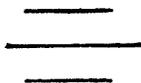


mat 97

ELEMENTI
DELL'
ARITMETICA UNIVERSALE
E DELLA
GEOMETRIA PIANA E SOLIDA
DI FILIPPO ANTONIO
REVELLI

DOTTORE DEL COLLEGIO DELLE ARTI LIBERALI GIA'
PROFESSORE DI GEOMETRIA PEL CORSO D'ANNI 26 IN
QUESTA REGIA UNIVERSITA', ORA MASTRO AUDITORE
NELL' ECCELLENTISSIMA REGIA CAMERA DE' CONTI

PARTE I.



TORINO

PRESSO IGNAZIO G. GENOVA
La vicinanza della Chiesa di S. Tommaso
M. DCC. XCIX.



GIUSEPPE DENASIO

Questi Elementi di Aritmetica, e di Geometria, che colle stampe presento al Pubblico in lingua volgare, sono quelli medesimi, che con mirabile precisione ed ordine furono in lingua latina composti, e dettati nella R. Università di questa nostra Metropoli dal Regio Professore di tale Facoltà il sig. Filippo Antonio Revelli dall'anno 1750. sino al 1776., in cui dalla Reale generosa munificenza del felice Regnante nostro Sovrano fu promosso alla ragguardevole carica di Mastro Auditore nella R. Camera de' Conti, in premio delle sue lunghe oneste fatiche, e della sollecita

4
attenzione, con cui per tutto quello spazio di tempo con universale applauso, e gradimento s'impiegò a profitto della studiosa gioventù.

La singolare modestia, ed umiltà senza pari, che adornano il mille volte da bene, e savio Autore, non soffre ch'io m'estenda nel far le lodi della persona sua, nè sono da tanto che vaglia a commendarne gli scritti, essendo questi per l'eccellenza, e merito loro più che bastanti a procacciarli la dovuta riputazione e lode; e siami perciò solamente permesso il dire quanto ho sentito da persone intendentissime, e nelle matematiche versatissime, che non ha Geometria uguale, non che migliore di questa, e su cui con maggior facilità, e da per se stessa, e senza noja possa formarsi la gioventù in tale studio, studio che luminosa face presenta, e sicura guida ad ogni sorta di dottrine.

Ma così van le vicende del mondo, e noi non sappiamo il perchè. Questi stessi elementi ebbero la mala sorte di comparire alla luce nel 1772. in Venezia dai torchi degli eredi di Niccolò Pezzana in due volumi in quarto; il primo col titolo di *Nuovi Elementi delle matematiche universali contenenti l'Aritmetica, l'Algebra, e la Geometria, con facile, e particolar metodo esposti ad uso della studiosa gioventù*. E l'altro col titolo di *Elementa matheseos ad usum studiosae juventutis elucubrata*.

Ebbero la mala sorte, dico, di comparire, perchè malmenati, informi, e di tanti e tanti madornali spropositi ripieni comparvero; non sapendo, cred' io, ancora ben distinguere il fil dall' accia quel buon uomo, che volle a suo nome stamparli; egli, come li capitarono alla mano per qualche ignorante scolaro, che aveva mal inteso, e peggio scritti tali elementi, che il laborioso Professore dettò nel principio della sua carriera allor quando era incaricato di reggere la cattedra di matematica, oltre la sua, senza badar più in là, rocco soltanto dal sollecito di comparir dotto, fece gnocchi, come suol dirsi, della non sua pasta, e con solenne ridicolossissima prosopopea sen fece bello.

Non sarebbe mancato al prestante autore acconcio modo di rintuzzare sì fatta tracconanza, ma pieno di vera, e soda virtù, gliene fece larga larghissima remissione.

Sappia per altro costui, che non bastava omettere la prefazione, ed aggiungere due dedicatorie, ed un avviso al lettore, e fare una sguajata traduzione per far apparire suo il non suo; nè bastava il dire d' essersi servito degli elementi di matematica di Mr. de la Chapelle, e di Sympson probabilmente non mai da lui conosciuti, che senza gli occhiali chiunque vede non avere questi scritti alcuna relazione con tali autori.

A. L.



Quest' opera, che dividesi in due volumi, o parti separate, contiene gli Elementi dell' Aritmetica universale divisi in tre libri, e quelli della Geometria piana e solida in sette.

Sonovi nella prima parte i tre libri dell' Aritmetica col primo della Geometria; nella seconda saranno li rimanenti sei libri coll' indice delle operazioni appartenenti alla Geometria pratica dimostrate in essi, e dodici rami delle figure necessarie alle dimostrazioni ivi contenute.

Si spiegano prima d' ogni cosa (pag. 1. e seg.) i vocaboli più frequentemente usati in queste, ed in tutte le altre matematiche scienze.

Nel primo libro dell' Aritmetica (pag. 5. e seg.) premesse le necessarie definizioni, e la spiegazione dei caratteri, e dei segni, di cui

Il nostro signor Revelli, a cui era prescritto dalle Regie Costituzioni d' insegnare gli elementi d' Euclide, e l' aritmetica, non si è preso veruno per guida, ma bensì con ordine diverso da quello d' Euclide, e di altri autori procurò con tutta la chiarezza, e brevità possibile di proporre, e dimostrare tutte quelle verità, che ritrovansi in Euclide, ed altrove più utili, e più necessarie a' giovani principianti per acquistare un esatto raziocinio, e che loro abbisognassero per lo studio delle fisiche, e delle matematiche, e che potessero facilmente ancora condurre gli architetti civili, e militari, ed i misuratori a conoscere da per se stessi, e dimostrare le operazioni de' loro problemi.

A questa mia ristampa poi fui spinto primieramente dal credito universale dell' Autore; secondariamente dall' esito sperimentato di due edizioni pubblicate coi torchj dello Stampatore e Librajo Giammichele Briolo, della di cui Stamperia l'anno 1797. 1. Marzo io ne feci l' acquisto unitamente al Magazzino di libri, in cui esisteva pure una buona parte della seconda edizione della presente opera, di cui avendone veduto l' esito in breve tempo compito, perciò coraggiosamente ne intrapresi la terza edizione, sperando, che sarà pure per incontrare la sorte felice delle due antecedenti.

midi, de' con, della sfera, e s' insegnano le regole di misurare la superficie, e solidità di ciascuna d' esse figure; e nell' annotazione della proposizione 20. sono indicate le misure da noi adoperate per misurare i solidi.

Nel settimo libro poi con metodo chiaro, e facile si dimostrano le principali proprietà della ellisse, delle evolute, ed evolventi, della cicloide, della parabola, e dell' iperbola, e de' solidi da queste figure generati, e la maniera di descrivere, e misurare le medesime.

Nel secondo si dimostrano le proprietà, e gli accidenti delle linee rette, degli angoli piani rettilinei, delle linee parallele, l'uguaglianza, e la diversità dei triangoli rettilinei, e dei parallelogrammi, e la costruzione, e la misura di essi; nel corollario terzo della definizione 36. si trova una sufficiente notizia delle misure, di cui comunemente ci serviamo per misurare ogni lunghezza, e superficie, le definizioni sono seguitate da cinque altri assiomi.

Nel terzo libro con somma chiarezza, e brevità vengono dimostrate le proprietà delle linee rette proporzionali, e delle figure piane rettilinee simili.

Il quarto contiene le principali proprietà, ed accidenti delle linee rette, che toccano, o segano il circolo, e degli angoli formati da esse dentro, e fuori del medesimo; nella definizione decima, e ne' suoi corollari evvi un saggio de' principii, e delle proposizioni fondamentali della trigonometria piana, colla nozione delle tavole trigonometriche.

Nel quinto trattasi della iscrizione, e circoscrizione de' triangoli, e delle altre figure piane rettilinee nel cerchio; della costruzione, e della misura delle figure piane regolari, e della misura, e divisione del circolo ne' suoi gradi.

Il sesto libro contiene la scienza de' solidi, in cui si dimostrano le più utili, e necessarie proprietà de' prismi, de' cilindri, delle pira-

midi, de' cono, della sfera, e s' insegnano le regole di misurare la superficie, e solidità di ciascuna d' esse figure; e nell' annotazione della proposizione 20. sono indicate le misure da noi adoperate per misurare i solidi.

Nel settimo libro poi con metodo chiaro, e facile si dimostrano le principali proprietà della ellisse, delle evolute, ed evolventi, della cicloide, della parabola, e dell' iperbola, e de' solidi da queste figure generati, e la maniera di descrivere, e misurare le medesime.

NOZIONI PRELIMINARI.

I. **La definizione** è un discorso, il quale spiega la natura di qualche cosa, o il vocabolo, di cui ci serviamo per significarla.

Le definizioni si dividono in reali, e nominali.

Definizioni reali diconsi quelle, le quali esprimono il modo, col quale vengono formate quelle cose, che si definiscono.

Definizioni nominali chiamansi quelle, che contengono un numero sufficiente di quelle proprietà, le quali appartengono alle cose, di cui si tratta, da poterle facilmente distinguere dalle altre cose dello stesso genere.

II. **La proposizione** è un discorso, col quale si rappresenta alla mente nostra qualche cosa da contemplare; ovvero si espone, che alcuna cosa conviene, o non conviene al soggetto, di cui si tratta.

Due sono le parti di ogni proposizione, cioè l'*ipotesi*, o *supposizione*, e la *tesi*, o *questione*.

L'*ipotesi*, la quale dicesi ancora il *dato*, o *supposto* della proposizione, contiene le condizioni, colle quali si afferma, o si nega qualche cosa.

La *tesi* poi, o sia il *quesito* della proposizione contiene tutto ciò, che si afferma, o si nega.

NOZIONI PRELIMINARI

III. **Teorema** si chiama quella proposizione, nella quale si propone qualche cosa da dimostrare.

Le parti principali del teorema sono la *proposizione*, nella quale si enuncia ciò, che sotto certe condizioni può convenire, o non convenire ad una cosa, e la *dimostrazione*, nella quale si espongono le ragioni, per le quali la nostra mente conchiude, se ciò convenga alla data cosa, o no.

IV. **Problema** si addimanda ogni proposizione, nella quale si comanda qualche cosa da fare.

Il problema è composto di tre parti principali, le quali sono:

La *proposizione*, nella quale si enuncia ciò, che si dee fare;

La *risoluzione*, o *costruzione*, nella quale con ordine chiaro, e preciso s'insegnano ad una ad una tutte le azioni da farsi per eseguire quanto è stato proposto;

E la *dimostrazione*, nella quale fatto ciò, che si è prescritto, con ragioni si convince l'intelletto d'aver fatto quanto fu comandato.

AVVERTIMENTO.

Alcuni teoremi abbisognano eziandio di costruzione per poter dimostrare le proposte verità, come sovente si vedrà in questi elementi.

V. **Lemma** si nomina quella proposizione, la quale serve per dimostrare alcuna proposizione generale, alla quale si premette col titolo di lemma per non interrompere la serie delle proposizioni principali.

VI. *Assioma* è un teorema così chiaro, ed evidente, che non ha bisogno di veruna dimostrazione.

VII. *Postulato*, o *dimanda concedibile* è un problema cotanto facile, che non richiede veruna risoluzione, nè dimostrazione.

VIII. *Corollario* dicesi una proposizione, la quale facilmente si deduce da qualche definizione; o da un'altra proposizione già dimostrata, ovvero il corollario è un'applicazione di una proposizione generale ad un caso particolare.

IX. *Annotazione*, da' Greci detta *scholion*, chiamasi ciò, che si mette dopo le definizioni, o dopo le proposizioni, o corollari, quando contengono qualche cosa degna di particolare osservazione, o che abbia bisogno di qualche rischiaramento.

X. *Quantità*, o *grandezza* dicesi tutto ciò, che è diviso, o si concepisce divisibile in parti; o sia tutto ciò, che si può accrescere, o sminuire; di questa sorta sono il corpo, la superficie, la linea, il tempo, il moto, la velocità, il numero, il peso, la misura ec. Dividesi la quantità in discreta, e continua.

XI. *Discreta*, o *disgiunta* si chiama quella *quantità*, la quale è composta da parti separate e disgiunte, come il numero, il quale è composto dalle unità.

XII. *Quantità continua*, o *continuo* è quella, le cui parti sono insieme unite, connesse, e tra di loro congiunte. Di questo genere sono il corpo, la superficie, e la linea.

XIII. La *Geometria* è quella scienza, nella quale si considerano, e si dimostrano le proprietà della

quantità continua; ovvero si può definire la scienza delle cose, che hanno estensione, in quanto che sono terminate; in essa cioè si esaminano, e si dimostrano tutte le proprietà, e gli accidenti delle linee terminate, delle superficie, e de' corpi circoscritti da' termini; non già estesi in infinito.

XIV. *Aritmetica* si nomina quella scienza, in cui si dimostrano le proprietà, e i principali uffizi della quantità discreta, o diciamo de' numeri.

L'arte poi di calcolare, o far conti co' numeri dicesi *Aritmetica volgare*, o *pratica*.

XV. *Aritmetica speciosa*, *Aritmetica letterale*, o *Algebra speciosa*, o *calcolo Algebraico* si dice quella scienza, nella quale s'insegna la maniera di calcolare le specie, cioè le lettere dell'alfabeto, e con esso calcolo si dimostrano con mirabile facilità moltissime proprietà tanto della quantità continua, quanto della discreta, ed agevolmente si risolvono le più intricate quistioni dell'*Aritmetica*, e della *Geometria*.

XVI. *Aritmetica universale* addimandasi quella scienza, nella quale unitamente s'insegnano amendue le arti di calcolare, cioè la numerica, e la speciosa, o letterale.

ELEMENTI ⁵

DELL'

ARITMETICA UNIVERSALE

LIBRO PRIMO

DEL CALCOLO DEGLI INTERI

DEFINIZIONE I.

1. **U**nità è quella denominazione, per la quale qualsivoglia cosa si dice *una*.

2. **ANNOTAZIONE.** *Uno*, o unità si dice tutto ciò, che è, o si concepisce essere indiviso in se stesso, e diviso da ogni altra cosa; perciò ogni quantità anche composta di molte parti, se si considera indivisa in se stessa, e divisa da qualunque altra cosa, chiamasi *una*. Vi sono dunque due sorta di unità, altre, cioè, sono in se stesse indivisibili, e si addimandano *unità d'indivisibilità assoluta*, come sarebbero le monadi di Leibnizio, e i punti zenonici, se pure esistono; altre poi sono composte di più parti, o di più cose, e diconsi *unità di aggregato*; come qualunque numero benchè composto di moltissime unità, considerato in se stesso, dicesi *uno*.

DEFINIZIONE II.

3. **I**l numero è un complesso, o aggregato, o sia unione di due, o più unità.

4. **COROLLARIO.** Dunque l'unità non è numero, ma bensì il principio d'ogni numero. Laonde il pri-

6 ELEMENTI DELL' ARITMETICA

mo numero è il due, il secondo è il tre ec. comunemente però l'unità si conta tra i numeri.

DEFINIZIONE III.

5. **I** nomi, di cui ci serviamo per contare, o sia numerare le cose sono *uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove, dieci*; cioè dieci unità, compongono una *decina*; due decine, diconsi *venti*; tre, chiamansi *trenta*; quattro decine, appellansi *quaranta*; cinque, *cinquanta*; sei, *sessanta*, sette, *settanta*; otto, *ottanta*; nove, *novanta*; e dieci decine si chiamano *cento*; dieci centinaja, si dicono *mille*, o migliajo, o *mila*; dieci volte cento mila, o mille volte mille, compongono un *milione*; dieci volte cento mila milioni, formano un milione di milioni, o diciamo un *bilione*; dieci volte cento mila bilioni, fanno un *trilione*; dieci volte cento mila trilioni, fanno un *quadrilione*; e così successivamente dai quadrilioni si formano i *quintilioni*, e da questi i *sestilioni* ec.

Quando poi nel contare si arriva ad un numero di decina, allora si ricominci di nuovo la numerazione, ma insieme ripetasi il numero della stessa decina; per esempio dieci più uno, dicesi *undici*; dieci e due fa *dodici*; venti più uno, si dice *ventuno*; venti più tre, *ventitrè*; trenta più cinque, *trentacinque*; cento ottanta più uno, *centottantuno* ec.

DEFINIZIONE IV.

6. **I** primi dieci numeri, compresi l'uno, si dicono *unità*, ovvero *numeri d'igi*.

Il numero dieci, ed i suoi moltiplici, cioè il venti, il trenta, il quaranta ec. chiamansi numeri *articoli*.

Inoltre i numeri minori del dieci si nomano *numeri semplici*; ed i numeri maggiori del nove, diconsi *numeri composti*.

DEFINIZIONE V.

7. **L**e note, o segni, o diciam figure, o caratteri, di cui ci serviamo nell'aritmetica volgare per esprimere qualsivoglia numero, sono: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, le quali significano *uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove*; ed a queste si aggiunge la cifra zero, cioè 0, la quale per se stessa niente significa, serve bensì a riempire le sedi vacue, come vedremo in appresso; e posta alla destra di qualunque altra nota (quando diciamo *alla destra*, o *alla sinistra*, sempre si deve intendere *di chi scrive*) la rende dieci volte maggiore; così 10, significa *dieci*; 20 esprime *venti*; 30, indica *trenta*; 70, vale *settanta*, ec.

Ma acciocchè colle sopraddette dieci figure aritmetiche si esprima qualunque numero di cose qualunque grandissimo, si dee sapere, che le suddette figure, oltre al proprio valore stato loro assegnato dagli inventori di esse, ne hanno un altro, il quale viene determinato dal luogo, o sia sede, in cui sono poste, nella seguente maniera.

Qualsivoglia figura aritmetica trovandosi sola, o posta in primo luogo alla destra, significa semplici unità; ma essendo posta alla sinistra di un'altra, cioè nella seconda sede, allora significa tante decine, quante unità esprime essendo sola; e procedendo sempre dalla destra verso la sinistra di chi scrive, una figura posta nella terza sede, o sia in terzo luogo, significa tante centinaia, quante unità indica, quando è sola; se sarà collocata nella quarta sede, esprimerà unità di migliaia, nella quinta, significa decine di migliaia; nella sesta, contiene centinaia di migliaia; nella settima sede, significa unità di milioni; nell'ottava, indica decine di milioni; nella nona, esprime centinaia di milioni; nella decima sede, significa migliaia di milioni; nell'undicesima, contiene decine delle migliaia

8 ELEMENTI DELL' ARITMETICA

di milioni; e nella dodicesima sede, significa centinaia delle migliaia di milioni. Poesia continuando collo stesso ordine, nelle sei susseguenti sedi sono poste le unità, decine, centinaia, migliaia, decine di migliaia, centinaia di migliaia de' bilioni. Di poi, sei sedi, si ascrivono ai trilioni; sei altre, ai quadrilioni; indi altre sei ai quintilioni, e così proseguendo all'infinito.

In quelle sedi poi, le quali non hanno veruno de' numeri semplici (definizione antecedente) sempre si metta la cifra 0.

Per esempio

A
134728659.

La prima figura 9 del numero A, significa nove semplici unità; la seconda 5, esprime cinque decine, cioè 50, *cinquanta* di quelle medesime unità, o cose, che si numerano; la terza 6, indica sei centinaia, vale a dire 600, *secento*; la quarta 8, significa 8000, *ottomila* delle stesse unità; la quinta 2, esprime due decine di migliaia, cioè 20000, *ventimila*; la sesta 7, vale sette centinaia di migliaia, cioè a dire 700000, *settecento mila*; la settima 4, significa 4000000, *quattro milioni*; l'ottava 3, esprime tre decine di milioni, 30000000, cioè *trenta milioni*; e la nona figura 1 significa un centinaio di milioni, vale a dire 100000000, *cento milioni*; conseguentemente il suddetto numero A significa cento trentaquattro milioni settecento ventotto mila secento cinquanta nove.

Similmente la prima figura 7

B
407

del numero B, significa sette semplici unità; la seconda, che è la cifra 0, indica, che il dato numero B non ha veruna decina; e la terza figura 4 significa *quattro centinaia*, cioè 400, *quattrocento*. Conseguentemente il numero B, esprime quattrocento sette.

Da quanto sopra si è detto in questa definizione, sarà cosa facile lo esprimere con figure aritmetiche

qualunque numero. Sia, verbi grazia, il numero secento mila ottocento sette da esprimersi colle suddette figure. Questo numero contiene sette unità, perciò scrivasi la figura 7 nella prima sede; e perchè non ha veruna decina, si scriva 0 nella seconda sede; indi mettasi la figura 8 nella terza sede, ove significa le otto centinaia; poscia perchè esso numero non contiene nè unità, nè decine di mila, scrivasi 0 nella quarta sede, ed un altro 0 nella quinta, e finalmente si metta la figura 6 nella sesta sede, in cui significa le sei centinaia di mila, e però il suddetto numero si scriverà così 600807.

Similmente il numero quarantotto milioni novecento cinquantatre mila secento settanta si scriverà in questo modo 48953670. ec.

8. ANNOTAZIONE. Le sopraddette figure aritmetiche si dicono ancora *figure arabiche*, perchè volgarmente si crede, che gl' inventori di esse sieno stati gli Arabi; ma da uomini eruditissimi l' invenzione di esse figure viene attribuita agl' Indiani, e che da questi le abbiano ricevute gli Arabi. I Saraceni poi le portarono dall' Arabia nella Spagna; ed il dottissimo Gerberto Monaco di Fleury, il quale fu poscia nell' anno 999. creato Papa col nome di Silvestro II., le introdusse nella Francia, e nelle altre provincie d' Europa.

Oltre alle suddette figure aritmetiche, sono presentemente ancora in uso, per semplicemente notare i numeri, quelle lettere, di cui servivansi gli antichi Romani per esprimere li loro numeri, e sono le sette seguenti: uno, cinque, dieci, cinquanta, cento,

I. V. X. L. C.

cinquecento, mille, le quali variamente unite esprimono

D. M.

qualsivoglia numero; avvertendo però, nel leggerli, di sottrarre dalla seguente l' antecedente di minor valore, come chiaramente si vede ne' seguenti numeri:

10 ELEMENTI DELL' ARITMETICA

uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto,
I. II. III. IV. V. VI. VII. VIII.
nove, dieci, undici, dodici, tredici, quattordici,
IX. X. XI. XII. XIII. XIV.
quindici, sedici, diciassette, diciotto, diciannove,
XV. XVI. XVII. XVIII. XIX.
venti, trenta, quaranta, cinquanta, sessanta, novanta,
XX. XXX. XL. L. LX. XC.
cento, duecento, quattrocento, cinquecento, secento,
C. CC. CD. D. o IO. DC.
novecento, mille, cinque mila, dieci mila,
CM. M. oppure CIO. IOO. CCIOO.
cinquanta mila, cento mila. Oltre ciò per maggior
IOOO. CCCIOOO.

brevità tirando una lineetta trasversa sopra qualunque delle suddette lettere significherà migliaia. Così I significa mille, V. cinque mila, X. dieci mila, C. cento mila, IV. quattro mila ec.

DEFINIZIONE VI.

9. **N**umero intero razionale, o volgare dicesi quello, che contiene intere unità; ovvero è quello, il quale si riferisce all' unità, come il tutto ad una sua parte.

DEFINIZIONE VII.

10. **N**umero rotto razionale, o volgare, il quale dicesi ancora *frazione*, è quello, il quale contiene una, o più parti dell' unità; oppure dicesi quello, il quale si riferisce all' unità, come la parte al tutto.

DEFINIZIONE VIII.

11. **P**er esprimere qualsivoglia frazione, ci serviamo di due numeri, scrivendo l' uno sotto dell' altro, frapponendovi una lineetta tramezzo. Così per indicare

la terza parte di qualunque cosa scrivesi $\frac{1}{3}$, e si legge *un terzo*, ovvero *uno diviso per tre*. Similmente volendo esprimere quattro quinte parti di qualsivoglia quantità si scrive $\frac{4}{5}$, e leggesi *quattro quinti*, o *quattro diviso per cinque*, o pure *quattro quinte parti del dato intero*.

Il numero, che si pone sotto la lineetta chiamasi *denominatore della frazione*; e indica in quante parti sia diviso, o debbasi dividere quell'intero dato, che prendesi per unità, e l'altro numero scritto sopra la lineetta dicesi *numeratore della frazione*, perchè numera le parti, che dal dato intero diviso bisogna prendere. Così nella frazione $\frac{4}{5}$ il denominatore 5 significa, che il dato intero è diviso in cinque parti uguali; ed il numeratore 4 indica, che delle suddette cinque parti quattro sole debbonsi prendere nel dato caso.

DEFINIZIONE IX.

12. Ogni numero composto d'un intero, e di un rotto, *numero misto* si noma. Così $7\frac{2}{3}$ è un numero misto, e significa sette interi con due terze parti d'un intero.

DEFINIZIONE X.

13. Numeri uguali diconsi quelli, i quali contengono lo stesso numero di unità, o di parti dell'unità. Per esempio i due numeri tre, e quattro insieme presi sono uguali al numero sette.

Similmente i due numeri misti $4\frac{1}{2}$, e $6\frac{1}{2}$ uguagliano il numero misto; $10\frac{4}{5}$, dieci e quattro quinti.

Disuguali poi si chiamano i numeri, che non contengono lo stesso numero di unità, o di parti dell'unità; quali sono i due numeri 6, ed 8, al primo de' quali

mancano due unità per uguagliare il secondo, il quale è uguale al 6 più 2; conseguentemente l'uno de' due numeri disuguali è uguale ad una parte dell'altro, e si dice *numero minore*; ma l'altro, una parte del quale uguaglia il minore, dicesi *numero maggiore*.

DEFINIZIONE XI.

14. *Sommare*, o *far l'addizione*, è raccogliere in una somma due, o più numeri dati; ovvero dati due, o più numeri, è trovarne un altro, il quale sia uguale a tutti i numeri dati, presi insieme.

In questa prima operazione aritmetica i numeri dati si dicono *numeri da sommarsi*, e quello, che si cerca, nomasi *somma de' numeri dati*; così il 7 è la somma dei numeri dati 3, 4, perchè contiene tante unità, quante ne contengono i dati numeri 3, 4, insieme presi.

$$\begin{array}{r} 4 \\ 3 \\ \hline 7 \end{array}$$

DEFINIZIONE XII.

15. La sottrazione è la seconda operazione dell'Arithmetica, per mezzo della quale si ritrova la differenza tra due numeri dati, o tra due quantità date; vale a dire colla sottrazione si ritrova l'eccesso del numero maggiore sopra del minore; ovvero ritrovasi ciò, che manca al minore per uguagliare il maggiore.

Dei numeri dati quello, che si dee sottrarre, chiamasi *numero sottraendo*, e l'altro, dal quale si fa la sottrazione, dicesi *numero minuendo*; ed il numero, che per mezzo della sottrazione si ritrova, chiamasi *differenza*, o *residuo della sottrazione*; come dal 9 sottraendo il 5, sarà il residuo, o differenza il 4.

$$\begin{array}{r} 9 \\ 5 \\ \hline 4 \end{array}$$

16. COROLLARIO. Da questa definizione chiaramente ne segue, che il residuo aggiunto al numero sottraendo, fa una somma uguale al numero minuendo.

Come nell' antecedente esempio la somma del residuo 4, col numero sottratto 5, restituisce il numero minuendo 9.

DEFINIZIONE XIII.

17. **L**a *moltiplicazione*, terza operazione dell' Aritmetica, altro non è, che, dati due numeri, ritrovarne un terzo, il quale contenga tante volte uno de' dati numeri, quante unità, o parti dell' unità sono contenute nell' altro dato numero.

I numeri dati diconsi *moltiplicatori*, e quel numero, che per mezzo della moltiplicazione di essi si ritrova, chiamasi *prodotto*. Dei moltiplicatori poi quello, che alcune volte si ripete, si dice *numero moltiplicando*, e l' altro, il quale esprime quante volte si debba ripetere il moltiplicando, dicesi *moltiplicatore*. Come moltiplicando il 4 per 3, il prodotto si è 12, il quale tante volte contiene il moltiplicando 4, quante unità contiene il moltiplicatore 3.

18. **COROLLARIO**. Da quanto si è detto in questa definizione facilmente si può concludere, che in ogni moltiplicazione il prodotto tante volte contiene l' uno de' moltiplicatori, quante volte l' altro contiene l' unità; ovvero che il prodotto ha lo stesso rapporto all' uno de' moltiplicatori, che l' altro moltiplicatore ha all' unità. Inoltre egli è evidente, che la moltiplicazione è una compendiosa addizione dello stesso numero; così 4 più 4 più 4 fanno la somma 12 uguale al prodotto del 4. moltiplicato per 3.

DEFINIZIONE XIV.

19. **L**a *divisione* è la quarta operazione dell' aritmetica, per mezzo della quale si ritrova quante volte un dato numero sia contenuto in un altro numero dato.

Altrimenti si definisce, la divisione essere il ritrovare un numero, il quale contenga tante volte l' unità, quante l' uno de' numeri dati contiene l' altro dato numero.

De' due dati numeri quello, che si dee dividere, chiamasi *numero dividendo*; e l' altro, col quale si fa la divisione, dicesi *numero divisore*; quel numero poi, il quale si ritrova colla divisione, si nomina *quoziente della divisione*.

Come dividendo il numero 15 pel 5, il quoziente è 3; perchè il 3 tante volte contiene l' unità, quante il dividendo 15 contiene il divisore 5.

$$\begin{array}{r} 15 \mid 5 \\ \underline{3} \\ 0 \end{array}$$

DEFINIZIONE XV.

20. **N**umero *pari* è quello, il quale si può dividere in due parti uguali, e amendue composte d' intere unità; o sia quello, la cui metà è un numero intero.

I numeri pari sono 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 ec. *Numero dispari, o casso* dicesi quello, il quale differisce dell' unità dal numero pari; cioè quello, la cui metà è un numero misto. Dispari sono i numeri 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 ec.

DEFINIZIONE XVI.

21. **N**ell' aritmetica letterale, o speciosa, per esprimere qualunque quantità discreta, o continua, ci serviamo delle lettere minuscole dell' alfabeto *a, b, c* ec.; imperciocchè qualsivoglia numero grande, o piccolo, intero, o rotto, o misto si può chiamare *numero a*, ovvero *numero b*, oppure *numero m* ec.

Medesimamente qualunque linea nomare si può linea *a*, o linea *c*, oppure linea *g* ec. Lo stesso si dee intendere di qualunque altra quantità.

I Geometri per maggior facilità di calcolare si servono delle prime lettere dell'alfabeto a, b, c, f, g ec. per esprimere le quantità cognite, e date in una quistione proposta; e delle ultime lettere t, u, x, y, z , si valgono per denotare le incognite quantità, che in essa quistione si cercano; anzi chiamano quantità le stesse lettere, di cui si servono, per dimostrare i teoremi; o risolvere i problemi.

Inoltre sogliono esprimere le quantità indeterminate, e di valore arbitrario colle lettere m, n ; e nel calcolo infinitesimale della lettera d non mai si servono, se non che per indicare le differenze di quelle quantità, le quali non sono costanti, ma continuamente crescono, o diminuiscono, e perciò diconsi *quantità variabili*.

DEFINIZIONE XVII.

22. **Q**ualora in una quistione qualsivoglia quantità è stata denominata, per esempio, a , in tal caso il doppio di essa si esprimerà per $2a$; il triplo scrivendo $3a$ ec.

Similmente $5m$ significa il quintuplo della grandezza m ec.

Inoltre la metà della stessa quantità a si esprimerà scrivendo $\frac{1}{2}a$ ovvero $\frac{a}{2}$; la terza parte collo scrivere $\frac{1}{3}a$, o pure $\frac{a}{3}$ ec. lo stesso s'intenda di ogni altra quantità.

DEFINIZIONE XVIII.

23. **O**gni numero immediatamente prefisso ad una quantità letterale si chiama *coefficiente* della medesima quantità, e significa quante volte si debba prendere essa quantità. Così $4m$ significa quattro volte la quantità m ; $3a$ significa tre volte la grandezza a ; $\frac{1}{4}a$ esprime la quarta parte di a ; di modo che; se a significa

16 ELEMENTI DELL'ARITMETICA

il numero 12, allora $3a$ significherà 36 triplo del 12; ed $\frac{1}{4}a$ esprimerà il numero 3, quarta parte dello stesso 12; or questi numeri 4, 3, $\frac{1}{4}$ sono coefficienti della quantità m , ed a , e così degli altri.

24. Quelle quantità letterali, le quali non hanno verun coefficiente, sempre s'intendono avere l'unità prefissa; come a significa $1a$; m vale $1m$; cx vale $1cx$, ec.

DEFINIZIONE XIX.

25. **L**e quantità altre sono *positive*, o *affermative*, ed altre diconsi *negative*, o *privative*.

Gli averi, i crediti, i guadagni, le vincite ec. si nomano quantità positive; i debiti poi, le perdite ec. si dicono quantità negative.

Le quantità positive sogliono anche chiamarsi maggiori del nulla, le negative si dicono minori dello stesso nulla; perciocchè lo zero, o sia il nulla aggiunto, o tolto da qualsivoglia quantità non l'accresce, nè la diminuisce; onde tuttociò, che aggiunto ad una quantità l'accresce, dicesi maggiore del nulla; e ciò, che aggiunto alla quantità la scema di valore, si dice minore del nulla, perciò la quantità positiva sarà maggiore del nulla, e la negativa sarà minore dello stesso nulla.

Per altro le quantità diconsi maggiori, o minori del nulla, le une relativamente alle altre, non già considerate in se stesse, perchè ogni quantità considerata in se medesima sempre è positiva, e maggiore del nulla.

Le suddette quantità sono tra di loro opposte, e vicendevolmente si distruggono, quando insieme si uniscono.

Supponiamo, per esempio, che Andronico abbia un capitale di cento doppie, e che in un negozio ne guadagni altre cento, allora si troverà avere quantità positiva di cento più cento, cioè di dugento doppie;

ma se in vece di guadagnare cento doppie, le perderà in quel negozio, in questo caso rimarrà il suo capitale cento doppie meno cento doppie, uguale allo zero. Finalmente se avendo le cento doppie, noi supponghiamo, che ne abbia perdute, o fatto un debito di cento dodici, in questo caso il suo avere sarà una quantità negativa di cento meno cento dodici doppie, cioè di dodici doppie meno del nulla; vale a dire, resterà senza verun capitale, con dodici doppie di debito.

DEFINIZIONE XX.

26. **Q**uantità omogenee, o dello stesso genere sono quelle, delle quali prendendone una alcune volte, può uguagliare, o superare l'altra; ovvero sono quelle, una delle quali sottratta dall'altra una o più volte, lascia niun avanzo, o un avanzo minore della quantità sottratta; conseguentemente le quantità omogenee paragonate tra di loro sempre sono uguali, o disuguali.

Per esempio la linea A  di tre piedi di lunghezza, e la linea B  lunga due piedi sono quantità omogenee, perchè la linea B presa due volte supera la linea A.

Eterogenee, o di diverso genere diconsi quelle quantità, delle quali presane una quante volte piace, non si può dire che uguagli, o superi l'altra, e non possono dirsi tra di loro uguali, nè disuguali; come un numero, ed una linea sono quantità eterogenee, perchè non può il numero essere uguale, nè minore, nè maggiore della linea.

DEFINIZIONE XXI.

27. **U**guali si chiamano quelle cose, delle quali si può sostituire una in vece dell'altra senza variarne la

quantità; ovvero quantità uguali sono quelle, le quali hanno il medesimo valore, o la stessa estensione; per esempio se a significa tre lire nostrali d'argento, ed m significhi una somma di sessanta soldi nostrali, allora sarà a uguale alla m , perchè tre lire nostrali d'argento equivagliono a sessanta soldi.

Disuguali si dicono quelle cose, delle quali una è uguale ad una parte dell'altra.

DEFINIZIONE XXII.

28. **N**elle operazioni dell'Aritmetica universale, per maggior facilità, e chiarezza del calcolo ci serviamo di diversi segni, e principalmente de' seguenti, +, -, ×, =, >, < ec., quali si nomano *più, meno, moltiplicato, uguale, maggiore, minore.*

29. Del segno +, *più*, ci serviamo per segnare le quantità positive; ed è il segno della somma di esse. Così $5+2$, che leggesi *cinque più due*, significa 7, che è la somma de' numeri cinque, e due.

Similmente $a+b$, che si legge *a più b* esprime la somma delle due quantità a , b ; di modo che se a significherà il 7, ed il b indichi il 5, allora $a+b$ significherà $7+5$, cioè 12.

30. Il segno -, *meno*, serve a dinotare le quantità negative, ed è il segno della sottrazione delle quantità positive. Come volendo sottrarre il 2 dal 6, si può esprimere il residuo 4 scrivendo $6-2$, e leggesi *sei meno due*.

Parimente $a-c$, cioè *a meno c*, significa il residuo, che nasce sottraendo il c dall' a . Se per esempio a sia 8, e c significhi 3, in tal caso $a-c$ significherà $8-3$, cioè 5.

31. Questo segno × *moltiplicato* serve per indicare la moltiplicazione delle quantità, come scrivendo 3×4 , che si legge *tre moltiplicato quattro*, si denota il prodotto 12, che nasce dal moltiplicare il 3 pel 4.

Similmente $a \times b$, a moltiplicato b significa il prodotto, che si fa moltiplicando l' a per b ; di maniera che se a vale 2, e b significhi 9, allora $a \times b$ significherà 2×9 , cioè 18.

Molti però invece del suddetto segno della moltiplicazione mettono un solo punto tra le due quantità da moltiplicarsi. Così $a . b$ significa a moltiplicato per b . Similmente $3 . 4$ significa *tre moltiplicato per quattro*, cioè 12. ec.

32. Il segno $=$, *uguale* è il segno d'uguaglianza, il quale serve a paragonare tra di loro le quantità uguali. Per esempio volendo indicare, che la somma del 3 col 2 è uguale al 5, si scrive $3+2=5$, e si legge *tre più due uguale 5*.

Medesimamente scrivendo $a=b$, cioè *a uguale b*, si esprime, che nel dato caso le due quantità b , ed a sono tra di loro uguali. Similmente $c=4$ significa, che il valore della c è 4.

33. Quando tra di loro si deono paragonare due quantità disuguali, ci serviamo di questi due segni $>$, *maggiore*, e $<$, *minore*. Come volendo esprimere, che il numero 8 è maggiore del numero 5 scrivesi $8 > 5$, e si legge *otto maggiore di cinque*.

Parimente $a > c$, cioè *a maggiore di c* indica, che il valore di a è maggiore del valore di c .

Ma dovendo significare, che il 5 è minore del 8, si scriva $5 < 8$, che leggesi *cinque minore di otto*. Similmente $c < m$, cioè *c minore di m*, indica, che nel dato caso la quantità c è minore della quantità m .

34. La divisione delle quantità qualche volta si esprime a modo di frazione (num. 11.) mettendo cioè il divisore sotto il dividendo, interponendovi una lineetta. Così volendo dividere il 12 pel 4, il quoziente 3 si può esprimere scrivendo $\frac{12}{4}$, che leggesi *dodici diviso quattro*, ovvero *dodici quarti*; percioc-

chè dodici quarte parti di qualunque intero, formano tre interi.

Similmente $\frac{a}{m}$, cioè *a diviso m*, significa il quoziente, che nasce dividendo a per m ; di modo che se a sarà 15, e la m significhi 5, allora $\frac{a}{m}$ significherà $\frac{15}{5}$, cioè 3.

Inoltre la divisione si esprime ancora mettendo due punti tra il dividendo, e 'l divisore. Così $a : m$ significa *a diviso per m*. Medesimamente $12 : 4$ vale lo stesso, che $\frac{12}{4}$, cioè significa il quoziente 3, che si ritrova dividendo il 12 per 4.

35. ANNOTAZIONE. I due segni $+$, e $-$ sono contrari, ed opposti, perchè col segno $+$ si notano le quantità positive, e col segno $-$ le negative. Quelle quantità sole, o iniziali, le quali non hanno verun segno $+$, nè $-$ prefisso, sempre si intendono avere prefisso il segno $+$. Così a significa $+a$; m vale $+m$; $a+b-c$ significa $+a+b-c$ ec. Ma alle quantità negative sempre si dee preporre il segno $-$.

DEFINIZIONE XXIII.

36. **Q**uelle quantità, le quali non sono insieme connesse dai segni $+$, e $-$, che sono di un solo termine, si chiamano *semplici*, o *incomplesse*, o *monomie*, come sono a , m , abm , $\frac{a}{c}$, $-b$, $-ax$ ec.

Ma le quantità, le quali sono insieme unite, e congiunte dai segni $+$, e $-$, che sono di due, o più termini, diconsi *quantità complesse*, o *polinomie*, quali sono $a+b$, $a-c+m$ ec.

Ogni quantità composta di due termini, o membri, dicesi *binomio*, come il binomio $a+b$, ovvero $c-m$, o $5+2$ ec.

Se sarà composta di tre termini, si dice *trinomio*, come $a+b-c$, ovvero $b-m-x$ ec.

Se di quattro termini, si dirà *quadrinomio*, come $a-m-b+x$, ec.

PROBLEMA I.

37. Leggete qualsivoglia numero descritto colle figure aritmetiche.

RISOLUZIONE. 1. Incominciando dalla parte destra, e procedendo verso la sinistra di chi legge, si divida il dato numero in ternarii, cioè in membri, ciascuno de' quali contenga tre figure, eccettuato l'ultimo, il quale può rimanere di due, o di una sola figura.

2. Quando il dato numero contiene più di sei figure, allora sopra la settima scrivasi un piccol 1; indi verso sinistra, numerate altre cinque figure, sopra la sesta posta nella tredicesima sede, si metta un piccol 2, e così proseguendo, fraposte sempre cinque figure, si scrivano le note 3, 4, 5 ec. sopra le figure, che troverannosi poste nella diciannovesima, venticinquesima, e trentunesima sede ec. Così facendo, il numero dato rimarrà diviso in senari, o membri, ciascuno de' quali conterrà sei figure, eccettuato l'ultimo, il quale trovandosi primo alla sinistra può avere un minor numero di figure, e qualche volta una sola.

Po scia ciascun senario si divida con una virgola in due ternarii; il primo de' quali verso la destra contiene sempre le unità, le decine, e le centinaja dello stesso senario; e l'altro ternario posto verso la sinistra contiene le migliaja, o sia le unità di mila, le decine di mila, e le centinaja di mila del medesimo senario.

Inoltre, da quanto si è detto nella definizione quinta posta al numero 7, chiaramente si vede, che il primo senario alla destra contiene le unità, il secondo contiene i milioni, il terzo i bilioni, il quarto senario i triloni; e sempre andando verso la sinistra, il quinto senario contiene i quadriloni; il sesto i quintiloni, e così proseguendo.

22 ELEMENTI DELL' ARITMETICA

Finalmente il numero si legge cominciando dalla parte sinistra, e procedendo verso la destra, ed ove in leggendo s' incontrano le virgole, si dee pronunciare la parola *mila*, o *mille*: perchè colà terminano le migliaja di quel senario; ed i numeri soprapposti 1, 2, 3 ec. significano milioni, bilioni, triloni, e così di mano in mano. Le quali cose tutte più facilmente s' intenderanno dai seguenti esempi; imperciocchè, come scrisse il dottissimo Cavaliere Isacco Newton, *le arti più facilmente s' imparano dagli esempj, che dai precetti.*

Siano dati i numeri
 A, B, C, D, i quali
 si dividano in membri,
 come si è detto poc'
 anzi; così il numero A
 si legge otto mila tren-
 za cinque

A	8,035
B	43,726
C	530,109
D	4,327,540,289,605

Il numero B esprime quarantatrè mila settecento ventisei.

Il numero C indica cinquecento trenta mila cento nove.

Il numero D leggesi quattro bilioni trecento ventisette mila cinquecento quaranta milioni dugento ottantave mila secento cinque.

Il numero poi $35,638,264,680,193,695,261,164$. si legge trentacinque mila secento trentotto triloni, dugento sessantaquattro mila secento ottanta bilioni, cento novantatrè mila secento novantacinque milioni, dugento sessantun mila censessantaquattro.

Più facilmente si leggono i numeri, quando hanno molte cifre zero, come il seguente

$30,000,005,007,000,000$; il quale si enuncia, trenta mila bilioni cinque mila e sette milioni.

PROBLEMA II.

38. **S**ommare i numeri interi.

RISOLUZIONE. 1. Primieramente i numeri dati si scrivano ordinatamente l'uno sotto l'altro in guisa, che le unità dell'uno sieno sotto le unità dell'altro, le decine sotto le decine, le centinaja sotto le centinaja, le migliaja sotto le migliaja ec.

2. Sotto agli stessi numeri tirisi una lineetta traversale.

3. Poscia incominciando dalla parte destra si sommino insieme le semplici unità, cioè tutte quelle figure, le quali sono nella prima colonna alla destra di chi scrive; e se la somma di esse figure non è maggiore di 9, tutta si scriva sotto la linea, e nella stessa colonna delle unità. La medesima operazione si faccia nella seconda colonna, nella terza, nella quarta ec., e si avrà sotto la linea la ricercata somma.

Come de' numeri 6123, 1231, 542 la
 somma sarà 7896, cioè sette mila otto-
 cento novantasei; perciocchè le unità
 $2+1+3$ fanno 6 unità; le decine $4+3+2$
 fanno 9 decine; le centinaja $5+2+1$ fanno
 8 centinaja; e le migliaja $1+6$ fanno 7 mila.

4. Quando poi la somma delle figure di qualsivoglia colonna è maggiore del numero nove, e contiene una, o più decine, allora sotto la linea, e nella medesima colonna si scriva soltanto ciò, che la ritrovata somma contiene di più delle decine intere, o scrivasi la cifra 0, se contiene decine intere; poscia alle figure della seguente colonna a sinistra si aggiungano tante unità, quante decine si formarono dalla somma delle figure della precedente colonna; eccone un esempio.

24 ELEMENTI DELL'ARITMETICA

Si cerca qual somma componano i
 numeri 5146, 4375, 7624, 238.

Si scrivano l'uno sotto dell'altro ordi-
 natamente, come si è detto antece-
 dentemente, e tirata sotto di essi la li-
 nea traversa, si sommino le figure della

prima colonna, cioè, le unità 8, 4, 5, 6, le quali fanno la somma 23; poichè $8+4$ fanno 12, $12+5$ fanno 17, e $17+6$ fanno 23, la qual somma 23 contiene tre semplici unità, e due decine; perciò scrivasi il 3 sotto la linea nella colonna delle unità, e le due decine si sommino colle altre decine 3, 2, 7, 4, onde la somma delle decine sarà $2+3+2+7+4$, cioè 18; ma dieci decine formano un centinajo; dunque della ritrovata somma 18 scrivasi l'8 (cioè otto semplici decine) sotto la linea nella sede delle decine, e l'1, cioè una decina di decine, o sia un centinajo si aggiunga alle centinaja 2, 6, 3, 1, e sarà $1+2+6+3+1$, cioè 13 la somma delle centinaja; ma perchè dieci centinaja fanno un migliajo, però della ritrovata somma 13 si metta il 3 sotto la linea nella terza colonna, ed un 1, cioè un mille agli altri mila 7, 4, 5 si aggiunga, e sarà $1+7+4+5$, cioè 17 la somma dei mila; si ponga dunque sotto la linea il 7 nella quarta colonna, e 1, cioè una decina di mila alla sinistra del 7 nella quinta sede, che è quella delle decine di mila; per la qual cosa la somma de' numeri dati sarà 17383, cioè diciassette mila trecento ottantatré,

Nella stessa maniera operando si troverà, che la somma de' numeri 4200,
 e 5060 si è 9260, cioè nove mila du-
 gento sessanta.

5146
4375
7624
238

17383

4200
5060

9260

Medesimamente la somma de' numeri 32050, 6040, 2070, e 40 si troverà essere 40200, cioè quaranta mila ducento.

32050
6040
2070
40

40200

DIMOSTRAZIONE.

39. **S**ommare i numeri (per la definizione undicesima n. 14) è ritrovare un numero, il quale contenga tante parti, o unità, quante ne contengono i numeri dati insieme presi; ma dalla operazione fattasi nel primo esempio, il numero 7896 contiene tante unità, decine, centinaja, e migliaja, quante sono contenute ne' numeri 6123, 1231, 542 insieme presi; dunque il numero 7896 è la somma de' numeri dati. Nella stessa maniera si dimostra essersi fatte bene le altre somme.

40. **ANNOTAZIONE.** La prova dell' addizione si fa in molte maniere, come si può leggere negli autori classici dell' aritmetica. Comunemente per maggiore speditezza si ripete la stessa operazione, ma cangiato l'ordine di unire insieme le figure di ciascuna colonna; cioè se prima si è fatta la somma cominciando dall' infimo numero, e procedendo all' insù, la prova si faccia cominciando dal numero superiore, e discendendo sino all' ultimo inferiore, e trovando la medesima somma in tutte due le operazioni, probabilmente la somma ritrovata sarà esatta.

PROBLEMA III.

41. **S**ottrarre i numeri interi.

RISOLUZIONE. 1. In primo luogo si scriva il numero sottraendo o minore, ordinatamente sotto al numero minuendo, o maggiore, di modo che le unità sieno sotto alle unità, le decine corrispondano alle

decine ec.; e sotto di essi numeri si tiri una linea traversa.

2. Incominciando dalla parte destra, si sottraggano le unità del numero sottraendo dalle unità del numero minuendo, poscia le decine dalle decine, le centinaja dalle centinaja ec., e ciò che rimane in ciascuna sede scrivasi sotto alla linea, e nella stessa sede. Se accade, che la figura del numero sottraendo sia uguale alla corrispondente nota del numero minuendo, in tal caso pongasi la cifra zero sotto la linea, e nella medesima sede.

PRIMO ESEMPIO.

Dal numero 137596 si debba sottrarre il numero 86524, il residuo, o sia differenza sarà 51072. Imperciocchè sottraendo le unità 4 dalle 6, rimangono 2 unità: indi due decine sottratte da 9 restano 7 decine; poscia 5 centinaja da 5 centinaja, il residuo è 0. Quindi sottraendo 6 mila da 7 mila, rimane 1. Finalmente perchè 8 decine di mila non si possono sottrarre dalle 3, si sottraggano dalle 13, ed il residuo sarà 5.

137596
86524

51072

3. Quando il numero maggiore ha delle figure, alle quali o non vi corrisponde veruna figura del numero sottraendo, o vi corrisponde la cifra zero; allora esse figure si scrivano sotto della linea nelle proprie loro sedi, come si vede nell' esempio seguente.

ESEMPIO SECONDO

Dovendo sottrarre il numero 18040 dal numero 3058760, il residuo sarà 3040720, poichè sottraendo 0 da 0 resta 0; 4 da 6 rimane 2; 0 da 7 resta 7; 8 da 8 l' avanzo è 0; 1 da 5 resta 4; niente da 0 resta 0; niente da 3 rimane 3.

3058760
18040

3040720

4. Finalmente se qualche figura del numero sottraendo sarà maggiore della corrispondente figura del numero maggiore, dalla quale si dovrebbe sottrarre, allora alla superior figura si aggiunga una decina; indi sottratta l' inferior figura dalla superiore accresciuta di dieci, si metta il residuo sotto alla linea nella sua sede. Poesia per cagione della decina aggiunta alla superior figura, o si sminuisca di 1 la vicina figura alla sinistra della figura accresciutasi di dieci; ovvero per maggiore speditezza, e facilità dell' operazione si aggiunga 1 alla seguente figura alla sinistra della figura sottratta; la qual cosa chiaramente si comprenderà dall' esempio seguente.

ESEMPIO TERZO

Sia il numero minuendo 436052,	436052
dal quale si debba sottrarre il numero 352064.	352064
	83988

Pongasi il numero sottraendo ordinatamente sotto del minuendo, come superiormente si è detto; e tirata sotto di essi la linea traversa, sempre incominciando dalla parte destra, si sottragga il 4 dal 2, la qual cosa non si può fare, perciò allo stesso 2 si aggiungano 10, e si avrà il 12, dal quale sottratto il 4 rimane l' 8, il quale si scriva sotto la linea nella sede delle unità; quindi alla seguente figura 6 del numero sottraendo si aggiunga 1, si farà 7, il quale sottrarre non si può dalla superiore corrispondente figura 5; però, come sopra si è detto, si aggiungano 10 al 5, si formerà 15, dal quale sottratto il 7, il residuo sarà 8, il quale scrivasi sotto la linea nella sede delle decine. Dipoi si aggiunga 1 alla susseguente figura 0 del sottraendo, si avrà 1, il quale non si può sottrarre dalla superiore corrispondente figura 0, però aggiungasi 1 allo 0, si farà 10, dal quale sottratto

l' 1 resterà 9, che scrivasi sotto la linea nella terza sede; quindi si aggiunga 1 alla seguente inferior figura 2, si avrà 3, quale sottratto dal superiore 6, rimarrà il residuo 3, il quale scrivasi sotto la linea nella stessa sede; poscia sottraggo il 5 dal 13 (perchè 5 dal 3 non si può sottrarre) e metto il residuo 8 sotto della linea, e ritengo 1, il quale aggiungo alla seguente inferior figura 3, e si avrà 4, il quale sottratto dal superior 4, niente vi rimane, e non si scrive la cifra 0 sotto della linea, essendo cosa inutile lo scriverla nel fine dell' operazione; sicchè il residuo di questa sottrazione sarà 83988.

ESEMPIO QUARTO

M edesimamente sottraendo il numero B dal numero A, la differenza, o residuo sarà il numero C. Imperciocchè tolto il 5 dall' 8, il residuo è 3 da scriversi sotto la linea; 1 da 10, il residuo è 9, e di nuovo 1 da 10, resta poi 9; poi 3 da 4 rimane 1; indi 6 da 10 resta 4, poscia 10 da 11, rimane 1 da scriversi sotto la linea; finalmente 1 da 7, il residuo è 6.	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding-right: 10px;">A.</td> <td style="text-align: right;">7104008</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 10px;">B.</td> <td style="text-align: right;">962015</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 10px; border-top: 1px solid black;">C.</td> <td style="text-align: right; border-top: 1px solid black;">6141993</td> </tr> </table>	A.	7104008	B.	962015	C.	6141993
A.	7104008						
B.	962015						
C.	6141993						

42. DIMOSTRAZIONE. In ogni sottrazione (n. 16.) la differenza aggiunta al numero sottraendo fa una somma uguale al numero minuendo; ma nell' antecedente esempio quarto, facendo la somma della differenza, o residuo C col numero sottratto B, si restituisce il numero A; dunque il numero C è la differenza, che passa tra i numeri B, ed A. Lo stesso dimostrasi degli altri esempj. Il che ec.

43. COROLLARIO. Dalla dimostrazione antecedente ne segue, che la prova della sottrazione si dee fare sommando insieme il numero sottratto col residuo ritrovato, e se quella somma restituirà il numero minuendo, saremo certi di non aver errato.

PROBLEMA IV.

44. **M**oltiplicare i numeri interi.

1. RISOLUZIONE. Primieramente s' impari a memoria la moltiplicazione de' numeri semplici (n. 6.) descritta nella seguente tabella.

1 in 1 fa 1	4 in 4 fa 16	7 in 7 fa 49
1 in 2 fa 2 ec.	4 5 20	7 8 56
2 in 2 fa 4	4 6 24	7 9 63
2 3 6	4 7 28	
2 4 8	4 8 32	
2 5 10	4 9 36	
2 6 12		
2 7 14	5 5 25	8 8 64
2 8 16	5 6 30	8 9 72
2 9 18	5 7 35	
	5 8 40	
3 3 9	5 9 45	
3 4 12		
3 5 15	6 6 36	9 9 81
3 6 18	6 7 42	
3 7 21	6 8 48	
3 8 24	6 9 54	
3 9 27		

Quando poi si dovrà moltiplicare un numero composto per un numero semplice (n. 6.), ovvero un numero composto per un altro anche composto, allora si scriva il numero moltiplicatore ordinatamente sotto al moltiplicando (n. 17.) in guisa che le unità dell'uno sieno sotto alle unità dell'altro, le decine sotto

30 ELEMENTI DELL' ARITMETICA

alle decine ec., poscia sotto di essi tirisi una linea trasversale.

2. Se il moltiplicatore è un numero semplice, si moltiplichi in ciascuna figura del moltiplicando, incominciando dalla parte destra, e proseguendo verso la sinistra; e quando qualsivoglia particolare prodotto non eccede il numero 9, allora tutto si scriva sotto della linea; ma se è maggiore del 9, e contenga una, o più decine, in tal caso sotto della linea scrivasi solamente il soprappiù delle decine, o si mette la cifra 0; se il prodotto contiene soltanto decine intere, si ritengono tante unità da aggiungersi al seguente prodotto, quante decine contiene esso prodotto; come nel seguente esempio si vedrà.

ESEMPIO PRIMO

Sia il numero moltiplicando 18521, e l' moltiplicatore sia 7, il quale si metta sotto dell' unità del numero moltiplicando, e tirata sotto di essi la linea, moltiplico 7 in 1, e perchè sette volte 1 mi dà 7, scrivo il 7 sotto della linea nella prima sede; poi moltiplico 7 in 2, e del prodotto 14 scrivo il 4 sotto della linea nella seconda sede, ed 1, cioè una decina di decine, o sia un centinajo lo ritengo per aggiungerlo al seguente prodotto del 7 nel 5, il quale è 35, a cui aggiungo 1 serbato dall' antecedente prodotto, e fa 36; scrivo il 6 nella terza sede sotto alla linea, e riserbo 3, che sono tre decine di centinaja, o sia tre mila da aggiungersi al seguente prodotto dei mila; poscia 7 in 8 fa 56, a cui unisco il 3 ritenuto dal precedente prodotto, ed avrò 59, scrivo il 9 nella quarta sede sotto della linea, e ritengo 5. Finalmente moltiplico 7 in 1, e mi dà 7, al quale aggiungo il riserbato 5, ed avrò 12; il quale scrivo intero sotto la linea nelle sedi quinta, e sesta; ed il prodotto di

$$\begin{array}{r}
 18521 \\
 \underline{\quad 7} \\
 129647
 \end{array}$$

sette volte 18521 sarà 129647, cioè cento ventinove mila secento quarantasette.

3. Quando poi il moltiplicatore è anch' esso un numero composto, allora per ciascuna figura di esso si moltiplichino ordinatamente tutte le figure del moltiplicando; ma i prodotti sotto della linea si deono scrivere in maniera, che (terminato il prodotto della prima figura del moltiplicatore in tutto il numero moltiplicando, come si è fatto nell' antecedente esempio) il prodotto della seconda figura del moltiplicatore nella prima del moltiplicando si scriva nella seconda sede, cioè in colonna, dirittamente sotto della stessa figura seconda del moltiplicatore, e gli altri particolari prodotti della stessa figura ordinatamente si scrivano verso la sinistra. Similmente il prodotto della terza figura del moltiplicatore nella prima del moltiplicando si scriva sotto della linea nella terza sede, cioè a dirittura sotto la stessa figura del moltiplicatore nella sede delle centinaja, e così proseguendo; come si può facilmente intendere dai seguenti esempj.

4. Fatta la moltiplicazione per ciascuna delle figure del moltiplicatore, si tiri una linea traversa sotto ai ritrovati particolari prodotti, i quali si raccolgano in una somma, la quale sarà il ricercato prodotto.

ESEMPIO SECONDO.

Il numero 3624 si debba moltiplicare per 23. Si scrivano come sopra si è detto, e sotto di essi tirata la linea retta; io dico 3 in 4 fa 12, scrivo 2 sotto alla linea nella prima sede, e riserbo 1 da aggiugnere al seguente prodotto; poscia 3 in 2 mi dà 6, cui aggiungo l' 1 riserbato, e mi fa 7, il quale metto sotto la linea nella seconda sede. Dipoi moltiplico 3 in 6, e del prodotto 18. scrivo l' 8 nella terza sede, e ritengo 1 per aggiugnerlo

$$\begin{array}{r}
 3624 \\
 23 \\
 \hline
 10872 \\
 7248 \\
 \hline
 83352
 \end{array}$$

al prodotto seguente del 3 nel tre, il quale è 9, ed aggiuntovi l' 1 riserbato, mi fa 10, il quale scrivo tutto sotto della linea in guisa che lo zero sia nella quarta sede, e l' 1 nella quinta; e sarà terminata la moltiplicazione del numero 3624 per la prima figura 3 del moltiplicatore.

Si moltiplichino ora lo stesso numero 3624 per la seconda figura 2 del moltiplicatore 23; ed il primo prodotto 8 che si fa moltiplicando il 2 nel 4, si scriva sotto la linea dirittamente sotto lo stesso moltiplicatore 2 nella sede delle decine, cioè sotto del 7 del già fatto prodotto della prima figura; imperciocchè il moltiplicatore 2 essendo nella seconda sede significa due decine, o venti unità; perciò in questo caso la figura 4 non si moltiplica per 2, ma bensì per 20, ed il 4 venti volte preso produce 80, cioè 8 decine; per la qual cosa l' 8 prodotto del 2 nel 4 si dee mettere nella sede delle decine, nella quale significa 80. Dipoi si moltiplichino 2 in 2, ed il prodotto 4 si ponga a sinistra dell' 8 nella terza sede, che è quella delle centinaja; perchè in questo caso 2 in 2 significa 20 in 20, che produce 400; ossia quattro centinaja. Quindi si moltiplichino 2 in 6, e del prodotto 12 si scriva il 2 nella quarta sede, cioè a sinistra dell' antecedente 4, e 1 si serbi per aggiungerlo al seguente prodotto del 2 nel 3, il quale è 6, ed aggiuntovi l' 1 riserbato avanti, fa 7, il quale mettasi nella quinta sede, a sinistra dell' antecedente figura 2. Finalmente tirata una linea traversa sotto ai ritrovati prodotti, si faccia la somma di essi particolari prodotti (n. 38), la qual somma sarà 83352; conseguentemente ventitrè volte il numero 3624 dà il prodotto 83352.

ESEMPIO TERZO

Medesimamente moltiplicando il numero 46080 per 5030 ne nasce il prodotto 231782400. Imperciocchè moltiplicando 0 nel numero 46080 produco 0, il quale si scriva sotto la linea nella prima sede; indi moltiplico per la seconda figura 3 del moltiplicatore, e dico 3 in 0 fa 0, scrivo 0 nella seconda sede; poi 3 in 8 produce 24, scrivo 4 nella terza sede, e serbo 2 per aggiungere al seguente prodotto del 3 nel 0, il quale è 0, ed aggiuntovi il 2 riservato fa 2, che scrivo nella quarta sede, e moltiplico 3 in 6, e del prodotto 18 scrivo l'8 nella quinta sede, e ritengo 1 per unirlo al seguente prodotto; poscia dico 3 in 4 fa 12, più 1 riservato fa 13, scrivo 3 nella sesta, e l'1 nella settima sede. In terzo luogo moltiplico tutto il numero moltiplicando per la terza figura zero del moltiplicatore, e scrivo il prodotto zero sotto la linea nella terza sede, vale a dire sotto del 4 del prodotto già ritrovato. Finalmente moltiplico pel 5 quarta figura del moltiplicatore, e perchè 5 in 0 produce 0, scrivo 0 nella quarta sede direttamente sotto lo stesso moltiplicatore 5, cioè alla sinistra dell'antecedente 0; indi 5 in 8 fa 40, metto il 0 nella quinta sede, e serbo il 4; di poi dico 5 in 0 fa 0, a cui aggiungo il 4 riservato, e scrivo la somma 4 nella sesta sede; 5 in 6 fa 30, pongo 0 nella settima sede, e riserbo 3 da aggiungere al prodotto seguente di 5 in 4, che è 20, e col 3 serbato fa 23, scrivo il 3 nell'ottava sede, ed il 2 nella nona; e tirata sotto una linea, e raccolti in una somma i ritrovati particolari prodotti, si avrà il ricercato prodotto 231782400.

$$\begin{array}{r}
 46080 \\
 \underline{5030} \\
 1382400 \\
 2304000 \\
 \hline
 231782400
 \end{array}$$

ANNOTAZIONE. Da questo esempio si può facilmente conchiudere, che quando i numeri da moltiplicarsi

34 ELEMENTI DELL' ARITMETICA

hanno degli zeri nel fine, si possono moltiplicare senza i medesimi zeri, e terminata l'operazione aggiugnere gli stessi zeri al prodotto ritrovato. Così se avessimo moltiplicato 4608 per 503, ed al prodotto 2317824 avessimo aggiunti alla sinistra i due zeri omessi, si formava lo stesso prodotto 231782400 nato dal moltiplicare 46080 per 5030.

Similmente a moltiplicare 400 per 20, moltiplico 2 in 4, ed al prodotto 8 aggiungo i tre zeri dei numeri moltiplicati, ed avrò 8000 prodotto di venti volte 400.

Inoltre si osservi, che il moltiplicare per gli zeri, che sono tramezzo alle altre figure del moltiplicatore, è operazione superflua.

Così quando si è moltiplicato tutto il numero moltiplicando per la terza figura 0 del moltiplicatore 5030, si è posto il prodotto 0 nella terza sede, sotto del 4 dell'antecedente prodotto, e si poteva, senza pericolo di far errore, passare alla moltiplicazione della quarta figura 5, e tralasciare la moltiplicazione pel suddetto 0, come inutile.

ESEMPIO QUARTO

Nella stessa maniera moltiplicando il numero 3542 pel numero 1046 ne nascerà il prodotto 3704932.

$$\begin{array}{r}
 3542 \\
 \underline{1046} \\
 21252 \\
 14168 \\
 \hline
 3542 \\
 \hline
 3704932
 \end{array}$$

45. DIMOSTRAZIONE. Nella moltiplicazione il prodotto dee (n. 17) contenere tante volte il numero moltiplicando, quante unità, o parti dell'unità sono contenute nel moltiplicatore; nel primo esempio il prodotto 129647 per l'operazione fattasi, contiene tante volte il moltiplicando 18521, quante sono le

unità contenute nel moltiplicatore 7; poichè, se il numero moltiplicando 18521 si scriverà ordinatamente sette volte, e quindi (n. 38) si farà l' addizione, si troverà nella somma lo stesso numero 129647; dunque questo numero è il prodotto del numero 7 moltiplicato nel numero 1852; essendo che la moltiplicazione (n. 18.) è una compendiosa addizione dello stesso numero. La stessa cosa intendasi di ogni altro esempio della moltiplicazione. Il che ec.

46. ANNOTAZIONE. La prova della moltiplicazione si può fare dividendo il ritrovato prodotto per uno de' due moltiplicatori, e se per quoziente ne verrà l' altro moltiplicatore, saremo certi d' aver operato bene; ma prima bisogna sapere come si faccia la divisione, la qual cosa s' imparerà dal problema seguente.

PROBLEMA QUINTO

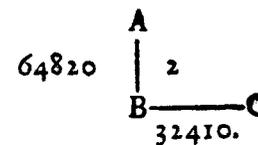
47. **D**ividere i numeri interi.

RISOLUZIONE. 1. Per imparare facilmente la divisione, è necessario di saper bene a memoria la moltiplicazione de' numeri semplici contenuta nella tabella descritta nel problema quarto al numero 44. Imperciocchè colui, per esempio, che già sa, che 7 volte 9 fa 63, facilmente conoscerà, che il 63 contiene sette volte il 9, e nove volte il 7; e così degli altri.

2. Quando il divisore è un numero semplice, ed il dividendo è composto di due, o più figure, allora scrivasi primieramente il numero dividendo, alla destra del quale, lasciato qualche piccolo spazio, si tiri una lineetta dall' alto al basso, e dopo di essa verso la destra si ponga il divisore, sotto del quale si tiri una lineetta traversa, come si può vedere nel seguente esempio. Poscia incominciando dalla parte sinistra si divida ciascuna figura del numero dividendo pel dato divisore, ed i particolari quozienti si mettano sotto della linea tirata sotto al divisore, come chiaramente si vedrà nell' esempio seguente.

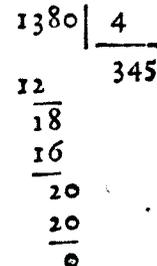
ESEMPIO PRIMO

Sia il numero 64820 da dividersi pel numero 2. Scrivasi in primo luogo il numero dividendo 64820, e alla destra di esso dall' alto al basso tirisi la linea AB, e dopo di essa scrivasi alla destra il divisore 2, sotto del quale si tiri la lineetta BC. Quindi incominciando dalla parte sinistra del dividendo, dico; il 2 nel 6 è contenuto 3 volte (perchè 2x3 fa 6); scrivo dunque il 3 per prima figura del quoziente sotto alla linea BC. Poscia il 2 nel 4 è contenuto due volte, scrivo 2 nel quoziente alla destra dell' altra figura 3; di poi 2 nell' 8 è contenuto quattro volte, metto 4 per terza figura del quoziente, e divido 2 per 2, ed il quoziente è 1, che scrivo per quarta figura del quoziente. Finalmente il 2 nello 0 non è contenuto, e però scrivo 0 per quinta ed ultima figura del ricercato quoziente; per la qual cosa il quoziente di questa divisione sarà 32410.



ESEMPIO SECONDO

In questo esempio si vedrà la maniera di operare, quando il divisore semplice non è contenuto intere volte in ciascuna figura del dividendo. Dato sia il numero dividendo 1380, ed il divisore sia il numero 4, i quali si scrivano come nell' antecedente esempio; poscia perchè il divisore 4 non è contenuto nella prima figura 1 del numero dividendo, si prendano le due prime figure del dividendo, cioè si divida il 13 pel 4; ma il 4 nel 13 è contenuto solamente tre volte, perciò sotto



del divisore si scriva 3 per prima figura del quoziente, e si moltiplichino lo stesso 3 pel divisore 4, ed il prodotto 12 scrivasi sotto al membro diviso 13, e sotto del 12 si tiri una lineetta traversa, la quale non si prolunghi verso la destra oltre al 2; indi sottraggasi il 12 dal 13, ed alla destra del residuo 1 si discenda la terza figura 8 del numero dividendo, e si avrà 18 per secondo membro da dividersi pel 4; ora il 4 nel 18 non è contenuto cinque volte (perchè 4×5 fa 20 maggiore del 18), ma solamente quattro volte, però scrivasi 4 per seconda figura del quoziente, la quale si moltiplichino nel divisore 4, ed il prodotto 16 scrivasi sotto al membro diviso 18, dal quale si sottragga, ed alla destra del residuo 2 si discenda la cifra 0, ultima figura del dividendo; sarà 20 il terzo ed ultimo membro dividendo, nel quale il divisore 4 è contenuto cinque volte: scrivasi dunque 5 per terza ed ultima figura del quoziente; indi moltiplicato il 5 nel divisore 4, il prodotto 20 si sottragga dal membro diviso 20, e nulla rimarrà, e sarà terminata la operazione; conseguentemente il quoziente di questa divisione sarà 345.

3. Se nel corso dell'operazione si troverà qualche membro dividendo, il quale sia minore del divisore, in tal caso nel quoziente si metta la cifra 0, ed accanto al membro dividendo si discenda un'altra figura del numero dividendo, e, dopo d'aver aggiunta essa figura, se il divisore non sarà ancora contenuto in quel membro dividendo, si metta un'altra cifra 0 nel quoziente, ed accanto al membro dividendo si discenda un'altra figura del numero dividendo, e questa operazione si replichi tante volte infinattantochè il divisore sia contenuto nel membro dividendo, ovvero una figura vi rimanga nel numero dividendo; come nel seguente esempio si vedrà.

ESEMPIO TERZO

Il divisore 8, nella prima figura 8 del numero dividendo 801600, è contenuto una volta solamente, onde la prima figura del quoziente sarà 1, la quale moltiplichisi nel divisore 8, ed il prodotto 8 scrivasi sotto della figura 8 del numero dividendo, dalla quale si sottragga, il residuo sarà 0, alla cui destra si discenda la seconda figura 0 del numero dividendo, e sarà membro dividendo 00, nel quale il divisore 8 non è contenuto, o diciamo altrimenti, è contenuto zero volte, perciò scrivasi 0 per seconda figura del quoziente, e alla destra del membro 00 si discenda la terza figura del numero dividendo, la quale è 1, si formerà il membro dividendo 001, cioè 1, che non contiene il divisore 8, che però si metta per terza figura del quoziente un'altra cifra 0, ed al membro 001 si aggiunga alla destra la quarta figura 6 del numero dividendo, e si avrà il membro dividendo 0016, cioè 16, nel quale il divisore 8 è contenuto due volte, perciò scrivasi 2 per quarta figura del quoziente, e si moltiplichino 2 in 8, ed il prodotto 16 sottraggasi dal membro diviso 16, ed al residuo 0 si aggiunga alla destra la quinta figura del numero dividendo, la quale è 0, si avrà il membro dividendo 00, nel quale il divisore 8 non è contenuto, perciò mettasi 0 per quinta figura del quoziente, e si discenda l'ultima figura 0 del numero dividendo, e perchè il divisore non è contenuto nel membro dividendo 000, nuovamente scrivasi un'altra cifra 0 per sesta figura del quoziente, e sarà 100200 il quoziente di questa divisione.

801600	8	8
8		100200
0016		
16		
000		

4. Se il divisore sarà anch'esso composto di due, o più figure, allora alla sinistra del dividendo si separino con un punto o virgola altrettante figure, quante ne contiene il divisore, anzi se esse formano un numero minore del divisore, in tal caso se ne separi una di più, e quindi si faccia la divisione come ne' seguenti esempi.

ESEMPIO QUARTO

Sia il divisore 24, ed il dividendo 6816, i quali si scrivano come si è insegnato nel primo esempio. Poscia con un punto sotto l'8 si separi dal numero dividendo il 68, e col seguente raziocinio si cerchi quante volte il 24 sia contenuto nel 68.

$$\begin{array}{r}
 68,16 \quad | \quad 24 \\
 \hline
 284 \\
 \\
 48 \\
 \hline
 201 \\
 192 \\
 \hline
 96 \\
 96 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

La prima figura 2 del divisore nella prima figura 6 del dividendo è contenuta tre volte; ma perchè la seconda figura 4 del divisore non è contenuta tre volte nella seconda figura 8 del membro dividendo 68, il membro dividendo 68 non contiene tre volte il divisore 24; però in questo caso il 2 nel 6 è contenuto solamente due volte, e ne avanzano 2, i quali colla seguente figura 8 fanno 28, nel quale l'altra figura 4 del divisore è parimente contenuta due volte (niente importa che sia contenuta di più) sicchè il 24 nel 68 è contenuto due volte, si metta dunque il 2 per prima figura del quoziente, sotto al divisore, e per esso 2 si moltiplichi il divisore 24, ed il prodotto 48 scrivasi sotto al membro diviso 68, in questa maniera, cioè moltiplico 2 in 4, e scrivo il prodotto 8 sotto al 8 del numero 68; poi moltiplico 2 in 2, e scrivo il prodotto 4 sotto al 6 del 68; indi sot-

tratto il 48 dal 68, al residuo 20 aggiungo alla destra la terza figura 1 del numero dividendo, onde si forma un altro membro dividendo 201, il quale divido pel 24; dico, cioè, il 2 nel 20 è contenuto nove volte (poichè in qualsivoglia particolare operazione non mai si dee mettere nel quoziente un numero che sia maggiore del 9) ma ne avanzano 2, che colla seguente figura 1 formano 21, nel quale il 4 seconda figura del divisore non può esser contenuto nove volte (perchè 4x9 fa 36); perciò in questo caso il 2 nel 20 non può essere contenuto nove volte; sia dunque contenuto otto volte, ne rimarranno 4 (perchè 2x8 fa 16), i quali colla susseguente figura 1 fanno 41, nel quale la seconda figura 4 del divisore è anche contenuta 8 volte; epperò scrivo 8 per seconda figura del quoziente, e la moltiplico nel divisore 24, ed il prodotto 192 lo scrivo sotto al 201, dal quale lo sottraggo, ed al residuo 9 aggiungo alla destra la quarta figura 6 del numero dividendo, e divido il 96 per 24; dico 2 in 9 è contenuto 4 volte, e ne sopravanza 1, il quale colla seguente figura 6 fa 16, in cui la seconda figura 4 del divisore è anche contenuta quattro volte; laonde pongo 4 per terza figura del quoziente, e perchè, moltiplicato esso 4 nel divisore 24, e sottratto il prodotto 96 dal membro diviso 96, niente rimane, sarà dunque 284 il quoziente di questa divisione, cioè la ventiquattresima parte del numero dividendo 6816.

5. Qualora poi rimane qualche avanzo dopo terminata la divisione, allora quel residuo si scriva dopo il ritrovato quoziente in forma di frazione, vale a dire si metta sopra una lineetta per numeratore (n. 11.) e sotto di essa scrivasi il divisore, che sarà denominatore della frazione; di qui ancora ne nascono le frazioni, delle quali tratteremo nel secondo libro.

ESEMPIO QUINTO

Sia da dividersi il numero 187695 pel numero 257, i quali si scrivano come si è detto nel primo esempio; quindi perchè le prime tre figure del numero dividendo formano il numero 187 minore del divisore 257, perciò si prendano quattro figure, e si avrà 1876 per primo membro dividendo, nel quale il divisore 257 è contenuto sette volte; imperocchè la prima figura 2 del divisore nel 18 è contenuta nove volte, ma la seconda figura 5 del divisore non è contenuta nove volte nella terza figura 7 del membro dividendo; perciò si dee conchiudere, che il divisore 257 non è contenuto nove volte nel 1876; laonde sminuisco di uno il quoziente 9, e dico, il 2 in 18 sia contenuto otto volte, ne sopravvanzeranno 2 (perchè 2×8 fa 16), i quali colla seguente figura 7 fanno 27, nel quale la figura 5 del divisore non è contenuta otto volte, dunque il divisore 257 non sarà contenuto otto volte nel membro 1876, conseguentemente di nuovo diminuisco dell'unità il quoziente 8, e dico, il 2 in 18 sia contenuto 7 volte, ne sopravvanzeranno 4, che colla seguente figura 7 fanno 47, in cui la seconda figura 5 del divisore è anche contenuta 7 volte, e sopravvanzano 12 (perchè 5×7 fa solamente 35), i quali 12 coll'ultima figura 6 del membro dividendo fanno 116, nel quale l'ultima figura 7 del divisore è parimente contenuta 7 volte; scrivo perciò il 7 per prima figura del quoziente, e moltiplico per esso 7 tutto il divisore 257, scrivendone il prodotto 1799 ordinatamente sotto al membro diviso 1876, e sottraggo 1799 dal 1876, ed alla destra del residuo 77 discendo la seguente figura 9

$$\begin{array}{r}
 187695 \quad | \quad 257 \\
 \hline
 1799 \quad 730 \frac{85}{257} \\
 \hline
 779 \\
 771 \\
 \hline
 85
 \end{array}$$

del numero dividendo, e si formerà 779 altro membro da dividersi, in cui il divisore è contenuto tre volte; perciocchè 2 in 7 è contenuto tre volte coll' avanzo 1, che colla seguente figura 7 fa 17, nel quale la seconda figura 5 del divisore è similmente contenuta 3 volte, e ne sopravvanzano 2, che colla seguente figura 9 fanno 29, nel quale la terza figura 7 del divisore è anche contenuta 3 volte; metto pertanto il 3 per seconda figura del quoziente, e moltiplicato esso 3 nel divisore 257, ne sottraggo il prodotto 771 dal membro diviso 779, ed al residuo 8 aggiungo alla destra l'ultima figura 5 del dividendo, ed avrò 85 per ultimo membro dividendo, nel quale il divisore 257 non è contenuto, però scrivo 0 per ultima figura del quoziente; dunque il quoziente di questa divisione sarà 730 col residuo 85, il quale scrivasi dopo il 730 sopra una lineetta, sotto di cui mettasi il divisore 257, e si avrà per quoziente totale di questa divisione il numero misto $730 \frac{85}{257}$ (n. 12), vale a dire settecento trenta interi, e ottantacinque ducencinquantasettesime parti d' un intero.

6. Finalmente, se il divisore è maggiore del numero dividendo, allora il quoziente si esprime per una frazione (n. 11) scrivendo per numeratore il numero dividendo, e per denominatore il divisore.

Così volendo dividere il numero 3 pel divisore 4, il quoziente sarà $\frac{3}{4}$ cioè tre quarti di una di quelle unità, che sono contenute nel numero dividendo 3. Mettiamo per esempio, che siano 3 lire d'argento da venti soldi l'una, le quali si debbano dividere ugualmente tra quattro persone, è cosa evidente, che a ciascuna persona si dovranno dare soldi 15, che sono la quarta parte di soldi 60, i quali compongono tre lire; ma 15 soldi sono tre quarti di lira; dunque la frazione $\frac{3}{4}$ esprime il vero quoziente che nasce dividendo il 3 per 4.

Medesimamente dividendo il numero 14 pel numero 35, il quoziente sarà $\frac{14}{35}$; lo stesso s' intenda di ogni altra simile divisione.

48. DIMOSTRAZIONE. Il quoziente di qualunque divisione dee esprimere quante volte il divisore sia contenuto nel numero dividendo; ma, verbi grazia, nel quarto esempio di questo problema il numero 284 indica quante volte il divisore 24 è contenuto nel dividendo 6816; perciocchè se il numero 24 si replicherà dugentottantaquattro volte, vale a dire, se si moltiplicherà 24 per 284, il prodotto restituirà il numero dividendo 6816. Dunque il numero 284 è il quoziente di essa divisione. Lo stesso raziocinio si applichi agli altri esempi. Il che si era proposto di fare, e dimostrare.

49. COROLLARIO. Da quanto si è detto antecedentemente, chiaro ne segue, che la prova della divisione si dee fare moltiplicando il ritrovato quoziente pel divisore, ed il prodotto restituirà sempre il numero dividendo, quando si è fatta bene l'operazione. Così moltiplicando 345, quoziente dell' esempio secondo, pel divisore 4, il prodotto 1380 restituisce il numero dividendo.

Quando poi non si è potuto fare la divisione in interi, ma vi è rimasto qualche avanzo, allora al prodotto del divisore nel quoziente si aggiunga quell'avanzo; come volendo far la prova del quinto esempio, si moltiplichino il divisore 257 pel quoziente intero 730, ed al prodotto 187610 si aggiunga il residuo 85, e la somma 187695 restituirà il numero dividendo, come chiaramente si vede.

PROBLEMA VI.

50. **S**ommare le quantità algebriche.
 RISOLUZIONE. La somma delle quantità espresse

44 ELEMENTI DELL' ARITMETICA

colle lettere dell'alfabeto si fa scrivendo le date quantità l'una dopo l'altra coi loro segni +, e -, che hanno, o s' intendono avere prefissi (n. 35.).

Che però la somma delle quantità semplici (n. 36.) $a, b, c, -x$ si farà scrivendo $a+b+c-x$.

Medesimamente delle quantità $4a, cx, \frac{b}{m}, 5am$, la somma sarà $4a+cx+\frac{b}{m}+5am$.

Similmente la somma delle quantità composte $a+b+x, 3cm, ax+2ac-z$ si esprimerà scrivendo $a+b+x+3c-m+ax+2ac-z$.

Nella stessa maniera date le quantità $a+c, m, a-m, b, a-x$, la loro somma sarà $a+c+m+a-m+b+a-x$, la quale si può esprimere più brevemente, come vedremo nel problema seguente.

PROBLEMA VII.

51. **R**idurre le quantità composte a minor numero di termini.

I. RISOLUZIONE. Quando una quantità medesima si trova scritta due volte in una stessa somma, cioè una volta col segno +, ed un'altra volta notata col segno -, vale a dire una volta positiva, ed un'altra volta negativa) allora essa quantità si tolga interamente da quella somma. Così $a-a$, cioè $+a-a, +8-8, 7am-7am$ niente significano nella stessa somma; poichè i segni +, e - sono contrarii, e ciò, che in questo caso si afferma dal segno +, vien negato dal segno -.

Onde la somma $4a-b+4c-x-4c$ si riduce a più semplice espressione $4a-b-x$, perchè i due termini $+4c, -4c$ si distruggono l'uno l'altro.

Medesimamente la quantità composta $4a-3b+cx+3b+2c-cx$ si riduce a minori termini $4a+2c$, perchè i termini $-3b, +3b$, e $+cx, -cx$ vicendevolmente si distruggono.

2. Se nella stessa somma si troveranno più termini espressi dalle medesime lettere aventi lo stesso segno +, ovvero -, prefisso; in tal caso si sommino insieme tutti i coefficienti (nn. 23, 24) di esse quantità, ed alla somma si premetta lo stesso segno, e dopo la suddetta somma de' coefficienti scrivasi una volta solamente la medesima quantità. Per esempio la somma $a+a$ si esprime per $2a$; la somma $3a+4a$ si esprime per $7a$ ec.

Parimente la quantità composta $2a+b+3a+4ab+7a$ si riduce a minori termini $12a+5b$.

Similmente la quantità $4a+3x+3b+a-4b+x$ si riduce a tre termini $5a+4x-7b$, ec.

3. Quando poi le quantità espresse dalle medesime lettere hanno segni contrari, e coefficienti disuguali, in tal caso si sottragga il coefficiente minore dal maggiore, ed al residuo si preponga il segno del coefficiente maggiore, e dopo il residuo, una volta soltanto scrivasi la stessa quantità.

Laonde il quadrinomio $12ab+4b-5ab-9b$ sottratti i coefficienti 5 dal 12, e 4 dal 9, e posto il segno + avanti al residuo 7, ed il segno - avanti al residuo 5, si esprimerà più brevemente col binomio $7ab-5b$, omettendo il segno + avanti al 7, perchè (n. 35) gli s' intende prefisso.

Per la stessa ragione, la quantità $4a+3c-4b-a+8b$ si riduce al trinomio $3a+3c+4b$, e così delle altre.

PROBLEMA OTTAVO.

52. **S**ottrarre le quantità algebriche.

RISOLUZIONE. Primieramente scrivasi la quantità minuenda tale, qual' è, con tutti i suoi segni +, e -, indi alla medesima quantità si aggiunga la quantità sottraenda, ma coi segni cangiati, cioè + in -, e - cangiato in +, e si avrà il ricercato residuo, o differenza tra le due date quantità.

Come dovendo sottrarre la quantità c dalla quantità a , ossia $+c$ da $+a$, il residuo, o differenza sarà $+a-c$, cioè $a-c$.

$$\begin{array}{r} a \\ -c \\ \hline a-c \end{array}$$

Similmente sottraendo $-m$ dall' a , il residuo, o differenza sarà $a+m$.

Medesimamente dalla quantità $3a+2b-c$ sottraendo la quantità $m-3x+z$, la differenza, o residuo sarà $3a+2b-c-m+3x-z$.

53. DIMOSTRAZIONE. In ogni sottrazione (n. 15.) il residuo, o differenza è ciò, che manca alla quantità sottraenda per uguagliare la quantità minuenda, perciò la somma del residuo colla quantità sottratta restituir dee la quantità minuenda; ma facendo la sottrazione nella maniera insegnata nell' antecedente numero, se poscia si sommeranno insieme il residuo, e la quantità sottratta, sempre nella somma si restituirà la quantità minuenda; dunque la sottrazione delle quantità dee farsi sommando insieme la quantità minuenda colla sottraenda, mutando però tutti i segni di questa.

Come nell' antecedente ultima sottrazione, se il residuo ritrovato $3a+2b-c-m+3x-z$ si sommerà colla quantità sottratta $m-3x+z$, ne verrà la somma $3a+2b-c-m+3x-z+m-3x+z$, la quale ridotta a minori termini (n. 51) restituisce la quantità minuenda $3a+2b-c$; perchè $-m$, $+m$, e $+3x$, $-3x$, e $-z$, $+z$ niente significando, si cancellano.

ANNOTAZIONE. Quantunque la dimostrazione di questa operazione sia convincente, ciò non ostante spesse volte i principianti restano imbrogliati, e stentano a concepire, che sottraendo una quantità negativa, essa diventi positiva, come per esempio sottraendo $-c$ dall' a , la differenza sia $a+c$, ovvero sottraendo il -3 dal 12, il residuo, o differenza sia $12+3$, cioè 15. A ben comprendere queste verità bisogna ricordarsi, che (n. 15.) nella sottrazione si cerca ciò,

che manca alla quantità sottraenda per uguagliare la minuenda, ora al -3 per uguagliare il 12 mancano quindici unità, poichè cominciando ad acquistarne 3, allora avrà $-3+3$, cioè niente, poscia dee acquistarne altre dodici per uguagliare il 12.

Per maggior chiarezza di questa verità mettiamo, che Clelio non abbia verun capitale, ed abbia un debito di 3 doppie, dunque il suo avere sarà negativo -3 (n. 25); Edoardo poi sia senza debiti, ed abbia di capitale 12 doppie, esso avrà $+12$; ora se Clelio vorrà avere tante doppie, quante ne ha Edoardo, dovrà necessariamente acquistarne quindici, tre delle quali gli sono necessarie per pagare il suo debito, e le altre dodici per averne ugualmente, che Edoardo: però sottraendo -3 da 12, il residuo, o differenza è $12+3$, cioè 15.

Ma se bisognasse sottrarre il 12 dal -3 , allora il residuo sarebbe negativo $-3-12$, cioè -15 ; infatti Edoardo, che ha dodici doppie di capitale per rimanere con niente, e di più con un debito di tre doppie, dee prima perdere le dodici doppie, che ha, per non avere più niente, indi ne dee perdere altre tre, per essere uguale a Clelio, laonde dee perderne quindici; perciò sottratto il 12 dal -3 si ha il residuo -15 .

PROBLEMA NONO

54. **M**oltiplicare le quantità algebriche.

I. RISOLUZIONE I. Essendo che tutte le quantità sono o positive, o negative (n. 25.), perciò moltiplicandole tra di loro, i prodotti che ne verranno, saranno pure o positivi, o negativi; è dunque necessario moltiplicare in primo luogo tra di loro i segni, che hanno prefissi le quantità da moltiplicarsi, per ritrovare il segno da porsi avanti al ricercato prodotto, la qual cosa facilmente si otterrà colle seguenti regole.

REGOLA PRIMA

55. **I** segni simili, e medesimi moltiplicati tra di loro sempre danno più nel prodotto, vale a dire moltiplicando $+$ per $+$, o $-$ per $-$ nel prodotto sempre mettesi $+$; imperciocchè

$$\left. \begin{array}{l} + \times + \\ - \times - \end{array} \right\} +$$

moltiplicare $+$ per $+$ è porre una cosa positiva, o sia affermarla; ed il moltiplicare $-$ per $-$ egli è un negare una cosa negativa, perciò è la stessa cosa, che affermarla, poichè come dicono i filosofi, due negazioni affermano.

REGOLA SECONDA

66. **M**oltiplicando tra di loro segni contrarii, nel prodotto si metta sempre il segno negativo $-$; cioè moltiplicando $+$ nel $-$, o $-$ nel $+$, il prodotto sarà sempre $-$; poichè il

$$\left. \begin{array}{l} + \times - \\ - \times + \end{array} \right\} -$$

moltiplicare $+$ nel $-$ egli è un porre, o sia affermare il negativo; ma porre, o affermare il negativo è la stessa cosa, che negare il positivo; dunque moltiplicando una quantità positiva per una negativa, il prodotto sarà negativo.

Moltiplicare il $-$ nel $+$ egli è negare il positivo, sarà dunque lo stesso, che porre il negativo, conseguentemente una quantità negativa moltiplicata in una positiva darà il prodotto negativo.

57. II. Dopo fatta la moltiplicazione de' segni secondo le regole antecedenti, se le quantità letterali hanno de' numeri coefficienti (n. 23.) essi fra loro si moltiplichino, come nell'aritmetica volgare.

58. III. Finalmente la moltiplicazione delle quantità letterali si fa scrivendole l'una dopo l'altra, senza frapporvi verun segno tramezzo; qualche volta però si frammette il segno della moltiplicazione (n. 31.).

Laonde moltiplicando a per m , cioè (nn. 24. 35.)

+ $1a$ per + $1m$, il prodotto sarà + $1am$, o sia am , il quale ancora si esprime così $a \times m$. Medesimamente moltiplicando am per c , il prodotto si esprimerà $am \times c$, ovvero amc , oppure acm , ovvero cam , o mca ec.; poichè nulla importa con qualunque ordine si scrivano le lettere; sarà però sempre meglio assuefarsi a scriverle secondo l'ordine dell'alfabeto; perchè ciò riesce di maggior facilità nel calcolare, e ridurre a minori termini.

Similmente $abcmx$, ovvero $a \times b \times c \times m \times x$, oppure $abc \times mx$ ec. è il prodotto di a in b in c in m in x .

Moltiplicando $-3a$ per $5b$; cioè per + $5b$, il prodotto sarà $-15ab$, poichè $-$ moltiplicato per + (n. 56) fa $-$ nel prodotto, 3 nel 5 dà 15, ed a in b dà ab .

Medesimamente $4c$ moltiplicato per $3m$ dà nel prodotto $12cm$.

Moltiplicando cm , cioè + $1cm$ per $-7mx$, il prodotto sarà $-7cmmx$.

Supponiamo per esempio, che la quantità a significhi il numero 6, e la quantità b il numero 4, e la quantità c il numero 2. Mettiamo cioè, che sia $a=b$, $b=4$, $c=2$, allora il prodotto ab significherà 6×4 , cioè 24, ed il prodotto abc , o sia $ab \times c$ significherà 24×2 , vale a dire 48, e la quantità $sabc$ significherà 5×48 , cioè il numero 240.

59. RISOLUZIONE. II. Se una quantità composta (n. 36) dovrà moltiplicarsi per una semplice, in tal caso scrivasi la semplice quantità sotto al primo termine della quantità composta, e sotto si tiri una linea trasversale, poscia si moltiplichino la semplice quantità in ciascun termine della quantità composta, incominciando dalla parte sinistra, e proseguendo verso la destra, ed i particolari prodotti, che ne verranno, si scrivano sotto la linea l'uno dopo l'altro coi loro segni +, e -, diligentemente osservando tutte le regole state insegnate negli antecedenti numeri 55, 56, 57, e 58.

Si debba moltiplicare la quantità $a+2b-c$ per m . Posta la quantità m sotto al primo termine a , e tirata sotto di esse la linea, moltiplico m per a , e scrivo il prodotto am sotto della linea; poi moltiplico m per + $2b$, ed il prodotto + $2bm$ lo aggiungo al primo prodotto am , verso la destra. Finalmente moltiplico m per $-c$, ed il prodotto $-cm$ lo scrivo sotto della linea in terzo luogo; laonde il prodotto, che nasce moltiplicando $a+2b-c$ per m , sarà $am+2bm-cm$.

$$\begin{array}{r} a+2b-c \\ m \\ \hline am+2bm-cm \end{array}$$

Similmente moltiplicando la quantità $3a-4c+m$ per $3c$, si avrà il prodotto $9ac-12cc+3cm$. Lo stesso si intenda delle altre simili quantità.

$$\begin{array}{r} 3a-4c+m \\ 3c \\ \hline 9ac-12cc+3cm \end{array}$$

60. RISOLUZIONE III. Dovendo moltiplicare una quantità complessa per un'altra composta grandezza, scrivansi l'una sotto dell'altra le date quantità, e, tirata sotto di esse una linea, si moltiplichino ciascun termine della quantità inferiore in tutti i termini dell'altra quantità, e ciascun particolare prodotto si scriva sotto della linea l'uno dopo l'altro con i loro propri segni +, e -, e la somma di essi sarà il ricercato prodotto.

Sia la quantità moltiplicanda $a+b$, ed il moltiplicatore sia $c+x$, i quali si scrivano come si è detto, poscia si moltiplichino in primo luogo $a+b$ per c , ed il prodotto (n. 59) $ac+bc$ si metta sotto alla linea; quindi si moltiplichino la stessa quantità $a+b$ per $+x$, ed il prodotto $ax+bx$ si aggiunga al prodotto già ritrovato $ac+bc$; che però il prodotto di questa moltiplicazione sarà $ac+bc+ax+bx$.

$$\begin{array}{r} a+b \\ c+x \\ \hline ac+bc+ax+bx \end{array}$$

Similmente moltiplicando $3a+2b-cx$ per $4a-c$, il prodotto sarà $12aa+8ab-4acx-3ac-2bc+ccx$.

Parimente moltiplicando $am-3c+4$ per $b-4a+2$, si otterrà il prodotto $abm-3bc+4b-4aam+12ac-16a+2am-6c+8$.

Moltiplicando $a-c$

per $a-c$, si ottiene

il prodotto $aa-ac-ac+cc$, il quale ridotto a minori termini (n. 51) si esprime per $aa-2ac+cc$.

Per maggior rischiaramento di questa operazione, sia in numeri da moltiplicarsi $8-3$, che vuol dire 5 , per $6-2$, che significa 4 , ognuno vede, che il prodotto del 4 nel 5 si è 20 , si faccia ora la moltiplicazione del $8-3$ per $6-2$ algebraicamente, il prodotto sarà

$48-18-16+6$, il quale significa $6-2$
 $54-34$, cioè il 20 , prodotto del 5 significato dal $8-3$ nel 4 , indicato dal $6-2$.

Da questo esempio si vede evidentemente, che nella moltiplicazione i segni simili, cioè $+x+$, e $-x-$, danno $+$ nel prodotto, ed i segni contrari, cioè $+x-$, e $-x+$ producono $-$.

61. ANNOTAZIONE. I. Alcune volte accade, che la moltiplicazione delle quantità complesse non si dee fare attualmente, e basta soltanto accennarla, e ciò si fa per mezzo del segno della moltiplicazione (n. 31.), e tirando una linea, che copra i moltiplicatori composti.

Così $a+c-x \times b-m$ (che si legge $a+c-x$ tutto moltiplicato per tutto $b-m$) indica il prodotto, che nasce moltiplicando la quantità $a+c-x$ per la quantità $b-m$.

Parimente $4a+b-am \times c$ significa il prodotto $4ac+bc-acm$, che si trova moltiplicando $4a+b-am$ per c .

Ma la quantità $a-m+bx \times c$ (non tirando la linea sopra la quantità composta) significa soltanto $a-m+bc$.

Inoltre il prodotto delle quantità composte, massimamente per maggior facilità, e comodo della stampa, si esprime col chiudere tra parentesi il moltiplicatore, ed il moltiplicando; come $(a-c)(m-x)$ significa il prodotto di $a-c$ moltiplicato per $m-x$.

Similmente $(a+b)m$ significa il prodotto di $a+b$ moltiplicato per m .

62. ANNOTAZIONE II. Essendo cosa noiosa, e molesta il ripetere più d'una volta la stessa lettera nel medesimo prodotto di quantità semplici; perciò siccome nell'addizione (n. 51), la somma $a+a$ più brevemente si esprime per $2a$, e la somma $b+b+b$ per $3b$ ec.; così ancora nella moltiplicazione delle quantità il prodotto aa si esprime per a^2 , scrivendo cioè il numero 2 alla destra, ed alquanto sopra la lettera a ; il prodotto aaa esprime per a^3 ec. Parimente b^4 significa il prodotto $bbbb$ nato dal moltiplicare b in b in b in b , e così delle altre quantità.

Se dunque c significherà 3 ; c^2 , ossia $c \times c$ esprimerà il numero 9 ; c^3 , vale a dire $c \times c \times c$, significherà 27 ; ec.

63. I numeri poi, che sono scritti alla destra, ed alquanto sopra delle lettere si chiamano *indici*, o *esponenti* delle medesime quantità moltiplicate per se stesse una o più volte.

64. Quelle quantità, le quali non hanno veruno esponente, sempre s'intende, che abbiano l'unità per esponente. Così a significa a^1 , m significa m^1 ; b e c vale b^1 c^1 ec.

65. Quando si dovranno moltiplicare tra di loro quantità espresse dalle medesime lettere, allora si sommino gli esponenti di esse, e si avrà il prodotto delle medesime quantità.

Si debba moltiplicare a^3 per a^2 , il prodotto sarà a^{3+2} , cioè a^5 .

DIMOSTRAZIONE. Imperciocchè a^3 (n. 62) significa aaa , a^2 , aa , ma moltiplicando aaa per aa , il prodotto si esprime (n. 58) per $aaaaa$, il qual prodotto più semplicemente (n. 62) si esprime per a^5 . Dunque moltiplicando a^3 per a^2 , il prodotto sarà a^5 . Per la qual cosa la somma degli esponenti indica il prodotto delle quantità espresse dalle medesime lettere.

Sicchè moltiplicandosi b^4 per b^3 , il prodotto sarà b^7 : moltiplicando a , cioè (n. 64) a^1 per a^7 , il prodotto sarà a^8 .

Parimente moltiplicando a^1b^3 per a^4b^3 , il prodotto sarà a^5b^6 .

Similmente la quantità 4^7b^8x moltiplicata per $3a^4b^3m$, ne dà il prodotto $12a^4b^{11}mx$.

Dunque quando le quantità da moltiplicarsi insieme sono di già state prodotte dalla moltiplicazione di più quantità, allora solamente si deono sommare insieme gli esponenti delle quantità espresse dalle medesime lettere. Così dovendosi moltiplicare a^4c^2 per a^2bx^3 per ac^4 , il prodotto sarà $a^6bc^6x^3$.

Generalmente moltiplicando a^m per a^n , il prodotto sarà a^{m+n} , le lettere m , ed n esprimendo numeri indeterminati; perciò se m significherà 5, ed n il 3, allora a^{m+n} , esprimerà a^8 ; se sarà $m=4$, ed $n=2$, allora sarà a^{m+n} , $=a^6$ ec.

66. ANNOTAZIONE III. Dalle cose stabilite negli antecedenti numeri, e nel paragrafo secondo del numero 51, chiaramente si vede esservi grandissima differenza tra una quantità, che abbia qualsivoglia numero per esponente, e la stessa quantità, che abbia il medesimo numero per coefficiente; poichè l'esponente indica moltiplicazione, ed il coefficiente significa somma della stessa quantità.

Così molto diverse sono, e disuguali le quantità $2a$ ed a^2 ; $3a$, ed a^3 , ec.; imperciocchè supponiamo

che a significhi il numero 5; sia cioè $a=5$, allora (n. 23) sarà $2a=10$, $3a=15$, $4a=20$, ec., ma a^2 , cioè $a \times a$ significherà 5×5 , cioè 25; a^3 , o sia $a \times a \times a$ equivalerà al $5 \times 5 \times 5$, cioè al 125, ed a^4 significherà 625, ec.

Similmente facendo $m=10$, sarà $2m=20$, $3m=30$, $4m=40$, ec. ma sarà $m^2=100$; $m^3=1000$, $m^4=10000$, ec.

PROBLEMA DECIMO

67. Dividere le algebriche quantità.

RISOLUZIONE. I. Nella divisione delle quantità, totalmente come nella moltiplicazione (nn. 55, 56), i segni simili, e medesimi danno + nel quoziente, ed i segni contrari danno -; vale a dire dividendo + per +, o - per -, sempre al quoziente si preponga il segno +; ma dividendo + per -, ovvero - per +, sempre al quoziente si prefigga il segno -.

II. Se le quantità avranno de' numeri coefficienti, si dividano essi separatamente secondo le regole dell' aritmetica volgare.

68. III. Si tolgano dalla quantità dividenda tutte quelle lettere, le quali sono anche contenute nel divisore, e si avrà il ricercato quoziente.

Come dividendo $a b$ per a , il quoziente sarà b ; perchè moltiplicando il quoziente b pel divisore a , il prodotto restituisce la quantità dividenda $a b$.

$$ab \left| \frac{a}{b} \right.$$

Similmente dividendo $aacx$ per $-ac$, il quoziente sarà $-ax$; poichè $-ax \times -ac$ restituisce la quantità dividenda $aacx$.

Medesimamente dividendo $15abm$ per $3ab$, il quoziente sarà $5m$; poichè $5m \times 3ab$ restituisce $15abm$.

$$15abm \left| \frac{3ab}{5m} \right.$$

69. IV. Quando accade, che la dividenda quantità non contiene tutte le lettere, che sono nel divisore, allora il quoziente si esprima con una frazione, il cui numeratore sia la quantità dividenda, ed il denominatore sia il divisore.

Così dividendo a per x , il quoziente sarà $\frac{a}{x}$; e dividendo c per $-m$, il quoziente si esprimerà scrivendo $-\frac{c}{m}$, ovvero $-\frac{c}{m}$.

Volendo dividere $6am$ per $3x$, il quoziente sarà $\frac{6am}{3x}$, ovvero $\frac{2am}{x}$, oppure $2\frac{am}{x}$, perchè il coefficiente 6 si divide in interi pel coefficiente 3.

Similmente dividendo acx per mx , il quoziente sarà $\frac{acx}{mx}$.

70. V. Se le lettere comuni al divisore, e al dividendo avranno numeri esponenti (n. 63) allora si sottragga l'esponente del divisore dall'esponente del dividendo, ed il residuo sarà l'esponente del quoziente.

Così dividendo c^4 per c^3 , il quoziente sarà c^{4-3} , cioè c^1 .

DIMOSTRAZIONE. Imperciocchè c^4 (n. 62) significa $cccc$, e c^3 equivale alla quantità ccc ; ma dividendo $cccc$ per ccc , il quoziente (n. 68) sarà cc , cioè c^2 (n. 62.), dunque quando le quantità espresse dalle medesime lettere hanno degli esponenti, la divisione si dee fare sottraendo gli esponenti del divisore dagli esponenti della quantità dividenda, e porre i residui per esponenti del quoziente.

Dividendo $8a^3b^4c$ per $4a^2b^2c$, si ottiene il quoziente $2b^2$; perchè $2b^2 \times 4a^2b^2c$ restituisce $8a^3b^4c$.

Parimente dividendo $-a^7$ per $-a^3$, il quoziente sarà $+a^4$, o sia a^4 , poichè $a^4 \times -a^3$ restituisce $-a^7$.

Ma dividendo a^3 per a^4 , il quoziente sarà a^{3-4} , cioè a^{-1} ; poichè moltiplicando il divisore a^4 per il quoziente a^{-1} , il prodotto sarà a^{4-1} (num. 65), cioè a^3 , che restituisce la quantità dividenda.

Per la stessa ragione dividendo c^4 per c^7 , il quoziente sarà c^{4-7} , vale a dire c^{-3} ; essendo che $c^{-3} \times c^7$ produce c^{7-3} , cioè c^4 .

Generalmente dividendo a^m per a^n , il quoziente sempre sarà a^{m-n} ; perciocchè $a^{m-n} \times a^n$ produce a^{m-n+n} , cioè restituisce a^m .

71. Qualesivoglia quantità divisa per se stessa sempre dà per quoziente l'unità, imperciocchè qualsivoglia grandezza intera, o rotta, o mista, o semplice, o composta contiene se stessa una volta; perciò dividendoli a per a , il quoziente sarà 1; perchè il quoziente 1 moltiplicato pel divisore a restituisce la quantità dividenda $1a$, o sia a .

Per la stessa ragione dividendo $5b$ per $5b$, o $4ax$ per $4ax$, o $7a^3c$ per $7a^3c$, ovvero a^2-c per a^2-c , ec. il quoziente sarà sempre 1, come evidentemente si vede.

72. Quindi ne viene in conseguenza, che ogni quantità, la quale abbia per esponente la cifra 0, significherà 1; per esempio a^0 significa 1; poichè dovendo dividere, verbigrazia, la quantità a^3 pel divisore a^3 , secondo la regola stabilita al numero 70, si dee sottrarre l'esponente 3 del divisore dall'esponente 3 della quantità dividenda, ed il residuo 0 si dee porre per esponente del quoziente; onde dividendo a^3 per a^3 il quoziente sarà a^{3-3} , cioè a^0 . Ma per l'antecedente numero, qualsivoglia quantità divisa per se stessa, dà per quoziente l'unità, perciò dividendo a^3 per a^3 il quoziente è 1. Dunque a^0 significa 1.

Per la stessa ragione tutte le quantità b^0 , c^0 , m^0 , x^0 , ec., significano 1.

Medesimamente la quantità a^0x^0 significa 1; perchè a^0x^0 vale lo stesso, che $a^0 \times x^0$, cioè 1×1 , o sia 1.

Per la qual cosa dividendo a^3b per a^2b , cioè a^3b^1 per a^2b^1 , il quoziente sarà ab^0 , o sia $a^1 \times b^0$, cioè $a^1 \times 1$, il quale significa $1a^1$, o sia a .

Perciò ordinariamente si omettono quelle lettere, alle quali rimane l'esponente 0; massimamente quando da altre quantità sono moltiplicate; come dividendo $a^4c^3m^2x$ per $a^2c^1m^2$, il quoziente si esprimerà (n. 68) per a^2x , tralasciando di scrivervi c^0m^0 , che significano 1; il quale moltiplicando qualunque quantità non la cangia di valore.

73. RISOLUZIONE II. Quando una quantità complessa dovrà dividersi per una semplice, allora si scrivano primieramente le date quantità, come si è detto nel primo esempio del quinto problema. Quindi ciascun termine della quantità composta si divida pel dato divisore, come si può vedere ne' seguenti esempj.

Sia la quantità dividenda $ab+ac-ax$, e l' divisore sia a . Posto il divisore a alla destra della quantità dividenda, dopo la linea divisoria, e tirata l'altra linea sotto di esso, in primo luogo si divida ab per a , ed il quoziente b si scriva sotto al divisore per primo termine del quoziente. Di poi si divida il secondo termine $+ac$ per a , ed il quoziente $+c$ scrivasi per secondo termine del quoziente. Finalmente dividasi $-ax$ per a , ed il quoziente $-x$ mettasi per terzo termine del quoziente; conseguentemente sarà $b+c-x$ il quoziente, che ritrovasi dividendo $ab+ac-ax$ per a . Imperciocchè moltiplicando esso quoziente $b+c-x$ per a , il prodotto $ab+ac-ax$ restituisce la quantità dividenda.

$$\begin{array}{r} ab+ac-ax \quad | \quad a \\ \hline b+c-x \end{array}$$

Similmente dividendo

$$\begin{array}{r} 8ab-12am+4a \quad | \quad 4a \\ \hline 2b-3m+1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6acm-9acb-3ac+12acx \quad | \quad 3ac \\ \hline 2m-3b-1+4x \end{array}$$

Parimente dividendo la quantità $6acm-9acb-3ac+12acx$ per $3ac$, sarà $2m-3b-1+4x$ il quoziente.

58 ELEMENTI DELL' ARITMETICA

Medesimamente dividendo $3ab-bc-3b+bm$ per $-b$, si otterrà il quoziente $-3a+c+3-m$.

74. Che se la composta quantità dividenda avrà de' termini, i quali non si possono dividere in interi dal dato divisore, in tal caso la divisione di essi termini si faccia a modo di frazione.

Come dividendo $ac-cm+ab-x$ per c , il quoziente sarà $a-m+\frac{ab-x}{c}$

Per la stessa ragione dividendo la grandezza $a+bc-x$ per m , il quoziente sarà $\frac{a}{m}+\frac{bc}{m}-\frac{x}{m}$, ovvero $\frac{a+bc-x}{m}$.

Lo stesso s'intenda d' altre simili quantità.

75. RISOLUZIONE III. Finalmente dovendosi dividere una quantità composta per un'altra composta grandezza, allora si scrivano le date quantità, come si disse nella divisione de' numeri al primo esempio del problema quinto (n. 47); quindi si operi a un di presso come nella divisione de' numeri. Gli esempj seguenti rischiareranno il tutto.

Sia da dividersi la quantità $ab+am-ax$ per $b+m-x$; primieramente dividasi il termine $-ab-am+ax$ per a pel termine corrispondente b del divisore, ed il quoziente a scrivasi sotto la linea tirata sotto al divisore $b+m-x$; poscia si moltiplichi il ritrovato quoziente a in tutto il divisore $b+m-x$, ed il prodotto $ab+am-ax$ si sottragga dalla quantità dividenda, scrivendo $-ab-am+ax$ sotto, o dopo la stessa quantità dividenda $ab+am-ax$, ed il residuo sarà $ab+am-ax-ab-am+ax$ uguale zero, perchè (n. 51) i termini $+ab$, $-ab$, $+am$, $-am$, e $-ax$, $+ax$ vicendevolmente si distruggono, e nulla vi rimane; laonde il quoziente di questa divisione è a , perchè moltiplicando a pel divisore $b+m-x$, il prodotto $ab+am-ax$ restituisce la quantità dividenda.

Lo stesso quoziente a si sarebbe ottenuto, se si fosse diviso il secondo termine am pel corrispondente termine m del divisore, o pure si fosse diviso il $-ax$ per $-x$, e ciò perchè i termini del divisore sono ugualmente contenuti nei corrispondenti termini della dividenda quantità.

76. Dunque quando i termini del divisore sono ugualmente contenuti nei termini corrispondenti della quantità dividenda, siamo in libertà d'intraprendere la divisione per qual termine piace del divisore, il qual termine preso una volta, sempre si dee adoperare, nè mai si può cangiare nel corso dell'operazione, come si vedrà nel seguente esempio.

Sia da dividersi la quantità $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$ per $a + b - c$, le quali si scrivano come sopra si è detto; quindi s' instituisca la divisione per qual termine piace del divisore, esempigrazia per a , dividasì perciò a^2 per a ; il quoziente (num. 70) sarà a , il quale si scriva

$$\begin{array}{r} a^2 - b^2 + 2bc - c^2 \quad | \quad a + b - c \\ -a^2 - ab + ac \quad \quad \quad a - b + c \\ \hline -b^2 + 2bc - c^2 - ab + ac \\ + ab + b^2 - bc \\ \hline bc - c^2 + ac \\ -ac - bc + c^2 \\ \hline 0 \end{array}$$

per primo termine del quoziente sotto al divisore, e si moltiplichì esso quoziente a per tutto il divisore, ed il prodotto $a^2 + ab - ac$ si sottragga dalla quantità dividenda, cioè cangiati i segni si scriva $-a^2 - ab + ac$ dopo, o sotto la quantità dividenda $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$, il residuo sarà $a^2 - b^2 + 2bc - c^2 - a^2 - ab + ac$, e tolti i termini $+a^2$, $-a^2$, che si distruggono l' uno l' altro, rimarrà la quantità dividenda $-b^2 + 2bc - c^2 - ab + ac$ della quale si divida il termine $-ab$ per l' assunto termine a del divisore, ed il quoziente (nn. 67. 68) sarà $-b$, il quale scrivasi per secondo termine del quoziente; e si moltiplichì esso $-b$ nel divisore $a + b - c$, ed il prodotto $-ab - b^2 + bc$ sottraggasi

dalla quantità dividenda scrivendo sotto di essa $+ab + b^2 - bc$, il residuo sarà $-b^2 + 2bc - c^2 - ab + ac + ab + b^2 - bc$, e ridotto a minori termini (n. 51), rimarrà $bc - c^2 + ac$ la quantità dividenda, della quale dividasì il termine $+ac$ per l' assunto termine a del divisore, e sarà $+c$ il quoziente, il quale mettasi per terzo termine del ricercato quoziente; indi si moltiplichì nel divisore $a + b - c$, ed il prodotto $ac + bc - c^2$, sottraggasi dalla quantità dividenda $bc - c^2 + ac$, ed il residuo sarà $bc - c^2 + ac - ac - bc + c^2$ uguale al nulla, perchè $+bc$, $-bc$, $+c^2 - c^2$, e $+ac - ac$ si distruggono vicendevolmente. Sicchè sarà $a - b + c$ il quoziente di questa divisione; perciocchè moltiplicando $a - b + c$ nel divisore $a + b - c$, il prodotto $a^2 - ab + ac + ab - b^2 + bc - ac + bc - c^2$ ridotto a minori termini (n. 51) ci restituisce la quantità dividenda $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$.

77. Ma quando il divisore ha de' termini, che non sono ugualmente contenuti ne' corrispondenti termini della quantità dividenda, allora la divisione s' instituisca sempre per quel termine, che sarà contenuto più volte, o almeno intere volte ne' termini della quantità dividenda.

Per esempio dovendo dividere $c^3 - 3c^2x + 3cx^2 - x^3$ per $c^2 - 2cx + x^2$, in questo caso la divisione si può $c^3 - 3c^2x + 3cx^2 - x^3$ | $c^2 - 2cx + x^2$ ugualmente intraprendere per c^2 , o $-c^2x + 2cx^2 - x^3$ per x^2 , perchè questi due termini

sono contenuti ugualmente ne' termini loro corrispondenti c^3 , e $-x^3$, ma non mai s' instituisca per $2cx$, perchè non si ritroverebbe in interi il ricercato quoziente $c - x$; anzi ne nascerebbe una serie infinita di

termini decrescenti, la quale però, come si vedrà nell'annotazione alla proposizione 20 del lib. I. della Geometria, uguaglierà il suddetto quoziente $c-x$.

Sicchè dividendo c^3 per c^2 , il quoziente sarà c , il quale moltiplicato per tutto il divisore $c^2-2cx+x^2$, e sottratto il prodotto dalla quantità dividendanda, resterà la quantità dividendanda $-c^2x+2cx^2-x^3$, della quale, dividendo il termine $-c^2x$ per l'assunto termine c^2 del divisore, si avrà $-x$ pel secondo termine del quoziente, e perchè, moltiplicato $-x$ in tutto il divisore, e sottratto il prodotto dalla quantità dividendanda, nulla vi rimane; perciò sarà $c-x$ il quoziente di questa divisione.

78. Se dopo fatta la divisione vi rimane nella quantità dividendanda qualche termine, che non si possa dividere per l'assunto termine del divisore, allora quell'avanzo si scriva dopo del ritrovato quoziente con tutti i suoi segni per numeratore di una frazione, e per denominatore di essa si metta tutto il divisore.

Sia da dividersi la quantità a^2+c^2 pel divisore $a-c$; si divida a^2 per a , ed il quoziente a si moltiplichi nel divisore $a-c$, ed il prodotto

$$\begin{array}{r|l} a^2+c^2 & a-c \\ \hline -a^2+ac & \\ \hline c^2+ac & a+c+ \\ -ac+c^2 & \\ \hline & 2c^2 \end{array}$$

a^2-ac si sottragga dalla quantità dividendanda a^2+c^2 , il residuo sarà $a^2+c^2-a^2+ac$, cioè sarà (n. 51) c^2+ac ; di questo residuo si divida il termine $+ac$ per l'assunto termine a del divisore, sarà $+c$ il quoziente, che moltiplicato nel divisore $a-c$, e sottratto il prodotto $ac-c^2$ dalla quantità dividendanda c^2+ac , il residuo sarà $c^2+ac-ac+c^2$, vale a dire (n. 51) $2c^2$, il quale non si può in interi dividere per termine assunto a del divisore, perciò nel quoziente dopo $a+c$ si aggiunga per terzo termine

$+\frac{2c^2}{a-c}$ e sarà $a+c+\frac{2c^2}{a-c}$ il quoziente di questa divisione.

79. Se verus termine della quantità dividendanda si potrà dividere in interi da niun termine del divisore, allora il quoziente si esprimerà con una frazione, il cui numeratore sia la quantità dividendanda, ed il denominatore sia il divisore; come dividendo $ab+a^2$ per $m-x$; il quoziente sarà $\frac{ab+a^2}{m-x}$.

80. Inoltre la divisione delle quantità composte alcune volte si esprime ancora chiudendo tra parentesi il dividendando, e poi il divisore, e frapponendovi due punti tra di essi.

Così $(a+b) : (c-x)$ che leggesi $a+b$ diviso per $c-x$, significa il quoziente $\frac{a+b}{c-x}$.

Parimente $(ab-x) : m$, significa la stessa cosa, che $\frac{ab-x}{m}$.

ELEMENTI⁶³

DELL'

ARITMETICA UNIVERSALE



LIBRO SECONDO

DEL CALCOLO DELLE FRAZIONI

DEFINIZIONE I.

81. *P*arte aliquota di qualsivoglia quantità dicesi quella, che presa alcune volte uguaglia il suo tutto, cioè la quantità, di cui essa è parte. Ovvero è quella, per cui dividendo la data quantità, si ottiene un quoziente intero, senza veruna frazione.

Così il 3 è parte aliquota del 18, perchè il 3 replicato 6 volte uguaglia il 18, o sia perchè il 3 è un'intera sesta parte dello stesso numero 18.

Similmente il 5 è parte aliquota del 15, perchè dividendo il 15 pel 5, il quoziente è il numero intero 3; o perchè il 5 è l'intera terza parte del 15.

Per la stessa ragione c è parte aliquota di acm , perchè dividendo acm per c , il quoziente è l'intera quantità am .

Ma parte aliquota di qualunque quantità si chiama quella parte, la quale ripetuta intere volte non uguaglia quel tutto, di cui essa è parte, ma o lo supera, o manca da esso; ovvero si dice quella, per la quale non si può dividere in interi il suo tutto. Il numero 4 è parte aliquota del numero 14, perchè il numero 4 replicato 3 volte manca dal 14, e replicato quattro

64 ELEMENTI DELL'ARITMETICA
volte lo supera; o sia perchè dividendo il 14 per 4, non si ha per quoziente un numero intero.

DEFINIZIONE II.

82. *U*n numero dicesi misurare un altro numero, quando esso replicato alcune volte uguaglia l'altro; quando cioè è parte aliquota dell'altro numero.

Perciò la misura di un numero è un altro numero, che sia parte aliquota di esso, cioè, che intere volte replicato lo uguagli. Così il numero 3 ripetendolo quattro volte misura il 12. Similmente il 2, il 4, il 5, il 10 sono misure del numero 20.

Massima misura di un numero si chiama il numero più grande di tutti quelli, che lo misurano. Per esempio, le misure del numero 12 sono 1, 2, 3, 4, 6, delle quali la massima è il numero 6, come evidentemente si vede.

DEFINIZIONE III.

83. *M*isura comune di due o più numeri è quel numero, che è parte aliquota di ciascuno de' dati numeri. Il numero 3 è misura comune de' numeri 6, 12, 15, e 21, perchè separatamente misura ciascuno di essi. Per la stessa ragione il numero 2 è misura comune di tutti i numeri pari (n. 20.); e l'unità è misura comune di tutti i numeri razionali interi.

DEFINIZIONE IV.

84. *N*umero primo in se stesso, o incompleso chiamasi ogni numero, che abbia per misura la sola unità. Come i numeri 2, 5, 7, 11, 13, ciascuno de' quali non ha altra misura, fuorchè l'unità, sono numeri primi in se stessi, o sia incomplessi.

DEFINIZIONE V.

85. **N**umero composto in se stesso dicesi ogni numero, il quale, oltre all'unità, abbia qualche altro numero, che lo misuri. Il 6 è numero composto, perchè oltre all'unità ha per misura il 2, il 3.

DEFINIZIONE VI.

86. **N**umeri primi fra loro, o *incomplessi* tra di loro sono quelli, che non hanno veruna misura comune, eccettuatane l'unità. I numeri 8, e 15 paragonandoli insieme sono numeri primi fra loro, perchè nessun numero li misura tutti due, fuorchè l'unità.

Similmente i numeri 5, 6, 12, 17, sono numeri primi fra loro, quando insieme si considerano, perchè non hanno veruna comune misura, eccettuatane l'unità.

DEFINIZIONE VII.

87. **N**umeri fra loro composti sono quelli, che oltre all'unità hanno qualche numero, che li misura. Come i numeri 6, 12, 15, 21 sono composti tra di loro, perchè hanno la comune misura 3.

88. **COROLLARIO.** Perchè ogni numero preso una volta, misura se stesso, perciò la comune misura di due, o più numeri tra di loro composti, può essere uno de' medesimi numeri.

Per la qual cosa i numeri 5, 15, 20 sono fra loro composti; perchè il 5 misura se stesso, e misura gli altri due 15, e 20.

DEFINIZIONE VIII.

89. **M**assima comune misura di due, o più numeri è il massimo numero, che misura ciascuno di essi,

o pure è quel numero, pel quale dividendo ciascuno di essi, i quozienti che ne nascono, sono numeri primi fra loro. I due numeri 12, e 18 hanno per comuni misure l'1, il 2, il 3, ed il 6, e, come ognun vede, la massima comune misura di essi è il 6; e dividendo il 12, ed il 18 pel 6, i quozienti 2, e 3 sono numeri primi tra di loro.

DEFINIZIONE IX.

90. **U**na frazione (nn. 10, 11, 34) dicesi *ridotta alla minima denominazione, o alla minima espressione, o sia a minimi termini*, quando il numeratore, ed il denominatore di essa sono numeri primi fra loro (n. 86.), come la frazione $\frac{4}{5}$.

Similmente le frazioni $\frac{7}{10}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{8}$ ec. sono ridotte alla minima denominazione.

DEFINIZIONE X.

91. **F**razioni, o *rotte*, della stessa denominazione, o dello stesso nome, si dicono quelle, che hanno lo stesso denominatore; come le frazioni $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{5}{8}$, ovvero $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{m}$, $\frac{c}{m}$, ec.

Frazioni poi di diversa denominazione, o di diverso nome sono quelle, che hanno i denominatori differenti, come sono le frazioni $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, o le frazioni $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{m}$, $\frac{c}{x}$, ec.

Frazioni decimali si chiamano quelle, le quali hanno per loro denominatori i numeri 10, 100, 1000, 10000, 100000 ec.; tali sono le frazioni $\frac{7}{10}$, $\frac{9}{100}$, $\frac{45}{1000}$, ec.

DEFINIZIONE XI.

92. **T**utto ciò, che esiste, o si concepisce, che possa aver esistenza, dicesi *Cosa*; una cosa poi si dice *riferirsi*, o *aver relazione ad un'altra cosa*, quando insieme considerandole amendue, accade, che tra le proprietà, le quali assolutamente convengono ad una di esse, se ne trova alcuna, per mezzo della quale noi possiamo conchiudere, che all'altra cosa convenga qualche proprietà accidentale, che senza della prima non le conveniva. Si prendano esempigrazia i due numeri 5, ed 8; considerando il numero 8 in se stesso si troverà, che l'8 è uguale al $7+1$; $8=6+2$; $8=5+3$; $8=4+4$ ec.; ma insieme considerando i numeri 5, ed 8, perchè è $8=5+3$, subito si comprende, che il 5 è parte dell'8; ed allora si riferisce il 5 all'8.

DEFINIZIONE XII.

93. **C**iò poi, che ad una data cosa assolutamente non conviene, ma soltanto convenirle si conosce quando essa si riferisce ad un'altra cosa, dicesi *relazione*, o *abitudine*. Così del numero 5 considerato in se stesso, non si concepisce, che esso sia minore dell'8, se non quando si riferisce, o paragona il 5 all'8, nè tampoco del numero 8 considerato in se stesso, si concepisce, che sia maggiore del numero 5 se non quando l'8 si riferisce al 5. Ora poi l'essere parte del numero 8, o esser minore di esso è una relazione; siccome ancora è una relazione l'essere maggiore del numero 5.

DEFINIZIONE XIII.

94. **R**agione geometrica è quella relazione di una cosa ad un'altra dello stesso genere, la quale determina la grandezza dell'una dalla quantità dell'altra, senza che faccia d'uopo prendere una terza cosa omogenea. Siano, esempigrazia, due lunghezze, delle quali la prima si chiami A, e sia piedi 4, e l'altra B sia di 20 piedi; se si riferisce, o paragona l'A al B, cioè se si prende per misura la lunghezza A di 4 piedi si troverà, che la lunghezza A è contenuta cinque volte nella lunghezza B di 20 piedi; e perciò sarà la lunghezza A alla lunghezza B come uno al cinque, vale a dire la lunghezza A sarà la quinta parte della lunghezza B. Ma paragonando il B all'A, cioè prendendo per misura la lunghezza B, allora si troverà, che la lunghezza B contiene cinque volte la lunghezza A; e però la lunghezza B starà alla lunghezza A come cinque all'uno, sarà cioè, la lunghezza B quintupla della lunghezza A. Che però tanto la relazione della lunghezza A alla lunghezza B, quanto la relazione della lunghezza B alla lunghezza A si è determinata senza prendere un'altra lunghezza, conseguentemente sono due ragioni geometriche A al B, e B all'A, ovvero 4 al 20, e 20 al 4.

95. **COROLLARIO.** In ogni frazione il denominatore (n. 11.) significa l'unità, o sia un tutto diviso in parti, ed il numeratore numera quante di quelle parti, nel dato caso, si deono prendere; perciò la relazione del numeratore al denominatore si conosce, senza che faccia d'uopo prendere un'altra quantità omogenea al numeratore, e denominatore; dunque ogni frazione è una geometrica ragione.

DEFINIZIONE XIV.

96. In ogni ragione geometrica le quantità, che tra di loro si paragonano diconsi *termini della ragione*, de' quali il primo, cioè quello, che all' altro si riferisce, si noma *antecedente della ragione*; ed il secondo, al quale il primo si rapporta, si chiama *conseguente della ragione*.

Come della ragione 12 al 4, il termine 12 è antecedente, ed il 4 è il termine conseguente della medesima ragione.

Similmente della ragione a al b ; a è antecedente, e b è conseguente.

Il segno, di cui ci serviamo per esprimere qualsivoglia ragione geometrica, sono due punti posti fra l' antecedente, ed il conseguente, e significano *al*. Così 12:3 si legge *dodici al tre*. Parimente $c:m$ si legge *c al m*.

DEFINIZIONE XV.

97. Il quoziente, che nasce dividendo l' antecedente di qualsivoglia ragione geometrica pel suo conseguente, si chiama *nome della ragione*, ovvero *valore della ragione*, o pure *esponente della ragione*.

Che però della ragione 8:2 il nome, o valore sarà $\frac{8}{2}$, cioè 4; e della ragione 2:8 sarà $\frac{2}{8}$, che significa un quarto

Similmente della ragione $ab:a$, il valore sarà $\frac{ab}{a}$ cioè b ; e della ragione $m:c$ il valore, o esponente sarà $\frac{m}{c}$, e così delle altre.

98. COROLLARIO. Quindi ne viene, che qualsivoglia ragione geometrica è uguale ad una frazione, la quale abbia per numeratore l' antecedente della ragione,

70 ELEMENTI DELL' ARITMETICA

e per denominatore il conseguente della stessa ragione (96.)

Vicendevolmente qualsivoglia frazione è uguale ad una ragione geometrica, il cui antecedente sia il numeratore della frazione, ed il conseguente sia il denominatore della stessa frazione. Imperciocchè data la

ragione 8:2, il suo valore (n. 97.) è la frazione $\frac{8}{2}$, cioè 4. Scambievolmente data la frazione $\frac{8}{2}$, si forma l' uguale ragione 8:2, il cui valore si è 4.

DEFINIZIONE XVI.

99. *Ragioni geometriche simili, o uguali* diconsi quelle, che hanno i valori uguali; cioè quelle, i cui antecedenti hanno lo stesso rapporto ai loro propri conseguenti. Le ragioni 6:2, 15:5 sono fra loro uguali, perchè (n. 97.) hanno lo stesso nome, o valore 3, essendo $\frac{6}{2}=3$, e $\frac{15}{5}=3$; o perchè il 6 è triplo del 2, siccome il 15 è triplo del 5.

Ragioni geometriche disuguali sono quelle, le quali hanno valori ineguali; o quelle, gli antecedenti delle quali non hanno la medesima relazione ai loro conseguenti. Le due ragioni 8:2, 20:10 sono ineguali, perchè il valore della prima è $\frac{8}{2}$, cioè 4, e dell' altra è $\frac{20}{10}$ cioè 2; perciò la ragione 8:2 è maggiore della ragione 20:10, essendo $\frac{8}{2} > \frac{20}{10}$, cioè $4 > 2$.

100. COROLLARIO. I. Poichè le frazioni sono geometriche ragioni (n. 98.); perciò *frazioni uguali* sono quelle, che formano ragioni geometriche uguali; ossia quelle, i numeratori delle quali hanno la stessa relazione, o rapporto ai loro denominatori. Le due fra-

zioni $\frac{2}{6}$, $\frac{5}{15}$, sono uguali, perchè il numeratore 2 è il terzo del suo denominatore 6, come il numeratore 5 è la terza parte del suo denominatore 15; ovvero perchè l'una, e l'altra frazione significa la terza parte d'un intero.

Frazioni disuguali si dicono quando formano ragioni geometriche ineguali, o sia quando i numeratori di esse non hanno la stessa relazione ai loro denominatori.

Così la frazione $\frac{1}{3}$, la quale significa tre seste parti, cioè la metà d'un intero, e maggiore della frazione $\frac{5}{15}$, la quale significa cinque quindicesime parti d'un intero, o sia un terzo dell'intero medesimo.

Per la qual cosa ragioni geometriche uguali formano frazioni uguali, vicendevolmente le frazioni uguali costituiscono geometriche ragioni uguali.

101. COROLLARIO II. Dal fin qui detto facilmente si può comprendere, che moltiplicando, o dividendo il numeratore, ed il denominatore di qualsivoglia frazione per una medesima quantità, il valore della frazione non si cangia, imperciocchè lo stesso rapporto, che ha il numeratore al denominatore, l'avrà pure il doppio del numeratore al doppio del denominatore; il triplo del numeratore al triplo del denominatore; il quadruplo al quadruplo ec., e lo stesso rapporto avrà ancora la metà del numeratore alla metà del denominatore, il terzo del numeratore al terzo del denominatore ec.

Se per esempio della frazione $\frac{4}{12}$ si moltiplicheranno il numeratore 4, ed il denominatore 12 per 2, si avrà un'altra frazione $\frac{8}{24}$ uguale alla frazione $\frac{4}{12}$; poichè il numeratore 8 è la terza parte del suo denominatore 24, come il 4 è un terzo del suo denominatore 12;

ovvero perchè tanto le otto ventiquattresime parti d'un intero, quanto le quattro dodicesime parti significano la medesima parte dell'intero, cioè la terza parte.

Che se il numeratore 4, ed il denominatore 12 si divideranno amendue per 2, i quozienti 2, e 6 formeranno la frazione $\frac{2}{6}$ uguale alla data frazione $\frac{4}{12}$; poichè due seste parti d'un intero significano ancora la terza parte del medesimo intero, come la significa il rotto $\frac{4}{12}$.

Medesimamente data la frazione $\frac{ab}{a}$, la quale (n. 68.) significa b , moltiplicando il numeratore $a b$, ed il denominatore a per la stessa quantità c , si avrà un'altra frazione $\frac{abc}{ac}$ uguale alla data $\frac{ab}{a}$, perchè tanto $\frac{ab}{a}$ quanto $\frac{abc}{ac}$ significano (n. 68.) la medesima quantità b .

Che se data la frazione $\frac{abc}{ac}$ si divideranno il numeratore abc , ed il denominatore ac per la stessa grandezza a , rimarrà la frazione $\frac{bc}{c}$ uguale alla frazione $\frac{abc}{ac}$, perchè e l'una, e l'altra significano la stessa quantità b .

ANNOTAZIONE. Siccome il numeratore d'una frazione rappresenta una quantità dividenda, della quale il denominatore ne è il divisore, però dalle antecedenti nozioni si ricava, che nella divisione se si moltiplicheranno, o si divideranno per una medesima quantità il dividendo, ed il divisore, facendo poscia de' prodotti, o de' quozienti l'attuale divisione, il quoziente sarà sempre lo stesso. Esempigrazia si ottiene lo stesso quoziente 4 a dividere il 48, per 12, ovvero il 96 doppio di 48, per 24 doppio di 12, o pure l'8 sesta parte di 48, per 2 sesta parte del 12, ec.

DEFINIZIONE XVII.

102. **L'** equazione è il paragone, o confronto di due quantità uguali (n. 27), il quale si fa col frapporre tra le due quantità uguali il segno = dell'uguaglianza. Scrivendo $a=b$ abbiamo un'equazione, nella quale si esprime, che il valore di a è uguale al valore di b .

Parimente l'equazione $4+3=12-5$ significa, che il valore $4+3$ uguaglia il valore $12-5$.

In ogni equazione la quantità posta avanti al segno = si chiama *prima parte dell'equazione*, e quella, che sta scritta dopo il segno, dicesi *seconda parte dell'equazione*.

ASSIOMA I.

103. **Q**uelle cose, che sono uguali ad una terza, sono parimente uguali tra di loro.

Sia $6-2=4$, e $7-3=4$, per questo assioma si dee concludere, che sarà $6-2=7-3$.

Generalmente se sarà $a=m$, e $b=m$, sarà eziandio $a=b$.

2. Inoltre ciò che è maggiore, o minore di una delle cose uguali, sarà anche maggiore, o minore dell'altra.

Sia per esempio $a=c$, se una terza quantità b sarà maggiore di a , essa b sarà anche maggiore di c ; ma se la b in vece di essere maggiore, sarà minore di a , sarà ancora essa b minore di c .

ASSIOMA II.

104. **A** cose uguali aggiugnendo cose uguali, o pure una stessa cosa, le somme saranno uguali.

Siano date le equazioni $a=c$, e $b=m$, aggiugnendo

74 ELEMENTI DELL'ARITMETICA

la prima alla seconda equazione, si avrà $a+b=c+m$.

Parimente se sarà $a=c-m$, ed a queste cose uguali si aggiunga la medesima quantità m , si avrà l'equazione $a+m=c-m+m$, cioè (n. 51.) sarà $a+m=c$.

ASSIOMA III.

105. **D**a cose uguali levando cose uguali, ovvero una stessa cosa, le rimanenti cose saranno ancora uguali fra loro.

Sia $a=b$, e $c=m$, per questo assioma sarà ancora $a-c=b-m$,

Similmente data l'equazione $b=a+m$, sottraendo da queste cose uguali la stessa quantità m , rimarrà l'equazione $b-m=a+m-m$; cioè $b-m=a$ (n. 51.).

106. COROLLARIO. Da questi due assiomi ne segue, che, data qualsivoglia equazione, se uno, o più termini di essa si trasporteranno da una parte nell'altra dell'equazione, cangiandovi però i segni, cioè + in -, e - in +, le quantità rimarranno sempre uguali; perchè o si aggiungono cose uguali a cose uguali, quando si trasportano termini negativi, o si levano cose uguali da cose uguali, quando si trasferiscono termini positivi, come si può chiaramente vedere ne' seguenti esempj.

Sia l'equazione $7=12-5$, nella quale si trasferisca il -5 dalla seconda parte dell'equazione nella prima cangiandovi il segno - in +, si avrà un'altra equazione $7+5=12$; perchè trasportare il -5 col segno cangiato egli è un aggiugnere 5 a tutte due le parti dell'equazione.

Se poi data l'equazione $7+5=12$ si trasporterà il 7 dalla prima nella seconda parte dell'equazione cangiandovi (num. 35.) il segno + in -, sarà nuova equazione $5=12-7$; quindi si vede, che trasportare il positivo 7 col segno cangiato, egli è un togliere lo stesso 7 da amendue le parti dell'equazione, cioè da cose uguali.

Similmente se nell'equazione $14=10+6-2$ si transporteranno i due termini $+6-2$ dalla seconda nella prima parte, mutando i segni, ne verrà l'equazione $14-6+2=10$, come ocularmente si vede.

Che se tutti i termini da una parte dell'equazione si trasferiranno nell'altra parte, variandogli i segni, allora l'equazione si ridurrà allo zero, la qual cosa dicesi *ridurre l'equazione alla cifra*.

Così nell'antecedente equazione $14=10+6-2$ trasportando tutti i termini dalla seconda nella prima parte, cangiandovi i segni, rimarrà l'equazione $14-10-6+2=20$.

Questo trasportare uno, o più termini da una parte dell'equazione nell'altra coi segni variati, che non mai toglie l'equazione, per gli assiomi secondo, e terzo, si chiama *Antitesi*. Laonde essendo $7-3=4$, sarà per antitesi $7=4+3$. Medesimamente essendo $a+c=m$, per antitesi si avrà $a=m-c$, o pure riducendo alla cifra sarà $a+c-m=0$.

ASSIOMA IV.

107. **M**oltiplicando cose uguali per una terza, o per cose uguali, i prodotti saranno sempre uguali.

Sia l'equazione $6-2=4$, moltiplicando le uguali quantità $6-2$, e 4 per lo stesso numero 3 , i due prodotti $18-6$, e 12 saranno pure uguali, cioè sarà nuova equazione $18-6=12$.

Medesimamente essendo l'equazione $a=c$, moltiplicandola per m si avrà $am=cm$.

Parimente se sarà $a=b$, e $c=m$, moltiplicando un'equazione per l'altra, cioè a per c , e b per m , i prodotti saranno anche uguali, vale a dire sarà $ac=bm$ ec.

ASSIOMA V.

108. **D**ividendo cose uguali per una terza, o per cose uguali, i quozienti saranno anche uguali. Come dividendo l'equazione $12-4=8$ pel numero 2 , rimarrà $\frac{12}{2}-\frac{4}{2}=\frac{8}{2}$, cioè $6-2=4$.

Similmente dividendo l'equazione $ac=cm$ per c resterà $\frac{ac}{c}=\frac{cm}{c}$, cioè (n. 68.) $a=m$.

Per la stessa ragione, se avremo $a=b$, e $c=m$, dividendo la prima equazione per la seconda, per questo assioma resterà $\frac{a}{c}=\frac{b}{m}$.

ASSIOMA VI.

109. **A** cose disuguali aggiugnendo cose uguali, le somme, che si faranno, saranno disuguali.

Come ai numeri disuguali 8 , e 4 aggiugnendovi lo stesso numero 2 , le somme $8+2$, e $4+2$ saranno ineguali, cioè essendo $8>4$, sarà pure $8+2>4+2$, cioè $10>6$.

Similmente se saranno $a>c$, e $b=m$, per questo assioma sarà $a+b>c+m$.

ASSIOMA VII.

110. **D**alle cose disuguali levando cose uguali, le rimanenti saranno ancora disuguali.

Sia $12>8$, sarà ancora $12-2>8-2$, cioè $10>6$.

Parimente se avremo $a>b$, e $c=m$, sarà eziandio $a-c>b-m$.

ASSIOMA VIII.

111. **Q**uelle cose, che sono doppie, o triple, o quadruple ec., di una medesima, o di cose uguali, sono tra di loro uguali.

Sia a doppia di m , e c anche doppia della stessa m , sarà $a=c$.

ASSIOMA IX.

112. **Q**uelle cose, che sono la metà, o la terza, o la quarta parte, ec., di una stessa cosa, o di cose uguali, sono uguali fra loro.

Sia esempigravia b quarta parte di m , ed a sia anche la quarta parte della medesima quantità m , sarà $a=b$.

ASSIOMA X.

113. **I**l tutto è maggiore della sua parte.

ASSIOMA XI.

114. **O**gni tutto è uguale a tutte le sue parti prese insieme.

115. ANNOTAZIONE. In questo assioma intendiamo parlare di quelle parti, le quali attualmente sono contenute nel tutto, non già di tutte le parti possibili di esso tutto. Per esempio il 12 è composto dal 7, e dal 5, perciò abbiamo $12=7+5$; è altresì composto dal 10, e dal 2, e però abbiamo ancora $12=10+2$, ec., ma quantunque il 7, ed il 10, assolutamente parlando, sieno parti del 12, niuno mai potrà conchiudere, che il 12 sia uguale al $7+10$; perchè le parti 7, e 10 non possono essere contenute insieme nel tutto 12; poichè quando si prende il 10 per una parte del 12, allora oltre al 2, o all' $1+1$, niun'altra parte può essere contenuta nello stesso 12.

ASSIOMA XII.

116. **S**e di due quantità omogenee (n. 26.) che si paragonano tra di loro, la prima non sarà maggiore, nè

98 ELEMENTI DELL' ARITMETICA

minore dell'altra, sarà necessariamente la prima uguale alla seconda.

Se la prima non sarà eguale alla seconda, nè maggiore di essa, necessariamente sarà la prima minore della seconda.

Finalmente se la prima non sarà minore della seconda, nè uguale ad essa, allora sarà la prima maggiore della seconda; e ciò perchè le quantità omogenee sono sempre o disuguali, o uguali fra loro.

ASSIOMA XIII.

117. **S**e una quantità sarà maggiore di un'altra, e questa seconda sia maggiore di una terza, allora la prima sarà molto maggiore della terza. Sia $a>c$, e $c>m$, sarà $a>m$.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

118. **Q**uando si moltiplica una frazione pel suo denominatore, il prodotto sarà il numeratore della medesima frazione.

DIMOSTRAZIONE. Ogni frazione (come abbiamo osservato al paragrafo sesto del numero 47.) esprime il quoziente, che nasce dividendo il numeratore pel denominatore della medesima frazione, ma il quoziente di qualsivoglia divisione (nn. 49., 68., 69.) moltiplicato pel divisore restituisce la quantità dividenda; dunque moltiplicando la frazione, la quale esprime il quoziente, pel suo denominatore, il quale rappresenta il divisore, il prodotto sarà necessariamente il numeratore della frazione, il quale significa la quantità dividenda. Per la qual cosa a moltiplicare una frazione pel suo denominatore basta cancellare lo stesso denominatore, e rimarrà il numeratore per prodotto. La qual cosa si dovea dimostrare.

La frazione $\frac{12}{4}$ (la quale significa 3) moltiplicata per 4 dà il prodotto 12 , che è il numeratore della frazione.

Moltiplicando la frazione $\frac{2}{3}$ per 3 , il prodotto sarà 2 ; per esempio $\frac{2}{3}$ d' un soldo , che sono 8 denari , moltiplicati per 3 producono 24 denari , che sono soldi 2 .

Parimente la frazione $\frac{a}{m}$ moltiplicata per m dà il prodotto a .

La frazione $\frac{c-b}{a+m}$ moltiplicata per $a+m$ produce $c-b$, ec.

PROPOSIZIONE II.

PROBLEMA.

119. **D**ato un intero , esprimerlo con una frazione , che abbia un dato denominatore.

RISOLUZIONE , e DIMOSTRAZIONE . Si moltiplichino l' intero dato pel dato denominatore , ed al prodotto si sottoscriva lo stesso denominatore .

Come a trasmutare l' intero 5 in una frazione , che abbia l' 8 per denominatore , si moltiplichino 5 nel 8 , ed al prodotto 40 si sottoscriva lo stesso 8 per denominatore , e sarà la frazione $\frac{40}{8}$ uguale all' intero 5 (Probl. 5) .

Similmente a ridurre la quantità a in una frazione , che abbia il denominatore c , si operi come sopra , e sarà $\frac{ac}{c}$ la frazione ricercata , che ha il denominatore c , ed è uguale alla quantità a ; poichè (n. 68) $\frac{ac}{c}$ significa a .

Se c dovesse esprimersi con una frazione avente

80 ELEMENTI DELL' ARITMETICA

$a-m$ per denominatore ; allora moltiplicata la c per $a-m$, ed al prodotto $ac-cm$ sottoscrittogli $a-m$ per denominatore ; sarebbe $\frac{ac-cm}{a-m}$ la frazione , che si cercava , essendo $\frac{ac-cm}{a-m} = c$ (n. 75) .

L' unità medesima si esprime con una frazione di qualunque dato denominatore , per esempio 7 ; moltiplicando 1 in 7 , ed al prodotto 7 sottoscrivendo il denominatore 7 , e si avrà $\frac{7}{7} = 1$

Per la medesima ragione sarà $\frac{1^2}{1^2} = 1$; $\frac{a}{a} = 1$; $\frac{cm}{cm} = 1$; $\frac{a-c}{a-c} = 1$, ec. (n. 71) .

120. COROLLARIO I. Dunque ogni frazione , la quale abbia il numeratore uguale al denominatore , sempre significherà un intero , perchè si prendono tutte le parti , nelle quali è diviso l' intero medesimo . Perciò ciascuna delle frazioni $\frac{2}{2}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{4}{4}$, ec. , $\frac{a}{a}$, $\frac{b}{b}$, $\frac{c-x}{c-x}$ ec. significa 1 .

Ma la frazione , che ha il numeratore maggiore del denominatore , significa più d' un intero . Come la frazione $\frac{5}{4}$ significa 1 $\frac{1}{4}$, cioè un intero , e di più la quarta parte d' un intero .

Similmente la frazione $\frac{17}{6}$ significa 2 $\frac{5}{6}$, cioè due interi , e cinque seste parti d' un intero ec.

Quando il numeratore è minore del denominatore , allora la frazione significa meno d' un intero , ed è vera frazione , essendo le altre frazioni impropriamente dette . Come la frazione $\frac{2}{3}$, è vera frazione , ed esprime due terze parti d' un intero diviso in tre parti uguali .

121. COROLLARIO II. Se a qualsivoglia intero si sottoscrive per denominatore l' unità , si forma una fra-

zione, o quasi frazione, che sempre è uguale allo stesso intero. Così $\frac{4}{1}$ significa 4; $\frac{10}{1}$ significa 10; $\frac{4}{1}$ vale lo stesso, che a ; $\frac{c-m}{1}$ significa $c-m$, ec. Perchè il porre l'unità per denominatore dell'intero è la stessa cosa, che ridurre l'intero in una frazione, la quale abbia l'1 per denominatore.

122. ANNOTAZIONE. La pratica di ridurre le misure, i pesi, e le monete in altre di specie minore si deduce da questo problema. I denari nostrali, verbigrazia, sono parti dodicesime del soldo; i soldi sono parti ventesime della lira. Dunque per ridurre soldi 5 in denari, cioè in parti dodicesime del soldo, si moltiplichi il 5 per 12, e saranno 60 denari, cioè sessanta dodicesime parti del soldo, le quali equivagliano a soldi 5; essendo $\frac{60}{12} = 5$.

Similmente lire 4 d'argento ridotte in parti ventesime danno $\frac{80}{20}$, cioè 80 soldi.

PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA.

123. **R**idurre le frazioni in interi.

RISOLUZIONE. Le frazioni impropriamente dette, cioè quelle, che hanno il numeratore maggiore del denominatore, o uguale ad esso, si riducono in interi dividendo il numeratore pel denominatore. Come della frazione $\frac{12}{3}$ dividendo il numeratore 12 pel denominatore 3, si formano 4 interi. La frazione $\frac{abm}{a}$ si riduce all'intero bm , ec.

Che se, dopo fatta la divisione del numeratore pel denominatore, vi rimane qualche avanzo, allora il quo-

ziente sarà un numero misto. Così la frazione $\frac{22}{4}$ ci dà 5 $\frac{3}{4}$, cioè cinque interi, e tre quarte parti d'un intero. Esempigrazia ventitrè quarte parti della nostra lira d'argento formano cinque lire, e quindici soldi, i quali sono le tre quarte parti della lira.

PROPOSIZIONE IV.

PROBLEMA.

124. **R**itrovare la massima comune misura di due numeri.

RISOLUZIONE. Si divida il numero maggiore pel minore, e fatta la divisione, se non vi rimane verun avanzo, allora il numero minore è la massima misura ricercata (nn. 88. 89.). Come de' numeri 7, e 28 la massima comune misura è il 7, perchè dividendo il 28 per 7 niun avanzo vi rimane. Inoltre dividendo gli stessi numeri 7, e 28 pel 7, i quozienti 1, e 4 sono numeri primi tra di loro.

Se poi, diviso il maggiore pel minore, avanza qualche cosa, allora, nulla badando al quoziente, si noti il residuo, e per esso si divida il numero minore; e trovando un altro avanzo, per esso si divida il primo residuo; poi pel terzo residuo dividasi il secondo, ec. E così continuando, fintantochè si trovi un divisore, il quale divida esattamente in interi il precedente residuo, e quest'ultimo divisore sarà la massima misura comune ricercata.

Si cerchi per esempio la massima comune misura de' due numeri 203, e 667. Si divida 667 per 203, e niun conto facendo del quoziente 3, pel residuo 58 si divida il 203, e trovato il residuo 29, per esso si divida il primo avanzo 58, e fatta la divisione, non rimanendovi verun residuo, si conchiuda che l'ultimo di-

$$\begin{array}{r} 667 \overline{) 203} \quad 83 \\ \underline{609} \\ 58 \\ \underline{203} \\ 174 \\ \underline{174} \\ 0 \end{array}$$

visore 29 è la massima comune misura, che si cerca; imperciocchè dividendo i numeri 203, e 667 per 29, i quozienti 7, e 23 sono numeri primi fra loro (n. 86. 89.). Il che ec.

125. Se dopo fatta ogni divisione l'ultimo residuo sarà 1, questo significherà, che i due numeri dati sono primi tra di loro, e che non hanno veruna misura comune, eccettuatane l'unità.

Come cercando la massima comune misura de' due numeri 17, e 58; divido 58 per 17; e niun conto facendo del quoziente 3, trovo il residuo 7, pel quale divido il 17, e fatta la divisione, mi avanza 3, pel quale divido il 7, e trovo il residuo 1, il quale mi indica, che i due numeri 17, e 58 non hanno altra misura comune, che l'unità, e per conseguenza sono numeri primi fra di loro (n. 86.). Il che si era proposto di fare.

$$\begin{array}{r} 58 \overline{) 17} \\ \underline{51} \\ 7 \\ \underline{17} \\ 14 \\ \underline{14} \\ 0 \end{array}$$

PROPOSIZIONE V.

PROBLEMA.

126. **R**idurre le frazioni alla minima denominazione.

RISOLUZIONE. Primieramente per l'antecedente problema trovisi la massima comune misura del numeratore, e denominatore della frazione data. Poscia per la stessa misura comune si dividano il numeratore, ed il denominatore di essa frazione, ed i quozienti formeranno la ricercata frazione di minima espressione, ed uguale alla data frazione. Così per ridurre la frazione $\frac{12}{48}$ alla minima denominazione, si trovi (num. 124.) la massima comune misura de' numeri 32, e 48, la quale sarà 16, indi si dividano i due numeri 32, e 48 pel 16, ed i quozienti 2, 3 formeranno la frazione $\frac{2}{3}$ espressa co' minimi termini (n. 90.) perchè i due numeri 2, e 3 sono tra di loro primi (86.). Inoltre perchè il numeratore 32, ed il denominatore 48 sono stati divisi per lo stesso numero 16, i quozienti 2, 3 costituiscono la frazione $\frac{2}{3}$ (n. 101.) uguale alla frazione $\frac{12}{48}$.

Nella medesima maniera le frazioni $\frac{6}{20}$, $\frac{7}{14}$, $\frac{12}{32}$, $\frac{203}{667}$ si riducono alla minima denominazione $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{23}$ e così delle altre.

Similmente la frazione $\frac{am}{m}$ si riduce alla minima espressione $\frac{a}{1}$.

Parimente la frazione $\frac{a^s}{a^t}$ si riduce alla minima denominazione $\frac{1}{a^2}$ dividendo il numeratore a^s , ed il

denominatore a^1 per la stessa quantità a^1 . Ma dividendo a^3 pel divisore a^1 , da quanto si è dimostrato al numero 70, il quoziente è a^{3-1} , cioè a^{2-} ; dunque a^{2-} significa $\frac{1}{a^2}$.

Collo stesso raziocinio si dimostra, che c^{5-} significa $\frac{1}{c^5}$; a^{4-} significa $\frac{1}{a^4}$, ec.

Dunque la frazione $\frac{am}{c^1}$ si potrà esprimere per amc^{3-} , perchè essa frazione è il prodotto di am moltiplicato per $\frac{1}{c^1}$.

Similmente la frazione $\frac{a^2b}{cx^2}$ si esprimerà per $a^2bc^{1-}x^{2-}$; e la stessa cosa s'intenda di ogni altra simile frazione.

PROPOSIZIONE VI.

PROBLEMA

127. **R**idurre le frazioni alla medesima denominazione.
 RISOLUZIONE. 1. Quando sono soltanto due le frazioni da ridursi al medesimo nome, come $\frac{a}{m}$, $\frac{c}{n}$ allora il numeratore a , ed il denominatore m della prima si moltiplichino amendue per x denominatore della seconda frazione; indi il numeratore c , ed il denominatore x della seconda, si moltiplichino tutti due per m denominatore della prima frazione, e si otterranno le frazioni $\frac{ax}{mn}$, e $\frac{cm}{mn}$ dello stesso denominatore mn , ed uguali alle date frazioni $\frac{a}{m}$, $\frac{c}{n}$.

DIMOSTRAZIONE. Imperciocchè noi (n. 101.) abbiamo $\frac{ax}{mn} = \frac{a}{m}$, e $\frac{cm}{mn} = \frac{c}{n}$. Dunque, ec.

Nello stesso modo le due frazioni $\frac{2}{3}$, e $\frac{6}{7}$ si riducono alle frazioni $\frac{14}{21}$, e $\frac{12}{21}$ del medesimo denominatore 21, moltiplicando il 2, ed il 3 per 7, ed il 4, e 7 per 3.

2. Quando poi sono più di due le frazioni da ridursi al medesimo nome, come $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{m}{n}$, allora ciascun numeratore si moltiplichi pel prodotto di tutti i denominatori delle altre frazioni, cioè a per rx , b per cx , ed m per cr , ed i prodotti arx , bcx , mcr saranno i numeratori delle frazioni ridotte, e per comune denominatore si metta il prodotto, crx , di tutti i denominatori delle frazioni date, e saranno le frazioni $\frac{arx}{crx}$, $\frac{bcx}{crx}$, $\frac{mcr}{crx}$ del medesimo nome crx , e uguali alle frazioni date.

DIMOSTRAZIONE. Perciocchè da quanto si è detto nel numero 101, egli è $\frac{arx}{crx} = \frac{a}{c}$, $\frac{bcx}{crx} = \frac{b}{r}$, ed $\frac{mcr}{crx} = \frac{m}{n}$, il che si era proposto di fare, e dimostrare.

Per la medesima ragione date le frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, moltiplicando il 2 per 5×7 , cioè per 35, poscia il 4 per 3×7 , cioè per 21; indi il 6 per 3×5 , cioè per 15, si avranno i numeratori 70, 84, 90, il denominatore de' quali sarà il prodotto $3 \times 5 \times 7$, cioè 105; onde saranno le frazioni $\frac{70}{105}$, $\frac{84}{105}$, $\frac{90}{105}$ dello stesso denominatore 105, ed uguali alle date frazioni (n. 101).

128. COROLLARIO. Delle frazioni del medesimo nome quella è maggiore, la quale ha il numeratore maggiore, come chiaramente si vede; dunque, date due, o più frazioni di nome diverso, per conoscere quale di esse sia la maggiore, si riducano allo stesso nome, e quella, che avrà il maggior numeratore, sarà

la maggiore; come date le frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{7}$, per sapere quale di queste sia la maggiore, si riducano (n. 127) allo stesso nome, e si avranno le frazioni ridotte $\frac{16}{84}$, $\frac{63}{84}$, $\frac{60}{84}$, delle quali, come ocularmente si vede, la maggiore è $\frac{63}{84}$, la quale è uguale alla frazione $\frac{3}{4}$; perciò delle date frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{7}$, la maggiore di tutte è la frazione $\frac{3}{4}$,

PROPOSIZIONE VII.

PROBLEMA.

129. **S**ommare i rotti o frazioni.

RISOLUZIONE. Se le frazioni date hanno il medesimo denominatore, allora si sommino tutti i numeratori insieme (nn. 38. 50.); quindi alla somma de' numeratori si sottoscriva per denominatore il comune nome.

Così delle frazioni $\frac{a}{m}$, $\frac{-b}{m}$, $\frac{c}{m}$, $\frac{z-x}{m}$, la somma sarà $\frac{a-b+c+z-x}{m}$

Parimente la somma de' rotti $\frac{4}{11}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{2}{11}$ sarà $\frac{4+3+2}{11}$, cioè $\frac{9}{11}$.

Quando le frazioni non sono dello stesso nome, allora si riducano (127.) alla medesima denominazione, e poi si sommino, come si è detto antecedentemente.

Qualche volta però si fa la somma delle frazioni, senza ridurle allo stesso nome, scrivendole l'una dopo l'altra coi loro segni +, e -.

Come de' rotti $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{m}$, $\frac{-a}{x}$ la somma sarà $\frac{a}{c} + \frac{b}{m} - \frac{a}{x}$; ovvero $\frac{amx+bcx-acm}{cmx}$, se si ridurranno a comune denominatore.

Se occorrerà di sommare numeri misti, cioè interi con frazioni, in tal caso si riducano i rotti alla stessa denominazione, se non l'hanno; poi si sommino separatamente gl' interi, e separatamente i rotti, la somma de' quali se forma qualche intero (n. 123.) esso si aggiunga alla somma degl' interi.

Come de' numeri misti $8\frac{2}{3}$, $12\frac{4}{5}$, e $9\frac{6}{7}$, cioè (riducendo i rotti allo stesso nome) de' numeri $8\frac{70}{105}$, $12\frac{84}{105}$, $9\frac{90}{105}$, la somma sarà $29\frac{244}{105}$, o sia $31\frac{34}{105}$, perchè la somma de' rotti $\frac{244}{105}$ (n. 123) contiene due interi col rotto $\frac{34}{105}$.

PROPOSIZIONE VIII.

PROBLEMA.

130. **S**ottrarre le frazioni.

RISOLUZIONE. Quando le frazioni hanno lo stesso nome, si sottragga il numeratore della frazione sottraenda dal numeratore della frazione minuenda, ed al residuo si sottoscriva il comune denominatore.

Come della frazione $\frac{18}{25}$ sottraendo la frazione $\frac{14}{25}$ il residuo sarà $\frac{18-14}{25}$, cioè $\frac{4}{25}$; poichè sommando il residuo $\frac{4}{25}$ col rotto sottratto $\frac{14}{25}$ si restituisce il rotto minuendo $\frac{18}{25}$.

Per la stessa ragione sottraendo la frazione $\frac{c}{m}$ dalla frazione $\frac{a}{m}$ il residuo sarà $\frac{a-c}{m}$.

Parimente dalla frazione $\frac{a}{c+m}$ sottraendo la frazione $\frac{b-x}{c+m}$, il residuo sarà $\frac{a-b+x}{c+m}$.

Ma quando le frazioni date non hanno lo stesso denominatore, allora (n. 127.) si riducano al medesimo nome, e poi si operi come sopra.

131. Se una frazione si dovrà sottrarre da un intero, o pure un intero dovrà sottrarsi da una frazione, allora riducasi (119.) l'intero in frazione dello stesso nome della frazione data; poscia facciasi la sottrazione, come si è prescritto nell'antecedente numero.

Così per sottrarre dall'intero 8 la frazione $\frac{3}{4}$, riduco l'intero 8 in quinde parti, e (n. 119.) saranno $\frac{40}{4}$; indi sottraggo $\frac{3}{4}$ da $\frac{40}{4}$, il residuo sarà $\frac{37}{4}$, cioè $7\frac{3}{4}$, se (n. 123.) si riduce in interi.

Medesimamente per sottrarre dalla quantità a il rotto $\frac{c}{m}$, si riduca l' a in frazione (n. 119.) del nome m , sarà $\frac{am}{m}$; e fatta la sottrazione, l'avanzo sarà $\frac{am-c}{m}$,

Similmente volendo sottrarre la quantità b dalla frazione $\frac{a}{c}$, riduco il b in frazione del nome c (n. 119.), e sarà $\frac{bc}{c}$; indi fatta la sottrazione, il residuo sarà $\frac{a-bc}{c}$.

132. La sottrazione de' rotti di diverso nome si fa ancora senza ridurli al medesimo denominatore, cambiando i segni al numeratore della quantità sottraenda, come si è insegnato nel problema ottavo del primo libro.

Come della frazione $\frac{a}{m}$ sottraendo la frazione $\frac{c-m}{x}$,

il residuo sarà $\frac{a-c+m}{m \cdot x}$, e riducendo a comune denominatore, esso residuo sarebbe $\frac{ax-cm+mx}{mx}$.

PROPOSIZIONE IX.

PROBLEMA.

133. **M**oltiplicare le frazioni.

RISOLUZIONE. Si moltiplichino i numeratori tra di loro, e fra loro i denominatori, il primo prodotto sarà numeratore, ed il secondo sarà denominatore del prodotto ricercato.

Si debba moltiplicare $\frac{5}{7}$ per $\frac{3}{4}$, il prodotto sarà $\frac{5 \times 3}{7 \times 4}$, cioè $\frac{15}{28}$.

Nella stessa maniera moltiplicando il rotto $\frac{a}{c}$ per $\frac{b}{m}$ il prodotto sarà $\frac{ab}{cm}$.

DIMOSTRAZIONE. Perchè x (n. 21.) può significare qualsivoglia quantità; perciò supponiamo, che significhi la frazione $\frac{a}{c}$; sia cioè $\frac{a}{c} = x$. Medesimamente

si faccia $\frac{b}{m} = z$, ed avremo due equazioni, la prima delle quali si moltiplichino per c , e (per l'assioma 4, e proposizione 1.) si avrà altra equazione $a=cx$. Similmente l'equazione $\frac{b}{m} = z$ moltiplicata per m produrrà (n. 107., 118.) un'altra equazione $b=mz$.

Poscia l'equazione $a=cx$ si moltiplichino per l'equazione $b=mz$, cioè a per b , e cx per mz , si avrà un'altra equazione $ab=cmxz$, la quale si divida per cm , e (per l'assioma 5.) sarà $\frac{ab}{cm} = \frac{cmxz}{cm}$ cioè (n. 68.) sarà $\frac{ab}{cm} = xz$. Ma, per la supposizione fatta x signifi-

fica la frazione $\frac{a}{c}$ e z significa la frazione $\frac{b}{m}$, in conseguenza (n. 58.) il prodotto xz esprime il prodotto della frazione $\frac{a}{c}$ nella frazione $\frac{b}{m}$; ma dalla dimostrazione fatta abbiamo $\frac{ab}{cm} = xz$, e le cose uguali (n. 27.) si possono sostituire l'una in vece dell'altra, dunque anche $\frac{ab}{cm}$ sarà il prodotto della frazione $\frac{a}{c}$ nella frazione $\frac{b}{m}$.

Dunque moltiplicando i numeratori fra loro, e tra di loro i denominatori si ottiene il prodotto delle frazioni; la qual cosa si dovea dimostrare.

134. Dovendo moltiplicare un intero per una frazione, ovvero una frazione per un intero, si moltiplichino il numeratore della data frazione per l'intero dato, ed al prodotto si sottoscriva il denominatore della stessa frazione.

Così moltiplicando la frazione $\frac{3}{7}$ per l'intero 2, cioè (n. 121) per $\frac{2}{1}$ il prodotto sarà $\frac{6}{7}$ per l'antecedente dimostrazione.

Similmente moltiplicando $\frac{a}{m}$ per c , o sia per $\frac{c}{1}$ il prodotto sarà $\frac{ac}{m}$, cioè $\frac{ac}{m}$.

Quando un intero con frazione si ha da moltiplicare per un intero, allora si moltiplichino l'intero nell'intero, e nella frazione. Come moltiplicando 5 $\frac{3}{4}$ per 2, il prodotto sarà 10 $\frac{6}{4}$, e riducendo la frazione in interi (n. 123.) esso prodotto sarà 11 $\frac{1}{4}$, o sia 11 $\frac{1}{2}$ (n. 126.).

135. Se un intero con frazione si dovrà moltiplicare per un rotto, in tal caso si riduca (n. 119.)

92 ELEMENTI DELL'ARITMETICA

l'intero in frazione dello stesso nome della frazione annessa, colla quale si sommi, indi si faccia come sopra si è dimostrato.

Così a moltiplicare il numero misto 3 $\frac{1}{6}$ pel rotto $\frac{2}{7}$, riduco l'intero 3 in seste parti (n. 119.), ed avrò $\frac{18}{6}$, che unisco alla frazione $\frac{1}{6}$, e moltiplico la somma $\frac{19}{6}$ per $\frac{2}{7}$ ed avrò il prodotto $\frac{19}{21}$, il quale (123.) contiene un intero col rotto $\frac{4}{21}$, o sia $\frac{2}{11}$ (126.), dunque il prodotto sarà 1 $\frac{2}{21}$.

Finalmente se un numero misto si dovrà moltiplicare per un altro numero misto, allora ciascuno intero (119.) si riduca in una frazione dello stesso nome colla frazione, che gli sta annessa, colla quale si sommi, e nel rimanente si operi come sopra.

Sia da moltiplicarsi 4 $\frac{2}{3}$ per 6 $\frac{1}{4}$, riducasi l'intero 4 in terze parti $\frac{12}{3}$, le quali si aggiungano al rotto $\frac{2}{3}$, e l'intero 6 in quinte parti $\frac{30}{5}$, le quali si sommino col rotto annesso $\frac{1}{5}$; poi si moltiplichino $\frac{14}{3}$ per $\frac{31}{5}$, il prodotto sarà $\frac{434}{15}$, il quale ridotto in interi, ed a minimi termini (nn. 123. 126.) sarà 29 $\frac{4}{15}$.

PROPOSIZIONE X.

PROBLEMA.

136. **D**ividere le frazioni.

RISOLUZIONE. Si scrivano come si è fatto de' numeri, e quantità intere; poi si moltiplichino in croce, cioè il numeratore del rotto dividendo nel denominatore del rotto divisore, ed il prodotto si scriva per numeratore del quoziente; indi il denominatore del

rotto dividendo nel numeratore del divisore, ed il prodotto mettesi per denominatore del quoziente.

Così dividendo il rotto $\frac{a}{m}$ pel rotto $\frac{c}{n}$, il quoziente sarà $\frac{an}{mc}$.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo il rotto dividendo $\frac{a}{m} = x$ (n. 21.), ed il divisore $\frac{c}{n} = z$. Quindi la prima equazione $\frac{a}{m} = x$ si moltiplichi per m , e (ass. 4. e prop. 1.) si avrà l'equazione $a = mx$, la quale nuovamente si moltiplichi per c denominatore del divisore, ne nascerà (ass. 4.) nuova equazione $ac = cmx$. Nella stessa maniera la seconda equazione $\frac{c}{n} = z$ si moltiplichi per n , e per m , o sia per cm , e (107, 118) si avrà altra equazione $ms = cmz$. Finalmente l'equazione $ac = cmx$ si divida per l'equazione $ms = cmz$, vale a dire ac per ms , e cmx per cmz ; e (ass. 5.) sarà $\frac{ac}{ms} = \frac{cmx}{cmz}$, cioè (riducendo alla minima denominazione la seconda parte dell'equazione) si avrà $\frac{ac}{ms} = \frac{x}{z}$ (126.).

Ma $\frac{x}{z}$ è il quoziente, che nasce dividendo la quantità x (la quale significa la frazione dividenda $\frac{a}{m}$) per la quantità z , la quale esprime rotto divisore $\frac{c}{n}$; dunque ancora la frazione $\frac{ac}{ms}$ (dimostrata uguale ad $\frac{x}{z}$) esprimerà il quoziente, che nasce dividendo la frazione $\frac{a}{m}$ per la frazione $\frac{c}{n}$, la qual cosa si dovea dimostrare.

Sicchè dividendo il rotto $\frac{8}{19}$ pel rotto $\frac{3}{7}$ il quoziente sarà $\frac{8 \times 7}{19 \times 3}$, cioè $\frac{56}{57}$, e così degli altri.

Da questa operazione dimostrata si vede, che basta capovoltare il rotto divisore, indi moltiplicarlo pel rotto dividendo, e si ottiene il quoziente, essendo che $\frac{7}{3} \times \frac{8}{19}$ produce il quoziente $\frac{56}{57}$.

Inoltre quando le date frazioni hanno il medesimo denominatore, allora più facilmente si trova il quoziente mettendo il numeratore del rotto dividendo per numeratore del quoziente, e per suo denominatore il numeratore del divisore, e si avrà il ricercato quoziente espresso in minori termini; per esempio volendo dividere il rotto $\frac{3}{8}$ pel rotto $\frac{1}{8}$, il quoziente sarà $\frac{3}{1}$.

Poichè facendo la divisione coll' antecedente regola generale il quoziente sarebbe $\frac{3 \times 8}{8 \times 1}$, il quale ridotto a minimi termini (126.) si esprime per $\frac{3}{1}$.

137. Volendo dividere una frazione per un intero, o una quantità intera per una frazione, allora all'intero si sottoscriva l'unità per denominatore, acciocchè (121.) si faccia una quasi frazione; poscia si operi come sopra.

Così dividendo il rotto $\frac{a}{m}$ per l'intero c , o sia per $\frac{c}{1}$, si troverà il quoziente $\frac{1a}{cm}$, cioè $\frac{a}{cm}$.

Similmente il rotto $\frac{3}{4}$ diviso per l'intero 2, o $\frac{2}{1}$, dà il quoziente $\frac{3}{8}$.

Conseguentemente una frazione rimane divisa per un intero, se si moltiplica il suo denominatore per l'intero dato.

Dividendo un intero b , o sia $\frac{b}{1}$ (121. per la frazione $\frac{m}{c}$, il quoziente sarà $\frac{bc}{1m}$, cioè $\frac{bc}{m}$.

Parimente se si divide il 6, o sia $\frac{6}{1}$ per rotto $\frac{2}{3}$, il quoziente sarà $\frac{18}{2}$, cioè 9 (123).

Per la qual cosa un intero si divide per una frazione moltiplicando l'intero pel denominatore della frazione, e sottoscrivendo al prodotto, per denominatore, il numeratore della frazione.

138. Dovendosi dividere un numero misto per una frazione, o per un altro numero misto, allora si riduca l'intero in una frazione dello stesso nome della frazione annessa all'intero, colla quale si sommi, e nel rimanente si faccia come sopra.

Sia da dividersi il numero misto 12 $\frac{3}{4}$ per la frazione $\frac{1}{6}$; si riduca il 12 in quarte parti (119), si formerà la frazione $\frac{48}{4}$, la quale si aggiunga al rotto $\frac{3}{4}$, la somma sarà $\frac{51}{4}$, la quale dividasi per $\frac{1}{6}$, il quoziente sarà $\frac{106}{1}$, cioè 106 (123., 126.).

Medesimamente dividendo 8 $\frac{3}{5}$ cioè $\frac{43}{5}$ per 7 $\frac{1}{2}$, cioè per $\frac{14}{2}$, il quoziente sarà $\frac{86}{7}$, vale a dire 12 $\frac{2}{7}$.

139. ANNOTAZIONE. Se occorrerà di dover calcolare frazioni di frazioni, esse si ridurranno sempre ad una frazione semplice moltiplicandole insieme, cioè tutti i numeratori fra di loro, ed i denominatori anche fra loro, ed i prodotti formeranno un rotto semplice equivalente a tutti i dati rotti di rotti; per esempio il valore di $\frac{3}{4}$ di $\frac{1}{2}$ di $\frac{4}{5}$ sarà $\frac{3 \times 1 \times 4}{4 \times 2 \times 5}$, cioè $\frac{12}{40}$, che (126.) significa $\frac{3}{10}$; in fatti se parliamo della lira nostrale d'argento, quattro quinti della lira sono soldi 16, la metà di soldi

16 sono soldi 8, e tre quarti d'otto soldi sono soldi 6; ma tre decimi di essa lira sono parimente soldi 6, dunque tre quarti di un mezzo di quattro quinti di lira fanno tre decimi della stessa lira, cioè soldi 6.

Similmente il rotto di rotti $\frac{1}{2}$ di $\frac{4}{5}$ di $\frac{3}{4}$ di $\frac{1}{4}$ si riduce alla semplice frazione $\frac{34}{120}$, cioè $\frac{17}{60}$, per esempio $\frac{1}{4}$ di lira sono soldi 15, e $\frac{3}{4}$ di soldi 15 sono soldi 10, e $\frac{4}{5}$ di soldi 10 sono soldi 8, ed $\frac{1}{2}$ di soldi 8 sono soldi 4, i quali sono $\frac{1}{5}$ della lira, perciò la frazione $\frac{17}{60}$ equivale al suddetto rotto di rotti; e così degli altri.

Per la qual cosa le frazioni di frazioni quando saranno ridotte a frazioni semplici, si potranno calcolare, come le altre frazioni.

Nella moltiplicazione delle frazioni il prodotto è sempre minore delle frazioni, che si moltiplicano, perchè il moltiplicare una frazione per un'altra, egli è prendere una, o soltanto alcune parti della frazione moltiplicanda. Come il moltiplicare $\frac{1}{4}$ per $\frac{2}{3}$ significa, che si debbono prendere due terze parti del rotto $\frac{1}{4}$, e però il prodotto $\frac{2}{12}$, o sia $\frac{1}{6}$ è minore del rotto moltiplicando $\frac{1}{4}$; per esempio tre quarti di lira sono soldi 15, e due terzi di soldi 15 sono soldi 10. metà della lira, minore de' tre quarti di essa.

Al contrario nella divisione dei rotti, il quoziente è maggiore della frazione dividenda, e qualche volta è un numero intero, perchè una frazione può contenerne un'altra due, o più volte. Esempigrazia dividendo il rotto $\frac{4}{5}$ pel rotto $\frac{1}{10}$ il quoziente (136.) è $\frac{40}{5}$ cioè 8, poichè $\frac{1}{10} \times 8$ produce $\frac{8}{10}$, cioè restituisce (126.) il rotto dividendo $\frac{4}{5}$. Se parliamo della lira d'argento, quattro quinti di essa sono soldi 16, ed un decimo di lira sono soldi 2; ora è chiaro, che soldi 2 sono contenuti otto volte nei soldi 16.

ELEMENTI ⁹⁷

DELL' ARITMETICA UNIVERSALE

LIBRO TERZO

DELLE POTESTÀ DELLE QUANTITÀ, E DELLA ESTRAZIONE
DELLE RADICI.

DEFINIZIONE I.

140. **P**otestà, o dignità, o potenza di una quantità si chiama il prodotto, che nasce moltiplicando essa quantità per l'unità, o per se stessa una, o più volte.

DEFINIZIONE II.

141. **P**rima potestà di qualunque quantità è la stessa quantità presa una volta, o sia moltiplicata per l'unità. Come $a \times 1$, cioè a è la prima potestà della quantità a . $1 \times bm$, vale a dire bm , è la prima potestà della quantità bm .

Similmente 1×7 , cioè 7 è la prima potestà del numero 7, e così degli altri.

DEFINIZIONE III.

142. **Q**uadrato, o seconda potestà di qualsivoglia quantità è il prodotto, che si forma moltiplicando una volta per se stessa la data quantità. Sicchè il numero 49 è il quadrato, o seconda potestà del numero 7,

98. ELEMENTI DELL'ARITMETICA

perchè nasce dalla moltiplicazione del 7 nel 7. Il 64 è quadrato dell'8, perchè 8×8 fa 64.

Similmente moltiplicando a in a , il prodotto aa , o sia a^2 è il quadrato, o seconda potenza dell' a .

Parimente $9a^2b^4$ è il quadrato, o seconda potestà della quantità $3ab^2$, perchè $3ab^2 \times 3ab^2$ (65) produce $9a^2b^4$.

Il quadrato della quantità am sarà $am \times am$, cioè a^2m^2 .

Il quadrato, o seconda potestà di $-a$ sarà $-a \times -a$, vale a dire (55.) $+aa$, o sia a^2 .

La seconda potestà, o quadrato della quantità $5a^3b^2m$ sarà $25a^6b^4m^2$.

Medesimamente moltiplicando $a+b$ per $a+b$, il prodotto $a^2+2ab+b^2$ sarà il quadrato di $a+b$; ed il quadrato di $a-b$ sarà $a^2-2ab+b^2$ prodotto di $a-b$ moltiplicato per $a-b$.

Moltiplicando $a+1$ per $a+1$, si otterrà il suo quadrato a^2+2a+1 . Dunque se a significherà qualunque numero, veibgrazia 13, il suo quadrato a^2 sarà 169; se vorremo subito trovare il quadrato di $a+1$, cioè di 14, senza moltiplicare il 14 per 14 basterà al quadrato 169. aggiugnere $2a+1$, cioè $2 \times 13+1$, e la somma $169+26+1$, cioè 196 sarà il quadrato del 14.

(A) Il quadrato di $a-1$ sarà $a-1 \times a-1$, cioè a^2-2a+1 ; che però se a significherà 20, il suo quadrato a^2 significherà 400; ed il quadrato di $a-1$, cioè del 19 sarà a^2-2a+1 , cioè $400-2 \times 20+1$, vale a dire $400-40$, o sia 361.

Per la qual cosa se a qualunque numero quadrato si aggiungerà il doppio della sua radice, e di più la unità, la somma sarà il quadrato del numero, che supera dell'unità la medesima radice.

Ma se ad un numero quadrato si aggiungerà l'unità, e quindi dalla somma si sottrarrà il doppio della radice di esso quadrato, il residuo sarà il quadrato della stessa radice diminuita dell'unità.

Il quadrato della frazione $\frac{a}{c}$ sarà $\frac{a}{c} \times \frac{a}{c}$, cioè $\frac{a^2}{c^2}$; ed il quadrato del rotto $\frac{1}{c}$ sarà $\frac{1}{c} \times \frac{1}{c}$, cioè $\frac{1}{c^2}$.

Il quadrato di $\frac{1}{c^3}$ sarà $\frac{1}{c^3} \times \frac{1}{c^3}$ vale a dire $\frac{1}{c^6}$. Medesimamente il quadrato di c^{-3} sarà c^{-6} ; perchè (126.) c^{-3} significa $\frac{1}{c^3}$, e c^{-6} equivale ad $\frac{1}{c^6}$; ed inoltre perchè $c^{-3} \times c^{-3}$ produce c^{-6} (65.).

DEFINIZIONE IV.

143. **C**ubo, o terza potestà di una quantità si chiama il prodotto, che nasce moltiplicando la medesima quantità pel suo quadrato, cioè due volte per se stessa.

Così moltiplicando a per a , per a , o sia a^2 per a , il prodotto aaa , o a^3 è il cubo, o terza potestà della grandezza a .

Il numero 8 è cubo del 2, perchè si ottiene moltiplicando 2 in 2 in 2, o sia 4 in 2. Per la stessa ragione 27 è il cubo del 3, perchè $3 \times 3 \times 3$, o sia 9×3 produce il 27.

Il cubo di am sarà $a^2 m^2 \times am$, cioè $a^3 m^3$; ed il cubo della quantità $5a^3 b^2 m$ è $25a^6 b^4 m^2 \times 5a^3 b^2 m$, vale a dire $125a^9 b^6 m^3$.

Il cubo di $-a$ sarà $-a^3$; perchè $-a \times -a$ dà il prodotto $+a^2$, e $+a^2 \times -a$ dà $-a^3$.

Similmente moltiplicando il quadrato di $a+b$, che è $a^2+2ab+b^2$ per $a+b$, il prodotto $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ sarà il cubo, o terza potestà della quantità $a+b$; e così delle altre quantità.

(D) Il cubo di $a-1$ sarà $a^2-2a+1 \times a-1$, cioè a^3-3a^2+3a-1 , il quale ci manifesta, che se ad un numero cubo si aggiunge il triplo di sua radice, e da questa somma si sottrae la somma dell'unità col triplo

100 ELEMENTI DELL' ARITMETICA

quadrato di essa radice, il residuo sarà il cubo della medesima radice diminuita dell'unità.

Se per esempio al cubo di 5, che è 125, si aggiunge il 15 triplo della radice 5, e dalla somma 140 si sottrae la somma dell'unità col triplo quadrato di essa radice 5, cioè $3 \times 25 + 1$, vale a dire 76, il residuo $140 - 76$, che è 64, sarà il cubo di $5-1$, cioè del 4; la qual cosa è evidente.

Parimente il cubo di $\frac{a}{c}$ sarà $\frac{a^2}{c^2} \times \frac{a}{c}$, cioè $\frac{a^3}{c^3}$.

Per la stessa ragione il cubo di $\frac{1}{c}$ sarà $\frac{1}{c^3}$; e quello di c^{-1} sarà c^{-3} ec.

144. **Q**uarta potestà, o quadrato-quadrato di una quantità è il prodotto, che si fa moltiplicando la stessa quantità pel suo cubo. Così moltiplicando a^3 per a , il prodotto a^4 è la quarta potestà di a . Moltiplicando 27 per 3, il prodotto 81 è il quadrato-quadrato, o sia quarta potestà del 3 ec.

Se si moltiplica la quarta potestà di a , cioè a^4 per a , si avrà a^5 quinta potestà di a : e così proseguendo a^6 , a^7 , a^8 ec. sono le potestà sesta, settima, ottava ec. della medesima quantità a .

Per la qual cosa moltiplicando 2 in 2, si fa 4 quadrato del 2; il 2 in 4 dà 8 cubo di esso 2; il 2 nel 8 fa 16, quarta potestà del 2; il 2 nel 16 dà 32 quinta potestà del medesimo 2; il 2 nel 32 produce 64 sesta potenza di esso 2, e così continuando si trovano le altre potestà; e la stessa cosa s'intenda di ogni altra quantità.

(L) Inoltre gioverà osservare, che moltiplicando qualunque quadrato a^2 per un altro quadrato c^2 la radice ac del prodotto $a^2 c^2$ è sempre uguale al prodotto delle due radici a , e c dei dati quadrati.

Così moltiplicando il 25 quadrato del 5 per 4 quadrato del 2, il prodotto 100 ha per radice quadrata il 10, che è il prodotto della radice 5 nella radice 2.

Medesimamente a^3 cubo di a moltiplicato per m^3 , cubo di m , dà il prodotto a^3m^3 , il quale è il cubo di am prodotto della radice cubica a nella radice cubica m .

Laonde moltiplicando 27 cubo del 3 per 8, cubo del 2, il prodotto 216 è il cubo del 6, che è prodotto dalla radice 3 moltiplicata per la radice 2. La stessa cosa si verifica delle altre potestà, come facilmente si può scorgere.

145. COROLLARIO. I. Da quanto si è detto nelle antecedenti definizioni, si può facilmente comprendere, che per elevare a qualsivoglia potestà qualunque quantità letterale semplice, e positiva, basta moltiplicare gli esponenti di essa quantità pel numero della potestà ricercata.

Così per elevare alla seconda potestà la quantità $ab^2c^3m^6$ si moltiplichino gli esponenti 1, 2, 3, 6 pel numero 2, e sarà $a^2b^4c^6m^{12}$ la seconda potestà, o sia il quadrato di $ab^2c^3m^6$, imperciocchè (142.) moltiplicando $ab^2c^3m^6$ per $ab^2c^3m^6$ si ottiene lo stesso quadrato $a^2b^4c^6m^{12}$.

La terza potestà di ab^4c^2 si ottiene triplicando gli esponenti 1, 4, 2, e sarà $a^3b^{12}c^6$ il cubo, o terza potestà di ab^4c^2 .

La quarta potestà si ottiene moltiplicando gli esponenti per 4; la quinta moltiplicandoli per 5, e così successivamente.

Ma se la data quantità sarà negativa, allora le potestà pari di essa quantità, cioè la seconda potestà, la quarta, la sesta ec. saranno positive; e le potestà dispari, cioè la terza, la quinta, la settima, ec. saranno negative, come evidentemente ne segue dalla moltiplicazione de' segni (55., 56.). Così la serie delle potestà di $-a$ sarà $-a$, a^2 , $-a^3$, a^4 , $-a^5$, a^6 , $-a^7$ ec.

Se le quantità hanno numeri coefficienti, di essi si trovino le potestà, come si è detto negli antecedenti

101 ELEMENTI DELL'ARITMETICA

numeri, moltiplicandoli in se stessi. Così la terza potestà della quantità $4a^2b^7$ sarà $4 \times 4 \times 4a^6b^{21}$, cioè $64a^6b^{21}$ (143).

146. COROLLARIO II. Dunque non si può dare verun quadrato negativo; perchè o si moltiplica una quantità positiva per se stessa, o una quantità negativa per se medesima, ed il prodotto sempre (55.) sarà positivo. Lo stesso raziocinio si applichi a tutte le potestà pari, le quali sempre saranno positive.

147. ANNOTAZIONE. Quallsivoglia potestà delle quantità composte alcune volte si esprime tirandovi sopra una linea retta, o chiudendole entro una parentesi, e scrivendole alla destra l'esponente della potestà ricercata.

Così $\overline{a+c^2}$, o pure $(a+c^2)^2$ significa il quadrato, o seconda potestà di $a+c$, cioè $a^2+2ac+c^2$.

Similmente $\overline{a+c^3}$, o pure $(a+c)^3$ indica il cubo, o terza potestà di $a+c$, vale a dire significa $a^3+3a^2c+3ac^2+c^3$.

DEFINIZIONE V.

148. **L**a prima potestà (141.) di qualsivoglia quantità, cioè quella grandezza, di cui si cercano, o sono date le potestà, chiamasi lato, o radice delle medesime potestà. Così a è radice quadrata, o radice seconda di a^2 ; è radice terza, o cubica di a^3 ; radice quarta di a^4 ; e così discorrendo.

Similmente il numero 3 è radice quadrata del 9; radice cubica, o terza del 27, radice quarta del numero 81; radice quinta del 243. ec.

DEFINIZIONE VI.

149. **E**strazione della radice si chiama quella operazione, che si fa per ritrovare il lato, o sia radice di

una data potestà, e da alcuni viene chiamata quinta operazione dell' Aritmetica.

Come estrarre la radice quadrata dal numero 144 è ritrovare il numero 12; il cui quadrato è il 144 (142.)

Estrarre la radice cubica dalla quantità a^6 è trovare la quantità a^2 , il cubo della quale è a^6 (143.).

DEFINIZIONE VII.

150. **M**oltiplicando tra di loro due quantità disuguali, il prodotto, che nasce, si chiama ancora *rettangolo* delle medesime quantità, le quali si nomano *lati dello stesso rettangolo*. Così il prodotto *am* dicesi rettangolo contenuto dalle quantità a , ed m , le quali chiamansi lati del medesimo rettangolo *am*.

DEFINIZIONE VIII.

151. **Q**uantità *commensurabili* diconsi quelle, che hanno qualche parte aliquota, o misura comune (81., 82.); o pure sono quelle, una delle quali è parte aliquota dell' altra.

Tutti i numeri volgari tanto interi, quanto rotti, o misti sono tutti commensurabili tra di loro, perchè hanno per misura comune o l'unità, o qualche parte dell'unità medesima, e per questa ragione si chiamano *numeri razionali*.

Così l'intero 2, e la frazione $\frac{1}{4}$ hanno per comune misura il rotto $\frac{1}{4}$, il quale è contenuto tre volte nel rotto $\frac{3}{4}$, e otto volte nell' intero 2; poichè l' intero 2 si esprime colla frazione $\frac{8}{4}$ (119.).

Medesimamente l'intero 4, ed il numero misto $5\frac{2}{3}$ hanno per misura comune il rotto $\frac{1}{3}$, il quale dodici volte è contenuto nell' intero 4 (119.), e di-

ciassette volte nel numero misto $5\frac{2}{3}$, il quale si esprime con $\frac{17}{3}$

Similmente le due frazioni $\frac{2}{3}$, e $\frac{4}{6}$, le quali ridotte alla medesima denominazione si esprimono per $\frac{2}{3}$, e $\frac{4}{6}$, hanno per misura comune $\frac{1}{3}$.

Conseguentemente tutti i numeri razionali sono commensurabili coll' unità, perchè o sono misurati dalla unità medesima, o da qualche parte aliquota dell' unità.

Incommensurabili poi si nomano quelle *quantità*, le quali non possono avere veruna misura comune, ovvero sono quelle, che non hanno veruna unità, alla quale siano commensurabili; perciocchè ogni misura è una, e si può prendere per l' unità (2).

152. COROLLARIO. Per la qual cosa le quantità commensurabili avranno tra di loro il rapporto, che ha l'unità ad un numero razionale intero; o pure un numero razionale intero ad un altro numero razionale intero. Imperciocchè o una di esse è parte aliquota dell' altra, ed allora, prendendo la minore per unità, alla quantità maggiore corrisponderà un numero intero razionale; e però starà la minore alla maggiore, come l'unità ad un numero intero razionale. Così, per esempio, $3a$ sta al $12a$ come 1 al 4 prendendo $3a$ per unità. Ovvero le date quantità hanno una parte aliquota, o misura comune; ed allora prendendo essa misura comune per unità, all' una, ed all' altra quantità corrisponderà un numero intero razionale; conseguentemente staranno tra di loro come un intero razionale intero ad un altro numero intero razionale. Esempigratia $6a$ sta al $15a$ come il 2 al 5; poichè prendendo per unità la comune misura $3a$, alla quantità $6a$ corrisponderà il numero 2, ed alla quantità $15a$ corrisponderà il numero 5; perciò $6a$ sta al $15a$ come il 2 al 5.

Inoltre essendochè ogni numero razionale è commensurabile coll'unità, e le grandezze incommensurabili non avendo veruna unità, alla quale sieno commensurabili; però quelle quantità, le quali non sono tra di loro come l'unità ad un numero razionale, o come un numero razionale ad un altro numero razionale, saranno quantità incommensurabili.

DEFINIZIONE IX.

153. Il segno, di cui ci serviamo per indicare le radici delle potestà, è questo $\sqrt{\quad}$, il quale si chiama *segno radicale*.

Quando dalla quantità posta sotto al segno radicale non si può estrarre la radice ricercata, allora quella quantità sia numerica, sia letterale, dicesi *quantità irrazionale, o sorda, o potestà imperfetta, o quantità radicale*.

Nella cima, o apertura superiore del segno radicale si mette il numero della radice ricercata, e quel numero si noma *indice, o esponente di quella potestà*, di cui ne indica la radice.

Ma quando si tratta di radice quadrata, o sia di radice seconda, non si mette il numero 2 nella cima del segno, e vi s'intende.

Come $\sqrt{64}$, significa 8, cioè la radice quadrata, o sia seconda del numero 64.

Parimente $\sqrt[3]{\quad}$ indica la radice seconda del numero 3, la qual radice non si può esprimere da verun numero razionale; perchè non si può trovare un numero razionale, il quale moltiplicato per se stesso dia il prodotto 3. Conseguentemente $\sqrt[3]{\quad}$ è un numero incommensurabile all'unità.

Ma $\sqrt[3]{64}$ significa 4 radice cubica di 64. similmente

$\sqrt[3]{a^3}$ significa a , cioè la radice cubica di a^3 .

I numeri, che sono incommensurabili all'unità si dicono *irrazionali, o sordi*; e quelli, che si riferiscono alla seconda potestà si chiamano *numeri irrazionali del primo ordine*, quali sono $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, ec.

Quelli poi, che si riferiscono alla terza potestà, diconsi numeri razionali del secondo ordine, come

sono $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, ec.

PROBLEMA I.

154. **E**strarre la radice quadrata de'numeri.

RISOLUZIONE. Quando il numero dato è quadrato, e non è maggiore del numero 100, allora la radice quadrata di esso si trova nella seguente tabella, nella cui prima, e superiore colonna vi sono le radici, e nell'altra inferiore i rispettivi quadrati di esse radici.

Radici	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrati	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Da questa tabella si vede chiaramente, che la radice quadrata di 25 è il 5; quella di 81 è il 9, ec.

155. Ma se il dato numero minore del 100 non è quadrato, allora si prenda la radice quadrata del maggior numero quadrato contenuto nel numero dato, e questa dicesi *radice prossima minore del dato numero*. Come la radice quadrata del numero 28 non si può trovare, perchè non vi è numero razionale, che moltiplicato per se stesso possa produrre il numero 28; perciò si prenda la sua radice prossima minore, la quale è il 5, perchè il 25 suo quadrato è

il massimo quadrato di numeri interi, che sia contenuto nel numero 28.

Similmente la radice quadrata prossima minore del 96 è il 9, perchè il suo quadrato 81 è il massimo de' quadrati interi contenuti nel dato numero 96.

156. Quando il dato numero è maggiore di cento, allora la radice quadrata di esso si estraiga nella seguente maniera.

1. Dividasi il dato numero in membri, separando con un punto le figure di esso due a due, incominciando dalla parte destra, e proseguendo verso la sinistra, e se il numero delle figure sarà pari, ciascun membro conterrà due figure; ma se il numero delle figure sarà dispari, il primo membro alla sinistra avrà soltanto una figura. Inoltre quanti saranno i membri, altrettante figure avrà la radice.

Premesse queste cose si operi come nel seguente esempio.

Sia dato il numero A, cioè 294849, dal quale si debba estrarre la radice quadrata.

Dividasi in membri, come si è detto, indi si cerchi nell' antecedente tabella la radice quadrata del primo membro 29 posto alla sinistra, e perchè non è numero quadrato, si prenda (155.) la radice prossima minore, la quale è 5, e si metta alla destra in B, interpostavi una riga dall' alto al

A	B
29.48.49.	543
25	C
44	10
2916	D
324	108
294849	
0	

basso tra i numeri A, e B. Quindi in se stessa si moltiplichi la radice 5, ed il suo quadrato 25 si sottragga dal membro 29, e alla destra del residuo 4 si discenda la prima figura 4 del secondo membro 48, si formerà il numero 44. Poscia si raddoppi la radice trovata 5, e si farà il divisore 10, che scrivasi in

C, e dividasi 44 pel 10, il quoziente sarà 4, il quale mettrasi in B per seconda figura della radice, cioè alla destra del 5, e si avrà il 54, che moltiplichisi per se stesso, e si otterrà il suo quadrato 2916, il quale scrivasi sotto del 44, ma ordinatamente sotto le figure 2948, che formano i due primi membri a sinistra del numero A; e sottraggasi il 2916 dal 2948, il residuo sarà 32, alla cui destra si discenda la prima figura 4 del terzo membro 49; e si avrà altro membro dividendo 324. Indi si duplichi la già trovata radice 54, ed il suo doppio 108 si ponga in D, e per esso 108 si divida il 324 si troverà il quoziente 3, che si scriva in B per terza, ed ultima figura della radice. Finalmente si faccia il quadrato di tutta la radice trovata 543, il quale sarà 294849, e sottraggasi dai tre membri, cioè dall' intero numero A, e l' avanzo sarà 0; segno evidente, che il numero A è quadrato perfetto, e che la sua radice è 543, perchè il quadrato di essa restituisce il numero A.

157. Se nel progresso dell' operazione accadrà, che il quadrato della già ritrovata radice sia maggiore del numero, dal quale si dee sottrarre; allora si diminuirà dell' unità l' ultima figura della radice, che si è ritrovata colla divisione, come chiaramente si vedrà nel seguente esempio.

Si cerca la radice quadrata del numero E, che è 324. Si divida in membri, come si è detto poc' anzi, ed il primo membro a sinistra sarà 3, la cui radice quadrata prossima minore è 1, la quale si metta in F, ed il suo quadrato 1 si sottragga dallo stesso membro 3, e si troverà il

E	F
3.24	18
1	G
22	2
324	
0	

residuo 2, alla cui destra si discenda la prima figura 2 del secondo membro 24, e si formerà il numero

22, che si divida pel doppio della radice già trovata 1, cioè pel divisore 2, posto in G; ma il 2 in 22 è contenuto nove volte (nulla importa, che sia contenuto più volte, perchè non mai si mette più di nove nel quoziente, o radice, in ciascuna particolare divisione), onde si dovrebbe scrivere 9 per seconda figura della radice in F; quindi il quadrato 361 della radice 19 si dovrebbe sottrarre dal 324, il che non si può fare, perciò si diminuisca di 1 il quoziente 9, cioè si dica, che il 2 nel 22 in questo caso non può essere contenuto nove volte, ma soltanto otto volte, e si metta 8 in F per seconda figura della radice, indi, moltiplicando in se stessa la radice trovata 18, si ha il suo quadrato 324, che sottratto dal numero E niuno avanzo lascia, e però il numero 18 è radice quadrata del 324.

Quando si voglia più speditamente trovare il quadrato della radice diminuita dell'unità, in tal caso si faccia quanto si è dimostrato al numero 142 nel paragrafo A; come in questo caso avendo trovato, che il 361, quadrato del 19, è maggiore del bisogno, e che per conseguenza la radice 19 si dee diminuire dell'unità, e porre per radice il 18, a ritrovare con prestezza il suo quadrato, si aggiunga 1 al quadrato 361, e dalla somma 362 si sottragga il 38 doppio della radice 19, ed il residuo 362-38, cioè 324 sarà il quadrato del 18, come chiaramente si vede.

158. Inoltre può accadere, che nell'estrarre la radice da un numero si trovi un divisore maggiore del membro dividendo; ed in tal caso si metta la cifra o nella radice, ed un'altra cifra o alla destra del divisore, ed accanto al membro dividendo, e alla sua destra si discendano le due susseguenti figure del dato numero, come nel seguente esempio si vede.

110 ELEMENTI DELL'ARITMETICA

Sia da estrarsi la radice quadrata dal numero 43264, il quale si chiami A. Si divida coi punti in membri, come s'è detto al numero 156, e sarà 4 il primo membro a sinistra, la cui radice 2 si scriva in M, ed il quadrato 4 di essa si sottragga dal membro 4 del numero A, l'avanzo sarà 0, alla cui destra si discenda il 3 prima figura del secondo membro 32, e si avrà 03, cioè 3 per membro dividendo. Si raddoppi la radice 2, ed il suo doppio 4 si metta in G per divisore, e dividasi 3 per 4; ma perchè il 4 non è contenuto nel 3, si scriva 0 in M dopo la figura 2, e similmente si ponga un altro 0 in G dopo il 4, e si avrà la radice 20 in M, ed il suo doppio 40 in G sarà divisore, e per avere altro membro dividendo, alla destra del 03 si discendano le due seguenti figure 26 del numero A, cioè la seconda 2 del membro 32, e la prima 6 del terzo membro 64, e si formerà il membro dividendo 326, nel quale il divisore 40 posto in G è contenuto otto volte, e però si scriva l'8 in M per terza figura della radice. Poesia facciasi il quadrato della radice trovata 208, che sarà 43264, e sottrattolo dal numero A, non rimanendovi verun avanzo, sarà indizio certo, che il 208 è la radice quadrata del numero A.

A	M
4.32.64	208
4	G
0326	40
43264	
0	

159. Quando dopo l'ultima sottrazione vi rimane qualche residuo, è segno, che il dato numero non è quadrato, e che non può avere una radice, che si possa esprimere da verun numero razionale; e la radice trovata nell'operazione è la radice prossima minore del dato numero, cioè la radice del massimo quadrato contenuto in esso numero.

Inoltre la radice di esso numero si può esprimere scrivendolo sotto al segno radicale (153.).

Benchè la vera radice non si possa trovare, quando il numero dato non è perfetto quadrato, ciò non ostante possiamo trovare una radice, la quale tanto si avvicini alla vera, che la differenza sia minima, e quasi per nulla si possa considerare, e ciò si ottiene colla seguente regola.

REGOLA

DI APPROSSIMAZIONE

Per estrarre la radice quadrata de' numeri non quadrati.

160. **S**i aggiungano al dato numero non quadrato alcune coppie, o diciamo paja di zeri, cioè due zeri, o quattro, o sei ec. Poscia dal numero formato dal dato, e dalle cifre aggiunte si estrarra la radice quadrata nella stessa maniera, che si è estratta negli antecedenti esempj. Quindi dalla ritrovata radice si separino alla destra tante figure, quante paja di zeri si sono aggiunte al numero dato; le rimanenti figure alla sinistra esprimeranno la radice prossima minore di esso numero dato (155); e le figure separate alla destra si scrivano sopra una lineetta per numeratore di una frazione; e per denominatore si metta l'unità con altrettante cifre 0, quante furono le paja di zeri aggiunti al numero dato; e si avrà una radice composta d'un intero, e d'una frazione, che sarà prossima alla vera radice, e quanto maggior numero di coppie di zeri si sarà aggiunto, tanto più vicina alla vera sarà la ritrovata radice. Eccone un esempio.

Si debba estrarre la radice quadrata dal numero 15, la cui radice prossima minore (155.) è il 3 col residuo 6; per ritrovare una radice, che sia più prossima alla vera radice di esso 15, si aggiungano al medesimo 15 tante paja di zeri, quante si vuole, per esempio due paja e si formerà il numero 150000. dal quale si

15,00,00	3,87
9	$3 \frac{87}{100}$
60	6
1444	76
560	
149769	
231.	

estragga la radice quadrata, come si è fatto negli antecedenti esempj, e si troverà 387 radice prossima minore del 150000 coll'avanzo 231; ora perchè si sono aggiunte due coppie di zeri al numero dato 15, si separino dalla radice trovata 3.87 due figure alla destra, cioè 87, e ad esso numero 87 si scriva per denominatore l'1 con due zeri, e sarà $3 \frac{87}{100}$ la radice prossima del 15, minore certamente della vera radice, ma molto più prossima del 3; imperciocchè questa radice $3 \frac{87}{100}$, non differisce nemmeno di una centesima parte dell'unità dalla vera radice.

Se più coppie di zeri si aggiungeranno, continuando l'operazione si troverà una radice maggiormente prossima alla vera radice.

La ragione di questa operazione facilmente si comprenderà facendo le seguenti riflessioni, cioè

1. Che l'aggiugnere due zeri al dato numero è lo stesso, che moltiplicarlo per 100, quadrato del 10; l'aggiugnervi quattro zeri è un moltiplicarlo per 10000, quadrato di 100., ec.

UNIVERSALE. LIBRO TERZO 113

2. Che moltiplicando un quadrato per un altro quadrato (n. 144 paragr. L.) la radice quadrata del prodotto contiene il prodotto delle radici de' quadrati, che si sono moltiplicati.

3. Che il separare da un numero dato, una figura a destra; e sotto la figura separata mettervi il 10 per denominatore, è un dividere esso numero per 10; il separarne due figure è dividerlo per 100, ec. Or in questa regola di approssimazione, aggiugnendo due zeri, si moltiplica il numero dato (che si suppone un quadrato imperfetto) per 100 (quadrato del 10); indi si estrae la radice quadrata; che (144 paragrafo L.) sarà il prodotto del 10 (radice quadrata di 100) nella radice dell' altro numero quadrato imperfetto; poscia dalla radice trovata si taglia a destra una figura, cioè si divide per 10 essa radice; ed il quoziente sarà necessariamente la radice del dato quadrato imperfetto, ma proximiore, perchè gli si aggiunge la frazione fatta dalla figura separata, e dal divisore 10. Lo stesso raziocinio si faccia, quando si aggiungono due o più paja di zeri.

PROBLEMA II.

161. **D**a un numero dato estrarre la radice cubica, o sia terza.

RISOLUZIONE. Se il numero dato è perfetto cubo, e non è maggiore del numero 1000, la sua radice cubica ritrovasi nella seguente tabella, nella quale chiaramente si vede, che la radice cubica di 729 è il 9; quella di 216 è il 6, ec. Medesimamente si vede, che il cubo di 7 è il numero 343, il cubo di 4 è il 64, ec.

Radici	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cubi	1	8	27	64	125	216	343	512	729

162. Ma quando il numero dato è minore del numero 1000, e non è cubo, allora prendasi la radice prossima minore, cioè la radice del cubo maggiore contenuto in esso numero. Come la radice prossima minore del 124 è il 4, perchè il suo cubo 64 è il massimo cubo contenuto nel 124, e così degli altri.

163. Quando il numero dato è maggiore di 1000, allora si estraiga la radice cubica col seguente metodo.

Sia da trovarsi la radice cubica del numero 79507, il quale si chiami A. Si divida il dato numero in membri, incominciando dalla destra, in maniera che ciascun membro contenga tre figure, eccettuato il primo a sinistra, il quale può rimanere con una sola, o con due, come si vede nel dato numero A.

A	R
79.507	43
64	D
155	48
79507	0

Quanti sono i membri, altrettante figure avrà la radice.

Si cerchi poscia nell' antecedente tabella la radice cubica del primo membro a sinistra, che nel dato numero A è 79, e non è cubo, perciò si prenda la radice prossima minore 4, perchè il 64 è il maggiore cubo contenuto nel 79; e si metta il 4 in R per prima figura della radice; ed il suo cubo 64 si sottragga dal 79, e alla destra del residuo 15 si discenda la prima figura 5 del secondo membro 507, e si avrà

il 155 per membro dividendo. Quindi della radice già trovata 4 facciasi il quadrato 16, e per il triplo di esso; cioè per 3×16 , vale a dire per 48, posto in D, si divida il 155, il quoziente 3 sarà la seconda figura della radice, però si metta in R dopo il 4. Poscia della radice 43 si faccia il cubo 79507 (143.) il quale si sottragga dal numero A, e perchè non vi rimane verun avanzo, siamo certi, che il 43 è la radice cubica del dato numero A.

164. Alcune volte accade, che il cubo della già trovata radice è maggiore del numero, da cui si dee sottrarre, ed allora si diminuisca di 1 l'ultima figura della radice, come nel seguente esempio si vedrà.

Dal numero A, che è 155720872 si debba estrarre la radice cubica.	A	R
	155.720.872	538
	125	
	307	
	148877	75
	68438	
	155720872	8427
	o	

Primieramente si divida in membri, come si è detto nell' antecedente numero. Il primo membro a sinistra sarà 155, la cui radice prossima minore (162.) è 5, la quale scrivasi a destra in R, ed il suo cubo 125 sottraggasi dal membro 155, e alla destra del residuo 30 si discenda la prima figura 7 del seguente membro 720, si formerà 307, il quale si divida per 25×3 , cioè per 75 (triplo quadrato della già trovata radice 5), il quoziente sarà 4, che si dovrebbe porre in R per seconda figura della radice, e si avrebbe la radice 54, il cubo di cui è 157464, che non

si può sottrarre dai due primi membri del numero A, cioè dal numero 155720, e però si diminuisca dell' unità il quoziente 4, e mettasi 3 per seconda figura della radice dopo il 5, e si avrà la radice 53, della quale il cubo (143.), che è 148877 si sottragga dal suddetto numero 155720, ed alla destra del residuo 6843 si discenda la prima figura 8 del terzo membro 872, e si avrà il numero 68438, il quale diviso pel triplo quadrato della radice trovata 53, che è 8427, ci dà il quoziente 8, che scrivasi in R per terza figura della radice. Di poi facciasi il cubo della radice 538, che sarà 155720872, il quale sottratto dal numero A non lascia verun residuo, perciò il numero 538 è la radice cubica del numero dato A.

Se si vorrà più facilmente trovare il cubo della radice diminuita dell' unità, si faccia, come si è dimostrato nel numero 143, al paragrafo D. Così in questo caso avendo trovato, che il 157464, cubo del 54, è maggiore del numero, da cui si dovea sottrarre, e conseguentemente la radice 54 si dee sminuire dell' unità, e mettere per radice il 53; per ritrovare facilmente il cubo di esso 53, al numero 157464, cubo del 54, si aggiunga il numero 162, che è il triplo del 54, e dalla somma 157626 si sottragga il numero 8749, che è la somma dell' 1 col numero 8748, che è il triplo quadrato del 54, il residuo 148877 sarà il cubo del 53, come ocularmente si vede.

165. Se nel corso dell' operazione si troverà qualche divisore, il quale non sia contenuto nel membro dividendo, in tal caso si metta una cifra o nella radice, e due zeri si aggiungano al divisore, indi alla destra del membro dividendo si discendano le tre susseguenti figure del numero dato. Come nello estrarre la radice cu-

bica dal numero 8,998,912, perchè il 12, triplo quadrato della radice già trovata 2 non è contenuto nel membro dividendo 09, perciò si metta 0 per seconda figura della radice, ed al divisore 12 si aggiungano due

$$\begin{array}{r|l} 8,998,912 & 208 \\ \hline 8 & \\ \hline 09989 & 1200 \\ 8998912 & \\ \hline & 0 \end{array}$$

zeri per avere il divisore 1200 triplo quadrato della radice 20, quindi alla destra del membro dividendo 9 si discendano le tre figure seguenti 989 del numero dato, e ne verrà formato altro membro dividendo 9989, il quale dividasi per 1200, e si troverà il quoziente 8 per terza figura della radice, che sarà 208, perchè moltiplicata due volte per se stessa (143) restituisce il dato cubo.

166. Quando il numero dato non è cubo perfetto, allora, dopo fatta l'ultima sottrazione, vi rimane qualche residuo; e la radice trovata nell'operazione è la sua radice prossima minore.

Quantunque però la vera radice cubica di un numero, che non è cubo perfetto non mai si possa trovare, nè esprimere con numeri razionali; ciò nulla ostante possiamo per regola di approssimazione trovare una radice, che tanto si approssimi alla vera, che la differenza sia menomissima, e ciò si ottiene nel modo seguente.

Al dato numero si aggiungano alcuni ternarj di zeri; indi dal numero dato colle aggiunte cifre si estraiga la radice cubica, come si è fatto negli antecedenti esempj. Quindi dalla radice ritrovata si separino verso destra tante figure, quanti ternarj di zeri sono stati aggiunti al numero dato, le rimanenti figure alla sinistra conterranno la radice prossima minore del dato numero; ed essa radice insieme ad una frazione, che abbia per numeratore le figure state separate alla destra, e per denominatore l'unità con tanti zeri,

quanti ternarj di essi si sono stati aggiunti al numero dato, sarà una radice prossima alla vera, e tanto maggiormente si approssimerà alla vera radice, quanto maggiore sarà stato il numero de' ternarj di zeri aggiunti al dato numero.

Così per esempio al numero 12, che non è cubo, e la sua radice prossima minore è 2, aggiungendovi

$$\begin{array}{r|l} 12.000.000. & 2.28 \\ \hline 8 & 2 \frac{28}{100} \\ \hline 40 & \\ \hline 10648 & \\ 13520 & 1452 \\ \hline 11852352 & \\ 147648 & \end{array}$$

due ternarj di zeri aggiunti, e ad esse figure sottoscrivendo l'unità con due zeri, si avrà la radice prossima $2 \frac{28}{100}$, la qual non differisce dalla vera radice nemmeno di una centesima parte dell'unità. Se si aggiungeranno tre, o più ternarj di zeri, si troverà una radice ancor prossima alla vera, benchè la vera radice non mai si possa ritrovare.

PROBLEMA III.

167. **E**strarre la radice quadrata dalle quantità algebriche.

RISOLUZIONE. La radice quadrata dalle quantità semplici si estraie dividendo pel numero 2 ciascuno esponente della data quantità. Così del quadrato a^2 la radice quadrata è a^1 , o sia a , perchè $a \times a$ restituisce il quadrato a^2 .

Parimente delle potestà a^4 , b^8 , c^6 le radici quadrate sono a^2 , b^4 , c^3 . Medesimamente la radice

seconda, o sia quadrata di a^7 sarà $a^{\frac{7}{2}}$, perchè

$$a^{\frac{7}{2}} \times a^{\frac{7}{2}} \text{ produce } a^{\frac{14}{2}}, \text{ cioè } a^7$$

La radice quadrata di b^4 sarà b^2 ; la radice quadrata della quantità $a^3 b^2 c^4$ sarà $a^{\frac{3}{2}} b c^2$ ec.

168. Se la data quantità avrà un numero coefficiente, allora si estragga in primo luogo la radice da esso numero, come la radice quadrata della grandezza $81a^2 b^6$ è $9ab^3$ perchè $9ab^3 \times 9ab^3$ restituisce il dato quadrato $81a^2 b^6$. Similmente la radice quadrata di $324a^8 b^4$ è $18a^4 b^2$.

169. Il segno da premettersi alla radice quadrata di qualsisia quantità può essere positivo, o negativo; imperciocchè il quadrato esempigrazia a^2 (142.) tanto si ottiene moltiplicando $+a$ in $+a$, quanto col moltiplicare $-a$ in $-a$, e perciò il quadrato a^2 ha due radici, una positiva $+a$, e l'altra negativa $-a$. La stessa cosa si dee intendere di qualunque altro quadrato.

Per la qual cosa ogni quadrato (146) essendo positivo, la radice quadrata di una quantità negativa si chiama radice immaginaria. Così le quantità $\sqrt{-a^2}$, $\sqrt{-c}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-2}$ ec. sono radici immaginarie.

170. Se la quantità data sarà composta, come sarebbe $a^2 + 2ab - 2ac + b^2 - 2bc + c^2$, per estrarne la radice seconda, si prenda

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ab - 2ac + b^2 - 2bc + c^2 \quad | \quad a + b - c \\ \hline \quad | \quad 2a \end{array}$$

la radice quadrata di qualche termine, che sia perfetto quadrato. come di a^2 , ed essa radice a si scriva alla destra, come si è fatto nell'estrazione della radice quadrata dai numeri; indi pel doppio di essa radice a , cioè per $2a$ si divida ciascun termine della data quantità, che sia divisibile in interi, si dividano cioè i termini $+2ab$, e $-2ac$ per $2a$, ed i quozienti

$+b$, $-c$ si uniscano al termine già trovato a della radice, e sarà $a+b-c$ la radice ricercata; poichè (142) facendo il quadrato di $a+b-c$, e sottraendolo dalla data quantità, nulla rimane, conseguentemente $a+b-c$ è la radice quadrata della data quantità.

171. La radice quadrata di qualsisia quantità, come abbiamo detto al numero 153, si esprime ponendola sotto al segno radicale. Così $\sqrt{64}$ significa 8, $\sqrt{a^2}$ significa a . Parimente $\sqrt{15}$ indica la radice quadrata del 15. $\sqrt{ab-cm}$ significa la radice quadrata della quantità $ab-cm$.

Inoltre scrivendo $\sqrt{ab-cm}^{\frac{1}{2}}$, ovvero $(ab-cm)^{\frac{1}{2}}$ si esprime ancora la radice quadrata della quantità $ab-cm$; e lo stesso si dee intendere di qualunque altra quantità.

172. COROLLARIO. Dalle cose sopraddette ne viene in conseguenza, che per formare il quadrato di qualsivoglia quantità posta sotto al segno radicale, basta scriverla fuori del medesimo segno. Per esempio il quadrato di $\sqrt{25}$ è 25; poichè $\sqrt{25}$ significa 5, ed il quadrato di 5 è 25, dunque $\sqrt{25} \times \sqrt{25}$ dà il prodotto 25.

Similmente $\sqrt{15} \times \sqrt{15}$ produce 15.

Per la stessa ragione $\sqrt{a-c} \times \sqrt{a-c}$ dà il prodotto $a-c$.

Inoltre perchè la radice quadrata di a^3 non solo si esprime scrivendo $\sqrt{a^3}$, ma ancora (167) collo scrivere $a^{\frac{3}{2}}$; or moltiplicando $a^{\frac{3}{2}}$ per $a^{\frac{3}{2}}$ il prodotto (65) sarà a^3 , cioè a^3 . Dunque è chiaro, che $\sqrt{a^3} \times \sqrt{a^3}$ dà nel prodotto a^3 . Lo stesso si dee intendere di ogni altra quantità sia semplice, sia composta, quando si trova sotto al segno della radice quadrata.

PROBLEMA IV.

173. **E**strarre la radice cubica, o sia terza dalle quantità algebriche.

RISOLUZIONE. Si estraie la radice cubica dalle quantità semplici col dividere pel numero 3 ciascuno esponente delle date quantità. Ma se hanno numeri coefficienti, si estraie prima da essi coefficienti, come si è insegnato nel problema secondo. Che però la radice cubica di a^3 sarà $a^{\frac{3}{3}}$ cioè a^1 , o sia a ; perchè $a \times a \times a$ restituisce a^3 .

Similmente delle quantità a^6, b^9, c^{12} le radici terze saranno a^2, b^3, c^4 . Parimente della quantità b^2 la radice cubica sarà $b^{\frac{2}{3}}$, perchè $b^{\frac{2}{3}} \times b^{\frac{2}{3}} \times b^{\frac{2}{3}}$ (65) dà il prodotto $b^{\frac{6}{3}}$, cioè b^2 ec.

La radice cubica di $8a^6c^3$ sarà $2a^2c$. Medesimamente la radice terza di $125a^{12}c^3m^6$ sarà $5a^4cm^2$ ec.

174. Che se la data quantità sarà composta, come $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, allora pel numero antecedente si estraiga la radice cubica da qualche termine, che sia perfetto cubo.

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \begin{array}{l} | a-b \\ \hline | 3a^2 \end{array}$$

come da a^3 , la cui radice a si scriva alla destra, e sarà il primo termine della radice. Poesia per $3a^2$, triplo quadrato della radice trovata a , si divida ciascun termine della data quantità, che sia divisibile senza avanzo, in questo esempio il solo termine $-3a^2b$ si divida per $3a^2$, ed il quoziente $-b$ si aggiunga nella radice al primo termine a , e sarà $a-b$ la ricercata radice; imperciocchè facendo il cubo di $a-b$, che sarà $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, e sottraendolo dalla data quantità non rimarrà veruno avanzo; dunque $a-b$ è la radice cubica della data quantità.

175. Quando dalla data grandezza non si può colle antecedenti regole estrarre la radice cubica, o vi rima-

ne qualche residuo dopo fatta la sottrazione, allora la data quantità si metta sotto al segno radicale col suo

numero esponente 3 (153). Così $\sqrt[3]{a^4-bc}$ esprime la radice cubica della quantità a^4-bc .

Similmente $\sqrt[3]{8a^3}$ significa $2a$, che è la radice cu-

bica di $8a^3$; e $\sqrt[3]{512}$ significa 8. ec.

Inoltre la radice cubica di a^4-bc si esprime eziandio

scrivendo $\overline{a^4-bc}^{\frac{1}{3}}$, ovvero $(a^4-bc)^{\frac{1}{3}}$; e lo stesso s'intenda di ogni altra quantità.

176. COROLLARIO. Quindi si deduce, che il cubo di una quantità posta sotto al segno della radice terza si ottiene scrivendola fuori del segno. Per esempio il

cubo di $\sqrt[3]{64}$ è 64, perchè $\sqrt[3]{64}$ (153.) significa 4, ed il cubo del 4 è 64; perciò il cubo di $\sqrt[3]{64}$ sarà 64.

Similmente il cubo di $\sqrt[3]{a^2c}$ è la quantità a^2c ; imperocchè la radice cubica di a^2c (173) si esprime

eziandio per $a^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{3}}$, e significa lo stesso, che $\sqrt[3]{a^2c}$;

ma il cubo di $a^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{3}}$ è $a^{\frac{2}{3} \times 3}c^{\frac{1}{3} \times 3}$ cioè (65)

a^2c , cioè a^2c . Dunque il cubo di $\sqrt[3]{a^2c}$ sarà a^2c .

177. ANNOTAZIONE. Per ritrovare la radice quadrata, o cubica di una data frazione si estraiga la ricercata radice tanto dal numeratore, quanto dal denominatore della data frazione.

Per la qual cosa la radice quadrata del rotto $\frac{25}{64}$

sarà $\frac{5}{8}$. La radice quadrata della frazione $\frac{a^6}{c^2}$ sarà $\frac{a^3}{c}$

La radice quadrata di $\frac{c}{m}$ sarà $\sqrt{\frac{c}{m}}$ oppure si esprimerà per $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{m}}$, ovvero per $\frac{c^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}}$

Medesimamente la radice cubica del rotto $\frac{8}{27}$ sarà $\frac{2}{3}$.

La radice cubica della frazione $\frac{a^3}{c^6}$ sarà $\frac{a}{c^2}$; e la radice cubica del rotto $\frac{c}{x}$ sarà $\sqrt[3]{\frac{c}{x}}$, ovvero $\frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{x}}$

oppure $\frac{c^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$; e così delle altre.

178. Inoltre la radice quadrata si estrae ancora da una frazione, moltiplicando il numeratore pel denominatore, e poscia estraendo la radice quadrata dal prodotto, e ad essa radice mettendo per denominatore lo stesso denominatore della frazione data. Così per ritrovare la radice quadrata di $\frac{3}{12}$ si moltiplichino il 3 nel 12, e dal prodotto 36 si estraiga la radice quadrata 6, alla quale si sottoscriva per denominatore il 12, e sarà $\frac{6}{12}$, cioè $\frac{1}{2}$ la radice quadrata del rotto $\frac{3}{12}$, il quale significa $\frac{1}{4}$, la cui radice quadrata è $\frac{1}{2}$, come chiaramente si vede.

TEOREMA

179. Le radici uguali hanno i quadrati uguali, i cubi uguali ec. Scambievolmente i quadrati uguali, i cubi uguali ec. hanno radici uguali.

1. DIMOSTRAZIONE. Sia $a=c$, cioè $a^1=c^1$, moltiplicando gli esponenti uguali 1, ed 1 delle quantità

124 ELEMENTI DELL'ARITMETICA

uguali a, c per lo stesso numero 2, o per 3, o per 4, ec. (assioma 4.) sarà $a^2=c^2, a^3=c^3, a^4=c^4, a^1=c^1$ ec. Dunque le uguali potestà di radici uguali sono anche tra di loro uguali.

2. Sia $a^2=m^2$, dividendo gli esponenti uguali, 2, e 2 di potenze uguali pel medesimo numero 2, i quozienti (assioma 5.) saranno uguali, cioè $a^1=m^1$, o sia $a=m$.

Parimente se sarà $a^3=m^3$, dividendo per 3 gli esponenti si avrà $a=m$ ec.

Dunque gli uguali quadrati, i cubi uguali, ec. hanno ancora le radici uguali. Il che era ec.

AGGIUNTA

DELLE QUANTITÀ RADICALI.

180. Le quantità irrazionali, comunemente chiamate radicali, sono (come già abbiamo detto al numero 153.) quelle, dalle quali non si può estrarre la radice ricercata.

Le quantità radicali, che hanno lo stesso esponente, o indice (153.) si dicono radicali dello stesso nome,

o della stessa denominazione, come $\sqrt[3]{acm}, \sqrt[3]{c^2-x},$

$\sqrt[3]{24}$, ec. Ma quando hanno diversi gli esponenti, si chiamano radicali di diversa denominazione, o di di-

verso nome, come $\sqrt{ac}, \sqrt[3]{a-m}, \sqrt[4]{24}$ ec.

RIDURRE UNA QUANTITÀ RAZIONALE IN UNA RADICALE D'UN DATO NOME.

181. Siccome ogni quantità intera si può esprimere (119.) con una frazione di qualsivoglia nome: così ancora ogni quantità razionale sia intera, o sia frazione

si può esprimere da una quantità radicale di qualunque denominazione, e ciò si ottiene elevando la quantità razionale alla potestà indicata dall'esponente della radicale, e poscia mettendola sotto al segno. Così la

quantità razionale a si può esprimere per $\sqrt{a^2}$, per $\sqrt[3]{a^3}$ per $\sqrt[4]{a^4}$ ec.

Similmente il numero 2 si esprime per $\sqrt{4}$, per $\sqrt[3]{8}$, per $\sqrt[4]{16}$, per $\sqrt[5]{32}$ ec.

Così ancora la frazione $\frac{2}{3}$ si esprime per $\sqrt{\frac{4}{9}}$, per $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ per $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$, ec.

Lo stesso si dee intendere di qualunque altra quantità razionale sia semplice, o composta, sia numerica, o letterale.

TRASFORMARE UNA RADICALE IN UN' ALTRA DI DIVERSO NOME.

182. **S**e qualsivoglia quantità radicale s'innalzerà a qualunque potestà, ed il suo esponente radicale si moltiplicherà pel numero della medesima potestà, si formerà un'altra radicale quantità, che sarà sempre uguale

alla data. Sia data la quantità $\sqrt[3]{a^3}$, elevando a^3 , per esempio, alla seconda potestà a^6 , e moltiplicando l'esponente radicale 3 pel numero 2 indice della seconda potestà, e ponendo il prodotto 6 per esponente radicale, si avrà $\sqrt[6]{a^6}$ perfettamente uguale alla $\sqrt[3]{a^3}$. Imperciocchè (167.) $\sqrt[6]{a^6}$ si esprime ancora

per $\sqrt[10]{a^{10}}$, e $\sqrt[3]{a^3}$ per $\sqrt[10]{a^3}$; ma (101.) abbiamo $\sqrt[10]{a^{10}} = \sqrt[3]{a^3}$; dunque sarà eziandio $\sqrt[6]{a^6} = \sqrt[3]{a^3}$. Il che era ec.

Scambievolmente estraendo qualunque radice dalla quantità posta sotto al segno radicale, indi dividendo l'esponente radicale pel numero indice della radice estratta, e mettendo il quoziente per esponente radicale, si avrà un'altra quantità radicale uguale alla data.

Come data la quantità radicale $\sqrt[6]{c^6}$, estraendo la radice quadrata dalla quantità c^6 , la quale (167.) sarà c^3 ; e dividendo l'esponente radicale 6 pel numero 2, indice della radice estratta, e mettendo il quoziente 3 per esponente radicale, si avrà la quantità

radicale $\sqrt[3]{c^3}$ uguale alla data $\sqrt[6]{c^6}$, essendo $\frac{6}{3} = \frac{10}{5}$ (101.).

RIDURRE LE QUANTITÀ RADICALI AL MEDESIMO NOME.

183. **P**er la qual cosa le quantità radicali di diverso nome facilmente si ridurranno alla medesima denominazione, elevando la quantità, che sta sotto di un segno alla potestà espressa dall'esponente dell'altro segno radicale, e quindi mettendo per esponente comune il prodotto de' due esponenti. Come date le

quantità radicali \sqrt{c} , e $\sqrt[3]{a^3}$ di diverso nome (perchè la prima è radice seconda, e l'altra è radice terza) per ridurle a comune denominazione, s'innalzi il c alla terza potestà c^3 , ed a^3 alla seconda potenza a^6 , indi si moltiplichino l'esponente 2 nell'altro 3, il prodotto 6 sarà l'esponente comune, laonde si avranno

le radicali quantità $\sqrt[6]{c^3}$, e $\sqrt[6]{a^{10}}$ del medesimo nome 6, ed uguali alle date radicali per l'antecedente numero; essendo $\sqrt[6]{c^3} = \sqrt[3]{c}$, cioè $c^{\frac{3}{6}} = c^{\frac{1}{2}}$, e $\sqrt[6]{a^{10}} = \sqrt[3]{a^{\frac{10}{3}}}$, cioè $a^{\frac{10}{6}} = a^{\frac{5}{3}}$.

COEFFICIENTI DELLE QUANTITÀ RADICALI.

184. Ogni quantità prefissa al segno radicale dicesi *coefficiente della stessa quantità irrazionale*. Se per esempio saranno date le quantità $3\sqrt{5}$, $4\sqrt{a}$, $\frac{2}{3}\sqrt{am}$ i numeri 3, 4, e $\frac{2}{3}$ saranno i coefficienti delle quantità irrazionali $\sqrt{5}$, \sqrt{a} , \sqrt{am} . Ma $\frac{2}{3}\sqrt{am}$ si può anche esprimere per $\frac{2\sqrt{am}}{3}$, e non mai per $\frac{2\sqrt{am}}{3}$; poichè mettiamo, che a significhi 2, ed m 18, in tal caso $\frac{2}{3}\sqrt{am}$ significherà $\frac{2}{3}\sqrt{2 \times 18}$, cioè una quantità razionale $\frac{2}{3}\sqrt{36}$, vale a dire $\frac{2}{3} \times 6 = \frac{12}{3} = 4$, e $\frac{2\sqrt{am}}{3}$ significherà $\frac{2\sqrt{36}}{3} = \frac{2 \times 6}{3} = \frac{12}{3} = 4$; ma $\frac{2\sqrt{am}}{3}$ significherà $\frac{2\sqrt{36}}{3}$, cioè $2\sqrt{12}$, che è una quantità irrazionale.

Similmente avendo $a\sqrt[3]{x}$, $b\sqrt[3]{ac}$, $-m\sqrt[3]{ac}$, o sia $\frac{b-m}{1}\sqrt[3]{ac}$, le quantità a , e $b-m$ sono coefficienti delle quantità irrazionali $\sqrt[3]{x}$, e $\sqrt[3]{ac}$.

METTERE I COEFFICIENTI SOTTO AL SEGNO RADICALE.

185. Qualsivoglia coefficiente di una quantità irrazionale si può mettere sotto al segno radicale, elevandolo alla potestà indicata dall' esponente radicale, e poscia moltiplicandolo per la quantità radicale, ed il valore della quantità sarà il medesimo. Esempigrazia avendo $\frac{2}{3}\sqrt{am}$, fatto il quadrato del coefficiente $\frac{2}{3}$, che sarà $\frac{4}{9}$, e moltiplicandolo per am , avrò $\sqrt{\frac{4am}{9}}$, o $\frac{\sqrt{4am}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{am}$; poichè sia, come nel numero antecedente, $a=2$, ed $m=18$, abbiamo trovato $\frac{2}{3}\sqrt{am} = 4$, e $\frac{\sqrt{4am}}{3}$ significa $\frac{\sqrt{4 \times 2 \times 18}}{3} = \frac{\sqrt{144}}{3}$, cioè $\frac{12}{3}$ vale a dire lo stesso 4.

Per la stessa ragione $a\sqrt{x}$ si può esprimere per $\sqrt{a^2x}$. Lo stesso si dee intendere di ogni altro coefficiente radicale.

RIDURRE LE QUANTITÀ RADICALI A MINIMA ESPRESSIONE.

186. Dalle cose dette sin' ora evidentemente ne siegue, che una quantità radicale si può ridurre *alla più semplice*, o *a minima espressione*, o sia *a minimi termini*, quando è divisibile per una potestà, che abbia per esponente l' indice radicale; e ciò si ottiene dividendola per essa potestà, la cui radice si metterà per coefficiente della residua quantità irrazionale.

Così $\sqrt{9x}$ si riduce a minimi termini $3\sqrt{x}$; poichè per l' antecedente numero abbiamo $3\sqrt{x} = \sqrt{9x}$.

Similmente $\sqrt[3]{\frac{a^3m}{8}}$ o sia $\frac{\sqrt[3]{a^3m}}{2}$ ovvero $\frac{1}{2}\sqrt[3]{a^3m}$ si riduce a minimi termini $\frac{a\sqrt[3]{m}}{2}$ o pure $\frac{a}{2}\sqrt[3]{m}$. La quantità $3\sqrt{a^2c-a^2x}$ si riduce a più semplice espressione $3a\sqrt{c-x}$.

Parimente $\sqrt[3]{\frac{32}{4}}$ si riduce a $2\sqrt[3]{4}$, perchè il 32 è il prodotto del 4 nel numero cubo 8.

RADICALI COMUNICANTI

187. **L**e quantità radicali ridotte alla più semplice espressione diconsi comunicanti, o tra di loro commensurabili, quando hanno la stessa quantità sotto al segno radicale dello stesso nome. Come $2\sqrt{3}$, e $12\sqrt{3}$ sono comunicanti, o sia fra loro commensurabili, perchè $2\sqrt{3}$ sta al $12\sqrt{3}$, come 1 al 6. Similmente $a\sqrt{c^2m}$, e $b\sqrt{c^2m}$ sono comunicanti ec.

ADDIZIONE, sottrazione, e riduzione

DELLE QUANTITÀ RADICALI.

188. **L**a somma, e sottrazione, e riduzione a minor numero di termini delle quantità radicali si fanno come delle quantità razionali (50. 51. 52. ec.). Così la somma delle quantità irrazionali \sqrt{a} , $+3\sqrt{m}$, $a\sqrt{x}$, $-\sqrt{m}$, farà $\sqrt{a} + 3\sqrt{m} + a\sqrt{x} - \sqrt{m}$, e riducendola a minor numero di termini sarà $\sqrt{a} + 2\sqrt{m} + a\sqrt{x}$.

Dalla quantità $3\sqrt{a} - 5\sqrt{2} + \sqrt[3]{m}$ sottraendo la

quantità $2\sqrt{a} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt[3]{m}$, il residuo sarà $3\sqrt{a} - 5\sqrt{2} + \sqrt[3]{m} - 2\sqrt{a} - 3\sqrt{2} + 4\sqrt[3]{m}$, cioè (51) riducendolo a minor numero di termini sarà $\sqrt{a} - 8\sqrt{2} + 5\sqrt[3]{m}$, e così delle altre.

MOLTIPLICAZIONE DELLE QUANTITÀ RADICALI PER LE QUANTITÀ RAZIONALI.

189. **L**a moltiplicazione di una quantità radicale per una quantità razionale si fa col mettere la quantità razionale per coefficiente della radicale. Così moltiplicando \sqrt{m} per a , il prodotto sarà $a\sqrt{m}$. Moltiplicando $\sqrt{5}$ per 4, il prodotto sarà $4\sqrt{5}$.

Similmente $\frac{c}{m}\sqrt{x}$ dà il prodotto $\frac{c}{m}\sqrt{x}$, o pure $\frac{c\sqrt{x}}{m}$. Medesimamente moltiplicando $a - \frac{c}{m}$ per \sqrt{x}

il prodotto si esprimerà per $a\sqrt{x} - \frac{c}{m}\sqrt{x}$, ovvero per $a\sqrt{x} - \frac{c}{m}\sqrt{x}$, o pure per $(a - \frac{c}{m})\sqrt{x}$.

MOLTIPLICARE LE QUANTITÀ RADICALI DEL MEDESIMO NOME.

190. **L**a moltiplicazione delle quantità radicali del medesimo nome si ottiene moltiplicando fra loro i coefficienti, se ne hanno, indi le quantità, che sono sotto del segno radicale. Così moltiplicando \sqrt{a} per \sqrt{c} , il prodotto sarà \sqrt{ac} . Moltiplicando $a\sqrt{c}$ per $b\sqrt{m}$, il prodotto sarà $ab\sqrt{cm}$. Similmente $2\sqrt{12} \times 5\sqrt{3}$ dà il prodotto $10\sqrt{36}$, cioè una quantità razionale $10 \times 6 = 60$, e questo accade, perchè il $2\sqrt{12}$ significa $2\sqrt{4 \times 3}$, e riducendola a più semplice

espressione, si esprime per $4\sqrt{3}$ (186.), e moltiplicando $4\sqrt{3}$ per $5\sqrt{3}$ (172.) si ottiene il prodotto $4 \times 5 \times 3$, cioè 60. Parimente moltiplicando $2\sqrt{ac}$ per $3\sqrt{a-m}$ si otterrà il prodotto $6\sqrt{a^2c-acm}$.

MOLTIPLICARE LE QUANTITA' RADICALI DI DIVERSA DENOMINAZIONE.

191. **M**a quando le quantità radicali sono di diversa denominazione, allora (183.) si riducano al medesimo nome, e quindi si moltiplichino come sopra. Per esempio, dovendo moltiplicare $5\sqrt{c}$ per $4\sqrt{m}$, si riducano alla stessa denominazione (183.) e si avrà $5\sqrt{c^3}$, e $4\sqrt{m^2}$, che moltiplicate fra loro danno il prodotto $20\sqrt{c^3m^2}$.

MOLTIPLICARE LE QUANTITA' RADICALI COMPOSTE.

192. **S**e le quantità radicali saranno composte di più termini, osservando le antecedenti regole, e quanto si è insegnato (60. 172. ec.) per le quantità razionali, facilmente si troverà il prodotto di esse. Così moltiplicando $c\sqrt{a-m}\sqrt{x}$ per $b\sqrt{n-s}\sqrt{z}$, si avrà il prodotto $bc\sqrt{an-bm}\sqrt{nx-cs}\sqrt{xz}+ms\sqrt{xz}$.

Similmente moltiplicando $a+\sqrt{c}$ per $x-\sqrt{z}$ il prodotto sarà $ax+x\sqrt{c}-a\sqrt{z}-\sqrt{cz}$.

Parimente moltiplicando $a-\sqrt{c}$ per $a-\sqrt{c}$, il prodotto ridotto a minori termini sarà $a^2-2a\sqrt{c}$, o sia $a^2+c-2a\sqrt{c}$, che è il quadrato di essa quantità $a-\sqrt{c}$.

Medesimamente moltiplicando $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ per $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (172.) il prodotto sarà $3-\sqrt{6}-\sqrt{6}+2$, cioè (51.) $5-\sqrt{6}$, che è (142.) il quadrato della data quantità $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, la quale se si moltiplicherà pel suo

132 **ELEMENTI DELL' ARITMETICA**
quadrato $5-2\sqrt{6}$, si otterrà il cubo di essa, che sarà $9\sqrt{3}-11\sqrt{2}$.

MOLTIPLICARE UN BINOMIO RADICALE PEL SUO CONTRARIO.

195. **S**e si moltiplicherà un binomio radicale quadratico per se stesso, cangiando il segno ad uno de' termini del moltiplicatore, cioè + in -, o - in +, si otterrà per prodotto una quantità razionale. Così moltiplicando $a-\sqrt{c}$ per $a+\sqrt{c}$, il prodotto sarà $a^2-a\sqrt{c}+a\sqrt{c}-c$, cioè a^2-c . Similmente se si moltiplica $\sqrt{c}+\sqrt{m}$ per $\sqrt{c}-\sqrt{m}$ si otterrà il prodotto $c+\sqrt{cm}-\sqrt{cm}-m$, cioè (51.) $c-m$.

Parimente moltiplicando $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ per $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ il prodotto sarà $6-\sqrt{12}+\sqrt{12}-2=6-2$, cioè 4, ec. e questo chiamasi *moltiplicare un binomio pel suo contrario*.

DIVIDERE LE QUANTITA' RADICALI DEL MEDESIMO NOME.

194. **L**a divisione delle quantità radicali, se hanno coefficienti, molte volte più facilmente si ottiene mettendoli (185.) sotto al segno radicale; quindi, se sono semplici, e della stessa denominazione, si dividono le quantità poste sotto del segno radicale secondo le regole date per le quantità razionali (47. 67. 68. ec. 136. 137.), e quando sono di diverso nome, allora in primo luogo si riducano (183.) alla medesima denominazione. Così dovendo dividere la quantità $a\sqrt{acm}$ per la quantità $\sqrt{a^2c}$, si metta primieramente il coefficiente a sotto del segno (185.) e si avrà $\sqrt{a^3cm}$ da dividersi per $\sqrt{a^2c}$, ed il quoziente (68. 70.) sarà \sqrt{am} ; poichè moltiplicando \sqrt{am} per $\sqrt{a^2c}$, il prodotto (190.) sarà $\sqrt{a^3cm}$, o sia $a\sqrt{acm}$ riducendolo (186.) alla più semplice espressione, e restituisce la quantità dividenda.

Quando i coefficienti si possono dividere tra di loro, allora non conviene metterli sotto del segno radicale; perchè inutilmente si allungherebbe l'operazione. Come a dividere $12\sqrt{10}$ per $4\sqrt{2}$, dividendo il 12 per 4, ed il 10 per 2 si otterrà il quoziente $3\sqrt{5}$.

Similmente dividendo $am\sqrt{bcx}$ per $a\sqrt{cx}$, il quoziente sarà $m\sqrt{b}$.

Ma se il coefficiente, o la quantità radicale non si può dividere in interi, allora il quoziente si esprima con frazione. Così dividendo $bc\sqrt{x}$ per $b\sqrt{m}$, il quoziente sarà $\frac{c\sqrt{x}}{m}$, o pure $\frac{c\sqrt{x}}{\sqrt{m}}$.

Parimente dividendo $3\sqrt{10}$ per $4\sqrt{2}$, il quoziente sarà $\frac{3}{4}\sqrt{5}$.

DIVIDERE LE QUANTITÀ RADICALI
DI DENOMINAZIONE DIVERSA.

195. Quando le quantità radicali sono di nome diverso, per farne l'attuale divisione si debbono ridurre alla medesima denominazione (183.); la qual cosa, se l'esponente d'una radicale divide in interi l'esponente dell'altra radicale, più facilmente si ottiene, dividendo l'esponente maggiore pel minore, ed il quoziente indicherà la potestà, a cui si dee elevare la quantità, che è sotto al segno radicale dell'esponente minore, e ad essa potestà si dee porre il segno radicale del maggior esponente. Per esempio dovendosi dividere $\sqrt[6]{a^3b^2c^2m^3}$ per \sqrt{am} , a ridurle a comune denominazione, si divida il maggior esponente radicale 6 pel minore 2, ed il quoziente 3 indicherà, che la quantità radicale am si dee innalzare alla terza potestà a^3m^3 , e che si dee mettere sotto al segno del nome 6, prodotto del 2 nel 3, e sarà $\sqrt[6]{a^3m^3} = \sqrt{am}$ (182.); laonde si divida $\sqrt[6]{a^3b^2c^2m^3}$ per $\sqrt[6]{a^3m^3}$, ed il quoziente ricercato sarà $\sqrt[6]{b^2c^2}$, la

quale (182. §. L.) si riduce a $\sqrt[3]{bc}$.

Similmente dividendo $\sqrt[4]{45}$ per $\sqrt{3}$, cioè per $\sqrt[4]{9}$, il quoziente sarà $\sqrt[4]{5}$.

Se il divisore sarà $\sqrt[4]{3}$ ed il dividendo sia $\sqrt{15}$, cioè $\sqrt[4]{225}$, si troverà il quoziente $\sqrt[4]{75}$.

DIVIDERE LE QUANTITÀ RADICALI
COMPOSTE.

196. Se una quantità composta di termini radicali si dovrà dividere per una radicale semplice, allora ciascun termine della quantità composta si divida per la radicale semplice, come si è insegnato negli antecedenti numeri; e se qualche termine non si può attualmente dividere, si divida per frazione. Così dividendo $\sqrt{48} - \sqrt{30} + \sqrt{12} - \sqrt{5}$ per $\sqrt{6}$, il quoziente sarà $\sqrt{8} - \sqrt{5} + \sqrt{2} - \frac{\sqrt{5}}{6}$.

La divisione delle radicali composte qualche volta si può fare come la divisione delle quantità razionali composte (75. 76. ec.).

Se, verbigrazia, la quantità dividenda sarà $\sqrt{ac} - \sqrt{cm} + \sqrt{ab} - \sqrt{bm}$, ed il divisore sia $\sqrt{c} + \sqrt{b}$, si troverà il quoziente $\sqrt{a} - \sqrt{m}$, operando come si è insegnato per la divisione delle quantità composte razionali.

Similmente dividendo $\sqrt{30} - \sqrt{10} + \sqrt{18} - \sqrt{6}$ per $\sqrt{5} + \sqrt{3}$, si avrà il quoziente $\sqrt{6} - \sqrt{2}$.

Ma quando il divisore è un binomio, e non si può nella maniera antecedente ritrovare il quoziente, allora si prenda il binomio contrario del divisore, cioè lo stesso divisore (183.) con un termine, che abbia il segno cangiato; e per esso binomio contrario si moltiplichino il divisore, ed il dividendo, indi facciasi la divisione.

Sia il radicale dividendo $\sqrt{24}$, ed il divisore $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, il quoziente si può esprimere per $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; ma volendo farne l'attuale divisione, si moltiplichino il numeratore $\sqrt{24}$, ed il divisore $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ pel suo contrario $\sqrt{3}+\sqrt{2}$. Moltiplicando $\sqrt{24}$ per $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ il prodotto sarà $\sqrt{72}+\sqrt{48}$, cioè (186.) sarà $6\sqrt{2}+4\sqrt{3}$, e moltiplicando $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ per $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ si avrà il prodotto $3-\sqrt{6}+\sqrt{6}-2=1$; e dividendo $6\sqrt{2}+4\sqrt{3}$ per 1, il suo valore non si cangia, perciò dividendo $\sqrt{24}$ per $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, il quoziente sarà $6\sqrt{2}+4\sqrt{3}$; ed infatti moltiplicandolo pel divisore $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, il prodotto $6\sqrt{6}+12-12-4\sqrt{6}$, cioè $2\sqrt{6}$ o sia $\sqrt{24}$, restituisce la quantità dividenda, come chiaramente si vede.

ESTRAZIONE DELLE RADICI DALLE QUANTITÀ IRRAZIONALI SEMPLICI.

197. **D**alle radicali semplici si può estrarre qualsivoglia radice moltiplicando l'esponente radicale per l'indice della radice ricercata. Per esempio la radice terza di \sqrt{a} , moltiplicando l'esponente 2 di \sqrt{a} pel 3 indice della radice, che si cerca, sarà $\sqrt[6]{a}$ la radice terza di \sqrt{a} ; imperciocchè \sqrt{a} (167.) si esprime per $a^{\frac{1}{2}}$, e la radice terza di $a^{\frac{1}{2}}$ sarà $a^{\frac{1}{6}}$; perchè (173.) si debbono dividere gli esponenti per 3, e dividendo $\frac{1}{2}$ per 3 (137.), il quoziente è $\frac{1}{6}$; ma $a^{\frac{1}{6}}$ significa $\sqrt[6]{a}$; dunque ec. Similmente $\sqrt[4]{\sqrt{m}}$, cioè radice quarta di \sqrt{m} sarà $\sqrt[8]{m}$.

Parimente $\sqrt{\sqrt{c}}$, cioè radice quadrata di \sqrt{c} sarà $\sqrt[6]{c}$ ec. Verbigrazia $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$ significa 2: perchè $\sqrt[6]{64}$

significa 8, e $\sqrt[3]{8}$ significa 2, ed il 2 è la radice sesta di 64.

Ma quando le quantità radicali sono composte, non si può collo stesso metodo estrarre la radice, che si cerca; ed allora si esprime la ricercata radice scrivendo la data quantità sotto un altro segno radicale, come la radice terza di $\sqrt{c}-\sqrt{m}$, si esprime così $\sqrt[3]{\sqrt{c}-\sqrt{m}}$, ovvero così $\sqrt{c}-\sqrt{m}^{\frac{1}{3}}$, e queste chiamansi *radicali universali*.

ESTRARRE LA RADICE QUADRATA DA UN BINOMIO.

198. **D**a un dato binomio, del quale un termine sia razionale, e l'altro radicale, si potrà estrarre la radice quadrata, se il termine razionale sarà maggiore del termine radicale; e se la differenza dei due quadrati di essi termini sarà un quadrato; e ciò si ottiene in questa maniera, cioè si prenda la suddetta differenza de' due quadrati, e la radice quadrata di essa si aggiunga primieramente alla quantità razionale; poscia da essa si sottragga; quindi si prendano le metà della somma, e del residuo, e le radici quadrate di esse metà saranno i termini della ricercata radice.

Sia dato il binomio $10-2\sqrt{21}$, o sia $10-\sqrt{84}$ (185.), del quale si cerchi la radice quadrata. Facciansi i quadrati 100, ed 84 de' due termini 10, e $-\sqrt{84}$, e sottraggasi 84 dal 100, e dal residuo 16 si estraiga la radice quadrata 4, la quale si aggiunga al termine commensurabile 10, si avrà la somma 14, indi essa radice 4 si sottragga dallo stesso razionale 10, il residuo sarà 6. Finalmente si prendano le metà 7, e 3 della somma 14, e del residuo 6; e le radici di esse metà coi segni del binomio dato, cioè $\sqrt{7}-\sqrt{3}$ formeranno la radice quadrata del binomio dato $10\sqrt{\quad}$.

Nella stessa maniera si troverà, che la radice quadrata di $a+c-2\sqrt{ac}$ sarà $\sqrt{a}-\sqrt{c}$; poichè dal quadrato $a^2+2ac+c^2$ della parte razionale $a+c$ sottratto il quadrato $4ac$ della radicale $-2\sqrt{ac}$, il residuo $a^2-2ac+c^2$ è un quadrato perfetto, la cui radice (170.) è $a-c$, la quale sommata colla razionale $a+c$ ci dà $2a$, e sottratta dalla stessa razionale, il residuo è $2c$, e le radici delle metà di $2a$, e di $2c$, ci danno come sopra la radice ricercata $\sqrt{a}-\sqrt{c}$.

Quando amendue i termini del binomio sono radicali, qualche volta si può anche estrarne la radice quadrata, e ciò siegue qualora la radice quadrata della differenza de' due quadrati dei due termini del binomio è comunicante, o sia commensurabile (187.) con alcuno dei termini del binomio proposto da poterla sommare, e sottrarre da esso termine. Come in questo esempio $\sqrt{96}+\sqrt{72}$ la differenza dei quadrati è $96-72=24$, la cui radice quadrata $\sqrt{24}$ è comunicante con $\sqrt{96}$; poichè (186.) abbiamo $\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ e $\sqrt{96}=4\sqrt{6}$; laonde sarà $4\sqrt{6}+2\sqrt{6}=6\sqrt{6}$, e $4\sqrt{6}-2\sqrt{6}=2\sqrt{6}$, le metà delle quali sono $3\sqrt{6}$, e $\sqrt{6}$, e le radici quadrate di queste metà, cioè $\sqrt{3\sqrt{6}+\sqrt{6}}$, cioè (197.) $\sqrt[4]{54}+\sqrt[4]{6}$ saranno la radice quadrata del dato binomio.

ELEMENTI

DELLA

GEOMETRIA PIANA E SOLIDA

LIBRO PRIMO

SCIENZA UNIVERSALE DELLE RAGIONI,

E PROPORZIONI DELLE QUANTITA'

DEFINIZIONE I.

La ragione geometrica (aritm. nn. 94. 96.) dicesi *razionale*, quando l'antecedente sta al suo conseguente, come l'unità ad un numero razionale, o come un numero razionale ad un altro numero razionale. Come la ragione $2a:6a$ è razionale, perchè l'antecedente $2a$ sta al suo conseguente $6a$, come l'uno al tre, essendo il $2a$ terza parte di $6a$.

Medesimamente la ragione $5m:3m$ è razionale, perchè l'antecedente $5m$ ha la stessa relazione al suo conseguente $3m$, che ha il numero razionale 5 al numero razionale 3.

Parimente la ragione $8\sqrt{5}:2\sqrt{5}$ è razionale, perchè l'antecedente sta al conseguente, come il 4 all'1.

Ragione geometrica irrazionale si chiama quella, che non può esprimersi con numeri razionali. Come la ragione $2:\sqrt{6}$ è irrazionale, perchè (aritm. n. 153.) la radice del numero 6 non si può esprimere da verun numero razionale, conseguentemente il valore $\frac{2}{\sqrt{6}}$

di questa ragione non può esprimersi da verun numero razionale.

DEFINIZIONE II.

La ragione geometrica (sia formata da termini razionali, o da termini irrazionali) dicesi *ragione di uguaglianza*, o di *uguaglianza*, quando l'antecedente è uguale al conseguente, cioè quando il suo valore è l'unità; come la ragione $8 : 8$, o $m : m$, ovvero $\sqrt{a} : \sqrt{a}$, ec.

Ma quando l'antecedente non è uguale al conseguente, allora si chiama *ragione d'ineguaglianza*, o d'*ineguaglianza*. Come $8 : 2$, o $3 : 12$, o pure $a : c$, ec.

DEFINIZIONE III.

Ragione geometrica di maggiore *ineguaglianza* si dice quando l'antecedente è maggiore del conseguente; come $8 : 2$, $12 : 3$ ec.

Che se l'antecedente è minore del conseguente, allora dicesi *ragione di minore ineguaglianza*; come $2 : 8$, $4 : 12$. ec.

DEFINIZIONE IV.

1. **L**a ragione di maggiore ineguaglianza dicesi *moltiplice*, quando il suo valore (aritm. 97.) è un numero intero. Come la ragione $6 : 2$, il cui valore è $\frac{6}{2}$, cioè 3.

2. Chiamasi *ragione superparticolare*, quando il valore di essa è l'unità con una frazione, che abbia l'unità per numeratore. Come la ragione $6 : 4$, che ha il valore $\frac{6}{4}$, cioè $1 \frac{1}{2}$ (aritm. 123.)

3. Si noma *ragione superparziente*, quando ha per valore l'unità, con una frazione ridotta a minimi termini, la quale non abbia l'unità per numeratore,

140 ELEMENTI DELLA GEOMETRIA

ma qualche numero intero. Come la ragione $7 : 5$ il cui valore è $\frac{7}{5}$, cioè $1 \frac{2}{5}$.

4. Inoltre si dice *ragione moltiplice superparticolare* quella, il cui valore è un numero intero con una frazione, che, ridotta a minimi termini, abbia l'unità per numeratore; come la ragione $7 : 3$, il valore della quale è $\frac{7}{3}$, cioè $2 \frac{1}{3}$.

5. Finalmente si chiama *ragione moltiplice superparziente*, quando il valore di essa è un numero intero, con una frazione, che, ridotta a minima espressione, abbia per numeratore qualche numero intero: come la ragione $15 : 4$, il cui valore è $\frac{15}{4}$, cioè $3 \frac{3}{4}$.

Altrettante sorta di ragioni di minore disuguaglianza vi sono; cioè ragione *summultiplice*, e *sussuperparticolare*, *sussuperparziente*, *summultiplice*, *sussuperparticolare*, e *summultiplice sussuperparziente*, le quali corrispondono alle ragioni di maggiore disuguaglianza.

Le suddette diverse sorta di ragioni tanto di maggiore, quanto di minore ineguaglianza si suddividono in infinite spezie diverse. Imperciocchè, per esempio, la ragione moltiplice può essere, o *dupla*, come $10 : 5$, o *tripla*, come $6 : 2$, o *quadrupla*, o *quintupla*, o *sestupla* ec.

La ragione superparticolare è o *sesquialtera*, il cui antecedente contiene una volta e mezzo il conseguente; come la ragione $3 : 2$; ovvero è *sesquiterza*, il cui antecedente contiene il conseguente una volta, ed un terzo, come la ragione $4 : 3$; o è *sesquiquarta*, come $5 : 4$; o *sesquiquinta*, o *sesquisesta* ec.

Similmente la ragione summultiplice è o *suddupla*, come $5 : 10$; o *surtripla*, come $2 : 6$; o *sugquadrupla*, come $3 : 12$; o *sugquintupla* ec.

Parimente la ragione sussuperparticolare è o *sussesquialtera*, l'antecedente della quale è contenuto una volta e mezzo nel conseguente, come la ragione $2 : 3$; o *sussesquiterza*, come $3 : 4$, o *sussesquiquarta* ec.

DEFINIZIONE V.

Data una geometrica ragione, se si paragona il conseguente al suo antecedente, formasi un'altra ragione che si chiama *ragione inversa*, o *reciproca* della data; come data la ragione $6 : 2$, la ragione inversa di essa sarà $2 : 6$.

Similmente la ragione $m : a$ è reciproca, o sia inversa della ragione $a : m$. Vicendevolmente la ragione $a : m$ è reciproca della ragione $m : a$.

COROLLARIO. Perlaqualcosa la ragione reciproca di una ragione di una maggiore disuguaglià sarà una ragione di minore inuguaglià; e scambievolmente la ragione inversa di una ragione di minore disuguaglià sarà una ragione di maggiore inuguaglià. Come della ragione quadrupla $12 : 3$ la reciproca sarà una ragione suquadrupla $3 : 12$. Della ragione suddupla $4 : 8$ sarà inversa la ragione dupla $8 : 4$, ec.

DEFINIZIONE VI.

Ragione composta si dice quella, il cui valore, o nome è uguale al prodotto dei valori (aritm. 97.) di altre date ragioni.

La ragione $24 : 3$ dicesi composta dalle due ragioni $20 : 5$, e $12 : 6$; perchè il valore di essa $\frac{24}{3}$, cioè 8, è uguale al prodotto del 4 (valore della ragione $20 : 5$) moltiplicato nel 2, valore della ragione $12 : 6$.

Similmente la ragione $acm : a$ chiamasi composta dalle ragioni $bc : b$, ed $sm : s$; perchè il valore di essa $\frac{acm}{a}$, cioè cm (aritm. 68.) uguaglia il prodotto della quantità c (valore della ragione $bc : b$) nella quantità m , valore della ragione $sm : s$.

Parimente la ragione $abcm : ab$ è composta dalle ragioni $ac : a$, e $bm : b$ essendo $\frac{abcm}{ab} = \frac{ac}{a} \times \frac{bm}{b}$, cioè $cm = c \times m$.

142 ELEMENTI DELLA GEOMETRIA

COROLLARIO I. Dunque niuna ragione geometrica considerata in se stessa è composta; ma soltanto composta si chiama, quando si rapporta ad altre ragioni, e si trova, che il suo valore è uguale al prodotto de' valori delle altre date ragioni.

COROLLARIO II. Inoltre le ragioni composte da ragioni uguali saranno parimente fra loro uguali; perciocchè le uguali ragioni hanno i valori uguali (aritm. 99.), e moltiplicando valori uguali per valori uguali, i prodotti (assioma 4.) saranno anche uguali. Così avendo le ragioni $ac : a = bc : b$, ed $rm : r = sm : s$, la ragione $acrm : ar$ (composta dalle due $ac : a$, ed $rm : r$) sarà uguale alla ragione $bcsrm : bs$ composta dalle ragioni $bc : b$, ed $sm : s$; ed infatti abbiamo $\frac{acrm}{ar} = \frac{bcsrm}{bs}$, cioè $= cm$.

COROLLARIO III. Perlaqualcosa quella ragione, che avrà per antecedente il prodotto degli antecedenti di altre date ragioni, e per conseguente il prodotto de' conseguenti delle medesime ragioni, sarà composta da esse date ragioni. Come date le ragioni $a : b$, $c : m$, $r : x$, moltiplicando tra di loro gli antecedenti a , c , r , e fra loro i conseguenti b , m , x , si formerà la ragione $acr : bmx$ composta dalle date ragioni; poichè (aritm. 97.) il valore di essa $\frac{acr}{bmx}$ è uguale al prodotto dei valori $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{m}$, $\frac{r}{x}$ delle altre ragioni, essendochè (aritm. 133.) egli è $\frac{a}{b} \times \frac{c}{m} \times \frac{r}{x} = \frac{acr}{bmx}$.

COROLLARIO IV. Ma se date due ragioni, si moltiplica l'antecedente della prima nel conseguente della seconda, ed il prodotto si mette per antecedente di una terza ragione, indi il prodotto del conseguente della prima nell'antecedente della seconda ragione si mette per conseguente della terza; allora la terza ragione dicesi composta dalla prima ragione direttamente, e reciprocamente dalla seconda. Sieno date le ragioni $a : b$, e $c : m$, moltiplicando a in m , e b in c , si forma la ragione $am : bc$ composta dalla ragione $a : b$

diretta, e dalla ragione $m:c$ inversa della ragione $c:m$ (def. 5.); imperciocchè il valore $\frac{am}{bc}$ (aritm. 133.) è uguale al prodotto, che si forma moltiplicando $\frac{a}{b}$ (valore della ragione $a:b$) per $\frac{m}{c}$ valore della ragione $m:c$.

DEFINIZIONE VII.

Quando il valore di una ragione è quadrato del valore di un' altra ragione, allora quella ragione si chiama *duplicata*, o *quadrata dell' altra data ragione*.

Se il valore della prima è cubo, o terza potestà del valore dell' altra, allora la prima dicesi *ragione triplicata*, o *cubica dell' altra ragione*.

Se il valore della prima è quadrato-quadrato, o quarta potestà del valore dell' altra ragione, allora si noma *ragione quadruplicata*, o *quadrato-quadrata dell' altra*.

Se è la quinta potestà si chiama *ragione quintuplicata*; e così continuando.

Perlaqualcosa la ragione $ac^2:a$ è duplicata, o diciamo quadrata della ragione $bc:b$; perchè il suo valore c^2 è quadrato del valore c dell' altra.

Similmente la ragione $18:2$ è quadrata della ragione $30:10$, perchè il valore $\frac{18}{2}$, cioè 9 è quadrato del valore $\frac{10}{2}=3$.

La ragione $cm^3:c$ è cubica, o sia triplicata della ragione $am:a$, perchè il suo valore m^3 è cubo del valore m dell' altra ragione.

Parimente la ragione $24:3$ è triplicata, o cubica della ragione $30:15$, perchè il valore $\frac{24}{3}$, cioè 8, è cubo del valore $\frac{15}{3}$, che è 5.

COROLLARIO. Dunque una ragione composta da due ragioni uguali sarà duplicata, o sia quadrata di ciascuna di esse. Sieno le due ragioni uguali $am:a$, e $cm:c$, e con esse (cor. 3. def. 6.) si formi la

144 ELEMENTI DELLA GEOMETRIA

ragione composta $acm^2:ac$, il cui valore è m^2 , quadrato del valore m di ciascuna delle date uguali ragioni; perciò essa ragione $acm^2:ac$ è quadrata di ciascuna di esse.

Medesimamente la ragione composta da tre ragioni uguali è triplicata, o sia cubica di ciascuna delle date ragioni uguali.

Se una ragione è composta da quattro ragioni uguali, sarà *quadruplicata* di ciascuna di esse; se da cinque, sarà *quintuplicata* ec.

COROLLARIO II. Inoltre se data qualsivoglia ragione $a:c$, si quadrano i suoi termini, si forma una ragione $a^2:c^2$ duplicata, o quadrata della ragione $a:c$, essendochè il valore $\frac{a^2}{c^2}$ (aritm. 142.) è quadrato del valore $\frac{a}{c}$.

Ma se si faranno i cubi de' termini a, c , allora si avrà la ragione $a^3:c^3$ cubica, o sia triplicata della ragione $a:c$; perchè (aritm. 143.) il valore $\frac{a^3}{c^3}$ è cubo del valore $\frac{a}{c}$; e così discorrendo delle altre potestà.

COROLLARIO III. Finalmente dalle cose sopradette facilmente si può raccogliere, che quella ragione, il cui valore è radice quadrata del valore di un' altra data ragione, si dee chiamare *ragione sudduplicata*, o *sugquadrata* dell' altra. Come la ragione $bm:b$ è sugquadrata della ragione $am^2:a$, perchè il suo valore m è radice quadrata del valore m^2 dell' altra ragione.

Similmente la ragione $30:10$ è sudduplicata della ragione $18:2$, perchè $\frac{30}{10}$, cioè il 3, è radice quadrata del valore $\frac{18}{2}$, che è 9.

Quella ragione, il cui valore è radice cubica del valore di un' altra ragione, si dice *succubica*, o *suttriplicata* dell' altra.

Se il suo valore è radice quarta, si dica *sugquadruplicata*, e così proseguendo.

ANNOTAZIONE. Attentamente si osservi, che la ragione dupla (def. 4.) è diversa dalla ragione duplicata, la tripla dalla triplicata, la suddupla dalla sudduplicata ec., perchè la ragione dicesi dupla in se stessa, ed assolutamente, quando l' antecedente è doppio del suo conseguente. Ma una ragione non mai dicesi duplicata, se non quando si riferisce ad un'altra, e che il suo valore è il quadrato del valore dell'altra ragione. Lo stesso dicasi delle altre ragioni moltiplici, e moltiplicate.

DEFINIZIONE VIII.

Proporzione geometrica, o *proporzionalità*, o *analogia* si chiama il confronto, o paragone di due geometriche ragioni uguali. Così paragonando fra loro le due uguali ragioni $12 : 4$, e $15 : 5$, si forma la proporzione; così il 12 sta al 4, come il 15 al 5, vale a dire, l' antecedente 12 ha la stessa relazione al suo conseguente 4, che ha l' antecedente 15 al suo conseguente 5.

Similmente le due ragioni $am : a$, e $cm : c$ (aritm. 99.) uguali fra loro, formano la proporzione am all' a come cm al c , cioè am ha lo stesso rapporto all' a , che ha il cm al c .

Perlaqualcosa quattro termini si dicono *geometricamente proporzionali*, quando il primo ha lo stesso rapporto al secondo, che ha il terzo al quarto.

La proporzione di quattro termini si scrive in questa maniera $12 : 4 :: 15 : 5$, o pure $12 : 4 = 15 : 5$, e si legge *dodici al quattro, come quindici al cinque*, ovvero *dodici al quattro uguale quindici al cinque*; e così delle altre.

Il primo e l' ultimo termine della proporzione si chiamano *termini estremi*; il secondo, e terzo diconsi *termini medii della stessa proporzione*.

Inoltre il primo termine dicesi *primo antecedente*, ed il terzo si nomina *secondo antecedente*. Il secondo termine chiamasi *primo conseguente*, ed il quarto si dice *secondo conseguente della proporzione*; che però il primo, e terzo termine diconsi *termini omologi*, oss.a *dello stesso nome*, perchè sono amendue antecedenti. Similmente il secondo, e quarto chiamansi *termini omologi*, perchè amendue conseguenti.

Come data la proporzione $a : b :: c : m$, gli estremi sono a , ed m , i termini medii sono b , c . Gli antecedenti sono a primo, e c secondo, ed i conseguenti sono b primo, ed m secondo; e conseguentemente a , e c tra di loro sono termini omologi come anche fra loro lo sono b , ed m .

DEFINIZIONE IX.

La geometrica proporzione si divide in continua, e discreta. La *proporzione geometrica continua* è quella, in cui il primo conseguente è uguale al secondo antecedente, nella quale cioè il secondo termine è uguale al terzo, e si può esprimere con tre soli termini, e viene indicata con questo segno $::$, che si mette avanti alla proporzione. Verbigrazia la proporzione $24 : 12 :: 12 : 6$ è continua, e si scrive in questo modo $:: 24 : 12 : 6$, e si legge; *proporzione continua ventiquattro al dodici al sei*; cioè a dire il ventiquattro al dodici ha la medesima ragione, che ha lo stesso dodici al sei.

Parimente la proporzione $a : b :: b : c$ scrivesi così; $:: a : b : c$, e leggesi; *proporzione continua a al b al c*.

Perlaqualcosa nella proporzione continua il secondo termine, che chiamasi ancora *termine medio*, o *di mezzo*, è conseguente del primo, ed antecedente del terzo termine, i quali diconsi *termini estremi della medesima proporzione*.

La proporzione geometrica discreta, o discontinua, o disgiunta è quella, che non ha il secondo termine uguale al terzo, come la proporzione $8 : 2 :: 12 : 3$, o quest' altra $a : b :: c : m$.

DEFINIZIONE X.

Progressione geometrica si chiama una serie di termini crescenti, o decrescenti secondo la medesima ragione; ovvero è una proporzione continua composta da più di tre termini.

La serie $1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256$ ec. è una progressione geometrica crescente.

Ma la serie $16 : 8 : 4 : 2 : 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32} : \frac{1}{64}$ ec. è una progressione geometrica decrescente, ed amendue si possono continuare all' infinito, come chiaramente si vede.

Similmente la serie $a : ac : ac^2 : ac^3 : ac^4 : ac^5 : ac^6$ è una progressione geometrica; siccome ancora la serie $ac^3 : ac^2 : ac : a : \frac{a}{c} : \frac{a}{c^2} : \frac{a}{c^3} : \frac{a}{c^4}$, ec. è progressione geometrica, e di esse la prima sarà crescente, e la seconda decrescente, quando c è un intero; ma al contrario quando c fosse una frazione, allora la prima sarebbe decrescente, e la seconda crescente.

DEFINIZIONE XI.

Denominatore della ragione geometrica è il quoziente, che ritrovasi dividendo il termine maggiore pel minore della data ragione. Così della ragione $a : ac$ il denominatore è $\frac{ac}{a}$, cioè c ; ed il denominatore della ragione $am^3 : am^4$ è $\frac{am^4}{am^3}$, cioè m . Similmente della ragione $3 : 12$ il denominatore si è $\frac{12}{3}$, cioè 4 ; e quello della ragione $15 : 5$ è $\frac{5}{15} = 3$.

Perlaqualcosa nella ragione di maggiore disuguaglianza il denominatore della ragione, ed il valore di essa sono la stessa cosa; ma nella ragione di minore inuguaglianza il denominatore di essa uguaglia il valore della ragione inversa della data.

COROLLARIO I. Sarà dunque facil cosa il ritrovare i termini successivi di una progressione geometrica crescente, quando sono dati il primo termine a , ed il denominatore c della ragione; poichè moltiplicando il primo a nel denominatore c , sarà ac il secondo termine, il quale moltiplicato pel denominatore c produce il terzo termine ac^2 , e moltiplicando il terzo ac^2 pel denominatore c , si avrà il quarto ac^3 , e così continuando si troveranno gli altri termini successivamente, ed avrassi la progressione $a : ac : ac^2 : ac^3 : ac^4 : ac^5$, ec.

Ma per ritrovare i termini successivi di una progressione decrescente, quando il denominatore della ragione sia m , ed il primo termine sia am^2 , allora si divida il primo termine am^2 pel denominatore m , il quoziente am sarà secondo termine, il quale diviso pel denominatore m dà per quoziente il terzo termine a ; e dividendo il terzo a per m , ci dà il quarto $\frac{a}{m}$, e così proseguendo si troveranno gli altri termini, e si avrà la progressione decrescente

$am^2 : am : a : \frac{a}{m} : \frac{a}{m^2} : \frac{a}{m^3} : \frac{a}{m^4}$, ec.

COROLLARIO II. Quindi, dati il denominatore della ragione, ed il primo termine di una progressione geometrica, facilmente si può trovare qualunque termine della medesima progressione; basta elevare il denominatore della ragione alla potestà, che viene indicata dal numero, del termine ricercato, diminuito dell' unità, e poscia, se la progressione è crescente, moltiplicare il primo termine per essa potestà, e si avrà il ricercato termine: per esempio a trovare il quinto termine della progressione $a : ac : ac^2$ ec. si

Innalzi il denominatore c alla quarta potestà, che sarà c^4 , e si moltiplichi pel primo termine a , e sarà ac^4 il quinto termine ricercato.

Se si desidera il decimo termine, si innalzi il denominatore c alla nona potestà c^9 , e moltiplicato il c^9 per a , sarà ac^9 il ricercato decimo termine.

Ma quando la progressione è decrescente, allora per la ritrovata potestà del denominatore si divida il primo termine, ed il quoziente sarà il termine ricercato della progressione. Così per ritrovare l'ottavo termine della progressione decrescente

$\therefore ac^3 : ac^2 : ac : a : \frac{a}{c} : \frac{a}{c^2}$, ec. s'innalzi il denominatore c alla settima potestà c^7 , e per essa si divida il primo termine ac^3 , ed il quoziente $\frac{ac^3}{c^7}$, cioè $\frac{a}{c^4}$ (arit. 126.) sarà l'ottavo termine della suddetta progressione.

Similmente volendo trovare il settimo termine di una progressione decrescente, la quale abbia 81. per primo termine, ed il denominatore della ragione sia 3, si innalzi il 3 alla sesta potestà, la quale (arit. 144.) sarà 729, e per questa potestà si divida il primo termine 81, ed il quoziente $\frac{81}{729}$, cioè $\frac{1}{9}$, (arit. 126.) sarà il settimo termine della progressione

$\therefore 81 : 27 : 9 : 3 : 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{9}$, come ocularmente si vede.

Nella stessa guisa si può trovare qualsivoglia altro termine di una progressione, senza che faccia d'uopo ritrovare i termini apposti tra esso termine, ed il primo.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

Dati quattro termini proporzionali, il prodotto degli estremi sarà sempre uguale al prodotto de' medii. Sieno dati quattro termini proporzionali $a : b :: c : m$;

150 ELEMENTI DELLA GEOMETRIA

dico, che il prodotto am degli estremi a , ed m , sarà uguale al prodotto bc de' medii b , c .

DIMOSTRAZIONE. Imperciocchè d'ipotesi abbiamo $a : b :: c : m$, ossia (def. 8.) $a : b = c : m$; ma (arit. 100) le ragioni uguali formano frazioni uguali; perciò sarà $\frac{a}{b} = \frac{c}{m}$, e moltiplicando queste uguali quantità $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{m}$ per bm (prodotto de' termini conseguenti, ossia de' termini b , ed m) i prodotti (arit. 134.) saranno $\frac{abm}{b}$, e $\frac{bcm}{m}$, uguali fra loro (ass. 4.) cioè sarà $\frac{abm}{b} = \frac{bcm}{m}$, vale a dire $am = bc$ (arit. 68.) perchè dividendo abm per b , il quoziente è am , e dividendo bcm per m si ha il quoziente bc .

Dunque ogni qual volta saranno dati quattro termini proporzionali, sieno numeri, sieno linee, o quantità di qualsivoglia altro genere, sempre sarà il prodotto de' medii uguale a quello degli estremi. Il che si dovea dimostrare.

Questa proposizione contiene la prima parte della proposizione 16 del libro 6, e la prima parte della proposizione 19 del libro 7 di Euclide più generalmente dimostrate

COROLLARIO. Se la proporzione data sarà continua, come $\therefore a : b : c$, cioè (def. 9.) $a : b :: b : c$, allora, per l'antecedente dimostrazione, sarà $ac = b^2$, cioè il prodotto degli estremi uguale al quadrato del termine medio; ciò, che da Euclide si dimostra nella prima parte della proposiz. 17. del lib. 6. per le linee; e nella prima parte della propos. 20. del lib. 7. per li numeri.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

Se quattro termini saranno talmente paragonati fra loro, che il prodotto del primo nel quarto sia uguale al prodotto del secondo nel terzo, quei quattro termini saranno proporzionali.

Sieno dati i quattro termini a, c, m, s , e di tale condizione, che il rettangolo (aritm. 150.), ossia prodotto as degli estremi sia uguale al prodotto cm de' medii; dico, che i suddetti quattro termini saranno proporzionali, vale a dire se sarà $as=cm$, avrassi $a:c::m:s$.

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi abbiamo $as=cm$, e dividendo le uguali quantità as, cm per la medesima grandezza cs (la quale è il prodotto del secondo termine c nel quarto s) i quozienti $\frac{as}{cs}$, e $\frac{cm}{cs}$, cioè (aritm. 126.) $\frac{a}{c}$, ed $\frac{m}{s}$ saranno fra loro uguali (ass.

5.); sarà cioè $\frac{a}{c}=\frac{m}{s}$; ma (aritm. 100.) le frazioni uguali formano ragioni uguali; sarà dunque $a:c=m:s$, o sia $a:c::m:s$.

Dunque dati quattro termini di qualunque genere, se il prodotto de' medii sarà uguale al prodotto degli estremi, essi quattro termini saranno sempre proporzionali.

Questa proposizione è conversa dell' antecedente perchè suppone dato ciò, che nell' altra si è dimostrato; e dimostra ciò, che nell' altra era dato; e contiene la seconda parte della propos. 16. del lib. 6., e la seconda parte della propos. 19. del lib. 7. d' Euclide.

COROLLARIO I. Da questa proposizione dimostrata ne viene in conseguenza, che due prodotti uguali, o vogliam dire qualsivoglia equazione (aritm. 102.) si può sciogliere in quattro termini proporzionali, purchè il primo, ed il quarto termine si prendano nella medesima parte dell' equazione (sieno cioè i moltiplicatori di uno degli uguali prodotti), ed il secondo, e terzo termine si prendano dall' altra parte dell' equazione, cioè sieno i moltiplicatori dell' altro eguale prodotto; e questa operazione chiamasi *dissolvere*, *disciogliere*, o *sciorre l' equazione*.

Sieno due prodotti uguali ab, cm , cioè sia data l' equazione $ab=cm$, *dissolvendo* si avrà la proporzione $a:c::m:b$, ovvero $a:m::c:b$, o pure $b:c::m:a$, ovvero $b:m::c:a$, o $c:b::a:m$, o pure $c:a::b:m$, o sarà $m:a::b:c$, ovvero $m:b::a:c$, perchè i quattro termini sempre si trovano talmente disposti, che il prodotto degli estremi è uguale al prodotto de' medii, essendo d' ipotesi $ab=cm$.

Similmente data l' equazione numerica $12 \times 4 = 24 \times 2$, *dissolvendo* sarà $12:24::2:4$, oppure $12:2::24:4$, ovvero $4:24::2:12$, o sarà $4:2::24:12$, ovvero $24:12::4:2$, ec. come evidentemente si vede.

COROLLARIO II. Ma se fosse data l' equazione $c=am$, vale a dire (aritm. 24.) $1c=am$; allora *dissolvendo* si avrà $a:c::1:m$, oppure $1:a::m:c$, ec. E da quest' ultima proporzione rimane dimostrato, che in ogni moltiplicazione l' unità sta ad uno de' moltiplicatori a , come l' altro moltiplicatore m sta al prodotto c ; poichè in questa ipotesi la quantità c significa il prodotto di a in m .

COROLLARIO III. Se sarà data l' equazione $am=c^2$, *dissolvendo* ne nascerà la proporzione $a:c::c:m$, o sia $a:c:m$ (def. 9.), e qui rimane dimostrato, che se tre termini a, c, m saranno di tal condizione, che il prodotto, o rettangolo am del primo nel terzo sia uguale al quadrato c^2 del secondo, cioè del termine medio, allora quei tre termini saranno fra loro in proporzione continua. In questo corollario contengono la seconda parte della propos. 17. del lib. 6., e la seconda parte della propos. 20. del 7. lib. d' Euclide.

COROLLARIO IV. Moltiplicando l' equazione $am=c^2$ per a (ass. 4.) si avrà $a^2m=ac^2$, e *dissolvendo* sarà $a:m::a^2:c^2$; ma moltiplicandola per m sarà $am^2=c^2m$, e *dissolvendo* si avrà $a:m::c^2:m^2$. E que-

sto dimostra, che dati tre termini in proporzione continua $\therefore a : c : m$, il primo starà al terzo, come il quadrato del primo al quadrato del secondo, ovvero come il quadrato del secondo al quadrato del terzo; vale a dire il primo al terzo ha ragione duplicata di quella, che ha il primo al secondo, o il secondo al terzo.

Sia $\therefore 3 : 6 : 12$, sarà $3 : 12 :: 9 : 36$, oppure $3 : 12 :: 36 : 144$, come chiaro appare.

COROLLARIO V. Se sarà $a = b$, e le uguali quantità a , e b si moltiplicheranno per una terza c (ass. 4.) si avrà $ac = bc$, e dissolvendo sarà $a : c :: b : c$, ovvero $c : a :: c : b$. Dunque le quantità uguali hanno la medesima ragione ad una terza, e scambievolmente una terza grandezza ha lo stesso rapporto alle quantità uguali.

È la propos. 7. del lib. 5. d'Euclide.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

Dati quattro termini proporzionali, in primo luogo saranno ancora proporzionali il secondo al primo, come il quarto al terzo; e quest'argomentazione dicesi *invertire la ragione*: in secondo luogo saranno parimente proporzionali il primo al terzo, come il secondo al quarto, e questo modo di argomentare chiamasi *alternare*, o *permutare la ragione*.

Sieno i quattro termini proporzionali $a : b :: c : m$,
1. *invertendo* sarà $b : a :: m : c$,

2. *Alternando*, o *permutando* si avrà $a : c :: b : m$.

DIMOSTRAZIONE. Imperciocchè d'ipotesi abbiamo $a : b :: c : m$, dunque (propos. 1.) sarà $am = bc$, e dissolvendo (cor. 1. prop. ant.) si avrà $b : a :: m : c$, medesimamente sarà $a : c :: b : m$.

Che però dati quattro termini proporzionali, invertendogli, o alternandogli sempre rimarranno proporzionali. Il che, ec.

La prima parte di questa proposizione contiene il corollario della proposizione 4. del lib. 5., e la seconda è la proposizione 16. dello stesso lib. 5., ed insieme la propos. 13. del lib. 7. d'Euclide.

Sia $24 : 8 :: 12 : 4$, invertendo sarà $8 : 24 :: 4 : 12$, ed alternando si avrà $24 : 12 :: 8 : 4$.

ANNOTAZIONE. I quattro termini proporzionali $a : b :: c : m$ invertendogli danno ancora la proporzione $m : c :: b : a$, essendo la stessa cosa il dire $b : a = m : c$, o pure $m : c = b : a$. Inoltre alternando la proporzione $m : c :: b : a$ si avrà $m : b :: c : a$; dunque dati i quattro termini proporzionali $a : b :: c : m$ inversamente alternandogli sarà $m : b :: c : a$; cioè il quarto al secondo, come il terzo termine al primo.

Sicchè avendo $24 : 8 :: 12 : 4$, invertendogli sarà ancora $4 : 12 :: 8 : 24$, ed alternandogli inversamente si avrà $4 : 8 : 12 : 24$.

COROLLARIO I. Quindi dati quattro termini proporzionali $a : c :: m : r$, se sarà $a = m$, avremo ancora $c = r$; ma se sarà $a > m$ si avrà eziandio $c > r$; e finalmente se si troverà $a < m$, si avrà parimente $c < r$; perchè alternando la data proporzione abbiamo $a : m :: c : r$, o pure $r : c :: m : a$.

È la propos. 14. del lib. 5. d'Euclide.

COROLLARIO II. Perlaqualcosa se avrassi $a : m :: c : m$, o pure $m : a :: m : c$, perchè egli è $m = m$, sarà eziandio $a = c$. Dunque le quantità, le quali hanno la medesima ragione ad una terza sono uguali fra loro. Similmente uguali fra loro sono quelle quantità, alle quali una terza grandezza ha la medesima ragione.

È la propos. 9. del lib. 5. d'Euclide.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

A vendo quattro termini proporzionali, la somma del primo col secondo avrà la medesima ragione al secondo, che ha la somma del terzo col quarto allo stesso quarto termine. Questa maniera d'argomentare si dice *comporre la ragione*.

Sia la proporzione $a : b :: c : m$, componendo sarà $a + b : b :: c + m : m$.

DIMOSTRAZIONE. Imperciocchè d'ipotesi abbiamo $a : b :: c : m$, perciò (propos. 1.) avremo l'equazione $am = bc$, ed a ciascuna parte dell'equazione aggiungendovi bm (prodotto de' due conseguenti) si formerà (ass. 2.) l'equazione $am + bm = bc + bm$, ossia $a + b \times m = c + m \times b$ (aritm. 61.), e dissolvendo (cor. 1. propos. 2.) si avrà la proporzione $a + b : b :: c + m : m$. Il che ec.

È la propos. 18. del lib. 5. d'Euclide.

Sia $15 : 5 :: 6 : 2$, componendo sarà $15 + 5 : 5 :: 6 + 2 : 2$, cioè $20 : 5 :: 8 : 2$, come chiaramente si vede.

COROLLARIO 1. Se all'equazione $am = bc$ si aggiungerà ac (prodotto dei due antecedenti della data proporzione $a : b :: c : m$), allora (ass. 2.) si avrà quest'altra equazione $ac + am = ac + bc$, cioè

$c + m \times a = a + b \times c$ (aritm. 61.), e dissolvendo nascerà la proporzione $a + b : a :: c + m : c$; vale a dire la somma del primo col secondo sta al primo termine, come la somma del terzo col quarto sta al terzo.

Essendo $15 : 5 :: 6 : 2$, per composizione di ragione sarà ancora $15 + 5 : 15 :: 6 + 2 : 6$, cioè $20 : 15 :: 8 : 6$.

COROLLARIO 1. Inoltre alternando (seconda parte della proposizione 3.) la data proporzione $a : b :: c : m$,

156 ELEMENTI DELLA GEOMETRIA

si avrà $a : c :: b : m$, e componendo (dimostrazione anteced.) sarà $a + c : c :: b + m : m$, oppure (per l'antecedente cor.) si avrà $a + c : a :: b + m : b$, vale a dire componendo, starà la somma degli antecedenti ad uno di essi, come la somma de' termini conseguenti al corrispondente conseguente.

Avendo $15 : 5 :: 6 : 2$, componendo gli antecedenti e conseguenti sarà $15 + 6 : 6 :: 5 + 2 : 2$, cioè $21 : 6 :: 7 : 2$, e sarà ancora $15 + 6 : 15 :: 5 + 2 : 5$, cioè $21 : 15 :: 7 : 5$.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

In ogni proporzione geometrica la differenza tra il primo, e secondo termine sta allo stesso secondo; come la differenza tra il terzo, e quarto al medesimo quarto termine. Questa sorta d'argomentazione dicesi *divider la ragione*.

Sia la proporzione $a : b :: c : m$, dividendo sarà $c - b : b :: c - m : m$.

DIMOSTRAZIONE. Dalla data proporzione $a : b :: c : m$ (proposiz. 1.) ne nasce l'equazione $am = bc$, e da amendue le parti di essa sottraendo la stessa quantità bm , (ass. 3.) rimarrà l'equazione $am - bm = bc - bm$,

cioè $a - b \times m = c - m \times b$ (aritm. 61.) e dissolvendo (cor. 1. propos. 2.) si avrà $a - b : b :: c - m : m$. La qual cosa si dovea dimostrare.

È la propos. 17. del lib. 5. d'Euclide.

Sia $18 : 3 :: 12 : 2$, dividendo sarà $18 - 3 : 3 :: 12 - 2 : 2$; cioè $15 : 3 :: 10 : 2$.

COROLLARIO 1. Se ambedue le parti dell'antecedente equazione $am = bc$ si sottrarranno da ac (prodotto degli antecedenti della data proporzione $a : b :: c : m$) allora (assioma 3.) resterà $ac - am = ac - bc$, cioè

$c-m \times a = a-b \times c$, e dissolvendo sarà $a : a-b :: c : c-m$; vale a dire il primo termine della data proporzione sta alla differenza tra 'l primo, e secondo, come il terzo alla differenza fra il terzo, e 'l quarto. Questo modo d'argomentare si chiama *convertire la ragione*. Ed è la propos. 19. del lib. 5. d'Euclide.

Essendo $a : a-b :: c : c-m$, invertendo sarà $a-b : a :: c-m : c$, cioè nella data proporzione $a : b :: c : m$ la differenza dei due primi termini sta al primo, come la differenza dei due terzo, e quarto sta al terzo.

Se sarà $18 : 6 :: 12 : 4$, convertendo si avrà $18 : 18-6 :: 12 : 12-4$, cioè $18 : 12 :: 12 : 8$, e sarà eziandio $18-6 : 18 :: 12-4 : 12$, o sia $12 : 18 :: 8 : 12$.

COROLLARIO II. Inoltre alternando la data proporzione $a : b :: c : m$, si avrà $a : c :: b : m$, e dividendo sarà $a-c : c :: b-m : m$, cioè la differenza tra i due antecedenti sta al secondo antecedente, come la differenza de' due conseguenti al secondo conseguente.

Ma convertendo la proporzione $a : c :: b : m$ (cor. antec.) sarà $a : a-c :: b : b-m$, ed invertendo sarà ancora $a-c : a :: b-m : b$, cioè la differenza degli antecedenti al primo antecedente ha la stessa ragione, che la differenza de' conseguenti al primo conseguente.

Sia $18 : 6 :: 12 : 4$; sarà eziandio $18-12 : 12 :: 6-4 : 4$, cioè $6 : 12 :: 2 : 4$; ed inoltre sarà $18-12 : 18 :: 6-4 : 6$, cioè $6 : 18 :: 2 : 6$, ec.

COROLLARIO III. Dati quattro termini proporzionali $a : b :: c : m$ componendogli (propos. 4.) abbiamo $a+b : b :: c+m : m$, e dividendogli (dimostr. antec.) si ha $a-b : b :: c-m : m$; perciò (parte seconda propos. 3.) alternando queste due proporzioni si avrà $a+b : c+m :: b : m$, ed $a-b : c-m :: b : m$; dunque (ass. 1.) sarà $a+b : c+m :: a-b : c-m$, ed alternando si avrà $a+c : a-b :: c+m : c-m$; cioè la somma de' due termini della prima ragione sta alla loro differenza, come la somma dei due termini della se-

conda ragione sta alla differenza dei medesimi termini. Questa argomentazione si chiama *mischiare la ragione*.

Inoltre essendosi (cor. 2. propos. 4.) dimostrato essere $a+c : a :: b+m : b$, ed (cor. antec.) $a-c : a :: b-m : b$, mischiando sarà $a+c : a-c :: b+m : b-m$; vuolsi dire la somma degli antecedenti sta alla loro differenza, come la somma de' conseguenti alla differenza di essi.

Se abbiamo $18 : 6 :: 12 : 4$, mischiando sarà $18+6 : 18-6 :: 12+4 : 12-4$, cioè $24 : 12 :: 16 : 8$; sarà inoltre $18+12 : 18-12 :: 6+4 : 6-4$, cioè $30 : 6 :: 10 : 2$.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Dati quattro termini proporzionali, sarà il primo al quarto, come il quadrato del primo al prodotto de' medii; o come il prodotto de' medii al quadrato del quarto. Il prodotto poi de' termini medii sarà medio proporzionale tra il quadrato del primo, ed il quadrato del quarto termine.

Sia la proporzione $a : b :: c : m$, sarà $a : m :: a^2 : bc$, ed $a : m :: bc : m^2$; di più sarà $a^2 : bc : m^2$.

DIMOSTRAZIONE. Dalla proporzione $a : b :: c : m$, (propos. 1.) ne nasce l'equazione $bc = am$, la quale moltiplicata per a (ass. 4.) ci dà $abc = a^2m$, e dissolvendo si avrà $a : m :: a^2 : bc$.

Ma moltiplicando per m la equazione $am = bc$ (ass. 4.) avrassi $am^2 = bcm$, e dissolvendo sarà $a : m :: bc : m^2$.

Inoltre essendosi dimostrato essere $a : m :: a^2 : bc$, ed $a : m :: bc : m^2$ perciò (ass. 1.) sarà eziandio $a^2 : bc :: bc : m^2$, cioè $a^2 : bc : m^2$. Il che si dovea dimostrare.

Sia $8 : 2 :: 12 : 3$, sarà $8 : 3 :: 64 : 24$; ed $8 : 3 :: 24 : 9$; ed inoltre $64 : 24 : 9$.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

Date due, o più proporzioni geometriche di tal condizione, che i conseguenti della prima sieno anche antecedenti della seconda; ed i conseguenti della seconda sieno parimente antecedenti della terza, e così proseguendo, se saranno più proporzioni; io dico, che il primo antecedente della prima starà al primo conseguente dell'ultima proporzion, come il secondo antecedente della prima al secondo conseguente dell'ultima proporzion; e questo si chiama argomentare per l'uguaglià ordinata, o sia ordinando.

Sieno date le geometriche proporzioni $a : b :: e : r$, $b : c :: r : s$, e $c : m :: s : t$, nelle quali i conseguenti b ed r della prima sono anche antecedenti della seconda, ed i conseguenti c ed s della seconda sono ancora antecedenti della terza proporzion, dico, che ordinando sarà $a : m :: e : t$.

DIMOSTRAZIONE. Imperciocchè, d'ipotesi, abbiamo $a : b :: e : r$, $b : c :: r : s$, $c : m :: s : t$, ed alternandole tutte tre (seconda parte proposiz. 3.) avremo $a : e :: b : r$, $b : r :: c : s$, $c : s :: m : t$, dunque (ass. 1.) sarà $a : e :: m : t$, ed alternando si avrà $a : m :: e : t$, cioè il primo termine della prima proporzion al secondo dell'ultima, come il terzo termine della prima al quarto dell'ultima proporzion. Il che ec.

Contiene le propos. 20. e 22. del lib. 5., e la 14 del 7. lib. d'Euclide.

Sieno $12 : 15 :: 4 : 5$, $15 : 6 :: 5 : 2$, $6 : 21 :: 2 : 7$
 $21 : 3 :: 7 : 1$, $3 : 27 :: 1 : 9$, ordinando sarà
 $12 : 27 :: 4 : 9$, come ocularmente si vede.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

Se due, o più geometriche proporzioni saranno talmente tra di loro paragonate, che i termini medii della prima sieno ancora termini estremi della seconda, ed i termini medii della stessa seconda proporzion sieno anche termini estremi della terza, e così continuando, dico, che starà il primo termine della prima proporzion al secondo dell'ultima, come il terzo della stessa ultima proporzion al quarto della prima. E questo dicesi argomentare per l'uguaglià perturbata, o perturbando.

Sieno le proporzioni $a : b :: s : t$, $b : c :: m : s$, $c : r :: x : m$ colla suddetta condizione, che i termini b ed s medii della prima sono anche estremi della seconda, ed i termini medii c , m della seconda sono ancora gli estremi della terza; dico, che perturbando sarà $a : r :: x : t$.

DIMOSTRAZIONE. Dalle date proporzioni $a : b :: s : t$, $b : c :: m : s$, $c : r :: x : m$, moltiplicando i medii, e gli estremi (proposiz. 1.) si formano le equazioni $at = bs$, $bs = cm$, $cm = rx$: laonde (ass. 1.) sarà $at = rx$, e dissolvendo si avrà $a : r :: x : t$. Il che si dovea dimostrare.

Contiene le propos. 21. e 23. del lib. 5, e la 22. del lib. 7. d'Euclide.

Sieno le proporzioni $3 : 6 :: 12 : 24$, $6 : 18 :: 4 : 12$,
 $18 : 9 :: 8 : 4$, $9 : 36 :: 2 : 8$, perturbando sarà
 $3 : 36 :: 2 : 24$.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

Se saranno più quantità proporzionali, o sia più ragioni uguali, allora raccogliendo starà la somma di tutti gli antecedenti alla somma di tutti i conseguenti, come qualsivoglia antecedente al suo conseguente.

Sieno le quantità proporzionali, o sia le ragioni uguali $a:b::c:m::s:t$, raccogliendo sarà $a+c+s:b+m+t::a:b$, ovvero $::c:m$, ec.

DIMOSTRAZIONE. Perchè d'ipotesi abbiamo $a:b::c:m$, perciò componendo (cor. 2. prop. 4.) sarà $a+c:c::b+m:m$, ed alternando ne nasce $a+c:b+m::c:m$, ma per ipotesi abbiamo $c:m::s:t$; dunque (ass. 1.) sarà $a+c:b+m::s:t$, e componendo si avrà $a+c+s:s::b+m+t:t$, e permutando sarà $a+c+s:b+m+t::s:t$; ma per l'ipotesi sta $s:t::c:m::a:b$, adunque (ass. 1.) sarà ancora $a+c+s:b+m+t::a:b$, o $::c:m$, ec. Se dunque saranno più grandezze proporzionali, ec. Il che, ec.

È la propos. 12. del lib. 5., e la 12. del lib. 7. d'Euclide.

Sieno $20:5::4:1::12:3::8:2$, raccogliendo si avrà la proporzione $20+4+12+8:5+1+3+2::4:1$, cioè $44:11::4:1$, o $::20:5$, ec.

PROPOSIZIONE X.

PROBLEMA.

Dati tre termini, trovare il quarto proporzionale. Sieno dati i tre termini a, c, m , e si debba trovarne un quarto, al quale il terzo m abbia lo stesso rapporto, che ha il primo a al secondo c .

RISOLUZIONE. Si moltiplichino il secondo c pel terzo

TOM. I.

L

162 ELEMENTI DELLA GEOMETRIA
 m , ed il prodotto cm si divida pel primo a ; il quoziente $\frac{cm}{a}$ (aritm. 69.) sarà il quarto ricercato termine proporzionale.

DIMOSTRAZIONE. Il quarto incognito termine si chiami x (aritm. 21.), ed allora si avrà la proporzione $a:c::m:x$, perciò (propos. 1.) sarà $ax=cm$, e dividendo quest'equazione per a (assioma 5.) rimarrà $x=\frac{cm}{a}$. Dunque il ricercato quarto termine proporzionale, che si era chiamato x , è uguale al quoziente, che nasce dividendo pel primo termine a il prodotto cm del secondo nel terzo. La qual cosa si dovea fare, e dimostrare.

Sia $a=3$, $c=12$, ed $m=7$, e sarà $x=\frac{12 \times 7}{3} = \frac{84}{3}$ cioè $x=28$, ed infatti egli è $3:12::7:28$.

ANNOTAZIONE. In questo problema si è dimostrata la principale delle quattro regole dell'aritmetica, la quale si chiama *regola delle proporzioni*, anzi per la sua eccellenza, ed utilità grandissima dicesi *regola aurea delle proporzioni*; e volgarmente chiamasi *regola del tre*, perchè dati tre termini, per mezzo di questa regola si trova l'incognito quarto termine proporzionale.

Le altre tre regole aritmetiche, cioè la *regola delle compagnie*, o *delle società*; la *regola di falsa posizione*, o *del falso*, e la *regola di allegazione* molto dipendono da questa regola delle proporzioni, come si può osservare negli Autori, che trattano ex professo dell'aritmetica.

Ma per risolvere le questioni aritmetiche con questa regola si dee attentamente avvertire, che due dei tre dati termini sono sempre dello stesso genere tra di loro, e l'altro che rimane è del medesimo genere col quarto ricercato; ed essi tre termini si deono disporre in maniera, che il termine omogeneo col quarto

si metta nel luogo di mezzo, cioè nel secondo luogo; e nel terzo luogo scrivasì quello, di cui si cerca qualche cosa; e nel primo luogo si metta il rimanente termine omogeneo col terzo, come si può vedere nel seguente esempio.

Un corriere addimanda in quante ore potrà fare 420. miglia, camminando colla stessa velocità, colla quale altra volta fece 72. miglia in 12. ore.

In questo problema il termine omogeneo col quarto incognito sono le ore 12, che si deono porre per secondo termine; il termine, di cui si cerca qualche cosa, sono le miglia 420., dunque si scriva in terzo luogo; e per primo termine si metta il rimanente 72. in questa maniera

miglia ore miglia ore

$$72 : 12 :: 420 : x.$$

Poscia per l'antecedente dimostrazione si moltiplichì il terzo 420 pel secondo 12, ed il prodotto 5040 si divida pel primo termine 72, ed il quoziente 70 sarà il quarto ricercato termine proporzionale; dunque il suddetto corriere percorrerà le 420 miglia nel tempo di 70 ore, cioè di giorni 2, ore 22, imperciocchè abbiamo $72 : 12 :: 420 : 70$, essendo $72 \times 70 = 12 \times 420$.

Quando la quistione contiene più di tre termini, cioè cinque, o sette, ovvero nove, ec., allora dicesi *regola delle proporzioni, o del tre composta*, e si risolve con due, o più regole semplici, e spessissime volte si riduce ad una sola regola semplice, perchè tra i dati termini i principali sono sempre tre, e gli altri meno principali colla moltiplicazione si congiungono con i più principali, come si può osservare nella seguente quistione.

Cinquanta soldati spesero 600 lire in 8 giorni, ora si vorrebbe sapere quante lire spenderanno 80 soldati in quindici giorni.

I principali termini di questo problema sono i soldati 50, le lire 600, ed i soldati 80; ai 50 soldati s'appartengono gli 8 giorni, ed agli 80 soldati appartengono i giorni 15; che però si moltiplichino il 50 per l'8, e l'80 per 15; il primo prodotto 400 sarà il primo termine; ed il secondo prodotto 1200 sarà il terzo termine, ed il termine medio saranno le lire 600; perciò si avrà una regola semplice $400 : 600 :: 1200 : ec.$, e moltiplicando 600 per 1200, indi dividendo il prodotto 720000 per 400, il quoziente 1800 sarà il numero ricercato delle lire, che spenderanno gli 80 soldati in quindici giorni.

ANNOTAZIONE. Quando quattro termini sono proporzionali, allora permutando (seconda parte prop. 3.) il primo al terzo ha sempre lo stesso rapporto, che ha il secondo al quarto. Ma alcune volte si trovano delle quistioni di tale natura, che il primo termine sta al terzo reciprocamente come il quarto al secondo, ed allora si risolvono colla regola, che si chiama *regola del tre inversa, o rovescia*, e si trova il quarto termine incognito moltiplicando il primo pel secondo, e dividendo il prodotto pel terzo termine.

Sieno per esempio i tre termini a, b, c , e si cerchi il quarto x con tale condizione, che sia $a : c :: x : b$, ed allora (propos. 1.) sarà $cx = ab$, e dividendo la

equazione per c (ass. 5.) rimarrà $x = \frac{ab}{c}$; dunque il quarto termine ricercato x è uguale al quoziente, che nasce dividendo il prodotto ab del primo a nel secondo b pel terzo termine c . Eccone un esempio:

Il governatore d'una fortezza assediata facendo ogni giorno distribuire oncie 18 di pane a ciascun soldato, trovò d'aver la provvisione necessaria per mesi 4, ma avendo ricevuto avviso, che il soccorso non poteva giugnere se non dopo mesi 5, vorrebbe sapere quante oncie di pane debba far distribuire giornalmente a ciascun soldato, acciocchè la medesima prov-

visione gli basti per mesi 5. In questo quesito si vede chiaramente, che crescendo il numero dei mesi, il numero delle oncie del pane dee diminuirsi, perciò si dovrà risolvere colla regola del 3 inversa; i termini però si deono ordinare come nella diretta, cioè per terzo termine si dee mettere quello, di cui si cerca qualche cosa, il suo omogeneo sarà primo termine, e termine medio si metta quello, che è dello stesso genere col quarto ricercato. Sarà perciò mesi oncie mesi

4 : 18 . . . 5 : ec., e moltiplicando il primo 4 nel secondo 18, il prodotto 72 si divida pel terzo 5, ed il quoziente $14\frac{2}{5}$ sarà il ricercato numero; poichè

(propos. 2.) è $4 : 5 :: 14\frac{2}{5} : 18$, dunque il gover-

natore dovrà giornalmente far distribuire oncie $14\frac{2}{5}$ a ciascun soldato, e la provvisione gli basterà per mesi 5.

Se la quistione conterrà più di tre termini, cioè cinque, o sette, ec., allora si dirà regola del tre inversa, e composta, e si risolve con due, o più regole semplici, e qualche volta si può ridurre ad una sola regola semplice. Ma spesse volte accade, che la quistione composta di più termini si dee risolvere in parte con regole del tre semplici dirette, e parte con regole del tre semplici inverse, come si potrà osservare negli autori di aritmetica.

COROLLARIO. Dati due termini a, c di una proporzione continua, si troverà il terzo proporzionale dividendo il quadrato del secondo pel primo termine; imperciocchè mettendo x per terzo termine ricercato, si avrà la proporzione continua $a : c : x$; laonde (cor. propos. 1.) sarà $ax = c^2$, e dividendo l'equazione per a (ass. 5.) rimarrà $x = \frac{c^2}{a}$. In conseguenza

il terzo termine di una proporzione continua è uguale al quoziente, che si ricava dividendo il quadrato del secondo termine pel primo.

Ma essendo dati il primo termine a , ed il terzo m d'una proporzione continua, per trovare il termine medio proporzionale, dal prodotto am del primo nel terzo si estraiga la radice quadrata, la quale sarà il secondo termine ricercato.

Imperciocchè chiamando x il ricercato termine medio, si avrà la proporzione continua $a : x : m$, e conseguentemente (cor. propos. 1.) sarà $x^2 = am$, e da queste uguali quantità estraendo la radice quadrata (aritm. 179.) si avrà $x = \sqrt{am}$.

Sia $a = 18$, ed $m = 2$, sarà $x = \sqrt{18 \times 2} = \sqrt{36}$, cioè $x = 6$, e però si avrà $18 : 6 : 2$.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

Dati quattro termini proporzionali $a : b :: c : m$, se gli antecedenti, o i conseguenti, ovvero il primo, e secondo termine, o il terzo, e quarto, oppure tutti quattro i termini si moltiplicheranno, o si divideranno per una medesima quantità s , i quattro termini rimarranno sempre proporzionali.

DIMOSTRAZIONE. Avendo d'ipotesi $a : b :: c : m$, perciò (propos. 1.) si avrà l'equazione $am = bc$, la quale moltiplicata per s (ass. 4.) ci darà $ams = bcs$, e dissolvendo (cor. 1. propos. 2.) si avrà $as : b :: cs : m$, o $a : bs :: c : ms$, ovvero $as : bs :: c : m$, o pure $a : b :: cs : ms$.

Ma se l'equazione $am = bc$ si moltiplicherà per s^2 , allora (ass. 4.) si otterrà $ams^2 = bcs^2$, e dissolvendo sarà $as : bs :: cs : ms$.

Che se la medesima equazione $am = bc$ si dividerà per s , (ass. 5.) resterà $\frac{am}{s} = \frac{bc}{s}$, e dissolvendo sarà

$\frac{a}{r} : b :: \frac{c}{s} : m$ o pure $a : \frac{b}{r} :: c : \frac{m}{s}$, ovvero $\frac{a}{r} : \frac{b}{r} :: c : m$, o $a : b :: \frac{c}{r} : \frac{m}{r}$, perchè sempre il prodotto degli estremi uguaglia il prodotto de' medii.

Finalmente dividendo la stessa equazione $am=bc$ per s^2 (ass. 5.) resterà $\frac{am}{s^2} = \frac{bc}{s^2}$, e dissolvendo si avrà la proporzione $\frac{a}{r} : \frac{b}{r} :: \frac{c}{s} : \frac{m}{s}$. Dunque dati quattro termini, ec. Il che ec.

COROLLARIO. Se la stessa equazione $am=bc$ si moltiplicherà per rs , si avrà $amrs=bcrs$, e dissolvendo sarà $ar : bs :: cr : ms$, ovvero $ar : br :: cs : ms$.

Che se l'equazione $am=bc$ si dividerà per rs , rimarrà $\frac{am}{rs} = \frac{bc}{rs}$, e dissolvendo fia $\frac{a}{r} : \frac{b}{r} :: \frac{c}{s} : \frac{m}{s}$, o pure $\frac{a}{r} : \frac{b}{r} :: \frac{c}{s} : \frac{m}{s}$. Dunque data la proporzione $a : b :: c : m$, se gli antecedenti per una quantità, ed i conseguenti per un'altra, ovvero i due primi termini per una, ed i due ultimi per un'altra quantità si moltiplicheranno, o si divideranno, sempre i quattro termini rimarranno proporzionali.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

Se due, o più proporzioni avranno i medesimi conseguenti, allora la somma de' primi antecedenti starà al loro comune conseguente, come la somma de' secondi antecedenti al loro comune conseguente.

Sieno le proporzioni $a : b :: c : m$, ed $r : b :: s : m$ aventi gli stessi conseguenti b , ed m , sarà $a+r : b :: c+s : m$.

DIMOSTRAZIONE. Dalle proporzioni $a : b :: c : m$,

ed $r : b :: s : m$ si formano (propos. 1.) le equazioni $am=bc$, ed $rm=bs$, ed aggiugnendo cose uguali a cose uguali (ass. 2.) si avrà $am+rm=bc+bs$, cioè $a+r \times m=c+s \times b$, e dissolvendo sarà $a+r : b :: c+s : m$. Il che ec.

È la propos. 24. del lib. 5. d'Euclide.

Sia $12 : 4 :: 15 : 5$, e $20 : 4 :: 25 : 5$, sarà $12+20 : 4 :: 15+25 : 5$, cioè $32 : 4 :: 40 : 5$.

COROLLARIO. Ma se due, o più proporzioni $a : b :: c : m$, $a : r :: c : s$, ec. avranno i medesimi antecedenti a , c , allora perchè invertendo (prima parte propos. 3.) si formano le proporzioni $b : a :: m : c$, ed $r : a :: s : c$ aventi gli stessi conseguenti, perciò (dimostr. antec.) sarà $b+r : a :: m+s : c$, ed invertendo si avrà $a : b+r :: c : m+s$. Dunque se due, o più proporzioni avranno i medesimi antecedenti, allora il primo comune antecedente starà alla somma de' suoi conseguenti, come il secondo comune antecedente alla somma de' suoi conseguenti.

Avendo $5 : 7 :: 15 : 21$, e $5 : 10 :: 15 : 30$, per questo corollario sarà $5 : 17 :: 15 : 51$.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

DATE due proporzioni, moltiplicando, o dividendo i termini dell'una per i corrispondenti termini dell'altra, i prodotti nel primo caso, ed i quozienti nel secondo rimarranno ancora proporzionali.

Sieno le due proporzioni $a : b :: c : m$, ed $r : s :: t : u$, primo sarà $ar : bs :: ct : mu$; in secondo luogo si avrà $\frac{a}{r} : \frac{b}{s} :: \frac{c}{t} : \frac{m}{u}$.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo d'ipotesi $a : b :: c : m$, ed $r : s :: t : u$, perciò (propos. 1.) sarà $am=bc$, ed $ru=st$, e moltiplicando am per ru , e bc per st , si otterrà (ass. 4.)

$amru=bcst$, e dissolvendo sarà $ar:bs::ct:mu$. Il che si dovea in primo luogo dimostrare.

2. Dividendo l'equazione $am=bc$ per l'equazione $ru=st$ (ass. 5.) rimarrà $\frac{am}{ru}=\frac{bc}{st}$, e dissolvendo sarà $\frac{a}{r}:\frac{b}{s}::\frac{c}{t}:\frac{m}{u}$. Il che ec.

Sieno $24:18::48:36$, e $2:3::6:9$, sarà $24 \times 2:18 \times 3::48 \times 6:36 \times 9$, cioè $48:54::288:324$.

Inoltre sarà $\frac{24}{2}:\frac{18}{3}::\frac{48}{6}:\frac{36}{9}$, cioè $12:6::8:4$.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

Dati quattro termini proporzionali, le uguali potestà, e le uguali radici di essi termini saranno eziandio proporzionali.

1. Sia $a:b::c:m$, sarà $a^2:b^2::c^2:m^2$; $a^3:b^3::c^3:m^3$, ec.

DIMOSTRAZIONE. Scrivasi due volte la proporzione $a:b::c:m$, indi si moltiplichino tra di loro i corrispondenti termini, e (propos. antec.) si avrà $a^2:b^2::c^2:m^2$; e moltiplicando i termini di questa per i corrispondenti termini della data proporzione $a:b::c:m$, si otterrà $a^3:b^3::c^3:m^3$, e così continuando si avrà $a^4:b^4::c^4:m^4$, ec.

2. Se sarà data la proporzione $a^2:b^2::c^2:m^2$, o pure $a^3:b^3::c^3:m^3$, ec. sarà parimente $a:b::c:m$.

DIMOSTRAZIONE. Avendo d'ipotesi $a^2:b^2::c^2:m^2$, si avrà (propos. 1.) $a^2 m^2=b^2 c^2$, ed estraendo la radice quadrata (aritm. 179.) resterà $am=bc$, e dissolvendo sarà $a:b::c:m$.

Col medesimo raziocinio, se sarà $a^3:b^3::c^3:m^3$, si dimostrerà essere parimente $a:b::c:m$, estraendo la radice cubica.

170 ELEMENTI DELLA GEOMETRIA

Similmente avendo $r:s::t:u$, si dimostrerà essere $\sqrt{r}:\sqrt{s}::\sqrt{t}:\sqrt{u}$, ec. Il che ec.

Sia $3:2::9:6$, quadrando sarà $9:4::81:36$. Ma dalla stessa proporzione $3:2::9:6$, estraendo la radice quadrata da ciascun termine si avrà $\sqrt{3}:\sqrt{2}::3:\sqrt{6}$; essendo il prodotto de' medii $3\sqrt{2}$ (aritm. 189.) uguale al prodotto $\sqrt{18}$ degli estremi; poichè $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ (aritm. 186.).

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

Due qualunque frazioni saranno sempre fra loro in ragione composta dalla diretta ragione de' numeratori, e dalla ragione inversa dei denominatori; sarà cioè la prima frazione alla seconda, come il prodotto del numeratore della prima nel denominatore della seconda, al prodotto del denominatore della prima nel numeratore della seconda.

Sieno date due frazioni $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{m}$, dico, che sarà

$$\frac{a}{c}:\frac{b}{m}::am:bc.$$

DIMOSTRAZIONE. Imperciocchè de' quattro termini $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{m}$, am , bc moltiplicando il primo $\frac{a}{c}$ pel quarto bc si forma (aritm. 134.) il prodotto $\frac{abc}{c}$, cioè ab (aritm. 123.). Similmente moltiplicando il secondo $\frac{b}{m}$ pel terzo am ne nasce lo stesso prodotto $\frac{abm}{m}$, cioè ab ; dunque essi termini (propos. 2.) sono proporzionali, cioè $\frac{a}{c}:\frac{b}{m}::am:bc$; ma la ragione $am:bc$ (cor. 3. def. 6.) è composta dalle due ragioni $a:b$, ed $m:c$, la prima delle quali $a:b$ è ragione diretta de' numeratori a , b ; e la seconda $m:c$ è ragione reciproca, o inversa della ragione $c:m$ diretta dei de-

numeratori c , ed m (def. 5.). Dunque le date frazioni $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{m}$ sono tra di loro in ragione composta dalla ragione diretta dei numeratori, e dalla reciproca ragione dei denominatori. Il che, ec.

Sieno le due frazioni $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{4}$, sarà $\frac{2}{7} : \frac{3}{4} :: 20 : 14$; onde si può facilmente conoscere, che la frazione $\frac{2}{7}$ contiene una volta, e tre settimi l'altra frazione $\frac{3}{4}$.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

Le frazioni del medesimo nome sono fra loro in ragione diretta de' loro numeratori.

Ma le frazioni, che hanno lo stesso numeratore sono fra loro in ragione reciproca de' loro denominatori.

1. Sieno le frazioni della medesima denominazione

$\frac{a}{m}$, $\frac{c}{m}$ sarà $\frac{a}{m} : \frac{c}{m} :: a : c$.

DIMOSTRAZIONE. Imperciocchè il prodotto del primo termine $\frac{a}{m}$ nel quarto c , cioè $\frac{ac}{m}$ è uguale al prodotto del secondo termine $\frac{c}{m}$ nel terzo a , il quale è parimente $\frac{ac}{m}$; dunque (proposiz. 2.) essi termini sono proporzionali $\frac{a}{m} : \frac{c}{m} :: a : c$; cioè la prima frazione sta alla seconda direttamente, come il numeratore della prima al numeratore della seconda.

2. Sieno le frazioni $\frac{a}{c}$, $\frac{a}{m}$ aventi lo stesso numeratore a , sarà $\frac{a}{c} : \frac{a}{m} :: m : c$.

DIMOSTRAZIONE. Il prodotto del primo termine $\frac{a}{c}$

nel quarto c (aritm. 118.) è a ; ed il prodotto del secondo termine $\frac{a}{m}$ nel terzo m è parimente a ; dunque sono proporzionali (propos. 2.) essi termini $\frac{a}{c} : \frac{a}{m} :: m : c$, cioè la prima frazione sta alla seconda, reciprocamente come il denominatore della seconda al denominatore della prima. Il che, ec.

COROLLARIO I. Se dunque due disuguali quantità a , c si divideranno per un medesimo divisore m , i quozienti $\frac{a}{m}$, $\frac{c}{m}$ staranno tra di loro in ragione diretta dalle date quantità a , c ; essendosi dimostrato essere $\frac{a}{m} : \frac{c}{m} :: a : c$, vale a dire la metà di qualsivoglia quantità sta alla metà di qualunque altra quantità come la prima quantità alla seconda. Parimente la terza parte della prima starà alla terza parte della seconda, come sta la prima alla seconda, e così successivamente.

È la propos. 15. del lib. 5. d'Euclide.

I numeri verbigrazia 48, e 18 si dividano ambedue per 6, sarà $\frac{48}{6} : \frac{18}{6} :: 48 : 18$, cioè $8 : 3 :: 48 : 18$.

COROLLARIO II. Ma se una medesima quantità a si dividerà da due diverse quantità c , ed m , allora i quozienti $\frac{a}{c}$, $\frac{a}{m}$ staranno tra di loro in reciproca ragione de' divisori c , ed m ; poichè si è dimostrato essere $\frac{a}{c} : \frac{a}{m} :: m : c$, vale a dire il primo quoziente sta al secondo, come reciprocamente il secondo divisore al primo.

Come dividendo il 42 pei due numeri 2, e 6, sarà $\frac{42}{2} : \frac{42}{6} :: 6 : 2$, cioè $21 : 7 :: 6 : 2$, come chiaramente si vede.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

Date quante si vogliono quantità dello stesso genere, la ragione della prima all'ultima sarà sempre composta da tutte le intermedie ragioni, cioè dalle ragioni della prima alla seconda, della seconda alla terza, della terza alla quarta, ec.

Sieno le quantità omogenee a, b, c, m, s, t, r , ec. Dico, che la ragione $a : r$ sarà composta da tutte le intermedie ragioni $a : b, b : c, c : m, m : s, s : t, t : r$.

DIMOSTRAZIONE. Si moltiplichino fra loro gli antecedenti a, b, c, m, s, t di esse intermedie ragioni, e tra di loro si moltiplichino i conseguenti b, c, m, s, t, r ; ed i prodotti $abcmt, bcmstr$ (cor. 3. def. 6.) formeranno la ragione $abcmt, bcmstr$ composta da tutte le date ragioni intermedie? ma (proposiz. 2.) abbiamo $abcmt : bcmstr :: a : r$, perchè il prodotto degli estremi $abcmt \times r$ uguaglia il prodotto de' medii $bcmstr \times a$. Dunque la ragione della prima a all'ultima r è composta da tutte le intermedie ragioni $a : b, b : c, c : m$, ec. Il che, ec.

Sieno dati i numeri 48, 12, 6, 24, 4, 2, la ragione del primo 48 all'ultimo 2 sarà composta da tutte le intermedie ragioni 48 : 12, 12 : 6, 6 : 24, 24 : 4, 4 : 2; perciocchè se i valori di esse $\frac{48}{12}, \frac{12}{6}, \frac{6}{24}, \frac{24}{4}, \frac{4}{2}$, cioè 4, 2, $\frac{1}{4}, 6, 2$ si moltiplicheranno fra loro, il prodotto sarà $4 \times 2 \times \frac{1}{4} \times 6 \times 2$, cioè $\frac{2^6}{4}$, vale a dire 24; ed il valore della ragione 48 : 2, è parimente $\frac{48}{2}$ cioè 24; dunque (def. 6.) questa ragione è composta da quelle.

COROLLARIO. Adunque qualsivoglia data ragione $a : b$ si può dividere in quante ragioni piace, frappo-

174 ELEMENTI DELLA GEOMETRIA

rendo tra l'antecedente a , ed il conseguente b quante si vogliono grandezze omogenee alle quantità a , e b , ed allora per l'antecedente dimostrazione la ragione $a : b$ sarà composta da tutte le intermedie ragioni, e conseguentemente resterà divisa in tante ragioni, quante saranno le ragioni intermedie.

Così data la ragione 6 : 2, se tra 'l 6, e 'l 2 si interporranno i numeri 5, 4, 7, allora avendo i numeri 6, 5, 4, 7, 2, la ragione del primo 6 all'ultimo 2, per l'antecedente dimostrazione sarà composta da tutte le intermedie ragioni 6 : 5, 5 : 4, 4 : 7, 7 : 2, e però la stessa ragione 6 : 2 rimarrà divisa nelle suddette quattro ragioni.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

In ogni progressione geometrica la ragione del primo termine al terzo è duplicata, o sia quadrata della ragione del primo al secondo. La ragione del primo al quarto è triplicata, o sia cubica di quella, che ha il primo al secondo. La ragione del primo al quinto è quadruplicata della ragione del primo al secondo, e così successivamente.

Sia data la geometrica progressione $a : b : c : m : r : s : t$, ec. sarà $a : c :: a^2 : b^2$, come già si è dimostrato nel corollario 4 della proposiz. 2.

Inoltre sarà $a : m :: a^3 : b^3$, $a : r :: a^4 : b^4$
 $a : s :: a^5 : b^5$, ec.

DIMOSTRAZIONE. La ragione $a : m$ (propos. ant.) è composta dalle tre intermedie ragioni $a : b, b : c, c : m$, le quali sono, d'ipotesi, uguali fra loro, perciò (cor. 1. def. 7.) la ragione $a : m$ sarà triplicata di ciascuna di esse; dunque (cor. 2. def. 7.) sarà $a : m :: a^3 : b^3$.

Col medesimo raziocinio si dimostra, che la ragione $a:r$ è quadruplicata, o sia quadrato-quadrata della ragione $a:b$; stantechè la ragione $a:r$ (prop. ant.) è composta dalle quattro intermedie ragioni uguali $a:b$, $b:c$, $c:m$, $m:r$; sarà perciò $a:r::a^4:b^4$. Similmente si dimostra $a:s::a^5:b^5$, ed $a:t::a^6:b^6$, e così successivamente sino all'infinito. Il che, ec.

Sia $\therefore 2:4:8:16:32:64:128$, ec. sarà
 $2:8::4:16$, $2:16::8:64$, $2:32::16:256$.

COROLLARIO. Conseguentemente la ragione $a:b$, cioè del primo al secondo (cor. 3. def. 7.) è sudduplicata, o sia suquadrata della ragione $a:c$ del primo al terzo, è sutriplicata, o succubica della ragione $a:m$ del primo cioè al quarto, e così successivamente.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

In qualsivoglia progressione geometrica il prodotto degli estremi è sempre uguale al prodotto di due termini ugualmente distanti dagli estremi; ed è uguale al quadrato del termine medio, quando il numero dei termini è dispari.

DIMOSTRAZIONE. Sia data la progressione geometrica $\therefore a:ac:ac^2:ac^3:ac^4:ac^5:ac^6:ac^7$ ec. sarà $a \times ac^7 = ac \times ac^6 = ac^2 \times ac^5 = ac^3 \times ac^4$, cioè a^2c^7 , come resta evidente.

Parimente data la progressione $\therefore ac^8:ac^7:ac^6:ac^5:ac^4$; si avrà $ac^8 \times ac^4 = ac^7 \times ac^5$, cioè $= a^2c^{12}$ quadrato del termine medio ac^6 , come chiaramente si vede. Dunque, ec. Il che ec.

Sia in numeri la progressione
 $\therefore 1:3:9:27:81:243:729$, sarà
 $1 \times 729 = 3 \times 243 = 9 \times 81 = 27 \times 27$.

PROPOSIZIONE XX.

PROBLEMA.

Dati il denominatore della ragione, il minimo termine, ed il massimo di una geometrica progressione, ritrovare la somma di tutti i termini di essa.

RISOLUZIONE. Dal massimo termine si sottragga il minimo, ed il residuo si divida pel denominatore della ragione diminuito dell'unità, ed al quoziente si aggiunga il massimo termine, e si avrà la somma ricercata di tutti i termini della data progressione.

DIMOSTRAZIONE. Sieno della geometrica progressione il minimo termine a , il massimo ac^s , ed il denominatore della ragione sia c , per ritrovare la somma di tutti i termini, si sottragga il minimo termine a dal massimo ac^s , ed il residuo $ac^s - a$ dividasì pel denominatore c diminuito dell'unità, cioè per $c-1$, e si troverà il quoziente (aritm. 75. 76.)

$ac^4 + ac^3 + ac^2 + ac + a$, al quale si aggiunga il termine massimo ac^s , e si avrà la somma
 $ac^s + ac^4 + ac^3 + ac^2 + ac + a$, la quale è la ricercata somma di tutti i termini della progressione
 $\therefore a:ac:ac^2:ac^3:ac^4:ac^s$. Il che, ec.

Sia la progressione $\therefore 243:81:27:9:3$, la somma di tutti i termini sarà

$$\frac{243-3}{3-1} + 243 = \frac{240}{2} + 243, \text{ cioè } 120 + 243 = 363.$$

Similmente della progressione

$$\therefore 1:2:4:8:16:32:64, \text{ la somma sarà}$$

$$\frac{64-1}{2-1} + 64 = \frac{63}{1} + 64, \text{ cioè } 127.$$

Parimente della progressione decrescente

$$\therefore 1:\frac{1}{2}:\frac{1}{4}:\frac{1}{8}:\frac{1}{16}:\frac{1}{32} \text{ la somma sarà}$$

$$\frac{1-\frac{1}{32}}{2-\frac{1}{2}} + 1 = \frac{32-1}{32} + 1 = \frac{31}{32} + 1, \text{ cioè } 1\frac{31}{32}.$$

ANNOTAZIONE. Nelle geometriche progressioni decrescenti, se si concepiscono prolungate all' infinito, perchè i termini di esse sempre decrescono nella stessa ragione, il termine infinitesimo sarà più piccolo di qualunque quantità immaginare si possa, e perciò senza pericolo di fare veruno errore sensibile, si può prendere la cifra o per ultimo termine di tali progressioni. Laonde per l' antecedente dimostrazione si potrà trovare la somma di tutti gl' infiniti termini di qualsivoglia progressione geometrica decrescente all' infinito.

(Il segno, che serve a dinotare l' infinito si è questo ∞ , e dicesi *infinito*.)

Come dell' antecedente progressione

$\therefore 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16}$ ec. ∞ , continuata all' infinito la somma sarà $\frac{1-0}{2-1} + 1$, cioè $\frac{1}{1} + 1 = 2$.

Similmente la somma della progressione

$\therefore 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \frac{1}{27} : \frac{1}{81}$ ec. ∞ sarà $\frac{1-0}{3-1} + 1 = \frac{1}{2} + 1$, cioè $1\frac{1}{2}$. Nella medesima maniera si trova la somma di ogni altra simile progressione continuata all' infinito.

DIMOSTRAZIONE.

Per togliere a' principianti ogni difficoltà, e ribrezzo, che aver possano di prendere la cifra o pel termine infinitesimo di una progressione geometrica decrescente all' infinito, supponiamo, che la quantità $c^3 - 3c^2 + 3cx^2 - x^3$ si debba dividere per $c^2 - 2cx + x^2$; se la divisione s' instituisce per c^2 , o per x^2 , come abbiamo insegnato nell' aritmetica (77.), facilmente si trova il quoziente $c - x$; ma istituendola pel termine $-2cx$, cioè dividendo il termine $-3c^2x$ per $-2cx$, si ha $\frac{3}{2}c$ per primo termine del quoziente, che moltiplicato per tutto il divisore, e sottrattone il prodotto dalla quantità dividenda, rimane da dividersi

$-\frac{1}{2}c^3 + \frac{3}{2}cx^2 - x^3$, e di questo residuo

$$\begin{array}{r}
 c^3 - 3c^2x + 3cx^2 - x^3 \\
 - \frac{1}{2}c^3 + 3c^2x - \frac{3}{2}cx^2 \\
 \hline
 -\frac{1}{2}c^3 + \frac{3}{2}cx^2 - x^3 \\
 + \frac{1}{4}c^2x - \frac{3}{2}cx^2 + \frac{3}{4}x^3 \\
 \hline
 -\frac{1}{2}c^3 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}c^2x \\
 - \frac{3}{8}c^3 - \frac{3}{4}c^2x + \frac{3}{8}cx^2 \\
 \hline
 -\frac{1}{8}c^3 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{8}cx^2
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l}
 c^2 - 2cx + x^2 \\
 \hline
 \frac{3}{2}c - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}c - \frac{1}{16}x
 \end{array} \right.$$

dividendo il termine $+\frac{3}{2}cx^2$ per $-2cx$, si ricava

$-\frac{3}{4}x$ per secondo termine del quoziente, che moltiplicato per tutto il divisore, e sottrattone il prodotto dalla quantità dividenda, rimane a dividersi

$-\frac{1}{2}c^3 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}c^2x$; e dividendo il termine

$+\frac{3}{4}c^2x$ per $-2cx$, sarà $-\frac{3}{8}c$ terzo termine del quo-

ziente, e moltiplicatolo pel divisore, indi sottrattone il prodotto dalla quantità dividendanda, rimarrà la quantità dividendanda $-\frac{1}{8}c^3 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{8}cx^2$, di cui dividendo il termine $+\frac{3}{8}cx^2$ per $-2cx$, termine assunto del divisore, si otterrà $-\frac{3}{16}x$ per quarto termine del quoziente, e continuando la divisione, si troverà $-\frac{3}{32}c$ per quinto termine, $-\frac{3}{64}x$ per sesto termine, $-\frac{3}{128}c$ per settimo termine, $-\frac{3}{256}x$ per ottavo termine ec. sarà dunque $\frac{3}{2}c - \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}c - \frac{3}{16}x - \frac{3}{32}c - \frac{3}{64}x - \frac{3}{128}c$, ec. ∞ il quoziente di questa divisione, il quale per altro dee essere uguale alla quantità $c-x$, perciocchè si è diviso il cubo di essa (aritm. 142., 143.) pel suo quadrato, e per conseguenza il quoziente dee essere la stessa quantità $c-x$, o uguale ad essa, come accade in questo caso. Imperciocchè il ritrovato quoziente è composto dalla quantità positiva $\frac{1}{2}c$, cioè da $c + \frac{1}{2}c$, e dalla somma di due progressioni geometriche negative decrescenti all'infinito in ragione squadrupla, e sono

La prima $\div \div -\frac{3}{8}c : -\frac{3}{16}c : -\frac{3}{32}c : -\frac{3}{64}c, \text{ ec. } \infty$

La seconda $\div \div -\frac{3}{4}x : -\frac{3}{8}x : -\frac{3}{16}x : -\frac{3}{32}x, \text{ ec. } \infty$

Or supponiamo, che l'ultimo, ed infinitesimo termine di ciascuna di queste decrescenti progressioni sia la cifra o negativa, perchè tutti i termini sono negativi, la somma della prima, per l'antecedente dimo-

strazione, sarà $\frac{3}{4-1}c$, cioè $-\frac{3}{4}c - \frac{3}{8}c$, e riducendo a minimi termini la frazione $\frac{3}{4}c$ essa somma sarà $-\frac{3}{8}c - \frac{3}{8}c$, vale a dire $-\frac{3}{4}c$, o sia $-\frac{1}{2}c$;

180 ELEMENTI DELLA GEOMETRIA
e la somma della seconda progressione sarà

$\frac{3}{4-1}x$, vale a dire $-\frac{3}{4}x - \frac{3}{8}x$, e riducendo il $\frac{3}{4}x$ a minima espressione, essa somma sarà $-\frac{3}{8}x - \frac{3}{8}x$ cioè $-\frac{3}{4}x$, o sia $-x$.

Adunque la somma delle suddette due progressioni sarà $-\frac{1}{2}c - x$, che aggiunta alla quantità positiva $c + \frac{1}{2}c$ ne dà la somma $c + \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}c - x$; cioè $c - x$ uguale al suddetto quoziente. Per la qual cosa nelle progressioni geometriche decrescenti all'infinito, si dee prendere la cifra o per ultimo, e minimo termine di esse.

COROLLARIO. Da questo dimostrato problema si deduce. 1. Che nella progressione geometrica, quando il denominatore della ragione è il numero due, allora la differenza tra 'l massimo, e 'l minimo termine uguaglia la somma di tutti i termini, eccettuato il massimo. 2. Quando il denominatore della ragione è il numero tre, allora la differenza tra 'l massimo, ed il minimo termine è doppia della somma di tutti i termini, eccettuato il massimo. 3. Se il denominatore della ragione sarà quattro, in tal caso la differenza tra il massimo, e minimo termine sarà tripla della somma di tutti i termini, eccettuato il massimo; e così proseguendo.

Come data la geometrica progressione

$\div \div c : ac : a^2c : a^3c : a^4c, \text{ ec.}$

1. Se sarà $a=c$, la progressione diventerà

$\div \div c : 2c : 4c : 8c : 16c$, nella quale abbiamo $16c - c$, cioè $15c$ uguale alla somma $c + 2c + 4c + 8c$.

2. Se facciasi $a=3$, allora si avrà

$\div \div c : 3c : 9c : 27c : 81c$, in cui come chiaramente apparisce, si ha $81c - c$, cioè $80c$ doppio della somma $c + 3c + 9c + 27c$, che uguaglia $40c$.

3. Se sia $a=4$ la suddetta progressione si trasformerà in quest'altra $\div c : 4c : 16c : 64c : 256c$, in cui $256c-c$, cioè $255c$ è il triplo della somma $c+4c+16c+64c$, che è $85c$, e così successivamente. Conseguentemente nel primo caso la differenza tra il massimo, e minimo termine aggiunta al termine massimo ci dà la somma di tutti i termini della progressione. Nel secondo caso la somma del massimo termine colla metà della differenza tra 'l massimo, e minimo termine è uguale alla somma di tutti i termini ec.

DEFINIZIONE XII.

Ragione aritmetica dicesi quando fra loro si paragonano due quantità omogenee, e si considera soltanto la differenza, che passa fra loro: come $a . a+m$ (che leggesi a all' $a+m$) è ragione aritmetica, nella quale il secondo termine $a+m$ supera il primo a della quantità m .

Similmente $9 . 5$ è ragione aritmetica, quando si considera, che il 9 supera il 5 di quattro unità.

Ragioni aritmetiche uguali sono quelle, che hanno le differenze uguali, quelle cioè, i cui antecedenti superano ugualmente i loro conseguenti, o ugualmente mancano degli stessi conseguenti.

Le due ragioni $8 . 5$, e $12 . 9$ sono uguali per essere $8-5=12-9$.

Similmente le due ragioni aritmetiche $a . a+m$, e $b . b+m$ sono fra loro uguali, perchè gli antecedenti a , e b differiscono della stessa quantità m dai loro conseguenti $a+m$, e $b+m$.

Paragonando fra loro due ragioni aritmetiche uguali, si forma la *proporzione aritmetica*. Così l' 8 sta al 5 , come il 12 al 9 , che scrivesi così $8 . 5 . : . 12 . 9$, e si legge *l' otto al cinque come il dodici al nove*. Parimente è proporzione aritmetica $a . a-c . : . b . b-c$.

La *proporzione aritmetica* dicesi *discreta*, quando il secondo termine non è uguale al terzo. Ma qualora il secondo termine è uguale al terzo, o sia quando il primo sta al secondo, come lo stesso secondo al terzo, allora si noma *proporzione continua*, e viene indicata con questo segno \div , che significa *proporzione aritmetica continua*; come $\div 2 . 5 . 8$, oppure $\div a . a+c . a+2c$, e quando ha più di tre termini, dicesi *progressione*.

Laonde la *progressione aritmetica* è una serie di quantità crescenti, o decrescenti per la medesima differenza, come la progressione $\div 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10$ ec., la quale chiamasi *serie de' numeri naturali*.

Sono altresì aritmetiche progressioni le seguenti

$$\div 1 . 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 . 22 \text{ ec.}$$

$$\div a . a+c . a+2c . a+3c . a+4c , \text{ ec.}$$

$$\div a . a-m . a-2m . a-3m . a-4m , \text{ ec.}$$

$$\div 8 . 5 . 2 . -1 . -4 . -7 . -10 . \text{ ec.}$$

$$\div 6 . 4 . 2 . 0 . -2 . -6 . -8 , \text{ ec.}$$

Da quest'ultima si scorge, che nelle progressioni aritmetiche la cifra o può essere uno de' termini di esse.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

Nell'aritmetica proporzione la somma degli estremi uguaglia la somma de' termini medii, ed è doppia del termine medio nella proporzione continua.

DIMOSTRAZIONE. Imperciocchè data la proporzione aritmetica $a . a+m . c . : . +cm$, egli è evidente, che la somma $a+c+m$ degli estremi è uguale alla somma $a+m+c$ de' termini medii. Similmente avendo la proporzione $a . a-c . : . b . b-c$, si avrà l'equazione $a+b-c=a-c+b$.

Che se la proporzione sarà continua, come $\div a . a+m . a+2m$, allora la somma degli estremi,

che è $a+a+2m$, cioè $2a+2m$, è doppia del termine medio $a+m$, come chiaramente si vede. Il che ec.

Sia $12 \cdot 7 \cdot 20 \cdot 15$, sarà $12+15=7+20$; ma avendo $\div 5 \cdot 8 \cdot 11$, sarà $5+11$ doppio del termine medio 8.

COROLLARIO. Adunque dati tre termini dell'aritmica proporzione, per ritrovare il quarto proporzionale, si somma il secondo col terzo, e da essa somma sottraggasi il primo, ed il residuo sarà il quarto ricercato, poichè si è dimostrato, che la somma del primo col quarto uguaglia la somma del secondo col terzo. Come dati i tre termini $a \cdot a+c \cdot b$, il quarto sarà $a+c+b-a$, cioè $c+b$.

Ma se dati due termini, si dovrà trovare il terzo continuamente proporzionale, allora dal doppio del secondo si sottragga il primo, e si avrà il ricercato terzo termine della proporzione continua.

Così de' due termini $\div a \cdot a+m$ il terzo proporzionale sarà $2a+2m-a$, cioè $a+2m$.

Finalmente dati il primo, e terzo termine, il medio proporzionale si troverà prendendo la metà della somma del primo col terzo. Così tra i due numeri

12, e 18 il medio proporzionale sarà $\frac{12+18}{2}$, cioè 15, essendo $\div 12 \cdot 15 \cdot 18$.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA.

Nella progressione aritmica la somma degli estremi è uguale a quella dei termini ugualmente distanti dagli estremi; ed è doppia del termine medio, quando il numero de' termini è dispari.

Così nella progressione aritmica

$\div a \cdot a+c \cdot a+2c \cdot a+3c \cdot a+4c \cdot a+5c$ noi abbiamo
 $a+a+5c=a+c+a+4c=a+2c+a+3c$, cioè
 $=2a+5c$.

Similmente nella progressione

$\div c \cdot c-m \cdot c-2m \cdot c-3m \cdot c-4m$ abbiamo
 $c+c-4m=c-m+c-3m=2c-4m$ doppio del termine medio $c-2m$.

Sia $\div 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13 \cdot 16 \cdot 19$, sarà
 $1+19=4+16=7+13=10+9$.

Medesimamente se sarà $\div 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot -1 \cdot -3 \cdot -5$, avremo $9-5=7-3=5-1=3+1$.

Parimente avendo la progressione

$\div 12 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 0 \cdot -3 \cdot -6$, ec. sarà
 $12-6=9-3=6+0=2 \times 3$ doppio del termine medio 3.

COROLLARIO I. Per la qual cosa dati il primo termine, e l'ultimo, ed il numero de' termini della progressione aritmica, a trovare la somma di tutti i termini di essa, si moltiplichi la somma del primo coll'ultimo pel numero de' termini, e si prenda la metà di esso prodotto, che sarà la ricercata somma, la quale si può anche trovare moltiplicando la somma degli estremi per la metà del numero de' termini, o pure la metà della somma degli estremi per tutto il numero de' termini.

Come della progressione aritmica

$\div a \cdot a+c \cdot a+2c \cdot a+3c \cdot a+4c$, la somma sarà
 $\frac{2a+4c \times 5}{2}$, o sia $a+2c \times 5$, cioè $5a+10c$. Similmente

della progressione $\div 1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 21$, la somma sarà
 $\frac{22 \times 6}{2}$, oppure 11×6 , ovvero 22×3 , cioè 66.

Parimente della progressione,

$\div 12 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 0 \cdot -3 \cdot -6$ la somma sarà $\frac{12-6 \times 7}{2}$,

cioè $3 \times 7=21$.

COROLLARIO II. Dalle sopraddette nozioni facilmente si può comprendere, che il massimo termine della progressione aritmica altro non è, che la somma del

minimo termine colla differenza moltiplicata pel numero de' termini diminuito dell' unità, come apparisce nella progressione $\div a \cdot a+c \cdot a+2c \cdot a+3c \cdot a+4c$, in cui il massimo termine $a+4c$ è la somma del primo a colla differenza c moltiplicata per $5-1$, cioè per 4, numero de' termini diminuito dell' unità. Adunque sottraendo il minimo termine dal massimo, e dividendo il residuo pel numero de' termini scemato dell' unità, il quoziente sarà la differenza regnante nella progressione.

Così nell' antecedente progressione si troverà

$\frac{a+4c-a}{5-1}$, cioè $\frac{4c}{4}$ uguale alla differenza c della progressione.

Medesimamente nella progressione

$\div 12 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 0 \cdot -4 \cdot -8$, sottraendo il minimo -8 dal massimo 12, e dividendo il residuo $12+8$ (aritm. 52. 53.) cioè il 20 pel numero dei termini sminuito dell' unità, che è $6-1$, cioè 5, il quoziente 4 sarà la differenza ricercata.

DEFINIZIONE XIII.

Se a tutti i termini di una progressione geometrica, che abbia per primo termine l' unità, corrisponderanno successivamente i termini d' una progressione aritmetica, il cui primo termine sia la cifra 0; allora ciascun termine della progressione aritmetica si chiama *logaritmo* del corrispondente termine della geometrica progressione.

Sieno per esempio le due progressioni

$\div 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$ ec.

$\div\div 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512$ ec.

Il 7 sarà *logaritmo* del 128, il 5 *logaritmo* del 32, il 3 *logaritmo* dell' 8, e così discorrendo degli altri.

Le principali proprietà di questi numeri chiamati *logaritmi* sono:

1. Che la somma di due *logaritmi* è *logaritmo* del prodotto de' due numeri corrispondenti della serie geometrica. Così sommando il 5 (*logaritmo* di 32.) col 2, *logaritmo* di 4, la somma 7 è *logaritmo* del 128, ch'è il prodotto del 4 nel 32.

2. La differenza tra due *logaritmi* è *logaritmo* del quoziente, che nasce dividendo il numero, che ha il *logaritmo* maggiore per quello, che ha il *logaritmo* minore; per esempio sottraendo il 3 (*logaritmo* di 8) dal 7, *logaritmo* del 128, il residuo 4 è *logaritmo* del 16 quoziente, che ritrovasi dividendo il 128 per 8.

3. Raddoppiando il *logaritmo* d' un numero, si avrà il *logaritmo* del quadrato di esso numero; triplicandolo si avrà il *logaritmo* del cubo; quadruplicandolo si otterrà il *logaritmo* della quarta potestà del medesimo numero ec. Verbigrazia duplicando il 3, *logaritmo* di 8, si ha 6 *logaritmo* di 64, che è il quadrato dell' 8, triplicando lo stesso 3, si ha il 9 *logaritmo* del 512, che è il cubo dell' 8 ec.

4. La metà del *logaritmo* d' un numero è *logaritmo* della radice quadrata di esso numero, la terza parte è *logaritmo* della radice cubica di esso numero, ec. Come l' 8 è *logaritmo* del numero 256, e la metà di 8, cioè 4 è *logaritmo* di 16 radice quadrata del 256. Il 6 è *logaritmo* del numero 64, e la terza parte di 6, cioè 2, è *logaritmo* del 4 radice cubica del 64, ec.

COROLLARIO. Adunque la moltiplicazione, la formazione delle potestà, la divisione, e l' estrazione delle radici da' numeri, si riduce a pura somma, e sottrazione de' *logaritmi*. Ma siccome la geometrica progressione non contiene la serie naturale di tutti i numeri, mancano perciò i *logaritmi* de' numeri non compresi nella serie geometrica. A questo difetto però con indicibile vantaggio delle matematiche scienze, e specialmente della Trigonometria, e dell' Astronomia pose riparo nel secolo passato il celebre Nepero Scoz-

zese, Barone di Merchistonio, ec. coll' invenzione, e ritrovamento de' logaritmi di ciascun numero, e dopo di esso altri valentissimi geometri con immense fatiche formarono le tavole logaritmiche, che sono di tanta utilità a' geometri per la maggiore speditezza, e facilità di fare i calcoli più intricati, e faticosi.

CALCOLO

DE' NUMERI DECIMALI.

Le sopraddette tavole sono state calcolate coi numeri decimali, i quali altro non sono, che frazioni decimali (aritm. 91.) scritte come scrivonsi i numeri interi; e siccome i numeri interi, cominciando dalla parte destra, e procedendo verso la sinistra crescono in ragione decupla; perciocchè (aritm. 7.) la figura 1 nella prima sede significa uno, e posta nella seconda sede, cioè a sinistra della prima significa 10, nella terza sede esprime 100, nella quarta significa 1000, e così continuando all' infinito; la medesima cosa s'intenda delle altre figure aritmetiche; al contrario i numeri decimali si scrivono dalla sinistra verso destra, e decrescono in ragione suddecupla, in maniera che la figura 1 nella prima sede a sinistra significa $\frac{1}{10}$, e posta nella seconda sede, cioè a destra della prima significa $\frac{1}{100}$, nella terza sede significa $\frac{1}{1000}$, nella quarta esprime $\frac{1}{10000}$, e così proseguendo all' infinito. Lo stesso si dee intendere delle altre figure, verbigrazia il 3 nella prima sede significa $\frac{3}{10}$, nella seconda significa $\frac{3}{100}$, nella terza esprime $\frac{3}{1000}$, ec.

Questi numeri decimali scrivonsi alla destra degli interi, separandoli da essi con un punto; e se non vi

sono numeri interi, si mette la cifra 0 in loro vece.

Così in luogo di scrivere $23\frac{47}{100}$, si scrive 23.47 ;

e per esprimere $\frac{243}{1000}$ scrivesi 0.243 . Similmente nelle

sedi vuote di numeri si mette la cifra 0. Come vo-

lendo esprimere la frazione $\frac{17}{1000}$ si scrive 0.017 ;

e la frazione $\frac{301}{100000}$ si esprime scrivendo 0.00301 .

Parimente il numero $16\frac{3}{1000}$ si scrive 16.003 , e

così discorrendo.

Per la qual cosa un numero decimale scritto ordinatamente come si è detto, s' intende sempre, che abbia per denominatore l' unità con altrettanti zeri, quante sono le figure, che ha il dato numero decimale.

Inoltre ad un numero decimale aggiugnendo, o togliendogli sulla destra quanti zeri piace, non si cambia il suo valore.

I numeri, esempigrazia, 0.1, 0.10, 0.100, 0.1000, ec. significano la stessa quantità, cioè il decimo dell' intero, perchè essi numeri equivalgono alle frazioni

$\frac{1}{10}$, $\frac{10}{100}$, $\frac{100}{1000}$, $\frac{1000}{10000}$, le quali (aritm. 101.)

sono tutte uguali fra loro, e ciascuna di esse significa una decima parte dell' unità.

Parimente il numero 0.500 si esprime per 0.50, o

per 0.5, perchè $\frac{500}{1000}$ significa $\frac{50}{100}$, o sia $\frac{5}{10}$; e

così degli altri.

La somma de' numeri decimali si fa come quella degl' interi, scrivendoli prima ordinatamente, cioè gli interi sotto gl' interi, se ve ne sono, indi i decimali sotto ai decimali.

Per esempio la somma

$$\begin{array}{r} 13.2705, 4.93, \\ 0.05173, \text{ sar\`a } 18.25223, \\ \text{cio\`e } 18 \text{ interi colla frazione} \\ \frac{25223}{100000}; \text{ come ognuno pu\`o} \end{array}$$

facilmente dimostrarlo, sommando gl'interi colle frazioni decimali, nella maniera stata insegnata al numero 129. dell'aritmetica.

Da questo esempio chiaro apparisce, che gl'interi si considerano come congiunti cogli annessi decimali; perciocch\`e qualsivoglia intero, per esempio 5, si pu\`o (aritm. 119.) esprimere per 5.0, cio\`e per $\frac{50}{10}$, ovvero per 5.00, cio\`e per $\frac{500}{100}$ ec.

Nella sottrazione de' numeri decimali (che si fa come quella de' numeri interi) quando il numero minuendo ha un numero di figure decimali minore del numero, che ne ha il sottraendo, allora si uguaglia mettendovi dei zeri. Cosi dovendosi dal num. 16.83 sottrarre il numero 7.9652, si scriver\`a 16.8300 per numero minuendo, e fatta la sottrazione, come se fossero tutti interi, il residuo sar\`a 8.8648, cio\`e 8 interi colla frazione $\frac{8648}{10000}$.

La moltiplicazione de' decimali si fa come se fossero numeri interi, e ritrovato il prodotto, da esso si separano col punto, e verso la destra altrettante figure, quante decimali n'aveano tra tutti due i moltiplicatori.

Così moltiplicando il numero 25.364 per 2.07, il prodotto sar\`a 52.50348, dal quale deonsi separare verso destra cinque figure, perch\`e altrettante ne hanno tra il moltiplicatore, ed il moltiplicando; onde esso prodotto sar\`a 52.50348.

$$\begin{array}{r} 25.364 \\ \times 2.07 \\ \hline 177548 \\ 507280 \\ \hline 52.50348 \end{array}$$

Quando nel prodotto non vi sono tante figure, quante decimali si trovano ne' due moltiplicatori, allora si mettano dei zeri nelle sedi mancanti di figure. Verbigrazia moltiplicando il

$$\begin{array}{r} \text{numero } 0.0032, \text{ cio\`e } \frac{32}{10000} \\ \times 0.41, \text{ cio\`e } \frac{41}{100} \\ \hline 32 \\ 128 \\ \hline 1312 \end{array}$$

prodotto \`e 1312 di quattro sole figure, e da esso se ne deono separare sei alla destra, perch\`e i due moltiplicatori hanno sei decimali; perci\`o si aggiungano due zeri per riempire le sedi vuote, ed un altro zero per dinotare la prima sede degl'interi, ed il suddetto prodotto sar\`a 0.001312, cio\`e

$$\frac{1312}{1000000}$$

La divisione de' numeri decimali si fa eziandio come quella de' numeri interi, e quando il divisore non \`e contenuto intere volte nel dividendo, si pu\`o continuare quanto piace la divisione, aggiugnendo de' zeri alla destra del dividendo.

Se il dividendo non ha tante figure decimali, quante ne ha il divisore, se gli aggiungano de' zeri alla destra, per renderlo di uguale, o di maggior numero di decimali.

Quando hanno ugual numero di decimali, se, dopo fatta la divisione, non vi rimane verun avanzo, il quoziente sar\`a un numero intero senza decimali. Ma

quando il dividendo ne ha di più, o si accrescono nel fare la divisione, allora il quoziente dee avere tante figure decimali, quante ne ha il dividendo di più del divisore; vale a dire tra 'l quoziente, e 'l divisore deono avere tante figure decimali, quante ne ha il dividendo, come si vedrà ne' seguenti esempi.

Dividendo il numero

1.77548 per 0.07, il quoziente è 25364, dal quale si deono separare a destra tre figure

$$\begin{array}{r} 1.77548 \quad | \quad 0.07 \\ \hline 25.364 \end{array}$$

decimali, poichè dalle cinque, che ha il dividendo levandone due, che ha il divisore, rimangono tre pel quoziente, il quale perciò sarà 25.364.

Se il dividendo sarà 0.64, ed il divisore sia 0.0032, che ha due decimali di più del dividendo; perciò al dividendo si aggiungano due zeri, e si

$$\begin{array}{r} 0.6400 \quad | \quad 0.0032 \\ \hline 200 \end{array}$$

divida 0.6400 pel dato divisore 0.0032, il quoziente sarà il numero intero 200, perchè il divisore, ed il dividendo hanno ugual numero di figure decimali. Per provare questa verità basta far l'operazione colle frazioni, cioè (arit.

136.) dividere la frazione $\frac{64}{100}$ (che significa 0.64)

per $\frac{32}{10000}$ che equivale al numero decimale 0.0032) e si troverà lo stesso quoziente 200.

Similmente dividendo il numero 128.82 pel divisore 0.0064, aggiugnendo dei zeri al dividendo, quanti saranno necessari per continuare la divisione, la quale terminata ci dà il quoziente

$$\begin{array}{r} 128.8200000 \quad | \quad 0.0064 \\ \hline 20128.125 \\ 082 \\ 180 \\ 520 \\ 80 \\ 160 \\ 320 \end{array}$$

192 ELEMENTI DELLA GEOMETRIA
20128125, dal quale si debbono separare a destra col punto tre decimali, perchè dalle sette, che ha il dividendo, levandone quattro, che ha il divisore, restano tre pel quoziente; il quale perciò sarà 20128.125, cioè 20128 interi colla frazione $\frac{125}{1000}$.

Qualsivoglia frazione si può ridurre in parti decimali, moltiplicando il numeratore della frazione pel denominatore delle parti decimali, e dividendo il prodotto pel denominatore della data frazione, ed il quoziente sarà il ricercato numero decimale; cioè facciasi una regola del tre, che abbia per primo termine il denominatore della frazione, ed il numeratore per secondo, e per terzo termine il denominatore decimale, cioè il 10, o il 100, o il 1000, ec.; verbigratia si vuole ridurre in decimali la frazione $\frac{3}{8}$, facciasi la regola di proporzione 8 : 3 :: 1000 al quarto, che sarà

$$\frac{3000}{8}, \text{ cioè } 375, \text{ dunque sono } \frac{3}{8} = 0.375 \text{ cioè } \frac{3}{8} = \frac{375}{1000}.$$

Quando non si può trovare il quoziente in interi, allora si continua quanto piace la divisione, e si troverà un numero decimale approssimante. Così per ridurre in parti decimali la frazione $\frac{5}{6}$, moltiplicato il 5

per 100, o per 1000. ec., e diviso il prodotto per 6, si troverà il quoziente 83333, ec. col residuo 2, onde si può continuare all'infinito la divisione, aggiugnendo de' zeri al dividendo, e mai non si troverà il quoziente in interi; ciò non ostante il numero decimale 0.83333 sarà prossimamente uguale alla frazione $\frac{5}{6}$,

$$\begin{array}{r} 5000 \quad | \quad 6 \\ \hline 20 \\ 20 \\ 20 \\ 20 \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \\ \hline 0.83333 \end{array}$$

poichè non gli manca nemmeno una centomillesima parte dell' unità, per essergli perfettamente uguale, essendo la frazione $\frac{1}{6}$ alquanto maggiore di 0.83333, ed alquanto minore del numero decimale 0.83334. Laonde senza pericolo di far errore sensibile, il numero decimale 0.83333 si può considerare come uguale alla frazione $\frac{1}{6}$.

Questa operazione è di moltissima utilità nell'estrazione delle radici per approssimazione; perciocchè i zeri, che si aggiungono, per maggiormente approssimarsi alla vera radice col continuare l'operazione (come abbiamo fatto aritm. nn. 160, 166) sono figure decimali, e si aggiungono due a due, acciocchè il denominatore delle figure aggiunte sia un numero quadrato, quando si dee estrarre la radice quadrata; e quando si cerca la radice cubica per approssimazione i zeri si aggiungono tre a tre, acciocchè i denominatori decimali sieno numeri cubi.

Ma quando il numero, da cui dee estrarsi la radice, ha delle note decimali, per non errare, se le decimali sono dispari, si aggiunga uno zero per renderle pari, qualora si dee estrarre la radice quadrata; ma dovendo estrarre la radice cubica, allora coll'aggiungere i zeri necessari, si faccia in maniera, che il numero delle figure decimali sia sempre divisibile in interi pel numero 3.

Inoltre questa operazione è di grandissimo vantaggio nella divisione, quando vi rimane un avanzo di qualche considerazione; poichè con questo metodo continuando la divisione colla giunta di quanti zeri piace, si trova un quoziente sempre più approssimante al vero; trascurando poscia l'ultimo residuo, perchè ridotto ad una particella, o minuzia insensibile.

Vicendevolmente, dato, un numero di parti decimali, si riduce ad una frazione d'un dato nome, e ciò

si ottiene moltiplicando il denominatore della proposta frazione nel numero decimale, e dividendo il prodotto pel denominatore delle figure decimali (che, come già abbiamo detto, è sempre l'unità con tanti zeri a destra, quante sono le note decimali); il quoziente sarà il numeratore della proposta frazione. Per esempio avendo 0.875 parti decimali del trabucco, si cerca quanti piedi, ed oncie contengano esse parti, che in questo caso significano $\frac{875}{1000}$ del trabucco. Or essendo il piede liprando $\frac{1}{6}$ del trabucco, perciò si moltiplichino le parti decimali 0.875 pel denominatore 6 della proposta frazione, ed il prodotto 5.250 si divida per 1000 denominatore decimale, ed il quoziente 5 sarà numeratore della frazione $\frac{1}{6}$, che significa cinque sestimi del trabucco, cioè piedi 5; l'avanzo 0.250 si riduca in una frazione, che abbia il 12 per denominatore, perchè l'oncia è $\frac{1}{12}$ del piede; si moltiplichi adunque il residuo 0.250 per 12, ed il prodotto 3.000 si divida pel divisore 1000, il quoziente 3 significa $\frac{3}{12}$ del piede, cioè 3 oncie. Adunque parti decimali 0.875 del trabucco significano piedi 5, ed oncie 3.

Finalmente occorrendo di dover esprimere con numero decimale le parti di qualsivoglia intero diviso in diverse specie, ciò facilmente si otterrà col ridurre le date parti alla denominazione della specie minore, indi si riduca la ritrovata frazione in parti decimali, come poco anzi si è dimostrato. Si debbano, per esempio, esprimere con numero decimale piedi 2, oncie 7, punti 6 del trabucco, qui si dee premettere, che trabucco nostrale è diviso in 6 piedi, il piede in 12 oncie, e l'oncia in 12 punti, dal che ne segue, che

il piede è la sesta parte del trabucco, l' oncia è la settantaduesima parte di esso, ed il punto è la ottocensessantaquattresima parte del medesimo trabucco, e che punti 6 sono $\frac{6}{864}$, cioè sei ottocensessantaquattresime parti di esso. Ciò premesso si riducano i piedi 2, e le once 7, che fanno once 31, in punti, moltiplicandole per 12, e si avranno 372 punti, che aggiunti ai suddetti 6, fanno 378 punti, o sia $\frac{378}{864}$ asimi del trabucco. Poscia, come poco avanti si è insegnato, (pag. 124) si riduca questa frazione in parti decimali, moltiplicando il numeratore 378 per 1000, o per 10000, e dividendo il prodotto 370000 pel denominatore 864, si troverà il quoziente 4375; perciò piedi 2, once 7, punti 6 si esprimeranno esattamente dal numero decimale 0.4375, che significa quattromila trecento settantacinque diecimillesime parti del trabucco, che rimane diviso in diecimila parti uguali.

DEFINIZIONE XIV.

Armonica, o musica proporzione dicesi quando di tre quantità continuamente disuguali la prima sta alla terza, come la differenza tra la prima, e la seconda alla differenza tra la seconda, e la terza. I tre numeri 8, 12, 24 sono armonicamente proporzionali, poichè sta $8 : 24 :: 12 - 8 : 24 - 12$, cioè $8 : 24 :: 4 : 12$. Similmente sono in proporzione armonica i tre numeri 6, 3, 2, perchè sta $6 : 2 :: 6 - 3 : 3 - 2$, cioè $3 : 1$.

A trovare tre termini in proporzione armonica basta prendere tre termini, che siano in proporzione aritmetica continua, e moltiplicare il primo nel secondo, il prodotto sarà primo termine della proporzione armonica, indi moltiplicare il primo pel terzo, ed il prodotto sarà secondo termine; ed il prodotto del secondo

nel terzo della proporzione aritmetica sarà terzo termine dell'armonica.

Così avendo i tre numeri $\div 2 . 6 . 10$ in proporzione aritmetica continua, si troveranno i numeri 2×6 , 2×10 , 6×10 , cioè $12 . 20 . 60$ in proporzione armonica, stando $12 : 60 :: 20 - 12 : 60 - 20$, cioè $12 : 60 :: 8 : 40$.

Dati due termini della proporzione armonica, si troverà il terzo dividendo il prodotto dei due primi pel doppio del primo meno il secondo. Sieno i due termini a, c , ed il terzo incognito si chiami x , sarà $a : x :: a - c : c - x$; onde (propos. 1.) si avrà $ax - cx = ac - ax$, e per antitesi (aritm. 106.) sarà $2ax - cx = ac$, e dividendo l'equazione per $2a - c$ (ass. 5.) rimarrà $x = \frac{ac}{2a - c}$.

Se saranno dati il primo a , ed il terzo m , a trovare il medio x si divida il doppio prodotto del primo nel terzo per la loro somma, e si avrà per quoziente il medio termine. Poichè essendo i tre termini a, x, m in proporzione armonica, sarà $a : m :: a - x : x - m$, e però (proposiz. 1.) si avrà $ax - am = am - mx$, e per antitesi sarà $ax + mx = 2am$, e dividendo per $a + m$, (ass. 5.) sarà $x = \frac{2am}{a + m}$.

L'armonica proporzione può avere più di tre termini in due maniere; e primieramente si possono trovare due altri termini, che siano in armonica proporzione col terzo, e ciò si ottiene moltiplicando il secondo, e terzo pel denominatore della ragione del primo al terzo, e si avranno il quarto, e quinto termine, quando i termini della proporzione sono crescenti: ma quando i termini della data proporzione musica decrescono, bisogna dividere il secondo, ed il terzo pel medesimo denominatore della ragione del primo al terzo, ed i quozienti daranno il quarto, ed il quinto termine.

Sieno i tre termini crescenti 4, 6, 12 in armonica proporzione, e prendasi il denominatore della ragione 4 : 12, che è 3, e per esso 3 si moltiplichino al secondo 6, ed il terzo 12, ed i prodotti 18, e 36 saranno i termini quarto, e quinto; onde saranno i termini 4 ; 6 ; 12 ; 18 ; 36 in armonica proporzione continua, i tre primi tra di loro, ed il terzo coi due seguenti fra loro; essendo 4 : 12 :: 6—4 : 12—6, e 12 : 36 :: 18—12 : 36—18.

Se il quarto, e quinto termine si moltiplicheranno per lo stesso denominatore della ragione del primo al terzo, o del terzo al quinto, che è lo stesso, si otterranno i termini sesto, e settimo in armonica proporzione col quinto, e così proseguendo si può continuare all'infinito.

Sieno i termini decrescenti 24 ; 12 ; 8 in armonica proporzione, dividendo il secondo 12, ed il terzo 8 pel denominatore 3 della ragione, 24 : 8, del primo al terzo, i quozienti 4, e $2\frac{2}{3}$ saranno i termini quarto, e quinto in armonica proporzione col terzo, e saranno i cinque termini 24 ; 12 ; 8 ; 4 ; $2\frac{2}{3}$, onde si ha 24 : 8 :: 24—12 : 12—8, e $8 : 2\frac{2}{3} :: 8—4 : 4—2\frac{2}{3}$ cioè $8 : 2\frac{2}{3} :: 4 : 1\frac{1}{3}$.

Dividendo i termini quarto, e quinto per l'istesso denominatore della ragione del terzo al quinto, si otterranno i termini sesto, e settimo, ed in questo modo ancora si può continuare la proporzione musica con termini decrescenti all'infinito.

In secondo luogo l'armonica proporzione può essere di quattro, o di più termini, ma in guisa, che i primi tre tra di loro, il secondo col terzo, e quarto fra loro, e così continuando, il terzo col quarto, e quinto fra loro ec., sieno armonicamente proporzionali.

Tali sono i numeri 24, 12, 8, 6, $4\frac{2}{3}$; essendo

$$24 : 8 :: 24 - 12 : 12 - 8, \text{ e}$$

$$12 : 6 :: 12 - 8 : 8 - 6, \text{ ed } 8 : 4\frac{2}{3} :: 8 - 6 : 6 - 4\frac{2}{3}.$$

Per ritrovare quanti si vogliono termini, in questa seconda maniera, armonicamente proporzionali, si prendano altrettanti numeri, che sieno in progressione aritmetica, e si moltiplichino tra di loro, ed il prodotto si divida per ciascuno di essi, i quozienti saranno in armonica proporzione. Così moltiplicando fra loro i numeri $\div 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$, il prodotto sarà 720, che divisi per ciascuno di essi numeri, i quozienti 720, 360, 240, 180, 144, 120 sono in armonica proporzione continua. Inoltre se un numero sarà divisibile per più numeri, che sieno in aritmetica progressione, i quozienti saranno eziandio armonicamente proporzionali. Esempigrazia il 60 è divisibile per gli stessi numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, ed i quozienti 60, 30, 20, 15, 12, 10 sono in continua armonica proporzione, come ognuno può vedere.

Quando dati tre termini, il terzo sta al primo, come la differenza tra 'l primo, e secondo, alla differenza tra 'l secondo, e terzo, allora la proporzione dicesi *contrarmonica*. I tre numeri 9 ; 15 ; 18 sono in proporzione contrarmonica, perchè sta $18 : 9 :: 15 - 9 : 18 - 15$, cioè $:: 6 : 3$.

Parimente i tre numeri 6, 5, 3 sono in proporzione contrarmonica, essendo $3 : 6 :: 6 - 5 : 5 - 3$, ec.

ANNOTAZIONE. La proporzione armonica, o musica è stata così chiamata, perchè i numeri, che la costituiscono, contengono le consonanze della musica. Per esempio i numeri 12 . 6 . 4 . 3, che sono in armonica proporzione continua, contengono cinque consonanze musicali; poichè la ragione dupla 12 : 6, ovvero 6 : 3 costituisce la consonanza detta diapason, o sia ottava. La ragione sesquialtera 6 : 4 forma la

consonanza chiamata diapente, o quinta. La ragione sesquiterza $4:3$ esprime la consonanza nominata diatessaron, o quarta. La ragione tripla $12:4$ costituisce la consonanza nominata diapason e diapente, o sia duodecima. E la ragione quadrupla $12:3$ costituisce la consonanza appellata disdiapason, o decimaquinta.

FINE DEL LIBRO PRIMO DI GEOMETRIA

E DELLA PRIMA PARTE.