XII.

TEOR. TAV. V. FIG. 50.

Gli angoli uguali fatti ai centri (ACB=EIG), o alle circonferenze (ALB=EFG) di cerchi uguali (ALBM, EFGR), o d' un medesimo cerchio, si appoggiano sopra archi uguali (sarà cioè l' arco AMB uguale all' arco ERG).

Ma quando gli archi sono fra loro uguali (AMB =ERG), anche gli angoli insistenti sopra essi archi saranno fra loro uguali, sia che essi vengano formati ai centri, o alle circonferenze de' cerchi uguali (cioè sarà ACB=EIG, ed ALB=EFG.

Dimostrazione della prima parte. Concepiscasi, che il cerchio AMBL sia talmente soprapposto al cerchio EFGR, che il centro C cada in I, ed il raggio AC sopra l' ugual raggio IE (def. 3.), col quale (cor. def. 5. lib. 2.) si combacierà; ed il raggio CB si combacierà col raggio GI, perchè, d' ipotesi, gli angoli ACB, EIG sono fra loro uguali; ed i punti A, e B cadranno in E, ed in G; perciò tutto l' arco AMB si adatterà coll' arco ERG, onde (ass. 14.) saranno fra loro uguali.

(Ma se gli angoli uguali saranno ALB, EFG alla periferia; allora tirati i raggi AC, CB, EI, GI, anche gli angoli ACB, EIG ai centri saranno (ass. 8.) uguali, perchè (cor. 1. prop. 8.) sono doppi degli uguali angoli ALB, EFG; laonde nella stessa maniera si dimostreranno uguali gli archi AMB, ERG. Il che ec.

È la prop. 26. del lib. 3. d' Euclide.

Dimostrazione della seconda parte. Perchè, d' ipotesi, l' arco AMB è uguale all' arco ERG, ed i circoli sono fra loro uguali; perciò soprapponendo il cerchio ABL sopra l' uguale cerchio EGF, in maniera, che i centri C, ed I si adattino insieme, ed il punto A col punto E, allora l' arco AMB si adatterà coll' arco uguale ERG, ed il punto B cadrà in G; perciò si combacieranno insieme i raggi CA con IE, e CB con IG; onde (ass. 14.) l' angolo ACB sarà uguale all' angolo EIG.

Inoltre gli angoli ALB, EFG alla periferia (ass. 9.) saranno ancora uguali fra loro; perchè (cor. 1. prop. 8.) sono metà degli uguali angoli ACB, EIG ai centri. Dunque ec. Il che ec.

È la prop. 27. del lib. 3. d' Euclide.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA TAV. V. FIG. 51.

Ne' cerchi uguali (ALCM, EIGR), o nel medesimo cerchio, le corde uguali (AC, EG) sottendono archi uguali (ALC=EIG, ed AMC=ERG.

Vicendevolmente se gli archi (ALC, EIG) saranno uguali, le corde (AC, EG), che gli sottendono, saranno parimente uguali fra loro.

Dimostrazione della prima parte. Condotti i raggi (def. 3. di questo, e def. 15. lib. 2.) uguali fra loro, BA, BC, FE, FG. Perchè, d' ipotesi, le basi AC, EG sono uguali; perciò (prop. 9. lib. 2.) sarà l' angolo ABC=EFG; laonde (parte 1. prop. antec.) sarà l' arco ALC=EIG, e dalle uguali circonferenze levando gli archi uguali ALC, EIG (ass. 3.) resterà l' arco AMC uguale all' arco ERG. Il che ec.

È la prop. 28. del lib. 3. d' Euclide.

Dimostrazione della seconda parte. Perchè, d' ipotesi, gli archi ALC, EIG sono uguali, perciò, tirati i raggi BA, BC, EF, FG (parte 2. propos. antec.) sarà l' angolo ABC=EFG, ed i lati BA, BC (def. 3.) sono uguali ai lati FE, FG. Dunque (prop. 6. lib. 2.) sarà la base AC uguale alla base EG. Perlaqualcosa gli archi uguali sono sottesi da corde uguali. Il che ec.

È la prop. 29. del lib. 3. d' Euclide.

PROPOSIZIONE XIV.

PROBL. TAV. V. FIG. 52.

Dividere per mezzo un dato arco (AMCRL) di cerchio.

Tirisi la corda AL, che (propos. 12. lib. 2.) si divida per mezzo in B; indi (propos. 13. lib. 2.) s' innalzi la perpendicolare BC, che dividerà per mezzo in C il dato arco AMCRL. Si tirino le rette AC, CL.

Dimostrazione. I due triangoli ABC, CBL intorno agli uguali angoli retti ABC, CBL, hanno il lato CB comune, e, di costruzione, il lato BA=BL; dunque (prop. 6. lib. 2.) sarà AC=LC; onde (parte 1. prop. antec.) gli archi CMA, CRL (sottesi da uguali corde AC, CL) saranno uguali fra loro. Il che ec.

È la prop. 30. del lib. 3. d' Euclide.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA TAV. V. FIG. 53.

Se nel cerchio (ALBC) due linee rette (AB, CL) terminate alla periferia, si segheranno fra loro (come in F); il rettangolo contenuto dalle parti (AF, FB) di una, sarà uguale al rettangolo, che si contiene dalle parti (CF, FL) dell'altra, cioè sarà $AF \times FB = CF \times FL$).

Dimostrazione. Imperciocchè, tirate le rette AC, LB, i due triangoli AFC, FLB hanno (propos. 17. lib. 2.) l'angolo AFC=LFB; e (cor. 2. prop. 8.) l'angolo CAB=CLB, perchè s'appoggiano sopra lo stesso arco CB; e per la stessa ragione è l'angolo ACL=ABL; perciò i due triangoli AFC, FBL sono equiangoli; onde (prop. 7. lib. 3.) sarà AF : FL :: CF : BF, e però (propos. 1. lib. 1.) sarà $AF \times BF = FL \times CF$. Il che ec.

È la prop. 35. del lib. 3. d'Euclide.

Corollario. (Tav. IV. Fig. 33.) Se dunque la corda AB di un arco dato AEB sarà 12. piedi, e la saetta, o sia perpendicolare CE, che divide per mezzo in C la corda AB, sia 4 piedi, sarà CB=CA di 6. piedi; dovendo trovare la rimanente parte CF del diametro, si faccia il prodotto di CA in CB, o sia il quadrato 36 di CA, e si divida per CE, che è 4, ed il quoziente 9 sarà la lunghezza di CF: poichè dall'antecedente dimostrazione abbiamo $AC \times CB = CE \times CF$, cioè $6 \times 6 = 4 \times 9$; laonde tutto il diametro EF sarà $4+9$, cioè 13 piedi; il raggio IE sarà piedi $6\frac{1}{2}$, la porzione CI sarà piedi $2\frac{1}{2}$.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA TAV. V. FIG. 54.

Se da qualsivoglia punto (A) fuori del cerchio (BCL) saranno tirate due rette linee, delle quali una (AL) tocchi il cerchio (in L), e l'altra (AB) lo seghi; il quadrato della tangente (AL) sarà uguale al rettangolo ($BA \times AC$) contenuto da tutta la segante (AB), e dalla sua parte (AC) posta fuori del cerchio, tra la periferia, ed il punto dato, (cioè sarà $\overline{AL}^2 = AB \times AC$). Tirinsi le corde CL, LB.

Dimostrazione. L'angolo CLA del segmento minore (cor. 4. prop. 8.) è uguale all'angolo LBC inscritto nel segmento maggiore CIBL, e l'angolo in A è comune ai due triangoli ALB, ALC; perciò (cor. 7. prop. 24. lib. 2.) il rimanente angolo BLA sarà uguale al rimanente angolo ACL; laonde i triangoli ALB, ALC sono equiangoli, onde (prop. 7. lib 3.) sarà BA : AL :: AL : AC, cioè (def. 9. lib. 1.) si avrà ∺ BA : AL : AC. Dunque (cor. prop. 1. lib. 1.) sarà $\overline{AL}^2 = BA \times AC$. Il che ec.

È la prop. 36. del lib. 3. d'Euclide.

Corollario 1. (Tav. V. Fig. 55.) Se da un punto A preso fuori del cerchio ad un punto S della circonferenza sarà tirata una retta AS, ed un'altra retta AB, che seghi il cerchio, se sarà $BA \times AC = \overline{AS}^2$, allora AS sarà tangente del cerchio. Perciocchè (prop. 11.) si tiri dall'altra parte la tangente AL, e (ant. dimostr.) si avrà $BA \times AC = \overline{AL}^2$; ma, d'ipotesi, abbiamo $BA \times AC = \overline{AS}^2$, perciò (ass. 1.) sarà $\overline{AS}^2 = \overline{AL}^2$; onde (aritmet. 179.) si avrà AS=AL, e tirati i raggi MS, ML, e la retta MA, i triangoli

AMS, AML hanno il lato MA comune, MS=ML (def. 15. lib. 2.), ed AS=AL di dimostrazione; perciò (prop. 9. lib. 2.) sarà l'angolo ASM=ALM; ma l'angolo ALM (cor. 2. prop. 6.) è retto. Dunque (ass. 1.) anche l'angolo ASM sarà retto; e però (cor. 1. prop. 6.) la retta AS è tangente del cerchio. È la prop. 37. del lib. 3. d'Euclide.

Corollario II. Adunque la tangente AL è media proporzionale tra la segante BA, e la sua porzione CA posta fuori del cerchio; essendosi dimostrato essere ∺ BA : AL : AC.

Corollario III. Inoltre (dimost. antec. cor. 1.) si dee conchiudere, che due tangenti del medesimo cerchio tirate dallo stesso punto preso fuori del cerchio sono uguali fra loro.

Corollario IV. (Tav. V. Fig. 56.) Se dal medesimo punto A si tirerà un' altra segante AM, col medesimo raziocinio, col quale si è dimostrato essere

$AB \times AC = \overline{AL}^2$, si dimostrerà ancora essere

$AM \times AS = \overline{AL}^2$; dunque (ass. 1.) sarà $AB \times AC = AM \times AS$, e dissolvendo (cor. 1. prop. 2. lib. 1.) si avrà AB : AM :: AS : AC; vale a dire qualsivoglia segante del cerchio (AB) ad un' altra segante (AM) tirata dallo stesso punto (A) fuori del cerchio; sta reciprocamente come la porzione esteriore (AS) della seconda (AM) alla porzione esteriore (AC) della prima segante (AB).

Corollario V. (Tav. V. Fig. 57.) Quindi dato un triangolo ABC, il cui lato massimo sia AB, ed il minimo CB, se centro il punto C, e col raggio CB si descriverà il cerchio BRML, e si prolungherà il lato medio AC sino alla periferia in R; indi dal centro C (prop. 14. lib. 2.) si tirerà la retta CS perpendicolare al lato massimo AB, che da essa perpendicolare rimarrà diviso in due parti BS, SA. Ora perchè (def. 15. lib. 2.) abbiamo CB=CR=CM,

(prop. 2.) BS=SL, perciò sarà AR=AC+CB, AM=AC−CB, ed AL=AS−SB; ma (cor. antec.) abbiamo AB : AR :: AM : AL, e sostituendo cose uguali a cose uguali si avrà AB : AC+CB :: AC−CB : AS−SB. Adunque in un triangolo rettilineo il lato massimo sta alla somma degli altri due lati, come la differenza di essi lati alla differenza tra le parti del lato massimo, fatte dalla perpendicolare tirata sopra di esso dall' angolo opposto.

Corollario VI. Se dunque saranno dati i tre lati d' un triangolo ABC, verbigrazia, AB=10 piedi, AC=8, e BC=6, sarà AC+CB=8+6=14 piedi, ed AC−CB=8−6=2 piedi. Ora volendo ritrovare l' altezza CS di esso triangolo, primieramente (cor. antec., e prop. 10. lib. 1.) si trovi la parte AS−SB, cioè AL, vale a dire facciasi la proporzione AB : AC+CB :: AC−CB : AS−SB=AL, cioè

$10 : 14 :: 2 : \frac{2 \times 14}{10} = \frac{28}{10}$; onde sarà $AL = \frac{28}{10} = \frac{14}{5} = 2\frac{4}{5}$.

In secondo luogo sottraggasi AL da AB, cioè $\frac{14}{5}$ dal 10, o sia dal $\frac{50}{5}$ (aritm. 119.), e resterà

$BL = \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5}$, la cui metà BS sarà $\frac{18}{5}$, o sia $3\frac{3}{5}$.

In terzo luogo dal quadrato 36, del lato BC=6, sottraggasi $\frac{324}{25}$, o sia $\frac{24}{25}$, quadrato della parte $BS = \frac{18}{5}$, il residuo $23\frac{1}{25}$, o sia $\frac{576}{25}$ (arit. 119.) sarà il quadrato della retta CS, la cui radice $\frac{24}{5}$, o sia $4\frac{4}{5}$ sarà la lunghezza della perpendicolare CS, la cui metà $2\frac{2}{5}$ moltiplicata per la base BA, cioè per 10, dà il prodotto 24 piedi quadrati, che sarà l' area del triangolo ABC (cor. 2. prop. 31. lib. 2.).

Corollario VII. (Tav. V. Fig. 58.) Dato qualunque triangolo ABC rettangolo in A, se fatto centro C, e coll' intervallo del cateto CA si descriverà un cerchio, e si prolungherà l' ipotenusa BC sino alla periferia in M; sarà BM la somma dell' ipotenusa BC col cateto CA=CM, e BE sarà la differenza tra l'ipotenusa BC, ed il cateto CA=CE; laonde facilmente si dimostrerà, che il quadrato dell' altro cateto AB è uguale al rettangolo contenuto dalla somma BM dell' ipotenusa BC col cateto CA, e dalla differenza BE tra l'ipotenusa, e lo stesso cateto. Perciocchè la retta BA perpendicolare all' estremità del raggio CA (cor. 1. prop. 6.) è tangente del cerchio, e la BM è segante; dunque, per questa proposizione, sarà $BM \times BE = \overline{BA}^2$.

PROPOSIZIONE XVII.

PROBLEMA TAV. V. FIG. 58.

Data una linea retta terminata (AB) segarla talmente, che il rettangolo contenuto da tutta la linea, e dalla parte minore sia uguale al quadrato dell' altra parte. Il che dicesi *dividere una retta linea in media, ed estrema ragione.*

Sopra la data AB, e nel punto in essa A s' innalzi (propos. 13. lib. 2.) la perpendicolare AC uguale alla metà della data retta AB. Poscia fatto centro C, col raggio CA descrivasi il cerchio AEM, e pei punti B, C tirisi la retta BCM. Finalmente dalla retta AB si seghi la parte BL uguale alla BE, parte di BM, che è fuori del cerchio. Dico, che la retta AB sarà segata in media, ed estrema ragione nel punto L; vale a dire sarà ∺ AB : BL : AL.

Dimostrazione. Il raggio CA, di costruzione, è la metà della retta BA, ed è ancora (def. 15. lib. 2.) la metà del diametro ME; perciò (ass. 8.) sarà la retta BA uguale al diametro ME; ma la BA essendo perpendicolare, di costruzione, all' estremità del raggio AC, è tangente del cerchio (cor. 1. prop. 6.),

e la retta BM è segante; onde (cor. 2. prop. ant.) sarà MB : BA : : BA : BE, e dividendo (prop. 5. lib. 1.) si avrà MB−BA : BA : : BA−BE : BE. Ma si è dimostrato ME=BA, e di costruzione abbiamo BL=BE, perciò sostituendo cose uguali a cose uguali, sarà MB−ME : BA : : BA−BL : BL; ma BA−BL significa AL, ed MB−ME significa BE, a cui si sostituisca l' uguale parte BL, e si avrà BL : BA : : AL : BL, ed invertendo (prop. 3. lib. 1.) sarà BA : BL : : BL : AL, cioè ∺ BA : BL : AL. Adunque la data retta AB è stata divisa in media, ed estrema ragione. Il che ec.

È la prop. 30. del lib. 6. d' Euclide.

Corollario. Essendosi dimostrato essere ∺ BA : BL : AL, perciò (cor. prop. 1. lib. 1.) sarà $BA \times AL = \overline{BL}^2$. Dunque la data retta AB si è divisa talmente in L, che il rettangolo contenuto da tutta AB, e dalla parte AL è uguale al quadrato della rimanente parte BL.

È la prop. 11. del lib. 2. d' Euclide.

PROPOSIZIONE XVIII.

PROBLEMA TAV. V. FIG. 59.

Date due linee rette (AB, BC), trovare la media proporzionale.

Si mettano le due date rette AB, BC per diritto in maniera, che formino una sola retta AC, che (prop. 12. lib. 2.) si divida per mezzo in F, e fatto centro F, col raggio FA, o FC descrivasi il mezzocerchio ALMC. Poscia dal punto B (prop. 13. lib. 2.) sopra la retta AC s' innalzi la perpendicolare BM, che sia terminata in qualche punto M dalla periferia; sarà BM la ricercata linea.

Dimostrazione. Tirinsi le corde AM, CM, e l' angolo AMC inscritto nel mezzocerchio ALMC (cor-

3. prop. 8.) sarà retto. Dunque (cor. 2. prop. 17. lib. 3.) la perpendicolare MB tirata dall' angolo retto AMC all' ipotenusa AC è media proporzionale tra le parti AB, BC della stessa ipotenusa; sarà perciò ∺ AB : BM : BC. Il che ec.

È la prop. 13. del lib. 6. d' Euclide.

COROLLARIO I. Adunque (cor. prop. 1. lib. 1.) sarà $AB \times BC = \overline{BM}^2$, cioè nel cerchio il quadrato di qualsivoglia linea (BM) tirata perpendicolare al diametro da qualunque punto della periferia è sempre uguale al rettangolo contenuto dalle parti del diametro (AB, BC), nelle quali rimane diviso dalla medesima perpendicolare, la quale chiamasi *ordinata al diametro del cerchio.*

Inoltre essendosi dimostrato $\overline{BM}^2 = AB \times BC$, estraendo la radice quadrata (aritm. 179.) sarà $BM = \sqrt{AB \times BC}$.

COROLLARIO II. (Tav. V. Fig. 60.) Adunque volendo descrivere un quadrato uguale ad un dato rettangolo ABCR, si trovi tra i lati AB, BC la media proporzionale BL, e sopra di essa (prop. 30. lib. 2.) si descriva il quadrato BM, che (cor. prop. 1. lib. 1.) sarà uguale al rettangolo ABCR contenuto dai lati AB, BC.

COROLLARIO III. Ma dovendo descrivere un quadrato uguale ad un parallelogrammo obbliquangolo ABST, allora si tirino le perpendicolari AR, BC, e (prop. 31. lib. 2.) si avrà il rettangolo ABCR uguale al parallelogrammo obbliquangolo ABST; laonde (cor. antec.) descritto il quadrato BM uguale al rettangolo ABCR, esso quadrato (ass. 1.) sarà anche uguale al parallelogrammo obbliquangolo ABST.

COROLLARIO IV. Se dunque si vorrà descrivere un quadrato, che sia uguale ad una data figura rettilinea, dividasi la figura data in triangoli; indi a ciascun triangolo (propos. 34. lib. 2.) si descriva un rettangolo

uguale; poscia, per l' antecedente corollario secondo, a ciascun rettangolo si descriva un quadrato uguale.

Finalmente (propos. 19. lib. 3.) trovisi una linea retta, il cui quadrato sia uguale a tutti i ritrovati quadrati insieme presi, ed esso quadrato sarà uguale al dato rettilineo; e questo dicesi *quadrare una figura rettilinea.*

È la propos. 14. del lib. 2. d' Euclide.

COROLLARIO V. (Tav. V. Fig 59.) Dalla dimostrazione di questo problema facilmente si può conchiudere, che se in un triangolo ACM, la perpendicolare BM tirata da un angolo AMC al lato sottoposto AC, sarà media proporzionale tra le parti AB, BC di esso lato; allora l'angolo AMC sarà retto, e prendendo esso lato AC per diametro, se si descriverà un cerchio, la periferia di esso passerà pel punto M. Perchè se così non succedesse, ne seguirebbe, che la media proporzionale non fosse di una determinata, e costante lunghezza, il che ripugna, poichè il suo quadrato dee uguagliare il determinato rettangolo contenuto dalle due estreme.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA TAV. V. FIG. 61.

Se una linea retta (AB) sarà segata per mezzo (in C), e ad essa si aggiugnerà per diritto un' altra linea retta terminata (BL), il quadrato della linea (CL) composta dalla metà, e dall' aggiunta sarà uguale al rettangolo ($AL \times LB$) contenuto dalla data colla giunta (AL), e dall' aggiunta (BL) insieme col quadrato della metà (CB).

Dal centro C col raggio CA, o CB descrivasi il mezzocerchio AFB, e dal punto L (prop. 11.) tirisi la tangente LF, ed il raggio CF al punto del contatto F.

DIMOSTRAZIONE. La retta LF, di costruzione, è tangente del cerchio, ed AL lo sega; perciò (prop. 16) sarà $\overline{LF}^2=AL\times LB$, a queste cose uguali aggiungansi i quadrati uguali (aritm. 179.) de' raggi CF, CB, e (ass. 2.) sarà $\overline{LF}^2+\overline{CF}^2=AL\times LB+\overline{CB}^2$; ma l' angolo CFL contenuto dalla tangente, e dal raggio (cor. 1. prop. 6.) è retto, e però nel triangolo rettangolo CFL (cor. 1. prop. 18. lib. 3.) sarà $\overline{LF}^2+\overline{CF}^2=\overline{CL}^2$, adunque (ass. 1.) sarà $\overline{CL}^2=AL\times LB+\overline{CB}^2$. Il che ec.

È la prop. 6. del lib. 2. d' Euclide.

PROPOSIZIONE XX.

TEOR. TAV V. FIG. 62.

Se una linea retta (AB) sarà segata in parti uguali (in C), ed in parti disuguali (in L), il rettangolo ($AL\times LB$) contenuto dalle parti disuguali (AL, LB), insieme col quadrato della parte (CL) frapposta tra i due segamenti, saranno uguali al quadrato della metà (CA, o CB) della data retta. Cioè sarà $AL\times LB+\overline{CL}^2=\overline{CB}^2$.

Centro C, e col raggio CA, o CB descrivasi il mezzocerchio AIB, e dal punto L (prop. 13. lib. 2.) s' innalzi la retta LI perpendicolare al diametro AB, e tirisi il raggio CI.

DIMOSTRAZIONE. Pel corollario primo della prop. 18. noi abbiamo $AL\times LB=\overline{LI}^2$, ed aggiugnendovi il quadrato della parte frapposta CL, (ass. 2.) avremo $AL\times LB+\overline{CL}^2=\overline{LI}^2+\overline{CL}^2$. Ma nel triangolo rettangolo CLI (cor. 1. propos. 18. lib. 3.) abbiamo $\overline{CI}^2=\overline{LI}^2+\overline{CL}^2$; dunque (ass. 1.) sarà $AL\times LB+\overline{CL}^2=\overline{CI}^2$; ed essendo (def. 15. lib. 2.)

CI=CB=CA, sarà (aritm. 179.) eziandio $\overline{CI}^2=\overline{CB}^2=\overline{CA}^2$; perciò (ass. 1.) avremo $AL\times LB+\overline{CL}^2=\overline{CB}^2=\overline{CA}^2$. Il che ec.

È la prop. 5. del lib. 2. d' Euclide.

COROLLARIO. Essendosi dimostrato essere $AL\times LB+\overline{CL}^2=\overline{CB}^2$, per antitesi (arit. 106) sarà $AL\times LB=\overline{CB}^2-\overline{CL}^2$; vale a dire quando una linea è segata in parti uguali, ed in parti disuguali, il rettangolo contenuto dalle parti disuguali è uguale alla differenza tra 'l quadrato della metà, ed il quadrato della parte frapposta tra i due segamenti.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOR. TAV. V. FIG. 63.

Se una linea retta terminata (AB) sarà segata in qualunque modo (in C), il quadrato di tutta la linea (AB) sarà uguale ai due quadrati delle parti (AC, CB), ed al rettangolo contenuto due volte dalle date parti, (cioè sarà $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{CB}^2+2AC\times CB$).

La data retta AB seghisi per mezzo in F, e centro F col raggio FA, o FB descrivasi il mezzocerchio ARIB, e dal punto C (prop. 13. lib. 2.) s' innalzi la retta CI perpendicolare alla AB, e tirinsi le corde IA, IB.

DIMOSTRAZIONE. L' angolo AIB iscritto nel mezzocerchio (cor. 3. prop. 8.) è retto; onde (cor. 2. propos. 17. lib. 3.) avremo $AC\times CB=\overline{CI}^2$. Ma ne' triangoli AIB, AIC, BCI rettangoli (cor. 1. prop. 18. lib. 3.) noi abbiamo $\overline{AB}^2=\overline{AI}^2+\overline{IB}^2$, ed $\overline{AI}^2=\overline{AC}^2+\overline{CI}^2$, ed $\overline{IB}^2=\overline{CI}^2+\overline{CB}^2$; perciò sostituendo cose uguali a cose uguali, avremo

$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{CI}^2+\overline{CI}^2+\overline{CB}^2$; ed in luogo di $\overline{CI}^2$ sostituendo l' uguale rettangolo $AC \times CB$, si avrà

$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+AC \times CB+AC \times CB+\overline{CB}^2$, cioè

$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+2AC \times CB+\overline{CB}^2$. Il che ec.

È la prop. 4. del lib. 2. d' Euclide.

Corollario I. Quando la retta è segata per mezzo in F, allora i due quadrati delle parti uguali AF, FB (aritmet. 179.) sono uguali fra loro, e i due rettangoli contenuti dalle medesime parti uguali AF, FB sono amendue uguali al quadrato di una metà AF, o FB. Perlaqualcosa il quadrato di tutta AB è quadruplo del quadrato della sua metà AF, o FB. Sarà dunque $\overline{AB}^2=4\overline{AF}^2$.

Corollario II. Giacchè (cor. 1. prop. 17. lib. 3.) abbiamo $AB \times AC=\overline{AI}^2$, ed $AB \times BC=\overline{BI}^2$, ed inoltre (cor. 1. prop. 18. lib. 3.) abbiamo

$\overline{AB}^2=\overline{AI}^2+\overline{IB}^2$, perciò sostituendo cose uguali a cose uguali avremo $\overline{AB}^2=AB \times AC+AB \times BC$. Vale a dire il quadrato di tutta la linea segata (AB) è uguale alla somma de' rettangoli contenuti da essa linea (AB), e da ciascuna delle sue parti (AC, CB).

È la prop. 2. del lib. 2. d' Euclide.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOR. TAV. V. FIG. 64.

Se il quadrato d' un lato (AC) d' un triangolo (ABC) sarà uguale ai quadrati degli altri due lati (AB, BC) l' angolo (ABC) contenuto dagli altri lati sarà retto.

Sopra il lato AB (prop. 13. lib. 2.) s' innalzi la perpendicolare BE=BC, e tirisi AE.

Dimostrazione. Nel triangolo rettangolo ABE (cor. 1. prop. 18. lib. 3.) abbiamo $\overline{AE}^2=\overline{AB}^2+\overline{BE}^2$; ma (aritm. 179.) abbiamo $\overline{BE}^2=\overline{BC}^2$; perciò sostituendo $\overline{BC}^2$ invece di $\overline{BE}^2$, sarà $\overline{AE}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$; ma d' ipotesi abbiamo $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$; dunque, (ass. 1.) sarà $\overline{AE}^2=\overline{AC}^2$; onde (aritm. 179.) sarà eziandio AE=AC. Adunque i due triangoli ABE, ABC hanno il lato AB comune, il lato BE=BC, di costruzione, è, di dimostrazione, il lato AE=AC; perciò (prop. 9. lib. 2.) avranno l'angolo ABE=ABC; ma l' angolo ABE è retto di costruzione; e però (ass. 1.) anche l' angolo ABC sarà retto, e conseguentemente il triangolo ABC sarà rettangolo. Il che bisognava dimostrare.

È la prop. 48. del lib. 1. d' Euclide.

ELEMENTI
DELLA GEOMETRIA
LIBRO QUINTO

DEFINIZIONE I.

Figure regolari, o *rettilinei regolari*, o *poligoni regolari* chiamansi quelle figure rettilinee, che sono equilatere, ed equiangole, cioè che hanno tutti i lati uguali, e tutti gli angoli uguali.

Per esempio ogni triangolo equilatero, ed ogni quadrato è figura regolare.

Corollario. Perlaqualcosa tutti i poligoni regolari, che hanno lo stesso numero di lati, saranno (def. 1. lib. 3.) simili fra loro.

DEFINIZIONE II.

La figura rettilinea dicesi *inscritta nel circolo*, ovvero *il cerchio* dicesi *circoscritto alla figura rettilinea*, quando ciascun angolo della figura ritrovasi nella periferia del cerchio.

Corollario. Se dunque la periferia del cerchio sarà segata in parti, o sieno archi uguali, e quindi si tireranno le corde sottendenti essi archi uguali, le quali (parte 2. prop. 13. lib. 4.) saranno fra loro uguali; e gli angoli da esse corde contenuti (parte 2. prop. 12. lib. 4.) saranno eziandio uguali fra loro; allora si sarà inscritto nel cerchio un poligono regolare.

DEFINIZIONE III.

La figura rettilinea dicesi *circoscritta al cerchio*, *o il cerchio* si dice *inscritto nella figura rettilinea*, quando ciascun lato della figura è tangente del cerchio.

DEFINIZIONE IV.

Il centro d' un poligono regolare è lo stesso, che il centro del cerchio inscritto, o circoscritto al medesimo poligono.

La retta linea tirata dal centro perpendicolarmente sopra qualsivoglia lato del poligono, o sopra una corda del cerchio chiamasi *cateto*, o *raggio retto*.

Angolo del poligono regolare è qualsivoglia angolo contenuto da due lati dello stesso poligono.

Angolo al centro del poligono regolare chiamasi quell' angolo formato nel centro del poligono da due raggi terminati dagli estremi d' un lato del medesimo poligono: e *la misura* dello stesso angolo è l' arco opposto, sotteso dal lato del poligono.

DEFINIZIONE V.

Figure isoperimetre chiamansi quelle, che hanno i perimetri uguali (def. 13. lib. 2.) cioè quando la somma de' lati di una figura è uguale alla somma de' lati dell' altra.

DEFINIZIONE VI.

Archi simili de' cerchi sono quelli, che hanno il medesimo rapporto, o sia la stessa relazione alle loro intere circonferenze: cioè quelli, che contengono angoli uguali (def. 4. lib. 4.).

DEFINIZIONE VII.

Porzioni simili, o segmenti simili de' cerchi diconsi quando hanno gli archi simili, cioè quando (def. 4. lib. 4.) contengono angoli uguali.

Per esempio tutti i mezzi cerchi sono simili, perchè tutti gli angoli inscritti ne' semicerchi (cor. 3. prop. 8. lib. 4.) sono retti, e però uguali fra loro. Inoltre qualsivoglia mezzo cerchio ha la stessa relazione al suo intero cerchio, che ha qualunque altro mezzo cerchio al suo intero circolo.

DEFINIZIONE VIII.

TAV. VI. FIG. 77.

La superficie, o area terminata da due circonferenze (ILB, AMFE) di due cerchi concentrici nomasi *armilla*, o *zona*, o *corona*.

La differenza (AB), che passa tra il raggio (CA) del maggior cerchio, ed il raggio (CB) del cerchio minore, chiamasi *larghezza della zona*, o sia *della corona*.

PROPOSIZIONE I.

TEOR. TAV. V. FIG. 65.

Se dal centro C de' cerchi concentrici ABEFG, SHILM si tireranno quanti raggi si vogliono CA, CB, CE, CF, CG, che seghino l' una, e l' altra circonferenza; indi si condurranno le corde AB, BE, EF, FG, GA, ed HI, IL. LM, MS, SH; i due poligoni ABEFG, HILMS inscritti ne' medesimi cerchi saranno simili fra loro.

Dimostrazione. I due triangoli, ACB, HIC intorno al comune angolo in C hanno i lati proporzionali AC : CB : : HC : CI; perchè sono AC=CB, ed HC=CI (def. 15. lib. 2.); perciò (prop. 9. lib. 3.) essi triangoli saranno simili fra loro; sarà dunque l'angolo CAB=CHI, l' angolo CBA=CIH, e di più sarà AB : HI : : BC : CI ec. Medesimamente ne' triangoli BCE, ICL si dimostra l'angolo CBF=CIL, l'angolo CEB=CLI, e BE : IL : : BC : CI, e però (ass. 2) sarà tutto l'angolo ABE=HIL. Inoltre (ass. 1.) sarà AB : HI : : BE : IL. Col medesimo raziocinio dimostrasi l'angolo BEF=ILM, l' angolo EFG=LMS, l' angolo FGA=MSH ec., e che sta BE : IL : : EF : LM : : FG : MS : : GA : SH : : AB : HI; laonde (def. 1. lib. 3.) i poligoni ABEFG, ILMSH, sono simili tra di loro. Il che ec.

Corollario I. Se tutti gli angoli al centro, cioè ACB, BCE, ECF, ec. fossero uguali fra loro, allora gli archi opposti) parte 1. prop. 12. lib. 4.) sarebbero anche tra di loro uguali, e le corde sottendenti li medesimi archi uguali (parte 2. propos. 13. lib. 4.) sarebbero ancora uguali fra loro; perciò i poligoni sarebbero regolari, e simili.

Corollario II. Adunque gli angoli ai centri de' poligoni regolari simili sono uguali fra loro.

Corollario III. (Tav. V. Fig. 66) Se dal centro C a ciascun punto della periferia ABEFG s' intenderanno condotti i raggi CA, CB, CE ec. essi conterranno nel centro C angoli uguali, ed infinitamente piccoli; e se si concepiranno tirate le linee rette, che congiungano gli estremi de' medesimi raggi, esse linee rette saranno ancora infinitamente piccole, ed uguali fra loro, e si adatteranno colla periferia, e costituiranno un poligono regolare d' infiniti lati.

Similmente se s' intenderanno tirate linee rette, che congiungano i punti, ne' quali gli stessi raggi segano la periferia del cerchio minore, e concentrico HILMS, esse rette linee saranno eziandio infinitamente piccole, ed uguali tra di loro, e si adatteranno colla periferia, e formeranno un altro regolare poligono d' infiniti lati, che, per la dimostrazione antecedente, sarà simile all' altro poligono ABEFG. Adunque *i cerchi sono poligoni regolari simili d' infiniti lati.*

PROPOSIZIONE II.

TEOR. TAV. V. FIG. 67.

Le figure regolari simili (ABEFG, LMKRS) inscritte ne' cerchi sono fra loro come i quadrati de' raggi (AC, LI, ec.), o sia de' diametri, o de' cateti (CX, IZ).

Dimostrazione. Ne' triangoli isosceli ACB, LIM gli angoli ACB, LIM (cor. 2. propos. antec.) sono uguali fra loro, e (cor. 2. prop. 25. lib. 2.) sono segati per mezzo dalle perpendicolari, CX, IZ; onde i triangoli ACX, ILZ (ass. 9.) hanno l' angolo ACX=LIZ, e (ass. 16.) l' angolo AXC=LZI, e (cor. 7. propos. 24. lib. 2.) l' angolo rimanente XAC=ZLI; adunque (propos. 7. lib. 3.) sarà AC : LI :: AX : LZ :: CX : IZ. Ma (cor. 2. prop. 25. lib. 2.) AX è metà della retta AB, ed LZ è metà della retta LM; laonde (cor. 1. prop. 16. lib. 1.) sarà AX : LZ :: AB : LM; conseguentemente (ass. 1.) sarà AC : LI :: AB : LM :: CX : IZ, e si avrà (prop. 14. lib. 1.) $\overline{AC}^2 : \overline{LI}^2 :: \overline{AB}^2 : \overline{LM}^2 :: \overline{CX}^2 : \overline{IZ}^2$; ma (prop. 15. lib. 3.) i poligoni simili ABEFG, LMKRS stanno tra di loro come i quadrati de' lati omologi AB, LM, cioè :: $\overline{AB}^2 : \overline{LM}^2$; adunque (ass. 1.) staranno eziandio fra loro come i quadrati de' cateti CX, IZ, o de' raggi AC, LI, o sia come i quadrati de' diametri; perciocchè (cor. 1. prop. 16. lib. 2.) la ragione de' diametri è uguale alla ragione delle loro metà, cioè de' raggi. Dunque le figure regolari simili, ec. Il che ec.

È la prop. 1. del lib. 12. d' Euclide.

Corollario i. Perchè, d' ipotesi, abbiamo AB : LM :: BE : MK :: EF : KR, ec., e per l' antecedente dimostrazione egli è AB : LM :: AC : LI :: CX : IZ; perciò i lati de' simili poligoni regolari iscritti ne' cerchi sono fra loro nella ragione de' raggi, o sia de' diametri, o dei cateti.

Corollario ii. Inoltre perchè, d' ipotesi, abbiamo AB : LM :: BE : MK :: EF : KR :: FG : RS :: GA : SL; e però raccogliendo (propos. 9. lib. 1.) sarà AB+BE+EF+FG+GA : LM+MK+KR+RS+SL :: AB : LM; ma si è già dimostrato, che sta AB : LM :: AC : LI :: CX : IZ; adunque i perimetri de' poligoni simili inscritti ne' cerchi sono fra loro nella ragione de' raggi, o de' diametri, o de' cateti.

Corollario iii. Perchè tutti i raggi del cerchio fra loro, e tutti i lati d' un poligono regolare, inscritto nel cerchio, tra di loro sono uguali; perciò anche tutti i cateti d' un poligono regolare saranno fra loro uguali essendosi dimostrato, che sono nella ragione de' raggi, e de' lati.

Corollario iv. Parimente i circoli sono tra di loro in ragione duplicata, cioè come i quadrati de' raggi, o diametri, perciocchè i cerchi (cor. 3. prop. 1.) si deono considerare come poligoni simili d' infiniti lati.

È la prop. 2. del lib. 12. d' Euclide.

Corollario v. Ma le circonferenze de' cerchi essendo (cor. 3. propos. 1.) perimetri de' poligoni regolari simili d' infiniti lati, perciò (antec. cor. 2.) staranno fra loro come i diametri, o i raggi.

Corollario vi. Essendosi dimostrato, che i cerchi fra loro, ed i poligoni simili inscritti ne' cerchi, anche fra loro, stanno come i quadrati de' raggi, o diametri, perciò (ass. 1.) *i cerchi stanno fra loro come i poligoni simili inscritti in essi cerchi.*

Corollario vii. Gli archi simili de' cerchi (def. 6.) sono fra loro come le intere periferie; ma le periferie (antec. cor. 5.) stanno fra di loro come i raggi, o i diametri; adunque (ass. 1.) *gli archi simili de' cerchi sono fra loro nella ragione de' raggi, o diametri.*

Corollario viii. I circoli (antec. cor. 4.) stanno fra loro come i quadrati de' raggi; e però un raggio doppio descriverà un cerchio quadruplo; un raggio triplo descriverà un cerchio nonuplo del circolo descritto dal raggio semplice, ec. Similmente la quinta parte d'un raggio descriverà un cerchio, che sarà la venticinquesima parte del cerchio descritto da tutto il raggio, ec.

PROPOSIZIONE III.

PROBL. TAV. V. FIG. 68.

Nel dato cerchio descrivere un quadrato.

Al diametro AB si tiri un altro diametro perpendicolare EF; indi si tirino le corde AE, EB, BF, FA, e sarà AFBE il ricercato quadrato.

Dimostrazione. I quattro angoli al centro C sono uguali (ass. 16.) laonde (parte 1. prop. 12. lib 4.) gli archi opposti saranno anche uguali fra loro; e (parte 2. prop. 13. lib. 4.) le corde AF, FB, BE, EA sottendenti gli stessi archi saranno pure uguali fra loro; e gli angoli AFB, FBE, BEA, EAF (cor. 3. prop. 8. lib. 4.) sono tutti retti, ed uguali, essendo inscritti ne' mezzicerchi. Adunque la figura AEBF dimostrata equilatera, e rettangola è un quadrato (def. 28. lib. 2.). Il che ec.

È la prop. 6. del lib. 4. d' Euclide.

Annotazione. Se gli archi ALE, EIB, ec. (prop. 14. lib. 4.) si segheranno per mezzo in L, I, G, R, e si condurranno le corde AL, IE, EI, IB ec., allora si sarà iscritto un ottangolo regolare nel dato cerchio.

Che se gli archi sottesi dai lati dell' ottagono si segheranno anche per mezzo, e si tireranno le corde, allora sarà inscritta nel cerchio una figura regolare di sedici lati, e così continuando si descriveranno le regolari figure di 32. lati, di 64. ec.

PROPOSIZIONE IV.

PROBL. TAV. V. FIG. 69.

Nel dato cerchio descrivere un esagono regolare.

Fatto centro qualsivoglia punto F della periferia, e col medesimo raggio FC del dato cerchio descrivasi un altro cerchio, o arco ACE, che seghi in due punti A, ed E la periferia del cerchio dato. Poscia dai punti A, F, ed E si tirino nel dato cerchio i diametri AM, FL, EB. Finalmente tirinsi le corde FA, AB, BL, LM, ME, EF, e sarà inscritto nel dato cerchio il ricercato esagono ABLMEF.

Dimostrazione. Il triangolo CFE contenuto da' raggi FC, FE, EC di cerchi uguali è equilatero; e però (cor. 4. propos. 25. lib. 2.) l' angolo ECF è la terza parte di due angoli retti, e la sua misura, cioè l' arco EF è la terza parte della semicirconferenza EFAB, la quale (cor. def. 7. lib. 4.) è la misura di due angoli retti; vale a dire l' arco EF è di 60. gradi. Similmente nel triangolo equilatero AFC, l' angolo ACF è la terza parte di due angoli retti, e l' arco AF sua misura è un' altra terza parte della semicirconferenza EFAB, cioè di 60. gradi; in conseguenza il rimanente arco AB sarà la rimanente terza parte della semiperiferia EFAB, e l' angolo opposto ACB sarà ancor esso la terza parte di due retti, cioè di 60. gradi; perciò i tre angoli ECF, FCA, ACB (ass. 1.) saranno fra loro uguali; e ad essi sono anche uguali gli angoli alla cima opposti BCL, LCM MCE (propos. 17. lib. 2.); essendo adunque uguali fra loro i sei angoli al centro C, gli archi opposti (parte 1. propos. 12. lib. 4.) saranno ancora uguali tra di loro, e le corde AB, BL, LM, ME, EF, FA, che gli sottendono (parte 2. prop. 13. lib. 4.) saranno eziandio uguali tra di loro.

Inoltre tutti gli angoli ABL, BLM, LME, MEF, ec. (parte 2. prop. 12. lib. 4.) sono fra loro uguali, perchè insistono sopra archi uguali AFEML, MEFAB ec.; mentre ciascuno di essi archi contiene quattro seste parti della periferia intera. Laonde l' esagono ABLMEF è equilatero, ed equiangolo, cioè regolare, inscritto nel cerchio. Il che ec.

È la prop. 15. del lib. 4. d' Euclide.

Corollario I. Dalla costruzione antecedente si vede chiaramente, che il lato del sessagono inscritto nel cerchio è uguale al raggio dello stesso cerchio. Perciò l' apertura dal compasso, con cui si descrive il cerchio, applicata alla circonferenza, la divide in sei parti uguali; e per questa ragione il compasso chiamasi anche *sesta*, o *seste*.

Corollario II. Se nel descritto esagono si tirano le corde AE, AL, LE, il triangolo inscritto EAL sarà equilatero, perchè i suoi lati sottendono archi uguali. Inoltre se gli archi sottesi dai lati uguali dell' esagono si segheranno per mezzo, e si tireranno le corde, allora sarà inscritto nel cerchio un dodecagono regolare.

Annotazione. Ogni poligono regolare inscritto nel cerchio divide la periferia, che è di 360. gradi, in altrettante parti, o archi uguali, quanti sono i lati del poligono inscritto (def. 2.). Perciò il lato del triangolo equilatero inscritto nel cerchio sottende un arco di gradi $\frac{360}{3}$, cioè di 120. gradi. Il lato del quadrato sottende un arco di gradi $\frac{360}{4}$, cioè di 90. gradi. Il lato del pentagono sottende un arco di gradi $\frac{360}{5}$, cioè di 72. gradi. Il lato dell' esagono sottende un arco di 60. gradi, e così discorrendo degli altri.

Inoltre perchè la misura dell' angolo al centro del poligono (def. 4.) è l' arco sotteso dal lato del medesimo poligono; e però l' angolo al centro del poligono regolare si ritrova dividendo la periferia, cioè 360. gradi, pel numero de' lati del dato poligono. Per

esempio l' angolo al centro del pentagono sarà di gradi $\frac{360}{5}$, cioè di 72. gradi. L' angolo al centro del decagono sarà di gradi $\frac{360}{10}$, cioè di 36. gradi, e così degli altri.

PROPOSIZIONE V.

PROB. TAV. VI. FIG. 70.

D' intorno al dato cerchio (SHM) descrivere un rettilineo equiangolo ad un altro rettilineo dato (ABC).

Si prolunghino a uno a uno tutti i lati del dato rettilineo in giro verso una parte solamente, e tutti gli angoli esteriori ACE, FAB, CBI ec. (cor. 10. prop. 24. lib. 2.) insieme presi saranno uguali a quattro angoli retti. Poscia nel dato cerchio tirisi un raggio LH, e facciasi l' angolo HLM (propos. 10. lib. 2.) uguale all' angolo esteriore ACE; indi sopra ML costituiscasi l' angolo MLS=FAB, e così continuando, se la figura avrà più angoli, sarà il rimanente angolo CBI uguale all' angolo SLH; perchè tutti gli angoli, che si possono fare nel punto L, insieme presi (cor. 3. prop. 15. lib. 2.) sono anch' essi uguali a quattro retti. Finalmente pei punti H, M, S (prop. 6. lib. 4.) tirinsi le tangenti RZ, TZ, TR, che prolungate da amendue le parti (cor. 3. prop. 24. lib. 2.) s' incontreranno come in R, T, Z, e sarà RTZ la ricercata figura.

Dimostrazione. I quattro angoli interni del quadrilatero ZHLM insieme presi (cor. 8. prop. 24. lib. 2.) sono uguali a quattro angoli retti; ma di essi i due LMZ, LHZ sono, di costruzione, ambedue retti; e però gli altri due HLM, HZM presi insieme saranno uguali ai due angoli retti; cioè (ass. 1.) saranno uguali a due angoli ACE, ACB, i quali insieme presi sono (prop. 15. lib. 2.) parimente uguali a due retti, e da queste somme uguali levando gli angoli, di costruzione, uguali HLM, ACE, resterà (ass. 3.) l'angolo HZM, o sia TZR uguale all' angolo ACB. Nella stessa maniera si dimostra l' angolo T=CAB, e l' angolo R=ABC, e così degli altri, se la data figura avrà maggior numero d' angoli. E però la figura RTZ è equiangola alla figura ABC, ed i suoi lati RZ, RT, TZ (cor. 1. prop. 6. lib. 4.) toccano il cerchio in H, S, ed M. Dunque la figura RTZ (def. 3.) è circoscritta al dato cerchio, ed è equiangola alla data figura. Il che ec.

È la prop. 3. del lib. 4. d' Euclide.

(Tav. VI. Fig. 71.) Nella medesima maniera al cerchio SPVHM si circoscrive il poligono TZRGD equiangolo al poligono ACBKN.

Corollario i. Se il dato poligono sarà regolare, allora tutti gli angoli T, Z, R, G, D del poligono circoscritto al cerchio saranno eziandio fra loro uguali; e tirate le rette LT, LZ, LR, LG ec., perchè (cor. 2. prop. 16. lib. 4.) abbiamo la tangente TS=TM, ed il raggio SL=LM, ed il lato LT comune ai due triangoli STL, LTM; perciò (prop. 9. lib. 2.) sarà l' angolo TLS=TLM, l' angolo LTS=LTM; cioè l' angolo LTS sarà la metà di tutto l' angolo STM. Per la stessa ragione l' angolo LDS è la metà dell' angolo PDS; laonde (ass. 9.) sarà l' angolo LTS=LDS. Ma (ass. 16.) abbiamo l' angolo LST=LSD; perciò (cor. 7. prop. 24. lib. 2.) il rimanente angolo TLS sarà uguale all' angolo rimanente DLS; ed il lato LS, frapposto tra gli angoli uguali, è comune ai due triangoli STL, SDL; dunque (prop. 5. lib. 2.) sarà ST=SD. Similmente dimostrasi TM=MZ; ma abbiamo TS=TM (cor. 3. prop. 16. lib. 4.); laonde (ass. 8.) sarà TD=TZ. Parimente dimostrasi TD =DG=GR=RZ, e così continuando, se vi sarà maggior numero di lati. Perlaqualcosa quando il poligono dato è regolare, anche il poligono circoscritto al cerchio sarà regolare.

Corollario ii. Inoltre condotte le rette VH, HM, MS, SP, ec. il poligono PSMHV inscritto nel cerchio sarà anch' esso regolare. Perciocchè essendosi dimostrati uguali gli angoli TLM, TLS, DLS, DLP, ec., anche gli angoli MLS, SLP, PLV, ec. doppi di essi, saranno fra loro uguali, e sono contenuti dai raggi uguali LM, LS, LP, ec.; dunque (prop. 6. lib. 2.) le rimanenti cose de' triangoli MLS, SLP, PLV ec. saranno uguali fra loro, cioè i lati MS=SP=PV, ec., e gli angoli LMH=LMS=LSM=LSP, ec. conseguentemente saranno anche uguali i loro doppi, cioè gli angoli HMS=MSP=SPV=PVH ec., perciò il poligono PVHMS sarà regolare.

Corollario iii. Dalle antecedenti cose dimostrate ne nasce, che l' angolo del poligono regolare (def. 4.) è uguale al residuo, che rimane, sottraendo l' angolo al centro del poligono dalla somma di due retti, cioè da 180. gradi. Così l' angolo del pentagono è di 180—72. gradi, cioè di 108. gradi; perciocchè l' angolo HMS è doppio dell' angolo LMS, cioè è uguale ai due angoli uguali LMS, LSM; e dalla somma di due retti LMS+LSM+MLS togliendo l' angolo MLS al centro, rimane la somma LMS+LSM uguale all' angolo HMS del poligono, come chiaramente si vede. L' angolo dell' esagono sarà di 180—60, cioè di 120. gradi. L' angolo del decagono sarà di gradi 180—36, cioè di 144. gradi. Nella stessa maniera, ritrovato l' angolo al centro (annotaz. propos. 4.) di qualunque poligono regolare, e sottraendolo da 180. gradi, si avrà l' angolo di esso poligono.

PROPOSIZIONE VI.

PROB. TAV. VI. FIG. 72.

Nel dato triangolo (RTZ, inscrivere un cerchio.

I due angoli RTZ, TRZ, (prop. 11. lib. 2.) si dividano per mezzo colle rette LT, LR, le quali (cor. 3. prop. 24. lib. 2.) si segheranno in qualche punto, come in L, da cui ai lati del triangolo (prop. 14. lib. 2.) si tirino le perpendicolari LS, LM, LH. Indi fatto centro L coll' intervallo di una di esse perpendicolari descrivasi il cerchio HSM, che sarà inscritto nel triangolo dato.

Dimostrazione. Abbiamo di costruzione l' angolo STL—MTL, e (ass. 16) l' angolo LST—LMT, e per conseguenza (cor. 7. prop. 24. lib. 2.) l' angolo SLT—TLM, ed il lato LT posto tra gli angoli uguali è comune ai due triangoli LST, LMT; laonde (prop. 5. lib. 2.) sarà LS=LM. Similmente dimostrasi LS =LH ne' triangoli SLR, RHL; perciò le tre perpendicolari LS, LM, LH (ass. 1.) sono fra loro uguali, e la circonferenza del cerchio descritto dal centro L, col raggio LH, passerà pei punti H, M, S, ed il cerchio HSM sarà inscritto nel dato triangolo; perchè i lati del triangolo essendo, di costruzione, perpendicolari agli estremi de' raggi, sono tangenti del cerchio (cor. 1. prop. 6. lib. 4.). Il che ec.

È la prop. 4. del lib. 4. d' Euclide.

Annotazione. Nello stesso modo s' inscrive il cerchio in qualsivoglia dato poligono regolare.

Corollario I. Dall' antecedente dimostrazione ne segue, che i cateti delle figure circoscritte al cerchio, cioè le perpendicolari LS, LH ec. sono uguali al raggio del cerchio inscritto.

Corollario II. Inoltre egli è evidente, che il perimetro di qualsivoglia figura circoscritta al cerchio (ass. 17.) è maggiore del perimetro, o sia circonferenza del cerchio inscritto. Per esempio le due rette TS, TM, insieme prese, sono maggiori dell' arco frapposto SM, e così delle altre; onde la somma de' lati RT, RZ, TZ sarà maggiore della periferia del cerchio inscritto HSM.

PROPOSIZIONE VII.

TEOR. TAV. VI. FIG. 73.

L' area, o superficie di qualunque poligono regolare è uguale ad un triangolo rettilineo, la cui base sia uguale al perimetro, e l' altezza sia uguale al cateto del medesimo poligono.

Dimostrazione. Dal centro C del dato poligono tirinsi i raggi CA, CB, CF, ec., ed il poligono resterà segato in altrettanti triangoli, quanti sono i lati del poligono, e tutti essi triangoli sono uguali fra loro (prop. 9. lib. 2.), perchè sono contenuti da' raggi uguali, e dagli uguali lati del poligono regolare. Perciò l' intero poligono ABEFG altrettante volte conterrà uno di essi triangoli ACB, quanti sono i lati di esso poligono.

Si prolunghi AB verso H, e facciasi AH uguale al perimetro del poligono ABEFG; vale a dire il lato AH contenga tante volte un lato AB, quanti sono i lati del poligono. Si tirino la CH, ed il cateto CR.

Il triangolo ACH (parte 2. prop. 1. lib. 3.) sta al triangolo ugualmente alto ACB come la base AH alla base AB. Ma la base AH, per costruzione, contiene, in questa figura, cinque volte la base AB; adunque anche il triangolo ACH (def. 8. lib. 1.) conterrà cinque volte il triangolo ACB; ed il poligono ABEFG contiene parimente cinque volte l' istesso triangolo ACB; perciò (ass. 8.) il poligono ABEFG sarà uguale al triangolo ACH, la cui base AH è uguale alla somma de' lati del poligono, e l' altezza CR è il cateto del medesimo poligono. Lo stesso si dimostra di qualunque altro poligono regolare.

Il che ec.

Corollario I. Adunque l' area di qualsivoglia poligono regolare si troverà moltiplicando il cateto per la metà del suo perimetro, ovvero tutto il perimetro nella metà del cateto (cor. 2. propos. 31. lib. 2.).

Corollario ii. (Tav. VI. Fig. 74.) Il cerchio (cor. 3. prop. 1.) è un poligono regolare d' infiniti lati, che essendo infinitamente piccoli si adattano colla periferia, cioè formano la stessa periferia, ed i cateti, o le perpendicolari tirate dal centro sopra gli stessi lati infinitamente piccoli sono gli stessi raggi del cerchio. Perlaqualcosa l' area di qualsivoglia circolo EFB sarà uguale al triangolo ABC, la cui base BC, perpendicolare al raggio AB, sia uguale al perimetro, cioè alla circonferenza, e l' altezza sia il raggio, AB, del cerchio.

Ma l' area del triangolo ABC (cor. 2. prop. 31. lib. 2.) è uguale alla metà del prodotto della base BC nella altezza AB. Perlaqualcosa *l' area*, o sia *superficie del cerchio* è uguale alla metà del rettangolo contenuto dal raggio, e dalla periferia; ovvero è uguale al rettangolo formato dal raggio, e dalla metà della circonferenza, o pure è uguale al prodotto, o sia rettangolo contenuto da tutta la periferia, e dalla metà del raggio, o sia dalla quarta parte del diametro.

Conseguentemente il rettangolo contenuto dal raggio, e dalla periferia è doppio dell' area del cerchio; ed il rettangolo contenuto dal diametro, e dalla circonferenza è quadruplo dell' area del medesimo cerchio.

Annotazione i. La regola geometrica di rettificare la circonferenza del cerchio, cioè di trovare una linea retta perfettamente uguale alla circonferenza, finora i Geometri non l' hanno potuta ritrovare, e forse non mai si troverà, perchè probabilmente il diametro, e la circonferenza del cerchio sono due linee tra di loro incommensurabili. Ciò non ostante, dato il diametro d' un cerchio, si trova la periferia colle regole di approssimazione state inventate da Archimede principe de' Matematici, e da altri valentissimi Geometri.

Dato il diametro d' un cerchio; se si dividerà in sette parti uguali, allora la sua periferia, come dimostrò Archimede, conterrà ventidue delle medesime parti incirca.

Più esatta, e più prossima alla vera si è la regola stata ritrovata da Mezio, cioè dividendo il diametro in cento tredici parti uguali, la lunghezza della circonferenza sarà circa trecencinquantacinque delle medesime parti.

(Tav. VI. Fig. 75.) Dato adunque il cerchio ACBM, il cui diametro AB sia di lunghezza 35. oncie, a ritrovare la periferia facciasi la regola delle proporzioni $7 : 22 :: 35$ al quarto termine proporzionale, che (prop. 10. lib. 1.) sarà $\frac{22 \times 35}{7}$, cioè 110; vale a dire la lunghezza della periferia del medesimo cerchio ACBM, secondo la regola d' Archimede, sarà 110. oncie in circa.

Conseguentemente (antec. cor.) moltiplicando $\frac{35}{2}$ metà del diametro, per $\frac{110}{2}$, metà della circonferenza; cioè $17\frac{1}{2}$ per 55, il prodotto $962\frac{1}{2}$ oncie quadrate sarà la superficie del dato cerchio.

Ma facendo la proporzione $113 : 355 :: 35$ al quarto proporzionale, che (prop. 10. lib. 1.) sarà $\frac{355 \times 35}{113}$ cioè $109\frac{108}{113}$, si avrà una più esatta lunghezza della periferia di oncie $109\frac{108}{113}$. Laonde pel corollario antecedente, moltiplicando $54\frac{221}{226}$, metà della periferia, per $17\frac{1}{2}$ metà del diametro, si otterrà nel prodotto l' area del cerchio dato di oncie quadrate $962\frac{51}{452}$.

Ma se fosse data la circonferenza, per esempio, di oncie 88, e si dovesse trovare il diametro, allora facciasi la regola del tre $22 : 7 :: 88$ al quarto proporzionale, il quale (propos. 10. lib. 1.) sarà 28; cioè in tal caso la lunghezza del diametro sarà di oncie 28., ovvero facciasi $355 : 113 :: 88 : \frac{113 \times 88}{355}$, e si troverà una più esatta lunghezza del diametro di oncie $28 \frac{4}{355}$.

Inoltre se il diametro del cerchio si supporrà diviso in 100,000 parti uguali, allora la circonferenza ne conterrà 314172 di esse parti, e questa relazione del diametro alla periferia è molto più esatta delle due antecedenti, delle quali quella di Archimede eccede, e quella di Mezio manca dalla vera ragione del diametro alla circonferenza, e quest' ultima è maggiore di quella di Mezio, e minore di quella di Archimede, e però più approssimante alla vera. Ma perchè tutte queste diverse ragioni sono poco differenti l' una dall' altra, e la più facile di tutte si è quella di Archimede, perciò i Geometri comunemente di essa si servono, quando non si tratta di cose, che richieggano una somma esattezza.

Annotazione II. Dalla sopraddetta regola di Archimede ne segue, che il quadrato del diametro del cerchio sta alla superficie, o area dello stesso cerchio come il numero 14. al numero 11.

Imperciocchè se il diametro del cerchio si chiamerà a, supponendo, che la ragione del diametro alla periferia sia $:: m : n$; allora per ritrovare la periferia si faccia la proporzione $m : n :: a$ al quarto termine proporzionale, che sarà $\frac{an}{m}$ (prop. 10. lib. 1.) dunque la circonferenza del dato cerchio sarà $\frac{an}{m}$, la quale moltiplicata per $\frac{a}{4}$, quarta parte del diametro, il prodotto $\frac{a^2 n}{4m}$, pel corollario antecedente, sarà l' area del cerchio dato. Ma quando ci serviamo della regola di

Archimede, allora m significa 7, ed n significa 22, abbiamo cioè $m=7$, ed $n=22$; laonde (ass. 4.) si avrà $7n=22m$, e moltiplicando questa equazione per $2a^2$, doppio quadrato del diametro, (ass. 4.) avremo $14a^2n=44a^2m$; e dividendo quest' equazione per $4m$ (ass. 5.) resterà $\frac{14a^2n}{4m}=11a^2$, e dissolvendo (cor. 1. prop. 2. lib. 1.) si avrà $14 : 11 :: a^2 : \frac{a^2n}{4m}$. Ma a^2 è il quadrato del diametro, e $\frac{a^2n}{4m}$ è l'area del dato cerchio. Dunque il quadrato del diametro sta alla superficie del cerchio $:: 14 : 11$.

Perlaqualcosa avendo il diametro d' un cerchio, si faccia il suo quadrato (aritm. 142.); indi s' instituisca la proporzione $14 : 11 ::$ il quadrato del diametro al quarto termine proporzionale, che sarà l' area del dato cerchio; vale a dire il quadrato del diametro si moltiplichi per 11; ed il prodotto si divida per 14, il quoziente sarà la superficie del dato circolo. Verbigrazia a trovare la superficie del circolo, che ha il diametro di 35 oncie, si moltiplichi il quadrato di 35, che è 1225, per 11, ed il prodotto 13475 si divida per 14, ed il quoziente $962 \frac{7}{14}$ sarà l' area del dato cerchio, quale già l' abbiamo trovata nell' annotazione antecedente.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA TAV. VI. FIG. 76.

Il cerchio è maggiore di tutte le figure regolari, che gli sono isoperimetre.

Dimostrazione. Una figura circoscritta al cerchio non può essere isoperimetra al medesimo cerchio; poichè (cor. 2. prop. 6.) il perimetro d' una figura circoscritta è maggiore della periferia del cerchio inscritto; e però la figura ABCDE isoperimetra al cerchio FLGKM sarà minore della figura circoscritta allo stesso cerchio. Ma il cateto della figura circoscritta è il medesimo raggio del cerchio (cor. 1. propos. 6.); perciò il cateto SI della figura isoperimetra al cerchio sarà minore del raggio SL; ma l' area del cerchio (cor. 2. prop. antec.) si ritrova moltiplicando il raggio SL nella metà della periferia FLGKM; e l' area del poligono regolare (cor. 1. prop. antec.) si ottiene moltiplicando il cateto SI nella metà del perimetro ABCDE; e si è dimostrato, che il raggio SL è sempre maggiore del cateto SI, e la metà della periferia è uguale alla metà del perimetro del poligono, perchè, d' ipotesi, sono figure isoperimetre. Adunque il rettangolo contenuto dalla semicirconferenza, e dal raggio è maggiore del rettangolo contenuto dalla metà del perimetro del poligono, e dal cateto; cioè il cerchio è maggiore del poligono isoperimetro allo stesso cerchio. Il che ec.

PROPOSIZIONE IX.

TEOR. TAV. VI. FIG. 77.

Il cerchio (AEFM) sta alla zona (EIALF) ad esso inscritta come il quadrato del raggio (AC) dello stesso cerchio al rettangolo (AB×BF) contenuto dalla larghezza (AB) della zona, e dalla rimanente parte (BF) del diametro (AF) dello stesso cerchio.

Dimostrazione. Il diametro AF è segato in parti uguali nel punto C, ed in parti disuguali in B; e però (prop. 20. lib. 4.) sarà $\overline{AC}^2 = AB\times BF + \overline{BC}^2$, e per antitesi (aritm. 106.) rimarrà $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = AB\times BF$, ma (cor. 4. prop. 2.) il cerchio AEFM sta al cerchio ILB : $\overline{AC}^2 : \overline{BC}^2$, cioè AEFM : ILB :: $\overline{AC}^2 : \overline{BC}^2$, e convertendo (cor. 1. propos. 5. lib. 1.) si avrà AEFM : AEFM−ILB :: $AC^2 : \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$. Ma dal

cerchio AEFM levando il cerchio ILB rimane la zona EIALF, cioè abbiamo AEFM−ILB=EIALF, e si è dimostrato essere $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = AB\times BF$; perciò, nell' antecedente ultima proporzione sostituendo cose uguali a cose uguali, sarà AEFM : EIALF :: $\overline{AC}^2 : AB\times BF$, cioè il cerchio AEFM sta alla zona ad esso inscritta, come il quadrato del raggio AC al rettangolo AB×BF contenuto dalle parti AB, BF del diametro AF. Il che ec.

Corollario I. (Tav. VI. Fig. 77. 78.) Qualunque altro cerchio STV (cor. 4. prop. 2.) sta al cerchio AEFM :: $\overline{RS}^2 : \overline{AC}^2$, e, per l' antecedente dimostrazione, abbiamo il cerchio AEFM alla zona EIALF :: $\overline{AC}^2 : AB\times BF$; perciò ordinando (prop. 7. lib. 1.) sarà il cerchio STV alla zona EIALF :: $\overline{RS}^2 : AB\times BF$; vale a dire qualsivoglia circolo sta a qualunque zona, come il quadrato del raggio di esso cerchio al rettangolo compreso dalla larghezza della zona, e dalla rimanente parte del diametro del maggior cerchio, che contiene la zona.

Corollario II. Se dal punto B sopra il diametro AF s' innalzerà una perpendicolare BZ terminata dalla periferia in Z; allora (cor. 1. prop. 18. lib. 4) si avrà $AB\times BF = \overline{BZ}^2$. Ma per l' antecedente corollario abbiamo il cerchio STV alla zona EIALF :: $\overline{RS}^2 : AB\times BF$; laonde, sostituendo $\overline{BZ}^2$ invece dell' uguale rettangolo AB×BF, si avrà STV : EIALF :: $\overline{RS}^2 : \overline{BZ}^2$. Ma il cerchio STV (cor. 4. prop. 2.) sta al cerchio, che si descrive dal raggio BZ :: $\overline{RS}^2 : \overline{BZ}^2$. Adunque (ass. 1.) sarà STV : EIALF :: STV al cerchio descritto dal raggio BZ; or essendo il primo termine di questa proporzione uguale al terzo, (cor. 2. prop. 3. lib. 1.) anche il secondo sarà uguale al quarto, cioè la zona EIALF sarà uguale al cerchio descritto dalla ordinata, o sia dalla perpendicolare BZ, la quale (prop. 18. lib. 4.) è media proporzionale tra le parti AB, BF del diametro della medesima zona.

Corollario iii. Dunque per trovare l'area della zona EIALF basterà (cor. 2., ed annotaz. 1. prop. 7.) ritrovare la superficie del cerchio, il cui raggio sia la perpendicolare BZ, ed essa superficie sarà quella della zona, essendosi dimostrato esso cerchio uguale alla zona.

PROPOSIZIONE X.

PROB. TAV. VI. FIG. 79.

Nel dato cerchio inscrivere un triangolo equiangolo ad un triangolo dato (ABC).

Tirisi la retta DEF (prop. 6. lib. 4.) tangente del cerchio nel punto E. Poscia (prop. 10. lib. 2.) facciasi l'angolo DEL uguale all'angolo C., e l'angolo MEF=A, e si tiri la retta LM, sarà ELM il ricercato triangolo.

Dimostrazione. Imperciocchè l'angolo DEL (cor. 4. propos. 8. lib. 4.) è uguale all'angolo M, e, di costruzione, è uguale all'angolo C; perciò (ass. 1.) sarà l'angolo M=C. Nella stessa maniera dimostrasi l'angolo L=A, perchè tutti due sono uguali all'angolo MEF; laonde (cor. 7. prop. 24. lib. 2.) sarà il rimanente angolo LEM uguale all'angolo rimanente B, ed il triangolo LME inscritto nel cerchio sarà equiangolo al triangolo dato ABC. Il che ec.

È la prop. 2. del lib. 4. d'Euclide.

Corollario i. (Tav. VI. Fig 80.) Ma se si dovrà segare dal dato cerchio una porzione, o segmento, che contenga un angolo uguale ad un angolo dato ζ; allora tirata, come sopra, la tangente EAL, e fatto l'angolo EAB=ζ, il segmento BMA sarà il ricercato. Perciocchè se a qualsivoglia punto M dell'arco di esso segmento si tireranno le corde BM, AM, formeranno l'angolo BMA (cor. 4. prop. 8. lib. 4.) uguale all'angolo EAB, e conseguentemente (ass. 1.) anche uguale all'angolo dato ζ.

È la prop. 34. del lib. 3. d'Euclide.

Corollario ii. Se sopra una data linea retta AB bisognasse descrivere un segmento di cerchio, che contenesse un angolo uguale ad un angolo dato EAB, o sia ζ; allora sopra la retta EL (prop. 13. lib. 2.) s'innalzi una perpendicolare AC. Quindi sopra la retta AB, e nel punto B (prop. 10. lib. 2.) costituiscasi l'angolo ABC=BAC; indi fatto centro il punto C, in cui si segano le rette AC, BC, e coll'intervallo di una di esse AC, o CB (essendo CB=CA per la prop. 27. del lib. 2.) descrivasi il cerchio BMAS, il cui segmento BMA conterrà l'angolo BMA (cor. 4. prop. 8. lib. 4.) uguale all'angolo EAB, e per conseguenza anche uguale (ass. 1.) all'angolo dato ζ; essendochè la linea EL perpendicolare all'estremità del raggio AC è tangente del cerchio (cor. 1. prop. 6. lib. 4.).

Se il dato angolo fosse l'ottuso x, a cui sia fatto uguale l'angolo LAB; in tal caso fatta la costruzione, come sopra, per l'angolo conseguente acuto ζ, o sia per l'uguale angolo EAB, rimarrà descritto il segmento ASB sopra la data retta AB, che contiene l'angolo BSA uguale all'angolo LAB (cor. 4. prop. 8. lib. 4.); e però (ass. 1.) uguale all'angolo x.

Ma quando il dato angolo è retto, allora dividasi in due parti uguali la data retta, e sopra di essa descrivasi un mezzo cerchio, che (cor. 3. propos. 8. lib. 4.) conterrà l'angolo uguale al dato angolo retto.

PROPOSIZIONE XI.

TEOR. TAV. VI. FIG. 81.

Se il raggio AC d'un cerchio ABRGE sarà segato in media, ed estrema ragione nel punto L (prop. 17. lib. 4.) e dall'estremo A del raggio CA si tirerà la corda AB uguale alla porzione maggiore CL; condotte il raggio CB, si avrà il triangolo isoscele ACB, in cui ciascuno de' due angoli uguali CAB, CBA alla base sarà doppio del rimanente angolo verticale ACB, e la base AB sarà un lato del decagono regolare inscritto nello stesso cerchio.

Tirisi la retta BL, ed intorno al triangolo BLC (cor. prop. 4. lib. 4.) si descriva il cerchio BLCM.

Dimostrazione. Perchè, d'ipotesi, abbiamo ∺ AC:CL:AL, perciò (cor. prop. 1. lib. 1.) sarà $AC\times AL=\overline{CL}^2$, ma, per costruzione, abbiamo $AB=CL$; onde (arit. 179.) sarà $\overline{AB}^2=\overline{CL}^2$; perciò (ass. 1.) sarà $AC\times AL=\overline{AB}^2$; e però (cor. 1. prop. 16. lib. 4.) la retta AB è tangente del cerchio BLCMS, e BL lo sega; laonde (cor. 4. prop. 8.) lib. 4.) sarà l'angolo $ABL=LCB$, o sia ACB, e aggiugnendovi l'angolo comune LBC, (ass. 2.) si avrà $ABL+LBC=LCB+LBC$; ma nel triangolo BLC (parte 2. prop. 24. lib. 2.) abbiamo l'angolo esteriore $BLA=LCB+LBC$; dunque (ass. 1.) sarà l'angolo $BLA=ABL+LBC$, cioè $BLA=ABC$, o sia $=BAC$; perchè, di costruzione, egli è l'angolo $ABC=BAC$, adunque il triangolo ABL è isoscele, ed ha il lato $BL=BA$, ma, di costruzione, abbiamo $BA=CL$; onde (ass. 1.) sarà $BL=CL$, e (prop. 25. lib. 2.) sarà ancora l'angolo $LCB=LBC$; ma abbiamo già dimostrato l'angolo $ABL=LCB$, conseguentemente (ass. 1.) sarà l'angolo $ABL=LBC$; perlaqualcosa l'angolo ABC, o il suo uguale BAC sarà doppio dell'angolo ACB, che si è dimostrato uguale all'angolo ABL, o sia LBC. Dunque il triangolo isoscele ABC ha ciascun angolo della base doppio dell'angolo verticale. Il che ec.

È la prop. 10. del lib. 4. d'Euclide.

Inoltre perchè tutti i tre angoli d'un triangolo rettilineo insieme presi (prop. 24. lib. 2.) sono uguali

a due retti, la misura de' quali (cor. def. 7. lib. 4.) è di 180. gradi; però ciascun angolo alla base del triangolo ACB sarà di 72. gradi, e l'angolo verticale ACB sarà di 36. gradi; poichè $72+72+36=180$; laonde il lato opposto AB sottendente un angolo di 36. gradi (annotaz. prop. 4.) sarà un lato del decagono regolare; che però segando gli archi BS, SR, RI, IH, HG ec. uguali all' arco AB, e tirando le corde BS, SR, RI, IH, HG, ec. si avrà il decagono ABSRIHGFED inscritto nel dato cerchio. Il che ec.

Corollario i. La misura dell' angolo LCB alla periferia del cerchio LCMSB (prop. 8. lib. 4.) è la metà dell' arco opposto LB; ma l'angolo LCB si è dimostrato essere di 36. gradi, il cui doppio è 72; laonde l' arco opposto LB sarà di gradi 72, e la corda sottendente LB (annotaz. propos. 4.) sarà un lato del pentagono regolare inscritto nel cerchio CLBSM; ma, di costruzione, e dimostrazione, abbiamo $CL=LB=BS$; se dunque segherassi l' arco $CM=CL$, tirate le corde CM, CS, si avrà il pentagono CMSBL inscritto nel cerchio CLBSM.

Corollario ii. (Tav. VI. Fig. 82.) Avendo descritto, come sopra, il triangolo isoscele CAB, l'arco AB è di 36. gradi, e però, se dal centro A, col raggio AB si segherà l' arco $AD=AB$, e si condurrà la corda DB, sarà questa un lato del pentagono regolare (annotaz. prop. 4.), perchè sottende un arco DAB di 72. gradi; onde segando gli archi DEF, FGH ec. uguali all' arco DAB, e condotte le corde DF, FH, HR, RB, sarà inscritto nel cerchio il pentagono regolare DFHRB. Inoltre se nel medesimo cerchio (cor. 2. prop. 4.) s'inscriverà il triangolo equilatero HES, allora l' arco EIFGH sotteso dal lato HE del triangolo equilatero sarà di 120. gradi (annotaz. prop. 4.), e l' arco DEIFGH sotteso da due lati DF, FH del pentagono sarà di gradi

72+72, cioè di 144., e la differenza di essi archi DEIFGH–EIFGH, cioè l' arco DE sarà di gradi 144–120, cioè di 24. gradi. Ma il 24 è la quindicesima parte di 360. gradi; e però tirata la corda ED sarà essa un lato del quindecagono regolare inscritto in esso cerchio; laonde se si segheranno gli archi EI, IF, FG, ec. uguali all' arco ED, e si tireranno le corde sottendenti essi archi, avrassi il quindecagono inscritto nel dato cerchio.

È la prop. 16. del lib. 4. d' Euclide.

Corollario iii. Adunque se l' angolo verticale d' un triangolo isoscele sarà di 36. gradi, allora ciascun angolo alla base sarà di 72. gradi; e vicendevolmente essendo ciascun angolo alla base di 72. gradi, l' angolo verticale sarà di 36. gradi.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA TAV. VI. FIG. 83.

Se una linea retta (BR) sarà composta dalla somma del lato (BI) del decagono, e del lato (IR) dell' esagono inscritti nel medesimo cerchio (ADIBM); essa retta (BIR) sarà segata (in I) in media, ed estrema ragione, ed il lato (IR) dell' esagono sarà la porzione maggiore; sarà cioè ∺ BR : RI : IB.

Tirinsi il diametro BCA, il raggio CI, e la retta CR.

Dimostrazione. Perchè, d' ipotesi, IR è lato dell' esagono inscritto nel cerchio ADIBM, perciò (cor. 1. prop. 4.) essa retta è uguale al raggio CI, ed il triangolo CIR è isoscele. Inoltre essendo, d' ipotesi, la retta BI lato del decagono inscritto nello stesso cerchio; e però nel triangolo isoscele BCI (annotaz. prop. 4.) l' angolo verticale ICB sarà di 36. gradi, in conseguenza (cor. 3. prop. antec.) ciascun angolo CBI, CIB alla base sarà di 72. gradi. Ma del trian-

golo CIR l' angolo esteriore CIB (parte 2. propos. 24. lib. 2.) è uguale ai due angoli interiori, ed opposti R, ed ICR insieme presi, i quali (prop. 25. lib. 2.) sono uguali fra loro; laonde ciascuno di essi sarà di 36. gradi, cioè la metà dell' angolo CIB di 72. gradi; perciò l' angolo RCB sarà di 72. gradi, per essere RCB=ICR+ICB (ass. 11.); e si è dimostrato l' angolo CBR anch' esso di 72. gradi. Dunque il triangolo CRB (parte 1. propos. 27. lib. 2.) sarà isoscele, e si è dimostrato equiangolo al triangolo BCI; onde (prop. 7. lib. 3.) starà il lato BR opposto all' angolo BCR, al lato BC sottoposto all' ugual angolo BIC, come lo stesso lato BC opposto all' angolo R nel triangolo BCR, al lato BI sottoposto all' ugual angolo BCI nel triangolo BIC; cioè sarà ∺ BR : BC : BI, ed invece del raggio BC sostituendo l' ugual retta RI, si avrà ∺ BR : RI : IB. Adunque la retta BR (prop. 17. lib. 4.) è segata in media, ed estrema ragione nel punto I. Il che ec.

È la prop. 9. del lib. 13. d' Euclide.

Corollario. Perlaqualcosa se la parte maggiore di una retta linea segata in media, ed estrema ragione sarà lato dell' esagono, cioè raggio del cerchio, allora la parte minore sarà lato del decagono inscritto nel medesimo cerchio.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOR. TAV. VI. FIG. 84.

Il quadrato del lato del pentagono regolare inscritto nel cerchio è uguale ai due quadrati de' lati dell' esagono, e del decagono inscritti nel medesimo cerchio.

Sia AB lato del pentagono inscritto, e l' arco sotteso ASLB di gradi 72. si seghi per mezzo in S (prop. 14. lib. 4.), ciascun arco AS, SB sarà di 36. gradi. Tirinsi le corde AS, BS, che (annotaz. prop. 4.) saranno lati del decagono.

Dal centro C al lato SB (propos. 14. lib. 2.) si tiri il raggio perpendicolare CRIL, il quale (prop. 2. lib. 4., e cor. 2. di essa) segherà per mezzo il lato SB in I, e l' arco SLB in L; onde l' arco BL=LS sarà di gradi 18., metà dell' arco BLS di 36. gradi. Dal punto R, in cui il raggio CL sega il lato AB al punto S, tirisi la retta RS, e si tirino i raggi CA, CB, e prendasi il raggio CA per lato dell' esagono (cor. 1. propos. 4.). Dico essere $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BS}^2$.

Dimostrazione. L'angolo ACB al centro del pentagono (annotaz. prop. 4.) è di 72. gradi; e però nel triangolo isoscele ACB gli angoli uguali CAB, CBA, alla base, saranno ciascuno di 54. gradi; perciocchè gradi 72+54+54 uguagliano 180. gradi, somma di due retti. Ma l' angolo ACR, o sia ACL è parimente di 54. gradi; poichè la sua misura è l'arco ASL, o sia AS+SL di gradi 36+18=54; perciò è l' angolo ACR=RAC, essendo dimostrati amendue di 54. gradi; in conseguenza il rimanente angolo ARC sarà di 72. gradi, e (parte 1. propos. 27. lib. 2.) sarà RA=RC, e i due triangoli ACB, ARC saranno equiangoli; laonde (prop. 7. lib. 3.) sarà AB : AC : : AC : AR. Dunque (prop. 1. lib. 1.) si avrà AB×AR=$\overline{AC}^2$. Inoltre i due triangoli RIS, RIB hanno il lato RI comune, il lato IS=IB, di costruzione, e gli angoli RIS, RIB retti di costruzione, ed uguali (ass. 16.); perciò (prop. 6. lib. 2.) sarà il lato RS=RB, l' angolo RSI=RBI, ed in conseguenza il triangolo SRB è isoscele; ma il triangolo ASB è parimente isoscele; perchè, di costruzione, è il lato SA=SB. Sicchè i due triangoli RBS, BAS saranno equiangoli, poichè hanno l' angolo in B comune, e l' angolo RSB=SAB, perchè sono tutti due uguali allo stesso angolo in B; onde il rimanente angolo SRB (cor. 7. prop. 24. lib. 2.) sarà uguale al rimanente angolo ASB; e però (prop. 7. lib. 3.) sarà AB : BS : : BS : BR, in conseguenza (prop. 1. lib. 1.) avremo AB×BR=$\overline{BS}^2$; ma antecedentemente si è dimostrato AB×AR=$\overline{AC}^2$. Dunque (ass. 2.) sarà

AB×AR+AB×BR=$\overline{AC}^2+\overline{BS}^2$. Ma (cor. 2. prop. 21. lib. 4.) abbiamo AB×AR+AB×BR=$\overline{AB}^2$. Adunque (ass. 1.) sarà $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BS}^2$. Il che ec.

È la prop. 10. del lib. 13. d' Euclide.

Corollario. Adunque quella linea retta, il cui quadrato è uguale ai due quadrati de' lati dell' esagono, e del decagono inscritti nel medesimo cerchio, sarà un lato del pentagono inscritto nello stesso cerchio.

PROPOSIZIONE XIV.

PROBL. TAV. VI. FIG. 85.

Nel dato cerchio (ARBM) inscrivere un pentagono regolare.

Tirisi il diametro AB, al quale (prop. 13. lib. 2.) s' innalzi il raggio perpendicolare CR. Poscia dividasi per mezzo il semidiametro CB in L (prop. 12. lib. 2.), e si tiri LR, e seghisi LS=LR, e giungasi la retta RS, che sarà il lato del pentagono regolare da inscriversi nel dato cerchio ARBM.

Dimostrazione. La retta CS sta per diritto alla retta BC, che è segata per mezzo in L; perciò (propos. 19. lib. 4.) sarà $\overline{LS}^2$=BS×SC+$\overline{CL}^2$; ma, essendo di costruzione, LS=LR, sarà ancora $\overline{LS}^2=\overline{LR}^2$ (aritm. 179.); e nel triangolo rettangolo LCR (cor. 1. prop. 18. lib. 3.) abbiamo $\overline{LR}^2=\overline{CR}^2+\overline{CL}^2$; sicchè (ass. 1.) sarà

$\overline{LS}^2+BS\times SC+\overline{CL}^2$; dunque (ass. 1.) sarà $\overline{LS}^2=\overline{CR}^2+\overline{CL}^2$, ed abbiamo già dimostrato $BS\times SC+\overline{CL}^2=\overline{CR}^2+\overline{CL}^2$, e togliendo il comune $\overline{CL}^2$ (ass. 3.) resterà $BS\times SC=\overline{CR}^2$; ed essendo il raggio $CR=BC$, sarà eziandio $\overline{CR}^2=\overline{BC}^2$; perciò (ass. 1.) sarà $BS\times SC=\overline{BC}^2$, e dissolvendo si avrà ∺ BS : BC : SC (cor. 3. propos. 2. lib. 1.); e però (prop. 17. lib. 4.) la retta BS è segata in C in media, ed estrema ragione, e la parte maggiore BC è raggio del circolo, o sia lato dell' esagono; perciò la parte minore SC (cor. prop. 12.) sarà lato del decagono. Ma CR è raggio, o lato dell' esagono, e nel triangolo rettangolo SCR (cor. 1. propos. 18. lib. 3.) abbiamo $\overline{RS}^2=\overline{CR}^2+\overline{CS}^2$; dunque la retta RS (cor. prop. antec.) sarà lato del pentagono regolare inscritto nel medesimo cerchio, essendosi dimostrato, che il suo quadrato uguaglia i due quadrati de' lati dell' esagono, e del decagono inscritti nello stesso cerchio.

Perlaqualcosa se coll' intervallo RS si segheranno gli archi uguali RG, GM, ME, EF, e si condurranno le corde RG, GM, ME, EF, FR, sarà RGMEF il ricercato pentagono regolare. Il che ec.

Questa proposizione fu dimostrata da Tolommeo nel libro primo del suo Almagesto.

Corollario. Se coll' intervallo SC si segheranno successivamente archi uguali, e si tireranno le corde, si avrà il decagono regolare inscritto nel cerchio.

PROPOSIZIONE XV.

PROBL. TAV. VI. FIG. 86.

Dividere il cerchio in 120. parti, o archi uguali, ciascuno di tre gradi.

Nel dato cerchio AEBN si tirino due diametri AB, EN perpendicolari l' uno all' altro, che segheranno il cerchio (def. 8. lib. 4.) in quattro quadranti, e la periferia in quattro archi uguali, ciascuno di 90. gradi. Fatto centro E, coll' intervallo del raggio EC si seghi nel punto F la periferia, e tirisi la corda EF, che (cor. 1. prop. 4.) sarà lato dell' esagono, e l'arco ELF (annotaz. prop. 4.) sarà di 60. gradi, e l'arco FRA, suo complemento sarà di gradi 30. (def. 9. lib. 4.) seghisi l' arco FIH=FRA di 30. gradi, rimarrà l' arco HSE anche di 30. gradi. Inoltre (prop. antec.) ritrovisi il lato del pentagono regolare da inscriversi nel medesimo cerchio, e dal punto E tirisi la corda EM uguale ad esso lato del pentagono, l'arco MFLE sotteso da essa corda sarà di 72. gradi (annotaz. prop. 4.); e però il suo complemento, cioè l' arco MRA sarà di gradi 18. Dall' arco ELFM di 72. gradi togliendo l' arco ELF di 60., rimarrà l'arco FZM di 12. gradi. Indi centro M dall' arco MRA di 18. gradi si seghi l' arco MRG=MZF di 12. gradi, resterà l' arco GA di 6. gradi. All' arco GA si facciano uguali gli archi GR, MZ, FV, VI, ID, DL, HS, SK, ec., e l' arco del quadrante ACE sarà diviso in quindici parti uguali, ciascuna di 6. gradi, cioè la sessantesima parte di tutta la circonferenza. Quindi l' arco GA di 6. gradi (propos. 14. lib. 4.) si seghi per mezzo in *t*, e sarà l' arco *t*A=*t*G di gradi 3, laonde se i rimanenti archi GR, RM, MZ, ZF, ec. del quadrante si segheranno anche per mezzo; allora l' arco del quadrante ACE sarà diviso in trenta parti uguali ciascuna di 3. gradi, cioè la centoventesima parte di tutta la circonferenza.

Se dai punti ritrovati nell' arco del quadrante ACE, e pel centro C si tireranno i diametri *t*C3, GC6, RC12, MC18, ec. l' opposto quadrante CNB sarà anch' esso diviso in tante parti uguali, in quante è stato diviso il quadrante ECA; poichè gli angoli in C alla cima opposti (prop. 17. lib. 2.) sono uguali fra loro, e gli archi opposti (prop. 12. lib. 4.) sono parimente fra loro uguali.

Dividasi nella stessa maniera il quadrante CBE, e tirinsi i diametri, che divideranno l' opposto quadrante CNA in altrettante parti uguali; ed il cerchio sarà diviso in cento venti parti uguali, ciascuna di tre gradi. Il che ec.

Annotazione. Nella geometria piana non si è finora trovata la maniera di dividere geometricamente in tre parti uguali qualunque arco, o angolo dato. Perciò quando si debbono trovare tutti i gradi del cerchio, si divida in primo luogo in archi di 3 gradi l' uno, come abbiamo insegnato antecedentemente; indi l' arco *t*A col compasso praticamente si divida in tre parti uguali, e lo stesso facciasi degli altri archi di tre gradi, ed il cerchio sarà diviso ne' suoi 360. gradi.

Corollario I. Dividendo in due parti uguali l' arco *t*A di tre gradi, si avrà un arco di un grado, e trenta minuti, che sarà la dugenquarantesima parte di tutta la periferia.

Dividendo nuovamente per mezzo la metà dell' arco *t*A si avrà un arco di 45. minuti, che sarà la quattrocentottantesima parte di tutta la periferia.

Corollario II. L' angolo al centro del poligono regolare di venti lati (annotaz. propos. 4.) è di 18. gradi; perciò la corda dell' arco MGAB di 18. gradi sarà un lato del medesimo poligono.

La corda dell' arco MZF di 12. gradi sarà un lato del poligono di trenta lati, il cui angolo al centro è di 12. gradi.

Similmente la corda dell' arco AG di 6. gradi è un lato del poligono di 60. lati.

La corda del lato A*t* di 3. gradi è il lato d' un poligono regolare di 120. lati.

La corda della metà dell' arco A*t* sarà lato d' un poligono regolare di 240. lati; e la corda della quarta parte dell' arco A*t*, di minuti 45., sarà un lato del poligono regolare di 480. lati. Conseguentemente fatta la divisione del cerchio, come sopra si è dimostrato, si possono inscrivere nel cerchio moltissimi poligoni regolari.

Corollario III. Quando il dato cerchio è molto piccolo, come PX, allora dal suo centro C si descriva un cerchio concentrico maggiore AEBN, che si divida ne' suoi gradi, e tirati i raggi *t*C, GC, ec. divideranno il cerchio minore PX ne' suoi gradi, come ocularmente si vede.

Corollario IV. Dall' antecedente divisione del cerchio si vede, che l' arco del quadrante, o sia l' angolo retto ACE è stato geometricamente diviso in tre angoli uguali ACF, FCH, HCE, come anche l' angolo ACM, o l' arco AGRM, di 18. gradi, e l' angolo ACV, o l' arco AMV di 36. gradi ec. sono stati divisi in tre parti uguali.

PROPOSIZIONE XVI.

PROB. TAV. VI. FIG. 87.

Trovare l' area d' un settore (CBFR, e d' un segmento (BFR) di cerchio, e la misura dell' arco di esso settore, o segmento dato.

Primieramente, avendo il raggio CB, ed in conseguenza il diametro suo doppio si trovi (cor. 2.

ed annotaz. 1. prop. 7.) la circonferenza di tutto il cerchio ABFR. Poscia per mezzo d' un cerchio concentrico diviso (prop. antec.) ne' suoi gradi si trovi di quanti gradi sia l' arco BFR; poi facciasi la regola di proporzione; se 360. gradi mi danno la già ritrovata circonferenza, il numero de' gradi dell' arco dato BFR quanta lunghezza mi darà; ed il quarto termine, che si troverà (prop. 10. lib. 1.) sarà la dimensione dell' arco BFR; indi si moltiplichi l' arco ritrovato BFR per la metà del raggio CB, o CR, ed il rettangolo, o sia prodotto sarà la superficie del settore CBFR.

Perciocchè tutta la circonferenza moltiplicata per la metà del raggio (cor. 2. propos. 7.) dà nel prodotto tutta l' area del cerchio; laonde qualunque arco BFR moltiplicato per la suddetta metà del raggio darà nel prodotto l' area del settore corrispondente CBFR.

Trovata l' area del settore CBFR, si trovi (cor. 2. prop. 31. lib. 2.) quella del triangolo rettilineo CBR, la quale si sottragga dall' area del settore, ed il residuo sarà la superficie del segmento BFR, come ocularmente si vede. Il che ec.

Sia il raggio CB di piedi 10 $\frac{1}{2}$, sarà il diametro piedi 21, e tutta la periferia (annotaz. 1. prop. 7.) sarà piedi 66. Siasi trovato l'arco BFR di gradi 120, e facciasi la regola del tre 360 : 66 :: 120 al quarto proporzionale, che (prop. 10. lib. 1.) sarà piedi 22, che si moltiplichi per piedi 5 $\frac{1}{4}$ metà del raggio, ed il prodotto di piedi quadrati 115 $\frac{1}{2}$ sarà l' area del settore. Poscia (cor. 2. propos. 31. lib. 2.) si trovi la superficie del triangolo rettilineo CBR, e si sottragga dall' area trovata del settore, ed il residuo sarà la superficie del segmento BFR.

ELEMENTI
DELLA GEOMETRIA

LIBRO SESTO

DELLE FIGURE SOLIDE.

DEFINIZIONE I.

TAV. VII. FIG. 1.

Una linea retta (AC) dicesi *perpendicolare ad un piano* (STMI), quando fa angoli retti con tutte le linee rette (CB, CE, CF, CL ec.) tirate nello stesso piano al punto (C) in cui essa cade sul piano.

DEFINIZIONE II.

TAV. VII. FIG. 2.

Cadendo una linea retta AB obbliquamente sopra un piano ST, se dal punto sublime A sarà tirata la retta AC perpendicolare al piano ST, e dal punto C al punto B si tiri in esso piano la retta BC. L' angolo ABC chiamasi *inclinazione della linea* AB *al piano* ST.

DEFINIZIONE III.

TAV. VII. FIG. 3.

Il piano BKRC si dice perpendicolare, o retto, al piano AMGL, se qualsivoglia retta EI tirata nel piano

BR perpendicolare alla retta BC, la quale chiamasi *comune sezione, o comune segamento de' piani* AG, BR) sarà anche perpendicolare all' altro piano AMGL.

DEFINIZIONE IV.

TAV. VII. FIG. 4.

Se nell' uno, e nell' altro piano AMGL, BCRK, alla comune sezione BC, e dal punto, in essa, I s' innalzeranno le due perpendicolari, EI nel piano BR, ed SI nel piano AG, le quali facciano l' angolo EIS obbliquo, allora il *piano* BKRC si dirà *obbliquo*, o *inclinato al piano* AG; e l' angolo acuto EIS contenuto da esse perpendicolari è *l' inclinazione d' un piano all' altro piano.*

DEFINIZIONE V.

TAV. VII. FIG. 5.

Piani paralleli sono quelli, che prolungati per ogni parte non si congiungono mai insieme, e conservano sempre tra di loro la medesima distanza. Quali sono i piani MG, ST, che in ogni luogo conservano sempre la medesima lontananza AC, AG, ec.

DEFINIZIONE VI.

TAV. VII. FIG. 6.

Il *prisma* è una figura solida, compresa da due piani opposti (ABC, EFL), ó poligoni paralleli, uguali, simili, e similmente posti, o da altrettanti parallelogrammi (ABFE, BFLC, AELC), quanti sono i lati di ciascuno degli opposti piani.

Si chiama *prisma triangolare*, quando i due opposti piani (che diconsi eziandio *basi opposte, o sezioni opposte*) sono due triangoli; come il prisma ABCLFE.

Dicesi *prisma quadrangolare*, o *quadrilatero*, quando gli opposti piani sono figure quadrilatere, quale è il prisma (Tav. VII. Fig. 7.) ABCDEFGL.

Prisma pentagono, o *quinquangolo* si noma, quando gli opposti piani sono due pentagoni uguali, simili, e similmente posti, e così degli altri.

DEFINIZIONE VII.

TAV. VII. FIG. 8.

Il *parallelepipedo* è un prisma, i cui piani opposti sono due parallelogrammi uguali, simili, e similmente posti, e perciò è contenuto da sei parallelogrammi, che a due a due, gli opposti, sono paralleli, uguali, e simili; qual è il solido AL terminato da sei parallelogrammi AM, AI, AC, LE, LB, LF.

DEFINIZIONE VIII.

TAV. VII. FIG. 9.

Il *cubo*, o *esaedro* è un parallelepipedo contenuto da sei quadrati uguali. Come la figura solida AM, la cui lunghezza BC è uguale alla larghezza CM, ed uguale all' altezza CL, ed è compresa da sei quadrati, AC, AF, AE, BM, ML, MI.

DEFINIZIONE IX.

L' *angolo solido* si dice quello, che è formato da più di due linee rette concorrenti in un medesimo punto, e che non sono poste in un medesimo piano; ovvero l' angolo solido si definisce quello, che è contenuto da più di due angoli piani, che non sieno nel medesimo piano, e si terminano ad un punto. Così nel cubo LF l' angolo formato in C dai tre angoli piani BCL, BCM, LCM, o sia costituito dalle tre linee rette CB, CM, CL non esistenti in un medesimo piano, è un angolo solido.

DEFINIZIONE X.

TAV. VII. FIG. 10.

Se si concepirà, che un parallelogrammo rettangolo (ABCL) si rivolga intorno intorno ad un suo lato (AL) fisso, ed immobile, finattantochè si restituisca nello stesso sito, da cui incominciò il suo movimento, lasciando in ogni luogo il vestigio di se stesso; il solido (EC) descritto da esso parallelogrammo addimandasi *cilindro*.

I cerchi uguali (ESBR, IMFC) descritti dagli opposti, ed uguali lati (AB, LC) nel rivolgimento del parallelogrammo si chiamano *piani opposti, o sezioni opposte*, o *basi del cilindro*.

La superficie convessa descritta dal lato CB nel rivolgimento del parallelogrammo dicesi *superficie cilindrica*.

Il lato AL, che sta fermo, ed unisce i centri A, L delle basi, o cerchi opposti ERBS, FCIM, si noma *asse del cilindro*.

Quando l' asse AL è perpendicolare alla base ESBR, *il cilindro* si dice *retto*. Ma quando l' asse cade obbliquamente sopra la base, *il cilindro* nomasi *inclinato*, ovvero *obbliquo*. Come FG. Tav. VII. Fig. 11.

Sifone, o *tubo* chiamasi un cilindro traforato, sia retto, sia obbliquo, o incurvato, come (Tav. VII. Fig. 12. 13.) sono AB, e CEF.

DEFINIZIONE XI.

TAV. VII. FIG. 14.

La piramide è una figura solida compresa da una base poligona, e da altrettanti triangoli concorrenti in un medesimo punto, quanti sono i lati della stessa base.

Il punto, in cui concorrono i triangoli, s' addimanda *vertice*, *apice*, *cima*, o *punta della piramide*.

Quando la base è un triangolo (BCD), *la piramide* dicesi *trilatera*, o *triangolare*; qual' è la piramide ABCD.

Se la base (Tav. VII. Fig. 15.) è una figura di quattro lati (CIGF); allora *la piramide* (BCFGI) dicesi *quadrilatera*, o *quadrangolare*. Se la base sarà un pentagono, si nomerà *piramide pentagona*, ec.

DEFINIZIONE XII.

TAV. VII. FIG. 16.

Se un triangolo ALB rettangolo in L si gira intorno al cateto AL, che sta fermo, finchè sia riportato di nuovo al medesimo luogo, da cui cominciò a muoversi, lasciando in ogni sito il suo vestigio, descriverà una figura solida AECFB, che dicesi *cono*.

Se il cateto AL è uguale all' altro cateto LB, *il cono* sarà *rettangolo*; ma se AL sarà minore di LB, *il cono* sarà *ottusiangolo*; e se AL è maggiore di LB, *il cono* sarà *acutangolo*.

Il cerchio CFBE descritto dall' altro cateto LB chiamasi *base del cono*.

La superficie convessa descritta dall' ipotenusa AB si noma *superficie conica*.

Il punto sublime A dicesi *apice*, *vertice*, *cima*, o *punta del cono*

Il lato, che sta fermo AL, cioè la retta linea tirata dal vertice A del cono al centro L della base si chiama *asse del cono.*

Qualsivoglia linea retta tirata sulla superficie conica dal vertice A del cono a qualsivoglia punto della circonferenza della base, dicesi *lato del cono*; quali sono le rette AB, AE, AF ec.

Inoltre il descritto *cono* si noma *retto*, perchè l'asse AL è perpendicolare alla base CFBE.

Cono obbliquo nomasi (Tav. VII. Fig. 17.) quello, il cui asse non è perpendicolare, ma obbliquo alla base, come il cono AFCBM.

DEFINIZIONE XIII.

TAV. VII. FIG. 18.

La *sfera*, o *globo* è una figura solida terminata da una superficie convessa, che ha tutti i punti della medesima superficie ugualmente distanti da un punto, che ritrovasi entro la sfera, e chiamasi *centro della sfera.*

La sfera AEBLSI si concepisce descriversi dal rivolgimento del semicircolo ASB intorno al diametro, che sta fermo, AB, finchè ritorni al medesimo luogo, da cui cominciò a muoversi.

La superficie curva descritta dalla semicirconferenza ASB nel rivolgimento del semicircolo si noma *superficie sferica.*

Il centro C del semicircolo generatore ASB chiamasi *centro della sfera*, da cui tutte le linee rette tirate alla superficie sferica sono uguali fra loro, e si chiamano raggi, o semidiametri della sfera; quali sono CA, CE, CB, ec.

Il diametro fisso, AB, intorno al quale si rivolge il semicircolo, o la sfera medesima, dicesi *asse della sfera;* ed i punti estremi di esso, cioè A, e B, si nomano *poli della sfera.*

Ogni altra linea retta, che passa pel centro della sfera, ed è terminata da ambe le parti dalla superficie sferica, s'addimanda *diametro della sfera.*

Ogni cerchio, che ha la sua periferia nella superficie sferica, ed ha per suo centro il centro medesimo della sfera, chiamasi *cerchio massimo della sfera,* quali sono i cerchi AEBS, AIBL, EISL, ec.

Ogni cerchio massimo sega la sfera in due parti uguali, che nomansi *emisferi.* Sicchè l'*emisfero* è una figura solida compresa dalla metà della superficie sferica, e da un cerchio massimo della sfera; qual è l'emisfero AEISL, che si concepisce generato dal rivolgimento del quadrante ACS intorno al raggio immobile AC; e come chiaramente si vede, l'arco AS del quadrante descrive la metà della superficie sferica AISLE, ed il raggio CS descrive il cerchio massimo SIEL, che è la base dell'emisfero.

DEFINIZIONE XIV.

Qualsivoglia figura solida terminata da più figure piane rettilinee si chiama *poliedro.*

Dicesi *poliedro regolare*, quando è contenuto da più figure piane regolari, uguali, e simili, ed ha tutti gli angoli solidi uguali fra loro.

Cinque soltanto sono i poliedri regolari, cioè 1. Il *tetraedro*, o sia *piramide regolare*, compreso da quattro triangoli equilateri, ed uguali. 2. L'*esaedro*, o *cubo* contenuto da sei quadrati uguali. 3. L' *ottaedro* terminato da otto triangoli equilateri, ed uguali. 4. Il *dodecaedro* compreso da dodici pentagoni regolari, ed uguali. 5. L' *icosaedro* contenuto da venti triangoli equilateri, ed uguali. Tutti gli altri *poliedri* chiamansi *irregolari.*

DEFINIZIONE XV.

Le figure solide simili nomansi quelle, che sono contenute da figure piane simili, e similmente poste, ed uguali di numero.

DEFINIZIONE XVI.

Prismi simili sono quelli, le cui basi simili sono tra di loro come i quadrati delle loro altezze, le quali hanno la stessa inclinazione alle loro basi.

La medesima cosa si dee intendere delle piramidi simili, de' cilindri simili, e de' coni simili.

DEFINIZIONE XVII.

Essendosi dimostrato nel corollario 4. della prop. 2. del lib. 5., che i cerchi, che sono basi de' cilindri, e de' coni, stanno tra di loro come i quadrati de' raggi, o diametri; perciò cilindri simili, e coni simili sono quelli, i cui quadrati delle altezze stanno tra di loro come i quadrati de' raggi, o diametri delle basi. Ma perchè le radici de' quadrati proporzionali (prop. 14. lib. 1.) sono anche proporzionali, perciò i *cilindri* tra di loro, ed i *coni* anche fra loro saranno *simili*, se avranno le altezze proporzionali ai raggi, o diametri delle loro basi. Inoltre acciocchè i cilindri, o i coni sieno simili, bisogna, che i loro assi abbiano la medesima inclinazione alle loro basi.

DEFINIZIONE XVIII.

L' altezza d' un prisma, o *cilindro* è una linea retta tirata a piombo, cioè perpendicolarmente dal piano superiore sopra il piano della base. Dunque nel cilindro retto *l' asse è l' altezza del cilindro.*

L' altezza d' una piramide, o d' un cono è la perpendicolare tirata dal vertice sopra il piano della base. Perciò nel cono retto l' altezza di esso è l' asse del medesimo cono.

DEFINIZIONE XIX.

TAV. VII. FIG. 19.

La sezione d' una figura solida è quella figura piana, che rimane descritta nel solido, quando essa figura solida è segata da un piano traversale. Se, per esempio, il cilindro retto AB sarà segato da un piano EG parallelo alla base AC, il cerchio EG, che in quel segamento resta descritto nel cilindro, si chiama *sezione del cilindro.*

Inoltre gli opposti piani, o basi d' un cilindro, o d' un prisma, si chiamano anche *sezioni opposte del cilindro*, o *del prisma.*

Ma se il cilindro retto AB sarà segato da un piano obbliquo DI, la sezione DI sarà una *figura ovale chiamata ellisse*; della quale parleremo nel seguente libro.

Se un cono retto AFBEC (Tav. VII. Fig. 20.) verrà segato da un piano, che passi per l' asse AL, cioè che sia perpendicolare alla base CEBF, *la sezione del cono sarà un triangolo* ABC, o AFE ec., che avrà per base il diametro della base del cono.

Se il piano, che sega il cono, sarà parallelo alla base CB, *la sezione sarà un cerchio*, come SM, a cui è perpendicolare l' asse AL nel centro Z.

Che se il piano segante il cono sarà obbliquo alla base, ma non la incontrerà, se non è prolungata fuori del cono, allora *la sezione sarà un'ellisse*, qual' è IN.

Ma se il piano, che sega il cono, segherà la base, ed un lato AB, e sarà parallelo all' altro lato AC del cono; allora la sezione sarà una figura mistilinea KPV, la quale chiamasi *parabola*, e la retta PQ tirata dalla cima P al punto Q, che divide per mezzo la base KV, nomasi *asse della parabola*.

Finalmente se il piano, che sega il cono, segherà anche la base, e sarà, o parallelo all' asse AL, o tale, che prolungato seghi fuori del cono il lato BA prolungato; allora la sezione GHR addimandasi *iperbola*, e la retta HO è il suo asse, e GR la sua base.

Le proprietà principali delle due prime sezioni, cioè del triangolo, e del cerchio, le abbiamo vedute negli antecedenti libri, e non ci siamo serviti del cono per dimostrarle. Nella stessa maniera esporremo alcune delle principali proprietà, ed accidenti delle rimanenti tre sezioni; cioè dell' ellisse, della parabola, e della iperbola nel seguente libro settimo, senza punto servirci del cono per dimostrarle.

DEFINIZIONE XX.

Il cilindro circoscritto alla sfera è quello, che ha l' asse comune colla sfera, ed il cui diametro della base è uguale al diametro, o asse della medesima sfera.

Cilindro circoscritto all' emisfero è quello, che ha la base comune coll' emisfero, e la cui altezza è uguale al raggio della sfera, cioè uguale all' altezza dell' emisfero.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

1. Ogni linea retta giace tutta in un medesimo piano; cioè è impossibile, che una parte di una medesima linea retta sia posta in un piano elevato, e l' altra parte di essa giaccia in un piano soggetto, il che è chiaro, ed evidente dalle definizioni del piano, e della linea retta (def. 5., e 6. lib. 2.).

2. Ogni triangolo rettilineo giace sempre tutto in un medesimo piano; perciocchè il triangolo rettilineo (def. 18. lib. 2.) è una figura piana; onde (def. 6. lib. 2.) ripugna, che una parte di esso triangolo giaccia in un piano soggetto, e l' altra parte sia posta in un piano elevato.

3. Se due linee rette (Tav. VII. Fig. 21.) si segheranno fra loro, saranno eziandìo situate in un medesimo piano, vale a dire tra due linee rette AB, AC, che si seghino fra loro, si può sempre estendere un piano; poichè tirando una linea retta BC, che unisca due punti B, e C presi a piacere in esse linee, si avrà il triangolo ABC, il quale, per l'antecedente paragrafo, tutto giacerà nel medesimo piano ABC; e però anche i suoi lati AB, AC saranno posti nel medesimo piano.

4. Medesimamente qualsivoglia altra figura piana giace sempre tutta in un medesimo piano. Il che ec.

Sono le prop. 1. e 2. del lib. 11. d' Euclide.

PROPOSIZIONE II.

TEOR. TAV. VII. FIG. 22.

Il comune segamento (BA) di due piani (FG, BM), che si segano fra loro, è una linea retta.

Dimostrazione. Imperciocchè se la comune sezione BA non fosse una linea retta, perchè i punti B, ed A sono comuni all' uno, e all' altro piano, si potrebbe (postulato primo) tirare nel piano BM una linea retta BLA, e nell' altro piano FG un'altra linea retta BEA, e però due linee rette chiuderebbero uno spazio; il che ripugna (cor. def. 13. lib. 2.). Dunque le due linee BLA, BEA non sono rette, e la sola linea BA, comun segamento de' piani è retta. Il che ec.

È la prop. 3. del lib. 11. d' Euclide.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA TAV. VII. FIG. 23.

Se una retta linea (AC) sarà perpendicolare a due linee rette (BE , CF) che si segano fra loro (in C); essa linea retta (AC) sarà eziandio perpendicolare al soggetto piano (ST), in cui giacciono esse linee rette.

DIMOSTRAZIONE. Imperciocchè tirata al punto sublime A la retta LA, se concepiscasi, che il triangolo rettangolo ACL si rivolga intorno intorno al cateto immobile AC, finchè ritorni al luogo, dal quale cominciò a muoversi, l' altro cateto CL in esso rivolgimento descriverà il piano circolo LMEFB, a cui sarà perpendicolare la retta CA; perciocchè in ogni positura del triangolo ACL, la retta AC è sempre perpendicolare alla retta CL, cioè a tutti i raggi del cerchio; ma nello stesso piano del cerchio descritto dalla retta CL ritrovansi le rette BE, LC; essendo, d'ipotesi, la retta AC perpendicolare alle medesime rette nel punto C; e le rette BE, LC sono, d' ipotesi, nel piano ST; adunque il cerchio descritto dalla retta LC giace nel piano ST; perciò la retta AC dimostrata perpendicolare al piano del cerchio è parimente perpendicolare al piano ST. Il che ec.

È la prop. 4. del lib. 11. d' Euclide.

COROLLARIO I. Adunque se una linea retta AC sarà perpendicolare a tre linee rette, che si segano fra loro nel punto C, quelle tre linee rette giaceranno in un medesimo piano.

È la prop. 5. del lib. 11. d' Euclide.

COROLLARIO II. Inoltre resta evidente, che una sola perpendicolare CA si può innalzare sopra il piano ST dal punto C.

PROPOSIZIONE IV.

TEOR. TAV. VII. FIG. 24.

Le linee rette (AB, CL) perpendicolari ad un medesimo piano (EF) sono parallele fra loro.

DIMOSTRAZIONE. Nel piano EF tirisi la retta BC, a cui saranno (def. 1.) perpendicolari tutte due le rette AB, CL. Concepiscasi la retta AB muoversi, e scorrere perpendicolarmente al piano EF sopra la retta BC, finchè giunga al punto C, in cui necessariamente si combacierà colla CL, perchè altrimenti o l' una, o l' altra di esse non sarebbe perpendicolare al piano (cor. 2. prop. ant.), il che è contro l' ipotesi. Inoltre essa retta AB nel suo movimento avrà descritto il piano ABCL, nel quale sono poste le rette AB, CL, e sono segate dalla retta BC, che fa con esse gli angoli interni ABC, LCB retti, e però (prop. 18. lib. 2.) le rette AB, CL sono parallele. Il che ec. È la prop. 6. del lib. 11. d' Euclide.

COROLLARIO I. Adunque le linee rette parallele (AB, CL), e la retta (BC), che cade sopra di esse, sono poste in un medesimo piano.

È la prop. 7. del lib. 11. d' Euclide.

COROLLARIO II. Se due linee rette AB, CL saranno parallele, e una di esse, AB, sarà perpendicolare ad un piano EF, anche l' altra CL sarà perpendicolare al medesimo piano. Perciocchè (cor. 2. prop. antec.) dallo stesso punto C una sola perpendicolare al piano EF si può innalzare, la quale, per l' antecedente dimostrazione, sarà parallela alla perpendicolare AB; dunque essendo la retta CL, d' ipotesi, parallela alla retta AB, sarà anche perpendicolare al piano EF, perchè, se ciò non fosse, da uno stesso punto C si condurrebbero due linee parallele alla stessa retta AB, il che è impossibile.

È la prop. 8. del lib. 11. d' Euclide.

PROPOSIZIONE V.

TEOR. TAV. VII. FIG. 25.

Se ad una medesima linea retta (EM) saranno parallele altre due linee rette (AB , CL) che non sono poste nel medesimo piano con essa; dico, che esse due linee saranno eziandìo parallele fra loro.

Nel piano AM , in cui giacciono le due rette parallele AB, EM, tirisi la retta EA perpendicolare alla retta EM (prop. 13. lib. 2.). Similmente nel piano CM , in cui sono poste le due rette parallele EM , CL si tiri la retta EC perpendicolare alla medesima retta EM , e giungasi la retta AC.

Dimostrazione. Perchè , di costruzione , la retta EM è perpendicolare alle due rette AE , EC, che si segano fra loro in E ; perciò (prop. 3.) essa retta sarà perpendicolare al piano AEC , in cui giacciono esse rette ; in conseguenza tanto la retta AB, quanto la retta CL , che sono , d' ipotesi, parallele alla stessa retta EM (cor. 2. prop. antec.) saranno ancora perpendicolari al medesimo piano AEC ; onde (propos. antec.) saranno parallele tra di loro. Il che ec.

È la prop. 9. del lib. 11. d' Euclide.

Corollario. Da questa dimostrazione ne segue , che la comune sezione ME , di due piani ABME , EMLC, che passano per due linee parallele AB, LC, sarà parallela all' una, e all' altra delle rette parallele AB , CL.

PROPOSIZIONE VI.

TEOR. TAV. VII. FIG. 26.

Se due linee rette (AB , BE) , che si segano fra loro in un piano (FT) saranno parallele a due altre

linee rette (CL, CG), che si segano tra di loro in un altro piano (MH) ; que' due piani (TF , HM) saranno paralleli fra loro.

Dimostrazione. Le due rette AB , CL essendo , d'ipotesi, parallele, saranno poste nel medesimo piano ABCL (cor. 1. prop. 4.) . Per la stessa ragione le rette parallele BE, CG giacciono nel medesimo piano EBCG ; perciò i due piani TF , MH non possono concorrere insieme ne' prolungati secondo le direzioni delle rette AB , CL , nè secondo le direzioni delle rette EB , CG ; perchè , se concorressero insieme , anche le linee parallele AB , CL , o pure BE , CG concorrerebbero insieme , il che è impossibile (def. 11. lib. 2.) . Dunque necessariamente i piani TF , MH (def. 5.) sono paralleli. Il che ec.

È la prop. 15. del lib. 11. d' Euclide.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

Se una linea retta (BC) sarà perpendicolare a due piani (TF , MH) , essi piani saranno paralleli fra loro.

Dimostrazione. Tirisi la retta EG parallela alla retta BC , e sarà essa EG (cor. 2. prop. 4.) anche perpendicolare ai due piani TF , MH ; indi si tirino in essi piani le rette BE , GC , che saranno parallele fra loro (parte 3. prop. 19. lib. 2.), essendo amendue retti gli angoli interni EBC , GCB . Similmente tirata la retta AL parallela alla data BC , e condotte negli stessi piani le rette BA , CL si dimostra la retta BA parallela alla CL ; perciò (prop. antec.) il piano TF sarà parallelo al piano MH . Il che ec.

È la prop. 14. del lib. 11. d' Euclide.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA TAV. VII. FIG. 27.

Ogni prisma poligono si divide in altrettanti prismi triangolari, quanti sono i lati della base, meno due.

Sia dato il primo pentagono AM, e dagli uguali angoli GBC, SAF, delle opposte basi uguali (def. *6.*), e simili, e similmente poste, si tirino agli angoli opposti le linee rette BM, BL, AI, AE, e ciascuna base, o sia ciascun pentagono rimarrà diviso in tre triangoli, de' quali i due GBM, SAI sono uguali, e simili; poichè (def. *6.*) hanno i lati uguali GB=AS, GM=IS, e l' angolo BGM=ASI; onde (prop. *6.* lib. 2.) sarà BM=AI, l' angolo GMB=AIS, ec.; sicchè dagli angoli uguali GML, EIS togliendo gli angoli dimostrati uguali GMB, AIS (ass. 3.) resterà l' angolo BML=AIE; ma si è dimostrato BM=AI, ed abbiamo, d' ipotesi, il lato ML=IE; perciò il triangolo BML (prop. *6.* lib. 2.) sarà uguale, e (def. 1. lib. 3.) simile al triangolo IEA. Per la stessa ragione sono uguali, e simili i due triangoli BCL, AEF, che hanno gli angoli in C, ed in F uguali contenuti da lati uguali.

Inoltre perchè le due rette AB, IM sono, d'ipotesi, parallele, ed uguali alla stessa SG, perciò (prop. 5., ed ass. 1.) saranno parallele, ed uguali fra loro; laonde (propos. 29. lib. 2.) le uguali rette BM, ed AI saranno parallele. Medesimamente le uguali rette BL, AE saranno parallele tra di loro; conseguentemente i due piani ABMI, ABLE sono parallelogrammi, e segano l' intero prisma AM in tre parti ABLEFC, ABMIEL, ABMISG, che (def. *6.*) sono tre prismi triangolari, perchè sono contenuti dagli opposti piani, triangoli paralleli, e dimostrati uguali, simili, e similmente posti, e da tanti parallelogrammi, quanti sono i lati della base.

Col medesimo raziocinio dimostrasi, che il prisma esagono si divide in quattro prismi triangolari; il prisma ettagono in cinque; il prisma ottangolo in sei prismi triangolari, e così successivamente. Il che ec.

Corollario. Dunque se due piani paralleli saranno segati da un altro piano, le sezioni de' piani saranno parallele; come le sezioni BM, AI fatte dal piano AIMB segante i due piani opposti, e paralleli BCLMG, ISAFE si sono dimostrate parallele.

È la prop. 16. del lib. 11. d' Euclide.

PROPOSIZIONE IX.

TEOR. TAV. VII. FIG. 28.

1. Se un prisma triangolare (AM) sarà segato da un piano (BCL) parallelo alla base (AEF, o GRM), la sezione (BCL) sarà uguale, e simile alla base.

Dimostrazione. I piani paralleli BCL, AEF sono segati dal piano AR, perciò (cor. prop. antec.) i segamenti BC, ed AF saranno paralleli. Per la stessa ragione la sezione LC è parallela alla FE, e la BL parallela alla AE. Ma la retta AB, d' ipotesi, è parallela alla FC, e la FC parallela alla retta EL, che è parallela alla AB; onde (prop. 28. lib. 2.) sarà BC=AF, CL=FE, e BL=AE, e però (prop. 9. lib. 2.) sarà l' angolo BCL=AFE, l' angolo CBL=EAF, e BLC=AEF; conseguentemente la sezione BCL sarà uguale, e simile alla base AEF.

2. (Tav. VII. Fig. 29.) Se un prisma poligono (RS) sarà segato da un piano (EFGL) parallelo alla base (RBCI), la sezione (EFGL) sarà eziandio uguale, e simile alla base.

Dimostrazione. Perciocchè il prisma poligono si divide (prop. antec.) ne' prismi triangolari RBITZV, BCITZS, ed i piani opposti ZVTS, RBCT si dividono in ugual numero di triangoli TVZ, STZ, RBI, CIB, de' quali gli opposti, due a due, sono uguali, simili, e similmente posti; perciò l' intera sezione sarà uguale, e simile alla base. Il che ec.

Corollario. Perchè i cerchi (cor. 3. propos. 1. lib. 5.) sono poligoni simili d' infiniti lati, e le basi opposte del cilindro (def. 10.) sono due cerchi uguali; perciò il cilindro si può considerare come un prisma poligono d' infiniti lati, e però la sezione del cilindro parallela alla base sarà parimente un cerchio uguale, e simile alla base.

PROPOSIZIONE X.

TEOR. TAV. VII. FIG. 30.

Ogni prisma si concepisce composto da altrettanti piani paralleli, ed uguali alla base, quanti sono i punti, o sia elementi nell' altezza del medesimo prisma; ed il prodotto della base nell' altezza sarà la solidità dello stesso prisma.

Dimostrazione. Dato qualsivoglia prisma AM, se colla mente concepiamo, che il piano, o base ASEF con un movimento costantemente a se parallelo s' innalzi fino all' altezza, o sia ultima posizione GKRM, lasciando in ogni punto dell' altezza AK, o sia in ogni posizione BCLI, il vestigio di se stessa, egli è evidente, che la base AE descriverà il solido prisma AM. Lo stesso si dee intendere di qualunque altro prisma.

Inoltre essendosi dimostrato, che il prisma è composto da altrettanti piani uguali alla base, e simili, e similmente posti, quanti sono gli elementi, o sia punti nell' altezza AK; perciò la solidità di qualsivoglia prisma sarà uguale al prodotto della base ASEF nell' altezza AK, o FR ec. Il che ec.

Corollario. Il cilindro (cor. prop. antec.) è un prisma poligono d' infiniti lati, e però anche del cilindro si verifica quanto si è dimostrato del prisma.

Se dunque si troverà (cor. 2. ed annotaz. prop. 7. lib. 5.) l' area del cerchio base del cilindro, e si moltiplicherà per l' altezza di esso, si avrà la solidità del cilindro. Perciocchè il cilindro è composto da altrettanti piani circoli, quanti sono gli elementi, o punti nella sua altezza.

PROPOSIZIONE XI.

TEOR. TAV. VII. FIG. 31.

Se una piramide triangolare (ABCM) sarà segata da un piano (EFL) parallelo alla base (BCM), la sezione (EFL) sarà simile alla base.

Ma la base (BCM) a qualunque sezione parallela (EFM) starà come il quadrato dell' altezza (AZ) di tutta la piramide, al quadrato dell' altezza (AI) della piramide segata (AEFL).

Dai lati CB, CM seghinsi le parti CR=EF, e CD=FL (prop. 3. lib. 2.), e tirinsi le rette ER, LD, e DR.

Dimostrazione. Il piano ABC segando i due piani paralleli BCM, EFL fa le sezioni RC, EF (cor. prop. 8.) parallele fra loro, e sono uguali di costruzione; perciò (prop. 29. lib. 2.) le rette ER, CF saranno uguali, e parallele. Similmente le uguali rette FL, CD si dimostrano parallele, onde le rette FC, LD saranno ancora uguali, e parallele; laonde (prop. 5. ed ass. 1.) le rette ER, LD saranno eziandio parallele, ed uguali fra loro; sicchè (prop. 29. lib. 2.) la retta EL sarà parallela, ed uguale alla retta RD. Dunque (prop. 9. lib. 2.) sarà l' angolo RCD=EFL, l' angolo CRD=FEL, ec., ed il triangolo EFL simile, ed uguale al triangolo RCD. Ma (cor. prop. 8.) la retta BM è parallela alla retta EL, a cui si è già dimostrata parallela la retta RD; e però (prop. 5.) sarà RD parallela al lato BM. Perciò (cor. prop. 7.

lib. 3.) il triangolo RCD sarà simile al triangolo BCM, ed è stato dimostrato anche simile al triangolo EFL; laonde (cor. def. 1. lib. 3.) sarà il triangolo EFL simile al triangolo BCM.

Ma il triangolo BCM sta al simile triangolo EFL :: $\overline{CM}^2 : \overline{FL}^2$ (prop. 13. lib. 3.); e ne' triangoli ACM, AFL (cor. prop. 7. lib. 3.) simili fra loro abbiamo $\overline{CM}^2 : \overline{FL}^2 :: \overline{AM}^2 : \overline{AL}^2$, e (tirate le rette LI, ZM) ne' simili triangoli AZM, ALI abbiamo $\overline{AM}^2 : \overline{AL}^2 :: \overline{AZ}^2 : \overline{AI}^2$. Adunque (ass. 1.) starà la base RCM alla sezione parallela EFL, :: $\overline{AZ}^2 : \overline{AI}^2$; cioè come i quadrati delle distanze di essi piani dal vertice della piramide. Il che ec.

Corollario i. (Tav. VII. Fig. 32.) Lo stesso si verifica delle piramidi poligone, perchè si dividono in altrettante piramidi triangolari ugualmente alte, quanti sono i lati della base, meno due.

Così la piramide quadrilatera BCFGI si divide in due piramidi triangolari BCFI, BIFG ugualmente alte, e qualsivoglia sezione AEML parallela alla base si dimostra simile alla stessa base CFGI. Perciocchè i due triangoli IFC, FGI, per la dimostrazione antecedente, sono simili ai triangoli AEL, ELM, e similmente posti; perciò tutta la base ICFG sarà simile a tutta la sezione AEML, e così delle altre.

Corollario ii. (Tav. VII. Fig. 31.) Perlaqualcosa in ogni piramide le sezioni parallele alla base, cominciando dalla stessa base, e proseguendo sino al vertice decrescono nella ragione de' quadrati delle loro distanze dalla cima. Se, verbigrazia, tutta l' altezza, o distanza AZ sarà tripla della distanza AI, in tal caso la sezione EFL sarà la nona parte della base BCM; essendosi dimostrato BCM : EFL :: $\overline{AZ}^2 : \overline{AI}^2$; cioè :: 9 : 1, in questo esempio; onde invertendo

abbiamo EFL : BCM :: $\overline{AI}^2 : \overline{AZ}^2$, cioè :: 1 : 9.

Corollario iii. Inoltre perchè il circolo base del cono (cor. 3. prop. 1. lib. 5.) è un poligono regolare d' infiniti lati, perciò il cono si dee considerare come una piramide poligona d' infiniti lati, e le sezioni del cono parallele alla base saranno simili alla stessa base, cioè saranno circoli dalla base sino al vertice decrescenti nella ragione dei quadrati delle loro distanze dal vertice.

Corollario iv. (Tav. VII. Fig. 31.) Data l' altezza ZI d' una piramide tronca BELMCF, si troverà facilmente l' altezza AI della mancante porzione, o sia piramide AEFL. Imperciocchè dall' antecedente dimostrazione abbiamo CM : FL :: AZ : AI, e dividendo (prop. 5. lib. 1.) sarà CM—FL : FL :: AZ—AI : AI, cioè CM—FL : FL :: IZ : AI. Sicchè ai tre termini cogniti, e dati CM—FL, o sia DM, FL, IZ si trovi (prop. 6. lib. 3., o prop. 10. lib. 1.) il quarto termine proporzionale, che sarà l' altezza ricercata AI.

Similmente (Tav. VII. Fig. 20.) data l' altezza ZL del tronco di cono retto MSCEBF, si troverà l' altezza AZ del cono mancante ASM, facendo la regola di proporzione BL—ZM : ZM :: ZL al quarto proporzionale, che sarà AZ, come facilmente si può comprendere dalle antecedenti dimostrazioni.

PROPOSIZIONE XII.

TEOR. TAV. VII. FIG. 33. 34.

Le piramidi ugualmente alte sono fra loro nella ragione delle loro basi.

Le due piramidi EFHM, ABCDL abbiano le altezze uguali EI=AZ; starà la piramide EFHM alla piramide ABCDL come la base FHM alla base BCDL.

Dimostrazione. Imperciocchè l' una, e l' altra piramide s'intende composta da altrettanti piani paralleli alla base, e simili, e similmente posti, e decrescenti in ragione quadrata delle loro distanze dal vertice, quanti sono gli elementi, o sia punti nell' altezza EI, o AZ; che però dalle uguali altezze EI, AZ si prendano a piacere parti uguali ES, AR, e pei punti S, R si estendano i piani GKO, TVXY paralleli alle basi FHM, BCDL; le sezioni GKO, TVXY (prop. ant.) saranno simili alle corrispondenti basi; onde sarà FHM : GKO :: $\overline{EI}^2 : \overline{ES}^2$, o sia :: $\overline{AZ}^2 : \overline{AR}^2$ (essendo di costruzione, e d' ipotesi EI=AZ, ed ES=AR). Medesimamente (cor. 2. propos. antec.) sarà BCDL : TVXY :: $\overline{AZ}^2 : \overline{AR}^2$, e però (ass. 1.) sarà FHM : GKO :: BCDL : TVXY, e permutando (prop. 3. lib. 1.) sarà la base FHM alla base BCDL come la sezione GKO alla sezione ugualmente alta TVXY; il che sempre si verifica di tutte le sezioni ugualmente alte; perciò raccogliendo (propos. 9. lib. 1.) sarà la base FHM alla base BCDL, come la somma di tutte le sezioni, o piani, che costituiscono la piramide EFHM, alla somma di altrettanti piani, o sezioni, che compongono tutta la piramide ABCDL; cioè sarà la piramide ad un' altra piramide ugualmente alta, come la base della prima alla base dell' altra. Il che ec.

Sono le prop. 5., e 6. del lib. 12. d' Euclide.

Corollario i. Dunque le piramidi ugualmente alte saranno uguali fra loro, se avranno le basi uguali.

Corollario ii. Parimente i coni ugualmente alti sono fra loro, come le loro basi, cioè come i cerchi, basi di essi coni; poichè i coni (cor. 3. prop. 11.) sono piramidi poligone d' infiniti lati.

È la propos. 11. del lib. 12. d' Euclide.

Conseguentemente se i circoli, basi de' coni, saranno uguali fra loro, anche i coni ugualmente alti saranno uguali.

Corollario iii. Perchè i cerchi, basi de' coni (cor. 4. prop. 2. lib. 5.) sono tra di loro come i

quadrati de' loro raggi, ò diametri; perciò i coni ugualmente alti, che, per dimostrazione, stanno tra di loro nella ragione delle basi, saranno ancora fra loro come i quadrati de' raggi, o de' diametri delle basi.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOR. TAV. VIII. FIG. 35.

Il prisma è triplo della piramide, che ha la stessa, o ugual base, e la medesima, o uguale altezza.

1. Sia dato il prisma triangolare BCLEFA, nel quale si tirino i diametri BE, AB, AL de' suoi parallelogrammi, e si avranno i due piani triangoli ABL, ABE, che segheranno il prisma nelle tre piramidi ABLC, BFEA, ABLE uguali fra loro.

Dimostrazione. Le due piramidi ABLC, BFEA (cor. 1. prop. antec.) sono uguali fra loro, perchè hanno (def. 6.) le basi BCL, AFE uguali, e la medesima altezza, essendo poste tra i piani paralleli BCL, AFE. Inoltre se per vertice della piramide ABFE si prenderà il punto A, allora la sua base sarà EBF, e (cor. 1. prop. antec.) sarà essa piramide uguale alla piramide ABLE (il cui vertice è il punto A, e la base EBL) perchè hanno le basi EBF, EBL (propos. 28. lib. 2.) uguali fra loro, ed hanno la stessa altezza, che è la perpendicolare tirata dal vertice comune A sopra il piano EFBL, in cui ritrovansi le loro basi. In conseguenza (ass. 1.) le tre piramidi ABCL, BFEA, ABLE sono uguali fra loro, ed insieme prese (ass. 13.) costituiscono l' intero prisma BCLEFA. Dunque esso prisma è triplo della piramide inscritta, cioè che ha la stessa base, e la stessa altezza del prisma; e perchè le piramidi ugualmente alte, che hanno le basi uguali (cor. 1. prop. ant.) sono fra loro uguali; perciò il prisma triangolare sarà triplo di ogni piramide, che abbia la base, e l'altezza uguali a quelle del prisma. Il che ec.

È la prop. 7. del lib. 12. d' Euclide.

2. Se il prisma sarà poligono, allora (prop. 8.) si potrà dividere in prismi triangolari, ciascuno de' quali sarà triplo della piramide triangolare, che gli sarà inscritta; e però tutti i prismi triangolari, insieme presi, saranno tripli di tutte le piramidi triangolari ad essi inscritte, insieme prese; cioè il prisma poligono è triplo della piramide poligona, che ha la stessa, o ugual base, e la stessa, o uguale altezza del prisma. Il che ec.

Come il prisma poligono CH (Tav. VIII. Fig. 36.) è triplo della piramide poligona AFBCDE. Perciocchè il prisma triangolare ADBILC, per la dimostrazione antecedente è triplo della piramide ADBC; il prisma triangolare ADBIHF è triplo della piramide inscrittagli AFBD; ed il prisma triangolare ADEFHG è triplo della piramide ADEF; sicchè tutto il prisma CH è triplo di tutta la piramide AFBCDE. Lo stesso s' intende di qualunque altro prisma poligono. Il che ec.

Corollario I. Medesimamente il cilindro è triplo del cono inscrittogli, cioè che abbia la medesima, o ugual base, e la stessa, o uguale altezza del cilindro; perciocchè il cilindro è prisma, ed il cono è piramide d' infiniti lati.

È la prop. 10. del lib. 12. d' Euclide.

Corollario II. Dunque la piramide è la terza parte del prisma, ed il cono è la terza parte del cilindro, quando hanno basi, ed altezze uguali.

Ma la solidità del prisma, o del cilindro (prop. 10. e cor.) si ritrova moltiplicando la superficie della base nell' altezza; dunque la solidità della piramide, o del cono si otterrà moltiplicando la superficie della base per la terza parte della sua altezza.

Se la piramide sarà tronca, come (Tav. VII. Fig. 31.) BELMCF, a trovarne la solidità, si trovi primamente (cor. 4. prop. 11.) l' altezza AI della parte recisa AEFL, per avere tutta l' altezza AZ della

intera piramide, poscia trovisi, come si è detto poc' anzi, la solidità di tutta la piramide ABCM, e quella della parte recisa AEFL, e sottraggasi questa AEFL da tutta ABCM, il residuo sarà la solidità della piramide tronca BELMCF.

Nella stessa maniera si trova la solidità d' un cono tronco MSCEBF (Tav. VII. Fig. 20.) segato da un piano SM parallelo alla base CEBF; trovando prima (cor. 4. prop. 11.) l' altezza AZ del cono reciso ASM; indi la solidità di tutto il cono ACEBF, e la solidità della parte recisa ASM, che sottratta dal tutto ACEBF, resterà la solidità del cono tronco MSCEBF.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOR. TAV. VIII. FIG. 37.

Se un prisma (AM) sarà segato da un piano (KLZ) parallelo alla base ABC; le parti, o segmenti (AK, LM) di esso, saranno fra loro nella ragione delle altezze (SI, IF), o dei lati (BZ, ZF).

Dimostrazione. Imperciocchè la solidità della parte AK (propos. 10.) è uguale al prodotto dell' altezza SI nella base ABC; e la solidità della parte LM uguaglia il prodotto dell' altezza IF nella base KLZ. Sarà dunque il prisma AK al prisma LM : : ABC×IS : KLZ×IF, e dividendo l' ultima ragione per le basi ABC, KLZ (propos. 9.) uguali fra loro, rimarrà (prop. 11. lib. 1.) il prisma, o parte AK al prisma LM : : IS : IF. Inoltre (tirate le rette BS, ZI) perchè i piani ABC, KLZ sono segati dal piano BFS, perciò (cor. prop. 8.) la sezione BS sarà parallela alla sezione ZI; laonde (prop. 2. lib. 3.) avremo BZ : ZF : : SI : IF; e si è già dimostrato il prisma AK al prisma LM : : SI : IF, e però (ass. 1.) sarà anche il prisma AK al prisma LM : : BZ : ZF, o : : AL : LE ec. essendo BZ=AL, e ZF=LE ec. Il che ec.

Corollario i. Abbiamo dimostrato, che la parte, o sia prisma AK, sta alla parte, o prisma LM, come l' altezza SI all' altezza IF, o come il lato AL al lato LE, e componendo (prop. 4. lib. 1.) sarà AK+LM : LM : : AL+LE : LE ; cioè l' intero prisma AM sta alla parte LM, come il lato AE alla parte LE, o sia come l' altezza FS alla sua parte FI. Nella stessa maniera si dimostra AM : AK : : AE : AL : : FS : SI.

Corollario ii. (Tav. VIII. Fig. 38.) Lo stesso dimostrasi de' cilindri, perchè sono prismi d' infiniti lati.

Inoltre in qualunque cilindro AM segato da un piano EF parallelo alla base AB sarà la parte, o cilindro AF alla parte, o cilindro EM, come l' asse SI all' asse IZ; poichè (propos. 28. lib. 2.) è il lato AE=SI, ed il lato EC=IZ.

È la prop. 13. del lib. 12. d' Euclide.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

I prismi ugualmente alti sono fra loro nella ragione delle basi.

Dimostrazione. I prismi (prop. 13.) sono tripli delle piramidi in essi inscritte ; ma le piramidi ugualmente alte (prop. 12.) sono fra loro come le basi. Dunque (prop. 11. lib. 1.) anche i prismi che sono tripli delle piramidi staranno tra di loro nella ragione delle proprie loro basi, quando sono ugualmente alti. Il che ec.

È la prop. 32. del lib. 11. d' Euclide.

Corollario i. Dunque se i prismi ugualmente alti avranno la stessa base, o basi uguali, saranno uguali fra loro.

Sono le prop. 30., e 31. del lib. 11. d' Euclide.

Corollario ii. Le medesime cose si verificano de' cilindri, che sono prismi d' infiniti lati.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOR. TAV. VIII. FIG. 39. 40.

I prismi (AD, GL), che hanno le basi uguali (ABC, GHI) sono fra loro nella ragione delle loro altezze (AE, GZ).

Dimostrazione. Dalla maggiore altezza AE si tagli la parte AT uguale alla minore GZ, e pel punto T si conduca il piano TRM parallelo alla base ABC; il prisma AM (cor. 1. prop. antec.) sarà uguale al prisma GL. Ma il prisma AD sta al prisma AM : : AE : AT (cor. 1. prop. 14.) ; sicchè sostituendo il prisma GL all' ugual prisma AM, e GZ invece dell' uguale altezza AT, sarà il prisma AD al prisma GL, come l' altezza AE all' altezza GZ. Il che ec.

Corollario i. Le piramidi ancora, perchè sono sutriple de' prismi ad esse circoscritti, se avranno la stessa, o uguali basi, staranno tra di loro nella ragione delle altezze (cor. 1. prop. 16. lib. 1.).

Corollario ii. Lo stesso s' intende dimostrato de' cilindri, e de' coni, perchè i cilindri sono prismi, ed i coni sono piramidi d' infiniti lati.

È la prop. 14. del lib. 12. d' Euclide.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOR. TAV. VIII. FIG. 41. 42.

Due qualunque prismi (AD, GL) sono fra loro in ragione composta dalle ragioni delle basi (ABCXY, GHI), e delle altezze (AE, GZ).

Dal prisma più alto AD, come nella proposizione antecedente, si tagli con un piano la parte, o sia il prisma AM ugualmente alto, che il prisma GL.

DIMOSTRAZIONE. Dei tre prismi AD, AM, GL il primo AD (cor. 1. prop. 14.) sta al secondo AM :: AE : AT, cioè sostituendo GZ per l' uguale AT, sta il prisma AD : AM :: AE : GZ.

Il secondo prisma AM (prop. 15.) sta al terzo ugualmente alto GL, come la base ABCXY alla base GHI. Dunque (prop. 17. lib. 1.) starà il primo AD al terzo prisma GL in ragione composta dalle due ragioni AE : GZ, del primo al secondo; ed ABCXY : GHI del secondo al terzo; vale a dire (cor. 3. def. 6. lib. 1.) starà il prisma AD : GL :: ABCXY×AE : GHI×GZ. Il che ec.

COROLLARIO I. (Tav. VIII. Fig. 43. 44.) Se i prismi AD, GL saranno simili, cioè terminati da ugual numero di piani simili, e similmente posti; vale a dire se sarà AE : GZ :: AK : GV :: AB : GH :: BC : HI ec., e gli angoli corrispondenti saranno uguali EAB=ZGH, EAK=ZGV, KAB=VGH, ec., allora (propos. 13., e 15. lib. 3.) si avrà la base ABCK : GHIV :: $\overline{AB}^2 : \overline{GH}^2$ o :: $\overline{AE}^2 : \overline{GZ}^2$ ec.; ma per l' antecedente dimostrazione abbiamo AD : GL :: ABCK ×AE : GHIV×GZ, e sostituendo la ragione $\overline{AE}^2 : \overline{GZ}^2$ in luogo della ragione uguale ABCK : GHIV, avremo AD : GL :: $\overline{AE}^2\times AE : \overline{GZ}^2\times GZ$, cioè sarà AD : GL :: $\overline{AE}^3 : \overline{GZ}^3$. Ma, d' ipotesi, abbiamo AE : GZ :: AK : GV :: AB : GH ec.; laonde (prop. 14. lib. 1.) sarà eziandio $\overline{AE}^3 : \overline{GZ}^3 :: \overline{AK}^3 : \overline{GV}^3 :: \overline{AB}^3 : \overline{GH}^3$ ec.; adunque (assioma 1.) sarà AD : GL :: $\overline{AK}^3 : \overline{GV}^3 :: \overline{AB}^3 : \overline{GH}^3$ ec.; cioè i prismi simili stanno fra loro come i cubi de' lati omologhi, o delle altezze.

Se dunque i lati di un prisma saranno quadrupli de' lati omologhi d' un altro prisma simile, in tal caso il primo sarà sessantaquattro volte maggiore del secondo prisma ec.

Contiene la prop. 33. del lib. 11. d' Euclide.

COROLLARIO II. Le medesime cose si verificano delle simili piramidi, perchè (prop. 13.) sono sutriple dei primi circoscritti.

COROLLARIO III. Lo stesso si dimostra de' cilindri simili, e de' coni simili, perchè i cilindri sono prismi, ed i coni sono piramidi d' infiniti lati. Per la qual cosa i cilindri, o i coni staranno fra loro come i cubi delle loro altezze, o come i cubi de' diametri, o raggi delle loro basi; poichè (def. 17.) hanno i diametri, o raggi delle basi nella ragione delle altezze.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOR. TAV. VIII. FIG. 45. 46.

I prismi (AD, GL), che hanno le basi in reciproca ragione delle altezze (AE, GZ), sono uguali fra loro.

Scambievolmente i prismi uguali hanno le basi in ragione reciproca delle loro altezze.

DIMOSTRAZIONE. Imperciocchè abbiamo, d' ipotesi, ABC : GHI :: GZ : AE; onde (prop. 1. lib. 1.) sarà ABC×AE=GHI×GZ; cioè (prop. 10.) il prisma AD uguale al prisma GL. Il che ec.

2. Se il prisma AD sarà uguale al prisma GL, cioè ABC×AE=GHI×GZ, allora dissolvendo (cor. 1. prop. 2. lib. 1.) si avrà ABC : GHI :: GZ : AE; cioè i prismi uguali hanno le basi in ragione reciproca delle altezze. Il che ec.

COROLLARIO. Lo stesso si verifica delle piramidi, de' cilindri, e de' coni, come resta evidente dalle antecedenti dimostrazioni.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOR. TAV. VIII. FIG. 47.

La sfera è uguale a due terze parti del cilindro circoscritto.

Sia ABCL un quadrato, in cui si tiri il diametro AC, e dal centro A col raggio AL, o AB descrivasi l' arco LFB, che sarà (def. 7. lib. 4.) la quarta parte della periferia del cerchio, ed il triangolo mistilineo ALB (def. 4. lib. 4.) sarà un quadrante del cerchio.

Tirisi il raggio AF, e pel punto F la retta ST parallela al lato AB (prop. 23. lib. 2.). Concepiscasi, che il quadrato ABCL col triangolo ALC, e col quadrante ALFB del cerchio si rivolgano intorno intorno al lato immobile AL finattanto che ritornino al medesimo luogo, da cui cominciarono a muoversi, lasciando in ogni positura il loro vestigio. In esso rivolgimento il quadrato ABCL (definizione 10.) descriverà il cilindro CD; il triangolo rettangolo ALC (def. 12.) descriverà il cono ACQMX, ed il quadrante ALB (def. 13.) descriverà l' emisfero LBIDZ. Il cilindro (cor. prop. 10.) è composto da altrettanti piani circoli uguali, i cui raggi sono AB, LC, ST ec., quanti sono gli elementi, o punti nella perpendicolare AL. Il cono è parimente formato da ugual numero di cerchi decrescenti (cor. 3. prop. 11.) dal punto L fino al punto A, i cui raggi sono le rette LC, SR ec., cioè gli elementi del triangolo ALC. Medesimamente l' emisfero è composto dallo stesso numero di cerchi, i cui raggi sono AB, SF ec. decrescenti dal punto A fino al punto L. In conseguenza i tre descritti solidi sono composti da ugual numero di elementi, cioè di piani circoli.

Dimostrazione. Sia ST il raggio di uno degli uguali circoli costituenti il cilindro, sarà SF il raggio del corrispondente circolo nell' emisfero, ed SR sarà il raggio del circolo corrispondente del cono. Ma perchè i cerchi (cor. 4. prop. 2. lib. 5.) sono fra loro come i quadrati de' raggi, perciò i cerchi descritti dal raggio ST nel cilindro, dal raggio SF nell' emisfero, e dal raggio SR nel cono saranno tra di loro come i quadrati de' raggi ST, SF, SR; ed essendo di costruzione ST=AB, ed AB=AF, però (ass. 1.) sarà ST=AF. Abbiamo inoltre (cor. prop. 7. lib. 3.) AL : LC :: AS : SR, e d' ipotesi è AL=LC, onde sarà ancora AS=SR; e però alle linee ST, SR sostituendo le uguali rette AF, AS, allora i cerchi descritti da' raggi ST, SF, SR, i quali di dimostrazione sono fra loro come i quadrati di essi raggi, staranno ancora tra di loro come i quadrati delle rette AF, SE, AS; ma (cor. 1. prop. 18. lib. 3.) abbiamo $\overline{AF}^2=\overline{SF}^2+\overline{AS}^2$; adunque anche il cerchio descritto dal raggio ST nel cilindro sarà uguale ai due cerchi descritti da' raggi SF nell' emisfero, ed SR nel cono. Se dunque dal cerchio descritto dal raggio ST nel cilindro si toglierà il cerchio corrispondente descritto dal raggio SR nel cono, rimarrà il cerchio descritto dal corrispondente raggio SF nell' emisfero. La stessa cosa dimostrasi di tutti i corrispondenti cerchi, che compongono i suddetti tre solidi. Dunque sottraendo la solidità del cono da quella del cilindro, il residuo sarà la solidità dell' emisfero. Ma il cono (cor. 1. prop. 13.) è la terza parte del cilindro circoscritto, cioè che sia ugualmente alto, ed abbia la stessa base; conseguentemente l' emisfero sarà uguale alle rimanenti due terze parti del circoscritto cilindro.

Quanto si è dimostrato dell' emisfero, s' intende anche dimostrato del suo doppio, cioè di tutta la sfera, il cui cilindro circoscritto è doppio del cilindro circoscritto all' emisfero, come si può osservare nella Fig. 48.

Dunque la solidità della sfera è uguale a due terzi del circoscritto cilindro. Il che ec.

È il corollario della prop. 32. del libro della sfera, e del cilindro di Archimede.

Corollario I. Perlaqualcosa la sfera sta al cilindro circoscritto :: 2 : 3, ed invertendo il cilindro stà alla sfera inscritta :: 3 : 2.

Corollario II. Adunque trovata (cor. prop. 10.) la solidità del circoscritto cilindro, se da essa si toglierà la terza parte, il residuo sarà la solidità della sfera. Inoltre perchè il cono è la terza parte del cilindro circoscritto, perciò la sfera è doppia di esso cono; conseguentemente i suddetti tre solidi, cioè il cilindro circoscritto, la sfera, ed il cono stanno fra loro come i numeri 3, 2, 1.

Corollario III. Il diametro della sfera, che è uguale al diametro della base del cilindro circoscritto, si chiami a, e supponiamo, che la ragione del diametro alla periferia del cerchio sia :: $m : n$ (essa ragione secondo Archimede è prossimamente :: 7 : 22, e secondo Mezio è :: 113 : 355, e più approssimante alla vera è :: 100000 : 314172; come già abbiamo detto nell' annotaz. 1. della prop. 7. del lib. 5.), e si avrà la proporzione $m : n :: a$ al quarto termine $\frac{an}{m}$ (prop. 10. lib. 1.); laonde la circonferenza del cerchio massimo della sfera, o sia del cerchio base del cilindro circoscritto sarà $\frac{an}{m}$; e l' area, o superficie di esso cerchio (cor. 2. prop. 7. lib. 5.) sarà $\frac{a}{4}\times\frac{an}{m}$, cioè $\frac{a^2n}{4m}$ (il cui quadruplo è $\frac{a^2n}{m}$).

Or perchè l' asse del cilindro circoscritto (def. 20.) è parimente a, perciò la solidità di esso cilindro (cor. prop. 10.) sarà $a\times\frac{a^2n}{4m}$, cioè $\frac{a^3n}{4m}$, la cui terza parte $\frac{a^3n}{12m}$ sarà la solidità del cono inscritto al medesimo

cilindro, e la solidità della sfera sarà $\frac{2a^3n}{12m}$, cioè (aritm. 126.) sarà $\frac{a^3n}{6m}$, doppia della solidità del cono pel corollario antecedente. Ma $\frac{a}{6}\times\frac{a^2n}{m}$ dà parimenti il prodotto $\frac{a^3n}{6m}$. Per la qual cosa *la solidità della sfera si troverà ancora moltiplicando il terzo del raggio, o sia la sesta parte del diametro* $\frac{a}{6}$ *per* $\frac{a^2n}{m}$, *che è il quadruplo del cerchio massimo della medesima sfera.*

Inoltre *moltiplicando* $\frac{2a}{3}$, cioè *i due terzi del diametro della sfera per* $\frac{a^2n}{4m}$ *superficie del cerchio massimo, il prodotto* (aritm. 133.) *sarà eziandio* $\frac{2a^3n}{12m}$, cioè $\frac{a^3n}{6m}$, vale a dire *la medesima solidità della sfera.*

Corollario IV. Perchè la ragione $m : n$ del diametro alla circonferenza secondo Archimede, è 7 : 22, cioè abbiamo $m=7$, ed $n=22$, ossia $m : n :: 7 : 22$, perciò (prop. 1. lib. 1.) sarà $7n=22m$, e moltiplicando questa equazione per $3a^3$ triplo cubo del diametro (ass. 4.) avremo $21a^3n=66a^3m$, e dividendo questa equazione per $6m$ (ass. 5.) sarà $\frac{21a^3n}{6m}=11a^3$, e dissolvendo avrassi la proporzione $21 : 11 :: a^3 : \frac{a^3n}{6m}$, ma a^3 è il cubo del diametro, ed $\frac{a^3n}{6m}$ è la solidità della sfera, come abbiamo dimostrato antecedentemente.

Adunque *dato il diametro della sfera, se il cubo di esso diametro si moltiplicherà per* 11, *ed il pro-*

dotto si dividerà per 21, *il quoziente sarà la solidità della sfera;* ovvero facciasi la regola di proporzione 21 all' 11, come il cubo del diametro della data sfera al quarto termine proporzionale, che sarà la solidità della medesima sfera.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

Le sfere fra loro stanno in ragione triplicata, cioè come i cubi, de' loro diametri, o sia de' loro raggi.

Dimostrazione. Tutti i cilindri circoscritti alle sfere (def. 20.) sono retti, ed hanno i diametri delle basi uguali alle loro altezze; e però (def. 17.) sono simili. Ma (cor. 1. propos. antec.) il cilindro sta alla sfera inscritta :: 3 : 2; perciò (ass. 1.) un cilindro sta alla sfera in esso inscritta come un altro cilindro alla sfera, che gli è inscritta; ed alternando (prop. 3. lib. 1.) starà un cilindro ad un altro simile cilindro, come la sfera inscritta nel primo alla sfera inscritta nel secondo; ed i cilindri simili (cor. 3. prop. 17.) stanno fra loro come i cubi de' diametri, o raggi delle basi; adunque (ass. 1.) anche le sfere staranno tra loro come i cubi de' loro diametri, che (def. 20.) sono uguali ai diametri delle basi de' medesimi cilindri; ovvero staranno tra di loro come i cubi de' propri raggi; essendo che (cor. 1. prop. 16. lib. 1.) la ragione de' raggi è la medesima di quella de' diametri. Adunque le sfere ec. Il che ec.

È la prop. 18. del lib. 12. d' Euclide.

Corollario. Dunque la sfera, il cui diametro è 6, starà alla sfera, il cui diametro sia 2, come 216 all' 8.; ma sta 216 : 8 :: 27 : 1, e però un diametro triplo, o sia un raggio triplo descrive una sfera ventisette volte maggiore di quella descritta dal raggio semplice. Un raggio quintuplo descrive una sfera centoventicinque volte maggiore della sfera descritta dal raggio semplice, e così discorrendo degli altri.

Annotazione. Le misure nostrali, di cui ci serviamo per misurare le figure solide, sono i cubi, ed i parallelepipedi costituiti dalle misure lineari, di cui abbiamo fatta menzione nel corollario terzo della def. 36. del lib. 2.; cioè

L' oncia cubica, che è un cubo, il quale ha un' oncia di lunghezza, un' oncia di larghezza, ed un' oncia di altezza, o sia di grossezza, e perchè l' oncia lineare è divisa in dodici punti lineari, l' oncia cubica conterrà 1728. *punti cubici*, o sieno cubi aventi lunghezza, larghezza, e grossezza di un punto lineare. E per la stessa ragione ciascun punto cubico contiene 1728. *atomi cubici*.

Il piede cubico, che è il cubo d'un piede liprando, e contiene 1728. oncie cubiche.

Il trabucco cubo, che ha sei piedi liprandi di lunghezza, sei di larghezza, e sei di grossezza, e perciò contiene 216. piedi cubici.

Il piede del trabucco cubo è un parallelepipedo, che ha un trabucco di lunghezza, un trabucco di larghezza, ed un piede di grossezza, e però contiene trentasei piedi cubici.

L' oncia del trabucco cubo è un parallelepipedo lungo un trabucco, largo un trabucco, e alto un' oncia, onde contiene 5184 oncie cubiche.

L' oncia del piede cubico è un parallelepipedo lungo un piede, largo un piede, ed alto un' oncia; perciò contiene 144. oncie cubiche. Lo stesso si dee intendere de' punti, ed atomi del piede cubico, e del trabucco cubo ec.

La tesa cubica è un cubo, che ha cinque piedi manuali di lunghezza, cinque di larghezza, e cinque di grossezza; laonde contiene 125 *piedi manuali cubici*, e ciascuno di essi piedi contiene 512 oncie cubiche, perchè esso piede ha soltanto ott' oncie di lunghezza ec.

Se la lunghezza AB (Tav. VIII. Fig. 43.) del prisma

AD sarà, verbigrazia, di oncie 6, e la larghezza BC, o AK (che s' intende perpendicolare alla lunghezza AB) sia di oncie 4; l' area della base ABCK (cor. 1. prop. 31. lib. 2.) sarà 24 oncie quadrate; sia l' altezza AE di 20. oncie, moltiplicando la base ritrovata di 24. oncie superficiali per l' altezza 20. (prop. 10.) il prodotto 480 esprimerà la solidità del dato prisma AD, cioè sarà 480 oncie cubiche.

Similmente (Tav. VIII. Fig. 48.) se il diametro del cerchio GN, base del cilindro GC, sarà di 42. oncie, la sua periferia (annotaz. 1. prop. 7. lib. 5.) sarà 132 oncie lineari, e l' area di esso cerchio (cor. 2. prop. 7. lib. 5.) si troverà essere di 1386 oncie quadrate. L' altezza GM, o sia HL del cilindro sia parimente di oncie 42, la sua solidità (cor. propos. 10.) sarà 42×1386, cioè 58212 oncie cubiche. Ma siccome il cilindro, che ha l' altezza uguale al diametro della base (def. 20.) può essere circoscritto alla sfera HBIDZL, che abbia ugual diametro DB, o HL; ed essendo la solidità della sfera (prop. 19.) uguale ai due terzi del cilindro circoscritto; perciò la solidità della sfera HBIDZL, che abbia il diametro di 42 oncie, sarà di 38808 oncie cubiche, che sono i due terzi di 58212, solidità ritrovata del cilindro circoscritto GC.

La medesima solidità della sfera ritrovasi, come si è dimostrato, (cor. 3. prop. 19.) moltiplicando 1386, superficie del cerchio massimo DZBI per 28, che sono i due terzi del diametro DB, essendo 28×1386 =38808.

Inoltre moltiplicando la quarta parte de' due terzi, cioè la sesta parte del diametro, che è 7, pel 4×1386, cioè per 5544, quadruplo del cerchio massimo; si otterrà la stessa solidità della sfera; essendo 7×5544=38808.

Finalmente, se il cubo del diametro 42, che è 74088, si moltiplica per 11, ed il prodotto 814968

si divide per 21, (cor. 4. prop. 19.) il quoziente 38808 sarà la medesima solidità della data sfera.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOR. TAV. VIII. FIG. 46.

La superficie di qualsivoglia prisma retto (HL), escluse le basi, è uguale al rettangolo contenuto dall' altezza, o lato (GZ), e dal perimetro (GH+HI+IG) della base (GHI).

Dimostrazione. Prisma retto dicesi quando i piani parallelogrammi (def. 6.), che lo costituiscono, sono rettangoli, e perpendicolari alla base; laonde la superficie del prisma retto HL, escluse le basi, è composta da altrettanti rettangoli GZSH, GZLI, HSLI ugualmente alti, quanti sono i lati della base GHI, e l' altezza di ciascun rettangolo è l' altezza medesima del prisma; sicchè moltiplicando l' altezza o lato GZ, o HS nel perimetro GH+HI+GI della base GHI, il prodotto sarà la superficie di tutti essi rettangoli, cioè del prisma, escluse le basi. Lo stesso s' intende dimostrato di qualunque altro poligono retto. Dunque la superficie ec. Il che ec.

Corollario. La superficie convessa del cilindro retto è parimente uguale al rettangolo, o sia prodotto dell' altezza, o lato, o asse del cilindro nella periferia della base, perchè il cilindro (cor. prop. 9.) è prisma poligono d' infiniti lati.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA TAV. VIII. FIG. 49.

La superficie della piramide retta (ABCD) esclusa la base, è uguale al rettangolo contenuto dal perimetro (BC+CD+DB) della base (BCD) nella metà della retta (AL), che dal vertice (A) della piramide è tirata perpendicolarmente sopra un lato (BC) del perimetro della base (BCD).

DIMOSTRAZIONE. La piramide dicesi retta, quando tutti i triangoli concorrenti al vertice sono isosceli, ed ugualmente alti. Laonde la superficie della piramide retta ABCD, esclusa la base BCD, è composta da altrettanti triangoli ABC, ACD, ABD ugualmente alti, quanti sono i lati della base BCD, e ciascuno di essi triangoli (cor. 2. prop. 31. lib. 2.) è uguale al rettangolo contenuto dalla sua base, che è un lato del perimetro della base BCD, e dalla metà della perpendicolare, o sia altezza AL.

Dunque moltiplicando BC+CD+DB perimetro della base nella metà dell' altezza AL, il prodotto sarà uguale alla somma de' triangoli ABC, ACD, ABD, cioè all' intera superficie della piramide, esclusa la base BCD. La stessa cosa si dica di qualunque altra piramide poligona retta. Dunque ec. Il che ec.

Contiene le prop. 7., ed 8. del lib. 1. della sfera di Archimede.

COROLLARIO I. Adunque la superficie della piramide retta, eccettuata la base, e la metà del rettangolo compreso dal perimetro della base BCD, e da tutta l' altezza AL di uno de' triangoli ugualmente alti, ABC.

COROLLARIO II. (Tav. VII. Fig. 16.) La curva superficie del cono retto ACEBF è parimente uguale al prodotto, o sia rettangolo contenuto dalla periferia CEBF della base, e dalla metà del lato AC, o AE del cono; perchè il cono è una piramide poligona d' infiniti lati, nella quale la perpendicolare tirata dal vertice ad uno degl' infiniti lati del perimetro della base è il lato del medesimo cono, cioè la retta AE, o AB ec.

Conseguentemente il rettangolo compreso da tutto il lato AC nella periferia della base BFCE è doppio della conica superficie curva.

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA.

La sfera è uguale ad un cono, la cui altezza sia uguale al raggio, e la base sia uguale alla superficie della stessa sfera; e la superficie della sfera è quadrupla del cerchio massimo di essa.

DIMOSTRAZIONE. La sfera può concepirsi composta da infinite piramidi, o coni infinitamente piccoli, ugualmente alti, che abbiano per vertice comune il centro della sfera; e le basi infinitamente piccole, che costituiscano tutta la superficie della sfera, ed esse piramidi, o coni hanno per altezza comune il raggio della sfera. Perlaqualcosa se si concepirà descritto un cono, o piramide, la cui base sia uguale a tutta la superficie della sfera, e l' altezza sia il raggio della medesima sfera, il descritto cono (cor. 2. propos. 12.) sarà uguale a tutti i coni infinitamente piccoli, che compongono la sfera; cioè esso cono sarà uguale alla sfera. Ma la solidità del cono (cor. 2. prop. 13.) è uguale al prodotto della base nella terza parte della sua altezza. Che però se il diametro della sfera si chiamerà a, il raggio sarà $\frac{a}{2}$, e la terza parte di esso raggio sarà $\frac{a}{6}$. Supponiamo, che la superficie della base del sopraddetto cono si chiami x^2; e sarà $\frac{ax^2}{6}$ la solidità del medesimo cono uguale alla sfera; ma la solidità della sfera, il cui diametro sia a (cor. 3. prop. 19.) si è trovata essere $\frac{a^3n}{6m}$, perciò avremo $\frac{ax^2}{6}=\frac{a^3n}{6m}$, e dividendo tutta l' equazione per $\frac{a}{6}$ (ass. 5.) resterà $x^2=\frac{a^2n}{m}$, ma x^2 è, d' ipotesi, la base del cono, la quale è uguale alla superficie della sfera; ed $\frac{a^2n}{m}$ è il quadruplo del cerchio massimo della sfera (cor. 3. prop. 19.). Adunque la superficie della sfera è quadrupla del cerchio massimo della medesima sfera. Il che ec.

Corollario I. Essendosi dimostrato (cor. 2. prop. 7. lib. 5.) che il rettangolo contenuto dal diametro del cerchio nella sua periferia è quadruplo della superficie del medesimo cerchio; perciò *la superficie della sfera è uguale al rettangolo contenuto dal diametro, e dalla circonferenza del cerchio massimo di essa sfera.* Così (Tav. VIII. Fig. 48.) moltiplicando il diametro DB di 14. oncie per la circonferenza BLDH, che sarà oncie 44, il prodotto 616 oncie quadrate sarà la superficie della sfera LZBIDH.

Corollario II. Inoltre perchè il rettangolo, o prodotto fatto dal diametro nella circonferenza del cerchio massimo della sfera è uguale alla superficie della sfera medesima; perciò il rettangolo, o prodotto contenuto dalla periferia del cerchio massimo, e dalla metà del diametro sarà uguale alla superficie curva dell' emisfero; la quale si ottiene ancora moltiplicando la metà della suddetta periferia per tutto il diametro. Come (Tav. VIII. Fig. 50.) moltiplicando la periferia ABFD, o BCDE del cerchio massimo pel raggio AS, altezza dell' emisfero, il prodotto sarà la curva superficie dell' emisfero ABCDE, la quale parimente si troverà moltiplicando tutto il diametro AF, o BD per la semicirconferenza BAD.

Per la medesima ragione (Tav. VIII. Fig. 51.) moltiplicando la periferia ADBL del cerchio massimo per la parte AR del diametro, la quale è l' altezza del segmento ADELI, o moltiplicando il diametro AB per l' arco DAL, il prodotto sarà la superficie curva del segmento sferico ADELI.

Corollario III. Quando il diametro della sfera,

che uguaglia il diametro della base del cilindro circoscritto si chiama a; allora (cor. 3. prop. 19) la circonferenza della base del cilindro circoscritto, o sia del cerchio massimo della sfera è $\frac{an}{m}$; e perchè l' altezza di esso cilindro circoscritto (def. 20.) è uguale all' asse, o diametro della sfera, perciò essa altezza sarà anche a, ed in conseguenza la superficie curva di esso cilindro (cor. prop. 21.) sarà $a \times \frac{an}{m}$, cioè $\frac{a^2n}{m}$, ma la superficie sferica si è parimente dimostrata $=\frac{a^2n}{m}$. Adunque *la superficie sferica è uguale alla superficie curva del cilindro circoscritto.*

Inoltre perchè, secondo il ritrovato di Archimede, abbiamo $m=7$, ed $n=22$, perciò sarà $\frac{a^2n}{m}=\frac{22a^2}{7}$.

Sicchè dato il diametro a della sfera, se si farà la regola del tre $7:22::a^2$, quadrato del diametro, al quarto termine proporzionale $\frac{22a^2}{7}$, sarà questo la superficie della medesima sfera. Adunque *la superficie della sfera ritrovasi ancora moltiplicando il quadrato del suo diametro per 22, e dividendo il prodotto per 7, ed il quoziente sarà la superficie sferica*; e sarà anche la superficie curva del circoscritto cilindro. Sia, verbigrazia, il diametro della sfera oncie 12, il suo quadrato 144 si moltiplichi per 22, ed il prodotto 3168 si divida per 7, ed il quoziente $452\frac{4}{7}$, cioè oncie quadrate 452, 6 punti, e 10. atomi circa sarà la superficie della sfera.

Corollario IV. Se nel mezzo cerchio massimo ADB si condurranno le corde BD, DA, l' angolo ADB (cor. 3. prop. 8. lib. 4.) sarà retto, e da esso sopra l' ipotenusa AB è tirata la perpendicolare DR; onde (propos. 17. lib. 3.) sarà $BA \times AR = \overline{AD}^2$; che però se faremo il diametro BA$=a$, e la sua porzione AR$=c$, avremo BA×AR$=ac$; e perchè abbiamo BA×AR$=\overline{AD}^2$, sarà (ass. 1.) ancora $\overline{AD}^2=ac$, ed estraendo la radice quadrata (aritm. 179.) avremo AD$=\sqrt{ac}$. Supponendo inoltre, che la ragione del diametro alla circonferenza sia :: $m:n$, per ritrovare la periferia del cerchio descritto dal raggio AD, o sia dal raggio $\sqrt{ac}$ (il cui doppio, cioè il diametro, sarà $2\sqrt{ac}$) facciasi la regola di proporzione (prop. 16. [illegible] zionale, che sarà $\frac{2n\sqrt{ac}}{m}$, e questo sarà la ricercata periferia, la quale (cor. 2. prop. 7. lib. 5.) moltiplicata per la metà del raggio AD, cioè per $\frac{\sqrt{ac}}{2}$, il prodotto $\frac{2n\sqrt{ac}}{m}\times\frac{\sqrt{ac}}{2}$, cioè $\frac{2nac}{2m}$, o sia $\frac{acn}{m}$ (arit. 133. 172. 126.) sarà la superficie del cerchio descritto dal raggio AD.

La superficie curva del segmento sferico ADELI (antec. cor. 2.) è uguale al prodotto di tutta la circonferenza ADBL nella parte AR del diametro, che è l'altezza del segmento sferico; ma (cor. 3. prop. 19.) la periferia del cerchio massimo ADBL è $\frac{an}{m}$, ed essendo d' ipotesi la porzione AR$=c$; perciò la superficie curva dello stesso segmento sferico sarà ADBL×AR$=\frac{an}{m}\times c$, cioè sarà $\frac{acn}{m}$, vale a dire uguale alla superficie ritrovata del cerchio descritto dal raggio AD.

Adunque dato qualsivoglia segmento di cerchio ADELI, e tirato il diametro DL del cerchio DELI base di esso segmento, e dal centro R innalzata la perpendicolare RA, e dal punto A al punto D tirata la corda AD, l' area del cerchio descritto dal raggio AD sarà uguale alla superficie curva dello stesso segmento sferico ADELI.

PROPOSIZIONE XXIV.

PROB. TAV. VIII. FIG. 52.

Da un punto sublime dato (A) tirare una linea retta perpendicolare al soggetto piano (XZ).

Nel piano XZ tirisi qualunque linea retta BE, a cui perpendicolare AL. Poscia nel piano XZ tirisi dal punto L la retta LH perpendicolare alla stessa retta BE. Finalmente dal punto sublime A si tiri la retta AC perpendicolare alla retta LH; e sarà essa AC perpendicolare al piano XZ, nel quale tirisi pel punto C la retta RCS parallela alla retta BE (prop. 23. lib. 2.).

Dimostrazione. Essendo di costruzione la retta BE perpendicolare alle due rette LA, LC, perciò (prop. 3.) sarà perpendicolare al piano LAC, in cui esse rette sono poste, ed in conseguenza anche la retta RS (cor. 2. prop. 4.) sarà perpendicolare allo stesso piano LCA, perchè è parallela alla retta BE; sicchè (def. 1.) gli angoli ACR, ACS saranno retti, e di costruzione gli angoli ACL, ACH sono parimente retti. Dunque la retta AC essendo perpendicolare alle due rette LH, RS, che si segano fra loro nel piano XZ (prop. 3.) sarà perpendicolare al medesimo piano. Il che bisognava fare, e dimostrare.

È la prop. 11. del lib. 11. d' Euclide.

Corollario. Se da un punto G dato in un piano XZ si dovesse innalzare una linea perpendicolare allo stesso piano; allora si dovrebbe primieramente da qualche punto sublime A tirare una retta AC perpendicolare al soggetto piano XZ, come poc' anzi si è dimostrato, e quindi pel punto dato G tirare una retta GM parallela alla AC, la quale (cor. 2. prop. 4.) sarebbe la ricercata perpendicolare.

È la prop. 12. del lib. 11. d' Euclide.

ELEMENTI
DELLA GEOMETRIA
LIBRO SETTIMO

DELLE PROPRIETA' DELLA ELLISSE, DELLE EVOLUTE, ED EVOLVENTI, DELLA CICLOIDE, DELLA PARABOLA, E DELL' IPERBOLA, DELLE LORO AREE, E DE' SOLIDI DA ESSE GENERATI.

DELLA ELLISSE.

DEFINIZIONE I.

TAV. VIII. FIG. 53.

Se due linee rette disuguali, AB maggiore, e DE minore si segheranno fra loro per mezzo, e perpendicolarmente nel punto C, da cui fatto centro, e col raggio CA, o CB si descriva il cerchio ANBO; indi per moltissimi punti, G, L ec. della maggior linea AB (prop. 13. lib. 2.) si tirino le corde ZH, KM ec. perpendicolari alla medesima retta AB. Poscia alle tre linee rette AB, DE, GH (prop. 6. lib. 3.) si trovi la quarta proporzionale GI, e seghisi GV=GI: similmente alle tre rette AB, DE, LM trovisi la quarta proporzionale LR, e taglisi LS=LR; e la medesima cosa si faccia a tutte le perpendicolari tirate sopra la retta AB; finalmente descrivasi la linea curva AVSDBERI, che passi pei ritrovati punti I, R, S, V, ec., e pei punti A, D, B, E; la curva ADBE, e la figura contenuta da essa si chiamerà *ellisse*.

Le linee date AB, DE chiamansi *assi conjugati dell' ellisse*. Ma AB dicesi *asse maggiore*, o *lato trasverso*, e DE è *l' asse minore*. Il punto C, in cui gli assi conjugati si segano perpendicolarmente, e per mezzo, nomasi *centro dell' ellisse*. Le rette linee GI, LR, LS ec. tirate perpendicolarmente sopra l' asse AB dai punti della curva, chiamansi *ordinate al maggior asse*. Ma le linee, che dai punti della curva si tirano perpendicolari al minor asse, diconsi *ordinate al minor asse*, come PR, TY ec.

COROLLARIO I. Adunque le linee ordinate ad un asse sono parallele all' altro asse conjugato.

COROLLARIO II. Perchè di costruzione abbiamo AB : DE :: GH : GI :: GZ : GV :: LM : LR ec.; ed inoltre (prop. 2. lib. 4.) abbiamo ZH doppia di GH, KM doppia di LM, VI doppia di GI, SR doppia di LR ec.; perciò (proposiz. 11. lib. 1.) sarà eziandio AB : DE :: ZH : VI :: KM : SR :: ON : DE ec.

ANNOTAZIONE. Se intorno al minor asse DE si descriverà un cerchio QF, e alle tre linee DE, AB, TY si troverà la quarta proporzionale TY; facendo lo stesso a tutte le perpendicolari all' asse DE, si descriverà la medesima curva ellittica.

DEFINIZIONE II.

Il cerchio, che ha per diametro l' asse maggiore, nomasi *cerchio circoscritto all' ellisse*; e quel cerchio, che ha per diametro l' asse minore, dicesi *cerchio inscritto all' ellisse*.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

Nella ellisse il quadrato di qualsivoglia ordinata (GI) al maggior asse (AB) sta al rettangolo contenuto dalle parti (AG, GB) del medesimo asse, fatte dall' ordinata, come il quadrato del minor asse

(DE) al quadrato del maggior asse (AB); ovvero come il quadrato del semiasse minore (CE) al quadrato del semiasse maggiore (CA); cioè sarà

$\overline{GI}^2 : AG\times GB :: \overline{DE}^2 : \overline{AB}^2 :: \overline{CE}^2 : \overline{CA}^2$.

Dimostrazione. Dalla descrizione dell' ellisse (def. 1.) abbiamo AB : DE :: GH : GI, e invertendo (annot. prop. 3. lib. 1.) abbiamo GI : GH :: DE : AB; onde (prop. 14. lib. 1.) sarà $\overline{GI}^2 : \overline{GH}^2 :: \overline{DE}^2 : \overline{AB}^2$.

Ma nel cerchio ANBO (cor. 1. prop. 18. lib. 4.) egli è $\overline{GH}^2 = AG\times GB$, e però sostituendo AG×GB invece dell'uguale $\overline{GH}^2$, avremo $\overline{GI}^2 : AG\times GB :: \overline{DE}^2 : \overline{AB}^2 :: \overline{CE}^2 : \overline{CA}^2$ (cor. 1. prop. 16. lib. 1.).

Dunque il quadrato di qualunque ordinata al maggior asse sta al rettangolo contenuto dalle parti del medesimo asse, come il quadrato del minor asse al quadrato dell' asse maggiore, o come il quadrato del semiasse minore al quadrato del maggior semiasse. Il che bisognava dimostrare.

Corollario I. Condotta qualunque altra linea LR ordinata al maggior asse, col medesimo ragionamento si dimostra essere $\overline{LR}^2 : AL\times LB :: \overline{DE}^2 : \overline{AB}^2$; ed essendosi già dimostrato, che sta $\overline{GI}^2 : AG\times GB :: \overline{DE}^2 : \overline{AB}^2$; perciò (ass. 1.) sarà $\overline{GI}^2 : AG\times GB :: \overline{LR}^2 : AL\times LB$, ed alternando si avrà $\overline{GI}^2 : \overline{LR}^2 :: AG\times GB : AL\times LB$.

Il che si avvera di tutte le ordinate al medesimo asse. Adunque *nella ellisse i quadrati delle ordinate al maggior asse sono fra loro come i rettangoli compresi dalle corrispondenti parti dell' asse medesimo*.

Corollario II. Facciasi la metà dell' asse maggiore $AC=CB=a$, e sarà esso maggior asse $AB=2a$. Similmente pongasi la metà del minor asse $CD=CE=b$, e sarà il minor asse $DE=2b$.

Inoltre si faccia l' ordinata $GI=y$, e la parte dell' asse maggiore frapposta tra l' ordinata, ed il centro, cioè la $CG=x$ (questa tal parte dell' asse per brevità si chiami *ascissa*) ed avremo $AG=AC-CG=a-x$, e $GB=BC+CG=c+x$; onde sarà

$AG\times GB = \overline{a-x}\times\overline{a+x} = a^2-x^2$.

Ma perchè si è dimostrato essere $\overline{GI}^2 : AG\times GB :: \overline{CE}^2 : \overline{CA}^2$, sostituendo gli uguali valori, si avrà $y^2 : a^2-x^2 :: b^2 : a^2$; laonde (prop. 1. lib. 1.) avremo l' equazione $\overline{a^2-x^2}\times b^2 = a^2y^2$, che divisa per b^2 (ass. 5.) ci dà l' equazione $a^2-x^2 = \frac{a^2y^2}{b^2}$, la quale contiene la proprietà principale della ellisse. Se la stessa equazione $\frac{a^2y^2}{b^2} = a^2-x^2$ si moltiplicherà per b^2, e si dividerà per a^2 (ass. 4. e 5.) ne nascerà l' equazione $y^2 = \frac{a^2b^2-b^2x^2}{a^2}$, che esprime il valore del quadrato di qualunque ordinata al maggior asse.

Ma se della equazione $\frac{a^2y^2}{b^2} = a^2-x^2$, il termine $-x^2$ si trasporterà dalla seconda nella prima parte, ed il termine $\frac{a^2y^2}{b^2}$ nella seconda, cangiati i segni, per antitesi (aritmet. 106.) si avrà $x^2 = a^2 - \frac{a^2y^2}{b^2}$, cioè (aritm. 119.) sarà $x^2 = \frac{a^2b^2-a^2y^2}{b^2}$; equazione, che esprime il valore del quadrato di qualunque ascissa dell' asse maggiore.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

Il quadrato di qualsisia ordinata (PR) al minor asse (DE) sta al rettangolo (EP×PD) contenuto dalle corrispondenti parti (EP , PD) del medesimo asse , come ($\overline{AB}^2$) il quadrato del maggior asse al ($\overline{DE}^2$) quadrato del minor asse , o come il quadrato del maggior semiasse al quadrato del semiasse minore, sarà cioè $\overline{PR}^2 : EP\times PD :: \overline{AB}^2 : \overline{DE}^2$, o sia :: $\overline{AC}^2 : \overline{CE}^2$.

Dal medesimo punto R della curva ellittica al maggior asse AB si conduca l'ordinata LR.

Dimostrazione. Dall' antecedente proposizione abbiamo $\overline{CE}^2 : \overline{CA}^2 :: \overline{LR}^2 : AL\times LB$. Ma (cor. prop. 20. lib. 4.) egli è $AL\times LB = \overline{CA}^2 - \overline{CL}^2$; e di più (prop. 28. lib. 2., ed aritm. 179.) abbiamo $\overline{LR}^2 = \overline{CP}^2$, e $\overline{CL}^2 = \overline{PR}^2$; onde sostituendo avremo $AL\times LB = \overline{CA}^2 - \overline{PR}^2$; e però la proporzione antecedente , sostituendo cose uguali ad uguali cose, si cangierà in quest' altra $\overline{CE}^2 : \overline{CA}^2 :: \overline{CP}^2 : \overline{CA}^2 - \overline{PR}^2$. ed alternando , e convertendo (prop. 3., e cor. 1. prop. 5. lib. 1.) avremo

$\overline{CE}^2 : \overline{CE}^2 - \overline{CP}^2 :: \overline{CA}^2 : \overline{CA}^2 - \overline{CA}^2 + \overline{PR}^2$, cioè

$\overline{CE}^2 : \overline{CE}^2 - \overline{CP}^2 :: \overline{CA}^2 : \overline{PR}^2$ (perchè $+\overline{CA}^2$, e $-\overline{CA}^2$ si distruggono l'uno l'altro) , ed alternando sarà $\overline{CE}^2 : \overline{CA}^2 :: \overline{CE}^2 - \overline{CP}^2 : \overline{PR}^2$; ma (cor. prop. 20. lib. 4.) abbiamo $\overline{CE}^2 - \overline{CP}^2 = EP\times PD$. Dunque sostituendo avremo la proporzione

$\overline{CE}^2 : \overline{CA}^2 :: EP\times PD : \overline{PR}^2$, ed invertendo (annotaz. prop. 3. lib. 1.) si avrà $\overline{PR}^2 : EP\times PD :: \overline{CA}^2 : \overline{CE}^2$, ovvero :: $\overline{AB}^2 : \overline{DE}^2$, (cor. 1. propos. 16. lib. 1.) . Dunque il quadrato ec. Il che ec.

Corollario. Da questa dimostrazione evidentemente ne segue (cor. 1. prop. 1.) , che i quadrati delle ordinate al minor asse stanno parimente fra loro

come i rettangoli contenuti dalle corrispondenti parti del medesimo asse segato dalle ordinate.

DEFINIZIONE III.

TAV. VIII. FIG. 54.

Data un' ellisse (ADBE) , se fatto centro un estremo (D , o E) del minor asse, e con un raggio (DF) uguale alla metà (AC , o CB) del maggior asse, si descriverà un arco (F , f) che seghi l'asse maggiore (AB) in due punti (F , f); essi punti (F , f) si chiameranno *fochi della ellisse.*

Le rette linee tirate dai fochi a qualunque punto della curva ellittica si nomano *raggi vettori della ellisse.* Così le due rette IF , If sono due raggi vettori.

La distanza CF , o Cf di ciascun foco dal centro della ellisse dicesi *eccentricità della ellisse.*

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

Se dai fochi (F , f) a qualsivoglia punto (I) della curva ellittica si tireranno due rette (FI , If) la somma di esse (FI+If) sarà sempre uguale al maggior asse AB .

Si tirino i raggi vettori DF , Df , e la retta IG ordinata al maggior asse AB , poscia facciansi , come nel corollario secondo della proposizione antecedente, $AB=2a$, $DE=2b$, e $GI=y$, e $CG=x$; saranno $DF=AC=CB=a$, e $CD=CE=b$. Inoltre pongasi la distanza di ciascun foco dal centro $CF=Cf=c$; laonde sarà $FG=CF-CG=c-x$, ed $\overline{FG}^2=c^2-2cx+x^2$ (arit. 142.) . Di più sarà $Gf=Cf+CG=c+x$, e $\overline{Gf}^2=c^2+2cx+x^2$.

DIMOSTRAZIONE. Nel triangolo rettangolo CDF (cor. 1. prop. 18. lib. 3.) abbiamo $\overline{CF}^2=\overline{DF}^2-\overline{CD}^2$, cioè $c^2=a^2-b^2$, e nel triangolo rettangolo FGI abbiamo $\overline{FI}^2=\overline{FG}^2+\overline{GI}^2$, cioè $\overline{FI}^2=c^2-2cx+x^2+y^2$. Ma il quadrato y^2 di qualunque ordinata al maggior asse si è dimostrato (cor. 2. propos. antec.) essere $y^2=\frac{a^2b^2-b^2x^2}{a^2}$; sicchè nella equazione $\overline{FI}^2=c^2-2cx+x^2+y^2$ sostituendo a^2-b^2 in luogo dell'ugual quadrato c^2, ed $\frac{a^2b^2-b^2x^2}{a^2}$ invece dell'uguale y^2, avremo $\overline{FI}^2=a^2-b^2-2cx+x^2+\frac{a^2b^2-b^2x^2}{a^2}$, cioè (aritm. 119.) sarà

$$\overline{FI}^2=\frac{a^4-a^2b^2-2a^2cx+a^2x^2+a^2b^2-b^2x^2}{a^2};$$

vale a dire (aritm. 51.) si avrà (L)

$$\overline{FI}^2=\frac{a^4-2a^2cx+a^2x^2-b^2x^2}{a^2}.$$

Inoltre essendosi dimostrato $c^2=a^2-b^2$, moltiplicando l'equazione per x^2 (ass. 4.) si avrà $c^2x^2=a^2x^2-b^2x^2$, e però sostituendo c^2x^2 invece di $a^2x^2-b^2x^2$ nell'antecedente equazione L avremo $\overline{FI}^2=\frac{a^4-2a^2cx+c^2x^2}{a^2}$, ed estraendo la radice quadrata (arit. 170, 177, 179.) si troverà $FI=\frac{a^2-cx}{a}$.

Parimente nel triangolo rettangolo IGf abbiamo $\overline{If}^2=\overline{Gf}^2+\overline{GI}^2$, vale a dire $\overline{If}^2=c^2+2cx+x^2+y^2$, e sostituendo i valori delle quantità c^2 e y^2 trovati superiormente, e riducendo il medesimo nome, come si è fatto di sopra, si troverà $\overline{If}^2=\frac{a^4-a^2b^2+2a^2cx+a^2x^2+a^2b^2-b^2x^2}{a^2}$,

cioè $\overline{If}^2=\frac{a^4+2a^2cx+a^2x^2-b^2x^2}{a^2}$, e sostituendo c^2x^2 invece della quantità uguale $a^2x^2-b^2x^2$, si otterrà $\overline{If}^2=\frac{a^4+2a^2cx+c^2x^2}{a^2}$, ed estraendo la radice quadrata, si troverà $If=\frac{a^2+cx}{a}$, ma abbiamo dimostrato $FI=\frac{a^2-cx}{a}$; sicchè (ass. 2.) avremo

$FI+If=\frac{a^2-cx}{a}+\frac{a^2+cx}{a}$, cioè

$FI+If=\frac{a^2-cx+a^2+cx}{a}=\frac{2a^2}{a}=2a$, cioè uguale al maggior asse AB, che da principio si è denominato $2a$. Dunque (ass. 1.) sarà $FI+If=AB$. Il che ec.

COROLLARIO PRIMO.

TAV. VIII. FIG. 54.

COSTRUZIONE DELLA ELLISSE.

Dati i due assi coniugati AB, DE, e trovati (def. 3.) i fochi F, ed f, ne' punti D, F, ed f si piantino tre spille forti, o aghi, o chiodi, e intorno ad essi si annodi un filo ben teso FDf. Poscia tolgasi la spilla, o l'ago D, e in sua vece mettasi la punta del compasso colla matita, o sia lapis, e si aggiri intorno intorno colla mano in guisa che il filo sia sempre ugualmente ben teso, e che compito il giro, la punta del lapis ritorni precisamente al punto D, e sarà descritta l'ellisse; perchè sempre abbiamo FD+Df=AB, Fd+df=AB.

COROLLARIO SECONDO.

TAV. VIII. FIG. 55.

ALTRA COSTRUZIONE DELL' ELLISSE

Medesimamente si possono geometricamente trovare moltissimi punti della curva elittica, e descriverla nella seguente maniera.

Tra il centro C, e l' uno de' fochi *f* si noti un punto R a piacere, che segherà il maggior asse AB in due parti disuguali AR, RB, indi fatto centro il foco *f*, e coll' intervallo AR si descrivano dalle parti di A i due archi GI, HM. Parimente fatto centro F, e col medesimo raggio AR, dalle parti di B, descrivansi gli archi LO, PN.

Poscia col raggio RB, e dai medesimi centri *f*, ed F s' intersechino gli archi descritti, come in L, P, G, H; ed essi quattro punti saranno nella curva elittica, perchè, di costruzione, abbiamo
$fG+FG=AR+RB=AB$, $FL+fL=AR+RB=AB$.

Nella stessa maniera, se da altri punti presi tra il centro, ed un foco si dividerà l' asse maggiore in altre parti disuguali, e si farà la medesima operazione, si troveranno altri punti della curva ellittica; e però se pei punti A, E, B, D, e pei ritrovati G, H, P, L ec. si descriverà una curva, essa sarà un' ellisse, i cui assi coniugati sono AB, DE.

PROPOSIZIONE IV.

PROBLEMA TAV. VIII. FIG. 56.

Per un punto (I) dato nella periferia dell' ellisse tirare una tangente di essa curva.

Dai fochi F, ed *f* al punto dato I tirinsi le rette FI, *f*I, e una di esse FI si prolunghi per diritto sino in L, di modo che sia $IL=If$; onde sarà
$FL=FI+If=AB$ (prop. antec.). Tirisi la retta L*f*, la quale (prop. 12. lib. 2.) si divida per mezzo in R, e si tiri la retta RIS, che toccherà l' ellisse nel solo punto I.

Dimostrazione. Imperciocchè se la retta RS toccasse la curva ellittica in qualche altro punto S, allora, condotte le rette SF, S*f*, SL, perchè nel triangolo isoscele I*f*L la retta RIS è tirata dal punto di mezzo R della base L*f* al vertice I, perciò (cor. 1. prop. 25. lib. 2.) sarà perpendicolare alla stessa base L*f*; in conseguenza (prop. 6. lib. 2.) sarà $SL=Sf$; ma se il punto S fosse nella periferia ellittica, per l' antecedente proposizione, sarebbe $SF+Sf=AB$, cioè $SF+SL=AB$, ed abbiamo già $FI+If$, cioè $FI+IL$, o sia $FL=AB$, e però (ass. 1.) sarebbe $SF+SL=FL$; la qual cosa (ass. 17.) è impossibile. Dunque non può essere, che la retta RIS tocchi la periferia ellittica in altro punto, fuorchè nel punto I; perciò è tangente dell' ellisse. Il che ec.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

Nell' ellisse le linee rette (IF, I*f*) tirate dal punto del contatto (I) ai fochi (F, *f*) fanno colla tangente (RS) angoli uguali ($SIF=RIf$).

Dimostrazione. Imperciocchè (prop. 17. lib. 2.) l' angolo SIF è uguale all' angolo RIL, e l' angolo RI*f* (cor. 1. prop. 25. lib. 2.) è uguale al medesimo angolo RIL; dunque (ass. 1.) sarà l' angolo $FIS=fIR$. Il che ec.

Corollario. Sicchè mettendo un corpo lucido in *f*, tutti i raggi di luce, che partendo da esso cadranno sui punti della curva ellittica, si rifletteranno sempre nell'altro foco F; perchè secondo le leggi della *catottica*, *l'angolo della incidenza* fIR è costantemente uguale *all' angolo* FIS *di riflessione*; e per questa ragione i punti F, f si dicono *fochi*; perciocchè tutti i raggi cadenti in ciascun punto della curva, essendo riflessi, concorrono in essi punti.

DEFINIZIONE IV.

TAV. IX. FIG. 57.

Data un' ellisse, i cui assi coniugati sieno AB, DE, tirando pel centro C qualunque altra linea retta MH terminata da ambedue le parti dalla curva ellittica in M, ed H; questa retta si chiami *diametro dell' ellisse*. Se poi da un estremo H del diametro MH (prop. 14. lib. 2.) si condurrà la retta HS ordinata al maggior asse AB prolungato indefinitamente verso L; poscia alle due rette CS, CA (prop. 5. lib. 3.) trovisi la terza proporzionale, che pongasi in CL; e dal punto H al punto L conducasi la retta HL indefinita; e finalmente pel centro C (prop. 23. lib. 2.) tirisi la retta GR parallela alla retta HL, sarà GR il *diametro coniugato* al diametro HM.

Se da qualsivoglia punto K del diametro GR si tirerà sino alla curva una retta KZ parallela al diametro coniugato HM; essa retta KZ sarà un' *ordinata al diametro* GR.

Similmente la retta PV parallela al diametro GR sarà un' *ordinata all' altro diametro coniugato* HM.

DEFINIZIONE V.

TAV. VIII. FIG. 53.

1. Se ai due assi AB, DE si troverà (prop. 5. lib. 3.) la terza proporzionale, la quale si metta in BX perpendicolare al maggior asse AB, questa retta si chiamerà *parametro*, o *lato retto del maggior asse* AB.

Similmente la terza proporzionale ai due assi DE, AB dicesi *parametro del minor asse* DE.

Parimente la terza proporzionale ai due diametri coniugati è il *lato retto*, o sia *parametro* di quel diametro, che si prende per primo termine della proporzione.

Corollario. Perchè, di costruzione, abbiamo $\div$ AB : DE : BX; perciò (cor. 4. prop. 2. lib. 1.) sarà AB : BX :: $\overline{AB}^2 : \overline{DE}^2$; cioè *l'asse maggiore sta al suo parametro, come il quadrato del medesimo maggior asse al quadrato dell' asse minore.* Ma (propos. 1.) abbiamo già $\overline{GI}^2$: AG×GB :: $\overline{DE}^2 : \overline{AB}^2$, cioè invertendo AG×GB : $\overline{GI}^2$ :: $\overline{AB}^2 : \overline{DE}^2$; dunque (ass. 1.) sarà AG×GB : $\overline{GI}^2$ :: AB : BX; sicchè *il rettangolo contenuto dalle parti del maggior asse sta al quadrato dell' ordinata corrispondente, come il maggior asse al suo parametro.*

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Il cerchio sta all' ellisse in esso inscritta come il diametro di esso cerchio, o sia l'asse maggiore al minor asse, o come la metà del primo alla metà del secondo.

Per ciascun punto del maggior asse AB s' intendano tirate linee perpendicolari al medesimo asse, che segando la periferia dell' ellisse, sieno terminate dalla periferia del cerchio circoscritto, come sono le rette ZH, KM ec.

Dimostrazione. Il cerchio si concepisce composto da altrettante perpendicolari ZH, KM, ON ec. quanti sono gli elementi, o diciamo punti nell' asse AB. Parimente l' ellisse s' intende composta da altrettante perpendicolari VI, SR, DE, ec., quanti sono gli elementi dell' asse AB. Conseguentemente il cerchio, e l' ellisse inscritta sono composti da ugual numero di elementi, ossia linee; ma (cor. 2. def. 1.) si è dimostrato essere ZH : VI :: KM : SR :: ON : DE ec.; e però raccogliendo (prop. 9. lib. 1.) starà la somma di tutti gli antecedenti ZH+KM+ON ec., che sono gli elementi, che costituiscono il cerchio AOBN, alla somma di tutti i conseguenti VI+SR+DE ec., che compongono l' ellisse ADBE, come qualsisia antecedente ON=AB al suo conseguente DE, ovvero (cor. 1. prop. 16. lib. 1.) come CA al CD. Sicchè il cerchio AOBN sta all' inscritta ellisse ADBE, come il maggior asse AB al minore DE, ovvero come la metà del primo alla metà del secondo. Il che ec.

Corollario. Col medesimo raziocinio si dimostra, che il cerchio DFEQ sta alla circoscritta ellisse ADBE come il minor asse DE al maggiore AB, o come il minor semiasse CD al maggiore CA; laonde invertendo starà l' ellisse ADBE al cerchio inscritto DFEQ :: AB : DE; ma antecedentemente si è dimostrato, che il cerchio circoscritto AOBN sta all' ellisse ADBE :: AB : DE. Dunque (ass. 1.) sarà AOBN : ADBE :: ADBE : DFEQ; *cioè l' ellisse è media proporzionale tra il cerchio circoscritto, ed il cerchio inscritto.*

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

Trovare la superficie dell' ellisse.

Risoluzione i. Data l' ellisse ADBE, il cui asse maggiore sia AB, ed il minore DE. Primieramente (annotaz. 1. prop. 7. lib. 5.) trovisi l' area del cer-

chio circoscritto AOBN, che ha il maggior asse AB per diametro. Poi si moltiplichi la stessa area pel minor asse, ed il prodotto dividasi pel maggior asse AB, ed il quoziente sarà l' area dell' ellisse.

Dimostrazione. Nell' antecedente proposizione si è dimostrato, che sta AB : DE :: al cerchio circoscritto AOBN all' ellisse ADBE; dunque (prop. 10. lib. 1.) sarà $ADBE = \frac{AOBN \times DE}{AB}$. Il che ec.

Risoluzione ii. Si moltiplichino fra loro i due assi conjugati AB, DE, ed il prodotto AB×DE si moltiplichi per 11, e questo prodotto 11AB×DE si divida per 14, il quoziente $\frac{11AB \times DE}{14}$ sarà la superficie della ellisse.

Dimostrazione. Abbiamo dall' antecedente proposizione AB : DE :: AOBN : ADBE, e moltiplicando la prima ragione per AB (propos. 11. lib. 1.) sarà $\overline{AB}^2 : AB \times DE :: AOBN : ADBE$, e alternando si avrà $\overline{AB}^2 : AOBN :: AB \times DE : ADBE$, ma secondo il ritrovamento di Archimede (annot. 2. prop. 7. lib. 5.) abbiamo $\overline{AB}^2 : AOBN :: 14 : 11$; dunque (ass. 1.) sarà $14 : 11 :: AB \times DE : ADBE$, ed in conseguenza (prop. 10. lib. 1.) si avrà l' ellisse $ADBE = \frac{11AB \times DE}{14}$. Il che ec.

Risoluzione iii. Ai due assi conjugati AB, DE (prop. 18. lib. 4.) trovisi la media proporzionale, la quale (cor. prop. 10. lib. 1., e cor. 1. prop. 18. lib. 4.) sarà $\sqrt{AB \times DE}$. Poscia (annotaz. 1. prop. 7. lib. 5.) trovisi la superficie del cerchio, che abbia per diametro la medesima retta $\sqrt{AB \times DE}$; ed essa superficie sarà l' area della data ellisse.

Dimostrazione. Perchè, di costruzione, abbiamo $\because AB : \sqrt{AB \times DE} : DE$, perciò quadrando i termini proporzionali (prop. 14. lib. 1.), ed aritm. 179.) avremo $\div \overline{AB}^2 : AB \times DE : \overline{DE}^2$. Ma i cerchi (cor. 4. prop. 2. lib. 5.) stanno fra loro come i quadrati de' loro diametri; e però i cerchi, che hanno per diametri le suddette linee AB, $\sqrt{AB \times DE}$, e DE saranno ancora tra di loro in proporzione continua; vale a dire il cerchio AOBN starà al cerchio, il cui diametro è la retta $\sqrt{AB \times DE}$, come questo medesimo cerchio al cerchio DFEQ; sicchè il cerchio che ha il diametro $\sqrt{AB \times DE}$ è medio proporzionale tra 'l cerchio circoscritto AOBN, ed il cerchio inscritto DFEQ; ma l' ellisse ADBE (cor. prop. antec.) è anche media proporzionale tra i medesimi cerchi AOBN, DFEQ. Adunque l' ellisse ADBE è uguale al cerchio, che ha per diametro la retta $\sqrt{AB \times DE}$ media proporzionale tra i due assi AB, DE. Il che ec.

Annotazione. Sia l' asse maggiore AB di 28. piedi di lunghezza, e l' asse minore DE di piedi 21, per la prima, e seconda risoluzione, l' area dell' ellisse si troverà di 462 piedi quadrati; ma servendosi della terza risoluzione, la superficie della medesima ellisse ritroverassi di piedi quadrati $461 \frac{668}{1000}$ in circa, cioè di piedi quadrati 461, oncie 8, e poco più di atomi 2, e perciò minore dell' area ritrovata per mezzo delle due prime risoluzioni; e ciò sempre accade, quando il prodotto de' due assi non è un perfetto quadrato, poichè allora non si può ritrovare la vera radice di esso prodotto, ma soltanto la radice prossima minore.

Che se l' asse maggiore sarà di 48 piedi di lunghezza, ed il minore di piedi 12, allora perchè il prodotto degli assi è 576, quadrato del numero 24, si troverà la medesima superficie dell' ellisse di piedi quadrati $452 \frac{4}{7}$ tanto colla prima, quanto colla seconda, e terza risoluzione.

DEFINIZIONE VI.

La *sferoide* è una figura solida, che si concepisce generata dal rivolgimento di una semiellisse intorno all' uno, o all' altro asse.

La sferoide (Tav. IX. Fig. 58.) descritta dal rivolgimento della semiellisse (AEB) intorno al maggior asse (AB) si chiama *sferoide ovale*, quale è AVIDEB.

La sferoide (Tav. IX. Fig. 59.) generata dal rivolgimento della semiellisse (DAE) intorno al minor asse (DE) dicesi *sferoide lenticolare* (ADBE).

La sferoide ovale da alcuni è chiamata *sferoide lunga*, e la lenticolare è detta *sferoide ottusa*.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA TAV. IX. FIG. 58.

La sfera sta all' inscritta sferoide ovale, come il quadrato del maggior asse al quadrato del minor asse della stessa sferoide.

Ma la superficie della medesima sfera sta alla superficie della suddetta sferoide, come il maggior asse al minore.

Si concepisca, che il mezzocerchio ANB, coll' inscritta semiellisse AEB si rivolgano intorno al maggior asse AB fisso, ed immobile lasciando in ogni sito il loro vestigio, finchè ritornino al medesimo luogo, da cui cominciarono a muoversi. Il mezzo cerchio ANB (def. 13. lib. 6.) descriverà la sfera AZHONB, e la semiellisse AEB descriverà la sferoide ovale AVIDEB, e starà la sfera alla sferoide $:: \overline{AB}^2 : \overline{DE}^2$; e la superficie della sfera starà alla superficie della sferoide $:: AB : DE$.

DIMOSTRAZIONE DELLA PRIMA PARTE. Imperciocchè questi due solidi s' intendono composti da ugual numero di elementi; cioè di piani cerchi, i cui raggi nella sfera sono le rette GH, LM, CN ec., e nella sferoide sono GI, LR, CE ec. tanti cioè, quanti sono gli elementi, o punti, che costituiscono il maggior asse AB. Ma dalla definizione prima abbiamo GH : GI :: LM : LR :: CN : CE ec.; onde (prop. 14. lib. 1.) sarà $\overline{GH}^2 : \overline{GI}^2 :: \overline{LM}^2 : \overline{LR}^2 :: \overline{CN}^2 : \overline{CE}^2$ ec., e raccogliendo (prop. 9. lib. 1.) avremo $\overline{GH}^2 + \overline{LM}^2 + \overline{CN}^2$ ec. : $\overline{GI}^2 + \overline{LR}^2 + \overline{CE}^2$ ec. :: $\overline{CN}^2 : \overline{CE}^2$, o sia :: $\overline{ON}^2 : \overline{DE}^2$ (cor. 1. propos. 16. lib. 1.) ovvero :: $\overline{AB}^2 : \overline{DE}^2$, essendo AB=ON. Ma i cerchi (cor. 4. proposiz. 2. lib. 5.) stanno fra loro come i quadrati de' loro raggi. Dunque tutti i cerchi, che costituiscono la sfera, i cui raggi sono le rette, GH, LM, CN ec. a tutti gli altrettanti cerchi, che compongono la sferoide, i raggi de' quali sono le rette GI, LR, CE ec. staranno come $\overline{AB}^2 : \overline{DE}^2$, cioè la sfera AZHONB sta alla sferoide inscritta AVIDEB :: $\overline{AB}^2 : \overline{DE}^2$. Il che ec.

DIMOSTRAZIONE DELLA SECONDA PARTE. La superficie della sfera AZHOBN si concepisce formata dalla somma delle circonferenze de' sopraddetti cerchi, che hanno i raggi GH, LM, CN ec.; e la superficie della sferoide ovale AVIDEB è composta dalla somma delle periferie di altrettanti cerchi corrispondenti, che hanno i raggi GI, LR, CE ec. Ma le periferie de' cerchi (cor. 5. prop. 2. lib. 5.) sono fra loro nella ragione de' raggi, o diametri de' medesimi cerchi; ed i diametri, o raggi (def. 1.) sono proporzionali GH : GI :: LM : LR :: CN : CE : ec. Sicchè raccogliendo (prop. 9. lib. 1.) la somma di tutte le periferie, che costituiscono la superficie della sfera, starà a tutte le altrettante circonferenze, che

formano la superficie della sferoide ovale, cioè la superficie della sfera starà alla superficie della sferoide ovale inscritta, come CN : CE, o :: ON : DE, o sia :: AB : DE. Dunque la sfera ec. Il che ec.

COROLLARIO I. (Tav. IX. Fig. 59.) Nella medesima maniera si dimostra, che la sfera inscritta DNEO sta alla circoscrittale sferoide lenticolare DAEB, come il quadrato del minor asse DE al quadrato del maggior asse AB della stessa sferoide, ed invertendo starà la sferoide lenticolare DAEB alla sfera inscrittale DNEO :: $\overline{AB}^2 : \overline{DE}^2$.

Ma (Tav. IX. Fig. 58.) per l' antecedente dimostrazione la sfera circoscritta AOBN sta all' inscritta sferoide ovale ADBE :: $\overline{AB}^2 : \overline{DE}^2$; dunque (ass. 1.) sarà AOBN : ADBE :: DAEB : DNEO; cioè quando gli assi conjugati della sferoide ovale sono uguali agli assi conjugati della sferoide lenticolare, allora la sfera sta alla inscrittale sferoide ovale, come la sferoide lenticolare inscritta nella medesima sfera alla sfera inscritta nella sferoide lenticolare.

Inoltre (Tav. IX. Fig. 59.) si dimostra come sopra, che la superficie della sfera inscritta DNEO sta alla superficie della circoscrittale sferoide lenticolare, come il minor asse DE all' asse maggiore AB.

COROLLARIO II. (Tav. IX. Fig. 58.) Col medesimo raziocinio si dimostra, che la superficie d' un segmento sferico AZH sta alla superficie del corrispondente segmento sferoidale ovato AVI, come l'asse maggiore AB al minore DE, o :: CA : CE, ovvero :: GH : GI. Ma quando la sferoide è lenticolare (Tav. IX. Fig. 59.), allora sta il segmento DIT della sfera inscritta al corrispondente segmento DXZ della sferoide lenticolare come l' asse minore DE al maggiore AB, o sia :: LT : LZ, cioè come il raggio della base del segmento sferico al raggio della base del corrispondente segmento sferoidale.

PROPOSIZIONE IX.

PROBLEMA.

Trovare la superficie, e la solidità dell' una, e dell' altra sferoide.

RISOLUZIONE

PER LA SFEROIDE OVALE

TAV. IX. FIG. 58.

1. Si moltiplichi l' asse maggiore AB pel minore DE; indi (prop. 10. lib. 1.) facciasi la regola di proporzione $7 : 22 :: AB \times DE$ al quarto termine proporzionale $\frac{22AB \times DE}{7}$, che sarà la superficie della sferoide ovale AVIDEB.

2. Si moltiplichi il quadrato del minor asse DE per l' asse maggiore AB, e poi si faccia la regola del tre $21 : 11 :: AB \times \overline{DE}^2$ al quarto proporzionale $\frac{11AB \times \overline{DE}^2}{21}$, il quale sarà la solidità della sferoide ovale AVIDEB. Ovvero trovisi la superficie d' un cerchio, che abbia per diametro il minor asse DE, ed essa superficie si moltiplichi per due terzi del maggior asse AB, ed il prodotto sarà parimente la solidità della sferoide ovale AVIDEB.

1. Dimostrazione. Dalla seconda parte della proposizione antecedente abbiamo $AB : DE ::$ la superficie della sfera AZHONB alla superficie della sferoide ovale AVIDEB, e moltiplicando la prima ragione per AB (prop. 11. lib. 1.) avremo $\overline{AB}^2 : AB \times DE ::$ la superficie della sfera AZHONB alla superficie della

sferoide AVIDEB, ed alternando sarà $\overline{AB}^2$ alla superficie AZHOBN $:: AB \times DE :$ AVIDEB superficie della sferoide. Ma (cor. 3. propos. 23. lib. 6.) abbiamo $7 : 22 :: \overline{AB}^2$ alla superficie della sfera AZHONB, dunque (ass. 1.) sarà ancora $7 : 22 :: AB \times DE$ (rettangolo compreso dagli assi) alla superficie della sferoide AVIDEB, la quale (propos. 10. lib. 1.) sarà $\frac{22AB \times DE}{7}$. Il che ec.

2. Nella prima parte della proposizione antecedente si è dimostrato, che sta $\overline{AB}^2 : \overline{DE}^2 ::$ la solidità della sfera AZHONB alla solidità della sferoide ovale AVIDEB, e moltiplicando la prima ragione per AB (prop. 11. lib. 1.) si avrà $\overline{AB}^3 : AB \times \overline{DE}^2 ::$ la solidità della sfera AZHONB alla solidità della sferoide AVIDEB, ed alternando sarà $\overline{AB}^3 :$ AZHONB $:: AB \times \overline{DE}^2 :$ AVIDEB. Ma (cor. 4. prop. 19. lib. 6.) si è dimostrato essere $21 : 11 :: \overline{AB}^3 :$ AZHONB; dunque (ass. 1.) sarà $21 : 11 :: AB \times \overline{DE}^2 :$ AVIDEB; perciò la solidità della sferoide ovale sarà $\frac{11AB \times \overline{DE}^2}{21}$.

Inoltre l' area del cerchio, che ha per diametro l' asse minore DE (annot. 2. prop. 7. lib. 5.) sarà $\frac{11}{14}\overline{DE}^2$, e moltiplicandola per $\frac{2}{3}$ AB, cioè pei due terzi del maggior asse, il prodotto $\frac{22AB \times \overline{DE}^2}{42}$, cioè $\frac{11AB \times \overline{DE}^2}{21}$ ci dà la medesima solidità della sferoide ovale AVIDEB, come evidentemente si vede. Il che ec.

RISOLUZIONE

PER LA SFEROIDE LENTICOLARE

TAV. IX. FIG. 59.

1. La superficie della sferoide lenticolare si ottiene anche moltiplicando il prodotto de' due assi pel numero 22, e dividendo questo prodotto pel 7, il quoziente sarà la ricercata superficie della sferoide lenticolare.

2. La solidità della sferoide lenticolare ritrovasi moltiplicando il quadrato del maggior asse AB per l'asse minore DE; poscia instituiscasi la regola del tre $21 : 11 :: DE \times \overline{AB}^2$ al quarto termine proporzionale, che (prop. 10. lib. 1.) sarà $\frac{11 DE \times \overline{AB}^2}{21}$, e questo sarà la solidità della sferoide lenticolare.

O, altrimenti, si moltiplichi la superficie del cerchio, che ha per diametro il maggior asse AB, per i due terzi del minor asse DE, ed il prodotto sarà la medesima solidità della sferoide lenticolare.

1. DIMOSTRAZIONE. L'asse minore DE sta al maggiore AB (cor. 1. prop. antec.) come la superficie della inscritta sfera DNEO alla superficie della circoscrittale sferoide lenticolare DAEB, e moltiplicando la prima ragione DE : AB per DE (prop. 11. lib. 1.) avremo $\overline{DE}^2 : DE \times AB ::$ la superficie della sfera DNEO alla superficie della sferoide lenticolare DAEB, ed alternando sarà $\overline{DE}^2 : DNEO :: AB \times DE : DAEB$. Ma (cor. 3. prop. 23. lib. 6.) abbiamo $7 : 22 :: \overline{DE}^2$ alla superficie della sfera DNEO; sicchè (ass. 1.) sarà ancora $7 : 22 :: AB \times DE : DAEB$ superficie della sferoide lenticolare; dunque (propos. 10. lib. 1.) la superficie di essa sferoide sarà $\frac{22 AB \times DE}{7}$. Il che ec.

2. La sferoide lenticolare DAEB (cor. 1. propos. ant.) sta alla sfera inscrittale $DNEO :: \overline{AB}^2 : \overline{DE}^2$, ed invertendo (annotaz. propos. 3. lib. 1.) avremo $\overline{DE}^2 : \overline{AB}^2 :: DNEO : DAEB$, e moltiplicando la prima ragione per DE (propos. 11. lib. 1.) si otterrà $\overline{DE}^3 : DE \times \overline{AB}^2 :: DNEO : DAEB$, ed alternando si avrà $\overline{DE}^3 : DNEO :: DE \times \overline{AB}^2 : DAEB$. Ma (cor. 4. prop. 19. lib. 6.) abbiamo $\overline{DE}^3 : DNEO :: 21 : 11$ dunque (ass. 1.) sarà $21 : 11 :: DE \times \overline{AB}^2 : DAEB$, ed in conseguenza (propos. 10. lib. 1.) la solidità della sferoide lenticolare DAEB sarà $\frac{11 DE \times \overline{AB}^2}{21}$.

La medesima solidità della sferoide lenticolare si trova ancora moltiplicando $\frac{11 \overline{AB}^2}{14}$ (annotaz. 2. prop. 7. lib. 5.) area del cerchio, che ha per diametro il maggior asse AB, per $\frac{2DE}{3}$ due terzi del minor asse DE.

Imperciocchè abbiamo
$$\frac{2DE}{3} \times \frac{11 \overline{AB}^2}{14} = \frac{22 DE \times \overline{AB}^2}{42} = \frac{11 DE \times \overline{AB}^2}{21}.$$ Il che ec.

COROLLARIO I. Dunque la superficie della sferoide ovale è uguale a quella della sferoide lenticolare, quando hanno gli assi uguali.

COROLLARIO II. (Tav. IX. Fig. 58.) *La superficie d'un segmento* AVI *di sferoide ovale*, da quanto abbiam detto antecedentemente, si troverà in questa maniera. Primieramente (cor. 2., o 4. propos. 19., lib. 6.) si trovi la superficie del corrispondente segmento AZH della sfera circoscritta, ed essa superficie si moltiplichi pel raggio GI della base del segmento sferoidale AVI, ed il prodotto dividasi pel raggio GH della base del corrispondente segmento sferico AZH, ed il quoziente sarà la ricercata superficie del dato segmento sferoidale ovale; perciocchè (cor. 2. prop. antec.) abbiamo GH : GI : : la superficie del segmento sferico AZH alla superficie del corrispondente segmento AVI della sferoide ovale.

Ma quando cercasi *la superficie d' un segmento* DXZ *di sferoide lenticolare* (Tav. IX. Fig. 59.) allora si trovi (cor. 2., o 4. prop. 19. lib. 6.) la superficie del corrispondente segmento DIT della sfera inscritta, e si moltiplichi essa superficie per LZ raggio della base del segmento sferoidale, ed il prodotto dividasi per LT raggio della base del segmento sferico, ed il quoziente sarà la superficie del suddetto segmento DXZ di sferoide lenticolare; poichè (cor. 2. prop. antec.) abbiamo LT : LZ : : la superficie del segmento DIT della sfera inscritta alla superficie del segmento DXZ della sferoide lenticolare circoscritta.

DEFINIZIONE VII.

DELLE EVOLUTE, ED EVOLVENTI.

TAV. IX. FIG. 60.

1. Se intorno alla convessità di qualunque curva data AILBC si ravvolgerà un filo, che esattamente si adatti alla curva medesima, e quindi stando fermo l'estremo C del medesimo filo, l'altro estremo A si vada discostando a poco a poco, ma in guisa, che quella parte del filo, che già si è distaccata dalla curva, cioè IF, LG, BE ec. sempre sia ben tesa; allora la linea curva AFGED, che rimane descritta dall'estremo A del filo, chiamasi *curva evolvente*, o *sviluppante*, e la curva data AILBC chiamasi *curva evoluta*, o *sviluppata*.

2. Ma se il filo CD distaccato da tutta l' evoluta AILBC si avvolgerà intorno ad un'altra curva CNM, uguale, e simile alla curva evoluta AILB, e posta nello stesso modo dall'altra parte, allora il medesimo estremo D del filo descriverà la curva DHM uguale, e simile all'evolvente AFGED, purchè il filo sia sempre ugualmente ben teso; e tirata la retta AM, sarà questa la *base della evolvente*.

3. Qualsivoglia parte distesa del filo dicesi *raggio osculatore dell' evoluta*; onde le rette IF, LG, BE eç., sono *raggi osculatori* dell' evoluta AILBC, e dallo sviluppamento della curva egli è evidente, che i raggi osculatori sono tangenti della curva evoluta.

4. Inoltre chiaramente si vede, che i raggi osculatori IF, LG ec. sono uguali alle corrispondenti parti IA, LIA, BLIA ec. dell' evoluta, e che la retta CD è uguale a tutta la curva evoluta AILBC.

DEFINIZIONE VIII.

La linea retta, che è perpendicolare ad una tangente di qualunque curva, nel punto del contatto, dicesi *perpendicolare alla medesima curva*; laonde il raggio del cerchio è perpendicolare alla periferia di esso; perchè (cor. 1. prop. 6. lib. 4.) è perpendicolare alla tangente di esso cerchio nel punto del contatto.

PROPOSIZIONE X.

TEOR. TAV. IX. FIG. 61.

La retta linea (GZ) perpendicolare all' estremo (G) di qualsivoglia raggio osculatore (LG) tocca in un sol punto (G) l'evolvente (AED).

Conducasi un altro raggio osculatore BE, che prolungato incontri in qualche punto Z la perpendicolare GZ, e si prolunghi il raggio GL finchè seghi, come in I, il raggio BE.

Dimostrazione. Nel triangolo mistilineo BIL (ass. 17.) i due lati BI, IL sono maggiori dell' arco frapposto BL, ed a queste cose disuguali aggiugnendovi cose uguali, cioè l' arco LA della evoluta, e (def. 7. n. 4.) l' uguale raggio osculatore LG (ass. 6.) avremo BI+IL+LG>BL+LA; cioè BI+IG maggiore dell' arco BLA dell' evoluta. Ma (definizione 7. num. 4.) abbiamo il raggio osculatore BE uguale all' arco BLA. Dunque (parte 2. assioma. 1.) sarà eziandio BI+IG maggiore di BE, ossia maggiore di BI+IE, e tolta la parte comune BI (assioma 7.) resterà IG maggiore di IE. Ma nel triangolo IGZ rettangolo in G il lato IZ (parte 2. proposiz. 27. lib. 2.) è maggiore del lato IG; conseguentemente lo stesso lato IZ (ass. 13.) sarà molto maggiore di IE; e però il punto Z cade fuori della curva evolvente AGED.

Ma se il punto E (Tav. IX. Fig. 62.) si prenderà tra il principio della evolvente, ed il punto G del contatto; allora conducansi il raggio osculatore EL, la corda LB, e la retta BE prolungata fino in R; e farà l' arco BIL maggiore della corda BL, ed aggiugnendovi parti uguali, cioè l' arco LA, ed il raggio LE, e l' arco BL+LA, cioè l' evoluta BLA (ass. 6.) sarà maggiore delle rette BL+LE, le quali (ass. 17.) sono maggiori della retta BE, e però l' arco BLA, o l' ugual raggio BG (ass. 13.) sarà molto maggiore di BE. Ma l' ipotenusa BR (parte 2. prop. 27. lib. 2.) è maggiore del cateto BG; perciò BR sarà molto maggiore di BE; sicchè il punto R cade fuori della evolvente. Lo stesso si dimostra di ogni altro punto della retta RZ; dunque essa retta tocca nel solo punto G la curva evolvente AEGD. Il che ec.

Corollario I. Adunque ogni raggio osculatore, cioè ogni linea tangente dell' evoluta è perpendicolare all' evolvente.

Scambievolmente le linee perpendicolari alla evolvente sono tangenti della evoluta.

Corollario II. (Tav. IX. Fig. 60.) Sicchè, se molte linee rette IF, LG, BE, ec. tangenti della evoluta ne' punti I, L, B ec. saranno perpendicolari ne' punti F, G, E ec. ad una curva AFGED, egli è chiaro, ed evidente, che essa curva AFGED sarà l' evolvente descritta dagli estremi de' raggi IF, LG, BE ec. della evoluta AILBC.

DEFINIZIONE IX.

TAV. IX. FIG. 63.

DELLA CICLOIDE.

1. Se al diametro AB d' un cerchio AMBS si tireranno moltissime perpendicolari KY, HL, NR, DE, ec., che saranno (prop. 18. lib. 2.) fra loro parallele; e gli archi frapposti (prop. 9. lib. 4.) saranno uguali AG=AS, AM=AP, GN=SP ec., quindi si seghi GH uguale all' arco GA, MN uguale all' arco MGA, ed SL=GH=GA=AS, BD=BE uguale alla semicirconferenza BMGA, o BPSA; e la stessa cosa si faccia di tutte le altre perpendicolari. Poscia pei punti D, N, H, L, R, ec., e pel punto A descrivasi una curva DNHALRE; questa curva sarà la *cicloide*, o *trocoide* stata ritrovata dal dottissimo Matematico del Gran Duca di Toscana, Galileo Galilei.

2. Questa curva si descrive ancora nella seguente maniera.

Il cerchio DUK tocchi la retta linea DE in D, e rotolando si rivolga sopra la medesima retta DE finattantochè il punto D della periferia nuovamente si trovi nella medesima linea retta in E; la linea curva DHARE descritta dal punto D in esso rivolgimento del cerchio, con movimento progressivo verso E, e di rotazione intorno al suo centro, sarà la *cicloide*.

Il cerchio AMBS, o l' uguale DUK, dal cui rivolgimento si è descritta la cicloide, chiamasi *cerchio generatore della cicloide*.

Il diametro AB del cerchio generatore s'addimanda *asse della cicloide*, ed il punto A dicesi *vertice*, o *apice*, o *cima della cicloide*. Le rette linee FL, CR, FH ec. perpendicolari all' asse AB, e terminate dalla curva cicloidale si chiamano *ordinate all' asse della cicloide*; e la retta DE, che è uguale alla circonferenza del cerchio generatore AMBS, si noma *base della cicloide*; e la ugual linea KY addimandasi *tangente verticale della cicloide*.

La superficie DAEB terminata dalla curva cicloidale DAE, e dalla base DE chiamasi anche *cicloide*, o *spazio cicloidale interiore*, ed il triangolo mistilineo DAMB si dice *semicicloide*, o *spazio semicicloidale interno*.

3. Il rettangolo DKYE si chiama *rettangolo circoscritto alla cicloide*; ed è quadruplo del cerchio generatore AMBS; poichè l' area di esso ritrovasi moltiplicando l' altezza DK (uguale al diametro AB di esso cerchio) nella base DE, che è uguale alla circonferenza dello stesso cerchio; dunque (cor. 2. prop. 7. lib. 5.) è quadruplo di esso cerchio generatore; e la metà ABDK di esso rettangolo sarà quadruplo del mezzo cerchio BMGA.

ANNOTAZIONE. (Tav. IX. Fig. 64.) Che la curva descritta dal punto D nel rivolgimento del cerchio generatore sia la cicloide, ritrovata dal celebre Galileo, si dimostra così.

Da qualunque punto R della curva cicloidale DRA tirisi la retta RS ordinata all' asse AB, che segherà la periferia del cerchio generatore in qualche punto Q; dico, che la porzione QR dell' ordinata sarà sempre uguale all' arco QA. Imperciocchè nel rivolgimento del cerchio generatore quando il punto D, che descrive la cicloide, sarà pervenuto in R, esso cerchio generatore toccherà la base DE in qualche punto I, e sarà l' arco RKI uguale alla porzione DI della base descritta dallo stesso arco nel rivolgimento del cerchio

generatore. Ma i cerchi NIR, ABQ, che toccano la retta DE ne' punti I, e B sono, d' ipotesi, uguali fra loro; e però gli archi di essi RKI, QOB frapposti tra le parallele RS, DB (prop. 9. lib. 4.) saranno uguali, e le corde loro RI, QB (prop. 13. lib. 4.) saranno anche uguali fra loro; siccome ancora saranno tra di loro uguali gli angoli RID, QDB dei segmenti uguali, perchè hanno misure uguali, cioè (prop. 7. lib. 4.) le metà degli archi uguali RKI, QOB; sicchè le uguali corde RI, QB (parte 2. propos. 19. lib. 2.) saranno anche parallele; laonde (prop. 28. lib. 2.) le rette parallele QR, IB saranno eziandio uguali fra loro. Ma dalla costruzione della cicloide la retta DB è uguale alla semicirconferenza AQB, e si è dimostrata la parte DI uguale all' arco RKI, cioè uguale all' ugual arco QOB; sicchè la rimanente parte IB, o l' ugual linea RQ, sarà uguale all' arco rimanente QA; il che sempre in ogni punto si verifica; dunque ec.

PROPOSIZIONE XI.

PROBL. TAV. IX. FIG. 65.

Descrivere la cicloide.

Sia dato il cerchio generatore A2BX, e di esso sia tangente in B la retta DE uguale alla periferia del medesimo cerchio, e sia la DE segata per mezzo in B, e perpendicolare all' asse AB. La semicirconferenza A2B dividasi in qualunque numero di parti uguali A1=1.2=2.3=3B ec.; e pei punti di divisione tirinsi le rette IC, ZF, MS ec. ordinate all' asse AB, e si tirino ancora le corde B1, B2, B3, ec. Poscia la tangente DB dividasi in altrettante parti uguali, in quante si è divisa l' uguale semiperiferia, e sieno BG=GH=HL=LD ec.; indi pei ritrovati punti G, H, L, ec. si tirino le rette GI parallela alla corda corrispondente B1. HZ parallela alla corda B2, LM parallela alla corda B3 ec., le quali concorrano colle corrispondenti ordinate ne' punti I, Z, M ec. Inoltre dalle ordinate prolungate dall' altra parte dell' asse seghinsi altre uguali ordinate CK=CI, FN=FZ, SR=SM, ec. Finalmente pei punti D, M, Z, I, A, K ec. descrivasi la curva DZANE, che sarà la ricercata cicloide.

Dimostrazione. Perchè, di costruzione, le uguali linee, cioè la retta DB, e la semiperiferia A2B sono state divise nel medesimo numero di parti uguali, perciò la parte DL sarà uguale all' arco B3, e la LB, che (prop. 28. lib. 2.) è uguale alla M3, sarà uguale al rimanente arco 3.2.1.A; perciò il punto M (def. ed annot. ant.) è un punto della curva cicloidale; e lo stesso dimostrasi degli altri punti Z, I, ec. Dunque la curva DZANE è una cicloide. Il che ec.

PROPOSIZIONE XII.

TEOR. TAV. IX. FIG. 66.

1. Se al diametro (AB) d' un cerchio (ARBI), si condurrà un' ordinata (DR), e da un estremo (A) del medesimo diametro si tirerà una corda (AG), che seghi l' ordinata (DR in C) entro del cerchio, dico, che la porzione (CR) dell' ordinata frapposta tra la periferia, e la suddetta corda sarà minore dell' arco (GSR) interposto tra l' ordinata, e la corda.

2. Ma se la corda (AL) prolungata incontrerà (in F) l' ordinata (DI) prolungata fuori del cerchio; allora la porzione (IF) dell' ordinata prolungata sarà maggiore dell' arco (IL) frapposto tra la corda, e l' ordinata.

Dimostrazione della prima parte. Tirate le rette AR, RB, RG, i due triangoli ARB, ADR rettangoli in R, ed in D (cor. 3. prop. 8., e cor. 1. prop. 18. lib. 4.) hanno l' angolo comune RAB;

perciò (cor. 7. prop. 24. lib. 2.) sarà il rimanente ARD uguale al rimanente ABR. Ma (cor. 2. prop. 8. lib. 4.) l' angolo AGR è uguale al medesimo angolo ABR; e però (ass. 1.) l' angolo ARD, o sia ARC, sarà uguale all' angolo AGR, o sia CGR. Ma l' angolo RCG esteriore del triangolo RCA (cor. 2. prop. 24. lib. 2.) è maggiore dell' angolo ARC interiore, ed opposto, perciò sarà anche maggiore dell' ugual angolo CGR (parte 2. ass. 1.); sicchè nel triangolo CRG (prop. 27. lib. 2.) il lato RG opposto al maggior angolo RCG sarà maggiore del lato RC sottoposto all' angolo minore CGR. Ma l' arco RSG (def. 5. lib. 2.) è maggiore della sua corda RG; dunque lo stesso arco RSG (ass. 13.) sarà molto maggiore della retta RC. Il che ec.

Dimostrazione della seconda parte. Pel punto L (propos. 6. lib. 4.) tirinsi la tangente LE, e la retta LB. I due triangoli ALB, ADF rettangoli in L, e in D, e che hanno l' angolo BAF comune, avranno ancora il rimanente angolo ABL=AFD (cor. 7. prop. 24. lib. 2.). Inoltre perchè l' angolo BLF esterno del triangolo BLA (parte 2. propos. 24. lib. 2.) è uguale ai due angoli ABL, BAL interni, ed opposti insieme presi, e (cor. 4. prop. 8. lib. 4.) dell' angolo BLF, la parte BLE (angolo del segmento BIL) è uguale all' angolo BAL inscritto nell' alterno segmento BGRAL; perciò la rimanente parte, cioè l' angolo ELF, sarà uguale all' angolo rimanente ABL; e si è già dimostrato l' angolo ABL=AFD, sicchè (ass. 1.) sarà l' angolo ELF=AFD; cioè =LFE, e però (parte 1. proposiz. 27. lib. 2.) sarà il lato LE=FE, ed aggiugnendovi la parte comune EI, sarà LE+EI=FE+EI, cioè LE+EI=FI. Ma LE+EI (ass. 17.) è maggiore dell' arco frapposto LI; dunque (parte 2. ass. 1.) anche la retta FI sarà maggiore dell' arco LI. Il che ec.

PROPOSIZIONE XIII.

PROBL. TAV. IX. FIG. 63.

Al dato punto (R) della cicloide tirare la tangente.

Dal punto dato R si tiri l' ordinata RPC, e dal punto P, in cui sega la periferia del cerchio generatore al vertice A dell' asse, si tiri la corda AP, a cui pel punto R (propos. 23. lib. 2.) si conduca la retta parallela TRV, che sarà la tangente ricercata.

Nella retta TV prendansi a piacere due punti T, ed V, l'uno al dissopra, e l'altro al dissotto del punto R, e da essi punti tirinsi le ordinate all' asse TF, ed VO, e questa venga segata dalla corda AP prolungata in Q.

Dimostrazione. Perchè, di costruzione, le rette AQ, TV fra loro, e le rette IT, PR, QV, anche fra loro sono parallele; perciò (propos. 28. lib. 2.) sarà IT=PR=QV. Ma dalla descrizione della cicloide abbiamo PR uguale all' arco ASP; onde (ass. 1.) sarà ancora IT= all'arco ASP. Ma (parte 1. prop. antec.) la parte IS dell' ordinata è minore dell' arco SP; dunque la rimanente parte ST sarà maggiore dell' arco rimanente AS, che sempre è uguale all' ordinata SL; sicchè il punto T ritrovasi fuori della cicloide. Inoltre essendo QV=PR, e PR= all' arco ASP; sarà ancora la QV= all' arco ASP. Ma (parte 2. prop. antec.) la parte ZQ dell' ordinata, è maggiore dell' arco PZ, e perciò tutta la retta ZV sarà maggiore del corrispondente arco ASPZ, a cui è uguale l' ordinata ZX; sicchè anche il punto V ritrovasi fuori della cicloide; la medesima cosa si dimostra degli altri punti della retta TV; dunque essa linea tocca la cicloide nel solo punto R. Il che ec.

Corollario. Per la qual cosa se il cerchio generatore segherà la cicloide in R, e toccherà la base in *m*, se si condurrà la corda *m*R, sarà perpendicolare alla cicloide. Imperocchè la tangente RT è, di costruzione, parallela alla sottesa AP, e la corda *m*R (annotaz. def. 9.) è parallela alla corda BP; perciò sarà retto l' angolo *m*RT, perchè (parte 2. prop. 21. lib. 2.) è uguale all' angolo (cor. 3. prop. 8. lib. 4.) retto BPA. Dunque la retta *m*R perpendicolare nel punto del contatto alla tangente RT (def. 8.) sarà perpendicolare alla cicloide.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOR. TAV. IX. FIG. 67.

L' evolvente della cicloide è un' altra cicloide simile, ed uguale alla cicloide evoluta.

Sieno due semicicloidi uguali CEM, DEF, i cui vertici C, D sieno nella medesima retta CBD parallela, ed uguale alla base MEF, la quale, dalla costruzione della cicloide è uguale alla periferia del cerchio generatore LCM. Poscia col cerchio AQBP, o RIN uguale al cerchio generatore LCM (def. 9., e propos. 11.) si descriva la cicloide CAD, che sarà uguale alle due semicicloidi CEM, DEF insieme prese, dico questa cicloide essere l' evolvente della cicloide data.

Per qualsivoglia punto H della semicicloide CHE si tirino HG ordinata all' asse CM, la corda CL, e parallela ad essa, la retta HI tangente della cicloide in H, e che sega in I la base CD, che tocca nel medesimo punto I il cerchio generatore RIN, e dal punto R, in cui sega la cicloide, al punto I tirisi la corda RI.

Dimostrazione. Perchè dalla costruzione della cicloide (annotaz. def. 9.) l' arco RKI è uguale alla retta CI da esso arco descritta, ed essa CI (prop.

28. lib. 2.) è uguale alla LH, e questa LH è uguale all' arco CZL (def. 9., ed annotaz.); perciò l' arco RKI (ass. 1.) è uguale all' arco CZL, e le corde RI, CL sottendenti archi uguali di cerchi uguali (prop. 13. lib. 4.) saranno anche uguali fra loro. Ma abbiamo CL=IH (propos. 28. lib. 2.), e però (ass. 1.) sarà RI=IH. Inoltre gli angoli RIC, ICL de' segmenti uguali RKI, CZL sarano eziandìo uguali fra loro, perchè hanno misure uguali (prop. 7. lib. 4.) cioè le metà degli uguali archi RKI, CZL, ma l' angolo interno ICL (parte 2. prop. 21. lib. 2.) è uguale all' esterno BIH; dunque l' angolo RIC (ass. 1.) sarà uguale all' angolo BIH opposto alla cima; sicchè (cor. prop. 17. lib. 2.) la retta RI sarà posta per diritto alla ugual linea IH. Ma la retta RI (cor. propos. antec.) è perpendicolare alla cicloide CAD; e però tutta la retta HR, raggio osculatore dell' evoluta CHE, è perpendicolare alla cicloide CAD; il che nello stesso modo si dimostra di tutti gli altri raggi osculatori, tanto dell' evoluta CHE, quanto della DE. Adunque (cor. 2. propos. 10.) la curva evolvente della cicloide è un' altra cicloide simile, ed uguale alla cicloide evoluta. Il che ec.

Corollario I. Dalla dimostrazione antecedente è chiaro, ed evidente, che ogni raggio osculatore HR della cicloide evoluta CHE resta diviso per mezzo in I dalla base CD della cicloide evolvente CAD. Conseguentemente la corda CL dell' arco CZL del cerchio generatore è la metà del corrispondente arco CH della cicloide; perchè si è dimostrato CL=HI metà del raggio osculatore HR, che è uguale allo stesso arco CH della cicloide.

Similmente la corda AQ è la metà del corrispondente arco AR della cicloide, e così delle altre.

Corollario II. Da queste cose ne segue, che il raggio osculatore EA, che è uguale alla semicicloide CHE, o sia CRA, è doppio del diametro AB, o sia

CM, del cerchio generatore; perciò anche l' uguale semicicloide CHE, o CRA sarà doppio del diametro AB; e tutta la cicloide CAD sarà quadrupla del medesimo diametro AB del cerchio generatore.

PROPOSIZIONE XV.

TEOR. TAV. IX. FIG. 68.

La superficie della cicloide è tripla del suo cerchio generatore.

Sia data la semicicloide ADB, il cui rettangolo circoscritto sia ABDK. Si prendano nell' asse AB dei punti ugualmente distanti dal centro C del cerchio generatore ABEF, come sono H, ed M, e da essi tirinsi le rette HG, MS ordinate all' asse, che seghino la curva cicloidale nei punti L, ed I, pei quali si descrivano i cerchi generatori NLO, RIP, che tocchino la base DB ne' punti N, ed R, ed i cui diametri perpendicolari alla base sieno NO, RP.

Dimostrazione. Le rette parallele HG, MS sono, d' ipotesi, ugualmente distanti dal centro C; perciò sarà l' arco AF= all' arco EB, il quale (annotaz. def. 9.) è uguale all' arco RI; onde (ass. 1.) sarà parimente l' arco AF= all' arco RI. Ma per la natura della cicloide la retta FL è uguale all' arco AF, e la retta DR= all' arco RI; perciò sarà la retta FL=DR, ed è DR=SV (propos. 28. lib. 2.); laonde (ass. 1.) sarà FL=SV, cioè FL=SI+IV, e sostituendo invece della IV l' ugual retta EM, si avrà FL=SI+EM. Inoltre essendo l' arco AF= all' arco EB, aggiugnendovi la parte comune EF (ass. 2.) avremo l' arco AFE= all' arco BEF, che è uguale all' arco NL; e però l' arco AFE (ass. 1.) sarà anch' esso uguale all' arco NL; ma per la natura della cicloide la retta IE è uguale all' arco AFE, e la retta DN uguale all' arco NL, e però sarà la retta IE=DN, che è uguale alla GT (propos. 28. lib. 2.); sicchè sarà IE=GT, o sia IE=GL+LT, e sostituendo la retta FH invece della uguale LT, sarà IE=GL+FH.

Col medesimo raziocinio la stessa cosa si dimostra di tutte le ordinate all' asse AB; conseguentemente tutte le linee rette LF, IE ec., cioè gli elementi, che costituiscono lo spazio semicicloidale intermedio AFEBDILA, sono uguali ad altrettante linee rette FH, EM ec., che formano il semicircolo AFEB, con altrettante rette SI, GL ec., che compongono il triangolo mistilineo, o sia spazio semicicloidale esterno ALIDK; vale a dire lo spazio semicicloidale di mezzo AFEBDILA è uguale al mezzo cerchio AFEB collo spazio semicicloidale esterno ALIDK. Per la qual cosa il mezzo cerchio generatore AFEB collo spazio semicicloidale esterno ALIDK sono la metà del rettangolo circoscritto ABDK. Ma il mezzo cerchio generatore (num. 3. def. 9.) è la quarta parte di esso rettangolo circoscritto; perciò la semicicloide esterna ALIDK sarà l' altra quarta parte del medesimo rettangolo, e sarà uguale al mezzo cerchio generatore; ed in conseguenza lo spazio semicicloidale di mezzo AFEBDILA è anche metà del rettangolo circoscritto, e però sarà doppio del mezzo cerchio generatore AFEB. Sicchè allo spazio semicicloidale di mezzo aggiugnendovi il mezzo cerchio generatore, si avrà tutta la semicloide interna DAB tripla del mezzo cerchio generatore AFEB; perciò anche tutta la cicloide sarà tripla dell' intero cerchio generatore. Il che ec.

Corollario (Tav. IX. Fig. 63.) Da quanto si è dimostrato chiaramente apparisce, che lo spazio cicloidale esterno AHNDKAREY è uguale al cerchio generatore AMBS.

Inoltre il rettangolo circoscritto DKYE sta allo spazio cicloidale interno DNARE : : 4 : 3; e lo spazio cicloidale interno sta allo spazio cicloidale esterno : : 3 : 1. Di più lo spazio semicicloidale di mezzo

AHNDBMGA è uguale al cerchio generatore AMBS, ed in conseguenza anche uguale all' intero spazio cicloidale esterno ANDKAREY; perciocchè lo spazio semicicloidale di mezzo si è dimostrato doppio del mezzo cerchio generatore.

Annotazione. Se la curva cicloide si rivolterà in guisa, che il vertice A sia posto al di sotto (Tav. XII. Fig. 93.), e la base DE sia al di sopra, ed in un piano parallelo all' orizzonte, allora se un corpo grave cadendo discenderà per la curva DNHA, o ERA; esso in uguale spazio di tempo perverrà all' infimo punto A, sia che si lasci cadere dal punto E, o dal punto D, o dal punto N, o dal punto H, o da qualsivoglia altro punto della medesima curva; e per questa proprietà particolare la cicloide chiamasi *curva isocrona*.

DEFINIZIONE X.

TAV. IX. FIG. 69.

DELLA PARABOLA.

Se in qualunque piano si tirerà una linea retta NV, e dal punto di mezzo D s' innalzerà una perpendicocolare DB, dalla quale si seghino a piacere due parti fra loro uguali DA, AF. Poscia per moltissimi punti I, E, B ec. della retta AB si tirino le rette indefinite GS, HL, KY ec. perpendicolari alla stessa AB, o sia parallele alla NV. Indi dal centro F con intervallo uguale alla DI si segnino i punti G, ed S nella retta GIS. Similmente dallo stesso centro F, e col raggio uguale alla DE si segnino i punti G, ed S nella retta GIS. Similmente dallo stesso centro F, e col raggio uguale alla DE si segnino i punti H, ed L nella retta HEL; cioè facciasi FH=FL=DE; e così proseguendo facciasi FR=FQ=DP; FK=FY =DB; e così delle altre. Finalmente pei punti K, R, H, G, A, S, L, Q, Y ec. descrivasi la curva KHALY; che sarà la *parabola di Apollonio.*

La retta NV dicesi *linea direttrice*, o *regolatrice della parabola.*

La linea retta AB si chiama *asse della parabola*. Il punto F dicesi *foco della parabola*; ed il punto A chiamasi *vertice*, o *apice*, o *cima della medesima parabola.*

Le perpendicolari GI, HE, IS, EL, BY ec. nomansi ordinate all' asse. Le parti AI, AE, AP ec. dell' asse frapposte tra 'l vertice A, e qualsivoglia ordinata GI, o HE ec. addimandansi *ascisse dell' asse;* ma l' ascissa AF dicesi *distanza del foco dal vertice.* La doppia ordinata KBY chiamasi *base della parabola.*

Lo spazio KHALY chiuso dalla curva parabolica, e dalla sua base si noma *area*, o *superficie della parabola.*

Tangente verticale della parabola è la retta OZ, che passa pel vertice A della parabola, ed è perpendicolare all' asse AB, e perciò parallela alla direttrice NV. Qualunque altra retta (HT) che tocca in un solo punto (H) la curva parabolica, e che prolungata da ambedue le parti non la sega, si dice *tangente della parabola.*

Diametro della parabola chiamasi ogni linea retta parallela all' asse, tirata da qualunque punto della curva entro la medesima parabola; come la retta HX, il cui punto H dicesi *vertice*, o *cima del medesimo diametro.*

Parametro, o *lato retto dell' asse della parabola* è una linea retta quadrupla di AF distanza dal foco al vertice; ovvero è doppia di DF, che è la distanza dal foco alla direttrice; e però se dalla tangente verticale si taglierà AZ=4AF, o pure AZ=2DF, sarà AZ il parametro dell' asse AB della parabola KAY.

Corollario I. Se da qualunque punto H estremo di un' ordinata HE si tirerà la retta HM perpendicolare alla direttrice NV, cioè parallela all' asse AB;

essa retta HM sarà sempre uguale alla retta HF distanza dal foco F al medesimo punto H della curva. Imperocchè dalla descrizione della parabola abbiamo HF=ED; ma (prop. 28. lib. 2.) è HM=ED; perciò (ass. 1.) sarà HM=HF.

Corollario II. Adunque se due linee rette tirate da un medesimo punto, l' una al foco, e l' altra perpendicolare alla direttrice, non saranno uguali fra loro, quel punto non si troverà nella curva parabolica.

DEFINIZIONE XI.

La distanza (HF) dal foco (F) a qualsisia punto (H) della curva parabolica, si chiama *raggio vettore.*

PROPOSIZIONE XVI.

PROBL. TAV. IX. FIG. 70.

Ad un punto dato (R) della parabola (KAY) tirare una tangente.

Dal punto dato R si tiri la RM perpendicolare alla direttrice XV; poi dal foco F ai punti M, ed R conducansi le rette FM, FR, e di esse la FM si divida per mezzo in C (prop. 12. lib. 2.). Finalmente pei punti R, e C tirisi la retta GRCT, che sarà la ricercata tangente della parabola.

Dimostrazione. Dall' antecedente corollario primo abbiamo RF=RM; perciò nel triangolo isoscele RFM la retta RCT tirata dal vertice R al punto di mezzo C della base FM (cor. 1. propos. 25. lib. 2.) è perpendicolare alla medesima base FM, e tocca la parabola nel solo punto R. Imperciocchè se da qualunque altro punto I della medesima retta GRT si tireranno le rette IM, IF, e la retta IL perpendicolare alla direttrice XV; allora ne' triangoli ICF, ICM abbiamo IF=IM (prop. 6. lib. 2.): ma nel triangolo ILM rettangolo in L il lato IM è maggiore del lato IL (parte 2. prop. 27. lib. 2.) dunque (parte 2. ass. 1.) anche la retta IF tirata al foco sarà maggiore della IL perpendicolare alla direttrice; e però il punto I è fuori della curva parabolica, per l' antecedente corollario secondo.

Per la stessa ragione *i*F è maggiore di *i l*, ed il punto *i* è fuori della parabola; e lo stesso si dimostra di ogni altro punto della retta GT; sicchè essa linea tocca nel solo punto R la parabola. Il che ec.

DEFINIZIONE XII.

Se l'asse BA della parabola si prolungherà di là dal vertice A sino a che concorra colla tangente GRC, anche prolungata, in T; allora la porzione ST dell' asse prolungato si chiama *linea suttangente*, ed è terminata in T dalla tangente prolungata, ed in S dall' ordinata RS tirata dal punto R del contatto.

Se dal punto del contatto R s' innalzerà (propos. 13. lib. 2.) la retta RN perpendicolare alla tangente GT, che seghi l' asse in N, allora la porzione SN dell' asse dicesi *linea sunnormale*, o *sottoperpendicolare*, perchè terminata dalle due perpendicolari RS all' asse, ed RN alla tangente.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

Nella parabola la suttangente (ST) è sempre doppia della corrispondente ascissa (AS).

Ma la sunnormale (SN) è sempre uguale alla metà del parametro; cioè uguaglia la (DF) distanza dalla direttrice (XV) al foco (F).

Dimostrazione della prima parte. I due triangoli RCM, TCF hanno gli angoli alla cima opposti

in C (prop. 17. lib. 2.) uguali fra loro, e l' angolo RMC uguale all' angolo alterno TCF (prop. 21. lib. 2.), ed il lato frapposto tra gli angoli uguali, cioè MC=CF; dunque (propos. 5. lib. 2.) sarà il lato TF=RM; ma (prop. 28. lib. 2.) abbiamo DS=RM, perciò (ass. 1.) sarà TF=DS, cioè TD+DF=DF+FS, e levando la parte comune DF (ass. 3.) resterà TD=FS, a cui aggiugnendovi le parti uguali DA=AF, (ass. 2.) si avrà TD+DA=FS+AF, cioè TA=AS; e però la TS è doppia della AS. Il che ec.

Dimostrazione della seconda parte. Le due rette MR, DB sono, di costruzione, parallele, e le due rette RN, MF perpendicolari alla tangente GT (prop. 18. lib. 2.) sono anche parallele; perciò (prop. 28. lib. 2.) sarà RM=FN; ma abbiamo ancora RM=SD; sicchè sarà FN=SD, cioè FS+SN=FS+FD, e tolta la parte comune FS, rimarrà SN=FD; cioè la sunnormale uguale al semiparametro. Il che ec.

Corollario. Dunque per tirare da qualsivoglia punto R della parabola una linea retta, che siale tangente, basterà tirare da esso punto R una retta RS ordinata all' asse, e poi dall' asse prolungato di là dal vertice A segarne una parte AT uguale all'ascissa AS, e dal punto R al punto T tirare la retta RT, che sarà la tangente, che si cercava, essendo la suttangente ST doppia della corrispondente ascissa AS.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

Se dal punto del contatto (R) della parabola si tireranno una linea retta (RF) al foco, ed un' altra retta parallela all' asse, cioè un diametro (RZ); esse due linee rette faranno sempre angoli uguali (GRZ=TRF) colla tangente (GRT).

Ma la somma (ZR+RF) di esse linee rette sarà costantemente uguale all' asse prolungato (BD) sino alla direttrice (XV) ovunque prendasi il punto del contatto (R).

Dimostrazione della prima parte. Nel triangolo MRF (cor. 1. def. 10.) isoscele abbiamo l' angolo TRF=TRM (cor. 1. prop. 25. lib. 2.); inoltre (prop. 17. lib. 2.) abbiamo l' angolo GRZ=TRM opposto alla cima; dunque (ass. 1.) sarà l' angolo GRZ=TRF. Il che ec.

Dimostrazione della seconda parte. Condotta l' ordinata RS, abbiamo RZ=BS (prop. 28. lib. 2.); ma la retta RF (def. 10.) è uguale alla retta SD; sicchè (ass. 2.) sarà ZR+RF=BS+SD, cioè ZR+RF=BD; la qual cosa si verifica in ciascun punto della parabola, sempre dimostrandosi $Zr+rF$=BD. Dunque ec. Il che ec.

Corollario i. L' angolo esterno GRZ (prop. 21. lib. 2.) è uguale all' angolo interno RTF; ma l' angolo GRZ si è dimostrato uguale all' angolo TRF; perciò (ass. 1.) sarà l' angolo RTF=TRF; laonde (parte 1. proposiz. 27. lib. 2.) sarà TF=RF; cioè *la distanza dal foco* F *al punto* T, *in cui la tangente sega l' asse, è uguale alla distanza dal medesimo foco al punto del contatto* R.

Corollario ii. Secondo le leggi della catottica l' angolo d' incidenza è uguale all' angolo di riflessione; ed abbiamo dimostrato, che nella parabola l' angolo GRZ è sempre uguale all' angolo TRF, perciò i raggi paralleli all' asse, come ZR, zr cadenti sopra la parabola tutti si riflettono nel medesimo punto F, che per ciò chiamasi *foco della parabola*.

Che se nel punto F si metterà un corpo lucente, i raggi di luce cadenti sopra ciascun punto della parabola come in R, ed in r, tutti si rifletteranno per linee parallele all' asse, come RZ, rz ec.

Corollario iii. Inoltre la somma di ciascun raggio incidente col corrispondente raggio riflesso, come ZR+RF è sempre uguale alla somma BA+AF dell' asse BA colla distanza AF dal vertice al foco, o quarta parte del parametro. Imperocchè per l' antecedente dimostrazione seconda abbiamo
ZR+RF=BD=BA+AD; ma (def. 10.) egli è AD=AF; onde mettendo AF in luogo dell' uguale AD, sarà ZR+RF=BA+AF; similmente sarà $zr+rF$=BA+AF; il che si verifica di ciascun raggio incidente insieme col suo raggio riflesso.

Corollario iv. Finalmente egli è evidente, che se nel punto R della tangente GT si costituirà l' angolo TRF uguale all' angolo GRZ, la retta RF passerà pel foco F. Vicendevolmente se si farà un angolo GRZ uguale all' angolo TRF, la retta RZ sarà parallela all' asse, cioè sarà un diametro della parabola.

Lemma. La differenza tra 'l quadrato della somma, ed il quadrato della differenza di due date quantità è uguale a quattro volte il rettangolo contenuto dalle medesime date quantità.

Dimostrazione. Sieno le date quantità a, ed x, sarà la loro somma $a+x$ (arit. nn. 50. 52.), e la differenza sarà $a-x$, o pure $x-a$, secondo che a sarà maggiore, o minore di x. Il quadrato della somma $a+x$ sarà $a^2+2ax+x^2$ (aritm. 142.); ed il quadrato della differenza $a-x$, o $x-a$ sempre sarà $a^2-2ax+x^2$, e questo sottraggasi dal quadrato della somma, ed il residuo sarà $a^2+2ax+x^2-a^2+2ax-x^2$ (aritmet. num. 52.) cioè $2ax+2ax$, vale a dire $4ax$ (aritmet. 51.), che è il quadruplo prodotto di a in x, ovvero è il prodotto di $4a$ nel x, oppure di $4x$ moltiplicato per a. Dunque ec. Il che ec.

Sia $a=7$, $x=3$, sarà $\overline{a+x}^2=100$, ed $\overline{a-x}^2=16$; sicchè sarà $100-16=4\times7\times3=4\times21=28\times3=7\times12=84$.

Ma se sarà $a=2$, $x=6$, allora sarà $\overline{a+x}^2=64$, ed $\overline{x-a}^2=16$, onde si avrà
$64-16=48=4\times2\times6=8\times6=24\times2$.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOR. TAV. IX. FIG. 71.

Nella parabola il quadrato di ciascuna (PR) ordinata all' asse (AB) è uguale al rettangolo contenuto dalla corrispondente ascissa (PA), e dal parametro 4AF, cioè dal quadruplo della distanza dal foco (F) al vertice (A).

Sia come sopra la direttrice XV, e tirisi al foco la retta RF.

Dimostrazione. La retta RF (def. 10.) è uguale alla PD, cioè alla PA+AD, e mettendo AF in luogo della uguale AD, sarà RF=PA+AF; ed è PF=PA−AF; laonde RF è la somma delle due linee PA, AF, e PF è la differenza delle medesime linee PA, AF; e perciò il quadrato di RF, meno il quadrato di PF (lemma antec.) è uguale al quadruplo rettangolo di PA in AF, cioè sarà
$\overline{RF}^2-\overline{PF}^2=4AF\times PA$. Ma nel triangolo RPF rettangolo in P (cor. 1. prop. 18. lib. 3.) abbiamo
$\overline{PR}^2=\overline{RF}^2-\overline{PF}^2$; dunque (ass. 1.) sarà
$\overline{PR}^2=4AF\times PA$; cioè il quadrato di qualsivoglia ordinata all' asse è uguale al rettangolo contenuto dal parametro nella corrispondente ascissa. Il che ec.

Corollario I. Dall' antecedente dimostrazione abbiamo RF=PA+AF, vale a dire la distanza dal foco all' estremo punto di qualunque ordinata è sempre uguale alla somma della corrispondente ascissa colla distanza dal foco al vertice.

Corollario II. Sicchè se saranno date un' ordinata all' asse, e la sua corrispondente ascissa, facilmente si troveranno il parametro, il foco, ed il punto, in cui la direttrice sega l' asse prolungato. Imperocchè si è dimostrato $\overline{PR}^2=4AF\times PA$, e dissolvendo sarà $\div$ PA : PR : 4AF, e però se all' ascissa PA, ed all' ordinata PR si troverà (prop. 5. lib. 3.) la terza proporzionale, essa sarà il parametro 4AF, la cui quarta parte AF sarà la distanza dal foco al vertice, e sarà eziandìo la distanza AD dal vertice alla direttrice.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

I quadrati delle ordinate all' asse della parabola stanno tra di loro come le corrispondenti ascisse.

Sieno RP, SN due ordinate all' asse AB; saranno AP, AN le loro corrispondenti ascisse, ed avremo
$\overline{RP}^2 : \overline{SN}^2 :: AP : AN$.

Dimostrazione. Imperciocchè dall' antecedente proposizione abbiamo $\overline{RP}^2=AP\times4AF$, e per la medesima ragione abbiamo $\overline{SN}^2=AN\times4AF$; laonde (cor. 5. propos. 2. lib. 1.) avremo la proporzione
$\overline{RP}^2 : \overline{SN}^2 :: AP\times4AF : AN\times4AF$, e dividendo i due ultimi termini per 4AF (prop. 11. lib. 1.) si avrà
$\overline{RP}^2 : \overline{SN}^2 :: AP : AN$. Il che ec.

DEFINIZIONE XIII.

TAV. X. FIG. 72.

Nella parabola ogni linea retta (CI, NQ, HI ec.) parallela alla tangente (RT), e terminata dalla curva parabolica (HRCNAK), e dal diametro RG tirato dal punto del contatto (R) chiamasi *ordinata al medesimo diametro* (RG). Le porzioni (RI, RQ ec.) del diametro (RG) terminate dalle ordinate, e dal vertice (R) dello stesso diametro, si chiamano *ascisse del medesimo diametro.*

DEFINIZIONE XIV.

Se alla metà AT, o AP della suttangente TP, ed alla tangente RT si troverà (prop. 5. lib. 3.) una terza proporzionale, essa linea sarà il *parametro*, o *lato retto del diametro* RG.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

Il parametro di qualsivoglia diametro (RG) della parabola è quadruplo della distanza (RF) dal foco (F) al vertice (R) del medesimo diametro.

Dimostrazione. La suttangente PT (prop. 17.) è doppia dell' ascissa PA; perciò il quadrato di PT (cor. 1. prop. 21. lib. 4.) sarà quadruplo del quadrato di PA; cioè avremo $\overline{PT}^2=4\overline{PA}^2$. Inoltre (prop. 19.) abbiamo $\overline{PR}^2=4AF\times PA$. Ma nel triangolo TPR rettangolo (cor. 1. prop. 18. lib. 3.) abbiamo $\overline{RT}^2=\overline{PR}^2+\overline{PT}^2$; sicchè sostituendo cose uguali a cose uguali si avrà $\overline{RT}^2=4AF\times PA+\overline{4PA}^2$, ovvero $\overline{RT}^2=4PA\times AF+4PA\times PA$, cioè $\overline{RT}^2=4PA\times\overline{AF+PA}$. Ma abbiamo $AF+PA=RF$ (cor. 1. prop. 19.); perciò sostituendo RF invece di AF+PA avremo $\overline{RT}^2=4PA\times RF$, o sia $\overline{RT}^2=4RF\times PA$, e dissolvendo sarà ∺ PA : RT : 4RF

dunque per l' antecedente definizione 4RF è il parametro del diametro RG. Il che ec.

Corollario. Si è dimostrato, che il parametro del diametro è quadruplo della distanza RF dal foco al vertice di esso diametro; ma (cor. 1. propos. 19.) noi abbiamo anche dimostrato $RF=AF+PA$; onde (ass. 4.) sarà eziandio $4RF=4AF+4PA$; e per antitesi sarà (aritm. 106.) $4RF-4PA=4AF$; ma 4AF (def. 10.) è il parametro dell' asse. Adunque 4RF parametro del diametro è maggiore del parametro 4AF dell' asse di quattro volte PA, che è la corrispondente ascissa dell' asse; vale a dire la differenza tra il parametro del diametro, e quello dell' asse è uguale al quadruplo della corrispondente ascissa dell' asse; poichè per antitesi sarà ancora $4RF-4AF=4PA$.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA.

Nella parabola (HAK) il quadrato di ciascuna retta (CI, o HI ec.) ordinata a qualunque diametro (RG) è uguale al rettangolo ($4RF\times RI$) contenuto dalla corrispondente ascissa (RI), e dal parametro (4RF) di esso diametro (cioè sarà $\overline{CI}^2=4RF\times RI$).

Tirisi CL ordinata all' asse AB, la quale prolungata s' incontri in E col diametro GR prolungato. Si tirino anche l' ordinata RP, e la retta IS parallela alla stessa RP, o sia alla EL. Quindi facciansi $AF=a$, $AP=x$, $RP=EL=IS=GB=y$; $EI=SL=c$; $RI=PS=r$; e saranno $RF=AP+AF=x+a$ (cor. 1. prop. 19.); e $4RF=4x+4a$; $AS=AP+PS=x+r$ $AL=AS-SL=x+r-c$, e $PT=2AP=2x$ (proposiz. 17.). Inoltre per l' antecedente proposizione abbiamo $\overline{RT}^2=4RF\times AP$; e però sarà $\overline{RT}^2=\overline{4x+4a}\times x=4x^2+4ax$. Or si dee dimostrare, che sia $\overline{CI}^2=4RF\times RI$, cioè $\overline{CI}^2=\overline{4x+4a}\times r=4rx+4ar$.

DIMOSTRAZIONE. I due triangoli rettangoli TPR, EIC formati da linee parallele sono equiangoli, e perciò simili; laonde (prop. 7. lib. 3.) sarà $PT:RP::EI:EC$, vale a dire $2x:y::c:EC$, e però (prop. 10. lib. 1.) sarà $EC=\frac{cy}{2x}$; sicchè troverassi $CL=EL-EC=y-\frac{cy}{2x}$; onde sarà $\overline{CL}^2=y^2-\frac{cy^2}{x}+\frac{c^2y^2}{4x^2}$ (arit. nn. 133. 134. 142.). Oltracciò (prop. 20.) abbiamo $AP:AL::\overline{RP}^2:\overline{CL}^2$, cioè $x:x+r-c::y^2:\overline{CL}^2$; laonde (proposiz. 10. lib. 1.) avremo un altro valore di $\overline{CL}^2$, cioè $\overline{CL}^2=\frac{xy^2+ry^2-cy^2}{x}$, o sia $\overline{CL}^2=y^2+\frac{ry^2}{x}-\frac{cy^2}{x}$; sicchè paragonando insieme i due ritrovati valori della medesima quantità $\overline{CL}^2$ (ass. 1.) avremo l'equazione $y^2-\frac{cy^2}{x}+\frac{c^2y^2}{4x^2}=y^2+\frac{ry^2}{x}-\frac{cy^2}{x}$, da cui levando da ambe le parti la quantità comune $y^2=\frac{cy^2}{x}$ (ass. 3.) resterà $\frac{c^2y^2}{4x^2}=\frac{ry^2}{x}$, e moltiplicando per $4x^2$ (ass. 4.) si avrà $c^2y^2=\frac{4rx^2y^2}{x}$, cioè $c^2y^2=4rxy^2$ (arit. 68.), e dividendo quest' equazione per y^2 (ass. 5.) rimarrà $c^2=4rx$: ma perchè d'ipotesi abbiamo $EI=c$, perciò sarà $\overline{EI}^2=4rx$.

Inoltre ne' triangoli simili TPR, EIC abbiamo $PT:EI::RT:CI$; perciò (prop. 14. lib. 1.) sarà $\overline{PT}^2:\overline{EI}^2::\overline{RT}^2:\overline{CI}^2$, cioè $4x^2:4rx::4x^2+4ax:\overline{CI}^2$, sicchè (propos. 1. lib. 1.) sarà $4x^2\times\overline{CI}^2=16rx^3+16arx^2$, e dividendo la equazione per $\overline{4x}^2$ (ass. 5.) rimarrà $\overline{CI}^2=4rx+4ar$ cioè $=4RF\times RI$, la qual cosa bisognava dimostrare.

Che se posti, come sopra, $AF=a$, $AP=x$, ec. si farà $IG=SB=m$, allora si avrà $AB=AS+SB=x+r+m$, e col medesimo ragionamento si dimostrerà essere $\overline{HI}^2=4RF\times RI=4rx+4ar$.

Imperocchè i due triangoli rettangoli TPR, GIH formati da linee parallele, sono simili fra loro, onde sarà $PT:RP::IG:GH$, cioè $2x:y::m:GH=\frac{my}{2x}$; laonde sarà $BH=BG+GH=y+\frac{my}{2x}$, e $\overline{BH}^2=y^2+\frac{my^2}{x}+\frac{m^2y^2}{4x^2}$. Ma abbiamo (propos. 20.) $AP:AB::\overline{RP}^2:\overline{BH}^2$, cioè $x:x+r+m::y^2:\overline{BH}^2$; perciò (prop. 10. lib. 1.) sarà $\overline{BH}^2=y^2+\frac{ry^2}{x}+\frac{my^2}{x}$; sicchè paragonando insieme i due valori di $\overline{BH}^2$ (ass. 1.) sarà $y^2+\frac{my^2}{x}+\frac{m^2y^2}{4x^2}=y^2+\frac{ry^2}{x}+\frac{my^2}{x}$, e togliendo $y^2+\frac{my^2}{x}$ (ass. 3.) resterà l'equazione $\frac{m^2y^2}{4x^2}=\frac{ry^2}{x}$, che moltiplicata per $4x^2$, e divisa per y^2, (ass. 4, e 5.) resterà $m^2=4rx$, ma essendo $IG=m$, sarà $\overline{IG}^2=m^2$, cioè $\overline{IG}^2=4rx$.

Oltracciò ne' simili triangoli TPR, GIH (prop. 7. lib. 3., e 14. lib. 1.) abbiamo $\overline{PT}^2:\overline{IG}^2::\overline{RT}^2:\overline{IH}^2$, cioè $4x^2:4rx::4x^2+4ax:\overline{IH}^2$; dunque (prop. 1. lib. 1.) sarà $4x^2\times\overline{IH}^2=16rx^3+16arx^2$, e dividendo per $4x^2$ (ass. 5.) rimarrà $\overline{IH}^2=4rx+4ar$, cioè $=4RF\times RI$. Il che ec.

Adunque il quadrato di qualunque ordinata al diametro è uguale al rettangolo contenuto dalla rispondente ascissa, e dal parametro dello stesso diametro. Il che ec.

COROLLARIO I. Essendosi dimostrato $\overline{CI}^2 = 4RF \times RI$ ed $\overline{HI}^2 = 4RF \times RI$; perciò (ass. 1.) sarà $\overline{CI}^2 = \overline{HI}^2$ onde (aritm. 179.) si avrà $CI = HI$. Sicchè il diametro sega per mezzo tutte le linee rette parallele alla tangente verticale di esso diametro, e terminate dalla curva parabolica, e per questa ragione si noma *diametro*.

Conseguentemente se una linea retta segherà obbliquamente, e per mezzo due, o più linee parallele terminate dalla curva parabolica, essa linea retta sarà un diametro della parabola, cioè parallela all' asse. Ma se le segherà per mezzo, e perpendicolarmente, allora essa linea sarà l'asse della parabola, come resta evidente dalla definizione decima.

COROLLARIO II. Nella medesima maniera, che si è dimostrato $\overline{CI}^2 = 4RF \times RI$, si dimostrerà $\overline{NQ}^2 = 4RF \times RQ$, e però (cor. 5. prop. 2. lib. 1.) sarà $\overline{CI}^2 : \overline{NQ}^2 :: 4RF \times RI : 4RF \times RQ$, e dividendo i due ultimi termini per $4RF$ (propos. 11. lib. 1.) si avrà $\overline{CI}^2 : \overline{NQ}^2 :: RI : RQ$. Per la qual cosa i quadrati delle ordinate a qualsivoglia diametro della parabola stanno fra loro nella ragione delle corrispondenti ascisse del medesimo diametro.

COROLLARIO III. Oltracciò perchè s' è dimostrato $\overline{CI}^2 = 4RF \times RI$, dissolvendo (cor. 3. prop. 2. lib. 1.) avremo $\div RI : CI : 4RF$. Adunque se a qualsivoglia ascissa RI del diametro, ed alla corrispondente ordinata CI si troverà (propos. 5. lib. 3.) una terza proporzionale, essa sarà $4RF$, cioè il parametro dello stesso diametro.

DEFINIZIONE XV.

TAV. X. FIG. 73.

Se dal vertice A dell' asse, o di qualsivoglia diametro AB si tirerà la retta AN tangente della parabola, e per quanti si vogliano punti C, D, E, F, ec. della medesima tangente si tireranno sino alla curva parabolica le rette linee GC, DH, EI, FL. ec. parallele all' asse, o diametro AB; esse linee rette si chiamino *ordinate esterne*, ovvero *ordinate alla tangente*, e le porzioni della tangente corrispondenti alle ordinate, cioè le parti AC, AD, AE, AF ec. dicansi *ascisse della tangente*.

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA.

Le ordinate esterne (CG, DH, EI ec.) sono fra loro come i quadrati ($\overline{AC}^2$; $\overline{AD}^2$; $\overline{AE}^2$, ec.) delle corrispondenti ascisse della tangente.

DIMOSTRAZIONE. Dai punti G, H, I, L ec., in cui le ordinate esterne sono terminate dalla parabola, si tirino le rette GM, HP, IQ, LR ec. ordinate all' asse, o diametro AB; ed allora le ordinate esterne CG, DH ec. (prop. 28. lib. 2.) saranno uguali alle corrispondenti ascisse AM, AP, AQ ec. del diametro, e le ascisse AC, AD ec. della tangente saranno uguali alle opposte ordinate GM, HP ec. al diametro. Ma (prop. 20. e cor. 2. prop. antec.) noi abbiamo dimostrato essere $AM : AP :: \overline{GM}^2 : \overline{HP}^2$; laonde sostituendo cose uguali a cose uguali, sarà $GC : DH :: \overline{AC}^2 : \overline{AD}^2$. Similmente sarà $DH : EI :: \overline{AD}^2 : \overline{AE}^2$, e così delle altre. Dunque le ordinate esteriori stanno fra loro come i quadrati delle ascisse della tangente. Il che ec.

PROPOSIZIONE XXIV.

PROBLEMA TAV. X. FIG. 74.

Data una parabola (EAN), trovarne l' asse, il parametro, il foco, e la linea direttrice.

Nella data parabola si tirino due, o più linee rette CI, EH ec. parallele fra loro, e terminate dalla curva parabolica, le quali si seghino per mezzo ne' punti L, ed M, e per essi punti tirisi la retta RLM, la quale, se sarà perpendicolare ad esse linee, sarà l' asse (def. 10.); ma segandole obbliquamente, sarà un diametro, come RMG, al quale si tiri la perpendicolare EGN, che sarà la base della parabola. Dividasi essa EN per mezzo nel punto B, da cui s' innalzi la BA perpendicolare alla medesima EN, o sia parallela al diametro RG, sarà BA l' asse della parabola (def. 10.) al quale tirisi qualunque ordinata RP. Poscia all' ascissa PA, ed all' ordinata RP (prop. 5. lib. 3.) si trovi una terza proporzionale p, che sarà (cor. 2. propos. 19.) il parametro dell' asse. Quindi si tagli $AF = \frac{p}{4}$, quarta parte del ritrovato parametro, e sarà il punto F il foco della parabola. Medesimamente dall' asse prolungato di là dal vertice A si tagli la parte $AD = AF = \frac{p}{4}$, e pel punto D si conduca la yz perpendicolare all' asse, e sarà yz la direttrice della parabola (def. 10.). Il che ec.

PROPOSIZIONE XXV.

PROBLEMA.

1. Dato un segmento (ECRH) della parabola, descrivere l' intera parabola.

2. Nella descritta parabola tirare un diametro, che faccia colle sue ordinate un angolo uguale ad un angolo dato.

1. Nel dato segmento ECRH della parabola si tirino, come nell' antecedente problema, due corde CI, EH parallele fra loro, e trovato il diametro RG, pel cui vertice R tirisi la retta RT parallela alle doppie ordinate CI, EH, sarà RT (def. 11.) tangente verticale di esso diametro. Poscia alla stessa tangente RT prolungata in Q, ed al punto in essa R (prop. 10. lib. 2.) facciasi l' angolo TRF=GRQ, e la retta RF (cor. 4. prop. 18.) passerà pel foco della parabola. Quindi all' ascissa RL, ed all' ordinata LI (prop. 5. lib. 3.) trovisi la terza proporzionale m, che (cor. 3. prop. 22.) sarà il parametro del diametro RG. Finalmente si seghi $RF = \frac{m}{4}$ quarta parte del ritrovato parametro, ed il punto F (prop. 21.) sarà il foco della parabola. Pel punto F (prop. 23. lib. 2.) tirisi la retta AFB parallela al diametro RG, sarà AB l' asse; che si prolunghi finattantochè si congiunga, come in T, colla tangente RT prolungata; tirisi RP ordinata all' asse, e dividasi per mezzo in A la suttangente PT, e sarà il punto A (prop. 17.) vertice della parabola, ed FA la quarta parte del parametro dell' asse. Facciasi AD=FA, e si tiri pel punto D la direttrice yz, e (def. 10.) si compisca la parabola. Il che ec.

2. Ma data la parabola EAN, se in essa si dovrà tirare un diametro, che faccia colle sue ordinate un angolo uguale ad un dato angolo x; allora costituiscasi sopra l' asse AB, e nel punto verticale A l' angolo BAS=x; poi dividasi per mezzo in V la corda AS, e pel punto V (prop. 23. lib. 2.) si tiri la retta RVG parallela all' asse AB, e sarà RG il diametro ricercato. Imperocchè l' angolo AVR è uguale al suo alterno BAS, ed in conseguenza uguale all' angolo

dato x; ma all'angolo AVR (propos. 21. lib. 2.) sono uguali gli angoli esterni HMR, ILR ec., adunque s'è tirato un diametro RG, che colle sue ordinate AS, HE ec. fa un angol uguale ad un angolo dato x. Il che ec.

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOR. TAV. X. FIG. 75.

La superficie della parabola è uguale a due terze parti del circoscritto rettangolo.

Sia la semiparabola ALCB, il cui asse sia AB, e la base sia l'ordinata BC, e facciasi la tangente verticale AR=BC, e si tiri la retta RC, e sarà ABCR il rettangolo circoscritto alla semiparabola ALCB. Tirisi il diametro AC sottendente la semiparabola. Poscia per ogni punto della tangente verticale AR s'intendano tirate linee rette PM, *pm* ec. parallele all'asse AB, che segheranno la semiparabolica curva ne' punti L, *l*, ec. e la sottesa AC ne' punti S, *s* ec. Le linee rette AB, CR, PM, *pm* ec. sono gli elementi, che formano il parallelogrammo BR; altrettante rette CR, PS, *ps*, ec. sono gli elementi, che costituiscono il triangolo rettilineo ARC; ed altrettante rette CR, LP, *lp* ec. saranno gli elementi, che compongono il triangolo mistilineo, o *semiparabola esterna* ALCR; la quale si dimostrerà essere la terza parte del rettangolo ABCR, ed in conseguenza la semiparabola ALCB uguaglierà i due terzi del medesimo rettangolo.

DIMOSTRAZIONE. Nel triangolo ARC essendo PS parallela al lato CR; perciò (cor. prop. 7. lib. 3., e prop. 14. lib. 1.) avremo $\overline{CR}^2 : \overline{PS}^2 :: \overline{AR}^2 : \overline{AP}^2$ ma le ordinate esterne CR, PL (prop. 23.) sono fra loro come i quadrati delle ascisse della tangente, AR, AP; onde abbiamo

$CR : PL :: \overline{AR}^2 : \overline{AP}^2$, e però (ass. 1.) sarà $CR : PL :: \overline{GR}^2 : \overline{PS}^2$, e sostituendo PM, e $\overline{PM}^2$ invece delle uguali CR, e $\overline{CR}^2$, si avrà $PM : PL :: \overline{PM}^2 : \overline{PS}^2$. Per la stessa ragione sarà $pm : pl :: \overline{pm}^2 : \overline{ps}^2$, e lo stesso si dimostra di tutte le parallele all' asse; conseguentemente gli elementi (AB, CR, MP, *mp* ec.) che costituiscono il rettangolo BR stanno agli elementi (CR, LP, *lp* ec.) che formano la semiparabola esterna ALCR, come i quadrati ($\overline{AB}^2$, $\overline{CR}^2$, $\overline{MP}^2$, $\overline{mp}^2$ ec.) degli elementi, che compongono lo stesso rettangolo BR, ai quadrati ($\overline{CR}^2$, $\overline{PS}^2$, $\overline{ps}^2$ ec.) degli elementi componenti il triangolo rettilineo ACR.

Concepiscasi ora, che il rettangolo BR, col triangolo ACR, talmente si rivolgano intorno intorno al lato AR fisso, ed immobile, finattantochè ritornino alla posizione, da cui cominciarono a muoversi, lasciando in ogni luogo il loro vestigio; ed allora il rettangolo BR descriverà il cilindro BZ, ed il triangolo ACR descriverà il cono ACQZ. Il cilindro si concepisce composto da altrettanti circoli uguali, quanti sono gli elementi, o punti, che formano la retta AR, che hanno i raggi uguali AB, RC, PM, *pm* ec.; il cono è parimente composto da ugual numero di circoli decrescenti dal punto R sino al punto A, i cui raggi sono le rette RC, PS, *ps* ec., cioè gli elementi del triangolo ARC. Ma qualsivoglia circolo del cilindro descritto da un raggio PM sta al corrispondente cerchio del cono descritto dal corrispondente raggio PS, come $\overline{PM}^2 : \overline{PS}^2$ (cor. 4. prop. 2. lib. 5.); laonde tutti i cerchi, che formano il cilindro, stanno a tutti gli altrettanti cerchi, che compongono il cono; cioè il cilindro sta all' inscritto cono, come i quadrati di tutti gli elementi AB, CR, PM, *pm* ec. componenti il rettangolo BR, ai quadrati di tutti gli altrettanti elementi CR, PS, *ps*, ec., che costituiscono il triangolo rettilineo ACR. Ma di sopra s'è dimostrato, che il rettangolo BR sta alla semiparabola esterna ALCR come i suddetti quadrati degli elementi AB, CR, PM ec. del medesimo rettangolo, ai quadrati degli elementi CR, PS, *ps* ec. del triangolo rettilineo ACR; adunque (ass. 1.) il cilindro BZ descritto dal rettangolo BR, sta al cono inscrittogli ACQZ, descritto dal triangolo ACR, come il rettangolo BR, alla semiparabola esterna ALCR. Ma il cilindro (cor. 1. prop. 13. lib. 6.) è triplo dell' inscritto cono; dunque anche il rettangolo BR sarà triplo della semiparabola esterna ALCR.

Sicchè se dal rettangolo BR si leverà la terza parte, cioè la semiparabola esterna ALCR, rimarrà l'interna semiparabola ALCB uguale ai due terzi del circoscritto rettangolo. Conseguentemente tutta la parabola DYALC sarà uguale a due terze parti del rettangolo circoscritto RCDN. Il che ec.

Corollario i. Dunque la parabola esterna NDYALCR è la metà della parabola interna DYALC.

Corollario ii. L' area, o superficie della parabola DYALC, si otterrà moltiplicando la base DC pei due terzi dell' altezza, o sia dell' asse AB. Ma la superficie della parabola esterna NDYALCR si troverà moltiplicando la stessa base DC, o l' ugual linea NR, tangente verticale, per la terza parte dello stesso asse AB.

Corollario iii. Sicchè il rettangolo circoscritto DR sta all' inscritta parabola DYALC :: 3 : 2, cioè in ragione sesquialtera; e la parabola DYALC, sta alla parabola esterna NDYALCR :: 2 : 1, cioè in ragione dupla.

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOR. TAV. X. FIG. 76.

Se l' asse della parabola sarà uguale al suo parametro, ed uguale al diametro del cerchio generatore di una cicloide, allora la superficie della medesima parabola sarà uguale alla somma di tutte le corde, che si possono tirare nello stesso cerchio da un estremo del diametro a ciascun punto della periferia; e la medesima superficie sarà la metà della somma di tutti gli archi della suddetta cicloide.

Sia data la semiparabola ABCF, il cui parametro sia uguale all' asse AB; e sia ABDM la semicicloide, il cui asse, o sia diametro del suo cerchio generatore sia la stessa retta AB. Per ciascun punto dell' asse AB s' intendano tirate le rette FEM, HGR ec. perpendicolari all' asse comune AB. Le ordinate CB, HG, EF, ec. sono gli elementi, che formano la semiparabola ABCF. Si tirino le corde AS, AL ec. a ciascun punto della semicirconferenza ALSB, le quali insieme prese saranno la metà di tutti gli archi della semicicloide; perciocchè (cor. 1. prop. 14.) la corda AL è la metà del corrispondente arco AM, la corda AS è la metà del corrispondente arco AMR della cicloide, e così delle altre. Dico, che l' area della semiparabola ABCF è uguale alla somma di tutte le corde AS, AL ec. tirate a ciascun punto della semiperiferia ALSB, ed uguale ancora alla metà della somma di tutti gli archi della semicicloide AMRD.

Dimostrazione. L' asse AB è, d' ipotesi, il parametro della parabola, e le rette EF, GH ec. sono ordinate all' asse, perciò (prop. 19.) sarà

$\overline{EF}^2 = AB \times AE$; ma nel mezzo cerchio ALSB, tirata la corda BL, l' angolo ALB (cor. 3. prop. 8. lib. 4.)

è retto; laonde nel triangolo rettangolo ALB (cor. 1. prop. 17. lib. 3.) avremo $\overline{AL}^2 = AB \times AE$; dunque (ass. 1.) sarà $\overline{EF}^2 = \overline{AL}^2$, e però (aritm. 179.) sarà EF=AL. Nello stesso modo si dimostra GH=AS, e così di tutte le altre. Adunque la somma di tutte le rette BC, GH, EF ec., che formano la semiparabola, cioè l' istessa semiparabola ABCF, è uguale alla somma di tutte le corde AB, AS, AL ec., che s' intendono tirate a ciascun punto della circonferenza. Ma ciascuna corda AS (cor. 1. proposiz. 14.) è la metà del corrispondente arco AMR della semicicloide: perciò tutte esse corde AB, AL, AS ec. insieme unite sono uguali alla metà della somma di tutti gli archi AMRD, AMR, AM, ec. della semicicloide, che però l' area della semiparabola AFCB è uguale alla semisomma di tutti gli archi della semicicloide AMRB; e ciò, che si è dimostrato della metà, si verifica eziandìo del suo doppio. Adunque se l' asse della parabola sarà uguale ec. Il che ec.

DEFINIZIONE XVI.

TAV. X. FIG. 77.

La figura solida (AQFZCN) generata dà un intero rivolgimento della semiparabola (ALCB) intorno all' asse (AB) fisso, ed immobile, chiamasi *conoide parabolica*, o *paraboloide*.

La retta AB, intorno a cui si rivolge la semiparabola, dicesi *asse della conoide*, ed il punto A si noma *vertice*, o *cima della medesima conoide*.

Il cerchio FZCN descritto dall' ordinata, o base BC nel rivolgimento della semiparabola, si chiama *base della conoide parabolica*.

Ma se il rettangolo ABCD circoscritto alla semiparabola si rivolgerà insieme alla semiparabola ALCB

intorno all' asse AB, descriverà il cilindro XZ, che avrà la base FZCN, e l' altezza, o asse AB, comune colla conoide, e percio addimandasi *cilindro circoscritto alla paraboloide*.

PROPOSIZIONE XXVIII.

TEOREMA.

La conoide parabolica è la metà del cilindro ad essa circoscritto.

Sia data la semiparabola ALCB, ed il rettangolo ABCD alla medesima circoscritto. Si tiri la sottesa AC, diametro del circoscritto rettangolo BD; e da ciascun punto dell' asse AB della semiparabola ALCB s' intendano tirate le rette PM, HR ec. ordinate all' asse, che segheranno la semiparabola, come ne' punti L, S, ec., e la sottesa AC in E, I, ec.; si dee dimostrare, che il cilindro descritto da un' intera rivoluzione del rettangolo BD è doppio della conoide descritta dall' intera rivoluzione della inscritta semiparabola ALCB.

Dimostrazione. Nel triangolo ABC (cor. prop. 7. lib. 3.) abbiamo AB : AP :: BC : PE; ma dalla proposizione 20., egli è AB : AP :: $\overline{BC}^2 : \overline{PL}^2$; perciò (ass. 1.) sarà $\overline{BC}^2 : \overline{PL}^2$ :: BC : PE, e sostituendo PM all' uguale BC, e $\overline{PM}^2$ al $\overline{BC}^2$, avremo $\overline{PM}^2 : \overline{PL}^2$ :: PM : PE. Nella stessa maniera si dimostra $\overline{HR}^2 : \overline{HS}^2$ :: RH : HI; e lo stesso s' intenda di tutte le altre ordinate all' asse.

Concepiscasi ora, che la semiparabola ALCB col suo rettangolo circoscritto BD faccia un intero rivolgimento circa l' asse AB, lasciando in ogni luogo il suo vestigio; è chiaro, che il rettangolo BD descriverà il cilindro ZX, e la semiparabola ALCB la conoide parabolica AQFZCN; ed in esso rivolgimento del rettangolo BD, le uguali rette BC, HR, PM ec. descriveranno cerchi uguali formanti il cilindro ZX, le altrettante rette decrescenti BC, HS, PL, ec. componenti la semiparabola ALCB descriveranno i cerchi costituenti la conoide parabolica AQFZCN.

Ma i cerchi (cor. 4. prop. 2. lib. 5.) sono fra loro come i quadrati de' raggi, e però il cerchio descritto nel cilindro dal raggio PM sta al cerchio corrispondente descritto nella conoide dal raggio

PL :: $\overline{PM}^2 : \overline{PL}^2$, ed abbiamo già dimostrato

$\overline{PM}^2 : \overline{PL}^2 :: PM : PE$; laonde il cerchio descritto nel cilindro dal raggio PM starà al cerchio corrispondente descritto nella conoide dal raggio PL, come PM elemento del rettangolo BD al PE elemento del triangolo rettilineo ABC; il che si verifica di tutti i cerchi componenti questi due solidi. Sicchè tutti i cerchi, che formano il cilindro stanno a tutti gli altrettanti cerchi costituenti la conoide, come tutte le rette BC, HR, PM ec. componenti il rettangolo BD, a tutte le rette costituenti il triangolo ABC; vale a dire il cilindro XZ sta alla inscritta conoide AQFZCN, come il rettangolo BD al triangolo ABC. Ma il rettangolo BD (prop. 28. lib. 2.) è doppio del triangolo ABC; dunque anche il cilindro ZX sarà doppio della inscrittagli conoide parabolica AQFZCN; in conseguenza la conoide parabolica è la metà del cilindro circoscritto. Il che ec.

Corollario i. Nel rivolgimento del rettangolo BD, e della semiparabola ALCB intorno all' asse AB, il triangolo ABC (def. 12. lib. 6.) descrive il cono AFZCN inscritto alla conoide AQFZCN, ed al cilindro ZX, ed il cono (cor. 1. prop. 13. lib. 6.) è la terza parte del circoscritto cilindro; sicchè essendosi dimostrato, che il cilindro ZX sta alla inscritta conoide AQFZCN :: 2 : 1, e che sta al cono inscrittogli AFZCN :: 3 : 1, perciò la conoide parabolica

AQFZCN starà all' inscritto cono AFZCN :: 3 : 2, cioè in ragione sesquialtera.

Corollario ii. Dunque la solidità della conoide parabolica (AQFZCN) si troverà moltiplicando l' area del cerchio (FZCN) base della conoide per la metà dell' asse, o altezza (AB).

DEFINIZIONE XVII.

DELL' IPERBOLA

TAV. X. FIG. 78.

Data una linea retta terminata AB, che si prolunghi indefinitamente verso P, e K; tirisi un' altra linea retta indefinita LX, da cui si tagli la parte LM uguale alla data AB. Quindi dalla data retta AB prolungata si seghino a piacere verso P, e K due parti uguali AF=B*f*; e fatto centro *f*, colll intervallo *f*2 maggiore di *f*A, descrivasi un arco G2H, e dalla linea assunta LX taglisi LN=*f*2; poi fatto centro F, coll' intervallo uguale alla MN s' intersechi l' arco G2H in G, ed in H. Similmente dal centro *f*, con altro maggiore intervallo *f*3, si descriva l' arco R3S, e dalla linea assunta L*x* si seghi LO=*f*3, indi dal centro F, e col raggio =MO s' intersechi l' arco R3S in R, ed S, e così continuando col medesimo ordine facciansi altre intersecazioni di archi come in I, Z, ec. Finalmente pei ritrovati punti, e pel punto A si descriva la curva IRGAHSZ, la quale chiamasi *iperbola*.

Se fatto centro F, e coi medesimi raggi LN, LO ec. si descriveranno gli archi *gh*, *rs* ec.; e quindi fatto centro *f*, coi raggi NM, MO, ec. s' intersecheranno in *g*, *h*, *r*, *s*, ec., si descriverà la curva *irgBhsz*, sarà un' altra *iperbola* uguale, ed opposta alla prima, ed amendue insieme diconsi *iperbole opposte*.

I punti F, ed *f* si chiamano *fochi*; B, ed A sono i *vertici*, o *cime delle opposte iperbole*; e la detta linea retta AB chiamasi *lato trasverso*, o *primo asse dell' iperbola*.

Se l'asse AB si divide per mezzo in C, esso punto C dicesi centro dell' iperbola. La distanza (CF, o Cf) dal centro (C) al foco (F, o f) dell' iperbola addimandasi *eccentricità dell' iperbola*.

Le rette linee (fR, FR, o Fh, fh ec.) tirate dai fuochi a qualunque punto (R, o h ec.) dell' iperbola si chiamano *raggi vettori*.

Dell' asse AB prolungato le parti A2, A3, AP ec. o B2, B3, BK ec. si dicono *ascisse dell' asse prolungato*.

Le linee rette tirate dalla curva iperbolica perpendicolarmente sopra l' asse prolungato chiamansi ordinate al primo asse, come sono PV, PQ, Ku ec.

COROLLARIO. Dall' antecedente costruzione dell' iperbola si vede chiaramente, che la differenza de' raggi vettori è una linea costante, cioè sempre uguale al primo asse AB. Imperocchè dalla medesima costruzione abbiamo LM=AB, LO=fR, ed RF=MO; onde abbiamo fR−RF=LO−MO; ma LO−MO è uguale ad LM, che si è posta uguale all' asse AB, dunque sarà fR−RF=AB. Similmente è fG—GF=AB; e così delle altre.

DEFINIZIONE XVIII.

TAV. X. FIG. 79.

Se dal centro C dell' iperbola s' innalzerà una indeterminata linea DS perpendicolare all' asse AB, e fatto centro A coll' intervallo della eccentricità CF, o Cf s' intersecherà la retta DS ne' punti D, ed S, cioè si farà AD=AS=CF, allora la retta terminata DS sarà il *secondo asse dell' iperbola*, che rimane diviso per mezzo in C dal primo asse AB; perocchè nel triangolo isoscele ADS la perpendicolare AC (cor.

2. prop. 25. lib. 2.) taglia per mezzo in C la base DS, onde abbiamo CD=CS.

I due assi AB primo, e DS secondo, si chiamano *assi coniugati*; e quando gli assi coniugati sono uguali fra loro, l' *iperbola* dicesi *equilatera*.

Se ai due assi AB, DS si troverà (prop. 5. lib. 3.) una terza proporzionale p, questa sarà il *lato retto*, o sia *parametro del primo asse* AB. Ma una terza proporzionale q ai due assi DS, AB sarà il *parametro del secondo asse* DS.

DEFINIZIONE XIX.

Se pel centro C dell' iperbola si condurranno due linee rette, CM parallela alla retta AS, e la CN parallela all' AD; esse rette CM, CN si chiamino le *assintoti dell' iperbola*; cioè linee non concorrenti coll' iperbola; poichè, come dimostreremo, prolungandole indefinitamente si andranno accostando sempre più all' iperbola, ma non mai s' incontreranno con essa.

Se le suddette assintoti si prolungheranno di là dal centro C verso K, e Q, saranno CK, CQ *le assintoti dell' opposta iperbola*.

Ogni altra linea retta tirata pel centro, se è terminata dalle due opposte iperbole si addimanda *primo diametro dell' iperbola*, come ZCR. Ma quando prolungata indefinitamente non sega l' iperbola, allora chiamasi *diametro indeterminato dell' iperbola*, qual' è la retta GCH.

PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA.

Se pel vertice (A) dell' iperbola (RAO) si tirerà la retta (LE) parallela al secondo asse (DS), cioè perpendicolare al primo asse (AB), e terminata (in

L, ed E) dalle assintoti (CM , CN); essa retta (LE) sarà uguale al secondo asse (DS), e segata per mezzo dal primo (AB).

Dimostrazione. Perchè, dalla definizione antecedente, tanto le rette CL, AS fra loro, quanto le rette AD, CE anche fra loro, e le rette DS, LE parimente tra di loro sono parallele; perciò ne' parallelogrammi DE, LS (prop. 28. lib. 2.) sarà AL=CS, ed AE=CD, conseguentemente sarà DS=LE; ma egli è CD=CS (def. 18.) dunque sarà ancora AL=AE. Il che ec.

Corollario I. Quindi abbiamo un' altra maniera di tirare le assintoti; cioè si tiri la retta LE tangente verticale dell' iperbola divisa per mezzo nel vertice A, e sia posta uguale al secondo asse DS; indi dal centro C, pei punti L, ed E si tirino le rette CM, CN, che saranno le assintoti dell' iperbola; come chiaramente si vede dall' antecedente dimostrazione.

Corollario II. Nei parallelogrammi ADCE, ASCL abbiamo AD=CE, ed AS=CL; ma (def. 18.) egli è AD=AS=CF; dunque (ass. 1.) le parti CE, CL, delle assintoti terminate dal centro C dell' iperbola, e dalla tangente verticale LE, saranno uguali fra loro, ed uguali all' eccentricità CF dell' iperbola.

Corollario III. Nel triangolo rettangolo ACD (cor. 1. prop. 18. lib. 3.) abbiamo

$\overline{AD}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{CA}^2$; ed è AD=CF (def. 18.): onde

(aritm. 179.) $\overline{AD}^2 = \overline{CF}^2$; perciò (ass. 1.) avremo

$\overline{CF}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{CA}^2$. Sicchè il quadrato della eccentricità CF è uguale ai quadrati dei due semiassi coniugati CD, CA. Inoltre, per antitesi, sarà eziandio

$\overline{CD}^2 = \overline{CF}^2 - \overline{CA}^2$.

Corollario IV. Oltracciò perchè nel triangolo DAS la retta CT, di costruzione, è parallela al lato

AS; perciò (prop. 2. lib. 3.) sarà DC : CS :: DT : TA; ed essendo DC=CS (def. 18.) però sarà ancora DT=TA.

Parimente nel triangolo CLE la retta TA si è tirata parallela al lato CE; onde sarà LA : AE :: LT : TC; e perchè abbiamo dimostrato LA=AE, sarà eziandio LT=TC.

Inoltre nel medesimo triangolo (cor. prop. 7. lib. 3.) abbiamo LC : CE :: LT : TA; e per l' antecedente cor. 2. è CL=CE; laonde sarà ancora LT=TA; ma si è dimostrato LT=TC, e TA=TD; perciò le rette LT, TA, TC, TD sono tutte uguali fra loro; siccome anche uguali fra loro si dimostrano le rette IA, IE, IS, IC.

Di più (proposiz. 28. lib. 2.) sono TA=CI, e CT=IA, dunque le otto rette linee TC, TA, IC, IA ec. sono tutte uguali fra loro.

Corollario V. Adunque la retta AT è la metà dell' ipotenusa AD; e però (cor. prop. 21. lib. 4.) sarà $\overline{AT}^2$ la quarta parte di $\overline{AD}^2$, cioè si avrà

$\overline{AT}^2 = \frac{\overline{AD}^2}{4}$; ma egli è $\overline{AD}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{CD}^2$, dunque

sarà $\overline{AT}^2 = \frac{\overline{CA}^2 + \overline{CD}^2}{4}$; per la qual cosa il quadrato della retta AT, o di CT ec. è la quarta parte della somma de' quadrati de' semiassi coniugati CA, CD. Cotesto quadrato di AT, o di CT, o di AI ec. dicesi *potenza dell' iperbola.*

Corollario VI. Inoltre, perchè alla retta BA divisa per mezzo in C ritrovasi aggiunta per diritto la retta AF, perciò (prop. 19. lib. 4.) sarà

$\overline{CF}^2 = BF \times FA + \overline{CA}^2$. Ma dall' antecedente corollario terzo abbiamo $\overline{CF}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{CA}^2$; dunque (ass. 1.) sarà $\overline{CD}^2 + \overline{CA}^2 = BF \times FA + \overline{CA}^2$, e togliendo il comune $\overline{CA}^2$ (ass. 3.) rimarrà $\overline{CD}^2 = BF \times FA$, e dissolvendo (cor. 3. prop. 2. lib. 1.) avremo $\div$ BF : CD : FA; vale a dire il secondo semiasse (CD) è medio proporzionale tra il primo asse (BF) prolungato sino al foco, e la (AF) distanza dal vertice al foco.

Sicchè se si farà il primo semiasse $CA=CB=a$; il secondo semiasse $CD=CS=c$, e l' eccentricità $CF=AD=m$, allora si avrà $FB=CF+CB=m+a$, ed $FA=CF-CA=m-a$; laonde sarà $FB\times FA=\overline{m+a}\times\overline{m-a}=m^2-a^2$, ed essendosi già dimostrato $\overline{CD}^2=FB\times FA$, sarà $c^2=m^2-a^2$, e dissolvendo si avrà $\div m+a : c : m-a$.

PROPOSIZIONE XXX.

TEOR. TAV. XI. FIG. 80.

Nell' iperbola il quadrato di qualsivoglia retta (PN) ordinata al primo asse sta al rettangolo (BP×PA) contenuto dal primo asse prolungato sino all' ordinata, e dalla corrispondente ascissa (PA), come il quadrato del secondo asse (SD) al quadrato del primo (AB); ovvero come il quadrato del secondo semiasse (CD) al quadrato del primo semiasse (CA).

Si tirino i raggi vettori fN, FN. Facciansi il primo asse $AB=2a$, il secondo $DS=2c$, e saranno il primo semiasse $CA=CB=a$, ed il secondo semiasse $CD=CS=c$; e (corollar. definiz. 17.) sarà $fN-FN=AB=2a$. Mettasi $FN=z$, e sarà $fN=2a+z$; onde si avrà $\overline{FN}^2=z^2$, ed $\overline{fN}^2=4a^2+4az+z^2$. Di più si facciano il semiasse prolungato $CP=x$, e la corrispondente ordinata $PN=y$; e saranno $PA=CP-CA=x-a$; e $BP=CP+CB=x+a$; perciò sarà $BP\times PA=\overline{x+a}\times\overline{x-a}=x^2-a^2$. Inoltre pongasi l' eccen-

tricità $CF=Cf=AD=m$, e saranno $FP=CP-CF=x-m$, $fP=CP+Cf=x+m$, onde (aritm. 142.) avremo $\overline{FP}^2=x^2-2mx+m^2$, ed $\overline{fP}^2=x^2+2mx+m^2$. Finalmente sarà $AF=CF-CA=m-a$, ed $Af=BF=CF+CB=m+a$. Ciò supposto si dee dimostrare, che sia $\overline{PN}^2 : BP\times PA :: \overline{CD}^2 : \overline{CA}^2$, cioè $y^2 : x^2-a^2 :: c^2 : a^2$.

DIMOSTRAZIONE. Ne' triangoli rettangoli FPN, fPN (cor. 1. prop. 18. lib. 3.) abbiamo $\overline{FP}^2+\overline{PN}^2=\overline{FN}^2$, ed $\overline{fP}^2+\overline{PN}^2=\overline{fN}^2$, cioè $x^2-2mx+m^2+y^2=z^2$, ed $x^2+2mx+m^2+y^2=4a^2+4az+z^2$, e sottraendo la prima equazione dalla seconda, cioè la prima parte dalla prima, e la seconda dalla seconda (ass. 3.) rimarrà $x^2+2mx+m^2+y^2-x^2+2mx-m^2-y^2=4a^2+4az+z2-z^2$, vale a dire (aritmet. 51.) si avrà $4mx=4az+4a^2$, e dividendo per 4. (ass. 5.) resterà l' equazione $mx=az+a^2$, e per antitesi (arit. 106.) sarà $az=mx-a^2$, e dividendo per a si avrà $z=\frac{mx}{a}-a$; laonde (aritm. 118. 133. 134. 142.) sarà $z^2=\frac{m^2x^2}{a^2}-2mx+a^2$; ma si è già trovato $x^2-2mx+m^2+y^2=z^2$; sicchè (ass. 1.) avremo $x^2-2mx+m^2+y^2=\frac{m^2x^2}{a^2}-2mx+a^2$, e levando il termine comune $-2mx$ (ass. 3.) rimarrà l' equazione $x^2+m^2+y^2=\frac{m^2x^2}{a^2}+a^2$, la quale si moltiplichi a^2, e (ass. 4.) si avrà

$a^2 x^2 + a^2 m^2 + a^2 y^2 = m^2 x^2 + a^4$, e per antitesi (aritm. 106.) sarà

$a^2 y^2 = m^2 x^2 + a^4 - a^2 x^2 - a^2 m^2$. Ma (coroll. 3. proposiz. 29.) abbiamo $\overline{CD}^2 = \overline{CF}^2 - \overline{CA}^2$, cioè $c^2 = m^2 - a^2$, per la qual cosa dividendo l' antecedente equazione per questa (ass. 5.) resterà $\frac{a^2 y^2}{c^2} = \frac{m^2 a^2 + a^4 - a^2 x^2 - a^2 m^2}{m^2 - a^2}$, cioè facendo l'attuale divisione della seconda parte (aritmet. 75.). rimarrà l' equazione $\frac{a^2 y^2}{c^2} = x^2 - a^2$, che moltiplicata per c^2 (ass. 4.) produrrà quest' altra equazione (E) $a^2 y^2 = c^2 \times \overline{x^2 - a^2} = c^2 x^2 - a^2 c^2$, e dissolvendo si avrà la proporzione $y^2 : x^2 - a^2 :: c^2 : a^2$, cioè $\overline{PN}^2 : BP \times PA :: \overline{CD}^2 : \overline{CA}^2$, medesimamente (propos. 11. lib. 1.) sarà $y^2 : x^2 - a^2 :: 4c^2 : 4a^2$, cioè

$\overline{PN}^2 : BP \times PA :: \overline{DS}^2 : \overline{AB}^2$. Adunque nell' iperbola il quadrato di qualunque ordinata al primo asse sta al rettangolo contenuto dallo stesso asse prolungato, e dalla corrispondente ascissa, come il quadrato del secondo asse al quadrato del primo, o come il quadrato del secondo semiasse al quadrato del primo.

Corollario I. Nella stessa maniera, che si è dimostrato $\overline{PN}^2 : BP \times PA :: \overline{DS}^2 : \overline{AB}^2$, si dimostrerà ancora $\overline{GH}^2 : BG \times GA :: \overline{DS}^2 : \overline{AB}^2$; onde (assiom. 1.) sarà $\overline{PN}^2 : BP \times PA :: \overline{GH}^2 : BG \times GA$, ed alternando si avrà $\overline{PN}^2 : \overline{GH}^2 :: BP \times PA : BG \times GA$.

Dunque nell' iperbola i quadrati delle ordinate al primo asse prolungato, sono fra loro come i rettangoli contenuti dal primo asse prolungato sino alle ordinate, ed alle corrispondenti ascisse. Questa è una delle principali proprietà dell' iperbola.

Corollario II. Le iperbole opposte (def. 17.) sono esattamente uguali; perciò tuttociò, che si è dimostrato dell' iperbola NAR, si intenda ancora dimostrato della opposta iperbola ZBn.

Oltracciò le ordinate ugualmente distanti dal centro comune C sono fra loro uguali. Imperocchè segando la $Cp = CP$, sarà $PA = pB$, e $CP + CB = Cp + CA$, cioè $BP = Ap$; laonde (ass. 4.) sarà $BP \times PA = Ap \times pB$; e tirate l' ordinata pn, si avrà, come nell' antecedente dimostrazione,

$\overline{pn}^2 : Ap \times pB :: \overline{DS}^2 : \overline{AB}^2$; ma antecedentemente si è dimostrato $\overline{PN}^2 : BP \times PA :: \overline{DS}^2 : \overline{AB}^2$; dunque (ass. 1.) sarà $\overline{pn}^2 : Ap \times pB :: \overline{PN}^2 : BP \times PA$, e si è dimostrato $Ap \times pB = BP \times PA$; perciò (corollar. 1. proposiz. 3. lib. 1.) sarà eziandio $\overline{pn}^2 = \overline{PN}^2$, e (aritmet. 179) $pn = PN$. Sicchè nelle opposte iperbole le ordinate al primo asse ugualmente distanti dal centro sono uguali fra loro.

Corollario III. Nell' antecedente dimostrazione abbiamo l' equazione (E) $a^2 y^2 = c^2 x^2 - a^2 c^2$, la quale divisa per a^2, (ass. 5.) ci dà quest' altra equazione $y^2 = \frac{c^2 \cdot x^2}{a^2} - c^2$, cioè

$$\overline{PN}^2 = \frac{\overline{CD}^2 \times \overline{CP}^2}{\overline{CA}^2} - \overline{CD}^2,$$

vale a dire il quadrato di qualunque ordinata al primo asse è uguale al residuo, che si trova sottraendo il quadrato del secondo semiasse dal quoziente, che nasce dividendo pel quadrato del primo semiasse il prodotto del quadrato del secondo semiasse nel quadrato del primo prolungato sino all' ordinata.

Inoltre nella medesima equazione (E) $c^2 x^2 - a^2 c^2 = a^2 y^2$ trasportando per antitesi il termine $-a^2 c^2$ (arit. 106), si avrà quest' altra equazione $c^2 x^2 = a^2 y^2 + a^2 c^2$, che divisa per c^2 (ass. 5.) ci darà l' equazione $x^2 = \frac{a^2 y^2}{c^2} + a^2$, la quale significa, che il quadrato del primo semiasse prolungato sino all' ordinata è uguale al quadrato del primo semiasse aggiunto al quoziente, che ne viene dividendo pel quadrato del secondo semiasse il prodotto del quadrato del primo semiasse nel quadrato dell'ordinata.

COROLLARIO IV. Se l' iperbola sarà equilatera, allora essendo AB=DS, o sia $2a=2c$, e CA=CD, cioè $a=c$, sarà pure $a^2=c^2$, sicchè dividendo l' equazione (E) $a^2 y^2 = c^2 x^2 - a^2 c^2$, per questa $a^2=c^2$ (ass. 5.) si avrà $y^2 = x^2 - a^2$. Ma $x^2 - a^2$ è il prodotto di $x+a$ per $x-a$, cioè di BP in PA. Adunque nell' iperbola equilatera il quadrato dell' ordinata all' asse è uguale al rettangolo contenuto dall' asse prolungato sino all' ordinata, e dalla corrispondente ascissa; cioè qualunque ordinata all' asse è media proporzionale tra l' ascissa, e l' asse prolungato sino all' ordinata; perciocchè dissolvendo l' equazione antecedente $y^2 = x^2 - a^2$ si ha la proporzione $\div\div x+a : y : x-a$, vale a dire $\div\div$ BP : PN : PA.

COROLLARIO V. Se l' ordinata PN sarà uguale al secondo semiasse CD, cioè avendo $y=c$, sarà eziandio $y^2=c^2$; ed allora nell' antecedente equazione (E) $c^2 x^2 - a^2 c^2 = a^2 y^2$ sostituendo c^2 all' uguale quadrato y^2 si avrà l' equazione

$c^2 x^2 - a^2 c^2 = a^2 c^2$, la quale divisa per c^2 (ass. 5.) rimarrà $x^2 - a^2 = a^2$, cioè, per antitesi, si avrà $x^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, vale a dire $\overline{CP}^2 = 2\overline{CA}^2$. Che

però quando l' ordinata all' asse è uguale al secondo semiasse, allora il quadrato del primo semiasse prolungato sino all' ordinata è uguale a due volte il quadrato del primo semiasse.

PROPOSIZIONE XXXI.

TEOREMA.

Qualunque primo diametro (CR) prolungato sino all' opposta iperbola (ZBn) rimane diviso per mezzo dal centro (C) dell' iperbola.

Dal punto R, in cui il diametro CR sega l' iperbola, si tiri la RE ordinata al primo asse prolungato. Di poi si tagli CV=CE, e tirisi l' ordinata VZ, e dal punto Z al centro C si giunga la retta CZ, la quale io dico, che sarà posta per diritto al diametro CR, e gli sarà uguale.

DIMOSTRAZIONE. I due triangoli CER, CVZ hanno, per costruzione, il lato CE=CV, e (cor. 2. prop. antec.) il lato ER=VZ, e (prop. 21. lib. 2.) l' angolo CER=CVZ; perchè le rette ER, ZV ordinate all' asse AB prolungato sono parallele; laonde (proposiz. 6. lib. 2.) sarà CR=CZ, e l' angolo ECR=VCZ opposto alla cima. Sicchè (cor. prop. 17. lib. 2.) le uguali rette CR, CZ saranno poste per diritto fra loro, e formano il diametro ZCR. Per la qual cosa qualunque primo diametro terminato dalle opposte iperbole è diviso per mezzo dal loro comune centro. Il che ec.

PROPOSIZIONE XXXII.

PROB. TAV. XI. FIG. 81.

Per un dato punto (R) dell' iperbola tirare una tangente.

Sia data l' iperbola KRAN, il cui primo asse sia BA, il centro C, il foco F, ed il foco dell' opposta iperbola sia f, e si debba dal punto R tirare una tangente.

Dai fochi F, ed f al punto R si tirino i raggi vettori FR, Rf, e dal maggiore Rf si seghi la parte RL uguale al minore FR, rimarrà Lf=AB (cor. def. 17.). Poscia dal punto L al foco F tirisi la retta LF, che (proposiz. 12. lib. 2.) si divida per mezzo in S. Finalmente pei punti R, ed S si tiri la retta ERST, la quale toccherà l' iperbola nel solo punto R.

Dimostrazione. Da qualunque altro punto E preso nella retta ERT si tirino le linee rette Ef, EF, EL, e dalla retta Ef taglisi EM=EF, sarà Ef−EF=Ef−EM=Mf. Nel triangolo isoscele RFL (cor. 1. prop. 25. lib. 2.) la retta RS, o sia ERT è perpendicolare alla retta LF divisa per mezzo in S; perciò anche ne' triangoli ESF, ESL (prop. 6. lib. 2.) sarà il lato EL=EF, e però (ass. 1.) sarà anche EL=EM. Ma nel triangolo ELf i due lati EL, Lf presi insieme (ass. 17.) sono maggiori del rimanente Ef, o sia di EM+Mf, cioè sarà EL+Lf>EM+Mf, e togliendo le uguali parti EL, EM (ass. 7.), resterà Lf>Mf. Ma abbiamo dimostrato Lf=AB, ed Mf=Ef−EF; perciò Mf è minore del primo asse AB; dunque il punto E è fuori della curva iperbolica, perchè se il punto E fosse nella curva iperbolica, la differenza Ef−EF de' raggi vettori sarebbe uguale al primo asse AB. Col medesimo raziocinio dimostrasi, che gli altri punti della retta ERT cadono fuori dell' iperbola, eccettuatone il punto R. Adunque la retta ERT tocca nel solo punto R la curva iperbolica. Il che ec.

Corollario I. La retta RT (cor. 1. prop. 25. lib. 2.) divide per mezzo l' angolo verticale LRF, o sia fRF, laonde nel triangolo fRF (prop. 20. lib. 3.) essa retta RT segherà in I il lato fF in parti proporzionali agli altri due lati FR, Rf; e però sarà FI : If : : FR : Rf; ed essendo FR minore di fR, sarà ancora FI minore di If; perciò il punto I è posto al di sotto del centro C dell' iperbola; vale a dire ogni tangente RT dell' iperbola sega il primo asse AB in un punto I, che sempre ritrovasi posto tra il centro C, ed il vertice A dell' iperbola.

Corollario II. Se il raggio vettore fR si prolungherà verso Z entro l' iperbola, allora l' angolo ZRE (prop. 17. lib. 2.) sarà uguale all' angolo fRT alla cima opposto, il quale, per l' antecedente corollario, è uguale all' angolo FRT; perciò (ass. 1.) l' angolo ZRE sarà uguale all' angolo FRT. Adunque un raggio di luce, che dal foco F cada sopra qualunque punto R dell' iperbola, si rifletterà per la linea RZ, che prolungata passa per l' altro foco f.

Prolungando l' altro raggio vettore FR verso G fuori dell' iperbola, sarà l' angolo fRT=GRE, perchè sono tutti due uguali al medesimo angolo FRT. Per la qual cosa il raggio di luce, che dal foco f cade in qualsivoglia punto R della convessità dell' iperbola sempre si riflette per la linea RG, che prolungata entro l' iperbola, passa per l' altro foco F.

PROPOSIZIONE XXXIII.

TEOREMA TAV. XI. FIG. 82.

Se nell' iperbola (GAO) da un punto (P) preso nel primo asse (BP) prolungato, si tirerà al medesimo asse un' ordinata (MR) prolungata da ambe le parti sino alle assintoti (CM, CR), e parallela al secondo asse (DS); il rettangolo (MG×GR) contenuto dalla parte (MG) frapposto tra la curva, e l' assintoto, e dalla rimanente parte (GR) sarà sempre uguale al quadrato del secondo semiasse CD.

Conducasi la tangente verticale LE terminata dalle assintoti, la quale (prop. 29.) sarà uguale al secondo asse DS, e la sua metà AL=CD. Poscia, come si è fatto nella proposizione 30., pongasi CA$=a$, CD=AL$=c$, CP$=x$, e PG$=y$.

Dimostrazione. Ne' triangoli simili CAL, CPM (cor. prop. 7. lib. 3.) abbiamo CA : AL :: CP : PM, cioè $a : c :: x :$ PM$=\frac{cx}{a}$ (proposiz. 10. lib. 1.); è dunque PM=PR$=\frac{cx}{a}$; ma si è fatta PG$=y$; perciò sarà MG=PM—PG$=\frac{cx}{a}-y$, e GR=PR+PG$=\frac{cx}{a}+y$; laonde sarà MG×GR$=\overline{\frac{cx}{a}-y}\times\overline{\frac{cx}{a}+y}=\frac{c^2x^2}{a^2}-y^2$. Ma (cor. 3. prop. 30.) abbiamo $y^2=\frac{c^2x^2}{a^2}-c^2$; onde sarà $-y^2=-\frac{c^2x^2}{a^2}+c^2$; e però nell'antecedente equazione MG×GR$=\frac{c^2x^2}{a^2}-y^2$ sostituendo $-\frac{c^2x^2}{a^2}+c^2$ invece dell'uguale $-y^2$, rimarrà MG×GR$=\frac{c^2x^2}{a^2}-\frac{c^2x^2}{a^2}+c^2$, cioè (aritm. 51.) MG×GR$=c^2$; ma egli è $\overline{CD}^2=\overline{AL}^2=c^2$; dunque (ass. 1.) sarà MG×GR$=\overline{CD}^2=\overline{AL}^2$; il che sempre si verifica di ogni linea retta MR, *mr*, ec. più vicina, o più lontana dal vertice A. Adunque ec. Il che ec.

Corollario i. Dunque il secondo semiasse CD è medio proporzionale tra le parti MG, GR dell'ordinata MR frapposte tra le assintoti, ed il punto G dell'iperbola. Perciocchè disciogliendo l'equazione MG×GR$=\overline{CD}^2$ abbiamo ∺ MG : CD : GR (cor. 3. prop. 2. lib. 1.).

Corollario ii. Nella medesima maniera, con cui si è dimostrato MG×GR$=\overline{CD}^2$, si dimostrerà

MH×HR$=\overline{CD}^2$; perciò sarà MH×HR=MG×GR, cioè $\overline{MG+GH}\times$HR=MG$\times\overline{GH+HR}$, ossia MG×HR+GH×HR=MG×GH+MG×HR, e togliendo il termine comune MG×HR (ass. 3.) rimarrà GH×HR=MG×GH, e dividendo per GH (ass. 5.) resterà HR=MG. Sicchè di una medesima linea MR ordinata al primo asse le parti MG, HR frapposte tra le assintoti, e l'iperbola, sono uguali fra loro.

Corollario iii. Se al primo asse prolungato si ordinerà un'altra retta *mr* parallela al secondo asse DS, e terminata dalle assintoti, per la dimostrazione antecedente sarà pure *mg*×*gr*$=\overline{CD}^2$; onde (ass. 1.) si avrà MG×GR=*mg*×*gr*, e dissolvendo sarà MG : *mg* :: *gr* : GR (cor. 1. propos. 2. lib. 1.) ma dalla natura dell'iperbola la *gr* più vicina al vertice A, è minore della GR, e però sarà anche la MG minore della *mg*.

Per la qual cosa quanto più le ordinate si scostano dal vertice dell'iperbola, le loro parti *mg*, MG, e similmente *hr*, HR interposte tra le assintoti, e la iperbola sempre minori diventano, perciò le assintoti, e l'iperbola prolungate indefinitamente, sempre più si avvicineranno fra loro; ma non mai s'incontreranno, perchè (cor. 1.) il semiasse secondo CD è sempre medio proporzionale tra le parti RG, GM dell'ordinata essendo ∺ RG : CD : GM; perciò tra l'assintoto, e l'iperbola dee sempre esservi qualche parte MG dell'ordinata, la qual parte MG colla rimanente RG contengano un rettangolo uguale al quadrato del semiasse CD; e questa è la ragione, per cui le rette CM, CR si chiamano assintoti, cioè linee non concorrenti.

Corollario iv. Oltracciò perchè il semiasse secondo CD è medio proporzionale tra le parti MG, GR di qualsivoglia ordinata all'asse prolungato, e terminata dalle assintoti; perciò se dal medesimo centro, e coi raggi PM, PG, si descriveranno due cerchi concentrici, come nella proposizione 9. del lib. 5., la zona compresa tra la periferia di essi cerchi, la cui larghezza sarà MG, sempre uguaglierà (cor. 2. prop. 9. lib. 5.) il cerchio, che avrà per raggio il secondo semiasse CD, che è medio proporzionale tra MG larghezza della zona, e la RG rimanente parte del diametro del maggior cerchio, che comprende la zona.

Corollario V. Nel corollario 6. della proposizione 29. si è dimostrato essere $\overline{CD}^2 = BF \times FA$, e dall' antecedente dimostrazione abbiamo $\overline{CD}^2 = MG \times GR = mg \times gr = MH \times HR$ ec. laonde (ass. 1.) avremo $BF \times FA = MG \times GR = mg \times gr = MH \times HR$ ec. Dunque il rettangolo contenuto dal primo asse AB prolungato sino al foco F, e dalla distanza AF dal foco al vertice è uguale al rettangolo contenuto dalle parti di una doppia ordinata frapposte tra le assintoti, ed un punto dell' iperbola.

PROPOSIZIONE XXXIV.

TEOR. TAV. XI. FIG. 83.

Se da un punto G dell' iperbola si tireranno le rette GL parallela all' assintoto CM, e GE parallela all' assintoto CR, il rettangolo $GL \times GE$ (ossia $GL \times LC$) contenuto da esse, sarà sempre uguale alla potenza dell' iperbola (cor. 5. prop. 29.) che è $\overline{AT}^2$, cioè sarà $GL \times GE = \overline{AT}^2$, ossia $GL \times LC = \overline{AT}^2$.

Pel medesimo punto G si tiri la retta RGM ordinata al primo asse prolungato, e terminata dalle assintoti CM, CR; e tirinsi ancora, come sopra, le rette AD, AS, e la tangente verticale FAZ.

Dimostrazione. I due triangoli ATF, GLR hanno le basi poste sopra la stessa retta CR, il lato AT

parallelo al lato GL, ed il lato AF parallelo al lato GR, conseguentemente sono equiangoli; onde (prop. 7. lib. 3.) si avrà AF : AT :: GR : GL. Per la stessa ragione i triangoli AQZ, GEM sono simili, avendo il lato AQ parallelo al lato GE, e AZ parallelo a GM, e le basi EM, QZ poste sopra la stessa retta CM; perciò sarà AZ : AQ :: GM : GE. Ora si moltiplichino i termini di questa proposizione pei termini corrispondenti dell' antecedente, e (prop. 13. lib. 1.) si avrà $AF \times AZ : AT \times AQ :: GR \times GM : GL \times GE$. Ma (prop. 29., e cor. 3. di essa) abbiamo $AF = AZ$, ed $AT = AQ$, e però sarà $AF \times AZ = \overline{AF}^2$, ed $AT \times AQ = \overline{AT}^2$; laonde sostituendo cose uguali a cose uguali nell' antecedente ultima proporzione si avrà $\overline{AF}^2 : \overline{AT}^2 :: GR \times GM : GL \times GE$; ma per l'antecedente proposizione abbiamo $\overline{AF}^2 = GR \times GM$, onde (cor. 1. prop. 3. lib. 1.) sarà ancora $\overline{AT}^2 = GL \times GE = GL \times LC$. La qual cosa sempre si avvera, ovunque prendasi il punto G nell' iperbola. Adunque se da un punto ec. Il che ec.

Corollario. Se per un' altro punto h dell'iperbola si tirerà hn parallela all' assintoto CR, ed hI parallela all' assintoto CM, si dimostrerà col medesimo raziocinio $hn \times hI = \overline{AQ}^2 = \overline{AT}^2$; onde (ass. 1.) sarà $GL \times GE = hn \times hI$, e così discorrendo di tutti gli altri rettangoli contenuti dalle linee parallele alle assintoti, e tirate dai punti dell' iperbola alle assintoti, i quali tutti son fra loro uguali, perchè ciascuno di essi è uguale alla potenza dell' iperbola.

Da questa proprietà ancora ne segue, che l' iperbola non concorrerà giammai colle assintoti, benchè si prolunghino indefinitamente; perchè alle due rette GE, AT sempre si ha da trovare la terza proporzionale GL frapposta tra l' assintoto, e l' iperbola, per formare il rettangolo $CE \times GL = \overline{AT}^2$.

PROPOSIZIONE XXXV.

TEOR. TAV. XI. FIG. 84.

Se per qualsivoglia punto L dell' iperbola si tirerà in qualunque modo la retta RM terminata dalle assintoti in R, ed M, e che seghi l' iperbola in L, ed H, le parti RL, MH di essa retta frapposte tra le assintoti, e l' iperbola, saranno fra loro uguali.

Da' punti L, H tirinsi le rette LG, HI parallele all' assintoto CM, e le rette LE, HS parallele all' altr' assintoto CR.

Dimostrazione. Pel corollario della proposizione antecedente abbiamo LG×LE=HS×HI, e dissolvendo (cor. 1. propos. 2. lib. 1.) sarà LG : HI :: HS : LE. Ma ne' triangoli RLG, RIH (cor. prop. 7. lib. 3.) simili fra loro, egli è LG : HI :: RL : RH, onde (ass. 1.) sarà RL : RH :: HS : LE. Di più ne' triangoli simili HSM, MLE abbiamo HS : LE :: MH : ML, dunque (ass. 1.) sarà RL : RH :: MH : ML, ed invertendo sia RH : RL :: ML : MH, e dividendo (prop. 5. lib. 1.) si avrà RH—RL : LR :: ML—MH : HM, cioè LH : LR :: LH : HM, ed essendo LH=LH (cor. 1. proposiz. 3. lib. 1.) sarà pure RL=MH. Il che ec.

PROPOSIZIONE XXXVI.

TEOR. TAV. XI. FIG. 85.

Se nell' iperbola si tireranno comunque due, o più linee rette (GL, HS) parallele fra loro, e terminate dalle assintoti (CH, CZ), i rettangoli (GA×AL, HB×BS) contenuti dalle parti (GA, HB) di esse, frapposte tra la curva, e l' assintoto, e dalle

rimanenti parti (AL, BS) di esse parallele saranno uguali fra loro.

Pei punti A, B si tirino le rette RAE, DBZ ordinate al primo asse prolungato.

Dimostrazione. I triangoli ARG, DBH contenuti da linee parallele sono fra di loro equiangoli: onde (prop. 7. lib. 3.) sarà RA : GA :: DB : HB. Similmente ne' triangoli equiangoli ALE, BSZ si avrà AE : AL :: BZ : BS; sicchè moltiplicando i termini di questa proporzione pei termini corrispondenti dell' altra (prop. 13. lib. 1.) avremo RA×AE : GA×AL :: DB×BZ : HB×BS. Ma (cor. 3. proposiz. 33.) abbiamo RA×AE=DB×BZ; dunque (cor. 1. prop. 3. lib. 1.) sarà ancora GA×AL=HB×BS. Il che ec.

PROPOSIZIONE XXXVII.

PROBLEMA TAV. XI. FIG. 86.

Data l' iperbola colle assintoti tirare una tangente di essa.

Dal punto A dato nell' iperbola QAY si tiri la retta AZ parallela all' assintoto CM, e dall' altra assintoto CR seghisi la parte ZN=ZC, e dal punto N pel punto dato A tirisi la retta NAT terminata dalle assintoti in N, e T, dico, che questa retta sarà divisa per mezzo dal punto A, ed in esso punto solamente toccherà l' iperbola.

Dimostrazione. Nel triangolo CNT la retta AZ è di costruzione parallela al lato CT; perciò (prop. 3. lib. 3.) sarà NZ : ZC :: NA : AT; e di costruzione abbiamo NZ=ZC; dunque sarà ancora NA=AT; in conseguenza la retta NT tocca l' iperbola nel solo punto A. Percciocchè se la toccasse in un altro punto r, allora (prop. 35.) sarebbe Nr=AT; ed essendosi già dimostrato NA=AT ne seguirebbe, che fosse (ass. 1.) Nr=NA, cioè la parte uguale al tutto, il che ripugna (ass. 10.). Adunque la NT tocca nel solo punto A l' iperbola, ed è divisa per mezzo nello stesso punto del contatto A. Il che ec.

Corollario. Dunque ogni tangente dell' iperbola, terminata dalle assintoti, è segata per mezzo dal punto del contatto.

DEFINIZIONE XX.

TAV. XI. FIG. 87.

Se per qualsivoglia punto A dell' iperbola si tirerà un diametro primo AD (def. 19., e prop. 31.), e la tangente NAT terminata dalle assintoti CR, CM. Poscia pel centro C si tirerà la retta indefinita BCX parallela alla tangente NT, e pel medesimo punto A si condurranno le rette AB parallela all' assintoto CM, ed AX parallela all' assintoto CR, le quali prolungate segheranno l' indeterminata BCX, come in B, ed X; ed allora sarà la retta BX *diametro secondo*, e tutti due insieme i diametri AD, BX chiamansi *diametri coniugati*.

La terza proporzionale ai due diametri AD, BX chiamasi *parametro*, o *lato retto del primo diametro* AD; e la terza proporzionale alle due BX, AD è il *parametro del secondo diametro* BX.

Le rette linee parallele alla tangente NT, e terminate dal primo diametro prolungato, e dalla iperbola diconsi *ordinate al primo diametro*, come sono PS, PE, *p*O, *p*Q, ec.

PROPOSIZIONE XXXVIII.

TEOREMA.

Dati due diametri conjugati (AD, BX), e la retta (NT) tangente dell' iperbola nel punto (A) estremo del primo diametro (AD) è terminata (in N, e T) dalle assintoti, dico, che il secondo diametro (BX) è uguale alla suddetta tangente (NT), ed è segato per mezzo (in C) dal primo diametro (AD).

Si tirino le rette AB parallela all' assintoto CM, ed AX parallela all' assintoto CR.

Dimostrazione. Perchè le rette BX, NT fra loro, e le rette AB, CT anche tra di loro sono parallele, perciò (prop. 28. lib. 2.) sarà BC=AT. Similmente perchè le rette AX, CN sono parallele, sarà CX=AN; ma (cor. propos. antec.) abbiamo AN=AT, onde (ass. 1.) sarà eziandio BC=CX; ed in conseguenza il diametro BX è segato per mezzo in C, ed è uguale alla tangente NT. Il che ec.

Corollario i. Quindi facilmente si dimostra, che le rette AB, AX sono segate per mezzo in Z, ed in G dalle assintoti CR, CM; e che le parti CN, CT delle assintoti frapposte tra 'l centro, e la tangente sono anche divise per mezzo nei medesimi punti Z, e G. Imperocchè (prop. 2. lib. 3.) abbiamo BZ : ZA :: BC : CX, e si è dimostrato BC=CX, e però sarà ancora BZ=ZA. Parimente nel triangolo NCT abbiamo NZ : ZC :: NA : AT, ed essendosi dimostrato NA=AT, sarà pure NZ=ZC. Nella stessa maniera si dimostra AG=GX, e CG=GT. Adunque le rette AB, CN, ed AX, CT vicendevolmente si segano per mezzo in Z, e G.

Corollario ii. Sicchè dati due diametri conjugati AD, BX, per trovare le assintoti, si tirino le rette AB, AX, e si dividono per mezzo in Z, e G, e dal centro C per essi punti Z, e G si conducano le rette CZR, CGM, che saranno le ricercate assintoti, come chiaramente ne segue dall' antecedente corollario.

PROPOSIZIONE XXXIX.

TEOREMA.

Il primo diametro (AD) prolungato sega per mezzo tutte le rette (SE, OQ ec.) terminate dall' iperbola, e parallele alla tangente (NT) tirata pel punto (A), in cui lo stesso diametro sega l' iperbola.

Si prolunghino esse rette SE, OQ da ambe le parti sino alle assintoti CR, CM.

Dimostrazione. Ne' triangoli simili CAN, CPR (cor. prop. 7. lib. 3.) abbiamo PR : AN :: CP : CA. Similmente ne' triangoli equiangoli CAT, CPM abbiamo PM : AT :: CP : CA; laonde (ass. 1.) sarà PR : AN :: PM : AT, ma (cor. prop. 37.) è AN=AT; dunque (cor. 1. proposiz. 3. lib. 1.) sarà ancora PR=PM; ma (proposiz. 35.) abbiamo RS=ME; e però (ass. 3.) sarà PR−RS=PM−ME, cioè PS=PE. Col medesimo raziocinio si dimostra PO=PQ, e così di tutte le altre parallele alla tangente verticale del primo diametro AD, cioè parallele al secondo diametro BX. Per la qual cosa il primo diametro prolungato divide per mezzo tutte le sottese dell' iperbola, che sono parallele alla tangente verticale dello stesso diametro, ed esse sottese chiamansi *doppie ordinate dello stesso diametro*. Il che ec.

Corollario. Da questa dimostrazione ne segue, che una linea retta (PpA) tirata pei punti di mezzo (P, p ec.) delle linee parallele (SE, OQ ec.) tirate entro l' iperbola, se verrà prolungata, passerà pel centro (C) dell' iperbola, e sarà un primo diametro (AD), se si prolungherà sino all' opposta iperbola.

PROPOSIZIONE XL.

TEOREMA.

Il quadrato di qualunque retta (PE, o PS ec.) ordinata al primo diametro (DA) prolungato (in P) sta al rettangolo (DP×PA) contenuto dal diametro prolungato (DP), e dalla corrispondente ascissa (PA) come il quadrato del diametro conjugato (BX) al quadrato del primo diametro (DA); ossia (cor. 1. prop. 16. lib. 1.) come il quadrato del secondo semidiametro (BC) al quadrato del primo semidiametro (CA); cioè si avrà

$\overline{PE}^2$, o $\overline{PS}^2 : DP\times PA :: \overline{BX}^2 : \overline{AD}^2 :: \overline{BC}^2 : \overline{CA}^2$.

Si tirino le rette AB, AX (def. 20.), le quali (cor. 1. prop. 38.) saranno segate per mezzo in Z, e G dalle assintoti. Inoltre tirinsi le rette EH, EV parallele alle assintoti CM, CR.

Facciasi $CA=CD=a$, e $CB=CX=AN=AT=c$, saranno $AD=2a$, $\overline{AD}^2=4a^2$, e $BX=NT=2c$, $\overline{BX}^2=\overline{NT}^2=4c^2$. Inoltre mettasi $AG=CZ=b$, $AZ=CG=m$, $PS=PE=y$, e $CP=x$, e saranno $DP=CP+CD=x+a$, e $PA=CP-CA=x-a$; onde si avrà $DP\times PA=\overline{x+a}\times\overline{x-a}=x^2-a^2$; ora si dee dimostrare, che sia $y^2 : x^2-a2 :: 4c2 : 4a^2 :: c^2 : a^2$.

Dimostrazione. Ne' triangoli CAT, CPM (cor. prop. 7. lib. 3.) simili abbiamo CA : AT :: CP : PM, cioè sostituendo gli uguali valori, sarà

$a : c :: x : PM = \frac{cx}{a}$ (propos. 10. lib. 1.), abbiamo dunque trovata la retta $PM=PR=\frac{cx}{a}$; perciò saranno $ME=PM-PE=\frac{cx}{a}-y=\frac{cx-ay}{a}$ (aritm. 119.) ed $RE=PR+PE=\frac{cx}{a}+y=\frac{cx+ay}{a}$. Medesimamente i triangoli AGT, MEV sono equiangoli, perchè posti sulla medesima retta GM, ed hanno i lati paralleli AG, EV, ed AT, ME; onde (prop. 7. lib. 3.) avremo AT : AG :: ME : EV, cioè

$c : b :: \frac{cx-ay}{a} : EV = \frac{bcx-aby}{ac}$ (propos. 10. lib. 1., e (aritm. 134., 137.). Parimente i triangoli NAZ, RHE a cagione delle parallele AZ, EH, ed AN, RE, e le basi RH, NZ sulla medesima retta CR, sono equiangoli; perciò sarà AN : AZ :: RE : EH, cioè

$c : m :: \frac{cx+ay}{a} : EH = \frac{cmx+amy}{ac}$; onde abbiamo

$EH = CV = \frac{cmx+amy}{ac}$. Ma (cor. prop. 34.) abbiamo

$\overline{EV \times EH} = \overline{AG \times AZ}$, cioè

$\overline{\frac{bcx-aby}{ac}} \times \overline{\frac{cmx+amy}{ac}} = bm$, cioè (aritmet. 153., 51.)

$\frac{bc^2mx^2-a^2bmy^2}{a^2c^2} = bm$, e moltiplicando l' equazione per a^2c^2 si avrà $bc^2mx^2-a^2bmy^2=a^2bc^2$ (ass. 4., ed aritm. 118.) e dividendo quest' equazione per bm resterà (ass. 5.) $c^2x^2-a^2y^2=a^2c^2$, e per antitesi (aritm. 106.) trasportando il $-a^2y^2$ nella seconda parte dell' equazione, e a^2c^2 nella prima si avrà (L) $c^2x^2-a^2c^2=a^2y^2$, vale a dire

$\overline{x^2-a^2} \times c^2 = a^2y^2$, e dissolvendo (cor. 1. propos. 2. lib. 1.) si avrà la proporzione

$y^2 : x^2-a^2 :: c^2 : a^2$, ovvero (prop. 11. lib. 1.)

$y^2 : x^2-a^2 :: 4c^2 : 4a^2$, cioè

$\overline{PE}^2$, o $\overline{PS}^2 : DP \times PA :: \overline{BC}^2 : \overline{CA}^2 :: \overline{BX}^2 : \overline{AD}^2$.

Dunque il quadrato ec. Il che ec.

Corollario I. Se al medesimo primo diametro AD prolungato si tirerà qualunque altra ordinata pO, o pQ ec., col medesimo raziocinio si dimostrerà essere parimente

$pQ : Dp \times pA :: \overline{BC}^2 : \overline{CA}^2 :: \overline{BX}^2 : \overline{AD}^2$; laonde sarà

(ass. 1.) $\overline{PS}^2 : DP \times PA :: \overline{pQ}^2 : Dp \times pA$, ed alternando si avrà $\overline{PS}^2 : \overline{pQ}^2 :: DP \times PA : Dp \times pA$.

Sicchè nell' iperbola i quadrati delle ordinate al primo diametro prolungato sono fra loro come i rettangoli contenuti dal diametro prolungato, e dalle corrispondenti ascisse.

Corollario II. Da questo si vede, che i diametri conjugati hanno le medesime proprietà, che gli assi conjugati, che sono i minimi di tutti i diametri conjugati. Se per esempio i diametri conjugati saranno uguali fra loro, cioè AD=BX, cioè $2a=2c$, e però sarà $a=c$, ed $a^2=c^2$; laonde dividendo l' antecedente equazione L, che è

$c^2x^2-a^2c^2=a^2y^2$ per l' equazione $c^2=a^2$ resterà (ass. 5.) $x^2-a^2=y^2$, vale a dire $DP \times PA = \overline{PS}^2$ equazione, che esprime la natura dell' iperbola equilatera, nella quale il rettangolo contenuto dal primo diametro prolungato, e dalla corrispondente ascissa, è uguale al quadrato della corrispondente ordinata allo stesso diametro.

PROPOSIZIONE XLI.

PROBLEMA TAV. XII. FIG. 88.

Data un' iperbola (GAR) trovarne il centro, gli assi, i fochi, e le assintoti.

Nella data iperbola si tirino due, o più sottese fra loro parallele EL, GH, e si dividano per mezzo in I, K; e per essi punti tirisi la retta KIC, indefinitamente prolungata fuori dell' iperbola, che (cor. prop. 40.) passerà pel centro dell' iperbola. Poscia si conducano altre due corde parallele MO, QR, le quali seghinsi per mezzo in T, ed V, e per essi punti si tiri un'altra retta indeterminata VTC, la quale passerà eziandìo pel centro dell' iperbola; che però il punto C, in cui si segano le due rette CK, CV, sarà il centro dell' iperbola.

Di poi fatto centro C, e con un conveniente intervallo si descriva l' arco EZO; che seghi l' iperbola in E, ed O, ed esso arco EZO dividasi per mezzo (prop. 14. lib. 4.) in Z, e dal centro C pel punto Z si tiri la retta CZ, che segherà l' iperbola, come in A, che sarà il vertice dell' iperbola, e CA sarà il primo semiasse; poichè tirando la corda EO, essa sarà perpendicolare al semiasse prolungato, che divide per mezzo l' arco EZO, e la corda EO (coroll. 2. prop. 2. lib. 4.). Indi si tagli CB=CA, sarà AB il primo asse, al quale dal centro C si tiri la perpendicolare indefinita DS, dalla quale si seghi la parte Cr uguale al primo semiasse CA, e giungasi Ar. Quindi dal semiasse CA prolungato si seghi la parte $CP=Ar$, e tirisi l' ordinata PN, la quale sarà uguale al secondo semiasse.

Dimostrazione. Imperciocchè nel triangolo rettangolo isoscele ACr (cor. 2. prop. 18. lib. 3.) abbiamo $\overline{Ar}^2=2\overline{AC}^2$; ma, per costruzione egli è $CP=Ar$, onde sarà $\overline{CP}^2=\overline{Ar}^2$; perciò (ass. 1.) avremo $\overline{CP}^2=2\overline{AC}^2$. Ma (cor. 5. propos. 30.) quando il quadrato del primo semiasse prolungato CP è uguale al doppio quadrato del medesimo semiasse, allora l' ordinata PN è uguale al secondo semiasse; dunque l' ordinata PN è metà del secondo asse; sicchè dalla indefinita DS si seghino le parti CD, CS uguali alla PN, e sarà DS il secondo asse. Di poi si tirino le rette AD, AS, e dal primo asse AB prolungato da ambedue le parti si taglino le porzioni CF, Cf amendue uguali alla AD, ossia AS; e saranno F, ed f i

fochi (def. 18.). Finalmente seghinsi per mezzo le rette AD, AS, ne' punti b, d, e dal centro C per essi punti b, d si tirino le rette Cbm, Cdn, che (def. 18.) saranno le assintoti. Il che ec.

PROPOSIZIONE XLII.

PROBL. TAV. XII. FIG. 89.

Trovare l' area dell' iperbola.

L' area dell' iperbola non potendosi ritrovare esattamente, e geometricamente, si trova per mezzo di regole di approssimazione state inventate da' Geometri, delle quali una è la seguente.

Sia l' iperbola XAR, la cui base sia XR il centro C, e le assintoti CY, CV; il primo semiasse sia CA, ed il secondo CS; si prolunghi la base XR sino alle assintoti in Y, ed V; e si tiri la retta AS, che seghi in T l' assintoto CV, sarà $\overline{AT}^2$ la potenza dell' iperbola (cor. 5. prop. 29.). Poscia pel punto R si tiri la RZ parallela alla TA: quindi dell' assintoto CV, la parte TZ, dividasi in parti uguali TB, BE, EF, FH ec., e piccole il più che sia possibile; indi pei punti B, E, F, H, M ec. si tirino le rette BL, EI, FD, HG, MK ec. parallele alla retta AT, ossia all' altra assintoto CY. Di poi si misuri AT, e si faccia il suo quadrato; e si misurino CB, CE, CF ec.; indi perchè (propos. 34.) abbiamo $CB\times BL=\overline{AT}^2$ $CE\times EI=\overline{AT}^2$, $CF\times FD=\overline{AT}^2$, $CH\times HG=\overline{AT}^2$, ec. si divida $\overline{AT}^2$ per CB, ed il quoziente sarà la lunghezza della linea BL; si divida $\overline{AT}^2$ per CE, il quoziente sarà la linea EI; similmente si divida $\overline{AT}^2$ per CF, il quoziente sarà la lunghezza FD; e così proseguendo, se si divide $\overline{AT}^2$ per CZ; il quoziente sarà la linea ZR. Trovate tutte le rette frapposte tra l' assintoto, e l' iperbola, si trovino le aree di tutti i trapezii ATBL, BLIE, EIDF, FDGH ec., ne' quali le parti AL, LI, ID, DG ec. della curva si possono considerare quasi come linee rette, poichè deono essere piccolissime, per la costruzione, essendosi divisa la BZ in parti minime, ed uguali. L' area del trapezio ATBL (cor. 3. prop. 31. lib. 2.) si trova moltiplicando la metà di AT+BL per la linea *mn* perpendicolare frapposta tra i due lati paralleli AT, BL. Nella stessa guisa si trovano le aree degli altri trapezii BLIE, EIDF, FDGH ec.

Inoltre si trovino (cor. 2. propos. 31. lib. 2.) le aree dei due triangoli VRZ, CAT, le quali si sommino insieme con le aree di tutti i trapezii; ed essa somma conterrà prossimamente la superficie del quadrilatero mistilineo CAGRV.

Finalmente trovisi la superficie del triangolo rettilineo CPV, dalla quale si sottragga l' area del quadrilatero mistilineo CAGRV, ed il residuo sarà la superficie della semiperbola AGRP, il cui doppio sarà l' area di tutta l' iperbola XAR. Il che ec.

Annotazione. Questa maniera di trovare per approssimazione la superficie dell' iperbola è assai facile, perchè non è nemmeno necessario di tirare tutte le parallele BL, EI, FD, HG ec. ritrovandosi la loro lunghezza col dividere il quadrato della AT per le parti CB, CE, CF, CH ec. dell' assintoto; basta tirare la BL, e la perpendicolare *mn*, che sarà la distanza comune tra le vicine parallele, e moltiplicata per la semisomma di esse darà l' area del trapezio da esse terminato da due parti.

DEFINIZIONE XXI.

TAV. XII. FIG. 90.

La *conoide iperbolica*, o *iperboloide* è una figura solida (AL*n*I*b*) generata dal rivolgimento della semiperbola (AOIP) intorno al prolungamento (AP) del primo asse (AQ).

La retta (AP) intorno a cui rivolgesi la semiperbola, chiamasi *asse della conoide*, ed il punto (A) dicesi *vertice*, o *cima della conoide iperbolica*.

Il cerchio (L*n*I*b* descritto dalla ordinata, o semibase (PI) nel rivolgimento della semiperbola nomasi *base della iperboloide*.

PROPOSIZIONE XLIII.

PROBLEMA.

Trovare la solidità della conoide iperbolica.

Sia data l' iperbola LAI, il cui centro sia C, le assintoti CG, CR, e la base LI prolungata sino alle assintoti in G, ed R. Sia AQ il primo asse, e l' ascissa AP sia l' altezza dell' iperbola. La tangente verticale terminata dalle assintoti sia DE, che (prop. 29.) è uguale al secondo asse. Tirisi la retta EE parallela all' ascissa AP, e si avrà il rettangolo APFE contenuto dal secondo semiasse AE, e dall' ascissa AP. Concepiscasi ora, che il trapezio APRE, colla semiperbola AOIP, e col rettangolo APFE talmente si rivolgano intorno alla comune altezza AP fissa, ed immobile, finchè ritornino allo stesso luogo, da cui incominciarono a muoversi, lasciando in ogni positura il loro vestigio; in esso rivolgimento il trapezio APRE descriverà il cono tronco *f*D*i*ERXG*b*, la semiperbola

AOIP descriverà la conoide iperbolica AL*n*I*r*, ed il rettangolo AF descriverà il cilindro *i*E*f*DH*a*F*m*.

Il cono tronco s' intende composto da altrettanti circoli decrescenti dal punto P sino al punto A, quanti sono gli elementi, ossia punti nell' altezza AP, i cui raggi sono le rette AE, PR, ZM ec., cioè gli elementi del trapezio APRE. L' ugualmente alta iperboloide AL*n*I*r* è parimente composta da ugual numero di cerchi, che hanno i raggi PI, ZO ec. cioè (annotaz. def. 4. lib. 2.) gli elementi della semiperbola AOIP. Medesimamente il cilindro è composto da altrettanti cerchi uguali, che hanno i raggi AE, PF, ZY ec., cioè gli elementi del rettangolo APFE.

Oltracciò nella suddetta rivoluzione del trapezio APRE, e della semiperbola AOIP, il quadrilatero mistilineo AOIRE descrive lo spazio, o figura solida cava A*f*E*i*DGXR*b*L*n*I*r*, terminata dalla zona GXR*b*L*n*I*r*, dalla superficie convessa della conoide iperbolica, dalla superficie piana, o cerchio D*i*E*f*, e dalla superficie convessa del cono tronco, e questa figura solida è composta da altrettante circolari zone uguali (cor. 4. propos. 33.) fra loro, quanti sono gli elementi, o punti costituenti l' altezza AP, delle quali zone le larghezze sono le rette IR, OM ec., cioè gli elementi dello stesso quadrilatero AOIRE; e questa figura solida cava (chiamisi *iperboloide esterna*) è l' eccesso, con cui il cono tronco supera la conoide iperbolica, e si dimostra uguale al sopra descritto cilindro HE; onde dal cono tronco sottraendo il suddetto cilindro, rimarrà la solidità della conoide iperbolica.

Dimostrazione. La zona, che ha la larghezza IR contenuta dalle due periferie I*r*L*n*, GXR*b*, i cui raggi sono PI, PR (cor. 4. prop. 33.) è uguale al cerchio descritto dal raggio AE, ossia PF, cioè uguaglia il cerchio H*a*F*m*. Similmente la zona, che ha per larghezza la retta OM, descritta dai raggi

ZO, ZM è uguale al medesimo cerchio descritto dal raggio AE, o dall' ugual raggio ZY, e così succede di tutte le zone. Sicchè tutte le zone, che formano l' iperboloide esterna, sono uguali a tutti gli altrettanti cerchi, che costituiscono il cilindro; cioè l' iperboloide esterna A*f*E*i*DGXR*b*L*n*I*r* sarà uguale al cilindro HE. Ma il cono tronco DGXR*bf*E*i* è composto dalla conoide iperbolica AL*n*I*r*, e dalla iperboloide esterna dimostrata uguale al cilindro HE. Per la qual cosa dalla solidità del cono tronco levando la solidità del cilindro stato dimostrato uguale alla iperboloide esterna (che si trova disegnata nella Tav. 12. Fig. 92.) il residuo sarà la solidità della conoide iperbolica. Il che ec.

Corollario I. Per la qual cosa se (cor. 2. prop. 23. lib. 6.) si troverà la solidità del cono tronco *i*EFDGXR*b*; indi (cor. prop. 10. lib. 6.) si troverà la solidità del cilindro HE, e questa si sottrarrà dalla solidità del cono tronco, il residuo sarà la solidità della iperboloide AL*n*I*r*.

Corollario II. Dal cono tronco togliendo il cilindro DF rimane il solido traforato (che viene rappresentato nella Tav. 12. Fig. 91.) descritto dal triangolo EFR nella suddetta rivoluzione del trapezio APRE, e del rettangolo AF intorno al lato AP; adunque essa figura solida, che cinge il cilindro, è uguale alla conoide iperbolica, ed è terminata dalla superficie convessa del cono tronco, dalla superficie concava, che è la stessa superficie convessa del cilindro descritta dal lato EF nella suddetta rivoluzione del rettangolo AF, e dalla zona compresa tra la periferia H*a*F*m* della base del cilindro, e la periferia GXR*b* della base del cono tronco.

INDICE

DELLE DEFINIZIONI

DEL LIBRO VII.

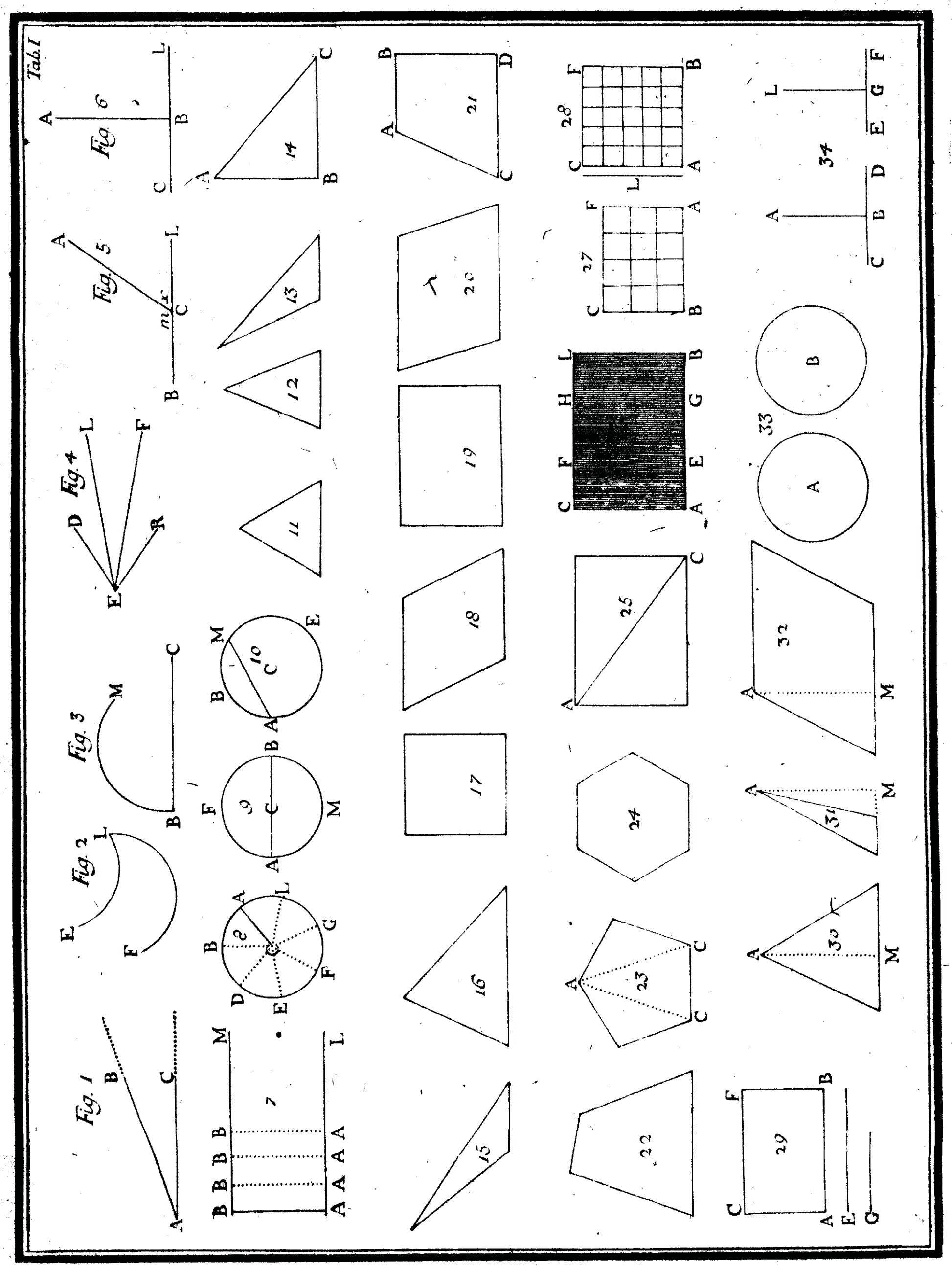
Per maggior facilità di chi studia, non essendo tutte insieme raccolte, come quelle de' libri precedenti.

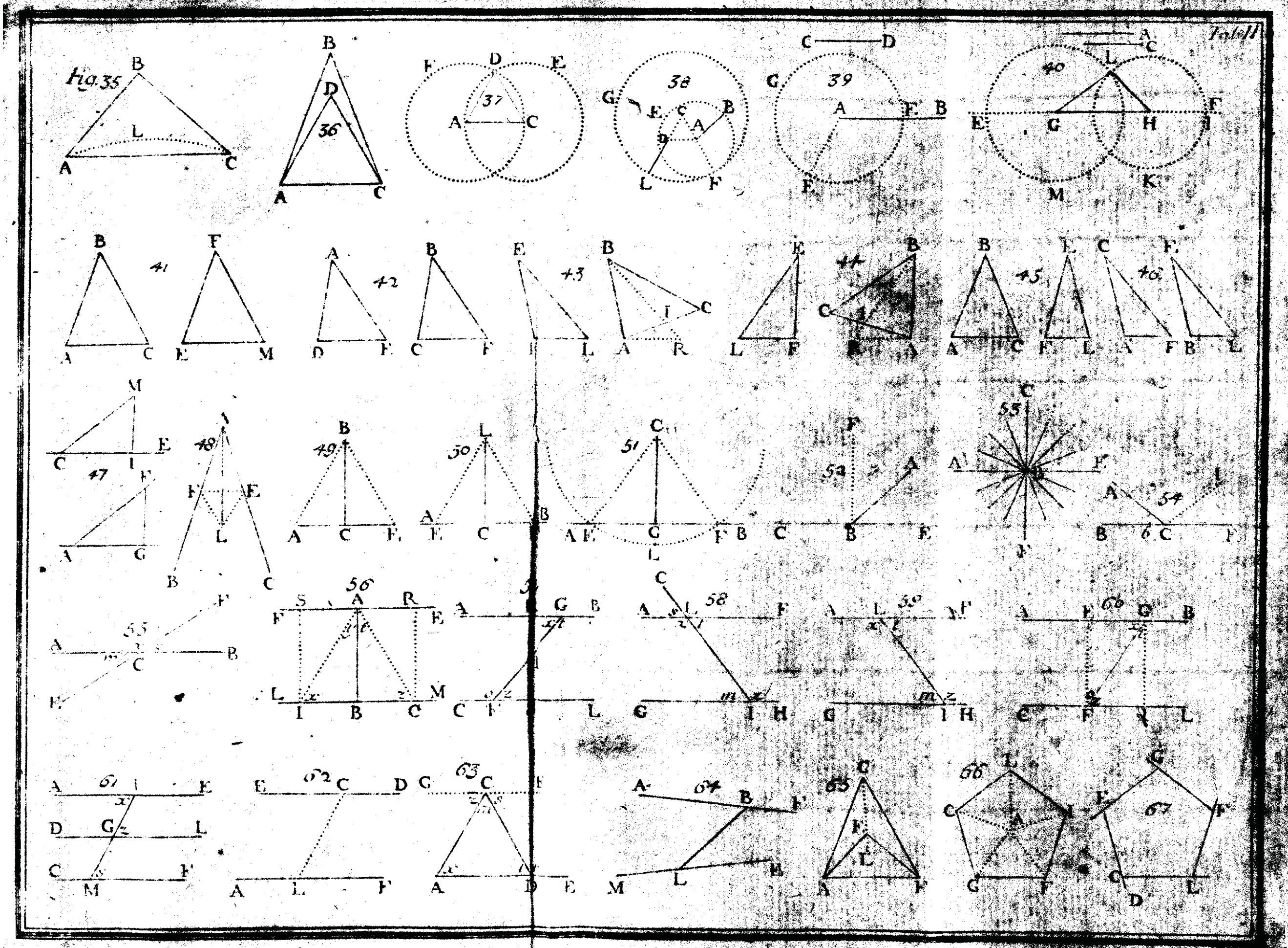
INDICE

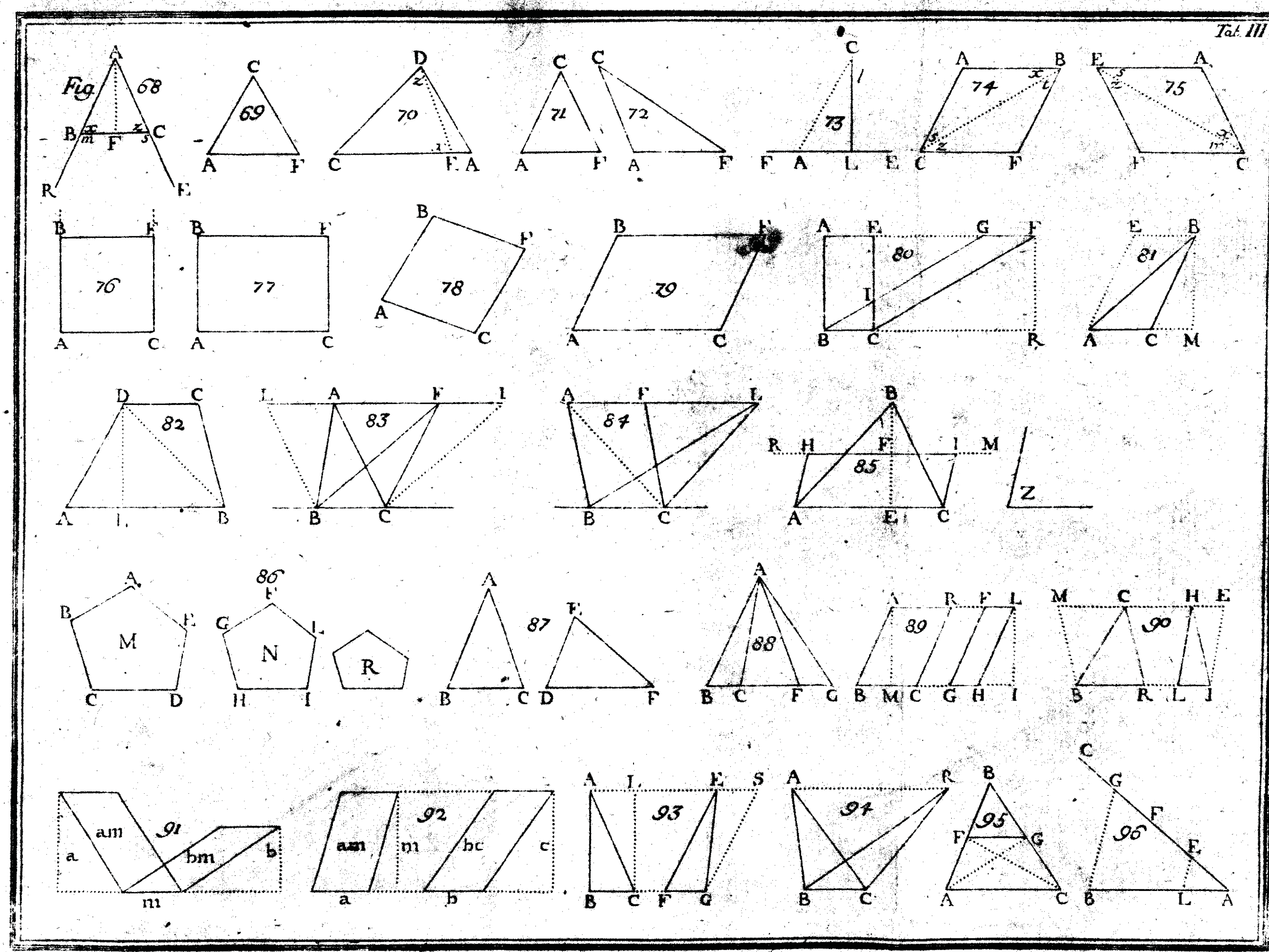
DELLE OPERAZIONI PRATICHE

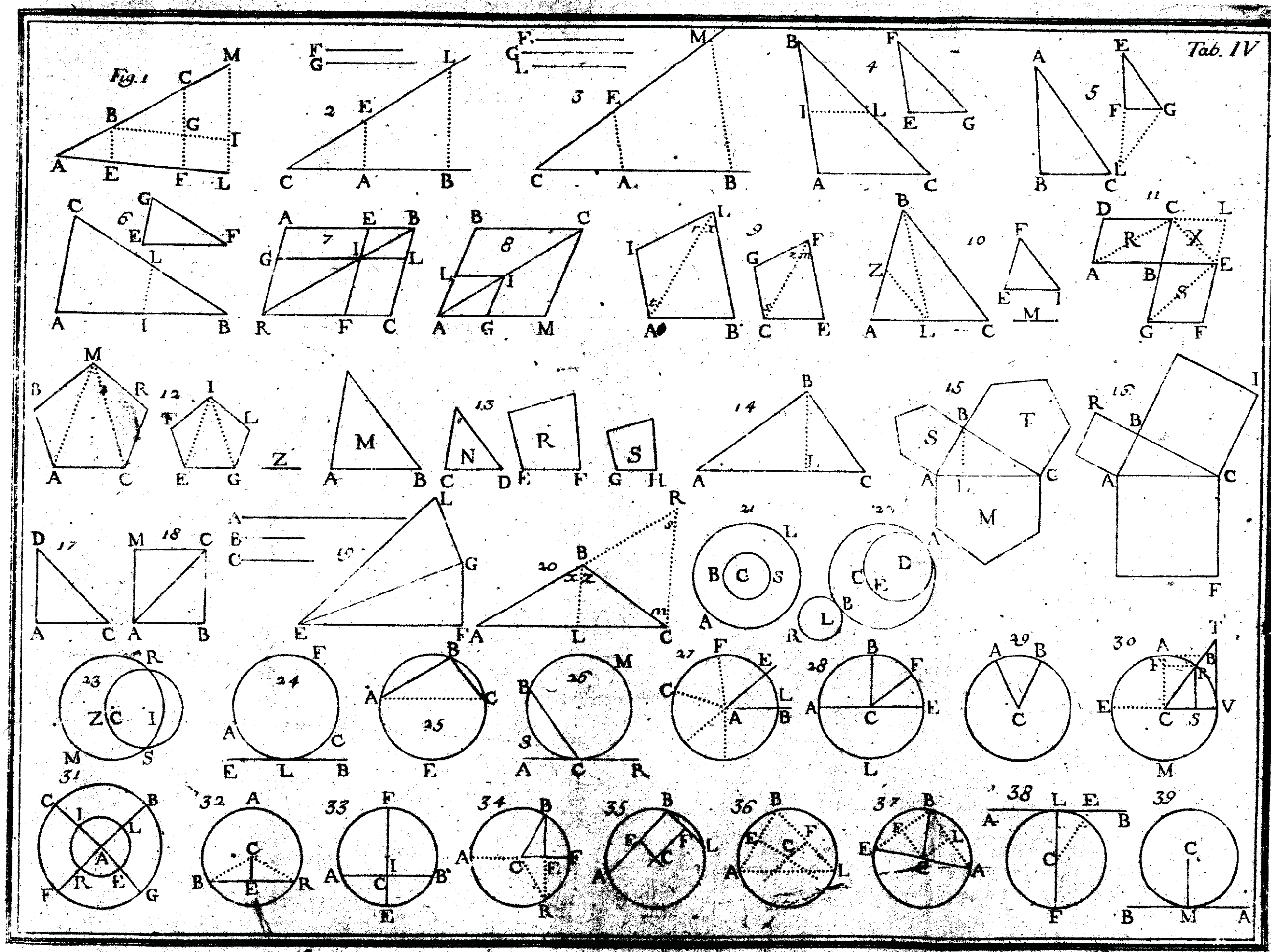
Contenute in questo secondo volume, avvertendo però che si sono ommesse quelle, che sono contenute in proposizioni distinte, come alzare, *o* abbassare la perpendicolare; dividere un angolo, *ovvero* una retta in due parti uguali *ec. e simili.*

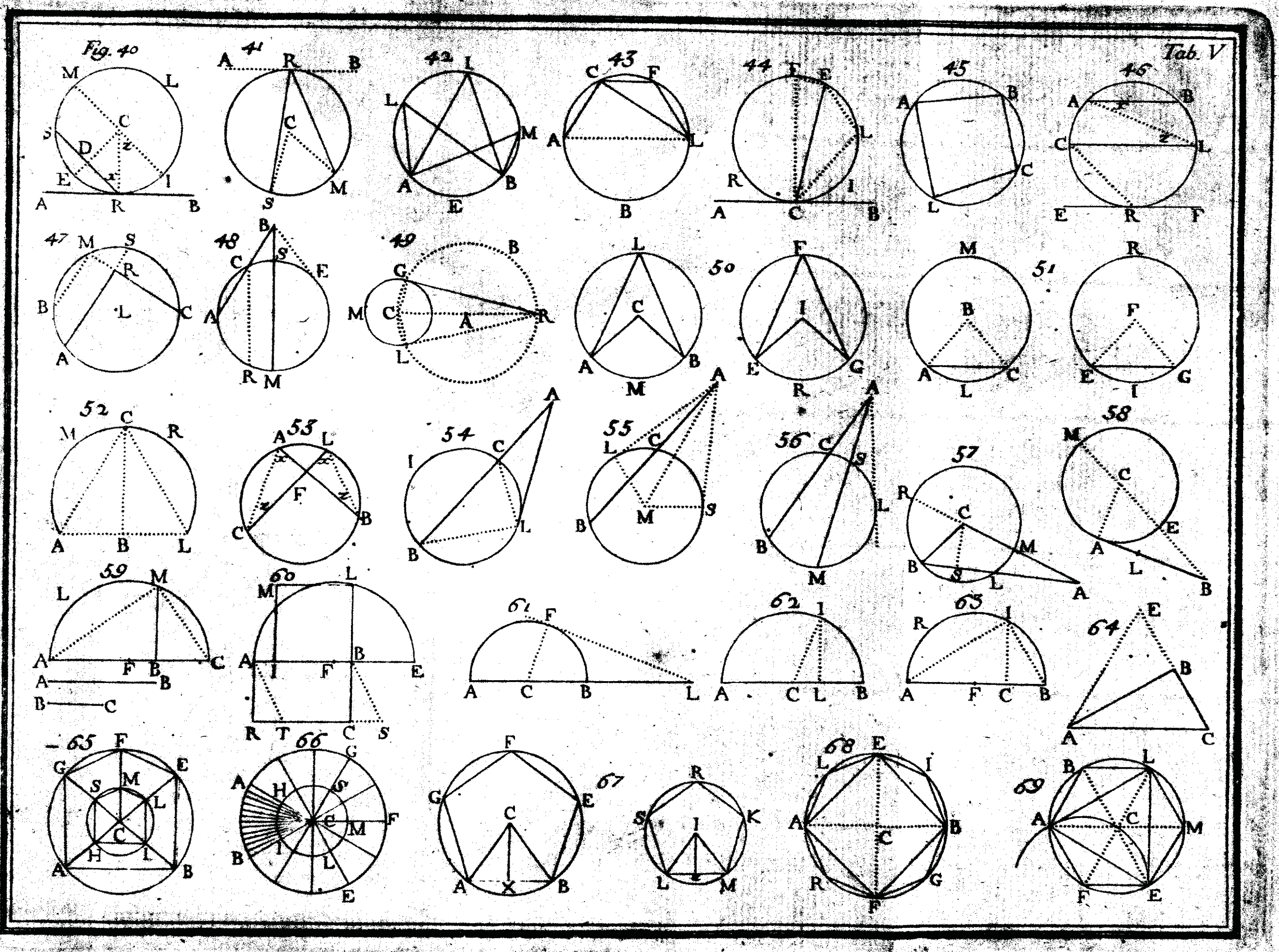
CON PERMISSIONE.

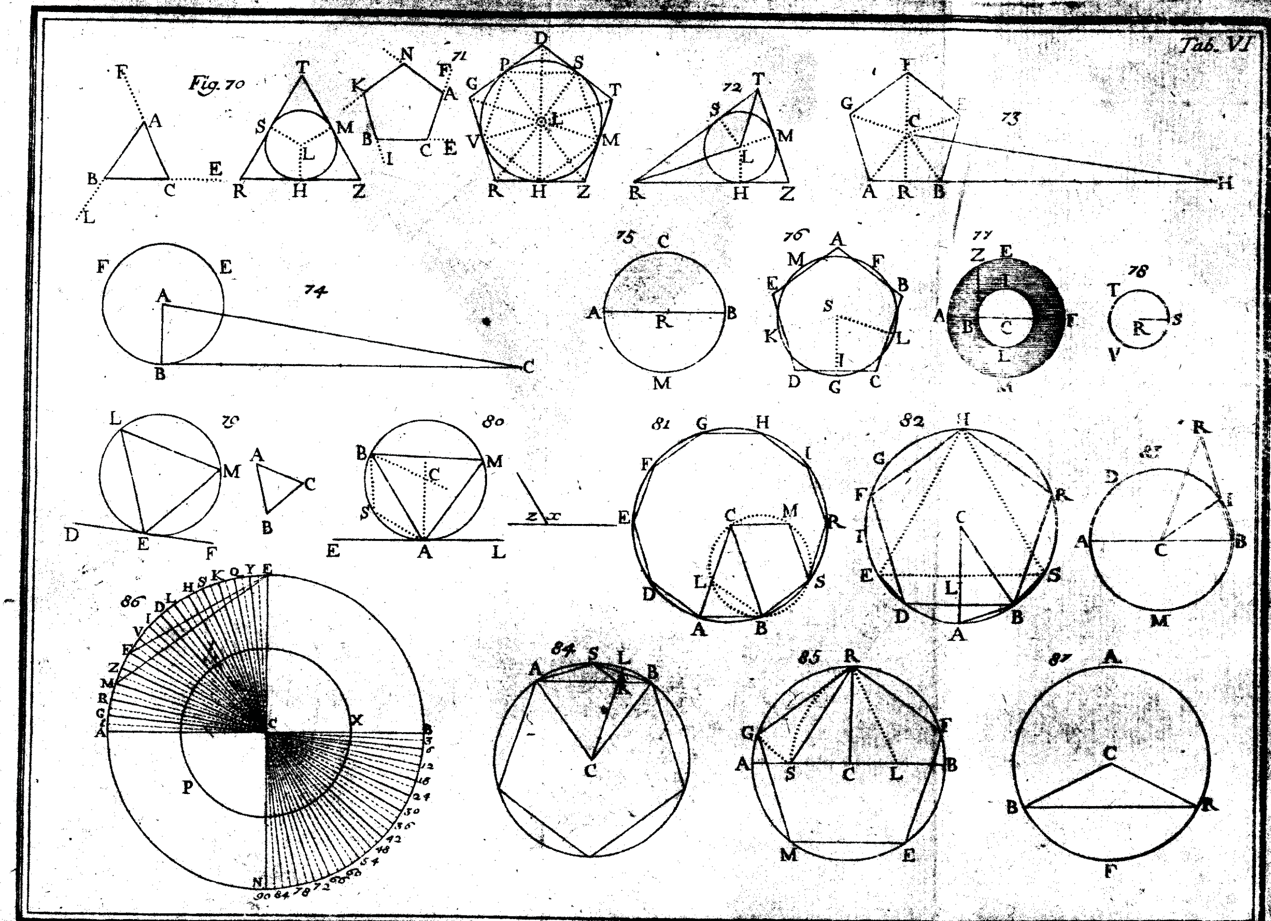


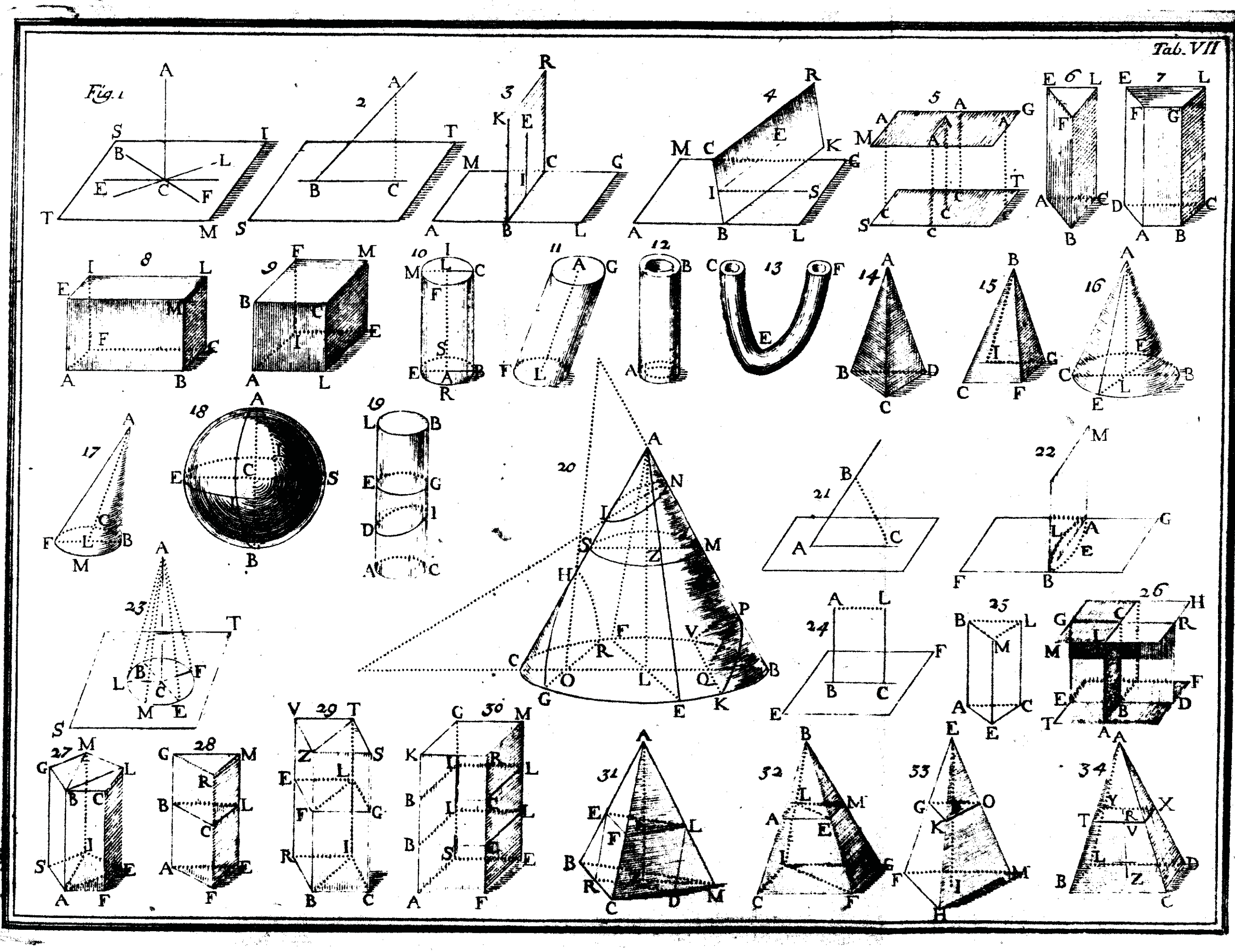

Tab. II

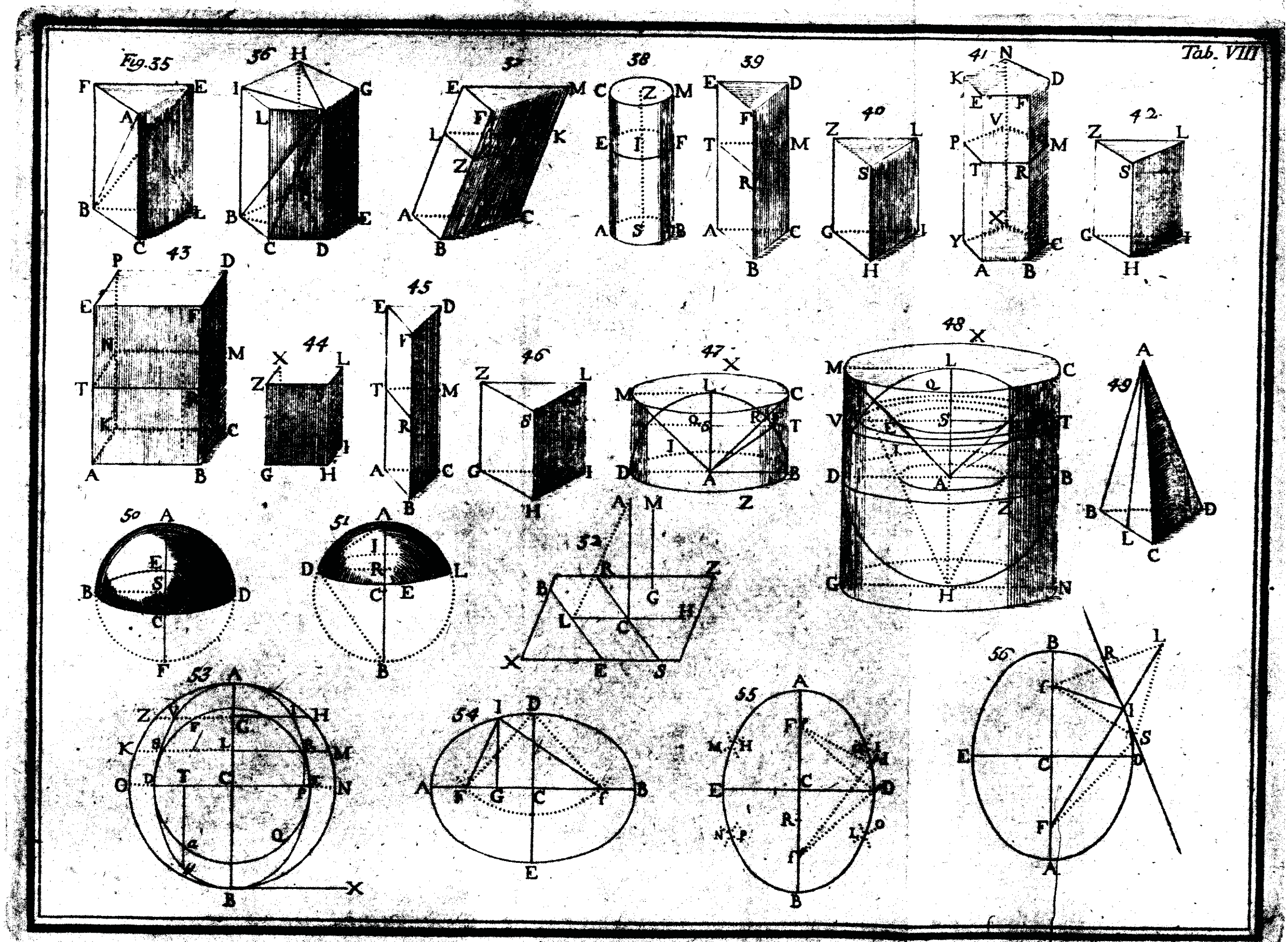

Tab. III

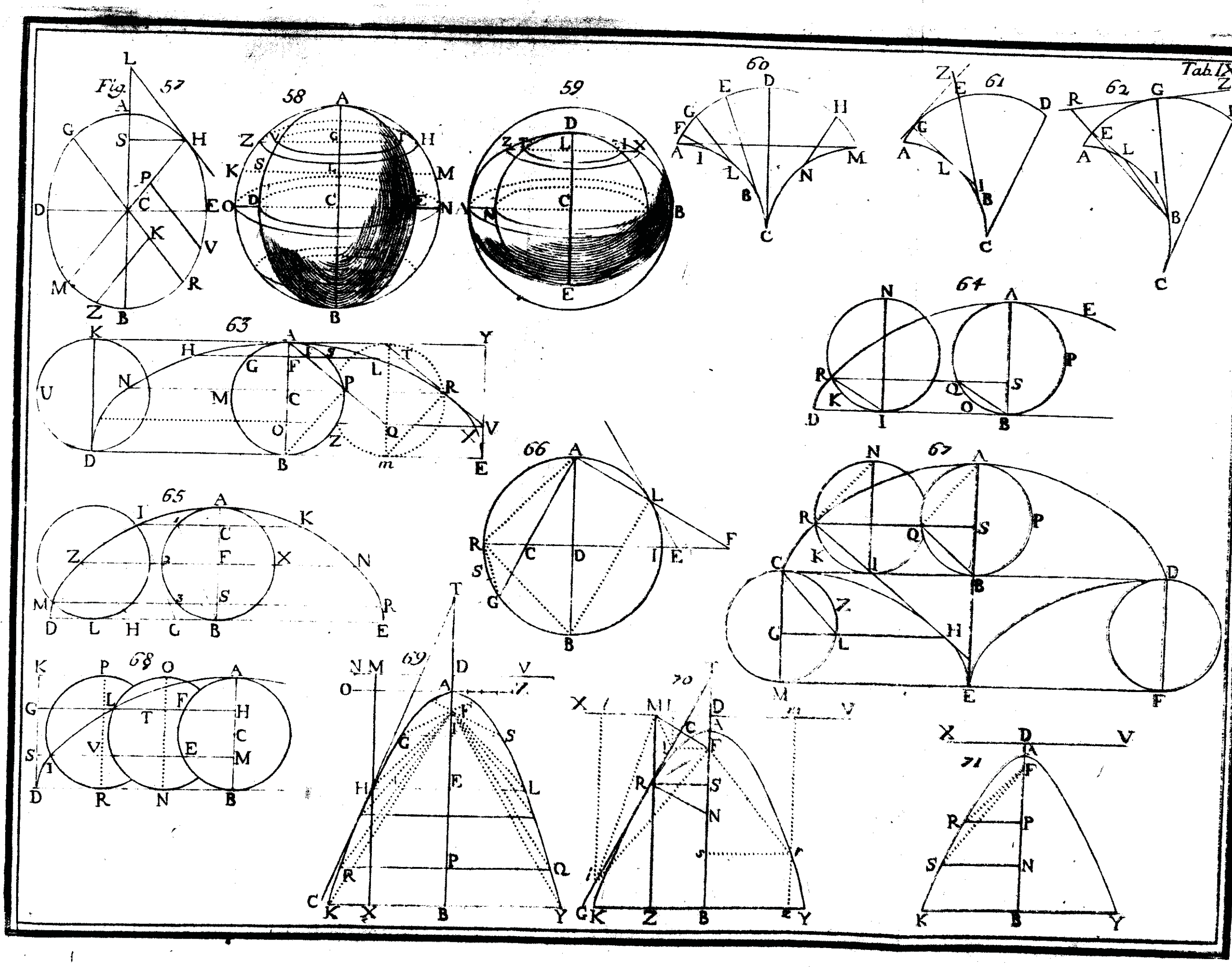

Tab. IV

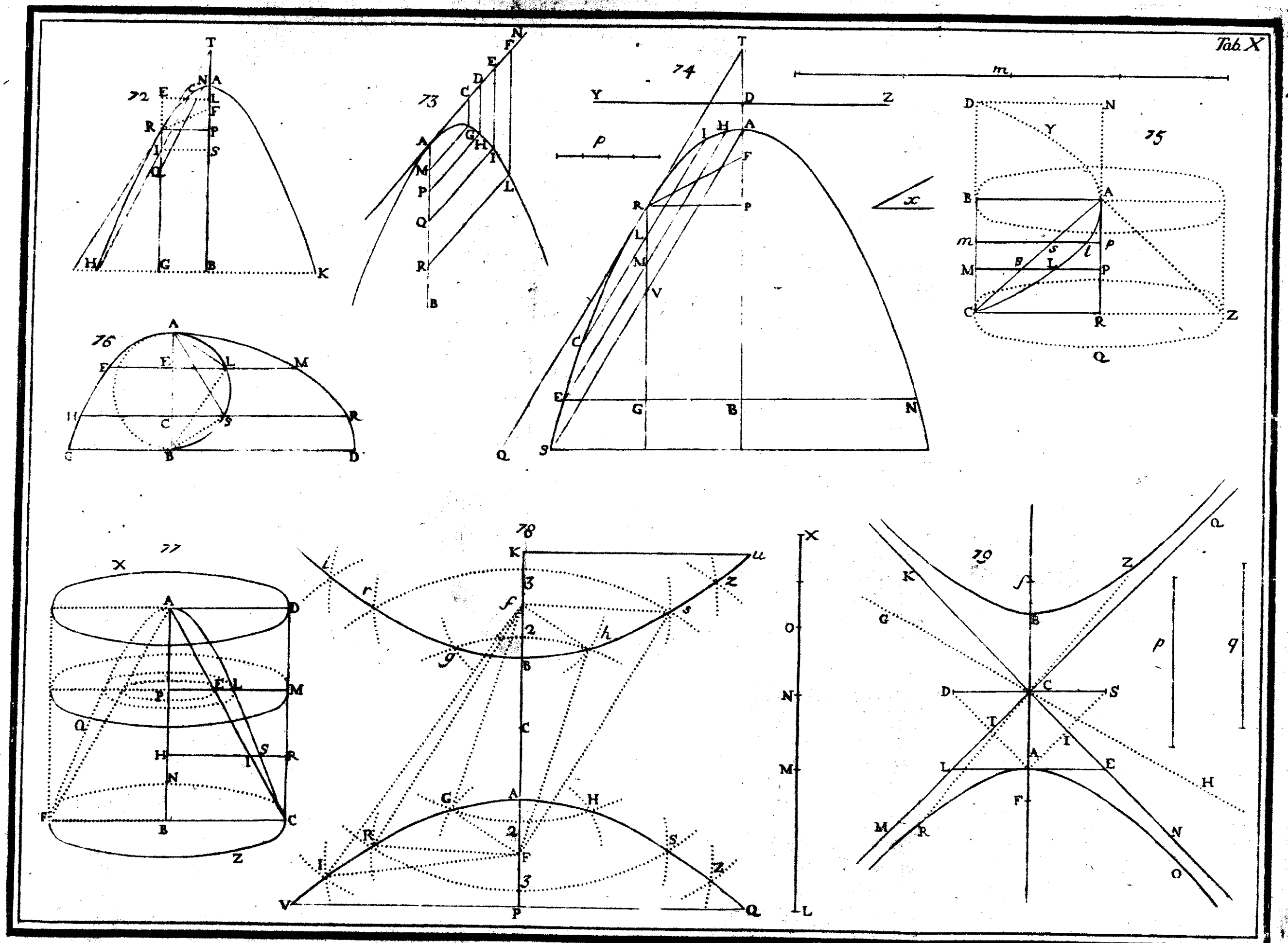

Tab. V

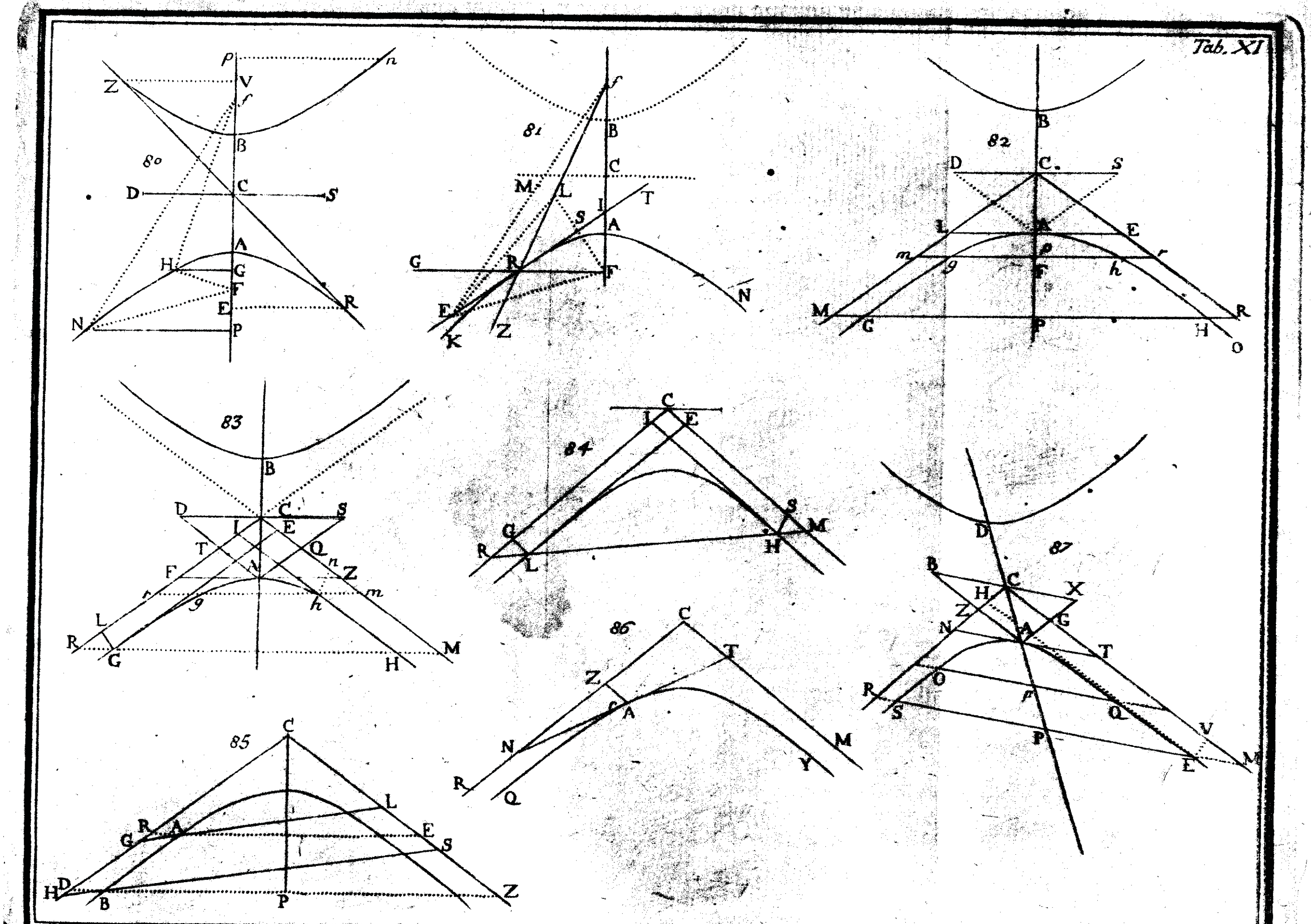

Tab. VI


Tab. VII


Tab. VIII
Fig. 35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56

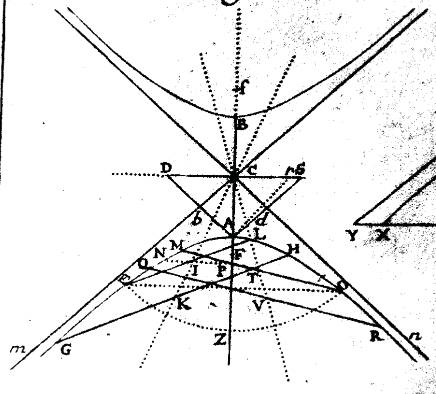

Tab. IX
Fig. 57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71


Tab. X

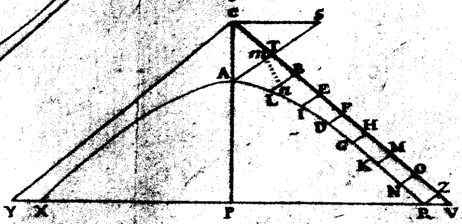

Tab. XI

Tab. XII

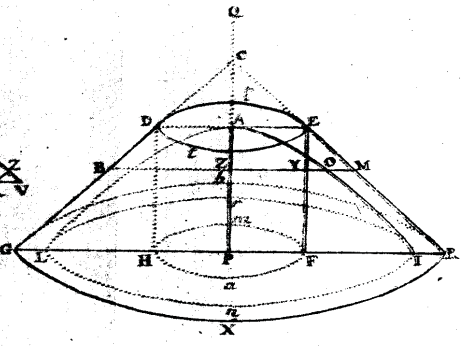
Fig. 88



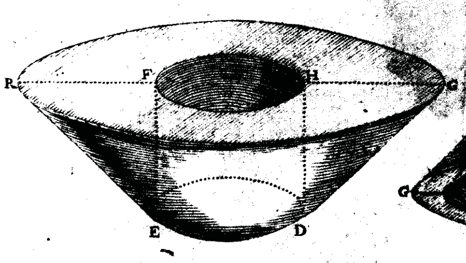
89



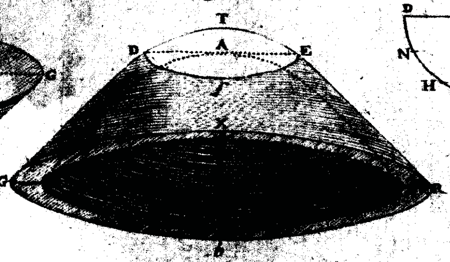
90



91



92



93