ELEMENTI

DI

ALGEBRA, GEOMETRIA

E

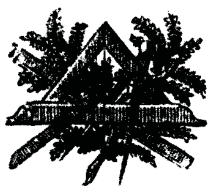
TRIGONOMETRIA PIANA

per uso

DEL SEMINARIO DI BOLOGNA

SECONDA EDIZIONE

CON MOLTE RIFORME ED AGGIUNTE



BOLOGNA

Pei Tipi Governativi alla Volpe.

1851.

ALL' EMINENTISSIMO E REVERENDISSIMO PRINCIPE

Il Signor

CARDINALE CARLO OPPIZZONI

Arcivescovo di Bologna

Volgono già due lustri da che io intitolai all'Eminenza Vostra Reverendissima gli Elementi di Algebra e Geometria da me compilati per uso dei giovani studenti Filosofia nel Suo Seminario. Poichè quella prima edizione venne del tutto esaurita, io mi determinai per una seconda, che procurai con ogni studio rendere meno imperfetta della prima, riformando molte cose, e molte aggiugnendone che in quella mancavano.

Degnisi l'Eminenza Vostra di accettare questa mia novella fatica come un attestato sincero della moltissima gratitudine che Le professo, e del profondo ossequio con cui passo a baciarle la S. Porpora, e a raffermarmi

Dell'E. V. R.

Bologna. Ottobre 1851.

Umil.mo Dev.mo Obb.mo Servitore
D. Gio. Battista Bontà.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE IN QUESTO VOLUME

ELEMENTI
DI ALGEBRA E GEOMETRIA

Tutto ciò, che è suscettibile di accrescimento e di diminuzione, vale a dire, che può ammettere vari gradi di grandezza, chiamasi *quantità*. Tali sono lo spazio, il tempo, il moto, i pesi ecc. La Matematica è la scienza che tratta delle quantità, e considera i diversi rapporti di grandezza, che possono avere l'una coll'altra.

La quantità può essere o concepirsi composta di parti separate le une dalle altre, come sarebbe un mucchio di pietre, dieci metri, ecc., e allora dicesi quantità *discreta;* ovvero composta di parti unite e legate fra loro, come sarebbe un albero, una pietra, ecc., e allora dicesi *continua*.

Nella quantità continua i matematici considerano la estensione, e ne determinano la grandezza misurandola: essa forma perciò l'oggetto della Geometria.

Nella quantità discreta al contrario, fatta astrazione dalla grandezza delle parti, non se ne considera che la moltitudine, o il numero; questa specie di quantità è quindi l'oggetto dell'aritmetica.

L'Aritmetica si divide in *Aritmetica numerica*, o *per cifre*, ed in *Algebra*, ossia *Aritmetica universale*, o *per lettere*.

Dell'Aritmetica numerica non ne diamo che un cenno in succinto, parlando unicamente di quelle operazioni, che sono indispensabili per l'intelligenza dell'Algebra; e parlandone più per ricordarle a chi già le apprese una volta per abitudine, di quello che per insegnarle a chi ne fosse del tutto digiuno.

Aritmetica Numerica.

1. L'Aritmetica numerica è la scienza che considera le proprietà de' numeri per apprendere a calcolare esattamente con facilità e prontezza. Col nome di calcolo intendiamo indicare la serie intera delle operazioni, o la traccia del raziocinio impiegato per iscoprire, e determinare i rapporti, che hanno fra loro le quantità, o i numeri tanto astratti, che concreti. Per conoscere e stimare i rapporti delle quantità fa d'uopo

supporre cognita un'altra quantità del medesimo genere colla quale si possano paragonare le altre. Così volendo determinare la lunghezza di uno spazio, si suppone cognito un altro spazio, per esempio, un *metro*, ed il numero delle volte che questa ultima quantità è contenuta nella prima, esprimerà la lunghezza dello spazio che voleva determinarsi. Questa quantità, di necessaria supposizione, che può dirsi *elementare,* chiamasi *unità di misura*, e per mezzo di essa si paragonano tutte le altre.

2. Il rapporto di continenza di una quantità qualunque alla sua unità, cioè l'espressione delle volte che una quantità contiene la sua unità di misura, chiamasi *numero*. I numeri, come tutti gli altri oggetti delle nostre idee, si rappresentano coi simboli. Dieci sono i simboli, o le cifre, colle quali si è convenuto di esprimerli, e sono 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, le quali cifre diconsi *Arabe*, forse perchè dall'Arabia passarono in Europa, e furono a noi comunicate verso il fine del decimo secolo per mezzo di un certo Gerberto, che fu poi Papa Silvestro secondo.

3. Delle suddette cifre assai cognite a tutti, le prime nove chiamansi *significative*, e prese separatamente l'una dall'altra, hanno un valore che dicesi *assoluto*, cioè non esprimono che *unità semplici* o *di primo ordine;* ma considerandone due o più unite insieme, acquistano un valore, che chiamasi *relativo;* il quale varia a seconda del luogo che occupano, e possono esprimere unità di *primo*, di *secondo*, di *terzo ecc. ordine*, cioè unità, decine, centinaia, migliaia ecc. Così l'8 preso da se solo indica otto unità semplici; che se a lui unirò il 7 a destra, allora acquisterà il valore di otto decine o di 80; e se accrescerò inoltre il 3, avrà il valore di otto centinaia o di 800, e così via discorrendo. Da qui apparisce, che a norma della convenzione fatta dagli Aritmetici, ogni cifra posta a destra di un'altra fa divenire dieci volte maggiore il valore della cifra antecedente, ritenendo quella che sta a destra il suo valore ordinario. Pertanto se le tre cifre di sopra 8, 7, 3, si uniranno insieme, indicheranno otto centinaia di unità, sette decine di unità, e più cinque unità, ossia ottocento settanta cinque unità.

4. La cifra zero non ha alcun valore in se stessa, ma s'impiega nella mancanza delle unità di qualche ordine, e serve per mantenere alle cifre il loro valore relativo. Nel numero 406, per esempio, se non si mettesse lo zero nel

luogo delle decine che mancano, la cifra 4 non indicherebbe le centinaia, ma bensì le decine, onde si avrebbe non 406, ma 46 solamente. Serve altresì lo zero per indicare tutti i diversi ordini di unità, tranne il primo. Così posto uno zero a destra dell'1 si ha l'unità di secondo ordine, cioè 9 più 1, ossia una decina o 10; indi 20, 30.........90. Del pari l'1 seguito da due zeri forma l'unità di terz' ordine, cioè 100 equivalente a 99 più 1, ossia a 9 decine più una decina; indi 200, 300 ecc. L'unità di quart'ordine sarà espressa dall'1 seguito da tre zeri, cioè da 1000, nato da 999 più 1, ossia da nove centinaia più 1 centinaio; quindi 2000, 3000 ecc., e così dicasi delle successive; le quali diverse unità, *tutte si contano* nel modo stesso delle prime unità semplici.

Con questo semplicissimo metodo venne a togliersi l'inconveniente di dover moltiplicare all'infinito i segni per esprimere i numeri superiori a 9.

5. Dunque per leggere i numeri già scritti si concepirono divisi in tre ordini; e secondochè un'espressione è composta di una, di due, o di tre cifre, le si dà il nome dell'*ordine delle unità, delle decine, delle centinaia*. Così 1, 2, 3,.....9 sono espressioni dell'ordine unità: 10, 30, 45, 74,.....99 sono espressioni dell'ordine delle decine: 100, 135, 430,.....999 esprimono l'ordine delle centinaia. Perciò dovendo leggere un dato numero conviene fare attenzione a questi ordini, e dare a ciascuna cifra la denominazione dell' ordine rispettivo.

6. Che se il numero fosse composto di più di tre cifre, si è convenuto di distinguere le cifre, che lo compongono in tante classi, ognuna di tre cifre, tranne la prima a sinistra che può essere di due, ed anche di una sola cifra, delle quali classi la prima a destra è quella delle unità; la seconda progredendo a sinistra è quella delle migliaia; la terza è quella de' milioni ecc. dimodochè l'ordine e la classe progrediscono come in questa tavola

7 8,	5 4 5,	6 8 9,	3 7 9,	6 5 7,
decine unità	centin. decine unità	centin. decine unità	centin. decine unità	centin. decine unità
Bilioni	decin. di migl.	di milioni	di migl.	di unità

E questi numeri dovranno leggersi: 78 bilioni, 545 mila, 689 milioni, 579 mila, 657.

7. A render più facile la lettura di un qualunque numero composto usano alcuni, dopo spartite le cifre in classi, di porre, contando da destra a sinistra, sopra la settima cifra l'1; sull'altra settima, computando sempre la settima antecedente il 2, sulla terza settima il 3, e così via via. Quindi il seguente numero: $2^3,409,208^2,430,021^1,694,764$; si pronuncierà: 2 trilioni, 409 mila, 208 bilioni, 430 mila, 21 milioni, 694 mila e 764.

8. I numeri sono *interi* o *rotti*. Nei primi ogni unità è un tutto completo, come 3 uomini, 6 città ecc. Nei secondi ogni unità è parte di un tutto, come due quarti di una libbra, tre quinti di uno scudo ecc.

9. L'Aritmetica in tutte le combinazioni, che eseguisce sopra i numeri, o gli aumenta, o li diminuisce.

Accrescimento de' Numeri.

Addizione.

10. L'Addizione, o Somma altro non è che l'unione di più numeri della stessa specie. Essa poi ha per iscopo di ottenere un numero, che equivalga in valore a tutti insieme i numeri uniti.

11. Una somma da fare s'indica col segno $+$, che si legge *più*, e si scrive sempre fra i numeri che si vogliono sommare. Così volendo sommare 5 con 4, scriverò $5+4$, e con ciò darò ad intendere che il 5 va unito col 4, onde ne emerga 9.

12. Per esprimere l'uguaglianza di due quantità della stessa specie si usa il segno $=$, che si legge *eguale;* così $5+4=9$, si legge 5 più 4 è uguale a 9.

13. L'addizione de' numeri semplici si eseguisce a memoria; ma se i numeri sono composti, e grandi, come p. e. 236 e 123, riuscendo insufficiente il metodo della memoria, sarà d'uopo concepirli decomposti nelle loro diverse collezioni di unità, decine, e centinaia per effettuare separatamente la somma di quelle, che portano il medesimo nome; onde nell'esempio addotto devono unirsi due centinaia, tre decine, sei unità con un centinaio, due decine, tre unità.

Ma 2 centin. $+$ 1 centin. $=$ 3 centinaia
3 decine $+$ 2 decine $=$ 5 decine
6 unità $+$ 3 unità $=$ 9 unità;

dunque riunendo le somme parziali si ha 359 per somma dei numeri 256 e 125. Questa operazione però si rende più facile, e breve scrivendo gli uni sotto gli altri i numeri proposti in modo, che le unità, le decine, le centinaia dell'uno corrispondano verticalmente ai medesimi ordini dell'altro; quindi si eseguiscono le riunioni parziali cominciando sempre da destra a sinistra, cioè dalle unità alle decine ecc. e scrivendone le rispettive somme sotto una linea orizzontale, che serve a dividere, e a distinguere le quantità da sommare dalle sommate.

Eccone gli esempi:

256	4275
125	3421
359	7696

14. Che se le cifre di un dato ordine sommate insieme sorpassino il valore di 9, allora conviene aggiugnere all'ordine maggiore contiguo il numero esprimente le decine contenute in questa somma, scrivendo sotto le cifre sommate di quel dato ordine solamente le unità della somma stessa. Sia da sommare 54 con 78: operando come negli esempi addetti, si direbbe $8+4=12$ (una decina, e due unità). Ma siccome in questa somma oltre le 2 unità v'è contenuta una decina, scriverò nel primo ordine la cifra 2 delle unità, ed unirò la decina all'ordine contiguo delle medesime, la quale con 7 e 5 produce la somma di 13. L'intera somma pertanto è composta di 13 decine, e 2 unità, cioè di 132. Si osservino gli esempi qui appresso:

1.°	2.°	3.°	4.°
54	458	45079	3790
78	2745	387	405
	14	4298	978
		94	4547
132	3217	49858	9720

15. Nel modo stesso con cui si fa la somma de' numeri della stessa specie, si eseguisce altresì la somma de' numeri di diversa specie. Nella addizione di questi ultimi però è necessario usare due attenzioni: la prima si è di porre i numeri della stessa denominazione gli uni sotto gli altri; come p. e. dovendo sommare libbre ed once con libbre ed once;

piedi e pollici con piedi e pollici ecc. ecc., bisogna porre le libbre sotto le libbre; le once sotto le once; i piedi sotto i piedi; i pollici sotto i pollici, e così del resto. L'altra attenzione è, che, fatta la somma di ciascuna colonna, convien osservare quante volte in essa sia contenuta la specie della colonna susseguente, e conosciuto il numero delle volte, che vi è contenuta, uniscasi questo alla seconda colonna, e si scriva il resto, se vi sarà, nella prima. Così dovendo sommare libbre 24 ed once 9 con libbre 14 ed once 6, le scriverò in questo modo:

	libbre 24	once 9
	14	6
Totale	libbre 39	once 3;

perchè sommando once 6 con once 9, avrò once 15; ed osservando che la specie delle libbre, cioè il 12 è contenuto nella somma delle once 15 una volta coll'avanzo di 3, che è quanto dire che 15 once sono 1 libbra e 3 once di più; io scriverò l'avanzo 3 sotto la colonna delle once, e sommerò l'1 coll'altra colonna delle libbre, come si disse dei numeri della stessa specie, ed otterrò libbre 39 ed once 3, come sopra.

Lo stesso si dica di qualunque altra somma di numeri di specie diversa, come apparisce dai seguenti esempi:

	scudi	bai.	quattr.
Sc.	484.	70.	3
	395.	18.	4
	54.	09.	2
Sc.	933.	98.	4

tese	piedi	pollici	linee
26,	4,	10,	11
3,	7,	09,	06
31,	0,	08,	05

Moltiplicazione.

16. Le quantità insieme unite finora furono tutte ineguali: se esse fossero eguali, basterebbe replicarne una sola un certo numero di volte, e l'operazione in questa circostanza diviene un caso particolare della somma. Volendo sapere p. e.

quale sia il valore di 5 braccia di panno a scudi 3 il braccio, si scrive a colonna il 3 cinque volte, e si somma

3
3
3
3
3
—
La somma 15 scudi

è il valore delle 5 braccia di panno. Ora queste somme hanno ricevuto il nome di *moltiplicazione*, la quale ha per oggetto nell'Aritmetica di prendere un numero, che chiamasi *moltiplicando*, tante volte, quante sono le unità contenute in un altro, che dicesi *moltiplicatore*, e ciò che ne emerge si appella *prodotto*.

Sia da moltiplicare 7 per 4. Poichè 7 replicato 4 volte produce 28, è chiaro che il loro *prodotto* sarà il 28. E in questo esempio 7 è il *moltiplicando*, 4 il *moltiplicatore*: chiamansi ancora questi due numeri indistintamente *fattori*, ed il prodotto dicesi *fatto*.

17. Per indicare una moltiplicazione da eseguire si usa il segno ×, ovvero un punto posto fra le quantità, che si devono moltiplicare, e si legge *moltiplicato per*. Così 6×4, ovvero $6 \,.\, 4$ si legge 6 moltiplicato per $4 = 24$.

18. Nella moltiplicazione de' numeri semplici non avvi altra regola che la volgarissima Tavola Pitagorica; o a meglio dire, è necessario sapere a memoria quale sia il prodotto di tutte le 10 cifre arabiche moltiplicate a due a due, senza di che l'operazione riuscirebbe e stucchevole e lunghissima.

19. Se uno soltanto dei due fattori sia composto, e l'altro semplice, allora posti uno sotto dell'altro, e tirata una linea orizzontale, si moltiplichi il semplice per tutte le cifre del composto, coll'avvertenza sempre che nel prodotto di ciascuna cifra, che oltrepassi il valore di 9, le decine si debbono ritenere pel rispettivo loro ordine, scrivendo il resto sotto l'ordine, su cui si opera; l'ultimo prodotto però si scriverà tutto intero com'è. Esempi:

1.°	2.°	3.°	4.°
234	3421	45608	3049
2	2	4	5
468	6842	182432	15245

20. E infatti, nel 1.° esempio che 234×2 dia il prodotto di 468, si prova decomponendo il moltiplicando. Imperocchè moltiplicare 234 per 2 vuol dire che debbon prendersi 2 centinaia 2 volte, 2 volte 3 decine, e 2 volte 4 unità. Ora sapendosi che 2 volte 2 centinaia $= 400$; che 2 volte 3 decine $= 6$ decine, ossia 60; che 2 volte 4 unità $= 8$; è chiaro sommando insieme che $234 \times 2 = 468$.

Prova 400
60
8
—
468

21. Le regole precedenti si applicano altresì al caso, in cui ambidue i fattori sieno composti, con questa sola differenza, che bisogna fare successivamente i prodotti del moltiplicando per le cifre dei diversi ordini del moltiplicatore, ponendo la prima cifra di ciascun prodotto parziale sotto la cifra dell'ordine, a cui appartiene la cifra del moltiplicatore, che dà questo prodotto, e sommando quindi tutti i prodotti per averne un solo, come nell'esempio qui appresso:

$$
\begin{array}{rl}
4853 & \\
246 & \\
\hline
29118 & \\
19412 & \text{prodotti} \\
9706 & \text{parziali} \\
\hline
1193838 & \text{prodotto totale.}
\end{array}
$$

22. Se l'uno o l'altro dei fattori, od anche tutti due fossero terminati da zeri, si trascurano gli zeri, e si eseguisce la moltiplicazione delle cifre significative soltanto, e si scrivono poi gli zeri trascurati nei fattori alla destra del prodotto totale, e l'operazione torna la stessa. In generale poi si moltiplica per 10, per 100, per 1000 aggiungendo 1, 2, 3 ecc. zeri in fine al moltiplicando. Esempi:

1.°	2.°
543	45400
800	300
434400	13620000

3.° $435 \times 10 = 4350$
$435 \times 100 = 43500$
$435 \times 1000 = 435000$ ecc.

Nota. Dovendo moltiplicare più numeri fra loro, come 4, 5, 3 ecc., conviene moltiplicare primieramente i due primi, indi moltiplicare il loro prodotto 20 per 3, il che dà 60.

Diminuzioni de' Numeri.

Sottrazione.

23. La sottrazione decompone i numeri come la somma li compone; perciò l'oggetto della sottrazione aritmetica è di togliere un piccol numero da un altro più grande della stessa specie.

Il numero maggiore si chiama ***minuendo***, il minore, che si leva dal maggiore, ***sottraendo***, e ciò che rimane, ***differenza***.

La sottrazione da fare s'indica col segno — che si pronuncia *meno;* così 8 — 3 si pronuncia 8 meno 3, e ciò significa che dall'8 deve togliersi 3, onde rimanga 5.

24. È cosa molto facile eseguire la sottrazione sopra i numeri semplici. Riguardo ai composti convien porre il sottraendo sotto al minuendo, serbando sempre l'ordine dovuto nelle cifre; indi tirata una linea orizzontale, scrivere, cominciando da destra a sinistra, sotto ciascuna colonna successivamente la differenza, che passa fra le unità, decine, centinaia ecc. del minuendo e del sottraendo, come si vede dagli esempi qui appresso:

1.° Minuendo	8549	2.°	47274	min.
Sottraendo	327		12153	sottr.
Differenza	8222		35121	diff.

25. Qualora alcune cifre del minuendo sieno minori delle cifre corrispondenti del sottraendo, si osservi che le unità espresse nell'ordine antecedente si possono trasportare col pensiero in parte nel seguente, riducendole ad unità di quest'ordine. Per esempio dovendo sottrarre 54 da 73, siccome il 4 non si può levare da 3, decompongo le 7 decine in sei decine, ed in una decina equivalente a 10 unità. Unisco queste 10 unità o decina al numero dell'ordine unità, il che produce 13 unità, dalle quali levandone 4 rimangono 9. Proseguo ora a sottrarre 5 da 6 (poichè il 7 fu diminuito di una decina) ovvero aggiungo la decina decomposta al 5, il che torna lo stesso che scemare il 7 di 4; ed ho 1 di avanzo.

E così si faccia delle rimanenti cifre delle centinaia, migliaia ecc., come si può vedere dai seguenti esempi:

1.°	34048 min.		2.°	491406 min.
	2783 sottr.			278637 sottr.
	31265 diff.			212769 diff.

26. Trattandosi di dover sottrarre numeri di diversa specie, valgono le stesse regole, avvertendo soltanto che nel caso, in cui una qualche cifra del sottraendo sia maggiore della sua corrispondente nel minuendo, nel decomporre la susseguente cifra di esso minuendo fa d'uopo aver riguardo alla cifra dell'ordine, su cui si opera. Onde trattandosi, a cagion di esempio, di libbre e di once, sarà necessario decomporre una libbra in dodici once, non già in 10. Così uno scudo si decomporrà in 100 baiocchi; un piede in 12 pollici; un pollice in dodici linee, e così dicasi delle altre specie di quantità, che si vogliono sottrarre l'una dall'altra.

Si osservino gli esempi:

	Sc. bai. quatt.		Libb. onc.		Piedi poll. lin.
1.°	404. 10. 2	2.°	328. 07	3.°	39. 04. 08
	231. 24. 5		243. 10		14. 07. 09
	172. 85. 4 diff.		84. 09 diff.		24. 08. 11 diff.

Divisione.

27. Un caso particolare della sottrazione è il dovere levare da una data quantità un'altra non una volta sola, ma tante volte, quanto ciò è possibile. Se dal 12 p e. io levo il 4 tante volte quanto è possibile, cioè a dire, se io lo levo 3 volte, eseguisco appunto questo caso di sottrazione particolare. Ora nell'intraprendere questa operazione io posso subito cercare quante volte potrò da un dato numero levarne un altro; quante volte p. e. potrò dal 20 levare il 5; ed è chiaro che lo potrò levare solo tante volte quante vi è contenuto. L'operazione necessaria per trovare quante volte un numero è contenuto in un altro, si chiama divisione aritmetica: e dicesi *dividendo* quello dei due numeri proposti, nel quale si cerca quante volte è contenuto l'altro; *divisore* quest'altro; e *quoto*, o *quoziente* quel numero che esprime quante

volte il divisore è contenuto nel dividendo. Onde nell'esempio addotto, 20 sarebbe il dividendo, 5 il divisore, e come è chiaro 4 sarebbe il quoto o quoziente.

28. Ma se dovesse cercarsi quante volte nel 17 è contenuto il 5; in altri termini, se dovesse dividersi il 17 per 5, non potrebbe aversi per quoto esatto il 3, perchè il 5 è contenuto esattamente 3 volte nel 15, e non nel 17; parimenti non potrebbe aversi per quoto esatto il 4, perchè il 5 è contenuto esattamente 4 volte nel 20 e non nel 17. In tal caso 4 prenderebbe per quoto il 3, cioè in generale il quoto minore dei due fra i quali deve esservi il vero; e si indicherebbe che non è esatto, segnando un 2, che è l'eccesso che ha 17 sopra quel numero che contiene esattamente tre volte il 5. Questo 2 si chiama *resto*, o *residuo*, ed è in generale quel numero più piccolo che conviene levare dal dividendo, onde il divisore vi sia contenuto un numero esatto di volte.

29. La divisione s'indica scrivendo il dividendo, e il divisore tramezzati da due punti uno dietro l'altro, ovvero il dividendo sopra, e il divisore sotto, separati da una linea orizzontale, e gli uni, e l'altra si leggono *diviso per*.

Così $8 : 2$, ovvero $\frac{8}{2}$ si pronuncia 8 diviso per 2.

30. Se il dividendo contiene poche volte il divisore, si potrà eseguire la divisione con facilità, e a memoria; ma quando avvenga di dividere un numero grande, con qual metodo potrà essa eseguirsi? Si osservi l'esempio qui appresso.

Sia da dividere 5296 per 4. Sciolgo il dividendo ne' suoi ordini, cioè 5 migliaia + 2 cent. + 9 dec. + 6 unità; ed incominciando dalle migliaia, esse contengono 1 volta il 4; segno perciò 1 in quoto. Il resto 1 migliaio lo riduco a centinaia, e l'unisco alle 2 centinaia del dividendo, e divisa la loro somma 12 cent. per 4, trovo il quoto esatto 3, che segno a destra del primo quoto 1. Il quoto di nove per 4 è 2, che segno a destra del secondo quoto 3; e riducendo il resto 1 ad unità l'unisco al 6: la somma 16 divisa per 4 dà 4 di quoto senza resto, che scrivo a destra del terzo quoto 2, e ne otterrò il quoto totale 1324. Il calcolo può disporsi così:

Divisore 4	Dividendo 5, 2, 9, 6	1324 Quoto

31. Qui si osservi: 1.° che il prodotto del quoto pel divisore deve riprodur sempre il dividendo, come è chiaro.

Ciò deve verificarsi altresì quando la divisione non riesca esatta; poichè in questo caso basterà riunire il resto della divisione al prodotto del quoto pel divisore. Così essendo 3 col resto 1 il quoto di 13 per 4; al prodotto 12 del quoto 3 pel divisore 4 unisco il resto 1, e riproduco 13. Si osservi: 2.° che il prodotto di due fattori diviso per uno qualunque di essi, dà per quoto l'altro fattore. Il 18 p. e. è prodotto di 3 per 6: ora dividendo 18 per 6, avrò 3 di quoto; e dividendo 18 per 3 avrò 6.

32. Le osservazioni fatte finora possono riepilogarsi così. Per dividere un numero qualunque per un altro si pone questo a sinistra del dividendo separandoli con una linea verticale: indi si prendono a sinistra del dividendo tante cifre quante sono necessarie per superare il divisore, e se ne fa la divisione: il quoto ottenuto si moltiplica per tutto il divisore, e se il prodotto è maggiore del dividendo parziale, si tolgono tante unità dal quoto, quante sono necessarie per ottenere un prodotto, che possa sottrarsi dal dividendo parziale; fatta la sottrazione, ed abbassata a destra del resto la cifra seguente del dividendo totale, si replica la divisione colle accennate avvertenze. Che se, abbassata la cifra, il dividendo parziale non contiene il divisore, si segna zero nel quoto, e si abbassa un'altra cifra a destra della già scritta, e si continua la divisione.

A schiarimento maggiore di quanto si è detto si faccia osservazione agli esempi seguenti:

1.° 6 | 59,7,4 | 995	2.° 8 | 67,2,5,7 | 8407
54	64
·57	·32
54	32
·34	··57
30	56
·4 resto	·1 resto

33. Se ancora il divisore fosse numero composto, il processo del calcolo sarebbe lo stesso, potendosi riguardare come semplice. Solo, per dividere più speditamente, si osservi quante volte la prima cifra del divisore è contenuta nella prima del dividendo, o nelle due prime, se ciò è necessario. Per lo più

lo stesso numero di volte il divisore intero è contenuto nel dividendo parziale. Così p. e. nel dividere 9781 per 48, probabilmente 48 è contenuto 2 volte in 97, perchè 4 è contenuto 2 volte in 9; e lo stesso si dica degli altri.

34. La divisione si abbrevia allorchè il dividendo e il divisore sono terminati da zeri, perchè in tal caso cassando egual numero di zeri dall' uno e dall' altro, non si fa che cangiar nome agli ordini senza alterarli. Perciò dovendo dividere 3600 per 600, si riduce a 36 diviso per 6; ed il quoto è 6, o si sopprimano, o si lascino gli zeri.

35. Qui gioverà osservare le seguenti cose:

1.° Che la sola divisione progredisce da sinistra a destra a fine di riunire i resti successivi agli ordini inferiori.

2.° Che ciascun resto finale è sempre minore del divisore rispettivo, giacchè in caso contrario non sarebbe più quantità indivisibile.

3.° Che ciascuna cifra, che si abbassa dal dividendo totale per iscriverla a destra dei resti parziali, dà una cifra nel quoziente.

4.° Che ciascun quoto parziale non può eccedere il 9.

36. La moltiplicazione e la divisione dei numeri di diversa specie, come libbre ed once, piedi e pollici ecc. si possono eseguire in più maniere. La più semplice però e fors'anche la più breve, è quella di ridurre nella prima il moltiplicando e il moltiplicatore, nella seconda il dividendo e divisore in parti dell'ultima specie. Dopo ciò si eseguisce l'operazione come negl'interi. Egli è d'uopo però avvertire che al prodotto, che risulta nella moltiplica, ed alcune volte al quoto nella divisione, è a portarsi qualche modificazione, per ridurli alla loro vera specie. Le modificazioni, che vi si debbono portare si deducono da ciò che si dirà sulla moltiplica, e sulla divisione delle frazioni; mentre la riduzione a parti dell' ultima specie, non è, in ultima analisi, altro che ridurre degli interi a frazione.

Verificazione delle suddette operazioni.

37. A conoscere gli errori, che operando possono correre nel calcolo, si usano alcuni artifici, che gli servono di riprova.

Quanto alla somma possono riunirsi le partite già sommate colla stessa loro somma, e sottrarre di poi la prima somma da questa riunione totale, o seconda somma. È chiaro

che un tale processo deve restituire la prima somma, se il calcolo fu eseguito senza errori. Si può ancora procedere in altro modo, cioè tagliar fuori la prima fila superiore orizzontale delle partite sommate, indi sommare le rimanenti: ciò fatto, sottrarre la seconda somma dalla prima, e se l'operazione fu eseguita senza errori, la differenza di queste due somme deve riprodurre la fila superiore tagliata fuori. Esempi:

```
1.° 45439            2.° 43875
     23567               ------
      2345                12346
       780                97458
    ------                43102
1.ª Somma  72131         ------
2.ª Somma 144262         196781
          ------         152906
1.ª Somma  72131         ------
          ------        = 43875 prima fila tagliata.
```

Per la sottrazione, sommando il *sottraendo* colla *differenza* deve riprodursi il *minuendo*. Esempi:

```
1.° Min.    78349        2.° 6904168
    Sottr.  54901            3456789
            -----            -------
    Diff.   23448            3447379
            -----            -------
    Minuendo 78349           6904168
            -----            -------
```

Per la moltiplicazione si divida il *prodotto* per uno dei due *fattori*, e ne dovrà venire per quoto l'altro *fattore*. Esempi:

```
1.°  345                    2.° 190
       5                         15
     ---                        ---
Divisore 5 | 1725 | 345. Qu.    950
                               190
                               ---
             Divisore 15 | 2850 | 190 Quoto
                           15
                           ---
                           135
                           135
                           ---
                           ..0
```

Per la divisione moltiplicando il *quoto* pel *divisore*, e al prodotto aggiunto il residuo, se vi è, deve riprodursi il *dividendo*. Esempi:

```
1.° 5 | 7525 | 1505        2.° 15 | 9049  | 603
           5                      | 90    | 15
        ----                        ----    ---
        7525 Dividendo            »»49    3015
                                    45     603
                                    --    ----
                                    »4    9045
                                             4 resto
                                          ----
                                          9049 Dividendo
```

Delle Frazioni.

38. Non vi è quantità, la quale non sia divisibile in parti; come pure non trovasi unità, che non possa immaginarsi composta di un certo numero di parti fra loro uguali. Per esempio: uno Scudo s'immaginò composto di 10 paoli, o di 100 baiocchi; una libbra di 12 once; un piede di 12 pollici; un pollice di 12 linee ecc. Quindi ne segue, che siccome i numeri interi esprimono unità intere, come 1 Scudo, 2 libbre, 3 piedi ecc., così i numeri rotti, o *frazioni* esprimono alcune parti dell'unità divisa, come un mezzo Scudo, due terzi di libbra, tre quarti di piede ecc.

39. Le frazioni si scrivono con due numeri uno sotto all'altro separati da una linea. Così $^{1}/_{2}$, $^{2}/_{3}$, $^{3}/_{4}$, $^{5}/_{6}$, $^{4}/_{5}$, si leggono: un mezzo, due terzi, tre quarti, cinque sesti, quattro quinti ecc. Il numero posto sotto la linea si chiama *denominatore*, ed indica in quante parti uguali si suppone divisa l'unità; quello che sta sopra la linea dicesi *numeratore*, ed indica quante di quelle parti si prendano. Così la frazione $^{3}/_{4}$ di Scudo significa che lo Scudo viene diviso in 4 parti eguali, e che di queste quattro parti se ne prendono tre sole, cioè 75 baiocchi.

40. Le frazioni si distinguono in *proprie*, *improprie* e *miste*. Proprie sono quelle, che esprimono un numero realmente minore dell'unità, come $^{3}/_{4}$ di Scudo, dove manca $^{1}/_{4}$ a formare uno Scudo intero. Improprie sono quelle, che equivalgono ad uno, o più interi senza resto, come $^{3}/_{3}$, $^{8}/_{4}$,

$^{15}/_{5}$, $^{20}/_{10}$, che formano uno, due, tre ecc. interi. Miste sono quelle, che equivalgono ad uno, o più interi con qualche resto, come $^{7}/_{3}$ di un piede, che formano 2 piedi con $^{1}/_{3}$ di più.

41. Per distinguere poi l'una dall'altra questa specie di frazioni, cioè conoscere facilmente se siano proprie, improprie o miste, si confronterà il loro numeratore col denominatore. Saranno proprie quando il numeratore sarà minore del denominatore: p. e. $^{1}/_{2}$, $^{3}/_{5}$, $^{9}/_{10}$ ecc. Sono improprie quando il numeratore contiene una, o più volte senza resto il denominatore, come $^{2}/_{2}$, $^{9}/_{3}$, $^{8}/_{4}$, $^{12}/_{2}$, $^{18}/_{6}$ ecc. Miste finalmente saranno se il numeratore contiene una, o più volte il denominatore, ma con qualche resto: tali sono $^{9}/_{4}$ e $^{10}/_{3}$.

42. A ben comprendere la teorica delle frazioni, gioverà moltissimo il conoscere la verità dei seguenti assiomi, che sono inchiusi nella nozione stessa delle frazioni.

Assioma 1.° – *Aumentando il solo numeratore della frazione, la frazione cresce; aumentando il solo denominatore, diminuisce* –. Di fatto, se, come abbiamo detto, la frazione $^{3}/_{7}$ p. e. altro non significa se non che 3 delle 7 parti eguali, nelle quali è stata divisa l'unità di misura, è chiaro, che se invece di $^{3}/_{7}$ scrivo $^{4}/_{7}$, cioè se aumento il solo numeratore cresce il valore della frazione, prendendo 4, e non più 3, di quelle parti, nelle quali è stata divisa l'unità. Parimenti se aumento il denominatore 7 senza cangiare il numeratore; se scrivo p. e. invece di $^{3}/_{7}$, $^{3}/_{10}$, la frazione diminuisce; poichè essendo l'unità di misura divisa nel caso dei $^{3}/_{10}$ in un numero maggiore di parti, tali parti divengono più piccole; e tanto in $^{3}/_{7}$, quanto in $^{3}/_{10}$ sempre si prendono 3 di queste parti.

Assioma 2.° – *Il valore di una frazione non cambia quando se ne moltiplicano, o se ne dividono i due termini per un medesimo numero* –. Di fatto è facile vedere che duplicando i due termini di una frazione, il suo valore rimane lo stesso; poichè se si duplica p. e. il denominatore 7 di $^{5}/_{7}$, ognuna delle parti sarà divisa in due, giacchè l'unità di misura ne conterrà 14 invece di 7. Per avere dunque la stessa grandezza, bisognerà prendere due parti invece di una, 4 invece di 2...... finalmente 10 invece di 5, e $^{10}/_{14}$ sarà $=$ $^{5}/_{7}$. Triplicando 7, e 5, si avrebbe pure $^{15}/_{21}$ $=$ $^{5}/_{7}$ etc.

Assioma 3.° – *Il valore delle frazioni non si misura dalla grandezza assoluta dei numeri per cui sono espresse, ma bensì dalla grandezza maggiore, o minore, che ha il numeratore rela-*

tivamente al suo denominatore –. Di fatto dalla nozione istessa delle frazioni si deduce che p. e. $^1/_2$ è più grande di $^{50}/_{100}$; essendo 50, delle 100 parti eguali nelle quali è stata divisa una data unità di misura, minori di 50 di queste parti, ossia minori della metà dell' unità stessa di misura.

Prima di eseguire sulle frazioni le quattro operazioni aritmetiche, di cui parlammo fin qui, fa d'uopo premettere la spiegazione di alcune cose necessarie a sapersi.

Riduzione delle Frazioni a minimi termini, o alla più semplice espressione, ossia schizare i rotti.

43. Dicesi ridurre a minimi termini una frazione, quando se ne trova un' altra eguale ad essa in valore, ma espressa in termini i minimi possibili. Per ottenere una tale riduzione è necessario saper trovare il *massimo comun divisore*, cioè un numero che divida esattamente tanto il numeratore, che il denominatore della frazione, e sia di essi il divisore maggiore. Così p. e. il 3 sarà massimo comun divisore di 6 e 27, perchè è il numero più grande, che divida ambidue senza resto; onde $^6/_{27}$ si ridurrebbero a $^2/_9$. Così pure il 9 sarà massimo comun divisore di $^{27}/_{36}$ che si riducono a $^3/_4$; e il 7 lo è di $^{28}/_{63}$ riducibili a $^4/_9$ ecc.

Trovare il massimo comun divisore di due quantità.

44. Per trovare il massimo comun divisore di due quantità, si divide la maggiore per la minore; se la divisione non lascia alcun resto, la stessa quantità minore sarà il massimo comun divisore delle quantità date. Così 12 e 96 avranno per massimo comun divisore il 12. Se poi, fatta la prima divisione della quantità maggiore per la minore, si abbia un residuo, per questo residuo si divida la quantità minore; se questa seconda divisione non lascia alcun avanzo, il primo residuo sarà desso il massimo comun divisore delle due quantità. Che se la seconda divisione lascia un residuo, per esso si dividerà il residuo della prima; poi pel residuo della terza (se vi sarà) si dividerà il residuo della seconda, e così via via, finchè si giunga a trovare un quoto esatto. L'ultimo divisore sarà il massimo comun divisore cercato.

45. Sia da trovarsi il massimo comun divisore di 94 e 294. Comincio dal dividere 294 per 94, e trascurando il quoto 3 prendo il resto 21 e per esso divido il 94. Trascuro

il quoto 4, e prendo il resto 7, pel quale divido il primo resto 21, e siccome la divisione è senza resto, ne segue da quanto si è detto che il 7 è massimo comun divisore di 94 e 294. Perciò, dividendo per esso ambedue queste quantità, ridurrò la prima a 13, la seconda a 42, cioè la frazione $^{91}/_{294}$ ridotta alla più semplice espressione $= {}^{13}/_{42}$.

Il calcolo si dispone così:

```
94 | 294                     oppure 294
                                    94 - 3
     21 | 94                        21 - 4
                                     7 - 3
           7 | 21                    0

               0
```

Altro esempio. Si voglia il massimo comun divisore di 29 e 67. Disponendo ed eseguendo si ha:

```
29 | 67                      oppure 67
                                    29 - 2
     9 | 29                          9 - 3
                                     2 - 4
          2 | 9                      1 - 2
                                     0
              1 mass. com. divisore.
```

46. La dimostrazione dell' esattezza di questa regola si vedrà nell'Algebra, qualora si parlerà del massimo comun divisore di due quantità algebriche. Allora si insegneranno altresì alcuni artifizi per abbreviare alcune volte l'operazione, i quali si possono utilmente applicare, sebbene assai più di rado anche in aritmetica. Intanto qui si avverta che quando le accennate divisioni hanno in fine l'unità per ultimo resto, le due quantità, ossia la frazione, non potrà ridursi ad una espressione più semplice, perchè l'unità è un divisore comune a tutti i numeri.

47. La quantità che divisa per un'altra lascia un qualche resto, dicesi *prima* a questa, ed ambedue *prime fra loro*. Dicesi poi *numero primo* qualunque quantità intera presa assolutamente, la quale non sia divisibile esattamente da altra quantità intera maggiore dell'unità. I numeri 8 e 3 sono primi tra loro, perchè l'8 diviso per 3, lascia 2 di residuo. Presi

però l'uno separato dall'altro, sarà primo il 5, ma non l'8, perchè il 5 diviso per 2, non dà un quoto esatto; l'8 al contrario può dividersi per 2 e per 4 senza alcun resto.

48. I numeri primi non possono terminare in 0, 2, 4, 5, 6, 8, perchè così terminando, sono sempre divisibili almeno per 2 o per 5; ogni numero primo adunque dovrà necessariamente terminare in 1, 3, 7, 9, benchè poi non ne conseguiti che tutti i numeri terminati in tal guisa sieno sempre numeri primi, dovendosene escludere tutti i loro prodotti, cioè quei numeri che si ottengono dalla moltiplica o di ognuno di loro per se medesimo, o di uno per l'altro, esclusa l'unità, che in qualunque maniera moltiplicata non può mai alterare il valore di alcun numero. Così 3×3; 7×7; 9×9; come pure 3×7; 3×9; ovvero $3\times3\times7\times9$ ecc. daranno sempre dei prodotti divisibili, com'è chiaro, per gli stessi loro fattori, i quali prodotti perciò non potranno mai essere numeri primi.

49. Spesso interviene nelle operazioni aritmetiche che si debba decomporre un qualche numero non primo ne' suoi fattori, il che torna lo stesso che trovarne tutti i suoi divisori. Ciò si ottiene col dividere il dato numero pei numeri primi 2, 3, 5, 7 ecc., seguitando a dividere per uno stesso numero, quante volte si può, i successivi quoti che si ottengono. È indifferente di scegliere per primo divisore qualunque dei detti numeri primi, ma ordinariamente torna meglio cominciare la divisione col più piccolo, e quindi passare ai maggiori gradatamente.

Sia il numero 180 di cui si vogliono tutti i divisori semplici e composti.

Comincio a dividerlo per 2, numero primo il più semplice dopo l'unità, ed avrò 90 di quoto; onde $180=2\times90$. Il 90 si divide esso pure per 2, e dà 45 di quoto, onde $90=2\times45$; e perciò $180=2\times2\times45$. Il quoto 45, non essendo più divisibile per 2, lo divido per 3, e si ha 15 di quoto, che pure si divide per 3, e dà 5 di quoto, numero primo, che non si può ulteriormente dividere; e perciò il $45=3\times15$, ovvero $=5\times3\times3$. Quindi 180 che era eguale a $2\times2\times45$, sarà eguale altresì a $2\times2\times3\times3\times5$. Questi 5 fattori, essendo tutti numeri primi, si chiamano i *fattori*, o *divisori semplici* del numero 180.

Trovati in tal guisa tutti i divisori semplici di un dato numero, è cosa facile di rinvenirne i composti, poichè dalle

osservazioni fatte avendosi che $180=2\times2\times3\times3\times5$, è chiaro che qualunque prodotto risultante da' suoi fattori primi combinati a due a due, a tre a tre ecc., si può riguardare come fattore, o divisor composto del numero dato. Combinando dunque in tutti i modi possibili i fattori semplici del 180, si avranno tutti i suoi divisori composti, come si può vedere dal seguente specchio:

Dividendi	Divisori semplici	Divisori composti	di fattori combinati
180	2	4, 6, 10,	a 2 a 2
90	2	9, 15.	
45	3	12, 20, 18	a 3 a 3
15	3	30, 45.	
5	5	36, 60, 90.	a 4 a 4
		180.	a 5 a 5

Lo stesso si faccia per qualunque altro numero.

Ridurre gl'interi a frazione.

50. Dividendo un intero qualunque per l'unità, esso non cangia valore, e prende l'aspetto di frazione, ma di frazione apparente o impropria. Così 3 equivale a $^3/_1$; 8 ad $^8/_1$ ecc. Se poi si volesse ridurre un intero a frazione di dato denominatore, p. e. a quarti, a quinti ecc., allora fa d'uopo moltiplicare l'intero pel denominatore dato; il prodotto sarà il numeratore della frazione, che avrà per denominatore il denominatore dato. Dovendo perciò ridurre il 4 a sesti, si moltiplichi per 6, e si avrà $^{24}/_6$. Che poi $^{24}/_6$ equivalgono a 4, si prova da questo, che riducendo la frazione a minimi termini col metodo insegnato, si ha $^{24}/_6=\,^4/_1=4$, come prima.

51. Da ciò si apprende la maniera di ridurre le monete, i pesi, le misure ecc. in altre di specie inferiore. Sieno p. e. scudi 55 da ridurre a baiocchi; moltiplico 55 per 100, ed avrò 5500 = come è chiaro a Sc. 55. Così pure libbre $8\times12=96$ once; ed ore $4=240$ minuti ecc., poichè il 100, il 12, il 60 divengono denominatori di 5500, di 96, di 240; onde si avrebbero le frazioni seguenti: $^{5500}/_{100}=$ Sc. 55; $^{96}/_{12}=8$ libbre; e $^{240}/_{60}=4$ ore.

52. Se l'intero da ridurre a frazione fosse accompagnato da frazione, si ridurrà tutto ad una sola frazione, moltiplicando l'intero pel denominatore della frazione, ed aggiugnendo

al prodotto il numeratore di esso; la somma darà il numeratore della frazione ridotta. Così $5\,^1/_4 = {}^{21}/_4$; $3\,^2/_5 = {}^{17}/_5$ ecc.

Riduzione delle frazioni ad interi.

53. Quando il numeratore è maggiore del suo denominatore, che è quanto dire, quando la frazione non è *propria*, essa si riduce ad interi dividendo il numeratore pel denominatore. Così da $^{12}/_3$ ne risultano 4 interi. Similmente $^{60}/_{12} = 5$ interi. Se il numeratore non venga diviso esattamente, del residuo si forma una frazione; quindi $^{14}/_3 = 4\,^2/_3$; e $^{17}/_5 = 3\,^2/_5$ ecc.

Da ciò s'impara a ridurre le monete, i pesi, le misure ad altre di specie maggiore. Così baiocchi $350 : 100$ si ridurranno a scudi $3\,^{50}/_{100}$, ossia Sc. $3\,^1/_2$; del pari minuti $120 : 60 = 2$ ore; e 108 once divise per 12, daranno libbre 9, poichè il 100, il 60, il 12 sono rispettivi denominatori, che dividono i loro numeratori.

Convertire una frazione in un'altra del medesimo valore, e di dato denominatore.

54. Per convertire una frazione in un'altra di dato denominatore, si moltiplica il numeratore di essa pel denominatore dato, e si divide il prodotto pel suo denominatore; il quoziente che ne sorte sarà il numeratore della frazione cercata, la quale avrà bensì diverso aspetto, ma non diverso valore della prima. Sia p. e. la frazione $^2/_3$ che si voglia convertire in un'altra, il di cui denominatore sia 60. Moltiplico 2 per 60, e divido il prodotto 120 per 3, ed avrò la frazione cercata $^{40}/_{60}$, la quale vale lo stesso che $^2/_3$ per l'assioma 2.° Che se il denominatore della data frazione non divida esattamente il prodotto, come se p. e. dovesse ridursi la frazione $^2/_3$ ad un'altra, che avesse per denominatore l'8, il prodotto 16, che nasce da 2×8 non potendosi dividere per 3 esattamente, si porrà il quoto 5 per numeratore di 8, e gli si unirà il rotto nato dal residuo, cioè $^1/_3$, che sarà frazione di frazione, e ciò significa che $^2/_3$ ridotti in ottavi danno $^5/_8$ e $^1/_3$ di ottavo di più. Dopo ciò è facile cosa apprendere il modo di trasformare i rotti, che esprimono parti di monete, di pesi, di misure ecc. al loro determinato e concreto valore, operando cioè su di essi come si è detto. Così $^3/_4$ di scudo si riducono a baiocchi 75 moltiplicando il numeratore 3 per 100, e dividendo il prodotto 300 pel deno-

minatore 4. Del pari $^2/_3$ di libbra si riducono ad once 8, moltiplicando il 2 per 12, e dividendo il prodotto 24 per 3. Lo stesso si dica delle altre specie.

Sarà utilissimo esercizio per lo studioso, il cercare da sè le ragioni, d'altronde facili, di queste e di altre regole, che si daranno in appresso, le quali, in ultima analisi, derivano tutte dalla nozione stessa della frazione.

Riduzione delle frazioni di frazioni a rotto semplice.

55. Come le frazioni esprimono parti di un intero, così le frazioni di frazioni esprimono parti di una frazione. Quindi come $^2/_3$ di libbra significano, che divisa la libbra in 3 parti, se ne prendono 2, che equivalgono ad once 8, così $^3/_4$ di $^2/_3$ di libbra significano che divisi i $^2/_3$ ossia le once 8 in 4 parti, di queste se ne pigliano 3, che sono once 6.

Da questa spiegazione facilmente rilevasi il modo, con cui una frazione di frazione può ridursi ad una sola espressione. Basta moltiplicare insieme i numeratori, e i denominatori parimenti, e l'operazione sarà fatta, sebbene le frazioni fossero più di due. Così $^1/_4$ di $^2/_3$ darà $^2/_{12} = {}^1/_6$; e $^3/_5$ di $^2/_6$ formerà la frazione $^6/_{30} = {}^1/_5$. Del pari la frazione $^3/_4$ di $^2/_3$ di $^3/_5$ moltiplicando tra loro 3, 2, 3, e 4, 3, 5, si ridurrà a $^{18}/_{60} = {}^3/_{10}$.

A schiarimento maggiore di quanto si è detto superiormente, supponiamo che questo stesso rotto $^3/_4$ di $^2/_3$ di $^3/_5$ esprima parti di uno scudo romano, che vale 10 paoli. Dico che il suddetto rotto di rotto equivale a $^3/_{10}$ ossia 3 paoli. Imperocchè $^3/_5$ di uno scudo sono eguali a 6 paoli, perchè 2 paoli formano appunto il $^1/_5$ di uno scudo; ma $^2/_3$ di 6 paoli sono 4 paoli, come è chiaro; e $^3/_4$ di 4 paoli sono 3 paoli; dunque è manifesto che la frazione di frazione $^3/_4$ di $^2/_3$ di $^3/_5$, è eguale a $^3/_{10}$, cioè 3 paoli, come sopra.

Riduzione delle frazioni allo stesso denominatore.

56. Per sommare e sottrarre le frazioni è necessario che esse abbiano la stessa denominazione. Ridurre i rotti allo stesso denominatore è l'operazione, per cui le frazioni di denominazione diversa ne acquistano una medesima, conservando il loro primitivo valore. Per far ciò si moltiplichino da prima fra loro tutti i denominatori delle frazioni date, e dal prodotto si avrà il denominatore comune: indi si molti-

plichi il numeratore di ciascuna per li denominatori di tutte le altre, e da un tal prodotto si avrà il numeratore di ognuna. Perciò $^{3}/_{4}$ e $^{2}/_{5}$ si trasformano in $^{15}/_{20}$ e $^{8}/_{20}$. Del pari $^{1}/_{2}$, $^{2}/_{3}$, $^{4}/_{5}$ daranno $^{15}/_{30}$, $^{20}/_{30}$, $^{24}/_{30}$. E ciò vale per qualsivoglia numero di frazioni.

57. Nella stessa maniera, richiedendo il bisogno, si possono ridurre quante frazioni si vogliono ad uno stesso numeratore, moltiplicando cioè tutti i numeratori di esse insieme, e il prodotto darà il numeratore comune; indi moltiplicando il denominatore di ciascuna pei numeratori delle altre, onde averne il denominatore di esse. Quindi $^{1}/_{3}$, $^{3}/_{4}$, $^{2}/_{5}$ saranno eguali a $^{6}/_{18}$, $^{6}/_{8}$, $^{6}/_{15}$; e $^{5}/_{8} + ^{3}/_{9} = ^{15}/_{24} + ^{15}/_{45}$.

Premessa la spiegazione di tutte le accennate cose, passiamo ora ad eseguire sulle frazioni le stesse operazioni, che furono eseguite sugl'interi.

Sommare le frazioni.

58. 1.° Se le frazioni hanno tutte lo stesso denominatore, se ne avrà il totale, sommando insieme tutti i loro numeratori, e scrivendovi sotto il denominatore comune. Così le frazioni $^{6}/_{7} + ^{3}/_{7} + ^{5}/_{7} = ^{14}/_{7} = 2$.

2.° Se le frazioni da sommarsi abbiano diversa denominazione, converrà prima ridurle allo stesso denominatore, indi operare come sopra. Così $^{2}/_{3} + ^{3}/_{4} = ^{8}/_{12} + ^{9}/_{12} = ^{17}/_{12} = 1\,^{5}/_{12}$. Parimenti $^{1}/_{2} + ^{1}/_{4} + ^{2}/_{5} = ^{20}/_{40} + ^{10}/_{40} + ^{16}/_{40} = ^{46}/_{40} = 1\,^{6}/_{40}$.

3.° Se le frazioni da sommarsi sono miste con interi, si faccia prima la somma delle frazioni ridotte allo stesso denominatore, e se questa conterrà qualche intero, si aggiunga alla somma degli altri interi. Perciò $5\,^{2}/_{3} + 6\,^{3}/_{4}$ daranno $5\,^{8}/_{12} + 6\,^{9}/_{12} = 12\,^{5}/_{12}$.

59. Qui si noti una volta per sempre, che a facilitare le operazioni delle frazioni giova moltissimo, segnatamente se desse sieno espresse da numeri alti, ridurle alla più semplice espressione possibile, quando ciò possa ottenersi. A tal fine senza ricorrere al metodo del massimo comun divisore, che è assai più laborioso e difficile, si danno le seguenti regole per se stesse chiarissime.

Regola 1.ª Se ambidue i termini della frazione terminano per numero pari, sono divisibili per 2. Così la frazione $^{6}/_{8}$ si riduce a $^{3}/_{4}$; e $^{8}/_{18}$ a $^{4}/_{9}$ ecc.

Regola 2.ª Se sono terminati per 5 saranno divisibili per 5. Onde $^{75}/_{95}$ si riducono a $^{15}/_{19}$, e $^{25}/_{45}$ a $^{5}/_{9}$ ecc

Regola 3.ª Se finiscono per 0 sono divisibili per 10 e per 5. Perciò $^{40}/_{60}$ si trasformano prima in $^{4}/_{6}$ indi in $^{2}/_{3}$.

Regola 4.ª Se le note componenti ciascuno dei due termini sommate insieme sono divisibili per 3 o per 9, questi saranno divisori comuni dei termini della frazione. Così $^{45}/_{51}$ si riducono a $^{15}/_{17}$; del pari $^{396}/_{459} = ^{44}/_{51}$, perchè nella prima il numeratore $4 + 5 = 9$, come pure il denominatore $5 + 1 = 6$, sono divisibili per 3; e nella seconda $3 + 9 + 6 = 18$, e $4 + 5 + 9 = 18$, sono divisibili per 9. (*)

Sottrarre le frazioni.

60. 1.° Quando le frazioni hanno lo stesso denominatore, la sottrazione si eseguisce levando il numeratore della frazione minore dal numeratore della maggiore, e scrivendo sotto alla differenza il denominatore comune. Così $^{5}/_{7} - ^{2}/_{7} = ^{3}/_{7}$.

2.° Se le frazioni abbiano denominatore diverso, fa d'uopo ridurvele, indi operare come sopra. Quindi $^{3}/_{4} - ^{2}/_{3} = ^{9}/_{12} - ^{8}/_{12} = ^{1}/_{12}$. Così pure $^{7}/_{8} - ^{1}/_{5} - ^{2}/_{7} = ^{245}/_{280} - ^{56}/_{280} - ^{80}/_{280} = ^{109}/_{280}$ ecc.

3.° Se si debba sottrarre una frazione da interi, questi si riducono (N.° 50) a frazione avente lo stesso denominatore colla frazione da sottrarsi, indi si opera come sopra. Siano p. e. da sottrarsi $^{2}/_{3}$ da 4. Ridotto il 4 a terzi, avremo $^{12}/_{3} - ^{2}/_{3} = ^{10}/_{3} = 3\,^{1}/_{3}$. Lo stesso si faccia se debbano sottrarsi interi con rotti da interi con rotti. Onde $5\,^{1}/_{2} - 2\,^{1}/_{4} = ^{11}/_{2} - ^{9}/_{4} = ^{44}/_{8} - ^{18}/_{8} = ^{26}/_{8} = 3\,^{2}/_{8} = 3\,^{1}/_{4}$.

Moltiplicare le frazioni.

61. Per ben comprendere la natura di questa operazione, sieno p. e. da moltiplicarsi $^{5}/_{6}$ per $^{3}/_{4}$. Si moltiplichi da prima la frazione $^{5}/_{6}$ pel solo numeratore 3 dell'altra. Da quanto si disse parlando della moltiplicazione degl'interi (N.° 46), moltiplicar $^{5}/_{6}$ per 3, vale lo stesso che prender 3 volte $^{5}/_{6}$, onde da $^{5}/_{6} \times 3$ si avrà il prodotto $^{15}/_{6}$. Questo prodotto però

(*) Nota. *La dimostrazione di questa proprietà del 3 e del 9, riesce facilissima a chi possiede i principii dell'Algebra. Il cercarla servirà in seguito di utile esercizio allo studioso.*

è quattro volte maggiore del vero, giacchè 3 è quattro volte maggiore di $^3/_4$, essendo 3 interi $= {^{12}/_4}$ (N.° 50); dunque converrà ridurre la quantità $^{15}/_6$ quattro volte più piccola. Ora la frazione $^{15}/_6$ vuol dire che si deve prendere 15 volte una delle 6 parti eguali nelle quali è stata divisa l' unità di misura: per ridurla perciò 4 volte più piccola basterà prendere 15 volte non già una di queste 6 parti dell'unità, ma la quarta parte di una di esse; cioè a dire basterà prendere 15 volte una ventiquattresima parte dell' unità stessa. Onde la frazione $^{15}/_{24}$ sarà la quarta parte di $^{15}/_6$; e sarà perciò $^{15}/_{24}$ il prodotto vero di $^5/_6 \times {^3/_4}$. Si osservi ora questo risultato $^{15}/_{24}$, e si vedrà che 15 è il prodotto nato dalla moltiplica dei numeratori delle due frazioni proposte, e 24 il prodotto dei loro denominatori; dunque *le frazioni si moltiplicano scrivendo sotto al prodotto dei loro numeratori il prodotto dei denominatori*. Esempi: $^2/_3 \times {^4/_7} = {^8/_{21}}$; $^5/_8 \times {^4/_9} = {^{20}/_{72}} = {^{10}/_{36}} = {^5/_{18}}$; $^1/_8 \times {^9/_{12}} = {^9/_{96}} = {^3/_{32}}$.

62. Se si debba moltiplicare un intero per un fratto, o viceversa, si può ridurre l'intero a frazione, mettendovi sotto l' unità, indi moltiplicare come si è detto delle frazioni; ovvero moltiplicare l'intero pel numeratore, e scrivere sotto al prodotto il denominatore della frazione. Così $4 \times {^2/_3} = {^4/_1} \times {^2/_3} = {^8/_3} = 2\,{^2/_3}$; parimente $3 \times {^5/_6} = {^{15}/_6} = 2\,{^3/_6} = 2\,{^1/_2}$.

63. Se uno dei fattori, od anche tutti due fossero misti d' interi e rotti, si ridurranno prima a frazione, poscia si opererà come sopra (N.° 62). Esempio:

$$3\,{^1/_2} \times 4\,{^2/_5} = {^7/_2} \times {^{22}/_5} = {^{154}/_{10}} = {^{77}/_5} = 15\,{^2/_5}.$$

64. Da quanto abbiamo detto risulta, che moltiplicare una frazione per un'altra, vale lo stesso che moltiplicarla per un certo dato numero, e dividerla al tempo stesso per un altro. Le frazioni proprie pertanto, in cui il numeratore è minore del denominatore, daranno sempre un prodotto minore di ciascuna delle due frazioni moltiplicate. Avviene però l'opposto se una, o ambedue le frazioni che si moltiplicano, sieno improprie. Quindi si può conchiudere che anche nelle frazioni la moltiplicazione significa la stessa cosa della moltiplicazione degl'interi, cioè *prendere una frazione tante volte quante l'indica un' altra*. Ma prendere una frazione tante volte quante l'indica un'altra, equivale ad una frazione di frazione; dunque per prendere una frazione di frazione, bisogna moltiplicarle fra loro, come si disse al N.° 55.

Dividere le frazioni.

65. Per conoscere come si debbano dividere le frazioni, supponiamo di dovere dividere $^3/_4$ per $^5/_7$. La frazione $^3/_4$ non cambia valore moltiplicando numeratore e denominatore per 5×7 (N.° 42 Ass.° 2.°): laonde sarà $^3/_4 = \frac{3 \times 5 \times 7}{4 \times 5 \times 7} = \frac{3 \times 7}{4 \times 5} \times {^5/_7}$. Per dividere adunque $^3/_4$ per $^5/_7$ basterà sopprimere in $\frac{3 \times 7}{4 \times 5} \times 5$ (quantità equivalente a $^3/_4$) il fattore $^5/_7$: e quindi sarà $^3/_4 : {^5/_7} = {^3/_4} \times {^7/_5} = {^{21}/_{20}}$, cioè il quoto sarà formato dal prodotto della frazione dividenda moltiplicata per la frazione divisore capovolta. E questo stesso ragionamento potendosi applicare a qualunque altra divisione di frazioni si potrà stabilire, che *si dividono le frazioni rovesciando i termini del divisore, e moltiplicandoli con quelli del dividendo*. Così $^3/_4 : {^2/_5} = {^3/_4} \times {^5/_2} = {^{15}/_8} = 1\,{^7/_8}$; $^4/_7 : {^2/_3} = \frac{4 \times 3}{7 \times 2} = {^{12}/_{14}} = {^6/_7} = 1\,{^1/_7}$ ecc.

66. Nella divisione d' interi per rotti, o viceversa, si mettano gl'interi a frazioni, e si operi come al numero antecedente. Se poi si debbano dividere interi con rotti per interi con rotti, si riducano tutti a frazione, indi si operi come sopra. Così $3 : {^1/_4} = {^3/_1} \times {^4/_1} = {^{12}/_1} = 12$. Del pari $3\,{^2/_5} : 4\,{^2/_3} = {^{17}/_5} \times {^3/_{14}} = {^{51}/_{70}}$ ecc.

67. Quando le frazioni divise sono proprie, il quoto che si ottiene sarà sempre maggiore del dividendo. La ragione ne è chiara, se si rifletta che nel rovesciare i termini della frazione divisore, metto il maggior termine nel numeratore, mentre il minore passa in luogo del denominatore. Perciò avviene che il termine maggiore moltiplica la frazione, e il minore la divide; dunque guadagna più di quel che perde; e per conseguenza il quoto divien maggiore del dividendo. Il contrario succede nella divisione delle frazioni improprie, e se ne rende facile la ragione a chiunque voglia por mente alla natura di esse.

A conoscere gli errori che potessero esser corsi nelle operazioni delle frazioni, valgono le stesse regole assegnate per le operazioni degl'interi.

Frazioni Decimali.

68. Le frazioni decimali sono quelle, il denominatore delle quali è l'unità seguìta da uno o più zeri, come $^5/_{10}$, $^8/_{100}$, $^9/_{1000}$ ecc. Tali denominatori poi, come ognuno può osservare, progrediscono sempre in ragione decupla cominciando dall'unità, cioè 1, 10, 100, 1000 ecc.

Si supponga, per cagion d'esempio, uno scudo, una libbra ecc. divisa in dieci parti eguali e ciascuna di queste parti s'immagini divisa in altre dieci parti eguali, e ciascuna di queste ultime ancora divise in altre dieci eguali, e così via via finchè si vorrà. È manifesto che la prima unità divisa sarà eguale alle prime dieci parti, alle cento seconde, alle mille terze ecc., e che da tale divisione hanno origine le parti decime, centesime, millesime ecc., le quali si separano dagl'interi mediante una virgola o un punto, ed ove questi manchino si metterà in loro luogo uno zero. Così 5,45 significa 5 interi più $^4/_{10}$ più $^5/_{100}$, ossia $^{545}/_{100}$. Parimenti $3{,}254 = 3\,^{254}/_{1000}$, ovvero $^{3254}/_{1000}$. Così 0,9; 0,75 indicano niun intero, ma solamente nove decimi nella prima, settantacinque centesimi nella seconda.

69. Da ciò ne segue che il posto occupato da ciascuna cifra dopo la virgola dà a conoscere quanti zeri dopo l'unità si debbano porre nel denominatore, che per maggiore speditezza del calcolo si sopprime. Nell'esempio addotto 3,254, al 2 spetta il denominatore 10, al 5 il 100, al 4 il 1000; onde $3 + ^2/_{10} + ^5/_{100} + ^4/_{1000} = ^{254}/_{1000}$ come sopra. In generale le frazioni decimali hanno per denominatore l'unità seguìta da tanti zeri quante sono le cifre delle frazioni stesse. Perciò $4{,}237 = 4\,^{237}/_{1000}$; così $6{,}4 = 6\,^4/_{10}$; e $1{,}2039 = 1\,^{2039}/_{10000}$ ecc.

70. Da ciò apparisce quanto sia facile di ridurre i decimali allo stesso denominatore, se il bisogno lo richiegga. Ciò si fa coll'aggiugnere all'una frazione tanti zeri quanti sono necessari per eguagliare il numero delle cifre delle altre. Così volendo ridurre tutte a millesimi le tre frazioni 4,5; 3,25; 6,75 aggiungo due zeri alla prima, uno alle altre due, e ne risulteranno le altre tre 4,500; 3,250; 6,750 eguali ad esse; giacchè $4\,^5/_{10} = 4\,^{500}/_{1000}$; $3\,^{25}/_{100} = 3\,^{250}/_{1000}$; e $6\,^{75}/_{100} = 6\,^{750}/_{1000}$. Del pari $0{,}1 = 0{,}10 = 0{,}100 = 0{,}1000$ ecc., perchè crescendo il numeratore in ragione decupla,

cresce in egual proporzione anche il rispettivo loro denominatore.

71. Quindi ne segue ancora che un numero qualunque di zeri aggiunti a destra di una frazione decimale non altera il valore di essa; onde p. e. $0{,}5 = 0{,}50 = 0{,}500 = 0{,}5000$ ecc. La cosa sarebbe altrimenti se si aggiugnessero dei zeri alla sinistra, perchè in questo caso la frazione diverrebbe dieci, cento, mille ecc. volte più piccola di quello che era. Così la frazione $0{,}4 = ^4/_{10}$ sarà $= ^4/_{100}$ se scriverò 0,04, e diverrà $= ^4/_{1000}$ scrivendo 0,004 ecc.

72. La grandezza di una frazione decimale non dipende dal numero delle cifre che la compongono, ma dal valore della prima cifra dopo la virgola. Così 0,3 è maggiore di 0,25 perchè la prima frazione parziale $^3/_{10}$ è maggiore della seconda $^2/_{10}$.

Ciò si rende anche più evidente riducendole allo stesso denominatore, aggiugnendo cioè uno zero alla prima, la quale diverrà $0{,}30 = ^{30}/_{100}$; ed è chiaro che $^{30}/_{100}$ è maggiore di $0{,}25 = ^{25}/_{100}$ che è la seconda. Così pure la frazione 0,54 è maggiore di 0,399, perchè $^{540}/_{1000}$ supera $^{399}/_{1000}$. Lo stesso si dica delle altre.

Somma, sottrazione, moltiplicazione e divisione de' decimali.

73. Si sommano i decimali riunendo le frazioni parziali della medesima specie, e ciò si ottiene scrivendole in modo che si corrispondano verticalmente le cifre del medesimo nome, quindi operando come si insegnò nella somma degl'interi, ed eseguita l'operazione separare gl'interi, se ve ne siano, dalle decimali con una virgola o con un punto, come si disse al N.° 68. Esempi:

1.°	2.°	3.°
4,34073	0,54	1,04317
0,745	7,809	0,0709
5,2189	8,3004	3,19
10,30463	16,6194	4,30407

74. La sottrazione esige, come la somma, eguale disposizione delle cifre, e la solita operazione degli interi. Che se le cifre decimali del minuendo fossero in minor numero di quelle del sottraendo, fa d'uopo aggiugnere a quello un nu-

mero conveniente di zeri, il che può sempre farsi (N.° 71) senza che si alteri il valore della frazione. Esempi:

1.°	2.°	3.°
4,5217	6,0459	0,90000
3,3076	5,3138	0,83759
1,2141	0,7321	0,06241

75. Per provare che la somma e la sottrazione dei decimali eseguite come insegnammo danno un risultato vero, si riducano i decimali allo stesso denominatore, e si vedrà tutto chiaro. Esempio di somma:

4,23
2,433
1,67
Totale 8,333

Riducendo i decimali a millesimi, poichè la seconda fila ha tre decimali, avrò: $^{4230}/_{1000} + ^{2433}/_{1000} + ^{1670}/_{1000} = ^{8333}/_{1000} = 8,333$ come prima.

Esempio di sottrazione:

4,3
2,75
Differenza 1,55

Riducendo le due frazioni a centesimi, giacchè il sottraendo ha due sole cifre decimali, si avrà: $^{430}/_{100} - ^{275}/_{100} = ^{155}/_{100} = 1,55$; dunque ecc.

76. Si moltiplicano i decimali come gl'interi senza aver riguardo alle virgole. Per distinguere poi i decimali dagl'interi si tagliano a destra del prodotto tante cifre quante erano le decimali nel moltiplicando e nel moltiplicatore; e se il prodotto non ne contenesse tante quante occorre tagliarne, si supplisca con dei zeri a sinistra. Esempi:

1.°	2.°	3.°	4.°
45	3,47	4,25	0,23
3,8	25	3,5	0,418
360	1735	2125	1254
135	694	1275	836
171,0	86,75	14,875	0,09614

Si fa chiara la ragione della regola insegnata se si rifletta che moltiplicando nel 1.° esempio il 45 per 38, ne risulterà un prodotto dieci volte maggiore del vero, perchè il moltiplicatore non è già di 38 interi, ma di 3 interi solamente e 8 decimi. Quindi si avrà il vero prodotto dividendo il 1710 per 10, il che equivale a tagliar fuori l'ultima cifra a destra, essendo $^{1710}/_{10} = 171,0$.

Nel 2.° esempio poi moltiplicandosi 347 per 25 ne verrà un prodotto cento volte maggiore, giacchè il 47 non indica già 47 interi, ma $^{47}/_{100}$ solamente; dunque converrà dividere l'8675 per cento, onde averne il vero risultato di 86,75.

Nel 3.° esempio col moltiplicare il 425 per 35 ho formato un prodotto mille volte più grande, poichè ho considerati i 25 centesimi del moltiplicando, e i 5 decimi del moltiplicatore come interi, che è quanto dire ho alterati i primi di 100, i secondi di 10, e $100 \times 10 = 1000$; dovrò perciò dividere il falso prodotto sortito per 1000, a fine di conoscerne il vero, e ciò ottengo appunto col separare le tre ultime cifre a destra, con che avrò 14,875, come sopra.

Finalmente il prodotto del 4.° esempio è cento mila volte maggiore del vero; perchè ho presi i 23 centesimi del moltiplicando, e i 418 millesimi del moltiplicatore per tanti interi, cioè ho alterato gli uni di 100 e gli altri di 1000; ora $100 \times 1000 = 100000$; dunque è necessario rimettere il prodotto al suo giusto valore dividendolo per 100000, vale a dire tagliando fuori cinque cifre a destra; ciò fatto ne risulta come sopra 0,09614.

77. Se occorra di dover moltiplicare una frazione decimale per 10, per 100, per 1000 ecc. non si avrà a far altro che avanzare da sinistra a destra la virgola di tante cifre, quanti sono i zeri del moltiplicatore; poichè moltiplicando p. e. $4,32 = ^{432}/_{100}$ per 10, ne risulta il prodotto $^{4320}/_{100} = ^{432}/_{10} = 43,2$, cioè la virgola avanza di una cifra come si è detto. Del pari $3,685 \times 100 = ^{3685}/_{1000} \times 100 = ^{368500}/_{1000} = ^{3685}/_{10} = 368,5$, e così dicasi delle altre.

78. La divisione de' decimali si eseguisce anch'essa senza curare le virgole, indi si separano nel quoto tante cifre a destra quante decimali contiene il dividendo più del divisore. Sia da dividersi p. e. 32,16 per 4. Facendo astrazione dalla virgola si avrà $3216 : 4 = 804$. Questo quoto però 804 che ne emerge, è cento volte maggiore del vero, perchè nel dividendo le due cifre 16, che erano $^{16}/_{100}$ si sono considerate come 16 interi; dunque fa d'uopo dividere 804 per 100, onde se ne abbia il vero quoto 8,04, che è quanto dire: si

separano nel quoto le due cifre decimali contenute nel dividendo più del divisore, che non ne ha alcuna. Parimenti 4,55 : 3,5 ossia ommesse le virgole 455 : 35, darà il quoto 13. Esso però in questo caso è 100 volte maggiore del vero, se riguardiamo il dividendo 455 preso 100 volte più grande; ed è 10 volte minore del vero se riguardiamo il divisore 35 preso 10 volte più grande. Onde in realtà il quoto, avendo riguardo insieme all'alterazione e del dividendo, e del divisore, è 10 volte più grande. Converrà pertanto restituire detto quoto al suo reale valore dividendolo per 10, o separando con una virgola la cifra 3, e si avrà di quoto vero 1,3; e la cifra tagliata a destra del quoto indica appunto la differenza tra le decimali del divisore e del dividendo.

79. Se le cifre decimali del dividendo fossero meno di quelle del divisore, vi si aggiungano dei zeri a destra per rendere il numero delle sue decimali eguale o maggiore a quello del divisore. Così p. e. non potendosi dividere 4,3 per 2,15 aggiugnerò uno zero al 3 del dividendo ed avrò 4,30 : 2,15, ossia, tolte le virgole, 430 : 215 = 2 precisamente; poichè sottraendo le due cifre decimali del divisore dalle due del dividendo, non ne resta alcuna da tagliarsi nel quoto.

80. Se le decimali si dovessero dividere per 10, per 100, per 1000 ecc. basterà avanzare nel dividendo da destra a sinistra la virgola di tante cifre, quanti sono i zeri del divisore. Infatti la frazione 243,52 = $^{24352}/_{100}$ divisa per 10 dà di quoto 24,352; questo primo quoziente diviso nuovamente per 10 dà 2,4352; e quest' ultimo diviso ulteriormente per 10, darebbe 0,24352. Cosicchè si può conchiudere, che tanto vale dividere i decimali per 10, quanto avanzare di una cifra la virgola da destra a sinistra. E ciò dicasi ancora del 100, del 1000 ecc. rispettivamente.

81. La moltiplicazione e la divisione de' decimali servono l'una all'altra di riprova per conoscere gli errori che fossero occorsi nella operazione, come si disse degl'interi. Onde nella prima, dividendo il prodotto ottenuto per uno dei due fattori, deve risultarne per quoto l'altro fattore. E moltiplicando nella seconda il divisore pel quoto trovato, dovrà riprodursi il dividendo.

Riduzione degl' interi e delle frazioni ordinarie a decimali, approssimazioni e periodi.

82. Si riducono gl'interi a decimali in quella guisa che un intero si riduce a frazione di dato denominatore, cioè moltiplicando l'intero per 10, 100, 1000 ecc., e ponendo sotto al prodotto il denominatore stesso. Quindi 5 = $^{50}/_{10}$; 45 = $^{4500}/_{100}$ ecc.

83. Un rotto qualunque ordinario si riduce a frazione decimale moltiplicando il numeratore di esso per 10, per 100, per 1000 ecc., ossia aggiungendovi uno, due, tre ecc. zeri, il che torna lo stesso, e dividendone il prodotto pel suo denominatore: il quoto che si ottiene sarà il numeratore stesso della frazione decimale cercata, la quale avrà per denominatore il 10, il 100, il 1000 ecc., ossia la quantità per cui è stato moltiplicato il numeratore della frazione data. Così $^1/_2$ ridotto a decimali, avrà per numeratore 5, essendo $^1/_2 \times 10 = {}^{10}/_2 = 5$, e per denominatore 10, onde $^1/_2 = {}^5/_{10} = 0{,}5$. Del pari $^3/_4$ ridotto a decimali darà per numeratore $\frac{3 \times 100}{4} = {}^{300}/_4 = 75$, e per denominatore 100: onde $^3/_4 = {}^{75}/_{100} = 0{,}75$. La ragione di questa regola apparisce chiara, riducendosi tutta l'operazione a moltiplicare e dividere in pari tempo il rotto dato per 10, 100, 1000 ecc.

84, Se nel dividere il numeratore della frazione ordinaria accresciuto di uno o più zeri io ottenessi tuttavia un quoto non esatto, ciò indicherà che la frazione è *irriducibile*, cioè che mai potrà determinarsi in decimali il valore esatto di essa. Si può per altro ottenere *per approssimazione*, e avvicinarsi indefinitamente, continuando la divisione. Ma dopo un certo numero di decimali (che nei calcoli ordinari possono giugnere a 3 o 4, e in quelli che richieggono maggior precisione a 7) è lecito sopprimere gli altri senza che ne avvenga un errore sensibile, atteso il picciolissimo valore delle cifre soppresse; il qual valore tanto più diverrà piccolo, quanto sarà maggiore il numero delle decimali prese.

85. Quando però l'ultima delle cifre soppresse è maggiore di 5, a correggere l'errore troppo grande avvenuto per tale soppressione, usano gli aritmetici di aggiugnere un'unità all'ultima delle cifre rimanenti. Se p. e. io volessi sopprimere

l'ultima cifra in 3,45619, scriverò 3,4562. Infatti togliendo il 9, la frazione resta diminuita di $^9/_{100000}$, ed aggiugnendo $^1/_{10000} = {}^{10}/_{100000}$, si accresce $^1/_{100000}$; la quale quantità non può formare errore sensibile nei calcoli ordinari.

86. Nelle frazioni irriducibili avviene che proseguendo la divisione, dopo un certo numero di decimali ritornano nel quoto le stesse cifre di prima e collo stesso ordine. Questo numero di cifre, che ritornano collo stesso ordine, si chiama *periodo*, e la frazione dicesi *periodica*. Così:
$^1/_3 = 0,3333...$; $^2/_3 = 0,6666...$; $^1/_9 = 0,1111...$;
$^1/_{99} = 0,010101...$; $^3/_{11} = 0,2727...$; $^1/_{54} = 0,0185185...$;
$^1/_{24} = 0,041666...$; $^1/_6 = 0,1666...$; $^{763}/_{3300} = 0,231212..$.

87. La ragione del ritorno delle stesse cifre nel ridurre in decimali quelle frazioni, che non vi sono esattamente riducibili è la seguente. Il residuo che si ha per ogni cifra del quoto è sempre minore del divisore; quindi nel ridurre a decimali $^1/_7$ p. e. i residui diversi che si ottengono successivamente non possono essere più di sei, non potendo essere che i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6: ed in generale i residui diversi nel ridurre qualunque frazione non possono essere più del numero delle unità contenute nel denominatore della frazione diminuito di uno; così nel ridurre a decimali $^1/_{17}$ i residui successivi diversi che si ottengono non possono essere più di 16. Ciò posto siccome nel processo della divisione questi residui moltiplicati per 10 divengono i dividendi, ne deriva che i dividendi successivi diversi non possono essere più del numero delle unità contenute nel denominatore meno una. Quindi al più tardi dopo questo numero dovranno ripetersi gli stessi dividendi, quindi le stesse cifre del quoto, e gli stessi rispettivi residui che si erano ottenuti altra volta; e quindi ne escirà necessariamente il periodo che sempre si ripete. Per questa ragione $^1/_7$ ridotto a decimali presenta un periodo di sei cifre, essendo $^1/_7 = 0,142857142857.....$ Si avverta però che tante volte il periodo può essere di un numero di cifre assai minore delle unità contenute nel denominatore meno una, come negli esempi del paragrafo antecedente, e questo avviene perchè più presto ritorna lo stesso residuo.

88. Se il periodo della decimale cominci alla prima cifra, la frazione dicesi *periodica semplice*. Se prima del periodo abbia altre cifre, allora prende il nome di *periodica mista*. Le

prime sei addotte di sopra (N.° 86), sono periodiche semplici, le altre tre periodiche miste.

89. Nel ridurre a decimali le frazioni che non vi sono esattamente riducibili, basterà di avere trovato il primo periodo, per replicarlo, ogni volta che si volesse un più esatto valore.

90. A conoscere se una frazione, ridotta a minimi termini, sia periodica o no, fa d'uopo osservare al denominatore di essa. Se desso sia un numero che divida senza resto il 10, il 100, il 1000 ecc., allora la frazione non potrà mai essere periodica, poichè moltiplicandosi il numeratore di essa per 10, 100 ecc. se questi sono divisibili esattamente pel suo denominatore, lo sarà egualmente il prodotto risultante, e perciò la frazione darà un quoto esatto e finito in decimali. I numeri poi, tranne l'unità, che possono dividere 10, 100, 1000, ecc., sono 2 e 5, e i soli multipli di essi; e perciò verificandosi che il denominatore della frazione sia un multiplo soltanto di 2 e 5, la decimale essa pure avrà un numero finito di cifre. Tali sono le frazioni $^5/_4$, $^7/_8$, $^2/_5$, $^1/_{25}$, ridotte a decimali.

Se il denominatore della frazione per l'opposto non sia multiplo dei soli numeri primi 2 e 5, essa sarà necessariamente periodica semplice o mista, e conterrà un numero di cifre senza limite. Tali sono le frazioni $^1/_3$, $^2/_3$, $^5/_{11}$ ecc. (Num. 86).

91. Come le frazioni ordinarie si possono sempre ridurre a decimali, così le decimali potranno ridursi a frazioni ordinarie. Ad ottenere ciò fa d'uopo distinguere due casi:

1.° *Caso*. Quando la decimale è esatta, vale a dire non periodica, basta scriverla a guisa di frazione ordinaria, e ridotta che sia ai minimi termini, si otterrà la frazione comune. Così $0,75 = {}^{75}/_{100} = {}^3/_4$; $0,5 = {}^5/_{10} = {}^1/_2$; $0,250 = {}^{250}/_{1000} = {}^1/_4$ ecc.

2.° *Caso*. Se la decimale è periodica, o sarà periodica semplice, o periodica mista. Quando la frazione è periodica semplice, si riduce a frazione ordinaria dividendo il suo periodo per un numero espresso da tanti 9 scritti uno dopo l'altro, quante sono le cifre del periodo. Così nella frazione 0,3333......., che ha il suo periodo immediato di una sola cifra si avrà $^3/_9 = {}^1/_3$; e in quest' altra 0,2727..... che comincia con periodo di due cifre, dividendo 27 per due 9, si otterrà $^{27}/_{99} = ^{3}/_{11}$. E in egual modo procedasi per le altre tutte che avranno un periodo di 3, di 4 ecc. cifre.

92. Perchè si conosca la ragione della regola insegnata intorno al modo di ridurre le decimali periodiche semplici a frazioni ordinarie, si prenda la frazione addotta di sopra 0.3333..... Si moltiplichi per 10 e si avrà 3,333. ... (N.° 77) dieci volte maggiore della proposta. Si sottragga da essa la proposta, e si avrà la differenza 3,000..... la quale sarà ancora 9 volte maggiore della proposta stessa. Ma se si divida per 9 onde ridurla al suo vero valore, diverrà $^{3}/_{9} = ^{1}/_{3}$ come sopra. Parimenti la frazione 0,272727 si moltiplichi per 100, e dal prodotto 27,2727..... cento volte maggiore della proposta, si sottragga la medesima, onde emerga la differenza 27,000... ancor maggiore della proposta 99 volte; ma divisa una tal differenza per 99 si avrà $^{27}/_{99} = ^{3}/_{11}$, e così delle altre.

93. Se la frazione decimale è periodica mista si avrà la frazione ordinaria: 1.° Riducendo a frazione ordinaria il periodo come se da esso cominciasse la decimale: 2.° Unendo questa frazione così ridotta alle cifre fuori di periodo: 3.° Dividendo questa somma per l'unità seguìta da tanti zeri quante sono le cifre fuori di periodo, e quindi riducendo la frazione alla minore espressione. Tutto ciò si farà chiaro dai seguenti esempi:

1.° Sia la frazione 0,1666..... Si moltiplichi per 10, e si avrà $1 + 0,666$..... Col metodo del numero antecedente si riduca a frazione ordinaria 0,666..... $= ^{6}/_{9} = ^{2}/_{3}$; ora sommando, si avrà $1 + 0,666 = 1 + ^{2}/_{3} = ^{5}/_{3}$. Questo valore però è 10 volte maggiore del vero, perchè è quello della decimale 0,1666..... moltiplicata per 10; dunque dividendolo per 10, si avrà il suo preciso valore $\frac{5}{3.10} = ^{5}/_{30} = ^{1}/_{6}$.

2.° Sia la frazione 0,231212..... Si moltiplichi per 100, poichè essa ha due cifre fuor di periodo, e si avrà $23 + 0,1212$.....; trovato il valore del periodo (N.° 91), si ha $^{12}/_{99} = ^{4}/_{33}$, il quale aggiunto alle cifre fuor di periodo, dà $23 + ^{4}/_{33} = ^{763}/_{33}$; ma questo non può essere il vero valore, perchè la decimale fu prima moltiplicata per 100; dividendo adunque $^{763}/_{33}$ per cento, avremo l'esatto $\frac{763}{33.100} = ^{763}/_{3300}$ frazione generatrice la periodica mista 0,231212.....

94. Colle regole stabilite noi potremo facilmente ridurre le monete, i pesi, le misure ecc. a decimali, e al contrario i decimali a monete, a pesi, a misure concrete, eseguendo sopra di esse le operazioni aritmetiche con altrettanta facilità, il che non si può le molte volte ottenere col mezzo delle frazioni ordinarie.

A *Simone Stevino* di Burgos, che visse nel secolo decimosesto, si deve il merito della invenzione de' decimali. Egli li propose perchè fossero sostituiti alle frazioni ordinarie; e ci gode l'animo al vedere che desse sieno ormai venute in uso comune.

FINE DELL' ARITMETICA NUMERICA.

ALGEBRA

CAPO I.

95. **L'**Algebra può definirsi: *la scienza che tratta dei rapporti delle quantità discrete considerate nella loro totale generalità, cioè fatta astrazione non solamente da ogni specie e soggetto a cui esse appartengono, il che pure è proprio dell'Aritmetica, ma da qualunque valore eziandio, che possa esser loro attribuito.* In questo senso l'Algebra fu giustamente chiamata da Newton *Aritmetica Universale.*

96. Atteso il modo col quale l'Algebra considera le quantità, era necessario di trovare dei simboli generali, indipendenti da ogni significazione particolare, e atti a rappresentare qualunque sorta di quantità secondo la natura dei problemi ai quali venivano applicati. Si scelsero perciò le lettere dell'Alfabeto *a*, *b*, *c* ecc. siccome quelle che avevano tutti i requisiti all'uopo. Così colla lettera *a*, per esempio, non solamente potrò esprimere *scudi, metri, uomini* ecc., ma ben anche qualunque numero di scudi, di metri, di uomini ecc.; mentre alle cifre numeriche non potrei dare altro valore, se non quello che viene indicato da ciascuna di esse; e il 3, a cagion di esempio, sebbene possa esprimere egualmente *tre scudi*, come *tre metri*, come *tre uomini* ecc., non potrebbe però esprimerne allo stesso tempo *cinque*, *otto*, *dieci* ecc.

97. Ai giovani suole apparire stranissima questa idea di calcolare con delle lettere astraendo dal loro valore numerico: la persuasione facilmente insinuatasi coll'abitudine dei calcoli aritmetici che il valore numerico delle cifre sia un elemento del tutto indispensabile nel calcolo intero è quella che fa apparire così strana l'idea dell'introduzione delle lettere. Questa persuasione è però da abbandonarsi. Il valore numerico delle cifre è indispensabile nell'ultimo risultato che dà la risposta al particolare quesito che si era proposto di risolvere; ma non lo è in ciò che forma l'andamento e il processo del calcolo stesso. Per chiarire questa cosa veniamo ad un pratico esempio. Supponghasi proposto questo quesito: un

mercante ha del panno, che gli costa scudi 7 ed 80 baiocchi ogni 3 braccia; per guadagnare scudi 7 e 20 baiocchi, quante braccia di questo panno deve vendere a 2 scudi e 72 baiocchi il braccio?

Per risolvere questo quesito si potrebbe ragionare in questo modo:

Dividendo ciò che ha speso il mercante ogni certo numero di braccia per questo numero istesso si ha quello che gli costa ogni braccio di panno.

$$\frac{\text{Costo delle tre braccia } 7.\ 80}{\text{Numero delle braccia } \quad 3} = 2.\ 60 \text{ costo d'ogni braccio.}$$

Sottratto questo costo d'ogni braccio dal prezzo a cui lo vende si ha quello che guadagna ogni braccio.

2 72 Prezzo della vendita d'ogni braccio
2. 60 Costo d'ogni braccio
——
0. 12 Guadagno d'ogni braccio.

Diviso perciò il guadagno totale che vuol fare, per questo guadagno che ricava da ogni braccio che vende, si ha il richiesto numero delle braccia che deve vendere: perchè il guadagno totale risulta appunto dal guadagno parziale che ha per ogni braccio ripetuto tante volte quanto è il numero delle braccia che vende.

$$\frac{\text{Guadagno che vuol fare } 7.\ 20}{\text{Guadagno d'ogni braccio } 0.\ 12} = 60 \text{ braccia richieste.}$$

Supponghasi ora che il quesito non fosse già il proposto, ma fosse quest'altro: un mercante ha del panno che gli costa scudi $12\,^1/_2$ ogni 5 braccia: per guadagnare scudi $6\,^1/_2$, quante braccia di panno dovrà vendere a scudi 2 e 65 baiocchi il braccio? Come è chiaro, il ragionamento da farsi è il medesimo di quello fatto nell'antecedente quesito, e non resta altro per risolvere questo che cangiare le cifre, mettendo in luogo di scudi 7 ed 80 baiocchi, scudi $12\,^1/_2$; in luogo delle 3 braccia, 5 braccia, e così via via. Dunque è evidente che nella soluzione di questi due quesiti così differenti nelle cifre dei dati, vi è un andamento, un processo comune ad ambidue, indipendente perciò dal valore numerico delle cifre. Se si può giungere ad eseguire con dei simboli generici, quell'andamento, quel processo, e ad esprimerne cogli stessi simboli il suo risultato, la soluzione di questi due e di tanti altri simili quesiti diviene cosa la più triviale, mentre tutto si ridurrà a sostituire ai simboli generici del risultato i valori numerici dati. E questo appunto è quello che fa l'algebra, la quale non occupandosi che di questo andamento, che di questo processo indipendente dal valore delle cifre adopera perciò dei simboli generali, delle lettere, astraendo da quello che esse valgono.

98. L'algebrista pertanto invece di prendere a risolvere il primo dei due quesiti proposti, nel numero antecedente, come era annunziato, prenderà a risolvere questo: Un mercante ha del panno, che gli costa a scudi, ogni b braccia; per guadagnare c scudi, quante braccia ne deve vendere a d scudi il braccio. Risoluto che avrà, colle regole che daremo, questo quesito, in cui invece di cifre vi sono dei simboli generici, se egli farà nel risultato $a = 7.80$, $b = 3$, $c = 7.20$, $d = 2.72$, avrà risoluto il primo quesito; se invece farà $a = 12.50$, $b = 5$, $c = 6.50$, $d = 2.65$ avrà risoluto il secondo. Se darà altri valori risolverà altri simili quesiti, che hanno dati differenti.

Premesse queste cose, sulle quali sarà bene che il giovane torni tratto tratto meditando, per formarsi idee esatte; veniamo ad indicare varie delle cose che si attengono ai segni ed al linguaggio particolare di questa scienza.

99. I segni dei quali si serve l'Algebra per eseguire le sue operazioni, sono gli stessi che noi spiegammo in Aritmetica, e inoltre i tre seguenti: 1.° Il segno $>$, ovvero $<$, che serve per indicare la ineguaglianza di due quantità paragonate, avvertendo però che la quantità maggiore deve esser posta dalla parte dell'apertura, e la minore dalla parte dell'acume dell'angolo. Così $a > b$, indica che a è maggiore di b; ed $a < b$, indicherebbe che a è minore di b. 2.° Il segno $\backsim$, che serve per indicare semplicemente la differenza tra due quantità. Così $a \backsim b$, significa che tra a e b vi è una differenza, senza precisare quale delle due quantità sia la maggiore o la minore. 3.° Il segno ∞, che è il simbolo dell'infinito. Per esempio $\frac{a}{0} = \infty$, vuol dire che dividendo a per *zero*, si ha un quoto infinito, o senza limite.

100. Si chiama *quantità semplice*, e *monomio*, ed anche *termine* una qualunque quantità, la quale non sia congiunta

ad altre coi segni $+$ o $-$. Per esempio a, ab, abc, sono *monomi*.

101. L'unione di più monomi tramezzati dai segni $+$ o $-$, chiamasi *formola* o *polinomio*, come per esempio $ab + c - m$. Se il *polinomio* è composto di due soli termini, dicesi *binomio*; *trinomio* se di tre; *quadrinomio*, *quinomio* ecc., se sia composto di quattro, di cinque ecc.

102. Se in un polinomio occorre di dover ripetere più volte la stessa quantità, gli algebristi usano di scriverla una volta sola, apponendovi a sinistra un numero indicante quante volte essa fu ripetuta. Così invece di $a + a + a$, scriverò più brevemente $3a$; e invece di $-ab - ab - ab - ab$, scrivo $-4ab$ ecc. Un tal numero chiamasi *coefficiente*; il quale in conseguenza non è altro che *quella cifra, la quale indica quante volte un dato termine è stato preso a modo di somma*. Ove manca questo coefficiente vi si sottintende sempre l'unità che per maggior comodo si tralascia; onde $a = 1a$; ed $abc = 1a$, $1b$, $1c = 1abc$ ecc.

103. Parimenti dovendo indicare che una stessa lettera è stata moltiplicata più volte per se stessa, la scrivono una volta sola mettendo alla destra di essa, alquanto elevato, un numero che segni le volte che quella lettera fu presa come fattore. Perciò invece di $a \times a$, scrivono a^2, che si pronuncia *a innalzato alla seconda potenza*, o *al quadrato*, ovvero *a alla due*, ed anche *a due*. Del pari invece di $a \times a \times a$, si scrive a^3, che si legge *a innalzato alla terza potenza*, ossia *a alla tre*, o *a tre*; e così *a quattro*, *a cinque* ecc. Questo numero poi si chiama *esponente*; il quale in conseguenza non è altro che *quella cifra, la quale indica quante volte una data lettera è stata presa come fattore*. Quando non è che l'unità, per maggior comodo si ommette esso pure, come si disse del coefficiente. Onde $a = a^1$; e $2bd^2 = 2b^1d^2$ ecc.

104. Le lettere di cui è composto un *monomio* qualunque algebrico, si chiamano *dimensioni* di esso. Trattandosi di un monomio intero, il numero delle sue dimensioni si desume dalla somma degli esponenti che hanno le lettere componenti il monomio stesso. Per esempio a è di una dimensione: a^2 è di due dimensioni, perchè nasce da $a \times a$, ossia da aa che è di due; abc di tre; $2ab^2c$ di quattro; $3a^2b^3$ di cinque ecc. Se poi il monomio sia frazionario, si avrà il numero delle sue dimensioni dalla differenza che passa tra la somma degli

esponenti del numeratore e quella degli esponenti del denominatore della frazione. Così $\frac{ab}{c}$ è di una dimensione sola; $\frac{5a^2b^3}{3mn^5}$ è di meno una dimensione $\frac{4ab^5}{4cd}$ è di quattro ecc.

105. Dicesi *omogeneo* quel polinomio, che ha tutti i suoi termini collo stesso numero di dimensioni; così $2a^5 - bd^4 + \frac{3m^4n^3}{p^2}$ è un polinomio omogeneo di cinque dimensioni.

106. Chiamansi *simili* quei termini che sono composti di uno stesso numero di lettere eguali, ed aventi eguali gli esponenti rispettivi delle stesse lettere, benchè abbiano poi diversi il coefficiente ed il segno: così $2a$, $-4a$, $+5a$; come pure $5a^2b^3$, $-a^2b^3$, $+7a^2b^3$, sono termini simili tra loro. Sono poi eguali quei termini, che oltre all'essere simili hanno anche lo stesso coefficiente, sebbene sieno diversi nel segno; come $3ab$, $-3ab$ ecc.

107. Prima di passare alle operazioni che l'Algebra fa sulle quantità letterali, è necessario avvertire che nel calcolo di esse quantità non solamente bisogna aver riguardo al loro valore, ma ben anche al modo di essere delle une rispetto alle altre. Supponiamo p. e. che si voglia determinare quale sia il capitale posseduto da Pietro, e che fatto il necessario esame, si trovino scudi 2000 di beni, e scudi 800 di debito. Il calcolo sarebbe erroneo, se prendendo promiscuamente queste due partite, si sommassero insieme, e si conchiudesse che il capitale di Pietro è di scudi 2800. Perchè gli scudi 800 di debito sono una quantità, la quale ha un modo di essere opposto a quello degli scudi 2000 di capitale, e perciò distrugge in essi una quantità eguale a sè. Quindi, mentre gli scudi 2000 di beni entrano nel calcolo in istato di addizione, gli scudi 800 di debito vi entrano in istato di sottrazione. Onde il capitale di Pietro sarà di scudi $2000 - 800$, ossia di scudi 1200 soltanto.

Le quantità, che entrano nel calcolo in istato di addizione, chiamansi *positive* o *dirette*, e s'indicano col segno $+$; le altre che vi sono in istato di sottrazione, diconsi *negative* o *contrarie*, e s'indicano col segno $-$.

108. Nell' addotto esempio la quantita degli scudi 800 di debito opposta a quella presa di mira, è di essa minore, e perciò effettuando la sottrazione, sparisce nel risultato, se la esprimeremo con numeri; ma se, usando dell'Algebra, si esprimono con a gli scudi 2000 di beni, e con c gli scudi 800 di debito, non avendo le lettere, come si disse, un valore determinato, non potremo in questo caso precisare il quantitativo a diminuito di c, e perciò non ci è dato di indicare in altro modo il capitale di Pietro, che scrivendo $+a-c$, ed ecco come nascono nel calcolo algebrico quantità affette dai segni $+$ e $-$.

109. Se il debito di Pietro eguagliasse il suo capitale, che è quanto dire, se la quantità opposta a quella presa di mira, fosse ad essa eguale: allora tanto in Aritmetica che in Algebra si avrebbe $2000 - 2000$, oppure $a - a = 0$; giacchè quantità eguali ed opposte si distruggono.

110. Finalmente se il debito di Pietro superasse i suoi beni, ed ascendesse p. e. a scudi 2500, allora si avrebbe $2000 - 2500$. In questo caso per avere il vero risultato di una tale espressione, fa d'uopo decomporre la quantità maggiore da sottrarsi in due parti, una delle quali eguagli la quantità che è in istato di addizione, ed allora si avrà $2000 - 2000 - 500$, che poi si riduce alla sola quantità -500, distruggendosi le due prime, perchè eguali e contrarie. Da ciò si fa palese come possano nel calcolo occorrere talvolta delle quantità col segno $-$ anche isolate, le quali significano sempre un genere di quantità contrarie a quelle che furono prese in considerazione. Così nell'esempio addotto, il -500 vuol significare, che vi vorrebbe tra i beni di Pietro una quantità eguale di scudi 500 per poter dire che si ha zero, cioè che il capitale di esso è nullo.

111. Talvolta ancora possono nel calcolo affacciarsi naturalmente delle quantità negative isolate, senza che esse nascano dalla sottrazione di una quantità maggiore da una minore. Supponiamo infatti, che avendo fissato di precisare i beni di Pietro, si trovi che egli non possiede nulla, ma che invece ha scudi 1000 di debito. Questo debito, com'è chiaro, è una quantità di natura opposta a quella, che noi avevamo divisato di notare; quindi dovendola esprimere, le facciamo precedere il segno $-$, scrivendo -1000; e con ciò si vuole indicare, che dessa è una quantità in istato di sottrazione rapporto a quella, che si era presa di mira.

112. Che se lo scopo delle nostre ricerche non fossero

stati i beni, ma invece i debiti di Pietro, in questo caso gli scudi 1000 di debito non sarebbero una quantità opposta, ma della stessa natura di quella, che ci proponemmo fissare, e perciò converrebbe farle precedere non già il segno —, ma il segno +.

113. I ragionamenti antecedenti fatti intorno ai beni e ai debiti, possono egualmente applicarsi ai guadagni e alle perdite, ai moti dei corpi per opposte direzioni, alle forze agenti in senso contrario ecc.; onde possiamo conchiudere che il segno + o —, che noi apponiamo alle quantità, che è quanto dire: il riguardarle in istato di addizione o sottrazione, ossia come positive o negative, non dipende dall'indole o natura di esse, siccome taluni hanno creduto, ma unicamente dall'arbitrio, o per dir meglio dalle mire che si prefigge il calcolatore.

114. Dalle cose dette intorno alle quantità positive e negative, si fa chiaro che queste seconde non possono confondersi collo zero, quasi che esse non esprimessero altro che la *negazione* o mancanza delle quantità positive.

Sì le une che le altre sono quantità *reali* in opposizione tra loro; e poichè le negative, come si fece vedere, distruggono del positivo esistente una porzione eguale a se stesse, non potranno perciò essere eguali allo zero, il quale non ha forza o valore da distruggere cosa alcuna benchè minima. Infatti l'avere un debito di 1000 scudi, è ben altra cosa che il non aver nulla; e una perdita fatta, è tutt'altro che il non aver fatto alcuna vincita. Così pure un cammino di 100 miglia fatto per una direzione contraria al luogo cui ci eravamo prefissi di andare, non è certamente lo stesso, che il non aver mosso un passo verso di esso.

115. Le quantità poi tanto positive che negative, possono essere *cognite* o *incognite*. Le cognite sono quelle, delle quali si suppone dato il valore, e si esprimono colle prime lettere dell'alfabeto a, b, c ecc. Le incognite sono quelle il di cui valore si cerca, e s'indicano colle ultime u, x, y, z.

116. Quando in un calcolo si fossero esaurite tutte le lettere dell'alfabeto, usano gli algebristi o di ripetere le stesse lettere contrassegnandole con un piccolo apice, come a', b'', c''' ecc., che si legge a primo, b secondo, c terzo ecc. oppure ricorrono alle lettere dell'alfabeto *greco*.

L'Algebra fa sopra le quantità considerate generalmente

delle operazioni analoghe a quelle che l'Aritmetica fa sopra i numeri.

CAPO II.

Addizione o Somma.

117. Se le quantità da sommarsi sono dissimili, non si potrà che indicar l'operazione, scrivendole l'una dopo l'altra coi loro rispettivi segni. Così dovendo sommare $3a$ con $4b$ e con $2c$, scriverò semplicemente $3a+4b+2c$, non potendosi avere altro risultato, finchè non si dia alle lettere a, b, c un valore determinato.

Se fra le quantità da sommarsi vi sieno dei termini simili, questi si riuniranno in un solo termine, al quale si apporrà a sinistra la somma, o la differenza dei loro coefficienti, secondo che i termini avranno o lo stesso segno, o segno diverso. Che se i termini simili abbiano inoltre i coefficienti eguali, e sieno affetti da segni contrari, si cancelleranno affatto. Con tale riunione, che dagli algebristi chiamasi *riduzione*, si avrà il risultato o la somma delle quantità date. Così $3a+4b-2c-2a-3b$, si riduce ad $a+b-2c$; $a-3b-5a+3b$, si riduce a $-4a$; e $4a-3b+a-5a+3b=0$.

118. Da qui apparisce che in Algebra *aggiugnere* non sempre significa *aumentare*. Aggiugnendo p. e. un credito ad un credito, o un debito ad un debito, si aumenta realmente l'uno e l'altro; ma se si unisca un credito con un debito, si diminuisce l'una e l'altra quantità, e il risultato non sarà che l'eccesso del credito sopra il debito, o del debito sopra il credito, secondo che il credito è maggiore del debito, o il debito maggiore del credito; onde la somma in questo caso non è che una pura riduzione.

Perchè ciò s'intenda con chiarezza, diamo un esempio in numeri. Sia da sommare 6 con $3-2$, che si scrive così: $6+(3-2)$, e significa che la differenza fra 3 e 2, cioè 1, si deve aggiugnere al 6, onde ne emerga $6+1=7$. Ora il risultato torna lo stesso, se invece di unire al 6 la sola differenza 1, si unisca il 3 al 6, e poi dalla somma 9 si tolga il 2; onde potrà scriversi ancora $6+3-2=7$, come prima. Lo stesso accade nella somma delle quantità letterali positive, miste a negative.

119. Quando le quantità da sommarsi sono molte, torna più comodo di scrivere i termini simili coi loro rispettivi segni in una medesima linea verticale, e quindi segnare a piedi la riduzione di ognuna di queste linee, come si potrà scorgere dai seguenti esempi.

È poi indifferente di cominciare le operazioni algebriche a destra o a sinistra, perchè ciascun termine è indipendente dagli altri. Per altro si usa di operare da sinistra a destra imitando la scrittura ordinaria, e di conservare inoltre l'ordine alfabetico alle lettere in ciascun termine, non perchè l'alterarlo portasse variazione nel risultato, ma perchè in tal modo rendesi più facile l'andamento dell'operazione.

Esempio 1.°: Sieno da sommarsi i polinomi

$5a - 2b + 4mn,\quad -3a + 4b - 5mn,\quad -7b + 3n.$

Disponendoli, come si è detto, e riducendo

$$
\begin{array}{lrrrr}
 & 5a & -2b & +4mn & \\
 & -3a & +4b & -5mn & \\
 & & -7b & & +3n \\
\hline
\text{Si ha il risultato} & 2a & -5b & -mn & +3n.
\end{array}
$$

Esempio 2.°: Sieno i polinomi da sommarsi

$6abc - 6ab^2 - 3d^3 + 5m^2n^3,\quad -4abc + 4ab^2 + d^3,\quad -2ab^2 - 5m^2n^3.$

Disposti e ridotti

$$
\begin{array}{lrrrr}
 & 6abc & -6ab^2 & -3d^3 & +5m^2n^3 \\
 & -4abc & +4ab^2 & +d^3 & \\
 & & +2ab^2 & & -5m^2n^3 \\
\hline
\text{Risultato} & 2abc & & -2d^3. &
\end{array}
$$

Sottrazione.

120. La sottrazione si eseguisce *scrivendo dopo la quantità minuenda l'intera quantità sottraenda colla sola avvertenza di cangiare il + in —, e il — in + ad ogni termine di quest' ultima, e facendone poscia la riduzione se avrà luogo.*

L'esattezza di questa regola apparirà chiara da questo esempio. Sia da sottrarre $a - b$ da c: la regola darebbe $c - a + b$, che dovrebbe essere la vera differenza tra c, ed $a - b$. Per vedere se lo è, aggiungiamo a questa differenza il sottraendo $a - b$, se la differenza è la vera deve riprodursi il minuendo c (N.° 37): ma diffatto $c - a + b + a - b = c$;

dunque $c - a + b$ è la vera differenza, e perciò la regola assegnata del cangiare i segni al sottraendo è esatta.

Per un esempio di sottrazione veggasi il seguente

$$
\begin{array}{lrrrrl}
\text{Esempio} & 4ab^2 & -dm^3 & +pq & +3r^3 & \text{minuendo} \\
 & (-3ab^2 & +2dm^3 & -3pq & -4r^3) & \text{sottraendo} \\
\hline
 & 4ab^2 & -dm^3 & +pq & +3r^3 & \multirow{2}{*}{\Big\}\ \text{diffrenza}} \\
 & 3ab^2 & -2dm^3 & +3pq & +4r^3 & \\
\hline
 & 7ab^2 & -3dm^3 & +4pq & +7r^3 & \text{diff. rid.}
\end{array}
$$

121. La prova dell' esattezza della regola data nel numero antecedente è chiara, ed è generalissima, mentre è fatta con dei simboli generali capaci di qualunque valore, quali sono le lettere: tuttavolta pei giovani non tornerà inutile provare la regola anche con un esempio numerico. Sia per esempio da sottrarsi $8 - 3$ da 9, il che s' indica in questo modo $9 - (8 - 3)$. La differenza fra 8 e 3 essendo 5, è manifesto che debbo sottrar da 9 il 5 solamente, ed avrò perciò il residuo, o la differenza 4. Ora eseguendo la sottrazione all' uso algebrico $9 - 8 + 3$, ottengo la medesima differenza 4. Dunque, per parità di ragione, anche per le quantità letterali deve esser giusto il metodo del cangiamento de' segni.

122. La sottrazione, come si riguarda in Algebra, non importa sempre una diminuzione al pari della sottrazione aritmetica. La differenza nella sottrazione algebrica può talvolta riescire maggiore del minuendo o del sottraendo, e ciò accade quando sieno contrari i segni dei quali essi sono affetti, e che ne determinano il loro modo di essere. Infatti se alle rendite di uno, si sottraggano dei debiti, ossia quantità negative, è chiaro che le sue rendite si accresceranno di tanto, quanto fu il debito tolto. Onde si può stabilire, *che l'oggetto della sottrazione algebrica è di distruggere nella quantità proposta un' altra quantità, qualunque sia il suo segno.*

Moltiplicazione.

123. La moltiplicazione di due quantità monomie, per esempio di a per b, s'indica in una di queste maniere: $a \cdot b$; $a \times b$; $(a) \times (b)$ ovvero $(a)\,(b)$. Se una delle quantità da moltiplicarsi fosse monomia, l'altra polinomia, p. e. di $a + b$ per c, allora la moltiplicazione di esse s'indica così: $\overline{a + b} \times c$, op-

pure $(a+b)\times c$ ed anche $(a+b)c$. Che se le quantità da moltiplicarsi fossero tutte polinomie, se ne indicherà la moltiplica come segue: $(a+b)\times(c+d)$, ovvero $(a+b)(c+d)$, ed anche $\overline{a+b}\times\overline{c+d}$.

124. È convenzione tra i matematici il ritenere moltiplicate tra loro quelle lettere, che sono scritte una dietro l'altra senza che vi sia frapposto alcun segno. Così abc non indica altro che il prodotto di $a\times b\times c$. Laonde quante volte io debba moltiplicare tra loro delle lettere p. e. $c\times d\times r\times s$, per esprimerne il prodotto non ho a fare altro che scrivere $cdrs$. Da questa convenzione e dalle altre cose premesse prima si ricavano tutte le regole della moltiplicazione algebrica. Ma prima di indicare queste regole è bene avvertire alcune cose.

125. L'ordine delle lettere componenti un monomio qualunque può variarsi ad arbitrio senza che venga per nulla alterato il loro prodotto; perciò ab sarà lo stesso che ba; e abc lo stesso che bac, cba, bca. Se ne fa chiara la ragione, riflettendo a quanto si disse intorno alla natura della moltiplicazione de' numeri (N.° 46). Perchè volendo p. e. moltiplicare a per b, supposto $a=4$, $b=5$, è evidente che tanto sarà prendere a un numero b di volte, cioè il 4 cinque volte, quanto prendere b un numero a di volte, cioè il 5 quattro volte, avendosi nell'uno e nell'altro modo 20 di prodotto.

126. Lo stesso ragionamento vale egualmente per qualunque numero di fattori; perchè ottenuto che io abbia il prodotto di due di essi, considero questo come un solo semplice fattore, che poscia moltiplico successivamente per ciascuno de' rimanenti finchè gli avrò tutti ridotti a due soli, dalla moltiplica dei quali otterrò il prodotto totale. Così il prodotto di $2\times 3\times 4$ è 24, sia che si moltiplichi prima 2 per 3, poi il 6 prodotto di essi per 4; sia che si moltiplichi prima 3 per 4, e il loro prodotto 12 per 2; sia finalmente che si moltiplichi prima 2 per 4, indi il lor prodotto 8 per 3.

Veniamo ora alle regole per la moltiplica. E siccome in ogni termine algebrico si trovano lettere, segno, coefficiente, ed esponenti, assegniamo delle regole per tutti questi elementi che compongono il termine.

127. Cominciando dai coefficienti supponiamo di dovere moltiplicare $3ab$ per $4cd$. Dietro ciò che si è detto (N.° 124), $ab\times cd$ dà per prodotto $abcd$; dunque $3ab\times cd$, essendo $3ab$ tre volte più grande (N.° 102) di ab, darà un prodotto

tre volte più grande; ossia sarà $3ab\times cd=3abcd$. Ma $3ab$ non è da moltiplicarsi per cd, sibbene per una quantità quattro volte più grande, cioè per $4cd$; dunque il prodotto sarà quattro volte più grande di quello di $3ab\times cd$; cioè sarà $3ab\times 4cd=12abcd$.

Analizzando questo prodotto si osserva che il suo coefficiente 12, non è che 3×4, ossia il prodotto dei coefficienti de' suoi fattori; dunque *nella moltiplica algebrica i coefficienti si moltiplicano insieme.*

128. Riguardo agli esponenti supponiamo di dovere moltiplicare a^2b per a^3b^2. Dalla nozione dell'esponente (N.° 103) apparisce che $a^2b=aab$, così pure $a^3b^2=aaabb$; dunque moltiplicare a^2b per a^3b^2, sarà lo stesso che moltiplicare aab per $aaabb$. Ma dal N.° 124 apparisce che $aab\times aaabb=aabaaabb$ e potendosi cangiare posto ai fattori (N.° 125, 126) $aabaaabb=aaaaabbb$ quindi ne deriva che $a^2b\times a^3b^2=aaaaabbb=a^5b^3$. Analizzando ora questo prodotto si vede che l'esponente 5, che ha nel prodotto la a, non è che la somma degli esponenti 2 e 3, che la stessa a ha nei fattori; e che l'esponente 3, che ha nel prodotto la b non è che la somma degli esponenti 2 ed 1, che la stessa b ha nei fattori; dunque *nella moltiplica gli esponenti delle stesse lettere si sommano, scrivendo nel prodotto una sola volta ciascuna lettera con un esponente eguale a questa somma.*

129. La regola per le lettere apparisce dal detto (N.° 124, 128): *si scrivono una dietro l'altra col rispettivo esponente senza frapporvi altro segno, avvertendo di scrivere una sola volta le comuni ad ambidue i fattori con un esponente eguale alla somma ecc., come si è detto nella regola per gli esponenti.*

130. Alcune volte nei calcoli algebrici si incontrano delle lettere con esponente non numerico, ma letterale esso pure: come p. e. a^m, b^n, p^q. In queste espressioni l'esponente indica sempre quello che indicherebbe un esponente numerico (N.° 103); così a^m vorrà dire che a è stato preso come fattore m volte; b^n che b è stato preso come fattore n volte ecc. Perciò nella moltiplica gli esponenti letterali si tratteranno come i numerici; cosicchè p. e. sarà $a^m\times a^n=a^{m+n}$, $b^r\times b^r=b^{r+r}$.

131. Perciò che risguarda i segni dei quali sono affette le quantità da moltiplicarsi, egli è manifesto che *una quantità positiva moltiplicata per un'altra parimenti positiva, dà un pro-*

dotto positivo, perchè un moltiplicando positivo ripetuto nello stato in cui è, dà necessariamente un risultato positivo. Così $2 \times 3 = 6$; e $3a \times 5b = 15\,ab$.

132. È chiaro ancora che *una quantità negativa moltiplicata per una positiva, dà un prodotto negativo;* giacchè un moltiplicando negativo ripetuto nello stato in cui è, non può produrre che un risultato negativo. Così $-4 \times 5 = -20$; e $-4a \times 6b = -24\,ab$ ecc. Lo stesso dicasi se una quantità positiva dovesse moltiplicarsi per una negativa; perchè tanto vale prendere il -4 cinque volte, quanto prendere il 5 meno quattro volte; e in realtà il moltiplicando positivo ripetuto in uno stato opposto al suo, cioè negativamente, deve dare un risultato negativo. Quindi $4 \times -5 = -20$; e $5a \times -4b = -20\,ab$.

133. È certo infine che *una quantità negativa moltiplicata per un' altra pure negativa, dà un prodotto positivo,* perchè un moltiplicando negativo ripetuto in uno stato opposto al suo, cioè preso positivamente, fa d' uopo che dia un risultato positivo. Daremo in appresso maggiore schiarimento intorno a queste regole dei segni.

134. La moltiplicazione dei polinomi pei monomi, e dei polinomi tra loro si effettua moltiplicando ad uno ad uno tutti i termini del moltiplicando per ciascun termine del moltiplicatore, tenendo conto dei singoli prodotti, i quali sommati e ridotti insieme, se vi è luogo a riduzione (N.° 117), costituiranno il prodotto totale. La ragione di questa regola dipende dalla natura stessa dei polinomi, e non abbisogna di ulteriore schiarimento, non potendosi moltiplicare p. e. $a+b$ per $c+d$ se non prendendo dapprima c volte l' a, e c volte il b; poscia d volte l' a, e d volte il b, e sommando assieme questi prodotti. Onde sarà $(a+b)(c+d) = ac+bc+ad+bd$: così pure sarà $(a+b+cd)(mn) = amn+bmn+cdmn$ ed $(mp)(rs+pq) = mprs+mp^2q$.

135. A dare il maggiore schiarimento promesso al N.° 133, prendiamo p. e. ad analizzare il prodotto di $8-3 \times 6$, che supporremo eguale ad $a-b \times c$. Siccome il moltiplicando $8-3=5$, egli è evidente che in Aritmetica la cosa si riduce a 5×6, il che dà 30 di prodotto. Si eseguisca ora l' operazione secondo il metodo algebrico, e si avrà:

$8-3$	Molt.^{do}	$a-b$
6	Molt.^{re}	c
$48-18$	Prod.°	$ac-bc$.

Infatti il prodotto 48 nato da 8×6, eccede il vero; perchè non già si doveva moltiplicare 8 per 6, ma bensì $8-3$ per 6; onde in ognuna delle 6 volte che io ho preso l' 8, ho preso 3 di più; dunque sarà necessario di togliere sei volte il 3, cioè 18 dal 48; onde si scriverà come sopra $48-18$, che è il vero prodotto di $8-3 \times 6$, ossia di $5 \times 6 = 30$.

136. Se invece di $8-3 \times 6$, si avesse $6 \times 8-3$, l' operazione tornerebbe lo stesso, giacchè dal prodotto 48, che in questo caso nascerebbe da 6×8, si dovrebbe levare tre volte il 6, cioè 18 egualmente; perchè il 6 non si doveva prendere 8 volte, ma $8-3$, vale a dire 5 volte solamente; e perciò il prodotto di 6×5, ossia di $6+8-3$ sarà come prima $48-18=30$.

137. Sia ora da moltiplicarsi $8-3$, ovvero $a-b$
per $6-2$ per $c-d$

Il prodotto di $(8-3) \times 6 = 48-18$ (N.° 135). Ma in questo prodotto $48-18$, l' $8-3$ è stato preso due volte di più, perchè si doveva moltiplicare $8-3$ non già per 6, ma bensì per $6-2$, cioè per 4. Per aver dunque il giusto prodotto di $8-3 \times 6-2$, fa d' uopo togliere 2 volte l' $8-3$ dal prodotto $48-18$, vale a dire sottrar da esso l' $8-3 \times 2$ ossia $16-6$. Quindi cambiando i segni alla quantità da sottrarsi, avremo $48-18-16+6=20$.

. Ecco l' operazione per esteso:

$8-3$	Moltiplicando	$a-b$
$6-2$	Moltiplicatore	$c-d$
$48-18-16+6$	Prodotto	$ac-bc-ad+bd$.

138. Osservando un tale prodotto, si vede: 1.° che il termine positivo 48 nasce da 8×6, positivi anch' essi; 2.° che il termine negativo -18 nasce da -3×6 l' uno negativo, l' altro positivo; 3.° che il negativo -16 risulta dal positivo 8×-2 negativo; 4.° finalmente che il positivo 6 è formato dalla moltiplica di -3 per -2, ambidue negativi. Pertanto dietro questa osservazione, i ragionamenti finora istituiti, e

che sono applicabili egualmente alle quantità letterali, si possono riepilogare così: *I fattori che hanno il medesimo segno, danno sempre un prodotto positivo; i fattori aventi segno diverso, danno un prodotto negativo.* Quindi si hanno le seguenti quattro combinazioni, rapportando alle quantità ciò che si dice dei segni dai quali esse sono affette:

$$\begin{array}{lll} + \times + = + & +3 \times +2 = +6 & +a \times +b = +ab \\ - \times - = + & -3 \times -2 = +6 & -a \times -b = +ab \\ - \times + = - & -3 \times +2 = -6 & -a \times +b = -ab \\ + \times - = - & +3 \times -2 = -6 & +a \times -b = -ab \end{array}$$

139. Ai principianti suole apparire strano in questa teoria dei segni che una quantità negativa moltiplicata per una quantità negativa, debba dare per prodotto una quantità positiva. Ma tutta la difficoltà che essi trovano nell'ammetterla dipende da un equivoco. Essi credono che $- \times - = +$ voglia dire p. e. che un debito moltiplicato per un debito dia un credito: mentre se riflettono un poco vedranno che moltiplicare i debiti per dei debiti è un' operazione assurda in natura. Si moltiplicano i debiti per dei numeri astratti semplicemente, non indicando altro il moltiplicatore se non che quante volte debba ripetersi il moltiplicando. Se il moltiplicatore perciò è numero negativo non indica altro se non che deve ripetersi il moltiplicando in uno stato opposto a quello in cui egli è; e quindi in istato positivo se esso pure è negativo. Nell'Aritmetica, per esercizio di calcolo, si fanno alcune volte dai maestri moltiplicare dei pesi, delle libbre e delle once, per dei pesi, delle libbre e delle once; ma come ripeto è assurda in natura questa moltiplica; e lo studioso dell'Algebra deve ben fissare quest' idea, che il moltiplicatore non indica cose della stessa specie del moltiplicando, ma che desso è sempre un numero astratto, il quale indica solamente quante volte debba ripetersi il moltiplicando stesso. Fissata questa idea, le regole della moltiplica algebrica, che riguardano i segni, non presentano alcuna difficoltà.

140. Aggiugniamo alcuni esempi di moltiplica, che lo studioso per esercizio ripeterà da sè, riscontrando poi i prodotti che ottiene.

Esempio 1.°

$$\begin{array}{rl} 4a^2 - 3b + 2c^3 & \text{Molt.}^{do} \\ 2a^2 & \text{Molt.}^{re} \\ \hline 8a^4 - 6a^2b + 4a^2c^3 & \text{Prodotto} \end{array}$$

2.°

$$\begin{array}{rl} 3a^2b^3c & \text{Molt.}^{do} \\ 3b^2 - 2ab - 5a^3bc & \text{Molt.}^{re} \\ \hline 9a^2b^5c - 6a^3b^4c - 15a^5b^4c^2. & \text{Prodotto} \end{array}$$

3.°

$$\begin{array}{rl} a + b & \text{Molt.}^{do} \\ a + b & \text{Molt.}^{re} \\ \hline a^2 + ab & \\ + ab + b^2 & \\ \hline a^2 + 2ab + b^2. & \text{Prod.}^{o} \end{array}$$

4.°

$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \\ - ab - b^2 \\ \hline a^2 - b^2. \end{array}$$

5.°

$$\begin{array}{lr} \text{Molt.}^{do} & a^2 + 2ab + b^2 \\ \text{Molt.}^{re} & a + b \\ \hline & a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ & + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline \text{Prodotto} & a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \end{array}$$

141. Quando nel processo della moltiplicazione si ottengono dei termini simili, giova porli gli uni sotto gli altri per facilitarne le opportune riduzioni, come si è fatto nel 3.°, 4.° e 5.° esempio.

Divisione.

142. La divisione algebrica delle quantita monomie, si indica come quella de' numeri semplici, cioè scrivendo il dividendo e il divisore l' uno dopo l' altro tramezzati da due punti, oppure mettendoli a modo di frazione ordinaria. Così $a : b$, ovvero $\frac{a}{b}$, significa che la quantità a è divisa dalla quantità b. Se le quantità da dividersi sieno polinomie, come p. e. se $3a^2 - 2b + 3c$ si dovesse dividere per $5a + b$, si scriverà $(3a^2 - 2b + 3c) : (5a + b)$, ovvero $\frac{3a^2 - 2b + 3c}{5a + b}$. Del pari $(4a^4 - 2ab^2 + 4c) : 2a$, indicherà che $4a^4 - 2ab^2 + 4c$ deve dividersi per $2a$.

143. *La divisione algebrica ha per iscopo di determinare quella quantità la quale moltiplicata pel divisore riproduce il di-*

videndo. Così quando si vuole dividere p. e. ab per b altro non si deve cercare se non quella quantità, la quale moltiplicata per b dia per prodotto ab. Posta questa nozione della divisione algebrica, è facile stabilirne tutte le regole per eseguirla esattamente.

144. Se tanto il dividendo che il divisore fossero identici, il quoto che ne risulta sarà sempre l'unità: così $a:a=1$, $abc:abc=1$, $\frac{5a^2b^3c}{5a^2b^3c}=1$ perchè in questi casi solo l'unità è quel quoto, che moltiplicato pel divisore riproduce il dividendo.

145. Che se il dividendo non è identico col divisore varranno le seguenti regole. Riguardo ai segni: *quando il dividendo e il divisore hanno lo stesso segno, il quoto sarà sempre positivo; quando hanno il segno diverso, il quoto sarà sempre negativo.*

Di fatto: 1.° *caso*. Sia da dividere $+ab$ per $+b$; il quoto dovrà essere positivo onde moltiplicato per il divisore $+b$ positivo, riproduca il dividendo $+ab$ positivo esso pure (N.° 131).

2.° *caso*. Sia da dividere $-ab$ per $+b$; il quoto dovrà essere negativo, onde moltiplicato per il divisore $+b$ positivo riproduca il dividendo $-ab$ negativo (N.° 132).

3.° *caso*. Sia da dividere $+ab$ per $-b$; il quoto dovrà essere negativo, onde moltiplicato pel divisore negativo $-b$, riproduca il dividendo $+ab$ positivo (N.° 133).

4.° *caso*. Sia da dividere $-ab$ per $-b$; il quoto dovrà essere positivo, onde moltiplicato pel divisore negativo $-b$, riproduca il dividendo $-ab$ negativo (N.° 132).

146. Rapporto ai coefficienti. *Nella divisione algebrica i coefficienti si dividono all'uso dei numeri ed il quoziente numerico che se ne ottiene è il coefficiente del quoto della divisione algebrica*. Di fatti sia da dividere $15ab$ per $5a$; il quoto dovrà avere il coefficiente 3, onde moltiplicato pel divisore $5a$, riproduca il dividendo col coefficiente 15; dovendosi nella moltiplica del quoto col divisore moltiplicare assieme i coefficienti (N.° 127).

147. Rapporto alle lettere. *Le lettere che collo stesso esponente sono comuni al dividendo ed al divisore si cancellano; e ciò che resta nel dividendo è il quoziente cercato*. Di fatto sia

da dividere a^2b per a^2; il quoto, togliendo l'a^2, dovrà essere b, perchè solo questa quantità moltiplicata per a^2 riproduce il dividendo a^2b (N.° 129).

148. Rapporto agli esponenti. *Una lettera comune al dividendo ed al divisore, ma che vi abbia diverso esponente, si scrive una volta sola nel quoto con un esponente eguale a quello che ella ha nel dividendo, meno quello che ha nel divisore.* Di fatti dividendo a^4b^3 per a^3b, il quoto dovrà essere $a^{4-3}b^{3-1}=ab^2$, perchè solo ab^2 moltiplicato pel divisore a^3b riproduce il dividendo a^4b^3 (N.° 128).

149. Per applicazione di queste regole, che tutte abbiamo derivate dalle regole della moltiplica, di cui la divisione non è che l'operazione inversa, veggansi i seguenti esempi:

1.° $\frac{-8a^2bc}{2ac}=-4ab$, 3.° $\frac{18cd^3r^2}{6cd^2r^2}=3d$,

2.° $\frac{-14a^4d^4c^7}{-2a^2d^4c^6}=7a^2c$, 4.° $\frac{2a^3b^2}{-a^2}=-2ab^2$.

150. Da quanto si è detto ne segue, che una divisione fra due monomi non sarà eseguibile se non quando il dividendo contenga esattamente il coefficiente del divisore colle lettere di esso, le quali inoltre debbono essere affette da esponenti non minori di quelli che hanno le stesse lettere nel divisore. Quando queste condizioni non si verificano, la divisione non si potrà che indicare, o eseguire in parte se è possibile. Così $3ab$ non potendo essere diviso da $2cd$, scriverò semplicemente $\frac{3ab}{2cd}$; e $\frac{6a^2b}{3a^2c}=2\frac{b}{c}$; $\frac{3cd}{3a^2}=\frac{cd}{a^2}$; $\frac{12a^3b}{5a^2}=\frac{12}{5}ab$.

151. Abbiamo detto (N.° 148) che per dividere p. e. a^5 per a^2, conviene sottrarre dall'esponente 5 del dividendo l'esponente 2 del divisore, e che la differenza che si ottiene è l'esponente da dare all'a nel quoto; laonde sarà $\frac{a^5}{a^2}=a^{5-2}=a^3$. Questa regola che si assegna quando gli esponenti sono numerici, vale anche se fossero letterali: onde anche $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$. Qui però cade in proposito l'osservare di passaggio, che la formola $\frac{a^m}{a^n}$ comprende tre casi poichè può essere $m>n$, $m=n$, $m<n$. Nel primo caso l'esponente $m-n$

è una quantità positiva, cioè una quantità espressa dal residuo di m diminuito di n. Nel secondo caso l' esponente diviene zero, e la formola è a^0. Nel terzo finalmente l' esponente è negativo; e supponendo che $m - n = -p$, la formola diviene a^{-p}.

152. Per quanto risguarda la espressione del 2.° caso a^0, essa nasce da $\frac{a^m}{a^m}$, giacchè $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$; e siccome qualora il divisore è uguale al dividendo, il quoto è sempre l' unità, si avrà $\frac{a^m}{a^m} = a^0 = 1$; onde ne segue, *che ogni quantità coll' esponente zero eguaglia l' unità*. Perciò si potrà moltiplicare qualunque quantità per qualunque altra elevata a zero, senza che si alteri punto il suo valore.

153. Rapporto alla espressione del 3.° caso, si osservi che $\frac{a^m}{a^{m+p}} = a^{m-m-p} = a^{-p}$ (N.° 151); ma il divisore a^{m+p} nasce da $a^m \times a^p$ (N.° 128); dunque $\frac{a^m}{a^{m+p}} = \frac{a^m}{a^m a^p} = \frac{a^0}{a^p} = \frac{1}{a^p}$ (N.° 152). Ma essendo $\frac{a^m}{a^{m+p}} = a^{m-m-p} = a^{-p}$ (N.° 151), ne segue che anche $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$, che è quanto dire: *qualunque quantità dotata di esponente negativo, è uguale all' unità divisa per la stessa quantità col medesimo esponente positivo.*

154. Quindi ne consegue che potrà trasportarsi qualunque quantità dal divisore nel dividendo, e viceversa, avvertendo solamente di cangiare il segno all' esponente delle quantità che si trasportano. Così $\frac{a^m b^r}{c^n} = a^m c^{-n} b^r$; parimenti $a^{-3} b = \frac{b}{a^3}$.

155. La divisione di un polinomio per un monomio, si eseguisce dividendo ciascun termine del polinomio stesso pel monomio divisore, e la somma di tutti i quoti parziali otte-nuti darà il quoto totale che si cerca. La cosa è abbastanza

chiara per se stessa, derivando da ciò che si è detto della moltiplica (N.° 134). Esempio:

$$\begin{array}{l|l} \text{Divid.}^{\text{do}}\ \ 4a^2b^3 - 6a^4b - 8a^5b^4 & 2a^2b \ \ \text{Divisore} \\ \quad -4a^2b^3 + 6a^4b + 8a^5b^4 & \\ \hline \quad\ \ 0 \qquad\quad 0 \qquad\quad 0 & 2b^2 - 3a^2 - 4a^3b^3 \ \ \text{Quoto.} \end{array}$$

Moltiplicando ora il quoto ottenuto pel divisore, e sottraendone dal dividendo il prodotto, col cangiarvi i segni (N.° 120), non si avrà alcun residuo, il che prova che l' operazione è fatta bene.

156. Se tanto il dividendo che il divisore sieno quantità polinomie, prima di eseguirne la divisione fa d' uopo ordinarli. Diconsi ordinati due polinomi, quando i termini del dividendo e del divisore sono scritti in modo, che gli esponenti di una certa data lettera, cominciando dal primo termine a sinistra del polinomio, sempre van decrescendo nei termini successivi fino all' esponente più piccolo di essa lettera. Per esempio i due polinomi seguenti: $a^2b - 4ab^3c + 3a^5bc - 5a^3b^4 - 2a^6b^2c$, $-3ab^2c^3$ ordinati secondo la lettera a, si scriverebbero così: $-2a^6b^2c + 3a^5bc - 5a^3b^4 + a^2b - 4ab^3c$, $-3ab^2c^3$.

157. Dopo di aver ordinati i due polinomi per eseguire l' operazione: 1.° Osservando le regole insegnate riguardo alle lettere, ai coefficienti, agli esponenti, e ai segni, si divida il primo termine del dividendo pel primo termine del divisore, e se ne scriva il quoto al luogo destinato.

2.° Si moltiplichi questo quoto per tutto il divisore, e il prodotto si sottragga dal dividendo.

3.° Se vi è residuo si divida nuovamente il primo termine di esso per lo stesso primo termine del divisore, e il nuovo quoto si scriva a canto dell' altro già ottenuto.

4.° Si moltiplichi questo secondo quoto per tutto il divisore, e il prodotto si sottragga dal dividendo residuo.

5.° Sul nuovo residuo, se vi è, si eseguisca la divisione come sull' antecedente, ripetendo successivamente le stesse operazioni, finchè si giunga ad un residuo nullo, oppure ad un residuo in cui non vi sia alcun termine divisibile pel primo termine del divisore; dacchè anche la divisione è allora compiuta per quella parte che può compiersi. Il prodotto poi di tutto il quoto per il divisore, sommato che sia al resto, se ni è, deve riprodurre il dividendo quando l' operazione fu eseguita bene.

Esempio 1.°

$$\begin{array}{rl|l} \text{Dividendo} & a^2+2ab+b^2 & a+b \ \text{Divisore} \\ & -a^2-ab & \overline{a+b \ \text{Quoto}} \\ \hline & ab+b^2 & \\ & -ab-b^2 & \\ \hline & 0 \quad 0 & \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rl|l} \text{D.°} & a^5+3a^4b+3a^3b^2-2a^4b-6a^4b^2-6a^2b^3 & a^3+3a^2b+3ab^2 \ \text{D.°} \\ & -a^5-3a^4b-3a^3b^2 & \overline{a^2-2ab \ \text{Quoto}} \\ \hline & 0 \quad 0 \quad 0 & \\ \text{Resto} & -2a^4b-6a^4b^2-6a^2b^3 & \\ & +2a^4b+6a^4b^2+6a^2b^3 & \\ \hline & 0 \quad 0 \quad 0 & \end{array}$$

158. Se la lettera secondo la quale si ordina abbia lo stesso esponente in più termini o del dividendo o del divisore, come nel 2.° esempio, allora quei termini si scrivono immediatamente uno dopo l' altro, avendo riguardo di ordinarli secondo un' altra lettera, perchè ciò alcune volte può servire a rendere più spedita l' operazione.

159. Se i polinomi degli addotti esempi si fossero ordinati per rapporto alla lettera b, si sarebbe ottenuto lo stesso quoto, ma scritto in ordine inverso, cioè $b+a$ nel 1.°, e $-2ab+a^2$ nel 2.°, come è facile da verificarsi. Onde sarà indifferente ordinare i due polinomi per rapporto a quella lettera che si vuole.

160. Si conoscerà facilmente la ragione di dovere ordinare i polinomi prima di eseguire la divisione di essi, se si riflette, che non essendo altro il dividendo che il prodotto del divisore pel quoto, dovrà necessariamente, il termine del divisore in cui una data lettera ha l' esponente più grande, entrare come fattore nel termine del dividendo ove essa ha

egualmente l' esponente massimo. Da ciò ne viene che incominciando l' operazione da questi termini, si giugnerà con sicurezza a scoprire fin da principio una parte del quoto; al contrario, tralasciando di ordinare, si correrebbe rischio di fare inutili tentativi, intraprendendo la divisione di una quantità per un'altra non concorsa come fattore alla formazione di essa.

La ragione pure del doversi eseguire nel modo accennato la divisione de' polinomi per polinomi, ordinati che sieno i termini, apparirà manifesta solo che si rifletta, che la somma di quei prodotti di ciascun quoto parziale nel divisore, i quali si sottraggono mano mano dal dividendo, non costituiscono altro che il prodotto totale del quoto intero nel divisore; e quindi col metodo accennato si giugne precisamente a trovare quella quantità, che moltiplicata pel divisore riproduce il dividendo (N.° 143).

162. Nel processo della divisione accade qualche volta, che moltiplicando i differenti termini del quoto pel divisore, nascano dei termini che non erano nel dividendo: anche questi devono essere trattati al pari degli altri del dividendo, perchè tali termini sono quelli, che per mezzo della riduzione furono distrutti quando si formò il dividendo colla moltiplicazione dei due fattori divisore e quoto.

Ecco un esempio di simili divisioni unitamente alla moltiplicazione del divisore pel quoto, onde si possa confrontare l' una operazione coll' altra, e conoscere la verità di quanto dicemmo.

Divisione.

$$\begin{array}{rl|l} \text{Dividendo} & a^4-b^4 & a-b \ \text{Divisore} \\ & -a^4+a^3b & \overline{a^3+a^2b+ab^2+b^3 \ \text{Quoto}} \\ \hline \text{1.° resto} & a^3b-b^4 & \\ & -a^3b+a^2b^2 & \\ \hline \text{2.° resto} & a^2b^2-b^4 & \\ & -a^2b^2+ab^3 & \\ \hline & ab^3-b^4 & \\ & -ab^3+b^4 & \\ \hline & 0 \quad 0 & \end{array}$$

Moltiplicazione.

$$\begin{array}{lll}
\text{Moltiplicando} & a-b & \text{Divisore} \\
\text{Moltiplicatore} & a^3+a^2b+ab^2+b^3 & \text{Quoto} \\
\hline
 & a^4-a^3b & \\
 & \quad +a^3b-a^2b^2 & \\
 & \qquad +a^2b^2-ab^3 & \\
 & \qquad\quad +ab^3-b^4 & \\
\hline
\text{Prodotto} & a^4-b^4. & \text{Dividendo.}
\end{array}$$

Si debba ancora dividere a^5-b^5 per $a-b$. Sarà:

$$\begin{array}{ll}
\text{Div.}^{do}\quad a^5-b^5 & \big)\; a-b \quad \text{Divisore} \\
\quad -a^5+a^4b & \\
\hline
 & a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4 \quad \text{Quoto.} \\
\quad a^4b-b^5 & \\
\quad -a^4b+a^3b^2 & \\
\hline
\qquad a^3b^2-b^5 & \\
\qquad -a^3b^2+a^2b^3 & \\
\hline
\qquad\quad a^2b^3-b^5 & \\
\qquad\quad -a^2b^3+ab^4 & \\
\hline
\qquad\qquad ab^4-b^5 & \\
\qquad\qquad -ab^4+b^5 & \\
\hline
\qquad\qquad 0 \quad 0 &
\end{array}$$

163. Dalla sola ispezione dei quozienti ottenuti nella divisione dei due addotti esempi, è facile di scoprire la legge che regna in essi, per applicarla a tutti i casi in cui si avesse a dividere la differenza di due quantità elevate ad una stessa potenza, per la differenza delle stesse quantità elevate all' unità, e risparmiar così l' incomodo di farne la divisione per esteso. Eccone la formola generale:

$$\frac{a^m-b^m}{a-b}=a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2+a^{m-4}b^3+a^{m-5}b^4\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots+a^4b^{m-5}+a^3b^{m-4}+a^2b^{m-3}+ab^{m-2}+b^{m-1}.$$

Che questo poi sia il vero quoto, si prova da ciò, che moltiplicandolo col divisore $a-b$, si ottiene il dividendo a^m-b^m, come si potrà vedere operando.

164. Se invece della differenza di due quantità elevate ad eguali potenze, si dovesse dividere la somma di due quantità elevate ad eguale potenza dispari, per la somma delle stesse quantità semplici, si vedrebbe regnare la stessa legge, colla sola diversità, che i quoti in quest' ultima divisione sarebbero alternativamente positivi e negativi.

Esempio

$$\begin{array}{ll}
\text{Div.}^{do}\quad p^5+q^5 & \big)\; p+q \quad \text{Divisore} \\
\quad -p^5-p^4q & \\
\hline
 & p^4-p^3q+p^2q^2-pq^3+q^4 \quad \text{Quoto} \\
\quad -p^4q+q^5 & \\
\quad +p^4q+p^3q^2 & \\
\hline
\quad 0 \quad p^3q^2+q^5 & \\
\qquad -p^3q^2-p^2q^3 & \\
\hline
\qquad 0 \quad -p^2q^3+q^5 & \\
\qquad\quad +p^2q^3+pq^4 & \\
\hline
\qquad\quad 0 \quad pq^4+q^5 & \\
\qquad\qquad -pq^4-q^5 & \\
\hline
\qquad\qquad 0 \quad 0 &
\end{array}$$

165. Pertanto dietro la formola generale stabilita nel numero antecedente, e colla dovuta avvertenza ai segni, potrò eseguire compendiosamente la divisione di x^9+y^9 per $x+y$. Sarà cioè:

$$\frac{x^9+y^9}{x+y}=x^8-x^7y+x^6y^2-x^5y^3+x^4y^4-x^3y^5+x^2y^6-xy^7+y^8.$$

166. I quoti che emergono con certa legge da simili divisioni, ricevono il nome di *serie*. La serie poi dicesi *finita*, se, come avviene negli esempi superiormente addotti, il quoto ha un numero di termini finito; e chiamasi *infinita*, se il quoto avrà un numero di termini infinito, come accade nelle divisioni del numero seguente. Di tali serie poi, e del loro

uso si tratta particolarmente nell' introduzione al calcolo sublime.

167. Talvolta accade ancora, che nel processo della divisione nascano sempre dei nuovi termini, i quali fanno sì che l' operazione non ha mai fine, ma progredisce sino all' infinito con una certa legge, che facilmente si rende manifesta.

Esempio

Si divida a per $1-x$; si avrà:

$$\begin{array}{l|l}
\text{Div.}^{do}\quad a & 1-x \quad \text{Divisore} \\ \cline{2-2}
-a+ax & a+ax+ax^2+ax^3+ax^4+ax^5 \text{ ecc. Quoto.} \\ \cline{1-1}
\quad ax & \\
\quad -ax+ax^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad ax^2 & \\
\qquad -ax^2+ax^3 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad ax^3 & \\
\qquad\quad -ax^3+ax^4 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad ax^4 & \\
\qquad\qquad -ax^4+ax^5 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\quad ax^5 \text{ ecc.} &
\end{array}$$

In questa divisione, come chiaro apparisce, ciascun termine del quoto è uguale al suo antecedente moltiplicato per x; e siccome il numero di questi termini è infinito, sarà altresì *infinita la serie* che da essi deriva.

168. Se si volesse perciò l'esatta eguaglianza di $\frac{a}{1-x}$ col quoto che ne risulta, fa d' uopo aggiugnere all' ultimo termine del quoto ottenuto il resto ax^6 che rimane a dividersi per $1-x$; onde sarà:

$$\frac{a}{1-x}=a+ax+ax^2+ax^3+ax^4+ax^5+\frac{ax^6}{1-x};$$

$$\text{oppure } \frac{a}{1-x}=a+ax+ax^2+\frac{ax^3}{1-x};$$

potendosi prendere a piacimento nel quoto un numero qualunque di termini, giacchè tutti i successivi sono compresi in quell' espressione $\frac{ax^3}{1-x}$. Non aggiugnendo poi tale espressione vi sarebbe un errore nel quoto tanto maggiore quanto più grande è il resto stesso.

169. Una qualunque quantità finita se sia divisa per zero, dà un quoto infinito. Nell' esempio del numero antecedente, supponendo $x=1$, si avrà:

$$\frac{a}{1-1}=a+a+a+a\text{ ecc.}+\frac{a}{1-1};$$

dacchè a qualunque termine del quoto si arresti la divisione, l' espressione che è da aggiungersi sempre si riduce ad $\frac{a}{1-1}$. Laonde ne deriva che qualunque numero di quegli a si prenda per indicare il valore di $\frac{a}{1-1}$, desso valore è sempre distante dal vero della stessa quantità $\frac{a}{1-1}$. Quindi $\frac{a}{1-1}$ ha un valore così grande, che non è esprimibile con un numero finito di quei termini $a+a+a$ ecc.; cioè ha un valore infinito. Ora $\frac{a}{1-1}=\frac{a}{0}$, sarà perciò $\frac{a}{0}=\infty$.

170. Al contrario lo zero diviso per qualsivoglia quantità finita, dà sempre per quoto zero; così $\frac{0}{a}=0$, e ciò non abbisogna di dimostrazione, essendo per se stesso chiarissimo, che nessuna quantità, fuori dello zero, può essere quella, la quale moltiplicata pel divisore a (N.° 143), riproduce il dividendo 0.

171. La divisione è forse la più difficile fra tutte le operazioni algebriche; onde i principianti si eserciteranno molto nella pratica di essa per acquistare l' abitudine di eseguirla con prontezza. A questo fine sarà loro di grande giovamento il moltiplicare prima insieme de' polinomi, e poscia dividerne il prodotto per uno dei fattori della moltiplica. Con tale esercizio impareranno ancora a risolvere o scomporre un prodotto ne' suoi fattori, ossia, come dicono gli algebristi,

a separare o *raccogliere i fattori comuni* alle quantità, quando esse ne abbiano alcuni diversi da se stesse, o dall'unità.

172. *Si eseguisce la separazione de' fattori col dividere tutti i termini di una data espressione per quel fattore che è ad essi comune, racchiudendo tra parentesi il quoto totale ottenuto mediante questa divisione, e scrivendo fuori di parentesi, come moltiplicatore, il comun fattore sopra indicato. E nel caso che il detto fattore nan fosse comune a tutti i termini, si separa da quei soli termini che lo contengono.*

173. In varie maniere si può giugnere a separare i fattori di una data espressione, nè si potrebbe perciò assegnare una regola generale, e solamente le osservazioni fatte sulla formazione de' prodotti possono servir di guida in questa importante operazione, che serve spesso a facilitare la divisione, ed è di grande vantaggio nella applicazione del calcolo algebrico alla soluzione dei problemi.

174. Nei polinomi in cui col processo della moltiplica furono distrutti dei termini per mezzo della riduzione, è d'uopo separarne i fattori da ciascun prodotto parziale, cioè a dire prima di farne le riduzioni, altrimenti non sarebbe possibile di trovarne i fattori comuni. Si avverta poi che quando si porta fuor di parentesi un fattore qualunque, gli si deve dare il segno positivo o negativo, secondo che sarà necessario, per due ragioni: 1.° perchè si possa, occorrendo, dalla moltiplica di esso colla quantità che rimane tra parentesi, ottenere il prodotto primiero; 2.° perchè dandosi il caso che le quantità rimaste tra parentesi nei diversi raccoglimenti parziali fossero uguali, abbiano gli stessi segni, e si possa assoggettare la espressione ad un altro raccoglimento di fattori, il che diversamente non si potrebbe eseguire.

Esempi:

1.° Sia l'espressione $m^4 - pm^3 + m$, di cui si vogliano conoscere i fattori comuni.

Dalla sola ispezione de' termini si vede facilmente che il solo m è fattor comune a questa espressione. Pertanto dividendola tutta per m, si avrà di quoto $m^3 - pm^2 + 1$. Questo quoto moltiplicato per m darà la quantità $m\ (m^3 - pm^2 + 1)$ uguale all'altra in valore, e che da essa differisce nella forma solamente.

2.° Per separare il fattor comune dell'espressione $mnr - mn^2q$, operando, come si è insegnato, si troverà: $mn\ (r - nq)$.

3.° Raccolgansi i fattori parziali nella espressione $a^2 - ab + ac - bc$.

Primieramente raccolgo il fattor comune a ne' due primi termini, e negli altri due il fattor comune c, ed ottengo: $a\ (a - b) + c\ (a - b)$. In questa seconda espressione ancora, trovo un fattor comune in $a - b$; lo raccolgo esso pure, ed otterrò in fine $(a - b)\ (a + c)$.

Massimo comun Divisore.

175. Già si disse (N.° 43 e 44) esser *massimo comun divisore* di due quantità quel divisore, mediante il quale eseguita la divisione delle medesime non lascia più fra esse alcun fattor comune, riescendo la divisione esatta e senza resto.

176. La regola per trovare il massimo comun divisore di due espressioni algebriche è la stessa di quella che l'Aritmetica impiega per trovarlo tra due dati numeri, vale a dire: *Ordinate prima di tutto le due espressioni, si prende per dividendo quella, ove la lettera secondo la quale si è ordinato, abbia il più alto esponente, e si divide per l'altra espressione. Col resto, se vi sarà, si divide l'espressione divisore; col secondo resto, si divide il primo resto; col terzo il secondo, e così via via finchè si arriva a una divisione esatta; l'ultimo divisore sarà il massimo divisore cercato.*

Per dimostrare questa regola, è necessario premettere alcune riflessioni intorno alla divisione algebrica. Si rappresenti per A un polinomio da dividersi, per B il divisore, per q il quoto, e per R il resto. Dovendo essere il prodotto del quoto pel divisore più il resto, eguale al dividendo (N.° 37), si avrà: $A = Bq + R$. Posta questa eguaglianza, se si supponga che A e B abbiano un divisore comune D, si potrà porre $A = Dg$, $B = Dl$ (indicando con g e con l i quoti che si ottengono dividendo A e B per D); quindi invece di scrivere $A = Bq + R$, potremo scrivere $Dg = Dlq + R$. Ma due cose eguali divise per la stessa quantità rimangono eguali; dunque sarà $\frac{Dg}{D} = \frac{Dlq + R}{D}$; cioè eseguendo le divisioni $g = lq + \frac{R}{D}$. Ma g è intero, perchè D divide esattamente A;

l pure è intero, perchè D divide esattamente B; dunque anche $\frac{R}{D}$ sarà quantità intera, altrimenti l'eguaglianza $g = lq + \frac{R}{D}$ non potrebbe sussistere. Perciò se A e B ammettono un divisore comune D, anche R residuo deve essere divisibile per lo stesso D. Ciò posto, sarà lo stesso per avere questo divisore comune, lo scomporre B ed R che scomporre A e B.

Eccoci pertanto alla dimostrazione della regola indicata. Sieno A e B le due espressioni, A il dividendo, B il divisore, q il quoziente, R il resto; si avrà: . 1.° $A = Bq + R$;

Assumendo R per divisore di B, e rappresentando il quoto per q', e il resto per R', sarà . . . . 2.° $B = Rq' + R'$;

Dividendo ora R per R', sia q'' il quoto, R'' il resto, sarà . . . . 3.° $R = R'q'' + R''$;

Dividendo per ultimo R' per R'', supponiamo che non rimanga resto, e si abbia q''' per quoto, sarà . . . . 4.° $R' = R''q'''$.

Se noi esaminiamo le quattro uguaglianze trovate, vedremo (nella prima) che il massimo comun divisore di A e B, deve dividere anche R; (nella seconda) scorgeremo che se B ed R hanno un divisore comune, lo deve avere anche R'; e (nella terza) che avendolo R ed R', dovrà averlo anche R'', che è l' ultimo divisore. Con un ragionamento inverso poi potremo conchiudere, che essendo R'' ed R' (per la quarta) esattamente divisibili per R'', lo sarà anche R (per la terza); ed essendolo R' ed R, lo sarà ancora B (per la seconda); ed essendolo R e B, deve esserlo anche A (per la prima). Quindi pel primo ragionamento fatto, dovendo il massimo comun divisore delle due espressioni A e B essere altresì divisore dell'ultimo divisore R'', e il massimo divisore di R'' essendo lo stesso R'', ne segue, pel secondo ragionamento, che R'' sarà massimo divisore comune anche di A e B, come doveva dimostrarsi. Egli è poi manifesto, che se le divisioni fossero in maggior numero, il ragionamento sarebbe sempre lo stesso.

177. Il massimo comun divisore di due quantità non si altera punto, moltiplicando o dividendo una di esse per una qualunque quantità, purchè questa non sia fattore dell'altra.

Sieno p. e. le due quantità AB ed AC che hanno per fattore comune A; moltiplicando la prima per D, essa diverrà ABD, espressione che non avrà con AC alcun altro fattore che la stessa quantità A di prima, la quale era comune alle due quantità AB ed AC. Se invece di moltiplicare, dividessi la stessa quantità AB per D, succederebbe lo stesso. Non così potrebbe dirsi, se AB si moltiplicasse o si dividesse per una quantità che fosse fattore di AC, come sarebbe C, perchè allora il divisore comune, non sarebbe più A, ma bensì AC. Da ciò si può conchiudere: 1.° *che nella ricerca del massimo comun divisore di due quantità, si potranno rigettare quei fattori, che moltiplicano solamente una delle due espressioni;* 2.° *che si potrà moltiplicare l' una delle due quantità per quel numero o quantità che si vorrà, purchè questa non sia fattore dell' altra.*

Se le quantità, di cui si cerca il massimo comun divisore, non abbiano alcun fattore comune, non potranno essere divise che dall' unità.

178. Esempio 1.° Sieno le due espressioni, di cui si voglia trovare il massimo comun divisore $a^4 - b^4$, e $a^2 - b^2$. Poichè le due quantità sono per se stesse ordinate, eseguendo la divisione della prima per la seconda a norma delle regole insegnate, si avrà:

$$\begin{array}{r|l} \text{Dividendo} \quad a^4 - b^4 & a^2 - b^2 \quad \text{Divisore} \\ -a^4 + a^2b^2 & \overline{} \\ \hline & a^2 + b^2 \quad \text{Quoto} \\ a^2b^2 - b^4 & \\ -a^2b^2 + b^4 & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array}$$

Osservando pertanto, che la prima divide esattamente la seconda, e dà per quoto $a^2 + b^2$, si conchiuderà, che $a^2 - b^2$ è il massimo comun divisore delle due proposte quantità proposte.

Esempio 2.° Sia da trovarsi il massimo comun divisore dei due polinomi:

$$A. \quad 6a^3 - 6a^2b + 2ab^2 - 2b^3$$
$$B. \quad 12a^2 - 15ab + 3b^2.$$

Si sopprima il fattore 2 in A, e il fattore 3 in B (N.° 177), col dividere la prima espressione per 2, la seconda per 3, e si avrà:

$A.\ 3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3$
$B.\ 4a^2 - 5a\,b + b^2.$

Pongasi A per dividendo, B per divisore, e giacchè il primo termine di A non può dividersi pel primo termine di B, si moltiplichi A per 4, che non è fattore di B, e si otterrà:

$$A.\ 12a^3 - 12a^2b + 4ab^2 - 4b^3.$$

Si divida ora questo risultato A per B, e si avrà il quoto $3a$, ed il residuo $3a^2b + ab^2 - 4b^3$.

In questo residuo, si sopprima il fattore b (N.° 177), e moltiplicando l'espressione per 4, come sopra, si avrà il nuovo dividendo:

$$A.\ 12a^2 + 4ab - 16b^2.$$

Si divida questo pure per B, e si avrà il quoto 3, ed il residuo $19ab - 19b^2$.

Si tolga da questo residuo il fattore $19b$, e si avrà il semplice binomio $a - b$.

Ora si ponga B per dividendo, ed il residuo $a - b$ per divisore; e poichè eseguendo l'operazione si ha un quoto senza resto, sarà $a - b$ il massimo divisore comune da' due polinomi dati A e B.

Ecco lo specchio dell'operazione:

Dividendi. *Divisori.*

D.^{do} 1.° $A.\ 12a^3 - 12a^2b + 4ab^2 - 4b^3$ | $B.\ 4a^2 - 5ab + b^2$ D.^{re} 1.°
$-12a^3 + 15a^2b - 3ab^2$
$3a$ Quoto 1.°

1.° Resto $3a^2b + ab^2 - 4b^3$; togliendo il fattore b, si ha $3a^2 + ab - 4b^2$, e moltiplicando per 4 torna:

Div.^{do} 2.° $A.\ 12a^2 + 4ab - 16b^2$ | $B.\ 4a^2 - 5ab + b^2$
$-12a^2 + 15ab - 3b^2$
3 Quoto 2.°

2.° Resto $19ab - 19b^2$; tolto il fattore 19, si ha $a - b$ per divisore di B.

Div.^{do} 3.° $B.\ 4a^2 - 5ab + b^2$ | $a - b$ Div.^{re} 2.°
$-4a^2 + 4ab$
$4a - b$ Quoto 3.° esatto.

3.° Resto $-ab + b^2$
$+ab - b^2$
$0 \quad 0$

179. Per loro esercizio potranno gli scolari cercare il massimo comun divisore dei due polinomi:

$A.\ 6a^4 + 4a^3b - 9a^2b^2 - 3ab^3 + 2b^4$
$B.\ 4a^4 - 4a^2b^2 + 4ab^3 - b^4,$

come pure dai due seguenti:

$A.\ 45a^3b + 3a^2b^2 - 9ab^3 + 6b^4$
$B.\ 54a^2b - 24b^3.$

Riguardo ai due ultimi, osservino aver essi un fattore comune $3b$, che si deve sopprimere, e determinato che sia il massimo comun divisore dei polinomi

$15a^3 + a^2b - 3ab^2 + 2b^3$
$18a^2 - 8b^2,$

si dovrà moltiplicare per $3b$, per aver quello dei polinomi proposti.

CAPO II.

Frazioni Algebriche.

180. Tutto ciò che abbiam detto in Aritmetica delle frazioni numeriche (N.° 38 e seg.), si applica egualmente alle frazioni *algebriche* o *letterali*, perchè queste sono della stessa natura di quelle, e perciò le operazioni che si eseguiscono sopra le une e le altre derivano dagli stessi principii.

181. Un intero si riduce a frazione mettendovi sotto l'unità. Così $a = \frac{a}{1}$; $ab = \frac{ab}{1}$; $3ad^2 = \frac{3ad^2}{1}$. Se poi si volesse ridurre la quantità a ad una frazione avente $3m$ per denominatore, allora si moltiplicherà a per $3m$, e al prodotto si sottoporrà lo stesso $3m$; onde sarà: $\frac{a \times 3m}{3m} = \frac{3am}{3m}$; così pure sarà $a = \frac{4abc}{4bc}$; $a = \frac{3am^2}{3m^2}$ ecc., essendo $\frac{4abc}{4bc} = \frac{a \times 4bc}{4bc} = a$; e $\frac{3am^2}{3m^2} = \frac{a \times 3m^2}{3m^2} = a$ (N.° 54).

182. Da ciò ne segue che una quantità qualunque può essere espressa in un numero infinito di maniere senza cangiare il primiero valore. Lo stesso si verifica, se ambidue i termini di una frazione si moltiplicano per qualsivoglia quantità. Così $\frac{a}{b} = \frac{3ad}{3bd} = \frac{3acm^3}{3bcm^3}$ ecc. (N.° 42 Ass.° 2.°).

183. Un intero con frazione si riduce ad una sola frazione, dando all' intero la denominazione della frazione, e sommandolo poscia con essa. Perciò $a+\frac{c}{m}=\frac{am+c}{m}$; $ad^2+\frac{h}{3g}=\frac{3ad^2g+h}{3g}$; e $3a^2b^3+\frac{c}{4}=\frac{12a^2b^3+c}{4}$ (N.° 52).

184. Una frazione si riduce a minimi termini, dividendo i due termini di essa pei fattori comuni che essi si troveranno avere, e in tale maniera la frazione diverrà più semplice, ma conserverà lo stesso valore (N.° 12 Ass.° 2.°). Quindi nella frazione $\frac{6ab^2d}{6ab^2c}=\frac{6ab^2}{6ab^2}\left(\frac{d}{c}\right)$, togliendo il fattore comune $6ab^2$ tanto dal numeratore che dal denominatore, si avrà la frazione $\frac{d}{c}$ assai più semplice, ma dello stesso valore della prima. Così pure la frazione $\frac{3a^2b-15ab^2}{3ab-10a^2b}$, separando nei due termini di essa il comun fattore $3ab$, si otterrà $\frac{3ab(a-3b)}{3ab(1-2a)}=\frac{a-3b}{1-2a}$ (N.° 12 Ass.° 2.°).

185. Per levare gl' interi da una frazione impropria o mista, si divide il numeratore di essa pel suo denominatore, ripetendo questa operazione sino a tanto che sia possibile. Così $\frac{9a^2-6a^2+3a}{3a}=3a-2a+1=a+1$, quantità intera senza resto; e $\frac{a^2-2ab+b^2+d}{a-b}$ darà il quoto intero $a-b$, ed il residuo d; onde sarà: $\frac{a^2-2ab+b^2+d}{a-b}=a-b+\frac{d}{a-b}$ (N.° 53).

186. Le frazioni $\frac{a}{c}+\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$, ridotte allo stesso denominatore, come s'insegnò al N.° 56, daranno:

$$\frac{anq+cmq+cnp}{cnq};\ \text{e}\ \frac{3a}{b}-\frac{2de}{4}=\frac{12a-2bde}{4b}.$$

Così pure $\frac{a}{1}+\frac{2}{c}-\frac{3d}{2q}=\frac{2acq+4q-3cd}{2cq}$ ecc.

187. Si sommano le frazioni scrivendole l' una dietro l' altra coi rispettivi loro segni, e riducendole allo stesso denominatore, se ciò sarà necessario. Perciò $\frac{a}{c}+\frac{4a}{c}-\frac{2a}{c}=\frac{3a}{c}$; e $\frac{a^2}{3}+\frac{b}{c^2}-\frac{3d}{n}=\frac{a^2c^2n+3bn-9c^2d}{3c^2n}$ (N.° 58).

188. Se l' intero $m-n$ si debba sommare colla frazione $\frac{p+q}{c}$, riducendo prima l' intero $m-n$ allo stesso denominatore c, avrò: $\frac{mc-nc}{c}$, $\frac{p+q}{c}$, e sommando sarà: $\frac{mc-nc+p+q}{c}$ (N.° 58).

189. Si sottraggono le frazioni, ridotte che sieno allo stesso denominatore, col cangiare i segni alle sole quantità che formano il numeratore della frazione sottraendo, e riducendo come nella somma (N.° 60 e 120). Dall' intero $2a^2$ debbasi sottrarre la frazione $\frac{a^3-b}{a-c}$. Riduco tutto allo stesso denominatore, ed otterrò: $\frac{2a^3-2a^2c}{a-c}$, $\frac{a^3-b}{a-c}$; ora eseguendo avrò: $\frac{2a^3-2a^2c-a^3+b}{a-c}=\frac{a^3-2a^2c+b}{a-c}$. Dalla frazione $\frac{m-3n}{p+q}$ si tolga la frazione $\frac{2q-np}{r-s}$. Ridotte ambedue alla stessa denominazione, si ha: $\frac{mr-ms-3nr+3ns}{pr-ps+qr-qs}$, $\frac{2pq+2q^2-np^2-npq}{pr-ps+qr-qs}$; ed eseguendo si avrà:

$$\frac{mr-ms-3nr+3ns-2pq-2q^2+np^2+npq}{pr-ps+qr-qs}.$$

190. Si è detto doversi cangiare i segni al solo numeratore della frazione sottraendo, perchè se si cangiassero anche quelli del denominatore, la frazione rimarrebbe la stessa,

ed invece di sottrarla dall' altra, si sommerebbe con essa. Infatti $\frac{a}{c}$ è lo stesso che $\frac{a \times -1}{c \times -1} = \frac{-a}{-c}$ (N.° 182) $= \frac{a}{c}$.

191. Si moltiplica un intero per una frazione, scrivendo sotto al prodotto dell' intero pel numeratore, il denominatore della frazione (N.° 62). Così $\frac{a}{c} \times b = \frac{a\,b}{c}$; $b \times \frac{a}{c} = \frac{ab}{c}$.

192. Si moltiplicano le frazioni tra loro, facendo il prodotto dei numeratori e dei denominatori (N.° 64). Così $\frac{a}{c} \times \frac{m}{n} = \frac{a\,m}{c\,n}$; $\frac{a}{c} \times \frac{b}{n} \times \frac{3}{q} = \frac{3\,a\,b}{c\,n\,q}$, e $\left(\frac{2a - 3b}{2a + 3b}\right) \times \left(\frac{3a + 2b}{3a - 2b}\right) = \frac{6a^2 - 5ab - 6b^2}{6a^2 + 5ab - 6b^2}$.

193. Per dividere una frazione per un intero, o un intero per una frazione, si sottopone l' unità all' intero, indi rovesciando i termini della frazione divisore, si moltiplicano con quelli della frazione dividendo (N.° 65 e 66). Così $a : \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \times \frac{c}{b} = \frac{a\,c}{b}$; $\frac{m}{n} : q = \frac{m}{n} : \frac{q}{1} = \frac{m}{n} \times \frac{1}{q} = \frac{m}{n\,q}$: perciò le frazioni si dividono, rovesciando la frazione divisore e poscia moltiplicandole tra loro. Onde $\frac{3a^2b}{2c - m} : \frac{de}{4n + p} = \frac{3a^2b}{2c - m} \times \frac{4n + p}{de} = \frac{12a^2bn + 3a^2bp}{2cde - dem}$ ecc.

CAPO III.

Dei Problemi e delle Equazioni in generale.

194. Una delle applicazioni principali dell'Algebra è la soluzione de' *Problemi*, cioè *di quelle proposizioni nelle quali si progetta di scoprire qualche quantità incognita col mezzo di quantità conosciute*. Quindi ne segue che nei problemi suscettibili di soluzione nè tutto deve essere noto, altrimente mancherebbe l' oggetto della domanda, nè tutto deve essere ignoto, al-

trimente ogni ricerca sarebbe vana. In essi adunque devono essere enunciate *quantità cognite* che si chiamano *i dati* del problema, e s' indicano colle prime lettere dell'alfabeto a, b, c, ecc. e *quantità incognite*, che si esprimono colle ultime u, x, y, z, (N.° 115). Le *relazioni* che passano fra le quantità cognite ed incognite chiamansi *le condizioni* del problema, e sono que' mezzi i quali col sussidio del calcolo ci guidano con sicurezza al ritrovamento di ciò che si cerca, e distinguono *i problemi dagli enigmi*. L' arte poi di sciogliere i problemi col mezzo dell' algebra, dicesi *analisi matematica*.

195. Sia questo problema: *Quale sarà il numero che aggiunto all'*8 *dia* 15? Chiamo x questo numero; la somma di esso pel dato del problema stesso dovendo uguagliar 15, si avrà:

$$x + 8 = 15.$$

Una tale espressione è ciò che chiamasi *equazione*, la natura della quale è che una o più quantità riunite sieno eguali ad una o più altre. Il complesso delle quantità che precedono il segno di eguaglianza, si chiama il *primo membro* dell' equazione, e *secondo membro* il complesso di tutte le altre che lo seguono. E se tanto l' uno che l' altro membro fossero formati dalle medesime quantità, allora l' equazione si direbbe più propriamente *identità*, così $4 + 5 = 4 + 5$; come pure $x + b = x + b$, sono due identità.

196. Un' equazione, che oltre le quantità delle quali si conosce il valore, contenga una o più incognite, rappresenta sempre la traduzione di un problema. Quindi la varietà infinita de' problemi, che posson esser proposti porta necessariamente ad un' infinita varietà di equazioni. Queste diverse forme di equazioni sono state divise dagli analisti in varie *specie* o *gradi*, i quali prendono il nome del maggiore esponente che ha l' incognita se l' incognita è una sola; e se le incognite sono più dal numero più grande di dimensioni (N.° 104), che costituiscono in uno stesso termine le sole incognite. Avvertendo però che se qualche incognita entri nell' equazione come denominatore, prima di giudicare del grado di quell' equazione, converrà togliere quel denominatore come si dirà in seguito.

197. Perciò saranno di *primo grado* le equazioni seguenti: $ax + b = c$, $a\,x + by + cz = d$, $ax + bx + r = s$. Saranno di *secondo grado* le equazioni $x^2+bx+c=d$, $xy+bx+dy=f$, $x^2+y=r$. Saranno di *terzo grado* le equazioni $xy^2+xy+y^2+c=f$, $x^3+x^2+d=m$, $y^2+x^3+xy=d$, $xyz+z^2+y+x^2=a$; e così via via. In genere poi le equazioni $x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+\dots\dots+rx+p=c$, $x^{n-1}y+cx^{n-4}y^2+\dots\dots+by^{n-1}x=a$ saranno del *grado ennesimo*.

198. Un' equazione si dice *ordinata*, quando il primo termine di essa non abbia altro coefficiente, che l' unità positiva, e tutti i termini siano messi nel primo membro, disposti in modo che gli esponenti dell' incognita vadano di mano in mano decrescendo fino al termine tutto noto, e nell' altro membro si scriva lo zero. Così $x^2+ax+b=0$, come pure $x^3+ax^2+bx+c=0$ sono equazioni ordinate. Dicesi poi *completa* l' equazione, quando in essa sieno espressi tutti i termini, ossia tutte le potenze dell' incognita dalla massima fino alla minima, cioè fino al termine tutto cognito. E se l' equazione fosse *incompleta* invece dei termini che mancano si mette talvolta il segno $*$. Perciò l' equazione $x^3+bx--c=0$, che è incompleta, si scriverebbe $x^3*\ +bx-c=0$.

199. Perchè un problema qualunque sia solubile, fa d' uopo che esso contenga nel suo enunciato tante condizioni, quante sono le incognite; vale a dire che tradotto in linguaggio algebrico, o, come dicono alcuni, *intavolato* che sia, somministri tante equazioni quante sono le incognite da determinarsi. Tali problemi chiamansi *determinati*. Se al contrario i problemi somministrino un numero minore di equazioni che d' incognite, si dicono *indeterminati*; e *più che determinati* poi si direbbero, se presentassero un maggior numero di equazioni che d' incognite. La considerazione dei problemi della prima specie appartiene all' *analisi determinata*. Le altre due specie di problemi formano un altro ramo di analisi matematica, detta *analisi indeterminata*. Le equazioni si dicono anch' esse *determinate* se il loro numero eguaglia il numero delle incognite da determinarsi; *indeterminate*, se il numero di tali incognite superi quello delle stesse equazioni.

200. Si dice che un' equazione è *risoluta*, quando si arriva ad avere l' incognita, di cui si cerca il valore, sola, positiva, senza coefficiente, senza esponente e senza divisore in un membro, mentre nell' altro si hanno tutte le quantità conosciute. Infatti è chiaro che l' incognita cessa di esser tale dal momento che dessa è uguale ad un risultato composto tutto di quantità cognite.

201. Il metodo per giugnere alla risoluzione delle equazioni dipende da questo principio, cioè: *Se con identiche o eguali quantità si eseguiscono le medesime operazioni sopra quantità eguali, i risultati sono anch' essi eguali.* Da ciò si deduce:

1.° *Che aggiugnendo o levando una stessa od eguale quantità a quantità eguali, le somme o i resti sono eguali.*

2.° *Che moltiplicando o dividendo quantità eguali per una stessa o per eguali quantità, i prodotti o i quoti che ne emergono, sono eguali.*

Un tale principio non abbisogna di prova, essendo per se stesso evidente, e potrà verificarsi in qualunque equazione, come in questa $12=8+4$, nella quale sommato o sottratto il quattro in ambidue i membri, o moltiplicati questi e divisi per lo stesso 4, i rapporti che ne nascono sono sempre uguali fra loro, benchè ne venga alterata l' espressione.

Della risoluzione delle equazioni determinate di primo grado ad una sola incognita.

202. Sia l' equazione $x+a-b=c$, nella quale la quantità x è la sola incognita, e le altre tre a, b, c sono cognite, e sia per esempio $a=20$; $b=10$; $c=50$. Dietro il principio stabilito, si aggiunga primieramente ad ambidue i membri la quantità b, e si avrà:

$$x+a-b+b=c+b,$$

ossia riducendo

$$x+a=c+b.$$

Sottraggasi ora da ambidue i membri la quantità a, e si otterrà:

$$x+a-a=c+b-a, \text{ ossia } x=c+b-a.$$

In quest' ultima equazione il secondo membro è tutto cognito; dunque sarà cognito altresì il primo, cioè il valore di x; poichè sostituendo ad a, b, c, i loro rispettivi valori, si avrà $x=50+10-20$; $x=40$, e l' equazione sarà risoluta.

203. Ora paragonando la proposta equazione

$x+a-b=c$ coll' ultima $x=c+b-a$

si conoscerà facilmente che, mediante la somma e la sottrazione, le due quantità a e b sono state trasportate dal primo nel secondo membro con segno contrario a quello che avevano nel primo. Potremo quindi stabilire la prima regola per la soluzione delle equazioni, cioè che: *salva l' equazione, qualunque termine può trasportarsi da un membro nell' altro purchè gli si cambi il segno.*

Con questa regola, data l' equazione $x+8=15$, si trova immediatamente $x=15-8$; $x=7$. E quest' altra $x+10-8=18$ darà: $x=18-10+8$; $x=16$.

204. Supponiamo ora che la relazione fra l' incognita x e le cognite a, b, c sia espressa dall' equazione

$$\frac{ax}{b}=c.$$

Rappresentando ax un dividendo, b un divisore, c il quoto, secondo la teoria della divisione (N.° 51) avremo $ax=bc$, cioè il quoto moltiplicato pel divisore eguale al dividendo. In questa equazione poi $ax=bc$ dividendo ambidue i membri per a, otterremo:

$$\frac{ax}{a}=\frac{bc}{a}, \text{ ossia } x=\frac{bc}{a};$$

ma il secondo membro $\frac{bc}{a}$ è tutto cognito; sarà dunque cognita la x, e l' equazione sarà risoluta; onde facendo $a=4$, $b=8$, $c=5$, avremo:

$$x=\frac{8.5}{4}, \text{ cioè } x=\frac{40}{4}=10.$$

205. Facendo ora il paragone della equazione proposta $\frac{ax}{b}=c$ colla risoluta $x=\frac{bc}{a}$, potremo dedurne una seconda regola per la risoluzione delle equazioni, vale a dire che: *salva l' equazione, il termine che è divisore in un membro si può trasportare nell' altro per moltiplicatore, e il termine che moltiplica per divisore.* Quindi l' equazione $\frac{5x}{2}=20$, dà tosto $x=\frac{20.2}{5}=\frac{40}{5}=8$; e l' altra $\frac{ax}{c}+b=q$ darà $x=\frac{qc-bc}{a}$.

206. I ragionamenti precedenti e le regole da essi dedotte presentano il mezzo per liberare l' incognita dalla quantità colla quale è combinata coll' addizione o sottrazione,

colla moltiplica o divisione. Dovendo poi verificare un' equazione qualunque per un dato valore della x, è chiaro che se risoluta che sia l' equazione, in luogo della incognita si sostituisca il valore trovato, i due membri dell' equazione diverranno identici; così nell' equazione $x+7-4=9$, essendo $x=9-7+4=6$, se metterò 6 in luogo della x, si avrà:

$$6+7-4=9, \text{ cioè } 9=9.$$

Similmente nell' altra $\frac{4x}{2}=14$, ossia $x=\frac{28}{4}=7$,

sostituendo avremo $\frac{4.7}{2}=14$, cioè $14=14$.

Da tutto ciò si può conchiudere, che la risoluzione di un' equazione consiste *nel trovare un numero che sostituito nella equazione in luogo dell' incognita, renda i due membri di essa identici*, ovvero, come dicono gli analisti, *soddisfi all' equazione.*

207. Se l' incognita si trovasse sparsa in più termini dell' equazione, primieramente si trasporteranno nel primo membro tutti i termini che la contengono, ed i termini noti nel secondo, cangiando i segni rispettivi alle quantità trasportate (N.° 203). Ciò fatto si separa l' incognita da tutti i termini, come fattore comune, e infine si divide tutta l' equazione pel coefficiente dell' incognita stessa (N.° 205), e in tal maniera si avrà il valore dell' incognita.

Sia da risolvere l' equazione $5x-6=2x+2$ che può considerarsi come la traduzione algebrica di questo problema: trovare un numero tale che il suo triplo diminuito di 6 sia eguale al suo doppio accresciuto di 2. Per risolverla porto nel primo membro le $2x$, e nel secondo il 6; cangiando i segni, avrò:

$$5x-2x=6+2,$$

ossia riducendo

$$x=8.$$

Se invece di trasportare $2x$ dal secondo nel primo membro e -6 dal primo nel secondo, avessi trasportato $5x$ dal primo nel secondo, e $+2$ dal secondo nel primo, avrei ottenuto:

$$-6-2=2x-5x, \text{ ossia } -8=-x,$$

cioè un risultato negativo in ambidue i membri, ma che deve essere il medesimo col primo. Per convincermi che sia tale moltiplico tutta l'equazione per -1, e senza alterar l'equazione (N.° 201, 2.°), ottengo un risultato positivo $6+2=x$, cioè $8=x$ come prima. Da ciò si ricava che: *si possono cangiare tutti i segni in ciascun termine di un'equazione senza alterarne l'eguaglianza*, essendo la stessa cosa cambiare i segni ai termini di una equazione, che moltiplicarli per -1.

208. Si risolva l'equazione $ax-b=cx+d$.

Trasportando alla maniera insegnata si avrà:

$$ax-cx=b+d.$$

Essendo poi $ax-cx=(a-c)x$ (N.° 172), sarà ancora $(a-c)x=b+d$, e finalmente $x=\frac{b+d}{a-c}$ (N.° 205).

209. Sia proposta l'equazione $b-ax-c=x-d$ da risolversi:

Trasportando si avrà $-ax-x=-d-b+c$, che moltiplicata per -1 si trasformerà così:

$$ax+x=d+b-c.$$

In questa poi separando il fattor comune x, si avrà: $(a+1)x=d+b-c$, e in fine $x=\frac{d+b-c}{a+1}$.

210. Se i membri di un'equazione abbiano un moltiplicatore o un divisore comune, questo può sopprimersi, giacchè moltiplicando o dividendo quantità eguali per lo stesso numero, non si altera la loro eguaglianza (N.° 201, 2.°). Per tanto se un'equazione da risolversi contiene dei termini frazionari, prima di tutto è d'uopo ridurre tutte le quantità che la compongono allo stesso denominatore, e quando questo denominatore sarà fatto comune ai due membri dell'equazione, allora esso si sopprimerà, e poscia si risolverà l'equazione alla maniera insegnata.

Sia l'equazione $\frac{x}{a}-b=\frac{c}{d}-x+\frac{m}{n}$; riducendo prima allo stesso denominatore tutti i termini di essa, avremo: $\frac{dnx-abdn}{adn}=\frac{acn-adnx+adm}{adn}$, e sopprimendo il divi-

sore comune si avrà:

$$dnx-abdn=acn-adnx+adm;$$

ora separando i termini cogniti dagli incogniti si ha:

$$dnx+adnx=acn+adm+abdn;$$

e raccogliendo il fattor comune x, sarà:

$$(dn+adn)x=acn+adm+abdn,$$

e finalmente dividendo pel coefficiente di x, si ottiene:

$$x=\frac{acn+adm+abdn}{dn+adn}.$$

211. Sia anche da risolvere l'equazione

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=x+1$$

Riducendo allo stesso denominatore le quantità dell'uno e dell'altro membro, e togliendo il divisore comune, sarà:

$$12x+8x+6x=24x+24;$$

riducendo e trasportando si avrà:

$$2x=24;\ \text{ed}\ x=\frac{24}{2}=12.$$

Coi principii superiormente stabiliti e colle regole insegnate si potrà risolvere una qualunque equazione di primo grado ad una sola incognita per quanto complicata essa sia.

212. Allorchè il problema è messo in equazione, la soluzione dell'equazione, che lo esprime, porta seco la stessa risoluzione del problema; e trovato il valore dell'incognita, deve, se è giusto, soddisfare alle condizioni del problema, e sostituito all'incognita, rendere, come si disse, identica la equazione del problema stesso (N.° 202).

213. Ma la maggiore difficoltà s'incontra appunto nel tradurre in equazione il problema, nel trovare cioè il rapporto di eguaglianza fra le quantità cognite, od i dati del problema, e l'incognita. Per giugnere a questo non si può dare altra regola che la seguente. Si esamini attentamente lo stato della questione per ben comprenderne il senso; e si fissi prima d'ogni altra cosa, quale è la quantità incognita, o la x, che si cerca: poi *si facciano subire alla* x *tutte le operazioni*,

che si faranno sul numero cercato, quando dopo averlo trovato si vorrà verificare se soddisfa effettivamente al quesito; e ne escirà così l'equazione richiesta. Sia domandato p. e. quale è il debito di un uomo che dopo averne pagato la metà una volta, ed il terzo un' altra volta, rimane debitore di scudi 120. Come è chiaro l' incognita x è questo debito che si cerca. Supponiamo p. e. che avessimo già trovato questo debito, e che fosse eguale a c: per verificare l'esattezza del valore trovato, dall'intero debito c ne sottrarremmo la quarta parte, poi la terza, ed il residuo dovrebbe essere eguale a 120.

Dunque l' operazione di verifica sarebbe questa $c - \frac{c}{4} - \frac{c}{3} = 120$: e questa sarà pure l'equazione del problema mettendo al luogo di c che abbiamo nella verifica supposto cognito, la x che è incognita: sarà cioè l' equazione richiesta $x - \frac{x}{4} - \frac{x}{3} = 120$.

Solamente l' esercizio e l' attenta riflessione possono fare acquistare ai giovani quell' avvedutezza che è necessaria a mettere sempre in pratica rettamente e con facilità quella regola che si è assegnata per tradurre in equazione i problemi. Porremo qui alcuni esempi di problemi colle loro soluzioni, che i giovani per loro esercizio cercheranno prima trovare da sè.

214. *Problema* 1.° Un Generale sostenne un combattimento in cui $\frac{1}{3}$ de' suoi soldati restò morto sul campo, $\frac{1}{4}$ fu fatto prigioniero, e $\frac{1}{5}$ vergognosamente fuggì. Dopo questo, rimasero al Generale 1300 soldati solamente; cercasi quanti ne aveva prima della battaglia.

Soluzione. Chiamando x il numero incognito di tutti i soldati che formavano l' esercito; $\frac{x}{3}$ esprimerà il numero dei morti, $\frac{x}{4}$ i prigionieri ed $\frac{x}{5}$ i fuggiti. Ora dovendo per le condizioni del problema la somma degli uccisi, dei

prigionieri e dei fuggiti più i 1300 rimasti, costituire il totale dell'esercito, l'equazione del problema sarà:

$$x = \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 1300.$$

Per risolvere questa equazione riduco tutti i suoi termini allo stesso denominatore, ed avrò:

$\frac{60\,x}{60} = \frac{20\,x + 15\,x + 12\,x + 78000}{60}$, ossia sopprimendo il divisore comune 60, e

sommando $\quad 60\,x = 47\,x + 78000;$

trasportando $\quad 60\,x - 47\,x = 78000;$

riducendo $\quad 13\,x = 78000;$

e dividendo pel coefficiente di x, sarà:

$$\frac{13\,x}{13} = \frac{78000}{13}, \text{ ossia } x = \frac{78000}{13} = 6000.$$

Dunque l'esercito del Generale era di 6000 soldati; la terza parte dei quali, cioè 2000, morti; la quarta parte, cioè 1500, fatti prigionieri: la quinta parte, cioè 1200, fuggiti, e 1300 rimasti, che tutti insieme formano appunto 6000.

215. *Problema* 2.° Uno ha delle monete da 5 e da 10 paoli l'una, e vuol pagare a un suo creditore 130 paoli con sole 18 monete, quante ne dovrà prendere di quelle da 5 paoli, e quante di quelle da 10?

Soluzione. Sia x il numero delle monete da 10 paoli che egli prende. Poichè l' intera somma deve formarsi con 18, il numero delle monete da 5 paoli sarà $18 - x$. Pertanto la somma dei paoli delle due specie di monete sarà espressa da $10 \, . \, x$ e da $(18 - x)\,5$; onde l'equazione sarà questa:

$$10\,x + (18 - x)\,5 = 130;$$

eseguendo la moltiplica si avrà:

$10\,x + 90 - 5\,x = 130$, cioè riducendo e trasportando $\quad 5\,x = 130 - 90 = 40$, e dividendo

$$\frac{5\,x}{5} = \frac{40}{5};\ x = 8.$$

Devono dunque prendersi 8 monete da 10 paoli, che fanno 80 paoli, e $18 - 8$, ossia 10 da 5 paoli, che fanno

50 paoli, i quali, sommati cogli 80 delle prime, formano la somma di 130 paoli, come voleva il problema.

216. *Problema 3.°* Uno compra x braccia di panno a ragione di m scudi per ogni n braccia, e le rivende a ragione di p scudi per ogni q braccia, guadagnando h scudi in tutto; si domanda il numero x braccia di panno.

Soluzione. Con scudi m avendosi braccia n, e sapendo che si ha il prezzo di ciascun braccio col dividere l'importo totale pel numero delle braccia, la spesa fatta verrà espressa da $\frac{m}{n} \times x$. Così pure essendosi rivenduto scudi p ogni numero di braccia q, la somma ricevuta sarà espressa da $\frac{p}{q} \times x$, giacchè tanto nella compra che nella vendita il numero x braccia di panno è lo stesso. Onde la somma ricavata dalla vendita diminuita dell'importo della compra, sarà il guadagno fatto h, e si avrà perciò la seguente equazione:

$$\frac{p}{q} \times x - \frac{m}{n} \times x = h$$

cioè eseguendo la moltiplica si avrà:

$$\frac{px}{q} - \frac{mx}{n} = h; \quad \text{togliendo i divisori}$$

$$npx - mqx = hnq, \quad \text{cioè separando}$$

$$(np - mq)\,x = hnq; \text{ onde } x = \frac{hnq}{np - mq}.$$

Volendo ora applicare il problema a un caso concreto, si supponga $p = 21$; $q = 6$; $m = 24$; $n = 8$; $h = 50$; $x = 100$. Facendo ora la sostituzione in tutta l'equazione, si otterrà:

$$100 = \frac{50 . 8 . 6}{8 . 21 - 24 . 6} = \frac{2400}{24} = 100.$$

E poichè la compra fu $\frac{m}{n}$, e la vendita $\frac{p}{q}$, sostituendo nell'una e nell'altra, si avrà: Compra $\frac{24}{8} = 3$: Vendita $\frac{21}{6} = 3\frac{1}{2}$; perciò avrà guadagnato mezzo scudo ossia baiocchi 50 per braccio.

Analisi generale delle equazioni e dei problemi di primo grado ad una incognita sola.

217. Qualunque equazione di primo grado con una sola incognita può sempre ridursi alla semplicissima formola $Ax = B$, in cui A e B sono numeri interi positivi o negativi. Sia p. e. l'equazione $\frac{x}{a} - \frac{b}{c} + x = m + \frac{x}{n}$. Riducendo l'uno e l'altro membro allo stesso denominatore, avrò:

$$\frac{cnx - abn + acnx}{acn} = \frac{acmn + acx}{acn};$$

sopprimendo il divisor comune acn, sarà:

$$cnx - abn + acnx = acmn + acx,$$

trasportando

$$cnx + acnx - acx = acmn + abn,$$

e separando il fattor comune x, sarà:

$$(cn + acn - ac)\,x = acmn + abn.$$

Ora ponendo il coefficiente delle x, cioè $cn + acn - ac = A$, e le quantità cognite del secondo membro $acmn + abn = B$, si avrà $Ax = B$.

218. Ottenuta che si abbia la risoluzione finale di una equazione, essa ci farà conoscere quando il valore della incognita sia determinato, indeterminato, od assurdo; vale a dire ci mostrerà se il problema, di cui è la traduzione, sia solubile, o contenga delle condizioni impossibili a verificarsi. Dalle condizioni di un problema tradotte in linguaggio algebrico, risulti p. e. la seguente equazione:

$$ax + b = cx + d.$$

Operando su di essa nel modo insegnato si ha:

$$ax - cx = d - b \ (A), \ (^*)$$

quindi separando $(a - c)\,x = d - b$, e finalmente

$$x = \frac{d - b}{a - c} \ (B).$$

(*) Nota. *Questo* (A) *che si è unito a questa equazione non è che un simbolo per indicare l'* equazione *stessa. Onde quante volte si troverà in questo paragrafo l'* equazione (A) *si intenderà questa equazione stessa. Lo stesso dicasi del* (B) *che si trova subito dopo, e di altri simili simboli che occorreranno in appresso.*

In questa equazione si supponga:

1.° Che sia $d > b$, $a >$ di c. In questo caso è chiaro che il valore dell' incognita x sarà positivo, e il problema sarà anch' esso determinato e perciò suscettibile di soluzione.

2.° Che sia $d = b$; in questo caso qualunque sia il valore di a e c, escluso $a = c$, l' equazione *(A)*, cioè $ax - cx = d - b$, diverrà $ax - cx = 0$, ovvero $(a - c)x = 0$. Ora perchè il prodotto $(a - c)x$ sia nullo, può essere tanto x, quanto $a - c = 0$; ma siccome per ipotesi $a - c$ non può annullarsi, non essendo $a = c$, quindi ne segue che debba essere $x = 0$, e per questo solo valore il problema può dirsi determinato.

3.° Che sia $a < c$, e $d < b$; in questo caso pure è chiaro, che il valore dell'incognita x sarà positivo, ed il problema sarà determinato.

4.° Che sia $a > c$, e $d < b$; oppure $a < c$, e $d > b$. L'incognita x in questa supposizione avrà sempre un valore negativo. Ora questo valore negativo dell' incognita, che soddisfa all' equazione, non soddisfa spesso alle condizioni dei problemi, escludendo essi tante volte per loro natura le soluzioni negative. Valga un esempio: Cercasi l' età di Tizio, sapendosi che dessa supera di un anno la somma degli anni di tre suoi fratelli, de' quali il primo ha la metà, il secondo ha il terzo, ed il terzo ha il quarto degli anni di Tizio stesso. È chiaro che un valore negativo non soddisfarebbe al problema. Eppure l'equazione del problema è $x - \frac{x}{2} - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 1$, la quale dà $x = -12$; che è appunto il caso di una soluzione negativa ad un problema che per sua natura l' esclude.

A conoscere quello che voglia dire in questi casi una soluzione negativa, basta il riflettere, che la soluzione di un problema in Algebra, non è altro che una conseguenza delle condizioni poste nell' enunciato del problema istesso; e quindi se la soluzione è esclusa dalla sua natura istessa, vorrà dire che il problema, *come è stato proposto*, contiene qualche condizione che è impossibile a verificarsi.

Abbiamo detto *come è stato proposto:* perchè la soluzione negativa, quantunque non risponda al proposto problema, mostra però con quali condizioni dovrebbe egli proporsi

perchè avesse una soluzione possibile. Di fatti nell' equazione p. e. $x - \frac{x}{2} - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 1$ che esprimeva il problema or ora accennato, si cangi il segno alla x, ella diverrà $-x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 1$, da cui ne deriva $x = 12$ valore positivo. Ora l' equazione così cangiata è l' espressione del seguente problema:

Tizio ha tre fratelli, il primo de' quali ha la metà, il secondo ha il terzo, ed il terzo ha il quarto dell' età di Tizio stesso; cercasi quanti anni abbia Tizio, sapendosi che la somma degli anni de' suoi fratelli supera di un anno l' età sua. Come è chiaro il problema è lo stesso dell' antecedente, con questa sola modificazione, che nel primo l' età di Tizio superava di *uno* la somma degli anni de' fratelli, nel secondo, a rovescio, questa somma supera di *uno* l' età di Tizio. Nel primo caso il problema non era risolvibile; lo è nel secondo. Di qui si vede che qualora un problema, il quale per sua natura esclude una soluzione negativa, conduce tuttavia a tale equazione, la quale non ammette altro che valori negativi dell' incognita, basta cangiare nell' equazione i segni all' incognita, basta cioè *modificare le condizioni del problema in tal guisa che cangino di segno i termini, che contengono l' incognita*; e già si ha come debba essere proposto il dato problema, onde sia risolvibile. Di qui è manifesto ancora un sommo pregio dell' Algebra, di indicare cioè, non solo quando sia che un problema non è risolvibile, ma di più quale cangiamento debba farsi all' enunciato perchè lo divenga.

5.° Che sia $a = c$, qualunque sia per essere d rispetto a b, eccetto $d = b$. In questo caso l' equazione *(A)* diverrà: $0 = d - b$, la quale è per sua natura impossibile, perchè lo zero non può eguagliare nè una quantità positiva, nè una quantità negativa. Parimente nella equazione *(B)* il valore dell' incognita x si presenta sotto la forma $\frac{d - b}{0} = \infty$ (N.° 169), e con ciò l' Algebra indica che il problema contiene condizioni assurde, che è quanto dire in altri termini, che qualunque valor finito si dia all' incognita x, esso non potrà mai verificare l' equazione, e soddisfare perciò al problema. Di fatti è assurdo che possa aversi l' equazione numerica

$$5x+5=5x+7$$

quale diverrebbe la data nella supposizione che $d=7$, $b=5$, ed $a=c=5$; poichè risolvendola, si avrebbe: $5x-5x=7-5$, cioè $0=2$, il che ripugna.

6.° Che finalmente sia ad un tempo $d=b$, ed $a=c$. In tale ipotesi l' equazione (A) diviene $ax+b=ax+b$, ovvero $ax-ax=b-b$, cioè $0=0$, la quale è un'identità, e potrà perciò verificarsi, qualunque sia il valore della x, positivo o negativo, intero o fratto, ed anche razionale o irrazionale, reale o immaginario, dei quali parleremo altrove. Pertanto i problemi, che conducono ad equazioni di simil fatta, saranno indeterminati. L' equazione addotta (B) si presente sotto la forma $x=\frac{0}{0}$, e questo appunto è il simbolo di cui si servono gli algebristi per denotare che il problema è indeterminato.

219. Qui però fa d'uopo avvertire, che l'espressione $\frac{0}{0}$ non sempre denota essere il problema indeterminato. Imperocchè nei termini di tali frazioni, che per valori particolari divengono $\frac{0}{0}$, esiste talvolta un fattor comune, tolto il quale, nella medesima ipotesi si ha un valor indeterminato.

1.° Sia per esempio l' equazione $x=\frac{a^2-b^2}{a-b}$.

Supponendo $a=b$, si ha $x=\frac{0}{0}$; ma essendo $\frac{a^2-b^2}{a-b}$ $=\frac{(a-b)(a+b)}{a-b}$, se si tolga il fattor comune $a-b$, si avrà $x=a+b$, e quindi nella stessa ipotesi di $a=b$, risulterà $x=2a$.

2.° Se si abbia $x=\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}$, sarà $x=\frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)(a-b)}$ e tolto il fattor comune $a-b$ dal numeratore e dal deno-

minatore, si otterrà $x=\frac{a+b}{a-b}$, e supposto $a=b$, risulterà $x=\frac{2a}{0}=\infty$, mentre prima sarebbe risultato $x=\frac{0}{0}$.

3.° Se si abbia $x=\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$ sarà $x=\frac{(a-b)(a-b)}{(a-b)(a+b)}$, e tolto il fattore comune $a-b$, si otterrà $x=\frac{a-b}{a+b}$, che sempre nell' ipotesi di $a=b$ riesce $x=\frac{0}{2a}=0$ mentre in questa ipotesi prima di togliere il fattore comune riesciva $x=\frac{0}{0}$.

4.° Se finalmente sia $x=\frac{d-b}{a-c}$, supposto che $d=b$, e $a=c$, sarà necessariamente $x=\frac{0}{0}$, non potendosi levare alcun fattore comune.

Da tutto ciò si può conchiudere, che l' incognita x di un'equazione sotto forma frazionaria per certi dati valori particolari può presentarsi sotto quattro forme diverse, cioè: $\frac{M}{N}, \frac{0}{N}, \frac{M}{0}, \frac{0}{0}$.

I vantaggi che risultano dall'analisi instituita sui valori che può avere l' incognita di un' equazione, si conosceranno meglio nella soluzione de' problemi, e nella applicazione dell' Algebra alla Geometria.

Risoluzione delle equazioni e dei problemi di primo grado a due o più incognite.

220. Se sieno due o più le incognite di un'equazione di 1.° grado, essa si riduce alla formola $Ax+By+Cz.....=P$, nella quale A, B, C, ecc....... P rappresentano numeri interi positivi, o negativi. Se le incognite sieno due sole x ed y, l'equazione sarà $Ax+By=P$: se fossero tre x, y, z, l'equazione potrebbe rappresentarsi con $Ax+By+Cz=Q$; se

fossero quattro v, x, y, z si avrebbe $Av+Bx+Cy+Dz=R$, e così successivamente.

Sia p. e. l' equazione $\frac{c}{a}+\frac{x}{b}+\frac{y}{d}=ax+y+\frac{m}{n}$.

Riducendo tutto allo stesso denominatore, e levando il denominatore stesso si ottiene $bcdn+adnx+abny=a^2bdnx+abdny+abdm$; e trasportando, e separando i moltiplicatori dell'incognita si ottiene:

$$x(adn-a^2bdn)+y(abn-abdn)=abdm-bcdn.$$

Ora facendo $A=adn-a^2bdn$, $B=abn-abdn$, $P=abdm-bcdn$ l' equazione si riduce alla formola superiore $Ax+By=P$.

Con questo stesso metodo vi si ridurrebbe un' equazione a tre, a quattro ecc. incognite. Ora ci occuperemo della risoluzione di queste equazioni di 1.° grado, a più incognite, supponendo sempre che tante sieno le equazioni date, quante sono le incognite

221. La risoluzione delle equazioni a più incognite ha per iscopo di ridurre più equazioni ad una sola con un'incognita sola. Ciò poi si ottiene col metodo chiamato di *eliminazione*, il quale consiste appunto nell'eliminare o togliere successivamente la medesima incognita dalle equazioni, finchè si giunga ad avere un' incognita ed una equazione sola, come meglio si conoscerà in pratica.

222. Sieno le due equazioni

$$x+y=a$$

$$x-y=b$$

che sono la traduzione algebrica di questo problema: *trovare due numeri la cui somma sia* a, *e la differenza* b.

Dietro il principio stabilito (N.° 201), potremo eliminare la y sommando insieme le due equazioni, ed eliminare la x sottraendo la seconda dalla prima; avremo dunque:

sommando $2x=a+b$, ed $x=\frac{a+b}{2}$ (N.° 205);

sottraendo $2y=a-b$, ed $y=\frac{a-b}{2}$.

Sostituendo i due valori trovati nelle proposte equazioni in luogo delle incognite x ed y, si avrà:

1.° $\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}=a.$

2.° $\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}=b.$

223. Da queste due equazioni si deduce il principio generale che: *la semisomma di due quantità più la semidifferenza, eguaglia la quantità maggiore; e la semisomma meno la semidifferenza, eguaglia la quantità minore.* Sieno p. e. le due quantità 10 e 8, di cui la semisomma è 9, e la semidifferenza è 1. Se unisco la semisomma 9 colla semidifferenza 1, avrò 10, cioè la maggiore delle due quantità; se dalla semisomma 9 levo la semidifferenza 1, avrò 8, cioè la minore delle due quantità proposte.

224. Se le equazioni da risolvere abbiano qualche incognita accompagnata da coefficiente, come per esempio:

$$x+y=a$$

$$mx-ny=b,$$

primieramente moltiplico tutti i termini della prima per m, ed ottengo

$$mx+my=ma;$$

sottraggo da questa la seconda, ed ho

$$my+ny=ma-b,$$

e risolvendo questa, ottengo:

$$y=\frac{ma-b}{m+n}.$$

Moltiplico di nuovo tutti i termini della prima per n, ed ottengo

$$nx+ny=na.$$

A questa aggiungo la seconda, ed avrò:

$$nx+mx=na+b,$$

e da questa si ricava:

$$x=\frac{na+b}{n+m}.$$

225. Sieno finalmente le equazioni

$$px+qy=a$$
$$mx+ny=b.$$

Moltiplicando i termini della prima per m, e quelli della seconda per p, otterremo:

$$mpx+mqy=ma$$
$$mpx+npy=pb,$$

e sottraendo la seconda dalla prima, si ha un'equazione colla sola incognita y, cioè:

$$mqy-npy=ma-pb,$$

e da questo si ottiene

$$y=\frac{ma-pb}{mq-np}. \quad (A)$$

Ora moltiplicando i termini della prima equazione per n, e quelli della seconda per q, si avrà:

$$npx+nqy=na$$
$$mqx+nqy=qb;$$

Sottraendo la seconda dalla prima, risulterà un'equazione colla sola incognita x, cioè:

$$npx-mqx=na-qb,$$

dalla quale si ricava

$$x=\frac{na-qb}{np-mq}. \quad (B)$$

226. Dalla risoluzione delle equazioni antecedenti si comprende facilmente che l'eliminazione di un'incognita da due equazioni si ottiene: *moltiplicando una delle equazioni pel coefficiente che ha l'incognita da eliminarsi nell'altra, e viceversa; poscia sommando le due equazioni, se l'incognita che vuole eliminarsi ha diverso segno nelle due equazioni, e sottraendo l'una dall'altra equazione, se l'incognita ha lo stesso segno.*

227. Mediante i valori *(A)* e *(B)* superiormente ottenuti (N.° 225), si potranno risolvere tutte le equazioni numeriche di primo grado a due incognite col sostituire in luogo delle quantità p, q, a, m, n, b i numeri corrispondenti.

Sieno p. e. le due equazioni

$$2x+3y=19$$
$$5x-7y=4.$$

Dal paragone di queste colle generiche (N.° 225) si avrà:

$$p=2;\ q=3;\ a=19;\ m=5;\ n=-7;\ b=4.$$

Quindi sarà:

$$y=\frac{5.19-2.4}{5.3+7.2}=\frac{95-8}{15+14}=\frac{87}{29}=3.$$

$$x=\frac{-7.19-3.4}{-7.2-5.3}=\frac{-133-12}{-14-15}=\frac{-145}{-29}=5.$$

228. Col metodo di eliminazione, che noi esponemmo, si potranno risolvere altresì le equazioni di primo grado a tre, a quattro ecc. incognite,

Sieno p. e. da risolvere le tre seguenti equazioni

1.ª $ax+by+cz=d$

2.ª $mx+ny+pz=q$

3.ª $hx+ky+rz=t.$

Si elimini la x dalle due prime equazioni. Si moltiplichi perciò (N.° 226) la 1.ª per m, e la 2.ª per a, e si avranno le due equazioni

$$amx+bmy+cmz=dm$$
$$amx+any+apz=aq,$$

sottratta dalla prima di queste due la seconda, si ottiene un'equazione a due incognite della forma $Ay+Bz=C$.

Poscia si elimini dalla 1.ª e dalla 3.ª delle tre date la stessa x: si moltiplichi perciò la 1.ª per h e la 3.ª per a, si avranno le due altre equazioni

$$ahx + bhy + chz = hd$$
$$ahx + aky + arz = at;$$

sottratta dalla prima di queste due la seconda, si otterrà un' altra equazione a due incognite della forma $A' y + B' z = C'$.

Risolute che avremo col metodo sopra esposto queste due equazioni a due incognite, si avrà il valore di y e di z.

Per trovare il valore di x si potrebbe dalle tre date con egual metodo eliminare una delle altre incognite; p. e. la y: ed ottenere due equazioni della forma $A''x + B''z = C''$, $A'''x + B'''z = C'''$, e quindi da queste due trarre il valore della x. In pratica però tornerà più spedito, trovati i valori di y e di z, sostituirli in una qualunque delle tre proposte, ricavando così un' equazione colla sola incognita x, la quale risoluta darà il valore della x stessa.

229. Si abbiano ancora quattro equazioni a quattro incognite

$$ax + by + cz + du = f$$
$$a'x + b'y + c'z + d'u = f'$$
$$a''x + b''y + c''z + d''u = f''$$
$$a'''x + b'''y + c'''z + d'''u = f'''$$

dalla prima e dalla seconda eliminando la x (N.° 226), si otterrà un' equazione della forma $Ay + Bz + Cu = D$: eliminando la stessa x dalla prima e dalla terza si otterrà un' altra equazione $A'y + B'z + C'u = D'$; infine eliminando la stessa x dalla prima e dalla quarta si otterrà un' ultima equazione $A''y + B''z + C''u = D''$.

Trovato, per mezzo di queste tre equazioni ottenute, il valore delle tre incognite y, z, u (N.° 228), si potrebbe determinare il valore della x, eliminando dalle quattro date con analogo metodo un' altra incognita, p. e. la y, e risolvendo (N.° 230) le tre che si otterrebbero colle tre incognite x, z, u. Tornerà però più spedito anche in questo caso sostituire in una delle quattro date i valori trovati di y, z, u, e ricavare così un' equazione colla sola incognita x, dalla risoluzione della quale sarà subito noto il valore della x stessa.

230. Come si debba agire se le equazioni, e le incognite fossero cinque, sei ecc. apparisce dal già detto, consistendo

tutto il metodo nel passare col mezzo dell'eliminazione (N.° 226) da cinque equazioni p. e. con cinque incognite a quattro con quattro incognite, quindi a tre con tre incognite ecc.

231. La teoria finora esposta serve egualmente per la soluzione delle equazioni numeriche. Sieno infatti le tre equazioni

$$1.^a \quad 6x + 4y - 5z = 4$$
$$2.^a \quad 3x - 5y + 3z = 3$$
$$3.^a \quad 4x - 3y + 2z = 7.$$

Per eliminare la x moltiplico la 1.ª per 3, e la 2.ª per 6, ed ottengo

$$18x + 12y - 15z = 12$$
$$18x - 30y + 18z = 18,$$

sottraendo la prima di queste due dalla seconda si ottiene

$$-42y + 33z = 6.$$

Moltiplico la 1.ª delle date per 4, e la 3.ª per 6, ed ottengo

$$24x + 16y - 20z = 16$$
$$24x - 18y + 12z = 42,$$

sottraendo la prima di queste due dalla seconda si ottiene

$$-34y + 32z = 26,$$

sicchè da quelle tre equazioni a tre incognite passo alle due

$$-42y + 33z = 6$$
$$-34y + 32z = 26,$$

le quali si possono semplificare dividendo i due membri della prima per 3 ed i due membri della seconda per 2, per cui si ha

$$-14y + 11z = 2$$
$$-17y + 16z = 13. \quad (M)$$

Per eliminare da queste due la z moltiplico la prima per 16, e la seconda per 11, ed ottengo

$$-224y + 176z = 32$$
$$-187y + 176z = 143,$$

sottraendo la prima di queste due dalla seconda ricavo

$$57\,y = 111, \text{ cioè } y = \frac{111}{37} = 3.$$

Riprese le due equazioni *(M)*, per eliminarne la y moltiplico la prima per 17, la seconda per 14 ed ottengo

$$-238\,y + 187\,z = 34$$
$$-238\,y + 224\,z = 182,$$

sottraendo la prima di queste dalla seconda ricavo

$$57\,z = 148, \text{ cioè } z = \frac{148}{37} = 4.$$

Per trovare più sollecitamente il valore della x, sostituisco i valori rinvenuti di y, e di z in una qualunque delle tre prime equazioni date; p. e. nella 1.ª; ed essa diviene $6x + 12 - 20 = 4$, donde $6x = 4 + 20 - 12 = 12$, quindi $x = \frac{12}{6} = 2$; onde i valori delle tre incognite sono $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$.

232. Si osservi qui di passaggio, che per eliminare la x dalla 1.ª, e dalla 2.ª delle tre equazioni proposte, bastava moltiplicare la 2.ª per 2, e quindi da essa sottrarre la 1.ª; così pure per eliminare la x dalla 1.ª e dalla 3.ª bastava moltiplicare la 1.ª per 2 e la 3.ª per 3, e poscia sottrarre dalla 3.ª la 1.ª; dacchè si riduceva sempre in questi casi la x ad avere lo stesso moltiplicatore, o coefficiente; il che solo è ciò che si richiede per ottenere poi l'eliminazione colla somma, o colla sottrazione. In generale non è rigorosamente necessario moltiplicare un'equazione per ciò che moltiplica nell'altra equazione l'incognita da eliminarsi: basta moltiplicare per tali quantità, che nelle due equazioni riescano eguali i termini, che contengono l'incognita da eliminarsi.

Il metodo di eliminazione, che abbiamo esposto finora, condurrebbe a teorie generali per avere più speditamente i valori delle incognite qualunque sia il numero delle equazioni.

Per non dilungarci di troppo non ci occupiamo di queste teorie, le quali d'altronde ai principianti riescirebbero e difficili, e poco utili pei calcoli, che sogliono ad essi occorrere, non riescendo pei calcoli più comuni nemmeno il processo proposto soverchiamente laborioso.

233. Passiamo ora ad un altro metodo per risolvere più equazioni a più incognite, il quale si chiama metodo di *sostituzione*.

Abbiansi le due equazioni

$$x + y = a \qquad 1.^a$$
$$rx + py = b \qquad 2.^a$$

dalla 1.ª si ricavi il valore di x espresso per y, si avrà

$$x = a - y,$$

questo valore si sostituisca nella 2.ª, essa diverrà

$$ra - ry + py = b,$$

equazione ad una sola incognita.

Risoluta darà $\quad y = \frac{b - ra}{p - r}.$

Per avere il valore di x, nell'equazione ottenuta $x = a - y$, si ponga al luogo di y il valore trovato; essa diverrà

$$x = a - \frac{b + ra}{p - r} = \frac{ap - ra - b + ra}{p - r}, \text{ cioè } x = \frac{ap - b}{p - r};$$

ed ecco già trovati i valori delle incognite x ed y.

Abbiansi ancora le tre equazioni

$$x - y + 2z = 12 \qquad 1.^a$$
$$3x + 2y - z = 12 \qquad 2.^a$$
$$x + y + 3z = 29 \qquad 3.^a$$

dalla 1.ª isolando la x si ricava

$$x = 12 + y - 2z; \quad (N)$$

sostituito questo valore di x nelle altre due, esse divengono

$$36 + 3y - 6z + 2y - z = 12$$
$$12 + y - 2z + y + 3z = 29$$

cioè

$$5y - 7z = -24$$
$$2y + z = 17.$$

Dalla seconda di queste due isolando la z si ha

$$z=17-2y;\quad (P)$$

sostituito questo valore nell'altra, essa diviene

$$5y-119+14y=-24,\ \text{cioè}\ 19y=95,\ \text{cioè}\ y=\frac{95}{19}=5.$$

Sostituito questo valore di y nella (P) si ha

$$z=17-10=7,$$

e sostituiti questi valori di y e di z nella (N) si ha

$$x=12+5-14=3.$$

Onde i valori delle tre incognite sono

$$x=3,\ y=5,\ z=7.$$

Dagli esempi proposti apparisce, che il metodo di *sostituzione* consiste nel trovare per mezzo di un' equazione il valore di un'incognita espresso per l' altra, o per le altre incognite se sono più di due; quindi nel sostituire questo valore nell'altra, o nelle altre equazioni. Così da quattro equazioni p. e. a quattro incognite, si passa a tre con tre incognite, quindi a due ecc. Giunti ad una equazione con un'incognita sola, si trovi il valore di questa incognita, e sostituito questo valore in una delle altre ottenute, in cui vi sia un'altra incognita, si trova anche il valore di questa; quindi in egual modo risalendo di equazione in equazione si otterranno i valori delle altre incognite.

Questo metodo alcune volte riesce in pratica più spedito dell' antecedente; ma più spesso non riesce tale, allora specialmente che introduce nei calcoli delle frazioni.

Il conoscere a colpo d' occhio quando sia che riesca più spedito, è una avvedutezza, che non può acquistarsi altro che col lungo esercizio.

234. Generalmente in pratica, per evitare la soverchia lunghezza delle operazioni, si adoperano promiscuamente ambidue i metodi. Il primo di eliminazione si adopera per passare da più equazioni a più incognite ad un' equazione con un' incognita sola: trovato poi il valore di questa incognita, per conoscere il valore delle altre, torna più spedito il metodo di sostituzione; mettendo il valore di questa incognita in una delle equazioni ottenute, in cui vi sia un' altra incognita, per quindi trarre il valore anche di questa; poi mettendo il valore trovato delle due incognite in un' altra equazione, in cui ve ne sia una terza per avere il valore di questa: e così via via finchè si è giunti a determinare tutte le incognite.

Esempio: Sieno le tre equazioni

$$\begin{aligned} 5x-5y+6z&=20\\ 3x+4y-\ z&=10\\ 2x-3y+2z&=3.\quad (T)\end{aligned}$$

Col metodo di eliminazione da queste tre si ricavino le due a due incognite

$$\begin{aligned} -35y+23z&=10\\ 5y+2z&=25.\quad (S)\end{aligned}$$

Qui pure col metodo di eliminazione si passi all'equazione ad una incognita sola: $37z=185$, donde si ricava $z=5$.

Sostituito questo valore di z in una qualunque delle due equazioni (S) si ricava $y=3$; e sostituiti questi valori di z e di y in una qualunque delle tre equazioni (T) si ricava $x=1$.

235. Alcune volte i problemi sono tali che sebbene presentino tante equazioni quante sono le incognite, non però in ciascuna equazione si trovano tutte le incognite. Anche in questo caso il valore delle incognite si trova coi metodi medesimi che abbiamo esposti; e l'unica differenza nel processo del calcolo si è, che quando si tratta di fare sparire un' incognita non occorre curarsi di quelle equazioni che non la contengono.

Sieno p. e. date le quattro equazioni

$$\begin{aligned} 2x-3y+2z&=15\quad 1.^a\\ 4u-2x&=30\quad 2.^a\\ 4y+2z&=14\quad 3.^a\\ 5y+3u&=32.\quad 4.^a\end{aligned}$$

Per eliminare la z si sottragga la 1.ª dalla 3.ª, e si otterrà $7y-2x=1$, la quale equazione insieme alla 2.ª ed alla 4.ª costituiscono tre equazioni a tre incognite.

Per eliminare la x si sottragga questa nuova equazione dalla 2.ª, si avrà $4u-7y=29$; equazione che colla 4.ª forma due equazioni a due incognite.

Da queste due eliminata la u si ottiene $41y=41$, cioè $y=1$.

Sostituito questo valore nella 4.ª e nella 3.ª si ha $u=9$, $z=5$, e messo il valore di u nella seconda si ha $x=3$.

Sieno ancora le tre equazioni

$$\begin{aligned} x+y&=7 \quad 1.^a\\ 3y+6z&=60 \quad 2.^a\\ x+4z&=35. \quad 3.^a \end{aligned}$$

Dalla 1.ª si ha $y=7-x$: sostituito questo valore nella 2.ª, essa diviene $6z-3x=39$; equazione che colla 3.ª forma due equazioni a due incognite.

Dalla 3.ª si ha $x=35-4z$: sostituito questo valore nell' ottenuta antecedente, si ha $18z=144$, quindi $z=8$.

Un tale valore sostituito nella 3.ª e nella 2.ª dà $x=3$, $y=4$.

236. Anche nella risoluzione delle equazioni a più incognite, si possono presentare i valori delle incognite sotto le quattro forme $\frac{M}{N}$, $\frac{0}{N}$, $\frac{M}{0}$, $\frac{0}{0}$; e si possono presentare valori negativi.

L'analisi fatta (N.° 218, 219) pei valori possibili dell' incognita quando è sola nell' equazione si verifica ancora allora che sono più le incognite e le equazioni.

Della risoluzione dei problemi semideterminati di primo grado.

237. Se le condizioni di un problema tradotte in linguaggio algebrico non danno che un numero di equazioni minore al numero delle incognite, allora, come abbiamo già accennato (N.° 199), il problema dicesi indeterminato; ed appellasi *semideterminato* se oltre le equazioni abbiasi il dato

che i valori delle incognite sieno *interi* e *positivi*. Daremo ora una teoria elementare del modo di risolvere questi problemi semideterminati di primo grado.

238. Innanzi tutto è chiaro che i metodi di eliminazione, o di sostituzione possono adoperarsi per fare sparire qualche incognita, quando si abbiano più equazioni, sebbene il numero delle incognite sia maggiore del numero delle equazioni. Non si giugnerà è vero allora ad una equazione con un' incognita sola, ma si giugnerà però ad un' equazione sola, la quale avrà due, tre ecc. incognite, secondo che erano una, due ecc. le incognite più delle equazioni. Così se si avevano sette incognite e sei equazioni, si giugnerà ad un' equazione con due incognite; si giugnerà ad una con tre se le equazioni erano solo cinque, ad una con quattro se le equazioni erano quattro, e così via via.

239. Poste queste cose è chiaro, che la risoluzione dei problemi semideterminati dipenderà dal trovare i valori interi e positivi, che rendono soddisfatta un' equazione sola a più incognite; dacchè trovati i valori delle incognite nell' ultima equazione a cui si riduce il problema, sarà facile coi metodi già assegnati superiormente trovare i valori della altre incognite che si sono eliminate. Così per risolvere uno di questi problemi, che presenti le due equazioni a tre incognite

$$\begin{aligned} Ax+By+Cz&=D\\ A'x+B'y+C'z&=D', \end{aligned}$$

basterà conoscere i valori di y e di z nell'equazione che si ricava eliminando da questi due la x, nell' equazione cioè della forma $Fy+Gz=H$; dacchè questi valori sostituiti in una di quelle due faranno conoscere i valori della terza incognita x.

Noi dunque dobbiamo ora occuparci del modo di trovare i valori interi e positivi di più incognite, non avendo tra quelle incognite che una sola equazione, la quale sia ridotta a non avere in alcun termine dei divisori, e ne sieno levati tutti i fattori comuni.

Presenteremo la teoria nel modo il più elementare, tralasciando tante ulteriori considerazioni, a cui potranno con somma facilità applicarsi i giovani quando saranno più inoltrati nello studio di questa scienza.

240. Cominciamo dal caso più semplice, al quale vedremo si riducono gli altri tutti, dal caso cioè di una equazione a due sole incognite; e prima cercheremo tutti i valori *interi* sieno positivi, sieno negativi, i quali sostituiti al luogo delle incognite, la rendono soddisfatta.

Sia l'equazione $3x - 2y = 16$. Isolando la x si ha $x = \frac{16+2y}{3}$; eseguendo nel secondo membro di questa eguaglianza la divisione indicata, si ottiene $x = 5 + \frac{1+2y}{3}$. *(N)*

La frazione $\frac{1+2y}{3}$ si ponga eguale a z (nuova incognita che si introduce e che appellasi ausiliaria), sia cioè $z = \frac{1+2y}{3}$. Isolando in questa nuova eguaglianza la y si ottiene $y = \frac{3z-1}{2}$; ed eseguendo nel secondo membro la divisione indicata si ottiene $y = z + \frac{z-1}{2}$. *(M)*

La frazione $\frac{z-1}{2}$ si ponga eguale a t (altra ausiliaria che si introduce), sia cioè $t = \frac{z-1}{2}$: anche qui isolando la z si ottiene $z = 2t + 1$ senza che occorra più altra frazione.

Ora introdotto questo valore di z nella *(M)* si ha y espresso per t; cioè $y = 3t + 1$ *(P)*, ed introdotto questo valore di y nella *(N)* si ha anche x espresso per t; cioè $x = 2t + 6$ *(Q)*.

In ambedue queste equazioni sostituiscasi successivamente in luogo della t, 0, 1, 2, 3, ecc. -1, -2, -3, ecc. in una parola, mettasi al luogo di t qualunque numero intero sia positivo, sia negativo; ne risulteranno sempre ad ogni numero messo al luogo di t per x e per y valori interi corrispondenti, che rendono soddisfatta la data.

Ecco uno specchio di ciò che risulta da quelle due equazioni *(P)* e *(Q)*:

Se si fa	$t = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ ecc.
si ottiene	$x = 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14$ ecc.
	$y = 1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13$ ecc.
Se si fa	$t = -1,\ -2,\ -3,\ -4$ ecc.
si ottiene	$x = 4,\ 2,\ 0,\ -2$ ecc
	$y = -2,\ -5,\ -8,\ -11$ ecc.

e due qualunque di questi valori corrispondenti sostituiti al luogo delle incognite verificano di fatto l'equazione data.

241. La ragione per cui, dati quei valori a t nelle due equazioni *(P)* e *(Q)*, ne debbano escire per x e per y tali valori, che soddisfacciano all'equazione proposta, apparisce manifesta.

Nell'equazione proposta di fatto si metta al luogo di x il suo valore che dà la *(P)*, cioè $2t + 6$, ed al luogo di y il valore che dà la *(Q)*, cioè $3t + 1$; la proposta allora diviene $6t + 18 - 6t - 2 = 16$; cioè $6t + 16 = 6t + 16$, equazione, che, per essere un' identità, si verifica qualunque sia il valore di t; e quindi, qualunque sia il valore di t, quelli che ne risultano per x e per y, debbono essi pure soddisfare sempre alla data.

242. Quante volte adunque data un' equazione a due incognite si giunga a due equazioni della forma delle due *(P)* e *(Q)*, le quali sieno atte a convertire la data in una identità, non presentasi più difficoltà alcuna a trovare i valori interi delle incognite che si cercano, non restando altro a fare che mettere successivamente al luogo dell'ausiliare t tutti i numeri interi positivi e negativi. Tutto il metodo adunque consiste nel trovare quelle due equazioni, ed il processo usato per trovarle nel proposto esempio, è il medesimo in qualunque altro caso.

243. Abbiasi ancora l'altra equazione $12x - 7y = 54$. Isolando la x si ottiene $x = \frac{54+7y}{12}$; ed eseguendo la divisione si ha $x = 4 + \frac{6+7y}{12}$ *(D)*.

Si ponga la frazione $\frac{6+7y}{12}=z$, incognita ausiliare, sarà, isolando la y, $y=\frac{12z-6}{7}$, e dividendo $y=z+\frac{5z-6}{7}$ *(A)*.

Posta la frazione $\frac{5z-6}{7}=u$, altra ausiliare, sarà, isolando la z, $z=\frac{7u+6}{5}$, cioè dividendo $z=u+1+\frac{2u+1}{5}$ *(B)*.

Fatta la frazione $\frac{2u+1}{5}=v$, altra ausiliare, sarà, isolando la u, $u=\frac{5v-1}{2}$, e dividendo $u=2v+\frac{v-1}{2}$ *(C)*; e fatta la frazione $\frac{v-1}{2}=t$, sarà $v=2t+1$ senza altra frazione.

Introdotto ora il valore di v nella *(C)* riesce

$$u=5t+2;$$

questo valore di u introdotto nella *(B)* riesce

$$z=7t+4;$$

e questo valore di z introdotto nella *(A)* riesce

$$y=12t+6;$$

questo finalmente introdotto nella *(D)* dà

$$x=7t+8:$$

ed ecco trovate le due equazioni

$$y=12t+6, \text{ ed } x=7t+8,$$

che rendono identica la proposta $12x-7y=54$.

Fatto adunque $t=0, 1, 2, 3, 4, 5$ ecc.

si avrà $x=8, 15, 22, 29, 36, 43$ ecc.

$y=6, 18, 30, 42, 54, 66$ ecc.

Fatto $t=-1, -2, -3, -4$, ecc.

si avrà $x=1, -6, -13, -20$, ecc.

$y=-6, -18, -30, -42$, ecc.

i quali valori interi (presi sempre a due a due i corrispondenti) rendono tutti soddisfatta la proposta.

244. Osservando il modo con cui si è agito nei due esempi proposti, per giugnere a trovare quelle due equazioni, in cui x ed y viene dato per mezzo di t, si vede che tutto il metodo consiste in questo: *si isola dapprima un' incognita, ed eseguendo nel secondo membro la divisione. si pone la frazione, che rimane nel secondo membro stesso, eguale ad una nuova incognita. Sulla nuova equazione, che ne risulta, si opera interamente come sulla data, isolando però quella delle due incognite, che si trovava anche nell' equazione precedente. Eguagliata anche qui la frazione, che ne esce, ad una nuova incognita, il processo del calcolo si prosegue nello stesso modo. Si giugnerà in fine a non trovare più frazione. Giunti a questo punto, risalendo da equazione in equazione, si trovano tutte le incognite espresse per quell' ultima, che si è presa; e così si giugne finalmente ad avere per mezzo di due equazioni, le incognite primitive espresse per l' ultima ausiliaria.* Se il giovane ripeterà con attenzione, sulle operazioni fatte nei due esempi antecedenti la teorica proposta, imparerà agevolmente questo metodo, sebbene a prima vista possa apparire alquanto difficoltoso per la sua complicazione.

245. Esaminiamo ora alcune particolarità che potrebbero presentarsi nell' applicare questo metodo ad alcune singolari equazioni.

Abbiasi l' equazione $3x-2y=1$. Isolata che si abbia la x in questa equazione riesce $x=\frac{1+2y}{3}$; volendosi ora, come insegna il metodo, eseguire la divisione nel secondo membro, dessa non è fattibile. Si potrebbe in tal caso proseguire avanti, facendo la frazione $\frac{1+2y}{3}$ eguale ad una nuova variabile z, operando poscia col processo accennato. Riescirà però più breve in questo caso isolare dapprincipio la y invece della x. Anzi in generale *sempre il calcolo riesce più breve, e quindi più commodo, isolando prima quella delle due incognite che ha il coefficiente minore.* Nei due esempi proposti (N.° 240, 243) abbiamo fatto a rovescio, non curandoci allora che dell' esattezza del risultato; se il giovine però comincierà dall' isolamento della y vedrà che il calcolo riesce più breve.

246. Abbiasi l' equazione $12x-9y=52$.

Cominciando dall' isolare la y (N.° 245) si ha $y=\frac{12x-52}{9}$; e dividendo $y=x-5+\frac{3x-7}{9}$.

Fatto $\frac{3x-7}{9}=z$ ed isolando la x si ottiene $x=\frac{9z+7}{3}$; ed eseguendo la divisione $x=3z+2+\frac{1}{3}$. Posta la frazione $\frac{1}{3}=t$ non si può più proseguire l' operazione non essendovi qui la z da isolare. Come è chiaro una tale particolarità si presenterà quante volte nel processo dell' operazione si giunga ad ottenere una frazione dove non abbia più luogo l' incognita. Questo inconveniente poi anzichè sia un difetto del metodo, ne prova invece l' eccellenza, mentre allora che vi si giugne si può stare sicuri che l' equazione non può ammettere valori interi delle incognite, che vi soddisfacciano; e quindi che è assurdo il problema che conduce a quell' equazione quante volte i valori delle incognite debbano essere interi.

247. Per non escire dai limiti che ci siamo proposti di una teoria la più elementare, non dimostreremo generalmente come questo inconveniente sia segno dell' insolubilità dell' equazione che vi conduce; noteremo solamente che nell' equazione proposta $12x-9y=52$, il primo membro ammetteva un fattore comune 3, essendo $12x-9y=3(4x-3y)$; e questo fattore 3 non l' ammetteva il secondo membro, cioè il 52. Quindi siccome la quantità $3(4x-3y)$, qualunque valore intero si dia ad x e ad y dà sempre un risultato che ha per fattore il 3, è assurdo che $3(4x-3y)=52$ si possa verificare per dei valori interi delle due incognite.

Quel fattore comune, che ammettono i coefficienti delle incognite nella proposta, senza che l' ammetta il termine cognito, è quello che fa sparire nell' operazione del numero antecedente l' incognita dalla frazione; e quindi da esso deriva la particolarità osservata. *Quante volte perciò i coefficienti delle incognite ammettano un fattore comune, senza che lo ammetta il termine cognito è impossibile la risoluzione dell' equazione con valori interi; ed è inutile perciò l' applicazione del metodo.*

248. Finora non ci siamo curati che della condizione che i valori delle incognite sieno interi (N.° 240). Nei problemi semideterminati essi inoltre debbono per condizione essere *positivi* (N.° 237).

Onde soddisfacciano anche a questa condizione basterà sostituire al luogo di t o dell' ultima variabile ausiliaria solo quei valori che rendono positive le incognite primitive stesse. Si vede poi a colpo d' occhio senza avere bisogno di altro metodo quali sieno questi valori.

Sceglieremo vari esempi, nei quali comprenderemo tutte le diverse specie de' casi che possono occorrere in pratica.

249. Negli esempi proposti di sopra (N.° 240, 245) per avere i soli valori positivi di x e di y, basta non mettere per t alcun numero negativo, divenendo sempre pei valori negativi di t una almeno delle due incognite negativa. Essendo poi infiniti i numeri positivi che si possono sostituire a t, in ambidue gli esempi si presenta una serie infinita di valori interi e positivi di x e di y che rendono soddisfatta l' equazione. Abbiamo già presentato ivi uno specchio di questi valori.

250. Non si presenta però sempre questa serie infinita di valori interi e positivi.

Abbiasi l' equazione $9x+131y=2000$.

Isolando la x si ottene $x=\frac{2000-131y}{9}$; e dividendo $x=222-y+\frac{2-4y}{9}(A)$. Fatto $\frac{2-4y}{9}=z$ ed isolando la y si ottiene $y=\frac{2-9z}{4}$, cioè dividendo $y=-2z+\frac{2-z}{4}(B)$.

Fatto $\frac{2-z}{4}=t$ si avrà, isolando la z, $z=2-4t$ senza che più occorra frazione. Quindi sostituendo questo valore di z nella (B) riesce $y=9t-4$, e sostituendo questo valore di y nella (A) riesce $x=228-131t$. Laonde le equazioni da cui debbonsi ricavare i cercati valori di x e di y, sono queste due $x=228-131t$, $y=9t-4$.

Ora non ricercandosi altro che i valori interi *positivi* di x e di y, non occorre dare a t nè il valore o, nè i valori negativi -1, -2, -3, ecc., dacchè allora essendo

$y = 9t - 4$ diverrebbe la y negativa; parimenti non occorre dare a t valori maggiori di 17, altrimenti essendo $x = 228 - 13t$ riescirebbe la x negativa.

Per questa equazione adunque i valori da dare a t sono i numeri naturali progressivi da 1 a 17, e

fatto $\qquad t = 1,\ 2,\ 3,\ 4,$ ecc, 17

riesce $\qquad x = 215,\ 202,\ 189,\ 176,$ ecc., 7
$\qquad\qquad\quad y = 5,\ 14,\ 23,\ 32,$ ecc., 149

e così l'equazione non ha che un numero finito di soluzioni.

251. Abbiasi l'equazione $5x + 8y = 119$.

Applicando il solito metodo, che ora per brevità tralasciamo d'accennare, si troverebbe $x = 19 + 8t$, $y = 3 - 5t$. Non volendosi che i valori positivi di x e di y, non occorre fare $t = 1,\ 2,\ 3,$ ecc. divenendo negativa la y per ognuno di questi valori positivi di t: parimenti non occorre fare $t = -3,\ -4,\ -5$ ecc. divenendo negativa la x per ognuno di questi valori negativi di t. Resta adunque che si faccia

solamente $\qquad t = 0,\ -1,\ -2$

donde si ricava $\qquad x = 19,\ 11,\ 3$
$\qquad\qquad\qquad\quad y = 3,\ 8,\ 13$

ed ecco che tre solamente sono le soluzioni possibili di questa equazione.

252. Sia ancora l'equazione $19x + 7y = 117$.
Coi soliti metodi si troverebbe $x = 8 - 7t$, $y = 19t - 5$.

Ora il valore 0, od un valore negativo dato a t, rende negativa la y; un valore intero positivo dato a t, fuori dell'unità, rende negativa la x; resta adunque solamente che si faccia $t = 1$, per cui si ha $x = 1$, $y = 14$, che è la sola soluzione possibile in numeri interi e positivi.

253. Abbiasi infine l'equazione $13x + 21y = 79$; coi soliti metodi si ottiene $x = 21t - 2$, $y = 5 - 13t$.

Ora qui non si può fare $t = 1,\ 2,\ 3,$ ecc., perchè allora riesce negativa la y; parimenti non si può fare $t = 0,\ -1,\ -2,\ -3,$ ecc., perchè riesce negativa la x; e quindi è a concludersi che l'equazione proposta non ammette nemmeno una soluzione dando valori interi e *positivi* alle incognite.

254. Da ciò che si è veduto in questi ultimi paragrafi apparisce che i problemi semideterminati a due incognite, alcune volte ammettono un numero infinito di soluzioni (N.° 249), alcune volte non ne ammettono che un numero finito (N.° 250, 251), alcune volte ne ammettono una sola (N.° 252), ed altre volte finalmente non ne ammettono alcuna (N.° 253); a seconda della diversa natura delle due equazioni, che danno le due incognite primitive espresse per l'ultima ausiliare.

255. Se l'equazione a due incognite avesse una delle incognite col coefficiente 1, allora non occorre altro processo di calcolo, bastando il sostituire all'altra incognita che non ha il coefficiente 1 tutti quei numeri positivi, che rendono positiva la prima: se ambedue le incognite avessero il coefficiente 1, si sostituirebbero ad una qualunque delle due quei valori positivi, che rendono positiva anche l'altra. Così l'equazione $x - 3y = 57$;

fatto $\qquad y = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,$ ecc.

dà $\qquad x = 57,\ 60,\ 63,\ 66,\ 69,\ 72,$ ecc.,

e quindi ammette infinite soluzioni.

Parimenti l'equazione $x + y = 14$

fatto $\qquad y = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,$ ecc. fino a 14

dà $\qquad x = 14,\ 13,\ 12,\ 11,\ 10,$ ecc. fino a 0,

ed ammette perciò un numero finito di soluzioni, riescendo negativa la x allora che y oltrepassa il valore 14.

256. Se l'equazione fosse a tre incognite si opera come segue:

Sia $5x + 8y + 7z = 50$. Facciasi $50 - 7z = n$ *(M)* sarà $5x + 8y = n$. Prendendo ora questo n come il termine cognito di un'equazione a due incognite, ed operando come sopra si avrà $x = \frac{n - 8y}{5}$; quindi $x = -y + \frac{n - 3y}{5}$ *(A)*.

Fatto $\frac{n - 3y}{5} = z$ sarà $y = \frac{n - 5z}{3}$, cioè $y = -z + \frac{n - 2z}{3}$ *(B)*.

Fatto $\frac{n - 2z}{3} = u$, sarà $z = \frac{n - 3u}{2}$, cioè $z = -u + \frac{n - u}{2}$ *(C)*.

E fatto $\frac{n-u}{2}=t$ sarà $u=n-2t$: quindi mercè delle solite sostituzioni si otterrà $z=3t-n$, $y=2n-5t$, $x=8t-3n$. Messo ora al luogo di n il suo valore che si ha dalla (M) riesce

$$y=100-14z-5t,$$
$$x=8t+21z-150:$$

ed ora non resterà che mettere successivamente al luogo di z tutti i numeri interi positivi cominciando dallo 0, cioè 0, 1, 2, 3, 4, ecc.; e dare ogni volta a t quei valori, che rendono positiva y ed x.

Così fatto $z=0$, siccome le due equazioni riescono $y=100-5t$, $x=8t-150$ non resta che sostituire a t 19 e 20, che sono i due soli numeri che rendono y ed x positivi; e riesce fatto

$$t=19,\ 20$$
$$x=2,\ 10$$
$$y=5,\ 0,$$

sicchè si hanno due soluzioni

$$z=0,\ 0$$
$$x=2,\ 10$$
$$y=5,\ 0.$$

Fatto $z=1$, siccome le due equazioni riescono

$$y=86-5t$$
$$x=8t-129,$$

non resta che fare $t=17$, essendo questo il solo valore che rende positiva x ed y; e quindi si ha una sola soluzione

$$z=1$$
$$x=7$$
$$y=1.$$

Egualmente si opererebbe per avere le altre soluzioni fatto $z=2$, 3, ecc.

257. Qualora nell'equazione a tre incognite, tutte e tre avessero un coefficiente che ammettesse un fattore comune, senza che lo ammettesse il termine cognito sarebbe impossibile la soluzione in numeri interi. La ragione è la stessa dell'accennata superiormente (N.° 247). Se il coefficiente di due sole incognite ammettesse un fattore comune, come nell'equazione $6x+8y+5z=43$, allora converrebbe mettere eguale ad n non già $43-5z$, ma sibbene il termine cognito, meno uno de' termini, dove si trova quel fattore comune, come $43-8y$, oppure $43-6z$; e la ragione si è perchè altrimenti si presenterebbe l'inconveniente notato superiormente (N.° 246); il quale però in questo caso non vorrebbe dire che il problema sia assurdo per dei valori interi dell'incognita.

258. I metodi da usarsi e le avvertenze da aversi quando si avesse un'equazione sola a quattro, a cinque ecc. incognite, sono sempre analoghi agli accennati pel caso delle tre incognite. Tutti i termini dell'equazione, fuori di due, che contengano ciascuno un'incognita, e che non ammettano fattore comune, si pongono eguali ad una lettera n; e così l'equazione data si riduce alla forma $ax+by=n$: sopra questa si opera col solito metodo onde trovare x ed y espresso per un'ultima ausiliare t. Trovate le due equazioni della forma $x=a't+b'n$, $y=a''t+b''n$, si mette al luogo di n il suo valore espresso per le altre incognite, e pel termine cognito dell'equazione data: e per avere i valori veri cercati di x e di y non resta che sostituire successivamente a ciascuna delle altre incognite tutti i numeri interi positivi cominciando da 0, e mettere ciascuna volta per t i numeri interi opportuni, onde riescano x ed y positive, come si è fatto superiormente (N.° 256) pel caso di tre incognite.

259. Per esercitare il giovane all'applicazione delle presenti teorie, proporremo tre problemi, notando solamente l'ultimo risultato delle soluzioni.

Problema 1.° Vi sono due specie di una certa merce da vendere; una specie costa 6 paoli il braccio, l'altra specie ne costa 7. Un compratore vuole spendere 71 paoli, prendendo un numero intero di braccia tanto della prima specie, quanto della seconda; quante braccia ne deve prendere di ciascuna specie?

Il problema ammette una sola soluzione: ne deve prendere 6 braccia della prima specie e 5 della seconda.

Problema 2.° Quale è quel numero che diviso per 13 dà 3 di resto, e diviso per 17 dà per resto 8?

Infiniti sono i numeri nei quali si verificano queste condizioni: eccone alcuni: 42, 263, 484, 705 ecc.

Problema 3.° Quale è quel numero, che diviso per 13 dà il quoto ed il residuo tali, che diviso lo stesso numero per 17 ciò che era residuo diviene quoto, e ciò che era quoto diviene residuo?

Oltre lo zero si trovano quattro altri numeri, che rendono soddisfatte le condizioni del problema. Questi numeri sono: 55, 110, 165, 220.

CAPO IV.

Formazione e calcolo delle Potenze e Radici de' monomi.

260. Abbiamo già detto (N.° 103) che l' esponente di una quantità indica quante volte la detta quantità è stata presa come fattore, e quindi quante volte avrebbesi dovuto scrivere senza verun segno interposto: così $a^4 = aaaa$; $a^3 = aaa$ ecc., onde nell'esponente diminuito di una unità, abbiamo quante volte fu moltiplicata per se stessa la quantità che è affetta da quel dato esponente.

261. Qualunque quantità moltiplicata per 1, si dice *prima potenza*, e moltiplicata per se stessa, dicesi *seconda potenza* o *quadrato*. La quantità poi che si è moltiplicata per formare il quadrato, chiamasi *radice* di esso quadrato. Sicchè $a \times 1 = a$ sarà la prima potenza; e $a \times a = a^2$ potenza seconda o quadrato, di cui a semplice dicesi radice *quadra* o *seconda*.

262. Se il quadrato si moltiplichi per la sua radice, il prodotto che ne nasce dicesi *potenza terza* o *cubo*, e la radice rapporto ad esso chiamasi *radice terza* o *cubica*. Quindi a^3 prodotto di $a^2 \times a$, sarà un cubo o *terza potenza*, ed a radice *terza* o *cubica* di esso. Così pure la *quarta potenza* a^4, *la quinta* a^5, *la sesta* a^6..... a^m, avranno rispettivamente per radice *quarta*, *quinta*, *sesta*, *emmesima* la stessa quantità a.

263. Nella stessa maniera si formano le potenze dei numeri. Perciò 1 sarà la potenza prima dell' unità; e siccome $1 \times 1 = 1$; $1 \times 1 \times 1 \times 1 ..... = 1$, quindi tutte le potenze dell' unità saranno sempre eguali alla stessa unità, la quale perciò sarà ad un tempo potenza e radice di se medesima in qualsivoglia grado. Così 2 potenza prima, darà 4 per seconda,

8 per terza, 16 per quarta ecc. Del pari il 100 sarà potenza seconda di 10, il 1000 terza, il 10000 quarta ecc.; e viceversa 2 sarà radice seconda di 4, terza di 8, quarta di 16 ecc.; e 10 radice seconda di 100, terza di 1000, quarta di 10000 ecc.

264. Apparisce adunque dal detto che per potenza di una quantità altro non s'intende se non *il prodotto che si ottiene prendendo quella data quantità per fattore tante volte quante unità conta il numero, che esprime l' ordine della potenza stessa*: così potenza *terza* di $8a$ indica il prodotto che si ottiene prendendo come fattore *tre* volte la quantità $8a$. Per radice invece si intende *quella quantità che per dare un dato prodotto deve essere presa per fattore tante volte, quante unità conta il numero che esprime l' ordine della radice stessa*: così radice *quinta* di $32b^{15}$ indica quella quantità, che deve essere presa come fattore cinque volte, onde ne esca il prodotto $32b^{15}$.

265. Volendo indicare che una data quantità deve essere innalzata a potenza, si racchiude tra parentesi, e fuori di essa al luogo degli esponenti si mette il numero che indica la potenza a cui deve innalzarsi. Così $(3ab)^2$ significa che la quantità $3ab$ deve essere innalzata al quadrato; onde operando come si è detto, avrassi

$$(3ab)^2 = 3ab \times 3ab = 9a^2b^2.$$

Del pari $(-4a^2b^3)^3$ indica che la quantità $-4a^2b^3$ deve innalzarsi al cubo, ed eseguendo l'operazione si otterrà:

$$-4a^2b^3 \times -4a^2b^3 \times -4a^2b^3 = 16a^4b^6 \times -4a^2b^3 = -64a^6b^9.$$

Nella stessa guisa si hanno le potenze delle frazioni, onde

$$\left(\frac{4a^2b}{2cq}\right)^2 = \frac{(4a^2b)^2}{(2cq)^2} = \frac{4a^2b}{2cq} \times \frac{4a^2b}{2cq} = \frac{16a^4b^2}{4c^2q^2}.$$

266. Facendo attenzione alla maniera colla quale si sono formate le diverse potenze delle quantità date negli addotti esempi, si ricava un metodo facile e compendioso per innalzare a potenza un qualunque monomio senza passare per la lunga e tediosa via della moltiplicazione. Esso consiste nelle tre regole seguenti:

Regola 1.° *per li segni*. Poichè qualunque quantità positiva moltiplicata per se stessa un qualunque numero di volte, dà sempre un prodotto positivo, ne segue: *che il risultato di una qualunque potenza di qualsivoglia quantità positiva, sarà sempre affetto da segno positivo.*

Regola 2.ª *per li segni.* Se la quantità che si vuole innalzare a potenza è negativa, allora *le potenze pari di essa saranno positive, e le dispari negative;* perchè una quantità negativa presa come fattore un numero pari di volte, dà sempre un prodotto positivo; e presa un numero dispari di volte, dà un prodotto negativo.

Regola per li coefficienti. I coefficienti numerici si innalzano a potenza *moltiplicandoli per se stessi tante volte meno una, quante unità vi sono nell' esponente della potenza a cui si vogliono elevare.* Alle volte invece di eseguire questa operazione non si fa che indicarla nel modo stesso con cui essa si indica per le lettere. Così $(4)^2$; $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ ecc., significa che il quattro e i tre quarti si debbono innalzare al quadrato.

Regola per le lettere e per gli esponenti. Quando le lettere non hanno altro esponente che l' unità, prendono l' esponente della potenza a cui si vogliono innalzare. Se poi sono di già innalzate a qualche esponente, l' esponente che verranno ad avere risulterà dal prodotto dell' esponente che avevano prima pel nuovo esponente a cui si vogliono elevare. Così $(2a^3)^2 = 4a^6$; $(-3a^2b)^3 = -27a^6b^3$; e $(-4a^3b^2)^m = \pm 4^m a^{3m} b^{2m}$. A questa ultima espressione si è posto il doppio segno, perchè non si sa se m sia pari o dispari; nel caso di m pari, l' espressione avrebbe il segno più; e nel caso di m dispari, avrà il segno meno.

267. La radice di una potenza qualunque si esprime col simbolo $\sqrt{}$, che dicesi *radicale;* e si mette sempre avanti alle potenze stesse, collocando nell' apertura di esso un numero che si denomina *esponente, grado* o *indice* del radicale, perchè appunto serve a indicare le specie diverse di radici che si considerano nelle potenze. Così $\sqrt[2]{a^4}$ indica la radice seconda o quadra di a^4; $\sqrt[3]{a^6}$, indica la radice cubica o terza di a^6; $\sqrt[4]{a^8}$ la radice quarta di a^8; $\sqrt[m]{a^n}$ la radice emmesima di a^n.

La radice seconda più comunemente si suole indicare col solo simbolo $\sqrt{}$, ommettendo l' indice 2.

268. Da quello che abbiam detto si rileva facilmente: 1.° che l' esponente di qualsivoglia quantità innalzata al quadrato è doppio dell' esponente primitivo; che l' esponente di una quantità elevata al cubo ne è triplo, e quadruplo se la quantità sia elevata alla quarta potenza ecc.; 2.° che un radicale di qualunque grado si può rappresentare, prescindendo dal coefficiente e dal segno, col dividere gli esponenti delle quantità soggette a questo radicale pel grado del radicale stesso. Perciò la radice quadrata di una quantità qualunque, sempre prescindendo dal coefficiente e dal segno, si avrà dividendo l' esponente della data quantità per 2; onde sarà $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$: infatti moltiplicando $a^{\frac{1}{2}}$ per se stesso, si ottiene $a^{\frac{2}{2}} = a$. Del pari la radice cuba di una quantità qualunque si avrà dividendo l' esponente di essa quantità per 3. Così $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$; perchè $a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$. Per la stessa ragione $\sqrt[4]{a^2 b^6} = a^{\frac{2}{4}} b^{\frac{6}{4}}$; $\sqrt[5]{c\,q^7} = c^{\frac{1}{5}} q^{\frac{7}{5}}$ ecc. E in generale $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$. Quindi si potrà conchiudere *che gli esponenti interi indicano alzamento a potenza, e i fratti indicano estrazione di radice; questa radice poi sarà sempre del grado segnato dal denominatore dell' esponente.* Così $a^{\frac{4}{2}} = \sqrt{a^4}$; $a^{\frac{6}{3}} = \sqrt[3]{a^6}$; $a^{\frac{8}{4}} = \sqrt[4]{a^8}$ ecc. Anzi secondo alcuni meglio s' indicherebbero le quantità radicali coll' esponente frazionario, di quello che col segno radicale; e secondo essi si scriverà piuttosto $a^{\frac{1}{2}}$ che $\sqrt{a}$; $a^{\frac{3}{6}}$ che $\sqrt[6]{a^3}$ ecc.

Estrazione delle radici de' monomi.

269. L' estrazione delle radici è l' operazione inversa dell' innalzamento a potenza; perciò volendo trovare la radice di un grado qualunque di una data potenza, fa d' uopo

distruggere ciò che fu fatto quando si elevò la quantità primitiva alla potenza dello stesso grado della radice che si vuole estrarre. Quindi anche per l'estrazione delle radici si danno le regole seguenti:

Regola pei coefficienti. Quando le quantità di cui si cerca la radice sono affette da coefficienti numerici, *si caverà da essi la radice indicata coi metodi che s' insegnano in Aritmetica* (*)*; e se tali coefficienti non fossero potenze esatte di grado eguale all' indice della radice che devesi estrarre, allora si scomporranno, se è possibile, in due fattori, uno dei quali sia potenza esatta del grado sopraindicato, onde si possa estrar da esso la radice cercata.*

Regola pei segni. Dovendo estrarre una radice di grado pari da una quantità qualunque, *si dovrà porre avanti alla radice il doppio segno* $\pm$; *così* $\sqrt{a^2} = \pm a$, *perchè* a^2 *può nascere tanto da* $a \times a$, *quanto da* $-a \times -a$. Se poi il grado della radice che si ricerca sia dispari, *allora la radice dovrà avere il segno della potenza*, poichè si osservò (N.° 266) che il risultamento positivo di una potenza di grado dispari proviene sempre da una quantità positiva, e il risultamento negativo di una potenza dispari deriva sempre da una quantità o radice negativa.

Regola per le lettere e per gli esponenti. Una quantità qualunque s' innalza ad una data potenza, moltiplicando il suo esponente per la potenza a cui si vuole elevare. *Dunque per lo contrario si estrarrà qualsivoglia radice da una data quantità monomia dividendo il suo esponente per l' indice del dato radicale, come già si è detto* (N.° 268).

270. Esempi. 1.° Sia da estrarsi la radice quadra di $a^4 b^2$. Dietro la regola insegnata si avrà:

$$\sqrt{a^4 b^2} = \pm a^{\frac{4}{2}} b^{\frac{2}{2}} = \pm a^2 b.$$

Infatti tanto $+a^2 b$ quanto $-a^2 b$ moltiplicato per se stesso produce $a^4 b^2$.

2.° Si estragga la radice cubica dal monomio $-27a^6b^9$. Eseguendo l'operazione si avrà:

(*) Nota. *Questi metodi si vedranno in appresso allora che si tratterà della radice dei polinomi.*

$$\sqrt[3]{-27 a^6 b^9} = -3 a^{\frac{6}{3}} b^{\frac{9}{3}} = -3 a^2 b^3;$$

e di fatto $$(-3 a^2 b^3)^3 = -27 a^6 b^9.$$

3.° Si trovi la radice quarta di $81 a^8 b^{16}$. Operando come sopra si ha:

$$\sqrt[4]{81 a^8 b^{16}} = \pm 3 a^{\frac{8}{4}} b^{\frac{16}{4}} = \pm 3 a^2 b^4.$$

Innalzando infatti $\pm 3 a^2 b^4$ alla quarta potenza si ottiene $81 a^8 b^{16}$, come prima.

271. Accade alle volte che gli esponenti delle lettere non sono esattamente divisibili per l' indice della radice che si deve estrarre. Di tal natura sono le espressioni

$$\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}} = a \times a^{\frac{1}{2}}; \quad \sqrt[3]{b^5} = b^{\frac{5}{3}} = b \times b^{\frac{2}{3}}; \quad \sqrt[4]{c^3} = c^{\frac{3}{4}} \text{ ecc.},$$

le quali perciò lasciano o in tutto o in parte indicata la estrazione della loro radice. Quali radici poi, sebbene *inassegnabili*, hanno un grandissimo uso nel calcolo, e devono essere considerate con tutta attenzione.

272. Le quantità delle quali non si può assegnare con esattezza la radice, chiamansi *quantità irrazionali, incommensurabili* o *sorde*; e si dicono *quantità razionali* o *commensurabili* quelle, le di cui radici possono esattamente assegnarsi.

273. Se l'esponente di una data quantità sia maggiore del grado della radice, ma non un suo multiplo esatto, in questo caso *si decomporrà quella quantità in due fattori, uno dei quali abbia un esponente che sia il multiplo maggiore dell' indice radicale contenuto nell' esponente della quantità data; dopo ciò si estrarrà la radice dalla parte commensurabile, lasciando indicata la parte incommensurabile.*

Esempi.

1.° $\sqrt{a^3 b^5} = \sqrt{a^2\, a\, b^4\, b} = \pm a b^2 \sqrt{a\, b}.$

2.° $\sqrt[3]{-48 a^9 b^5} = \sqrt[3]{-8 \times 6 a^9 b^3 b^2} = -2 a^3 b \sqrt[3]{6 b^2}.$

3.° $\sqrt[4]{64 a^9 b^{15} c^5} = \sqrt[4]{16 \times 4 a^8 a b^{12} b^3 c^4 c} = \pm 2 a^2 b^3 c \sqrt[4]{4 a b^3 c}.$

274. Nelle quantità monomie frazionarie *si estrae la radice separatamente dal numeratore e dal denominatore, avvertendo che i segni delle radici delle frazioni appartengono al numeratore.* Così

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \pm\frac{a}{b};\ \text{e}\ \sqrt[3]{-\frac{8a^6}{27b^9}} = -\frac{2a^2}{3b^3}.$$

275. Come si può liberare dal vincolo radicale un fattore della quantità, che vi è soggetta, estraendovi la radice (N.° 273), così si potrà invece trasportare sotto il vincolo radicale un fattore, *elevandolo alla potenza del grado della radice, e moltiplicandolo per la quantità che sta sotto il vincolo stesso.*

Quindi $\quad 3a\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{27a^3b}$

del pari $\quad 2a^3\sqrt{3c} = \sqrt{4a^6} \times 3c = \sqrt{12a^6c}$ ecc.

276. Un monomio qualunque radicale s'innalza a potenza, *innalzando a potenza, secondo il metodo insegnato, la quantità che sta sotto il vincolo*, e nel caso che la potenza a cui vuolsi innalzare fosse eguale all'indice del radicale stesso, *basterà levare da quella espressione il segno radicale.* Così

$$\left(\sqrt[3]{ab^2}\right)^2 = \sqrt[3]{a^2b^4};\ \text{e}\ \left(\sqrt{a^2}\right)^2 = a^2;$$

perchè $\quad \left(\sqrt{a^2}\right)^2 = \sqrt{a^4} = a^{\frac{4}{2}} = a^2.$

Del pari $\quad \left(\sqrt[m]{a}\right)^m = \sqrt[m]{a^m} = a^{\frac{m}{m}} = a.$

277. Si estrae una radice di qualsivoglia grado da una espressione radicale, *moltiplicando l'indice del suo primo radicale per l'indice della nuova radice da estrarsi, poscia colle regole insegnate si eseguirà totalmente o parzialmente l'operazione, se avrà luogo.* Così la radice terza di $\sqrt{a}$, sarà:

$$\sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt[6]{a};\ \text{perchè}\ \sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt[3]{a^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{1}{2\cdot3}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}.$$

278. Quindi *una quantità qualunque soggetta a radicali doppi, si potrà esprimere con un solo radicale, l'indice del quale eguagli il prodotto degl'indici de' radicali dati;* e viceversa *un radicale il di cui indice sia composto di uno o più fattori, si potrà decomporre in un radicale di radicale avente tanti vincoli, quanti sono i fattori nell'indice del dato radicale.* Così sarà:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^3}} = \sqrt[mn]{a^3}.\ \text{Del pari}\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[r]{a^4}}} = \sqrt[m]{\sqrt[nr]{a^4}} = \sqrt[mnr]{a^4}.$$

Per lo contrario

$$\sqrt[12]{ab} = \sqrt[3\cdot4]{ab} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{ab}} = \sqrt[3]{\sqrt[2\cdot2]{ab}} = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{ab}}}.$$

Così pure

$$\sqrt[mnr]{a^2} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[r]{a^2}}}.$$

279. Gli esponenti di una quantità qualunque possono, senza cangiar valore, prendere diverse forme, e quindi le potenze un diverso aspetto, in quella stessa guisa che agli interi si può dare la forma di rotti, e a questi una denominazione diversa senza alterarli. Pertanto sarà:

$$a = a^{\frac{2}{2}} = a^{\frac{3}{3}} = a^{\frac{m}{m}} = a^{\frac{mn}{mn}}\ \text{ecc.}$$

E siccome i divisori degli esponenti esprimono dei radicali del grado da essi denotato, così sarà anche

$$a = \sqrt{a^2} = \sqrt[3]{a^3} = \sqrt[4]{a^4} = \sqrt[m]{a^m} = \sqrt[mn]{a^{mn}}\ \text{ecc.}$$

280. Da ciò ne segue: 1.° *che le quantità razionali si potranno ridurre a radicali di quel grado che si vorrà, moltiplicando e dividendo allo stesso tempo gli esponenti delle date quantità per l'indice del radicale proposto.* 2.° *Che una quantità radicale non cangerà valore se il suo indice radicale e nello stesso tempo l'esponente di essa, sieno moltiplicati o divisi per una stessa quantità qualunque.* Dalle due regole stabilite si ricava una facile maniera di *semplificare* i radicali, e di *ridurre allo stesso grado* tutti i radicali che hanno un grado diverso.

281. I radicali si semplificano *col togliere da essi, mediante la divisione, i fattori comuni all' indice radicale e agli esponenti delle quantità sotto il radicale*. Così nell' espressione $\sqrt[6]{a^3 b^3}$, dividendo per 3 tanto l'indice 6, che gli esponenti 3, si avrà:

$$\sqrt[6]{a^3 b^3} = \sqrt{a\,b}.$$

282. I radicali si riducono allo stesso grado, *riducendo i loro esponenti a frazioni dello stesso denominatore*, o ciò che è lo stesso, *moltiplicando l' indice radicale di ciascuno, e al tempo stesso anche gli esponenti delle quantità che si trovano sotto i rispettivi radicali pel prodotto di tutti gl' indici radicali degli altri*. Così $\sqrt{b}$ e $\sqrt[3]{a^2}$ ridotte allo stesso grado, daranno

$$\sqrt{b} = \sqrt[6]{b^3};\ \text{e}\ \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[6]{a^4}.$$

Del pari $\sqrt{a},\ \sqrt[3]{b^2},\ \sqrt[5]{c^2} = \sqrt[30]{a^{15}},\ \sqrt[30]{b^{20}},\ \sqrt[30]{c^{12}}$ equivalenti alle prime tre.

Per la stessa ragione le espressioni $\sqrt[m]{a^q},\ \sqrt[n]{b^r},\ \sqrt[p]{c^x},\ \sqrt[3]{d^y}$ ridotte allo stesso indice diverranno:

$$\sqrt[3mnp]{a^{3npq}}\ \sqrt[3mnp]{b^{3mpr}}\ \sqrt[3mnp]{c^{3mnx}}\ \sqrt[3mnp]{d^{mnpy}}.$$

283. Le regole stabilite ne' tre numeri precedenti (280, 281, 282) sono sufficienti quando si tratti di quantità senza coefficienti, e si prescinda inoltre dai segni. Per tenere conto di tutto conviene inoltre avvertire *di innalzare* (N.° 266) *i segni ed i coefficienti a quella potenza*, o *di estrarre* (N.° 269) *da essi quella radice che è indicata dal numero per cui si moltiplicano, o si dividono gli esponenti delle quantità rispettive*.

Così $\sqrt{16\,a^2 b^6} = \pm 4ab^3$: parimenti le spressioni

$\sqrt{2a},\ \sqrt[3]{3a^2}$ ridotte allo stesso indice divengono $\sqrt[6]{8a^3},\ \sqrt[6]{9a^4}$.

284. Quando più radicali hanno lo stesso indice, ed hanno sotto il vincolo radicale le stesse quantità, si dicono *simili*: mancando qualcuna di queste condizioni si dicono *dissimili*.

Operazioni sulle quantita' radicali.

Addizione e Sottrazione.

285. Quando le quantità radicali sono *dissimili*, l' addizione e la sottrazione di esse *non si possono che indicare*, operando in tutto come sulle quantità razionali. Se poi fossero *simili*, allora *si sommeranno o sottreranno altresì i loro coefficienti, come si disse delle quantità razionali simili*; e così ne sarà ancora eseguita la riduzione. Esempio:

$$\sqrt{a}\ \text{e}\ \sqrt[3]{b^2} = \sqrt{a} + \sqrt[3]{b^2},$$

se si voglia sommare l'una coll'altra; e sarà:

$$\sqrt{a} - \sqrt[3]{b^2},$$

se si voglia sottrarre la seconda dalla prima.

Del pari $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a^2} = 2\sqrt[3]{a^2}$; e $2\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^2}$.

Così pure $\sqrt[3]{a^2 m} + 3\sqrt[6]{a^4 m^2}$, ridotte prima allo stesso indice per conoscere se sieno quantità simili, daranno:

$$\sqrt[3]{a^2 m} + 3\sqrt[3]{a^2 m} = 4\sqrt[3]{a^2 m};$$

similmente $8\sqrt[4]{a^2} - 5\sqrt{a}$, ridotte come sopra daranno:

$$8\sqrt{a} - 5\sqrt{a} = 3\sqrt{a}.$$

Moltiplicazione e Divisione.

286. Se i radicali da moltiplicarsi o da dividersi sieno simili, *si opererà nello stesso modo sulle quantità, come se non vi*

fossero i radicali, e al prodotto, o al quoto si anteporrà il radicale comune. Se poi i radicali sieno di grado diverso, *prima di eseguire o l' una o l' altra operazione converrà ridurli allo stesso grado, indi operare nella maniera indicata.* Perciò

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}\text{; e}$$

$$3\sqrt[3]{a^2}\times2\sqrt{3b}=3\sqrt[6]{a^4}\times2\sqrt[6]{27b^3}=6\sqrt[6]{27a^4b^3}.$$

Così pure,

$$\sqrt{a}:\sqrt{b}=a^{\frac{1}{2}}:b^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\text{; e }8\sqrt[5]{a^6}:2\sqrt[10]{a^3b},$$

riducendo prima i radicali allo stesso grade, diverranno:

$$8\sqrt[10]{a^{12}}:2\sqrt[10]{a^3b}=4\sqrt[10]{\frac{a^{12}}{a^3b}}=4\sqrt[10]{\frac{a^9}{b}}.$$

287. La moltiplicazione e la divisione dei polinomi radicali si eseguiscono nello stesso modo delle quantità razionali, avuto però riguardo alle regole insegnate per la moltiplica e divisione dei monomi radicali.

Delle quantità immaginarie e del modo di calcolarle.

288. Da quanto si disse (N.° 266) la potenza pari è sempre positiva, qualunque sia il segno della quantità che la produsse, e perciò *la radice pari di una quantità positiva è generalmente di doppio segno.* Così:

$$\sqrt{a^2}=\pm a;\quad \sqrt[4]{a^8}=\pm a^2;\quad \sqrt{25}=\pm5;\quad \sqrt[4]{81}=\pm3 \text{ ecc.}$$

Cessa però l'ambiguità quando è noto il segno delle quantità dalle quali ebbe origine quel prodotto.

289. *La radice impari di una quantità negativa, ha un valore negativo.* Così

$$\sqrt[3]{-a^3}=-a;\quad \sqrt[3]{-27}=-3 \text{ ecc.}$$

Ma la radice pari di una quantità negativa, p. e. $\sqrt{-a^2}$, non sarà $+a$, perchè $a\times a=a^2$; non sarà $-a$, perchè $-a\times-a=a^2$; non è zero, perchè $0\times0=0$ e non già

$=-a^2$; ella è perciò una quantità che non può esistere: quindi resta che l' espressione $\sqrt{-a^2}$ *sia un simbolo ed un segnale della impossibilità della questione dalla quale essa è provenuta.* Essa fu perciò chiamata *immaginaria* perchè appunto è in opposizione alla quantità *reale*, o razionale o irrazionale che sia, ma *sempre esistente.* Evvi pertanto questa differenza tra la radice *reale* ed *immaginaria*, che la reale può sempre ottenersi o esattamente se la quantità da cui deve estrarsi è razionale, o per appressimazione, se detta quantità è irrazionale. Al contrario la radice immaginaria è una quantità che non può ottenersi con verun artificio, e ripugna all'esistenza, come

$$\sqrt{-16};\quad \sqrt{-36};\quad \sqrt[4]{-256}.$$

290. Onde l' esecuzione di tutte le operazioni sulle quantità immaginarie, si riduca ad eseguirle sopra il simbolo $\sqrt{-1}$, usano gli algebristi di trasformare qualunque espressione immaginaria in modo, che non contenga altro d' immaginario se non il fattore $\sqrt{-1}$.

Dalle cose dette superiormente è facile vedere che p. e. $\sqrt{-a^2}=a\sqrt{-1}$, $\sqrt{-a^2b^3}=ab\sqrt{b}\sqrt{-1}$, $\sqrt[4]{-b^4}=b\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[6]{-a^6b^9}=ab\sqrt{b}\sqrt[6]{-1}$; e così via via.

È facile quindi il ridurre tutte le quantità inmaginarie in modo, che non contengano altro d' immaginario se non un fattore della forma $\sqrt{-1}$, $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[6]{-1}$, ecc. Come poi anche $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[6]{-1}$, $\sqrt[8]{-1}$, ecc. si riducano a non contenere altro fattore immaginario se non $\sqrt{-1}$ è cosa, che oltrepassa i confini di un libro elementare.

Coi metodi, che danno gli analisti si trova che p. e.

$$\sqrt[4]{-1}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{-1}}{2},\quad \sqrt[6]{-1}=\frac{\sqrt[3]{1}\sqrt{3}+\sqrt[3]{1}\sqrt{-1}}{2},$$

$$\sqrt[8]{-1}=\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}+\sqrt{(2-\sqrt{2})}\sqrt{-1}}{2} \text{ ecc.}$$

Noi ora assumeremo come un dato certo, che tutte le espressioni immaginarie si riducono a non contenere altro d'immaginario se non il fattore $\sqrt{-1}$: e daremo le regole per calcolare questo fattore.

291. Se ad una quantità immaginaria ne venga aggiunta o tolta una reale, ovvero si moltiplichi per una reale, il risultato si reputa sempre immaginario. Così essendo a, b, c ecc. quantità reali, le espressioni $a+b\sqrt{-1}$, $a-b\sqrt{-1}$, $a+bc\sqrt{-1}$, $\frac{a+b\sqrt{-1}}{c}$, saranno immaginarie o impossibili.

292. La somma e la sottrazione delle quantità immaginarie si eseguisce al solito. Così $a+b\sqrt{-1}+c\sqrt{-1}$ indica che $a+b\sqrt{-1}$ è stata sommata con $c\sqrt{-1}$; ed $a+b\sqrt{-1}-c\sqrt{-1}$ indica che quelle quantità furono sottratte.

293. Se la quantità reale a deve moltiplicarsi coll'immaginaria $b\sqrt{-1}$, si avrà com'è chiaro $ab\sqrt{-1}$. Ma se debba moltiplicarsi $\sqrt{-1}$ per $\sqrt{-1}$, per conoscere quale debba essere il prodotto, fa d'uopo osservare che per elevare una radice seconda alla seconda potenza, basta levare il segno radicale (N.° 276), dunque

$$\sqrt{(-1)^2}=\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=-1;$$

e perciò $$a\sqrt{-1}\times b\sqrt{-1}=-ab.$$

Ecco pertanto le diverse potenze di $\sqrt{-1}$.

$$(\sqrt{-1})^2= \ldots\ldots\ldots\ldots -1.$$
$$(\sqrt{-1})^3=(\sqrt{-1})^2\sqrt{-1}=-\sqrt{-1}.$$
$$(\sqrt{-1})^4=(\sqrt{-1})^2(\sqrt{-1})^2=\ldots+1.$$
$$(\sqrt{-1})^5=(\sqrt{-1})^4\sqrt{-1}=+\sqrt{-1}.$$
$$(\sqrt{-1})^6=(\sqrt{-1})^5\sqrt{-1}=\ldots-1.$$
$$(\sqrt{-1})^7=(\sqrt{-1})^6\sqrt{-1}=-\sqrt{-1}.$$
$$(\sqrt{-1})^8=(\sqrt{-1})^7\sqrt{-1}=\ldots+1.$$

294. Le potenze pari adunque di $\sqrt{-1}$ danno per risultato $+1$, ovvero -1; e le impari danno $+\sqrt{-1}$, ovvero $-\sqrt{-1}$, cioè a dire sono reali le potenze pari, ed immaginarie le dispari. Anzi le pari sono positive, se la metà del loro esponente è pari; negative, se è dispari. Pertanto in generale si potrà stabilire che se m è pari sarà $(a\sqrt{-1})^{2m}=a^{2m}$; e se m è dispari $(a\sqrt{-1})^{2m}=-a^{2m}$. (*)

295. Le potenze dispari sono positive, se togliendo l'unità dal loro esponente, la metà di ciò che rimane è pari; sono negative se avviene il contrario. Perciò in generale $(a\sqrt{-1})^{2m+1}$ si riduce a $+a^{2m+1}\times\sqrt{-1}$, se m è pari; e diviene $-a^{2m+1}\times\sqrt{-1}$, se m è dispari.

296. Poste queste nozioni non si troverà più veruna difficoltà per la moltiplicazione delle quantità immaginarie complesse. Si osservi l'esempio qui appresso:

$$\begin{array}{ll}\text{Moltiplicando} & 4a+3\sqrt{b}(\sqrt{-1})+c\sqrt{-1}\\ \text{Moltiplicatore} & 2\sqrt{c}(\sqrt{-1})-c\sqrt{-1}\\ \hline \text{Pr.} & 8a\sqrt{c}(\sqrt{-1})-6\sqrt{bc}-2c\sqrt{c}-4ac\sqrt{-1}+3c\sqrt{b}+c^2.\end{array}$$

297. Le quantità immaginarie prendono talvolta il carattere di reali, come si è potuto osservare negli esempi addotti di sopra, e in questi che seguono, nei quali sono state eseguite le moltiplicazioni al solito, e le opportune riduzioni

$$(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})=a^2+b^2;\ \text{ed}$$

$$\frac{(1+\sqrt{-3})}{2}\,\frac{(1-\sqrt{-3})}{2}=1.$$

(*) Nota. *Non avrà alcuna difficoltà il giovane ad ammettere che* $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=-1$, *e quindi ad ammettere la presente teoria, se rifletta che* $\sqrt{-1}$ *non indica altro (giusta la difinizione N.° 264). che quella quantità, la quale presa per fattore due volte dà* -1 *per prodotto.*

298. Se una quantità reale ab si debba dividere per una immaginaria $a\sqrt{-1}$, il quoziente sarà immaginario. Infatti $\frac{ab}{a\sqrt{-1}}=\frac{b}{\sqrt{-1}}$, e moltiplicando ambidue i termini per $\sqrt{-1}$, per togliere l'immaginario del denominatore, si avrà:

$$\frac{b\sqrt{-1}}{(\sqrt{-1})\times(\sqrt{-1})}=\frac{b\sqrt{-1}}{-1}=-b\sqrt{-1}.$$

Per la stessa ragione sarà

$$\frac{-ab}{a\sqrt{-1}}=-\frac{b}{\sqrt{-1}}=-\frac{b\sqrt{-1}}{(\sqrt{-1})^2}=+b\sqrt{-1}.$$

299. Qualunque quantità immaginaria o sola come $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$ ecc., o unita a quantità reali, come $a+b\sqrt{-1}$, $c+d\sqrt{-1}$, sempre si riduce alla forma

$$B\sqrt{-1}, \text{ o } A+B\sqrt{-1}.$$

Infatti è chiaro che le due prime $a\sqrt{-1}+b\sqrt{-1}$ $=(a+b)\sqrt{-1}$; e le due altre $a+b\sqrt{-1}+c+d\sqrt{-1}$ $=(a+c)+(b+d)\sqrt{-1}$. Quindi rappresentando tutte le reali per A, e tutte le reali moltiplicate col simbolo immaginario per B, le suddette espressioni si cangiano in una delle due seguenti:

$$B\sqrt{-1}, \text{ ovvero } A+B\sqrt{-1}.$$

Lo stesso si dica di tutte le altre.

CAPO V.

Potenze e Radici de' Polinomi.

300. Il quadrato o potenza seconda del Binomio $(a+b)$ si forma (N.° 261) moltiplicando $(a+b)$ per $(a+b)$, il che dà:

$$a^2+2ab+b^2.$$

Se si dovesse innalzare al quadrato $(-a-b)$ vale a

dire se i segni dei due termini fossero negativi, il risultato sarebbe lo stesso di prima, cioè:

$$a^2+2ab+b^2.$$

301. Parimente $(a+b)^3=(a^2+2ab+b^2)\ (a+b)$ cioè eseguendo sarà:

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Se i segni del Binomio da innalzarsi al cubo fossero ambidue negativi, tali sarebbero anche quelli del prodotto. Così

$$(-a-b)^3=-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3.$$

302. Se l'uno o l'altro dei termini del Binomio che si vuole innalzare a potenza, sia negativo, *i termini dello sviluppo saranno alternativamente positivi e negativi.* Si deve però avvertire, che nelle potenze impari provenienti dal Binomio col primo termine negativo, è necessario di cangiare il segno a tutti i termini per assoggettarli a questa legge. Infatti

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=-(-a+b)^3,$$

come si potrà vedere eseguendo l'operazione per esteso.

303. Pertanto riunendo i diversi risultati de' numeri antecedenti, si avrà:

$(a\pm b)^2=\ldots\ldots a^2\pm2ab+b^2,$
$(a\pm b)^3=\ldots\ldots a^3\pm3a^2b+3ab^2\pm b^3,$
$(a\pm b)^4=\ldots\ldots a^4\pm4a^3b+6a^2b^2\pm4ab^3+b^4,$
$(a\pm b)^5=\ldots\ldots a^5\pm5a^4b+10a^3b^2\pm10a^2b^3+5ab^4\pm b^5,$
$(a\pm b)^6=\ldots\ldots a^6\pm6a^5b+15a^4b^2\pm20a^3b^3+15a^2b^4\pm6ab^5+b^6.$

304. Collo stesso metodo si potrebbero formare le successive potenze.

Ma sarà egli necessario ricorrere sempre alla moltiplica? Non vi saranno regole generali per avere tosto lo sviluppo di una potenza qualunque $(a+b)^m$? L' immortale Newton soddisfece a questa domanda: ed è perciò che lo svilupppo di $(a+b)^m$ appellasi sviluppo del *Binomio di Newton.*

Prima però di venire a questo sviluppo si osservi ciò che generalmente si deduce dai due primi risultati del numero antecedente, e di cui ci serviremo per l'estrazione delle radici dei polinomi: *si ha il quadrato di un binomio qualunque, prendendo, 1.° il quadrato del primo termine del binomio proposto; 2.° $\pm$ il doppio prodotto del primo pel secondo termine; 3.° $+$ il quadrato del secondo termine.*

Similmente: *si ha il cubo o la potenza terza di un binomio, prendendo 1.° il cubo del suo primo termine; 2.° $\pm$ il triplo prodotto del quadrato del primo nel secondo; 3.° $+$ il triplo prodotto del primo nel quadrato del secondo; 4.° $\pm$ il cubo del secondo.*

505. Dal che si vede che il quadrato di un binomio è composto di tre termini, il cubo di quattro; ed in generale, come apparirà più chiaramente dallo sviluppo del Binomio di Newton, qualunque potenza di un binomio conterrà tanti termini quante sono le unità contenute nel numero che esprime la potenza stessa, più uno. Quindi se la potenza è pari, il numero de' termini nello sviluppo della potenza è dispari; e viceversa.

506. Ma veniamo alle regole date da Newton per ottenere senza bisogno del processo della moltiplica lo sviluppo di una potenza qualunque di un binomio $(a+b)$: e per procedere con chiarezza a parte a parte assegneremo le regole che riguardano i segni, le lettere, gli esponenti ed i coefficienti.

Regola riguardo ai segni. *Se ambidue i termini del binomio sono positivi, tutti quelli della potenza sono positivi; se ambidue negativi, per le potenze pari, tutti i termini sono positivi, e per le impari sono negativi. Se uno dei termini del binomio è positivo l'altro negativo, i termini della potenza sono alternativi, avendo il segno — quei termini ove trovansi le potenze dispari della quantità, che ha il segno negativo del binomio.*

Regola per le lettere. *Il primo ed ultimo termine dello sviluppo sono formati dalla prima ed ultima lettera del binomio rispettivamente, e gli altri termini intermedi le contengono ambidue moltiplicate tra loro.*

Regola per gli esponenti. *Il primo termine di tutte le potenze alle quali s'innalza un binomio, è formato dalla prima parte di esso elevata alla potenza di cui si tratta. Nei termini seguenti poi l'esponente di questa prima parte diminuisce di una unità in ciascun termine successivo, mentre l'esponente della seconda parte aumenta colla stessa legge in modo, che la diminuzione*

dell'una continua gradatamente fino all'ultimo termine, ove l'altra resta sola con esponente eguale a quello della potenza cercata. Perciò la somma degli esponenti di ambedue le parti in ciascun termine, eguaglia sempre l'esponente della potenza. E se la potenza è pari e per conseguenza il numero de' termini è dispari, gli esponenti delle due parti nel termine medio, sono eguali. Anzi generalmente gli esponenti sono eguali nel primo ed ultimo termine, nel secondo e penultimo, nel terzo e terzultimo ecc., ma situati l'uno in a l'altro in b, cioè l'uno nella prima, l'altro nella seconda parte del binomio.

Regola pei coefficienti. *Il coefficiente del primo ed ultimo termine in ogni sviluppo è sempre l'unità; il coefficiente di qualsivoglia termine intermedio si forma costantemente col moltiplicare il coefficiente del termine antecedente per l'esponente che la prima parte del binomio si trova avere in quel termine, e col dividere il prodotto di essi pel numero dei termini che precedono il termine di cui si vuole il coefficiente.*

507. Colle regole accennate, la cui esattezza or ora dimostreremo si possono formare, senza il processo della moltiplica le potenze tutte di un binomio qualunque: così si avrà:

$$(a+b)^7 = a^7+7a^6b+\frac{7.6}{2}a^5b^2+\frac{7.6.5}{2.3}a^4b^3+\frac{7.6.5.4}{2.3.4}a^3b^4$$

$$+\frac{7.6.5.4.3}{2.3.4.5}a^2b^5+\frac{7.6.5.4.3.2}{2.3.4.5.6}ab^6+b^7:$$

parimenti

$$(a+b)^8 = a^8+8a^7b+\frac{8.7}{2}a^6b^2+\frac{8.7.6}{2.3}a^5b^3+\frac{8.7.6.5}{2.3.4}a^4b^4$$

$$+\frac{8.7.6.5.4}{2.3.4.5}a^3b^5+\frac{8.7.6.5.4.3}{2.3.4.5.6}a^2b^6+\frac{8.7.6.5.4.3.2}{2.3.4.5.6.7}ab^7+b^8.$$

508. Osservando gli esempi ora proposti, si vede che tolto nel coefficiente del quinto termine del primo esempio il fattore 4 che è nel numeratore e nel denominatore, esso diviene lo stesso che quello del quarto termine. Parimenti tolto il fattore 5.4.3 quello del sesto termine è lo stesso di quello del terzo: come pure quello del settimo eguaglia quello del secondo tolto il fattore 2.3.4.5.6. Nel secondo esempio ancora, tolti i fattori comuni riesce il

coefficiente del sesto termine eguale a quello del quarto; il coefficiente del settimo eguale a quello del terzo, ed il coefficiente dell'ottavo eguale a quelle del secondo. In generale *qualunque sia la potenza a cui s' innalza il binomio, i coefficienti dei termini equidistanti dagli estremi sono eguali*, e ciò deriva dalla natura stessa delle regole date di sopra: quindi per risparmiare dei calcoli potremo stabilire come regola *che nello sviluppo delle potenze dispari* (le quali hanno un numero pari di termini, N.° 505) *giunti al primo dei due termini di mezzo, i coefficienti degli altri termini sono i già trovati in ordine inverso* (cominciando cioè dall'ultimo); *e nello sviluppo delle potenze pari* (le quali hanno un numero dispari di termini, N.° 505) *giunti al termine di mezzo, i coefficienti degli altri termini, sono i trovati prima di quello del termine di mezzo ma sempre in ordine inverso.* Quindi avremo

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + \frac{5.4}{2}a^3b^2 + \frac{5.4}{2}a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

509. Applicando le regole date (N.° 506) nel caso che l'esponente sia letterale ossia qualunque, avremo

$$(a\pm b)^m = a^m \pm ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}a^{m-3}b^3$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}a^{m-4}b^4$$

$$\pm\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3.4.5}a^{m-5}b^5 \ldots\ldots$$

e così fino ai due ultimi termini, che saranno

$$\pm\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-(m-2))}{2.3.4\ldots\ldots(m-2)(m-1}ab^{m-1} \mp b^m.$$

Questo sviluppo appunto, che esprime generalmente la formazione di una qualunque potenza del binomio $(a+b)$, è la così detta celebre formola del binomio di Newton; ed esso non è altro che l'espressione algebrica delle regole superiormente assegnate.

Noi daremo ora le prove della verità di questa formola generale, con che verremo altresì a dimostrare l'esattezza di quelle regole.

510. Riassumiamo la formola

$$(A)\quad (a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}a^{m-3}b^3 + \text{ecc.}$$

Moltiplicando ambidue i membri di questa eguaglianza per $(a+b)$ riesce

$$(a+b)^m(a+b) = a^{m+1} + ma^m b + \frac{m(m-1)}{2}a^{m-1}b^2$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}a^{m-2}b^3 + \text{ecc.}$$

$$+a^m b + ma^{m-1}b^2 + \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^3 + \text{ecc.}$$

cioè facendo le riduzioni e le semplificazioni che hanno luogo avremo

$$(B)\ (a+b)^{m+1} = a^{m+1} + (m+1)a^m b + \left(\frac{m(m-1)}{2} + m\right)a^{m-1}b^2$$

$$+\left(\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} + \frac{m(m-1)}{2}\right)a^{m-2}b^3 + \text{ecc.}$$

Ma si può trasformare il coefficiente $\frac{m(m-1)}{2} + m$: di fatto

$$\frac{m(m-1)}{2} + m = \frac{m(m-1)+2m}{2} = \frac{m(m-1+2)}{2} = \frac{m(m+1)}{2};$$

quindi al luogo del coefficiente $\frac{m(m-1)}{2} + m$ potremo mettere $\frac{(m+1)(m)}{2}$.

Parimenti si può trasformare il coefficiente

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} + \frac{m(m-1)}{2}:$$

di fatto

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} + \frac{m(m-1)}{2} = \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}$$

$$+\frac{m(m-1).3}{2.3}=\frac{m(m-1)(m-2+3)}{2.3}=\frac{m(m-1)(m+1)}{2.3};$$

dunque al luogo del coefficiente $\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}+\frac{m(m-1)}{2}$ potremo porre $\frac{(m+1)(m)(m-1)}{2.3}$. E con analoghe operazioni si potrebbero trasformare i coefficienti dei termini che verrebbero dopo, e che sono compresi nell'ecc.

Sostituendo perciò nella (B) questi coefficienti trasformati, essa diviene

$$(C)\quad (a+b)^{m+1}=a^{m+1}+(m+1)a^m b+\frac{(m+1)(m)}{2}a^{m-1}b^2+$$
$$+\frac{(m+1)(m)(m-1)}{2.3}a^{m-2}b^3+\text{ ecc.}$$

Ora senza eseguire la moltiplica noi avremo ottenuto un identico risultato se nella (A) avessimo posto al luogo di m, $m+1$: essa di fatti diveniva

$$(a+b)^{m+1}=a^{m+1}+(m+1)a^m b+\frac{(m+1)(m)}{2}a^{m-1}b^2$$
$$+\frac{(m+1)(m)(m-1)}{2.3}a^{m-2}b^3\text{ ecc.}$$

equazione identica alla (C) che è il risultato della moltiplica.

Concludiamo adunque, che se l'equazione (A) sussiste per un qualche determinato valore della m; p. e. pel valore $m=2$ essa sussisterà ancora pel valore $m=3$; perchè tanto è mettere al luogo di m, $m+1$ nella (A), quanto è moltiplicare ambidue i membri della (A) per $(a+b)$.

Ora pel valore $m=2$ la (A) sussiste perchè (riescendo zero tutti i termini che hanno il fattore $(m-2)$) essa diviene $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, la quale equazione è già stata comprovata vera (N.° 303).

Quindi siccome l'equazione (A) è vera pel valore $m=2$, sarà vera anche pel valore $m=3$. Ma con eguale ragionamento si prova, che, siccome è vera pel valore $m=3$, riescirà vera anche pel valore $m=4$; e quindi anche pel valore $m=5$, $m=6$, $m=7$ ecc., ed in generale sarà vera per qualunque valore intero positivo di m.

Essa è vera altresì se m fosse negativo, fratto, irrazionale, ed anche immaginario; ma la dimostrazione in questi casi richiede dottrine superiori a quelle che possono aver luogo in un libro elementare.

511. Dietro questa formola del binomio di Newton sarà facile al giovane innalzare a qualunque potenza un binomio qualunque. Debbasi p. e. innalzare alla quarta potenza il binomio $3c^2+2d^3$. La formola in questo caso sarà

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

fatto $a=3c^2$, $b=2d^3$ si otterrà

$$(3c^2+2d^3)^4=81c^8+216c^6d^3+216c^4d^6+96c^2d^9+16d^{12}.$$

512. La formola Newtoniana serve anche per l'innalzamento a potenza de' polinomi. Sia $(a+b+c)^m$; ponendo $b+c=x$, avremo (N.° 509)

$$(a+x)^m=a^m+ma^{m-1}x+\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}x^2$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}a^{m-3}x^3+\text{ ecc.}$$

nella quale sostituendo in luogo di x; x^2, x^3 ecc. $(b+c)$, $(b+c)^2$, $(b+c)^3$ ecc., si otterrà:

$$(a+b+c)^m=a^m+ma^{m-1}(b+c)+\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}(b+c)^2$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}a^{m-3}(b+c)^3$$
$$=a^m+ma^{m-1}(b+c)+\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}(b^2+2bc+c^2)$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}a^{m-3}(b^3+3b^2c+3bc^2+c^3)+\text{ ecc.}$$

Se si faccia $m=2$, si ha:

$$(a+b+c)^2=a^2+2a(b+c)+b^2+2bc+c^2$$
$$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2.$$

513. Perciò il quadrato di un trinomio conterrà sei termini, *cioè il quadrato del primo termine, il doppio del primo*

nel secondo, il quadrato del secondo, il doppio del primo e del secondo nel terzo, il quadrato del terzo.

Se si ponga $m=3$, si avrà:

$$(a+b+c)^3=a^3+3a^2(b+c)+3a(b^2+2bc+c^2)+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$$

$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+3ae^2+6abc+3b^2c+3bc^2+c^3.$$

314. Sia il quadrinomio $(a+b+c+d)^m$; ponendo $b+c+d=y$, avremo:

$$(a+y)^m$$

$$=a^m+ma^{m-1}y+\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}y^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}a^{m-3}y^3+\text{ecc.},$$

e sostituendo in luogo di y, y^2, y^3 ecc. le potenze del trinomio $b+c+d$, si otterrà:

$$(a+b+c+d)^m$$

$$=a^m+ma^{m-1}(b+c+d)+\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}(b+c+d)^2+\ \text{ecc.}$$

Se si faccia $m=2$, si avrà:

$$(a+b+c+d)^2=a^2+2a(b+c+d)+(b+c+d)^2$$

$$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2+2ad+2bd+2cd+d^2.$$

315. Quindi il quadrato di un quadrinomio conterrà dieci termini, *cioè il quadrato del primo termine, il doppio del primo nel secondo, il quadrato del secondo, il doppio del primo e secondo nel terzo, il quadrato del terzo, il doppio del primo, secondo e terzo nel quarto, e il quadrato del quarto.*

Da quanto si è dimostrato ne segue, che l'elevazione a potenza intera e positiva di un polinomio qualunque può farsi dipendere dalla potenza medesima di un binomio.

316. Se il binomio $a+b$ si dovesse innalzare a potenza negativa, cioè se si ponesse l'esponente $m=-m$, allora, secondo la formola generale stabilita, si avrebbe (N.° 154)

$$(a+b)^{-m}=\frac{1}{(a+b)^m}=a^{-m}-ma^{-m-1}b+\frac{m(m+1)}{2}a^{-m-2}b^2-\text{ecc.}$$

$$=\frac{1}{a^m}-m\frac{b}{a^{m+1}}+\frac{m(m+1)}{2}\times\frac{b}{a^{m+2}}-\frac{m(m+1)(m+2)}{2.3}\times\frac{b^3}{a^{m-3}}+\text{ecc.}$$

e in questo caso la formola va all'infinito.

317. Se l'esponente m si faccia $=1$, allora si avrà:

$$(a+b)^{-m}=\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}+\text{ecc.}$$

$$=\frac{1}{a}\left(1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^3}{a^3}+\text{ecc.}\right).$$

318. Questa serie che si ottiene per mezzo del binomio di Newton, e che si sarebbe potuto ottenere anche per mezzo della divisione, serve a sviluppare in serie una frazione qualunque. Abbiasi di fatto la frazione generale $\frac{c}{a+b}$; moltiplicati i due membri dell'eguaglianza precedente per c si otterrà

$$\frac{c}{a+b}=\frac{c}{a}\left(1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^3}{a^3}+\frac{b^4}{a^4}-\text{ecc.}\right)\ (A);$$

si otterrà cioè la frazione $\frac{c}{a+b}$ espressa per un numero indefinito di termini.

319. Se si supponga $a>b$ ogni termine della serie (A) supera quello che gli viene dopo, crescendo più il denominatore del numeratore: e quindi quanti più termini si prendono della serie stessa, tanto più si avvicina al vero valore della frazione $\frac{c}{a+b}$, essendo sempre minori quelli che vengono dopo e che si tralasciano: al contrario se $a<b$, ogni termine della serie stessa è minore di quello, che gli viene dopo; e quindi poco si avvicinerebbe al vero valore della frazione prendendo un numero anche grandissimo di quei termini; anzi quanti più se ne prendessero, tanto più vi si discosterebbe. Nel primo caso la serie dicesi *convergente*, nel secondo *divergente*. È poi chiaro che la serie nel primo caso sarà tanto più convergente quanto è più grande a in confronto di b; e nel secondo caso sarà tanto più divergente quanto è più piccolo lo stesso a in confronto di b.

320. Pertanto volendo ottenere il valore approssimato di una frazione per mezzo de' termini di una serie, è necessario stabilire una serie convergente; e quanto più si stabilirà convergente tanto più sarà approssimato il valore che si ottiene anche calcolando pochi termini.

321. Non vi è poi difficoltà a stabilire per ciascuna frazione data questa serie convergente: basta fare il numeratore di quella frazione eguale a c, e spezzare il denominatore in due parti disuguali, la maggiore delle quali si pone eguale ad a, la minore eguale a b, e quindi sostituire questi valori nella serie (A).

Abbiasi p. e. la frazione $\frac{1}{9}$: fatto $c=1$, si può fare $a=7$, $b=2$ e si otterrà dall'(A) la serie convergente

$$\frac{1}{9}=\frac{1}{7}-\frac{2}{7^2}+\frac{2^2}{7^3}-\frac{2^3}{7^4}+\frac{2^4}{7^5}\ \text{ecc.}$$

Se si fosse fatto $a=8$, $b=1$ si otteneva la serie

$$\frac{1}{9}=\frac{1}{8}-\frac{1}{8^2}+\frac{1}{8^3}-\frac{1}{8^4}+\ \text{ecc.}$$

la quale sarebbe stata assai più convergente dell'altra; per essere in questa a in confronto di b assai più grande che non nell'antecedente.

Se si fosse fatto $a=10$, $b=-1$ si otteneva la serie

$$\frac{1}{9}=\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\ \text{ecc.}$$

più convergente ancora dell'antecedente.

Nella prima bisogna calcolare quattro termini per avere un valore approssimato della frazione $\frac{1}{9}$, il quale varii del vero meno di $\frac{1}{1000}$, nella seconda basta calcolare tre termini, e il divario dal vero valore è minore di $\frac{5}{10000}$, nella terza calcolando tre termini il divario è assai minore di $\frac{2}{10000}$.

CAPO VI.

Della estrazione delle Radici de' Polinomi, e delle radici de' numeri.

322. L'estrazione della radice de' polinomi è basata su gli stessi principii di quella de' monomi, trattandosi anche qui

di scoprire quella quantità, che moltiplicata una, due, tre ecc. volte per se stessa, formò il polinomio di cui cercasi la radice. Nelle quantità commensurabili, essa trovasi con facilità, ed eccone il metodo.

323. Vogliasi determinare la radice quadrata del trinomio $a^2+2ab+b^2$. Se questa quantità è un quadrato perfetto di un polinomio deve contenere (N.° 304, 312 seg.) il quadrato del primo termine della radice, il doppio del primo negli altri, ed il quadrato di questi altri. Perciò *si cerchi dapprima un termine del polinomio proposto, che sia quadrato perfetto.* Si presenta tosto l'a^2 che è tale; *se ne estragga la radice quadrata;* questa sarà a, che si segnerà nella radice come può vedersi nello specchio dell'operazione sottoposta. *Elevata al quadrato la radice trovata si sottragga dal polinomio proposto*, e si avrà il residuo $2ab+b^2$. In questo residuo deve trovarsi il doppio del primo termine della radice cercata moltiplicato pel secondo. Perciò *si faccia il doppio del termine trovato della radice*, esso sarà $2a$; *si trovi nel residuo un termine che sia per esso divisibile*; si vede che lo è $2ab$ *ed eseguita la divisione il quoto col suo segno si scriva accanto alla radice trovata*: scritto col suo segno questo quoto che nel nostro caso è b accanto all'altro termine della radice che si è trovato, cioè accanto ad a, e scritto ancora accanto al divisore $2a$, si moltiplichi per questo quoto b, il $2a+b$; cioè *si moltiplichi questo quoto, pel divisore adoperato, e per se stesso*, se b è la seconda parte della cercata radice *il prodotto che si ottiene deve essere contenuto in quel residuo;* perchè $2a+b$ moltiplicato per b dà appunto il doppio del primo termine della radice nel secondo, ed il quadrato del secondo; e tutto questo (N.° 304, 312 e seg.) deve contenersi in un quadrato perfetto: quindi *se vi è contenuto senza alcun resto la trovata è esattamente la radice, che si cercava;* perchè soddisfa a tutte le condizioni che derivano dall'innalzamento a potenza di un binomio. Avviene poi diffatto nel nostro caso che sottratto il prodotto di b in $2a+b$ non ha luogo alcun residuo, perciò la radice quadra del trinomio proposto è $a+b$: siccome poi la radice d'ordine pari ammette sempre doppio segno (N.° 269), perciò sarà radice del proposto trinomio anche $-a-b$.

Ecco lo specchio dell'operazione:

Trinomio proposto.	*Radice.*
$a^2+2ab+b^2$	$a+b$
$-a^2$	
0	

$$\begin{array}{llll} 1.^{\circ}\text{ Residuo} & 2ab+b^2 & \text{Divisore} & 2a+b \\ & -2ab-b^2 & & b \\ \hline & 0 \quad\; 0 & & \end{array}$$

324. Nel caso che il prodotto di quel quoto b, che si era ottenuto moltiplicato pel divisore adoperato $2a$, e per se stesso avesse lasciato qualche resto nel sottrarlo da quel primo residuo; allora o il polinomio proposto non ammetterebbe radice esatta, oppure la radice conterrebbe più di due termini. Per conoscere quale delle due cose si verifichi non si ha a far altro che proseguire l'operazione, cioè *duplicando di nuovo tutta la radice trovata, cercando nel nuovo residuo un termine che sia divisibile pel doppio del primo termine della radice, moltiplicando pel quoto che si ottiene da questa divisione tutto il doppio della radice, ed insieme il quoto stesso (che diviene col suo segno terzo termine della radice), sottraendone il prodotto da quel residuo ultimo che si aveva, e proseguendo le stesse operazioni finchè si può, se anche da questa sottrazione ne escisse un nuovo residuo. Se si giunge infine ad un residuo nullo, allora il polinomio proposto ammetterà una radice esatta che sarà la trovata; se invece si giugne ad un residuo sul quale è impossibile l'accennato processo, allora il polinomio proposto non ammette esatta radice.*

L'esercizio renderà facile allo studioso l'applicazione di questo metodo, che deriva dalle teorie esposte (N.° 304, 312 e seg.) sull'innalzamento al quadrato di un binomio, trinomio ecc. Per facilitare al giovane l'esercitarsi da sè in questi calcoli poniamo un altro esempio, sul quale riescirà più chiara la teoria stessa.

325. Sia da trovarsi la radice quadrata del polinomio

$$9b^4-12ab^3+28a^2b^2-16a^3b+16a^4.$$

La radice quadra del primo termine è $3b^2$, che si segna in radice, come si è insegnato di sopra. Il suo qua-

drato $9b^4$ si sottragga dal polinomio proposto, e si avrà per primo residuo

$$-12ab^3+28a^2b^2-16a^3b+16a^4.$$

Prendasi il doppio della radice trovata, cioè $6b^2$, pel quale si divida $-12ab^3$, e si avrà il quoto $-2ab$, che si segnerà accanto alla radice trovata, accanto al divisore, e sotto il divisore. Moltiplicando quindi $6b^2-2ab$ per $-2ab$ si otterrà il prodotto $-12ab^3+4a^2b^2$, che sottratto dal polinomio residuo, darà un secondo residuo

$$24a^2b^2-16a^3b+16a^4.$$

Si formi novellamente il doppio dei due termini della radice, e sarà $6b^2-4ab$. Dividendo ora il primo termine del secondo residuo, cioè $24a^2b^2$ per $6b^2$, si avrà il quoto $4a^2$ che sarà il terzo termine della radice, e scritto come sopra; e fatta la moltiplicazione, ne risulterà il prodotto $24a^2b^2-16a^3b+16a^4$, che sottratto dal dividendo rispettivo, non lascia alcun avanzo, e perciò la radice cercata sarà il trinomio $3b^2-2ab+4a^2$, come può vedersi dal seguente specchio:

$$\begin{array}{ll|l} & \textit{Polinomio proposto.} & \textit{Radice.} \\ & 9b^4-12ab^3+28a^2b^2-16a^3b+16a^4 & 3b^2-2ab+4a^2 \\ & -9b^4 & \\ & 0 & \\ 1.^{\circ}\text{ residuo} & -12ab^3+28a^2b^2-16a^3b+16a^4 & 6b^2-2ab \\ & +12ab^3-4a^2b^2 & \quad\;\; -2ab \\ & 0 & \\ 2.^{\circ}\text{ residuo} & 24a^2b^2-16a^3b+16a^4 & 6b^2-4ab+4a^2 \\ & -24a^2b^2+16a^3b-16a^4 & \qquad\quad 4a^2 \\ & 0 \qquad\; 0 \qquad\; 0 & \end{array}$$

326. Per non tentare alcune volte invano l'estrazione della radice quadrata, e per ovviare ad alcune difficoltà, che

potrebbero presentarsi alla mente dello studioso nel praticare questo metodo, sarà bene avvertire:

1.° Che un binomio non può mai essere un perfetto quadrato, giacchè il quadrato del più semplice polinomio, cioè del binomio, è composto di tre termini distinti, e che non possono andar soggetti a riduzione (N.° 304).

2.° Che il quadrato di qualsivoglia quantità negativa essendo positivo, un binomio della forma $p^{2n} \pm 2p^n q^m - q^{2m}$, non può essere perfetto quadrato di un binomio.

3.° Che un trinomio della forma $p^{2n} \pm xy + q^{2m}$, sarà un perfetto quadrato, quando determinate le radici p^n e q^m del primo e terzo termine, sia $2p^n q^m = \pm xy$.

4.° Che un polinomio sebbene non composto di $\frac{n(n+1)}{2}$ (*) termini, può tuttavia essere perfetto quadrato di un altro polinomio di n termini, e ciò accadrà, quando sieno state fatte delle riduzioni nell'innalzamento di esso a potenza, come accadde in quello da noi superiormente proposto (N.° 325), il quale, mediante la riduzione dei due termini $4a^2b^2 + 24a^2b^2$, fu ridotto ai cinque termini $9b^4 - 12ab^3 + 28a^2b^2 - 16a^3b + 16a^4$.

327. Il metodo per estrar la radice quadra dai numeri è lo stesso di quello che si è insegnato per le lettere, prescindendo da poche accidentalità provenienti dalla confusione che soffrono le cifre innalzate al quadrato, quando si riuniscono in un sol numero. Così nel binomio $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, se si faccia $a = 20$, $b = 6$, si avrà:

$$(20+6)^2 = 400 + 240 + 36;$$

ma se i prodotti si riuniscano nel numero 676 cui equivalgono, essi non saranno più riconoscibili.

(*) Nota. *Un polinomio di* n *termini, innalzato al quadrato se non si è dato luogo ad alcuna riduzione riesce di* $\frac{n(n+1)}{2}$ *termini, come può dedursi per analogia dagli esempi recati* (N.° 304, 312 e seg.).

328. Pertanto dato un numero intero composto di più cifre può domandarsi:

1.° Di quante cifre in genere se ne componga la radice.

2.° Quali sieno queste cifre.

Per rispondere al primo quesito, si rifletta che il massimo quadrato delle nove cifre semplici è $81 = 9^2$. Quindi tutti i numeri composti di una o due cifre, non potranno averne che una sola per radice. Essendo poi $(10)^2 = 100$, $(100)^2 = 10000$, è chiaro che i numeri di due cifre, cioè dal 10 fino al 99 inclusivamente, debbono contenere ne' loro quadrati tre o quattro cifre; come pure essendo $(1000)^2 = 1000000$, ne segue che i numeri di tre cifre, dal 100 cioè fino al 999 inclusivamente, conterranno nei loro quadrati cinque o sei cifre, e così successivamente. Dalle cifre dunque componenti un dato numero, potrà conoscersi quante debbano essere le cifre della sua radice. Per esempio il numero 2025 è >100 e <10000, quindi la sua radice sarà >10 e <100, vale a dire il 2025 avrà per radice un numero composto di due cifre. Similmente 15129 >10000 e <1000000, avrà la sua radice >100 e <1000, e perciò composta di tre cifre. Essendo poi p e $p+1$ due numeri consecutivi, la differenza de' loro quadrati p^2, $p^2 + 2p + 1$, sarà $2p+1$; onde può dedursi che tanto più notabile sarà una tal differenza, quanto più grandi sono i numeri p e $p+1$.

329. Conosciuto che sia il numero delle cifre delle quali deve comporsi la radice di un dato numero, possiamo determinare quali debbano essere in ispecie con un ragionamento analogo a quello che abbiam fatto per ottenere la radice di un polinomio algebrico. Vogliasi p. e. la radice di 144. Il numero che si cerca deve esser composto di due cifre (N.° 328) cioè di decine ed unità; quindi il 144 deve contenere il quadrato delle decine, il doppio prodotto delle decine nelle unità, e il quadrato delle unità. Il quadrato delle decine non può trovarsi che nelle centinaia del numero proposto, perchè $(10)^2 = 100$. Si separi dunque, mediante una virgola, la cifra delle centinaia dalle cifre delle unità e delle decine. Ciò fatto si determini la radice quadrata delle centinaia, la quale è 1, ovvero 10, che elevata al quadrato dà 100, e sottratto questo prodotto dal numero proposto si avrà il residuo 44. In questo residuo dovendosi contenere il doppio

prodotto delle decine per le unità, è chiaro che questo doppio prodotto non può trovarsi che nella cifra 4 delle decine, cioè nel numero 40. Dividendo la cifra 4 delle decine per 2 doppio della radice trovata 1, si ha il quoto 2, che sarà la cifra delle unità della radice; onde la radice di 144 sarà 12, come può verificarsi elevando il dodici al quadrato, o scrivendo, come si è fatto negli esempi algebrici, il quoto 2 alla destra del divisore e sotto il divisore, e moltiplicando 22 per 2 si avrà il prodotto 44, che sottratto dal primo residuo 44, non lascia alcun avanzo. Eccone l'operazione:

Numero.	*Radice.*
1,44	12
1	
44	22
44	2
0	

330. Si trovi anche la radice del numero 186624. La radice che si cerca deve essere composta di tre cifre, cioè di centinaia, decine ed unità (N.° 328) perciò il dato numero deve contenere il quadrato delle centinaia, il doppio prodotto di queste nelle decine, il quadrato delle decine, il doppio prodotto delle centinaia e delle decine nelle unità, e il quadrato delle unità. Il quadrato delle centinaia non può trovarsi che nelle decine di migliaia, perchè $(100)^2 = 10000$. Separo dunque le prime due cifre a sinistra, cioè il 18. La radice prossima di esso è 4, e questa sarà la cifra delle centinaia della radice; elevata al quadrato darà 16, che, sottratto dal 18, darà 2 di avanzo. Unendo a questo le altre cifre del numero proposto, ne risulta il numero 26624; ma siccome il doppio prodotto delle centinaia per le decine, e il quadrato delle decine deve contenersi nelle centinaia, fa d'uopo separare le cifre delle decine e delle unità, e si avrà il numero delle centinaia 266. Questo numero deve dividersi per 8, doppio della radice trovata; e poichè il doppio prodotto delle centinaia per le decine non può trovarsi nelle centinaia, quindi nel fare questa divisione, si trascura l'ultima cifra 6. Fatta pertanto la divisione di 26 per 8, si ottiene il quoto 3,

il quale esprimerà la cifra delle decine nella radice. Si segni questo quoto nella radice, a destra del divisore e sotto di esso, e moltiplicando 83 per 3, si sottragga il prodotto 249 da 266, e si avrà il residuo 17, a cui unite le altre due cifre 24, si avrà 1724. Con un ragionamento simile all'antecedente, si prova che il doppio prodotto delle centinaia e delle decine non può essere contenuto che nelle 172 decine, per cui dovendo dividere questo numero per 86, cioè a dire pel doppio prodotto della radice trovata 43, è d'uopo trascurare la cifra 4 delle unità. Eseguita questa divisione, il quoto 2, che si ottiene, sarà la terza cifra, o la cifra delle unità della radice; e scritta al solito, e fatta la moltiplicazione e sottrazione come sopra, non si ha alcun avanzo, e perciò la radice cercata sarà 432. Si osservi l'operazione:

Numero.	*Radice.*
18,6624	432
16	
266,24	83
249	3
1724	862
1724	2
0	

331. Dal ragionamento precedente ne segue la regola generale per determinare la radice quadrata dei numeri interi. *Si divida il numero proposto in periodi di due cifre l'uno, cominciando a destra, e se le cifre del numero proposto saranno in numero impari, il primo membro a sinistra ne conterrà una sola. Il numero de' periodi è eguale al numero delle cifre delle quali sarà composta la radice. Si trovi la radice prossima del primo periodo a sinistra, la quale non potrà mai essere che di una sola cifra* (N.° 328). *Il suo quadrato si sottragga dalle cifre di esso periodo, e al residuo, se vi sarà, ottenuto da questa sottrazione, si uniscano le cifre del periodo seguente. Trascurando l'ultima cifra a destra, si dividano le altre pel doppio della radice trovata, e il quoto si segni a destra della radice trovata e a destra del divisore. Si moltiplichi il quoto pel divisore unitamente alla*

cifra della radice segnatavi accanto, e il prodotto si sottragga dalle cifre del residuo e del secondo periodo. Al nuovo residuo ottenuto da questa operazione si uniscano le cifre del terzo periodo. Trascurando, come sopra, l'ultima cifra a destra, le altre si dividano pel doppio della radice trovata. Il quoto si segni al solito nella radice e a destra del divisore, e poscia moltiplicando il quoto per questo numero, se ne sottragga il prodotto dalle cifre del secondo residuo seguìte da quelle del terzo periodo. Una tale operazione si continua finchè saranno esauriti tutti i periodi.

332. Se nel corso delle operazioni che si fanno per trovare la radice quadra dei numeri complessi accadesse che dopo avere unite le cifre di un periodo a quelle di un dato residuo, e trascuratane l'ultima a destra, le altre non fossero divisibili pel doppio della radice trovata, *allora dovrà segnarsi zero nella radice*, e quindi, unendo le cifre del periodo seguente, continuare l'operazione, come si è detto. Così estraendo la radice quadrata dal numero 161604 si troverà con simile avvertenza che la radice è 402.

333. Debbasi estrarre la radice dal numero 1444. La radice del primo periodo 14 è 3. Sottratto il quadrato 9 dal 14, si ha il residuo 5, a cui unito il periodo seguente ne risulta 544. Trascurato l'ultimo 4, e diviso il 54 per il doppio della radice 3 trovata, cioè per 6, si avrà 9 di quoto. Ma ponendo 9 alla destra del divisore 6, e moltiplicando 69 per 9, si ha il prodotto 621 maggiore di 544, da cui si deve sottrarre: dunque il quoto 9, quantunque risulti dalla divisione, è troppo grande per servire all'uopo; e perciò in questo ed in simili casi *converrà diminuire di un' unità questo quoto*, prendendo 8 invece di 9. E di fatto, moltiplicato il 68 per 8, riesce il prodotto 544, che sottratto dà zero di resto; onde il 38 è la radice cercata. Con simile avvertenza si troverà p. e. che la radice quadrata di 128881 è il numero 359.

334. Se terminato il calcolo necessario alla estrazione della radice si avesse un qualche residuo, ciò indicherebbe che il numero proposto non è un perfetto quadrato. Questo residuo poi deve esser minore del doppio di tutta la radice trovata più l'unità (N.° 328), altrimenti le cifre della radice non sarebbero ben determinate. Così, coi metodi accennati, estraendo la radice quadrata dal numero p. e. 1287, si trova 35 per radice, e rimane il resto 62, che è minore di 71, cioè del doppio della radice trovata più l'unità.

335. Quando non abbisogni di molta esattezza nella radice, si può trascurare l'ultimo residuo, il quale neppure darebbe un' unità di più per la radice; ma se essa voglia valutarsi, si aggiungano al residuo due zeri proseguendo col solito metodo l'estrazione di una nuova cifra della radice; quindi al nuovo residuo si aggiungano altri due zeri, e così via via fino che si vuole, e le cifre ottenute dippiù nella radice per ogni coppia dei zeri aggiunti, saranno i decimali, che ha la radice se non esatta, almeno più approssimata al vero. Così operando nell' estrazione della radice del numero anzidetto 1287, si troverà che la radice approssimata con quattro decimali è 35,8747, la quale varia dalla radice esatta meno di $\frac{1}{10000}$.

336. Per estrarre la radice quadra dai decimali, fa d'uopo primieramente render pari, se non lo sia, il numero delle cifre decimali nel numero proposto con aggiugnervi in fine degli zeri, che già non ne alterano il valore (N° 71); quindi se ne estrae la radice al solito, e, finita l'operazione, si separa a destra della radice un numero di cifre che sia la metà del numero dei decimali della quantità data. Così la radice di 21,935, volendo tre decimali, si ha aggiugnendo tre zeri, cioè estraendola da 21,935000, e sarà 4,683. Così pure la radice di 0,0054, con tre decimali sarà 0,073 ecc.

337. La radice di una frazione si ha estraendola da ciascuno de' suoi termini. Così $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, perchè $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$; $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, essendo $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Che se i due termini della frazione non fossero numeri quadrati, s' indicherà l'estrazione col segno radicale, o si ridurrà il rotto a decimali, estraendone quindi la radice.

Estrazione della radice cuba.

338. Essendo il cubo di un binomio composto di quattro termini (N.° 304), cioè del cubo della prima parte della radice, del triplo del quadrato della prima parte nella seconda, del triplo del quadrato della seconda nella prima, e finalmente

del cubo della seconda parte, sarà facil cosa, ragionando come si è fatto per la radice quadra, di trovare il metodo per estrarre la radice cubica da un dato polinomio commensurabile. Da alcuni esempi particolari si intenderà facilmente quale sia in generale questo metodo.

Sia da estrarsi la radice cubica dal polinomio

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Dal termine a^3 che è un cubo perfetto si estragga la sua radice cubica a, e si scriva al luogo delle radici, sottraendo poscia il suo cubo a^3 da tutto il polinomio. Nel residuo $-3a^2b + 3ab^2 - b^3$ si cerchi un termine, che sia esattamente divisibile pel triplo quadrato dell' a trovato, cioè per $3a^2$. Il termine $-3a^2b$ è appunto tale. Si divida questo $-3a^2b$ per quel triplo quadrato $3a^2$; il quoto $-b$ dovrà essere la seconda parte della radice cercata. Per assicurarsi che lo sia, dal primo residuo si sottragga il triplo quadrato del primo termine della radice nel secondo, cioè $-3a^2b$, il triplo del primo nel quadrato del secondo, cioè $3ab^2$; il cubo del secondo, cioè $-b^3$. Siccome, eseguita tale sottrazione, col cangiare i segni al sottraendo non si ha alcun avanzo, converrà concludere, che la vera radice cubica del polinomio proposto è $a - b$.

Ecco lo specchio dell' operazione:

	$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$a - b$ Radice
	$-a^3$	
Residuo	$-3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$3a^2$ Divisore
	$3a^2b - 3ab^2 + b^3$	
	0 0 0	

339, Per un altro esempio si estragga la radice cubica dal polinomio

$$27a^6b^3 - 135a^4b^2m + 225a^2bm^2 - 125m^3.$$

Dal termine $27a^6b^3$, che è un cubo perfetto, estratta la radice terza si ha $3a^2b$, che sarà il primo termine della

radice cercata. Sottraendo il cubo di questo termine dal polinomio proposto rimane il residuo $-135a^4b^2m + 225a^2bm^2 - 125m^3$. Cerchisi in esso un termine che sia divisibile pel triplo quadrato di $3a^2b$, cioè per $27a^4b^2$; si trova che lo è $-135a^4b^2m$. Il quoto $-5m$ che ne risulta dovrà essere il secondo termine della radice. Per assicurarsi che lo sia, sottraggasi dal residuo il triplo quadrato di $3a^2b$ in $-5m$, il triplo di $3a^2b$ nel quadrato di $-5m$, ed il cubo di $-5m$. Siccome eseguita questa sottrazione non rimane residuo alcuno, sarà $3a^2b - 5m$ l'esatta radice cercata. Ecco lo specchio dell' operazione:

	$27a^6b^3 - 135a^4b^2m + 225a^2bm^2 - 125m^3$	$3a^2b - 5m$ Radice
	$-27a^6b^3$	
Residuo	$-135a^4b^2m + 225a^2bm^2 - 125m^3$	$27a^4b^2$ Divisore
	$135a^4b^2m - 225a^2bm^2 + 125m^3$	
	0 0 0	

Un metodo poi per assicurarsi che la trovata radice sia l'esatta, sarebbe quello di innalzare al cubo questa radice per vedere se si riproduce il polinomio proposto.

340. Se trovati due termini della radice, ed eseguite le sottrazioni indicate superiormente rimanesse ancora un residuo, allora converrebbe procedere alla ricerca del terzo termine della radice. Per fare ciò, i due termini trovati si considereranno come formanti la prima parte della radice stessa, e nel resto si opererebbe nel modo indicato.

Si voglia la radice cubica del polinomio

	$a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$	$a + b + c$ Radice
	$-a^3$	
1. res.	$3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$	$3a^2$ 1. Divisore
	$-3a^2b \quad -3ab^2 \quad -b^3$	$3a^2 + 6ab + 3b^2$ 2. Div.
2. res.	$3a^2c + 6abc + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$	
	$-3a^2c - 6abc - 3ac^2 - 3b^2c - 3bc^2 - c^3$	
	0 0 0 0 0 0	

Dopo aver trovati i due termini della radice $a+b$, e fatto il triplo del quadrato di questo binomio, si è diviso il primo termine $3a^2c$ del secondo residuo pel primo termine $3a^2$ di esso triplo quadrato, e si è ottenuto il quoto c per terzo termine della radice del polinomio proposto. Dal secondo residuo poi si è sottratto il triplo del quadrato della prima parte della radice moltiplicato per c, $3a^2c+6abc+3ac^2$, il triplo quadrato di c per la prima parte della radice stessa, ossia $3ac^2+3bc^2$, e finalmente il cubo c^3 della seconda parte, per cui si è ottenuto un residuo nullo.

341. Quante volte nel processo dell' operazione si giugnesse a non potere in alcun modo dividere l'ultimo residuo pel triplo quadrato della parte di radice già trovata, questo sarebbe un segno evidente, che il polinomio non ammette una radice cubica esatta.

342. Per estrarre la radice cubica dai numeri, fa d'uopo prima di tutto conoscere i cubi delle cifre semplici.

Radici	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9
Cubi	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729.

Ragionando su questi, come si fece sui quadrati (N.° 328), si trova, che per estrar la radice cuba da un numero complesso bisogna dividerlo in membri di tre cifre ciascuno, cominciando a destra.

Vogliasi p. e. la radice cuba di 74088.

Si divida il dato numero in membri, e poichè non ne ha che due, è chiaro che la radice deve avere due cifre. Si prenda la più vicina radice cuba di 74, che è 4, e si scriva in radice. Da 74 si sottragga il cubo di 4, e al resto 10 si unisca la prima cifra zero del secondo membro e si avrà 100. Questo si divida pel triplo quadrato della radice 4, cioè per 48; il quoziente è 2. Sottratto da 100 il prodotto del quoziente 2 per 48, triplo quadrato del 4 trovato, sottratto cioè da 100 il 96, si ha il residuo 4. Abbassato accanto al 4 la seconda cifra 8 del secondo membro, si ha 48. Da esso si sottragga il triplo di 4 nel quadrato del quoziente 2, si sottragga cioè 48, si ha per residuo 0. Accanto a questo residuo (che qui è 0) si abbassi la terza cifra 8 del secondo membro, si ha 8. Da esso si sottragga il cubo del quoziente 2, cioè 8, e non rimanendo alcun resto, non solo il 2 è cifra

della radice, ma con esso la radice stessa riesce esatta. Ecco lo specchio dell'operazione:

```
N.° 74,088 | 42 Radice
  --64     |
-----------|
 48/100
    --96
  ------
      48
    --48
  ------
       8
     --8
  ------
       0
```

Facendo in fatti il cubo di 42, si otterrà il numero proposto, il che prova la verità dell'operazione.

Le ragioni di questo metodo di processo le troverà da sè facilmente lo studioso essendo analoghe alle arrecate (N.° 329, 330) per l'estrazione della radice quadrata. Si avverta poi che anche nell'estrazione della radice cubica dai numeri, conviene avere le avvertenze accennate (N.° 332, 333) per le radici quadrate.

343. Se il numero fosse composto di più di sei cifre ammetterebbe più di due cifre nella radice (N.° 342); ed in questo caso trovate le due prime cifre per trovare la terza si tratterebbero quelle due prime come se fossero una cifra sola: così trovate le tre prime, esse si tratterebbero come una cifra sola per trovare la quarta ecc.

344. Nel caso che il numero proposto non fosse perfetto cubo, e che estrattane la radice più prossima, si volesse tener conto del resto, bisognerebbe cercare dei decimali per radice, e questi si troverebbero aggiugnendo ad esso resto tre zeri tante volte quanti decimali si desiderano nella radice, e continuare l'operazione al solito.

345. Per estrarre la radice cuba dai decimali, si riduce il dato numero ad avere 3, 6, 9, 12 ecc. decimali coll'aggiungervi dei zeri; poscia se ne estrae la radice come se non vi fosse virgola, ed eseguita che sia l'operazione, si separa a

destra della radice un numero di cifre, che sia il terzo del numero dei decimali della quantità data. Così per estrarre la radice cuba da 6,54, volendosi tre decimali, si aggiungano sette zeri, e ne risulterà il numero 6540000000, di cui la radice cuba sarà 1870; e separando in essa tre cifre a destra, poichè si hanno 9 decimali nel cubo, si avrà 1,870, ovvero 1,87 per radice cuba di 6,54. Operando in eguale maniera, si troverebbe che la radice cuba di 0,00006, volendo due decimali, è 0,08.

546. Si estrae la radice cuba dalle frazioni con estrarla da ciascuno de' loro termini. Così $\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}=\frac{3}{4}$, poichè

$$\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{27}{64};\ \sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2},\ \text{perchè}\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}.$$

Se però i termini della frazione non fossero cubi perfetti, s'indica l'estrazione col segno radicale, estraendo quella parte di radice che si può (N.° 273), oppure si riduce la frazione a decimali, e quindi se ne estrae la radice.

547. Da ciò che si è veduto intorno all'estrazione della radice seconda e terza, si vede ancora quale via sarebbe da seguire onde trovare i metodi per estrarre la radice quarta, quinta ecc. da un polinomio, o da un numero qualunque. Come di fatti l'analisi di ciò che si ottiene innalzando al quadrato, od al cubo un binomio, ci hanno dato il metodo per l'estrazione della radice seconda (N.° 323) e terza (N.° 338), così pure l'analisi di ciò che si ottiene innalzando un binomio alla quarta, alla quinta ecc. potenza, darebbero se fosse d'uopo il metodo per estrarre le radici quarte, quinte, ed in generale le radici di un ordine qualunque. Ma è così raro in pratica il dovere estrarre radici superiori alla terza che non occorre ci tratteniamo più oltre a parlare di questi metodi, i quali d'altronde, sebbene complicati, potrà all'uopo il giovane trovare da sè dietro lo sviluppo di $(a+b)^4$, $(a+b)^5$ ecc.

548. Abbiamo detto (N.° 310) che lo sviluppo dato da Newton di $(a+b)^m$ vale anche quando m fosse frazionario: in questo caso però lo sviluppo riescirebbe ad una serie indefinita, come apparirà chiaramente al giovane se nella formola farà m eguale ad una frazione qualunque. Questa serie

indefinita presenta un mezzo di estrarre in tanti casi per approssimazione le radici. Così essendo $(a+b)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a+b}$, si ha, fatto nello sviluppo di $(a+b)^m$, $m=\frac{1}{2}$, una serie corrispondente a $\sqrt{a+b}$, e perciò volendosi a cagion d'esempio il valore approssimato di $\sqrt{5}$, basterebbe nella serie fare $a=4$, e $b=1$, e si avrebbe, calcolando pochi termini, un valore assai approssimato di $\sqrt{5}$. Di questo metodo di estrarre le radici per approssimazione noi non ci occuperemo, avendo già indicato come si ottengano le radici approssimate dei numeri per mezzo dei decimali.

CAPO VIII.

Delle Equazioni e dei Problemi di secondo grado.

349. Qualunque equazione di secondo grado ad una sola incognita (N.° 196, 197) può ridursi alla formola $x^2+Ax+B=0$: basterà di fatti, trasportati tutti i termini dell'equazione nel primo membro, ed ordinatili per la x, dividere prima l'equazione per ciò che moltiplica la x^2, e fare poscia eguale ad A ciò che moltiplica la x alla prima potenza, ed eguale a B il complesso dei termini tutti cogniti. Così l'equazione $ax-bx^2+c+dx^2=fx^2-bx-q-px$ trasportati tutti i termini nel primo membro, ed ordinatili per la lettera x, diviene $dx^2-bx^2-fx^2+ax+bx+px+c+q=0$, cioè $x^2(d-b-f)+x(a+b+p)+c+q=0$: divisi ambidue i membri per ciò che moltiplica la x^2, diviene

$$x^2+x\left(\frac{a+b+p}{d-b-f}\right)+\frac{c+q}{d-b-f}=0;$$

e fatto $\quad\frac{a+b+p}{d-b-f}=A,\ \frac{c+q}{d-b-f}=B$

essa si riduce alla formola $x^2+Ax+B=0$.

350. Trovato perciò un metodo per risolvere questa equazione $x^2+Ax+B=0$, sarà trovato il metodo per risolvere qualunque equazione di secondo grado ad una sola incognita, o per iscoprire (il che torna lo stesso) il valore dell'incognita stessa. Occupiamoci ora di questo metodo.

351. Applicando quel principio: *non si altera l'eguaglianza di due quantità eseguendo sopra di esse le stesse operazioni*, dall' equazione generale $x^2+Ax+B=0$ passiamo all'altra $x^2+Ax=-B$ col sottrarre da ambidue i membri la quantità B: quindi in questa aggiugnendo ad ambidue i membri il quadrato di $\frac{A}{2}$, cioè $\frac{A^2}{4}$, passiamo all'altra equazione $x^2+Ax+\frac{A^2}{4}=\frac{A^2}{4}-B$, sempre identica colla prima: estraendo in questa da ambidue i membri la radice quadrata, essa (per essere il primo membro quadrato perfetto di $(x+\frac{A}{2})$) si trasforma nella seguente $x+\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{A^2}{4}-B}$, cioè $x=-\frac{A}{2}\pm\sqrt{\frac{A^2}{4}-B}$, dalla quale riesce cognito il valore della x, e perciò riesce risoluta l'equazione proposta. Abbiamo preposto al vincolo radicale il doppio segno $\pm$, perchè la radice seconda di una quantità qualunque può essere tanto positiva quanto negativa (N.° 266); e secondo che si prende il segno superiore o l'inferiore si avranno due valori diversi dell'incognita, che rendono soddisfatta l'equazione, e che si chiamano *radici* dell'equazione stessa.

352. Confrontando ora questa formola

$$x=-\frac{A}{2}\pm\sqrt{\frac{A^2}{4}-B}$$

che dà la risoluzione dell'equazione generale, coll'equazione stessa $x^2+Ax+B=0$, e chiamando A *coefficiente del secondo termine* di un'equazione così ridotta, B *termine cognito* dell'equazione stessa, diremo che *nelle equazioni di secondo grado ad una sola incognita il valore dell'incognita eguaglia la metà del coefficiente del secondo termine preso col segno cangiato, più o meno la radice quadrata del quadrato di questa metà diminuito del termine cognito*: e così in ogni esempio si avrà immediatamente il valore dell'incognita, e perciò l'equazione risoluta senza essere obbligati a fare altri calcoli.

Perciò se venisse proposta da risolvere p. e. l'equazione $5x^2+46x+100=6x-x^2+4$, prima si ridurrebbe

(N.° 349) alla nota formola, e diverrebbe $x^2+10x+24=0$; quindi, applicando la regola, si avrebbe x eguale alla metà del coefficiente del secondo termine preso col segno contrario, cioè eguale a -5 più o meno la radice quadrata del quadrato di questa metà che è 25 diminuito del termine cognito 24, cioè più o meno la radice quadrata di $25-24$, ossia di 1, cioè $x=-5\pm\sqrt{1}$; dove estraendo la radice, se si prende il segno $+$ riesce $x=-4$, se si prende il segno $-$ $x=-6$.

353. Per evitare un errore, nel quale facilmente cadono dapprincipio i giovani nell'applicare questa regola ai casi di equazioni numeriche, crediamo opportuno (sebbene possa apparire sovverchio) l'avvertire che se nell'equazione proposta il termine cognito fosse negativo, nella soluzione deve essere preso positivamente, perchè deve essere sottratto dal quadrato della metà del coefficiente del secondo termine, e per eseguire la sottrazione gli si deve cangiare il segno.

354. Ecco altri esempi dell'applicazione della regola:

1.° $x^2-6x+8=0$ dà $x=3\pm\sqrt{1}$, cioè $x=4$, $x=2$;

2.° $x^2+11x+30=0$ dà $x=-\frac{11}{2}\pm\sqrt{\frac{121}{4}-30}$

$$=-\frac{11}{2}\pm\sqrt{\frac{121-120}{4}}=-\frac{11}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}},$$

cioè $x=\frac{-11\pm1}{2}$, cioè $x=-5$, $x=-6$.

3.° $x^2-6x-27=0$ dà $x=3\pm\sqrt{9+27}$, cioè $x=3\pm6$, cioè $x=9$, $x=-3$.

4.° $x^2-4x-1=0$ dà $x=2\pm\sqrt{4+1}$, cioè $x=2+\sqrt{5}$, $x=2-\sqrt{5}$.

5.° $x^2-8x+21=0$ dà $x=4\pm\sqrt{16-21}$, cioè $x=4+\sqrt{-5}$, $x=4-\sqrt{-5}$.

6.° $x^2-12x+36=0$ dà $x=6\pm\sqrt{36-36}$, cioè $x=6\pm0$, cioè $x=6$.

Riandando ora questi diversi esempi si vede dal 1.° che alcune volte le radici di un'equazione di secondo grado possono essere ambidue positive; dal 2.° che possono essere ambidue negative; dal 3. che una può essere positiva, l'altra negativa; dal 4.° che possono essere ambidue irrazionali; dal 5.° che possono essere ambidue immaginari; dal 6.° finalmente che possono essere ambidue reali uguali.

Il caso di un valore irrazionale, e l'altro razionale, oppure il caso di un valore immaginario e l'altro reale, non sono casi possibili, essendochè la parte radicale $\sqrt{\frac{A^2}{4}-B}$, la quale si trova nel valore (N.° 351) $x=-\frac{A}{2}\pm\sqrt{\frac{A^2}{4}-B}$, se è irrazionale, od immaginaria allora che si prende il segno $+$, lo sarà anche allora che si prende il segno $-$. Sono poi eguali le due radici quante volte questo radicale $\sqrt{\frac{A^2}{4}-B}$ sia zero, ossia quante volte $\frac{A^2}{4}=B$.

355. Qualora riescono immaginari i due valori dell'incognita, questi stessi valori sono un segno evidente che il problema rappresentato dall'equazione da cui derivano è assurdo, non potendo esistere in natura delle quantità immaginarie (N.° 289).

Dalla formola poi $x=-\frac{A}{2}\pm\sqrt{\frac{A^2}{4}-B}$ apparisce chiaramente che saranno immaginari questi valori dell'incognita, quante volte riesca $\frac{A^2}{4}<B$.

356. Se il problema per sua natura esclude dei valori irrazionali dell'incognita, sarà assurdo quante volte la soluzione presenta dei valori irrazionali; riescono poi irrazionali questi valori quando $\frac{A^2}{4}-B$ non è un quadrato perfetto.

357. Riguardo ai valori negativi, allora che la natura del problema li esclude, essi mostrano la soluzione che avrebbe

il problema, qualora le sue condizioni fossero variate in modo che cangiasse segno il coefficiente del secondo termine. Difatti i valori

$$x=-\frac{A}{2}+\sqrt{\frac{A^2}{4}-B},\quad x=-\frac{A}{2}-\sqrt{\frac{A^2}{4}-B},$$

cangiano di segno, col cangiare il segno di A, mentre il primo diviene eguale al secondo che si aveva, ma con segno contrario; ed il secondo diviene eguale al primo che si aveva, ma esso pure con segno contrario.

358. Se si sommano assieme le due radici

$$x=-\frac{A}{2}+\sqrt{\frac{A^2}{4}-B},\quad x=-\frac{A}{2}-\sqrt{\frac{A^2}{4}-B}$$

la loro somma riesce eguale a $-A$; se si moltiplicano assieme, il loro prodotto riesce eguale a B; diremo adunque generalmente: *nelle equazioni di secondo grado il coefficiente del secondo termine col segno cangiato eguaglia la somma delle sue radici, ed il termine cognito ritenendo il segno che ha, ne eguaglia il prodotto.*

359. Dopo ciò sarà facile stabilire, dati i due valori dell'incognita, quale sia quell'equazione da cui essi derivano. La somma diffatti di que' due valori col segno cangiato sarà il valore da dare al coefficiente A, ed il prodotto di quei due valori stessi sarà il valore da dare a B. Vogliasi p. e. una equazione, nella quale i due valori dell'incognita sieno 8, e 12; il valore di A sarà $-(8+12)$ cioè $A=-20$, il valore di B sarà 8×12, cioè $B=96$; quindi l'equazione sarà $x^2-20x+96=0$. Vogliasi ancora un'equazione di secondo grado, nella quale i due valori dell'incognita sieno c e d il valore da dare ad A sarà $-(c+d)$, ed il valore da dare a B sarà cd; quindi l'equazione richiesta sarà

$$x^2-(c+d)x+cd=0.$$

360. In tutte le applicazioni fatte finora abbiamo sempre considerato dei casi di equazioni complete, o non mancanti di alcuno de' tre termini dell'equazione generale

$$x^2+Ax+B=0.$$

Se mancasse in qualche caso uno de' due ultimi termini la regola sarebbe la stessa, non dovendosi avere altra avvertenza che di fare eguale a zero, od il coefficiente A se manca il secondo termine, od il termine cognito B se manca il terzo. Quindi se l'equazione fosse $x^2 - 25 = 0$, riescirebbe sempre applicando la stessa regola (N.° 352) $x = 5$, $x = -5$. Se l'equazione fosse $x^2 - 4x = 0$ riescirebbe $x = 2 \pm \sqrt{4}$, ossia $x = 4$, $x = 0$.

361. Alle equazioni di secondo grado ad una sola incognita possono ridursi tutte le equazioni a tre termini della forma $x^{2m} + Ax^m + B = 0$. Infatti si supponga $x^m = y$; allora sarà $x^{2m} = y^2$; e la proposta si trasformerà in un' equazione di secondo grado $y^2 + Ay + B = 0$. Si risolva questa equazione, e si avrà $y = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}$, e sostituendo in luogo di y la x^m, sarà $x^m = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}$; ed estraendo da ambidue i membri la radice emmesima sarà

$$x = \sqrt[m]{-\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}}.$$

Per un esempio sia da risolvere l' equazione numerica $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$: pongo $x^2 = y$, donde $x^4 = y^2$, e l'equazione diviene $y^2 - 25y + 144 = 0$: questa risoluta dà

$$y = \frac{25}{2} \pm \sqrt{\frac{625}{4} - 144} = \frac{25}{2} \pm \sqrt{\frac{625 - 576}{24}}$$

$$= \frac{25}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}},$$

cioè $y = \frac{25}{2} \pm \frac{7}{2}$, cioè $y = 16$, $y = 9$:

quindi $x = \pm \sqrt{16}$, $x = \pm \sqrt{9}$,

cioè $x = \pm 4$, $x = \pm 3$.

Laonde l' equazione proposta ammette quattro radici, non differenti tra loro a due a due, altro che pel segno.

362. Proponiamo per esercizio dei giovani due problemi, notandone la semplice soluzione finale.

Problema 1.° Più persone sono obbligate a pagare le spese di un processo ascendenti ad 80 scudi; ma tre sono insolventi, e le altre supplendo alla loro mancanza sono costrette a pagare ognuna 6 scudi oltre la propria parte. Cercansi quante fossero le persone obbligate a pagare?

Risposta. Erano 8. La soluzione negativa -5 indica (N.° 357) quale sarebbe la risposta al problema se invece pagando altre tre persone oltre le obbligate, ciascuna di queste si fosse così risparmiati 6 scudi.

Problema 2.° Tizio promette di dare 27 baiocchi ogni giorno ad un operaio che gli fa un certo lavoro: per impedire però, che l'operaio non impieghi troppo tempo a finirlo, ha pattuito che, somministrandogli egli il vitto, sopra i 27 baiocchi se ne riterrà pel vitto istesso tanti al giorno, quanti sono i giorni che impiegherà in quel lavoro: l'operaio vorrebbe infine avere 182 baiocchi in contanti da Tizio, in quanti giorni dovrà compire il suo lavoro?

Risposta. Lo dovrà compire in 13, oppure in 14 giorni.

363. Finora abbiamo parlato delle equazioni di secondo grado ad una sola incognita. Ma se il problema presentasse anche con equazioni di secondo grado più di un'incognita, allora come si dovrebbe operare?

Tralasciando, per non oltrepassare i limiti di un libro elementare, il caso dei problemi *semideterminati* di secondo grado, e non considerando perciò altro che il caso, in cui le equazioni, che somministra il problema sieno tante quante sono le incognite, possono presentarsi due specie di problemi: una specie in cui una sola equazione sia di secondo grado essendo le altre tutte di primo; ed una specie in cui vi sia più di un'equazione di secondo grado.

364. Per la prima specie è facile il metodo da seguirsi. Presenti a cagion d'esempio un problema queste tre equazioni

$$2y - x = 4$$
$$3z - y = 9$$
$$z^2 - 19z + y^2 - 9y + 2xz - 9x + 80 = 0,$$

delle quali le due prime sono di primo grado, e solo la terza è di secondo. Dalle due prime col metodo di sostituzione (N.° 233) ricavo $y = 3z - 9$, $x = 6z - 22$, e sostituiti questi valori nella terza, e fatte le debite riduzioni, essa diviene $z^2-9z+20=0$, la quale risoluta dà $z=4$, $z=5$ e quindi sostituendo $x=2$, $x=8$, $y=3$, $y=6$; e così saranno trovati i tre valori delle tre incognite. Per un altro esempio si abbiano le tre equazioni

$$2z-y-x=3$$
$$z-2y+x=0$$
$$2x^2+z^2-4y^2+2zx-5x+4=0,$$

dalle due prime si ricava eliminando $y=z-1$, $x=z-2$; quindi sostituendo questi valori nella terza essa diviene

$$z^2-9z+18=0,$$

donde si ricava $\quad z=3,\ z=6,$

e quindi $\quad y=2,\ y=5$
$\quad x=1,\ x=4.$

Il metodo usato in questi esempi è lo stesso che deve usarsi in qualunque altro caso. *Operando dapprima sulle equazioni di primo grado o colla sostituzione* (N.° 233) *o coll'eliminazione* (N.° 221), *si trovano espressi per una stessa incognita i valori di tutte le altre, quindi nell'equazione di secondo grado si sostituiscono a queste altre incognite i trovati valori; così essa è ridotta ad un'equazione di secondo grado ad una sola incognita. Risoluta questa, con semplici sostituzioni si troveranno i valori di ciascuna delle altre incognite stesse.*

365. Rapporto all'altra specie di problemi, quando cioè non una sola delle equazioni, ma più d'una sia di secondo grado, allora *generalmente parlando* il problema non potrà risolversi colle teorie che esponiamo in questi elementi: e la ragione si è perchè ricavando con un metodo qualsiasi dalle date equazioni, un'equazione ad un'incognita sola, essa diverrà di grado superiore al secondo. Abbiamo detto *generalmente parlando*; imperocchè qualche volta succede, che anche in questi casi, o coll'eliminazione (N.° 221), o colla sostituzione (N.° 233) si giugne ad un'equazione ad una sola incognita di grado non superiore al secondo. Ecco alcuni esempi:

Abbiansi le due equazioni

$$x^2+y^2-3xy+11=0$$
$$2x^2-3y^2-6xy+102=0.$$

Moltiplicando la prima per 2, poscia da essa sottraendo la seconda riesce eliminata la x, e si ottiene $5y^2-80=0$, ossia $y^2=16$, ossia $y=4$, $y=-4$; e quindi sostituendo il primo valore in una delle due date, si ha $x=9$, $x=3$, sostituendo il secondo si ha $x=-9$, $x=-3$:

Abbiansi ancora le due equazioni

$$3x+8y=3xy$$
$$27x^2-16y^2=24xy,$$

dalla prima si ottiene $x=\dfrac{8y}{3y-3}$, sostituito questo valore nella seconda, e fatte tutte le possibili riduzioni essa diviene

$$y^2+2y-15=0;$$

donde si ha $\quad y=3,\ y=-5;$

e quindi sarà $\quad x=4,\ x=\dfrac{20}{9}.$

366. Perciò quante volte si presenteranno allo studioso di questi elementi più equazioni di secondo grado a più incognite, prima di abbandonarne la risoluzione, dovrà cercare se con uno dei due metodi anzidetti possa giugnere a ridurre le date equazioni ad una sola di secondo grado, e con una sola incognita; nel qual caso egli ha abbastanza alle mani per risolvere il problema da cui le date equazioni derivano.

367. Fuori dei casi sopra esposti nei quali senza ulteriori teorie si può ottenere la risoluzione delle equazioni di cui parliamo, si presentano ancora alcuni casi, in cui una trasformazione opportuna dell'incognite può servire a giugnere ad un'equazione di grado non superiore al secondo, la quale abbia un'incognita sola. Così per le due equazioni

$$x^2+y^2-x-y=78$$
$$x+y+xy=39$$

se si faccia $\quad x+y=2z,\ x-y=2u,$

esse diverranno $\quad z^2+u^2-z=39$
$\quad z^2-u^2+2z=39,$

nelle quali l'eliminazione farà sparire la u, e rimarrà un'equazione di secondo grado colla sola z. Questa risoluta mediante le sostituzioni si troverà il valore di u, e quindi anche quello delle incognite date x, ed y.

Non è possibile dare delle regole generali per conoscere quando sia utile, e quale sia la trasformazione da usarsi ne' diversi casi. Solo un assiduo esercizio può fare acquistare quell' avvedutezza che a questo è necessaria.

CAPO IX.

Proporzioni e Progressioni.

368. Date due quantità si possono paragonare tra loro in due modi diversi: si può cercare di quanto l'una quantità superi l'altra; e si può cercare quante volte l'una sia contenuta nell'altra. Così date le due quantità 12, e 4, si può cercare di quanto il 12 superi il 4; e si può cercare quante volte nel 12 sia contenuto il 4. Qualora due quantità si paragonino tra loro nel primo modo la differenza che si trova fra esse dicesi ***rapporto***, o ***ragione aritmetica*** delle quantità stesse; qualora si paragonino nel secondo modo il quoziente che dà una di esse divisa per l'altra, si chiama ***rapporto*** o ***ragione geometrica*** di quelle stesse quantità. Onde 8 sarà il rapporto, o la ragione aritmetica, che esiste tra 12 e 4, e 3 ne sarà il rapporto, o la ragione geometrica.

Se invece di sottrarre il 4 dal 12 avessimo sottratto il 12 dal 4, anche la differenza -8 sarebbe la ragione *aritmetica* tra i due numeri 4 e 12; come pure se avessimo diviso il 4 per 12, anche il quoto $\frac{1}{3}$ sarebbe la ragione geometrica tra 4 e 12; perchè è indifferente prendere il maggior numero oppure il minore per minuendo nella ragione aritmetica, e per dividendo nella geometrica.

369. Siccome ogni paragone suppone almeno due termini da confrontare assieme, si è convenuto di chiamare uno di questi termini *antecedente*, l'altro *conseguente* della ragione che ne risulta. Così dei due termini anzidetti 12 e 4, se il 12 si prende per antecedente, il 4 sarà il conseguente.

370. Quando la differenza tra due quantità come 10, e 8 sia eguale alla differenza tra due altre come 6, e 4, allora queste quattro quantità costituiscono una ***proporzione aritmetica***,

e si è convenuto di scriverle in questo modo $10 : 8 .\!\cdot\!. 6 : 4$; e si legge 10 sta aritmeticamente a 8, come 6 sta a 4. Siccome poi (N.° 368) la differenza tra 10, e 8 costituisce la ragione aritmetica di queste due quantità, come pure la differenza tra 6, e 4; così diremo generalmente ***due ragioni aritmetiche eguali costituiscono una proporzione aritmetica***.

Ecco alcuni esempi di proporzioni aritmetiche

$$12 : 7 .\!\cdot\!. 9 : 4,\quad 18 : 11 .\!\cdot\!. 23 : 16,\quad 4 : 1 .\!\cdot\!. 5 : 2.$$

371. Quando il quoziente di una quantità qualunque divisa per un'altra, come di 12 diviso per 3, eguaglia il quoziente di una terza quantità divisa per una quarta, p. e. di 16 diviso per 4, quelle quattro quantità costituiscono una proporzione geometrica; e si è convenuto di scriverle in questo modo $12 : 3 :: 16 : 4$, leggendo 12 sta a 3 come 16 a 4.

Siccome poi (N.° 368) il quoziente di 12 diviso per 3 costituisce la ragione geometrica di queste due quantità, come pure il quoziente di 16 diviso per 4, così diremo generalmente: ***due ragioni geometriche eguali costituiscono una proporzione geometrica.***

Ecco alcuni esempi di proporzioni geometriche:

$$14 : 7 :: 18 : 9,\quad 24 : 8 :: 33 : 11,\quad 6 : 3 :: 2 : 1 \ (^*).$$

372. In qualunque proporzione, sia geometrica, sia aritmetica, il primo ed il terzo termine si chiamano *antecedenti*, assumendosi ciascuno dei due come l'antecedente della propria ragione; il secondo ed il quarto si chiamano *conseguenti*, essendo ciascuno dei due il rispettivo conseguente della propria ragione. Quando riescono eguali nelle proporzioni aritmetiche

---

(*) Nota. *Alcuni autori scrivono le proporzioni geometriche in quest' altro modo*: $\frac{14}{7} = \frac{18}{9}$, $\frac{6}{3} = \frac{2}{1}$, *e leggono parimenti 14 sta a 7 come 18 a 9; 6 sta a 3 come 2 a 1. Così per le aritmetiche alcuni invece di scrivere p. e.* $8 : 3 .\!\cdot\!. 4 : 1$, *scrivono* $8-3=4-1$, *e leggono come noi 8 sta aritmeticamente a 3, come 4 sta ad 1. È indifferente lo scrivere nell' uno o nell' altro modo: presso noi l'uso è di scriverle come si è accennato nel testo.*

i due residui che si ottengono levando da ciascuno antecedente il rispettivo conseguente, e nelle geometriche i due quoti, che si ottengono dividendo ciascun antecedente pel rispettivo conseguente, le proporzioni si dicono *dirette*. All'incontro si dicono *inverse* se, parlando delle aritmetiche, il primo antecedente diminuito del suo conseguente eguagli il secondo conseguente diminuito del suo antecedente; e, parlando delle geometriche, se il primo antecedente diviso pel suo conseguente eguagli il secondo conseguente diviso pel suo antecedente. Sarebbero perciò *inverse* queste proporzioni:

$$8 : 6 \therefore 2 : 4,\quad 12 : 3 :: 2 : 8.$$

In avvenire qualora diciamo *proporzioni* senza aggiugnere altro intenderemo sempre *proporzioni dirette*. È poi chiaro che una proporzione inversa si fa divenire diretta col solo invertere i due ultimi termini. Così le due or ora accennate divengono dirette scrivendole in questo modo:

$$8 : 6 \therefore 4 : 2,\quad 12 : 3 :: 8 : 2.$$

373. Il primo e l'ultimo termine di una proporzione qualunque diconsi *estremi*, i due di mezzo *medii*. Quando i due termini medii sono eguali, come nella proporzione

$$16 : 8 :: 8 : 4,$$

essa prende il nome di proporzione *continua*: dicesi poi *discreta* quando sono disuguali tutti e quattro i termini.

Nelle proporzioni continue il termine medio che è ripetuto prende il nome di *medio proporzionale*, aritmetico, o geometrico secondo la qualità della proporzione. Invece poi di scrivere $5 : 8 \therefore 8 : 11$, $7 : 21 :: 21 : 63$, si usa scrivere ÷ $5 : 8 : 11$, ∺ $7 : 21 : 63$.

374. Quando una serie di quantità è tale che il rapporto (sia poi aritmetico o geometrico) della prima alla seconda, eguaglia il rapporto della seconda alla terza, della terza alla quarta, e così via via, di modo che con tre termini consecutivi qualunque si può formare una proporzione continua, quella serie di quantità chiamasi una *progressione aritmetica*, o *geometrica*, secondo la natura del rapporto stesso. Così, siccome la serie dei numeri 1, 3, 5, 7, 9, 11. ecc. è tale, che tra due qualunque de' consecutivi la

differenza, o la ragione aritmetica è la stessa, quella serie costituisce una progressione *aritmetica*, la quale si indica scrivendo in questo modo ÷ $1 : 3 : 5 : 7 : 9 : 11 :$ ecc. Essendo poi eguale il rapporto geometrico tra due qualunque dei termini consecutivi di questa serie 1, 2, 4, 8, 16, 32, ecc., essa forma una progressione *geometrica*, la quale così si scrive:

$$∺\ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : \text{ecc.}$$

Le progressioni poi tanto aritmetiche, quanto geometriche si dicono *crescenti* se vanno dal meno al più, come le addotte; e *decrescenti* se vanno dal più al meno, come le seguenti:

$$\div\ 13 : 10 : 7 : 4 : 1 : -2 : -5 : -8 : \text{ecc.}$$

$$∺\ 24 : 12 : 6 : 3 : \frac{3}{2} : \frac{3}{4} : \frac{3}{8} : \text{ecc.}$$

Proporzioni Aritmetiche.

375. Qualunque proporzione aritmetica può rappresentarsi colla formola generale $a : a \pm d \therefore b : b \pm d$. Infatti nella proporzione aritmetica dovendo essere le ragioni eguali, la differenza verrà espressa dalla stessa lettera d. Perciò se a e b indicano in genere gli antecedenti di due ragioni aritmetiche eguali, i loro conseguenti non potranno essere che $a \pm d$, e $b \pm d$. Poichè se a è maggiore del suo conseguente, lo sorpasserà di una quantità che chiamo d, e in questo caso il conseguente sarà $a - d$. Se poi a sia minore del suo conseguente, allora sarà superato da esso della stessa quantità d, e si avrà $a + d$ per conseguente. Dunque in ogni ragione essendo il conseguente eguale all'antecedente più o meno la loro differenza ne segue che ogni proporzione aritmetica potrà rappresentarsi per mezzo della formola $a : a \pm d \therefore b : b \pm d$.

376. Nella formola precedente si rende manifesto a colpo d'occhio la proprietà essenziale a tutte le proporzioni aritmetiche, cioè *che la somma degli estremi è sempre eguale alla somma de' medii*. Di fatti posto $a : a \pm d \therefore b : b \pm d$, si avrà $a + b + d = a + b + d$; ovvero $a + b - d = a + b - d$, come è chiaro.

377. Pertanto qualunque proporzione aritmetica si potrà sempre trasformare in un'equazione, mettendo i due termini

estremi per primo membro della equazione, e i due medii per secondo. Del pari un'equazione qualunque riducibile alla suddetta formola, potrà trasformarsi in una proporzione.

378. Da ciò si deduce la maniera di trovare qualsivoglia termine incognito, purchè ne sieno noti tre. Poichè se il termine che si cerca sia uno degli estremi, esso si avrà *sottraendo dalla somma dei medii l'altro estremo cognito;* e se il termine da trovarsi fosse uno de' medii, allora *si otterrà sottraendo dalla somma dei due estremi il medio cognito.* Così se si abbia $a : b . \cdot . c : x$, ovvero $x : b . \cdot . c : d$, si avrà $x = b + c - a$ nella prima, ed $x = b + c - d$ nella seconda. Se invece fosse $a : b . \cdot . x : d$, ovvero $a : x . \cdot . c : d$, si avrà nel primo caso $x = a + d - b$, e nel secondo $x = a + d - c$, giacchè in qualunque di queste proporzioni deve sempre verificarsi che la somma degli estremi sia eguale alla somma de' medii.

379. Che se la proporzione fosse *continua* e si dovesse trovare la *media proporzionale* tra due termini dati, ragionando nella stessa maniera di sopra, essa si avrebbe *dividendo per 2 la somma dei termini cogniti.* Così dati a e b, e sapendosi che $a : x . \cdot . x : b$, ne risulterebbe $2x = a + b$, cioè $x = \frac{a+b}{2}$; e supposto che il quoto ottenuto sia c, si avrà $a : c . \cdot . c : b$, dovendo essere $a + b = c + c$, cioè *la media proporzionale è eguale alla semisomma degli estremi.*

Progressioni Aritmetiche.

380. Ogni progressione aritmetica può rappresentarsi colla formola $\div a : a + d : a + 2d : a + 3d : a + 4d : a + 5d :$ ecc., dove d avrà un valore positivo, o negativo, secondo che la progressione è crescente, o decrescente. Essendo n il numero dei termini di questa progressione, l'ultimo sarà della forma $a + (n - 1)d$, perchè ciascun termine è composto del primo, e di tante differenze d quanti sono di numero i termini che lo precedono; cioè, nel nostro caso, essendo l'ultimo termine l'*ennesimo* di $n - 1$ differenze.

381. Questo termine $a + (n - 1)d$ si chiama anche termine generale della progressione, perchè fatto $n = 1, 2, 3$, ecc. si ha successivamente il termine primo, secondo, terzo, ecc. della progressione stessa. Noi chiameremo u l'ultimo termine

di una progressione aritmetica composta di un numero n qualunque di termini: ed intanto dietro ciò che abbiamo detto stabiliremo questa eguaglianza $u = a + (n - 1)d$ (A).

382. Chiamando s la somma di tutti i termini di una progressione aritmetica composta di n termini, di cui il primo è a, la differenza è d, e l'ultimo è u, ossia $a + (n - 1)d$, si avrà

$$s = a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \ldots + a + (n - 1)d;$$

e scrivendo i termini in ordine inverso, cominciando cioè dall'ultimo sarà anche

$$s = u + (u - d) + (u - 2d) + (u - 3d) + \ldots + (u - (n - 1)d).$$

Se ora si sommino assieme queste due eguaglianze membro per membro, siccome d con $-d$, $2d$ con $-2d$, $3d$ con $-3d$, ecc., $(n - 1)d$ con $-(n - 1)d$, si avrà $2s$ eguale ad $a + u$ preso tante volte, quanto è il numero dei termini della progressione: cioè sarà $2s = n(a + u)$; e quindi

$$s = \frac{an + un}{2} \quad (B).$$

383. Ricorrendo alle due equazioni (A) e (B) potremo determinare una qualunque delle cinque quantità a, d, u, n, s, date che ne sieno tre. Chieggasi p. e. quale è la differenza d in una progressione, in cui è dato l'ultimo termine u, il primo a, ed il numero dei termini n. Nella (A) isolando la d avremo $d = \frac{u - a}{n - 1}$ (C), avremo cioè la cercata differenza d espressa per le date u, a, n. Così se si cercasse il valore della differenza d in una progressione di 5 termini, in cui l'ultimo è 11, ed il primo 3, dovremo fare $u = 11$, $a = 3$, $n = 5$; ed avremo $d = \frac{11 - 3}{5 - 1}$, ossia $d = 2$.

Chieggasi ancora quale è il primo termine a di una progressione aritmetica, in cui è dato il numero n dei termini, la differenza d, e la somma s.

Nella (B) sostituendo al luogo di u il valore che dà la (A), avremo $s = au + \frac{n(n-1)d}{2}$; ed isolando la a avremo $a = \frac{s}{n} - \frac{(n-1)d}{2}$.

Così se si cercasse quale è il primo termine a di quella progressione aritmetica composta di 6 termini, la cui somma è 42, e nella quale la differenza è 2, avremo $s=42$, $n=6$, $d=2$; quindi $a=\frac{42}{6}-\frac{(6-1)\,2}{2}$, cioè $a=2$.

Ecco uno specchio delle equazioni, che danno una qualunque di quelle cinque quantità, espressa per tre delle altre quattro che rimangono. Queste equazioni sono tutte dedotte dalle due stabilite (A) e (B), e sono dedotte con metodo analogo all' adoperato nei due esempi recati superiormente.

	Date	si ha	Formole
384.	$u,\ d,\ n$	a	$a=u-d\,(n-1)$.
385.	$u,\ n,\ s$		$a=\frac{2s}{n}-u$.
386.	$u,\ d,\ s$		$a=\frac{d}{2}\pm\sqrt{\left(\left(u+\frac{d}{2}\right)^2-2ds\right)}$.
387.	$d,\ n,\ s$		$a=\frac{s}{n}-\frac{d\,(n-1)}{2}$.
388.	$a,\ d,\ n$	u	$u=a+d\,(n-1)$.
389.	$a,\ n,\ s$		$u=\frac{2s}{n}-a$.
390.	$a,\ d,\ s$		$u=-\frac{d}{2}\pm\sqrt{\left(2ds+\left(a-\frac{d}{2}\right)^2\right)}$.
391,	$d,\ n,\ s$		$u=\frac{s}{n}+\frac{d\,(n-1)}{2}$.
392.	$a,\ u,\ n$	d	$d=\frac{u-a}{n-1}$.
393.	$a,\ n,\ s$		$d=\frac{2\,(s-an)}{n\,(n-1)}$.
394.	$a,\ u,\ s$		$d=\frac{u^2-a^2}{2s-a-u}$.
395.	$u,\ n,\ s$		$d=\frac{2\,(un-s)}{n\,(n-1)}$.

	Date	si ha	Formole
396.	$a,\ u,\ d$	n	$n=1+\frac{u-a}{d}$.
397.	$a,\ u,\ s$		$n=\frac{2s}{a+u}$.
398.	$a,\ d,\ s$		$n=\frac{1}{2}-\frac{a}{d}\pm\sqrt{\left(\frac{2s}{d}+\left(\frac{a}{d}-\frac{1}{2}\right)^2\right)}$.
399.	$u,\ d,\ s$		$n=\frac{1}{2}+\frac{u}{d}\pm\sqrt{\left(\left(\frac{u}{d}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{2s}{d}\right)}$.
400.	$a,\ u,\ n$	s	$s=\frac{n\,(a+u)}{2}$.
401.	$a,\ d,\ n$		$s=n\left(a+\frac{d\,(n-1)}{2}\right)$.
402.	$a,\ d,\ u$		$s=\left(\frac{u+a}{2}\right)\left(1+\frac{u-a}{d}\right)$.
403.	$u,\ d,\ n$		$s=n\left(u-\frac{d\,(n-1)}{2}\right)$.

Perchè meglio si comprenda l'applicazione delle descritte formole, diamone alcun esempio pratico.

Problema 1.° Un corpo cadendo dall'alto, per solo impulso di gravità nel primo minuto secondo percorre 15 piedi circa, 45 in quello che segue, e così successivamente in progressione aritmetica. Si domanda quanto spazio avrà percorso alla fine di 6 secondi.

La soluzione di questo problema si riduce a trovare la somma di una progressione, della quale il primo termine $a=15$ piedi, la differenza $d=30$, e il numero de' termini $n=6$. Dunque per la formola del (N.° 401) si avrà

$$s=n\left(a+\frac{d\,(n-1)}{2}\right)=6\left(15+\frac{30\,.\,5}{2}\right)=540\,,$$

e perciò lo spazio percorso dal corpo cadente in 6 secondi sarà di piedi 540.

Problema 2.° Un corriere arrivò in quattro giorni al suo destino correndo ogni giorno 3 miglia di più del giorno antecedente, e facendo nell'ultimo giorno miglia $29\frac{1}{2}$ di cammino. Si cerca quante miglia abbia fatto per giorno.

In questo problema essendo $u=29\frac{1}{2}$; $d=3$; $n=4$, si avrà per la formola del (N.° 384) $a=u-d\ (n-1)=20\frac{1}{2}$, onde il corriere avrà fatto miglia $20\frac{1}{2}$ nel primo giorno, $23\frac{1}{2}$ nel secondo, $26\frac{1}{2}$ nel terzo, e $29\frac{1}{2}$ nel quarto.

Problema 3.° Un giuocatore ha perduto per più volte di seguito. La prima volta ha pagato 6 paoli, e 102 l'ultima, e ogni volta la perdita era maggiore di 12 paoli. Si domanda quante volte abbia pagato.

Conoscendosi $a=6$; $u=102$; $d=12$, si cerca n; onde $n=1+\frac{u-a}{d}=1+\frac{102-6}{12}=9$ (N.° 396); e perciò avrà perduto per 9 volte.

Problema 4.° Sonovi 360 persone partite in 18 file, ciascuna delle quali cresce di 2 persone progressivamente; si cerca di quante persone sia composta l'ultima fila, e la prima.

Qui si conosce d, n, s; onde per la formola del (N.° 391) si avrà $u=\frac{s}{n}+\frac{d\,(n-1)}{2}$, cioè $\frac{360}{18}+\frac{36-2}{2}=37$, ultima fila; ed $a=\frac{s}{n}-\frac{d\,(n-1)}{2}$, cioè $\frac{360}{18}-\frac{36-2}{2}=3$, prima fila. Laonde la progressione sarà $\div\, 3:5:7:9:11:13:15:17:19:21:23:25:27:29:31:33:35:37=360$.

Proporzioni Geometriche.

404. Le proprietà delle proporzioni geometriche si possono dedurre da un metodo egualmente generale che quello delle aritmetiche. Sieno le quattro quantità a, b, c, d tali che il rapporto di $a:b$ eguagli quello di $c:d$, cioè si abbia $a:b::c:d$, ovvero $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$. Supponendo un tale rapporto $=q$, si avrà $\frac{b}{a}=q$, cioè $b=aq$; e $\frac{d}{c}=q$, cioè $d=cq$. Onde il rapporto di $a:b$ si cangia in quello di $a:aq$, e il

rapporto di $c:d$ in quello di $c:cq$. Essendo pertanto i due rapporti eguali potranno essere rappresentati da quelli di $a:aq$ e di $c:cq$.

La formola adunque di ogni proporzione geometrica sarà $a:aq::c:cq$, e le proprietà di questa potranno applicarsi a tutte le proporzioni geometriche.

405. La proprietà più bella è più utile di queste proporzioni è *che il prodotto degli estremi eguaglia sempre il prodotto dei medii*, come chiaro apparisce dalla stessa formola generale $acq=aqc$.

406. Da questo principio si deduce che *ogni proporzione può somministrare un' equazione, e viceversa*. Così se $a:b::c:d$; sarà ancora $ad=bc$; ed avendosi $ad=bc$, sarà necessariamente $a:b::c:d$. Che se la proporzione fosse continua p. e. $a:b::b:c$, allora si avrebbe $ac=b^2$, e da questa si ricaverebbe $a:b::bc$.

407 Dallo stesso principio si deduce inoltre come possa trovarsi un termine incognito in una proporzione dati che sieno gli altri tre. Poichè se il termine incognito sia uno degli estremi p. e.

1.° Caso $a:b::c:x$, si ha $x=\frac{bc}{a}$.

2.° Caso $x:b::c:d$, si ha $x=\frac{bc}{d}$.

Se sia uno de' medii

3.° Caso $a:b::x:d$, si ha $x=\frac{ad}{b}$.

4.° Caso $a:x::c:d$, si ha $x=\frac{ad}{c}$.

Se poi la proporzione fosse continua, e dovesse trovarsi la media proporzionale, questa si avrà *estraendo la radice quadra dal prodotto degli estremi*. Infatti avendosi $a:x::x:b$, ed essendo $ab=x^2$, sarà $x=\sqrt{ab}$.

408. Dall'accennato principio si rileva infine che qualunque proporzione geometrica resta intatta, sebbene si cangi luogo ai termini a piacimento, purchè essa conservi sempre l'eguaglianza del prodotto dei medii e degli estremi. Così p. e. nella proporzione $a:b::c:d$, ovvero $2:4::3:6$ posso

mettere i medii in luogo degli estremi, il che si dice *invertere*, o un medio od un estremo in luogo dell'altro, il che si dice *alternare;* e in generale dare ad essa qualunque forma possibile, e la proporzione rimarrà sempre la stessa, purchè in tutte le mutazioni risulti $ad = bc$.

Quindi sussisteranno i due rapporti in tutte le permutazioni seguenti:

$a:b::c:d$ . . . . . $2:4::3:6$
$a:c::b:d$ . . . . . $2:3::4:6$
$b:a::d:c$ . . . . . $4:2::6:3$
$b:d::a:c$ . . . . . $4:6::2:3$
$c:a::d:b$ . . . . . $3:2::6:4$
$c:d::a:b$ . . . . . $3:6::2:4$
$d:b::c:a$ . . . . . $6:4::3:2$
$d:c::b:a$ . . . . . $6:3::4:2$.

409. La stessa proporzione poi potrà ricevere molte altre forme mediante la somma, la sottrazione, la moltiplica, la divisione, l'innalzamento a potenza o l'estrazione della radice da' suoi termini, purchè si salvi sempre l'eguaglianza de' due prodotti. Onde avendosi

$$a:b::c:d;\quad 2:4::3:6,$$

sarà ancora

$a \pm b : b :: c \pm d : d$ ecc. . . . . . $2 \pm 4 : 4 :: 3 \pm 6 : 6$.
$a : a \pm b :: c : c \pm d$ ecc. . . . . . $2 : 2 \pm 4 :: 3 : 3 \pm 6$.

Del pari si avrà $pa : br :: pc : dr$; $\frac{a}{p} : \frac{b}{r} :: \frac{c}{p} : \frac{d}{r}$; ed $a^m : b^m :: c^m : d^m$; $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} :: \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}$; giacchè essendo per la data $ad = bc$, questa eguaglianza si verifica sempre in ognuna di quelle trasformazioni.

410. Data una serie di ragioni eguali, per esempio

$$a:b = c:d = e:f = g:h = m:n \text{ ecc.}$$

cioè $\frac{a}{b} = q$; $\frac{c}{d} = q$; $\frac{e}{f} = q$; $\frac{g}{h} = q$, ecc.

si avranno le seguenti equazioni

$$a = bq;\ c = dq;\ e = fq;\ g = qh \text{ ecc.}$$

e, sommando eguali con eguali, ne risulta

$$a + c + e + g + m = (b + d + f + h + n)q,$$

ovvero

$$\frac{a + c + e + g + m}{b + d + f + h + n} = q;$$

e se invece di q si ponga uno qualunque dei rapporti, per esempio $\frac{a}{b}$, sarà ancora

$$\frac{a + c + e + g + m}{b + d + f + h + n} = \frac{a}{b},$$

e da questa risulterà la proporzione

$$a + c + e + g + m : b + d + f + h + n = a : b;$$

e perciò in una serie di rapporti eguali, *la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti i conseguenti, come un antecedente qualunque sta al suo conseguente.*

411. Dicesi *ragione composta* il rapporto de' prodotti che si hanno moltiplicando antecedente per antecedente, e conseguente per conseguente di due o più ragioni geometriche. Così $abc : def$ è una ragione composta delle tre ragioni semplici $a : d$, $b : e$, $c : f$, ovvero di $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{e}$, $\frac{c}{f}$. La ragione poi composta di più ragioni eguali dicesi *duplicata*, *triplicata*, *quadruplicata* ecc. secondo che le ragioni che la compongono sono due, tre, quattro ecc. Dal che ne segue che la ragione duplicata è uguale a quella dei quadrati dei termini di una qualunque delle ragioni semplici; e la triplicata sarà la stessa che quella de' cubi.

412. Se più quantità a, b, c, d, ecc. sono tali, che la prima di esse stia alla seconda conforme una data ragione $f = g$, la seconda alla terza conforme un'altra data ragione $l = m$, la terza alla quarta conforme un' altra data ragione $s = t$ ecc., cosicchè sia

$$a : b :: f : g$$
$$b : c :: l : m$$
$$c : d :: s : t,$$

si avrà che *la prima di quelle quantità starà alla terza nella composta delle due ragioni $f:g$, $l:m$; che la prima sta alla quarta nella composta delle tre ragioni $f:g$, $l:m$, $s:t$* ecc. Di fatti dalle due prime proporzioni si ricava $ab:bc::fl:gm$, deducendosi (N.° 405, 406) dalle due eguaglianze $ag=bf$, $bm=cl$, la terza eguaglianza $abgm=bclf$. Ma la proporzione $ab:bc::fl:gm$ non si altera dividendo (N.° 409) i due termini della prima ragione per b: quindi sarà ancora $a:c::fl:gm$: cioè a sta a c nella composta delle due $f:g$, $l:m$. Parimenti da quelle tre proporzioni si ricava $abc:bcd::fls:gmt$, cioè $a:d::fls:gmt$, cioè a sta a d nella composta delle tre $f:g$, $l:m$, $s:t$.

413. *In una proporzione continua il primo termine sta all'ultimo come il quadrato del primo sta al quadrato del medio; oppure come il quadrato del medio sta al quadrato dell'ultimo.* Di fatto dalla proporzione continua $a:b::b:c$ si ottiene $ac=b^2$; e moltiplicando ambidue i membri per a, si ha $a^2c=ab^2$, cioè passando da un'equazione (N.° 406) ad una proporzione $a:c::a^2:b^2$. Se si fossero moltiplicati i due membri di quell'equazione per c si sarebbe avuto $ac^2=b^2c$; cioè $a:c::b^2:c^2$.

Progressioni Geometriche.

414. Da ciò che si disse (N.° 374) la progressione geometrica è una serie di termini, i quali, tranne il primo e l'ultimo, sono tutti alternativamente antecedenti e conseguenti di una serie di ragioni eguali. Siccome poi l'eguaglianza di queste ragioni si rende manifesta per l'identità del quoziente che le esprime: così qualunque progressione geometrica potrà essere rappresentata dalla formola generale

$$\because a:aq:aq^2:aq^3:aq^4:aq^5:aq^6.....aq^n,$$

nella quale supponendo $q>1$, rappresenterà una progressione crescente; e se sia $q<1$, la indicherà decrescente.

415. Esaminando l'andamento della progressione rappresentata dalla suddetta formola, si osserva:

1.° Che gli esponenti della ragion comune espressa da q formano una progressione aritmetica, mentre i termini affetti da tali esponenti costituiscono una progressione geometrica. Infatti essendo $q^0=1$ (N.° 152), la stessa formola potrà esprimersi ancora in questo modo

$$\because aq^0:aq^1:aq^2:aq^3:aq^4:aq^5.....aq^n,$$

e facendo $a=1$, quest'ultima diverrà

$$::q^0:q^1:q^2:q^3:q^4:q^5.....q^n,$$

ed esprimerà la serie delle potenze intere di una quantità qualunque q; *onde le potenze successive ed intere di una medesima quantità formeranno sempre una progressione geometrica.*

Lo stesso non può dirsi delle potenze successive e frazionarie, perchè i loro esponenti $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ecc. non sono in progressione aritmetica tra loro come i numeri interi 1, 2, 3 ecc. Quindi si potrà in generale stabilire che *quando gli esponenti di diverse potenze di una medesima quantità sono in progressione aritmetica, i termini affetti da questi esponenti sono in progressione geometrica,* come apparisce dalla seguente formola

$$\because aq^m:aq^{m+d}:aq^{m+2d}:aq^{m+3d}:aq^{m+4d} \text{ ecc.},$$

i cui esponenti crescono in progressione aritmetica, e i cui termini sono in progressione geometrica, il che si fa manifesto dal vedere sempre regnare in essi lo stesso quoziente q^d.

2.° Si osserva che in essa il secondo termine è composto del primo moltiplicato per la ragion comune q; il terzo è composto del primo moltiplicato pel quadrato della stessa ragion comune; il quarto del primo moltiplicato pel cubo di essa; il quinto del primo moltiplicato per la quarta potenza della stessa ragione. In una parola si osserva che qualunque termine è uguale al prodotto del primo termine per la ragion comune elevata ad una potenza indicata dal numero dei termini precedenti. Così p. e. il sesto termine aq^5 è il prodotto del primo termine a pel quoziente q innalzato alla quinta potenza. Da ciò ne segue che chiamando u il termine che si cerca, e che sta al posto n si avrà in generale $u=aq^{n-1}$.

416. Indicando con s la somma dei termini di una progressione qualunque geometrica di cui sia cognito il primo termine a, l'ultimo u, ed il quoziente o ragion comune q; ed essendo tutti i termini di una progressione, tranne l'ul-

timo, antecedenti, si potrà rappresentare la somma degli antecedenti per $s-u$. Parimenti tutti i termini di una progressione, tranne il primo, essendo conseguenti, la somma dei conseguenti si potrà esprimere per $s-a$. Ma in una serie di ragioni geometriche eguali, come è appunto una progressione geometrica, la somma degli antecedenti sta a quella dei conseguenti, come un antecedente qualunque al suo conseguente (N.° 410); dunque si avrà la proporzione $s-u:s-a::a:aq$, dalla quale si ricava $s=\frac{uq-a}{q-1}$.

417. Con questa formola $s=\frac{uq-a}{q-1}$ unita alla precedente (N.° 415, 2.°) $u=aq^{n-1}$ si potranno risolvere i problemi analoghi a quelli che furono risoluti nelle progressioni aritmetiche (N.° 383).

Ecco le formole che danno una qualunque di quelle cinque quantità espressa per tre delle altre quattro. Queste, come quelle delle progressioni aritmetiche, si deducono tutte facilmente dalle due stabilite superiormente. Avverta però lo studioso che per trovare le quattro, che danno il valore di n, conviene ricorrere alla teoria dei logaritmi, che fra poco esporremo.

	Date	si ha	Formole
418.	u, s, n		$(s-a)a^{\frac{1}{n-1}}=(s-u)u^{\frac{1}{n-1}}$.
419.	u, q, n	a	$a=\frac{u}{q^{n-1}}$.
420.	u, q, s		$a=uq-sq+s$.
421.	q, n, s		$a=s\left(\frac{q-1}{q^n-1}\right)$.
422.	a, q, n		$u=aq^{n-1}$.
423.	a, n, s	u	$(s-u)u^{\frac{1}{n-1}}=(s-a)a^{\frac{1}{n-1}}$.
424.	a, q, s		$u=s-\frac{(s-a)}{q}$.
425.	q, n, s		$u=sq^{n-1}\left(\frac{q-1}{q^n-1}\right)$.

	Date	si ha	Formole
426.	a, u, n		$q=\sqrt[n-1]{\left(\frac{u}{a}\right)}$.
427.	a, n, s	q	$q^n-\frac{s}{a}q+\frac{s}{a}-1=o$.
428.	a, u, s		$q=\frac{s-a}{s-u}$.
429.	u, n, s		$q^n-\frac{s}{s-u}q^{n-1}+\frac{u}{s-u}=o$.
430.	a, u, q		$n=1+\frac{Lu-La}{Lq}$.
431.	a, u, s	n	$n=1+\frac{Lu-La}{L(s-a)-L(s-u)}$.
432.	a, q, s		$n=\frac{L(sq-s+a)-La}{Lq}$.
433.	u, q, s		$n=1+\frac{Lu-L(uq-sq+s)}{Lq}$.
434.	a, u, n		$s=\frac{u^{\frac{n}{n-1}}-a^{\frac{n}{n-1}}}{u^{\frac{1}{n-1}}-a^{\frac{1}{n-1}}}$.
435.	a, q, n	s	$s=a\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)$.
436.	a, u, q		$s=\frac{uq-a}{q-1}$.
437.	u, n, q		$s=\frac{u}{q^{n-1}}\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)$.

Applichiamo ora le formole stabilite ad alcuni casi particolari.

Problema 1.° Un signore per cinque volte ha levato dalla sua cassa del denaro seguendo una progressione geometrica crescente, l'ultimo termine della quale è scudi 243, ed il quoziente o ragion comune è 3; si cerca quanti scudi prendesse la prima volta.

Conoscendosi $u=243$; $q=3$; $n=5$, si avrà (N.° 419) $a=\frac{u}{q^{n-1}}$, cioè $a=\frac{243}{3^4}=\frac{243}{81}=3$; e perciò la prima volta avrà preso scudi 3.

Problema 2.° Tra i due numeri 5 e 405 si vogliono inserire tanti termini in modo che ne esca una progressione geometrica la cui somma sia 605.

Si avrà $a=5$, $u=405$, $s=605$.

La formola (N.° 428) dà $q=\frac{s-a}{s-u}=\frac{605-5}{605-405}=3$.

Sarà dunque la progressione cercata

$$\dot{\dot{:}}\, 5 : 15 : 45 : 135 : 405.$$

Problema 3.° Un dissipatore diminuisce ogni anno della metà le sue rendite: dopo 6 anni si trova colla rendita di 100 scudi; quale rendita aveva prima dei 6 anni?

Sarà $u=100$, $q=\frac{1}{2}$, $n=6$.

La formola (N.° 419) dà $a=\frac{u}{q^{n-1}}=\frac{100}{\frac{1}{32}}=3200$.

Aveva adunque di rendita scudi 3200.

CAPO X.

Dei Logaritmi.

438. Abbiasi l'eguaglianza $3^2=9$. Se io in questa eguaglianza volendo mantenere il numero 3, cangio il 9 in altro numero, converrà onde rimanga l'eguaglianza, che cangi ancora in altro numero l'esponente 2. Così se cangio il 9 in 27 onde rimanga l'eguaglianza dovrò anche cangiare l'esponente 2 in 3, essendo $3^3=27$: se cangio il 9 in 243 dovrò cangiare l'esponente 2 in 5 essendo $3^5=243$, e così via via.

Ciò posto suppongasi a un numero costante, sia s la potenza a cui deve innalzarsi questa costante a onde riesca eguale ad una certa quantità t, onde cioè sia $a^s=t$. Quella s si chiama il *logaritmo* di t, e si indica brevemente in questo modo $s=\log. t$. Onde *il logaritmo di una quantità qualunque* t *non è altro se non che l'esponente che deve darsi ad un numero costante* a *per avere la stessa* t. Perciò le espressioni $d=\log. e$, $f=\log. g$, $p=\log. q$, non indicano altro se non che d, f, p sono quegli esponenti che debbono darsi al numero costante a per avere le quantità e, g, q, cioè altro non indicano se non che $a^d=e$, $a^f=g$, $a^p=q$.

439. Quel numero costante a che deve innalzarsi a diverse potenze d, f, p, onde si abbiano le diverse quantità e, g, q, si chiama *base dei sistemi logaritmici*. Come è chiaro col variare il valore di questa base, o di questo a si dovranno variare i valori degli esponenti d, f, p, onde si abbiano gli stessi numeri e, g, q: e quindi *variando il valore della base di un sistema logaritmico, variano i logaritmi degli stessi numeri*. Così se stabilita la base $a=2$ riesce $4=\log. 16$, $6=\log. 64$, $8=\log. 256$, perchè $2^4=16$, $2^6=64$, $2^8=256$, qualora alla base a si desse il valore 4 riescirebbe $2=\log. 16$, $3=\log. 64$, $4=\log. 256$, cioè *varierebbero i logaritmi degli stessi numeri* 16, 64, 256, essendo $4^2=16$, $4^3=64$, $4^4=256$.

440. Una tavola che presenti di rincontro ai numeri naturali progressivi 1, 2, 3, 4, 5,..... gli esponenti che debbono darsi ad una data base a per avere i numeri stessi, si chiama *tavola dei logaritmi*. Alla fine dell' Algebra ve n'ha una che va dall'1 al 200, e che si è posta unicamente per dare ai giovani un'idea di queste tavole, richiedendosi in pratica l'avere alle mani tavole assai più estese. Diremo dopo qualche cosa sul modo di compilare queste tavole. Intanto notiamo quelle cose che sono indispensabili per l'intelligenza, e per l'uso delle tavole stesse.

441. Abbiamo veduto (N.° 439) che cangiando il valore alla base cangiano i logaritmi degli stessi numeri. Quindi ogni tavola logaritmica inchiude necessariamente l'idea di un valore dato alla base a per costruirla. Questo valore nelle tavole moderne è 10, ed il sistema di calcolare i logaritmi sopra tale base si chiama *sistema tavolare, o di Briggs*. Il celebre Nepero che fu l'inventore dei logaritmi costruì le sue tavole sulla base frazionaria $a=2,7182818$..... e questo sistema di

calcolare i logaritmi sopra tale base dicesi *sistema Neperiano, od iperbolico*. L'uno e l'altro di questi due sistemi hanno le loro particolari utilità. Del resto se fosse utile si potrebbero costruire delle tavole dando alla base a altri valori p. e. 2, 3, 4. Conviene però sempre mantenere in tutto il corso della tavola quel valore della base, qualunque desso sia, che gli si è attribuito al principio della tavola stessa, altrimenti a nulla servirebbero i logaritmi che vi si trovano notati, come apparirà più chiaramente in appresso.

442. *Qualunque sia la base a il logaritmo dell'unità è sempre zero, e quella della base è sempre l'unità.* Di fatto nell'equazione $a^m = b$, dove in conseguenza $m = \log. b$, si faccia $b = 1$, si avrà $a^m = 1$. Ora questa equazione non si verifica per qualunque valore di a se non sia $m = o$, perchè, senza aver riguardo al valore di a, solo $a^0 = 1$ (N.° 152); dunque in luogo di $m = \log. b$ si avrà, sostituendo, $0 = \log. 1$, cioè *il logaritmo di 1 è sempre zero qualunque sia la base.* Parimenti nell'equazione $a^m = b$ si faccia $b = a$ avremo $a^m = a$: ma questa equazione non si verifica se non sia $m = 1$, perchè solo $a^1 = a$; dunque invece di $m = \log. b$ avremo, sostituendo, $1 = \log. a$; cioè *il logaritmo della base è sempre l'unità.*

443. Dalle cose dette superiormente risulta che nel sistema *tavolare*, o di base 10, i logaritmi dei numeri 1, 10, 100, 1000, 10000,..... saranno la serie dei numeri naturali 0, 1, 2, 3, 4,..... essendo questi appunto gli esponenti che conviene dare al 10 per avere i numeri proposti. Nello stesso sistema poi i logaritmi dei numeri di una sola cifra, che sono tra 1 e 10, saranno compresi tra 0 e 1, saranno cioè > 0 e < 1; quelli dei numeri di due cifre, che sono tra 10 e 100. saranno > 1 e < 2, quelli dei numeri di tre cifre, che sono tra 100 e 1000, saranno > 2 e < 3 ecc. Quindi in generale *il logaritmo di un numero qualunque che non sia potenza esatta di 10 sarà composto di un intero più una frazione.* L'intero prende il nome di *caratteristica*, la frazione chiamasi *mantissa*.

444. Per brevità in molte tavole calcolate sulla base 10 si trascura di scrivere la parte intera, o la *caratteristica* del logaritmo. La ragione si è, perchè (come deducesi dal detto (N.° 443)) *la caratteristica si compone di tante unità quante sono le cifre del numero di cui si cerca il logaritmo meno una;* e quindi, senza che sia notata, si trova a colpo d'occhio,

bastando contare le cifre del numero proposto e levare uno. Così log. 8, avrà 0 per caratteristica; log. 52, avrà 1; log. 128, avrà 2; log. 1873, avrà 3 ecc. La frazione, o *mantissa*, che nei logaritmi segue all'intero, viene nelle tavole calcolata in decimali. Siccome poi quella frazione è sempre *incommensurabile* (*), quindi si avrà in decimali solo approssimativamente il vero valore del logaritmo. Avvertasi però che anche solo con 5 decimali l'approssimazione è così grande, da trascurare nei calcoli comuni l'errore che ne può nascere, come insensibile. In quelle tavole dove si tralascia la caratteristica, è solo notata in decimali la mantissa senza che vi sia anteposto lo zero colla virgola dopo. Usando quindi di queste tavole, prima si cerca la caratteristica come abbiamo insegnato, e scritta questa, e segnata una virgola, vi si scrivono dopo le cifre che si trovano nella tavola di rincontro al numero proposto. Così dalla tavola che sta in fine, e che è senza caratteristiche si ricaverà p. e.

$$\log. 8 = 0{,}90309,\ \log. 48 = 1{,}68124,\ \log. 149 = 2{,}17319.$$

(*) *Ecco come si dimostra che quella frazione è sempre incommensurabile. Prendiamo l'equazione* $10^m = g^n$, *e vediamo se dessa può verificarsi per dei valori interi di* m *e di* n, *non essendo* g *una potenza intera di 10. Se potesse essere* $10^m = g^n$, *converrebbe che* g^n *non contenesse altro che i fattori semplici* 2 *e* 3, *perchè questi soli fattori semplici sono contenuti in* 10^m; *inoltre converrebbe che ciascuno di questi due fattori semplici fosse contenuto* m *volte in* g^n, *perchè tante volte li contiene il* 10^m, *essendo* $10^m = 2^m \times 5^m$. *Ora* g^n *non può contenere altro che i fattori semplici che si contengono in* g; *converrebbe dunque che in* g *fossero contenuti un numero eguale di volte i due soli fattori semplici* 2 *e* 5. *Ma in questo caso* g *sarebbe una potenza esatta di 10, dunque, non dovendolo essere per supposto, converrà concludere che l'eguaglianza* $10^m = g^n$ *non può verificarsi per dei valori interi di* m *e di* n. *Dunque* $10^{\frac{m}{n}} = g$ *non può verificarsi quando* m *ed* n *abbiano dei valori interi, quando cioè* $\frac{m}{n}$ *sia una frazione* commensurabile; *dunque* $\frac{m}{n} = \log. g$ *è una quantità* incommensurabile.

Ma a che servono nel calcolo i logaritmi? Ecco alcune proprietà dei logaritmi, che faranno conoscere il sommo vantaggio di questa bella scoperta di Nepero.

445. Abbiansi le due equazioni $a^m = b$, $a^n = c$; essendo a la base, sarà $m = \log. b$, $n \log. c$. Moltiplicando assieme le due prime eguaglianze, e sommando le due seconde, si ha $a^{m+n} = bc$, $m + n = \log. b + \log. c$, ma se $a^{m+n} = bc$ sarà ancora $m + n = \log. bc$; e quindi $\log. bc = \log. b + \log. c$: cioè *il logaritmo di un prodotto eguaglia la somma de' logaritmi dei suoi fattori.*

Ecco un esempio di questa proprietà:

Dalle tavole si ha $\begin{cases} \log. 13 = 1,11394 \\ \log. 14 = 1,14613 \end{cases}$

Sommando si ottiene $\quad 2,26007 = \log. 182;$

e di fatto $13 \times 14 = 182$.

Quando adunque si debbano moltiplicare fra loro due numeri qualunque, invece di eseguire la moltiplica aritmetica, si potranno sommare assieme i logaritmi, che danno le tavole per quei due numeri, ed il nuovo numero, che nelle tavole ha per logaritmo quella somma, sarà il prodotto cercato. I logaritmi perciò cangiano la moltiplica in somma.

Non avendo che una tavola poco estesa, come è quella che si mette per semplice specchio in un libro elementare, sembrerà poco utile, anzi alcune volte tornerà più lungo il calcolo eseguito coi logaritmi. Ma, come è chiaro, questo non avverrà sicuramente quando (avendo alle mani tavole assai estese, come quelle di Callet e di Gardinier) si sostituisca alla moltiplica di numeri assai alti la somma dei loro logaritmi: l'operazione di fatti coi logaritmi non è mai nè più prolissa, nè più difficile di quella sostituita alla moltiplica aritmetica di 13 per 14, e la moltiplica aritmetica al contrario, al crescere dei numeri da moltiplicarsi, riesce sempre assai più lunga, e quindi assai più difficoltosa. Questa osservazione, che abbiamo fatto sulla utilità del sostituire alla moltiplica aritmetica il calcolo coi logaritmi, è applicabile ancora a quello che diremo per la divisione, per l'innalzamento a potenza e per l'estrazione di radice; ci dispensiamo però dal ripeterla in appresso, bastando l'averla accennata una volta.

446. Abbiansi le due equazioni $a^e = d$, $a^f = g$, e quindi nella base a, $e = \log. d$, $f = \log. g$.

Dividendo l'una per l'altra le due prime equazioni si ha $\frac{a^e}{a^f} = \frac{d}{g}$, cioè $a^{e-f} = \frac{d}{g}$, cioè $e - f = \log. \frac{d}{g}$: sottraendo l'una dall'altra le due seconde si ha $e - f = \log. d - \log. g$. Confrontando assieme le due ultime equazioni dedotte, concluderemo $\log. \frac{d}{g} = \log. d - \log. g$, cioè *il logaritmo di un quoto qualunque eguaglia il logaritmo del dividendo meno il logaritmo del divisore.* Ecco un esempio:

Dalle tavole si ha $\begin{cases} \log. 192 = 2,28330 \\ \log. \ 16 = 1,20412 \end{cases}$

Sottraendo si ha $\quad 1,07918 = \log. 12;$

e di fatto $\frac{192}{16} = 12$.

Quando adunque si debbano dividere fra loro due numeri qualunque, invece di eseguire la divisione aritmetica, si potrà dal logaritmo del dividendo sottrarre il logaritmo del divisore, ed il nuovo numero che ha nelle tavole per logaritmo la differenza che ne risulta sarà il quoto cercato. I logaritmi perciò cangiano la divisione in sottrazione.

447. Abbiasi l'equazione $a^m = b$, e quindi l'altra $m = \log. b$. S'innalzino alla potenza p i due membri della prima, e si moltiplichino per p i due membri della seconda si avrà $a^{mp} = b^p$, $mp = p \log. b$; ma l'equazione $a^{mp} = b^p$ dà ancora $mp = \log. b^p$, dunque $\log. b^p = p \log. b$, cioè *il logaritmo di una quantità innalzata a potenza, eguaglia l'esponente di quella potenza moltiplicato pel logaritmo di quella quantità semplice.*

Ecco un esempio:

Dalle tovole si ha $\log. 13 = 1,11394$

moltiplicandolo per $\quad 2$

si ottiene $\quad 2,22788 = \log. 169;$ (*)

e di fatto $13^2 = 169$.

(*) *Se osserviamo nella tavola posta in fine il logaritmo di* 169 *troviamo che è* 2,22789, *e non già* 2,22788; *conviene però*

Quando adunque si debba innalzare una quantità ad una data potenza basterà moltiplicare il logaritmo della quantità per l'esponente della potenza, ed il numero che ha per logaritmo il prodotto ottenuto sarà il cercato. I logaritmi in conseguenza cangiano l'innalzamento a potenza in moltiplica.

448. Abbiasi l'equazione $a^m = b$, e quindi l'altra $m = \log. b$. Nella prima si estragga da ambidue i membri la radice p, nella seconda si dividano per p ambidue i membri; si avrà $a^{\frac{m}{p}} = \sqrt[p]{b}$, $\frac{m}{p} = \frac{\log.\ b}{p}$: ma dall'equazione $a^{\frac{m}{p}} = \sqrt[p]{b}$ si ha ancora $\frac{m}{p} = \log. \sqrt[p]{b}$; dunque $\log. \sqrt[p]{b} = \frac{\log. b}{p}$, cioè *il logaritmo di un radicale eguaglia il logaritmo della quantità che sta sotto il vincolo, diviso per l'indice dello stesso vincolo.*

Ecco un esempio:

Dalle tavole si ha $\log. 196 = 2{,}29226$
Dividendo per 2

si ottiene $1{,}14613 = \log. 14$;

e di fatto $\sqrt{196} = 14$.

Quando adunque si debba estrarre da un numero una data radice, basterà dividere il logaritmo di quel numero per l'indice della radice; e quel numero, che ha per logaritmo il quoto ottenuto, sarà la radice cercata. I logaritmi in conseguenza cangiano l'estrazione della radice in divisione.

449. Posta l'intelligenza di queste teorie, le seguenti espressioni abc, $\frac{ab}{cd}$, $\frac{a^2b^3}{d^4}$, $\frac{a\sqrt[3]{b^2}}{c^2\sqrt{d}}$ col calcolo logaritmico si potranno ridurre ad operazioni semplicissime, perchè si avrà:

---

avvertire che in simili calcoli può avvenire benissimo alcune volte che l'ultima cifra non sia esatta, in causa delle cifre, che nei logaritmi vengono dopo alle cinque notate e che si trascurano.

1.° $\log. abc = \log. a + \log. b + \log. c$.

2.° $\log. \frac{ab}{cd} = \log. ab - \log. cd = \log. a + \log. b - \log. c - \log. d$.

3.° $\log. \frac{a^2b^3}{d^4} = \log. a^2b^3 - \log. d^4 = 2 \log. a + 3 \log. b - 4 \log. d$.

4.° $\log. \frac{a\sqrt[3]{b^2}}{c^2\sqrt{d}} = \log. a\sqrt[3]{b^2} - \log. c^2\sqrt{d} = \log. a + \frac{2}{3} \log. b$
$- 2 \log. c - \frac{1}{2} \log. d$.

450. Servono ancora i logaritmi per la risoluzione di quelle equazioni in cui l'incognita è un esponente. Al N.° 415 avevasi l'equazione $u = aq^{n-1}$, suppongasi incognita in questa equazione la n: per risolverla si prendano i logaritmi in ambidue i membri, si avrà $\log. u = \log. a + (n-1) \log. q$; quindi $n - 1 = \frac{\log. u - \log. a}{\log. q}$; quindi $n = 1 + \frac{\log. u - \log. a}{\log. q}$, che è la formola del N.° 430 messo L in luogo di log.

Parimenti nell'equazione del N.° 418.

$$(s-a)\, a^{\frac{1}{n-1}} = (s-u)\, u^{\frac{1}{n-1}}$$

se è incognita la n si avrà, prendendo i logaritmi in ambidue i membri, $\log. (s-a) + \frac{1}{n-1} \log. a = \log. (s-u) + \frac{1}{n-1} \log. u$, quindi $(n-1)\Big(\log. (s-a) - \log. (s-u)\Big) = \log. u - \log. a$, quindi $n = 1 + \frac{Lu - La}{L(s-a) - L(s-u)}$ formola del N.° 431.

Parimenti nell'equazione del N.° 421, $a = s\left(\frac{q-1}{q^n-1}\right)$ supponendosi incognita la n, prima si liberi il secondo membro dal divisore, si avrà $aq^n - a = sq - s$; cioè $aq^n = sq + a - s$, quindi prendendo i logaritmi $\log. a + n \log. q = \log. (sq + a - s)$, quindi $n = \frac{\log. (sq + a - s) - \log. a}{\log. q}$ formola del N.° 432.

Con simile metodo si troverebbe quella del N.° 433.

Abbiasi finalmente l'equazione $a^{b^x} = c^m$. Facciasi $b^x = y$, e la data equazione si convertirà nella seguente $a^y = c^m$; quindi si avrà $y \log.\, a = m \log.\, c$, dalla quale si ricava $y = \frac{m \log.\, c}{\log.\, a}$. In questa, sostituendo il valore di y, sarà $b^x = \frac{m \log.\, c}{\log.\, a}$, e prendendo di nuovo i logaritmi, otterremo $x \log.\, b = \log.\left(\frac{m \log.\, c}{\log.\, a}\right)$; onde $x = \frac{\log.\left(\frac{m \log.\, c}{\log.\, a}\right)}{\log.\, b}$.

451. Cognito il logaritmo m di un numero b nel sistema di base a, è facile trovare il logaritmo dello stesso numero b in un altro sistema di base diversa e. Sia x questo logaritmo che cercasi; dai dati si avranno queste due eguazioni $a^m = b$, $e^x = b$. Prendendo in queste due equazioni i logaritmi in ambidue i membri, e prendendoli nel sistema di base a, avremo $m = \log.\, b$, $x \log.\, e = \log.\, b$. Dalla seconda di queste due si ha $x = \frac{\log.\, b}{\log.\, e}$; e mettendo al luogo di $\log.\, b$ il valore cognito di m sarà $x = \frac{m}{\log.\, e} = m \times \frac{1}{\log.\, e}$, cioè: *conoscendo il logaritmo* m *di un numero in un dato sistema di tavole potrà aversi il logaritmo dello stesso numero in un altro sistema col moltiplicare quella* m *cognita per una frazione, il cui numeratore è l'unità ed il denominatore è il logaritmo del numero, che serve a base del nuovo sistema, preso però questo logaritmo nel primo sistema dato.* Esempio:

Cognito il logaritmo di 12 nel sistema di base 10, vuolsi il logaritmo dello stesso 12 nel sistema di base 4. Se log. 12 è cognito si avrà $\log.\, 12 = 1{,}07918$; nello stesso sistema di base 10 si ha $\log.\, 4 = 0{,}60206$; quindi $\frac{1}{\log.\, 4} = \frac{1}{0{,}60206} = 1{,}66113$.

Dalla regola esposta abbiamo il logaritmo cercato

$x = \log.\, 12 \times \frac{1}{\log.\, 4}$ cioè $x = 1{,}07918 \times 1{,}66113 = 1{,}79266$ risultato di quella moltiplica.

Qui cade in proposito l'avvertire, che qualora si voglia il logaritmo di un numero qualunque nel sistema di base 4 dato che sia il logaritmo di quel numero nel sistema tavolare, rimane sempre costante il moltiplicatore $\frac{1}{\log.\, 4} = 1{,}66113$: perciò se tutti i logaritmi della tavola nel sistema tavolare si moltiplichino pel numero costante 1,60113 si trasformerà la tavola in un'altra la cui base è 4.

Il numero, per cui si dovrebbero moltiplicare i logaritmi della nostra tavola onde averne un'altra nel sistema iperbolico o di Nepero, è 2,3025851.

452. Dalle cose dette apparisce che è facile data una tavola logaritmica in un sistema, passare ad un'altra in altro sistema. Ma se uno volesse costruire una tavola logaritmica senza averne alcuna siccome accadde al primo compilatore delle tavole: se uno volesse da sè osservare se una data tavola sia esatta, qual regola dovrà seguire? Da ciò che si è detto (N.° 445) è chiaro che tutta la difficoltà sta nel trovare i logaritmi dei numeri primi; dacchè per gli altri la cosa riesce facile, essendo $\log.\, 4 = \log.\, 2 + \log.\, 2$, $\log.\, 14 = \log.\, 2 + \log.\, 7$ ecc. Ora per trovare i logaritmi dei numeri primi vi sono due metodi: uno mediante formole che dà l'introduzione al Calcolo sublime, del quale noi non possiamo occuparci; l'altro mediante l'inserire una quantità di medii geometrici tra i termini della progressione geometrica

$$∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : .....,$$

ed un'eguale quantità di medii aritmetici tra i loro corrispondenti logaritmi che sono cogniti, e che formano la progressione aritmetica $\div 0 : 1 : 2 : 3 : 4 : .....$, prendendo poi per logaritmi dei numeri primi 2, 3, 7, 11,.....(*) quei medii

---

(*) *Non occorre cercare il logaritmo del numero primo* 5, *perchè* $\log.\, 5 = \log.\, 10 - \log.\, 2$.

inseriti nella progressione aritmetica, i quali corrispondono pel loro posto a quei medii geometrici inseriti, che sono più approssimati agli stessi numeri primi.

Questo secondo metodo adoperato dai primi compilatori delle tavole, certamente non è da adoperarsi ai nostri giorni, perchè faticosissimo in confronto dell'altro metodo che dà l'introduzione al calcolo.

453. Qualora nell'equazione $a^m = b$ diasi ad a un valore positivo, non potrà mai per qualunque valore di m, riescire b negativo; concluderemo adunque che *il logaritmo di una quantità negativa in un sistema di base positiva, non può essere una quantità reale; e quindi è assurdo.*

454. Abbiasi la frazione vera $\frac{p}{q}$; dove in conseguenza è $p<q$. Sarà (N.° 446) $\log.\frac{p}{q} = \log.p - \log.q$. Ma se è $p<q$, sarà anche $\log.p < \log.q$; quindi $\log.\frac{p}{q}$ sarà negativo: cioè *il logaritmo di una frazione vera è sempre negativo.* Se la frazione vera fosse $\frac{1}{q}$ sarebbe $\log.\frac{1}{q} = \log.1 - \log.q$: ma $\log.1 = 0$ (N.° 442), dunque $\log.\frac{1}{q} = -\log.q$; cioè *il logaritmo di una frazione vera, che ha per numeratore l'unità, eguaglia il logaritmo del denominatore preso col segno contrario.*

Quindi se p. e. risulti da un calcolo fatto, che $\log.x = -1{,}39794$, siccome $\log.25 = 1{,}39794$, sarà $x = \frac{1}{25}$.

Del pari se voglio il logaritmo della frazione decimale 0,25 dirò $\log.0{,}25 = \log.\frac{25}{100} = \log.25 - \log.100 = 1{,}39794 - 2 = -0{,}60206$, che è appunto il logaritmo di $\frac{1}{4}$.

455. Per quanto sieno estese le tavole logaritmiche avviene spessissimo di dovere cercare logaritmi di numeri così grandi, che non si trovano nelle tavole stesse. Esporremo con qualche esempio il metodo che si adopera in questi casi.

Vogliasi p. e. il logaritmo del numero 1897. Separo tante cifre a destra quante sono necessarie, onde il numero che rimane sia compreso nella tavola che ho: separo quindi il 7: Cerco il logaritmo del numero che rimane 189; e trovo $\log.189 = 2{,}27646$. Aggiungo tante unità alla caratteristica quante furono le cifre separate, e quindi in questo caso ne aggiungo una: avrò 3,27646 che sarà eguale (N.° 445) al logaritmo di 1890. Parimenti avendo dalle tavole $\log.190 = 2{,}27875$, dirò che $\log.1900 = 3{,}27875$. Prendo la differenza tra il logaritmo di 1890, e quello di 1900, e questa riesce 0,00229; quindi essendo la differenza tra 1890 e 1900 eguale a 10, instituisco questa proporzione geometrica: la differenza 10 dei numeri sta alla differenza 0,00229 dei loro logaritmi, come la differenza 7 tra 1890, e 1897 sta alla differenza x dei loro logaritmi; cioè $10 : 0{,}00229 :: 7 : x$ cioè $x = 0{,}00160$. Quindi sarà $\log.1897 = 3{,}27646 + 0{,}00160 = 3{,}27806$ quale appunto si trova nelle tavole che comprendono questo numero.

Per un altro esempio cerchisi il logaritmo del numero 19101. Separate due cifre a destra, resta il numero 191 il cui logaritmo è 2,28103: quello del numero 192 è 2,28330; quindi sarà $\log.19100 = 4{,}28103$, $\log.19200 = 4{,}28330$; quindi avremo la proporzione 100, differenza dei due numeri 19100, e 19200, sta a 0,00227 differenza dei loro logaritmi, come 1 differenza tra 19100, e 19101 sta alla differenza x dei logaritmi; cioè $100 : 0{,}00227 :: 1 : x$: donde $x = 0{,}00002$: quindi $\log.19101 = 4{,}28103 + 0{,}00002 = 4{,}28105$ come hanno appunto le tavole assai estese che comprendono anche questo numero.

Il metodo usato in questi due casi è quello che deve usarsi in qualunque altro. Sia però avvertito il giovane che questo metodo non è rigorosamente esatto, non sussistendo rigorosamente il principio che si adopera nell'istituire quella proporzione; che cioè la differenza dei numeri sia proporzionale alla differenza dei logaritmi. Qualora si usasse di una tavola poco estesa, come è quella posta in fine, potrebbe alcune volte quel principio erroneo produrre uno sbaglio notevole; siccome però quanto più è piccola la differenza di due numeri in confronto dei numeri stessi, tanto più quel principio si avvicina al vero, quindi avendo alle mani tavole assai estese, che diano p. e. i logaritmi di tutti i numeri di 5 cifre, si può con tutta sicurezza usare di questo metodo, riescendo allora gli errori interamente trascurabili.

456. Può anche avvenire qualche volta che cerchisi il numero corrispondente ad un logaritmo il quale non trovasi nelle tavole. In questo caso il metodo da adoperarsi è l'inverso dell'antecedente. Ecco un esempio:

Cerchisi qual numero corrisponde al logaritmo 4,28105. Si levino tante unità alla caratteristica finchè il logaritmo sia tra i notati nella tavola. Nel nostro caso, volendo usare della tavola che abbiamo, levisi 2: resta il logaritmo 2,28105. Il numero corrispondente a questo logaritmo è tra 191, e 192 essendo 2,28105 fra i logaritmi di questi due numeri. Dunque (N.° 446), per le due unità levate al vero logaritmo proposto, il numero che si cercava sarà compreso tra 19100, e 19200. Per trovarlo esatto, qui pure (avendosi dalle tavole che 0,00227 è la differenza fra il logaritmo di 191, e quello di 192, e quindi anche (N.° 445) fra quello di 19100, e 19200; e notando che 0,00002 è la differenza tra il proposto, e quello del numero 19100), si stabilirà la proporzione 100 differenza dei numeri 19100, e 19200, sta a 0,00227 differenza dei loro logaritmi, come x differenza del numero cercato con 19100, sta a 0,00002 differenza dei logaritmi di questi, cioè $100 : 0,00229 :: x : 0,00002$, donde risulta $x = 1$ circa; quindi il numero cercato sarà $19100 + 1$ cioè 19101. Anche qui è da notarsi, per la ragione accennata di sopra, non essere il metodo rigorosamente esatto, e da non fidarsene se non allora che si hanno tavole assai estese.

Applicazione delle teorie spiegate nei due ultimi capi ai problemi d'interesse.

457. Si chiama *interesse* del denaro o suo *frutto* quel dippiù, che al prestatore di una somma devesi rendere oltre il capitale per l'indennizzo degli utili che si sarebbe procurati non prestando quella somma. Quando si voglia il frutto annuo del solo capitale dato, l'*interesse* dicesi *semplice;* quando si voglia che il frutto di ciascun anno venga unito al capitale per ritrarne un nuovo frutto maggiore negli anni susseguenti l'interesse dicesi *composto*.

458. I problemi d'interesse semplice si riducono a semplici proporzioni geometriche. Sia f il frutto che dà in un

dato tempo il capitale 1; se si vuole sapere quale frutto x darà nello stesso tempo la somma c si avrà la proporzione $1 : f :: c : x$; quindi $x = \frac{fc}{1}$. Se poi si vuol sapere quale è quella somma y, che nello stesso tempo darà il frutto d, si avrà l'altra proporzione $1 : f :: y : d$; donde $y = \frac{d}{f}$. Se in fine conoscendosi che il frutto annuo di un capitale g è h, e si volesse conoscere quale è il frutto annuo f del capitale 1, la proporzione $1 : f :: g : h$ darebbe $f = \frac{h}{g}$.

459. Sia sempre f il frutto, che dà in un anno la somma 1 impiegata ad interesse semplice, cercasi quale è quella somma x che, dopo un anno, unita al suo frutto eguaglia d?

Se 1 in un anno dà f di frutto, lo stesso 1, dopo un anno, unito al frutto diverrà $1 + f$; quindi avremo la proporzione $1 : 1 + f :: x : d$; donde $x = \frac{d}{1+f}$. Se poi si cercasse quale è quella somma y che dopo n anni unita ai suoi frutti eguaglia g, con ragionamento analogo si stabilirebbe la proporzione $1 : 1 + nf :: y : g$, donde $y = \frac{g}{1+nf}$ (A). Nel caso che fosse data la somma $y = s$, e fosse dato ciò che essa diviene coll'interesse semplice dopo n anni, fosse dato cioè g, allora per trovare il valore di f, dalla (A) si dedurrebbe l'altra $f = \frac{g - s}{sn}$.

460. La formola (A) serve per la soluzione dei problemi così detti *di sconto in dentro*. Una cambiale p. e. di scudi 6000 è pagabile dopo 10 mesi, volendone ora il denaro, quanto si ritirerà lasciando il frutto del 2 per cento ogni mese? Il problema, come è chiaro, equivale in altri termini a quest'altro: quale è quella somma y, che fruttando il 2 per cento ogni mese, dopo 10 mesi diviene 6000. Sarà dunque nella formola (A) $g = 6000$, $n = 10$, $f = \frac{2}{100}$, donde

si avrà $y = \dfrac{6000}{1+10 \times \dfrac{2}{100}} = 5000$; dovrassi adunque ritirare la romma di scudi 5000.

Qui si avverta di passaggio che se invece di adoperare la formola, si fosse ragionato in quest'altro modo: scudi 6000 al 2 per 100 ogni mese rendono (N.° 458) in 10 mesi scudi 1200, dunque dovranno ritirarsi scudi 6000 − 1200, cioè scudi 4800; si sarebbe usato un modo di calcolo che appellasi di *sconto in fuori*, e che nel proposto problema sarebbe ingiusto.

461. Da ciò che abbiamo detto al (N.° 459) deducesi che, essendo f il frutto annuo di 1, la somma c unita dopo un anno al suo frutto diviene $c + cf$, cioè $c(1+f)$. Quando il capitale è impiegato ad *interesse composto*, si aggiungono anno per anno al capitale primitivo i suoi frutti onde essi pure sieno fruttiferi (N.° 457): quindi se al principio del primo anno il capitale fruttifero era c al principio del secondo anno sarà $c(1+f)$; al principio del terzo per egual ragione sarà $c(1+f)(1+f)$, cioè $c(1+f)^2$, al principio del quarto sarà $c(1+f)^3$, e così via via; in generale dopo n anni cioè al principio dell'anno $n+1$ sarà $c(1+f)^n$. Quindi chiamata s la somma cui ammonterà un capitale c impiegato per n anni all'interesse composto, col frutto f per la somma 1, avremo la formola $s = c(1+f)^n$ (B).

Per mezzo di questa formola date tre delle quattro quantità s, c, f, n si troverà la quarta. Ecco alcuni esempi:

Problema 1.° Dopo 9 anni cosa diviene un capitale di 100 scudi impiegato all'interesse composto del 5 per 100?

Come è chiaro qui $c = 100$, $f = \dfrac{5}{100}$, $n = 9$, avremo perciò $s = 100\left(1 + \dfrac{5}{100}\right)^9$, cioè $s = 100\left(\dfrac{105}{100}\right)^9 = \dfrac{(105)^9}{(100)^8}$; adoperando i logaritmi, per non dovere eseguire quelle potenze, avremo: $\log. s = 9 \log. 105 - 8 \log. 100 = 9 \times 2{,}02119 - 8 \times 2{,}00000$, cioè $\log. s = 18{,}19071 - 16{,}00000 = 2{,}19071$. Cercando nelle tavole quale è quel numero a cui corrisponde il logaritmo 2,19071 si trova che il numero è tra 155 e 156;

e con un metodo analogo all'adoperato al N.° 456 si trova $s = 155 : 15 : 7$, cioè scudi 155, baiocchi 15 e denari 7.

Problema 2.° In quanti anni un capitale di 100 scudi, impiegato all'interesse composto del 5 per 100, diviene scudi 164?

In questo problema $s = 164$, $c = 100$, $f = \dfrac{5}{100}$, e l'incognita è n: l'equazione (B) perciò darà $164 = \dfrac{(105)^n}{(100)^{n-1}}$; adoperando i logaritmi si ha

$$\log. 164 = n \log. 105 - (n-1) \log. 100,$$

cioè $n = \dfrac{\log. 164 - \log. 100}{\log. 105 - \log. 100} = \dfrac{0{,}21484}{0{,}02119} = 10{,}139$; quindi n eguaglia 10 anni, 1 mese e 20 giorni circa.

Problema 3.° A qual frutto deve essere impiegato un capitale di 100 scudi, onde, calcolato l'interesse composto, venga raddoppiato in 10 anni?

In questo caso si ha $c = 100$, $s = 200$, $n = 10$. Per applicare i logaritmi, onde facilitare il calcolo, si fa in simili problemi $1 + f = \dfrac{z}{100}$. L'equazione (B) diviene

$$200 = 100\left(\frac{z}{100}\right)^{10} \text{ cioè } 200 = \frac{(z)^{10}}{(100)^9},$$

quindi $\log. 200 = 10 \log. z - 9 \log. 100$,

cioè $\log. z = \dfrac{\log. 200 + 9 \log. 100}{10} = \dfrac{2{,}30103 + 18{,}00000}{10}$,

cioè $\log. z = 2{,}03010$; quindi $z = 107{,}18$ circa: ma dalla equazione posta $1 + f = \dfrac{z}{100}$ si ha $f = \dfrac{z - 100}{100} = \dfrac{7{,}18}{100}$; dunque dovrà impiegarsi al frutto di scudi 7 e 18 baiocchi ogni 100 scudi.

Se l'incognita fosse la somma c impiegata, si opererebbe con metodo analogo, ricavandosi dalla (B)

$$\log. c = \log. s - n \log. (1+f).$$

462. Chiamasi *annualità* la rendita di un capitale c calcolata in modo, che pagando ogni anno una somma d fissa, composta degli interessi scaduti, e di un acconto sul capitale, questo stesso capitale vada diminuendo così di anno in anno, che divenga nullo dopo un numero n determinato di anni. Cerchiamo la formola pei calcoli in questa specie di contratto.

Sia sempre f il frutto di 1. È chiaro che se dopo n anni nulla più resta ad aversi da chi ha dato il capitale c, converrà che quello che sarebbe divenuto dopo n anni lo stesso capitale c ad interesse composto, eguagli alla somma di ciò che sarebbe divenuta alla fine degli n anni, per l'interesse composto, ciascuna partita d pagata anno per anno. Ora il capitale c sarebbe divenuto $c(1+f)^n$ (N.° 461); la partita d pagata alla fine del primo anno sarebbe divenuta $d(1+f)^{n-1}$, quella pagata alla fine del secondo sarebbe divenuta $d(1+f)^{n-2}$, quella pagata alla fine del terzo $d(1+f)^{n-3}$ ecc., quella pagata alla fine del penultimo sarebbe divenuta $d(1+f)$, quella pagata alla fine dell'ultimo sarebbe rimasta la stessa d. Avremo perciò l'eguaglianza

$$c(1+f)^n = d(1+f)^{n-1}+d(1+f)^{n-2}+\ldots+d(1+f)+d \quad (C).$$

Il secondo membro di questa eguaglianza è una progressione geometrica il cui primo termine $a=d$, la cui ragione geometrica $q=1+f$, il cui numero dei termini è n; sarà perciò (N.° 435) la sua somma $s=d\left(\frac{(1+f)^n-1}{f}\right)$.

Quindi l'eguaglianza (C) si trasformerà nella seguente

$$c(1+f)^n = d\left(\frac{(1+f)^n-1}{f}\right), \text{ cioè } d = (d-cf)(1+f)^n \quad (D)$$

che sarà la formola cercata.

Cognite perciò tre delle quattro quantità c, f, d, n, si conoscerà la quarta.

463. Prima di venire ad alcuni esempi notiamo che la formola (D) si applica anche ai contratti *vitalizii*, a quei contratti cioè nei quali uno dà una somma c per avere fino che vive una somma d annua. In tali contratti l'elemento n è indeterminato, e perciò il vitalizio dicesi un contratto di

sorte; onde però sia fatto con giustizia e v'abbia la sorte il minor campo possibile, conviene prendere per n quel numero d'anni, che, dietro l'osservazione, vivono ancora i più degli uomini pari per robustezza e per età a quello che dà la somma c. Le così dette *tavole di mortalità* prestano questo valore di n, e danno p. e. che i più degli uomini giunti a 40 anni ne vivono ancora 20, quelli giunti a 50 ne vivono ancora 15 ecc.

464. Veniamo ora ad alcuni esempi d'applicazione della formola (D).

Problema 1.° Tizio ha preso da un operaio scudi 124 col patto di dargli 10 scudi all'anno fino che viva; cercasi quanti anni dovrebbe ancora vivere l'operaio, onde Tizio non fosse danneggiato in questo contratto, calcolando il frutto del 5 per 100?

La formola (D) in questo caso richiede che si faccia

$$d=10,\ f=\frac{5}{100},\ c=124;$$

sarà perciò $10=\left(10-124\times\frac{5}{100}\right)\left(1+\frac{5}{100}\right)^n$,

cioè $$10=\left(\frac{1000-620}{100}\right)\left(\frac{100+5}{100}\right)^n;$$

cioè $$10=\frac{(380)(105)^n}{(100)^{n+1}};$$ e prendendo i logaritmi

$$\log.(10)=\log.(380)+n\log.(105)-(n+1)\log.(100),$$

cioè $$1=2{,}57978+n\times 2{,}02119-(n+1)2,$$

cioè $$n(2-2{,}02119)=2{,}57978-3,$$

cioè $$n=\frac{0{,}42022}{0{,}02119}=19{,}831$$

eguale a 19 anni e 10 mesi circa.

Problema 2.° Calcolando il frutto al 5 per 100, quale somma dovrebbe retribuirsi annualmente in un contratto vitalizio ad uno che dà scudi 200, e che, secondo le tavole di mortalità, dovrebbe vivere ancora 10 anni?

La formola $d = (d - cf)(1+f)^n$ (D) abbisogna in simili problemi di una modificazione onde applicarvi il calcolo logaritmico.

Facciasi $y = \dfrac{d - cf}{df}$ (E):

La (D) si trasformerà nella seguente $d = y\,df(1+f)^n$; cioè, dividendo tutto per d, $1 = yf(1+f)^n$ (D').

Nella (D') facendo, secondo i dati $f = \dfrac{5}{100}$, $n = 10$ avremo $1 = \dfrac{5y}{100}\left(\dfrac{105}{100}\right)^n$, quindi $100 = 5y\left(\dfrac{105}{100}\right)^n$: prendendo i logaritmi si ha

$$2{,}0000 = \log. y + 0.69897 + 0{,}21190,$$

cioè $\log. y = 1{,}08913$, quindi $y = 12{,}28$; sostituito questo valore di y nella (E) si avrà $12{,}28 = \dfrac{d - cf}{df}$; e mettendo per c e per f i valori dati sarà

$$12{,}28 = \frac{d - 10}{\frac{5d}{100}} = \frac{100d - 1000}{5d}:$$

da questa si ricava $d = 25{,}91$ circa; quindi dovrà retribuire annualmente scudi 25 e baiocchi 91.

Se fosse incognita la somma data c si ricorrerebbe alle stesse due formole (E) e (D').

TAVOLA DEI LOGARITMI TAVOLARI
dall' 1 fino al 200.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
1	00000	51	70757	101	00432	151	17898
2	30103	52	71600	02	00860	52	18184
3	47712	53	72428	03	01284	53	18469
4	60206	54	73239	04	01703	54	18752
5	69897	55	74036	05	02119	55	19033
6	77815	56	74819	06	02537	56	19312
7	84510	57	75587	07	02938	57	19590
8	90309	58	76343	08	03342	58	19866
9	95424	59	77085	09	03742	59	20140
10	00000	60	77815	10	04139	60	20412
11	04139	61	78533	111	04532	161	20683
12	07918	62	79239	12	04922	62	20952
13	11394	63	79934	13	05308	63	21219
14	14613	64	80618	14	05690	64	21484
15	17609	65	81291	15	06070	65	21748
16	20412	66	81954	16	06446	66	22011
17	23045	67	82607	17	06819	67	22272
18	25527	68	83251	18	07188	68	22531
19	27875	69	83885	19	07555	69	22789
20	30103	70	84510	20	07918	70	23045
21	32222	71	85126	121	08279	171	23300
22	34242	72	85733	22	08636	72	23553
23	36173	73	86332	23	08991	73	23805
24	38021	74	86923	24	09342	74	24055
25	39794	75	87506	25	09691	75	24304
26	41497	76	88081	26	10037	76	24551
27	43136	77	88649	27	10380	77	24797
28	44716	78	89209	28	10721	78	25042
29	46240	79	89763	29	11059	79	25285
30	47712	80	90309	30	11394	80	25527
31	49136	81	90849	131	11727	181	25768
32	50515	82	91381	32	12057	82	26007
33	51851	83	91908	33	12385	83	26245
34	53148	34	92428	34	12710	84	26482
35	54407	85	92942	35	13033	85	26717
36	55630	86	93450	36	13354	86	26951
37	56820	87	93952	37	13672	87	27184
38	57978	88	94448	38	13988	88	27416
39	59106	89	94939	39	14301	89	27646
40	60206	90	95424	40	14613	90	27875
41	61278	91	95904	141	14922	191	28103
42	62325	92	96379	42	15229	92	28330
43	63347	93	96848	43	15534	93	28556
44	64345	94	97313	44	15836	94	28780
45	65321	95	97772	45	16137	95	29003
46	66276	96	98227	46	16435	96	29226
47	67210	97	98677	47	16732	97	29447
48	68124	98	99123	48	17026	98	29667
49	69020	99	99564	49	17319	99	29885
50	69897	100	00000	50	17609	200	30103