ELEMENTI

DI

ALGEBRA, GEOMETRIA

E

TRIGONOMETRIA PIANA

per uso

DEL SEMINARIO DI BOLOGNA

SECONDA EDIZIONE

CON MOLTE RIFORME ED AGGIUNTE

BOLOGNA

Pei Tipi Governativi alla Volpe.

1851.

INDICE

DELLE MATERIE

Geometria.

Sezione III.

Appendice.

Trigonometria Piana.

GEOMETRIA

Introduzione.

Ogni corpo occupa una estensione, ossia uno spazio nel quale hanno luogo ad un tempo le tre dimensioni *lunghezza*, *larghezza* e *profondità*, ovvero *altezza*, o *grossezza* che dir si voglia.

Quantunque queste tre dimensioni si trovino sempre riunite in tutti i corpi, col pensiero però si possono considerare o separatamente l'una dall'altra, o a due a due. Così p. e. si può cercare la lunghezza di una strada senza chiederne la larghezza; e si può misurare la larghezza e la lunghezza di un lago, cioè la sua ampiezza, senza curarne la profondità. Ma se si trattasse di determinare la capacità di un vaso, in questo caso, come è chiaro, sarebbe d'uopo aver riguardo a tutte tre le dimensioni di esso.

Considerando la sola dimensione della lunghezza, si ha l'idea della *linea*. Le estremità di una linea, si chiamano *punti*: il punto adunque non ha alcuna estensione. Considerando la lunghezza unita alla larghezza, si ha l'idea della *superficie*. Considerando finalmente tutte e tre insieme le dimensioni, lunghezza, larghezza e profondità, si ha l'idea del *solido*. Ciascuna di queste tre grandezze, con nome generico, chiamasi *quantità estesa;* si hanno quindi tre specie di quantità estese, cioè le linee, le superficie e i solidi.

La *Geometria* è la scienza che ha per oggetto la misura di queste tre specie di estensione, e ne considera le loro proprietà e i rapporti. Essa si distingue in *teorica* e in *pratica*. Nella teorica si dimostrano per mezzo di un ragionamento le verità enunciate nelle proposizioni geometriche; nella pratica s'insegna la maniera di applicare la teorica al fatto.

In questi nostri Elementi daremo le principali nozioni della Geometria teorica, ed alcune anche di pratica, ove il crederemo opportuno, e ciò colla maggiore chiarezza e brevità possibile.

Spiegazione de' termini che si usano in Geometria

Assioma è una verità evidente di per se stessa, cioè che non abbisogna di dimostrazione.

Teorema è una verità che diviene evidente per mezzo di un ragionamento chiamato *dimostrazione*.

Problema è una ricerca proposta, che esige una soluzione.

Lemma è una verità impiegata sussidiariamente per rendere più facile la dimostrazione di un teorema, o la soluzione di un problema.

Il nome comune di proposizione si attribuisce indistintamente ai teoremi, ai problemi e ai lemmi.

Corollario è una conseguenza che deriva naturalmente dalla dimostrazione di un teorema, o dalla soluzione di un problema.

Scolio è una osservazione fatta sulle proposizioni precedenti per maggiore schiarimento, onde se ne conosca appieno il loro legame, l'utilità e l'espressione loro.

Assiomi.

1. Due quantità, eguali ciascuna ad una terza quantità, sono eguali fra loro.

2. Due quantità eguali si possono scambievolmente sostituire l'una all'altra.

3. Se due quantità eguali vengono o accresciute o diminuite, o moltiplicate o divise per una stessa quantità, o per quantità eguali, le somme o i residui, i prodotti o i quoti sono eguali.

4. Se due quantità contengono una terza, o sono in essa contenute uno stesso numero di volte, sono eguali tra loro.

5. Un tutto qualunque è uguale alla somma di tutte le parti nelle quali può essere diviso, ed è perciò maggiore di ciascuna di esse parti.

6. Due grandezze qualunque, sieno linee, superficie, o solidi, sono eguali, quando, soprapposte l'una all'altra, coincidono in tutta la loro estensione.

7. A quantità disuguali aggiungendo o levando cose eguali, od una stessa ad entrambi comune, le somme o i residui saranno come prima disuguali.

8. Se si abbiano due quantità che sieno una doppia dell'altra, e si aggiunga o si levi dalla doppia una porzione che sia il doppio di quella che si aggiugne o si leva all'altra, le somme, o i residui rimarranno uno doppio dell'altro.

SEZIONE PRIMA

CAPO I.

Della linea e superficie retta e curva, della formazione del circolo e sua divisione.

1. Le linee e le superficie possono essere *rette* e *curve*. La linea retta è quella che nel nostro pensiero rappresenta la minore e vera distanza da un punto ad un altro (Fig.ª 1), come AB. Tutte le altre ACB, ADB, AEB, $AFGB$, che dallo stesso punto A vanno a B, ma per diverse e più lunghe vie, diconsi curve; e le due ultime propriamente ricevono il nome di *rette spezzate*, perchè composte di una retta che cangia direzione.

2. Da ciò ne segue: 1.° *che una sola retta può condursi da un punto ad un altro*, perchè una sola può essere la linea più corta di tutte le altre, ed una sola la minore e vera distanza fra due punti determinati; e perciò qualunque altra retta si conducesse fra i medesimi punti si confonderebbe colla prima. Per lo contrario fra due determinati punti possono tirarsi infinite curve, perchè infinite sono le vie più o meno lunghe che possono condurre dall'uno all'altro; 2.° *che i due punti posti alla estremità di una retta determinano insieme e la lunghezza e la direzione o posizione di essa.*

3. È poi chiaro che a determinare la sola direzione basterebbero due punti qualunque presi a qualsivoglia distanza lungo la retta stessa, potendosi sempre la medesima immaginare o più breve di quello che è realmente, o indefinitamente prolungata a piacimento. Perciò se due rette hanno comuni due punti, avranno altresì una medesima direzione; e se hanno comune un sol punto, avranno direzione diversa; come all'opposto se esse sono in direzione diversa, in maniera che prodotte si taglino, non potranno avere che un solo punto comune.

4. Più punti A, B, C, D...... (Fig.ª 2) saranno nella stessa direzione quando sieno così disposti, che una retta tirata per due qualunque di essi p. e. A e B, passi ancora per gli altri punti C e D.

5. La superficie dicesi *retta* o *piana*, od anche assolutamente *piano*, quando sopra di essa si possono condurre delle

linee rette per ogni verso; ossia quando, soprapponendovi una retta, questa combacia perfettamente con essa in tutti i punti. In caso contrario, la superficie dicesi *curva*.

6. Tanto le linee quanto le superficie curve poi, chiamansi *convesse* dalla parte esterna E (Fig.ª 3), *concave* dalla parte interna I, e sono le une e le altre d'infiniti generi, perchè in infinite maniere si può descrivere una curva.

7. La più semplice tra tutte le curve, e insieme la più familiare ai geometri e la più nota, è la *circolare* $A\ B\ G\ F$ (Fig.ª 4), quella cioè che la retta $C\,B$, movendosi in giro sopra di un piano intorno ad una delle sue estremità C, va successivamente descrivendo coll'altra estremità B.

8. La curva circolare intera $ADBF$ (Fig.ª 5) chiamasi *circonferenza* o *periferia*, e lo spazio da essa compreso dicesi *circolo* o *cerchio*. Importa molto distinguere periferia da circolo, benchè spesso nel comune parlare si prendano promiscuamente. Il punto C in cui si suppose fissa la retta $C\,B$ che descrisse la periferia, e che perciò è egualmente distante da tutti i punti di essa, chiamasi *centro*. Ogni retta $C\,D$, CF, tirata al centro dalla periferia, dicesi *raggio*; il raggio $A\,C$ prolungato fino alla parte opposta B della circonferenza, vale a dire una retta che tocchi la periferia in due punti, e passi pel centro, chiamasi *diametro*, il quale perciò dividerà sì il cerchio che la periferia in due parti eguali. È poi evidente che tanto i raggi quanto i diametri di uno stesso circolo, o di circoli eguali sono eguali tra loro, perchè ciascun raggio vien rappresentato dalla medesima retta che generò il circolo, e ciascun diametro viene espresso da un doppio raggio.

9. Una porzione qualunque della periferia p. e. $A\,B$, oppure $B\,D\,F$ ecc. (Fig.ª 6) dicesi *arco*; la retta AB, o BF che congiunge le estremità dell'arco, chiamasi *corda* o *sottesa* dell'arco AB, o BDF, ovvero corda che *sottende* l'arco AB, o BDF.

Si avverta poi che ogni corda p. e. AB, oltre l'arco AB sottende altresì il resto $B\,D\,F\,A$ della circonferenza, vale a dire appartiene simultaneamente a due archi; ma quando altro non si dichiari, si deve sempre riferire all'arco minore.

10. Chiamasi *segmento* del cerchio la porzione di superficie $B\,D\,F$, che vien compresa fra l'arco $B\,D\,F$, e la sottesa $B\,F$, la quale divide il cerchio stesso in due segmenti disuguali. Infine dicesi *settore* (Fig.ª 5) quella porzione di

superficie che è compresa fra un arco qualunque DB e due raggi $C\,B$, $C\,D$ condotti alle estremità di esso.

11. Mentre la linea CB (Fig.ª 7) fissa nel punto C si aggira intorno sopra un piano, ciascun punto di essa B, D, F, ecc. descrive altrettante circonferenze $A\,B\,E$, $G\,D\,H$, $P\,F\,M$, aventi il centro comune, le quali perciò chiamansi *concentriche*, e *concentrici* si chiamano pur anco i circoli da esse periferie compresi.

12. Nei circoli concentrici gli archi $B\,E$, $D\,H$, $F\,M$ compresi fra gli stessi raggi $C\,B$, $C\,E$ sono egual parte ognuno della propria circonferenza, vale a dire: se l'arco $B\,E$ nel circolo maggiore è la terza parte della circonferenza $A\,B\,E$, anche l'arco $D\,H$ nel secondo circolo sarà la terza parte della sua periferia $G\,D\,H$; e così pure lo sarà l'arco $F\,M$ della circonferenza minore $P\,F\,M$. Ciò che si dice degli archi vale altresì dei settori. Questa verità si fa chiara a chiunque voglia riflettere che come le intere circonferenze $A\,B\,E$, $G\,D\,H$, $P\,F\,M$ sono tutte descritte nel medesimo tempo colla totale rivoluzione della linea $C\,B$, così ancora gli archi BE, DH, FM tutti nel medesimo tempo si descrivono mentre la $C\,B$ compie una certa parte del suo giro.

Il compasso è lo strumento ordinario con cui si descrive il cerchio nella maniera a tutti nota.

13. Convennero i geometri dai più remoti tempi di dividere qualunque circonferenza in 360 parti eguali, che si chiamano *gradi*. Il grado poi fu diviso in 60 parti eguali dette *minuti primi*; ed ogni minuto primo in altre 60 parti eguali dette *minuti secondi*, e così via via. Quindi la semiperiferia sarà composta di 180 gradi, la quarta parte di 90, l'ottava di 45. Per maggiore facilità di calcolare fu dai moderni francesi sostituita la divisione decimale, cioè s'intese la periferia divisa in 400 gradi; ogni grado in 100 minuti primi, ed ogni primo in 100 secondi ecc. I gradi s'indicano con uno zero scritto in alto alla destra del loro numero; i minuti primi con un apice, i secondi con due apici scritti allo stesso modo dei gradi ecc.; così volendo indicare un arco di 45 gradi, 54 minuti primi, 23 secondi, si scriverà 45°, $54'$, $23''$ ecc.

CAPO II.

Dell' Angolo e sua misura.

11. Quando due linee partono da due punti diversi, e coincidono in un punto comune, che non sia posto nella direzione degli altri due, formano una certa apertura, la quale chiamasi *angolo*. Se le due linee coincidenti sono (Fig.ª 8, 9, 10) ambidue curve, l'angolo dicesi *curvilineo*; se una retta, l'altra curva, *mistilineo*; se tutte due rette, *rettilineo*, e di questo solamente noi intendiamo parlare.

15. Il punto C (Fig.ª 11) in cui s' incontrano le due rette, dicesi *acume* o *vertice* dell'angolo, e le rette AC, BC chiamansi *lati* o *gambe* dell' angolo.

16. L'angolo si può indicare o con una lettera sola che si scrive vicino al vertice fuori o dentro della sua apertura a piacimento, come l'angolo D (Fig.ª 11); oppure con tre lettere, due delle quali si mettono alle estremità dei lati, e l'altra all' acume, avvertendo però nel nominar l'angolo di mettere sempre nel mezzo la lettera scritta al vertice di esso. Così per nominare l'angolo della Fig.ª 12 converrà dire BAC, ovvero CAB, non mai CBA, o BCA.

17. La grandezza dell' angolo non si misura già dalla lunghezza de' suoi lati, ma sibbene dalla maggiore apertura di essi, vale a dire dalla maggiore o minore inclinazione che hanno nel punto di coincidenza l'una su l'altra le due linee che lo formano. Onde l'angolo C (Fig.ª 11) sarà maggiore dell'angolo BAC (Fig.ª 12), sebbene quest' ultimo abbia le gambe assai più lunghe del primo, il quale però ha una apertura molto più grande. Pertanto i lati di un angolo qualunque potranno accorciarsi o prolungarsi secondo che richiederà il bisogno, senza che l'angolo cangi il suo primo valore.

18. L' angolo rettilineo si misura dai geometri in questo modo. Fatto centro nell' accume C dell' angolo BCD (Fig.ª 13) si descriva un circolo qualunque ABD, e si prolunghino, se faccia d' uopo, le gambe dell'angolo, finchè taglino la periferia del cerchio descritto. L'arco BD compreso fra i due lati CB, CD dell'angolo, si prende per misura di esso, e di tanti gradi appunto si dice essere l'angolo, di quanti è composto l' arco che lo misura. Quindi se l' angolo aumenti e divenga BCF, ovvero scemi e divenga BCG, l'arco BD aumenterà o scemerà anch' esso nello stesso rapporto. E

benchè col medesimo centro C e con vari raggi si possano descrivere infiniti circoli concentrici aventi tutti un arco compreso fra i due lati BC, DC, tali archi però sono parti simili ognuno della propria circonferenza, vale a dire sono tutti composti di un egual numero di gradi (N.° 12). Onde col dire che l' angolo BCD ha per misura l' arco BD, si deve intendere sempre il numero dei gradi di BD, non già la sua lunghezza assoluta.

19. Un angolo composto di 90 gradi, dicesi *retto*. Gli angoli retti perciò sono tutti eguali tra loro, e le linee che li formano, si chiamano *perpendicolari* l'una all'altra. Se l'angolo è minore di 90 gradi, dicesi *acuto;* se maggiore *ottuso;* e in questo caso le linee da cui sono formati diconsi *oblique* o *inclinate* l'una all'altra vicendevolmente.

20. Lo strumento, che serve a misurare gli angoli sopra la carta, è una lastra di metallo (Fig.ª 14) piegata in semicircolo e divisa in 180 gradi. Questo strumento si chiama *semicircolo graduato*. Per eseguire la misura praticamente si applica il diametro dello strumento sopra il lato AC dell'angolo ACD, in modo che il centro del semicircolo cada sul vertice di esso C (Fig.ª 14). Il numero dei gradi dell'arco AD compreso fra i due lati AC, DC, sarà la misura dell'angolo. Nel nostro caso perciò l'angolo ACD sarà di 40 gradi.

21. Dicesi *complemento* di un angolo o di un arco la loro differenza in più o in meno coll'angolo retto, ossia con 90 gradi; e *supplemento* la loro differenza con due angoli retti, ovvero con 180 gradi. Dunque se un angolo o un arco è di 65° 15' avrà per complemento 24° 45' in meno; se di 98°, 45', 20", avrà per complemento in più 8°, 45', 20". Del pari un angolo od un arco di 144°, 50', avrà per supplemento 35°, 10'. Lo stesso dicasi degli altri.

22. *Corollario* Quindi due angoli aventi lo stesso complemento o supplemento nello stesso senso sono eguali.

23. Quando una linea retta DC (Fig.ª 15) cade sopra un' altra retta AB, essa forma due angoli ACD, BCD, i quali si chiamano *adiacenti* o *contigui* alla stessa linea DC.

24. Teorema 1.° *Gli angoli adiacenti alla stessa linea o sono retti, o eguali alla somma di due retti.*

Dimostrazione. Si faccia centro nel vertice comune C, e si descriva con un raggio qualunque un cerchio che tagli le gambe dei due angoli in A, D, B. Fatto ciò è chiaro che la linea ACB diventa diametro del circolo descritto (N.° 8), e perciò l' arco o piuttosto la semiperiferia ADB sarà di 180 gradi (N.° 15). Gli angoli adunque in essa compresi o da essa misurati saranno anch' essi, presi insieme, composti di 180 gradi (N.° 18), ossia eguali alla somma di due retti, come dovea dimostrarsi.

25. *Corollario* 1.° Se la linea DC (Fig.° 16) cadesse perpendicolare sopra AB, dimodochè l' angolo ACD fosse retto, dovrebbe necessariamente essere retto anche l' altro DCB, com' è chiaro.

26. *Corollario* 2.° Se nello stesso punto C (Fig.° 17) in cui la retta DC cade sopra AB convenga un numero qualunque di rette FC, EC ecc. provenienti tutte dalla stessa parte della DC, gli angoli da esse linee formati cioè ACF, FCD, DCE, ECB presi insieme, formeranno la somma di due retti, perchè tutti compresi e misurati dalla semiperiferia $AFDEB$.

27. Teorema 2.° *Se due linee* AC, BC (Fig.° 15) *provenienti da parti opposte* A *e* B *convengano colla terza* DC *nello stesso punto* C, *e formino i due angoli* ACD, DCB *eguali alla somma di due retti, quelle due linee* AC, BC *saranno sulla medesima direzione, ossia si potranno considerare come una sola linea retta.*

Dimostrazione. Si faccia centro in C e si descriva la circonferenza $ADBF$. Giacchè per supposizione i due angoli ACD, DCB sono eguali alla somma di due retti, ossia di 180 gradi, sarà pur anco di 180 gradi l' arco ADB che li misura; che è quanto dire l' arco ADB è una semiperiferia, e quindi le due rette AC, BC unite insieme costituiscono il diametro ACB, ossia formano una sola linea retta, come dovea dimostrarsi.

28. *Corollario.* Se sopra un piano si tirino diverse linee rette, e tutte si facciano coincidere nello stesso punto C (Fig.° 18) in modo che formino all' intorno di esso degli angoli l' un dietro all' altro, tali angoli presi tutti insieme saranno eguali alla somma di quattro retti. Poichè facendo centro nel punto comune C, e descrivendo una periferia qualunque, saranno detti angoli tutti compresi e misurati da essa, cioè composti di 360 gradi.

29. Quando due rette si tagliano in un qualche punto, formano quattro angoli, i quali presi a due a due si dicono

angoli verticali, o *opposti al vertice*, purchè si confrontino insieme quelli che non sono adiacenti alla stessa linea. Pertanto (Fig.° 19) saranno opposti al vertice A e B da una parte, C e D dall'altra.

30. Teorema 3.° *Gli angoli opposti al vertice sono eguali tra loro.*

Dimostrazione. L'angolo C coll' angolo A sono eguali alla somme di due retti perchè adiacenti; l' angolo D collo stesso angolo A formano la somma di due retti per la stessa ragione; dunque se dall' una e dall' altra somma dei due retti, ossia di 180°, si tolga il numero dei gradi dell'angolo A qualunque ei sia, i residui saranno eguali, cioè sarà C eguale a D; ciò che dovea dimostrarsi.

La stessa dimostrazione vale per gli angoli A e B.

31. *Corollario* 1.° Se uno dei quattro angoli C, A, D, B è cognito, saranno cogniti anche gli altri tre; perchè se sia congnito C, si avrà A sottraendo C da 180°; e si avrà D eguale a C, e B eguale ad A.

32. *Corollario* 2.° Se uno dei quattro angoli C, A, D, B è retto, saranno retti anche gli altri tre; poichè se C è di 90°, il suo supplemento A sarà esso pure di 90°; D eguale a C sarà di 90°, e parimenti lo sarà B che è eguale ad A (N.° 21).

CAPO III.

Delle linee Parallele.

33. Perchè meglio s'intenda la natura e la teoria delle linee parallele crediam bene premettere il seguente avvertimento.

Preso un punto qualunque D fuori della retta AB (Fig.° 20) e tirata da esso la perpendicolare DC, questa misurerà la vera distanza che passa dal punto D alla linea AB; onde tanta sarà una tale distanza, quanta la perpendicolare stessa DC.

34. Veniamo ora alle parallele. Due rette AB, CD (Fig.° 21) tirate sopra un medesimo piano diconsi *parallele,* quando in tutta la loro lunghezza sono egualmente distanti l' una dall' altra.

35. Da questa definizione necessariamente deducesi:

1.° che due rette parallele, sebbene si prolungassero all' infinito, mai potranno incontrarsi e formar angolo, perchè incontrandosi non sarebbero più egualmente distanti.

2.° che sono tra loro eguali tutte le perpendicolari tirate da un punto qualunque di una delle due parallele all'altra, p. e. AC, BD (Fig.ª 22), perchè ciascuna di queste perpendicolari misura la distanza fra le due parallele AB, CD;

3.° che da un punto determinato A non potrà tirarsi che una sola parallela a CD; poichè se ciascuna delle due rette AB, AF fosse parallela a CD, condotta dal punto A la perpendicolare AC sulla CD, ed alzata da qualunque punto p. e. D la perpendicolare DB prolungata fino in F, ciascuna delle due perpendicolari DB, DF sarebbe eguale ad AC; e quindi, per l'assioma primo, sarebbe DB eguale a DF, il che ripugna, non potendo una parte eguagliare il tutto per l'assioma quinto;

4.° che dovendo le parallele essere equidistanti fra loro in tutti i punti, *avranno altresì la medesima inclinazione con una retta qualunque* QE (Fig.ª 23) *che le seghi*. Altrimenti se una di esse, p. e. AF, inclinasse più o meno verso QE di quello che v'inclina l'altra CD, non conserverebbero tra loro la stessa distanza, e non sarebbero perciò parallele.

36. Dunque: Teorema 1.° *L'angolo* n, *che si dice esterno fra le parallele eguaglierà l'angolo* s *che dicesi suo interno corrispondente*, perchè appunto essi misurano la inclinazione di queste colla stessa EQ. E per la stessa ragione l'angolo m eguaglierà r, come pure $t=q$ e $v=p$.

37. Teorema 2.° *Gli angoli* q *ed* s, *che diconsi alterni interni tra le parallele, sono parimenti eguali.*

Poichè l'angolo esterno n eguagliando tanto l'angolo q opposto al suo vertice, quanto l'angolo s suo interno corrispondente, ne consegue che q ed s sono eguali tra loro.

Lo stesso dicasi degli angoli r e p, come pure degli *alterni esterni* corrispondenti m e v, t ed n.

38. Teorema 3.° *Gli angoli* s *e* p, *che chiamansi interni alla stessa parte fra le parallele, eguagliano, presi assieme, due retti, ossia* 180°.

Infatti $n+p=180°$ perchè sono due angoli adiacenti; ma $n=s$, perchè interno ed esterno; dunque sostituendo s invece di n si avrà $p+s=180°$. In egual modo si prova che q ed $r=180°$; come pure gli esterni dalla stessa parte m e t, v ed n.

39. Egli è manifesto che se la retta EQ (Fig.ª 24) segasse le due parallele perpendicolarmente, ognuno degli otto angoli che ne risultano sarebbe retto, e perciò sarebbero tutti tra loro eguali.

40. Quindi appare il modo di condurre da un punto dato B (Fig.ª 25) una parallela ad una data retta CD. Dal punto dato B si tiri una retta qualunque BC, e poscia fatto centro in B e C, e collo stesso raggio BC descritti gli archi AC, BD, e preso $AC=BD$, la retta BA sarà parallela alla CD. Perchè gli angoli x ed y alterni interni tra loro, essendo misurati da archi uguali, sono tra loro uguali (N.° 18).

41. *Corollario* 1.° Se le due linee rette, che si supposero segate da una terza, non fossero tra loro parallele, egli è evidente che non potrebbero più sussistere le tre verità antecedentemente dimostrate. Sono dunque tali verità necessariamente dipendenti dalla condizione che dette linee sieno parallele, e non possono provenire da verun'altra. Quindi, siccome posta una tale condizione, ne conseguitano tutte le proprietà degli angoli già spiegate: così verificandosi una qualunque di tali proprietà, si potrà, senza timore di errare, conchiudere che le due rette segate sono parallele tra loro. Pertanto dopo aver dimostrati i tre teoremi antecedenti, si potrà stabilire il seguente

42. Teorema 4.° *Se una retta qualunque tagliando due linee rette farà con esse o l'angolo esterno eguale al suo interno, o gli angoli alterni eguali tra loro, o i due angoli interni alla stessa parte eguali alla somma di due retti, le due linee tagliate saranno necessariamente parallele tra loro.*

43. *Corollario* 2.° Dalla proprietà che ha la retta EF (Fig.ª 23) segando le parallele AF, CD di cadere con eguale inclinazione sulla prima e sulla seconda, ne segue che se LM (Fig.ª 25) sarà parallela ad una delle due parallele PQ, GH, p. e. a PQ, lo sarà ancora a GH.

44. Due linee rette non parallele AB, EF (Fig.ª 26), si dicono *convergenti* considerandole verso C, ossia da quella parte, nella quale, prolungate, si accostano maggiormente; e *divergenti* verso D, ossia da quella parte, dove, prolungate, si scostano sempre più l'una dall'altra.

CAPO IV.

Delle figure piane e particolarmente dei triangoli.

45. Uno spazio qualunque chiuso tutto all' intorno da linee poste sopra di un piano, chiamasi dai geometri *figura piana* o *poligono*. Lo stesso spazio poi considerato in tutta la sua estensione, cioè in lungo ed in largo, dicesi *superficie* o *area* della figura; e le linee formanti la figura, prese tutte insieme, diconsi *perimetro* o *circuito* della figura.

46. La figura può essere *rettilinea*, *curvilinea* e *mistilinea*, secondochè le linee, che la formano, sono o tutte rette, o tutte curve, o parte rette e parte curve. La Geometria elementare non tratta che delle figure rettilinee, e tra le curvilinee e mistilinee considera quelle solamente, nelle quali entra il circolo. In qualunque figura rettilinea le linee del perimetro diconsi *lati della figura*; e gli angoli formati da essi lati, *angoli al perimetro*. Quando una figura rettilinea ha tutti i lati eguali dicesi *equilatera;* se ha eguali tutti gli angoli, *equiangola*; e se eguali tanto i lati che gli angoli, *regolare*, ed *irregolare* se tutti gli angoli e i lati di essa non sieno eguali.

47. La più semplice tra tutte le figure è il *triangolo*. Esso è uno spazio compreso da tre linee, che chiamansi *lati* del triangolo (Fig.ª 27). Se il triangolo sia descritto sopra una superficie piana, dicesi *piano;* e se le linee, dalle quali è formato sieno tutte rette, dicesi *rettilineo*. Il triangolo, che ha tutti i lati eguali, chiamasi *equilatero* o *equicrure;* quello che ne ha due soli, *isoscele;* e quello che ha tutti tre i lati disuguali, *scaleno* (Fig.ª 28, 29, 30).

48. Egli è manifesto che come il triangolo ha tre lati, così ancora avrà tre angoli, e perciò ogni triangolo sarà composto di sei parti o elementi. Pertanto paragonando insieme due triangoli, spesso accade, che conosciuta l' eguaglianza di alcuni dei loro elementi, si possa scoprire altresì l' eguaglianza degli altri, cioè a dire quella dei triangoli stessi. Ciò farem chiaro nei quattro teoremi seguenti.

49. Teorema 1.° *Se due triangoli* ABC, DEF (Fig.ª 31) *saranno tali che i due lati del primo* AB, BC *sieno eguali ai due rispettivi lati corrispondenti* DE, EF *del secondo; e inoltre l' angolo* B *compreso dai due lati* AB, BC *sia eguale all' angolo* E *compreso dai due lati* DE, EF, *i due triangoli saranno eguali tra loro.*

Dimostrazione. Il lato *AB* del primo triangolo s' immagini sopraposto al lato *DE* del secondo, e i due triangoli s' intendano rivolti verso la stessa parte. Essendo que' due lati per supposizione eguali, combaceranno perfettamente. Di più essendo l' angolo *B* eguale all' angolo *E*, dovrà il lato *BC* del primo triangolo cadere necessariamente sopra il lato *EF* del secondo; e poichè anche questi due lati sono per supposizione eguali, ne verrà di necessaria conseguenza che il punto, ossia l' angolo *A*, combacerà con *D*, *B* con *E*, *C* con *F*; che è quanto dire: i due triangoli combaciano perfettamente tra loro, e gli elementi dell' uno corrispondono pienamente a quelli dell' altro.

50. Teorema 2.° *Se nei triangoli* ABC, DEF (Fig.ª 31) *saranno i due angoli* A *e* C *del primo, eguali ai due altri corrispondenti* D *ed* F *del secondo; e inoltre il lato* AC, *al quale sono adiacenti gli angoli* A *e* C *sia eguale al lato* DF, *al quale sono adiacenti gli angoli* D *ed* F, *saranno eguali ancora i due triangoli fra loro, ed ogni altro elemento del primo sarà eguale ai rispettivi elementi del secondo.*

Dimostrazione. S' intenda soprapposto il lato *AC* del primo triangolo al lato *DF* del secondo, e i due triangoli rivolti alla stessa parte. I due lati *AC* e *DF*, che si supposero eguali non potranno non combaciare tra loro perfettamente. Per la stessa ragione essendo l' angolo *A* eguale a *D*, e *C* eguale a *F*, il lato *AB* cadrà necessariamente sopra *DE*, e *CB* sopra *FE*; e perciò combinandosi insieme il punto *A* con *D*, e *C* con *F*, anche il punto *B* non potrà non combinare con *E*. Dunque i due triangoli sono eguali.

51. Teorema 3.° *Se due triangoli* ABC, PQR (Fig. 32) *hanno i tre lati dell' uno eguali ai tre lati corrispondenti dell' altro, i due triangoli avranno anche gli angoli rispettivi eguali, cioè i triangoli saranno in tutto tra loro eguali.*

Dimostrazione. Sia il lato *AB* eguale a *PQ*, il lato *BC* eguale a *QR*, ed *AC* eguale a *PR*. Si prenda nel triangolo *PQR* un lato qualunque, p. e. *PR*, e fatto centro nella sua estremità *P*, si descriva col raggio *PQ* la circonferenza *QS*. Di poi fatto centro nell' altra estremità *R* di esso lato, col raggio *RQ*, si descriva la circonferenza *QT*. Le due periferie si taglieranno nel punto comune *Q*. Ora s' intenda soprapposto il lato *AC* del primo triangolo al lato *PR* suo corrispondente eguale nel secondo, e i triangoli sieno voltati all'istessa parte. Il punto A, com' è chiaro, combacerà con P, e C con R. Essendo poi per dato del teorema il lato AB eguale al lato PQ, l'estremità B del lato AB dovrà necessariamente cadere in qualche punto della periferia QS, la quale fu descritta col raggio PQ, ossia AB eguale ad esso. Per la stessa ragione la estremità B del lato CB eguale al suo corrispondente RQ, cadrà in qualche punto della periferia QT. Dovendo pertanto il punto B del triangolo ABC trovarsi nell'una e nell'altra periferia, dovrà per necessità cadere nel punto Q, che è l'unico comune ad esse. Perciò i tre angoli del triangolo ABC combineranno perfettamente con quelli dell'altro PQR, cioè i due triangoli sono eguali. Ciò che ecc.

52. Teorema 4.° *Se due triangoli* ABC, DEF (Fig.ª 33) *avranno i due lati* AB, BC *del primo, eguali ai due* DE, EF *del secondo; e di più nel primo l'angolo* C *opposto al lato* AB, *che si suppone maggiore di* BC, *sia eguale all'angolo* F *del secondo, opposto al lato* DE, *che supponesi anch' esso maggiore di* EF; *saranno eguali, e combineranno perciò in tutti i loro elementi.*

Dimostrazione. Si faccia centro in E, e si descriva la circonferenza DH col raggio ED. Poichè abbiam supposto che il lato ED sia maggiore di EF, è manifesto che tutto il triangolo DEF sarà compreso entro la descritta circonferenza, la quale perciò toccherà il detto triangolo solamente nel punto D. S' immagini ora soprapposto il lato BC del primo triangolo al suo corrispondente eguale EF del secondo, in modo che il punto B combini con E, e C con F, e rivolgansi i triangoli alla stessa parte. Siccome il lato BA per dato del teorema è eguale al lato ED, non può il punto B combinare con E senza che il punto A cada in qualche punto della periferia DH descritta col raggio ED, ossia BA. Per l'eguaglianza poi dei due angoli C ed F è manifesto che non può il lato BC combinare col lato EF, senza che il lato CA combini anch' esso con FD. Perciò il punto A non solamente dovrà trovarsi nella periferia DH, ma precisamente nel punto D, unico che sia comune e alla periferia e al triangolo. Dunque combinandosi i tre punti A, B, C del primo coi tre D, E, F del secondo, i due triangoli saranno eguali. Che è quanto ecc.

CAPO V.

Di alcune proprietà dei triangoli.

53. Le proprietà de' triangoli sono moltissime, delle quali noi accenneremo soltanto le principali. Ma prima fa d'uopo sapere che in qualsivoglia triangolo i geometri usano di prendere un lato a piacimento, che essi chiamano *base* del triangolo. Se però il triangolo fosse isoscele, in cui due lati sono eguali (N.° 47), convennero di prendere sempre per base il lato disuguale. Determinato poi che sia il lato che si prende per base, l'angolo opposto ad esso chiamasi *verticale*; e la perpendicolare abbassata dall'angolo verticale sulla base sarà l'*altezza* del triangolo.

54. In un triangolo ABC (Fig.ª 34) prolungando un lato qualunque, come sarebbe AC verso D, l'angolo BCD, che mediante un tale prolungamento viene a formarsi fuori del triangolo, dicesi *esterno*, e gli altri due A e B dentro al triangolo, dei quali niuno è adiacente al detto esterno, chiamansi *interni* relativamente ad esso.

55. Teorema 1.° *In qualsivoglia triangolo, prodotto un lato, l'angolo esterno è uguale ai due interni presi assieme.*

Dimostrazione. Dal vertice C dell'angolo esterno DCB (Fig.ª 35) si conduca la retta CE parallela all'opposto lato AB del triangolo ABC. L'angolo esterno DCE tra le due parallele CE, AB, sarà eguale al suo interno corrispondente A (N.° 36); e l'angolo ECB eguale al suo alterno B (N.° 37). E perciò tutto l'angolo esterno DCB sarà eguale ai due interni A e B presi insieme, come dovea dimostrarsi.

56. Teorema 2.° *I tre angoli di qualunque triangolo sommati insieme, equivalgono a due retti.*

Dimostrazione. Nel triangolo ABC (Fig.ª 34) si prolunghi il lato AC fino in D. L'angolo ACB coll'esterno suo adiacente DCB formano la somma di due retti (N.° 24); perciò all'esterno DCB sostituendo i due interni A e B eguali ad esso (N.° 55), questi stessi uniti ad ACB eguaglieranno la somma dei due retti. Dunque i tre angoli di qualunque triangolo sono eguali a due retti.

57. *Corollario.* Se un triangolo avrà un angolo retto, oppure un angolo ottuso, gli altri due saranno necessariamente acuti, dovendo tutti tre insieme eguagliare due retti.

58. Quando un triangolo ha un angolo retto, dicesi *rettangolo*; quando ha un angolo ottuso *ottusangolo*; ed *acutangolo*, se li abbia tutti tre acuti.

59. Teorema 3.° *Se ne' triangoli* ABC, DEF (Fig.ª 36) *si abbiano i due angoli* A *e* C *del primo eguali ai due* D *ed* F *del secondo, anche il terzo* B *del primo sarà eguale al terzo* E *del secondo.*

Dimostrazione. Poichè i tre angoli *A*, *B*, *C* del triangolo *ABC*, come i tre *D*, *E*, *F* del triangolo *DEF* formano la somma di due retti (N.° 57); non possono i due angoli *A* e *C* essere eguali agli altri due *D* ed *F*, senza che il terzo *B* sia uguale al terzo *E*. La cosa è per se stessa chiarissima.

60. I triangoli di simil fatta, nei quali cioè gli angoli dell'uno sieno eguali agli angoli corrispondenti dell'altro, diconsi *equiangoli*, siccome chiamasi *equiangolo* quel triangolo che ha tutti tre gli angoli tra loro eguali.

61. Teorema 4.° *In ogni triangolo isoscele* APQ (Fig.ª 37) *gli angoli interni alla base* A *e* Q *sono eguali; e prolungando sotto di essa ambi i lati, gli angoli che ne risultano esteriormente* CAQ, RQA *sono pure tra di loro eguali.*

Dimostrazione. 1.ª Parte. Nella base *AQ* sia *D* il punto che la divide in due parti eguali. Si congiunga il punto *D* con *P* mediante la retta *DP*. Ne nascono due triangoli *APD*, *DPQ* che sono tra loro uguali, perchè il lato *AP* eguaglia *PQ* per dato del teorema; *AD* eguaglia *DQ*, supponendosi *D* equidistante da *A* e *Q*, e *DP* è comune all'uno e all'altro triangolo. Dunque (N.° 54) gli angoli *A* e *Q*, i quali si corrispondono nei due triangoli eguali, sono anch'essi tra loro eguali, cioè a dire i due angoli alla base del triangolo isoscele sono eguali.

Dim. 2.ª Parte. Prolungato il lato *PA* in *C*, e *PQ* in *R*, sarà l'angolo *CAQ* col suo adiacente *QAP* eguale alla somma di due retti; e per la stessa ragione *RQA* con *AQP* uguale anch'esso a due retti. Togliendo ora da queste due somme eguali i due angoli interni alla base *A* e *Q*, resteranno uguali tra loro i due angoli *CAQ*, *RQA*, come dovea dimostrarsi.

62. Teorema 5.° *Se un triangolo ha due angoli* A *e* Q (Fig.ª 38) *eguali, sarà isoscele, ossia avrà eguali anche i lati* AP, PQ, *opposti ai due angoli eguali.*

Dimostrazione. Dal terzo angolo *P* si abbassi la retta *PD* perpendicolare all'opposto lato *AQ*. Ne' due triangoli

APD, *DPQ* l'angolo *A* eguaglia l'angolo *Q* per dato del teorema; i due angoli *PDA*, *PDQ* sono eguali, essendo retti, perchè formati dalla perpendicolare *PD*; dunque anche il terzo *APD* (N.° 59) eguaglierà il terzo *DPQ*, e perciò i due triangoli saranno equiangoli. Inoltre essendo ad essi comune il lato *DP*, al quale sono adiacenti due angoli eguali nell'uno e nell'altro triangolo, ne consegue di più (N.° 50), che i due triangoli saranno tra loro uguali, e perciò anche il lato *AP* eguaglierà il lato *PQ* suo corrispondente. Dunque il triangolo *APQ* è isoscele (N.° 47). Ciò che ecc.

63. Teorema 6.° *In ogni triangolo al lato maggiore si oppone l'angolo maggiore, e al lato minore l'angolo minore.*

Dimostrazione. Nel triangolo *ABC* (Fig.ª 39) sia il lato *AB* maggiore di *BC*. Si tagli da *AB* la porzione *BD* eguale a *BC*, e si congiunga il punto *D* a *C* colla retta *DC*. Ciò fatto l'angolo *BCD* sarà uguale all'angolo *BDC* (N.° 47); ma l'angolo *BDC* esterno è maggiore dell'angolo interno *BAC* (N.° 55); dunque anche l'angolo *BCD*, e molto più poi *BCA* sarà maggiore dello stesso *BAC*; ma *BCA* è l'angolo opposto al lato maggiore *AB*; dunque al lato maggiore si oppone sempre l'angolo maggiore, e quindi al lato minore *BC* si opporrà l'angolo minore *BAC*. Ciò che ecc.

64. Teorema 7.° *Viceversa all'angolo maggiore in qualunque triangolo si oppone il lato maggiore, e al minore il lato minore.*

Dimostrazione. Nel triangolo *ABC* (Fig.ª 40) sia *C* l'angolo maggiore, dico che il lato *BA* sarà maggiore di *BC*. Perchè se *BA* fosse eguale a *BC*, anche l'angolo *A* eguaglierebbe l'angolo *C* (N.° 62), il che è contro la supposizione; se *BA* fosse minore di *BC*, l'angolo *C* sarebbe minore di *A* (N.° 64); dunque essendo *C* l'angolo maggiore, il lato *AB* ad esso opposto sarà il maggiore, e perciò all'angolo minore *A*, si opporrà il lato minore *BC*. Ciò che dovea dimostrarsi.

65. *Corollario.* Nel triangolo ottusangolo adunque il lato maggiore sarà opposto all'angolo ottuso, e nel rettangolo all'angolo retto. Nel triangolo rettangolo il lato opposto all'angolo retto, chiamasi *ipotenusa*, e i due lati formanti l'angolo retto, diconsi *cateti*.

66. Teorema 8.° *In ogni triangolo* DBC (Fig.ª 41) *due lati qualunque* DB, DC, *presi assieme, sono maggiori del terzo* BC.

Questo teorema che si rende chiarissimo dalla sola nozione della linea retta, si dimostra nel modo seguente:

Si prolunghi *BD*, e si faccia il prolungamento *DA* eguale a *DC*, e poscia si congiunga *A* con *C* mediante la retta *AC*. Nel triangolo *ADC* l'angolo *DCA* eguaglierà l'angolo *A*, essendo il triangolo per costruzione isoscele. Ma l'angolo *BCA* è maggiore di *DCA*, perchè il tutto è maggiore della parte (Ass.ª 5); dunque *BCA* sarà anche maggiore dell'angolo *A* uguale a *DCA*, e perciò il lato *BA* opposto all'angolo maggiore *BCA*, sarà maggiore del lato *BC* (N.° 65). Essendo poi *BA* eguale a *BD* più *DC*, perchè il prolungamento *DA* si fece uguale a *DC*; ne conseguita che i due lati *BD*, *DC* sono maggiori del terzo *BC*.

67. Dalle proprietà dei triangoli fin qui dimostrate, si possono ricavare e dimostrare alcune verità intorno alle linee perpendicolari, e sono le seguenti.

68. Teorema 1.° *Da un punto determinato* P (Fig.ª 42) *preso fuori di una retta* AB, *non si potrà tirar su di essa che una sola perpendicolare* PQ.

Dimostrazione. Imperocchè se si supponga che anche *PO* sia perpendicolare, allora nel triangolo *QPO* sarebbero retti i due angoli *PQO*, *POQ*, il che ripugna (N.° 56); dunque la sola *PQ* può essere perpendicolare.

69. Teorema 2.° *Di tutte le rette* PB, PC, PH, *ecc.* (Fig.ª 43), *che dal punto* P *si possono abbassare sulla retta* QR, *la più breve sarà la perpendicolare* PB.

Dimostrazione. Poichè *PB* è perpendicolare a *QR*, condotta l'altra retta *PC*, si avrà il triangolo *BPC* rettangolo in *B*, e perciò l'angolo *PCB* acuto, cioè minore di *PBC*; onde il lato *PB* sarà sempre minore di *PC*, perchè opposto all'angolo minore *PCB*. Dunque la perpendicolare *PB* è la più breve di tutte.

70. Teorema 3.° *Se da un punto qualunque della retta* PO *che cade obbliquamente sulla* DF (Fig.ª 44) *si abbassi sulla stessa* DF *la perpendicolare* PQ, *questa necessariamente cadrà dalla parte dell'angolo acuto* POQ.

Dimostrazione. Nel triangolo *OPQ* l'angolo *PQO* è retto perchè fatto dalla perpendicolare *PQ*. Dunque è impossibile che l'angolo *POQ* sia ottuso (N.° 57); e perciò la perpendicolare *PQ* abbassata dal punto *P* dell'obliqua *PO*, cade dalla parte dell'angolo acuto *POF*, non dalla parte dell'angolo ottuso *POD*. Ciò che ecc.

CAPO VI.

Dei Quadrilateri e delle loro proprietà.

71. Il *quadrilatero* è uno spazio compreso da quattro linee: esso dicesi *piano*, quando è descritto sopra un piano, e se le linee che lo formano sieno tutte rette, dicesi *rettilineo*.

72. Un quadrilatero avente i lati opposti paralleli, chiamasi *parallelogrammo*, come sarebbe p. e. *BD* (Fig.ª 45), nel quale suppongo esser tra loro paralleli i lati *BC*, *AD* come pure *AB* e *CD*. Se ha due soli lati paralleli, dicesi *trapezio*.

73. Anche nel parallelogrammo, come si disse del triangolo, sogliono i geometri prendere un lato qualunque, che chiamano *base*, e quindi misurano l'altezza di esso mediante una perpendicolare innalzata dalla base stessa al lato opposto del parallelogrammo. Una retta poi condotta da un angolo qualsiasi all'altro opposto suo corrispondente p. e. *AC*, dicesi *diagonale* del parallelogrammo.

74. Teorema 1.° *La diagonale divide il parallelogrammo in due parti eguali.*

Dimostrazione. Nei due triangoli *ABC*, *DCA* (Fig.ª 45) l'angolo *BCA* è eguale all'angolo *DAC*, perchè alterni fra le stesse parallele *BC*, *AD* (N.° 37); per la stessa ragione l'angolo *BAC* eguaglia *DCA*. Di più il lato *AC* a cui sono adiacenti i due angoli eguali è comune all'uno e all'altro triangolo, e perciò i due triangoli *ABC*, *DAC* sono tra loro eguali. Dunque la diagonale *AC* divide il parallelogrammo *BD* in due parti eguali. Ciò che ecc.

75. *Corollario.* Essendo eguali i due triangoli *ABC*, *DCA* anche i lati *BC*, *BA* del primo saranno eguali ai loro corrispondenti *DA*, *DC* del secondo, e l'angolo compreso *B* nell'uno eguale all'angolo compreso *D* nell'altro. Inoltre i due angoli *BAC*, *CAD* presi assieme, cioè l'angolo *BAD*, saranno eguali agli altri due *BCA*, *ACD*, cioè all'angolo *BCD*. Che è quanto dire: *in ogni parallelogrammo i lati e gli angoli opposti sono rispettivamante eguali.*

76. Teorema 2.° *Se due linee parallele ed uguali* AF, DB (Fig.ª 46) *verranno congiunte alle loro estremità dalle due rette* AD, FB, *queste due rette saranno anch' esse parallele ed eguali, e quindi tutte quattro insieme formeranno un parallelogrammo.*

Dimostrazione. Si conduca la *DF*, e nei due triangoli che ne nascono si avrà il lato *AF* eguale a *DB* per dato del teorema, e il lato DF comune a tutti due. Di più l'angolo DFA compreso da AF e DF eguale all'angolo BDF compreso da BD e FD, essendo tali angoli alterni fra le parallele AF, DB. Dunque i due triangoli sono eguali (N.° 49); e perciò anche il terzo lato AD eguale ad FB, e l'angolo ADF eguale a BFD suo alterno corrispondente; cioè eguali e parallele fra loro le due rette che congiungono le estremità di due altre rette eguali e parallele. Dunque AB sarà un parallelogrammo. Che è quanto ecc.

77. Teorema 3. *Se uno dei quattro angoli di un parallelogrammo è retto, saranno retti anche gli altri tre.*

Dimostrazione. Nel parallelogrammo AD (Fig.ª 47) si supponga retto l'angolo A. Poichè AB è parallela a CD sarà retto altresì l'angolo C dovendo A e C, che sono interni alla stessa parte, formare la somma di due retti (N.° 38). Quindi sarà retto pur anco l'angolo D opposto ad A, come pure l'angolo B opposto a C (N.° 75). Dunque tutti quattro gli angoli del parallelogrammo saranno retti.

78. Un parallelogrammo avente tutti gli angoli retti, dicesi *rettangolo;* e se il rettangolo avrà tutti i lati eguali, chiamasi *quadrato* (Fig.ª 48). Un parallelogrammo poi che abbia i lati eguali senza avere gli angoli retti, dicesi *rombo* (Fig.ª 49); e *romboide* se non avrà nè gli angoli retti, nè i lati eguali (Fig.ª 50).

79. Se nella diagonale AC (Fig.ª 51) di un parallelogrammo $ABCD$ si prenda un punto qualunque P, e si facciano passare per esso due rette, cioè QR parallela agli opposti lati BC, AD; e TS parallela agli altri due opposti lati AB, DC: tutto il parallelogrammo $ABCD$, come è chiaro, verrà diviso in quattro parallelogrammi minori, cioè $AQPS$, $PTCR$, e $QBTP$, $PSDR$. Questi ultimi due che non sono traversati dalla diagonale AC, chiamansi *complementi* del parallelogrammo $ABCD$.

80. Teorema 4.° *I complementi di un parallelogrammo sono tra loro equivalenti, cioè a dire contengono spazio eguale.*

81. Avendo finora chiamate *eguali* quelle figure che hanno rispettivamente eguali i lati, gli angoli e le superficie, diremo *equivalenti* quelle che hanno eguali solamente le superficie, ossia che contengono eguale spazio.

Dimostrazione. Nel parallelogrammo intero $ABCD$ sono eguali fra loro i due triangoli ABC, ADC (N.° 74). Parimenti nel parallelogrammo $PTCR$ sono eguali i due triangoli PTC e PRC; come pure lo sono AQP, ASP nel parallelogrammo piccolo $AQPS$. Pertanto levando dal triangolo ABC i due triangoli AQP, PTC; e dal triangolo ACD i due triangoli APS, PCR, cioè levando quantità eguali dall'uno e dall'altro triangolo, rimarranno i due complementi $QBTP$, $PRDS$, che saranno tra loro equivalenti; dunque ecc.

82. Due parallelogrammi diconsi posti fra le medesime parallele, ed aventi la stessa altezza, quando due lati opposti dell'uno e dell'altro si combinano in modo da formare due linee parallele. La distanza poi di queste parallele sarà l'altezza dei parallelogrammi. Lo stesso dicasi di due triangoli che avessero la loro base sopra la medesima retta, e l'angolo verticale in un'altra retta parallela a quella della base.

83. Teorema 5.° *I parallelogrammi che hanno la stessa base e la stessa altezza, sono tra loro equivalenti.*

Dimostrazione. Sieno i due parallelogrammi (Fig.ª 52) $ABCD$, $APQD$ aventi la stessa base AD e posti fra le medesime parallele BQ, AD. Il lato BC del primo eguaglia il suo opposto AD; per la stessa ragione PQ eguaglia lo stesso suo opposto AD (N.° 75); perciò BC e PQ sono eguali tra loro (Ass.ª 1.°). Ora levando dall'uno e dall'altro la porzione PC, resterà BP eguale a CQ. Ciò fatto restano i due triangoli BAP, CDQ, che sono eguali; perchè il lato BP eguaglia CQ per costruzione; BA eguaglia CD perchè lati opposti nello stesso parallelogrammo; e per la stessa ragione AP eguaglia DQ. Dunque i due triangoli BAP, CDQ avendo tutti tre i lati eguali (N.° 51) sono tra loro eguali. Onde aggiugnendo all'uno e all'altro il quadrilatero, ossia lo spazio $APCD$, ne risulterà (Ass.ª 3.°) il parallelogrammo $ABCD$ equivalente al parallelogrammo $APQD$, come dovea dimostrarsi.

84. Se i parallelogrammi fossero disposti come nella Figura 53, la dimostrazione sarebbe presso che la stessa. Poichè essendo tanto BC che PQ eguali allo stesso lato AD, ne segue che BC eguaglierà PQ; quindi aggiugnendo all'uno e all'altro la porzione CP si avrà BP eguale a CQ. Ora considerando i due triangoli BAP, CDQ che ne risultano, sarà facile dimostrare essere tra loro eguali; infatti i lati BP e CQ sono per costruzione eguali, e gli altri due AB, AP eguali a CD e DQ perchè lati opposti nel rispettivo paral-

lelogrammo. Onde se da questi due triangoli eguali si tolga il comune triangoletto *C P R*, rimarranno equivalenti i due quadrilateri *ABCR*, *RPQD*. E ad ognuno di questi aggiugnendo l'altro triangoletto *A R D*, ne risulterà il parallelogrammo *A B C D* equivalente all'altro parallelogrammo *APQD*. Ciò che ecc.

85. Egli è facile comprendere che per arguire la eguaglianza di due parallelogrammi non è necessario che essi abbiano la base e l'altezza comune come nelle Figure già dimostrate, ma basta che in essi e l'una e l'altra sieno eguali; imperocchè i parallelogrammi che hanno egual base ed eguale altezza, possono sempre considerarsi siccome aventi la stessa base e posti tra le medesime parallele.

Si abbiano infatti i due parallelogrammi *A B C D*, *E F G H* (Fig.ª 54), nel primo de' quali la base *A D* sia eguale alla base *F G* del secondo. S' intendano disposti in maniera che la base *A D* prodotta, si congiunga nella stessa linea colla base *FG*. Egli è evidente che avendo i due parallelogrammi eguale altezza, anche i lati *BC* ed *E H* opposti alle basi saranno necessariamente nella stessa direzione, cioè a dire producendo *BC* finchè si congiunga con *E H*, sarà *BH* parallela ad *A G*. Tirando ora le rette *A E*, *DH*, le quali congiungono insieme le estremità delle due linee *A D* ed *E H* che sono eguali e parallele tra loro, saranno anch' esse eguali e parallele (N.° 76), e perciò *A E H D* sarà un parallelogrammo. Perchè poi i parallelogrammi *A B C D*, *A E H D* hanno la base comune *A D*, e sono posti fra le medesime parallele *BH*, *A G*, saranno equivalenti tra loro. Per la stessa ragione i parallelogrammi *E F G H*, *E H D A* avendo la base comune *E H* ed essendo collocati tra le medesime parallele, sono tra loro equivalenti. Perciò anche i parallelogrammi *ABC D*, *EFG H* equivalenti ambidue al terzo *A E H D*, saranno essi pure equivalenti tra loro. Che è quanto ecc.

86. Teorema 6.° *I triangoli che hanno la stessa base e la stessa altezza, sono tra loro equivalenti.*

Dimostrazione. Il triangolo *ABC* (Fig.ª 55) è la metà del parallelogrammo *A DCB*, perchè la diagonale divide il parallelogrammo in due parti uguali (N.° 74); per la stessa ragione il triangolo A B *E* è la metà del parallelogrammo A *E F* B. Ora essendo tra loro equivalenti i due parallelogrammi, perchè aventi base ed altezza comune (N.° 85), saranno altresì equivalenti le due metà, cioè i due triangoli *A C B*, *A E B*, come si dovea dimostrare.

87, Teorema 7.° *I triangoli aventi egual base ed eguale altezza sono equivalenti.*

Dimostrazione. Sieno i due triangoli *A B C*, *D E F* (Fig.ª 56) nei quali la base *A* C sia eguale alla base *D F*, e la distanza degli angoli verticali *B* ed *E* da esse basi sia pure eguale. Tirando dagli angoli verticali *B* ed *E* le rette *B R*, *E Q* paralelle alle rispettive loro basi *A* C, *D F*; e così pure dai punti *A* e *D* tirando le rette *A R*, *D Q* parallele ai lati opposti *B* C, *E F*, i due parallelogrammi che ne risultano a base ed altezza eguali, saranno tra loro equivalenti (N.° 85); ma poichè i due triangoli *ABC*, *D E F* sono la metà ognuno del proprio parallelogrammo (N.° 74), ne segue che anch'essi saranno tra loro equivalenti. Ciò che ecc.

88. Teorema 8.° *Se un triangolo* A B C *ed un parallelogrammo* EFGH (Fig.ª 57) *avranno eguali le basi* A C, E H, *ed eguale inoltre l'altezza, il triangolo sarà la metà del parallelogrammo.*

Dimostrazione. Si tiri la diagonale *FH* nel parallelogrammo *E F G H*. Poichè i due triangoli *ABC*, *EFH* hanno egual base ed eguale altezza, saranno tra loro equivalenti (N.° 87); ma il triangolo *E F H* è la metà del parallelogrammo *E F G H* (N.° 74); dunque anche il triangolo *A*BC sarà la metà dello stesso parallelogrammo, come dovea dimostrarsi.

89. Teorema 9.° *Se due triangoli* A B C, DEF *equivalenti tra loro* (Fig.ª 58) *avranno le basi* A C, D F *eguali, avranno altresì eguali le altezze.*

Dimostrazione. Le due basi *A* C, *D F* si dispongano nella medesima retta P *Q*, e si voltino i triangoli verso la stessa parte. Dico che la linea B*E* che congiunge i due angoli verticali B ed *E* sarà parallela a P *Q*. Se B *E* non è parallela a P*Q*, lo sia B *M*. Si prolunghi il lato *DE* del triangolo *D E F* finchè incontri la B *M* in *M*. Condotta ora la retta *M F*, sarebbe il triangolo *D M F* equivalente al triangolo *A* B C, perchè aventi egual base, e posti fra le stesse parallele (N.° 87); ma poichè *A* B C per dato del teorema eguaglia *D E F*, ne seguirebbe (Ass.ª 4.°) che anche il triangolo *DEF* eguaglierebbe il triangolo *D M F*, il che ripugna, non potendo una parte eguagliare il tutto (Ass.ª 5.°). Dunque neppure la BM potrà essere parallela a PQ, e perciò lo sarà la sola BE, che congiunge gli angoli verticali dei due triangoli, che è quanto dire: due triangoli equivalenti, se hanno egual base, avranno ancora eguale l'altezza. Ciò che ecc.

90. Teorema 10.° *Tutti gli angoli di un qualunque quadrilatero presi assieme, sono eguali a quattro retti.*

Dimostrazione. Nel quadrilatero $ABCD$ (Fig.ª 59) condotta da un angolo qualsiasi A la retta AC all'opposto angolo C, ne risultano due triangoli ABC, CAD, i sei angoli dei quali sono precisamente formati dai quattro angoli del quadrilatero. Ma i tre angoli di ciascun triangolo valgono due retti (N.° 56); dunque essendo i quattro angoli del quadrilatero eguali a due triangoli, formeranno insieme la somma di quattro retti. Che è quanto ecc.

91. Teorema 11.° *Tutti gli angoli di una qualunque figura rettilinea presi assieme formano tanti retti quanti sono i lati della stessa figura duplicati, meno quattro.*

Dimostrazione. Sia la figura data $ABCDEF$ (Fig.ª 60); entro al di lei perimetro si prenda un punto a piacimento P, dal quale si tirino tante rette PA, PB, PC ecc. a tutti gli angoli di essa. Ne risultano tanti triangoli quanti sono i lati della figura. Ciascuno di questi triangoli è uguale a due retti (N.° 56); e poichè il numero de' triangoli eguaglia quello dei lati, ne segue che gli angoli di tutti i triangoli compresi dalla figura sono eguali ad un numero di retti duplo del numero dei lati. Ma i detti triangoli hanno gli angoli intorno al punto P, che uniti insieme formano la somma di quattro retti (N.° 28). Quindi i rimanenti situati all'intorno del perimetro, che sono compresi dagli stessi angoli della figura eguaglieranno tanti retti, quanto è il doppio del numero dei lati, meno quattro. Perciò anche tutti gli angoli di un qualunque rettilineo eguagliano tanti retti quanto è il numero dei lati di esso duplicati, meno quattro.

92. *Corollario* 1.° Pertanto data una figura rettilinea qualunque, se si duplichino i lati di essa, quindi se ne tolgano quattro, si avrà il numero dei retti a cui essa equivale. E se questo numero si moltiplichi per 90, si otterrà, come è chiaro, il numero de' gradi a cui equivalgono tutti gli angoli della figura data.

93. *Corollario* 2.° Se la figura, o poligono dato, sarà regolare, poichè in questo caso tutti gli angoli di esso sono tra loro eguali, si avrà facilmente il numero de' gradi di ciascun angolo, dividendo cioè la somma dei gradi di tutti gli angoli insieme pel numero degli angoli stessi.

94. Teorema 12.° *Tutti gli angoli esterni formati all'intorno di un rettilineo qualunque dal prolungamento verso la stessa parte di ciascun lato di esso* (Fig.° 61), *formano, presi assieme, la somma di quattro retti.*

Dimostrazione. Ciascun angolo esterno p. e. OBC unito al suo interno adiacente CBA, forma la somma di due retti (N.° 24). Perciò tutti gli esterni unitamente ai loro interni equivalgono a tanti retti quanti sono gli angoli, o i lati della figura duplicati. Ma tale pur anco era il valore degli angoli formati intorno al punto P (Fig.ª 60) uniti agli stessi angoli interni del perimetro del rettilineo; dunque tanti retti valgono gli angoli formati all'esterno del rettilineo, quanto quelli che stanno intorno al punto P, vale a dire la somma di quattro retti (N.° 28). Ciò che ecc.

95. Teorema 13.° *Il quadrato* ABCD (Fig.ª 62) *formato sopra l'ipotenusa* AB *del triangolo rettangolo* AQB, *è uguale ai quadrati* AMNQ, QBPF *formati sopra i due cateti* AQ, QB, *vale a dire comprende eguale spazio di essi.*

Dimostrazione. Dall'angolo retto Q del triangolo AQB si conduca la retta QO parallela ai lati opposti AD, BC la quale tagli gli altri due lati AB, DC nei punti R ed O, in modo che il quadrato $ABCD$ verrà diviso ne' due rettangoli $ADOR$, $BCOR$ (N.° 78). Si congiungano ora insieme i due punti A e P colla retta AP, come Q e C colla retta QC. Poichè i due angoli AQB, BQF sono retti, essendo l'uno angolo di un quadrato, l'altro del triangolo supposto rettangolo in Q, ne segue che le due linee FQ ed AQ, si potranno considerare come una sola linea retta (N.° 27). Essendo poi QF, e perciò anche AQ parallela a BP, il triangolo ABP ed il quadrato $BQFP$ avranno la base comune BP e la medesima altezza; perciò il triangolo ABP sarà la metà del quadrato $BQFP$ (N.° 88). Per la stessa ragione il triangolo CQB avendo la base BC comune col rettangolo $ORBC$, ed essendo posto tra le stesse parallele OQ, CB, sarà la metà di esso rettangolo. Ma i due triangoli APB, CQB sono tra loro eguali, perchè il lato BP del primo eguaglia il lato BQ del secondo, come pure BA eguaglia BC, essendo lati rispettivamente dei medesimi quadrati. Di più l'angolo ABP compreso dai due lati AB, BP nel primo è uguale all'angolo QBC compreso dai lati BQ, BC corrispondenti ed uguali nel secondo, perchè sì l'uno che l'altro è composto di un angolo retto del rispettivo quadrato più il comune angolo acuto ABQ. Perciò se sono tra loro eguali i due triangoli che sono la metà, il primo, cioè APB, del quadrato $BQFP$, il secondo, cioè BQC, del rettangolo $BCOR$, anche i tutti, vale a dire il quadrato $BQFP$ ed il rettangolo $BCOR$ saranno tra loro eguali.

Nello stesso modo e con eguale costruzione si prova che il quadrato $AMNQ$ è uguale al rettangolo $ADOR$. Onde ne conseguita che tutto lo spazio compreso dal quadrato $ABCD$ fatto sopra l'ipotenusa AB è uguale allo spazio compreso dai due quadrati $BQFP$, $AMNQ$ fatti sopra i cateti AQ e BQ, come dovea dimostrarsi.

96. Le figure aventi più di quattro lati, chiamansi con termine generale *poligoni;* in ispecie poi diconsi *pentagoni* se sono composte di cinque lati; *esagoni* se di sei; *ettagoni* se di sette; *ottagoni* se di otto, e così via via.

Il poligono poi chiamasi *rettilineo*, ed anche *piano* se sia formato da linee rette. Ogni figura poi rettilinea avente tutti i lati e tutti gli angoli rispettivamente uguali, dicesi *regolare*, od *ordinata* e in caso diverso *irregolare*. Il triangolo equilatero adunque ed il quadrato saranno da noverarsi tra le prime figure regolari. Ogni altro triangolo non equilatero, e tutte le figure di quattro lati, le quali da alcuni chiamansi anche col nome di *trapezi,* dovranno mettersi tra le figure irregolari.

CAPO VII.

Di alcune proprietà del circolo.

97. Dalla formazione del circolo, che noi abbiamo indicata (N.° 7), è facile a comprendersi come esso possa definirsi. Il circolo è una figura piana, nella quale avvi un punto egualmente distante da tutti i punti del suo perimetro, ossia circonferenza.

98. Se fuori del circolo sia tirata da un punto qualunque una retta in modo che essa tocchi la di lui periferia senza punto intromettersi nel cerchio stesso, una tal retta chiamasi *tangente* del circolo. Pertanto la retta AB (Fig.ª 63) sarà la tangente del circolo DEF. La retta BE invece, dicesi *segante*, perchè s' intromette nel cerchio segando la periferia. È poi chiaro che il punto del contatto della tangente colla periferia deve essere uno solo, sì perchè le linee non hanno che lunghezza, sì perchè la natura della curva circolare è tale che due punti di essa non possono mai trovarsi nella medesima direzione (N.° 1 e seg.).

99. Teorema 1.° *Se all'estremità* B *del raggio* CB (Fig.ª 64) *s'innalzi la perpendicolare* TQ, *questa sarà tangente del circolo.*

Dimostrazione. Da un qualunque punto A preso a destra o a sinistra della perpendicolare TQ si tiri una retta al centro del cerchio. Il triangolo CBA che ne risulta sarà rettangolo in B essendo TQ perpendicolare a CB, e perciò il lato CA maggiore di CB (N.° 65). E poichè CA parte anch'esso del centro, dovrà necessariamente sortire dalla periferia e quindi il punto A si troverà sempre fuori del cerchio. Il che verificandosi in tutti i punti della retta TQ, eccettuato il punto B, ne segue che la TQ toccherà il cerchio nel punto B solamente, e quindi sarà tangente di esso. Ciò che ecc.

100. Teorema 2.° *Se la linea* TQ (Fig.ª 64) *sia tangente al cerchio, conducendo al punto di contatto* B *il raggio* CB, *questo sarà perpendicolare alla tangente.*

Dimostrazione. Si supponga che CB non sia perpendicolare a TQ, ma lo sia invece CA. Poichè il punto del contatto, da ciò che si è detto (N.° 98), è unico, ed è nel caso nostro il solo B, necessariamente dovrà la retta CA incontrare la tangente TQ nel punto A fuori della periferia del circolo. Perciò nel triangolo CBA il cateto CA sarebbe maggiore dell'ipotenusa CB, il che ripugna (N.° 65). Dunque ripugnerà egualmente che il raggio CB condotto al punto del contatto B della tangente TQ non sia ad essa perpendicolare. Dunque ecc.

101. Teorema 3.° *Fra la tangente* TA (Fig.ª 65) *e la periferia* AB *non si potrà tirare alcun' altra tangente pel punto di contatto* A *senza che essa entri dentro al circolo.*

Dimostrazione. Se la retta QA tirata al punto A in cui la tangente TA tocca il cerchio, non entrasse nel cerchio, sarebbe anch'essa tangente di esso; perciò condotto il raggio CA, sarebbero retti ambidue gli angoli CAT, CAQ (N.° 100), e quindi tra loro eguali, il che ripugna, perchè QAC è una parte di TAC. Dunque è impossibile che QA sia tangente, onde necessariamente taglierà la periferia ed entrerà nel cerchio.

102. *Corollario.* Determinato che sia un punto nella periferia di un cerchio, non si potrà condurre ad esso che una tangente sola, dovendo tutte le altre necessariamente segare il cerchio.

103. Teorema 4.° *Se dal medesimo punto* P *si tirino due tangenti* PA, PB *allo stesso cerchio* (Fig.ª 66) *esse saranno tra loro eguali.*

Dimostrazione. Dal centro C si tirino al punto di contatto delle due tangenti i raggi CA, CB, e si congiungano i punti A e B colla retta AB. Gli angoli CAP, CBP sono eguali tra loro perchè retti (N.° 100). Così pure gli angoli CAB, CBA sono eguali perchè posti alla base di un triangolo isoscele. Perciò se dall' angolo CAP si tolga CAB, e dall' angolo CBP si tolga CBA, resteranno uguali tra loro i due angoli PAB, PBA (Ass.ª 3.°) onde il triangolo BAP sarà isoscele anch' esso, e quindi eguali tra loro i due lati, ossia le due tangenti PA, PB, come dovea dimostrarsi.

104. Due circoli diconsi *tangenti* vicendevolmente l'uno dell'altro, allorchè sono disposti in modo, che o dalla parte esterna o dalla parte interna le due periferie si toccano senza segarsi, come si vede nella figura 67 e 68. È poi manifesto che il contatto non può accadere che in un punto solo, non avendo la linea delle due periferie che la sola dimensione della lunghezza.

105. Teorema 5.° *La retta che congiunge i centri di due circoli che si toccano o internamente o esternamente, passerà anche, prodotta che sia, pel punto del loro contatto.*

Dimostrazione. 1.ª parte. Si tocchino primieramente i due cerchi dalla parte interna nel punto A (Fig.ª 67), e sia C il centro del circolo maggiore, D del minore. Si supponga che la retta CD condotta pei loro centri, cada fuori del punto di contatto A, seghi la periferia ABE nel punto B e arrivi a toccare la periferia AFT nel punto F. Dai due centri C e D si tirino al punto di contatto A i due raggi CA, DA. Nel triangolo CDA che ne risulta i due lati CD, DA presi assieme sono maggiori del terzo CA (N.° 66). Ora CA eguaglia CF perchè raggi dello stesso cerchio; dunque anche CD, DA saranno maggiori di CF. Ma DA eguaglia DB perchè raggi dello stesso cerchio ABE; dunque essendo CD e DA maggiori di CF, ne seguirebbe che CD e DB sarebbero anch'essi maggiori di CF, la quale cosa è impossibile, non potendo una parte nè eguagliare, nè superare il tutto. Dunque sarà pur anco impossibile, che la retta CD che congiunge i centri dei due circoli tangenti non passi pel punto del loro contatto.

2.ª parte. Si tocchino ora i due circoli al di fuori (Fig.ª 68). Fatta la costruzione, come nella dimostrazione antecedente, avremo nel triangolo risultante BCR i due lati CB, BR maggiori del terzo CR. Perchè poi CB eguaglia CO, ed RB eguaglia RD, essendo raggi dei loro rispettivi cerchi, ne seguirà che CO e DR saranno anch' essi maggiori dello stesso CR; il che ripugna, essendo patente che CO e DR sono una parte soltanto di CR. Ripugna perciò egualmente che la retta CR che unisce i due centri dei circoli passi fuori del punto di loro contatto B. Ciò che ecc.

106. La *corda*, come si disse al N.° 9, è quella retta che parte da un punto interno della periferia e va ad un altro qualunque di essa senza passare pel centro del circolo. Tale si è la retta DE (Fig.ª 69), la quale divide il cerchio in due segmenti l'uno A maggiore, l'altro B minore.

107. Teorema 6.° *Se la retta* CB (Fig.ª 70) *condotta dal centro sulla corda* DE *la divide in due parti eguali, sarà perpendicolare alla corda stessa.*

Dimostrazione. Dal centro C si conducano alle estremità della corda i raggi CD, CE. Nei due triangoli risultanti CBD, CBE il lato CD del primo eguaglia CE del secondo, perchè raggi del medesimo cerchio, BD eguaglia BE per supposto del teorema, CB è comune a tutti due; dunque i due triangoli sono eguali, e quindi avranno eguali pur anche gli angoli opposti a' lati eguali. Perciò l'angolo CBD nel primo sarà eguale al suo corrispondente CBE nel secondo (N.° 51). Ma questi due angoli essendo adiacenti alla stessa linea devono eguagliare la somma di due retti (N.° 24); dunque se sono eguali, come si è dimostrato, saranno ambidue retti, che è quanto dire la retta CB, che condotta dal centro alla corda la divide in due parti eguali, necessariamente sarà perpendicolare alla corda stessa.

108. *Corollario.* Se la retta CB non dividesse la corda in due parti eguali, nemmeno i due triangoli DBC, CBE

potrebbero essere tra loro eguali. Quindi perchè si possa conchiudere che la CB è perpendicolare alla corda, è indispensabile la condizione che la corda venga da essa divisa in due parti eguali. Pertanto il teorema antecedente si può anche invertere nella seguente maniera.

109. Teorema 7.° *Se la retta* CB (Fig.ª 70) *condotta dal centro alla corda* DE, *sarà ad essa perpendicolare, la dividerà altresì in due parti eguali.*

Dimostrazione. Condotti i due raggi CD, CE come nella dimostrazione antecedente, essendo CB perpendicolare a DE nei due triangoli risultanti CDB, ECB saranno eguali i due lati CD, CB del primo ai due CE, CB del secondo, come è chiaro; di più l'angolo in B opposto al lato maggiore eguale nell'uno e nell'altro perchè retto; dunque i due triangoli sono eguali tra loro (N.° 52); e perciò anche il lato DB eguaglierà BE, cioè la corda sarà divisa in due parti eguali dalla perpendicolare CB. Ciò che ecc.

110. Teorema 8.° *Nel medesimo cerchio, e in circoli eguali ad archi eguali corrispondono corde eguali: e viceversa a corde eguali si oppongono archi eguali.*

Dimostrazione. 1.ª parte. Suppongansi eguali gli archi AB, DE (Fig.ª 71). Guidati come sopra i raggi AC, CB e così pure C D, C E tutti fra loro eguali, ne risulteranno eguali altresì i due angoli da essi raggi intercetti, perchè misurati da eguali archi; dunque anche i due triangoli BAC, CDE saranno eguali, e perciò il lato AB eguaglierà il suo corrispondente DE; cioè le due corde AB, DE opposte ad archi eguali saranno pur esse eguali. Ciò che ecc.

2.ª parte. Sieno eguali tra loro le due corde AB, DE. Tirati i raggi CA, CB, come pure CD, CE alle estremità di esse, i due triangoli risultanti A C B, DC E saranno eguali perchè aventi i tre lati dell'uno eguali ai tre lati dell'altro, e perciò anche i due angoli tra loro corrispondenti ACB, DCE egali (N.° 51); ma poichè angoli eguali sono misurati da archi eguali, sarà l'arco AB che corrisponde alla corda A B eguale all'arco D E che corrisponde alla corda DE; e perciò a corde eguali corrispondono archi eguali.

111. Teorema 9.° *Nel medesimo circolo, e in circoli eguali, le corde eguali sono egualmente distanti dal centro; e viceversa le corde che sono egualmente distanti dal centro, sono tra loro eguali.*

Dimostrazione. 1.ª parte. Sieno eguali le corde AB, DE (Fig.ª 72). Dal centro C si conducano le perpendicolari CO, CQ alle corde stesse, le quali verranno perciò divise in due parti eguali nei punti Q ed O (N.° 109). Siccome poi erano eguali i tutti, cioè le due corde AB, DE, saranno altresì eguali tra loro le due metà, cioè AO, DQ. Ora si tirino i raggi CA, CD; e poichè nei due triangoli risultanti il lato CA eguaglia CD, il lato OA eguaglia QD, e di più l'angolo AOC eguaglia l'angolo DQC perchè ambidue retti, saranno essi triangoli eguali, e quindi anche il terzo lato CO eguaglierà CQ, che è quanto dire le due corde AB, DE sono egualmente distanti dal centro.

2.ª parte. Sieno ora le corde AB, DE egualmente distanti dal centro C, dico che saranno eguali. Posta la costruzione antecedente, i due triangoli ACO, DQC saranno tra loro eguali, essendo CO eguale a CQ, CA eguale a CD, e l'angolo AOC eguale all'angolo DQC. Perciò anche il terzo lato AO eguale al terzo DQ. Ma siccome AO e DQ sono le metà delle corde (N.° 109), quindi anche i tutti cioè le corde AB e DE saranno tra loro eguali, come dovea dimostrarsi.

112. Teorema 10.° *Se la linea* CD (Fig.ª 73) *sarà perpendicolare alla corda* AB, *e la divida in due parti eguali* AD, DB, *essa passerà necessariamente pel centro del circolo.*

Dimostrazione. Suppongasi che il centro C non si trovi nella linea CD, ma fuori di essa p. e. in E. Condotta la retta ED, sarà questa perpendicolare ad AB (N.° 107), e perciò formerà l'angolo EDB retto; ma essendo per dato del teorema anche CD perpendicolare ad AB, sarà retto altresì CDB; e perciò ne conseguiterebbe che i due angoli CDB, EDB sarebbero eguali, il che ripugna, non potendo una parte eguagliare il tutto. Dunque non può la retta ED passare pel centro del circolo; e resta quindi che vi passi la sola CD, che divideva la corda AB in due parti eguali.

113. Chiamasi *angolo al centro* o *centrale* quello che ha il vertice al centro di un circolo, e le estremità delle sue gambe a due punti qualunque della periferia, come sarebbe p. e. l'angolo ACB (Fig.ª 74). Chiamasi poi *eccentrico* se abbia il vertice fra il centro e la periferia, come ADB: e dicesi *circoscritto* se abbia il vertice fuori della periferia, e le gambe insistenti ad un arco qualunque, oppure tangenti al cerchio stesso. Tali sono gli angoli AOB, QOP (Fig.ª 74).

114. Dicesi *angolo alla periferia* o *inscritto alla periferia* quello, che ha il vertice alla periferia di un cerchio; e le estremità delle gambe a due altri punti qualunque di essa, come l'angolo ADB (Fig.ª 75).

115. Due o più angoli diconsi *insistenti allo stesso arco di circolo*, ovvero *formati nello stesso segmento*, quando tutte le loro gambe si combinano alle due estremità della medesima corda, come gli angoli A, B, C (Fig. 76), i quali avendo i loro vertici alla periferia del segmento maggiore $DABCE$ insistono colle loro gambe alle estremità della corda DE, ossia all'arco o segmento minore DFE.

Anche l'angolo C al centro (Fig.ª 77), dicesi insistere allo stesso arco di cerchio coll'angolo D alla periferia, se le gambe dell'uno e dell'altro si combinino alle estremità della stessa corda AB, il che può accadere in tre differenti maniere rappresentate dalle figure 78, 79 e 80.

116. Teorema 11.° *L'angolo al centro è sempre doppio dell'angolo alla periferia insistente allo stesso arco di cerchio, ossia alla stessa corda.*

Dimostrazione. Sieno primieramente i due angoli disposti in modo, che la gamba AB (Fig.ª 78) dell'angolo alla periferia si combini colla gamba CA dell'angolo al centro. L'angolo esterno ACD eguaglia i due interni B e D (N.° 55). Ma i due angoli B e D sono eguali tra loro, perchè situati alla base del triangolo isoscele BCD, essendo CB eguale a CD; dunque l'angolo ACD sarà doppio del solo angolo B; cioè l'angolo al centro doppio dell'angolo alla periferia.

Sieno ora i due angoli disposti come nella Fig.ª 79. Dal vertice D dell'angolo alla periferia si tiri una retta che passi pel centro C e che prodotta tocchi la periferia nel punto Q. I due triangoli risultanti ACD, BCD saranno isosceli, com'è chiaro; perciò l'angolo esterno QCA sarà doppio dell'angolo interno ADC; e per la stessa ragione l'esterno QCB sarà doppio dell'interno BDC; dunque tutto l'angolo ACB, ossia l'angolo al centro, sarà doppio di tutto l'angolo ADB, cioè dell'angolo alla periferia.

Sieno finalmente i due angoli disposti in maniera che una gamba dell'angolo alla periferia tagli una gamba dell'angolo al centro, come nella figura 80.

Pei due vertici degli angoli si conduca la retta DC che prodotta tocchi la periferia in Q. Essendo il triangolo BCD isoscele perchè CB eguaglia CD, l'angolo esterno BCQ sarà doppio dell'interno BDC (N.° 55). Per la stessa ragione essendo CA eguale a CD, il triangolo ACD sarà esso pure isoscele, e quindi l'angolo esterno ACQ sarà doppio dell'interno ADC. Ora se dall'esterno QCB doppio dell'interno BDC si tolga la porzione QCA, e dall'angolo BDC si tolga la porzione CDA, che è la metà di QCA, resterà, per l'assioma ottavo, l'angolo ACB doppio dell'angolo ADB, vale a dire l'angolo al centro doppio dell'angolo alla periferia.

Pertanto qualunque sia la disposizione di tali angoli sempre si verifica che l'angolo al centro ha doppio valore dell'angolo alla periferia.

117. Teorema 12.° *Gli angoli inscritti nello stesso segmento di circolo, sono tutti eguali tra loro, e ciascuno è composto della metà dei gradi dei quali è composto l'arco di cerchio a cui insistono.*

Dimostrazione. Il segmento nel quale si formano gli angoli può essere o maggiore, o minore, o eguale ad un semicircolo. Suppongasi primieramente maggiore, p. e. $EABDF$ (Fig.ª 81), e in esso sieno posti gli angoli alla periferia A, B, D insistenti all'arco EGF. Si faccia l'angolo C al centro insistente allo stesso arco EGF. Ciascun angolo A, B, D alla periferia è la metà dell'angolo C al centro; dunque sono que' tre angoli fra loro eguali. Essendo poi l'angolo C al centro misurato dall'arco EGF, vale a dire costando di tanti gradi di quanti costa l'arco stesso, ne segue evidentemente che ognuno dei tre angoli A, B, D costerà della metà dei gradi dell'angolo C al centro; ossia dell'arco EGF a cui insiste.

Suppongasi in secondo luogo che gli angoli sieno formati nel segmento minore FBG (Fig.ª 82), nel quale sia formato l'angolo FBG. Da esso angolo B si conduca il diametro BCD, e si tirino i raggi CF, CG alla estremità della corda FG. L'angolo interno FBC è la metà dell'esterno FCD, e così pure l'interno GBC è la metà dell'esterno GCD, che è quanto dire: tutto l'angolo FBG è la metà dei due angoli FCD, DCG presi assieme.

Si formi ora nello stesso segmento FBG un altro angolo qualunque A insistente alla stessa corda FG, e dal punto A si conduca il diametro ACE. Ciò fatto sarà l'angolo interno FAC la metà dell'esterno FCE, e l'interno GAC la metà dell'esterno GCE, ossia tutto l'angolo FAG sarà la metà dei due FCE, ECG presi assieme. Ma i due angoli FCE, ECG hanno lo stesso valore degli altri due FCD, DCG perchè misurati dallo stesso arco di cerchio $FDEG$; dunque resta che anche i due angoli FAG, FBG che sono la metà di essi, sieno tra loro eguali, e perciò saranno tra loro eguali gli angoli alla periferia, sebbene formati nel segmento minore.

Siccome poi tanto i due angoli FCD, DCG, quanto gli altri due FCE, ECG valgono il numero de' gradi dell'arco FDG dal quale sono misurati: ne seguirà che ciascuno degli angoli formati nel segmento FBG eguaglierà la metà dei gradi dell' arco FDG a cui insiste, come dovea dimostrarsi.

La stessa dimostrazione vale, se il segmento nel quale sono formati gli angoli fosse un semicircolo, il che è facile a conoscersi.

118. *Corollario* 1.° L'angolo formato in un semicerchio, sarà retto, perchè insistendo ad un arco di 180 gradi, deve valere la metà di esso, cioè 90 gradi (N.° 117).

119. *Corollario* 2.° L'angolo formato in un segmento minore di un semicerchio, sarà ottuso, perchè insistendo ad un arco che vale più di 180 gradi, esso angolo che ne deve valere la metà, supererà necessariamente 90 gradi.

120. *Corollario* 3.° L'angolo formato in un segmento maggiore di un semicircolo, sarà acuto, perchè insiste ad un arco che vale meno di 180 gradi; onde la metà che costituisce il valore di esso, sarà minore di 90 gradi.

121. *Corollario* 4.° In qualunque quadrilatero inscritto ad un cerchio, cioè che abbia tutti i suoi angoli alla periferia di un circolo, saranno i due angoli opposti eguali alla somma di due retti.

Perchè l'angolo A (Fig.ª 83) vale la metà dei gradi dell'arco BCD a cui insiste (N.° 117); parimenti l'angolo C vale la metà dei gradi dell'arco BAD; dunque tutti due insieme gli angoli A e C equivalgono alla metà della circonferenza, ossia formano 180°, cioè due angoli retti.

Lo stesso dicasi degli altri due B e D. Sono dunque i due angoli opposti di un quadrilatero avente tutti i suoi angoli alla periferia di un cerchio eguali alla somma di due retti. Ciò che ecc.

122. Teorema 13.° *L'angolo eccentrico ha per misura l'arco compreso tra i suoi lati più la metà dell'arco compreso tra i suoi lati prolungati oltre il suo vertice.*

Dimostrazione. Sia l'angolo eccentrico QxS (Fig. 84) i di cui lati Qx, Sx si prolunghino fino alla periferia in V e P, e si tiri la PQ. L'angolo $x = r + o$ (N.° 55); ma l'angolo r è misurato da $\frac{1}{2}QS$, e l'angolo o da $\frac{1}{2}PV$ (N.° 117); dunque l'angolo eccentrico QxS eguaglia la metà dell'arco QS più la metà dell'arco PV, come dovea dimostrarsi.

123. Teorema 14.° *L'angolo circoscritto ad un cerchio è misurato dalla metà dell'arco concavo meno la metà dell'arco convesso compreso tra i suoi lati.*

Dimostrazione. Sia l'angolo circoscritto QAS (Fig.ª 85). Se dall' estremità Q del lato AQ si tiri Qu al punto ove l'altro lato AS taglia la periferia, nel triangolo QuA si avrà l'angolo esterno r eguale ai due interni A e Q, cioè $r = Q + A$ (N.° 55). Quindi sarà ancora $A = r - Q$; ma $r = \frac{1}{2}QS$, $Q = \frac{1}{2}uz$; dunque $A = \frac{1}{2}QS - \frac{1}{2}uz$; che è quanto ecc.

La dimostrazione sarebbe la stessa se l'angolo invece di esser formato da due seganti, risultasse da una segante e da una tangente come MOP (Fig.ª 85), o da due tangenti come MOT.

124. Se dal punto P (Fig.ª 86) in cui la tangente TA tocca il cerchio POQ si tiri la corda PD, ognuno dei segmenti POD, PQD dicesi alterno, se si paragoni all'angolo fatto dalla tangente e dalla corda alla parte opposta. Perciò il segmento POD sarà alterno relativamente all'angolo DPA; e così pure il segmento DQP sarà alterno relativamente all'angolo DPT.

125. Teorema 15.° *L'angolo fatto dalla tangente colla corda è sempre eguale all'angolo fatto nel segmento alterno.*

Dimostrazione. Dal punto di contatto P si tiri una retta che passi pel centro C e vada a toccare la periferia in O, la qual retta, com'è chiaro, sarà diametro, e perciò perpendicolare alla tangente TA (N.° 100). Pertanto i due angoli APD, DPO formano un agolo retto. Si congiunga il punto D con O. Nel triangolo risultante POD, l'angolo ODP è retto perchè insiste ad un semicircolo (N.° 118); onde gli altri due OPD, DOP presi insieme eguaglieranno anch' essi la somma di un retto (N.° 56), e perciò saranno eguali ai due primi DPA, DPO. Ora togliendo dagli uni e dagli altri il comune angolo DPO, resterà l'angolo DPA eguale all'angolo POD, cioè l'angolo fatto dalla tangente colla corda eguaglia l'angolo fatto nel segmento alterno.

Si faccia ora un angolo qualunque Q nel segmento DQP, dico che esso sarà eguale all'angolo DPT. Imperocchè i due angoli Q ed O insistendo a tutta la periferia, costano della metà dei gradi di essa, cioè di 180 gradi, e perciò saranno eguali ai due angoli DPA, DPT anch'essi equivalenti a 180 gradi perchè adiacenti. Quindi se dai primi due O e Q, si levi l'angolo O, e dai due secondi DPA, DPT si levi DPA che è uguale ad O, rimarranno eguali i due angoli Q e DPT, vale a dire l'angolo fatto dalla tangente colla corda eguale all'angolo fatto nel segmento alterno. Essendo poi tra loro eguali tutti gli angoli fatti nello stesso segmento, è manifesto che ciò che si disse dei due O e Q vale altresì per qualunque altro.

CAPO VIII.

Di alcuni problemi, la soluzione dei quali è appoggiata alle teorie finora spiegate.

126. I problemi di geometria consistono principalmente nelle costruzioni; ossia in certe operazioni necessarie a farsi, onde si possa conseguire ciò che si domanda. Sonovi alcune costruzioni di lor natura sì facili e semplici da non poterne assegnare una ragione geometrica. Egli è quindi che i geometri ritengono potersi queste mettere in esecuzione a piacimento, e quando lo richiegga il bisogno. Essi però sogliono ciò domandare mediante alcune proposizioni, che ordinariamente premettono ai problemi da risolversi, le quali proposizioni o domande ricevono perciò il nome di *postulati*. I postulati di cui si fa uso nella Geometria elementare a quattro principalmente possono ridursi, cioè:

1.° Che dati due punti sia concesso di tirare dall'uno all'altro una linea retta.

2.° Che fissato un punto sia concesso di far centro in esso, e descrivere un cerchio che abbia il raggio eguale ad una data retta.

3.° Che data una retta qualunque AB (Fig.ª 87), essa si possa produrre da qualsivoglia parte finchè divenga eguale ad un'altra linea data PQ maggiore di essa. Ciò si ottiene, com'è chiaro, facendo centro p. e. nell'estremità A della data AB, e coll'apertura di compasso eguale a PQ descrivendo la periferia FG, e poscia prolungando la AB per la stessa direzione finchè arrivi a toccare la periferia descritta nel punto R.

4.° Che sopra una data retta CD (Fig.ª 88) si possa prendere la porzione CO eguale ad un'altra linea FG minore della data; e questo si ottiene facendo centro in una delle estremità C della data maggiore, e col raggio CO eguale alla minore FG descrivendo un cerchio, il quale taglierà la porzione CO eguale alla minore FG, come si voleva.

Ciò premesso, veniamo ai Problemi.

127. Problema 1.° *Dividere una data retta* AB (Fig.ª 89) *in due parti eguali.*

Soluzione. Si faccia centro nella estremità A, e con un raggio qualunque AC, non minore però della metà della data retta, si descriva un cerchio; poscia facendo centro nell'altra estremità B si descriva col raggio stesso un altro cerchio. I due cerchi descritti si segheranno nei punti D e C. Congiunti ora insieme questi due punti con una linea retta, essa segherà la data AB in due parti eguali nel punto E.

Dimostrazione. Tirati i raggi AC, AD, BC, BD, i quali sono tra loro eguali, perchè raggi di cerchi uguali, i triangoli risultanti ACD, BCD avendo i due lati AC, AD e BC, BD uguali, e il terzo CD comune, saranno tra loro eguali; e perciò anche l'angolo ACD nel primo eguale al suo corrispondente BCD nel secondo. Quindi saranno eguali ancora i due triangoli ACE, BCE perchè aventi i due lati CA, CE e CB, CE eguali, ed uguali pur anco gli angoli rispettivi compresi da essi lati; onde il terzo lato AE eguaglierà EB; e perciò la retta AB è stata divisa nel punto E in due parti eguali, come dovea farsi.

128. Problema 2.° *Dividere un angolo qualunque rettilineo in due parti eguali.*

Soluzione. Sia ACB (Fig.ª 90) l'angolo da dividersi. Fatto centro in C si descriva un circolo qualunque che tagli le gambe dell'angolo p. e. in A e B. Si tiri la corda AB, e poscia si divida in due parti eguali nel punto D, dal quale si conduca una retta al centro o all'acume dell'angolo. Dico che la retta DC divide l'angolo dato in due parti eguali.

Dimostrazione. Si considerino i due triangoli ACD, BCD. In essi il lato CA eguaglia CB perchè raggi dello stesso cerchio; AD eguaglia DB per costruzione, e CD è comune ad ambidue; dunque i due triangoli sono eguali; e perciò l'angolo ACD eguaglierà il suo corrispondente BCD, che è quanto dire, l'angolo dato ACB è stato diviso in due parti eguali dalla retta CD. Ciò che ecc.

129. Problema 3.° *Sopra una retta* AB (Fig.ª 91) *alzare da un punto determinato* A *una perpendicolare ad essa.*

Soluzione. Prendasi un punto qualunque C fuori della data retta, in cui fatto centro si descriva col raggio CA un circolo, la di cui periferia seghi la retta AB, prodotta se faccia d'uopo, non solamente nel punto A ma anche in B. Dal punto B si tiri pel centro C fino alla periferia la retta BCD, e quindi il punto A si congiunga con D. La retta AD sarà la perpendicolare cercata.

Dimostrazione. Poichè BCD è diametro, l'angolo BAD insistendo ad un semicircolo, sarà retto (N.° 118); dunque la retta AD è perpendicolare ad AB. Ciò che ecc.

130. Problema 4.° *Da un dato punto qualunque fuori di una retta, tirare ad essa una perpendicolare.*

Soluzione. Sia dato il punto C (Fig.ª 92) fuori della retta AB. Fatto centro in C si descriva un cerchio con tal raggio che la periferia di esso seghi la data retta in due punti p. e. in A e B. La porzione AB compresa dalla periferia si divida in due parti eguali nel punto E, e da questo si conduca al centro la retta EC, la quale dico essere la perpendicolare cercata.

Dimostrazione. La retta CE partendo dal centro C cade sulla corda AB e la divide in due parte eguali nel punto E; dunque (N.° 107) sarà perpendicolare ad essa, cioè alla data retta AB, come si voleva.

131. Problema 5.° *Sopra una data retta* AB (Fig.ª 93) *tirare da un punto determinato* C *un' altra retta che colla prima faccia un angolo eguale ad un angolo dato* O.

Soluzione. Fatto centro nel vertice O dell'angolo dato, con un raggio ad arbitrio si descriva un cerchio che seghi le sue gambe in M e N, e si tiri la corda MN. Poscia collo stesso raggio, facendo centro nel punto C della data AB, si descriva un altro cerchio DE, il quale segherà la data AB nel punto D. Ora fatto centro in D col raggio MN si descriva il cerchio EF, il quale segherà l'altro cerchio DE nel punto E; condotta quindi la CE, dico essere DCE l'angolo cercato.

Dimostrazione. Condotta la corda DE, nei due triangoli DCE, MON, sono i tre lati dell'uno eguali ai tre lati dell'altro, perchè DE eguaglia MN per costruzione, CD e CE eguagliano OM ed ON essendo stati i due circoli formati con raggio eguale; dunque i due triangoli sono eguali (N.° 51) e perciò l'angolo DCE eguaglierà il suo corrispondente MON. Ciò che ecc.

132. Problema 6.° *Da un punto dato* P *fuori di una retta* AB (Fig.ª 94) *condurre ad essa una parallela.*

Soluzione. Dal punto dato P si conduca alla AB una retta qualunque PQ; poscia dallo stesso punto P si tiri un'altra retta PR che colla PQ faccia da una parte l'angolo RPQ eguale all'angolo PQA fatto dall'altra parte dalla PQ colla AB (N.° 131). Dico che la retta PR sarà la parallela cercata.

Dimostrazione. Essendo i due angoli AQP, RPQ eguali per costruzione, ed alterni tra loro, perchè posti col vertice in parte opposta, non possono le due linee AB, PR non essere tra loro parallele (N.° 42).

133. Problema 7.° *Dato un punto* P *fuori di una retta* AB (Fig.ª 95) *condurre da esso una retta, che faccia colla* AB *un angolo eguale ad un dato* D.

Soluzione. Dal punto P si conduca la retta PQ parallela ad AB; poscia dallo stesso punto P si tiri la PR, la quale faccia colla PQ l'angolo RPQ eguale all'angolo D. Producasi la PR finchè giunga a tagliare la AB in O, sarà la retta PO la linea cercata.

Dimostrazione. Poiche le due rette AB, PQ sono per costruzione parallele, saranno eguali tra loro gli angoli alterni AOP, QPO (N.° 37). Ma l'angolo OPQ per costruzione è uguale al dato D; dunque anche l'angolo AOP eguaglierà lo stesso angolo D. Ciò che ecc.

134. Problema 8.° *Sopra una data retta* AB (Fig.ª 96) *costruire un triangolo equilatero.*

Soluzione. Si faccia centro in una delle estremità della data retta p. e. A, e col raggio AB si descriva il cerchio CR; poscia si faccia centro nell'altra estremità B e collo stesso raggio BA si descriva il cerchio CQ, che segherà il primo nel punto C. Tirando ora le rette CA, CB, dico che il triangolo risultante ACB, sarà il triangolo equilatero cercato.

Dimostrazione. I due lati AC, BC sono per costruzione eguali al terzo AB; dunque il triangolo ACB formato sopra la data AB è equilatero. Ciò che ecc.

155. Problema 9.° *Costruire un triangolo avente i tre lati eguali a tre linee date.*

Soluzione. Sieno le tre linee date AB, BC, AC (Fig.ª 97). Fatto centro nella estremità B della prima linea AB con un raggio eguale alla seconda BC si descriva un cerchio; poscia fatto centro nell' altra estremità A della prima con un raggio eguale alla terza AC, si descriva un altro cerchio, che segherà il primo nel punto C. Dalle estremità A e B si tirino al punto d' intersezione dei due cerchi le rette AC, BC, ed il triangolo risultante ACB, sarà il cercato.

Dimostrazione. È manifesto che il triangolo ACB ha il lato AB identico colla prima linea data AB; il lato BC eguale per costruzione alla seconda BC; e il lato AC eguale per la stessa ragione alla terza AC; dunque ecc.

Si noti però che la soluzione di questo problema sarebbe impossibile, quando due delle tre linee date prese assieme, non superassero in lunghezza la terza di esse, poichè dovendo le tre date linee divenir lati del triangolo, si avrebbero due lati di esso minori del terzo, il che ripugna (N.° 66) alla natura del triangolo.

156. Problema 10.° *Sopra una data retta* AC (Fig.ª 98) *costruire un triangolo che sia equiangolo con un triangolo dato* DEF *in maniera che i due angoli* A *e* C *adiacenti alla linea data sieno eguali agli angoli* D *ed* F *del dato triangolo.*

Soluzione. Dall'estremità A della data retta AC, si tiri una retta che con essa faccia un angolo eguale all' angolo D. Parimenti dalla estremità C si tiri un' altra retta che con CA faccia un angolo eguale all' angolo F. Le due linee tirate s'incontreranno nel punto B, e formeranno il triangolo ABC che sarà il cercato.

Dimostrazione. I due angoli A e C adiacenti alla data retta AC sono per costruzione eguali agli altri due D ed F del triangolo dato, e perciò anche il terzo B eguaglierà il terzo E (N.° 59); dunque ecc.

157. Problema 11.° *Sopra una data retta* PQ (Fig.ª 99) *costruire un quadrato.*

Soluzione. Dalle due estremità P e Q della data retta si alzino le perpendicolari PO, QR, le quali si facciano eguali alla stessa PQ, e poscia si congiunga O con R; dico che il quadrilatero risultante sarà un quadrato.

Dimostrazione. Poichè i due angoli interni alla stessa parte P e Q sono per costruzione retti, le due rette PO, QR saranno tra loro parallele (N.° 42); di più essendo le dette linee PO, QR eguali, saranno altresì uguali e parallele le altre due OR e PQ (N.° 76); onde il quadrilatero $PORQ$ è un parallelogrammo rettangolo, il quale avendo inoltre tutti i lati eguali, sarà anche quadrato (N.° 77). Ciò che ecc.

158. Problema 12.° *Costruire un parallelogrammo eguale ad un dato triangolo* MNO (Fig.ª 98), *ed avente un angolo eguale ad un angolo dato* D.

Soluzione. Si divida in due parti eguali un lato qualunque del triangolo dato p. e. MO in R, cosicchè sia MR eguale ad RO. Dal punto O s' innalzi la retta OP, la quale faccia con MO l' angolo MOP eguale al dato D; e dal punto R si tiri la retta RQ parallela ad OP; e infine dall'angolo N si conduca la NP parallela ad MO, la quale taglierà altre due linee RQ, OP nei punti Q e P; dico che $RQPO$ sarà il parallelogrammo cercato.

Dimostrazione. Il quadrilatero $RQPO$ ha i lati opposti paralleli tra loro per costruzione, e perciò sarà un parallelogrammo. Quindi conducendo la retta RN, i due triangoli risultanti MNR, RNO che hanno le basi MR, RO uguali e sono posti fra le medesime parallele, saranno tra loro equivalenti (N.° 87), e perciò RNO sarà la metà dell' intero triangolo MNO; ma il triangolo RNO è la metà del parallelogrammo $RQPO$ perchè hanno base comune e comune l'altezza; dunque anche il parallelogrammo $RQPO$ sarà equivalente col triangolo MNO. Di più l'angolo ROP eguaglia per costruzione l' angolo dato D; dunque il parallelogrammo soddisfa a tutte le condizioni del problema.

159. Problema 13.° *Costruire un parallelogrammo equivalente ad un dato triangolo* MNO (Fig.ª 99), *ed avente un angolo eguale ad un dato* D, *e di più un lato eguale ad una linea data* AB.

Soluzione. Primieramente si costruisca un parallelogrammo equivalente al triangolo dato, ed avente un angolo eguale al dato, come s' insegnò nel problema antecedente. Poscia si produca il lato RO del parallelogrammo costrutto fino in G, cioè fino a tanto che il prolungamento OG eguagli la data retta AB. Dal punto G si conduca la GS parallela al lato OP, la quale tagli in S il lato QP prodotto. Dal punto S si tiri la SO, e si produca finchè s'incontri col lato

QR, prolungato anch'esso, nel punto C. Finalmente dal punto C si tiri la retta CT parallela ad OG, la quale taglierà nei punti F e T i due lati prolungati PO, SG. Ciò fatto si avrà il parallelogrammo cercato, e sarà $FOGT$.

Dimostrazione. Non si può dubitare che $FOGT$ sia un parallelogrammo, poichè ha i lati opposti paralleli; di più ha il lato OG eguale alla data AB, e l'angolo FOG eguale all'angolo ROP con cui è opposto al vertice, e quindi eguale altresì all'angolo dato D. Essendo poi QS e CT, come pure CQ ed ST tra loro paralleli, è manifesto che $CQST$ è un parallelogrammo e che $FOGT$ ed $ROPQ$ sono i suoi complementi, e perciò tra loro equivalenti (N.° 80); ma essendo il parallelogrammo $ROPQ$ per costruzione equivalente al triangolo MNO, ne conseguiterà che anche il parallelogrammo $FOGT$ sarà equivalente allo stesso triangolo MNO; dunque soddisfa a tutte le condizioni del problema.

140. Problema 14.° *Sopra una data retta* DE (Fig.ª 100) *costruire un parallelogrammo equivalente ad un dato rettilineo, ed avente un angolo eguale ad un dato* O.

Soluzione. Da un angolo qualunque del rettilineo dato, si tirino a tutti gli altri angoli delle linee rette, e si divida così il rettilineo in tanti triangoli p. e. A, B, C. Poscia sopra la data retta DE si costruisca secondo ciò che s'insegnò nel problema antecedente il parallelogrammo $FDEG$ equivalente al triangolo A ed avente l'angolo EDF eguale all'angolo dato O. Parimenti sopra il lato FG si costruisca il parallelogrammo $MFGN$ equivalente al triangolo B ed avente l'angolo MFG eguale anch'esso ad O. Lo stesso si faccia sopra il lato MN, e così via via finchè vi saranno triangoli nel rettilineo dato. Egli è chiaro che tutti questi parallelogrammi uniti insieme formeranno la figura $SDET$, la quale sarà appunto il parallelogrammo cercato.

Dimostrazione. Gli angoli EDF e GFM sono ambidue per costruzione eguali al dato O; sono dunque eguali tra loro; ma l'angolo EDF con DFG formano la somma di due retti perchè interni alla stessa parte fra le parallele DE, FG; dunque anche GFM collo stesso DFG formeranno la somma di due retti, e perciò le linee DF, FM costituiscono una sola linea retta (N.° 27). Lo stesso si dica degli angoli FMN, NMS e delle linee FM ed SM, e di quanti altri ve ne fossero, cosicchè la DS, com'è evidente, si può

considerare ed è realmente una sola linea retta; e per la stessa ragione si potranno considerare come una sola retta ET le linee EG, NG ecc. parallele a DF, MF ecc.

Essendo poi DE eguale e parallela ad FG, e FG eguale e parallela a MN, e così MN eguale e parallela ad ST; ne segue che DE sarà eguale e parallela ad ST, e perciò anche DS ed ET che congiungono le estremità di esse, saranno pure tra loro eguali e parallele, onde $DSTE$ sarà il parallelogrammo formato sopra la data DE, avente l'angolo EDS eguale al dato O, ed equivalente al dato rettilineo perchè equivalente per costruzione ai tre triangoli A, B, C, i quali costituiscono come si vede anche ad occhio il rettilineo dato. Ciò che ecc.

141. Problema 15.° *Costruire un triangolo equivalente ad un dato rettilineo* (Fig.ª 100).

Soluzione. A norma del problema precedente si formi il parallelogrammo equivalente al dato rettilineo, e sia p. e. $DSTE$. Si prolunghi il lato DS fino in R, in modo che DS eguagli SR, e dal punto R si conduca ad E la retta RE. Il triangolo risultante RDE sarà il triangolo cercato.

Dimostrazione. Si conduca dal punto S la retta SE. Egli è manifesto che i due triangoli SDE, RSE sono tra loro equivalenti perchè hanno eguali basi DS, SR e sono posti fra le stesse parallele DR, ET. Ma il triangolo SDE è la metà del parallelogrammo $SDET$ perchè la diagonale divide il parallelogrammo in due parti uguali; dunque due volte il triangolo SDE, ossia tutto il triangolo RDE eguaglierà il parallelogrammo $SDET$, e quindi sarà altresì equivalente al rettilineo dato, come voleva il problema.

142. Problema 16.° *Costruire un quadrato equivalente ad un dato rettilineo.*

Soluzione. Sopra una retta qualunque AD ovvero AQ (Fig.ª 101) si costruisca (N.° 58) un parallelogrammo uguale al dato rettilineo ed avente un angolo retto. Un tale parallelogrammo $ADEQ$ sarà un rettangolo (N.° 78). Si produca il lato AQ in B, cioè fino a tanto che AB eguagli AD, e diviso AB in due parti eguali in C, si faccia centro in C e col raggio CA, o CB si descriva il semicircolo ARB. Si produca inoltre il lato EQ del rettangolo finchè tagli il semicerchio in R, e si tiri la corda AR. Il quadrato fatto sopra la AR cioè $ARPG$ sarà il quadrato che si cerca.

Dimostrazione. Si compia il rettangolo *ABFD*, il quale avendo *AB* eguale per costruzione ad *AD* sarà un quadrato. Condotta la corda *RB*, l'angolo risultante *ARB* sarà retto perchè insistente ad un semicerchio, e perciò il lato *AB* sarà ipotenusa, onde il quadrato fatto sopra di esso sarà equivalente ai due quadrati fatti sopra i due cateti (N.° 95). Essendo poi la retta *ER* parallela per costruzione a *DA*, è manifesto che il quadrato *ADFB* vien diviso in due rettangoli *ADEQ*, *EQBF*, ciascun de' quali è uguale al quadrato fatto sopra il rispettivo cateto (N.° 95). Perciò il quadrato *ARPG* sarà eguale al rettangolo *AQED*, il quale essendo stato costruito eguale ad un dato rettilineo, ne segue che anche il quadrato *ARPG* sarà equivalente al rettilineo stesso. Ciò che ecc.

143. Problema 17.° *Costruire un quadrato equivalente a due quadrati dati.*

Soluzione. Sieno i due quadrati dati *AF*, *CE* (Fig.ª 102). In uno qualsivoglia dei due p. e. *AF*, si produca il lato *FB* in *O* finchè il prolungamento eguagli un lato *CD* dell'altro quadrato *CE*. Si conduca *AO*, e sopra di essa si formi un quadrato, il quale sarà appunto equivalente ai due dati *AF* e *CE*.

Dimostrazione. L'angolo *ABO* sarà retto, perchè adiacente all'angolo retto *ABF* (N.° 24); onde il quadrato fatto sopra l'ipotenusa *AO*, sarà equivalente ai due quadrati fatti sopra i due cateti *AB* e *BO*, cioè ai due quadrati dati *AF* e *CE*. Ciò che ecc.

144. Problema 18.° *Costruire un quadrato equivalente a più quadrati dati.* AF, CE, RS, HG *ecc.* (Fig.ª 102).

Soluzione. Dietro quanto si è insegnato nel problema precedente, si costruisca un quadrato equivalente ai due *AF* e *CE*, e sia *PQ*. Nella stessa maniera si costruisca un altro quadrato equivalente a *PQ* e all'altro *RS* presi assieme; e sia questo *PT* il quale, come è chiaro, sarà equivalente ai tre quadrati *AF*, *CE*, *RS*. Proseguendo la stessa costruzione si giungerà infine ad avere un quadrato equivalente a tutti i dati, il che è per se stesso abbastanza manifesto, nè abbisogna di ulteriore dimostrazione.

145. Problema 19.° *Costruire un quadrato doppio di un dato.*

Soluzione. Sia *AB* (Fig.ª 103) il quadrato dato. Si

produca un lato di esso qualunque *BC* in *D* finchè il prolungamento *CD* eguagli lo stesso lato *BC*, e si congiunga *A* con *D*. Dico che il quadrato fatto sopra *DA* sarà doppio del quadrato dato *AB*.

Dimostrazione. Il quadrato fatto sopra l'ipotenusa *AD* eguaglia i quadrati fatti sopra i due cateti *AC*, *CD*; ma *AC* eguaglia *DC* per costruzione; dunque il quadrato di *AD* sarà doppio del solo quadrato fatto sopra *AC*, cioè doppio di *AB*, come si voleva.

146. Problema 20.° *Costruire un quadrato che sia equivalente alla differenza di due quadrati dati.*

Soluzione. I due quadrati dati dei quali si cerca la differenza, sieno *DB* ed *EF* (Fig.ª 104). Il lato *QB* del quadrato maggiore *DB* si divida in due parti eguali in *C*. Fatto centro in C col raggio *CQ* ovvero *CB* si descriva il semicerchio *QOB*. Di poi fatto centro in *B* col raggio *EG* si descriva un arco di cerchio che segherà il semicircolo *QOB* nel punto *O*. Si conduca ora la retta *QO*, e sopra di essa formando il quadrato, sarà desso equivalente alla differenza dei due quadrati dati *DB*, *EF*.

Dimostrazione. Si tiri la *BO*. L'angolo risultante *QOB* è retto, perchè insiste ad un semicerchio; dunque il quadrato di *QB*, cioè *DB*, sarà equivalente ai due quadrati fatti sopra *QO* e *BO*. Perciò se dall'uno o dagli altri si tolga il quadrato fatto sopra *OB*, ossia il quadrato *EF*, si avrà il quadrato *DB*, meno il quadrato *EF* equivalente al quadrato fatto sopra *QO*. Dunque il quadrato di *QO* sarà la differenza che passa fra i due quadrati dati. Ciò che ecc.

147. Problema 21.° *Trovare il centro di un arco di cerchio dato* MPO (Fig.ª 105).

Soluzione. Nell'arco dato si tirino due corde qualunque *PM*, *PO* purchè non sieno tra loro parallele, e non lo saranno se ambedue partano dallo stesso punto *P*. Queste si dividano in due parti uguali nei punti *Q* ed *R*, e da essi si innalzino le perpendicolari *QC*, *RC*, le quali si segheranno nel punto *C*, che sarà appunto il centro cercato.

Dimostrazione. Ciascuna delle due perpendicolari *QC*, *RC* deve passare pel centro (N.° 142); sarà perciò necessario che il centro che si cerca si trovi nell'una e nell'altra di esse. Ma il solo punto comune ad ambedue è *C*; dunque esso sarà necessariamente il centro dell'arco dato *MPO*.

148. Problema 22.° *Sopra tre dati punti* Q, O, P (Fig.ª 406) *che non sieno nella stessa direzione far passare una circonferenza di un cerchio.*

Soluzione. Si congiungano insieme i punti dati con le rette QO e PO, le quali si dividano in due parti eguali in M ed N. Da questi due punti s'innalzino le perpendicolari MC, NC, che si taglieranno nel punto C. Si faccia centro in esso e col raggio CQ, ovvero CO, oppure CP si descriva un circolo, la di cui periferia passerà sopra i tre punti dati Q, O, P.

Dimostrazione. Tirate le rette CQ, CO, CP, i triangoli risultanti CNP, CNO saranno tra loro eguali, perchè hanno i due lati PN ed ON per costruzione eguali, il lato CN comune e gli angoli intercetti CNP, CNO eguali perchè retti; dunque anche il terzo lato CP eguaglierà CO, e perciò la circonferenza descritta passa pel punto P ed O. Per la stessa ragione essendo uguali i due triangoli CMO, CMQ, sarà CO eguale a CQ, e quindi la circonferenza passerà altresì pel punto Q. Ciò che ecc.

149. Problema 23.° *Da un punto* Q (Fig.ª 407) *dato nella periferia condurre una tangente al cerchio.*

Soluzione. Si trovi il centro del cerchio (N.° 147), e sia C, da cui si tiri il raggio CQ, e alla estremità di esso Q si innalzi la perpendicolare QT (Probl.° 5), la quale sarà la tangente cercata. Vedi la dimostrazione del Teorema 1.° (N.° 99).

150. Problema 24.° *Dato un punto* P (Fig.ª 408) *fuori di un cerchio condurre ad esso la tangente.*

Soluzione. Dal centro C del cerchio si conduca a P la retta CP, la quale si divida in due parti uguali nel punto Q. Poscia si faccia centro in Q e col raggio QC ovvero QP si descriva un semicerchio, il quale taglierà il circolo dato nel punto O. Si tiri ora la PO, e questa sarà la tangente del cerchio.

Dimostrazione. Condotto il raggio CO l'angolo COP sarà retto perchè insiste ad un semicerchio; dunque la linea PO non solamente parte dal punto P, ma è inoltre tangente al cerchio pel teorema 1.° del N.° 99.

151. Problema 25.° *Dividere in due parti eguali un dato arco di cerchio.*

Soluzione. Sia ARB (Fig.ª 409) l'arco dato. Si tiri alle estremità di esso la corda AB, e si divida in due parti uguali in Q, da cui s'innalzi ad AB la perpendicolare QR, la quale segherà l'arco dato in R, e sarà questo il punto che divide l'arco dato in due parti eguali.

Dimostrazione. Tirate le rette AR, BR, saranno eguali i due triangoli AQR, BQR nei quali sono per costruzione eguali i lati AQ, QB, e il lato QR comune ad ambidue; e di più eguali gli angoli AQR, BQR rispettivamente compresi da lati eguali; perciò anche il terzo lato AR eguaglierà BR. Ma questi lati AR, BR sono corde rispettive degli archi AR, BR; dunque essendo eguali le corde, saranno altresì uguali gli archi, e perciò l'arco ARB è stato diviso in due parti eguali nel punto R. Ciò che ecc.

152. Problema 26.° *Da un punto* P *dato nella periferia di un cerchio* (Fig.ª 410) *condurre una corda che sottenda un arco, o tagli un segmento, il quale comprenda un angolo eguale ad un dato.*

Soluzione. Per il punto dato P si tiri la tangente al cerchio e sia PQ. Poscia dallo stesso punto P si conduca la retta PO, la quale faccia con PQ l'angolo QPO eguale all'angolo dato R. Dico che PO sarà la corda cercata.

Dimostrazione. Perchè l'angolo QPO è formato dalla tangente colla corda, sarà eguale all'angolo che può esser fatto nel segmento alterno OSP (N.° 125). Ma l'angolo QPO è uguale al dato R; dunque anche l'angolo compreso nel segmento OSP sarà eguale al dato R. Ciò che ecc.

153. Problema 27.° *Sopra una data retta* RT (Fig.ª 411) *descrivere un segmento di cerchio che comprenda un angolo eguale ad un dato* O.

Da una qualunque delle due estremità della data linea p. e. da R, si conduca la retta RS, la quale faccia con essa l'angolo SRT eguale al dato O. Poscia dal punto R s'innalzi RC perpendicolare ad RS, e dall'altra estremità T della linea data, si conduca TC, la quale con essa TR faccia l'angolo CTR eguale all'angolo CRT. Le due linee RC e TC prodotte che sieno, s'incontreranno, com'è chiaro, nel punto C. Si faccia ora centro in C e col raggio CR, si descriva un circolo, il quale necessariamente dovrà passare per le due estremità della linea data, e nel segmento RQT formato sopra di essa, sarà compreso un angolo eguale al dato O.

Dimostrazione. L'angolo CRT è per costruzione eguale all'angolo CTR: dunque il triangolo RCT sarà isoscele, e perciò il lato CR eguaglierà CT; onde la periferia del cerchio passa per R e T, e quindi il segmento RQT è descritto sopra la data RT. Essendo poi il raggio CR perpendicolare ad RS, per la costruzione fatta, ne segue che RS sarà tangente del cerchio nel punto R (N.° 99), e perciò il segmento RQT sarà alterno relativamente all' angolo SRT fatto dalla tangente RS colla corda RT. Quindi il segmento RQT comprenderà un angolo eguale ad SRT, perciò eguale altresì all' angolo dato O. Che è quanto ecc.

154. Problema 28.° *Descrivere un triangolo equiangolo ad un altro triangolo dato* PQO (Fig.ª 112), *ed avente tutti tre gli angoli alla periferia di un dato circolo.*

Soluzione. Da un punto qualunque A della periferia del circolo dato si tiri la tangente ad esso, e sia RAT. Poscia dallo stesso punto A si conduca la retta AB, la quale faccia colla tangente RA l' angolo RAB eguale all' angolo O del triangolo dato. Parimenti dallo stesso punto A si conduca la retta AD, la quale colla tangente AT faccia dall' altra parte l'angolo DAT eguale all'angolo P del triangolo dato. I due punti B e D nei quali le due rette condotte segano la periferia, si uniscano colla retta BD. Il triangolo risultante sarà il cercato.

Dimostrazione. Il triangolo BAD primieramente ha tutti gli angoli alla periferia come apparisce dalla costruzione fatta. Inoltre essendo l' angolo D eguale all' angolo BAR perchè D è formato nel segmento alterno, e BAR fatto dalla tangente colla corda (N.° 123) ne segue che esso sarà altresì eguale all' angolo O del triangolo dato, al quale lo stesso RAB fu fatto eguale. Per la stessa ragione sarà l' angolo B eguale all'angolo TAD, e perciò uguale ancora all'angolo P del triangolo dato. Ma quando in due triangoli sono due angoli dell' uno eguali a due angoli dell' altro, anche il terzo sarà eguale al terzo (N.° 59); dunque anche l' angolo BAD eguaglierà Q; onde il triangolo BAD è equiangolo al triangolo PQO, e di più ha i tre angoli alla periferia del circolo dato, come voleva il problema.

SEZIONE SECONDA

CAPO I.

Delle Proporzioni, e loro applicazione alle linee e alle figure piane.

Le cose delle quali ci dobbiamo occupare in questa sezione suppongono la dottrina delle proporzioni, che noi spiegammo nella prima parte di questi Elementi Capo IX N.° 368 e seguenti. Quindi io giudico necessario di rammentarne ora i principii succintamente, affinchè quelli, i quali cominciano il loro corso scolastico dalla Geometria possano indipendentemente dall' Algebra intendere le verità che siam per dimostrare.

155. Premetto la spiegazione di alcuni segni, dei quali in appresso faremo uso per abbreviare il discorso intorno alle proposizioni.

$+$ è segno di aggregazione ossia unione o somma: si pronuncia *più*, e si scrive tra le quantità da sommarsi p. e. $A+B+C$ ecc.

$-$ è segno di sottrazione; si pronuncia *meno*, e si mette tra una quantità e l' altra per significarne la loro differenza. Così $A-B$ significa che la quantità A è stata diminuità di B, ed $A-B$ sarà la loro differenza.

$>$ significa l' esser maggiore di una quantità relativamente ad un' altra, e si legge *maggiore*. Così $A>B$, vuol dire che A supera B.

$<$ significa l'esser minore di una quantità, e si pronuncia *minore*. Così $A<B$ vuol dire che A è minore di B.

$=$ significa uguaglianza, e si pronuncia *uguale*. Onde $A=B$ significa che A eguaglia B. Questo stesso segno si usa altresì per significare l' equivalenza delle figure, cioè l' uguaglianza delle loro superficie, non badando alla grandezza del loro perimetro e dei loro angoli.

$\times$, $\cdot$ sono segni di moltiplica. Così $A\times B$, ovvero $A\cdot B$ significa che A deve moltiplicarsi per B.

Per indicare la divisione di due quantità si scrivono in una di queste due maniere $\frac{A}{B}$, $A:B$; e l' una e l' altra significano che la quantità A è divisa dalla quantità B.

∞ significa l' infinito; p. e. $\frac{A}{B} = \infty$, vuol dire che la divisione di A per B dà un quoto infinito.

156. Due quantità o grandezze qualunque possono paragonarsi tra loro in due maniere, cioè o sottraendo l' una dall'altra, o dividendo l'una per l'altra. La differenza o il quoto che ne risultano, diconsi la loro *ragione*, o il loro *rapporto*; e una tale ragione è *aritmetica* se si prende la differenza, *geometrica* se il quoto. Così la ragione aritmetica di 6 a 2 è $6-2=4$; la geometrica è $\frac{6}{2}=3$.

157. Le due quantità in tal modo paragonate chiamansi termini della ragione, la prima *antecedente*, la seconda *conseguente*; ed il numero delle volte che la prima contiene la seconda dicesi *esponente* della ragione. Questa ragione poi si indica o scrive così $6:2$, e si legge 6 sta a 2.

158. Pertanto supposta $a:b$ una ragione, e fatta d o q la sua differenza o il suo quoto, si avrà per l'aritmetica $a-b=d$, ovvero $a=b+d$, e per la geometrica $\frac{a}{b}=q$, ossia $a=bq$.

159. La ragione si dice *composta* se sia la somma o il prodotto di più ragioni. Si sommano poi o si moltiplicano più ragioni insieme sommando o moltiplicando l' uno coll' altro i loro antecedenti, e così pure i loro conseguenti. Perciò le ragioni $4:2$, $6:3$, $10:5$ danno la composta aritmetica $4+6+10:2+3+5$, e la composta geometrica $4.6.10:2.3.5$.

160. Se più quantità a, b, c, d ecc. sono tali che la prima di esse stia alla seconda conforme una data ragione $m:n$; che la seconda stia alla terza secondo un' altra data ragione $p:q$; e che la terza stia alla quarta secondo un'altra data ragione $r:s$ ecc., vale a dire se

$$a:b=m:n$$
$$b:c=p:q$$
$$c:d=r:s$$

la ragione della prima alla terza cioè $a:c$ sarà composta delle due prime ragioni $a:b$ e $b:c$, ovvero delle due eguali $m:n$ e $p:q$. Così pure la ragione della prima alla quarta cioè $a:d$, sarà composta delle tre prime $a:b$, $b:c$, $c:d$, o delle altre tre eguali $m:n$, $p:q$, $r:s$ ecc.

161. Se le componenti sieno due solamente ed uguali tra loro, la ragione composta di esse dicesi *dupla* se aritmetiche eran le componenti, *duplicata* se geometriche. Così la composta aritmetica di $4:2$, e $5:3$, cioè $4+5:2+3$; ossia di $9:5=4$, sarà dupla di una sola di esse cioè di $4:2$ o di $5:3$.

Parimenti la composta geometrica di $6:3$ e $10:5$, cioè $6.10:3.5$ ossia $60:15$, sarà duplicata di una sola di esse, vale a dire della ragione di $6:3$, o di $10:5$. Infatti $2.2=4=60:15$.

162. Quando le componenti sono tre, quattro ecc. tutte eguali, la composta aritmetica dicesi *tripla*, *quadrupla* ecc. e la geometrica *triplicata*, *quadruplicata* ecc. il che è di per se stesso chiarissimo.

163. Per lo contrario una ragione qualunque semplice aritmetica o geometrica paragonata ad un' altra che sia dupla, tripla ecc., oppure duplicata, triplicata ecc. di essa, dicesi *subdupla*, *subtripla* ecc. oppure *subduplicata*, *subtriplicata* ecc. di quella.

164. Se quattro quantità sono tali e talmente disposte tra loro, che la ragione o aritmetica o geometrica delle due prime, sia eguale alla ragione delle due ultime, esse diconsi formare una *proporzione* o *aritmetica* o *geometrica*, ovvero essere *aritmeticamente* o *geometricamente proporzionali tra loro.* Così p. e. i quattro numeri 5, 2, 9, 6 sono aritmeticamente proporzionali, perchè la ragione di $5:2$ eguaglia quella di $9:6$. Questa proporzione si scrive così $5:2.\!\cdot.9:6$. Parimenti 8, 4, 6, 3 sono quattro quantità tra loro geometricamente proporzionali, perchè la ragione di $8:4$ eguaglia quella di $6:3$. Una tale proporzione geometrica si scrive così $8:4::6:3$. La prima e quarta quantità di una proporzione qualunque diconsi *termini estremi*, la seconda e la terza *termini medii.*

165. Se la proporzione è composta di quattro termini diversi, dicesi *discreta;* ma se i due termini medii sono eguali tra loro, vale a dire sono una stessa quantità replicata, la proporzione si chiama *continua*, le tre quantità costituenti la proporzione diconsi *continuamente proporzionali* tra loro, e la

quantità replicata dicesi *media proporzionale*. Così 6, 4, 2 sono in proporzione aritmetica continua perchè $6 : 4 .\cdot. 4 : 2$; come 16, 8, 4 sono in proporzione geometrica continua, perchè $16 : 8 :: 8 : 4$.

166. Più termini o quantità diconsi *continuamente proporzionali* e *in proporzione continua* tra loro, quando la prima sta alla seconda, come la seconda alla terza, come la terza alla quarta, e così via via. Tale è la serie naturale de' numeri 1, 2, 3, 4 ecc. per la proporzione aritmetica, e i numeri 2, 4, 8, 16 ecc. per la geometrica.

167. In qualunque proporzione, o serie di quantità proporzionali, chiamansi *termini omologhi* gli antecedenti fra loro, e così pure i conseguenti.

168. Quando dei quattro termini di una proporzione il primo sta al secondo, come il terzo sta al quarto, essa chiamasi *diretta;* che se il primo stia al secondo come il quarto al terzo, allora dicesi *inversa* o *reciproca*. Così 6, 5, 4, 1, sono tra loro in proporzione aritmetica diretta, come in geometrica diretta lo sono 8, 4, 6, 3. Ma 6, 5, 1, 4 e 8, 4, 3, 6 son tra loro in proporzione inversa, i primi aritmeticamente, gli altri geometricamente.

In questo caso per formare una proporzione diretta fa d'uopo o mettere il secondo termine in luogo del primo, dicendo $5 : 6 .\cdot. 1 : 4$, e $4 : 8 :: 3 : 6$; oppure il quarto in luogo del terzo, dicendo $6 : 5 .\cdot. 4 : 1$ e $8 : 4 :: 6 : 3$.

169. *Nella proporzione aritmetica discreta la somma degli estremi eguaglia la somma de' medii, e nella geometrica il prodotto degli estremi eguaglia il prodotto de' medii.* Infatti da $a : a+d .\cdot. b : b+d$ si ha $a+b+d=a+d+b$; e da $a : aq :: b : bq$ si ha $abq=aqb$. Perciò dati tre termini qualunque, può sempre aversi il quarto proporzionale x; poichè se p. e. manchi il terzo nell'aritmetica, sarà $a+b+d=a+d+x$, onde $x=b$; se manchi il secondo nella geometrica, sarà $abq=bx$, onde $x=aq$. Tutto ciò si fa chiaro nei numeri.

170. *Nella proporzione aritmetica continua la somma degli estremi eguaglia il doppio del medio, e nella continua geometrica il prodotto degli estremi eguaglia il quadrato del medio, cioè il medio moltiplicato per se stesso.* Infatti da $a : a+d .\cdot. a+d : a+2d$, si ha $a+a+2d=2(a+d)=2a+2d$; e da $a : aq :: aq : aq^2$, si ha $a . aq^2 = aq . aq$, cioè $a^2q^2=a^2q^2$.

(Il quadrato di una quantità si esprime con mettere un 2 alquanto elevato a destra della quantità moltiplicata per se stessa).

171. Quando più quantità sono disposte in modo che formino proporzioni tra loro eguali, sogliono i matematici arguirne che l'eguaglianza di tali proporzioni non si turba, sebbene quelle quantità vengano disposte con ordine diverso da quello di prima. Un tal cambiamento poi si può fare in sette maniere diverse, le quali potranno ritenersi come altrettante proprietà delle proporzioni.

172. La prima maniera consiste in questo, che i termini che erano *antecedenti* nella data proporzione sieno messi in luogo dei *conseguenti* e viceversa. Così avendosi $a : b :: c : d$, si verificherà ancora che $b : a :: d : c$. Perchè dovendo in qualsivoglia proporzione il prodotto degli estremi eguagliare il prodotto de' medi (N.° 169), le due accennate proporzioni sussisteranno, verificandosi in ambidue che $ad=bc$. Questo modo di argomentare dicesi *invertere* i termini della proporzione.

173. La seconda maniera, che chiamasi *alternare* i termini, è posta in ciò che nella proporzione l'antecedente della seconda ragione passa in luogo del conseguente della prima, e il conseguente della prima diviene antecedente della seconda ragione. Perciò se $a : b :: c : d$, sarà altresì $a : c :: b : d$, essendo qui pure come nelle proporzioni del numero antecedente $ad=bc$.

174. La terza maniera dicesi argomentare *per eguaglianza ordinata*. Si abbiano due serie di quantità a, b, c, d ecc. e, f, g, h ecc. continuamente proporzionali tra loro; sia cioè $a : b$ nella prima come $e : f$ nella seconda; $b : c$ nella prima come $f : g$ nella seconda, e così via via. Ciò essendo ne arguiscono, che il rapporto della prima quantità a all'ultima d nella prima serie eguaglia quello della prima e all'ultima h nella seconda serie, sarà cioè $a : d :: e : h$. Che poi sussista questa proporzione si prova così: La proporzione o il rapporto di $a : d$ è composta delle proporzioni di $a : b$, di $b : c$, di $c : d$ (N.° 160); ma la proporzione o rapporto di $a : b$ si è supposto eguale a quello di $e : f$, quello di $b : c$ eguale a quello di $f : g$, e in fine quello di $c : d$ eguale a quello di $g : h$; dunque il rapporto o proporzione di $a : d$ sarà composta ancora dei rapporti $e : f$, di $f : g$, di $g : h$,

dei quali è pure composta la proporzione di $e : h$. Perciò le proporzioni di $a : d$, e di $e : h$, che risultano da elementi eguali, saranno tra loro eguali, e quindi si avrà $a : d :: e : h$.

Delle altre maniere di argomentare intorno alle proporzioni diremo allorchè parleremo della proporzionalità delle linee al Cap. IV.

Poste queste poche nozioni intorno alle proporzioni, passo ora all' applicazione di esse alle figure piane.

Assiomi relativi alle proporzioni geometriche.

175. 1.° Le quantità che sono eguali tra loro, hanno lo stesso rapporto ad una terza qualunque, e sarà sempre lecito di sostituir l' una in vece dell' altra. Così se A eguaglia B, potrò sostituire la quantità A alla quantità B, e viceversa; e paragonandole ad una terza sarà $A : C :: B : C$. Ciò è per sè evidentissimo.

176. 2.° Le quantità che hanno lo stesso rapporto ad una terza sono tra loro eguali. Quelle che vi avranno maggior rapporto saran maggiori, e inversamente.

177. 3.° Due ragioni eguali hanno lo stesso rapporto ad una terza qualunque, e quindi potrà sostituirsi l'una all'altra.

178. 4.° Due ragioni che abbiano un eguale rapporto ad una terza, sono tra loro eguali.

179. 5.° Due quantità hanno tra loro lo stesso rapporto che le loro metà, i loro terzi, i loro quarti ecc., come pure i loro doppi, i loro tripli ecc.; ed in generale i loro multipli, o i loro submultipli.

180. 6.° Perciò se i termini di una ragione si moltiplichino o si dividano per una stessa quantità, la ragione non cangia valore.

181. Le ragioni composte di altre ragioni uguali, sono eguali fra loro. Così avendosi $a : b :: c : d$, $e : f :: g : h$ la ragione composta delle due ragioni $a : b$, $e : f$, sarà uguale alla composta delle ragioni $c : d$, $g : h$.

CAPO II.

Della maniera di esprimere le quantità per mezzo dei numeri e delle linee.

182. Una quantità qualunque non può giustamente valutarsi se essa non venga paragonata ad un' altra quantità

dello stesso genere nota e determinata, che dicesi *misura*, e s'intende sempre espressa dall' unità. Egli fu perciò che si convenne di paragonare p. e. i pesi al *grano*, all'*oncia*, alla *libbra*; le linee o lunghezze al *palmo*, al *piede*, al *metro* ecc. misure a tutti cognite, e di determinare il valore di tali quantità dal numero delle volte che ciascuna di esse contiene rispettivamente la sua unità di misura, vale a dire dal rapporto che la quantità da valutarsi ha con quella che si prende per unità di misura.

183. Quindi il peso p. e. di cinque libbre si esprime col numero 5, il quale ha all' unità la stessa ragione, che ha il peso medesimo cinque libbre col peso di 1 libbra, la quale si prende per unità di misura. Parimenti una linea della lunghezza di quattro quinte parti di un piede, si esprime colla frazione $\frac{4}{5}$, la quale ha all' unità lo stesso rapporto, che ha quella linea al piede, il quale si adopera come unità di misura. Così pure uno spazio di tempo che contenga otto ore e più tre quarti di ora, verrà espresso dal numero intero 8 e dal fratto $\frac{3}{4}$, perchè questi due numeri uniti insieme hanno all' unità la stessa ragione che ha quello stesso spazio di tempo all' ora, a cui esso vien rapportato. Ciò che abbiam detto della misura dei pesi e delle linee, dicasi egualmente delle superficie e dei solidi, come meglio si vedrà a suo luogo.

184. Qui però tornerà bene avvertire, esservi molte quantità che in niun modo possono esprimersi per mezzo di quei numeri che sono in uso presso gli aritmetici, il che forse potrà sembrare strano a taluni. Ma fa d'uopo sapere, che oltre i numeri volgari da tutti usati, e che chiamansi *razionali*, i matematici ne considerano altri che diconsi *irrazionali* o *sordi*, e che essi dimostrano non potere essere determinati da qualsivoglia numero finito di cifre aritmetiche. Tale, secondo essi, è quel numero, che moltiplicato per se stesso, dà 2 di prodotto. I numeri sordi s' indicano dai matematici con apposite cifre.

185. *Corollario.* Quindi se una quantità avrà con quella che si prende per unità di misura lo stesso rapporto che ha un qualche numero sordo all' unità, essa non potrà mai essere

espressa da verun numero razionale, ma da un numero sordo solamente. Tale è appunto la diagonale del quadrato confrontata con un lato di esso, come vedremo nel capitolo seguente, dopo che avremo dimostrata la proporzione dei quadrati tra loro.

186. Le quantità che possono esprimersi con numeri razionali, chiamansi *commensurabili* relativamente a quella che loro serve di misura. Diconsi poi *incommensurabili* quelle che possono esprimersi solamente con numeri sordi.

187. Se più quantità dello stesso genere vengano paragonate ad una misura medesima, e conosciuto il valore di ciascuna di esse, questo si esprima coi numeri rispettivi, sieno essi razionali o irrazionali, egli è manifesto che sussisterà tra i medesimi lo stesso rapporto che esiste tra le quantità da essi numeri rappresentate. E poichè un tale rapporto con maggiore facilità si scopre trattandosi di numeri, usano perciò i matematici più comunemente di tradurre in numeri ogni altra specie di quantità.

188. Sogliono anche sovente i matematici trasmutare le quantità da calcolarsi in linee, sia perchè più sensibile ne riesce la cognizione del loro rapporto, sia perchè esso più facilmente si determina colla Geometria. Egli è poi chiaro che le linee che si sostituiscono alle quantità devono avere alla linea che si prende per loro unità di misura il rapporto medesimo, che avevano le quantità stesse alla loro propria. Così p. e. se da una parte i tre pesi A, B, C vengano paragonati alla libbra, e dall'altra le tre linee PQ, MN, RS (Fig.ª 113) sieno paragonate alla linea FG, e si trovi che il rapporto dei tre pesi alla libbra è uguale a quello delle tre linee colla linea FG che serve loro di misura: le tre linee PQ, MN, RS potranno sostituirsi ai tre pesi A, B, C.

189. *Corollario.* Da ciò ne segue che si potrà istituire una proporzione con due ragioni esistenti tra quantità di diverso genere, purchè le due ragioni sieno eguali fra loro; il che sempre si verifica, quando le quantità paragonate abbiano un eguale rapporto alla loro rispettiva unità di misura. Quindi non ripugnerà p. e. che il peso A stia al peso B come la la linea C alla linea D.

CAPO III.

Della proporzione dei triangoli e dei parallelogrammi.

190. Teorema 1.° *I triangoli e i parallelogrammi aventi uguale altezza, stanno tra loro nella ragione delle basi.*

Dimostrazione. Sieno i due triangoli ABC, EDF (Fig.ª 114) che abbiano o comune o eguale altezza, e sieno le loro basi AC, EF; dico che il triangolo ABC sta al triangolo EDF come la base AC sta alla base EF.

Supponiamo da prima che le due basi sieno commensurabili, cioè abbiano una misura comune, la quale presa per unità divida l'una e l'altra esattamente e sieno 4 le parti della prima, 2 quelle della seconda. È manifesto che tirando da ciascuna divisione delle basi all'angolo verticale tante linee rette, ciascuno de' due triangoli verrà diviso in altrettanti triangoli quante sono le divisioni della rispettiva base, la quale perciò potrà rappresentarsi col numero corrispondente $4:2=AC:EF$. È manifesto inoltre che tutti i piccoli triangoli formati dalle linee tirate sono equivalenti tra loro, perchè hanno base ed altezza eguale. Ora il triangolo ABC contiene quattro di questi triangoletti, mentre EDF ne contiene due; dunque $ABC:EDF::4:2$. Ma due ragioni eguali ad una terza, sono uguali tra loro, cioè

$$ABC:EDF::4:2$$
$$AC:EF::4:2,$$

dunque $ABC:EDF::AC:EF$, cioè i due triangoli stanno tra loro nella ragione delle basi.

191. La ragione dei parallelogrammi sarà la stessa di quella de' triangoli, perchè quelli sono doppi di questi, e la ragione dei tutti eguaglia quella delle metà (Ass.ª 5.°). Inoltre è facile a comprendersi che il ragionamento fatto intorno alle basi de' triangoli si può applicare egualmente alle basi de' parallelogrammi, e che come si supposero divise l'una in 4, l'altra in 2 parti eguali, così possono intendersi spartite in qualunque numero di parti, e la proporzione sussisterà egualmente.

192. Se poi le basi AC, CF dei triangoli (Fig.ª 115) fossero incommensurabili, cioè non esistesse in natura una tal porzione di linea che esattamente le dividesse ambedue, i triangoli saranno ciò non ostante in ragione delle loro basi.

Imperciocchè si supponga che il triangolo ABC stia al triangolo CBF non già come $AC:CF$, ma come qualunque altra linea CD (maggiore di AC) sta a CF, cosicchè sia $ABC:CBF::CD:CF$. Si divida CF in 2, 3, 4 ecc. parti eguali in modo, che una di esse EF sia minore di AD. Si prenda CQ multipla di EF tanto, quanto basta per essere appena maggiore di CA. Il punto Q, com'è chiaro, cadrà fra D ed A, perchè AQ sarà minore di EF, ed EF è minore di AD; si tiri QB.

Ciò posto il triangolo QBC starà al triangolo CBF come la base QC sta alla base CF (N.° 190); ma la ragione del triangolo $ABC:CBF$ è per supposizione uguale a quella di $CD:CF$, e questa ragione è maggiore di quella di $QC:CF$, perchè CQ è una parte di CD; dunque anche la ragione di $ABC:CBF$ sarà maggiore della ragione di $QC:CF$. Ma $QC:CF$ eguaglia la ragione di $QBC:CBF$; dunque la ragione di $ABC:CBF$ sarà maggiore della ragione $QBC:CBF$; dunque il triangolo ABC sarà anch'esso maggiore del triangolo QBC (Ass.° 2.°), il che è assurdo non potendo una parte superare il tutto. È dunque del pari impossibile che i due triangoli ABC, CBF aventi la stessa altezza non stiano tra loro come le basi AC, CF, sebbene queste sieno incommensurabili.

Collo stesso ragionamento si potrebbe provare che il triangolo ABC non può stare al triangolo CBF in una ragione minore di $AC:CF$. Quindi sarà indispensabile che $ABC:CBF::AC:CF$. Ciò che doveva dimostrarsi.

193. Teorema 2.° ***I triangoli e i parallelogrammi aventi le basi eguali stanno tra loro in ragione delle altezze.***

Dimostrazione. Sieno i due triangoli ABC, DEF (Fig.° 116) nei quali la base AC del primo eguagli la base DF del secondo, dico che essi stanno tra loro come l'altezza BQ dell'uno sta all'altezza EM dell'altro. Si conduca CR perpendicolare ad AC, e si faccia eguale a QB. Sulla perpendicolare CR si prenda CN eguale ad EM, cioè eguale all'altezza del secondo triangolo DEF, e si tirino le rette AR, AN. Poichè il triangolo $ABC = ARC$, e il triangolo $ANC = DEF$ avendo base ed altezza uguali (N.° 190), la ragione di $ABC:DEF$ sarà eguale a quella di $ARC:ANC$; ma $ARC:ANC::RC:NC$, cioè avendo comune l'altezza CA, stanno tra loro come la base RC sta alla base NC, ovvero come

$QB:EM$, essendo per costruzione $CR = QB$, e $CN = EM$. Perciò il triangolo $ABC:DEF::BQ:EM$, cioè in ragione delle loro altezze. Ciò che ecc.

194. *Corollario.* Lo stesso rapporto sussisterà tra i parallelogrammi aventi basi eguali, essendo essi doppi dei triangoli (Ass.° 3.°).

195. Teorema 3.° ***I triangoli e i parallelogrammi che hanno disuguali tanto le basi che le altezze stanno tra loro nella ragion composta delle basi e delle altezze.***

Dimostrazione. Sieno i due triangoli ABC, CED (Fig.° 117) (che supporremo rettangoli in C e D per maggior facilità della dimostrazione) aventi le basi AC, CD disuguali, come pure disuguali le altezze BC, ED. Si congiunga il punto D con B mediante la retta DB. I due triangoli ABC, CBD avendo la medesima altezza BC stanno tra loro come la base $AC:CD$ (N.° 190). Parimenti i due triangoli CBD, CED avendo la medesima base CD, stanno tra loro come l'altezza $BC:ED$ (N.° 193). Quindi essendo la ragione di

$$ABC:CBD = AC:CD;$$

e quella di

$$CBD:CED = BC:ED,$$

sarà (N.° 160) $ABC:CED::AC:CD::BC:ED$, vale a dire i due triangoli stanno tra loro nella composta di $AC:CD$ e di $BC:ED$, ossia delle basi e delle altezze. Ciò che ecc.

La stessa dimostrazione vale pei parallelogrammi, essendo questi doppi dei triangoli.

196. Da ciò ne segue; 1.° che se tanto le basi che le altezze dei parallelogrammi, rettangoli, triangoli ecc. di cui si vuol conoscere il rapporto, si tradurranno nei numeri equivalenti, e poscia si moltiplicheranno insieme; i prodotti risultanti avranno tra loro il medesimo rapporto dei parallelogrammi, rettangoli ecc. da essi prodotti rappresentati; 2.° che il prodotto di due quantità qualunque, p. e. $A \times B$, può chiamarsi un *rettangolo*; imperocchè esso esprime un rettangolo i lati adiacenti del quale sono linee proporzionali ai *fattori* del prodotto, cioè aventi all'unità lineare lo stesso rapporto, che hanno i fattori del prodotto alla loro comune unità di misura.

197. Da ciò ne segue altresì, che se si abbiano quattro linee A, B, C, D proporzionali tra loro, cioè sia $A:B::C:D$, e si compongano in rettangolo le due estreme, e così pure

le due medie; i due rettangoli risultanti saranno tra loro equivalenti, giacchè nella proporzione $A:B::C:D$, il prodotto degli estremi $A \cdot D$ è uguale al prodotto de' medii $B \cdot C$ (N.° 169).

198. Nella proporzione poi $A:B::C:D$, il prodotto o rettangolo $B \cdot C$ non muta valore scrivendo $C \cdot B$ in vece di $B \cdot C$; onde sarà ugualmente $A \cdot D = B \cdot C$, e perciò $A:C::B:D$; cioè si possono *alternare* i termini, ossia confrontare insieme gli antecedenti, e così pure i conseguenti senza che si turbi la proporzionalità delle linee.

199. Essendo $B \cdot C = A \cdot D$ come si è dimostrato, sarà ancora $B:A::D:C$, giacchè questa proporzione dà gli stessi prodotti di prima $B \cdot C = A \cdot D$. Quindi le linee rimarranno tuttavia proporzionali *invertendo* i termini, cioè mettendo gli antecedenti in luogo dei conseguenti, e viceversa.

200. Teorema 3.° *I quadrati* QR, CD (Fig.ª 148) *stanno tra loro nella duplicata dei loro lati* QB, ED.

Dimostrazione. I quadrati sono del genere dei rettangoli, e perciò il quadrato QR starà al quadrato CD nella composta delle basi QB, ED, e delle altezze QA, EC (N.° 195). Ma nei quadrati le basi e le altezze sono eguali, e perciò la composta di esse sarà duplicata o delle basi, o delle altezze solamente. Dunque la ragioné dei quadrati QR, CD sarà duplicata o di $QB:ED$, ovvero di $QA:EC$, o di due altri lati qualunque. Che è quanto ecc.

201. Quindi se si esprimeranno coi numeri corrispondenti i lati QB, ED, e si moltiplichi QB per QA, ossia per se stesso, il che torna lo stesso; e parimenti si moltiplichi ED per CE o per se stesso: i due prodotti $QB \cdot QB = QB^2$, ed $ED \cdot ED = ED^2$, rappresenteranno i due quadrati QR, CD. E da qui venne che i matematici chiamassero *quadrato* il prodotto nato da una quantità qualunque moltiplicata per se stessa, esprimendo un tal prodotto il quadrato di una linea proporzionale alla quantità moltiplicata. E siccome la ragione duplicata dei lati QB, ED è la stessa ragione dei quadrati QR, CD; così convennero ancora di chiamare la ragion duplicata *ragione dei quadrati*. Onde tanto è dire la ragion duplicata di $a:b$, quanto dire la ragione de' quadrati delle quantità a e b.

202. Teorema 4.° *La diagonale di un quadrato è una linea incommensurabile col lato di esso* (Fig.ª 148).

Dimostrazione. Nel quadrato $QARB$ sia AB la diagonale. Nel triangolo QAB si avrà $AB^2 = AQ^2 + QB^2$ (N.° 95). Si faccia $AQ = QB = a$, onde si abbia $AQ^2 = QB^2 = a \cdot a = a^2$. Ciò posto sarà $AQ^2 + QB^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$; quindi $AB^2 = 2a^2$; perciò il quadrato della diagonale AB verrà espresso dal numero $2a^2$, e la diagonale verrà espressa da quel numero che moltiplicato per se stesso darà $2a^2$; che è quanto dire $AB = a\sqrt{2}$. Ma non vi è numero nè intero nè fratto che moltiplicato per se stesso dia 2 di prodotto. Dunque non si potrà assegnare in numero intero o fratto il rapporto che passa tra la diagonale AB e il lato AQ; e perciò queste due linee sono incommensurabili.

203. Teorema 5.° *I parallelogrammi* ABCD, PQRS, (Fig.ª 149), *e i triangoli* ABD, PQS *aventi le basi* AD, PS *reciprocamente proporzionali alle altezze* BG, QN *cosicchè sia* AD : PS :: QN : BG, *sono tra loro equivalenti.*

Dimostrazione. Tanto i parallelogrammi $ABCD$, $PQRS$ quanto i triangoli ABD, PQS avendo base e altezza disuguali, stanno tra loro nella ragion composta della base AD alla base PS, e dell'altezza BG all'altezza QN (N.° 195); vale a dire avranno tra loro lo stesso rapporto che avranno i due prodotti $AD.BG$ e $PS.QN$ (N.° 196); ma questi due prodotti sono eguali perchè $AD.BG$ è il prodotto degli estremi, e $PS.QN$ il prodotto dei medii nella proporzione $AD:PS::QN:BG$, la quale forma la total base del teorema. Dunque saranno equivalenti altresì i parallelogrammi, o i triangoli espressi dai medesimi prodotti. Ciò che ecc.

204. Teorema 6.° *Viceversa i parallelogrammi, ed i triangoli equivalenti hanno le basi reciprocamente proporzionali alle loro altezze* (Fig.ª 149).

Dimostrazione. Essendo la ragione tanto dei parallelogrammi $ABCD$, $PQRS$, quanto dei triangoli ABD, PQS eguale alla ragione dei prodotti $AD \cdot BG$, $PS \cdot QN$, questi prodotti saranno necessariamente tra loro eguali. Quindi dovrà altresì necessariamente sussistere la proporzione $AD:PS::QN:BG$, i termini medii ed estremi della quale moltiplicati insieme rispettivamente, danno i detti prodotti, vale a dire la ragione delle basi è reciproca a quella delle altezze. Dunque ecc.

CAPO IV.

Della divisione proporzionale dei lati nel triangolo, e delle linee proporzionali.

205. Teorema 1.° *La linea retta* BD (Fig.ª 120) *condotta dentro al triangolo* ACF, *se sarà parallela al lato* AF, *essa taglierà gli altri due lati* CA, CF *in parti tra loro proporzionali, e proporzionali altresì ai lati stessi, cosicchè sarà* AB : BC :: FD : DC; AC : CF :: BC : CD; *ed* AC : CF :: AB : FD.

Dimostrazione. Si conducano le rette *BF*, *DA*. I triangoli *ADB*, *BDC* avendo la stessa altezza, stanno tra loro come la base *AB* : *BC* (N.° 193). Per la stessa ragione i triangoli *FBD*, *DBC* stanno tra loro come *FD* : *DC*. Ma i due triangoli *ADB*, *FBD*, avendo la medesima base *BD*, come pure la medesima altezza, perchè posti fra le stesse parallele *BD*, *AF*, sono tra loro equivalenti, e quindi ciascuno di essi avrà al triangolo *BCD* lo stesso rapporto (N.° 175). Dunque anche la base *AB* starà alla base *BC* come la base *FD* sta alla base *DC*, cioè sarà *AB* : BC :: *FD* : *DC*, che è quanto dire: le parti dei lati *AC*, *CF* tagliate dalla parallela B*D*, sono proporzionali tra loro.

Ora se a ciascuno dei due triangoli equivalenti *AD*B, *F*B*D* si aggiunga il triangolo BC*D*, ne risulteranno parimenti due triangoli equivalenti *ADC*, *F*BC, i quali avranno allo stesso BC*D* un eguale rapporto. Ma i due triangoli *ADC*, B*DC* avendo la stessa altezza stanno tra loro come la base *AC* : BC; e per la stessa ragione i due triangoli *F*BC, *D*BC stanno tra loro come la base *FC* : *DC*. Dunque nei due primi anche la base *AC* starà alla base BC, come nei due secondi la base *FC* sta alla base *DC*; onde sarà *AC* : BC :: *FC* : *DC*, e alternando *AC* : *FC* :: BC : *DC*. E poichè si è dimostrato che *A*B : BC :: *FD* : *DC*, alternando sarà *AB* : *FD* :: BC : *DC*. Parimenti avendosi come vedemmo *AC* : *FC* :: BC : *DC*, sarà ancora *AC* : *FC* :: *AB* : *FD*, cioè i lati interi proporzionali alle parti tagliate ne' due lati del triangolo dalla parallela B*D*, come dovea dimostrarsi.

206. Teorema 2.° *La linea* CQ (Fig.ª 121) *condotta entro al triangolo* ABD, *se taglierà i lati* AB, BD *in parti o proporzionali tra loro, o proporzionali ai lati stessi, essa sarà parallela al terzo lato* AD *del triangolo.*

Dimostrazione. Non sia parallela C*Q*, ma bensì la *QR*. Ciò posto ne segue che *AR* : *RB* :: *DQ* : *QB* (N.° 205). Ma per dato del teorema anche *AC* : *CB* :: *DQ* : *QB*; dunque si avrebbe ancora *AR* : *RB* :: *AC* : *CB*; ed alternando *AR* : *AC* :: *RB* : *CB*, il che ripugna come è chiaro, non potendo essere tra loro eguali due ragioni in una delle quali l'antecedente è maggiore del conseguente, e nell'altra è minore. Quindi ripugnerà egualmente che la linea C*Q* tagli i lati *AB*, B*D* in parti proporzionali tra loro, e non sia parallela al terzo lato *AD*.

Nella stessa maniera si dimostra non potere la linea C*Q* non essere parallela ad *AD*, se le parti da essa tagliate sono proporzionali ai lati stessi, cosicchè si abbia *AB* : B*D* :: CB : *Q*B, oppure *A*B : BC :: B*D* : B*Q*.

207. Dalle due verità antecedentemente dimostrate ne siegue una facile applicazione di altre diverse maniere di argomentare intorno alle linee proporzionali, senza alterazione delle loro proprietà.

Sieno p. e. quattro linee *A*B, BC, *AD*, *DE* (Fig.ª 122) tra loro proporzionali, cosicchè sia *A*B : BC :: *AD* : *DE*. Dico che sarà altresì

1.° *Componendo* { AB + BC : AB :: AD + DE : AD, ovvero
AB + BC : BC :: AD + DE : DE.

2.° *Dividendo* { AB — BC : AB :: AD — DE : AD, ovvero
AB — BC : BC :: AD — DE : DE.

3.° *Convertendo* { AB : AB + BC :: AD : AD + DE, ovvero
AB : AB — BC :: AD : AD — DE.

4.° *Componendo e Dividendo* { AB + BC : AB — BC :: AD + DE : AD — DE.

Dimostrazione. Da un punto qualunque *A* si conducano due rette *AG*, *AR* formanti un angolo qualunque *GAR*. Sopra i lati *AG* ed *AR* si prendano altrettante porzioni eguali alle date rette, cioè *A*B = *A*B; BC = BC; *AD* = *AD*; *DE* = *DE*; B*c* = BC; *De* = *DE*. Ciò fatto si conducano le rette *ce*, B*D*, C*E*.

Essendo per supposizione $AB:BC::AD:DE$, la retta BD sarà necessariamente parallela a CE (N.° 206). Per la stessa ragione essendo $BC = Bc$, e $De = DE$, sarà ce parallela a DB. Quindi si avrà

1.° $\begin{cases} AC \text{ ovvero } AB + BC : AB :: AE \text{ ovvero } AD + DE : AD; \\ AC \text{ ovvero } AB + BC : BC :: AE \text{ ovvero } AD + DE : DE. \end{cases}$

2.° $\begin{cases} Ac = AB - BC = Bc : AB :: Ae = AD - DE = De : AD; \\ Ac \text{ ovvero } AB - BC : BC :: Ae \text{ ovvero } AD - DE : DE. \end{cases}$

3.° $\begin{cases} AB : AC \text{ ovvero } AB + BC :: AD : AE \text{ ovvero } AD + DE; \\ AB : Ac \text{ ovvero } AB - BC :: AD : Ae \text{ ovvero } AD - DE. \end{cases}$

4.° $\begin{cases} AC \text{ ovvero } AB + BC : Ac \text{ ovvero } AB - BC :: AE \text{ ov-} \\ \text{vero } AD + DE : Ae \text{ ovvero } AD - DE. \end{cases}$ Che è quanto ecc.

CAPO V.

Delle figure rettilinee simili.

208. Due figure rettilinee diconsi *simili* se abbiano uno stesso numero di angoli, ed eguale ciascuno nell'una al suo corrispondente nell'altra, e i lati intorno agli angoli eguali proporzionali tra loro. Tali saranno p. e. le due figure $PQRST$, $MNOFG$ (Fig.ª 125), ognuna delle quali ha cinque angoli, se l'angolo P sia eguale all'angolo M; Q ad N; R ad O ecc.; e di più il lato $PQ : QR :: MN : NO$; e così $QR : RS :: NO : OF$ ecc. Per ciò che risguarda i triangoli, si avverta che a dedurne la loro somiglianza basterà il conoscere una sola delle accennate condizioni perchè se ne possa arguire anche l'altra, cioè a dire: se avranno gli angoli corrispondenti uguali, avranno anche i lati intorno ad essi proporzionali, e viceversa. Quindi

209. Teorema 1.° *I triangoli equiangoli hanno i lati intorno agli angoli eguali proporzionali tra loro.*

Dimostrazione. Sieno equiangoli tra loro i due triangoli PQR, MNO (Fig.ª 126), nei quali si supponga che

l'angolo P sia uguale ad M, $Q = N$, $R = O$. Dall'angolo P del triangolo PQR sopra il lato PQ opposto all'angolo R si prenda la porzione PC eguale al lato MN, che nell'altro triangolo MNO, si oppone al suo corrispondente angolo O. Parimenti sopra l'altro lato PR dallo stesso angolo P si prenda la porzione PD eguale al lato MO del triangolo MNO, e si congiungano i due punti CD colla retta CD.

Essendo l'angolo P eguale all'angolo M per supposizione, e i due lati PC, PD eguali a MN, ed MO, sarà il triangolo $PCD = MNO$ (N.° 49), e l'angolo PCD eguale al suo corrispondente N, il quale essendo per supposizione eguale all'angolo PQR, ne segue che i due angoli PCD e PQR saranno eguali tra loro. E poichè l'angolo PCD è esterno e PQR interno, sarà la linea CD parallela al lato QR opposto ad essa (N.° 42). Perciò si avrà $PQ : PR :: PC : PD$. Ma siccome $PC = MN$, e $PD = MO$, sarà ancora $PQ : PR :: MN : MO$, cioè i lati intorno agli angoli eguali P ed M sono tra loro proporzionali.

La stessa costruzione e la stessa dimostrazione si faccia intorno agli angoli Q ed R, e se ne ricaverà, come è chiaro $PQ : QR :: MN : NO$; e così pure $QR : RP :: NO : OM$. Ciò chè ecc.

210. Teorema 2.° *Viceversa se i tre lati del triangolo* PQR *sieno proporzionali ai tre lati del triangolo* MNO (Fig.ª 126), *cosicchè sia* $PQ : PR :: MN : MO$; $PR : RQ :: MO : ON$; *e* $RQ : QP :: ON : NM$; *i due triangoli saranno equiangoli in modo che saranno eguali gli angoli opposti ai lati omologhi.*

Dimostrazione. Facciasi la costruzione medesima del teorema antecedente. Poichè supponiamo che $PQ : PR :: MN : MO$, sarà ancora $PQ : PR :: PC : PD$, essendo per costruzione $MN = PC$, $MO = PD$. Perciò la linea CD sarà parallela a QR, e quindi l'angolo $PCD = PQR$, come pure $PDC = PRQ$ (N.° 42); onde i due triangoli PCD, PQR saranno tra loro equiangoli. Dunque pel teorema antecedente si potrà conchiudere che $PR : RQ :: PD : DC$. Ma avevamo per supposizione $PR : RQ :: MO : ON$; dunque sarà ancora $PD : DC :: MO : ON$. E siccome i due antecedenti PD, MO sono per costruzione uguali, saranno altresì uguali i due conseguenti DC, ON; e perciò i tre lati del triangolo PCD eguagliando i tre altri del triangolo MNO, ne segue che sarà altresì ciascun angolo dell'uno eguale al suo corrispondente dell'altro, cioè $P = M$, $PCD = N$, e $PDC = O$. Ma il triangolo PCD, come si è provato, è equiangolo con PQR; dunque anche il triangolo MNO sarà equiangolo collo stesso PQR, ed avranno ambidue eguali gli angoli opposti ai lati omologhi. Ciò che ecc.

211. Teorema 3.° *Se due triangoli* PQR, MNO (Fig.ª 126) *avranno due lati* PQ, PR *dell'uno proporzionali ai due* MN, MO *dell'altro, e l'angolo* P *compreso dai primi eguale all'angolo* M *compreso dai secondi, essi triangoli sono equiangoli tra loro.*

Dimostrazione. Fatta la costruzione del teorema 1.° (N.° 209), sarà il triangolo $PCD = MNO$, e perciò i due angoli PCD, PDC eguali ai loro corrispondenti N ed O. Ma supponendosi inoltre che $PQ : PR :: MN : MO$, ovvero $PQ : PR :: PC : PD$, sarà la linea CD parallela a QR, e perciò gli angoli PCD, PDC, ossia N ed O, saranno eguali agli angoli PQR, PRQ; onde i due triangoli PQR, MNO sono equiangoli. Che è quanto ecc.

212. Teorema 4.° *Due triangoli simili* MNO, PQR (Fig.ª 127) *stanno tra loro nella ragion duplicata di un lato qualunque* MO *del primo al suo omologo* PR *del secondo.*

Dimostrazione. Essendo i due triangoli simili saranno ancora equiangoli, onde l'angolo M eguagliando P, $N = Q$, ed $O = R$, si avrà $MO : MN :: PR : PQ$ (N.° 209). Si prendano per base dei triangoli i due lati omologhi MO, PR, e dagli angoli verticali N e Q si abbassino sulle basi le perpendicolari NF, QG, che saranno le altezze dei triangoli. I due triangoli risultanti MNF, PQG avendo l'angolo $M = P$ per dato del teorema; l'angolo $MFN = PGQ$ perchè ambidue retti, avranno anche il terzo $MNF = PQG$, e perciò saranno equiangoli, ed avranno intorno agli angoli uguali i lati proporzionali tra loro. Sarà dunque $MN : NF :: PQ : QG$. Ma avevamo prima $MO : MN :: PR : PQ$; dunque sarà ancora per eguaglianza ordinata $MO : NF :: PR : QG$; e alternando $MO : PR :: NF : QG$, vale a dire nei triangoli simili MNO, PQR la ragione delle basi MO, PR eguaglia la ragione delle altezze NF, QG. Ma i triangoli stanno tra loro nella composta delle basi e delle altezze (N.° 195); dunque i triangoli simili staranno tra loro nella duplicata o delle basi, o delle altezze, cioè nella duplicata di due lati omologhi qualunque. Ciò che ecc.

213. Teorema 5.° *Le figure rettilinee simili stanno tra loro nella ragion duplicata di due lati omologhi qualunque.*

Dimostrazione. Sieno le due figure simili $ABCDE$, $MNOPQ$ (Fig.ª 128), nelle quali si supponga l'angolo $A = M$; $B = Q$; $C = P$; $D = O$; $E = N$. Dall'angolo A della prima figura si tirino le rette AC, AD agli angoli C e D; e parimenti dall'angolo M della seconda si tirino le rette MP, MO agli angoli P ed O. Ciascuna figura, com'è chiaro, verrà divisa in un numero eguale di triangoli; e poichè l'angolo $B = Q$, e di più per la natura della figura $AB : BC :: MQ : QP$, il triangolo ABC sarà equiangolo col triangolo MQP; e perciò l'angolo BCA eguaglierà l'angolo QPM. Quindi $CA : BC :: PM : QP$. Ma per la natura delle figure simili $BC : CD :: QP : PO$; dunque sarà ancora $CA : CD :: PM : PO$. Siccome poi si suppongono eguali gli angoli BCD, QPO, se da questi si tolgano rispettivamente BCA, QPM, i rimanenti ACD, MPO saranno eguali; onde anche i triangoli ACD, MPO saranno equiangoli tra loro. Collo stesso ragionamento si potrà provare che ciascun triangolo componente il rettilineo $ABCDE$ è equiangolo e perciò simile a ciascuno de' suoi corrispondenti nel rettilineo $MQPON$. Ciò posto potremo argomentare così: il triangolo BAC sta al suo simile QPM nella duplicata del lato AC al suo omologo MP (N.° 211); parimenti il triangolo CAD sta al suo simile POM nella duplicata dello stesso lato AC al suo omologo MP; dunque il triangolo $ABC : QMP :: CAD : POM$; e alternando si avrà $BAC : CAD :: QMP : PMO$; e componendo si avrà: $BAC + CAD$, ovvero la figura $BADC$ sta al triangolo $CAD :: QMP + PMO$, ovvero la figura $QMOP$ sta al triangolo PMO. Quindi alternando la figura $BADC : QMOP :: CAD : PMO$. Ma il triangolo CAD sta al triangolo PMO nella duplicata del lato AD al suo omologo MO; e nella medesima duplicata di $AD : MO$ sta pur anche il triangolo DAE col triangolo OMN. Onde il triangolo $DAE : OMN :: CAD : PMO$; e poichè di sopra avevamo $BADC : QMOP :: CAD : PMO$, sarà altresì $DAE : OMN :: BADC : QMOP$. E alternando $DAE : BADC :: OMN : QMOP$; e componendo $DAE + BADC$, ossia $ABCDE : DAE :: OMN + QMOP$, ossia $MQPON : OMN$. E alternando di nuovo sarà $ABCDE : MQPON :: DAE : OMN$; ma $DAE : OMN$ nella duplicata del lato AE al suo omologo MN; dunque anche la figura $ABCDE$ starà alla figura $MQPON$ nella duplicata del lato AE al suo omologo MN. Ciò che si dice di $AE : MN$ vale egualmente per tutti i lati omologhi $BC : QP$ ecc. Che è quanto ecc.

Se le figure simili di cui si vuol conoscere il rapporto avessero un maggior numero di lati delle precedenti, si dovrebbe ripetere collo stesso ordine il medesimo ragionamento fin a tanto che fossero esauriti i triangoli nei quali ciascuna figura venne spartita. Ond' è che la dimostrazione antecedente si applica a tutte le figure rettilinee simili di qualunque specie.

CAPO VI.

Delle linee proporzionali nel circolo.

214. La perpendicolare RQ (Fig.ª 129) tirata da un punto qualunque R della periferia ARB sul diametro ACB, chiamasi *ordinata* del cerchio, e le parti AQ, QB nelle quali vien diviso il diametro, diconsi *segmenti* o *ascisse* del diametro.

215. Teorema 1.° *In qualunque circolo l' ordinata è media proporzionale fra i segmenti del diametro.*

Dimostrazione. Dal punto R da cui parte l' ordinata RQ si conducano alle estremità del diametro le rette RA, RB.

Nel triangolo ARB, essendo retto l'angolo ARB perchè insistente al diametro, gli altri due A e B presi assieme formeranno la somma di un retto. Parimenti essendo retto l'angolo RQA, perchè fatto dalla perpendicolare RQ, anche i due angoli QRA, RAQ presi assieme equivalgono ad un retto. Dunque ARQ sarà eguale all' angolo B; e perciò nei triangoli AQR, RQB, oltre agli angoli in Q retti e quindi eguali, saranno altresì uguali tra loro l' angolo ARQ e l'angolo B, e per conseguente anche il terzo A eguaglierà QRB. Onde si avrà (N.° 209) $QB : QR :: QR : QA$, cioè l' ordinata RQ media proporzionale fra i segmenti del diametro. Che è quanto ecc.

216. *Corollario.* Il circolo pertanto si può definire una linea curva, nella quale l' ordinata è media proporzionale tra i segmenti del diametro. Una tale definizione spiega la natura del cerchio al pari di quella che noi abbiamo data al numero 7, nè potrà esser vera l' una senza che lo sia anche l'altra.

Infatti non può verificarsi che $QB : QR :: QR : QA$ senza che sieno equiangoli i triangoli QRB, QRA, i quali

hanno gli angoli in Q compresi da lati tra loro proporzionali. Per la qual cosa necessariamente l'angolo $BRQ = RAQ$ e $RBQ = ARQ$, onde tutto l'angolo $BRA = RAQ + RBQ$, ossia i due angoli A e B presi assieme. Quindi se da R si conduca entro l' angolo BRA la retta RC, la quale faccia l'angolo $BRC = RBC$, essa formerà necessariamente anche l'angolo $ARC = RAC$; onde la linea CR non solamente sarà eguale a CB ma eziandio a CA, essendo i due triangoli isosceli. Se adunque la curva ARB è tale che l' ordinata RQ abbassata perpendicolarmente da un punto qualunque R di essa curva sulla linea AB, sia media proporzionale fra i corrispondenti segmenti QB, QA, dovrà necessariamente il punto R essere tanto distante dal punto C, quanto lo stesso punto C è distante dalle due estremità della linea AB, ossia la metà di essa, cioè CB oppure CA. E poichè la dimostrata proprietà si verifica non solamente pel punto R, ma per qualunque altro possa prendersi sulla curva ARB, ne conseguita che tutti i punti di essa dovranno tanto distare dal punto C, medio nella linea AB, quanto è la metà di essa, e perciò ne saran tutti egualmente distanti, come appunto si disse al numero 7 di questi Elementi.

217. Teorema 2.° *Se dalla estremità* A (Fig.ª 130) *del diametro* AB *si tiri nel cerchio una corda qualunque* AR, *e dal punto* R *l' ordinata* RQ *al diametro, sarà la corda* AR *media proporzionale fra tutto il diametro* AB *e il di lui segmento* AQ.

Dimostrazione. Condotta la corda RB, l' angolo ARB sarà retto, perchè insiste ad un semicircolo, e perciò uguale all'angolo AQR fatto dalla perpendicolare RQ colla AQ. Considarando pertanto i due triangoli ARQ, ARB, si conoscerà di leggeri che essi sono tra loro simili.

Perchè l' angolo $ARB = AQR$; l' angolo in A è comune ad ambidue, onde anche il terzo $ARQ = B$. Quindi si avrà $AB : AR :: AR : AQ$, cioè la corda AR media proporzionale tra l'intero diametro AB e il di lui segmento AQ.

218. Teorema 3.° *Nel triangolo rettangolo* ARB (Fig.ª 131) *la perpendicolare* RQ *tirata dall' angolo retto sull' ipotenusa, è media proporzionale fra i segmenti* AQ, QB *dell' ipotenusa stessa; e ciascun cateto p. e.* AR *è medio proporzionale fra l' ipotenusa* AB *ed il suo segmento corrispondente* AQ *tagliato dalla perpendicolare* RQ.

Dimostrazione. L' angolo retto ARB di un qualunque triangolo è formato nel semicircolo *ARB* sopra l'ipotenusa *AB*, e gli altri due *A* e *B* presi assieme equivalgono ad un retto, cioè sono eguali allo stesso *ARB*. Ora se dall'angolo *R* si conduca sull'ipotenusa la retta *RC* in maniera che faccia l'angolo *CRB* eguale a *B*, anche l'angolo *CRA* sarà eguale all'angolo *A*; e perciò (N.° 62), essendo i due triangoli *ARC*, *CRB* isosceli, la retta *RC* eguaglierà tanto *CA* che *CB*, che è quanto dire: i tre punti *A*, *R*, *B* si trovano in una periferia il di cui centro è *C* nell'ipotenusa o diametro *AB*. Trovandosi poi il punto *R* in un semicerchio descritto sopra l'ipotenusa *AB*, si potrà appropriare alla perpendicolare *RQ* ciò che si dimostrò della ordinata del circolo (N.° 215); e così pure si potrà appropriare a ciascun cateto *AR*, *BR* ciò che abbiam dimostrato nel teorema antecedente (N.° 217) intorno alla corda condotta dall'estremità del diametro, vale a dire: $AQ : QR :: QR : QB$; e $AB : AR :: AR : AQ$; e in fine $BA : BR :: BR : BQ$. Ciò che ecc.

219. Teorema 4.° *Se in un cerchio qualunque due corde* AB, DC (Fig.ª 152) *si seghino tra loro nel punto* F, *un segmento dell'una e un segmento dell'altra saranno reciprocamente proporzionali agli altri segmenti di esse.*

Dimostrazione. Si congiungano insieme le estremità delle corde colle rette *AC*, *DB*. Nei triangoli risultanti *CFA*, *BFD* gli angoli *CAF*, *FDB* sono eguali, perchè angoli alla periferia ed insistenti allo stesso arco *CB*. Per la stessa ragione sono altresì uguali gli angoli *ACF*, *DBF* insistenti all'arco *AD*. Gli angoli poi *CFA*, *BFD* sono eguali perchè opposti al vertice. Dunque i due triangoli sono equiangoli e perciò simili tra loro; onde si avrà (N.° 209) $AF : FC :: FD : FB$. Che è quanto ecc.

220. Teorema 5.° *Se dallo stesso punto* B (Fig.ª 153) *fuori di un circolo si conduca ad esso la tangente* BA, *e una segante qualunque* BC, *che tagli la periferia estrinsecamente in* F, *intrinsecamente in* C, *sarà la tangente* BA *media proporzionale fra tutta la segante* BC *e la di lei parte* BF *che resta fuori del cerchio, cioè:*

$$BC : BA :: BA : BF; \text{ e}$$

$$BF : BA :: BA : BC.$$

Dimostrazione. Dal punto del contatto *A* si conducano ai punti *C* ed *F* le rette *AC*, *AF*. Nei triangoli *FAB*, *ACB*,

l'angolo $FAB = ACB$ perchè l'angolo fatto dalla tangente colla corda eguaglia l'angolo fatto nel segmento alterno (N.° 125); l'angolo *B* è comune ad ambidue i triangoli, e perciò anche il terzo $AFB = CAB$. Dunque i due triangoli sono simili, e quindi sarà $BF : BA :: BA : BC$. Ciò che ecc.

221. Teorema 5.° *Se dallo stesso punto* A (Fig.ª 154) *fuori di un circolo si tirino ad esso due seganti* AB, AC, *saranno le intere seganti* AB, AC *reciprocamente proporzionali alle loro parti* AD, AR, *che rimangono fuori del cerchio, cioè si avrà* AB : AC :: AR : AD.

Dimostrazione. Dal punto *A* si conduca la tangente *AQ*. Dietro quello che si è dimostrato nel teorema precedente si avrà $AD : AQ :: AQ : AB$; parimenti $AR : AQ :: AQ : AC$. Perciò sarà $AQ . AQ = AD . AB$; ed $AQ . AQ = AR . AC$; quindi ancora $AD . AB = AR . AC$; dunque $AB : AC :: AR : AD$. Ciò che ecc.

222. Teorema 6.° *Le periferie dei circoli sono sempre proporzionali ai raggi* (Fig.ª 155).

Dimostrazione. Sieno i due circoli PQR, *MNO*. Suppongansi formati ai centri C e *D* i due angoli PCR, *MDO* eguali tra loro, e suppongansi infinitamente piccoli, cosicchè anchè gli archi che li misurano, possano senza errore sensibile considerarsi come linee rette. Ciò posto è manifesto che i due archi PR ed *MO* compresi dai lati del rispettivo angolo, sono egual parte ognuno della sua circonferenza (N.° 12); onde la circonferenza PQR starà all'arco PR come la circonferenza *MNO* sta all'arco *MO*. Essendo poi l'angolo C eguale all'angolo *D*, e l'arco PR simile all'arco *MO*; ed uguali tra loro tanto i due raggi CP, CR del primo circolo, quanto gli altri due *DM*, *DO* del secondo; ne siegue che anche il settore PCR sarà simile al settore *MDO*; cosicchè il rapporto, qualunque desso sia, dall'arco PR al raggio CP, deve essere uguale al rapporto dell'arco *MO* al raggio *DM*. Quindi argomentando per eguaglianza ordinata si avrà: $PQR : CP :: MNO : DM$; e alternando $PQR : MNO :: CP : DM$; cioè le circonferenze stanno tra loro nello stesso rapporto dei loro raggi.

223. Teorema 7.° *I circoli stanno tra loro nella ragione duplicata dei loro raggi* (Fig.ª 155).

Dimostrazione. Posta la costruzione antecedente, i due settori PCR, *MDO* sono parti eguali ognuno del proprio circolo, e perciò il circolo PQR starà al settore PCR come il circolo MNO al settore MDO. Quindi alternando: il circolo PQR starà al circolo MNO come il settore PCR al settore MDO.

Si conducano ora le corde PR, MO (Fig.ª 136) Egli è evidente che i due triangoli risultanti PCR, MDO saranno simili tra loro, poichè hanno i lati CP, CR proporzionali ai due altri DM, DO, e l'angolo C compreso dai due primi eguale all'angolo D compreso dai due secondi (N.° 211). Essendo poi simili anche i settori PCR, MDO ne segue che il triangolo PCR comprenderà in sè tanta parte del settore PCR, quanta ne contiene il triangolo MDO del settore MDO; onde il settore PCR sta al triangolo PCR come il settore MDO al triangolo MDO; e alternando si avrà: il settore PCR sta al settore MDO come il triangolo PCR sta al triangolo MDO. Ma il triangolo PCR sta al triangolo MDO nella duplicata di un lato qualunque PC al suo omologo MD (N.° 212), ossia del raggio CP al raggio DM; dunque i due settori PCR, MDO stanno tra loro nella duplicata del raggio CP al raggio DM. Siccome poi la ragione dei circoli si è provata eguale a quella dei settori, ne verrà per necessaria conseguenza, che anche i due circoli PQR, MNO stanno tra loro nella ragione duplicata del raggio CP al raggio DM. Che è quanto ecc.

CAPO VII.

Dei problemi relativi alle cose dimostrate nella seconda Sezione.

224. Problema 1.° *Date tre linee* AB, AC, AD (Fig.ª 137), *trovare la quarta proporzionale ad esse.*

In molte maniere può risolversi questo problema coi due seguenti, ma ne indicheremo una sola. Colle due prime delle tre linee date, cioè con AB ed AC si formi un angolo qualunque BAC, e si congiungano le due estremità delle gambe di esso colla retta BC. Poscia dall'angolo A sopra AB, la quale si potrà allungare, occorrendo, si prenda una porzione che uguagli la terza linea data AD, e dal punto D si conduca DH parallela a BC, la quale incontrerà la linea AC, prolungata se occorra, nel punto H. Ciò fatto sarà AH la quarta proporzionale cercata.

Dimostrazione. Pel teorema 1.° (N.° 205) si avrà $AB : AC :: AD : AH$, cioè AH quarta proporzionale alle tre linee date. Ciò che ecc.

225. Problema 2.° *Date due linee* AB, AC (Fig.ª 138) *trovare la terza proporzionale.*

Soluzione. Le due date linee si dispongano ad angolo, e sia CAB, congiungendo le estremità C e B colla retta BC. Sopra la prima linea AB partendo dall'angolo A si prenda la porzione AQ eguale alla seconda AC, e da Q si tiri QR parallela a CB. Sarà AR la terza proporzionale cercata.

Dimostrazione. Dal numero 205 si ha $AB : AC :: AQ : AR$. Ma AQ eguaglia per costruzione AC; dunque si avrà altresì $AB : AC :: AC : AR$, onde AR sarà la terza proporzionale alle due linee date, come ecc.

226. Problema 3.° *Trovare la media proporzionale tra due linee date* AB, BD (Fig.ª 139).

Soluzione. Le due linee date AB, BD si dispongano in maniera che formino una sola retta AD. Ciò fatto si divida l'intera AD in due parti eguali in C, e fatto centro nello stesso punto C, col raggio CA, ovvero CD si descriva un semicerchio sopra AD. Poscia dal punto B nel quale furono congiunte le linee date, s'innalzi la BO perpendicolare ad AD, e si produca finchè incontri la periferia nel punto O. Sarà la BO media proporzionale fra le date AB, BD.

Dimostrazione. Essendo AD diametro del cerchio, e BO ordinata, sarà (N.° 215) $AB : BO :: BO : BD$. Ciò che ecc.

227. Problema 4.° *Dividere una data retta* RO (Fig.ª 140) *in maniera che le sue parti sieno proporzionali a due linee date* PQ, QN.

Soluzione. Da una delle estremità della linea data RO p. e. R, si conduca la retta RG, la quale faccia con essa RO un angolo qualunque. Dal punto R sopra RG si prenda la porzione RE eguale ad una delle linee date PQ; similmente partendo dallo stesso punto E si prenda la porzione EG eguale all'altra linea data QN. Poscia si congiunga O a G colla retta GO, e dal punto E si tiri ED parallela a GO. Ciò fatto la linea ED dividerà nel punto D la linea data in due parti RD, DO, che saranno proporzionali alle due date, cosicchè sarà $RD : DO :: PQ : QN$.

Dimostrazione. Nel triangolo ORG essendo DE parallela ad OG, si avrà (N.° 205) $RD : DO :: RE : EG$. Ma

$RE = PQ$ per costruzione, e $EG = QN$; dunque sarà altresì $RD : DO :: PQ : QN$. Ciò ecc.

228. Problema 5.° *Dividere una data retta* PQ (Fig.ª 141) *in tre parti proporzionali a tre linee date* PG, GN, NR.

Soluzione. Dalla estremità P della data PQ si conduca la PS che faccia con essa un angolo qualunque. Dal punto P sopra la PS si prendano l'una dopo l'altra tre porzioni PG, GN, NR eguali alle tre linee date. Si congiunga il punto R colla estremità Q della linea data, e dai punti N e G si tirino NE, GF parallele a QR. Ciò fatto le due rette NE, GF divideranno la data PQ nei punti F ed E secondo le condizioni del problema.

Dimostrazione. Essendo GF ed NE parallele si avrà (N.° 205) $PF : FE :: PG : GN$ Dal punto G si conduca ora GB parallela alla linea PQ; la quale GB taglierà EN e QR in O e B. Da questa costruzione ne risulterà $GO = FE$, come pure $EQ = OB$, perchè lati opposti del rispettivo parallelogrammo (N.° 72). Ma pel (N.° 205) $GO : OB :: GN : NR$; dunque sarà anche $FE : EQ :: GN : NR$. Onde si avrà per ultimo $PF : FE :: PG : GN$; $FE : EQ :: GN : NR$, cioè la retta data PQ divisa in parti proporzionali alle tre linee date. Ciò che ecc.

229. Problema 6.° *Dividere una data retta* AB (Fig.ª 142) *in un numero qualunque di parti tra loro uguali.*

Soluzione. Dall'estremità A della linea data si tiri AQ che faccia con essa un angolo qualunque. Dal punto A sopra AQ si prendano l'una dopo l'altra tante porzioni AP, PD, DE ecc. di qualsivoglia grandezza, purchè sieno uguali tra loro, quante sono le parti nelle quali si vuol dividere la linea data. Il punto C, cioè l'estremità dell'ultima porzione FC, si congiunga colla estremità B della data AB mediante la retta CB. Poscia dai punti F, G, E ecc. si tirino le rette FO, GN, ES ecc. parallele alla CB, le quali divideranno la data in altrettante parti tra loro eguali.

Dimostrazione. Primieramente è manifesto che la linea AB con tale costruzione vien divisa nello stesso numero di parti in cui è stata divisa AC; ma questa fu divisa in tante parti appunto, quante erano quelle in cui si volea divisa la linea data AB. È chiaro poi da quanto si disse fin qui, e dal (N.° 205) che le parti AT, TR, RS ecc. sono proporzionali alle parti AP, PD, DE ecc.; dunque quelle saranno

eguali anch'esse tra loro, come lo sono queste, e perciò la data AB venne divisa in un numero di parti eguali come voleva il problema.

230. Problema 7.° *Dividere la base* AB (Fig.ª 143) *del triangolo* ACB *in due parti proporzionali ai lati rispettivi* AC, BC.

Soluzione. Si divida in due parti eguali l'angolo C opposto alla base mediante la retta CD. Essa prolungata finchè arrivi alla base la dividerà nel punto D nelle due parti ricercate, cosicchè sarà $AD : DB :: AC : CB$.

Dimostrazione. Dal punto B si conduca la BO parallela alla DC; essa s'incontrerà in O col lato AC prodotto. L'angolo $O = ACD$ perchè l'uno esterno, l'altro interno tra le stesse parallele; e l'angolo $CBO = DCB$ perchè alterni fra loro. Ma gli angoli ACD, DCB sono per costruzione uguali; dunque anche gli angoli O e CBO saranno tra loro uguali, e quindi eguali pur anco i lati CB, CO. Essendo poi DC parallela a BO, nel triangolo AOB pel (N.° 205) si avrà $AD : DB :: AC : CO$; dunque sarà altresì $AD : DB :: AC : CB$, poichè $CO = CB$. Ciò che ecc.

231. Problema 8.° *Dividere una linea data* AB (Fig.ª 144) *in estrema e media ragione in maniera che l'intera* AB *stia ad una sua parte, come questa sua parte stessa sta all'altra parte.*

Soluzione. Sopra la linea data AB si costruisca un quadrato $AMPB$. Il lato AM adiacente ad AB si divida in due parti uguali in C, e si tiri la CB. Poscia fatto centro in C, col raggio CB si descriva una periferia di cerchio, la quale passerà per B, e taglierà il lato AM in O e Q, prodotto che sia dall'una e dall'altra parte; onde $CQ = CO$ e $CA = CM$; come pure $AQ = MO$ ed $AO = MQ$. Ciò premesso si prenda sulla data AB la porzione AD eguale ad AQ; sarà D il punto della divisione che si cerca.

Dimostrazione. Dal punto D si conduca la DE parallela ad AM, e che incontri il lato MP in E. Ne risultano, com'è chiaro, due rettangoli AE, DP. Parimenti dal punto Q si conduca QR parallela ad AB, e che incontri ED, prodotta che sia, in R. È manifesto che MR sarà un rettangolo, ed AR un quadrato. Ora siccome dal (N.° 179) si ha $OA : AB :: AB : AQ$, ossia da ciò che si è detto $MQ : AB :: AB : QR$; ne segue che il quadrato AP sarà eguale al rettangolo MR (N.° 203); onde tolto il comune rettangolo AE, resterà il rettangolo EB eguale al quadrato AR; e quindi pel (N.° 204) si avrà $BP : AD :: AQ : DB$; ossia $AB : AD :: AD : DB$, essendo $AB = BP$ e $AQ = AD$. Ciò che ecc.

232. Problema 9.° *Costruire un triangolo isoscele, che abbia gli angoli alla base doppi dell' angolo verticale, e sia tale che dei due lati uguali ciascuno eguagli una data retta* AB (Fig.ª 145).

Soluzione. Col mezzo del problema antecedente la linea data AB si divida in estrema e media ragione nel punto D, cosicchè sia $AB : AD :: AD : DB$. Di poi fatto centro in A, col raggio AB si descriva un cerchio, e in esso dal punto B si tiri la corda BC eguale alla parte AD, e si congiunga il punto C con A mediante la retta CA. Sarà CAB il triangolo cercato.

Dimostrazione. È chiaro che il triangolo CAB è isoscele perchè i due lati AC, AB sono raggi dello stesso circolo, e perciò eguali ciascuno alla data retta AB. Essendo poi per costruzione la retta CB eguale alla parte AD, sarà ancora $AB : BC :: BC : BD$; quindi tirata la DC, i due triangoli BAC, BCD (N.° 211) saranno equiangoli, che è quanto dire l'angolo $BCD = BAC$, onde si avrà $BC : CD :: AB : AC$ (N.° 209). Ma $AC = AB$; dunque anche $CD = BC$, e quindi eguaglierà altresì la parte AD. Dal che si deduce (N.° 61) che anche l'angolo DCA eguaglia lo stesso BAC. Tutto l'angolo adunque BCA, e così pure l'altro ABC eguale ad esso, sarà doppio dell'angolo verticale CAB. Che è quanto ecc.

233. Problema 10.° *Dividere la circonferenza di un circolo in un dato numero di parti eguali.*

Soluzione. Se il numero delle parti in cui si vuole dividere la circonferenza sia uno della seguente serie geometrica 2, 4, 8, 16, 32 ecc., la cosa è facilissima. Imperocchè condotto un diametro a piacimento nel circolo dato, è manifesto che il cerchio e quindi anche la circonferenza verrà divisa in due parti eguali. Poscia condotto un altro diametro perpendicolare al primo, la circonferenza sarà divisa in quattro parti eguali. Ciò fatto, se ciascuno de' quattro angoli retti formati dai due diametri, si divida in due parti eguali, la periferia verrà divisa in otto parti eguali. E proseguendo, se il bisogno il richiegga, a dividere ciascuna ottava, sedicesima ecc. parte in altre due eguali, la periferia verrà divisa in trentadue, in sessantaquattro ecc. parti eguali.

234. Che se il numero delle parti eguali in cui si vuole

dividere la circonferenza, sia uno della seguente serie 3, 6, 12, 24, 48 ecc., allora tirato nel cerchio il diametro AB (Fig.ª 146), e da una delle estremità di esso, p. e. B, condotta la corda BD eguale al raggio CB, sarà l'arco AD la terza, e l'arco BD la sesta parte della circonferenza. Infatti tirato il raggio DC, il triangolo DCB, com'è chiaro, sarà equilatero, e perciò i suoi tre angoli eguali tra loro (N.° 60), e quindi ciascuno di essi, p. e. DCB, sarà la terza parte di due retti. Perciò l'arco DB, che misura l'angolo DCB, sarà la terza parte di due retti (N.° 56). Onde l'arco DB che misura quell'angolo, sarà la terza parte della semiperiferia BDA, ossia la sesta parte di tutta la circonferenza. Quindi l'arco AD, che necessariamente deve equivalere a due terzi della semicirconferenza, sarà la terza parte dell'intera periferia. Ora se l'arco BD che è la sesta parte di essa circonferenza si divida in due parti eguali nel punto E, l'arco BE ne sarà la duodecima parte. Dividendo parimenti la porzione BE in due parti eguali, si avrà la vigesimaquarta parte della circonferenza; e così seguitando la divisione di ciascuna nuova parte ottenuta, verrà la periferia divisa in 48, in 96 ecc. parti tra loro eguali, a norma della serie dei numeri proposti.

235. Sia anche da dividersi la circonferenza secondo la serie dei numeri seguenti, cioè in 5, 10, 20, 40, 80 ecc. parti eguali. Primieramente fa d'uopo dividere il raggio CB (Fig.ª 147) nella estrema e media ragione nel punto D (N.° 231). Condotta poscia la corda BE che sia uguale alla parte maggiore CD, ne verrà che l'arco BE sotteso da essa corda sarà la decima parte della circonferenza; poichè, tirato il raggio CE, ne risulta il triangolo BCE isoscele ed avente alla base gli angoli E e B doppi ciascuno dell'angolo verticale C (N.° 232). Pertanto se la somma dei due retti, ossia i 180 gradi, cui equivalgono i tre angoli E, C, B presi assieme, si dividano in cinque parti eguali, è chiaro che due di queste toccheranno a ciascuno dei due angoli E e B, ed una sola all' angolo C, il quale perciò sarà la quinta parte di due retti, cioè 36 gradi. E poichè esso è misurato dall' arco B E, ne conseguita che anche l' arco medesimo sarà la quinta parte della semiperiferia equivalente a 180 gradi, e quindi la decima parte dell' intera circonferenza. Ora se dall' estremità E dell' arco BE si prenda sulla periferia la porzione EQ eguale a BE, sarà, com'è chiaro, BQ la quinta

parte della periferia. Se poi si divida l'arco BE in due parti eguali in F, sarà BF la vigesima parte della circonferenza. Nella stessa maniera seguitando a dividere, si otterranno le 40, le 80 ecc. parti eguali, come può ognuno facilmente conoscere da sè.

236. Sia finalmente da dividersi la circonferenza in tante parti uguali secondo che viene indicato dalla serie dei numeri 15, 30, 60, 120 ecc. Si trovi prima di tutto, secondo ciò che si è insegnato superiormente (N.° 234), la terza parte della periferia, e sia p. e. AB (Fig.ª 148). Poscia da essa si sottragga la quinta parte AC della circonferenza stessa. La differenza CB che passa fra queste due parti, si divida in due parti eguali nel punto D; ciò fatto, sarà tanto BD che DC la decima quinta parte della periferia. Infatti se tutta la periferia si concepisca divisa in quindici parti eguali, cinque di esse spetteranno all'arco AB, il quale per costruzione si suppose essere la terza parte della periferia, e tre spetteranno all'arco AC, che si suppose essere la quinta parte della circonferenza; onde all'arco BC, che è la differenza che passa fra AB ed AC toccheranno due parti; di modo che all'arco BD ovvero DC che è la metà di BC ne toccherà una sola. Perciò tanto BD che DC sarà la quindicesima parte dell'intera periferia. Dividendo ora uno di tali archi in due parti eguali, si avrà la trigesima, e così successivamente la 60, la 120 ecc., a norma della serie proposta.

Qualunque altra divisione della circonferenza in un numero di parti che non sia uno delle serie antecedentemente indicate, non si può ottenere colla Geometria piana, richiedendosi, oltre la cognizione della linea retta e del circolo, quella di altre curve delle quali la Geometria piana non tratta.

237. Problema 11.° *Inscrivere in un dato cerchio un poligono di data specie, che sia regolare, e che abbia tutti i suoi angoli alla periferia di esso* (Fig.ª 149).

Soluzione. Col mezzo del problema precedente si divida la periferia del circolo dato in tante parti quanti sono i lati del poligono da inscriversi, e sieno queste parti AB, BC, CD ecc. Dall'uno all'altro punto di tali divisioni si conducano poscia le corde AB, BC, CD ecc., e il poligono che ne risulta sarà il cercato.

Dimostrazione. Egli è manifesto primieramente che il poligono $ABCDE$ ecc. è di data specie perchè la circonferenza fu divisa in tante parti quanti dovevano essere i lati del poligono, il quale è inoltre inscritto al dato cerchio, avendo tutti gli angoli alla periferia di esso. Di più le corde AB, BC ecc. formanti i lati del poligono, sono tra loro uguali perchè sottendono archi uguali; gli angoli poi A, B, C ecc. sono anch'essi uguali tra loro, essendo tutti alla periferia dello stesso cerchio, ed insistendo ciascuno ad un arco $EDCB$, $AEDC$ ecc. composto di uno stesso numero di quelle parti eguali, nelle quali fu divisa la periferia. Sarà dunque un tal poligono regolare appunto perchè ha sì i lati che gli angoli tra loro eguali. Ciò che ecc.

Se il numero dei lati del poligono da inscriversi non sia compreso in nessuna delle serie che si sono considerate nel problema precedente, la formazione di esso non potrebbe ottenersi colla sola Geometria piana, come già si disse (N.° 236) della divisione della periferia in parti eguali.

238. Problema 12.° *Ad un dato circolo circoscrivere un poligono regolare di determinata specie, cioè descrivere un poligono regolare i di cui lati tocchino il circolo dato.*

Soluzione. Si divida la periferia del circolo dato (problema 10) in tante parti eguali AB, BC, CD ecc. (Fig.ª 150) quanti sono i lati del poligono da descriversi. Indi dai punti A, B, C ecc. di tali divisioni si tirino le tangenti EG, GH, HM ecc., le quali prodotte che sieno si segheranno nei punti G, H, M ecc. e formeranno il poligono $EGHMN$, che sarà il cercato.

Dimostrazione. Il poligono descritto $EGHMN$ primieramente è di specie determinata, perchè tanti sono i punti A, B, C ecc. delle divisioni della periferia quanti i lati del poligono. Inoltre esso è circoscritto al cerchio dato, perchè i suoi lati sono per costruzione altrettante tangenti del circolo stesso. Di più esso è regolare; imperocchè condotte le corde AB, BC, CD ecc. ne risulteranno tanti triangoli isosceli QEA, AGB, BHC ecc. (N.° 103). Questi triangoli poi avranno gli angoli alla base EQA, GAB, HBC ecc. eguali tra loro, poichè ciascuno di essi è uguale (N.° 125) agli angoli che possono essere formati nei segmenti alterni $QDCBA$, $AQDCB$ ecc., i quali sono parimenti uguali tra loro, perchè i loro archi sono composti dello stesso numero di parti eguali nelle quali fu divisa la circonferenza, e perciò tali archi comprenderanno angoli uguali. Inoltre le basi QA, AB, BC ecc. dei triangoli sono anch' esse tra loro uguali perchè archi uguali sono sottesi da corde eguali (N.° 110). Saranno dunque tutti quei triangoli tra loro uguali, e quindi uguali pur anco i loro terzi angoli *E*, *G*, *H*, *M*, *N*, che sono appunto gli angoli del poligono. Essendo poi uguali i loro lati *QE*, *EA*, *AG*, *GB* ecc. ne segue che ciascuno di essi è la metà di un lato del poligono, e perciò anche gl' interi lati del poligono, cioè *NE*, *EG*, *GH* ecc. saranno tra loro eguali, e quindi il poligono sarà di data specie e regolare, come si voleva.

Ciò che si è detto dei poligoni inscritti al cerchio (N.° 237) vale anche dei poligoni circoscritti, cioè a dire essi non potranno esser descritti col mezzo della Geometria piana se non quando il numero de' loro lati sia uno delle serie che noi considerammo nel problema 10.° N.° 236.

239. Problema 13.° *Inscrivere un cerchio ad un dato poligono regolare, cioè descrivere un cerchio la di cui periferia tocchi tutti i lati del poligono dato.*

Soluzione. Sia il poligono dato *ABCDE* ecc. (Fig.ª 151). Si dividano in due parti uguali due angoli prossimi qualunque di esso, p. e. *AED*, *EDC* per mezzo delle rette *EF*, *DF*, le quali prodotte s' incontreranno nel punto *F*. Si abbassi da *F* sopra *ED* la perpendicolare *FH*, e poscia facendo centro nello stesso punto *F*, col raggio *FH* si descriva un circolo che sarà appunto quello che si cerca.

Dimostrazione. Si tirino le rette *FC*, *FB*, *FA* ecc. agli angoli, come pure le perpendicolari *FO*, *FR* ecc. ai lati del poligono. Ciò fatto, nei triangoli risultanti *EDF*, *CDF* il lato *DE* eguaglia *DC*, essendo il poligono per supposizione regolare; il lato *FD* è comune, e gli angoli compresi *FDE*, *FDC* sono per costruzione eguali. Dunque i due triangoli sono eguali, ed eguali perciò saranno altresì i due angoli corrispondenti *FED*, *FCD*. Ma l' angolo *FED* essendo per costruzione la metà dell' angolo *AED*, e l' angolo *DCB* eguagliando per supposizione l' angolo *AED*, ne segue che anche l' angolo *FCD* sia la metà di *DCB*. E poichè nello stesso modo si dimostra che le altre linee *FB*, *FA*, *FC* ecc. dividono in due parti uguali i rimanenti angoli del poligono dato, ne verrà che nei triangoli *EFD*, *DFC*, *CFB* ecc. saranno uguali tra loro tutti gli angoli adiacenti ai lati *ED*, *DC*, *CB* ecc., essendo ciascuno di essi la metà degli angoli del poligono. Tali triangoli poi avendo inoltre eguali i lati stessi *ED*, *DC*, *CB* ecc., perchè sono lati di un poligono regolare, ne conseguita che essi saranno eguali tra loro. E siccome hanno uguali le basi *ED*, *DC*, *CB* ecc., necessariamente avranno anche uguali le altezze *FH*, *FO*, *FR* ecc. (N.° 89). Quindi il circolo descritto col centro *F* e col raggio *FH* non solamente passerà pel punto *H*, ma ben anche per *O* ed *R* ecc.; e poichè tutti i lati del poligono sono perpendicolari per costruzione ai raggi *FH*, *FO*, *FR* ecc., essi saranno altrettante tangenti del circolo, che è quanto dire: *il circolo è inscritto al poligono dato.* Ciò che ecc.

240. Problema 14.° *Circoscrivere un circolo ad un dato poligono regolare, cioè descrivere un circolo la di cui periferia passi per tutti gli angoli del poligono dato.*

Soluzione. Sia *ABCD* ecc. (Fig.ª 152) il poligono regolare dato. Si dividano, come nel problema antecedente, due angoli prossimi di esso *BCD*, *CDE* in due parti uguali mediante le rette *CF*, *DF*, le quali s' incontreranno nel punto *F*. Fatto centro in *F* col raggio *FC* si descriva un cerchio, e sarà desso il cercato.

Dimostrazione. Essendo il poligono dato regolare, avrà tutti gli angoli eguali tra loro, e perciò anche gli angoli *FCD*, *FDC* che sono la metà dei due angoli del poligono saranno eguali, e quindi eguali altresì i lati *FC*, *FD*. Il circolo adunque descritto col centro *F* e col raggio *FC* passa pel punto *D*. Si tirino ora le rette *FE*, *FA*, *FB* ecc. I triangoli risultanti *CFD*, *EFD*; oltre il lato comune *FD*, e i lati *CD*, *DE* che sono eguali perchè lati di un poligono regolare, hanno anche gli angoli compresi *FDC*, *FDE* eguali per costruzione; dunque i due triangoli sono eguali, e parimenti uguali i due lati corrispondenti *FC*, *FE*, e perciò il circolo passerà ancora pel punto *E*. E poichè nei triangoli *EFD*, *DFC* sono eguali gli angoli corrispondenti *FED*, *FCD*, l' angolo *FED* sarà la metà di *AED*, come pure *FCD* è la metà dell' angolo *BCD*, il quale è uguale ad *AED*, essendo angoli di un poligono regolare. Si potrà quindi dimostrare con tutta facilità che il circolo descritto deve passare altresì per gli altri angoli del poligono, vale a dire che è circoscritto ad esso, come dovea dimostrarsi.

241. Problema 15.° *Sopra una data retta* AB (Fig.ª 153) *descrivere un poligono regolare di determinata specie.*

Soluzione. Si descriva un circolo qualunque *PQO*, la periferia del quale si divida in tante parti uguali quanti saranno i lati del poligono da descriversi, e una di esse parti sia l'arco PQ. Si tiri la corda PQ, dalle cui estremità P e Q si conducano i raggi PR, QR. Ciò fatto si costruisca sopra la data AB il triangolo ACB equiangolo all'altro PRQ in modo, che gli angoli in A e B sieno eguali a quelli in P e Q. Poscia si faccia centro in C e col raggio CA si descriva un circolo, il quale dovrà passare anche pel punto B, perchè essendo uguali i due angoli RPQ, RQP, saranno altresì uguali CAB, CBA che per costruzione furono fatti eguali ad essi; e perciò anche le rette CA, CB saranno eguali, perchè lati di un triangolo isoscele. Ora nel cerchio descritto, tirando le corde BD, DE. EF ecc. eguali ciascuna alla data retta AB, si avrà il poligono cercato.

Dimostrazione. Nei triangoli PRQ, ACB l'angolo R per costruzione è uguale all'angolo C; onde l'arco AB varrà un egual numero di gradi dell'arco PQ. Quindi tanto l'arco AB quanto l'arco PQ saranno egual porzione ognuno della rispettiva periferia. Dal che ne conseguita che le corde BD, DE, EF ecc. dividono la circonferenza AEB in altrettante parti eguali, quante furono quelle nelle quali fu distribuita la periferia POQ, cioè in un numero eguale a quello dei lati del poligono da descriversi. Pertanto il detto poligono è formato sopra la linea data, è di specie determinata, e finalmente è regolare, il che potrà dimostrarsi nel modo stesso del N.° 237 Probl.° 11.°

È chiaro che questo problema sarebbe insolubile colla Geometria Piana, quando si volesse un poligono di un numero tale di lati, che non fosse compreso nelle serie del Probl.° 10.° N.° 236.

242. Problema 16.° *Sopra una data retta* AB (Fig.° 154) *costruire una figura simile ad un' altra data* MNOPQ, *e tale che la linea* AB *divenga lato omologo ad un lato dato* MN *della figura data.*

Soluzione. Da uno degli angoli adiacenti al dato lato MN, p. e. dall'angolo N, si conducano agli altri angoli le rette NQ, NP ecc., e si divida così la figura in tanti triangoli. Indi sopra la data AB si costruisca il triangolo ACB equiangolo col triangolo MQN in maniera che gli angoli A e B eguaglino M ed N. Poscia sopra CB si formi il triangolo BCD equiangolo al triangolo NQP in guisa, che gli

angoli in C e in B sieno eguali agli angoli in Q e in N. Similmente sopra BD si faccia il triangolo BDE equiangolo con OPN cosicchè gli angoli in D e in B eguaglino quelli in P ed N, e così via via. La figura $BACDE$ che risulterà da questa costruzione sarà la cercata.

Dimostrazione. L' angolo A eguaglia per costruzione l'angolo M, come pure l'angolo ABC eguaglia MNQ; quindi anche l'angolo BCD essendo per costruzione eguale ad NQP, ne segue che tutto l'angolo ACD sarà eguale a tutto l'angolo MQP. Nello stesso modo si può dimostrare che l'angolo CDE eguaglia QPO, e così dicasi degli altri. Ora dal N.° 211 si ha $AB : AC :: MN : MQ$. Dunque i lati che comprendono gli angoli eguali A ed M sono proporzionali. Ma per la stessa ragione si ha ancora $AC : CB :: MQ : QN$, e $CB : CD :: QN : QP$; quindi per eguaglianza ordinata si avrà $AC : CD :: MQ : QP$, e perciò saranno proporzionali altresì i lati che comprendono i due angoli eguali ACD, MQP. Con eguale raziocinio si dimostra essere tra loro proporzionali gli altri lati posti intorno ad angoli uguali. Dunque la figura descritta è simile alla data, è formata sopra la retta AB, e di più la stessa retta AB è lato omologo col lato MN dato, come voleva il problema.

243. Problema 17.° *Date due figure* M *ed* N (Fig.° 155) *descriverne una terza simile ad una di esse* M, *ed equivalente all' altra* N.

Soluzione. Sopra uno dei lati AB della figura M si costruisca il rettangolo AD (N.° 140) equivalente alla stessa figura M; di poi sopra il lato BD si formi il rettangolo DC equivalente all'altra figura N. Si trovi (N.° 226) la media proporzionale fra le basi AB, BC dei rettangoli descritti, e sia EF. Ora sopra EF si costruisca, come s'insegnò nel problema precedente la figura R simile ad M in modo, che il lato EF sia omologo al lato AB. Sarà R la figura cercata.

Dimostrazione. La figura M sta alla figura R nella ragione duplicata del lato AB al suo omologo EF (N.° 215), cioè sarà $M : R :: AB : BC$ (N.° 170). Ma anche il rettangolo AD sta al rettangolo DC come la base AB sta alla base BC (N.° 190); dunque la figura M sta alla figura R come il rettangolo AD sta al rettangolo DC. Ma il rettangolo AD eguaglia per costruzione la figura M, e il rettangolo DC eguaglia la figura N; dunque anche la figura M starà ad R

come la figura M ad N. Dal che ne viene che la figura R eguaglia la figura N. Di più poi la figura R è simile per costruzione ad M: essa è dunque quella che si cercava.

244. Problema 18.° *Costruire una figura simile ad un' altra data* O (Fig.ª 156) *e che abbia ad essa la medesima ragione o rapporto che ha una data linea* M *ad un' altra data* N.

Soluzione. Si trovi (N.° 224 probl. 1.°) la quarta proporzionale ad N, M e ad un lato qualunque AB della figura data O, e sia questa CD, cosicchè sia $N : M :: AB : CD$. Si trovi poscia la media proporzionale fra AB e CD, e sia EF. In fine sopra EF si descriva la figura Q simile alla data O (N.° 242) in maniera che il lato EF sia omologo al lato AB. Sarà Q la figura voluta.

Dimostrazione. La figura O sta alla sua simile Q nella duplicata del lato AB al suo omologo EF (N.° 215), cioè come AB sta a CD (N.° 170), ossia per costruzione come N sta ad M. E *invertendo* si avrà: la figura Q sta alla figura O come la data linea M alla data N. E poichè la figura Q fu costruita simile alla figura O, avrà perciò tutte le condizioni richieste dal problema.

245. Problema 19.° *Date due figure* M *ed* O (Fig.ª 157), *costruirne una terza simile ad una di esse* M, *e che abbia all'altra* O *lo stesso rapporto che ha una linea data* R *ad un' altra data* S.

Soluzione. Si formi un rettangolo qualunque AC equivalente alla figura O. Poscia si protragga un lato di esso p. e. AB fino in D in maniera, che il prolungamento BD sia la quarta proporzionale dopo S, R ed AB onde si abbia questa proporzione $S : R :: AB : BD$; si compia il rettangolo CD. Ciò fatto si costruisca pel problema 17.° la figura P simile ad M ed equivalente al rettangolo CD. Sarà P la figura che si desidera.

Dimostrazione. La figura P primieramente è simile per costruzione alla figura M. Inoltre essendo uguale al rettangolo CD, avrà alla figura O la stessa ragione che ha il rettangolo CD alla stessa figura O, ossia all'altro rettangolo AC, il quale fu costruito equivalente alla stessa figura O. Ma il rettangolo CD sta al rettangolo AC come la base BD alla base AB, ossia come la linea R alla linea S, essendo per supposizione $S : R :: AB : BD$; e quindi *invertendo* $R : S :: BD : AB$. Dunque la figura P sta ad O, come la linea R sta ad S, e perciò soddisfa a tutte le condizioni volute dal problema.

246. Problema 20.° *Date due figure simili* M *ed* O (Fig.ª 158) *costruirne una terza simile all' una e all' altra di esse ed equivalente ad ambedue prese insieme.*

Soluzione. Si compongano ad angolo retto due lati omologhi delle figure date, p. e. AB e BC, e sia tale angolo ABC. Si conduca poscia l' ipotenusa AC, e sopra di essa si costruisca la figura P simile all' una e all'altra delle figure date M ed O in guisa, che il lato AC sia omologo al lato AB, ovvero BC. Sarà P la figura che si cerca.

Dimostrazione. Le tre figure M, O, P essendo simili stanno tra loro come i quadrati dei lati omologhi (N.° 215), cioè come $AC^2 : AB^2 : BC^2$; ma $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (N.° 95); dunque la superficie $P = M + O$, ciò che ecc.

Da ciò segue, che il semicerchio fatto sull'ipotenusa AC (Fig.ª 159), eguaglia gli altri due descritti sopra i cateti, perche tutti i semicerchi sono simili tra loro, come lo sono gl' interi circoli. Laonde tolti di comune i segmenti AGB, BHC, il triangolo ABC eguaglierà i due spazi curvilinei, cioè $BQGA + BDHC$, che si chiamano *lunule* o *lunette*.

247. Problema 21.° *Date due figure simili* P *ed* O (Fig.ª 160) *costruirne una terza simile ad ambedue, ed equivalente alla differenza che passa tra l' una e l' altra di esse.*

Soluzione. Sopra un lato qualunque AC della figura maggiore P si descriva un semicerchio ABC. Poscia dall' estremità C si tiri la corda BC eguale al lato omologo della figura minore O; come pure dall' estremità A si tiri l' altra corda AB e sopra di essa si costruisca la figura M simile ad ambedue le date O e P in modo, che il lato AB sia omologo a BC, ovvero AC. Sarà M la figura cercata.

Dimostrazione. Primieramente la figura M è per costruzione simile ad ambedue le date. Che poi sia equivalente alla differenza di esse si prova in questo modo. Dalla dimostrazione del problema precedente $M + O = P$; dunque se da queste due quantità uguali si tolga la figura O, si avrà $M = P - O$; cioè la figura M equivalente alla differenza che passa fra le due figure date P ed O, come si voleva.

CAPO VIII.

Della maniera di esprimere in numeri ossia misurare la superficie delle figure piane.

248. Misurare la superficie o l'area di una figura, significa cercare quante volte essa contenga un' altra data e determinata superficie. Tra le superficie quella del quadrato sembrò ai Geometri la più semplice, e fu perciò stabilita per unità di misura di tutte quante le figure piane. Da questa maniera di valutare in quadrati le aree delle figure piane ne derivò l'espressione *quadrare* o determinare *la quadratura* di una figura data. Il lato poi del quadrato che si prende per unità di misura delle superficie, è d'ordinario quella retta che si prende per unità nella misura delle linee o lunghezze, cioè il pollice o l'oncia, il palmo, il piede, il braccio, la pertica, il metro ecc., come già si accennò al N.° 182; e la superficie valutata in quadrati si dice essere tante oncie, tanti palmi, piedi, metri, quadrati ecc.

249. Per esprimere adunque in numeri una superficie qualunque, fa d'uopo conoscere il rapporto che passa tra la superficie da esprimersi e quel quadrato che si prende per misura, e che s'intende sempre espresso dall'unità.

250. Sia p. e. da esprimersi in numeri il parallelogramma *A B* (Fig.ª 161), di cui la base è *QB*, l'altezza *CD*. Si applichi la misura lineare p. e. *RS* tanto alla base *Q B* che all'altezza *CD*, e si noti il numero delle volte che sì l'una che l'altra contengono l'unità di misura stabilita *RS*. Si moltiplichi poscia l'uno di questi numeri per l'altro, e il prodotto risultante esprimerà in altrettanti quadrati il valore dello stesso parallelogramma *AB*.

Dimostrazione. Sopra la misura lineare *RS* si formi il quadrato *R T*. Poichè i quadrati sono del genere dei parallelogrammi, si potrà qui pure applicare la dimostrazione, e usare lo stesso raziocinio del N.° 193 Teor. 3.° cioè il parallelogramma *AB* starà al quadrato *RT* nella ragione composta della base *QB* alla base *RS*, e dell'altezza *CD* all'altezza *ST*. Siccome poi ciò che si dice delle quantità esprimenti vale egualmente delle espresse (N.° 187), perciò anche il numero che esprime il parallelogrammo *AB* starà al numero che esprime il quadrato *RT* nella ragione composta del numero esprimente la base *QB* al numero esprimente la base *RS*, e dle numero esprimente l'altezza *CD* al numero esprimente l'altezza *S T*; cioè (N.° 159) sarà la stessa ragione che ha il numero esprimente il parallelogramma *AB* al numero esprimente il quadrato *RT*; e perciò (N.° 187) anche il parallelogramma stesso *AB* starà al quadrato *RT* come il prodotto che risulta dalla moltiplicazione del numero esprimente la la base *QB* pel numero esprimente l'altezza *CD* sta al prodotto che si ottiene dalla moltiplica del numero esprimente la base *RS* pel numero esprimente l'altezza *ST*. Ma il numero che esprime la base *RS* è l'unità, e l'unità pur anche è il numero che esprime l'altezza $ST = RS$ (l'unità poi moltiplicata per l'unità dà sempre per prodotto l'unità); dunque il rapporto che passa fra il parallelogramma *A B* e il quadrato *RT*, che è la sua misura, eguaglia il rapporto che ha l'unità al prodotto nato dalla moltiplicazione del numero esprimente la base *QB* pel numero esprimente l'altezza *CD*; che è quanto dire: il prodotto che si ottiene moltiplicando il numero che esprime la base del parallelogramma pel numero che esprime la di lui altezza, dà il preciso valore del parallelogramma medesimo (N.° 183). Ciò che ecc.

251. *Corollario* 1.° Quindi un parallelogramma qualunque verrà sempre espresso dal prodotto risultante dalla moltiplicazione del numero che esprime la base pel numero che esprime l'altezza. Lo stesso si dica dei rettangoli e dei quadrati; e riguardo ai quadrati, per ottenere il loro valore, basterà moltiplicare un lato qualunque per se stesso, giacchè in essi la base eguaglia sempre la loro altezza.

252. *Corollario* 2.° Ogni triangolo essendo la metà di un parallelogramma avente base ed altezza con esso uguali, verrà espresso, com'è chiaro, dalla metà del prodotto del numero della base per quello dell'altezza.

253. *Corollario* 3.° L'area del trapezio (il quale si può sempre convertire in due triangoli di eguale altezza, perchè aventi le basi sui lati paralleli) eguaglia il prodotto nato dalla semisomma dei due lati paralleli nella perpendicolare intercetta tra essi.

Perchè nel trapezio *CABD* (Fig.ª 162) tirata la diagonale *AD*, verrà esso diviso nei due triangoli *A D B*, *ADC*. Ora se dai loro vertici *A* e *D* si abbassino le perpendicolari *Am*, *Dn*, sarà *Am* l'altezza del triangolo *ADC*, e *Dn* l'altezza del triangolo *A D B*; ma poichè $Am = Dn$ (N.° 54), sarà l' altezza dell' uno e dell' altro $= Am$. Dunque l' area del triangolo $ADB = \frac{Am \times AB}{2}$, e l' area del triangolo $ADC = \frac{Am \times CD}{2}$. Quindi sommando insieme l'una e l'altra, l'area del trapezio $= \frac{(AB + CD) \times Am}{2}$, come dovea dimostrarsi.

254. Se la figura da valutarsi fosse regolare, p. e. *ABCDE* (Fig.ª 165), allora la cosa sarà più spedita. Imperocchè trovato che si abbia il centro F del circolo o inscritto o circoscritto alla data figura, e condotto da F tante linee rette a tutti i suoi angoli essa verrà spartita in tanti triangoli uguali *AFB*, *BFC* ecc. quanti sono i lati della stessa figura. Onde dal medesimo centro F abbassando sopra uno dei lati CD della figura la perpendicolare FG, la quale suole chiamarsi *apotema* del poligono, sarà dessa l'altezza del triangolo CFD. Quindi se il lato CD e l'altezza o apotema FG vengano espressi dal rispettivo numero, cui sono equivalenti, e poscia si prenda la metà del prodotto risultante dalla moltiplica dell'uno per l'altro, questa metà darà il numero che esprimerà il valore del triangolo CFD. Un tale numero poi preso tante volte quanti sono i triangoli nei quali fu spartita la figura, ossia, ciò che è lo stesso, moltiplicato pei lati di essa, cioè pel suo perimetro, darà il numero esprimente l'intera figura.

255. *Corollario.* Il circolo potendosi riguardare come un poligono regolare di un numero infinito di lati infinitamente piccoli, ne segue che la sua area o superficie sarà eguale anch' essa al semiprodotto della circonferenza nel raggio.

256. Archimede ricercando col mezzo del calcolo una retta eguale alla periferia di un circolo di dato diametro, trovò che il diametro sta alla sua rispettiva periferia prossimamente come 7 : 22. E Adriano Mezio matematico olandese spingendo più oltre questa ricerca, trovò il rapporto più prossimo di 113 : 355. I matematici sogliono esprimere colla lettera π questo rapporto che ha la circonferenza al suo diametro, e che perciò, secondo i calcoli di Archimede, valerà $\frac{22}{7}$, e secondo quelli di Mezio sarà $\frac{355}{113}$. Onde con π

intendono indicare quale sarebbe la lunghezza della circonferenza rettificata, il di cui diametro fosse l'unità. In qualunque circolo poi, supposto il diametro $= 1$, si avrà π, ossia la circonferenza rettificata $= 3,1415.....$ prossimamente, il qual valore si ottenne dall' inscrivere un cerchio in un poligono regolare di 768 lati. E siccome un poligono di un sì gran numero di lati coincide quasi col cerchio circoscritto, così 3,1415 sarà il valore approssimato della circonferenza del cerchio il cui diametro $= 1$. Quindi per indicare la lunghezza della circonferenza, il cui diametro in generale sia $2r$, non avrassi (N.° 222) che ad istituire questa proporzione $1 : \pi :: 2r : x$; dalla quale si ricava $x = 2\pi r$, che darà il valore di quella circonferenza rettificata. Per avere poi la superficie compresa da tale circonferenza, non avrassi (N.° 255) che a moltiplicare $2\pi r$ per $\frac{r}{2} = \pi r^2$, ed il prodotto πr^2 indicherà appunto quella superficie. *Si ha dunque la superficie di un circolo col moltiplicare la sua circonferenza rettificata per la metà del raggio*, ovvero *col moltiplicare il quadrato del raggio pel numero costante* $\pi = 3,1415.....$

257. *Corollario.* L'area di un settore in un circolo qualunque è uguale al semiprodotto del raggio moltiplicato per l'arco intercetto dai due raggi che comprendono il settore medesimo.

L'area di un segmento di cerchio, è uguale alla differenza che passa fra l'area del settore, e quella del triangolo isoscele formato dalla corda che sottende l'arco medesimo, e dai due raggi che comprendono il settore.

258. Per valutar poi le altre figure rettilinee, esse si spartiranno in tanti triangoli, tirando da un angolo qualunque di esse tante rette a tutti gli altri. Indi si troveranno i numeri esprimenti ciascun triangolo, e in fine si sommeranno tutti insieme: il loro risultato darà il valore di tutta la figura.

SEZIONE TERZA

CAPO I.

Dei Solidi.

La teoria dei solidi suppone alcune nozioni che noi premetteremo in questo capitolo.

259. Il solido, come già si accennò nella introduzione a questi Elementi, è quella grandezza geometrica che ha le tre dimensioni lunghezza, larghezza e profondità, e che è circoscritta e terminata da superficie, le quali possono essere *piane* o *curve*.

260. Si accennò pure altra volta, che la superficie dicesi *piana*, od anche assolutamente *piano*, quando sopra di essa condotte delle linee rette per ogni verso, queste combaciano perfettamente con essa in tutti i loro punti. In caso diverso la superficie dicesi *curva*.

261. Da queste nozioni ne derivano i seguenti corollari:

1.° *Due linee rette formanti angolo sono sempre nel medesimo piano.* In fatti si può evidentemente immaginare una infinità di piani, che passino per la linea AB (Fig.ª 164); quindi si può far girare uno di questi piani intorno a detta linea come sopra una cerniera, finchè combacia colla retta AC.

2.° *Comunque si prendano nello spazio tre punti, essi saranno sempre posti nello stesso piano.* Di fatti dati i tre punti A, B e C (Fig.ª 164) ed unito mediante rette uno di essi p. e. A cogli altri due B e C si hanno due rette AB ed AC che formano un angolo, e che sono perciò (N.° 261, 1.°) nello stesso piano.

3.° *Due linee parallele essendo sempre nello stesso piano, necessariamente vi saranno anche tutte le rette che le tagliano*: giacchè ogni secante p. e. EF (Fig.ª 165) con ciascuna delle parallele AB e CD sono nello stesso piano perchè formanti angolo (N.° 261, 1.°).

4.° *Se due piani si segano, sarà la loro intersezione, o comune sezione dei piani, una linea retta:* altrimenti pei punti A e B (Fig.ª 166) comuni ai due piani FG, KD non si potrebbe tirare una retta AB che combaciasse (N.° 260) in tutti i suoi punti coi pieni stessi.

262. Le superficie piane che circoscrivono un solido sono unite insieme pei loro lati e pei loro angoli, e formano degli

angoli piani, e delle punte solide, le quali chiamansi *angoli solidi*.

263. La linea retta AB (Fig.ª 167) incontrandosi nel piano EG in B, chiamasi *perpendicolare* ad esso piano, se insiste su di esso in maniera, che faccia un angolo retto con tutte le linee BC, BL, BN, BD ecc. che si possono tirare dal punto B nel piano medesimo. In caso diverso dicesi *inclinata* od *obliqua*.

264. Corollario. *Non possono essere ad un tempo perpendicolari allo stesso piano due rette* AB *ed* SB (Fig.ª 167) *che s' incontrino nello stesso punto* B *di quel piano.* Di fatti facendo passare un piano (N.° 261, 1.°) per le due rette AB, SB, e supposta CM la sezione che fa questo piano coll' altro EG, non può essere ad un tempo la CM perpendicolare ad AB ed a BS.

265. Teorema 1.° *Se la retta* AB (Fig.ª 168) *è perpendicolare a due rette* FE, HC, *che si tagliano in* B, *sarà anche perpendicolare a qualunque altra retta, che, giacendo sul piano di quelle due, passi pel punto* B, *e quindi sarà perpendicolare al piano medesimo in cui si trovano quelle due rette.*

Dimostrazione. Pel punto B si tiri nel piano LN una retta qualunque GD: poi preso $FB = BE$ e $BC = BH$, si congiunga E con C, ed F con H; quindi si congiungano i punti E, D, C, F, G, H mediante rette con un punto qualunque A della perpendicolare AB. Dietro i dati del teorema e la costruzione eseguita, riescono eguali a due a due i seguenti triangoli FHB e BCE, FAB e BAE, HAB e BAC; quindi riescono eguali i due angoli GFB e BED, come pure riescono eguali a due a due le rette EA ed AF, CA ed AH, CE ed FH. Ma poste tali eguaglianze anche i triangoli EAC ed HAF riescono eguali, come pure i triangoli FGB e BED; quindi saravvi ancora eguaglianza tra i lati GF ed ED, GB e BD, e tra gli angoli AFG ed AED. Ma se si verifica questo saranno tra loro eguali anche i due triangoli AFG ed AED, e perciò AG sarà eguale ad AD, e perciò il triangolo ABG sarà eguale al triangolo ABD. Ora questa ultima eguaglianza non si può verificare se non sieno retti i due angoli ABD, ABG, dunque se la AB è perpendicolare alle due FE ed HC, lo sarà anche alla terza qualunque GD tirata pel punto B sul piano, e quindi lo sarà al piano stesso come era a dimostrarsi.

266. Teorema 2.° *Quando una retta* AB (Fig.° 169) *è perpendicolare ad un piano* RQ, *anche tutte le rette a lei parallele sono perpendicolari allo stesso piano.*

Dimostrazione. Sia *ML* una retta parallela ad *AB*. Si unisca *B* con *M* mediante una retta. Si tiri nel piano *RQ* la *NM* perpendicolare a *BM*, e la sua lunghezza *NM* si prenda eguale ad *AB*; quindi mediante rette si unisca *A* con *M* e con *N*, e poscia *B* con *N*. Il triangolo *ABM* posto nel piano delle due parallele *AB*, *LM* (N.° 261, 3.°) eguaglia il triangolo *BMN* posto nel piano *RQ*; perchè *BM* è comune, e per costruzione *BA* eguaglia *NM*, e l'angolo *ABM* eguaglia *BMN*: quindi sarà *BN* eguale ad *AM*; quindi ancora i due triangoli *ABN*, *ANM* saranno eguali, per avere i lati eguali; perciò non solo l' angolo *NMB* sarà retto, ma sarà retto ancora l'angolo *NMA*; e quindi (N.° 265) la *NM* sarà perpendicolare al piano delle due parallele; e quindi anche l' angolo *LMN* sarà retto. Ma eziandio l' angolo *LMB* è retto essendo *LM* parallela alla perpendicolare *AB*; dunque *LM* fa angolo retto con le due linee *MB*, *MN* tirate sul piano *RQ*; dunque (N.° 265) *LM* parallela qualunque ad *AB* sarà perpendicolare dessa pure, come lo è *AB*, al piano *RQ*; come era a dimostrarsi.

267. Teorema 3.° *Se due rette* EF, GH (Fig.° 170) *sono perpendicolari allo stesso piano* AC, *saranno tra loro parallele.*

Dimostrazione. Supponiamo che non sia *EF* parallela a *GH*, ma che lo sia invece *LE*: allora non solo *EF*, ma anche *LE* (N.° 266) sarebbe perpendicolare al piano *AC*; cioè cadrebbero su questo piano nel punto *E* due perpendicolari, il che (N.° 264) è assurdo.

268. Teorema 4.° *Se ciascuna delle due rette* LM, NO (Fig.° 166), *poste nello spazio, è parallela ad una terza* AB, *quelle due rette saranno parallele fra loro.*

Dimostrazione. Per le due parallele *AB*, *LM*, si faccia passare un piano *BD*, e per le due *BA*, *NO*, si faccia passare un altro piano *BF*; quindi da un punto qualunque *R* della *AB*, si tiri la *RP* perpendicolare ad *LM*, e la *RQ* perpendicolare ad *NO*: uniscasi il punto *P* col punto *Q* mediante una retta. Per costruzione la *BA* sarà perpendicolare (N.° 265) al piano del triangolo *PRQ*, facendo angolo retto con ciascuno de' due suoi lati *PR* ed *RQ*: quindi allo stesso piano *PRQ* saranno perpendicolari (N.° 266) anche le due *NO* ed

LM, ciascuna delle quali è per dato parallela a *BA*. Ma due rette perpendicolari allo stesso piano, come lo sono *LP* ed *NQ*, sono anche (N.° 267) tra loro parallele; dunque se *LP* ed *NQ* sono parallele ad *AB*, sono anche parallele fra loro.

269. Il piano *BN* (Fig.° 171) tagliando il piano *PG*, dicesi ad esso *perpendicolare*, se una retta *EF* condotta lungo uno dei piani p. e. *BN* perpendicolare alla comune sezione *DC*, riesca perpendicolare all'altro piano *PG*. È poi chiaro che se la *EF* riesce perpendicolare al piano *PG*, riescirà tale ancora qualunque altra *OQ*, *ST* condotta lungo il piano stesso *BN* perpendicolare alla comune sezione: di fatto tutte queste rette perchè perpendicolari alla comune sezione saranno tra loro parallele; e perchè parallele, essendo una di esse, la *EF*, perpendicolare al piano *BG*, lo saranno (N.° 266) anche le altre.

270. Due piani diconsi tra loro *paralleli*, quando ciascun punto di uno dei due piani, sia egualmente distante dall'altro.

271. Da tale nozione dei piani paralleli ne derivano i seguenti corollari:

1.° *Prolungati anche all'infinito due piani paralleli essi non s' indontreranno mai*;

2.° *Se una retta cada perpendicolare sopra uno dei due piani paralleli, prolungata che sia, cadrà perpendicolare, anche sull' altro*, altrimenti i due piani si incontrerebbero in qualche punto;

3.° *Viceversa se una retta è perpendicolare a due piani, essi saranno tra loro paralleli.*

272. Problema 1.° *Dato un punto* A *fuori del piano* CD (Fig.° 172), *abbassare da quel punto una perpendicolare a detto piano.*

Soluzione. Sul piano *CD* tirisi una retta qualunque *GH*; poscia dal punto *A*, che sta fuori di questa retta, si abbassi la *AM* perpendicolare alla stessa *GH*; dal punto *M* si innalzi lungo il piano *CD* la *MB* perpendicolare essa pure a *GH*; finalmente dal punto *A* si abbassi la *AB* perpendicolare ad *MB*: la *AB* sarà la perpendicolare al piano cercata.

Dimostrazione. Pel punto *B* lungo il piano *CD* tirisi la *NB* parallela a *GM*. Essendo la *GM* perpendicolare alle due rette *MA* ed *AB*, sarà (N.° 265) perpendicolare al piano in cui trovasi il triangolo *MAB*; quindi (N.° 266) anche la

NB parallela a GM sarà perpendicolare allo stesso piano: perciò l'angolo ABN sarà retto. Ma lo è pure per costruzione l'angolo ABM; dunque la AB sarà (N.° 265) la perpendicolare al piano DC, che chiedevasi.

273. Problema 2.° *Dato un punto* C (Fig.ª 173) *nel piano* GF, *innalzare da esso una perpendicolare a detto piano.*

Soluzione. Da un punto qualunque A preso fuori del piano GF si abbassi (N.° 272) la AB perpendicolare a questo piano: si unisca mediante una retta il punto B col punto C, quindi nel piano (N.° 261, 1.°) delle due rette AB e BC, si tiri dal punto C la CD parallela ad AB: questa sarà la perpendicolare cercata.

Dimostrazione. La CD di fatti, come parallela alla perpendicolare AB, sarà dessa pure (N.° 266) perpendicolare al piano.

274. Problema 3.° *Per un punto* A *posto fuori di un piano* LN, *tirare un altro piano a questo parallelo.*

Soluzione. Dal punto A si abbassi sul piano LN la AB ad esso perpendicolare (N.° 272); quindi tirate dal punto B lungo il piano LN due rette qualunque BS e BT, nel piano formato dalle due AB e BS si tiri dal punto A (N.° 152) la AG parallela a BS; e nel piano formato dalle due AB e BT si tiri dallo stesso punto A la AQ parallela a BT; il piano in cui si trovano le due rette AG, AQ sarà il cercato.

Dimostrazione. Siccome AQ è parallela a BT, ed AG è parallela a BS la BA sarà perpendicolare alle due AQ ed AG, come lo è alle due BT e BS; quindi AB sarà (N.° 265) perpendicolare al piano che passa per le due rette AQ ed AG, come lo è al piano LN; quindi (N.° 271, 3.°) quei due piani saranno tra loro paralleli.

275. Dalla soluzione di questo problema apparisce ancora come si possa *tirare una parallela ad una determinata retta* BS (Fig.ª 174) *da un punto* A *dato nello spazio*; basterà di fatti dal punto A abbassare una perpendicolare sopra BS; e quindi nel piano delle due rette AB e BS tirare una parallela a BS stessa dal punto A di questo piano.

Premesse queste cose veniamo ai principali solidi dei quali tratta la Geometria Elementare. Questi sono il Prisma, il Cilindro, la Piramide, il Cono e la Sfera.

CAPO II.

Del Prisma.

276. Se si concepisca che il parallelogramma AE (Fig.ª 175), od una figura rettilinea piana qualunque con moto parallelo al piano sottoposto, e mantenendo ciascuno de' suoi lati parallelo a se stesso, trascorra lungo la retta AK, o normale, od inclinata al piano stesso AE, e che scorrendo lasci di sè tante traccie, o tanti piani $BILC$ eguali, e paralleli al piano AE, quanti sono, per così dire, i punti della retta AK, il solido AM generato da un tale movimento si chiama *prisma*, e le rette KA, AF, FE, EM ecc. che ne segnano gli spigoli, diconsi *lati* del prisma.

277. Il prisma si dirà *triangolare* se il piano generatore è un triangolo (Fig.ª 176); *parallelepipedo* se il piano generatore sarà un parallelogrammo (Fig.ª 175), *poligono* se il piano generatore è un poligono (Fig.ª 177). Se la retta AB (Fig.ª 177) lungo la quale (come lungo la AK Fig.ª 175) si suppone scorrere il piano generatore $FASIE$, sia perpendicolare ad esso piano, il prisma generato si chiama *retto;* e nel caso che il piano generatore FH (Fig.ª 184) fosse un quadrato, e che la perpendicolare FA, lungo la quale si suppone scorrere FH, fosse eguale ad un lato di quel quadrato, allora il solido AH, che sarebbe della specie dei parallelepipedi, prende il nome di *cubo*, ed avrà perciò tutti i suoi lati eguali. Quando (Fig.ª 175) la retta AK non è perpendicolare al piano AE, il prisma dicesi *inclinato*, od *obliquo*. Diconsi poi *basi* del prisma stesso le due faccie opposte AE, KM; e la perpendicolare che misura la distanza di queste due basi dicesi *altezza* del prisma.

278. Dall'indicata generazione del prisma se ne deducono molti corollari; noi qui indicheremo quelli particolarmente dei quali si farà uso in seguito:

1.° *Qualsivoglia prisma ha le due basi opposte* AE, KM (Fig.ª 175) *eguali e parallele fra loro:* essendo l'elemento generatore, ed il piano scorrente AE, sempre il medesimo, e sempre parallelo a se stesso nel suo movimento.

2.° *Se un prisma qualunque venga tagliato da un piano* BL (Fig.ª 175) *parallelo alla sua base, la sezione sarà dessa pure eguale e parallela alla base stessa*; non essendo questa sezione altro che la traccia, che ha lasciato di sè la base AE, allora che scorrendo parallelmente a se stessa lungo la AK si è trovata nel punto B.

3.° *Due lati qualunque delle faccie laterali di un prisma, come* (Fig.° 177) MI *ed* AB, *sono tra loro eguali e paralleli;* riescendo evidentemente ciascuno dei due lati del prisma AB ed MI eguale e parallelo al terzo GS pel movimento sempre parallelo dei lati SA ed SI lungo la GS.

4.° *Nel parallelepipedo anche due lati opposti qualunque delle basi, come* (Fig.° 175) RM *ed* AS, *sono tra loro eguali e paralleli;* riescendo, per la generazione stessa del prisma, RM eguale e parallelo ad FE, il quale per dato è eguale e parallelo ad AS.

5.° *In qualunque parallelepipedo le faccie opposte sono tanti parallelogrammi eguali fra loro*, perchè composti di lati rispettivamente eguali (N.° 278, 1.° 3.°).

6.° *In qualunque parallelepipedo le faccie opposte sono anche tra loro parallele*, perchè (Fig.° 175) dietro le cose dette (N.° 278, 1.°, 3.°, 4.°, 5.°) viene generato lo stesso identico solido, ossia che si supponga il parallelogramma AE scorrere lungo la AK, ossia che si supponga il parallelogramma AR scorrere lungo la KG, ossia in fine che si supponga il parallegrammo RE scorrere lungo la RK.

7.° Perciò *in qualunque parallelepipedo si può prendere per base quella faccia che più aggrada.*

279. Teorema 1.° *Se per due lati* ME, AK (Fig.° 175) *opposti e paralleli* (N.° 275, 4.°) *di un parallelepipedo* AM, *si faccia passare un piano, questo dividerà in due parti eguali, od a metà il parallelepipedo stesso*

Dimostrazione. Il piano $MEAK$ che passa per questi due lati opposti, passerà anche per le due diagonali delle basi KM, AE; e sarà il piano stesso, che viene tracciato dalla diagonale AE della base inferiore, mentre questa base scorre lungo la AK: quindi delle due parti in cui viene diviso il solido AM con quel piano $AEMK$, una sarà generata dal triangolo ASE, l'altra dal triangolo AFE. Ora questi due triangoli sono eguali fra loro, e scorrono con egual movimento lungo il lato AK, dunque anche le parti di solido da essi generate saranno tra loro eguali; e quindi il piano $AEMK$ dividerà a metà il parallelepipedo come era a dimostrarsi.

280. Corollario. *Un prisma triangolare qualunque* E B M (Fig.° 176) *è la metà del suo parallelepipedo corrispondente*, cioè

del parallelepipedo, che sarebbe generato se lungo la AE scorresse invece del triangolo ABC il parallelogramma $ABCG$ doppio di quel triangolo.

281. Teorema 2.° *Due parallelepipedi aventi la stessa base ed eguale altezza sono tra loro equivalenti.*

Dimostrazione. Sieno i due parallelepipedi MC, MG (Fig.° 178, 179), che hanno la base comune MN, e che sono compresi tra gli stessi piani BH ed MN. Supponiamo dapprima (Fig.° 178) che la faccia $ADKM$ sia nello stesso piano della faccia $MFHK$: anche la faccia $BONC$ sarà in conseguenza nello stesso piano della faccia $ONGE$ (N.° 278, 6.°); quindi prolungati i piani BD, MD, OC fino a congiungersi coi piani FG, MH, OG, il solido $MOEFAB$ sarà eguale al solido $KNGHDC$ come perfettamente sovrapponibili; e perciò tolto da ambe le parti il solido $QEFPDC$, ed aggiunto il solido comune $QOMPKN$, riesciranno i due parallelepipedi MC, MG equivalenti tra loro.

Nel caso che il lato EF cadesse dentro la faccia BD la dimostrazione sarebbe analoga, come è chiaro.

Supponiamo in secondo luogo (Fig.° 179) che la faccia $ADKM$ non sia nello stesso piano della faccia $MFHK$: in tal caso si prolunghino i piani AK, BN, AC, FO, HN, EH: dalle intersezioni di questi piani prolungati ne risulterà il parallelepipedo $OPQSRMKN$: ora un tale parallelepipedo è equivalente ad MC, essendo il caso della Fig.° 178, perchè il piano MD è lo stesso del piano MS; è anche un tale parallelepipedo equivalente ad MG, essendo il caso della Figura 178, perchè il piano OF è lo stesso del piano OR; dunque tanto MC, quanto MG sono equivalenti ad una stessa terza quantità MQ; e perciò anch' essi sono tra loro equivalenti, come era a dimostrarsi.

282. Corollario 1.° *Due parallelepipedi che abbiano eguale la base e l' altezza sono tra loro equivalenti.* Una costruzione analoga all'usata pei parallelogrammi (N.° 85) mostra a colpo d' occhio la verità del corollario.

283. Corollario 2.° *I prismi triangolari aventi eguale base ed eguale altezza sono tra loro equivalenti*; perchè sono la metà dei corrispondenti parallelepipedi (N.° 280).

284. Corollario 3.° *I prismi di qualunque specie aventi eguali basi ed eguali altezze, sono tra loro equivalenti*; dacchè (Fig.° 177), facendo passare pei lati paralleli ed eguali

(N.° 278, 3.°) dei piani $BMIA$, $CMIF$, qualunque prisma si divide in tanti prismi triangolari.

285. Problema. *Dato un prisma inclinato* EC (Fig.ª 180) *costruire un prisma retto a lui equivalente.*

Soluzione. Dai quattro angoli della base EH (N.° 273) s'innalzino quattro perpendicolari alle base stessa, e si prolunghino queste perpendicolari finchè incontrino nei punti K, L, N, M il piano della base superiore AC prolungato: il prisma EN risultante, avendo la stessa base e la stessa altezza di EC, sarà il prisma retto cercato equivalente allo stesso EC.

286. Corollario. *Trattando della solidità dei prismi basta trattare della solidità dei prismi retti;* essendo manifesto (N.° 285) il modo di trasformare un prisma inclinato in un prisma retto.

287. Teorema 3.° *Due parallelepipedi aventi eguali le basi, stanno tra loro come le altezze stesse.*

Dimostrazione. I due parallelepipedi retti aventi eguali basi, s'intendano posti uno dentro l'altro come KF e KC (Fig.ª 181): le loro altezze saranno MF, MC. Ora possono darsi due casi: 1.° che queste altezze sieno commensurabili; 2.° che non sieno tali.

Se le altezze sono commensurabili, sia l'unità di misura contenuta p. e. 4 volte in MF, e 7 volte in MC (cioè divisa la MF in 4 parti eguali e la MC in 7 parti eguali, ciascuna delle parti di MF eguagli ciascuna delle parti di MC); facendo passare per ogni punto di divisione (N.° 274) un piano parallelo alla base KM, sarà il parallelepipedo KF diviso in quattro equivalenti fra loro (N.° 281); ed il parallelepipedo KC diviso in sette equivalenti pur essi fra loro, e ciascuno equivalente ad ognuno di quelli in cui è stato diviso KF; laonde i parallelepipedi KF, KC staranno tra loro come $4 : 7$; cioè come stanno fra loro le altezze MF, MC.

Nel caso poi che le due altezze non sieno commensurabili, supponiamo che il parallelepipedo KF stia all'altro KC, non già come MF sta ad MC, ma come MF sta ad una retta maggiore di MC, p. e. ad MO. Prendiamo per MF un'unità di misura che lo divida esattamente, e tale che sia minore di CO. Portando successivamente questa misura sopra MO, cominciando dal punto M, cadrà una divisione tra C ed O. Cada p. e. una divisione in P. Si faccia passare per P un piano (N.° 274) parallelo a KM, e prolungate le faccie laterali del solido KC, riescirà il parallelepipedo risultante KP di altezza MP commensurabile con MF. Perciò avremo Par. KP : Par. KF :: $MP : MF$, mentre per ipotesi avevamo Par. KC : Par. KF :: $MO : MF$. Ora alternando queste due proporzioni esse divengono

Par. $KP : MP$ :: Par. $KF : MF$
Par. $KC : MO$ :: Par. $KF : MF$

e da queste si ricava

Par. $KP : MP$ :: Par. $KC : MO$,
cioè Par. KP : Par. KC :: $MP : MO$.

Ma il solido KP è maggiore del solido KC, e la retta MP al contrario è minore della retta MO; dunque quest'ultima proporzione vorrebbe dire che una quantità maggiore sta ad una minore, come una quantità minore sta ad una maggiore. Ma questo è un assurdo; dunque è assurda l'ipotesi che il Par. KF stia al Par. KC, come l'altezza MF del primo sta ad una retta maggiore dell'altezza MC del secondo. Ma con analogo ragionamento si prova ancora che è parimenti assurdo che il Par. KF stia al Par. KC, come l'altezza MF del primo sta ad una retta minore dell'altezza MC del secondo; dunque è forza concludere che, anche quando le altezze sono incommensurabili, Par. KF : Par. KC :: $MF : MC$; cioè che i due solidi stanno tra loro come le altezze.

288. Teorema 4.° *Due parallelepipedi che abbiano la stessa altezza stanno tra loro come le basi.*

Dimostrazione. S'intendano i due parallelepipedi retti NC, KD (Fig.ª 182) di eguale altezza, posti l'uno dentro l'altro, e combaciantisi nello spigolo BO. Si prolunghi il piano $MCQP$ fino a tagliare colla RH il piano $AEFK$; ne esce fuori un nuovo parallelepipedo KC. Ora pei due KC ed NC considerando come base $BCQO$ si ha (N.° 287) Par. NC : Par. KC :: $NO : KO$; parimenti considerando come base dei due parallelepipedi KC, KD il piano $AKOB$, si ha (N.° 287) Par. KC : Par. KD :: KH od $NP : KF$. Ma da queste due proporzioni si ricava (N.° 160) Par. NC : Par. KD :: $NO \times NP : KO \times KF$; e dalle proprietà dei parallelogrammi rettangoli sappiamo (N.° 195) che $OQPN : OGFK$ :: $NO \times NP : KO \times KF$, dunque Par. NC : Par. KD :: $OQPN : OGFK$, cioè i parallelepipedi aventi eguali le altezze stanno tra loro come le basi.

289. Teorema 5.° *I parallelepipedi che hanno disuguali le basi e le altezze, stanno tra loro nella composta di queste basi e di queste altezze.*

Dimostrazione. I parallelepipedi retti *SQ*, *HB* (Figura 183) s'intendano posti uno dentro l'altro, e combaciantisi nell'angolo solido *K*. Si prolunghino i piani delle faccie *TQ* e *TO* del più piccolo fino che seghino il piano *AC* in *GF* ed *EF*: ne escirà fuori il parallelepipedo *SG* che ha la stessa base col parallelepipedo *SQ*: quindi si avrà (N.° 287) Par. SQ : Par. $SG :: KP : KA$. Ma il parallelepipedo *SG* ha anche la stessa altezza col parallelepipedo *HB*, quindi si avrà ancora (N.° 288) Par. SG : Par. $HB :: SKMT : HKIL$. Ora combinate assieme queste due proporzioni risulta Par. SQ : Par. $HB :: KP \times SKMT : KA \times HKIL$, risulta cioè che i parallelepipedi aventi disuguali e le basi e le altezze, stanno loro nella composta di queste basi e di queste altezze.

290. Corollario. *Tutti i prismi, di qualunque genere, stanno tra loro nella composta delle basi e delle altezze*: dacchè tutti i prismi si possono dividere, come si accennò superiormente (N.° 284), in tanti prismi triangolari; e questi essendo (N.° 280) la metà de' corrispondenti parallelepipedi, hanno evidentemente tra loro il rapporto che passa tra i parallelepipedi stessi.

291. Come per misurare l'estensione delle superficie conviene prendere per unità di misura delle superficie, così per misurare la solidità dei solidi conviene prendere per unità di misura dei solidi. E siccome nella superficie si è convenuto di prendere per unità di misura il *quadrato*, così per la solidità si è convenuto di assumere per unità di misura il *cubo*, ossia di valutare di quanti cubi sia composto un dato solido. Di qui il misurare i solidi fu chiamato *cubare*, o determinare la *cubatura* dei solidi stessi. Siccome però quel cubo che si assume per unità di misura può essere di grandezza variabile, a seconda della variabile lunghezza del suo lato (N.° 277), quindi, onde avere una unità di misura stabile, conviene determinare quale sia la lunghezza del suo lato. In generale prendesi per questa lunghezza l'unità che serve per misurare le linee, o lunghezze; cioè il *pollice*, l'*oncia*, il *palmo*, il *piede*, il *metro* ecc.; e la solidità valutata in cubi dicesi essere tanti pollici cubi, tante oncie cube, tanti piedi, palmi, metri ecc. cubi.

292. Poste queste nozioni abbiasi da misurare (Fig.ª 184) il parallelepipedo retto *PL*. L'unità di misura sia il pollice cubo *FC*. Avremo (N.° 289) Cubo FC : Par. $PL :: AF \times FEHG : PK \times PONQ$; ma essendo $FEHG$ un quadrato (N.° 277) il cui lato eguaglia AF, questa proporzione si trasforma nella seguente Cubo FC : Par. $PL :: (AF)^3 : PK \times PONQ$. Ora, siccome il Cubo *FC* lo assumiamo come unità di misura della solidità, sarà eguale ad 1; parimenti *AF* suo lato, che sarà l'unità di misura dei lati del parallelepipedo (N.° 291), sarà eguale ad 1: quindi quella proporzione si trasforma in quest'altra 1 : Par. $PL :: 1 : PK \times PONQ$; cioè il parallelepipedo PL contiene tante volte il cubo unità di misura, quante volte il prodotto $PK \times PONQ$ espresso in numeri contiene l'unità. Quindi *onde avere espresso in numeri quanti pollici cubi sia un dato parallelepipedo* PL, *converrà moltiplicare il numero che ne esprime in pollici quadrati la base* PONQ *pel numero che ne esprime in pollici l'altezza* PK; ossia, come dicono più brevemente i matematici, *un parallelepipedo equivale alla sua base moltiplicata per la sua altezza*. Così supposto il lato *PQ* di 3 pollici, il lato *PO* di 2 pollici, il lato *PK* di 4 pollici, e supposta la base *PONQ* un rettangolo, avremo che questa base sarà di 6 pollici quadrati; e moltiplicato questo 6 per 4, che è il numero che esprime in pollici l'altezza *PK*, il prodotto 24 esprimerà che quel parallelepipedo *PL* equivale a 24 pollici cubi. E di fatti apparisce anche a colpo d'occhio dalla figura, che divisa in sei quadrati eguali ad *FH* la base *PN*, o *KL*, sopra ciascuno di essi vi starà una colonna composta di quattro cubi eguali ad *FC*, simile a quella che è delineata sopra uno dei quadrati *QV*.

293. Corollario. *Per avere la solidità di qualunque prisma basta moltiplicarne nel modo anzidetto la base per l'altezza*. La ragione è la stessa dell'accennata superiormente (N.° 290).

294. Rapporto alla superficie del prisma è facile vedere che essa sarà eguale alla somma delle superficie dei singoli piani di cui quel prisma è composto. Quindi per misurarla basterà a parte a parte, col metodo dato (N.° 248 e seg.) per le misure delle superficie piane, calcolare la misura di ciascuno di quei piani di cui il prisma è composto. Se però il prisma sarà retto (Fig.ª 177) la sua superficie eguaglierà il perimetro della base moltiplicato per uno dei lati *GS* che ne segnano l'altezza, più la superficie delle due basi; perchè

così (N.° 251) sarà brevemente misurata tutta insieme la superficie dei rettangoli che ne costituiscono le faccie laterali.

CAPO III.

Del Cilindro.

295. Suppongasi un piano circolare ANG (Fig.ª 185) il quale si muova sempre parallelmente a se stesso, in modo che il suo centro trascorra lungo la retta RC. La traccia che lascierà di sè nel suo movimento quel piano, è un solido, che appellasi *cilindro*. La retta RC, lungo la quale scorre il centro, appellasi *asse del cilindro*. Se quest' asse è perpendicolare al piano circolare generatore, come nella Fig.ª 185, il cilindro chiamasi *retto;* se è inclinato, come nella Fig.ª 186, il cilindro chiamasi *inclinato* od *obliquo*. I due circoli poi EMF, ANG, che dietro le cose dette dovranno essere *paralleli*, diconsi *basi* del cilindro. La perpendicolare CR (Fig.ª 185), FD (Fig.ª 186), che misura la distanza delle due basi, dicesi *altezza* del cilindro.

296. Rigorosamente parlando, dai matematici appellasi *cilindro* qualunque solido sia generato in modo analogo all'accennato superiormente, sebbene il piano generatore non sia circolare, ma sia terminato da una curva qualunque che si chiuda. Noi però non ci occuperemo che dei cilindri generati dal moto parallelo di un piano circolare, alludendo a questi soli quante volte diremo semplicemente *cilindro*.

297. Il cilindro retto EG (Fig.ª 185) può anche intendersi generato dalla rivoluzione del rettangolo $CRGF$ intorno al suo lato CR: in tale rivoluzione di fatti la GF descriverebbe una superficie curva radente precisamente il cilindro EG.

298. Per facilitare le dimostrazioni di varie proprietà del cilindro e di altri solidi, noi considereremo i circoli come poligoni composti di un numero indefinito di lati piccolissimi, ossia come *poligoni infinitilateri:* e sebbene questa considerazione non sia, secondo alcuni, del tutto rigorosa, noi però l' assumeremo perchè senza indurre in alcun errore facilita d' assai la via ai principianti, i quali d' altronde fatti più esperti in queste teorie, da sè varranno ad intendere le dimostrazioni, che degli stessi teoremi danno tanti autori con metodi forse più rigorosi.

299. Considerato adunque il circolo ANG (Fig.ª 185,

186) come un poligono infinitilatero, ogni suo latercolo N, col suo movimento, genererà una faccia parallelogrammatica NM, e quindi *il cilindro potrà considerarsi come un prisma composto di un numero indefinito di tali faccie laterali strettissime.*

300. Di qui ne deriva evidentemente il seguente corollario: *Al cilindro appartengono tutte le proprietà dimostrate superiormente* (N.° 284 e seg.) *pei prismi*; e quindi, *anche per avere la solidità del cilindro conviene moltiplicarne la base per l' altezza.* Onde essendo RG il raggio della base del cilindro EG (Fig.ª 185), ed essendo RC la sua altezza, siccome la base equivale (N.° 256) a $\pi \overline{RG}^2$ la solidità sarà $\pi \overline{RG}^2 \times RC$; quella poi del cilindro EG (Fig.ª 186) sarà $\pi \overline{RG}^2 \times FD$.

301. Considerato il cilindro come un prisma di un numero indefinito di faccie laterali (N.° 298) la sua superficie si avrà essa pure collo stesso metodo con cui si ha (N.° 294) la superficie dei prismi. Perciò se il cilindro è retto basterà moltiplicare la circonferenza della base per l' altezza del cilindro stesso, essendo, nel caso, tale altezza, l' altezza istessa degli eguali parallelogrammi laterali. Se poi il cilindro è inclinato non può la Geometria elementare dare altro metodo che quello di misurarne a parte a parte ciascuna faccia laterale infinitesima; il che riescendo in pratica impossibile, è forza ricorrere ai metodi, che presenta l' analisi sublime. Tanto poi nel caso del cilindro retto, quanto nel caso del cilindro inclinato per avere la superficie intera, conviene aggiugnere alla superficie laterale la superficie delle basi.

302. Dalle cose dette apparisce che la superficie totale del cilindro retto EG (Fig.ª 185) equivale a $2\pi RG \times RC + 2\pi \overline{RG}^2$, essendo (N.° 256) $2\pi RG$ la circonferenza della base, quindi $2\pi RG \times RC$ la superficie laterale, e (N.° 256) $2\pi \overline{RG}^2$ la superficie delle due basi. Se perciò l' altezza RC eguagli il raggio RG della base, la superficie totale del cilindro è quadrupla di quella di una base, ossia eguaglierà (N.° 256) la superficie di un circolo che abbia per raggio il diametro della base.

CAPO IV.

Della Piramide.

303. Abbiasi la figura rettilinea piana *DABC* (Fig.ª 187) se mediante rette si unisca un punto *L* posto fuori di questo piano, con i vertici degli angoli della figura stessa, e per le rette *LD* ed *LC*, *LC* ed *LB*, *LB* ed *LA*, *LA* ed *LD* si facciano passare tanti piani, ne risulta un solido, che si appella *piramide*. Il piano *ABCD* dicesi *base* della piramide, il punto *L* appellasi *vertice* ed *LQ* abbassata dal vertice perpendicolare sopra la base, dicesi *altezza* della piramide.

304. Se la base della piramide è un triangolo essa dicesi *triangolare*, se un quadrilatero dicesi *quadrangolare*, in generale se la base è un poligono dicesi *poligona*. Quando poi la base è una figura regolare, quella retta, che unisce il vertice della piramide col centro della base dicesi *asse* della piramide; e se l'asse riesce perpendicolare alla stessa base la piramide dicesi *retta*, o *regolare*, in caso diverso la piramide dicesi *obliqua*.

305. Per dimostrare con facilità quel teorema da cui deduconsi le principali proprietà delle piramidi, conviene che consideriamo in un modo alquanto differente dall'esposto (N.° 303) la generazione della piramide che ha per base un parallelogrammo, quale sarebbe quella della Figura 189 del resto questo modo che accenneremo di considerarne la generazione, si può applicare ancora a qualunque altra specie di piramidi.

Sia adunque (Figura 188) il piano parallelogrammo *ABCD*, che noi supporremo, per farcene un'idea materiale, così slegato ai punti *B* e *D* che tutto l'angolo *BCD* possa muoversi mantenendo le sue braccia *BC*, *CD* sempre parallele rispettivamente ai due lati opposti *BA AD*; e così pure l'angolo *BAD* possa muoversi mantenendo le sue braccia *BA*, *AD* sempre parallele rispettivamente ai due lati opposti *BC* e *CD*. Ciò posto se noi nei due vertici degli angoli *C*, *A*, o nel vertice di uno solo di questi angoli concepiamo tale movimento, che giungano essi vertici ad unirsi fra loro trasportando sempre parallelmente a se stesse le proprie braccia, vediamo chiaramente che il parallelogrammo verrà mano, mano rimpiccolendosi fino a divenire nullo. Fermo questo: sia (Fig.ª 189) il piano parallelogrammo *ABCD*: da un punto *E* posto sopra

questo piano sieno tirate due rette a due angoli opposti *A* e *C*: supponiamo che il parallelogrammo *ABCD* si muova verso il punto *E* sempre parallelmente a se stesso, ed in modo che anche i lati sieno sempre a se stessi paralleli; e supponiamo in pari tempo che i vertici dei due angoli opposti *A* e *C* si vadano fra loro accostando, scorrendo uno sulla retta *EA*, un altro sulla retta *EC*. È chiaro, dalle cose dette dianzi, che il piano parallelogrammo *ABCD* verrà mano mano rimpiccolendosi divenendo dapprima $A'B'C'D'$, quindi $A''B''C''D''$ ecc. fino a ridursi ad un punto nella sommità *E*: parimenti è chiaro che la traccia che lascierà di sè quel piano parallelogrammo, che sempre s'impiccolisce, sarà appunto una piramide, che ha per base il parallelogrammo *ABCD* e per vertice il punto *E*. Esposta in tal modo la generazione della piramide, veniamo alla dimostrazione del seguente teorema.

306. Teorema 1.° *Se pel vertice* E (Fig.ª 189) *e per i due angoli opposti* A *e* C *della base si faccia passare un piano, questo dividerà in due parti eguali la piramide.*

Dimostrazione. Il piano che passa pei punti *E*, *A* e *C* passa per le due rette *EA*, *EC*, quindi passa pei vertici degli angoli opposti *A* e *C*, A' e C', A'' e C'' ecc. che ha quel piano generatore che salendo s'impiccolisce, quindi passa per la traccia delle diagonali tutte, che lascia salendo il piano generatore, quindi divide a metà tutte le traccie di questo piano generatore che scorre parallelmente a se stesso: ma queste traccie costituiscono insieme la piramide, dunque divide a metà la piramide, come era a dimostrarsi.

307. Corollario. *Una piramide triangolare qualunque* (Figura 190) *è la metà di quella, che avendo il vertice in* B *abbia per base il parallelogramma* ADEC *corrispondente al triangolo* ADC. Essa diffatti non è che una delle due parti in cui verrebbe divisa l'intera piramide, avente per base *ADEC*, se fosse segata con un piano che passi pel vertice, e per gli angoli opposti della base.

308. Teorema 2.° *Una piramide quadrangolare che abbia per base un parallelogramma equivale in solidità alla terza parte di un parallelepipedo che abbia la stessa base e la stessa altezza.*

Dim. Abbiasi il (Fig.ª 191) parallelepipedo *AD*: si unisca mediante rette il punto *A* coi punti *D*, *C*, *S*, *F*: quindi si faccia passare un primo piano per le due rette *AF*, *AD*, un secondo per le due rette *AD*, *AS*, un terzo per le due rette

AD, *AC*: il prisma verrà così diviso in tre piramidi *ABCDS*, *ACDFO*, *ASEFD* ciascuna avente per base un parallelogramma. Queste tre piramidi per chè meglio si ravvisino dai giovani si sono segnate colle loro rispettive lettere attorno al prisma. Ora se si prolunghi il piano *ACD*, esso passerà lungo il lato *A E* parallelo a *C D*, quindi dividerà il prisma *A D* in due parti eguali; quindi il prisma triangolare *AEFDCO* sarà equivalente al prisma *AESDCB*: ma siccome il piano *ACD* prolungato fino in *E* taglia (N.° 306) in due parti eguali anche la piramide *AS D F E*, quindi anche la piramide triangolare *ADFE* sarà equivalente all' altra piramide triangolare *ASDE*. Perciò se da ciascuno di quei due prismi triangolari equivalenti toglieremo una delle due piramidi triangolari; se dal prisma cioè *AEFDCO* toglieremo la piramide *A E FD*, e dal prisma *AESDCB* toglieremo la piramide *AESD* i due residui saranno tra loro equivalenti. Ma i due residui sono le due piramidi *AOFDC*, *ABSDC*; dunque queste due piramidi sono tra loro equivalenti. Se invece di prolungare il piano *ACD* prolunghiamo il piano *AFD*, con analogo ragionamento (essendo anche in questo caso tagliato a mezzo e l' intero prisma e la piramide *ABCDS*) proveremo che la piramide *AOFDC* equivale anche alla piramide *A S D F E*; e perciò le tre piramidi quadrangolari di base parallelogrammatica, che insieme formano il prisma saranno equivalenti tra loro, dimostrandosi una di esse equivalente a ciascuna delle altre due. Dunque ciascuna di esse equivarrà alla terza parte del prisma *AD*. Ma ciascuna di esse, secondo che si prende per base di *A D* una sua diversa faccia, ha con *A D* la stessa base e la stessa altezza, dunque una piramide che abbia per base un parallelogramma, e che abbia base ed altezza eguale con un parallelepipedo, equivarrà in solidità alla terza parte del parallelepipedo stesso.

309. Corollario 1.° *Una piramide triangolare equivale in solidità alla terza parte del prisma che ha con lei la stessa base e la stessa altezza.* Perchè (N.° 307) quella piramide è la metà di quell' altra che avendo lo stesso vertice avesse per base il parallegrammo corrispondente al triangolo, della propria base; e quel prisma ancora (N.° 280) è la metà del suo parallelepipedo corrispondente.

310. Corollario 2.° *Qualunque piramide poligona* (Fig.ª 192) *è la terza parte del prisma che ha con lei la stessa base, e la*

stessa altezza. Perchè fatti passare dei piani pei lati paralleli *AF* ed *LD*, *AF* e *CH*, la piramide resta divisa in tante piramidi triangolari, ed il prisma in tanti prismi triangolari, di base e di altezza comune alle rispettive parti di piramide.

311. Corollario 3.° *Per avere la solidità della piramide basta moltiplicarne la base per la terza parte dell' altezza, nel modo indicato superiormente* (N.° 292).

312. Corollario 4.° *I rapporti che sussistono tra i prismi* (N.° 284 e seg.) *sussistono anche tra le piramidi*, essendo gli stessi i rapporti che sussistono tra gli interi e quelli che sussistono tra le terze parti degli interi.

313. Se la piramide *LADCB* (Fig.ª 193) venga in un punto *G* segata con un piano parallelo alla sua base, la parte inferiore *GOEFDCBA* si chiama *tronco* di piramide. *Per avere la solidità di questo tronco basterà levare dalla solidità della piramide totale quella, che appartiene alla piccola piramide* LFEOG; cioè, abbassata dal punto *L* la *LQ* perpendicolare alla base, la solidità del tronco sarà eguale a

$$BCDA \times \frac{LQ}{3} - OGFE \times \frac{LP}{3}. \quad (A)$$

Nel caso poi che non si conosca altro che l' altezza *PQ* del tronco, si può averne egualmente la solidità nel modo seguente. La *L Q* cadendo perpendicolarmente sul piano *A C*, sarà perpendicolare anche al piano *GE* a lui parallelo, quindi uniti, mediante rette, il punto *A* col punto *Q*, il punto *G* col punto *P*, nel triangolo *ALQ*, la *GP* sarà una retta parallela alla base *AQ*; quindi (N.° 205) avremo $LP : LP + PQ :: LG : LA$. Ma essendo anche *GF* parallela ad *A D* nel triangolo *LAD* avremo ancora $LG : LA :: GF : AD$, per cui dedurremo $LP : LP + PQ :: GF : AD$; e quindi

$$LP = \frac{PQ \times GF}{AD - GF}.$$

Siccome poi $LQ = LP + PQ$, avremo sostituendo

$$LQ = \frac{PQ \times GF}{AD - GF} + PQ, \text{ cioè } LQ = \frac{PQ \times AD}{AD - GF}.$$

Sostituendo perciò nel valore (*A*) del tronco questi valori di *LP* e di *LQ* avremo che la solidità di quel tronco sarà

$$BCDA \frac{(PQ \times AD)}{3(AD - GF)} - OGFE \frac{(PQ \times GF)}{3(AD - GF)},$$

e quindi sarà data non conoscendo altra altezza che la PQ del tronco stesso.

314. Riguardo alla superficie della piramide, siccome, toltane la base, ella è sempre composta di tanti triangoli che hanno il vertice nel vertice della piramide, e che hanno per base un lato della base della piramide stessa, quindi questa superficie si avrà calcolando col noto metodo (N.° 252) la superficie di ogni triangolo. Se però la piramide sia di base regolare, ed inoltre sia retta, allora, essendo eguali tutti i triangoli che ne formano la superficie, basterà moltiplicare il perimetro della base per la metà della perpendicolare abbassata dal vertice sopra un lato qualunque della base. In ogni caso poi alla totale superficie dei triangoli laterali conviene aggiugnere la superficie della base.

315. Riguardo alla superficie del tronco di piramide converrà (Fig.ª 193) calcolare a parte a parte col noto metodo (N.° 253) la superficie dei trapezii $AGFD$, $EFDC$ ecc. che lo chiudono all' intorno. Che se la base del tronco fosse regolare, e la piramide fosse retta, allora, riescendo eguali tutti i trapezi, basterà, come è chiaro, moltiplicare la semisomma dei perimetri delle due basi per la perpendicolare abbassata lungo una faccia da un punto qualunque del perimetro superiore sopra il lato corrispondente della base inferiore. In ogni caso però ad avere la superficie totale del tronco conviene aggiugnere alla calcolata superficie le superficie delle due basi parallele.

CAPO V.

Del Cono.

316. Se la base della piramide, invece di essere una figura rettilinea, sia una curva chiusa, come un circolo (Figura 194) la piramide prende il nome di *cono.* Noi non ci occuperemo che di quel cono che ha per base il circolo.

317. La retta che unisce il vertice del cono col centro della base, dicesi *asse* del cono: e se questo asse riesce perpendicolare (Fig.ª 194) alla base, il cono dicesi retto; altrimenti (Fig.ª 195) dicesi *obliquo.* Nel cono retto perciò l'altezza è misurata dal suo asse istesso, nell'obliquo da un'altra retta CL abbassata dal vertice perpendicolare sul piano della base.

318. Il cono retto può ancora concepirsi come generato dal triangolo rettangolo BGC (Fig.ª 194), che compie una rivoluzione intorno ad un cateto BG.

319. Considerando anche nel cono il circolo base come un poligono infinitilatero (N.° 298), il cono si riduce ad una piramide poligona, quindi di esso pure si verificheranno tutte le proprietà dimostrate superiormente (N.° 310 e seg.) della piramide. Perciò *il cono sarà la terza parte del suo cilindro corrispondente, e per averne la solidità converrà moltiplicarne la base per la terza parte dell' altezza.*

320. Dalle proprietà che hanno i coni comuni colle piramidi, e quindi (N.° 312) coi prismi, si deduce evidentemente che *due coni di eguale base ed altezza equivalgono insieme ad un cono che abbia la stessa base e doppia altezza*; perchè ciò si verifica anche nei prismi.

321. Se per un punto B del cono ACE (Fig.ª 195) si faccia passare un piano parallelo alla base, la porzione di solido $BAED$ chiamasi *tronco di cono.* Applicando alla generazione del cono ciò che si è detto per la generazione della piramide, intendendo cioè che il cono venga generato dal movimento parallelo di un circolo col centro sempre sull'asse, ed il cui diametro vada mano mano impiccolendosi in modo, da essere sempre compreso fra le due rette CA, CE, apparisce chiaramente, che il piano CAE che passa pel diametro della base, passerà ancora pel diametro BD della sezione parallela alla base.

322. Per avere la solidità del tronco di cono $BAED$ basterà dalla solidità del cono intero sottrarre la solidità del piccolo cono CBD tagliato dalla sezione. Quindi essendo CL l' altezza dell' intero cono, e CH l' altezza del piccolo, sarà (N.° 319, 256) la solidità del tronco

$$\pi \overline{FE}^2 \times \frac{CL}{3} - \pi \overline{GD}^2 \times \frac{CH}{3}. \quad (B)$$

Nel caso che non si conoscesse altro che l'altezza HL del tronco, allora, unito H con D, L con E, con ragionamento analogo all' usato superiormente (N.° 315) si troverebbe $CH : CH + HL :: CD : CE$; e pei due triangoli simili CBD, CAE si avrebbe ancora $CD : CE :: BD : AE$ ossia $CD : CE :: GD : FE$, quindi sarebbe $CH : CH + HL :: GD : FE$, quindi $CH = \frac{HL \times GD}{FE - GD}$ e $CL = \frac{HL \times FE}{FE - GD}$; perciò sostituiti questi valori nell' espressione (B), che dà la solidità del tronco di cono, si avrebbe che questa solidità equivale a

$$\pi \overline{FE}^2 \frac{1}{3}\left(\frac{HL \times FE}{FE - GD}\right) - \pi \overline{GD}^2 \frac{1}{3}\left(\frac{HL \times GD}{FE - GD}\right),$$

dove basta conoscere l' altezza HL del tronco, ed i raggi delle due basi per calcolarne la solidità.

323. Anche riguardo alla superficie, considerata la base del cono come un poligono infinitilatero, si applicano a lui tutte le cose dette della superficie delle piramidi (N.° 514). Quindi per calcolare la superficie del cono obliquo CAE (Fig.° 495) converrebbe moltiplicare ogni latercolo del perimetro della base per la metà della rispettiva distanza che esso ha dal vertice del cono stesso; e parimenti (N.° 515) per avere la superficie del tronco di cono $ABDE$ converrebbe moltiplicare la semisomma di ogni coppia dei latercoli paralleli corrispondenti delle due basi, per la loro rispettiva distanza: ma questo metodo non può praticarsi stante il numero indefinito di questi latercoli: appartiene all' analisi sublime dare un metodo praticabile in questi casi.

Semplice però e praticabile è il metodo, quando si tratta di un cono retto BAC (Fig.° 494) o di un suo tronco $DECA$. Per la superficie del cono retto difatti basterà moltiplicare il perimetro della sua base cioè $2\pi CG$ per la metà del lato BC, corrispondendo tale lato all' altezza di tutti i triangoli infinitesimi eguali di cui si suppone composta la superficie. Pel tronco poi di cono $DECA$ basterà moltiplicare la semisomma dei perimetri delle due basi, cioè $\pi(CG - FE)$ pel lato DA, corrispondendo tale lato all' altezza di tutti i trapezii infinitesimi eguali di cui supponesi composta la sua superficie.

Sia poi il cono retto, sia obliquo alla superficie laterale conviene aggiugnere la superficie della base se parlisi di un cono intero, e la superficie delle due basi se parlisi di un tronco di cono.

CAPO VI.

Della Sfera.

324. Se il semicerchio AFB (Fig.° 496) si rivolga intorno al suo diametro AB fisso alle due estremità, finchè sia giunto nella stessa posizione da cui partì, e lasci la traccia del suo movimento, esso genererà un solido, che si chiama *sfera*, la di cui superficie, che dicesi *sferica*, è in ogni punto egualmente distante dal punto C, che sarà il *centro* della sfera stessa. Il diametro AB, intorno al quale si suppose aggirarsi il semicerchio, chiamasi *asse*, ed i punti A e B estremi dell' asse, diconsi *poli* della sfera. Tutte le rette poi, che passando pel centro termineranno coi loro estremi alla periferia, si dicono *diametri*, e le loro metà *raggi* della sfera. E poichè ogni punto della superficie sferica, come dicemmo, è egualmente distante dal centro C, si fa manifesto, che qualunque diametro eguaglia l' asse, come qualunque raggio è la metà di esso; e che perciò tanto i diametri, che i raggi della sfera saranno tra loro rispettivamente eguali. Finalmente quei circoli fatti nella superficie sferica, i quali hanno il diametro eguale all' asse, si chiamano *circoli massimi*, dandosi il nome di *minori* a quei circoli, che hanno un diametro minore dell' asse della sfera. Quindi le sezioni AB, EF, ef saranno circoli massimi, e le sezioni zz', $z''z'''$ saranno circoli minori, e tanto minori quanto più il piano che taglia la sfera si discosti dal centro C.

325. Per dimostrare i vari teoremi riguardanti la sfera conviene che ne concepiamo la generazione in un modo differente dall' accennato superiormente. Abbiasi il circolo $AEBF$ (Fig.° 496) e sia perpendicolare al suo diametro AB un altro circolo ENF, che ha il centro sulla stessa AB. Supponiamo che questo circolo ENF, tenendo sempre il centro sulla AB, scorra parallelmente a se stesso, in modo però che il suo diametro varii di grandezza continuamente, eguagliando sempre quella corda parallela ad EF, che passa pel punto istesso della AB dove allora si trova nel muoversi il circolo. Così, per esempio, quando il circolo generatore si trova movendosi nel punto D abbia per diametro la corda zz' parallela ad EF; quando trovasi nel punto O abbia per diametro la corda $z''z'''$ parallela ad EF. È chiaro che supposto un

movimento con tali leggi in quel circolo, la traccia che egli lascierà di sè scorrendo da A in B sarà appunto una sfera.

326. Teorema 1.° *La solidità della sfera eguaglia i due terzi del cilindro ad essa sfera circoscritto.*

Dimostrazione. Suppongasi (Fig.ª 197) il rettangolo $ABFE$, il cui lato BF sia la metà di AB: sul lato AB sia descritto il semicerchio QBA che sarà tangente in Q alla FE: il punto C sia unito mediante rette con F e con E, ed anche il punto B sia unito per mezzo di una retta col punto E. Se tutta la figura si rivolga intorno al lato fisso AB, fino a compiere una rivoluzione intera, ne saranno generati cinque solidi. Una sfera (N.° 324) dal semicerchio BQA; un cilindro (N.° 297) dal rettangolo $ABFE$, che sarà il cilindro *circoscritto* a quella sfera; due coni di egual base ed altezza (N.° 318) dai due triangoli BCF, CAE; e finalmente un cono di base eguale a questi due, e di doppia altezza; quindi (N.° 320) ad essi equivalente, dal triangolo BAE; il quale cono sarà anche il *corrispondente* al cilindro circoscritto. Ciò posto da un punto R qualunque dell'asse AB tirisi alla circonferenza del semicerchio la RU parallela a BF: questa retta taglierà la CF in un punto x; e per essere la BF eguale a BC riescirà anche $CR = Rx$. Se ora intendiamo passare per R un piano, il quale parallelmente ad una delle basi del cilindro circoscritto tagli il cilindro stesso, la sfera ed il cono SCF, la sezione del cilindro sarà un circolo di raggio BF, o CU, la sezione della sfera sarà un circolo di raggio RU, la sezione del cono sarà un circolo di raggio Rx, od RC. Ora, siccome i circoli stanno tra loro come i quadrati dei diametri (N.° 223), diremo che quelle tre sezioni stanno tra loro come $\overline{CU}^2 : \overline{RU}^2 : \overline{RC}^2$. Ma dal triangolo rettangolo CRU abbiamo $\overline{CU}^2 = \overline{RU}^2 + \overline{RC}^2$, dunque (N.° 207) la sezione del cilindro circoscritto equivale alle due sezioni unite della sfera e del cono. Ma, qualunque sia il punto R, queste sezioni sono appunto le traccie che lasciano di sè i circoli generatori del cilindro circoscritto (N.° 295) del cono SCF, o CHE (N.° 321), e della sfera (N.° 325), dunque le traccie del circolo che genera il cilindro circoscritto, equivalgono alle traccie insieme unite e del circolo che genera i due coni, e del circolo che genera la sfera; dunque tutte le traccie che formano l'intero cilindro, ossia la solidità del cilindro stesso equivale all'unione, e delle traccie tutte che formano i due coni, e delle traccie tutte che formano la sfera; equivale cioè alla solidità dei due coni più la solidità della sfera. Ora i due coni CSF, CHE equivalgono insieme al cono BHE, dunque il cilindro circoscritto equivale in solidità alla sfera più il cono corrispondente; cioè (il che torna lo stesso) la solidità della sfera equivale alla differenza fra la solidità del cilindro circoscritto e quella del suo cono corrispondente. Ma la solidità di un tale cono è un terzo della solidità di quel cilindro; dunque la sfera equivarrà in solidità ai due terzi del cilindro circoscritto come era a dimostrarsi.

327. Corollario. *La sfera equivale in solidità ad un suo circolo massimo moltiplicato pei due terzi del proprio diametro; cioè chiamato* R *il raggio di una sfera essa equivale a* $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Di fatto il cilindro circoscritto ad una sfera di raggio R avrà per base il circolo πR^2 (N.° 256), e per altezza $2R$; quindi la sua solidità sarà (N.° 300) $2\pi R^3$; e perciò la solidità della sfera che ne è i due terzi sarà $\frac{4\pi R^3}{3}$.

328. Teorema 2.° *Le sfere stanno fra loro come i cubi dei diametri.*

Dimostrazione. Abbiansi due sfere, una di raggio R, l'altra di raggio r: le loro solidità saranno (N.° 327) $\frac{4\pi R^3}{3}$, $\frac{4\pi r^3}{3}$. Ma $\frac{4\pi R^3}{3} : \frac{4\pi r^3}{3} :: R^3 : r^3$, dunque quelle due sfere staranno fra loro come i cubi dei raggi.

329. Se si tagli la sfera con un piano qualunque PRQ (Fig.ª 198), il quale non passi pel di lei centro, la porzione tagliata $APRQ$ dicesi *segmento* sferico, e la porzione AO di raggio perpendicolare al piano di sezione dicesi *altezza* del segmento.

330. Teorema 3.° *Un segmento sferico equivale in solidità ad un cilindro, che abbia per raggio della base l'altezza di quel segmento, e per altezza il raggio della sfera diminuito della terza parte dell'altezza del segmento stesso.*

Dimostrazione. Essendo A (Fig.ª 198) il punto della superficie sferica in cui termina quel raggio che è perpendicolare al piano di sezione, immaginiamo anche in questo caso che il rettangolo $ADMB$, ed il triangolo ACD costruiti come al N.° 326 facciano insieme coll' arco AQ una rivoluzione intorno all' asse AB. Il piano PRQ prolungato taglierà con sezione parallela alla base il cilindro circoscritto alla sfera che viene generato da quel rettangolo, e taglierà pure con sezione parallela alla base il cono generato da quel triangolo. Collo stesso ragionamento usato al N.° 326 si proverà che il segmento sferico $APRQ$ equivale alla parte di cilindro circoscritto generata dalla porzione di rettangolo $ADLO$ meno il tronco di cono generato dal trapezio $AOGD$: dacchè anche qui per ogni punto di AO *altezza* del segmento si verifica che il circolo generatore del cilindro equivale alla somma dei due circoli, uno generatore del segmento, l' altro generatore del tronco di cono. Laonde basterà, ad avere la solidità del segmento, togliere da quella della parte corrispondente del cilindro la solidità del tronco di cono. Ma la solidità della parte corrispondente di cilindro è $\pi\overline{AC}^2 \times AO$ (N.° 300), e la solidità (N.° 322) del tronco di cono retto (essendo (N.° 326) $OG = CO = AC - AO$), fatte le debite riduzioni, riesce $\pi\overline{AC}^2 \times AO - \pi AC \times \overline{AO}^2 + \dfrac{\pi\overline{AO}^3}{3}$; dunque la solidità del segmento sarà

$$\pi\overline{AC}^2 \times AO - \pi\overline{AC}^2 \times AO + \pi AC \times \overline{AO}^2 - \frac{\pi\overline{AO}^3}{3},$$

sarà cioè $\pi\overline{AO}^2\left(AC - \dfrac{AO}{3}\right)$, come appunto fu annunziato nel teorema.

331. Se una sfera venga tagliata da due piani paralleli FNE, QUP (Fig.ª 199) la porzione di sfera $EQPF$ che rimane intercettata tra questi due piani dicesi *zona sferica*.

332. Corollario. *La solidità di una zona sferica equivale alla differenza tra le solidità dei due segmenti* EAF, QAP *determinati dai due piani fra i quali sta la zona.*

333. Se noi supponiamo che non già un intero semicerchio ATB (Fig.ª 200), ma un solo settore ACT compia la sua rivoluzione intorno ad AC, il solido $DTASC$ generato dicesi *settore* sferico; ed il segmento $SDTA$ dicesi suo segmento corrispondente.

334. Teorema 4.° *Un settore sferico equivale in solidità ad un cilindro, che abbia per base un circolo massimo della sfera, e per altezza i due terzi dell' altezza del segmento corrispondente.*

Dimostrazione. Il settore sferico $DTASC$ (Fig.ª 200) equivale al cono $CSDT$ più il segmento corrispondente $SDTA$. Dunque essendo $\pi\overline{SO}^2 \times \dfrac{(AC - AO)}{3}$ la solidità del cono (N.° 319), ed essendo $\pi\overline{AO}^2\left(AC - \dfrac{AO}{3}\right)$ la solidità del segmento, quella del settore sarà

$$\pi\overline{SO}^2 \times \frac{(AC - AO)}{3} + \pi\overline{AO}^2\left(AC - \frac{AO}{3}\right).$$

Ma (N.° 215) $2AC - AO : SO :: SO : AO$, cioè $\overline{SO}^2 = 2AC \times AO - \overline{AO}^2$, dunque, sostituendo un tale valore, la solidità del settore sferico sarà, fatte tutte le debite riduzioni, $\pi\overline{AC}^2 \times \dfrac{2AO}{3}$, come appunto fu annunziato nel teorema.

335. Teorema 5.° *La superficie di una sfera equivale a quattro suoi circoli massimi.*

Dimostrazione. Immaginiamo la sfera come composta di un numero indefinito di piccolissime piramidi rette, le quali combinino coi loro vertici al centro della sfera, e riempiano colle loro basi la di lei superficie. La solidità di ciascuna di queste piramidi si ottiene moltiplicandone la base pel terzo dell' altezza; e siccome nel nostro caso l' altezza di tutte sarebbe il raggio della sfera, per averne la solidità converrebbe moltiplicare la base di ciascuna pel terzo del raggio. Laonde per avere la solidità di tutte queste piramidi assieme converrebbe moltiplicare l' intera superficie sferica che risulta dall' unione delle basi, per il terzo del raggio. Ma la solidità di tutte queste piramidi assieme deve essere la solidità della sfera stessa che da esse risulta, deve essere cioè (N.° 327)

$\frac{4\pi r^3}{3}$, dunque $\frac{4\pi r^3}{3}$ sarà il prodotto della superficie sferica per il terzo del raggio. Diviso adunque questo prodotto per il terzo del raggio, cioè per $\frac{r}{3}$, il quoto sarà la stessa superficie sferica cercata. *Ma* $\frac{4\pi r^3}{3}$ diviso per $\frac{r}{3}$ dà per quoto $4\pi r^2$, dunque $4\pi r^2$ è il valore della cercata superficie. Ma $4\pi r^2$ è il valore di quattro circoli massimi della sfera stessa (N.° 256), dunque la superficie sferica equivale a quattro de' suoi circoli massimi.

336. Teorema 6.° *Le superficie delle sfere stanno tra loro come i quadrati dei rispettivi raggi.*

Dimostrazione. Chiamato R il raggio di una sfera, r il raggio di un' altra, le loro superficie saranno (N.° 335) $4\pi\overline{R}^2$, $4\pi r^2$. Ma $4\pi\overline{R}^2 : 4\pi\overline{r}^2 : \overline{R}^2 : \overline{r}^2$, dunque le superficie stanno tra loro come i quadrati dei raggi.

337. Teorema 7.° *La superficie della sfera equivale alla superficie laterale del cilindro a lei circoscritto.*

Dimostrazione. La superficie di una sfera di raggio r è (N.° 335) $4\pi r^2$. Ma la superficie laterale ancora del cilindro circoscritto (essendo $2\pi r$ la circonferenza della sua base, e $2r$ la sua altezza) è (N.° 304) $4\pi r^2$; dunque le due superficie sono equivalenti.

338. Teorema 8.° *La superficie della sfera sta all' intera superficie del cilindro a lei circoscritto come la solidità della sfera sta alla solidità del cilindro stesso.*

Dimostrazione. La superficie intera del cilindro circoscritto, compresa cioè anche la superficie delle basi, è (N.° 304) $6\pi r^2$; quella della sfera è $4\pi r^2$; dunque queste due superficie stanno tra loro come $4\pi r^2 : 6\pi r^2$, cioè stanno tra loro come 4 a 6, ossia come 2 a 3. Ma (essendo la solidità della sfera (N.° 327) $\frac{4\pi r^3}{3}$, e quella del cilindro a lei circoscritto (N.° 300) $2\pi r^3$) la solidità della sfera sta alla solidità del cilindro come $\frac{4\pi r^3}{3} : 2\pi r^3$, cioè come $\frac{4}{3} : 2$, cioè come $2 : 3$; dunque le superficie totali dei due solidi stanno tra loro come le solidità rispettive.

339. Teorema 9.° *La superficie di un segmento sferico equivale alla superficie laterale della parte di cilindro circoscritto che gli corrisponde.*

Dimostrazione. Il settore sferico $CTASD$ (Fig.ª 200) può considerarsi come risultante da tante piramidi infinitamente piccole, che abbiano tutte il vertice nel punto C, e che colle loro basi formino la superficie del segmento sferico $ATDS$: quindi per un ragionamento analogo all' usato superiormente (N.° 335) dividendo la solidità del settore per un terzo del raggio, il quoto sarà la superficie del segmento sferico $ASDT$. Ma la solidità del settore sferico è (N.° 334) $\frac{2}{3} AO \times \pi \overline{AC}^2$, dunque dividendo questa quantità per $\frac{AC}{3}$, il quoto $2\pi AC \times AO$ sarà la superficie del segmento. Ma $2\pi AC \times AO$ è appunto la superficie laterale della parte del cilindro circoscritto, che corrisponde al segmento, che resta cioè tagliata dal piano stesso che determina il segmento, perchè anche questa superficie laterale è $2\pi AC \times AO$ (N.° 304); dunque la superficie del segmento equivale alla superficie laterale della parte corrispondente di cilindro circoscritto.

340. Teorema 10.° *La superficie di una zona sferica equivale alla superficie laterale della parte di cilindro circoscritto che rimane intercettata tra i due piani che comprendono la zona stessa.*

Dimostrazione. La superficie della zona $EQPF$ (Figura 199) equivale, come è chiaro, alla differenza fra la superficie del segmento $AQUP$ e la superficie del segmento $AENF$. Ma la superficie del segmento $AQUP$ è (N.° 339) $2\pi AC \times AO$, la superficie del segmento $AENF$, è $2\pi AC \times AD$; dunque la superficie della zona sarà $2\pi AC(AO - AD)$ sarà cioè $2\pi AC(DO)$; ma DO è l' altezza della parte $TSRG$ del cilindro circoscritto, che rimane intercettata tra i due piani, dunque $2\pi AC \times DO$ che è la superficie della zona sarà ancora la superficie laterale di questa parte di cilindro circoscritto.

341. Teorema 11.° *La superficie di un settore sferico equivale alla superficie laterale di una parte del cilindro circoscritto, che abbia per altezza, l' altezza del segmento corrispondente a quel settore più la metà del raggio della base del segmento stesso.*

Dimostrazione. La superficie del settore sferico $ASDTC$ (Fig.ª 200) non è altro che la superficie del segmento $ASDT$, più quella del cono $CSDT$. Ma la superficie del segmento è (N.° 339) $2\pi AC \times AO$; quella del cono è (N.° 323) $2\pi SO \times \frac{AC}{2}$; dunque la superficie dell'intero settore sarà

$$2\pi AC \times AO + 2\pi SO \times \frac{AC}{2};\ \text{sarà cioè}\ 2\pi AC\left(AO + \frac{SO}{2}\right)$$

che è quanto si era annunziato nel teorema.

342. Oltre al prisma, al cilindro, alla piramide, al cono ed alla sfera sonovi altri quattro solidi regolari: noi senza impegnarci in dimostrazioni li accenneremo unicamente. Essi sono i seguenti:

1.° Il *Tetraedro* terminato da quattro triangoli equilateri ed eguali, e che si può considerare come una piramide triangolare (Fig.ª 201), la di cui base, e le laterali superficie sono triangoli equilateri eguali. Perciò la solidità e la superficie del tetraedro si calcoleranno nello stesso modo che quello della piramide.

2.° L' *Ottaedro* compreso da otto triangoli equilateri eguali (Fig.ª 202). e che può decomporsi in due eguali piramidi quadrangolari rette, che abbiano per base $AECD$, avendo l'una il vertice in B e l'altra in F. Quindi anche di questo solido apparisce il modo di calcolarne la superficie e la solidità.

3.° L' *Icosaedro* compreso da venti triangoli equilateri ed eguali (Fig.ª 203), e che può ritenersi risultare dall'unione di venti piramidi triangolari eguali, aventi le loro basi alla superficie di essi, ed i vertici al centro. Dal che facile si rende la maniera di calcolarne tanto la solidità che la superficie.

4.° Il *Dodecaedro* circoscritto da dodici pentagoni regolari ed eguali (Fig.ª 204), e che si considera come composto di dodici piramidi pentagone eguali, combinate coi loro vertici al centro, e colle basi formanti l'intera sua superficie. Perciò anche di questo solido riescirà facile il misurarne tanto la superficie, che la solidità.

343. Dopo i solidi regolari, dei quali parlammo fin qui, avvi un' infinità di altri solidi irregolari, i quali se sieno compresi da figure piane diconsi *poliedri rettilinei*, essendo in tal caso i loro lati altrettante rette. Spesso per la misura della solidità e della superficie dei solidi irregolari la Geometria elementare non si presta; e spesso quando si presta, quando cioè il solido è decomponibile in piramidi, il metodo riesce assai lungo e laborioso: quindi gioverà moltissimo il dare qui ai giovani un metodo di sicura pratica per determinare facilmente la solidità di tanti corpi irregolari di piccola mole.

Metodo generale. Abbiasi un pallelepipedo retto vuoto, ossia un recipiente rettangolare FU (Fig.ª 205). Dentro di esso si metta il corpo che si vuole misurare, e poscia vi si infonda dell' acqua, o della sabbia fino a tanto che sopravvanzi al solido stesso. Si noti l'altezza BE dell' acqua, o della sabbia, prima bene appianata. Ciò fatto se ne estragga il solido, e si noti di nuovo l'altezza BM dell' acqua, o dell' arena appianata come sopra. Egli è chiaro che il volume, o la solidità di detto corpo eguaglierà il parallelepipedo EL: e perciò se si calcolerà tale parallelepipedo moltiplicandone la base ML per l' altezza ME si avrà nel prodotto la solidità che si cercava.

APPENDICE

Di alcune linee curve delle quali si fa speciale uso in Fisica.

Nello studio della Fisica, oltre il far uso della curva circolare, spesso conviene ricorrere ad alcune altre curve che godono di particolari proprietà. Le principali tra queste curve sono la *Parabola*, l' *Elissi*, l' *Iperbola* e la *Cicloide*. Di ciascuna brevemente accenneremo il modo di generazione, e le proprietà che più interessano, per ciò che spetta allo studio della Fisica. Per facilitare però l' intelligenza di ciò che diremo circa tali curve, crediamo bene premettere alcune nozioni sulle curve in generale e sulle sezioni del cono.

CAPO I.

Nozioni preliminari.

344. Fra tutte le linee curve, che i matematici prendono a considerare, non avvene alcuna, la quale in tutto il suo andamento non proceda sempre colle stesse regole fisse,

e con certo determinato ordine. Da ciò ne viene che quella proprietà, la quale determina la natura della curva, e a lei conviene in un punto, le debba necessariamente convenire anche in tutti gli altri. Tale appunto è la natura del circolo (N.° 215), in cui l'ordinata è sempre media proporzionale fra i segmenti del diametro, non per un punto determinato solamente, ma per qualunque punto del circolo stesso.

345. Sogliono i geometri in qualunque curva RS (Figura 206) immaginare una linea retta, p. e. AT, la quale chiamano *asse delle ascisse*. In questo asse prendono sempre un certo punto A da cui intendono cominciare le rette AP, AQ, tagliate nei punti P e Q dalle due rette parallele MP, NQ condotte dalla curva sull'asse. Le dette parallele MP, NQ chiamansi *ordinate* della curva RS, pei rispettivi punti M ed N; e le due rette AP, AQ diconsi *ascisse* corrispondenti agli stessi punti della medesima curva. Il punto A poi, da cui s'intendono cominciare queste ascisse, dicesi *origine delle ascisse, o dell'asse*. Usano poi di reppresentare colla lettera y le *ordinate* tutte MP, NQ; e colla lettera x le *ascisse* tutte AP, AQ.

346. Quella proprietà che determina (N.° 344) la natura della curva si riduce sempre ad un rapporto costante tra le ordinate e le ascisse della curva stessa, ossia tra le y e le x. Così nel circolo AMB (Fig.ª 207) essendo MN (N.° 215) media proporzionale fra i segmenti AN, NB del suo diametro; contando le ascisse sul diametro AB dal centro C, e prendendo per ordinate le perpendicolari al diametro avremo che qualunque ordinata è media proporzionale fra il raggio più l'ascissa corrispondente, ed il raggio meno l'ascissa stessa, avremo cioè $AC + CN : MN :: MN : AC - CN$; e rappresentando colla lettera r il raggio AC del circolo, diremo che tra le ordinate e le ascisse di questa curva si verifica sempre questo rapporto $r+x : y :: y : r-x$; ossia che per un punto qualunque del circolo si verifica sempre l'*equazione* $y^2 = r^2 - x^2$, la quale appunto si ricava da quella proporzione. Una tale *equazione*, che si deduce dal rapporto che hanno tra loro le ascisse e le ordinate di una curva, dicesi dai matematici *equazione della curva stessa*: e quindi la trovata $y^2 = r^2 - x^2$ sarebbe l'equazione del circolo.

347. L'utilità di queste *equazioni* che dai matematici si adoprano per rappresentare le curve, si conosce particolarmente in quella parte di Matematica superiore che chiamasi Geometria analitica. Ne vedremo però un qualche esempio in quelle poche cose che diremo in appresso sopra alcune curve particolari. Anzi unicamente la maggiore facilità che si trova nel dimostrare certi teoremi, usando di quelle equazioni, piuttostochè usando le costruzioni semplicemente geometriche, ne ha indotti a ricorrere in appresso alcune volte alle equazioni stesse.

348. Dicesi retta *tangente* ad una curva, quella che tocca la curva in un solo punto senza segarla; come sarebbe (Figura 208) la retta AB, che tocca la curva FR nel solo punto T.

349. Se una retta SB (Fig.ª 209) cada sopra una curva GR in B, e si voglia misurare quanta sia l'inclinazione che una tal linea incidente ha alla curva, farà d'uopo condurre pel punto B la tangente BC alla curva; e l'inclinazione, che la linea SB avrà alla tangente BC, sarà la stessa di quella che ha la retta SB alla curva GB; cosicchè l'angolo rettilineo ABS, che fa la BS colla tangente AC, è lo stesso dell'angolo mistilineo GBS, che la stessa BS fa colla curva GR nel punto B.

350. La linea SB (Fig.ª 209) che partendosi dal punto S va ad un punto B della curva, si chiama spesso dai geometri col nome di *raggio*; e supposto che la BF sia tirata dal punto B in modo che l'angolo CBF eguagli l'angolo ABS, la stessa BF, riguardo al raggio SB, prende il nome di *raggio riflesso*; e dicesi p. e. dai geometri che il raggio SB si *riflette* nella direzione della BF, o che si *riflette* nel punto F.

351. In cinque modi differenti un cono retto può essere segato da un piano; e cinque sono le linee di diversa specie che derivano dall'intersezione del piano segante colla superficie del cono stesso. Primieramente il piano segante può passare pel vertice del cono, ed allora la figura che ne risulta è un *triangolo*. In secondo luogo il piano segante può essere parallelo alla base della sezione, ed allora la curva $ELNM$ (Fig.ª 210) che ne risulta è un *circolo*. In terzo luogo il piano segante $DFHG$ (Fig.ª 210) può essere parallelo a quel lato BC del cono stesso, il quale passa per l'estremità del diametro AC perpendicolare alla sezione FG, che fa la base del cono col piano stesso segante: in tal caso la curva $FLDMG$, che ne risulta, dicesi *parabola*. In quarto luogo

il piano segante NFV (Fig.ª 211) può essere inclinato in modo da segare due lati opposti del cono, ed allora la curva $NFLVMG$, che ne risulta, dicesi *elisse*. In quinto luogo finalmente il piano segante FRG (Fig.ª 212) può essere diretto in modo da segare un lato del cono AB, e da segare il prolungamento dell'altro lato opposto BC al di sopra del vertice B in Q, ed allora la curva $FLRMG$, che ne risulta, dicesi *iperbole*. Le figure, o le curve diverse, che risultano da queste cinque differenti maniere di segare il cono, diconsi *sezioni coniche*: autonomasticamente però si chiamano sezioni coniche le tre ultime, delle quali diremo ora partitamente, avendo già parlato a sufficienza altrove del triangolo e del circolo.

CAPO II.

Della Parabola.

352. Abbiamo detto che se il piano segante FDG (Figura 210) è parallelo a quel lato BC del cono, il quale passa per l'estremità del diametro AC perpendicolare alla sezione FG, la curva, che risulta dall'intersezione di quel piano colla superficie conica, è una *parabola*. La retta HD tirata sul piano segante parallela al lato BC, e tirata dal punto H dove il piano segante taglia il diametro AC della base, dicesi *asse* della parabola; ed il punto D, in cui quest'asse taglia la curva stessa, dicesi *vertice* della parabola. Noi prenderemo ora l'asse della parabola per asse delle ascisse; ed il vertice D lo considereremo come l'origine delle ascisse stesse. Le ordinate poi della parabola, relative alle ascisse stesse, contate sull'asse HD, le prenderemo perpendicolari all'asse stesso. Siccome poi la base AGC e tutti gli altri piani p. e. EMN a lei paralleli, sono, per la qualità del cono retto, perpendicolari al piano ABC, che passa pel vertice e pel diametro della base, quindi ne deriva che le intersezioni KM, HG ecc. del piano segante coi piani paralleli alla base, saranno tutte perpendicolari all'asse DH (N.° 269) essendo GH perpendicolare per dato ad AC, e quindi KM perpendicolare ad EN. Perciò KM, HG saranno ordinate della parabola.

353. Teorema 1.° *Nella parabola i quadrati delle ordinate stanno tra loro come le ascisse rispettive.*

Dimostrazione. Supponiamo condotto per un punto qualunque K (Fig.ª 210) dell'asse DH della parabola, un piano parallelo alla base AC. Per le cose dette (N.° 333) saranno KM, HG due ordinate della parabola, e DK, DH saranno le rispettive ascisse. Ora per essere KM ed HG ordinate dei rispettivi circoli EMN, AGC, abbiamo (N.° 215) $\overline{KM}^2 = EK \times KN$, $\overline{HG}^2 = AH \times HC$, quindi

$$\overline{KM}^2 : \overline{HG}^2 :: EK \times KN : AH \times HC.$$

Ma $KN = HC$ per essere DH parallelo a BC, ed EN parallelo ad AC; quindi sarà ancora $\overline{KM}^2 : \overline{HG}^2 :: EK : AH$. Ma dal triangolo ADH abbiamo $EK : AH :: DK : DH$, dunque sostituendo sarà $\overline{KM}^2 : \overline{HG}^2 :: DK : DH$, cioè i quadrati delle ordinate proporzionali alle ascisse rispettive.

354. Corollario. *Il quadrato di un'ordinata qualunque, diviso per la sua ascissa corrispondente, dà sempre il medesimo quoto*; perchè alternando la proporzione somministrata dal teorema precedente si ha $\overline{KM}^2 : DK :: \overline{HG}^2 : DH$, e quindi $\frac{\overline{KM}^2}{DK} = \frac{\overline{HG}^2}{DH}$, equazione, che indica appunto che il quoto è sempre lo stesso.

355. Sia (Fig.ª 213) la parabola GDF: dal punto M sia abbassata l'ordinata MK: si trovi (N.° 225) la terza proporzionale della DK e KM, e sia la DO, cosicchè si verifichi questa proporzione $DK : KM :: KM : DO$; questa retta DO dicesi *parametro* della parabola.

356. Dalla proporzione $DK : KM :: KM : DO$ si ricava $\overline{KM}^2 = DK \times DO$; e quindi $\frac{\overline{KM}^2}{DK} = DO$. Ma noi abbiamo veduto (N.° 354) che il quadrato di qualunque ordinata diviso per la rispettiva ascissa dà sempre il medesimo quoto; dunque questo quoto sarà sempre il parametro DO. Laonde rappresentando con y le ordinate della parabola, con x le sue ascisse, e con $4p$ il suo parametro, diremo che in una tale curva si verifica sempre l'equazione $\frac{y^2}{x} = 4p$, cioè $y^2 = 4px$: e questa sarà perciò (N.° 346) la sua *equazione*.

357. Sia (Fig.ª 214) la parabola GDF. Se si prenda dal punto D sull'asse DH una porzione DF eguale alla quarta parte del parametro della parabola stessa, ossia eguale a p, quel punto F dicesi *fuoco* di essa parabola; la retta FM, che congiunge questo fuoco F con un punto M qualunque di tale curva, dicesi *raggio vettore*: e noi lo rappresenteremo con r. Se poi sull'asse DH prolungato all'infuori se ne prenda una porzione DO eguale essa pure alla quarta parte del parametro, e pel punto O si faccia passare la RS perpendicolare all'asse stesso DH, quella retta RS dicesi *direttrice* della parabola.

358. Teorema 2.° *Nella parabola un qualunque raggio vettore* F M (Fig.ª 214) *è eguale all'ascissa corrispondente del punto* M *più la quarta parte del parametro, ossia più la distanza del fuoco dal vertice della parabola.*

Dimostrazione. Abbassata dal punto M l'ordinata MK, dal triangolo rettangolo FMK abbiamo $\overline{FM}^2 = \overline{KM}^2 + \overline{FK}^2$, ossia $r^2 = y^2 + (x-p)^2$; e mettendo a luogo di y^2 il suo valore dato (N.° 356) dall'equazione della parabola $y^2 = 4px$, e sviluppando quel quadrato avremo $r^2 = 4px + x^2 - 2px + p^2$, ossia riducendo $r^2 = x^2 + 2px + p^2$; ed estraendo la radice da ambidue i membri di quell'equazione, avremo $r = x + p$; cioè $FM = DK + DF$, come era a dimostrarsi.

359. Teorema 3.° *La distanza di un punto qualunque* M *della parabola dalla direttrice* R S, *eguaglia il raggio vettore corrispondente a quel medesimo punto* M.

Dimostrazione. Tirata dal punto M sopra RS la perpendicolare MP, essa evidentemente riesce eguale ad OK: ma OK eguaglia $OD + DK$, eguaglia cioè (N.° 357) $p + x$, dunque anche la PM, che è la distanza del punto M dalla direttrice, equivale alla ascissa corrispondente più la quarta parte del parametro, quindi questa distanza eguaglia (N.° 358) il raggio vettore corrispondente allo stesso punto M.

360. Da questa proprietà della parabola si ricava come corollario un modo meccanico di descrivere questa curva sopra un piano. Si prenda (Fig.ª 215) una squadra MNP, e si disponga in modo che uno de' suoi lati NP possa muoversi liberamente lungo una retta CD, e si prenda un filo eguale in lunghezza all'altro lato MN della squadra medesima, il quale lato però può essere lungo quanto si vuole; un capo di questo filo si fissi nell'estremità M del lato MN della squadra, e l'altro capo si fissi in un punto F, distante dalla retta CD della metà del parametro che si assegna alla parabola da costruirsi: ciò fatto, mediante la punta di uno stilo, si tenga costantemente teso il filo contro il lato MN della squadra, mentre essa scorre coll'altro lato lungo la retta CD da C verso D; la punta dello stilo descriverà una parte AGH della parabola, mentre per la lunghezza del filo eguale ad MN, riesce costantemente nelle diverse posizioni PNM, $P'N'M'$, in cui si trova successivamente la squadra $GF = GN$, $G'F = G'N'$ ecc. Voltando la spuadra e ripetendo la medesima operazione dall'altra parte si avrebbe l'altra porzione AL di parabola.

361. Teorema 4.° *Ogni punto preso dentro alla parabola è più vicino al fuoco che alla direttrice; ed ogni punto preso fuori della parabola è più vicino alla direttrice che al fuoco.*

Dimostrazione. 1.° Sia il punto G preso dentro alla parabola KDE (Fig.ª 216) uniscasi il punto G col fuoco F, e dal punto G si tiri la GO perpendicolare alla direttrice RS: prolunghisi la FG fino a toccare la parabola in M; dal punto M tirisi la MV parallela a GO, e dal punto G la GN parallela ad RS. Fatta questa costruzione avremo (N.° 359) $FM = MV$, e pel triangolo GNM rettangolo in N sarà (N.° 65) $GM > MN$, quindi evidentemente sarà ancora $FM - GM < MV - MN$, ossia $FG < GO$.

2.° Sia il punto T fuori della parabola (Fig.ª 216); unito F con T, e tirate dal punto T la TR perpendicolare alla direttrice, dal punto Q, dove la TF taglia la parabola, la QG parallela a TR, e la QA parallela ad RS, sarà (N.° 359) $FQ = QG$, e (N.° 65) $QT > TA$, quindi $FQ + QT > QG + AT$, ossia $FT > RT$.

362. Problema. *Data la parabola* GDK (Fig.ª 217) *tirare una tangente al punto* M *dato di questa parabola.*

Soluzione. Si congiunga il fuoco F col punto dato M mediante una retta: dal punto M si abbassi una perpendicolare MP sulla direttrice OS; si unisca P con F mediante la PF; questa si divida a metà in R, e si faccia passare pei punti R ed M una retta BMQ questa sarà la tangente cercata.

Dimostrazione. Si unisca un punto A qualunque della BQ coi punti P ed F; poscia si tiri da A la AO perpendicolare alla direttrice. Siccome (N.° 359) MP eguaglia MF, e per costruzione PR eguaglia RF, converrà che i due triangoli PRM, RMF, sieno eguali, e quindi rettangoli in R: ciò posto anche i due triangoli ARF, ARP saranno eguali tra loro, per avere RA comune, PR eguale ad RF, e l'angolo interposto eguale; perciò AF sarà eguale ad AP. Ma pel triangolo rettangolo POA si ha $AP > AO$, dunque sarà ancora AF maggiore di AO; e quindi (N.° 361) il punto A della retta QMB si troverà fuori della parabola. Ma con eguale ragionamento si dimostra egualmente che qualunque altro punto della QB, eccettuato il punto M, è fuori della parabola, dunque la QB tocca la parabola nel solo punto M senza segarla, quindi (N.° 348) essa è tangente alla parabola stessa.

363. Teorema 5.° *Un raggio qualsiasi che partendosi dal fuoco vada ad un punto* M (Fig.ª 217) *della parabola, si riflette in direzione parallela all' asse.*

Dimostrazione. Tirata al punto M la tangente BM colla costruzione usata nel problema precedente, si prolunghi la PM parallela all'asse. L'angolo QMT è eguale al suo opposto al vertice PMR; ma per l'eguaglianza dei due triangoli PMR, RMF l'angolo PMR eguaglia l'angolo RMF, dunque anche l'angolo QMT sarà eguale all'angolo RMF; cioè l'angolo che la tangente fa da una parte col raggio MF, lo fa dall'altra colla MT parallela all'asse della parabola; quindi (N.° 330) il raggio MF si riflette parallelmente all'asse.

364. Teorema 6.° *La tangente ad un punto* M *della parabola* (Fig.ª 218) *se venga prolungata incontra l' asse ad una distanza* TS *dal vertice eguale all' ascissa* SN, *corrispondente allo stesso punto* M.

Dimostrazione. Il raggio vettore FM si riflette secondo MQ parallelmente all'asse (N.° 363), quindi l'angolo OMQ eguaglia non solo l'angolo FMT, ma ancora l'angolo MTF, quindi il triangolo MTF avrà i due lati MF, TF eguali: ma (N.° 358) $MF = p + x$, dunque anche $TF = p + x$: ma (N.° 357) $SF = p$, dunque $TS = x$, ossia $TS = SN$, come era a dimostrarsi.

365. Teorema 7.° *Il quadrato della parte di tangente* (Figura 218) *compresa tra il punto di contatto* M *ed il punto* T *dove essa incontra l' asse eguaglia il quadruplo dell' ascissa nel raggio vettore corrispondente allo stesso punto* M.

Dimostrazione. Dal triangolo rettangolo TMN si ha $\overline{TM}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{NT}^2$, cioè (essendo $MN = y$, ed $NT = TS + SN = TS + x$, ed avendo dimostrato (N.° 364) che anche $TS = x$) $\overline{TM}^2 = y^2 + (2x)^2$: ma l'equazione della parabola dà $y^2 = 4px$, dunque $\overline{TM}^2 = 4px + 4x^2$ cioè $\overline{TM}^2 = 4x(p+x)$; ma $p + x$ (N.° 358) eguaglia il raggio vettore FM, dunque $\overline{TM}^2 = 4x \times FM$, come era a dimostrarsi.

366. Una retta qualunque MQ (Fig.ª 218) parallela all' asse della parabola dicesi *diametro*; quindi nella parabola infiniti sono i diametri, potendosi da ciascun suo punto tirare una parallela all' asse. Alcune volte in Fisica occorre prendere per asse delle *ascisse* non già l'asse principale della parabola ma bensì un suo diametro; in tal caso poi è uso prendere le ordinate non già perpendicolari a questo diametro, ma sibbene parallele a quella retta che è tangente alla parabola nel punto in cui il diametro taglia la curva stessa. Così, a cagione d'esempio, se prendasi per asse delle ascisse il diametro MQ, saranno ordinate dei diversi punti le parallele alla tangente OM, come sarebbe GH, RV. Vediamo in simile caso quale rapporto regni tra le ordinate e le rispettive ascisse.

367. Teorema 8.° *Prese, nel modo ora accennato, le ordinate e le ascisse, sempre si verifica che i quadrati delle ordinate stanno fra loro come le rispettive ascisse.*

Dimostrazione. Dal punto G si abbassi la GK perpendicolare all' asse della parabola, e indicando sempre GK con y ed SK con x, chiameremo y' la nuova ordinata GH, ed x' la nuova ascissa MH. Essendo il triangolo GHA simile al triangolo TMN avremo le due proporzioni

$$GA : GH :: MN : MT$$
$$AH : GH :: NT : MT;$$

cioè

$$GK - MN : GH :: MN : MT$$
$$SK - SN - MH : GH :: NT : MT;$$

quindi, essendo (N.° 364) $NT = 2SN$,

$$y - MN : y' :: MN : MT$$
$$x - SN - x' : y' :: 2SN : MT.$$

Perciò avremo

$$y=\frac{y' MN}{MT}+MN=MN\left(\frac{y'}{MT}+1\right)$$

$$x=\frac{2y' SN}{MT}+SN+x'=SN\left(\frac{2y'}{MT}+1\right)+x'.$$

Ma dall' equazione trovata della parabola si ha $y^2=4px$, quindi sostituendo per y e per x i trovati valori avremo

$$\overline{MN}^2\left(\frac{y'^2}{\overline{MT}^2}+\frac{2y'}{MT}+1\right)=4pSN\left(\frac{2y'}{MT}+1\right)+4px':$$

ma per la stessa equazione della parabola si ha $\overline{MN}^2=4pSN$, dunque sostituendo e facendo le debite riduzioni sarà

$$4pSN\left(\frac{y'^2}{\overline{MT}^2}\right)=4px',$$

e togliendo il fattore comune $4p$, ed essendo (N.° 365) $\overline{MT}^2=4SN\times FM$ si avrà $\frac{y'^2}{4FM}=x'$, cioè $y'^2=4FMx'$;

il che vuol dire che fra i quadrati delle nuove ordinate, e le rispettive ascisse vi è sempre un rapporto costante $4FM$, e quindi che i quadrati delle nuove ordinate stanno sempre fra loro come le rispettive ascisse, come era a dimostrarsi.

368. Teorema 9.° *Nella parabola un diametro* MQ (Figura 218) *qualunque, taglia sempre a metà quella retta* PG, *che è parallela alla tangente corrispondente al punto* M *dove ha origine il diametro.*

Dimostrazione. Con una costruzione ed un processo del tutto analogo all' usato nel teorema antecedente si prova che $\overline{PH}^2=4FMx'$, quindi converrà necessariamente che sia $\overline{PH}^2=y'^2$, cioè $\overline{PH}^2=\overline{GH}^2$, cioè $PH=GH$, che è appunto quanto era a dimostrarsi.

CAPO III.

Dell' Elisse.

369. Abbiamo detto superiormente (N.° 351) che segando un cono retto ABC (Fig.ª 211) con un piano NFV talmente inclinato che tagli due lati opposti AB, BC del cono stesso, ne risulta una sezione $NFVM$ che dicesi *Elisse.* Il piano NFV inclinato alla base del cono, e quindi a qualunque sezione condotta parallela alla base, riescirà necessariamente perpendicolare a qualcuno dei tanti piani che si possono condurre pel vertice del cono, e per un diametro della base. Noi supporremo che il piano NFV sia perpendicolare al piano condotto per B e pel diametro AC. La retta VN che segnerà l' intersezione del piano dell' elissi con questo piano a lei perpendicolare ABC dicesi *asse maggiore* dell' elissi, e noi lo rappresenteremo sempre con $2a$; le ascisse le conterremo su questo asse VN, e ne porremo l' origine al punto O, che è il punto dove questo asse VN viene diviso a metà e che chiamasi *centro* dell' elissi. Se per due punti qualunque H e K dell' asse maggiore si facciano passare due piani paralleli alla base, le sezioni saranno due circoli, RLE, DFT, che saranno essi pure perpendicolari al piano che passa pel vertice B e pel diametro AC della base, quindi se dai punti H e K si innalzino le rette GH, MK perpendicolari al piano ABC, queste rette dovranno essere (N.° 269) tanto sul piano dell' elissi VFN, quanto nel piano di uno dei due circoli rispettivi, quindi queste rette prolungate saranno le intersezioni dei due circoli col piano dell' elisse, e saranno perpendicolari tanto ai rispettivi diametri RE o DT dei circoli, quanto all' asse VN dell' elissi, per essere tali diametri, insieme coll' asse, tutti sul piano ABC. Ciò poste le rette MK, GH perdendicolari all' asse dell' elisse noi le prenderemo per *ordinate* dell' elisse stesso, e per essere ciascuna di esse perpendicolare anche al diametro del circolo corrispondente, sarà $GH=FH$, $KM=KL$, ed in generale *l' asse maggiore taglierà a mezzo tutte le corde dell' elisse, le quali sono perpendicolari all' asse stesso.*

370. Teorema 1.° *Nell' elisse i quadrati delle ordinate sono sempre proporzionali ai rettangoli che si formano coi rispettivi segmenti dell' asse maggiore.*

Dimostrazione. Essendo (N.° 569) MK (Fig.^{a} 211) perpendicolare ad RE, e GH perpendicolare a DT, avremo (N.° 215) $\overline{MK}^2 = RK \times KE$, $\overline{GH}^2 = DH \times HT$, cioè $\overline{MK}^2 : \overline{GH}^2 :: RK \times KE : DH \times HT$. Ma per la somiglianza dei triangoli RKV, DHV, e dei triangoli NKE, NHT si ha

$$RK : DH :: KV : HV$$
$$KE : HT :: KN : HN,$$

e quindi

$$RK \times KE : DH \times HT :: KV \times KN : HV \times HN,$$

dunque sostituendo avremo

$$\overline{MK}^2 : \overline{GH}^2 :: KV \times KN : HV \times HN,$$

che è appunto il teorema enunciato.

571. Corollario. *Nell' elissi il quadrato di qualunque ordinata diviso per il rettangolo formato dai segmenti rispettivi dell' asse maggiore, dà sempre il medesimo quoto.* Di fatti alternando la proporzione del teorema antecedente si ha

$$MK^2 : KV \times KN :: \overline{GH}^2 : HV \times HN,$$

quindi $\dfrac{\overline{MK}^2}{KV \times KN} = \dfrac{\overline{GH}^2}{HV \times HN}$, cioè qualunque sia l'ordinata, e quindi qualunque sieno i segmenti rispettivi, il quoto è sempre il medesimo.

572. Questo quoto $\dfrac{\overline{MK}^2}{KV \times KN}$ che non varia al variare dell'ordinata MK, e dei rispettivi segmenti poniamolo eguale a C; sia cioè $\dfrac{\overline{MK}^2}{KV \times KN} = C$: essendo $MK = y$, $KV = a - x$, $KN = a + x$, e quindi $KV \times KN = (a-x)(a+x) = a^2 - x^2$ l' equazione $\dfrac{\overline{MK}^2}{KV \times KN} = C$ si potrà trasformare nell' altra

$\dfrac{y^2}{a^2 - x^2} = C$, cioè $y^2 = C(a^2 - x^2)$, e trovato che sia quel valore costante che ha C, questa stessa equazione sarà quella (N.° 546) che rappresenta l' elisse. Troviamo ora questo valore di C: sia (Fig.^{a} 219) $ADBO$ un' elisse il cui asse maggiore è AB. Pel centro C di questa elisse si conduca la DO perpendicolare ad AB; questa DO, che si dice *asse minore* dell' elisse, poniamola eguale a $2b$, sarà (N.° 569) $DC = b$. Ora per essere anche DC ossia b un' ordinata y dell' elisse, che ha per ascissa corrispondente $x = o$, dovrà per tali valori verificarsi l' equazione $y^2 = C(a^2 - x)$, cioè sostituiti questi valori dovrà essere $b^2 = Ca^2$. Ma in questa equazione $C = \dfrac{b^2}{a^2}$, dunque il suo valore, che è sempre costante, sarà $\dfrac{b^2}{a^2}$; e quindi l' equazione dell' elisse sarà $y^2 = \dfrac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$.

573. Abbiasi (Fig.^{a} 219) una elisse $ADBO$. Se fatto centro nell' estremità D dell' asse minore con un raggio eguale ad AC, ossia al semiasse maggiore, si descriva una circonferenza, i due punti F, F', dove questa circonferenza taglierà l' asse maggiore, si chiamano *fuochi* dell' elisse. Ciascuno di questi fuochi, come è chiaro, è egualmente distante dal centro riescendo per la costruzione $CF = CF'$. Il quadrato poi di questa distanza equivale alla differenza dei quadrati dei due semiassi, essendo pel triangolo rettangolo DCF, $\overline{CF}^2 = \overline{DF}^2 - \overline{DC}^2 = a^2 - b^2$. Noi d' ora innanzi rappresenteremo la distanza di ciascuno dei due fuochi dal centro colla lettera c, e perciò sarà $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

574. Teorema 2.° *Nell' elisse la somma dei raggi vettori* FM, $F'M$ *condotti dai due fuochi ad un suo punto* M *qualunque equivale all' asse maggiore dell' elisse stessa.*

Dimostrazione. Abbassata dal punto M l' ordinata MN, pel triangolo rettangolo $F'MN$ si avrà $\overline{F'M}^2 = \overline{F'N}^2 + \overline{MN}^2$, cioè $\overline{F'M}^2 = (c+x)^2 + y^2$, e sviluppando il quadrato e mettendo al luogo di y il valore dedotto dall' equazione dell' elisse sarà $\overline{F'M}^2 = c^2 + 2cx + x^2 + b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$, cioè sostituendo il valore di c in c^2 si avrà

$$\overline{F'M}^2 = a^2 - b^2 + b^2 + 2cx + \frac{x^2}{a^2}(a^2 - b^2),$$

e quindi $\overline{F'M}^2 = a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2$; ora in questa equazione estraendo la radice quadrata da ambidue i membri, siccome il secondo membro è il quadrato perfetto di $a + \frac{cx}{a}$ si ottiene $F'M = a + \frac{cx}{a}$. Pel triangolo poi rettangolo FMN si ha $\overline{FM}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{FN}^2$, cioè $\overline{FM}^2 = y^2 + (c - x)^2$, quindi operando come si è fatto superiormente sarà

$$\overline{FM}^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} + c^2 - 2cx + x^2 =$$

$$\frac{x^2}{a^2}(a^2 - b^2) + a^2 - b^2 + b^2 - 2cx = \frac{c^2 x^2}{a^2} + a^2 - 2cx,$$

ed estraendo la radice si ottiene $FM = a - \frac{cx}{a}$. Perciò $FM + F'M = a + \frac{cx}{a} + a - \frac{cx}{a}$, cioè $FM + F'M = 2a$, come era a dimostrarsi.

375. Da questa proprietà dell'elissi si ricava un metodo meccanico per descrivere l'elisse. Scelti a piacere in un piano due punti F, F' (Fig.ª 219) si prenda un filo di qualunque lunghezza sempre però maggiore della distanza dei due punti scelti, un capo di questo filo si fissi in F, l'altro capo in F', quindi col mezzo di una punta tenendo continuamente teso il filo, si faccia girare da una parte e dall'altra quella punta finchè ritorni al luogo da cui partì, la curva che essa descriverà sarà una elisse, che avrà per asse maggiore la lunghezza del filo adoperato, verificandosi di essa che la somma dei raggi vettori condotti ad uno stesso punto dai due fuochi F, F' eguaglia sempre il suo asse maggiore.

376. Teorema 3.° *La somma delle distanze di un punto qualunque dai fuochi dell'elisse è minore dell'asse maggiore, se quel punto sta dentro l'elisse stessa, ed è maggiore se sta fuori.*

Dimostrazione. Sia (Fig.ª 220) il punto N dentro l'elisse, prolungata la $F'N$ fino a toccare l'elisse in O, ed unito F con O mediante una retta, sarà nel triangolo FNO, $FN < FO + ON$; quindi $F'N + FN < F'N + NO + FO$, cioè $F'N + FN < F'O + FO$: ma $F'O + FO = 2a$ (N.° 374) dunque $F'N + FN < 2a$.

Sia il punto M fuori dell'elisse, si unisca il punto O dove FM taglia l'elisse con F', pel triangolo $F'MO$ sarà $F'M + MO > F'O$, quindi $F'M + MO + OF > F'O + OF$, cioè $F'M + MF > F'O + OF$: ma $F'O + OF = 2a$, dunque $F'M + MF > 2a$.

377. Problema. *Tirare una retta che sia tangente all'elisse in un suo punto* M *dato* (Fig.ª 221).

Soluzione. Si tirino al punto M i due raggi vettori FM, $F'M$, quindi diviso a metà colla retta MS l'angolo FMF' si tiri la RT perpendicolare ad MS, la RT sarà la tangente cercata.

Dimostrazione. Preso un punto qualunque T sopra questa retta, si unisca col fuoco opposto F'; dal punto F' si conduca la $F'R$ perpendicolare ad RT, e si prolunghi finchè incontra in V la FM prolungata essa pure; si unisca il punto V col punto T; ed il punto T col punto F. Essendo SM perpendicolare ad RT, ed essendo i due angoli SMF', SMF eguali tra loro, anche l'angolo $F'MR$ eguaglierà l'angolo FMT, e quindi eguaglierà anche il suo opposto VMR, perciò i due triangoli VMR, RMF' saranno eguali tra loro. Ma $FM + F'M = 2a$, dunque anche $VM + MF$, ossia $VF = 2a$. Ma dal triangolo VTF si ha $VT + TF > VF$, dunque $VT + TF > 2a$. Ma per l'eguaglianza manifesta dei due triangoli VTR, TRF' si ha $VT = TF'$, dunque $TF' + TF > 2a$; cioè (N.° 376) il punto T è fuori dell'elisse. Ma con simile ragionamento si prova che qualunque altro punto della RT, eccetto M, sta fuori della stessa curva, dunque (N.° 348) RT è la tangente richiesta.

378. Corollario. *Nell'elisse i raggi che si partono da uno qualsiasi dei due fuochi si riflettono nell'altro*; difatti si verifica la condizione richiesta (N.° 350), che cioè $RMF' = TMF$ qualunque sia il punto M, è la corrispondente tangente.

CAPO IV.

Dell' Iperbole.

379. Abbiamo detto (N.° 351) che se il piano segante FRG (Fig.° 212) sia diretto in modo da segare non solo un lato del cono AB, ma da segare ancora al di sopra del vertice il prolungamento del lato opposto BC, la curva che ne riesce $FLRMG$ dicesi *iperbole*. Se noi supponiamo che al vertice B cominci un altro cono capovolto DBE, il quale sia formato dal prolungamento dei lati tutti che formano il cono ABC, è chiaro che quel piano segante FRG prolungato taglierà pure l'altro cono, e la curva VQN che ne risulta dall'intersezione della superficie di questo nuovo cono col piano stesso segante sarà essa pure una iperbole, e dicesi iperbole opposta all'altra $FLRMG$. Anche per questo piano segante, che forma l'iperbole, come pel piano, che forma l'elisse (N.° 369), devesi verificare che egli riescirà perpendicolare ad uno dei tanti piani che passano pel vertice B, e per un diametro della base del cono retto ABC. Supponiamo che riesca perpendicolare alla sezione ABC, che passa cioè pel diametro AC, con un ragionamento del tutto analogo al fatto per l'elisse si proverà che le sezioni LM, FG del piano dell'iperbole coi circoli paralleli alla base del cono sono perpendicolari tanto ai diametri PS, AC, quanto alla retta RH che segna l'intersezione del piano dell'iperbole, col piano ABC. Quindi se si prenda RH per asse delle ascisse, KM, HG saranno le ordinate perpendicolari dei rispettivi punti M e G, ed inoltre RH taglierà a mezzo le corde LM, FG dell'iperbole a lui perpendicolari. È poi chiaro che l'asse RH prolungato entrerà nell'iperbole opposta VQN pel punto Q, e passerà pel diametro DE segnato nella base del cono capovolto dal piano BAC prolungato. La retta RQ che è il tratto dell'asse RH prolungato, che rimane fuori dell'iperbole, dicesi *asse reale* o *principale*, e noi lo porremo eguale a $2a$. Diviso a metà quest'asse principale in O, lo stesso punto O dicesi *centro* dell'iperbole, e noi porremo l'origine delle ascisse in questo centro.

380. Teorema 1.° *Nell' iperbole i quadrati delle ordinate stanno fra loro come i rettangoli formati dall' ascissa corrispondente aggiunta al semiasse principale, nell' ascissa stessa diminuita dello stesso semiasse.*

Dimostrazione. Essendo (Fig.° 212) KM ed HG perpendicolari ai diametri dei rispettivi circoli avremo (N.° 215)

$\overline{KM}^2 = PK \times KS$, $\overline{HG}^2 = AH \times HC$, quindi sarà

$$\overline{KM}^2 : \overline{HG}^2 :: PK \times KS : AH \times HC.$$

Ma dai triangoli simili AHR, PKR, e dai triangoli simili QHC, QKS, si ha

$$PK : AH :: KR : HR$$
$$KS : HC :: QK : QH,$$

e quindi $PK \times KS : AH \times HC :: KR \times QK : HR \times QH$, dunque sarà $\overline{KM}^2 : \overline{HG}^2 :: KR \times QK : HR \times QH$, cioè $\overline{KM}^2 : \overline{HG}^2 :: (OK-a)(OK+a) : (OH-a)(OH+a)$ che è appunto il teorema annunciato.

381. Corollario. *Nell' iperbole il quadrato di qualunque ordinata diviso per il rettangolo formato dall' ascissa corrispondente aggiunta al semiasse principale, nella stessa ascissa diminuita dello stesso semiasse dà sempre il medesimo quoto.* Di fatti alternando le proporzioni del teorema antecedente si ha

$$\overline{KM}^2 : (OK-a)(OK+a) :: \overline{HG}^2 : (OH-a)(OH+a)$$

e quindi $\dfrac{\overline{KM}^2}{(OK-a)(OK+a)} = \dfrac{\overline{HG}^2}{(OH-a)(OH+a)}$, cioè al variare dell'ordinata, e quindi del rettangolo divisore non varia il quoto.

382. Questo quoto invariabile $\dfrac{\overline{KM}^2}{(OK-a)(OK+a)}$ poniamolo eguale a C; avremo (sostituendo y a KM ed x a OK) $\dfrac{y^2}{(x-a)(x+a)} = C$, cioè $\dfrac{y^2}{x^2-a^2} = C$, cioè $y^2 = C(x^2-a^2)$; e trovato che sia quel valore costante che ha C, questa stessa equazione sarà (N.° 346) quella che rappresenta l'iperbole. Per trovare quel valore di C sia (Fig.° 222) l'iperbole CBD che ha la sua opposta EAF dal punto O si abbassi la OG perpendicolare ad AB, e si prenda $OG = OB$: unito il punto G col punto B mediante la GB, si prenda sull'asse OH una

porzione ON eguale a GB dal punto N si innalzi l'ordinata NM che chiameremo b. Essendo $\overline{GB}^2 = \overline{OG}^2 + \overline{OB}^2 = 2a^2$ anche $\overline{ON}^2$ eguaglierà $2a^2$; quindi dovendosi per l'equazione dell'iperbole $y^2 = C(x^2 - a^2)$, verificare che

$$\overline{MN}^2 = C(\overline{ON}^2 - a^2),$$

sarà $b^2 = C(2a^2 - a^2)$, cioè $b^2 = Ca^2$; e quindi $C = \frac{b^2}{a^2}$; e quindi l'equazione dell'iperbole sarà $y^2 = \frac{b^2}{x^2}(a^2 - a^2)$.

383. Dal centro O dell'iperbole (Fig.ª 222) innalzando una perpendicolare OS eguale a quell'ordinata MN che ha per ascissa $ON = GB = \sqrt{2a^2}$, e prolungando questa perpendicolare al di sotto fino in T in modo che $OT = OS$, la retta TS, che sarà eguale a $2b$ dicesi *asse secondario* od *immaginario* dell'iperbole; ed apparisce dalle cose dette come possa determinarsi geometricamente qualora non sia dato.

384. Se, unita l'estremità B dell'asse secondario colla estremità A' dell'asse principale (Fig.ª 223) mediante la retta BA', si faccia centro in O, e con un raggio eguale a BA' si descrivi una circonferenza; i punti F, F' dove questa circonferenza taglierà i prolungamenti di AA' si dicono *fuochi* dell'iperbole.

Per trovare il valore della distanza OF, od OF' di ciascuno di questi due fuochi dal centro basterà trovare il valore di BA' che per costruzione eguaglia OF ed OF'. Ora pel triangolo rettangolo BOA' si ha

$$\overline{BA'}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{OA'}^2 = b^2 + a^2,$$

dunque anche $\overline{OF}^2$, ossia $\overline{OF'}^2$ eguaglierà $b^2 + a^2$. Noi rappresenteremo per semplicità questo valore $b^2 + a^2$ con c^2 onde sarà OF ed OF' eguale a c.

385. Teorema 2.° *La differenza fra i due raggi* F'M, FM (Fig.ª 225) *condotti dai due fuochi ad uno stesso punto* M *dell'iperbole, equivale sempre, qualunque sia il punto* M, *all'asse principale* AA'.

Dimostrazione. Dal punto M si abbassi l'ordinata MN.

Pel triangolo rettangolo FMN avremo

$\overline{FM}^2 = \overline{MN}^2 + (ON - OF)^2$ ossia $\overline{FM}^2 = y^2 + (x - c)^2$: ora ponendo per y^2 il valore ricavato dall'equazione (N.° 382)

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2),$$

e sviluppando quel quadrato si avrà

$$\overline{FM}^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2 + x^2 - 2cx + c^2;$$

ora ponendo al luogo di c^2 il suo valore e facendo opportune riduzioni si avrà $\overline{FM}^2 = \frac{x^2}{a^2}(b^2 + a^2) - 2cx + a^2$, ossia

$\overline{FM}^2 = \frac{c^2x^2}{a^2} - 2cx + a^2$, ed estraendo la radice da ambidue i membri sarà $FM = \frac{cx}{a} - a$. Pel triangolo rettangolo $F'MN$ avremo $\overline{F'M}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{F'N}^2$ ossia $\overline{F'M}^2 = y^2 + (x + c)^2$; ed operando come sopra, si otterrà

$$\overline{F'M}^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2 + x^2 + 2cx + c^2 =$$

$$\frac{x^2}{a^2}(a^2 + b^2) + 2cx + a^2 = \frac{x^2c^2}{a^2} + 2cx + a^2:$$

estraendo anche qui la radice sarà $F'M = \frac{cx}{a} + a$. Ora sottraendo dal valore di $F'M$ il valore di FM si avrà

$$F'M - FM = \frac{cx}{a} + a - \frac{cx}{a} + a = 2a,$$

come appunto si annunciava nel teorema.

386. Di qui si ricava come corollario il metodo meccanico per descrivere sopra un piano un'iperbole. Sieno fissi sopra un piano due punti F, F' (Fig.ª 224): si fermi in F' un regolo di qualunque lunghezza $F'G$, in modo però che esso possa muoversi liberamente intorno al punto F'; si prenda un filo in lunghezza minore di $F'G$, e se ne fissi un capo all'estre-

mità G del regolo e l'altro capo nel punto F, quindi con una punta si tenga sempre teso il filo contro il regolo $F'G$ mentre questo, scorrendo intorno al punto F', si trasporta successivamente in $F'G'$, $F'G''$: la curva descritta dalla punta sarà l'iperbole $MA'M'$, essendo sempre per qualunque punto $F'M - FM$, ossia $F'M' - FM'$ eguale alla differenza primitiva tra la lunghezza del filo, ed il regolo FG. Fissando poi il regolo in F ed operando egualmente dalla parte opposta si descriverà l'opposta iperbole PAQ come è chiaro per sè.

387. Teorema 3. *La differenza dei raggi condotti dai due fuochi di un'iperbole ad un punto qualunque* T (Fig.ª 223), *è maggiore dell'asse principale se il punto* T *è dentro l'iperbole, ed è minore se il punto* T *è fuori dell'iperbole stessa p. e. in* T'.

Dimostrazione. Sia il punto T dentro l'iperbole, prolungato FT fino a toccare l'iperbole in M si conduca la $F'M$: pel triangolo $F'MT$, si avrà $F'T + TM > F'M$; quindi $F'T - FT + TM > F'M - FT$, quindi $F'T - FT > F'M - FT - TM$, ossia $F'T - FT > F'M - FM$: ma $F'M - FM = 2a$ (N.° 385), dunque quando il punto T è dentro l'iperbole sarà $F'T - FT > 2a$, come era a dimostrarsi.

Sia il punto T fuori dell'iperbole, p. e. in T', condotta una retta dal punto F' al punto M dove FT' taglia l'iperbole, pel triangolo $F'T'M$ si avrà $F'T' < F'M + MT'$, e quindi $F'T' - MF < F'M + MT' - MF$, quindi $F'T' - MT' - MF < F'M - MF$, ossia $F'T' - FT' < F'M - MF$, ma (N.° 385) $F'M - MF = 2a$; dunque quando il punto T' è fuori dell'iperbole, sarà $F'T' - FT' < 2a$, come era a dimostrarsi.

388. Problema. *Tirare una retta tangente all'iperbole in un punto dato* M (Fig.ª 225).

Soluzione. Al punto M si conducano dai fuochi i due raggi $F'M$, FM: per mezzo della MS si divida a metà l'angolo $F'MF$; la MS sarà la tangente cercata.

Dimostrazione. Dal punto F' si abbassi una perpendicolare sopra MS, e si prolunghi fino che incontri in O la FM prolungata: quindi da un punto N qualunque della MS si tirino le rette F'N, FN, NO. Per la costruzione fatta riescirà F'$M = MO$ essendo i due triangoli F'SM, OSM eguali in causa della SM comune e degli angoli eguali in S ed in M; quindi FO sarà eguale ad F'$M - M$F ossia (N.° 385) FO sarà eguale a $2a$. Ma anche i triangoli F'NS, SNO sono eguali in causa del lato SN comune, dei lati SF' ed SO eguali, e degli angoli in S retti, quindi sarà F'$N = NO$, e perciò $NO - N$F $=$ F'$N - N$F. Ma dal triangolo ONF si ha $NO < N$F $+$ FO; quindi sarà $NO - N$F $<$ FO, ossia F'$N - N$F $< 2a$, perciò (N.° 387) un punto N qualunque della SM, eccettuato il punto M, sarà fuori dell'iperbole, e quindi questa SM (N.° 348) sarà la tangente cercata.

389. Teorema 4.° *Un raggio* FM (Fig.ª 226) *che partendosi da uno dei fuochi* F *vada ad incontrare l'iperbole nel punto* M *si riflette nella direzione* M Q *del prolungamento dell'altro raggio condotto allo stesso punto* M *dal fuoco* F'.

Dimostrazione. Si tiri al punto M dell'iperbole la tangente SR (N.° 388), e si prolunghi il raggio F'M. Essendo l'angolo F'MS eguale all'angolo SMF, anche l'angolo RMQ opposto al primo sarà uguale all'angolo SMF; quindi (N.° 350) il raggio F M si riflette nella direzione di MQ, ossia di F'M prolungato, come era a dimostrarsi.

Dell'iperbole, e delle altre sezioni coniche si potrebbero dimostrare anche con questi soli principii elementari molte altre belle proprietà: siccome però abbiamo dimostrate quelle che più interessano nello studio della Fisica, quindi per brevità non parliamo delle altre.

CAPO V.

Della Cicloide.

390. Supponiamo d'avere un circolo ABC (Fig.ª 227) il quale scorra rotolando sopra la retta fissa $AB'A''$, e supponiamo che il punto A del circolo lasci nel rotolare del circolo stesso una traccia di sè, egli prima di tornare ad essere nel punto A'' a contatto colla retta fissa avrà colla sua traccia segnata la curva $AA'A''$ che dicesi *cicloide*.

391. La proprietà principale di questa curva, per cui si fa di essa speciale menzione in Fisica, è la seguente: *Un pendolo, oscillando per archi cicloidali, impiega in ogni oscillazione lo stesso tempo qualunque sia l'ampiezza dell'arco che percorre oscillando*: alla dimostrazione di tale proprietà meccanica si richieggono teorie che appartengono alle matematiche superiori, quindi in un libro elementare è impossibile dimostrare una tale proprietà, e basterà l'avere accennato come si generi questa curva.

392. Gioverà però conoscere un metodo pratico, che è dato, dietro analoghe dimostrazioni, dall'analisi sublime, onde fare oscillare un pendolo per un arco cicloidale. Vogliasi p. e. fare oscillare un pendolo per un arco della cicloide AHB (Fig.ª 228). Con una lamina qualunque metallica si formi un arco eguale precisamente alla cicloide AHB: si divida a metà nel punto H; quindi le due parti $A'H'$, $B'H'$ rovesciate si fissino, come nella figura, in modo che i due punti A' e B' si tocchino, e le loro estremità H' tocchino le estremità A e B della cicloide AHB dove si vuole che succedano le oscillazioni: quindi preso un pendolo $A'D$ di una lunghezza eguale alla distanza $A'H$ e che abbia un filo $A'D$ flessibile, si fissi nel punto A': questo pendolo, oscillando, percorrerà precisamente, come dimostrano gli analisti, archi della cicloide AHB.

TRIGONOMETRIA PIANA

CAPO I.

Nozioni preliminari.

1. La Trigonometria piana è una parte della Geometria, che insegna a determinare o a calcolare tre delle sei parti di un triangolo rettilineo per la conoscenza delle altre tre parti di esso, quando ciò sia possibile.

2. Ho detto quando ciò sia possibile; perchè se in un triangolo non si conoscessero che i tre angoli, non sarebbe possibile in questo caso poter determinare il valore dei lati. Di fatti se preso ad arbitrio un punto P (Fig.ª I) sul lato AB del triangolo ABC, di cui suppongo cogniti i tre angoli, si conduca per esso la retta PE parallela ad AC, si avrà un altro triangolo PBE, che avrà gli angoli eguali a quelli di ABC; e poichè si vede chiaramente, che si potrebbero, tirando altre parallele, formare infiniti triangoli simili tutti ad ABC, così bisognerebbe, che il calcolo somministrasse ad un tempo il valore d'infiniti lati differenti. In questo caso adunque il problema sarebbe assolutamente indeterminato.

3. Apparisce perciò dal detto, che per determinare tre elementi incogniti di un triangolo conviene che fra i tre dati vi sia almeno un lato.

4. Qui però è d'uopo osservare che vi ha un caso, in cui, sebbene vi sieno tra i dati due lati, resta tuttavia un dubbio nella determinazione degli altri elementi. Il caso è quando in un triangolo sono dati due lati ed un angolo opposto al minore dei due lati dati. E diffatti si vede anche a colpo d'occhio (Fig.ª II) che i due triangoli MNS, TNS possono avere benissimo il lato $MN = NT$, l'angolo S ed il lato NS comune, e tuttavia avere differenti gli altri tre elementi; cosicchè dati quei due lati, e quell'angolo resta in dubbio se il triangolo sia MNS, oppure TNS. Però vedremo in appresso che in simile caso la Trigonometria stessa darà da sè ne' suoi risultati una doppia soluzione possibile. Perlocchè si può stabilire generalmente che se fra i tre elementi

dati, vi sia almeno un lato, la Trigonometria serve sempre a determinare gli altri elementi.

5. Nel calcolare i triangoli si sostituiscono agli angoli alcune linee, le quali, sebbene non sieno proporzionali ad essi, sono però proprie o valevoli a rappresentare gli angoli stessi. Prima di tutto adunque è necessario di far conoscere queste linee, che dai Geometri chiamansi *funzioni circolari*, o *linee trigonometriche*, e di far vedere come esse possano usarsi invece degli angoli.

CAPO II.

Delle linee trigonometriche.

6. Sia un circolo qualunque $FABG$ (Fig.ª III): nella periferia di esso si prenda, cominciando dal punto B ed andando nel senso BAF, un arco AB compreso dai due raggi CA, CB. La perpendicolare AP abbassata dalla estremità A di detto arco sopra il raggio CB, che passa per l'altra estremità B dell' arco stesso, dicesi *seno retto*, o semplicemente *seno*, tanto dell' arco AB, che dell' angolo ACB.

La porzione BP del raggio, compresa fra il seno e la estremità dell'arco, si chiama *seno-verso*.

La perpendicolare BD tirata all' estremità del raggio CB e prolungata fino a tanto che incontri il raggio CA prodotto fuori del cerchio, si dice *tangente* dell' arco AB e dell' angolo ACB.

La linea CD, che non è altro se non il raggio CA prodotto fino alla tangente, chiamasi *secante* dell'arco AB, e dell' angolo ACB.

7. Se dal centro C si conduca il raggio CF perpendicolare a CB, e dall' estremità F s' innalzi la perpendicolare FE, che incontri in E il raggio CA prolungato, e finalmente si tiri AQ perpendicolare sopra CF, per ciò che abbiam detto, sarà AQ il *seno*, FQ il *seno-verso*, FE la *tangente*, e CE la *secante* dell' arco AF e dell' angolo ACF.

8. Siccome poi l' angolo ACF è complemento dell' angolo ACB, formando, tutti due presi assieme, un angolo retto, così si può dire che AQ è il seno del complemento, FQ il seno-verso, FE la tangente e CE la secante del complemento dell' arco AB e dell' angolo ACB.

9. Per abbreviare queste denominazioni, si è convenuto di dire *coseno* invece di dire seno del complemento; *coseno-verso*, invece di dire seno-verso del complemento; e così pure *cotangente* e *cosecante* invece di tangente e secante del complemento. Perciò le linee AQ, FQ, FE, CE sono chiamate il coseno, il coseno-verso, la cotangente e la cosecante dell' arco AB, o dell' angolo ACB.

10. Parimenti le linee AP, BP, BD, CD potranno appellarsi il coseno, il coseno-verso, la cotangente e la cosecante dell' arco AF e dell' angolo ACF, essendo AB il complemento di AF, siccome AF lo è di AB.

11. Per indicare queste linee, quando si tratta di un arco o di un angolo, sogliono i geometri mettere avanti le lettere, che servono a nominare o l'arco o l'angolo, le espressioni abbreviate *sen. cos. tang. cotang. sec. cosec.*, indicando altresì l' arco o l' angolo con una lettera sola; così chiamato a l'arco AB, o l' angolo ACB, che è misurato da quell' arco, *Sen. a* significa il seno dell' arco AB, o dell' angolo ACB; e *Cos. a* indica il coseno dell' arco AB, o dell' angolo ACB. Il raggio poi s' indica sempre colla lettera iniziale R.

12. Da tutto ciò si fa manifesto:

1.° *Che il coseno* AQ (Fig.ª III) *di un arco qualunque* AB, *è eguale alla parte* CP *del raggio, compresa fra il centro e il seno.*

2.° *Che il seno-verso* B P *è eguale alla differenza fra il raggio e il coseno.*

3.° *Che il seno di un arco qualunque* AB *è la metà della corda* AG *di un arco doppio* ABG; poichè essendo il raggio CB, perpendicolare alla corda AG, dividerà sì la corda che l' arco in due parti eguali.

13. A misura che l' arco AB, ovvero l' angolo ACB aumenta, il suo seno AP cresce esso pure, e il suo coseno AQ, ovvero CP diminuisce successivamente, finchè l' arco AB sia divenuto di 90°. A questo punto il seno AP si trasforma in FC, cioè a dire eguaglia il raggio, e il coseno diviene zero, perchè il punto A cadendo in F, la perpendicolare AQ diviene zero.

14. Riguardo alla tangente BD, e alla cotangente FE, egli è chiaro, che la prima aumenta continuamente, e che la seconda, al contrario, diminuisce; ma l'una e l'altra lo fa in maniera, che quando l'arco AB giugne ad essere di 90°,

la sua tangente sarà infinita, e la sua cotangente zero. Di fatto quanto più cresce l'arco AB, tanto più il punto D si alza al di sopra di BC; e quando il punto A è infinitamente vicino al punto F, le due linee CD e BD sono quasi parallele, lo divengono quando il punto A è sopra il punto F, ed allora non s'incontrano più. Perciò la tangente BD sarà in tal caso infinita, e la cotangente FE sarà ridotta a zero, come si disse.

15. Siccome il seno di 90° è il più grande di tutti i seni, i geometri, per distinguerlo dagli altri seni, lo chiamano *seno totale*; quindi queste tre espressioni: il seno di 90°, il raggio, il seno totale, significano la medesima cosa.

16. Quando l'arco BA (Fig.ª IV) è maggiore di 90°, il suo seno AP diminuisce, ed il suo coseno AQ, ovvero CP, che allora cade al di là del centro rapporto al punto B, aumenta fino a che l'arco BA sia giunto a 180°; nel qual caso il seno è zero, e il coseno eguaglia il raggio. Si vede inoltre che il seno AP, e il coseno CP dell'arco BA, o dell'angolo ACB maggiore di 90°, sono altresì il seno e il coseno dell'arco AH, o dell'angolo ACH minore di 90°, e supplemento dell'arco BA. Onde *per avere il seno e il coseno di un angolo, si può prendere il seno e il coseno del suo supplemento*; avvertendo però sempre, che il coseno dell'angolo ottuso ha una direzione opposta a quella che ha il coseno di un angolo acuto; onde indicando colla variazione del segno questa opposizione di direzione diremo che il coseno di un angolo eguaglia a meno il coseno del suo supplemento, cioè $Cos.\, a = - Cos.\, (180° - a)$.

17. In quanto alla tangente, siccome essa viene determinata dall'incontro della perpendicolare BD (Fig.ª III) col raggio CA prolungato, se l'arco BA è maggiore di 90° (Figura IV), la tangente sarà BD. Ma innalzando la perpendicolare HI, è facile il vedere, che il triangolo CBD eguaglia il triangolo CHI, e che per conseguenza $BD = HI$. Da ciò ne segue *che la tangente di un arco o di un angolo è la medesima che quella del supplemento dello stesso arco*. Tutta la differenza sta in questo, che essa cade al di sotto del raggio BC, cioè ha direzione opposta; quindi anche qui diremo $Tang.\, a = - Tang.\, (180° - a)$.

18. Riguardo alla cotangente EF, *essa è la medesima della cotangente del supplemento*, e cade essa pure dalla parte opposta

a quella, ove cadrebbe se l'arco BA o l'angolo ABC fosse minore di 90°, onde anche qui avremo $Cotang.\, a = - Cotang.\, (180° - a)$. Si vede poi per la stessa ragione detta di sopra, che per un arco di 180°, la tangente è zero, e la cotangente è infinita.

19. Riguardo alla secante ed alla cosecante, dalla figura stessa risulta che esse hanno in lunghezza tanto per l'angolo BCA, quanto per l'angolo HCI supplemento, lo stesso valore tutta la differenza starà nelle direzioni, e questa differenza piucchè dall'ispezione della figura apparirà dalle formole che daremo in appresso.

20. Se invece di prendere l'arco BA (Fig.ª III) nel senso BAF si fosse preso nel senso opposto BG, cominciando sempre da B, allora l'arco $BG = BA$, o l'angolo BCG, considerato relativamente all'arco BA, od all'angolo BCA, diviene negativo. Il suo seno GP, che va in senso opposto al seno AP, esso pure diviene negativo; il coseno CP, all'incontro, rimane positivo perchè nello stesso senso. Onde chiamato a l'arco AB, e quindi $-a$ l'arco BG a lui eguale, ma in senso opposto, sarà $-Sen.\, a = Sen. - a$, e $Cos.\, a = Cos. - a$; cioè *il seno di un angolo negativo eguaglia a meno il seno dello stesso angolo preso positivamente; ed il coseno di un angolo negativo eguaglia il coseno dello stesso angolo preso positivamente*. Per le altre linee trigonometriche, il valore si deduce prontamente dalle formole che vengono appresso.

CAPO III.

Del valore delle linee trigonometriche espresso in formole generali.

21. Sia l'angolo ACB (Fig.ª III), il di cui seno è AP, il coseno $AQ = CP$, la tangente BD, la secante CD, la cotangente FE, e la cosecante CE. Essendo il seno AP, ed il coseno CP i due cateti del triangolo rettangolo CPA, di cui il raggio CA è l'ipotenusa, si avrà

$$\overline{AP}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{CA}^2,$$

cioè il quadrato del seno più il quadrato del coseno eguale al quadrato del raggio. Facendo ora, per maggior chiarezza, l'angolo $ACB = a$, e il raggio $CA = R$, si avrà:

$$\text{Sen.}^2 a + \text{Cos.}^2 a = R^2;$$

e trasportando

$$\text{Sen.}^2 a = R^2 - \text{Cos.}^2 a.$$

Ora, estraendo la radice quadra, si ha pel seno

1.ª *Formola.* $\quad \text{Sen.}\, a = \sqrt{R^2 - \text{Cos.}^2 a}.$

22. Dall' equazione $\text{Sen.}^2 a + \text{Cos.}^2 a = R^2$, si ricava trasportando

$$\text{Cos.}^2 a = R^2 - \text{Sen.}^2 a;$$

ed estraendo la radice come sopra si ottiene pel coseno

2.ª *Formola.* $\quad \text{Cos.}\, a = \sqrt{R^2 - \text{Sen.}^2 a}.$

23. Per la somiglianza de' triangoli CPA, CBD si ha

$$CP : AP :: CB : BD,$$

cioè $\quad \text{Cos.}\, a : \text{Sen.}\, a :: R : \text{Tang.}\, a;$

quindi essendo

$$\text{Tang.}\, a \times \text{Cos.}\, a = R \times \text{Sen.}\, a,$$

si avrà per la tangente

3.ª *Formola.* $\quad \text{Tang.}\, a = \dfrac{R\,\text{Sen.}\, a}{\text{Cos.}\, a}.$

24. Per la somiglianza de' triangoli CQA, CFE si avrà

$$CQ : QA :: CF : FE,$$

cioè $\quad \text{Sen.}\, a : \text{Cos.}\, a :: R : \text{Cot.}\, a;$

e operando come sopra si avrà per la cotangente

4.ª *Formola.* $\quad \text{Cot.}\, a = \dfrac{R\,\text{Cos.}\, a}{\text{Sen.}\, a}.$

Moltiplicando numeratore e denominatore di questo valore della cotangente per R; e dividendo numeratore e denominatore per Cos. a, si ha ancora $\text{Cot.}\, a = \dfrac{R^2}{\dfrac{R\,\text{Sen.}\, a}{\text{Cos.}\, a}}$; e quindi per la formola 3.ª, $\text{Cot.}\, a = \dfrac{R^2}{\text{Tan.}\, a}$ *Formola* 5.ª

25. Per la somiglianza dei triangoli CPA, CBD si ha

$$CP : CA :: CB : CD,$$

cioè $\quad \text{Cos.}\, a : R :: R : \text{Sec.}\, a;$

onde qui pure si avrà per la secante

6.ª *Formola.* $\quad \text{Sec.}\, a = \dfrac{R^2}{\text{Cos.}\, a}.$

26. Finalmente per la somiglianza de' triangoli CQA, CFE si ha

$$CQ : CA :: CF : CE,$$

cioè $\quad \text{Sen.}\, a : R :: R\,\text{Cosec.}\, a;$

e quindi si otterrà per la cosecante

7.ª *Formola.* $\quad \text{Cosec.}\, a = \dfrac{R^2}{\text{Sen.}\, a}.$

CAPO IV.

Teoremi fondamentali della Trigonometria piana.

27. Teorema 1.° *Tutte le funzioni di angoli eguali, o di archi simili, (cioè di archi tali, che contengano egual numero di gradi, sebbene sieno d' altronde differenti in materiale grandezza) sono sempre in rapporto costante coi loro raggi.*

Dimostrazione. Sia l' angolo ACB (Fig.ª V) eguale all' angolo acb, come pure l' arco AB simile all' arco ab. Io dico: 1.° il seno BD sta al seno bd, come il raggio CB sta al raggio cb. Poichè essendo simili i due triangoli BCD e bcd si avrà

$$BD : BC :: bd : bc,$$

e alternando $\quad BD : bd :: BC : bc;$

che è quanto dire: i seni degli angoli eguali C, c, o di archi simili AB ed ab, stanno nel rapporto dei raggi CB e cb. 2.° Se prodotti i raggi CB e cb, si innalzino dai punti A ed a le tangenti AF ed af, anche i due triangoli ACF, acf saranno simili; quindi si avrà

1.° $$AF : AC :: af : ac$$

2.° $$CF : CB :: cf : cb;$$

e alternando nella 1.°

$$AF : af :: AC : ac;$$

e alternando nella 2.°

$$CF : cf :: CB : cb,$$

cioè a dire: le tangenti e le secanti degli archi simili AB, ab, o degli angoli eguali C e c, sono proporzionali a loro raggi. 3.° I complementi poi di angoli eguali, essendo eguali anch'essi, se si supponga che ciascuno dei due angoli C e c sia p. e. di 40°, il loro complemento sarà di 50°; dunque i seni, le tangenti e le secanti dei complementi dei due angoli eguali C e c stanno tra loro, nel rapporto dei raggi, come vi stanno i seni, le tangenti e le secanti degli angoli stessi C e c. Ma i seni, le tangenti e le secanti dei complementi, sono i coseni, le cotangenti e le cosecanti degli angoli stessi C e c; dunque anche i coseni, le cotangenti e le cosecanti degli angoli eguali C e c, o degli archi simili AB ed ab, stanno tra loro nel rapporto dei detti raggi.

28. *Corollario* 1.° Da ciò si fa manifesto che, cognito il valore delle linee trigonometriche per un dato arco descritto col raggio $R=1$, facilmente deducesi il valore delle linee trigonometriche di un arco di egual numero di gradi quando sia stato descritto con un raggio R' di valore differente. Di fatti detto M il valore della linea trigonometrica quando il raggio eguaglia 1, e detto M' il valore che acquista quando il raggio è R', si avrà la proporzione $M : 1 :: M' : R'$, donde si ricava $M' = MR'$; cioè *il valore che acquista una linea trigonometrica al variare del raggio, eguaglia il valore che ha quando il raggio è 1, moltiplicato questo valore per quello del nuovo raggio.*

29. Dietro questo noi d'ora innanzi per maggiore semplicità porremo nelle formole $R=1$, e diremo p. e. (N.° 25 e 26) $Sec.\,a = \frac{1}{Cos.\,a}$, $Cosec.\,a = \frac{1}{Sen.\,a}$; e così cognito il valore del seno e del coseno di un arco a quando il raggio eguaglia l'unità, dedurremo il valore corrispondente della secante e della cosecante dell'arco stesso. Moltiplicando poi il trovato valore per 2, per 3, ecc. avremo il valore che avrebbe la secante e la cosecante dello stesso arco quando il raggio fosse 2, 3, ecc. Qui però si avverta, che se dalle formole $Sec.\,a = \frac{1}{Cos.\,a}$, $Cosec.\,a = \frac{1}{Sen.\,a}$ noi volessimo dedurre i valori di queste linee, cogniti i valori del seno e del coseno quando il raggio non è l'unità, allora converrebbe prima introdurre debitamente nelle formole l'espressione R del raggio. Questo poi si ottiene facilmente anche nelle formole più complicate rendendo i termini tutti dell'eguaglianza di un egual numero di dimensioni (Alg. N.° 104). Diffatti in un'equazione che si applichi a cose geometriche, i termini di una sola dimensione rappresentano linee; quelli di due superficie, quelli di tre solidi; e non può esservi eguaglianza tra linee e solidi, tra linee e superficie, tra solidi e superficie, ma solo tra linee e linee, tra superficie e superficie, tra solidi e solidi.

30. Teorema 2.° *In qualunque triangolo i lati sono proporzionali ai seni degli angoli ad essi lati opposti.*

Dimostrazione. Sia il triangolo ABD (Fig.ª VI) a cui si circoscriva il circolo ABD. Ciò fatto i lati del triangolo divengono corde del circolo stesso. Ora la corda AB è doppio seno della metà dell'arco sotteso AyB (N.° 12) e parimenti la corda BD è doppio seno della metà dell'arco sotteso BxD. Ma poichè la metà dell'arco AyB misura l'angolo D, e la metà dell'arco BxD misura l'angolo A, essendo questi due angoli alla periferia del cerchio; così la corda AB sarà doppio seno dell'angolo D, e la corda BD doppio seno dell'angolo A. Quindi si avrà

$$AB : BD :: 2\,Sen.\,D : 2\,Sen.\,A,$$

ossia dividendo per 2 i termini della seconda ragione, si avrà

$$AB : BD :: Sen.\,D : Sen.\,A;$$

cioè i lati in qualsivoglia triangolo stanno tra loro come i seni degli angoli ad essi lati opposti.

Qui si avverta che la dimostrazione vale egualmente anche quando il raggio del circolo ABD non fosse quello che si assumesse per determinare i seni degli angoli A e D; dacchè in tal caso i seni che si determinerebbero per questi angoli con un altro raggio, avrebbero sempre un rapporto costante con quelli che si sono considerati (N.° 27 e 28).

31. Teorema 3.° *In ogni triangolo rettangolo* (Fig.ª VII) *un cateto qualsiasi eguaglia l' ipotenusa nel coseno dell' angolo compreso tra l' ipotenusa e quel cateto.*

Dimostrazione. Nel triangolo rettangolo FCA preso per raggio CM, che faremo eguale ad 1, ed abbassata la perpendicolare MP dal punto M sul lato CA, per la somiglianza dei due triangoli CMP, CFA si ha $CM : CP :: CF : CA$, ossia $1 : Cos. FCA :: CF : CA$, donde ne deriva $CA = CF\,Cos.\,FCA$, come doveva dimostrarsi.

32. Corollario. Siccome $Cos.\,FCA = Sen.\,CFA$ per essere uno di questi due angoli complemento dell' altro, avremo ancora, sostituendo, $CA = CF\,Sen.\,CFA$; cioè *in un triangolo rettangolo un cateto eguaglia l' ipotenusa nel seno dell' angolo opposto a quel cateto.*

33. Teorema 4.° *In ogni triangolo rettangolo* (Fig.ª VII) *la tangente di un angolo acuto eguaglia il cateto opposto a quell' angolo, diviso per l' altro cateto.*

Dimostrazione. Ammessa la costruzione del teorema antecedente si ha

$$MP : CP :: FA : CA,$$

ossia
$$\text{Sen.}\,FCA : \text{Cos.}\,FCA :: FA : CA,$$

ossia $\dfrac{\text{Sen.}\,FCA}{\text{Cos.}\,FCA} = \dfrac{FA}{CA}$: ma $\text{Tan.}\,FCA = \dfrac{\text{Sen.}\,FCA}{\text{Cos.}\,FCA}$ (N.° 23);

dunque $\text{Tan.}\,FCA = \dfrac{FA}{CA}$, come doveva dimostrarsi.

34. Teorema 5.° *In qualunque triangolo* MNO (Fig.ª VIII) *un lato qualsiasi* MO *eguaglia la somma dei prodotti che si ottengono moltiplicando ciascuno degli altri due lati pel coseno dell' angolo rispettivo, che ognuno di essi forma col lato stesso* MO.

Dimostrazione. Nel caso che ambidue gli angoli adiacenti al lato MO sieno acuti, abbassata dal punto N la NT

perpendicolare sopra MO, si avrà (N.° 31)

$$MT = MN\,\text{Cos.}\,NMO, \text{ ed } OT = ON\,\text{Cos.}\,NOM;$$

quindi $MT + OT = MO = MN\,\text{Cos.}\,NMO + ON\,\text{Cos.}\,NOM$,

come appunto doveva dimostrarsi.

Nel caso che uno degli angoli adiacenti al lato MO, p. e. l' angolo NOM, sia ottuso, allora abbassata la NT come sopra si avrà

$$MT = MN\,\text{Cos.}\,NMO, \text{ ed } OT = ON\,\text{Cos.}\,NOT;$$

quindi $MT - OT = MO = MN\,\text{Cos.}\,NMO - ON\,\text{Cos.}\,NOT$;

ma $\text{Cos.}\,NOT = -\text{Cos.}\,NOM$ (N.° 16); quindi sostituendo avremo $MO = MN\,\text{Cos.}\,NMO + ON\,\text{Cos.}\,NOM$, come appunto doveva dimostrarsi.

35. Problema. *Date le linee trigonometriche di due archi o di due angoli, trovare le linee trigonometriche della loro somma e della loro differenza.*

Soluzione. Sieno MP ed MN (Fig.ª IX) i due archi dati. Si prenda l' arco MNT doppio di MN e l' arco MPQ doppio di MP; si uniscano fra loro medianti rette i tre punti M, Q, T. Nel triangolo MQT l' angolo a equivarrà all' arco MP, e l' angolo b equivarrà all' arco MN (Geom.ª N.° 117); di più (N.° 12) $QM = 2\,Sen.\,PM = 2\,Sen.\,a$; $TM = 2\,Sen.\,MN = 2\,Sen.\,b$, e $QT = 2\,Sen.\,(MP + MN) = 2\,Sen.\,(a+b)$. Ora pel teorema antecedente abbiamo $QT = QM\,Cos.\,b + MT\,Cos.\,a$, e sostituendo in questa eguaglianza a QT, QM, MT i rispettivi valori essa diviene

$$2\,\text{Sen.}\,(a+b) = 2\,\text{Sen.}\,a\,\text{Cos.}\,b + 2\,\text{Sen.}\,b\,\text{Cos.}\,a,$$

cioè dividendo ambidue i membri per 2

$$\text{Sen.}\,(a+b) = \text{Sen.}\,a\,\text{Cos.}\,b + \text{Sen.}\,b\,\text{Cos.}\,a. \quad (1.^a)$$

Formola che dà il seno della somma di due archi espresso per le linee trigonometriche degli archi semplici.

In questa formola che è generalissima e che deve quindi verificarsi per qualunque valore dei due archi a e b, ponendo al luogo di b, $-b$ essa si cangia in quest' altra

$$\text{Sen.}(a-b)=\text{Sen.}\,a\,\text{Cos.}-b+\text{Sen.}-b\,\text{Cos.}\,a.$$

Ma $\quad \text{Cos.}-b=\text{Cos.}\,b,\ \text{Sen.}-b=-\text{Sen.}\,b$ (N.° 20)

quindi sostituendo questi valori si ha

$$\text{Sen.}(a-b)=\text{Sen.}\,a\,\text{Cos.}\,b-\text{Sen.}\,b\,\text{Cos.}\,a \quad (2.^a)$$

Formola che dà il seno della differenza di due archi, espressa per le linee trigonometriche degli archi semplici.

Nella 1.ª e nella 2.ª ponendo al luogo di a, $90°-a$ si hanno le due equazioni seguenti

$$\text{Sen.}(90°-a+b)=\text{Sen.}(90°-a)\,\text{Cos.}\,b+\text{Sen.}\,b\,\text{Cos.}(90°-a)$$

$$\text{Sen.}(90°-a-b)=\text{Sen.}(90°-a)\,\text{Cos.}\,b-\text{Sen.}\,b\,\text{Cos.}(90°-a).$$

Ma per essere (N.° 9) il seno di un angolo eguale al coseno del complemento, e viceversa, si ha

$$\text{Sen.}(90°-a+b)=\text{Sen.}(90°-(a-b))=\text{Cos.}(a-b),$$

$$\text{Sen.}(90°-a-b)=\text{Sen.}(90°-(a+b))=\text{Cos.}(a+b),$$

$$\text{Sen.}(90°-a)=\text{Cos.}\,a,\ \text{Cos.}(90°-a)=\text{Sen.}\,a;$$

quindi, sostituendo questi valori, quelle due eguaglianze riescono

$$\text{Cos.}(a-b)=\text{Cos.}\,a\,\text{Cos.}\,b+\text{Sen.}\,b\,\text{Sen.}\,a \quad (3.^a)$$

$$\text{Cos.}(a+b)=\text{Cos.}\,a\,\text{Cos.}\,b-\text{Sen.}\,b\,\text{Sen.}\,a \quad (4.^a).$$

Formole che danno il coseno della somma e della differenza di due archi, espresso per le linee trigonometriche degli archi semplici.

Dividendo la (1.ª) di queste formole per la (4.ª) si ha

$$\frac{\text{Sen.}(a+b)}{\text{Cos.}(a+b)}=\frac{\text{Sen.}\,a\,\text{Cos.}\,b+\text{Sen.}\,b\,\text{Cos.}\,a}{\text{Cos.}\,a\,\text{Cos.}\,b-\text{Sen.}\,b\,\text{Sen.}\,a}.$$

Da questa eguaglianza, avvertendo che $\frac{\textit{Sen.}}{\textit{Cos.}}=\textit{Tan.}$, e dividendo numeratore e dominatore del secondo membro per

$\textit{Cos. a Cos. b}$, si ricava

$$\text{Tan.}(a+b)=\frac{\text{Tan.}\,a+\text{Tan.}\,b}{1-\text{Tan.}\,a\,\text{Tan.}\,b} \quad (5.^a)$$

con egual metodo dalla 2.ª e dalla 3.ª si ricava

$$\text{Tan.}(a-b)=\frac{\text{Tan.}\,a-\text{Tan.}\,b}{1+\text{Tan.}\,a\,\text{Tan.}\,b} \quad (6.^a)$$

Formole che danno la tangente della somma e della differenza di due archi, espressa per le linee trigonometriche degli archi semplici.

Abbiamo già veduto (N.° 24) $\text{Cot.}(a+b)=\frac{1}{\text{Tan.}(a+b)}$, $\text{Cot.}(a-b)=\frac{1}{\text{Tan.}(a-b)}$; quindi sostituendo nei secondi membri i valori che danno le formole superiori 5.ª e 6.ª, si avrà

$$\text{Cot.}(a+b)=\frac{1-\text{Tan.}\,a\,\text{Tan.}\,b}{\text{Tan.}\,a+\text{Tan.}\,b} \quad (7.^a)$$

$$\text{Cot.}(a-b)=\frac{1+\text{Tan.}\,a\,\text{Tan.}\,b}{\text{Tan.}\,a-\text{Tan.}\,b} \quad (8.^a).$$

Parimenti, essendo (N.° 25 e 26)

$$\text{Sec.}(a+b)=\frac{1}{\text{Cos.}(a+b)},\ \text{Sec.}(a-b)=\frac{1}{\text{Cos.}(a-b)},$$

$$\text{Cosec.}(a+b)=\frac{1}{\text{Sen.}(a+b)},\ \text{Cosec.}(a-b)=\frac{1}{\text{Sen.}(a-b)},$$

si avrà, sostituendo nei secondi membri i valori che danno le formole 1.ª, 2.ª, 3.ª, 4.ª,

$$\text{Sec.}(a+b)=\frac{1}{\text{Cos.}\,a\,\text{Cos.}\,b-\text{Sen.}\,a\,\text{Sen.}\,b} \quad (9.^a)$$

$$\text{Sec.}(a-b)=\frac{1}{\text{Cos.}\,a\,\text{Cos.}\,b+\text{Sen.}\,a\,\text{Sen.}\,b} \quad (10.^a)$$

$$\text{Cosec.}(a+b)=\frac{1}{\text{Sen.}\,a\,\text{Cos.}\,b+\text{Sen.}\,b\,\text{Cos.}\,a} \quad (11.^a)$$

$$\text{Cosec.}(a-b)=\frac{1}{\text{Sen.}\,a\,\text{Cos.}\,b-\text{Sen.}\,b\,\text{Cos.}\,a} \quad (12.^a)$$

Formole che compiscono la soluzione del proposto problema

36. Da queste formole e da quelle trovate superiormente (N.° 21 e seg.) se ne deducono assai altre che non di rado si adoprano nel calcolo superiore; noi qui dedurremo unicamente quelle di cui avremo d'uopo in appresso, lasciando al giovane di dedurre, per suo esercizio, dalle proposte, quelle altre che gli verranno segnate come più utili da chi lo guida nello studio di questa scienza.

Dalle formole 1.ª e 4.ª del paragrafo antecedente facendo $b = a$ si deducono queste due

$$\text{Sen.}\,2a = 2\,\text{Sen.}\,a\,\text{Cos.}\,a \quad (A)$$

$$\text{Cos.}\,2a = \text{Cos.}^2 a - \text{Sen.}^2 a \quad (B).$$

Ponendo in quest' ultima $1 - \text{Sen.}^2 a$ al luogo di $\text{Cos.}^2 a$, si ottiene $\text{Cos.}\,2a = 1 - 2\,\text{Sen.}^2 a$; cioè

$$\text{Sen.}^2 a = \frac{1 - \text{Cos.}\,2a}{2} \quad (C).$$

In questa formola ponendo $2a = c$, e quindi $a = \frac{1}{2}c$, ed estraendo la radice da ambidue i membri si ha

$$\text{Sen.}\,\frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{1 - \text{Cos.}\,c}{2}} \quad (D).$$

Nella 1.ª e nella 2.ª del paragrafo antecedente, fatto $a = \frac{A+B}{2}$, $b = \frac{A-B}{2}$, e quindi $a + b = A$, $a - b = B$, si ha

$$\text{Sen.}\,A = \text{Sen.}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{Cos.}\left(\frac{A-B}{2}\right) + \text{Sen.}\left(\frac{A-B}{2}\right)\text{Cos.}\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

$$\text{Sen.}\,B = \text{Sen.}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{Cos.}\left(\frac{A-B}{2}\right) - \text{Sen.}\left(\frac{A-B}{2}\right)\text{Cos.}\left(\frac{A+B}{2}\right);$$

quindi, sommando,

$$\text{Sen.}\,A + \text{Sen.}\,B = 2\,\text{Sen.}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{Cos.}\left(\frac{A-B}{2}\right) \quad (E)$$

sottraendo, invece,

$$\text{Sen.}\,A - \text{Sen.}\,B = 2\,\text{Sen.}\left(\frac{A-B}{2}\right)\text{Cos.}\left(\frac{A+B}{2}\right) \quad (F).$$

Dividendo poi la (E) per la (F) si ha

$$\frac{\text{Sen.}\,A + \text{Sen.}\,B}{\text{Sen.}\,A - \text{Sen.}\,B} = \frac{\text{Sen.}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{Cos.}\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\text{Sen.}\left(\frac{A-B}{2}\right)\text{Cos.}\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

dalla quale, essendo (N.° 23)

$$\frac{\text{Sen.}\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\text{Cos.}\left(\frac{A+B}{2}\right)} = \text{Tan.}\left(\frac{A+B}{2}\right),$$

e

$$\frac{\text{Cos.}\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\text{Sen.}\left(\frac{A-B}{2}\right)} = \frac{1}{\text{Tan.}\left(\frac{A-B}{2}\right)},$$

si ricava

$$\frac{\text{Sen.}\,A + \text{Sen.}\,B}{\text{Sen.}\,A - \text{Sen.}\,B} = \frac{\text{Tan.}\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\text{Tan.}\left(\frac{A-B}{2}\right)} \quad (G).$$

37. Teorema 6.° *In qualunque triangolo* MNS (Fig.ª II) *la somma di due lati sta alla loro differenza, come la tangente della semisomma degli angoli opposti ad essi, sta alla tangente della semidifferenza de' medesimi angoli.*

Dimostrazione. Pel Teorema 2.° (N.° 30) abbiamo

$$NS : NM :: \text{Sen.}\,M : \text{Sen.}\,S;$$

quindi componendo e dividendo (Geom.ª N.° 207)

$$NS + NM : NS - NM :: \text{Sen.}\,M + \text{Sen.}\,S : \text{Sen.}\,M - \text{Sen.}\,S:$$

ma dalla formola (G) (N.° 36) abbiamo

$$\text{Sen.}\,M + \text{Sen.}\,S : \text{Sen.}\,M - \text{Sen.}\,S :: \text{Tan.}\left(\frac{M+S}{2}\right) : \text{Tan.}\left(\frac{M-S}{2}\right);$$

dunque concluderemo

$$NS+NM : NS-NM :: \text{Tan.}\left(\frac{M+S}{2}\right) : \text{Tan.}\left(\frac{M-S}{2}\right)$$

proporzione che esprime appunto il teorema proposto.

38. Teorema 7.° *In qualsiasi triangolo* MNO (Fig.ª VIII) *il quadrato di un lato qualunque eguaglia alla somma dei quadrati degli altri due lati meno il doppio prodotto dei due lati stessi moltiplicato pel coseno dell' angolo da essi compreso.*

Dimostrazione. Dal vertice N si abbassi sulla base MO la perpendicolare NT, possono accadere due casi: 1.° che essa cada dentro la base; 2.° che essa cada fuori della base medesima.

1.° caso. Dal triangolo rettangolo MNT abbiamo

$$\overline{MN}^2 = \overline{NT}^2 + (MO - OT)^2,$$

ma dal triangolo rettangolo NOT pel teorema 3.° (N.° 31) abbiamo

$$OT = NO \text{ Cos. } NOM,$$

e dallo stesso triangolo abbiamo ancora

$$\overline{NT}^2 = \overline{NO}^2 - \overline{OT}^2 = \overline{NO}^2 - \overline{NO}^2 \text{ Cos.}^2 NOM;$$

dunque, sostituendo questi valori nella prima equazione, avremo

$$\overline{MN}^2 = \overline{NO}^2 - \overline{NO}^2 \text{ Cos.}^2 NOM + (MO - NO \text{ Cos. } NOM)^2,$$

cioè, sviluppato che siasi il quadrato e fatte le riduzioni,

$$\overline{MN}^2 = \overline{NO}^2 + \overline{MO}^2 - 2\, MO \times NO \text{ Cos. } NOM,$$

formola in cui si legge il teorema.

2.° caso. Dal triangolo rettangolo MNT abbiamo

$$\overline{MN}^2 = \overline{NT}^2 + (MO + OT)^2:$$

ma dal triangolo rettangolo NOT abbiamo

$$OT = NO \text{ Cos. } NOT = -NO \text{ Cos. } NOM,$$

e dallo stesso triangolo abbiamo ancora

$$\overline{NT}^2 = \overline{NO}^2 - \overline{OT}^2 = \overline{NO}^2 - \overline{NO}^2 \text{ Cos.}^2 NOM;$$

dunque anche qui sostituendo questi valori nella prima equazione, e sviluppato il quadrato e fatte le riduzioni, si ha

$$\overline{MN}^2 = \overline{NO}^2 + \overline{MO}^2 - 2\, MO \times NO \text{ Cos. } NOM,$$

formola che è la stessa dell' ottenuta pel primo caso.

39. Per dare più semplicità alla formola in cui si traduce questo teorema, designeremo con O l' angolo NOM, con o il lato NM opposto a quest' angolo, con m il lato NO opposto all' angolo NMO, e con n il terzo lato MO opposto al terzo angolo MNO; e con questo la formola si cangia nella seguente:

$$o^2 = m^2 + n^2 - 2\, m\, n \text{ Cos. } O \quad (P);$$

e da questa isolando *Cos.* O, si ha l' altra formola

$$\text{Cos. } O = \frac{m^2 + n^2 - o^2}{2mn} \quad (Q).$$

40. Egli è necessario dare un altro aspetto a questa formola (Q), onde possa comodamente servire a quegli usi che in appresso vedremo. Intanto da essa si deduce facilmente

$$1 - \text{Cos. } O = 1 - \left(\frac{m^2 + n^2 - o^2}{2mn}\right),$$

cioè
$$1 - \text{Cos. } O = \frac{2mn - m^2 - n^2 + o^2}{2mn};$$

e dividendo l'uno e l'altro membro per 2, ed osservando che

$$2mn - m^2 - n^2 = -(m-n)^2$$

ricaveremo
$$\frac{1 - \text{Cos. } O}{2} = \frac{o^2 - (m-n)^2}{4mn}.$$

Ma dalla formola (D) (N.° 36) abbiamo

$$\frac{1 - \text{Cos. } O}{2} = \text{Sen.}^2 \frac{1}{2} O;$$

quindi sostituendo avremo

$$\text{Sen.}^2\,\frac{1}{2}\,O = \frac{o^2 - (m-n)^2}{4mn}.$$

Ma $o^2 - (m-n)^2 = (o - m + n)(o + m - n)$, come si può verificare eseguendo la moltiplica; dunque

$$\text{Sen.}^2\,\frac{1}{2}\,O = \frac{(o-m+n)(o+m-n)}{4mn},$$

ossia $$\text{Sen.}^2\,\frac{1}{2}\,O = \frac{(o+m+n-2m)(o+m+n-2n)}{4mn}:$$

facendo poi in questa eguaglianza $o+m+n$, la somma cioè dei tre lati, eguale a p, avremo

$$\text{Sen.}^2\,\frac{1}{2}\,O = \frac{(p-2m)(p-2n)}{4mn},$$

ossia $$\text{Sen.}^2\,\frac{1}{2}\,O = \frac{\left(\frac{p-2m}{2}\right)\left(\frac{p-2n}{2}\right)}{mn}$$

ossia finalmente

$$\text{Sen.}^2\,\frac{1}{2}\,O = \frac{\left(\frac{p}{2}-m\right)\left(\frac{p}{2}-n\right)}{mn} \quad (S),$$

formola che riesce comodissima al calcólo quando vi si applichino i logaritmi.

CAPO V.

Delle Tavole dei Seni, Coseni, ecc.

41. Onde far servire alla risoluzione dei triangoli le formole stabilite finora, bisogna innanzi tutto conoscere i seni degli angoli dati per introdurne i valori nelle formole; oppure se da esse deduciamo i valori di un seno, di un coseno ecc., bisogna che siamo in grado di assegnare l'arco corrispondente a quel seno, a quel coseno ecc. Egli è adunque necessario formare una tavola di seni, coseni ecc., che dia queste linee quando si conoscono gli archi e reciprocamente.

Immaginiamo dunque che dopo aver diviso il quadrante in gradi, minuti e secondi, ed il raggio in un numero arbitrario di parti eguali, si sia trovato quante di queste parti sono contenute in ciascun seno, coseno ecc. e che si sieno scritti questi numeri accanto a ciascun arco corrispondente, in tal modo si sarà formata una tavola trigonometrica dei seni, coseni ecc.

42. Egli è poi chiaro che tutta la difficoltà a trovare quante delle parti in cui è diviso il raggio sieno contenute nel seno e nel coseno ecc. si riduce a trovarle pel solo seno; mentre cognito il valore del seno dalle formole date superiormente (N.° 21 e seg.) con poca difficoltà si trova il valore delle altre linee trigonometriche. Di più, anche riguardo al seno, cognito il suo valore quando l'arco è di un minuto secondo, per le altre formole date superiormente (N.° 35 formola (1.ª), N.° 36 formola (A)) si trova quello di 2 minuti secondi, quindi di 3, 4, ecc. Perciò se noi prendessimo per seno di 1 minuto secondo la lunghezza del suo arco stesso (cosa che non ci condurrebbe ad errore sensibile, coincidendo quasi rigorosamente un arco sì piccolo col suo seno), se prendessimo cioè $Sen.\,1'' = \frac{2\pi r}{1296000}$, chè appunto l'arco di un secondo è la 1296000^{esima} parte dell'intera circonferenza; noi avremo già alle mani un metodo faticosissimo è vero, ma però sicuro per calcolare una tavola trigonometrica procedendo di secondo in secondo. Ma non occorre che noi imprendiamo tale fatica. Le tavole ora si hanno già costruite, e poco a noi importa che esse fossero costruite con questo, o con altri metodi più facili, che si ricavano da dottrine superiori. Adesso non ci occorre che il saperne far uso.

Una chiara e distesa esposizione del modo pratico di usare queste tavole non è cosa che possa aver luogo in questo trattato elementare; ci restringeremo perciò unicamente ad alcune avvertenze indispensabili, le quali, congiunte all'esercizio, serviranno per gli usi più comuni.

43. Innanzi tutto osserverà il giovane che le tavole trigonometriche sono sufficienti quando arrivino all'arco di 45° gradi. Di fatto, per gli archi maggiori, dietro le relazioni che hanno fra loro le linee trigonometriche dei complementi e dei supplementi (N.° 8, 9, 16 e seg.), basta conoscere le

linee trigonometriche di un arco minore di 45°. Così se io dalle tavole voglio ricavare il valore di *Sen.* 68°, vedendo che il suo complemento è 22°, basterà che trovi il valore di *Cos.* 22°, essendo (N.° 9) *Sen.* 68° = *Cos.* 22°. Parimenti se voglio sapere il valore di *Cos.* 150°, vedendo che il suo supplemento è 30°, basterà che trovi il valore di *Cos.* 30", essendo (N.° 16) *Cos.* 150° = — *Cos.* 30°.

44. Un' altra avvertenza da aversi si è che le tavole di cui si fa più uso nei calcoli trigonometrici non danno precisamente il valore del seno, coseno, ecc. di un dato arco, ma invece danno il logaritmo di questo valore. La ragione di questo si è la grande facilitazione che inducono nei calcoli aritmetici i logaritmi, per cui torna assai più comodo calcolare colle debite regole dell' Algebra i logaritmi dei valori de' seni, coseni, ecc., di quello che calcolare questi valori stessi. Che se alcuno volesse sapere il valore preciso p. e. del seno di un dato arco, e non già il suo logaritmo, la cosa sarebbe facile e spedita, bastando il cercare nelle tavole logaritmiche a qual numero corrisponda quel logaritmo, che nella tavola dei seni è posto pel seno dell' arco dato.

45. Per l' introduzione dei logaritmi nelle tavole trigonometriche è nato il bisogno di non fare il raggio $R = 1$, ma sibbene di fare R eguale ad un numero assai grande, onde anche i seni degli archi piccolissimi fossero maggiori dell' unità, altrimenti i logaritmi dei seni sarebbero negativi, perchè logaritmi di frazioni (Alg.ª 454), e quindi sarebbero incomodi nel calcolo. Per questo si è fatto $R = 10000000000$, sicchè log. $R = 10$.

46. Quando adunque si vuol procedere mediante le tavole al calcolo di una formola, in cui il raggio R si sia preso eguale all' unità, converrà introdurre debitamente nelle formole l' espressione R, come s' insegnò superiormente al (N.° 29). Dietro questa avvertenza, avendo noi calcolate finora la maggior parte delle formole nell' ipotesi di $R = 1$, nell' applicarle, come faremo or ora, alla risoluzione dei triangoli, sempre v' introdurremo l' espressione R.

CAPO VI.

Della risoluzione dei Triangoli.

§ 1.° *Triangoli rettangoli.*

47. Sia il triangolo rettangolo ABC (Fig.ª X) i cui lati li segneremo colle lettere piccole b, c, a corrispondenti a quelle che seguano gli angoli opposti. Pei teoremi 3.° e 4.° (N.° 31, 33) avremo le due equazioni $a = b\,Cos.\,C$, $a = c\,Tan.\,A$ introdotta in queste equazioni per quello che abbiamo detto superiormente (N.° 46) l' espressione R esse divengono (N.° 29)

$$R\,a = b\,\text{Cos.}\,C \quad 1.^a$$

$$R\,a = c\,\text{Tan.}\,A \quad 2.^a;$$

E queste due equazioni unite all' altra

$$C = 90° - A \quad 3.^a,$$

che dipende dalla natura stessa del triangolo rettangolo, bastano per la risoluzione di qualunque problema possa occorrere. Ecco di fatti i casi possibili che comprendono qualunque problema relativo a tale risoluzione.

48. 1.° caso. *Sia data l' ipotenusa* b *con un cateto* a.

Dalla 1.ª equazione abbiamo $\text{Cos.}\,C = \frac{R\,a}{b}$, e quindi applicando a questa i logaritmi (Algebra Cap.° X pag.ª 175) avremo $\text{Log. Cos.}\,C = \text{Log.}\,R + \text{Log.}\,a - \text{Log.}\,b$; e così viene determinato l' angolo C.

Cognito C, dalla 3.ª equazione abbiamo $A = 90° - C$, e così viene determinato anche A.

Cognito A, dalla 2.ª abbiamo $c = \frac{R\,a}{\text{Tan.}\,A}$;
cioè $\text{Log.}\,c = \text{Log.}\,R + \text{Log.}\,a - \text{Log. Tan.}\,A.$,
e così viene determinato l' altro cateto c.

Se invece di essere dato coll' ipotenusa il cateto a, fosse stato dato il cateto c, allora si sarebbe presa per prima equazione $R\,c = b\,\text{Cos.}\,A$, che è essa pure l' espressione del teorema 3.°

49. 2.ª caso. *Sieno dati i due cateti* a *e* c.

Dall' equazione 2.ª abbiamo $\text{Tan.}\,A = \frac{Ra}{c}$,

quindi $\quad \text{Log. Tan.}\,A = \text{Log.}\,R + \text{Log.}\,a - \text{Log.}\,c$,

ed ecco cognito l' angolo A.

Cognito A, dalla 3.ª avremo $C = 90° - A$; e quindi dalla 1.ª avremo $b = \frac{Ra}{\text{Cos.}\,C}$,

cioè $\quad \text{Log.}\,b = \text{Log.}\,R + \text{Log.}\,a - \text{Log. Cos.}\,C$,

e così sarà nota anche l' ipotenusa b.

50. 3.° caso. *Sia data l' ipotenusa* b *con un angolo acuto* C.

Dalla 3.ª abbiamo l' angolo $A = 90° - C$.

Dall' equazione 1.ª abbiamo $a = \frac{b\,\text{Cos.}\,C}{R}$,

quindi $\quad \text{Log.}\,a = \text{Log.}\,b + \text{Log. Cos.}\,C - \text{Log.}\,R$,

e così è cognito il cateto a.

Dalla 2.ª perciò ricaveremo $c = \frac{Ra}{\text{Tan.}\,A}$;

cioè $\quad \text{Log.}\,c = \text{Log.}\,R + \text{Log.}\,a - \text{Log. Tan.}\,A$.

Ed ecco noto l' altro cateto c.

51. 4.° ed ultimo caso. *Sia dato un cateto* a *ed un angolo acuto* C.

Dalla 3.ª abbiamo l' altro angolo acuto $A = 90° - C$.

La 1.ª ci dà $b = \frac{Ra}{\text{Cos.}\,C}$,

cioè $\quad \text{Log.}\,b = \text{Log.}\,R + \text{Log.}\,a - \text{Log. Cos.}\,C$;

ed ecco cognita l' ipotenusa.

La 2.ª poi ci dà $c = \frac{Ra}{\text{Tan.}\,A}$;

cioè $\quad \text{Log.}\,c = \text{Log.}\,R + \text{Log.}\,a - \text{Log. Tan.}\,A$;

e così è cognito anche l' altro cateto.

52. Perchè il giovane si eserciti nell' applicazione del calcolo per la risoluzione dei triangoli, daremo qui i valori

dei lati e degli angoli di un triangolo rettangolo. Il giovane prenderà per dati quegli elementi che vorrà: p. e. quelli del 1.° caso, cioè l' ipotenusa b, ed il cateto a, ossia c, e colle operazioni accennate nel 1.° caso dovrà trovare gli altri elementi, cioè i due angoli acuti A e C, ed il cateto c, ossia a. Poi prenderà per dati gli elementi del 2.° caso, e così via via.

$b = 120^m$	$\text{Log.}\,b = 2{,}079181$
$a = 41^m,\ 043$	$\text{Log.}\,a = 1{,}613233$
$c = 112^m,\ 763$	$\text{Log.}\,c = 2{,}052166$
$C = 70°$	$\text{Log. Cos.}\,C = 9{,}534052$
$A = 20°$	$\text{Log. Cos.}\,A = 9{,}972986$
$\text{Log.}\,R = 10$	$\text{Log. Tan.}\,A = 9{,}561066$.

§ 2.° *Triangoli obliquangoli.*

53. Sia il triangolo obliquangolo MNO (Fig.ª XI), i cui lati li segneremo colle lettere piccole m, n, o corrispondenti a quelle che segnano gli angoli opposti, e la somma dei tre lati la designeremo con p. Pei teoremi 2.°, 6.° e 7.° (N.° 30, 37, 38 e 39, formola S), introdotta dove occorre l' espressione del raggio R (N.° 46, 29) avremo le tre equazioni seguenti

$$m = n\,\frac{\text{Sen.}\,M}{\text{Sen.}\,N} \quad 1.^a$$

$$\text{Tan.}\left(\frac{M-N}{2}\right) = \left(\frac{m-n}{m+n}\right)\text{Tan.}\left(\frac{M+N}{2}\right) \quad 2.^a$$

$$\text{Sen.}^2\frac{1}{2}\,O = \frac{\left(\frac{1}{2}p - m\right)\left(\frac{1}{2}p - n\right)}{mn}\,R^2 \quad 3.^a$$

e queste equazioni unite all' altra

$$M + N + O = 180° \quad 4.^a$$

già nota dalla Geometria elementare, bastano per la risoluzione di ogni problema possibile circa la risoluzione dei triangoli obliquangoli; come sarà manifesto esaminando ad uno ad uno i quattro casi diversi ai quali si riduce ogni problema possibile.

54. Qui però è d'uopo che il giovane avverta che le tre prime equazioni ne comprendono altre in cui possono trasformarsi cangiando convenientemente i lati e gli angoli. Così nell'equazione (1.ª) è compresa anche l'altra

$$o = \frac{n\,\text{Sen.}\,O}{\text{Sen.}\,N},$$

essendo questa pure espressione del Teorema 2.°; e nella equazione (2.ª) è compresa l'altra

$$\text{Tan.}\left(\frac{O-N}{2}\right) = \left(\frac{o-n}{o+n}\right)\text{Tan.}\left(\frac{O+N}{2}\right),$$

essendo questa pure espressione del Teorema 6.°

55. 1.° caso. *Sia dato un lato* m *con due angoli qualunque del triangolo.*

Cogniti due angoli, la 4.ª farà conoscere anche il terzo angolo.

Quindi dalla 1.ª si avrà $n = \frac{m\,\text{Sen.}\,N}{\text{Sen.}\,M}$, e parimenti $o = \frac{m\,\text{Sen.}\,O}{\text{Sen.}\,M}$; cioè applicando i logaritmi

$$\text{Log.}\,n = \text{Log.}\,m + \text{Log. Sen.}\,N - \text{Log. Sen.}\,M,$$
$$\text{Log.}\,o = \text{Log.}\,m + \text{Log. Sen.}\,O - \text{Log. Sen.}\,M,$$

e così si avranno gli altri due lati.

56. 2.° caso *Siano dati due lati* o *ed* m, *ed un angolo opposto ad uno di essi, p. e.* M.

Dalla 1.ª si avrà $\text{Sen.}\,O = \frac{o\,\text{Sen.}\,M}{m}$,

cioè $\text{Log. Sen.}\,O = \text{Log.}\,o + \text{Log. Sen.}\,M - \text{Log.}\,m.$

Cognito l'angolo O, dalla 4.ª si avrà il valore dell'angolo N; e quindi dalla 1.ª si avrà $n = \frac{m\,\text{Sen.}\,N}{\text{Sen.}\,M}$,

cioè $\text{Log.}\,n = \text{Log.}\,m + \text{Log. Sen.}\,N - \text{Log. Sen.}\,M$,

e così sarà noto anche il terzo lato n.

Ma qui si avverta che due valori dell'angolo O possono soddisfare alla prima equazione $\text{Sen.}\,O = \frac{o\,\text{Sen.}\,M}{m}$, per essere (N.° 16) $\text{Sen.}\,O = \text{Sen.}\,(180° - O)$, cioè potrà essere l'angolo O tanto un angolo acuto, quanto l'angolo ottuso che ne è supplemento: e quindi (Fig.ª XI) il triangolo cercato potrà essere tanto il triangolo MNO, quanto il triangolo MNO', variando al variare di O il valore di N e di n, come è chiaro dal processo stesso della risoluzione. Questo caso di due soluzioni diverse, che presenta un problema con tali dati, fu già da noi avvertito fino dal principio della Trigonometria (N.° 4); e quante volte occorra un simile problema converrà trovare ambedue le soluzioni.

Una però di queste due soluzioni diviene impossibile: 1.° quando l'angolo dato M sia ottuso; non potendo allora essere O altro che acuto (Geom.ª N.° 57); 2.° quando il lato dato m sia maggiore dell'altro o, che è pur dato; dovendo allora (Geom.ª N.° 63) l'angolo O essere acuto, perchè minore dell'angolo M; 3.° quando $\frac{o\,\text{Sen.}\,M}{m} = R$, ossia quando

$$\text{Log.}\,o + \text{Log. Sen.}\,M - \text{Log.}\,m = \text{Log.}\,R,$$

essendo in tal caso $O = 90°$, e quindi eguale al suo supplemento.

Sono poi impossibili ambedue le soluzioni quando $\frac{o\,\text{Sen.}\,M}{m} > R$, ossia quando

$$\text{Log.}\,o + \text{Log. Sen.}\,M - \text{Log.}\,m > \text{Log.}\,R,$$

perchè in tal caso sarebbe $\text{Sen.}\,O > R$, il che è assurdo.

57. 3.° caso. *Sieno dati due lati p. e.* m *ed* n *coll' angolo compreso* O.

Dall'equazione 4.ª ricaveremo il valore della somma degli altri due angoli, cioè di $M+N$, e quindi anche di $\frac{M+N}{2}$, che ora rappresenteremo con B; quindi l'equazione 2.ª ci darà

$$\text{Log.Tan.}\left(\frac{M-N}{2}\right) = \text{Log.}(m-n) - \text{Log.}(m+n) + \text{Log.Tan.}\left(\frac{M+N}{2}\right)$$

Cognito così anche il valore di $\frac{M-N}{2}$, che rappresenteremo con A, avremo le due equazioni

$$M+N=2B$$
$$M-N=2A;$$

quindi avremo $M=B+A$, $N=B-A$.

Noti così gli altri due angoli M ed N, dalla 1.ª avremo $o=\frac{m\,\text{Sen.}\,O}{\text{Sen.}\,M}$, cioè

$$\text{Log.}\,o=\text{Log.}\,m+\text{Log. Sen.}\,O-\text{Log. Sen.}\,M,$$

e così diverrà cognito anche il terzo lato o.

58. 4. ed ultimo caso. *Sieno dati i tre lati* m, n, o.

Dall equazione 5.ª, applicandovi i logaritmi, avremo

$$2\,\text{Log. Sen}\frac{1}{2}O=2\,\text{Log.}\,R+\text{Log.}\left(\frac{1}{2}p-m\right)+$$
$$\text{Log.}\left(\frac{1}{2}p-n\right)-\text{Log.}\,m-\text{Log.}\,n,$$

e così, noto il valore di $\frac{1}{2}O$, conosceremo l' angolo O.

Per avere gli altri si ricorre alla (1.ª) e si avrà

$$\text{Log. Sen.}\,M=\text{Log. Sen.}\,O+\text{Log.}\,m-\text{Log.}\,o.$$

Noto poi O ed M si ottiene N per mezzo della 4.ª

59. Per esercizio dei giovani daremo anche qui i valori dei lati e degli angoli di un triangolo obliquangolo coi logaritmi che occorrono per l' applicazione delle formole

$m=125^{m}$ . . . . Log. $m=2{,}0969100$

$n=110^{m}$, 569 . . . . Log. $n=2{,}0436334$

$o=135^{m}$, 635. . . . . Log. $o=2{,}1323652$

$m+n=235^{m}$, 569 . . . . . . Log. $(m+n)=2{,}3721178$

$m-n=14^{m}$, 431 . . . . Log. $(m-n)=1{,}1592964$

$\frac{1}{2}p-m=60^{m}$, 569 . . . . Log. $\left(\frac{1}{2}p-m\right)=1{,}7824798$

$\frac{1}{2}p-n=75^{m}$, 032 . . . . . Log. $\left(\frac{1}{2}p-n\right)=1{,}8752465$

$O=70°$. . . . . Log. Sen. $O=9{,}9729858$

$M=60°$ . . . . Log. Sen. $M=9{,}9375306$

$N=50°$ . . . . Log. Sen. $N=9{,}8842540$

$\frac{M+N}{2}=55°$ . . . . . Log. Tan. $\left(\frac{M+N}{2}\right)=10{,}1547752$

$\frac{M-N}{2}=5°$. . . . . . . Log. Tan. $\left(\frac{M-N}{2}\right)=8{,}9419518$

$\frac{1}{2}O=35°$ . . . . Log. Sen. $\frac{1}{2}O=9{,}7585914$

Log. $R=10$.

§ 3.° *Applicazione delle esposte teorie alla risoluzione di problemi pratici di uso frequente.*

60. Problema 1.° *Determinare l' area di un triangolo* ABC (Fig.ª XII) *senza misurarne l' altezza* BD.

Perchè il problema sia risolvibile conviene che si possa avere la misura di tre de' suoi elementi, tra i quali un lato.

Essendo poi nel triangolo ABC l' altezza $BD=c\,\text{Sen.}\,A$ (N.° 32), e quindi la sua superficie (Geometria N.° 252) $=\frac{b\,c\,\text{Sen.}\,A}{2}$, la risoluzione del problema si riduce a trovare nel triangolo ABC i tre elementi b, c, A, qualora qualcuno solamente o nessuno di essi fosse tra i dati; quindi il problema si riduce ad uno dei casi contemplati superiormente per la risoluzione dei triangoli.

61. Problema 2.° *Trovare la distanza di due punti* D *ed* E *che sono inaccessibili.*

Si misuri la distanza di due punti F, G accessibili, da ciascuno dei quali si possa traguardare in D ed in E. Quindi traguardando da G e da F verso D, col circolo graduato si misurino gli angoli DGF, DFG che fa la FG con ciascuna delle sue visuali: così nel triangolo DFG si conoscerà il lato FG ed i due angoli adiacenti; e così (N.° 55)

MNC, *NMC*. Quindi traguardando i due osservatori da *N* e da *M* al centro della stella *S*, si avranno i due angoli *SNA*, *SMB*, che fanno le due visuali *SN*, *SM* colle direzioni del filo a piombo; quindi si conosceranno i due angoli *SNC*, *SMC*, che sono i loro supplementi. Dall'angolo *SNC* detratto *MNC*, e dall'angolo *SMC* detratto *NMC*, si conosceranno i valori dei due angoli *SMN*, *SNM*, che fanno le due visuali colla corda *MN*. Così nel triangolo *SMN* sarà noto *MN* ed i due angoli adiacenti, perciò (N.° 55) si dedurrà il valore di *SN*. Finalmente essendo per tale processo noti nel triangolo *SNC* il lato *SN*, il lato *NC* e l'angolo compreso *SNC*, si dedurrà (N.° 57) il valore del terzo lato *CS*, che sarà la distanza cercata.

MISURE NUOVE FRANCESI.

Misure lineari.

	Kilometri	Ectometri	Decametri	Metri	Decimetri	Centimetri
Miriametro	10	100	1000	10000	100000	1000000
Kilometri		10	100	1000	10000	100000
Ectometri			10	100	1000	10000
Decametri				10	100	1000
Metri					10	100
Decimetri						10

Il Metro = 3,078444 piedi di Parigi = 0,84143... Aune.
Il Piede di Parigi = 0,3248... metri.

Ecco come si devono intendere le suddivisioni fatte della stessa unità di misura, cioè del *Miriametro*, secondo che sono disposte in questa tavola.

Nella prima casella a sinistra è notato il numero dei *Kilometri* di cui è composto il *Miriametro*, il quale miriametro è scritto a sinistra della casella medesima. Dove è notato *Miriametro*, *Kilometri*, *Ectometri* ecc., si sottintende *un Miriametro*, *un Kilometro*, *un Ectometro* ecc. Si voglia p. e. sapere a quanti metri equivalga un miriametro. Io prendo la direzione della linea ove è scritto *Miriametro*, e prosieguo verso destra finchè giungo alla casella che corrisponde ad

angolo colla linea verticale, ove è notato *Metri*; in essa casella troverò il numero 10000, il quale esprimerà i metri che vale il miriametro. Nella stessa maniera si troverà che un metro equivale a 100 centimetri, e così via via.

Questa medesima regola si osserverà pur anco nelle seguenti tavole, relative alle misure di *superficie*, di *capacità* ecc.

Misure di superficie.

	Kiloare	Ectare o Ectometro quadrato	Decametro	Are o decametro quadrato	Deciare	Centiare o metri quad
Miriaro o Kilometro quadrato	10	100	1000	10000	100000	1000000
Kiloare		10	100	1000	10000	100000
Ectare o Ectometro quadrato			10	100	1000	10000
Decametro				10	100	1000
Are o decametro quadrato					10	100
Deciare						10

L'Ara = 100 metri quadrati = 137,947 piedi quadrati di Parigi.
Il Piede quadrato di Parigi = 0,10552 centiare.

Misure di solidità.

	Kiloare	Ectare o Ectom. cubo	Decare	Are o Decametro	Deciare	Centiare o metri cubi
Miriametro o Kilometro cubo	10	100	1000	10000	100000	1000000
Kiloare		10	100	1000	10000	100000
Ectare o Ectom. cubo			10	100	1000	10000
Decare				10	100	1000
Are o Decametro					10	100
Deciare						10

Il Centiaro, o metro cubo = 29,1739 piedi cubi di Parigi.
Il Piede cubo di Parigi = 34,2373 decimetri cubi.

Misure di capacità pei liquidi.

	Ectolitri	Decalitri	Litri o Decim. cubi	Decilitri	Centilitri
Decilitri					10
Litri o Decim. cubi				10	100
Decalitri			10	100	1000
Ectolitri		10	100	1000	10000
Kilolitro o Metro cubo	10	100	1000	10000	100000

Il Litro o decimetro cubo $= 0{,}029174$ piedi cubi.

Pesi.

	Kilogrammi	Ectogrammi	Decagrammi	Grammi	Decigrammi
Grammi					10
Decagrammi				10	100
Ectogrammi			10	100	1000
Kilogrammi		10	100	1000	10000
Miriagrammi	10	100	1000	10000	100000

Il Grammo, ossia un centimetro cubo di acqua stillata $= 18{,}8271$ grani francesi.

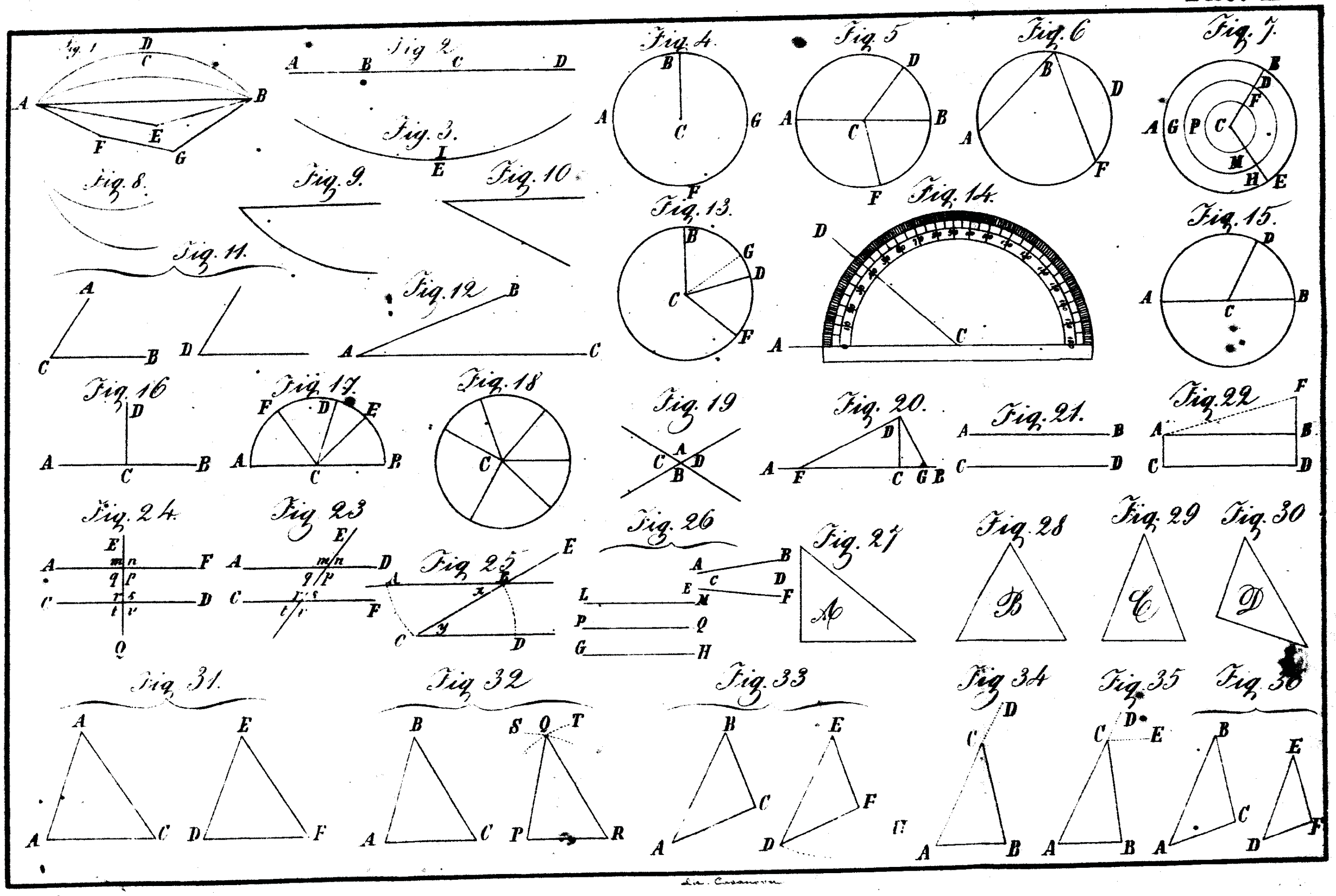
La Libbra francese composta di 9216 grani $= 489{,}506$ grammi.

FINE.

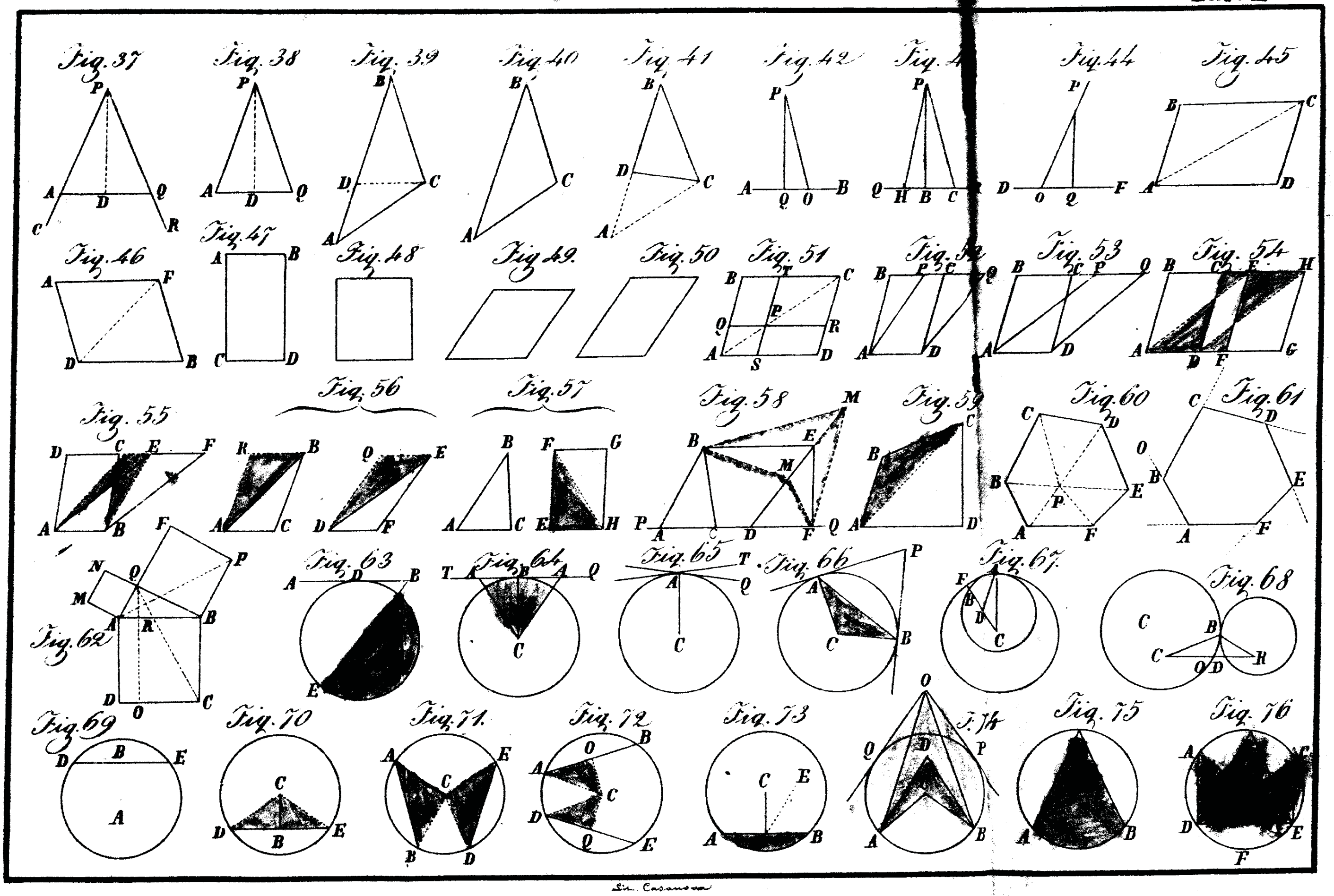
AVVERTENZA

Per una più comoda disposizione delle figure nelle tavole, la Fig. 191 è stata trasportata dalla tavola VII alla tavola VIII.

Tav. 1



Tav. 2



Tav. 3

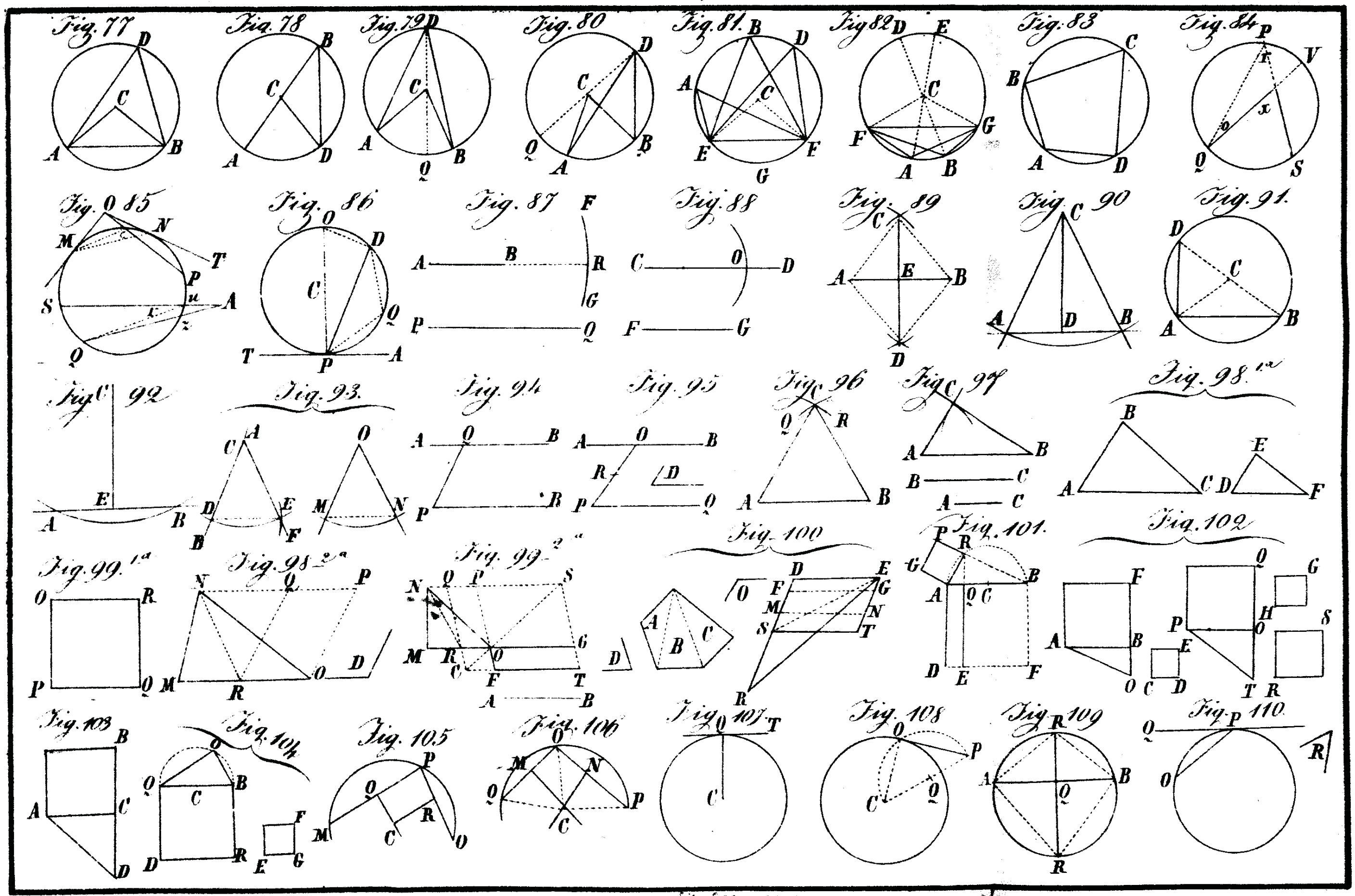


Fig. 77
Fig. 78
Fig. 79
Fig. 80
Fig. 81.
Fig. 82
Fig. 83
Fig. 84
Fig. 85
Fig. 86
Fig. 87
Fig. 88
Fig. 89
Fig. 90
Fig. 91.
Fig. 92
Fig. 93.
Fig. 94
Fig. 95
Fig. 96
Fig. 97
Fig. 98 1a
Fig. 99 1a
Fig. 98 2a
Fig. 99 2a
Fig. 100
Fig. 101.
Fig. 102
Fig. 103
Fig. 104
Fig. 105
Fig. 106
Fig. 107
Fig. 108
Fig. 109
Fig. 110.

Tav. 4

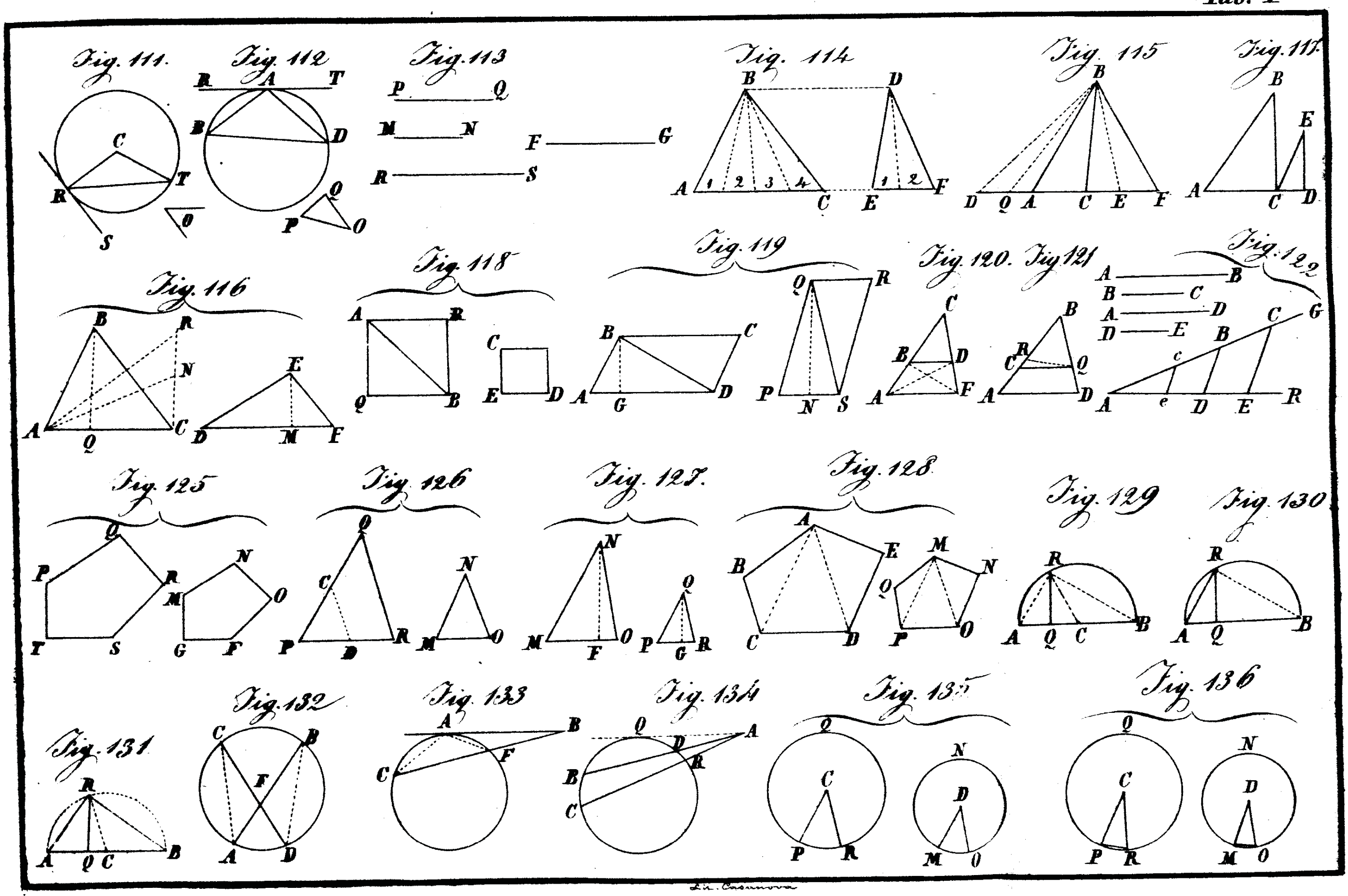
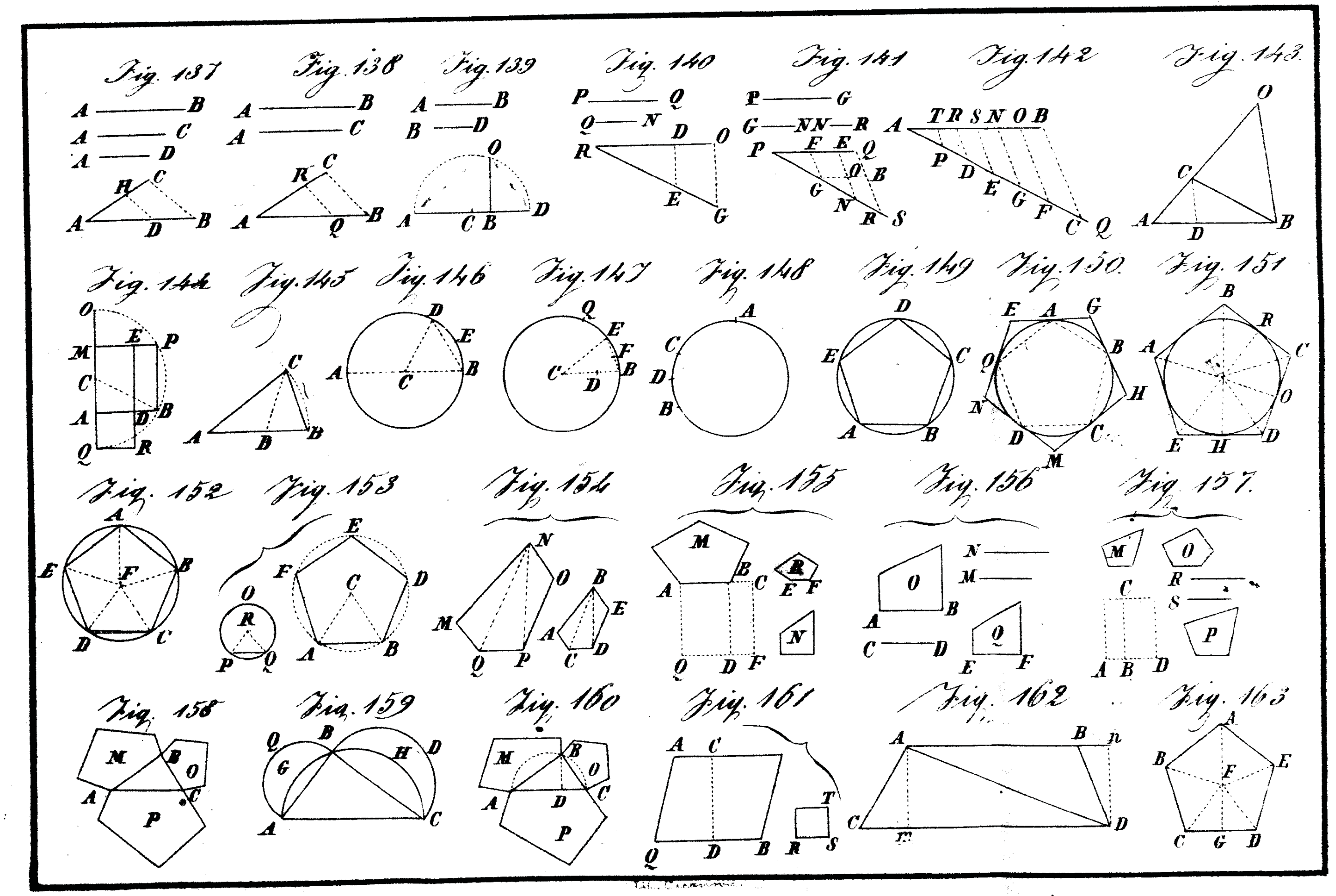
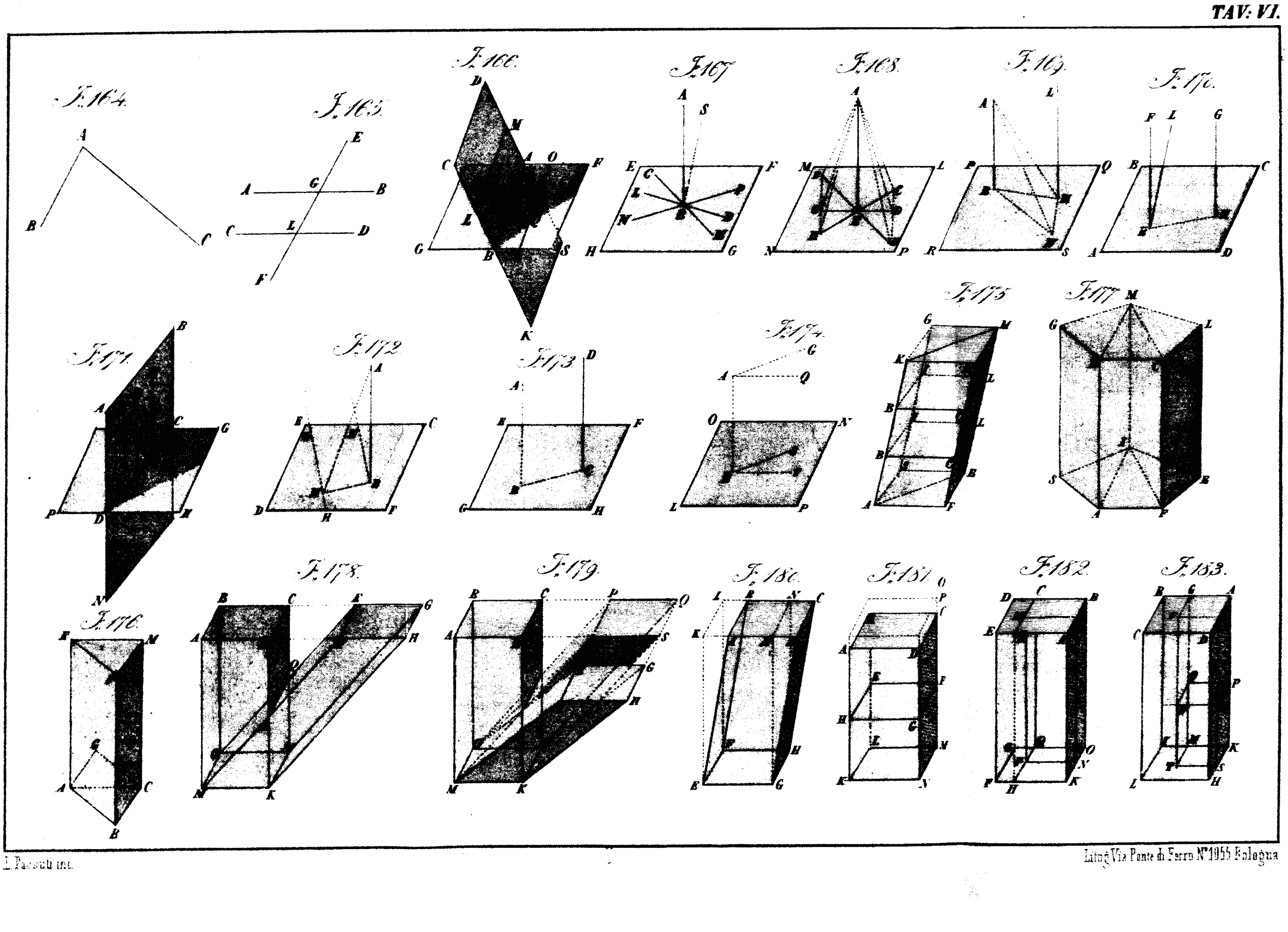


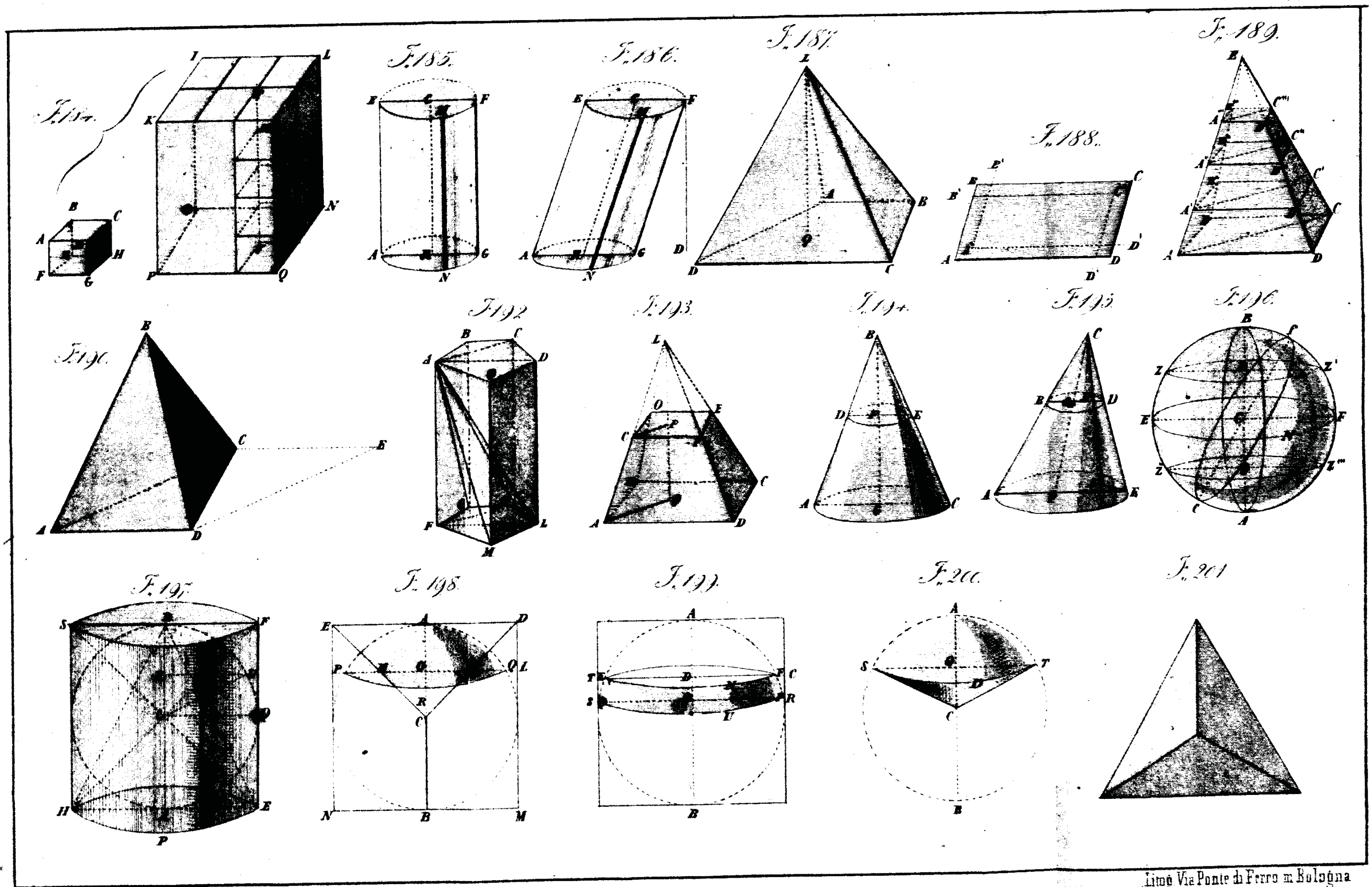
Fig. 111.
Fig. 112
Fig. 113
Fig. 114
Fig. 115
Fig. 117
Fig. 116
Fig. 118
Fig. 119
Fig. 120.
Fig. 121
Fig. 122
Fig. 125
Fig. 126
Fig. 127.
Fig. 128
Fig. 129
Fig. 130
Fig. 131
Fig. 132
Fig. 133
Fig. 134
Fig. 135
Fig. 136





Litog. Via Ponte di Ferro N°1955 Bologna

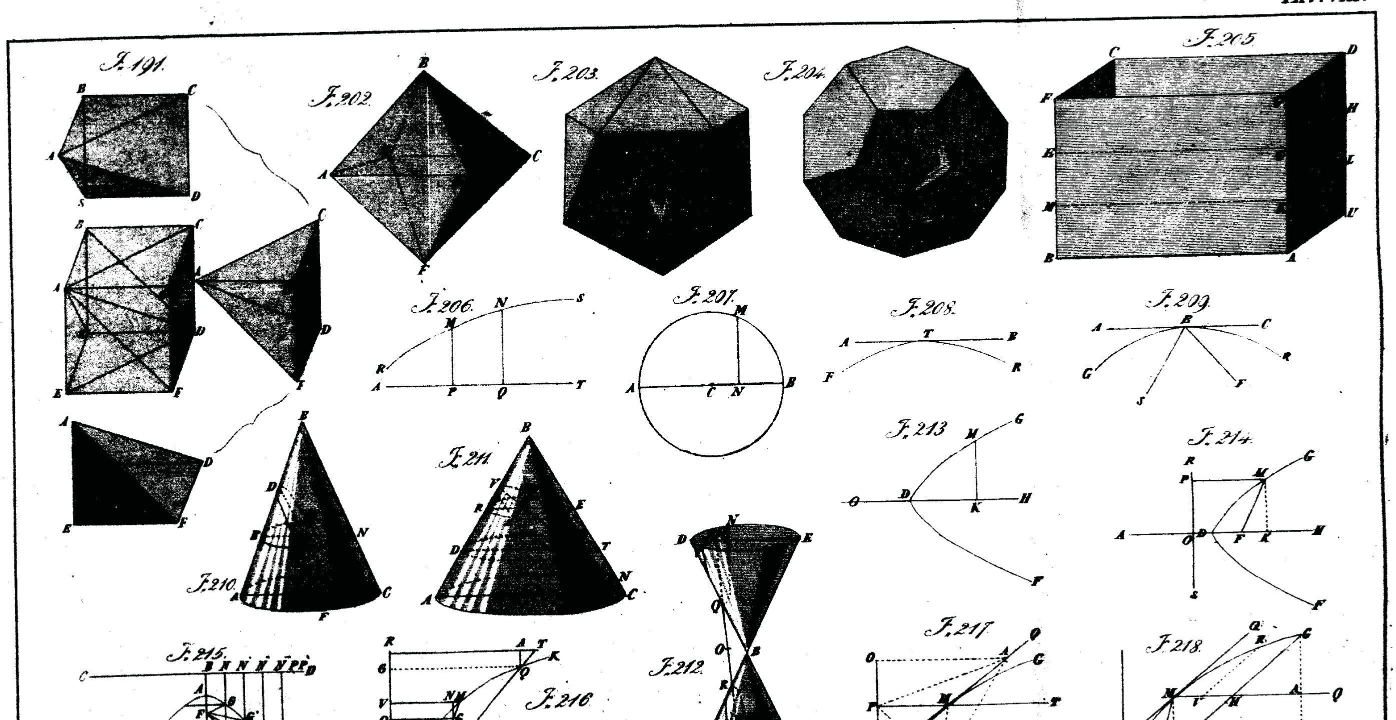
TAV: VII.



L. Pasculi inc.

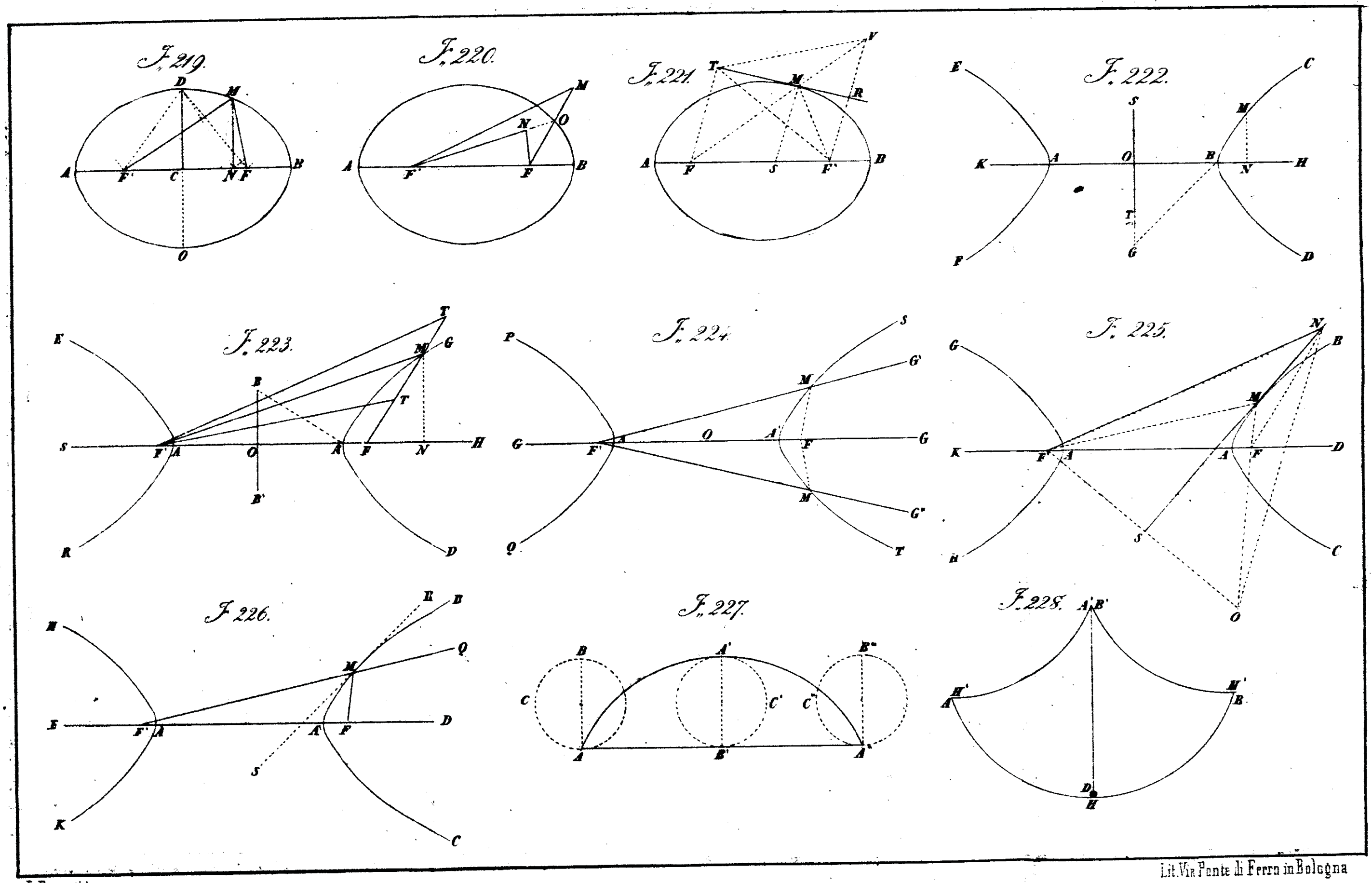
Litog. Via Ponte di Ferro in Bologna

TAV: VIII.



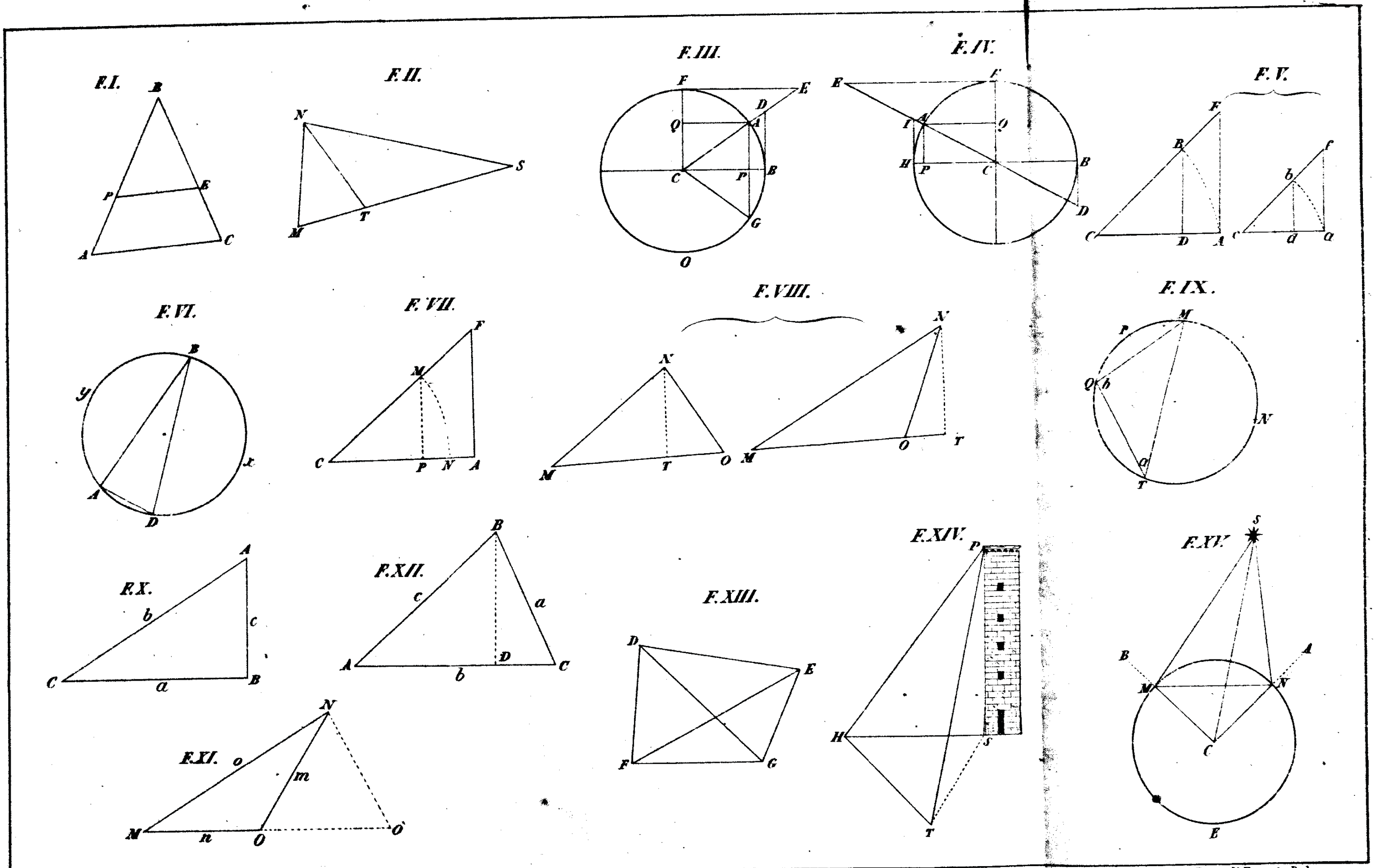
L. Pasculi inc.

Lit. Via Ponte di Ferro in Bologna



L. Passuti inc.

Lit. Via Ponte di Ferro in Bologna



L. Passuti inc.

Lit. Via Ponte di Ferro in Bologna