DELLA

INVENZIONE GEOMETRICA

OPERA POSTUMA

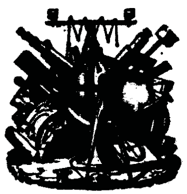
DI

NICOLA FERGOLA

ORDINATA, COMPIUTA, E CORREDATA D' IMPORTANTI NOTE
DAL PROF. V. FLAUTI
Segretario della R. Accademia delle Scienze di Napoli, ec.

AGGIUNTOVI

Un esercizio di problemi geometrici risoluti con gli antichi, ed i moderni metodi.



IN NAPOLI
Nella stamperia privata dell' autore
1842.

PREFAZIONE

DELL' EDITORE

ALLA QUALE FA SEGUITO IL PROSPETTO DELL' INTERA OPERA, PUBBLICATO FIN DAL 1809.

Gli antichi geometri, come lasciò notato Pappo alessandrino, nella prefazione al libro VII. delle sue *Collezioni matematiche*, dopo aver fatto apprendere a coloro, che nella Geometria istruivansi, i comuni Elementi, ed eran questi gli Euclidei, senza che in que' felici tempi per la Geometria altri se ne conoscessero, a coloro, che volevano apprendere la difficile, e veramente sublime arte dell' inventare avevano preparata abbondante materia di precetti, e di esempj in XXXIII libri, così ordinati forse da Pappo medesimo [1]. De' DATI di *Euclide*, un libro. Due di *Apollonio*, della SEZIONE DI RAGIONE, e due altri, dello stesso, della SEZIONE DELLO SPAZIO, due della SEZIONE DETERMINATA, e due delle TAZIONI. Tre de' PORISMI, di *Euclide*; due di *Apollonio* delle INCLINAZIONI, due de' LUOGHI PIANI, ed otto de' CONICI. Cinque de' LUOGHI SOLIDI di *Aristeo Seniore*; due de' LUOGHI ALLA SUPERFI-

[1] Fu questa l'opinione manifestata dall'Halley, nella dotta prefazione a' libri di Apollonio *de Sectione rationis* ec.

CIE, di *Euclide*; e finalmente due di *Eratostene* detti DE MEDIETATIBUS [2].

Eran questi i mezzi, che adoperarono que' saggi, e severi istitutori a formare tanti insigni geometri, profondi nella scienza, da' quali questa ebbe i suoi grandi progressi, e quella massa di conoscenze importanti, che se ci fosse tutta pervenuta avremmo noi dovuto, come il Newton, e l' Halley si espressero, *forse più ammirare tanta loro sapienza, che poterla raggiugnere senza i loro scritti*.

Ma risorta la Geometria tra' moderni, e gran parte di quelle dotte, e sublimi opere rimasta dalla edacità de' tempi, e dalle più che sacrileghe mani de' barbari distrutta, non fu dato a coloro, che indefessamente la coltivarono, e promossero il penetrar tant' oltre, nè la già ingentilita maniera d' istituire il permetteva. Aggiungasi, che l' invenzione dell' *Analisi algebrica*, e l' applicazione di essa alla Geometria, che hanno al sommo decorata la scienza de' moderni, deviolli dall'attendere con pari impegno che prima a ricercare, o restituire le cose perdute di quelli, a che con buon successo adoperaronsi profondi geometri italiani, e stranieri, restituendo così il *Luogo risoluto* ad una certa integrità [3].

In tanto comunque si fosse, era ben necessario una qualche istituzione produrre, che dell' una, e

[2] Di siffatti libri daremo distinta notizia nella prima delle dissertazioni inserite nel vol. I. degli *Opuscoli Matematici*.

[3] Veggansi le dissertazioni poc' anzi citate.

dell' altra analisi esponesse i precetti, e 'l modo di convenevolmente usarne, corredandoli di opportuni esempj; da che il giovine geometra venisse guidato nell'inventare, ed a saperne adoperare in convenevol modo i mezzi, che abbondevolmente si possedevano da'moderni. Nell'assoluto difetto di un' opera di tal fatta, venne in pensiero al nostro illustre Fergola di tentare questo difficil lavoro, fin da che cominciò ad avere una scuola di Matematiche, dalla quale venner fuori tanti distinti allievi, che hanno onorate, e promosse tali scienze con le loro opere, e con l' insegnamento [4]; stabilito presso noi il perfetto, e compiuto coltivamento di esse, e resa la scuola napoletana degna della considerazione dello straniero. Ed ei avendola più volte riveduta, e rifatta [5], finalmente dopo avervi data l' ultima mano nel 1807, ci permise pubblicarne un *Prospetto* ragionato, che uscì alla luce nel 1809, e che quì appresso verrà inserito, per mostrare l' intero pia-

[4] Fin dal 1791, nel pubblicarsi dal Giannattasio gli *Elementi della Geometria sublime*, vi si annunziava per seconda parte di essi l' *Arte Euristica* dello stesso autore, già da parecchi anni innanzi composta, e della quale manoscritta servivasi per la sua scuola; a che veniva aggiunto un esercitar continuo nella soluzioni di problemi, de' quali con piacere abbiam veduto poi prodursi più di uua raccolta, non solo tra noi, ma eziandio oltremonti.

[5] Ne' MSS. da me acquistati, oltre quello del 1790 collegato in un volume col corso di *Analisi elementare, e sublime*, che donai alla biblioteca della R. U. degli studj, ve n' ha due altri senza indicazione di anno; ma che debbon precedere quello segnato 1798; un altro con l' indicazione 1800, ed un altro con quella 1802. Finalmente l' ultimo del 1707, sul quale è fatta la presente edizione.

no di tal compiutissimo lavoro, ed indicare quelle parti di esso meno elementari, che essendo state in seguito separatamente pubblicate dall'autore medesimo, non ho creduto ripristinarle nel luogo già prima destinatovi, ritenendole per altro uso. Lo stesso di talun'altra cosa, che sebbene non ancora da lui pubblicata, ho per l' anzidetta ragione, creduto opportuno riportare nella raccolta di *Opuscoli matematici*, i quali a buon conto sono un ricco, e prezioso materiale di compimento a'due *Corsi elementari* geometrico, ed algebrico, e principalmente a' diversi trattati per l' invenzione, de'quali il presente forma la base.

Si vedrà da questo prospetto quale inesausta miniera di ricerche, di precetti, e di metodi si contenga nella presente opera, nuova nell' argomento, condotta con maestria impareggiabile, e con quella giudiziosa facilità, ch' è l' impronta sicura di chi possiede egli la scienza, e non va mendicandola a brani nelle altrui opere, profittando delle non sue fatiche, e talvolta oscuramente ripetendole; ed esso mi risparmierà però l'estendermi in più particolari sul presente lavoro. Non debbo in tanto tralasciar di avvertire, ora che pubblico questa prima opera da'MSS. del Fergola, che rimasti essi durante la sua lunga ultima malattia, e poi per più anni dopo la morte abbandonati nelle mani di una vecchia pinzochera, che lo assisteva, da lui già nominata sua erede, il meno infelice trattamento, che poterono ricevere fu di essere stati difformemente disordinati, e confusi tutt'i quaderni disgiunti, che componevano ciascun trattato . E come che egli , nel rifarli non distruggeva i MSS. precedenti , nè compiutamente terminava i nuovi , confidando , che pubblicandosi sotto i proprj occhi, potesse prender dall'uno ciò, che avrebbe dovuto ripetere identicamente nel nuovo , una tal circostanza ne ha reso assai più difficile lo sceveramento , ed è stata la vera cagione , che mi ha deviato, più di una volta, il pensiero di occuparmene , dopo averli acquistati , per preservarli dalla totale distruzione. Nè mi vi sarei più indotto , in tempo , che minori sono in me le forze, se qualche potentissima ragione, che val meglio tacere , e dimenticare affatto , per non far ingiuria a' presenti tempi , non mi avesse determinato ad impiegare tutto il resto di mia vita in pubblicare quanto dal Fergola,da me, e da altri di nostra scuola erasi prodotto in una ben lunga serie di anni , a vantaggio delle Matematiche , e di quella buona istituzione di esse , che vi abbiamo sostenuta , e che ora sconsigliatamente vedesi minacciata di declinamento.

Debbo ancora osservare , che siccome il Fergola aveva per sistema di perfezionar sempre ciascuna sua opera nell' atto della stampa , così ognuna che se ne pubblicherà , dovrà considerarsi , relativamente a lui , come mancante dell' ultima mano. E però , nel produrre questa non solamente mi ho

permesso illustrarne qualche luogo con opportune note, sì sparse nel corso dell' opera, ove più da vicino riguardavano l'oggetto, che trattavasi, sì pure in fine di essa insiem raccolte, a più abbondanza di dottrina ; ma ho in oltre supplita alcuna trattazione, come forse l'autore stesso avrebbe fatto nell' atto della stampa , onde non vi fosse argomento riguardante l' invenzione geometrica , non metodo per essa , antico , o moderno , che mancasse alla compiuta istituzione della gioventù , che nelle difficili vie di quella cerca perfezionarsi. Tale appunto è il prolungamento del cap.4. del lib. II. parte I , pe' *luoghi geometrici* ; e tale ancora il *Saggio di Geometria analitica* col quale terminasi un tal libro, e che ho tratto in gran parte dalle lezioni, che dettai nella R. U. degli studj dal 1807 al 1811. Ed un tal saggio si vedrà poi continuato, per la parte sublime , in un' *appendiee alle Sezioni coniche analitiche* , nel riprodurle per questa quarta volta , ed in fine della *Geometria di sito* , per ciò , che riguarda le ricerche geometriche nello spazio, come già fu avvertito in una nota alla prefazione di quest' opera . Sicchè dal loro insieme risulterà un ben compiuto, e connesso trattato di *Geometria analitica* col moderno metodo puro algebrico , ch' è un prolungamento del Cartesiano : e si vedrà come nelle mani di chi sia già in questo versato, ed in quello degli antichi geometri acquisti forza , e chiarezza maggiore,da riescir proficuo,convenevolmente adoperandolo, nelle ricerche geometriche. Ed in tal *saggio* ho cercato di render rigoroso quello, che vi ho elementarmente esposto, dandogli un nesso geometrico, e spesso con la Geometria afforzandolo; giacchè se questa dall'Analisi algebrica può ricevere estensione ne' suoi principj, largamente la compensa, con rischiarare, e comprovare i risultamenti, che per mezzo di essa ottengonsi. Mi doleva in vero l'animo, nel vedere, che dopo aver abbandonato questo insegnamento, che non più apparteneva alla cattedra alla quale venni promosso, con la riforma dell'Università degli studj operata nel 1812, coloro, che il ripigliarono avessero dovuto vagare da una in altra istituzione straniera, e rincrescevami, che dopo il decorrer di ben sei lustri si fosse ancora nello stesso stato; a che aggiuntasi l'ultima spinta, che da alcuno, per ignoranza del passato, come l'età sua giovanile il comportava, da altri per malvagità di carattere, o per vanità di attribuirsi un merito, che non gli era dovuto si osasse ingiuriar coloro da cui avevano appreso, mi sono finalmente determinato a riveder questo lavoruccio, per publicarlo ad utilità della gioventù matematica napoletana, la quale per l'addietro, per quel tempo, che potemmo in nostra scuola adoperarci a compiutamente istituirla, non ebbe bisogno di mendicare stranieri ajuti.

Nè l'averlo diviso pe' tre trattati sopra detti nuoce all'unità di esso, che anzi più propriamente ne

indica il luogo ove ciascuna di quelle parti si debba apprendere; e poi que' trattati non formano, che un solo corpo di dottrina per l'*invenzione geometrica*, il quale può ben dirsi il *Luogo di risoluzione antico, e moderno*, che concorrono a perfezionarlo, e compierlo le materie trattate ne' primi otto volumi degli *Opuscoli matematici* di nostra scuola.

L'ho poi corredato di apposite *Note*, sia per qualche importante cosa ad esaminare, sia per istituir sempre quel parallelo tra 'l metodo analitico, e 'l geometrico, da che dee risultare il discernimento del vero geometra inventore, e distinguerlo dal semplice compilatore di formole algebriche, per riescire ad una qualunque soluzione di un problema, che spesso risulta faticosa, o anche inutile affatto.

Mi veggo ancora nell'obbligo di avvertire, perchè ciascuno si abbia il merito dovuto a' suoi lavori, tanto più se altro vantaggio ancor non gli sia tornato dalla scienza, che indefessamente coltiva, che nell'atto della stampa ha questo mio lavoruccio ricevuta una perfezione maggiore, dalla cooperazione pronta, ed attiva del sig. Nicola Trudi, da cui le Matematiche avranno molto a sperare, se non si mancherà di definitivamente attaccarvelo, il che avrei fatto da più tempo, se, come altra volta, fosse stato in me il potere di effettuirlo [6].

[6] Di lui sono già pubblicate le *risposte al programma*, che proposti nel 1839, ed in doppio modo a ciascuno de' quesiti n. 1, e 2:

Ritornando ora al trattato del Fergola, dal quale mi ha deviato l' aggiunta fattavi, dirò, che oltre a' problemi da lui recati dove occorrevano nel corso dell' opera, se ne vedrà in fine di essa un'ampia raccolta, distribuita alla meglio in serie, che verranno presi in parte da quel zibaldone, ch' egli teneva per notarvi ogni sua cosa in fatto di scienza; ed altre soluzioni di alcuni ne saranno ancora date, altri nuovi aggiunti. E tutti questi, mentre serviranno a' giovani di utile esercizio, e di esempj, mostreran loro il confronto de' metodi, e l' energia de' medesimi a proposito adoperati; poichè si è avuta sempre l' accortezza in risolverli, di adoperarvi quello più conducente all' eleganza della costruzione; sistema giudiziosamente tenuto dall' immortal Newton nella sua *Arithmetica Universalis*, e da tutti gli accorti matematici moderni: sicchè ora si vedrà adoperata la Geometria degli antichi, altre volte la Cartesiana, o 'l metodo algebrico puro; e spesso ancora veggonsi essi concorrere ad una stessa ricerca, da che più facilmente, che con precetti, si rileva il convenevole uso di ciascheduno.

In verità mi spiace ripeter tante volte una tal

---

e diverse importanti Memorie, che fanno seguito al n. 1, hanno meritata l' approvazione de' più distinti matematici stranieri. Egli ha presentata alla R. A. delle scienze, di cui è socio corrispondente una sua dotta Memoria *sulle relazioni tra i determinanti delle sezioni coniche iscritte, e circoscritte contemporaneamente ad un medesimo poligono irregolare*, già approvata per gli atti; e molti suoi lavori si vedranno a mano a mano pubblicati ne' nostri *Opuscoli matematici*.

cosa; ma l' abbandono cui veggo tendere gli antichi metodi presso noi, mentre altrove fanno ogni sforzo per ripigliarne l' uso, e la superficialità con la quale comunemente s' istituisce, e si coltiva l' algebrico-geometrico mi v' induce, per non veder distrutte le gravi fatiche da noi sostenute per tanti anni in istabilire, e promuovere la buona istituzione matematica nella scuola napoletana.

L' opera come si vedrà nel seguente *prospetto*, che a mostrarla nella sua integrità, e come l'autore l'aveva congegnata, ora riproducesi, è divisa in due parti; delle quali ritenendo i tre libri della prima cui faran seguito i principali problemi de' libri più elementari del *Luogo risoluto*, ne limiteremo la seconda soltanto a quel che crederemo conveniente, come verrà, da luogo in luogo, dichiarato nelle note al *prospetto* medesimo. Per tal modo, se non avremo potuto adempiere compiutamente, come l' autore avrebbe fatto, al suo proponimento, avremo al meno operato il possibile per noi, onde facilitare a' giovani il difficile cammino dell' invenzione, ed il discernimento de' metodi, indicando loro i modi da convenevolmente adoperarli.

PROSPETTO DELL' OPERA.

1. Lo spirito d' inventare non è, come si crede, un dono, che il Ciel comparte di rado, ed a pochi de' mortali. Una saggia istituzione, che si rechi a giovani attenti, ed ingegnosi, e massimamente nelle Matematiche discipline, è potente a produr quello in questi di buon' ora. Solo diremo, che i princìpj delle geometriche invenzioni prodotti dalle greche scuole, o dalla sagacia delle moderne rilevati, non siensi raccolti in un sistema dimostrativo, o in un corso didascalico elegante; affichè ognun, che imprenda a risolver problemi (lo che forma le primizie dell' inventare) vi si possa condurre per iscienza, e senza irne tra 'l bujo, ed a tastone, come la piupparte de' giovani suol fare. Ma in tanto un geometra di nostra nazione ha congegnata un' opera, che ha per epigrafe *l' Arte euristica in sistema scientifico ridotta* [7], e con essa varj giovani privatamente ammaestrando li ha mirabilmente in quest'arte, e con pubblico plauso istituiti. Noi dunque abbiam ragione di sperare, ch' ei con darla in luce possa quel didascalico vantaggio più copiosamente proccurarci. E quindi perchè le parti di tale opera, e'l nesso loro venissero a pubblica contezza, abbiamo stimato doverle quaggiù fedelmente, e con chiarezza abbozzare.

[7] L' ho ora denominata *dell' Invenzione geometrica*, imitando Cicerone, che disse: *Invenzione rettorica* i precetti dell'arte oratoria.

2. Quest' opera è divisa in due parti principali: l' una elementare da doversi apprendere dai giovanetti, da poi che avran fatto i corsi delle Matematichè pure; l' altra di quella più sublime, ed a' più saggi conveniente.

3. E perchè in ogni problema tre cose principalmente distinguonsi, cioè i *Dati*, i *Quesiti*, e *l' Arte onde da quelli questi si rilevano*, è sembrato all' autore tornar molto a proposito il prender queste cose per gli obbietti de' tre libri della parte I. dell' opera proposta, dividendone ciascuno di essi in più capi.

4. Una grandezza continua si dice esser *data*, se la sapremo esibire, per la sua genesi, o nel valore. Dunque i dati de' problemi sulle quantità continue non deggion essere, che *geometrici*, o *aritmetici*. E questa suprema distinzione dei dati, che parci esser nuova, è la base dell' opera indicata. Ella distingue le soluzioni *geometriche* de' problemi dalle *aritmetiche*, *analitiche*, o *trigonometriche*; e 'l convertire l' un di quei due dati nell' altro, è ciò che implicitamente in una gran parte degli ardui problemi si richiede. In fatti, per dar di ciò un qualche esempio, *la moltisezione angolare* l' è un problema, in cui dal valore di una data parte di un angolo, e dal rapporto di questa a quello si cerca l' esibizione geometrica di tal parte. Così pure

niuna cosa è sì agevole, quanto descrivere un cerchio, un' ellisse, un' iperbole, o qualche altra curva, siasi questa algebrica, o trascendente; ma l' è poi difficil cosa rinvenir le loro aje, i perimetri, le superficie dei solidi nati con certe rivoluzioni *ec.*, cioè il convertire i dati geometrici di queste grandezze negli aritmetici, che loro corrispondono.

5. Or il saggio Euclide disse i dati geometrici essere di quattro generi, di *grandezza*, di *ragione*, di *specie*, e di *sito*. Ed essi potrebbonsi comodamente ridurre a due sole classi, l' una che contenga i dati di *rapporto*, l' altra di *sito*. E nel progresso dell' opera s' intenderà di leggieri, che quei problemi geometrici, i quali racchiudono i primi tre generi di dati, restino agevolmente risoluti con l' analisi algebrica, che vi s' innesta; laddove in quei di sito il più delle volte riesca malagevole un tal lavoro. Intanto l'autore ha distintamente in tre diversi capi favellato de' primi tre generi di dati, restringendo quanto su di ciò erasi scritto dal geometra greco, ed altre verità nuove aggiugnendo.

6. Le *rette*, gli *angoli*, ed i *triangoli* sono i più semplici obbietti, su i quali sonosi praticate alcune euristiche ricerche, per ordinarle ad altre più composte. Nel II°, e nel IV° capo contengonsi queste ricerche, e nel III° espongonsi i dati di ragione, ove tra le altre cose vengon rapportate *le trasformazioni euristiche di due ragioni uguali, la composizione di due, o più ragioni uguali, o ineguali, e cer-*

te nuove, ed utili evoluzioni di più analogie [8]. Le quali cose debbono essere distinte, e familiari in colui, che voglia ordirë con eleganza una geometrica dimostrazione ad un teorema, o distender l'analisi geometrica di un problema.

7. I dati di sito meritavano di essere più attentamente dai geometri contemplati; poichè di essi oscuro n'è il concetto, ne son ristrette le teoriche, ed è poi difficile il poterli all'analisi algebrica innestare. Or queste cose veggonsi chiarite, distese ed agevolate nel cap. V°, e quivi pur son gittate le fondamenta della moderna *Geometria analitica*, della *descrittiva*, e di quel ramo di Geometria Cartesiana, che ha per oggetto i caratteri, e le classi delle curve [9].

---

[8] L' autore credè necessarie queste cose nel presente suo trattato fino al 1807, che, come si è detto ricompilavalo l' ultima volta; poichè esse mancavano negli Elementi Euclidei, da' quali deve cominciare l' istituzione di colui, che nella difficile arte dell' inventar geometrico vuole introdursi; e per tal ragione mi astenni dall' inserirle nella prima edizione dell' Euclide pubblicata nel 1810. Ma poichè mi avvidi, che la stampa del presente trattato rendevasi dubbiissima, le recai, dando ad esse conveniente forma elementare, nella seconda edizione del 1811. Con tutto ciò ho credute doverle ancora quì ritenere, sì per non alterare l' ordine delle proposizioni stabilite dall' autore in questo suo libro *de' Dati*, e per non mutilarlo in cose, che a lui con più dritto appartenevansi; e sì ancora per renderlo non solo atto ad apprendersi da chi avesse studiato l' Euclide da me esposto, ma eziandio un qualunque altro. L' importanza di queste cose le saprà valutare chiunque non difetti nella buona, e regolare istituzione geometrica, e che non ne giudichi con quella leggerezza, che ora soglion o usare taluni pedantucci di scuola, diventati a' dì d' oggi lo scorno, e la rovina della buona istituzione geometrica.

[9] Per questi due rami di scienza geometrica, veggasi ciò che si è detto in fine della precedente prefazione, e la nostra *Geometria di sito*.

8. Una grandezza geometrica l'è anche data, se ne sapremo il valore, o l' analitica sua espressione(4). Dunque l' è un' utile ricerca il poter quella esibire dal suo valore. E queste indagini sono scientificamente nell' ultimo capo rapportate. Ma esse potrebbonsi ridurre al seguente generalissimo problema: *Dato il valore algebrico di una retta, siasi questo esplicito, o implicito, esibire quella grandezza geometricamente, o per mezzo di una distinta costruzione, o col moto continuo di un' istrumento.*

9. Il trattato de' *Quesiti* di tali problemi, ch' è interamente nuovo, e nel secondo libro si contiene, discende da questo semplicissimo principio, che: *La soluzione di ogni problema geometrico riducesi a rinvenire un punto soddisfacente a certe condizioni ivi proposte.* Di quì un ampio campo di speculare si apre ai geometri. Basta indicar loro, esser grandezze ignote, e *quelle rette, che da tal punto conduconsi a punti dati, e quelle, che con dato sito distendonsi da esso su linee date, o che queste sien rette, o pur sien curve. Le parti di tali rette, che frammezzano linee date* son pure il più delle volte grandezze ignote. Generalmente saran tali *le potenze di coteste ignote, i loro rapporti, ed ogni grandezza, che derivisi da ciascuna di esse per una via geometrica, o per un'altra trascendente.* Il nostro autore nel sistemar queste ricerche ha dovuto impegnarsi a risolvere un altro proble-

ma generale, che è inverso dell' anzidetto (7), cioè: *Se una grandezza ignota di un problema geometrico si dinoti per la x; quale dovrà essere l' espressione di un' altra, che siale connessa con un rapporto algebrico, o trascendente, o che con quella, o con altre serbi dato sito?*

10. Ma oltre a queste ignote socie, che si presentano all' analista, quando ei imprende a risolvere un geometrico problema, ve ne ha altre, che n' emergono dopo averlo risoluto, e nel comporlo. Esse sono quei determinanti de' diversi casi di un tal problema. Imperciocchè nelle soluzioni analitiche delle geometriche quistioni incontrasi mai sempre una mirabil cosa, ed è, che: *Se un geometrico problema abbia più casi similmente condizionati, l'equazione, che per uno di essi rinviensi, è sempre identica a quella, che per ciascun degli altri si rinverrebbe; laddove le radici reali di detta equazione ne offrono i determinanti di quei diversi casi* [10]. Or se ciascuna delle prime ignote l' è una funzione di ciascun' altra, sarà ciò anche vero per le seconde?

11. Le condizioni apposte ad un problema vi formano benanche il nesso delle sue ignote. Quindi è, che in tal congiuntura doveansi le seguenti cose chiaramente dinotare, cioè, *qual sia la natura di tali condizioni, e quali debbansi dire di un identi-*

[10] Una tal verità verrà in appresso ampiamente dilucidata; e se ne potrà anche vedere un' analitica dimostrazione diretta in fine del vol. I. del nostro *Corso di analisi algebrica*.

co scopo ; come ciascuna di esse sinteticamente in altre si trasformi ; come possan le dette condizioni tradursi in equazioni ; quante di loro si richieggano in un problema , perchè sia determinato ; e finalmente come *un problema geometrico si possa scindere in due indeterminati , che gli equivalgano , ond' ei per le locali di questi ne resti risoluto giustamente* , *e con eleganza.*

12. Queste ricerche sono recate nel capitolo III°. Nel IV° de' luoghi geometrici sinteticamente rapportati si ragiona [11]. Su tal proposito si discetta su i *Porismi* Euclidei, che dell' analisi geometrica la più energica parte conteneano [12] . E per intender

[11] L' autore, dopo aver data un' esatta nozione di tali *luoghi* , e della prima triplice distinzione, che gli antichi ne fecero, riguardando alla qualità loro , in *efettici, anastrofici* , *e diessodici* , ed all' altra concernente il grado, in *piani, solidi , e lineari* , si limita per questa ad alcuni principali esempj di luoghi alle linee , d' onde non solamente ne venisse rischiarata la loro natura , e la maniera propria di considerarli , ma ancora per l' uso , che in appresso doveva farsene ; rimettendo per una più estesa scienza de' medesimi , in riguardo a' *luoghi piani* , alle restituzioni di essi fatte dal Fermat , e singolarmente da Roberto Simson de' due libri perduti di Apollonio , e noi vi aggiugniamo ancora l' eccellente esposizione , che dietro questo geometra ne fece il Lhuilier , nel suo trattato *de l' analyse geométrique , et de l' analyse algébrique* , e pe' *luoghi solidi* all' elaboratissima restituzione del Viviani de' cinque libri di Aristeo Seniore composti su' medesimi . E per riguardo alla prima delle suddette distinzioni , ed all' uso di quelli alla superficie , nella soluzione de' problemi , si potrà riscontrare la nostra *Geometria di sito,* nella prefazione , e ne' capitoli di essa ove trattasi di superficie curve, d' intersezioni loro, di linee sulle medesime segnate , e di problemi costruiti per mezzo de' luoghi alle medesime .

[12] Per tale argomento , che non è stato rinvenuto ne' MSS. del Fergola, si potrà leggere la prima delle dissertazioni nel vol.I. degli *Opuscoli matematici.*

alcune soluzioni praticate dagli antichi, l'autore ne adduce in nuova maniera la genesi della *concoide* , e della *cissoide* , che son curve geometriche ; e vi aggiugne ancor quelle delle *trocoidi* , della *spirale* Archimedea , e della *quadratrice* , che sono curve trascendenti , e dalla combinazione del moto rettilineo , e dell' angolare si producono [13] .

13. Non vi è cosa , che sì decori la ragione dell' uomo , quanto il saper egli da grandezze note le ignote rilevare . E quindi niuna scienza può mai alle Matematiche pareggiarsi , come quelle, che oltre al proporci un immenso numero di verità tutte fregiate di chiarezza, e nel massimo grado, han pure metodi agevoli , e sicuri d' inventare . Or i primi stami de' metodi euristici emersero dalla scuola Italica , e forse per opera di Aristeo seniore : e l' analisi geometrica, che li contiene, potrà definirsi giusta Pappo alessandrino: *Est methodus qua a quaesito quasi iam concesso , per ea quae deinde consequuntur , ad conclusionem aliquam, cuius ope compositio fiat , perducamur* . Dunque in cotest' analisi adunansi tre parti principali , cioè *la supposizione del fatto; il filo delle conseguenze dedotte da essa; e la riduzion del problema*. Le quali cose forman gli obbietti de' tre primi capi di questo terzo libro.

14. In un geometrico problema la supposizione del fatto consiste, nel concepir di già ritrovato quel

[13] A ciò si è supplito , con una giunta al presente capitolo.

punto, al cui rinvenimento il problema si riduce, e nel poi ragguagliarne con un processo di sintesi, o con l'analisi algebrica i determinanti di esso punto, a fin di poterli effettivamente rinvenire. Or cotesta supposizione del fatto n' è anche un principio regolatore di tutti gli altri metodi euristici, che siensi proposti nell' analisi de' finiti, in quella degl' infiniti, ed in ogni qualunque matematica investigazione [14].

15. La serie delle conseguenze, che da tutte le condizioni del problema, e dalla natura del soggetto vi si van derivando fil filo, e colla luce della Geo-

[14] Non v' ha al certo principio di ricerca più vero, e più sicuro, che di supporla ottenuta; e da ciò, con la guida de' principj, che ne somministra la scienza, dedurre acconciamente conseguenze, nel filo delle quali incontrandone una già riconosciuta, questa non solo ne indichi la possibilità, o la verità dell' inchiesta; ma ancora il mezzo di ottenerla, o dimostrarla.

Un tal procedimento è diretto nella *sintesi*, chiamando ancor noi così il metodo d' inventare degli antichi; nella quale però esso abbisogna di un grandissimo treno di conoscenze; ed indiretto usando il metodo Cartesiano, o altro algebrico, che ne derivi, cominciando ad aver luogo ordinariamente dall' equazione al problema, cioè quando già tutta l' arte del geometra si è ridotta ad un puro uso di regole generali, che bisogna però ben conoscere, ed adoperare convenevolmente.

Unico è dunque il principio di ricerca pel matematico, qualunque sia il metodo, che vi adopri; ma questo principio semplicissimo ha bisogno, per divenir fecondo d' invenzioni, di molta arte, di grande perspicacia, e di grandissimo esercizio: e queste circostanze essenziali costituiscono la scienza, e 'l valore del matematico, che lo adopra. Un tal valevolissimo principio d' invenzione è ben diverso da quella supposizione del contrario alla cosa, che si enuncia, come praticasi nelle dimostrazioni indirette: nè tampoco si accorda con l' ordinaria regola del falso, nella quale eziandio arbitraria è la supposizione del quesito, e il procedimento in essa è di tutt' altra specie del soprindicato.

metria, costituiscono la seconda operazione dell'analisi geometrica. Cotesta serie di conseguenze vuol continuarsi con eleganza, e semplicità, insin che non appaja una fra loro, che sia fattibile, cioè *aliquid iam cognitum, locoque principii habitum*, come Pappo lo spiega in continuazione del luogo precedentemente recato. E se piaccia risolvere il problema con l' analisi algebrica, basterà tradurlo in equazione, e poi risolver questa, e costruire [15]. Ma qual si è mai quella fattibile conseguenza, che il corso dell' analisi geometrica ne arresta? Ella è un problema di già risoluto in Geometria, o che ben si vede dipendere da problemi elementari. Ed è poi mirabil cosa, ed insiem gioconda l' intendere in quest' opera, che: *tutt' i problemi di* primo grado *si riducono a ritrovar due rette, le quali abbiano una data somma, o una data differenza, e che sien proporzionali a due rette date*. Che *i problemi di* secondo grado *si riducon pure a rinvenir due rette, che abbiano una data somma, o una data differenza; ma che sien reciproche a due rette date*. E che finalmente i *problemi solidi, cioè, di terzo, e di quarto grado si rimetton tutti a trisegare un angolo, o a ritrovare due medie proporzionali tra due rette date*. Intanto l' autore riduce tutti questi

[15] Essenzialissima condizione, perchè un problema geometrico sia convenevolmente risoluto si è la costruzione; ond' è che tutti gli antichi, e i moderni geometri definirono il problema esser ciò, *in quo aliquid faciendum, et construendum proponitur*; ed essi da questa distinsero la natura de' problemi, e li classificarono.

problemi, e piani, e solidi, che sieno ad: *inclinare tra due luoghi piani una retta data, che passi per un punto dato* [16]. E quindi dalla diversità di questo adattamento, e de' due luoghi si potrebber tutt' i problemi geometrici classificar nel grado.

16. Per compimento di queste teoriche doveasi ragionare della *composizione* de' problemi geometrici, cioè del modo di attigner le loro costruzioni, e chiare dimostrazioni dall'analisi geometrica di essi, che Pappo così dichiara: *E contrario autem in compositione, cognitum illud, in resolutione ultimo loco acquisitum, ut iam factum praemittentes; et quae ibi consequentia erant, hic ut antecedentia naturali ordine disponentes, atque inter se conferentes, tandem ad constructionem quaesiti pervenimus*. E siffatto andamento viene dopo i già detti sviluppato in questo libro III°. Intanto, se la soluzione di un problema geometrico n' è guidata a fine con l' analisi algebrica, se ne formerà l' analitica dimostrazione, dopo averlo geometricamente costruito, sol che si ricalchino con retrogrado passo i tratti algebrici della soluzione. E non sarà poi ardua impresa il convertir questa in geometrica; imperciocchè le analitiche espressioni si san facilmente tradurre in geometriche grandezze (7), e le equazioni di quelli in altrettante analogie. Ed

—

[16] Questa uniforme riduzione de' problemi, non vedesi nelle opere degli antichi, i quali forse altra ne conobbero, come il nostro professore Scorza addita, nella sua *Divinazione dell' Analisi geometrica degli antichi*.

è pur noto ai geometri, che l' essenza di una sintetica dimostrazione principalmente consista in un chiaro processo di geometriche ragioni su geometriche grandezze eseguito. Ma le dimostrazioni sintetiche lavorate a questo torno, come il prescrisse il sagace Schooten [17], sono per la più parte immensamente gravose; ond' è, che un metodo nuovo proponesi dall'autore ad evitar tali sconci, e vi si recano varj avvertimenti, uno de'quali vogliamo quì appresso rapportare.

17. La Geometria è un cammino di luce; pur non è di bene profonderla in modo, che abbacini la nostra intelligenza, cioè a dire non si deggion rendere sì minute, o sì lunghe le geometriche dimostrazioni, onde sia malagevole ritenerne le parti loro, e 'l nesso. Nè convien contentarsi di quell' equazione finale di un problema, la quale veggasi troppo complessa, ed inviluppata, sicchè non sia *costruibile* affatto, o con duro stento, come si è peccato da qualche sommo analista. Imperciocchè il problema, ch' è una proposizione, *quae in propositi proponitur constructionem*, si dirà risoluto con eleganza, se potrà facilmente costruirsi; nè si dirà mica risoluto, s' ei non sia *costruibile* [18].

—

[17] Vedi il suo trattato *de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebrico*, in fine della *Geometria* del Cartesio, da lui pubblicata in latino.

[18] Castillon spiega questa qualità insita alla natura de' problemi geometrici col seguente canone: *In problematis, praecipuus locus est constructionis; constructio quaeritur, et actu est peragenda*. Ed in

18. Questo libro III°, come l'è anche del II° vedesi di varj problemi intarsiato, per chiarir leggiadramente le teoriche espostevi. Ma in un' appendice ad esso, ed in più capi propongonsi alcune serie di problemi piani, principalmente ordinate per gli argomenti del luogo risoluto, e per eleganti vie della sintesi, o dell' analisi algebrica disnodati. E da ciò s' ingegna l' autore di poterne l'orditura di quel luogo divinare [19]. Quindi è, che vi si osservan risoluti i principali problemi *de determinata sectione*, i due essenziali *de sectione rationis*, *et de sectione spatii*, i più famosi *de inclinationibus*; e poi tutti quei, che diceansi *de tactionibus* [20]. Ma questi ultimi problemi, che impegnaron la geometria del sagacissimo Vieta, e gli analitici artificj del gran Newton, si fan discendere da una nuova proprietà del triangolo, che altri non vide [21]; ciascuno di essi con lieve calcolo, o con agevoli geometrici tentativi distintamente dagli altri può risolversi; e tutti poi si riducono al seguente facilissimo problema:

vero il quesito di un problema dee essere analogo al dato, e corrispondente ad esso: or se il dato è geometrico, una costruzione richiedesi pel quesito, e non già un valore, come erroneamente trovasi detto da taluni.

[19] Quest' argomento si vedrà più diffusamente esposto nel vol. I. degli *Opuscoli matematici*.

[20] Pe' quali verrà ora estesamente trattato, insieme ad altri affini, nel vol. III degli *Opuscoli* poc' anzi detti.

[21] Una tal proprietà del triangolo vedesi ora anche convenevolmente estesa; e per l' uso, che può farsene in risolvere altri problemi potrà vedersene un esempio nella nota alla *Trigonometria*, pe' problemi del Regiomontano.

Dato di posizione un punto fuori di una retta terminata da una sola parte; inclinare da quello su questa una retta, la quale stia al segmento, che ne tronca, in una ragion data.

19. La parte II

20. Dappoichè i problemi solidi si riducon tutti alla trisezione angolare, o a rinvenir due medie proporzionali tra due rette date, è sembrato all'autore esser cosa conveniente il risolver con accuratezza, ed in diverse guise que' due problemi, ora premendo le tracce delle scuole greche, ed ora quel-

[22] Chiuderemo un tal libro con un capitolo de' *problemi solidi*; *ipersolidi*, *e trascendenti*, *che risolvonsi alla maniera de' problemi piani*, che trovasi tra' MSS. del Fergola con la data del 1808, e nel quale contengonsi più problemi di tal natura, nel suddetto modo elegantemente risoluti.

[23] Come che questo argomento trovavasi già trattato nella *Geometria di sito*, e che d' altronde il medesimo ne' MSS. del Fergola è assai mancante, e disordinato ci siamo però astenuti di qui riportarlo.

[24] L autore s' ingegna divinare l' analisi geometrica, che ne guidava gli antichi in tante ricerche da essi trattate in questo argomento, corredandone i principj geometrici con un' estesa applicazione a' problemi.

le de' geometri moderni. In tal rincontro egli ha osservato, che da' principj euristici, onde si condusse l' illustre Newton nel risolvere il primo de' problemi anzidetti sia sorto il metodo per la moltiplicazione angolare, da cui posson germinare le formole, che per tali espressioni rinvenne il Vieta, e dopo lui Ugtredo, Wallis, Giovanni, e Giacomo, Bernoulli, Ermanno, Lagny, il marchese de l' Hopital, ed altri geometri posteriori. Ma quel principio Newtoniano era stato marcato dal grande Archimede, e queste formole potrebbero agevolmente sgorgare dal famoso teorema Tolemaico; imperciocchè il nostro autore ne ritrae per immediata conseguenza di tal teorema esser

$$sen.(\varphi + \theta) = sen.\varphi cos.\theta + sen.\theta cos.\varphi$$

e da questa verità con lieve calcolo si possono quella formole derivare [25].

21. Intanto l'equazione per la trisezione angolare è sempre cubica del caso irreduttibile, ed incapace di depressione. Imperciocchè s'ella potesse deprimersi al secondo grado, vi sarebber due radici reali in detta equazione, mentre nel problema, d'onde questa si ritrae, vi sono tre diversi casi, che conosconsi intuitivamente. E sarebbe più assurda cosa, e contraria alla natura delle analitiche soluzioni, il creder, che due di questi casi si possan de-

[25] Dello stesso principio geometrico ci siamo prevaluti per dimostrare un tal teorema nella *Trigonometria*.

terminare dalle radici della risultante quadratica equazione, e l' altro poi da quel fattore straniero. Dunque il problema della trisezione angolare, come vien dimostrato dall' autore con queste, ed altre più energiche ragioni, non può generalmente risolversi *circino et regula*; sebbene vi sieno infiniti archi di cerchio particolari trisecabili colla Geometria elementare [26]. Or l' espressione di questi contiensi nella formola $\frac{3\varphi}{2^{n}}$, ove la φ dinoti una parte dell' arco quadrantale, la quale si possa con artificj elementari esibire.

22. Per occasione di un tal problema espongonsi alcune ciclometriche proposizioni, cioè: *segare un arco dato in una ragione data — dividere un semicerchio in una data ragione, per una retta, che passi per un dato punto del diametro; ec.* Ed è anche riescito all' autore il divinare la vera dimostrazione diretta del teorema ciclometrico dell'ingegnoso Cotes, la quale si fa dipendere in facil modo dai soli Elementi di Geometria, e dalle algebriche equazioni: e da'principj dimostrativi usati dal medesimo autore molte verità nell' analisi sublime si raccolgono. In tal rincontro furono notati i nei di quelle dimostrazioni, che a questo teorema sepper-

[26] Si potrà anche a questo proposito riscontrare una dissertazione da me presentata alla R. A. delle scienze di Napoli, fin dal 1808, in occasione di varie trisezioni di angolo ad essa inviate per esame, dal ministero dell' Interno; la quale fu poi inserita in fine delle note ad alcune più antiche edizioni della *Trigonometria*.

vi supplire tanti preclarissimi geometri, cioè Pemberton, Abramo di Moivre, Ermanno, Giovanni Bernoulli, Warmesley, Tommaso Simson, *ec.* [27]

23. La composizione geometrica di un problema solido tiensi per elegante dal Cartesio, s' ella si esegua col combinare insieme una data parabola, ed un cerchio; laddove il Newton è di parere, che per elegantemente risolvere un problema solido vi si debba combinare al circolo un'ellisse, come quella, che fra le tre curve coniche è la più facile ad essere descritta organicamente. E con ciò ei vuol preferire una manuale, e comoda operazione alle pure geometriche speculazioni, come il sommo Archimede, secondo ch' ei dice, si avvisò fare. Or parrebbe ardimento il dir parola in questi dispareri tra i due sommi geometri il Cartesio, e 'l Newton; pur nondimeno l' autore ha voluto aggiugnere qualche ragione a pro del primo, per torre cotesto equilibrio di assensi dalla mente de' giovanetti [28].

[27] Avendo in seguito l' autore congegnate queste ricerche, ed altre affini in più *Memorie*, che veggonsi nel vol. I. degli Atti della nostra R.A. delle scienze, non si è stimato doverle più qui riportare, serbandoci a riprodurle nel vol. VII degli *Opuscoli matematici.*

[28] Dopo dato fuori il prospetto della presente opera, vedendo le difficoltà, che v' erano per la pubblicazione di essa, si cercò in altro modo, che ne fossero almeno estratti alcuni degli argomenti più importanti, e da ciò ebbero origine le cose consegnate all' Accademia, per *Memorie*, di cui è detto nella nota precedente, e le altre, che nelle seguenti note verran dinotate. Da ciò anche gli *Opuscoli* dal IX all'XI, co' quali terminavasi il vol. I. di quella raccolta, che altra volta cominciossi a pubblicare, ne' quali trattavansi i *problemi de inclinationibus* universalizzati; e l' ultimo di essi terminasi precisamente con la discussione qui in-

24. Ogni equazione può convenevolmente scomporsi in due indeterminate equazioni, sicchè combinando le locali di queste si possano le radici reali di quelle geometricamente esibire. In ciò dunque traluconò gli argomenti di due ampj trattati, che l' autore espone in questo libro: l' uno *su i luoghi geometrici*, l' altro della loro *combinazione* per risolvere i problemi solidi con eleganza. Il primo di siffatti argomenti vien recato in una maniera assai più chiara, ed accurata, che nol fecero gl' insigni geometri Graig, e Gio. Witt, co' loro metodi compiuti, ed ingegnosi. Che anzi per colmo di facilità, e di chiarezza vi si veggon proposte due tavole, l' una con le indeterminate quadratiche equazioni, e l' altra con le geometriche loro costruzioni; affinchè i giovanetti con risparmio di analitiche operazioni, e di quell' incertezza, che talor gli affanna, possano le dette locali costruire, e combinarne due di esse a piacimento. La teorica delle combinazioni di due curve, ch' è il secondo de' due proposti argomenti, è anche rapportata con quella luce, che i moderni analisti han saputo profondervi sagacemente [29].

25. Qui appresso propongonsi alquanti problemi solidi, ipersolidi, e trascendenti, alcuni de' qua-

dicata, della quale fu poi ancor ridetto nel *trattato analitico de' Luoghi geometrici di second' ordine* pubblicato nel 1818 (V. dal §. 124. al 126.)

[29] Come è stato indicato nella nota precedente, fu questo argomento, pubblicato separatamente nel 1818, col titolo di *Trattato analitico de luoghi geometrici*, in seguito del *trattato analitico delle Sezioni coniche*, già dato fuori nel 1814.

li vengon risoluti alla maniera de' problemi piani, ed altri col descriver solo una certa curva. Così, se propongasi: *di tirare da un dato punto fuori di un cerchio, o di una qualunque curva algebrica, o trascendente due rette a queste curve, le quali contengano un angolo dato, e sien proporzionali, o reciproche a due rette date*, il problema potrà risolversi con principj degli Elementi piani [30]. E tanti altri problemi di questo più speciosi, e più malagevoli saranno con pari facilità risoluti. In tal congiuntura vien recata una nuova soluzione del problema delle *anomalie*, e molto alla pratica conveniente [31]. E riesce anche agevole il saper: *adattare tra due rette date, ed una qualunque curva un triangolo dato di specie, e di grandezza, sicchè gli angoli di questa figura cadano su quelle linee rispettivamente*.

26. Nel secondo libro della parte II vengono proposti in più capi i nuovi principj di *conversione*, di *trasferimento*, e di *fissazione*, onde n' è dato poter assolutamente risolvere, e con geometrico nitore un' infinità di problemi di *sito*, e *posizione* [32],

---

[30] Questo problema vedesi risoluto elegantemente nella proposizione 10 dell' *opuscolo* IX, della *Raccolta* di essi pubblicata nel 1810, di cui è stato già detto nella nota 28. E gli altri problemi de' quali poco dopo accennasi formano anco l' oggetto di un tale opuscolo, e de' due seguenti. Questi opuscoli verranno riprodotti, nel vol. V. della nuova raccolta promessane nel *Manifesto* pubblicato.

[31] Veggasi la prop. 21 nell' opuscolo X de' sopra citati.

[32] Si tenga presente la nota 23. E si potrà anche sul proposito riscontrare il vol. I degli *Atti della R. A. di Scienze, e belle lettere* di Napoli, pubblicato nel 1788.

che per niun' altra via, siasi ella algebrica, o geometrica avrebbersi potuto isnodare. Su di che vuol sapersi, che tanto è l' adattare in un certo modo una figura data di specie, e di grandezza tra più linee date di sito, quanto il circonscriver questa a quella, che nel detto modo, e col proprio loro sito si giacessero. Or, chi il crederia, cotesto adattamento di linee a quella grandezza non è che un problema delle inclinazioni; onde avvedutamente premettonsi dall'autore tre porismi di tal genere, ed a ciascuno di essi moltissimi problemi di sito si rapportano. In questo capo vengon prescritte le regole dell' indicato metodo, nel caso, che la grandezza da doversi tra queste linee adattare sia data di specie, e di grandezza, o di specie solamente.

27. Il dato sito di punti, e linee può cangiarsi in un altro, che sia dato altresì, e che riesca comodo alla soluzione del problema. In ciò risiede il principio dell' indicato *trasferimento*. Per mezzo di esso risolvonsi assai facilmente alcuni problemi di sito, come vien proposto dall'autore. Colla sua luce dimostransi con indicibile agevolezza molti teoremi di Apollonio su i *luoghi piani*. E finalmente ogni figura può convertirsi in un' altra, che le sia simile, ed in tante altre, che allo stesso genere di essa appartengansi.

28. Per occasion del terzo principio, che abbiam chiamato di *fissazione*, si ragiona su i *porismi* delle greche scuole, e sulla Geometria analitica a *due*

coordinate , di cui tanto i moderni si fan pregio . Con questo metodo potrebbonsi creare de' *porismi* geometrici , lo che non si è da' proprj autori osservato : e da ciò potrebbonsi vantaggiar le ricerche su di essi fatte da' due preclarissimi geometri Pietro Fermat, e Roberto Simson [33].

29. Si è veduto, cha la Geometria all'Analisi prevalga, quando si tratti risolvere i problemi di *sito*, e *posizione* . Dunque ragionevolmente nell' ultimo capo del libro II. dovevasi trattar del confronto di que' due metodi euristici , e delle rispettive loro energie. La Geometria forma in noi lo spirito dimostratore , e ci rende benanche atti ad inventare . E pure , chi il crederebbe ! non mancan degli analisti , i quali ardiscono di stranamente spregiarla , facendo eco alle voci del marchese di Condorcet , che dicea della sintesi esserne scabro il sentiero , malagevoli i passi , e ristretti i risultamenti . A costoro ricordasi dall' autore , che dalla Geometria , come da fecondissima terra sien germinati il *calcolo differenziale* , e *l'integrale* , il metodo *de' massimi* , e *minimi* , quello degl' *isoperimetri*, e tante altre analitiche indagazioni . Che la Geometria può esibirci le radici reali delle algebriche equazioni superiori al quarto grado , e quelle delle trascendenti eziandio ; là ove l' Analisi non vale ad esprimer

---

[33] Ciò verrà da noi eseguito nella prima dissertazione , che inserireremo nel vol. I. degli *Opuscoli* .

quelle, e queste in alcun modo . Di più l' *integrazione de' fratti razionali* , ch' è la parte più compiuta di questo metodo sommatorio , riconosce dalla Geometria i suoi principj , e 'l progresso. E tante espressioni non integrabili assolutamente , o per la quadratura del cerchio , e dell' iperbole , si rimetton sovente ad archi delle curve coniche , o di grado ad esse superiori . Alla Geometria in certe inesplicabili analitiche ricerche il più delle volte siam costretti a richiamare [34]. E finalmente nell'analisi algebrica , di che acerbamente dolgonsi i geometri , il calcolo de' siti manca tuttavia , *ec*. Onde da queste cose potrà concludersi non esser mica un'inutile impresa , o puerile il coltivar la Geometria decentemente [35].

30. Le speculazioni su i *Massimi*, e *Minimi* , che hanno formata dell' età vetusta , e tra' moderni le delizie di un saggio geometrizzare , veggonsi ora mai ridotte a metodi analitici assai chiari , at-

---

[34] A tutto il fin qui generalmente detto , ed alle concordi autorità de' più distinti matematici , che rilevansi continuamente nelle loro opere , aggiungeremo i continui paralleli , in cui porremo i diversi metodi , nel presente trattato, nelle note ad esso ; ed ancora nelle ricerche geometriche esposte in più volumi degli *Opuscoli*, che per l'invenzione geometrica le Matematiche ora posseggono.

[35] Ecco in qual modo si è sempre raccomandato in nostra scuola , e si raccomanda lo studio della Geometria , di che n' è un argomento il presente trattato ; e siamo contenti di vedere i nostri desiderj soddisfatti altrove dagli accorti matematici , che con solida dottrina , e forza d ingegno coltivano , ed amano far progredire la scienza ; e di aver presso noi conservata finora la regolare, e compiuta istituzione di essa .

tivi, e generali. Ma l' analisi geometrica, che per tali ricerche impiegavasi dagli antichi (lo che importa principalmente rilevare) qual ne fu mai, e come or si potrebbe divinare? In tale impegno entra il nostro autore negli ultimi capi di questo libro [36], con aver prima le seguenti cose delibato.

31. Egli cerca primieramente di poter chiarire colle geometriche nozioni gli oscuri concetti degl'infinitesimi; e poi coteste sublimissime indagini in due classi ripone. In alcuni di siffatti problemi si domanda: *in quali casi una certa grandezza pervenga nel massimo, o nel minimo suo grado*; ed in altri si cerca, di *dover tra infinite curve quella rinvenire, che possegga nel massimo, o nel minimo grado una proprietà data*. I primi nella prima classe potranno allogarsi, e gli altri nella seconda. Per risolver quelli ne basta il saper differenziare le funzioni delle variabili; e per gli altri vuolsi il *metodo degl' isoperimetri*, o il *calcolo delle Variazioni* impiegare. Or l' autore, indicate le leggi di questi due metodi, s' impegna a stabilire certi princi-pj geometrici, che sono facili, e nuovi; e colla loro guida risolve non poche quistioni di *massimo*, o *minimo*, che alla prima classe si appartengono.

32. Varie altre speculazioni dell' autore ugualmente interessanti, che le già dette, potrebbonsi addurre in questo *Prospetto*, se la brevità di dire non

[36] Questo bellissimo, ed importante lavoro del Fergola verrà recato nel vol. III. degli *Opuscoli matematici*.

cel vietasse. Vi aggiugniamo solamente, che centinaja di problemi osservansi risoluti in quest' opera, con nitore geometrico, o con algebrica precisione. Alcuni di essi sono di nuovo conio [37]; altri furon proposti nelle greche scuole, o nelle opere rinvengonsi de' moderni, ed alcuni altri da' volumi delle Accademie son carpiti. Una parte di questi problemi è sparsa tra le teoriche del trattato, per dar loro convenevole chiarimento, ed altri vengon recati alla fine, per poterne l' uso di quelle agevolare. Ma queste teoriche, e que' problemi sono anche fregiate di annotazioni oltremodo erudite, per far intendere a' giovani il progresso delle invenzioni, e lo stato attuale delle nostre scienze [38]. Intanto, con un sentimento del mentovato autore, terminando cotesto abbozzo, diciamo: se moltissimi giovani con pochi frammenti di quest' opera varie volte ammaestrati, han conseguito lo spirito di nitidamente dimostrare, e di sciorre con eleganza i problemi, qual vantaggio non dovrà ridondarne a coloro, che si faranno con più saggio magistero nell' intera opera istruire?

[37] Si abbia qui presente ciò ch' è detto nella pagina XIII della *prefazione*; ed ora avvertiremo solamente, che siccome di essi facevasi un continuo esercitare in nostra scuola, se n' è però veduta già pubblicata più di una *raccolta*; imitando ancora alcuno tra noi il costume di attribuirseli.

[38] Ciò si vedrà ora con maggior estensione eseguito nelle nostre *Note* in fine del trattato, com' è stato detto nella *prefazione* a pag. XII; e nell' avvertimento, che va innanzi ad esse.

Così chiudevamo il *prospetto* di questa elaborata opera del Fergola nel 1809, che abbiamo creduto doverlo quì ripetere scrupolosamente, onde una migliore idea di sì importante lavoro di più lustri, e tante volte rifatto, avessero potuto farne i moderni geometri. Ed oh! l'avesse l'autore medesimo a quell' epoca pubblicato per le stampe, come liberalmente usava diffonderlo manoscritto ad istruzione de' suoi allievi; che di molte altre dottrine l' avrebbe sicuramente arricchito nell' atto della stampa: e quante di quelle cose, che or vi si veggono monche vi avrebbero ricevuto compimento, e perfezione. Ma poichè è vano il dolerci, dopo la sua grave perdita, e lo scorrer di tanti anni, di una sventura irrimediabile, bisogna ben, che le Matematiche si abbiano una tale opera, in loro aumento, nel miglior modo, che ci è riescito ordinarne le membra sparse peggio assai di quelle di Absirto; e la gioventù studiosa di apprendere i metodi, che tali scienze posseggono, e che vuole acquistar forza, facoltà, e discernimento nell' *invenzione geometrica*, ne raccolga tutti que' vantaggi, che alcun'altra opera finora prodotta ad essi non offre.

E per vieppiù agevolare il rinvenimento delle varie, e moltiplici dottrine, che in essa contengonsi, abbiamo stimato conveniente compierne, delle principali di esse, l' *indice*, che quì appresso soggiugniamo.

INDICE

delle Materie contenute nel trattato dell' invenzione geometrica.

pag.

Non corrispondendo dunque l' attuale Parte II. a quello che nel prospetto ne fu altra volta annunziato, tralasceremo però di continuarne l' indicazione delle materie allora notate nel prospetto ***ora riprodotto, riserbandoci ad esporre quello che di presente vi tratteremo, nell' indice di tal parte.***

Avvertimento

Le note che verranno indicate nel proseguimento dell' indice sono quelle in fine del trattato.

PARTE I.

DELLA

INVENZIONE GEOMETRICA

PARTE I.

DIVISA IN TRE LIBRI,

ED IN UN' APPENDICE.

DELLA

INVENZIONE GEOMETRICA

LIBRI TRE

INTRODUZIONE

L' arte d' inventare è una delle virtù dianoetiche, che per le guide didascaliche, e con dicevole esercitazione nello spirito umano suol prodursi. La soluzion de' problemi forma i primi gradi di virtù sì chiara; e di quella per potersi in questa istituire or si ragiona. E perchè in ciascun problema si dan sempre tre cose a distinguere principalmente, cioè i *Dati*, i *Quesiti*, e 'l *modo da poter dagli uni gli altri rilevare* *; piacemi di prenderle pe' tre oggetti de' tre libri di quest' opera, che imprendo a congegnarvi.

* Cioè l' *Analisi geometrica* propriamente detta.

LIBRO PRIMO

DE' DATI.

CAPITOLO I.

DEFINIZIONI.

1. DEF. I. Una grandezza continua dicesi *Data*, se potremo esibirla per la sua genesi geometrica, o se pur ne sapremo il suo valore. Il primo di questi due dati può dirsi *geometrico*, ed *aritmetico* l' altro.

2. I Dati geometrici, come fu rilevato dal saggio Euclide [1], son di quattro generi, cioè di *grandezza*, di *ragione*, di *specie*, e di *sito*: delle quali cose eccone le distinte definizioni.

3. DEF. II. Una grandezza dicesi *data*, se sapremo esibirne una sua uguale[*].

4. DEF. III. Una ragione l'è *data*, se potremo dare due grandezze omogenee, che contengano quel rapporto.

5. Queste due grandezze debbon esser rette, per una comoda, e general esibizione di tal ragione. E se la ragion data sia razionale, ella potrà pel numerico suo esponente esibirsi.

[1] Nel suo libro *de' Dati*.
[*] *La prima definizione è relativa al* dato *in generale, e questa seconda a quello specialmente detto* di grandezza.

6. DEF. IV. Una figura dicesi *data di specie*, se potrem formarle un' altra simile.

7. DEF. V. Più cose geometriche [2] han tra loro un *dato sito*, se siane dato il modo della di loro coesistenza.

8. SCOL. 1. Non può recarsi alcun valore ad una grandezza continua, s' ella non si rapporti ad una certa unità assunta. Quest' unità dee avere una determinata, e costante grandezza; onde convien rilevarla, e rettificarla per certi regoli della Natura. Quali sieno le unità longitudinali adottate dalle nazioni è noto comunemente. Ma ora esse convengono in adottare per prototipo di misura lineare la diecimilionesima parte del quarto del meridiano terrestre misurato con la maggior esattezza possibile, che si è detta *Metro* [*]; e da questo derivansi poi in convenevol modo le unità di superficie, e quelle de' solidi. L' unità degli angoli n' è il grado. Quella del tempo è il minuto secondo del dì solare medio *ec.*

9. SCOL. 2. Sebbene il dato geometrico di una grandezza, e l' aritmetico di essa sieno intimamente tra lor connessi; pure il più delle volte è un malagevol problema, o trascendente il voler dall' uno l' altro rilevare, come vel mostrerò qui appresso.

[2] Euclide dà un' altra definizione di questo dato.
[*] *Base du Syst. met.* t. III. p. 135 e 557.

CAPITOLO II.

DE' DATI DI GRANDEZZA.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

10. Se diesi di grandezza una linea retta; I. Sarà dato di grandezza quel cerchio, che con tal raggio si descrive. II. Sarà dato di specie, e di grandezza quel segmento circolare, che su di essa formisi capiente un angolo dato. III. E sarà benanche dato di grandezza ogni rettilineo dato di specie, che si costituisca sulla retta data.

Dim. Queste verità intendonsi dalla *def. 3*, dal *post. 3. di Geometria*, e dalle prop. 33. *El. III.* e 28. *El. VI.* respettivamente.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

11. Se diansi di grandezza due rette; I. Sarà data la loro somma, o la loro differenza, se sien disuguali. II. Sarà data la media proporzionale, tra esse. III. La terza proporzionale in ordine ad una di esse, ed all' altra. IV. E quell' altra retta benanche sarà data, che in potenza pareggi la somma, o la differenza de' quadrati delle date rette.

Inoltre, V. Sarà data la ragione, che serba ciascuna di tali rette all'altra. *Come anche*, VI. La sua duplicata, triplicata, ec. *E*, VII. La sua sudduplicata, suqquadruplicata, suottuplicata, ec. *Finalmente*, VIII. Sarà dato di specie, e di grandezza il rettangolo, che da esse rette si congegni.

Dim. Per intender tai cose basta por mente alle rispettive proposizioni Euclidee: cioè alla 3. *El. I.* pel *n. I*: alle pr. 13 ed 11. *VI.* pe' *n. II* e *III*, ed alla 47. *I* pel *n. IV.* E per l'intelligenza de' *n. VI* e *VII* convien sapere le def. 10, ed 11. V. Finalmente l' *VIII* risulta evidente dalle def. 1 e 4.

12. Scol. Niuna delle verità esposte in questo teorema è suscettibile di conversione. Cioè a dire: *Due rette non dovran mai riputarsi date di grandezza* dal sapersene solamente la loro somma, o la loro differenza, o il lor rapporto; nè tampoco dall' aversene il rettangolo di esse, o la media proporzionale tra esse, ec. E converrebbe combinar due di queste condizioni per poter quelle rette determinare. Ma poichè, come sarà nel lib. III. dichiarato, i problemi geometrici del *primo grado* riduconsi a *ritrovar due rette aventi un dato rapporto, e costituenti una data somma, o una data differenza*; e que' del *secondo* a *rinvenir due rette comprendenti un dato rettangolo, ed aventi una data somma, o una data differenza*, non sarà strano, ch' io qui risolva questi due problemi, che a quella famiglia appartengonsi.

PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA.

13. Ritrovar due rette, che abbiano la data retta AB [*fig.* 1.] per loro somma, o per loro dif-

ferenza, e che la prima stia all' altra nella ragion data di m ad n.

Risoluzioni ridotte alle due seguenti regole.

I. All' estremo B della data retta AB si tiri comunque, ed indefinitamente l' inclinata BR, nella quale tolgansi le parti BE, ED [*fig. 1. n. 1.*] respettivamente uguali alle date rette m, n, dipoi si unisca la DA, e dal punto E le si conduca la parallela EC. *Avran le due rette* BC, CA *la data* BA *per somma; e la prima di esse starà all' altra nella ragion data di m, n.*

II. Dall' estremo B della data retta AB si tiri con qualunque inclinazione, ed indefinitamente la BR, nella quale tolgasi la BE [*fig. 1. n. 2,*] uguale alla retta m, che sia la maggiore tra le due rette m, n, e la ED uguale alla n. Indi congiungasi la DA, e dal punto E si meni la EC parallela ad AD: *saran le due rette* BC, e CA *nella proposta ragione di m, n, ed avran per differenza la* BA *data.*

Le quali cose son chiare di per se stesse.

PROPOSIZIONE IV.

PROBLEMA.

14. Ritrovar due rette, che sien reciproche a due rette date [3], e che abbiano una dàta somma, o una data differenza.

Sol. Questi due problemi son due casi delle proposizioni 28 e 29. *El. VI.*, che alcuni geometri sogliono indebitamente tralasciare ne' corsi elementari.

---

[3] O che comprendano un rettangolo dato.

Ma eccone le risoluzioni de' due casi del proposto problema ridotte alle due seguenti

Regole risolutive.

I. Sia M la media proporzionale tra le rette date. Si formi un semicerchio, che abbia per semidiametro la data semisomma, ed in esso conducasi un' ordinata uguale alla retta M. *Le parti del diametro, che in questo quella ne ascinde, saran le rette addimandate.*

II. Si formi il triangolo rettangolo CAD, che abbia la M [*fig. 2.*] per uno de' cateti AD, e per l' altro AC la data semidifferenza. *L' ipotenusa accresciuta di cotesta semidifferenza, e quella diminuita di questa saran le rette, che si cercano.*

Dalle due figure può intendersi la recata costruzione, e la dimostrazione, che facilmente ne deriva.

15. Cor. Nel caso 1. il problema sarà impossibile, quando la retta M sia maggiore della data semisomma. Lo che deesi avvertire.

16. Scol. Ciò basti sulle rette date. È di bene, che or volgiamo le nostre ricerche su i triangoli dati di grandezza. Imperocchè la più semplice tra le figure rettilinee è il triangolo; e ciascuna di quelle in triangoli si risolve colle trasversali. Nè poi di altra figura si è discorso sì copiosamente in Geometria, e ne' corsi trigonometrici, come del triangolo suol farsi.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

17. Un triangolo rettilineo sarà dato di specie, e di grandezza, s' egli abbia una di queste condizioni, cioè: I. Se sien dati di grandezza tutti i

suoi lati. II. O se diansi di grandezza due de' suoi lati, e l' angolo compreso. III. O pur se sien dati di grandezza due angoli, ed un lato qualunque.

Dim. Ciascuna di queste tre condizioni rende determinato il triangolo, e 'l fa benanche determinabile per *gli Elementi piani*, cioè per la 8, 4, 26. *El. I.* Dunqu' ei sarà dato di specie, e di grandezza.

18. **Cor.** 1. Un triangolo rettangolo sarà dato di specie, e di grandezza sol che vi si diano due lati qualunque; o un solo di questi, ed un angolo acuto. E ciò per la 47. *El. I.*, e per la 32.

19. **Cor.** 2. Se diansi due angoli di un qualunque triangolo, s' intenderà dato il terzo, per la 32. *El. I.* Ed esso triangolo sarà dato di sola specie (4. *El. VI.*), onde vi sarà data la ragion de' lati.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

20. Un triangolo sarà dato di specie, e grandezza, se diasi la sua base, un angolo, e l' aja.

Dim. Cas. 1. Sia BC [*fig.3.n.1.*] la data base del triangolo, di cui anche ne sia data l' aja; ed in primo luogo sia dato l' angolo B alla base. Sarà data di posizione la retta BA, che vi forma in B un tal angolo colla BC. Ma è anche data di posizione la retta PM (39. *El. I.*), ove debbon trovarsi i vertici de' triangoli aventi una data aja, e per base la BC. Adunque nel punto A, in cui segansi le due rette BA, PM dovrà ritrovarsi il vertice di un tal triangolo, il quale sarà pienamente determinato. Ed ei sarà la figura BAC, congiuntavi la CA.

Cas. 2. Che se diasi l' angolo verticale BAC [*fig.3.n.2.*]; questo dovrà ritrovarsi nell' arco di quel segmento circolare, ch' è capiente di quest' angolo dato, e tien per corda la BC data. Dunque nell' incontro di un tal arco, e della retta PM dovrà esserne il vertice di siffatto triangolo, il quale risulterà interamente determinato: cioè il triangolo BAC, o l' altro B*a*C sarà la data figura, intendendosi unite le BA, CA, o le B*a*, C*a*.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

21. Se diasi solamente l' angolo verticale A del triangolo BAC, sarà data la ragion dell'aja di questa figura al rettangolo de' lati BA, AC, che comprendono quell' angolo dato.

Dim. Dal punto C [*fig.4.*] si abbassi la CR perpendicolare ad AB; sarà l' aja del triangolo BAC uguale al rettangolo di BA, in ½ CR (*41.El.I.*). Ma sta questo rettangolo al rettangolo de'lati BA, AC come ½ CR ad AC (*1.El.VI.*), e questa ragione è data per esser dato di specie il triangolo CAR (4. *El. VI.*). Dunque sarà anche data la ragione del triangolo BAC al rettangolo de' lati BA, AC comprendenti l' angolo dato A.

22. **Scol.** Dalla pr. 5. può rilevarsi esser dato un angolo, se diansi di grandezza i suoi lati, ed insiem la retta, che ne congiunga gli estremi (4. *El. I.*). E sarà anche dato un tal angolo, se queste rette diansi di ragione(*6.El.VI*). Intanto nel seguente teorema gioverà esibire i più proprj determinanti di un angolo dato, e la di lui misura.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

23. Se tra' lati del dato angolo acuto BAC [*f*.5.] frappongasi ovunque la retta RC perpendicolare ad un di que' lati, il rapporto di due lati dell' emergente triangolo ARC rettangolo in R sarà il costitutivo geometrico di quel dato.

E l' aritmetico consisterà nell' assegnazion de' gradi di un tal angolo, cioè nell' esibirne quante parti novantesime del retto ei contenga, o pur quanti gradi lineari nella sua misura si ravvisino.

Dim. Il triangolo rettangolo ARC è dato di specie: dunque n' è dato il rapporto de' suoi lati CA, AR, RC. Ma se diansi di ragione due di questi tre lati del triangolo ARC, esso sarà dato di specie (*6.*, *e 7. El. VI.*), e si potrà esibire l' angolo A. Che perciò sarà dato.

L' unità degli angoli è la parte novantesima di un retto; dunque il valore di un angolo sarà espresso in gradi angolari, e minuti; e si misurerà pe' gradi, e minuti lineari, o circolari, che si contengono nel suo arco misuratore (*ult. El. VI.*)

24. Cor. Un angolo non si valuta dalla grandezza dell' arco misuratore, ma sì bene dal numero de' gradi, e minuti, ch' ei contiene. Lo che non solo vuol rilevarsi dalle precedenti cose; ma benanche da questa verità geometrica, che: *Un angolo fatto al centro di un qualunque cerchio sia direttamente come l' arco, che il sottende, ed inversamente come il raggio di tal figura* (*Trigon. lib. I. pr. 2.*).

25. Scol. Ogni figura rettilinea, che sia data di specie, e di grandezza, può convertirsi in un quadrato per gli Elementi piani (*45. El. I.*, *e 14. II.*). E pur da questo non

potrà vicendevolmente ritrarsene la specie di quella, ma l' aja solamente. Dunque quando *sia data una figura di sola grandezza, s' intenderà dato un quadrato, che la pareggi.* Intanto la riduzione di una figura in un quadrato, lo che suol dirsi di lei *quadratura*, e con greca voce *tetragonismo*, non è men lodevole, che vantaggiosa. Poichè il quadrato ha questo pregio sulle altre figure [4], che facilmente si valuta; bastandone moltiplicare un lato in se stesso, e con pari facilità può geometricamente esibirsi.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

26. Sebbene i tre lati, i tre angoli, e l' aja di un triangolo sien sette grandezze di diversa natura, cioè lineari le tre prime, angolari le tre altre, e di due dimensioni l' aja di tal figura; pur son esse sì strettamente tra se legate, che dandosi tre qualunque di loro ne son sempre determinabili le altre quattro, tranne quel solo caso, che vi si diano gli angoli solamente [5].

Dim. La verità di questo teorema rilevasi dalle cose sparse quì sopra, e specialmente dalla prop. 5. VI.

27. Def. vi. I valori aritmetici de' tre lati, e de' tre angoli di un triangolo furon detti dagli antichi geometri *parti di esso*. E *risolvere* un trian-

[4] E sul triangolo equilatero ancora, ch' è la più semplice di esse, e regolare.

[5] Dati due angoli di un triangolo si dà pure il terzo: dunque quando diansi tre angoli di un triangolo è come sen desser due.

golo è il determinarne da tre parti date di esso le altre rimanenti .

28. Scol. Fu detto negli Elementi piani, che al maggior lato di un triangolo oppongasi il maggior angolo, al minore il minore: che lati uguali sottendano angoli uguali; e viceversa. Pure non sono i lati di tal figura nella ragion degli angoli , ch' essi sottendono. Che anzi n' è trascendente il rapporto di queste grandezze angolari a quelle lineari : cioè a dire egli è tale , che per niuna delle algebriche , o aritmetiche operazioni può mai ritrarsi . E come dunque , voi mi direte, potrà risolversi un triangolo , ove di un tal rapporto convien far uso ? Per mezzo delle funzioni degli angoli, io vi rispondo , e pe' seguenti artifizj ottiensi cotesta risoluzione , ch' è ben diversa , come il vedrete , da quella geometrica determinazione recatavi qui sopra,e che potrà servire ad illustrarne la diversità de'dati geometrici , ed aritmetici (*def. 1.*) .

29. Def. vii. Da un estremo A [*fig.* 6.] dell' arco circolare AB conducansi queste due rette , cioè la prima AR perpendicolare al raggio CB , che passa per l'altro estremo B , e la seconda AD tangente di un tal arco in A , la qual ne incontri in D il detto raggio CB prolungato . I valori numerici , che ne avranno la perpendicolare AR , la tangente AD , e la secante CD rispetto al raggio CB , che prendesi per loro unità longitudinale (8) , si diranno rispettivamente *seno*, *tangente* , e *secante* dell' arco AB , o dell' angolo ACB , ch' ei ne misura.

30. Def. viii. Il seno , la tangente , e la secante del complemento dell' arco AB diconsi respettivamente *coseno* , *cotangente*, e *cosecante* del detto arco AB , o dell' angolo ACB misurato da AB.

31. Def. ix. Le rette qui sopra definite si dicon *linee trigonometriche* , che furon generalmente dette *funzioni degli angoli* .

32. Scol. Il raggio trigonometrico suol designarsi generalmente colla lettera R . Ne' calcoli dell' Analisi sublime si suol porre uguale ad 1 : e per gli usi trigonometrici supponesi uguale a 100000.00 , affin di evitare i fratti nella valutazione delle linee trigonometriche . E poichè il quadrante contiene 90. gradi , cioè 5400 minuti ; altrettanti archi vi si potran concepire , che vadan successivamente crescendo di minuto in minuto . Di questi archi sogliono i geometri prender le linee trigonometriche in numeri espresse ; guidandone cotesti calcoli con geometriche teorie , o pur traendoli , come i moderni usan fare , da serie convergenti, ch' esprimono i seni , e coseni degli archi . L' indagine di queste linee trigonometriche si dice volgarmente *canone trigonometrico* : e si appellan *tavole de' seni* il registro di que'5400 archi crescenti di un minuto , accanto a' quali sien poste le linee trigonometriche loro corrispondenti .

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

33. I lati del triangolo ARP [*fig.* 7.] , qualunque ei sia , son proporzionali a'seni degli angoli loro opposti .

Dim. Intendasi circoscritto il cerchio ARQP al detto triangolo : e dal suo centro C si abbassino le CF , CG rispettivamente perpendicolari a' lati AP , AR di esso triangolo . Sarà il lato AP di tal figura al diametro AQ del cerchio ARQP, come AF ad AC (essendo queste rette metà di quelle)

(*3. El. III.*), cioè come il seno dell'angolo ACB, o del suo uguale ARP al raggio trigonometrico R. Ed essendo in simil modo AQ : AR :: R : sen. APR; sarà [7], *ex aequo*, AP : AR :: sen. ARP : sen. APR.

34. Cor. Ma nel triangolo CRA rettangolo in R [*fig. 6.*] sta *il cateto CR all' altro RA, come il raggio trigonometrico alla tangente dell'angolo RCA opposto al secondo di que' due lati. E lo stesso cateto CR sta all' ipotenusa AC, come il raggio trigonometrico alla secante del detto angolo RCA.* Imperocchè pe' triangoli simili CRA, CAD dee essere CR : RA :: CA : AD :: R : tang. RCA. E così pure CR : CA :: CA : CD :: R : sec. RCA.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

35. Dati i valori de' tre lati AB, BC, CA [*fig.* 8.] del triangolo ABC qualunque, son anche dati i valori de' segmenti AD, DC della base.

Dim. Per la 47. *El. I.* è $AB^2 = AD^2 + DB^2$, ed è anche $BC^2 = DC^2 + DB^2$. Dunque sarà $AB^2 - BC^2 = AD^2 - DC^2$.

[7] Se i lati di un qualunque triangolo si esprimano per le grandezze analitiche a, b, c; e per A, B, C si dinotino i seni degli angoli opposti ad essi lati a, b, c rispettivamente; sarà per questo teorema $a : b :: A : B$, cioè $a.B = A.b$. Ed essendo similmente $a : c :: A : C$, avrassi $a.C = A.c$. Finalmente per esserne $b : c :: B : C$ avremo $b.C = B.c$. Cioè le tre equazioni lineari, che converrebbe maneggiare, per risolvere un triangolo, saran le tre seguenti.

$$a.B - A.b = o \ , \ a.C - A.c = o \ , \ b.C - B.c = o.$$

Ma i trigonometri colla sola regola aurea dipendente dal presente teorema, e da qualche altro affine pervengono ad un tale intento.

Ciò posto si distenda CB in F, finchè BF pareggi BA; si prenda BG uguale a BC, e si bisechi in E la base AC. Sarà $AB^2 - BC^2$, cioè $BF^2 - BG^2$ uguale al rettangolo CFG. Ed è pure [7] $AD^2 - DC^2 = (AD + DC)(AD - DC) = AC \times 2ED$ (165.). Dunque sarà il rettangolo CFG uguale all'altro di AC in 2ED; e quindi AC : CF :: FG : 2ED, delle quali grandezze essendo date le prime tre numericamente, sarà pur dato il valore della quarta 2ED. Cioè la differenza de' segmenti AD, DC; ed essendone anche data la somma AC, si farà noto ciascun di essi.

36. Scol. 1. Colla luce della proposizione 10, che prendiamo in prestanza dalla Trigonometria, e coll' ajuto delle tavole de' seni si può risolvere ogni triangolo, siasi egli rettangolo, o obbliquangolo. Su di che eccone alcuni esempi.

37. *Dati i due lati AB, BC* [*fig.* 9.] *, e l' angolo C, vuol ritrovarsi l' altro A alla base.*

Facciasi AB a CB, come sen. C ad un quarto, che sarà il seno di A. E nelle tavole avrassi A.

38. *Dati i due angoli A, C, e 'l lato AB cercasi l' altro lato CB.*

Facciasi sen. C : sen. A, come AB ad un quarto, che sarà il lato CB (33).

39. *Dati i due lati AB, AC coll' angolo compreso A, si dimanda l' angolo C.*

Facciasi il raggio R a cos. A [8], così AB ad un quarto, che sarà AD (34). E questo tolto dal lato AC ne farà nota la DC. In oltre sarà nota BD facendo R : sen. A, come AB ad un quarto, che sarà BD. Di poi conosciuti i cateti DC, DB del triangolo rettangolo BDC, si saprà l' angolo C (34).

[7] Prop. 5. o 6. *El. II.*

[8] A rigore dovrebbesi dire sen. ADB : sen. DBA :: AB : AD. Ma tanto è dire sen. ADB che R; ed è poi sen. DBA = cos. A.

40. E se diansi tutt' i lati del triangolo ABC, si sapranno i segmenti AD, DC della sua base pel teorema precedente. E quindi pel §. 37 si sapranno gli angoli A, C.

41. Scol. 2. Quando tre parti di un triangolo sien date geometricamente, la sua risoluzione sarà geometrica, ed elementare. Ma questa sarà trascendente, e per approssimazione, quando diansi i valori di quelle tre parti, o quando que' dati sieno numerici. E ciò potrà esser di rischiaramento al §. 9.

CAPITOLO III.

DE' DATI DI RAGIONE.

42. Il maneggio delle geometriche ragioni, per mezzo delle quali debbonsi ordire le dimostrazioni sintetiche, e le analisi geometriche de' problemi, si riduce principalmente a queste tre cose, cioè:

I. Alla trasformazione di due ragioni uguali, qual fu esposta nel V. *El.*

II. Alla composizione di due, o più ragioni, comunque ne sieno.

III. Ed a certe nuove, ed utili evoluzioni di più analogie: ove saranno indicati certi sofismi.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

43. Se una ragion data si componga, si divida, s' inverta, o si converta; sarà benanche data quella, che in ciascuno di questi modi emerge.

E sarà eziandio data la duplicata, la triplicata, la quadruplicata, *ec.* della ragion data: ed anche la di lei sudduplicata, suqquadruplicata, *ec.*

Dim. Part. I. Questa dimostrazione rilevasi immantinente dalla definizione 3., e dal V. *El.*

Part. II. La ragion data esprimasi per quella della retta a all' altra b (5): e poi si ritrovi c terza proporzionale dopo le rette date a, b. Sarà la ragione di $a : c$ duplicata della data di $a : b$ (*def.* 10. *El. V.*). E così pure ritrovando d terza proporzionale dopo le due b, c, sarebbe la ragione di $a:d$ triplicata della medesima ragione di $a:b$, ec. E per la sudduplicata, suqquadruplicata, *ec. Ved. prop. 2.*

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

44. Se diensi le ragioni di A:B, di C:D di E:F; sarà anche data quell' altra, che componesi da esse.

Dim. La ragione di A : B esprimasi per quella della retta a all' altra b; e poi si faccia b a c, come C a D; e c a d, come E ad F. Sarà la ragione di $a:d$ composta da quelle di $a:b$, di $b:c$, di $c:d$ (*def. A. V.*); e quindi benanche dalle loro uguali di A : B, di C : D, e di E : F. E nello stesso modo si conchiuderebbe un tale assunto, quando le date ragioni sien più di tre.

45. Cor. 1. Se le grandezze A, B, C, D, E, F sien linee rette, la ragione, che si compone dalle due di A : B, e di C : D potrà esibirsi per quella del rettangolo di A in C all' altro di B in D (*23.El.VI.*). E la composta dalle tre di A : B, di C : D, e di E : F, potrà eziandio dinotarsi per la ragione del parallelepipedo rettangolo fatto da'lati A,C,E, all'altro, che terrebbe per lati le rette B,D,F (*cor.pr.33.XI.*).

46. Cor. 2. Date le ragioni, che le grandezze A, B serbino alla terza C; sarà benanche data la ragione di A : B. Imperocchè la ragione di A:B è composta dalle due di A:C, e di C : B (*def. A. V.*). Ma queste si suppongon date; dunque sarà data la ragione di A : B (44).

47. Cor. 3. E dal cor. 1. rileveremo, che tant' è comporre le due ragioni di A : B, e di C : D, quanto queste altre di A : D, e di C : B, iscambiandone i conseguenti *.

* *Vegg. la prop. 5. sup. 1. lib. V. del nostro Euclide.*

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

48. Se la ragion data di Z : X sia composta dalle due di A : B, di C : D, di cui sia data quella di A : B; sarà anche data l' altra ragione di C : D.

Dim. La ragion data di A : B esprimasi per quella della retta a all' altra b, e la ragione di Z : X, che anche supponesi data, si disegni per la ragione della retta a ad un'altra c. Sarà, per la *def.A.El.V*, $a : c :: (a : b)(b : c)$*. Ma è poi dall' ipotesi Z : X :: (A : B) (C : D), e si son fatte le ragioni di A : B, e di Z : X respettivamente uguali a quelle di $a:b$, e di $a:c$. Dunque sarà la ragione di C : D uguale a quella di $b:c$. Onde siccome è assegnabile la ragione di $b:c$, così il sarà pure l' altra di C : D **.

49. Scol. Può facilmente dedursi da questo teorema, che : *Data la ragione di un tutto* M *a ciascuna delle parti* A, B, C, *ec. in cui esso è diviso; sieno ancor date quelle che esse parti serbinsi tra loro, o di più di esse ad altre*.

Imperocchè essendo M : B :: (M : A) (A : B), sarà, pel teor. dim., data la ragione di A, B. E similmente per le ragioni di due parti qualunque; dalle quali poi, per mezzo del *componendo*, si otterranno quelle di più parti a più altre.

* *Maniera da noi adottata, per indicare la ragion composta.* Vegg. l' avvert. al suppl. 1. *El. V.*

** *Una tal verità può dedursi ancora dalla prop. 6. sup. 1. lib. V, e dalla precedente proposizione 13.*

*

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

50. Se sien date le due ragioni di AB ad *ab* [*fig.* 10.], e di BC a *bc*, non sarà data la ragione della somma di cotesti antecedenti alla somma de' loro conseguenti, cioè di AC ad *ac*, se quelle ragioni non sieno tra se uguali, o non abbiano un comune conseguente.

Dim. S'è possibile sia data la ragione di AC : *ac*. Delle grandezze AB, *ab* prendansi i due qualunque equimultiplici NB, *nb*. Sarà NB : *nb* :: AB : *ab* (*15. El. V.*); e potendosi la prima di queste due ragioni sostituir per l'altra, e combinarla colla data ragione di BC : *bc*, sarà anche data, in virtù di tal supposto, la ragione di NC : *nc*; e quindi uguale a quella di AC : *ac*. Onde, per la 19. *El. V*, avrassi AC : *ac* :: AN : *an* :: AB : *ab*; e per la medesima 19 sarà finalmente AB : *ab* :: BC : *bc*. Lo che ripugna all' ipotesi. Dunque date le ragioni di AB : *ab*, e di BC : *bc*, sarà data quella di AC : *ac*, quando sieno uguali le anzidette ragioni, o quando sieno uguali i loro conseguenti *ab*, *bc*; lo che dimostro nel seguente modo.

Pel cor. 2. prop. 13, essendo date le ragioni di AB : *ab*, e di BC : *bc*, o *ab*, sarà data la ragione di AB : BC, e componendo sarà anche data la ragione di AC : BC. Ma è data la ragione di BC : *bc*, o *ab*. Dunque (44) sarà data la ragione di AC : *ab*, e con ciò anche quella di AC : 2*ab*, o sia *ac*.

51. Cor. Di qui si posson trarre più conseguenze, alcune delle quali io qui distendo.

I. *Se a' termini di una ragion data aggiungansi grandezze date, che non sien proporzionali a que' termini, non s' intenderà data la ragione di tali somme.*

II. *Se diensi due ragioni ineguali, non è data la ragione della differenza degli antecedenti a quella de' conseguenti.*

III. E: *Se da' termini di una data ragione tolgansi respettivamente due grandezze date, nemmen sarà data la ragione di tali differenze.*

IV. E quindi: *Data la ragione di due tutti, e quella di due parti loro, non dovrà aversi per data la ragione delle parti rimanenti, tranne il solo caso, che quelle date ragioni sieno fra loro uguali.*

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

52. Se diensi due, o più analogie, ove gli antecedenti delle prime ragioni sieno omogenei tra loro, e tali sien pure quelli delle seconde; sarà la somma degli antecedenti delle prime ragioni alla somma de' loro conseguenti, come la somma degli antecedenti delle seconde ragioni a quella de' conseguenti loro, se pur abbia luogo una delle seguenti condizioni, cioè: se gli antecedenti delle prime ragioni, o delle seconde sien proporzionali a' conseguenti loro; o se i primi antecedenti fosser proporzionali a' secondi, supponendoli ancor omogenei, o i primi conseguenti a' secondi.

Dim. Ritrovandosi una di queste quattro condizioni nelle seguenti analogie

A : *a* : : P : *p*
B : *b* : : Q : *q*
C : *c* : : R : *r*
ec.

si potrà conchiudere, che sia

$$+A+B+C+ ec : a+b+c+ec :: P+Q+R+ec : p+q+r+ec.$$

La dimostrazione potrà vedersi in fine del lib. V. del nostro Euclide.

53. Scol. Molte verità concernenti la Geometria de' curvilinei, e la scienza della Natura con questo apparato di geometriche ragioni si soglion conseguire, e dimostrare; ond' era conveniente quì indicarsi come sottil sofisma in discapito del vero spesso vi s' intrude, ed in che modo gl' ingegni men cauti che acuti vi si abbian di poi a guarentire. Infatti il sig. de la Hire non avendo in ciò ravvisate le anzidette condizioni si lasciò allucinare in una ricerca sulla Meccanica, e ne fu ripreso d' errore dall' acutissimo Gio. Bernoulli *, il quale non gli soggiunse, come il si dovea, le giuste, e sicure vie di ragionarsi. Anch' io un simil sofisma imputai ad un gran geometra de' nostri; ed in tal rincontro mi riuscì rilevare le condizioni, che debbono avere le dette analogie per sì poter conchiudere proporzionali le somme di que' termini analoghi di esse. Or queste cose, ch' io feci in più corsi didascalici sistemare, furon graziosamente accolte da qualche geometra straniero, che sen valse di guida da non errare in simil rincontro.

* *Demonstratio isochronismi descensuum in cycloide, ec.* — Oper. t. 1. n. 49.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

54. Se diasi la grandezza G, qualunque ella ne sia; e diasi benanche la ragione, ch' essa serbi ad un' altra X; questa grandezza non può, che rare volte, esibirsi geometricamente.

Dim. La ragion data esprimasi per quella della retta m all' altra n, ed in primo luogo la data G sia una linea retta. In tal caso la X sarà una quarta proporzionale in ordine alle tre rette date m, n, G. Ond' ella si potrà agevolmente determinare, ed esibire (*12. El. VI.*).

II. La grandezza G sia una linea curva non rettificabile, per esempio un qualche arco circolare; la grandezza X in quest' altro caso sarà pure una quarta proporzionale dopo le tre linee m, n, G. Ma come, si potrà geometricamente esibire cotesta X, non potendosi assegnare, come si dovrebbe, una retta, che la G pareggi? Ed ancorchè la data ragione di $m : n$ sia razionale, si saprà il valore della X in questo caso, ch'è per appunto $\frac{n}{m}$G, ma senza poterlo geometricamente esibire in generale. Imperocchè per alcuni valori del fratto $\frac{n}{m}$ un tal problema è piano, per alcuni altri egli è solido, e per altri ipersolido [9]. E se sia irrazionale quel rapporto di m ad n, questo problema sarà trascendente. E ciò si dica anche nel caso, che la G disegni un angolo.

III. La G dinoti una superficie quadrabile, cioè uguale

[9] Cioè quando vogliasi prendere una parte $\frac{1}{2n}$ di esso arco, ed in alcuni altri casi, che indicherò altrove.

a g^2. In tal caso ritrovisi la retta r media proporzionale tra m ed n, e l' altra f quarta proporzionale dopo le tre m, r, g sarà $f^2 = X$. Imperocchè essendo $m : r :: g : f$, sarà $m^2 : r^2 :: g^2 : f^2$; e ponendo per la ragione di $m^2 : r^2$ la sua uguale di $m : n$, sarà $m : n :: g^2 : f^2 :: G : X$. Ed essendo $g^2 = G$, sarà pure $f^2 = X$. Ma se la G non sia quadrabile, non ha luogo un tale artifizio.

IV. Maggiori nodi incontreremo se G dinoti un solido, o che sia suscettibile di cubatura, o nol sia. Infatti sia G uguale al cubo della data retta g; e sieno r, e t due medie proporzionali tra le due date m, n. Si ritrovi la f quarta proporzionale dopo le tre rette m, r, g. Sarà $f^3 = X$. Imperocchè dall' ipotesi è $G : X :: m : n :: m^3 : r^3 :: g^3 : f^3$ (*def.11.El.V.*). Ed è poi $G = g^3$; dunque sarà $X = f^3$. E non ammettendo cubatura la grandezza G, questo problema sarà il più delle volte trascendente. E così *ec.*

55. Cor. 1. L' esibire geometricamente una grandezza la quale serbi un rapporto dato ad una grandezza data, il più delle volte è problema *solido*, *ipersolido*, o *trascendente*.

56. Cor. 2. E di tal natura suol esser sovente il problema inverso [10], cioè: *Date due grandezze geometricamente esibite rilevarne il rapporto loro*.

57. Scol. La *divisione di una sfera in una data ragione* è un problema solido, ove domandasi quell' artifizio geometrico, con cui riesca troncarne da una data sfera un segmento di una solidità data. E 'l problema *della moltisezione angolare*, che può essere anche trascendente, ad altro non si riduce, che a togliere da un angolo dato una data parte. A simili geometriche esibizioni tanti altri proposti da' matematici moderni si riducono, come son questi: *Dividere un arco*

[10] L' inversion di un problema consiste nel cambiargli alcuni dati in quesiti, e questi in quelli; e quel problema si dirà *diretto*, e l' altro, ch' emerge per l' anzidetta inversione, si chiamerà *inverso*.

parabolico in una ragion data. Segare un semicerchio in una data ragione per una retta, che passi per un dato punto del diametro**. Dividere un dato segmento parabolico in una ragion data, per una retta, che passi per un punto dato* [11]. Ma il problema della rettificazione di una curva per tacervi di tanti altri proposti nel calcolo integrale, può dirsi inverso de' precedenti: poichè, *data la genesi di tal curva, e di certe rette, che le appartengono, si domanda il rapporto di quella linea ad una di queste*.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

58. Se due grandezze sieno proporzionali a due altre, nel caso che queste sieno commensurabili tra loro; il dovranno ancor essere quando queste non sieno commensurabili.

Imperocchè se essendo AB : BC :: DE : EF [*fig.11.*], nel caso che le DE, EF sieno commensurabili, non abbia poi luogo tal proporzione se le DE, EF sieno incommensurabili: dovrà in questo caso esser AB : BC :: DE : EG maggiore, o minore di EF. Sia maggiore per FG. Prendasi di DE un aliquota M minore di FG, e suppongasi tolta quante volte si può dalla EG; dovrà in fin pervenirsi alla E*f* maggiore di

* *Questo problema trascendente fu risoluto da Gio. Bernoulli, e dal de l' Hopital; ma un' elegantissima soluzione di esso ridotto in forma algebrica, può vedersene nelle* Sezioni Coniche analitiche del Fergola *prop. 87.*

** *Di questo problema, ch' è la riduzione geometrica dell' altro astronomico sulle anomalie de' pianeti, se ne riscontri la soluzione negli* Opuscoli matematici della scuola di Fergola *pubblicati nel 1810*, p.171.

[11] Quest' altro problema sarà risoluto nelle presenti istituzioni.

EF, e commensurabile alla DE; che però per l' ipotesi del teorema dovrà essere AB : BC :: ED : Ef. Ma per la supposizione poc' anzi fatta stava AB : BC :: DE : EG. Adunque sarà DE : Ef :: DE : EG, ed Ef uguale ad EG, mentre n' era minore.

Ed una simile conseguenza erronea rilevandosi nel caso, che si fosse supposto AB : BC :: DE : EH minore di EF, ne segue la verità dell' enunciato teorema.

CAPITOLO IV.

DE' DATI DI SPECIE.

59. Poche cose mi son proposto dire in quest' argomento, cioè de' *triangoli dati di specie*, e *de' segmenti di cerchio simili fra loro* farem porola brevemente.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

60. Un triangolo sarà dato di specie. I. Se sien dati di grandezza i suoi angoli. II. O pur se diasi uno de' suoi angoli, e la ragion di due lati di esso. III. Finalmente se diensi le ragioni de' lati di tal figura.

Dim. Niuna cosa è sì facile, quanto l' esibire un triangolo equiangolo ad un dato, o che abbia angoli dati. E, se i lati di un triangolo sien proporzionali alle tre rette date m, n, r, basterà formare un triangolo da coteste tre rette per la 22.*El.I.*, o da tre altre loro proporzionali, perchè si ottenga questo simile a quello.

Che se diasi un solo angolo di un triangolo, e la ragione de' lati, che il contengono, sarà agevol cosa esibirne un altro, che gli sia simile. Imperocchè formando l' angolo PcQ [*fig.* 12.] uguale al dato, e troncandovi ne' suoi lati le parti ca, cb in quella ragion data, congiunta la ab si formerà il triangolo abc di quella data specie.

Finalmente se diasi la ragion di due lati di un triangolo, (la qual si dinoti per quella della retta m all' altra n), e diasi eziandio un angolo non compreso da essi lati, ecco come può costituirglisi un altro simile. » Si formi l'angolo PcQ » [*fig.*13] uguale al dato, e nel lato Q*c* si tronchi *bc* uguale » ad *n*. Inoltre col centro *b* intervallo *n* si descriva il cerchio » *ad*, che per la possibilità del problema dovrà incontrare la » P*c* in due punti *a*, *d*. Si congiungan le rette *ba*, *bd* «. Potrà esser *bac*, o *bdc* il triangolo richiesto. *Su di che vedi la pr.*7.*El. VI.*

61. Scol. Questi sono i principali caratteri raccolti dal VI° degli *Elementi*, per poter esplorare se un triangolo sia dato di specie solamente. Altri men principali di essi potrebbonsi quì recare, se la brevità di quest' opera nol vietasse. Infatti un triangolo sarà benanche dato di specie, se diasi *la ragion de' segmenti della sua base, e 'l rapporto di uno di essi alla sua altezza.* O pur, se vi *sia data la ragione della base all' altezza, e l' angolo verticale, ec.* Intanto gioverà avvertire in questo soggetto, che se diansi due di quelle sette grandezze, che discernonsi in ciascun triangolo (31), non sarà data di specie cotesta figura, se quelle non sieno due angoli di essa. Su di che eccone nel seguente teorema uno sviluppo ulteriore.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

62. Se i due angoli A, B [*fig.*14.] del triangolo ABC sien di finita grandezza, e perfettamente, o prossimamente uguali agli altri due *a*, *b* del triangolo *abc*, queste due figure saranno simili, purchè i rimanenti angoli C, *c* sien puranche finiti, e non mica infinitesimi.

Dim. Si chiamino *p*, *q* i seni degli angoli A, B. Talì saran pure i seni degli angoli *a*, *b* prossimamente uguali a' primi. Ed oltre a ciò le due *m*, *n* diseguino i seni de' rimanenti angoli C, *c*. Sarà *m* : *q* :: AB : AC (*pr.10*); e per la medesima ragione *q* : *n* :: *ac* : *ab*. Dunque sarà, *ex-aequo*, *m* : *n* :: AB.*ac* : *ab*.AC. Or supponendo esser gli angoli C, *c* di finita grandezza, essi dovran differire fra loro per una grandezza [12] infinitesima, ed i loro seni *m*, *n* si dovran quasi pareggiare. Dunque sarà pure il rettangolo AB.*ac* prossimamente uguale all' altro *ab*.AC; e quindi sarà presso a poco AB : *ab* :: AC : *ac* (16.*El.VI.*). E nello stesso modo si dimostra esser prossimamente AB : *ab* :: BC : *bc*.

Ma se supporremo infinitesimi C, *c*, ed ineguali; saran pure infinitesimi i loro seni *m*, *n*, ma non già uguali esattamente, o per approssimazione. Sicchè essendo la ragione di *m* : *n* d' ineguaglianza, tale dovrà esser la sua uguale di AB.*ac* ad *ab*.AC. E non potrà poi conchiudersi, che sia AB : *ab* :: AC : *ac*, e che tampoco esser debba AB : *ab* :: BC : *bc*.

63. Scol. Questo teorema ci preserva da certi sottilissimi sofismi, che potrem contrarre nell' istituire le dimostrazioni geometriche a certe verità di Geometria sublime, e della scienza della Natura. E potrebbesi leggere la dimostrazione della prop. 71. lib. I. de' *Principj Matematici* del gran Newton, ove vengon considerati sì gli uni, che gli altri de' divisati triangoli.

[12] La somma degli angoli A, B differisce per un infinitesimo dalla somma degli altri *a*, *b*. Dunque i due angoli C, *c* saranno tra se uguali perfettamente, o per approssimazione.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

64. Un rettilineo sarà dato di specie, se diensi di specie que' triangoli, ne' quali ei si risolve, conducendo le rette da uno de' suoi angoli agli opposti.

Dim. Per intender la verità di questo teorema basterà leggere la costruzione della *18.El.VI.*

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA.

65. Il segmento circolare BGAD [*fig.*15.] sarà dato di specie, se diasi la ragione della sua base BD al raggio BS.

Dim. Il triangolo isoscele BDS è dato di specie, per esserne data la ragione della sua base BD a ciascun de' suoi lati BS, DS (*pr.19.*). Dunque sarà dato l' angolo BSD, e quindi la sua metà BAD (*32.El. III.*); e però il detto segmento sarà dato di specie.

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA.

66. Se i due cerchi ARE, AGD [*fig.*16.] si tocchino al di dentro, o al di fuori; ogni retta AC, che dal contatto A vi si conduce, dovrà troncarne i segmenti simili ARC, AGB.

E, se dal medesimo contatto si tirino due qualunque corde ABC, ADE, le altre corde BD, CE degli archi intermedj saran tra loro parallele.

Dim. Part.1. Dal punto A conducasi la retta KAF tangente comune a que' cerchi. Sarà l' angolo KAC uguale a quello, che si contiene nel segmento AKC, o nell' altro AGD (*32. El. III.*). Dunque questi segmenti saran simili tra loro.

Part. 2. Ed essendo per la stessa ragione l' angolo KAD uguale ad ABD, o ad ACE, saran questi angoli ABD, ACE tra loro uguali. E quindi BD parallela a CE (*27. El I.*).

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA.

67. Se i due cerchi CAE, CBE [*fig.*17.] s' intersechino ne' punti C, E, da' quali conducansi le due corde CA, AE allo stesso punto A del cerchio esteriore, congiunta la BE nell' interiore, sarà dato di specie il triangolo ABE.

Dim. Per esser dato il segmento CAE, sarà dato l' angolo CAE (*pr. 1.*); ed essendo dato per la stessa ragione l' angolo EBC, e quindi il suo conseguente ABE; sarà dato di specie il triangolo AEB.

CAPITOLO V.

DE' DATI DI SITO.

68. La teorica de' siti, che della scienza del quanto è il più nobil ramo, ed il più sublime, si è trascurata di coltivare da' geometri sì vetusti, che moderni. Il sommo Euclide ne produsse il seguente principio dimostrativo, di cho io talora mi valgo, cioè: *quando più cose han tra loro un dato sito, ciascuna di esse ha un determinato modo di coesistenza, ch' è anche incomunicabile ad ogni altra cosa; che vi si può intender frapposta*. Ma intanto io qui soggiungo nuovi principj di una tal teorica, che in un nuovo, ed agevol modo ora reco.

69. Ass. 1. Quando due punti sien dati di sito, dovrà esser data di grandezza la retta, che li congiunge.

70. Ass. 2. Allorchè diansi di sito due linee rette in un piano, s' intenderà dato l' angolo, che comprendono nell' incontrarsi, o la distanza loro, se sien parallele.

71. Ass. 3. Se diesi di posizione un punto, ed una retta; sarà data di grandezza la distanza di quello da questa.

72. Cor. Se dal punto A dato di posizione colla retta BD conducasi l' inclinata AB: *la grandezza di questa incidente, il suo sito, e l' inclinazione colla data BD* son tre cose, che da una di esse si possono le altre due rinvenire. Imperocchè, tirata la retta AC perpendicolare a BD, il triangolo rettangolo ABC tien sempre queste due cose date, il cateto CA (*ass.1.*), e l' angolo retto ACB [*fig.18.*]. Dunque, sol che diasi una di queste tre grandezze AB, BC, ed ABC si potran rinvenire le altre due (18).

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA.

73. Se diensi di posizione i tre punti A, B, C, [*fig.*19.] che non stieno per diritto; sarà dato di specie e di grandezza il triangolo, che ottiensi congiungendo que' punti con rette.

Dim. Per l' assioma 1. le tre rette AB, AC, BC son date di grandezza. Dunque per la 8.*El.I.* sarà dato di specie, e di grandezza il triangolo ABC.

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA.

74. Se diensi di posizione più punti, che però stieno in uno stesso piano, e non posti per dritto, *nè men tre di essi*; sarà dato di specie, e di grandezza il rettilineo, che ottiensi congiugnendoli.

La dimostrazione di questo teorema discende immediatamente da quella del precedente.

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA.

75. Se diensi di posizione le tre rette AB, AC,

BC [*fig.*20] , che s' incontrino, in uno stesso piano ; sarà dato di specie , e di grandezza il triangolo ABC , che vi si forma .

Dim. Per l' assioma 2. son dati gli angoli A , B , C ; dunque l' è dato di specie il triangolo ABC . Ma egli n' è anche dato di grandezza , altrimente ogni retta *bc* parallela a BC (e lo stesso dicasi delle altre) avrebbe la medesima posizione della BC colle AB , AC . Lo che ripugna.

PROPOSIZIONE XXVIII.

TEOREMA.

76. E se si desser di posizione più di tre rette , giacenti in uno stesso piano , ed inclinate fra loro ; sarà dato di specie , e di grandezza il rettilineo , che formasi dal loro incontro.

La dimostrazione di questo teorema derivasi, come un corollario dal precedente.

PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA.

77. Se diensi di posizione un punto , e due rette inclinate fra loro , e giacenti con quello in uno stesso piano ; sarà data di posizione la retta , che unisce il punto dato coll' intersezione delle rette date . E l' angolo , che comprendono le rette sarà quanto quello , che vi contengono le perpendicolari abbassate dal punto dato su tali rette.

Dim. Part. 1. Questa dimostrasi immediatamente dagli ass. 1 , e 2. Infatti sia S il punto dato [*fig. 21. n.1.*] ed AD , AB le rette date, che seghinsi in A. Sarà data di grandezza la SA per l' assioma 1 , e la SB per lo 2. Dunque sarà dato l' angolo SAB (18) , e quindi di posizione la SA .

Par. 2. I due triangoli SDC , ABC [*fig.21. n.2.*] , che son rettangoli in D, B, hanno uguali gli angoli SCD, ACB. Dunque saran pure uguali i rimanenti angoli CSD , CAB .

78. **Cor.** 1. Di quì può rilevarsi , che importi l' esser dati di posizione più punti , più rette , e quali determinanti di questi dati debbano influire nello snodamento di que' problemi geometrici , ove tali dati sien proposti

79. **Cor.** 2. *Viceversa* , un punto sarà dato di sito, se abbia distanze date da due linee rette date di posizione. Imperocchè , se fosse data la distanza di un punto dalla sola retta AB [*fig.n.1.*], ei non vi resterebbe determinato, potendo esser ciascun di quelli, che trovansi nella S*b* parallela ad AB, e distante per *m* dalla prima . E proponendosi anche data la distanza *n* di detto punto dall' altra retta AD , ei dovrebbe eziandio rinvenirsi nella S*d* parallela ad AD , e distante per *n* da essa . Dunque sarà forza , che un tal punto si ritrovi nell' incontro delle due parallele S*b* , S*d* alle AB , A*d* . E per tal ragione ei sarà un solo , e pienamente determinato .

80. **Def.** x. Le *direttrici* di più punti esistenti in un piano son due rette a squadra , alle quali si rapporti il sito di ciascun de' detti punti.

81. **Scol.** La fissazion di due direttrici è cosa necessaria, ed anche utile per le presenti ricerche , e per altre affini , come si vedrà quì appresso.

PROPOSIZIONE XXX.

TEOREMA.

82. I punti A, B, C, *ec.* [*fig.* 22.] avran fra loro un dato sito, se diensi le distanze di ciascuno di essi dalle date direttrici MT, MO.

Dim. Essendo date per ipotesi le distanze de' punti A, B dalla prima direttrice MT, cioè le perpendicolari AR, BT calate da que' punti sulla MT; sarà anche data la loro differenza AQ. E così pure si dimostra esser data la BQ differenza delle AN, BO, che son le distanze di detti punti dalla seconda direttrice MO. Dunque sarà data di grandezza la BA ipotenusa del triangolo rettangolo AQB, di cui si è detto esserne dati i cateti. Nello stesso modo può rilevarsi, che sien date di grandezza le altre rette BD, DC, *ec.* Dunque i punti A, B, C, *ec.* saran dati di sito fra di loro per aver tra essi un determinato modo di coesistere (7).

PROPOSIZIONE XXXI.

TEOREMA.

83. Dato il rapporto delle distanze, che ha ciascun punto della curva GMR [*fig.* 23.] dalle due direttrici AB, AN; saran dati di sito tutt' i punti di tal curva: onde saprassi la di lei ramificazione, ed il corso perimetrico.

Dim. Questa verità è come un corollario della precedente; e si è qui riportata per teorema per la sua eccellenza.

84. Def. xi. La distanza di ciascuu punto M della curva GMR dalla direttrice orizzontale AO, cioè la MT, o la sua uguale AN, dicesi *ascissa*, e l' altra distanza MN di esso punto dall' altra direttrice AN, si chiama *ordinata*. E l' ascissa colla sua corrispondente ordinata si chiamano *coordinate*, cioè le AN, NM.

L' ascissa AN, ch' è una grandezza indeterminata, suole indicarsi per la variabile x, e per la y vi si esprime la corrispondente ordinata MN.

PROPOSIZIONE XXXII.

TEOREMA.

85. Se dalla genesi, e da qualche proprietà di una curva si ritragga il rapporto tra le due coordinate x, y, e questo poi riducasi in equazione; la natura di tal curva potrà legittimamente esprimersi per l' anzidetta equazione; e dal maneggio di questa le proprietà di quella potran raccorsi.

Dim. La natura di una curva è riposta nel sito, che han fra loro i punti del di lei perimetro, cioè nel rapporto delle distanze di essi punti dalle loro direttrici (83), e finalmente in quell' equazione analitica, in che un tal rapporto si converte. E sarà chiaro, che dal maneggio di cotesta equazione si potran raccorre le affezioni dell' anzidetta curva.

86. Def. xii. Una curva dicesi *geometrica*, se sia algebrica la sua equazione caratteristica. Ed ella si direbbe *meccanica*, o *trascendente*, se l' equazione tra le sue coordinate involga grandezze, ed operazioni trascendentali.

87. DEF. XIII. Una curva geometrica dicesi *del second' ordine*, se la sua equazione ascenda al secondo grado. Ella si direbbe *del terz' ordine*, se al terzo grado ne monti la sua equazione. E così più appresso.

88. SCOL. La linea di *prim' ordine* è la retta, la cui equazione è del *primo grado*. Le linee del *second' ordine* sono le curve coniche, cioè il *cerchio*, la *parabola*, l' *iperbole*, e l' *ellisse*.

Le curve del terz' ordine *furono enumerate dal Newton, e posteriormente dallo Stirling; e potrà per esse vedersi il Cramer nell'* Introduction a l' analyse des lignes courbes algébriques cap. 9.

ESEMPIO.

89. *Rilevar l'equazione della curva AMG [f. 24. n. 1 e 2.], ove ciascuna ordinata MN sia media proporzionale tra la sua ascissa AN; e la distanza ON del suo estremo N dalla retta BD data di posizione* [12].

SOL. La data retta BD [*fig. n. 1.*] incontri sotto del punto A la linea AN delle ascisse. Si meni pel punto A la retta AD parallela ad NO; e ponendo AN $= x$, NM $= y$, sia AB $= a$, ed AD $= p$; sarà BN $=$ BA $-$ AN $= a - x$. Ed essendo, pe' triangoli simili BAD, BNO, BA : AD :: BN : NO, cioè, $a : p :: a - x :$ NO; sarà NO $= (a - x)\frac{p}{a}$ Ma per la condizion della curva dee esser NM$^2 =$ AN.NO. Dunque sarà

[12] Questa maniera di considerar la genesi delle curve coniche sembra nuova, e può trarsi da certe verità de' *Conici* di Apollonio; *come vedesi fatto nel vol. III. del nostro* Corso geometrico, *pr. 7. Prenozioni.*

$$y^2 = (a - x)\,\frac{px}{a},\ \text{cioè},\ y^2 = px - \frac{px^3}{a}.$$

Che se la retta AN delle ascisse incontri al di sopra del punto A la data retta BD [*fig. n. 2.*], sarà BN $= a + x$; e collo stesso ragionamento di qui sopra si troverà, per quest' altra curva, la seguente equazione $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$. Sicchè se esprimasi per q il rapporto di $p : a$ (le quali rette dinotano il parametro, e l' asse di una qualunque curva conica), l' equazione generale per le linee di second' ordine potrà comodamente, e generalmente dinotarsi per

$$y^2 = px + qx^2 \qquad \text{A}$$

E l' equazione A disegnerà una *parabola*, se q sia zero: ed ella ne sarà un' *iperbole*, quando la q sia positiva. Finalmente la detta equazione apparterrà all' *ellisse*, se siavi negativa la q, la quale degenera in cerchio, se mai si trovi esser $a = 1$, cioè $p = a$.

90. DEF. XIV. *Projezione* di un punto su di un piano è l' incontro, che fa in questo la perpendicolare abbassatavi da quel punto. Cotesto punto d' incontro suol dirsi, da' *geometri descrittivi*, *piede* di quella perpendicolare *.

91. POST. Per fissare il sito di un punto Z [*fig. 25.*] dato nello spazio si potranno prendere ad arbitrio i due piani ortogonali DAB, DAC, per rapportarvelo; e quindi:

92. ASS. Se il punto Z, ch' è nello spazio, si projetti su i piani DAB, DAC in N, P, e questi punti di projezione sien dati di sito rispetto alle direttrici BA, AD, ed alle altre AC, AD; quel punto sarà dato di sito.

93. SCOL. Partendo da questo principio non sarà malagevole il risolvere gran parte de' problemi di *Geometria descrit-*

* *Vegg. la Geometria di Sito del Flauti.*

tiva, che leggonsi in quelle istituzioni, che non ha guari si son prodotte dal *Monge*, dal *Lacroix*, e dal nostro *Flauti* [13]. Che anzi se la curva YZ, ch' è nello spazio, si projetti su i piani dati DAB, DAC, dalla natura delle projezioni AN, AP si potrà intendere il sito, e la natura della curva projettata YZ. Ma lasciando queste speculazioni di alieno istituto, piacemi di recar qualch' esempio delle equazioni alle superficie, derivandole co' pricipj esposti.

ESEMPIO I.

94. *Date le due direttrici AB, AD* [*fig.* 26.], *ed una superficie piana, che intersechi nella retta EB il piano di esse direttrici; ritrovar l' equazione definitrice del sito di ciascun punto M di detta superficie.*

Sol. Dal punto M si abbassi la MQ perpendicolare al piano DAB delle due direttrici, e la ME perpendicolare alla data EB. Si unisca la QE; si cali QP perpendicolare alla BA, e si compia il parallelogrammo QCFE. Finalmente pongansi AB $= a$, AP $= x$, PQ $= y$, MQ $= z$. Ed essendo dato l' angolo acuto MEQ, ch' esprime l' inclinazione della data superficie, e del piano DAB; sarà data la ragione di MQ a QE, che potrà esprimersi per quella di $n : m$. Dunque sarà $n : m ::$ MQ (z) : QE, e quindi sarà QE $= \frac{mz}{n}$, cioè CF $= \frac{mz}{n}$. E potendosi dinotare la ragion data di CF a CB per quell' altra di $t : m$, per esser dato di specie il triangolo CFB rettangolo in F, sarà $m : t ::$ CF $\left(\frac{mz}{n}\right)$: CB, e con

[13] *Si ricordi ciò che si è detto nell'*Introduzione, *per l' epoca in cui fu dall' autore rifatto, per l' ultima volta, il MS. del presente trattato.*

ciò CB $= \frac{tz}{n}$. Ma è poi CF : FB :: QP : PC, essendo simili i due triangoli QPC, CFB. Dunque sarà

$$\frac{mz}{n} : \sqrt{\left(\frac{t^2z^2}{n^2} - \frac{m^2z^2}{n^2}\right)} :: y : \text{PC}$$

e quindi $$\text{PC} = \frac{y}{m}\sqrt{(t^2 - m^2)}$$

Il perchè essendo la retta AB uguale alle sue parti AP, PC, CB, sarà ne' loro simboli

$$a = x + \frac{y}{m}\sqrt{(t^2 - m^2)} + \frac{tz}{n},$$

cioè, dividendo per $\frac{t}{n}$,

$$z = \frac{an}{t} - \frac{nx}{t} - \frac{ny}{tm}\sqrt{(t^2 - m^2)}$$

o sia $$z = p + qx + ry$$

ponendo $\frac{an}{t} = p$, $-\frac{n}{t} = q$, e $-\frac{n}{tm}\sqrt{(t^2 - m^2)} = r$.

ESEMPIO II.

95. *Ritrovar l' equazione di una superficie sferica, ove un cerchio massimo sia il piano delle due indeterminate x, y.*

Sol. Da un punto M [*fig.* 27.] della superficie sferica, di cui A sia il centro, si abbassi la perpendicolare MQ sul piano del circolo massimo DAB, ove fissate le due direttrici DA, AB, si cali QP perpendicolare ad AB; e sieno AP $= x$, QP $= y$, MQ $= z$, e 'l raggio della sfera uguale ad r. Sarà AM^2 = MQ^2 + QA^2 = MQ^2 + QP^2 + PA^2, cioè,

$$a^2 = z^2 + y^2 + x^2.$$

96. E così convenevolmente per altre curve potrà procedersi nell' indagine dell' equazioni alle loro superficie. Di fatti:

Il solido FABKF [*fig.*28.] sia nato dalla rivoluzione della figura CAD intorno al suo asse CA ; e 'l cerchio EGKH ne sia la base , ove prendasi il diametro GH per una direttrice de' punti della superficie EABK . Da un punto N di questa conducasi NR perpendicolare al detto cerchio , ed unito il suo centro C col punto R d' incidenza , per la CR , si meni RO perpendicolare a CH. Inoltre si faccia $NR = z$, $RO = y$, $CO = x$. Sarà per la natura della curva BAF rapportata alle coordinate NR , ed RC , la CR una funzione di RN, cioè potrà disegnarsi la CR per Z . Ma è poi $CR^2 = CO^2 + OR^2$. Dunque sarà $Z^2 = x^2 + y^2$, l'equazione alla superficie EABKF.

PROPOSIZIONE XXXIII.

TEOREMA.

97. Se diasi di grandezza l'angolo APB [*fig*. 29], ed i lati PA , PB , che il contengono ; saran dati di sito i tre punti P , A , B , cioè il vertice di tal angolo , e gli estremi de' di lui lati .

E se detto angolo circolarmente si aggiri intorno al suo vertice P , e nel piano delle rette PA , PB, finchè ciascun de' suoi lati descriva il dato angolo φ , i loro estremi alla fine di tal movimento dovran serbare date posizioni co' punti P, A, B.

Dim. La dimostrazione della prima parte è chiara per le precedenti cose [14] . Ed eccone la dimostrazione della seconda parte . Essendo l' angolo APa uguale al dato φ , ed essendo anche dato APB , per ipotesi ; sarà data la loro somma , cioè l' angolo BPa . E quindi saran dati di posizione i punti B , ed a tra loro , e col vertice P.

[14] Per esser dato di specie , e di grandezza il triangolo APB.

98. Cor. E se conducansi le rette pe' punti A , B , a , b ; queste saran date di sito , e di grandezza [15].

PROPOSIZIONE XXXIV.

TEOREMA.

99. Se diasi di grandezza l' angolo PBA [*fig*. 30.]; ed un suo lato PB , che circolarmente intorno al punto P si volga nel piano PBA, descrivendovi l'angolo dato φ , pervenga nel sito Pba : dico esser data di posizione la retta ba , ed il punto P .

Dim. È data di grandezza la retta PB , o la sua uguale Pb , ed è anche dato l' angolo BPb uguale al dato φ, per ipotesi. Dunque saran dati di posizione i punti b , B col centro P di rivoluzione ; sarà data di grandezza , e di posizione la bB: finalmente la ba, che fa un dato angolo colla bP data di sito , e di grandezza , sarà benanche data di posizione .

PROPOSIZIONE XXXV.

TEOREMA.

100. *E generalmente* : Se le due figure MA, NB, [*fig*. 31.] qualunque esse sieno , abbian tra loro un dato sito in un piano , e la NB circolarmente aggirisi intorno al dato punto P, rimanendo in detto piano , e descrivendo intorno a P un angolo dato φ ; tali figure alla fine di questo moto avranno un dato sito.

[15] Per la stessa ragione .

Dim. Cotesta verità, che per la sua importanza doveasi proporre in forma di teorema può intendersi dimostrata dalle due ultime proposizioni, ed esserne di esse un corollario.

101. **Scol.** Questi tre teoremi son come principj euristici per risolvere alcuni problemi di sito. E poichè i *porismi*, di che saggiamente valeasi Euclide, soglion destinarsi a trovar certi punti dati di posizione; sarà bene, ch' io quì da ultimo vi proponga il seguente teorema *Fermaziano*, ch' è il porisma 3. di un tal trattato di questo insigne geometra, ed altri ne aggiunga, o rilevati dagli antichi, o da' moderni escogitati *.

PROPOSIZIONE XXXVI.

TEOREMA.

102. Se dal dato punto A della circonferenza del cerchio ACBD [*fig*.32.] s' inclini una qualunque retta AE alla data corda DC, e poi dal punto B, ove quella incontra la circonferenza, si meni l' incidente BF su tal corda, sicchè il rettangolo dell' intera corda DC, e del segmento medio FE, stia al rettangolo de' segmenti estremi DF, EC nella ragion data di DC a CL; l' incidente dovrà converger sempre ad un dato punto della circonferenza [16].

---

* *Si legga sul proposito la prima delle* dissertazioni preliminari *agli* Opuscoli matematici, *che forman seguito a' presenti trattati, come fu annunziato nel* Prospetto *ec.*

[16] Questa verità potrebbe enunciarsi più facilmente, e poi dimostrarsi nel seguente modo :

Se da' dati punti A, M della circonferenza MBA conducansi ad un terzo punto B le due inclinate AB, MB, che seghino in E, F la data corda DC; sarà il rettangolo delle parti estreme CE, DF a quel-

Dim. Si unisca la retta LA. Ed essendo per supposizione DC.FE : DF.EC :: DC : CL :: DC.FE : CL.FE., sarà il rettangolo DF.EC uguale all'altro CL.FE; ed aggiungendo di comune il rettangolo FE.EC, si avrà il rettangolo DEC, o il suo uguale BEA uguale all' altro FEL. Quindi sarà BE : FE :: EL : EA; e però l' angolo ELA, ch' è dato, sarà uguale ad EBF. Laonde dovendo essere di data grandezza l' angolo ABM, che ha il vertice nella circonferenza, ed un suo lato BA diretto al dato punto A di essa, anche l' altro lato BM dovrà passare per un dato punto della medesima periferia.

PROPOSIZIONE XXXVII.

TEOREMA.

103. Se diansi di posizione il cerchio EDF [*f*.33] ed i punti A, B da' quali inflettasi la AEB, e per l' un de' punti D ove questa incontra il cerchio si tiri la DG parallela alla retta AB tra' punti dati; congiunta la FG dovrà questa passar sempre per uno stesso punto della AB.

Dim. L' angolo FHB è uguale al suo alterno HGD, e quindi all' angolo FED, che del pari che quello è compimento a due retti dell' angolo DGF, nel caso che il punto G cada al di sotto di F, come nella presente figura, o pu-

---

lo dell' intera DC nella parte media FE sempre in una data ragione.

Dal punto A s' inclini sulla DC la AL, sicchè l' angolo ALE sia quanto l'angolo dato ABM; starà AE : EL :: FE : EB, e 'l rettangolo di EF in EL sarà uguale a quello di AE in EB, e quindi all' altro di DE in EC : togliendo dunque di comune il rettangolo di FE in EC, rimarrà il rettangolo di FE in CL uguale a quello di DF in EC. Laonde questi due rettangoli serberanno ugual ragione all' altro di DC in FE; ed avendosi perciò DF.EC : DC.FE :: FE.CL : DC.FE :: CL : CD, la prima di queste ragioni sarà data al par dell' ultima — *C. B.D.*

re esiste con esso nel medesimo segmento, se il punto G cada al di sopra di F. Quindi i due triangoli ABE, HBF che hanno comune l' angolo in B, ed uguali gli angoli AEB, BHF saranno simili; ed avrassi EB : BA :: BH : BF; ed il rettangolo ABH sarà uguale all' altro EBF, ch' è dato per essere uguale al quadrato della tangente che dal punto B tirasi al cerchio EDF. Laonde essendo pur costantemente dato il rettangolo ABH, ed il suo lato AB, dovrà essere ancor dato l'altro BH, e per conseguenza il punto H risulterà dato di posizione nella AB.

104. **Cor.** Tirata la DF diasi in essa di posizione il punto C, che congiunto con l' altro H poc' anzi determinato, si tiri per D la DI parallela alla HC, ed uniscasi il punto I con l' altro G. Dovrà ancor questa IG incontrare la HC in un punto L dato di posizione.

Imperocchè essendo, per le parallele HL, DI, uguali a due retti gli angoli HLG, DIG, e DIG uguale a DFG, o supplemento di esso, secondo i due casi considerati nella dimostrazione precedente; risulterà nell' un caso o nell'altro l' angolo HLG uguale all' altro HFC. Laonde essendo equiangoli i triangoli HLG, HFC sarà GH : HC :: HL : HF, ed il rettangolo CHL uguale a GHF, ch' è dato per pareggiare il quadrato della tangente che dal punto dato H tirasi al cerchio DEF. Adunque essendo ancor dato il rettangolo LHC, ed il suo lato CH, ne sarà pur dato l' altro HL, e quindi il punto L risulterà dato di posizione.

PROPOSIZIONE XXXVIII.

TEOREMA.

105. Preso un punto G [*fig*.34.] nel prolungamento del diametro AB del cerchio AEBD vi si tiri ovunque la secante GE, e poi si unisca il punto F

coll' estremo D dell' arco AD uguale ad AE; la retta DF che congiugne tai punti, segherà sempre in uno stesso punto il diametro AB. Ed oltre a ciò la GA resterà divisa armonicamente in B, A.

Dim. Si unisca la retta AF, e per H conducasi la retta HR parallela alla secante GE; sarà l' angolo HRF uguale al suo alterno RFE. Ma è poi quest' angolo RFE uguale all' altro AFD, insistendo essi sugli uguali archi AE, AD. Dunque sarà l'angolo HRF uguale all' altro HFR; e quindi HF uguale ad HR.

Inoltre i due angoli BFG, EAB sono uguali, perchè ciascuno di essi unito al medesimo angolo BFE farebbe due retti. Ed è pure BFD uguale a DAB (*21.El.III.*). Dunque, siccome sono tra se uguali i due angoli EAB, DAB, così saran pure uguali gli angoli BFG, BFH. E quindi per la 3. *El. VI*. dovrà stare GB : BH :: GF : FH, o ad HR. Ma pe' triangoli simili GAF, HAR è GF : HR :: AG : AH. Dunque sarà GB : BH :: AG : AH; e permutando GB : AG :: BH : AH. Vale a dire la GA è divisa in B, H armonicamente (*§.68.Sez.Con., vol.III. del Corso geometrico*). E non potendo esser talmente divisa, che nel solo punto H; le diverse rette, che uniscono i punti D, F, come si è proposto, passeranno pel punto H.

106. **Cor.** *Se la retta GH comunque divisa in B si prolunghi in A, sicchè stia GA : AH :: GB : BH; il semicerchio descritto su di AB sarà tale, che le GF, FH inclinate in esso da' dati punti G, H son sempre nella ragione di GB, BH*. E questa verità, che altrove ho esibito, potrebbesi in questo nuovo modo, e più elegante degli altri dimostrare.

PROPOSIZIONE XXXIX.

TEOREMA.

107. Se dal punto F esistente fuori del cerchio AKB [*fig*.35.] si tiri per lo centro L la secante FA, la quale si divida armonicamente in G, e dal punto F si elevi la FP perpendicolare alla FA: dico, che debba restar divisa armonicamente ogni retta, che conducasi per lo punto G, e si arresti tra la circonferenza di quel cerchio, e questa perpendicolare, cioè dovrà stare RP : PK :: RG : GK.

Dim. Essendo, per ipotesi, AF : FB :: AG : GB, sarà componendo AF + FB : FB :: AB : BG, e prendendo le metà degli antecedenti, sarà LF : FB :: LB : BG, e quindi convertendo LF : LB :: LB : LG. Dunque sarà LF.LG uguale ad LB^2, e tolto da questi spazj il quadrato di LG, dovrà restare il rettangolo FG.GL uguale all'altro AG.GB.

Ciò posto, si abbassi dal centro L la retta LS perpendicolare alla KR; saranno equiangoli, e simili i due triangoli GFP, GSL. E dovendo stare PG : GF :: LG : GS, sarà il rettangolo PGS uguale all' altro FGL, e quindi ad AGB, che gli si è mostrato uguale, cioè ad RGK. Dunque per l'egualità di questi rettangoli PGS, RGK, come il son pure uguali gli altri due FGL, AGB, le due rette AF, RP son divise proporzionalmente ne' punti B,G,L, e negli altri K,G,R.

108. Cor. 1. Essendo LF : LB :: LB : LG, se per G si distenda la corda OV perpendicolare alla BA, sarà tangente la retta, che passa pe' punti F, O, e quella benanche, che unisce i punti F, V.

109. Cor. Quindi è chiaro che: *Se da un punto F esistente fuori di un cerchio si conduca la tangente FO, e la OG ordinata alla FA, che passa pel centro, dovrà la FA esser divisa armonicamente ne' punti G, B;* o viceversa: *Se da un punto G esistente dentro di un cerchio si conducano al diametro AR, l' ordinata GO, e la tangente OF, dovrà parimente la AF esser divisa armonicamente ne' punti G, B.*

PROPOSIZIONE XL.

TEOREMA.

110. Se dal punto A [*fig*. 36.] partano le tre rette AB, AC, AD, le quali dividano armonicamente la quarta retta EF terminata in E, talchè stia EF : FH :: EG : GH; ogni altra retta EB, che dal secondo de' detti punti si conduce alle tre prime rette, dovrà rimanere da esse benanche armonicamente divisa, cioè, dovrà essere EB : BC :: ED : DC.

Dim. Per ipotesi sta EF : FH :: EG : GH. Ma la prima di queste ragioni è uguale a quella di EB : IH, pe' triangoli simili EFB, HFI (intendendosi distesa per H la IK parallela a BC). E la seconda di esse, pe' triangoli simili EDG, GKH, è uguale alla ragione di ED ad HK. Dunque starà EB : IH :: ED : HK; e permutando EB : ED :: IH : HK :: BC : CD.

111. Cor. Di questa proposizione n'è inversa la seguente altra: *Se i due lati BE, FE del triangolo BEF sieno divisi armonicamente ne' punti C, D; H, G; le rette CH, DG, che vi congiungono le sezioni corrispondenti, dovranno convergere ad uno stesso punto della base BF prolungata, se pure non le sieno parallele.*

PROPOSIZIONE XLI.

TEOREMA.

112. Se i tre cerchi EFG, GIH, EIH [*fig*.37. *n*.1, 2, *e* 3.] s'intersechino scambievolmente; le tre rette GK, EF, IH, che passano per le sezioni di ciascuna coppia di essi, dovransi intersecare in un sol punto; se pur non sieno parallele.

Dim. Cas. 1. Le due prime rette GK, EF [*fig.n.1 e* 2.] sechinsi in a: dico, che per questo stesso punto debba passare la terza retta IH.

Imperocchè, se ciò nol sia, si unisca la retta Ia, e questa non passando per H dovrà in S, R tagliare il cerchio GIH, e l' altro EIH. Sarà dunque il rettangolo IaS uguale all' altro GaK, pel primo cerchio GIH, e quindi al costui uguale EaF, pel secondo cerchio EFG. Ma questo medesimo rettangolo EaF, pel terzo cerchio EIH, è quanto il rettangolo RaI. Dunque sarà il rettangolo SaI uguale all' altro RaI. Lo che ripugna.

113. Cas. 2. Che se la GK suppongasi parallela alla HI [*fig.n.3.*], dovrà anche la FE esser parallela ad entrambe. Perchè se la FE incontrasse la GK in a, congiunta la aI, si dimostrerà come poc' anzi, che questa non possa intersegare i due cerchi GHI, HFE in due punti diversi, ma che debba passare per H. Adunque la HI non sarebbe parallela alla GH come si è supposto, che perciò la FE dovrà esser necessariamente parallela alla GK.

114. Cor. Se tre cerchi scambievolmente si tocchino; le tangenti che ad essi conduconsi ne' punti di loro toccamenti, dovranno incontrarsi in un medesimo punto.

PROPOSIZIONE XLII.

TEOREMA.

115. Se diensi di grandezza, e di sito i tre cerchi A, B, C [*fig*.38.], ed a ciascuna coppia di essi tirinsi le tangenti comuni, i cui concorsi sieno respettivamente F, E, D: dico esser per dritto questi tre punti.

Dim. Si uniscano per la retta FD i due punti F, D, in essi dovrà cadere il rimanente punto E. Imperocchè condotta dal punto C la CL parallela ad AB, si chiamino a, b, c i raggi de' dati cerchi A,B,C. Sarà $a : b$ :: AF : FB (*4.El.VI.*); e $b : c$ :: BD : CD :: BF : CL, pe' triangoli simili BDF, CDL. Dunque, *ex aequo*, dovrà essere $a : c$ :: AF : CL. Ma l' è poi $a : c$ :: AE : CE. Dunque sarà AF : CL :: AE : CE; e quindi il punto E dovrà stare nella FD.

116. Scol. La dimostrazione di questa verità è dovuta al *Flauti* *. Intanto da ciò può arguirsi non esser vera l' opinione di certi analisti oltramontani » che a questo teorema non » possa recarsi una dimostrazione propria, ed a priori, ma » che debbasi quello rilevare dalla soluzione *descrittiva* del » problema di *condurre un piano tangente a tre sfere date di* » *grandezza e di sito* ». Anche la dimostrazione del teorema precedente, ch' è assai elegante, l' è opera del lodato *Flauti*.

---

* *Si rimonti all' epoca in cui fu ordinato dal Fergola il presente trattato, per l' ultima volta, da noi espressamente indicata nell'* Introduzione *ad esso; e si legga sul proposito la nota corrispondente in fine della* Geometria di Sito *del prof. Flauti, che contemporaneamente si pubblica per la terza volta.*

**

CAPITOLO VI.

DEL DATO ALGEBRICO DI UNA RETTA, E DEL MODO DI GEOMETRICAMENTE ESIBIRLO.

117. Il valore di una grandezza continua, e la di lei geometrica esibizione son due cose interamente tra lor connesse, sicchè dall' una può l' altra derivarsi. Ma pure il più delle volte addiviene, che si richiegga un metodo trascendente per siffatta determinazione. E sol nelle rette riescon facili, ed elementari questi problemi, ch' io riduco a due principalmente; l' un de' quali è inverso dell' altro. Cioè: *Data l' espressione algebrica di una retta, costruirla geometricamente*. E viceversa: *Dato il rapporto, o 'l sito di una retta a più grandezze date, ritrarne l' algebrica espressione di tal retta*. Il primo di questi due problemi è risoluto in questo capo, e 'l secondo nel secondo libro.

PROPOSIZIONE XLIII.

TEOREMA.

118. La frazione analitica $\frac{abcd}{pqr}$ abbia un fattore di più nel numeratore, che nel denominatore, e ciascuno di essi dinoti una retta data di grandezza; la detta frazione sarà l' ultima delle quarte proporzionali ritrovate nel seguente modo: cioè, la prima dopo le tre rette p, a, b, che chiamo A, la seconda, che dico B, dopo le tre rette q, c, A; la terza C dopo le tre altre rette r, d, B, ec.

Dim. Le proposte analogie son le seguenti $p : a :: b : A$, $q : c :: A : B$, $r : d :: B : C$, ec. Dunque dalla prima di esse dovrà raccorsi, che sia $pA = ab$, e quindi $A = \frac{ab}{p}$. E la proposta frazione, che potrà avere quest' altra forma

$$\frac{ab}{p} \times \frac{cd}{qr}, \text{ diverrà uguale ad } \frac{Acd}{qr}.$$

Similmente, per la seconda delle anzidette analogie, essendo $qB = Ac$, sarà $B = \frac{Ac}{q}$, e quindi dovrà divenirne $\frac{Acd}{qr} = \frac{Bd}{r}$, e ciascuna di esse n' esprime il proposto fratto.

Finalmente dalla terza analogia ricavasi $rC = Bd$, cioè, $C = \frac{Bd}{r}$. Dunque sarà $C = \frac{abcd}{pqr}$.

E questa dimostrazione, che ho fermata in tre sole analogie, potrebbe nello stesso modo progredir più oltre, se i fattori del numeratore nel proposto fratto sien più di quattro.

119. Cor. 1. Con questo stesso artificio può costruirsi una frazione polinomia nel solo numeratore, o nel solo denominatore, o in amendue, se mai cotesti polinomj sien risolubili in fattori semplici, ciascun de' quali dinoti una retta data di grandezza. Così, per costruire la seguente frazione $\frac{(a^2c - 2abc + b^2c)}{m^2 - n^2}$, o la sua trasformata $\frac{c(a-b)(a-b)}{(m+n)(m-n)}$ gioverà fare $m + n : a - b :: a - b : A$, cioè ritrovar la retta A terza proporzionale dopo le due $m + n$, ed $a - b$, e poi la B quarta proporzionale dopo le tre $m - n$, c, ed A. Sarà B la retta espressa dal proposto fratto.

120. Cor. 2. Se propongasi a costruire una frazione, che abbia nel suo numeratore, o nel suo denominatore più fattori, o meno di quanti vi si richieggono a tal uopo, dovrà moltiplicarsi il denominatore, o il numeratore per l' unità una, o più volte, sicchè tal fratto acquisti la prescritta forma. E quest' unità non è, che una retta presa ad arbitrio, quando quel fratto propongasi astrattamente. E s' ei emer-

ga dalla risoluzione di un problema, la detta unità dovrà esser quella retta, che vi si è dovuto porre uguale ad 1. in risolvendolo. Imperocchè niuna retta può avere un' asimmetrica espressione, se non siesi posta un' altra uguale ad 1, come dall' *Algebra* l' è chiaro. E quindi la frazione $\frac{abc}{pqrt}$ acquisterà la forma lineare, moltiplicandone il numeratore per l' unità due volte di seguito; onde si dovrà, come qui sopra, costruire l' emergente fratto $\frac{abc\times 1\times 1}{pqrt}$.

PROPOSIZIONE XLIV.

PROBLEMA.

121. Costruire la frazione $\frac{abc\pm klm\pm\ldots}{pq}$, che sia monomia nel solo denominatore, ed ove le a, b, c, p, q, k, l, m, *ec.* dinotino rette date di grandezza.

Sol. Questo problema, che ben si conosce esser un corollario del precedente teorema, può in queste due guise effettuarsi.

Se il numeratore della frazione proposta sia risolubile in fattori semplici, ella si costruirà pel cor. 1. dell' anzidetto teorema.

E se ciò nol sia, eccone lo snodamento del problema.

1. Si scinda un tal fratto nelle sue parti $\frac{abc}{pq}$, $\frac{klm}{pq}$, *ec.* e vi si facciano le riduzioni, se sia d' uopo.

2. Si ritrovino le rette P, Q, *ec.* uguali alle frazioni parziali $\frac{abc}{pq}$, $\frac{klm}{pq}$, *ec.* (118).

La retta $P\pm Q\pm\ldots$ sarà espressa dal proposto fratto.

La dimostrazione è chiara dalla rapportata operazione, e dall' antecedente teorema.

PROPOSIZIONE XLV.

PROBLEMA.

122. Costruire la frazione $\frac{abcde}{pqrs\pm fghi}$, che ha un monomio per numeratore, ed un polinomio per denominatore.

Sol. 1. Nel numeratore della frazione data si lascino due de' di lui fattori, quali ne parranno convenienti, cioè che sien diversi, se può esserlo, dagli altri fattori de' termini del denominatore, come nel caso nostro si lascino i due c, d nel numeratore; e poi si divida ciascun termine del detto denominatore per gli altri fattori rimasti nel numeratore, cioè per abe. Dovrà essere la proposta frazione

$$\frac{abcde}{pqrs\pm fghi}=\frac{cd}{\frac{pqrs}{abe}\pm\frac{fghi}{abe}} \qquad \text{V}$$

2. Inoltre si ritrovino le rette P, Q respettivamente uguali a' fattori $\frac{pqrs}{abe}$, $\frac{fghi}{obe}$ (*pr.43.*).

3. Finalmente si prenda la retta R quarta proporzionale in ordine alle tre rette $P\pm Q$, c, d; ella ne sarà espressa dal proposto fratto.

Dim. Dividendo sì il numeratore, che il denominatore della frazione data per abe n' emerge quel fratto, ch' è nel secondo membro dell' equazione V. Ma i termini del suo denominatore son le rette $P\pm Q$, cioè un tal denominatore n' è la retta $P\pm Q$, e 'l prodotto delle rette c, d n' è il numeratore. Dunque la retta R quarta proporzionale dopo le tre rette $P\pm Q$, c, d, sarà il valore del fratto, ch' è il secondo membro dell' equazione V., e quindi anche del primo membro, ch' è la proposta frazione.

PROPOSIZIONE XLVI.

PROBLEMA.

123. Esibire una retta uguale alla frazione $\frac{abcd \pm fghi}{klm \pm pqr}$, ch' è polinomia sì nel numeratore, che nel denominatore, ed ove ogni grandezza a, b, c, d, $f \ldots$, k, l, m, $p \ldots$ esprime una retta data di grandezza.

Sol. Se tanto il numeratore, che il denominatore del proposto fratto sien risolubili in fattori semplici, o lineari, col metodo della proposizione prima si costruirà un tal fratto. E se ciò nol sia, come l' è ordinariamente, eccone gli artifizj.

1. Si scinda il dato fratto nelle sue parti, che si vedranno dover esser le seguenti:

$$\frac{abcd}{klm \pm pqr},\ \frac{fhgi}{klm \pm pqr}$$

2. Si ritrovi pel problema precedente la retta P uguale alla prima di queste frazioni parziali, e l' altra Q uguale alla seconda. Sarà la retta $P \pm Q$ uguale al proposto fratto.

PROPOSIZIONE XLVII.

TEOREMA.

124. Se la frazione $\frac{abcde}{pqr}$ abbia due fattori di più nel numeratore, che nel denominatore, e ciascuno di essi disegni una retta data di grandezza, tal fratto dovrà esprimere un rettangolo, di cui un lato n' è l'un de' fattori del numeratore, per esempio la e, e l' altro è quella retta espressa dal fratto, ch' è rimasto con quel fattore di meno, cioè $\frac{abcd}{pqr}$.

E presa la retta P media proporzionale tra le due rette e, ed $\frac{abcd}{pqr}$; sarà P^2 uguale alla proposta frazione $\frac{abcde}{pqr}$.

Dim. La frazione $\frac{abcd}{pqr}$ l' è una retta (*pr. 43.*), che chiamisi C. Dunque moltiplicando per e sì quel fratto, che questa retta, sarà $\frac{abcde}{pqr}$ uguale ad eC, e quindi anche a P^2.

125. Cor. 1. Se vogliasi ridurre a quadrato una frazione, che non abbia due fattori di più del numeratore, che nel denominatore, converrà moltiplicare questo, o quello per l' unità una, o più volte, talchè ottengasi la dovuta condizione del fratto. Su di che vedi il cor. 2. prop. 43.

126. Cor. 2. E lo stesso dee dirsi di una frazione polinomia nel numeratore, o nel denominatore, o in tutti e due, quando sien essi risolubili in fattori semplici, e ve ne abbian due di più nel numeratore, che nel denominatore.

PROPOSIZIONE XLVIII.

PROBLEMA.

127. Ritrovare un quadrato, che pareggi la differenza de' quadrati delle due date rette M, N.

Sol. Questo problema elementare, può avere la seguente semplicissima soluzione.

Prendasi un punto C [*fig.39.*] in una retta indefinita LE, e da esso vi si tronchino le parti CA, CB, respettivamente uguali alle date rette M,N; di poi col centro C intervallo CA, che sia la maggiore di quelle rette, si descriva il semicerchio ADE, che seghi in un punto D la perpendicolare BD, elevata sulla minore CB dal suo estremo B.

Il quadrato della BD sarà quello, che si cerca.

Dim. Imperocchè il quadrato della DB è uguale alla differenza de' quadrati delle due rette CD, CB (*47.El.I.*), cioè della loro uguali M, N.

PROPOSIZIONE XLIX.

PROBLEMA.

128. Ritrovare un quadrato, che uguagli i quadrati delle date rette M, N, P, *ec.*

Sol. Si dispongano ad angolo retto le due date rette M,N, e vi si congiunga l' ipotenusa, il cui quadrato, come l' è noto (47.*El.I.*), sarà uguale alla somma de' quadrati delle due M, N. Da un estremo di quest' ipotenusa le si alzi la perpendicolare uguale alla retta P, e si tiri benanche l' ipotenusa di questo nuovo triangolo rettangolo. Sarà il di lei quadrato uguale a' tre quadrati delle M, N, P insieme presi. E così più oltre si procederebbe, se vi fosser più rette date

La dimostrazione apparisce dall' operato.

PROPOSIZIONE L.

PROBLEMA.

129. Costruire un radicale quadratico, che abbia sotto del suo segno più termini di seconda dimensione.

Sol. 1. Ciascun di questi termini si riduca a quadrato, se pur nol sia

2. Ritrovandosi positivi que' termini, o i quadrati, che li pareggino, si prenda un quadrato uguale a' que' quadrati presi insieme, e ciò per lo problema precedente. Sarà il lato di un tal quadrato la retta, che si domanda.

3. Che se que' termini sieno in parte positivi, ed in parte negativi, converrà trovare un quadrato uguale alla somma de' quadrati positivi, ed un altro a quella de' negativi, come si è nell' antecedente problema praticato. E dinotisi per P^2 il primo di questi quadrati, e per Q^2 l' altro.

4. Finalmente si ritrovi il quadrato di un' altra retta R, che uguagli la differenza de' quadrati della rette P, Q (*pr.48.*).

La retta R sarà quella, che si domanda: cioè il rapportato radicale sarà geometricamente esibito per la retta R.

La dimostrazione è chiara per l' operazione.

130. Esemp. Vuol costruirsi l' espressione radicale seguente

$$\sqrt{(ab - bc + g^2 - f^2)}$$

Si prenda il quadrato della retta P uguale ad $ab + g^2$, e l'altro della retta Q uguale a $bc + f^2$. Sarà $ab - bc + g^2 - f^2 = P^2 - Q^2$. Inoltre il trovi per la prop. 48. il quadrato di una retta R uguale a $P^2 - Q^2$. Sarà la retta R quella, che ne disegna $\sqrt{(ab - bc + g^2 - f^2)}$.

PROPOSIZIONE LI.

TEOREMA.

131. Costruire geometricamente il radicale quadratico universale $\sqrt{\left(bc \pm (\sqrt{abmn \pm defg})\right)}$, ove ciascuna delle grandezze $a, b, c, d, e, f, g, m, n$ dinoti una retta data.

Sol. 1. Il rettangolo ab, o qualunque altro, che sia sotto del secondo radicale, riducasi a quadrato, se pur non sia un quadrato; ed ei si dinoti per p^2; diverrà

$$\sqrt{(abmn \pm defg)} = \sqrt{(p^2mn \pm cdfg)} = p\sqrt{\left(mn \pm \frac{edfg}{p^2}\right)}$$

2. Si ritrovi una retta uguale a $\sqrt{\left(mn \pm \frac{edfg}{p^2}\right)}$ (128.).

3. E tra questa retta, e l' altra p si ritrovi la media proporzionale Q: come anche l'altra P media proporzionale tra b, c. Sarà il proposto radicale

$$\sqrt{\left(bc \pm (abmn \pm edfg)\right)} = \sqrt{(P^2 - Q^2)}$$

4. Finalmente si ritrovi il quadrato di una retta R uguale a $P^2 - Q^2$ (*pr.48.*).

Sarà R l'espressione geometrica del radicale universale proposto.

La dimostrazione intendesi dal tessuto delle addotte operazioni.

PROPOSIZIONE LII.

PROBLEMA.

132. Ridurre respettivamente a cubo, ed a biquadrato i seguenti monomj abc, $abcd$, ove le a, b, c, d, dinotino rette date.

Sol. Cas. 1. Si ritrovi la retta A media proporzionale tra le altre due a, b; e poi s' intendan prese le due medie proporzionali tra la retta A, e la c*, ed esse sieno M, M'. Dico essere il monomio abc uguale al cubo della M, ch' è la prima di queste due medie proporzionali.

Imperocchè essendo $ab = A^2$, per costruzione, sarà $abc = A^2c$: e quindi dovrà stare $A^3 : abc :: A^3 : A^2c$. Ma la seconda di queste due ragioni è uguale a quella di $A : c$, e questa l' è quanto l' altra di $A^3 : M^3$, per esser le quattro rette A, M, M', c continuamente proporzionali (*def.11.El.V.*). Dunque sarà $A^3 : abc :: A^3 : M^3$, e con ciò abc uguale ad M^3.

Cas. 2. Si ritrovi la retta A media proporzionale tra le due date rette a, b, e l' altra B anche media proporzionale tra le rimanenti c, d. Inoltre si prenda la C media proporzionale tra le anzidette medie, cioè tra le A, B. Sarà $C^4 = abcd$.

Imperocchè sostituendo nel monomio $abcd$ per ab l' A^2 e per cd la B^2, sarà $abcd = A^2B^2$. Ma l' è poi $C^2 = AB$, e quindi $C^4 = A^2B^2$. Dunque sarà $abcd = C^4$.

133. Scol. Rappresenti $abcd \ldots T$ un prodotto di n fattori lineari che voglia trasmutarsi nella potenza X^n; e supposto che il numero di quelli meno uno, che sia l' ultimo T, siesi di già ridotto alla potenza P^{n-1}, sarà $P^{n-1} \times T = X^n$, la quale equazione indica, com' è noto, esser la X la prima delle medie proporzionali al numero $n-1$ tra P, e T e però la chiesta riduzione dipenderà da questa, e dall' altra che v'era bisognata per ridurre a potenza perfetta il prodotto precedente di $n-1$ fattori lineari. Sicchè ripigliando il ragionamento là dove si era lasciato dall' autore nella prece-

* *Questo problema sarà in appresso geometricamente risoluto nel suo proprio luogo; e può di esso vedersene la corrispondente soluzione algebrico-geometrica nel* Trattato analitico de' Luoghi Solidi, che *fan seguito all' altro delle* Sezioni Coniche analitiche *del Fergola*, al §. 132.

dente proposizione, se $n = 5$, P^{n-1} sarà di quattro dimensioni, e determinabile dal caso 2. del problema superiore, e la X sarà la prima delle quattro medie proporzionali tra P, T.

Che se $n = 6$, sarà $P^{n-1} = P^5$, e per la X dovrebbesi assegnare la prima di cinque medie proporzionali tra P e T. Ma in questo caso, e negli altri analoghi, cioè che il numero delle dimensioni sia divisibile per 2, si vede chiaramente, che l' espressione proposta, potendo prendere la forma A^2B^2 C^2.... dipende però dalla riduzione a potenza perfetta dell'espressione di metà di numero delle dimensioni, che aveva; e però, nel caso in quistione, dalla ricerca di due medie proporzionali (*cas.1.pr.prec.*).

Continuando lo stesso ragionamento pel caso di $n = 7$, e però di $P^{n-1} = P^6$, sarà quindi la X la prima delle sei medie proporzionali tra P, T, e però un tal caso si vedrà dipendere da questa ricerca, e dall' altra preliminare delle due medie proporzionali.

E supponendo $n = 8$, si dovrebbe, per ciò che si è detto di sopra, scindere quel prodotto in due fattori l' uno di due dimensioni, l' altro di quattro, e però la riduzione diverrebbe *piana*, dipendente dalla ricerca di medie proporzionali. Lo stesso in generale per qualunque altro numero di fattori ch' esprima una potenza del 2.

Inoltre nel caso di $n = 9$, l'espressione data prenderebbe la forma $A^3B^3C^3$, e dipenderebbe dalla ricerca di due medie proporzionali, e sarebbe però *solido* un tal caso; come ancora ogni altro di un numero di dimensioni, che sia potenza di 3.

E senza star a ripetere all' infinito simili ricerche, sarà facile ad ognuno, sull' andamento fissato, stabilirsene la regola generale, ed il modo di operare anche ne' casi di eccezione da quella.

Circa il modo poi di poter con artifizio meccanico semplicissimo rinvenire quante medie proporzionali si vogliano, si riscontri la *Geometria* del Cartesio, nel principio del lib. III.

PROPOSIZIONE LIII.

PROBLEMA.

134. Costruire geometricamente un radicale cubico, qual n' è il seguente

$$\sqrt[3]{(abc \pm fgh \pm pqr ...)}$$

ove le a, b, c, d, e, f, g, h, p, q, r ... dinotino rette determinate.

Sol. 1. Facciasi, come a ad f, così g ad una quarta P, onde avrassi $aP = fg$. Similmente si prenda la Q quarta proporzionale in ordine ad a, p, q, e sarà pure $aQ = pq$. E così più appresso, se vi sieno altri termini. Sarà

$$\sqrt[3]{(abc \pm fgh \pm pqr \pm ...)} = \sqrt[3]{a\,(bc \pm Ph \pm Qr \pm ...)}.$$

2. Inoltre si ritrovi un quadrato uguale al polinomio $bc \pm Ph \pm Qr \pm$ *cc.* (*pr.50.*), ed ei si dinoti per R^2. Diverrà il secondo membro della precedente equazione uguale a $\sqrt[3]{aR^2}$.

3. Finalmente si ritrovi per lo problema antecedente un cubo uguale ad aR^2, ed esso cubo si chiami A^3: dico *esser la retta* $A = \sqrt[3]{(abc \pm fgh \pm pqr ...)}$

La dimostrazione di quest' assertiva ben si comprende dalle addotte operazioni.

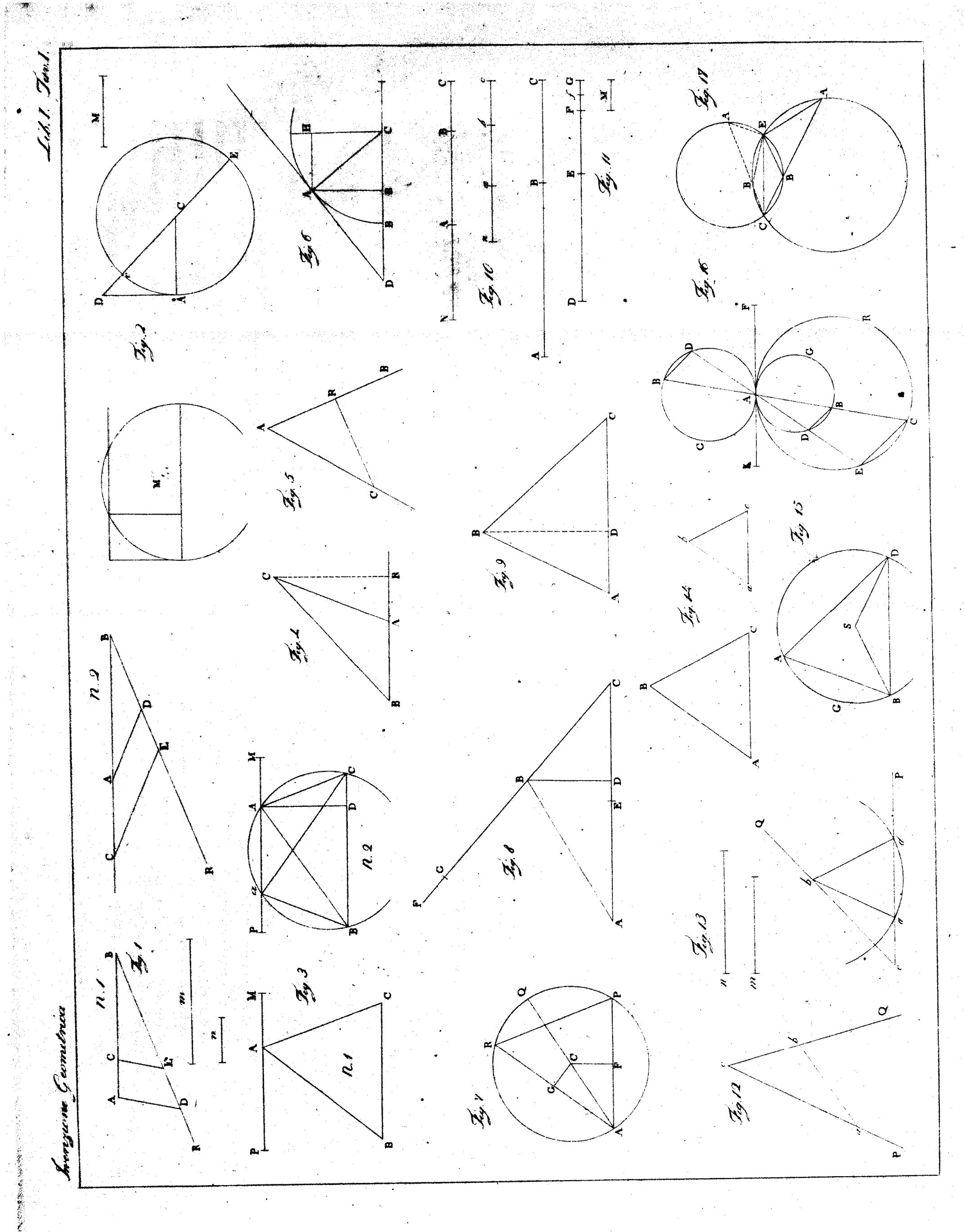
135. Cor. 1. Dunque sarà facil cosa l' esibire una retta, ch' esprima le *radici cardaniche* dell'equazion cubica, che abbiano la seguente forma reale

$$\sqrt[6]{\left(\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}\right)}.$$

136. Cor. 2. E tutte le radici reali dell' equazioni algebriche saran geometricamente costruibili come da questi due ultimi problemi può raccorsi.

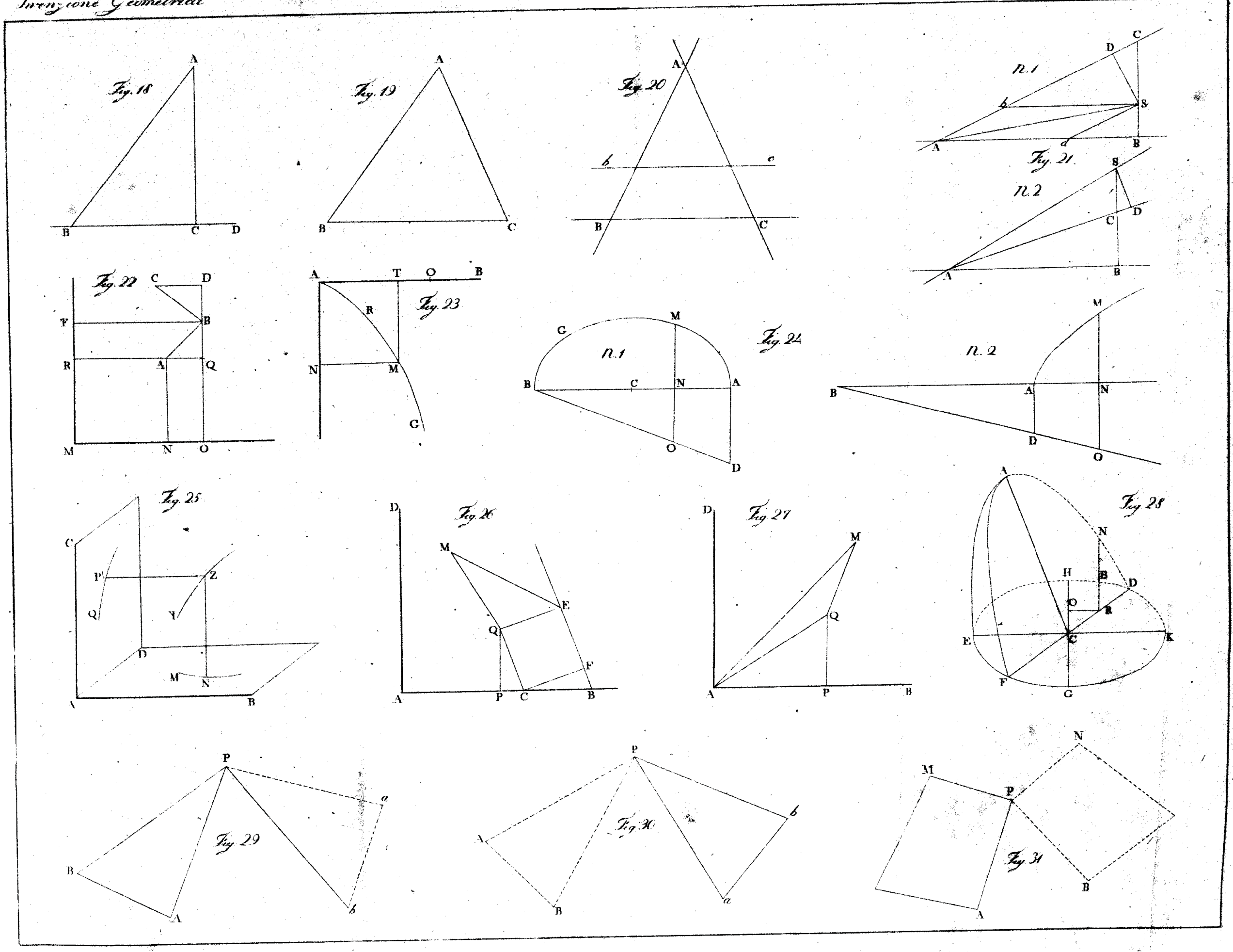
137. Scol. Nel terzo libro vi sarà mostrato, che la Geometria può esibir benanche quelle radici cardaniche, ch' emergono sotto forma immaginaria, e che *al caso irreduttibile* appartengonsi. Che anzi rileverete con meraviglia, che le radici reali di ogni equazione, che sia di grado superiore al quarto, si possano geometricamente esibire, là dove l' Algebra non sa esprimerne i lor valori. Ed in ciò pare la sintesi sia dell' analisi moderna più potente.

Fine del libro primo.



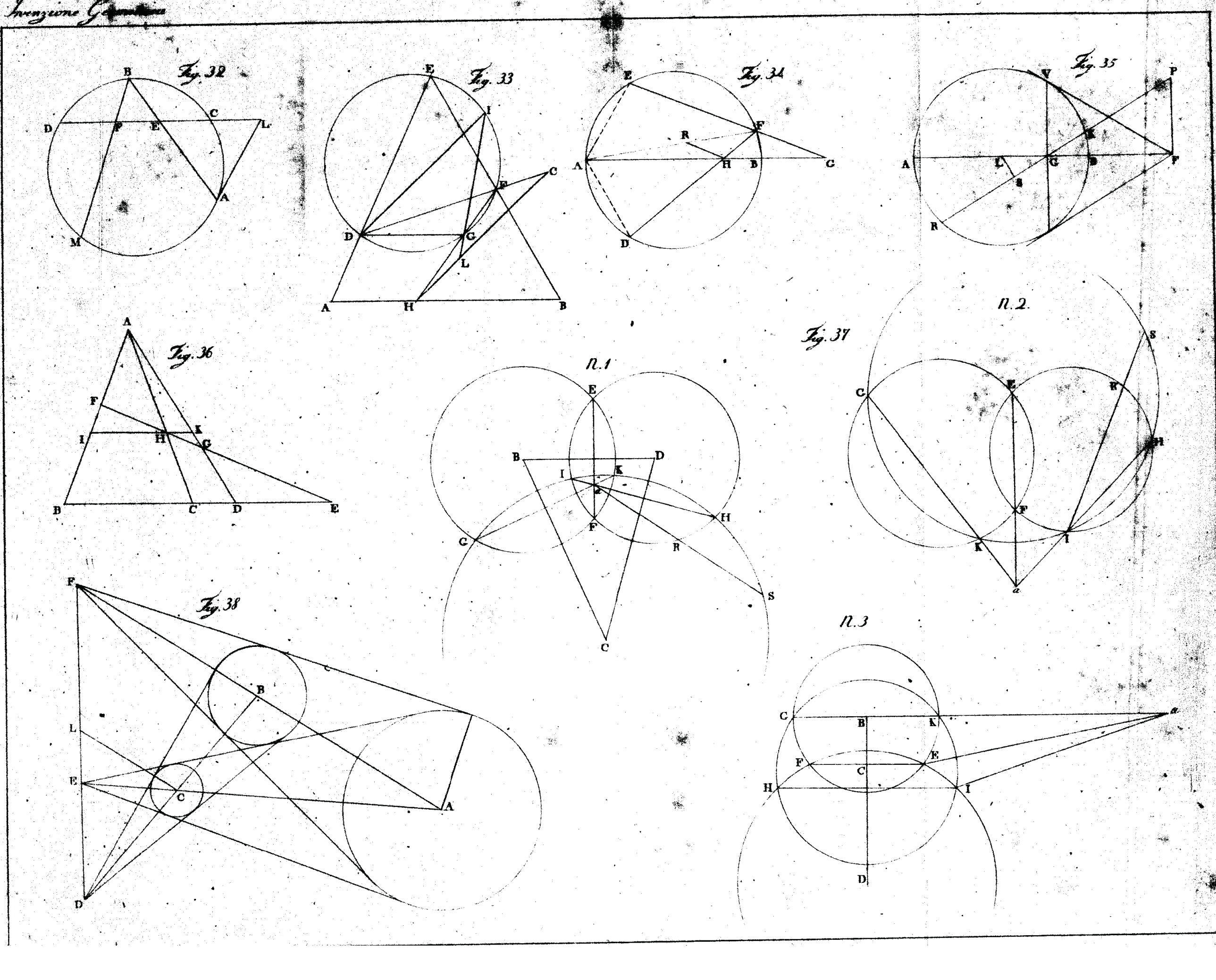
Inverzione Geometrica

Lib. I. Tav. II.



Inverzione Geometrica

Lib. I. Tav. III.



LIBRO SECONDO.

DE' QUESITI DE' PROBLEMI.

CAPITOLO I.

LA NATURA DI COTESTI QUESITI.

138. DEF. I. La *determinazione di una grandezza continua* consiste nell' esibirla con una geometrica operazione, o nell' assegnarle quel valore, ch' ella tiene, o ad un suo determinante appartiensi.

139. DEF. II. E così pure la *determinazione* di un punto non è che l' esibirlo con una geometrica costruzione, o l' assegnarne ad un determinante di esso il valore.

140. COR. 1. Di quì si vede esser geometrico il primo modo di determinare una cosa, ed analitico, o aritmetico poi l' altro.

141. COR. 2. Una grandezza geometrica non può conoscersi altramente, che per la sua genesi, o pel suo valore, cioè per la sua determinazione (*def. 1. I.*). Dunqu' ella prima di esser determinata era ignota. E lo stesso dicasi convenevolmente della determinazione di un punto.

142. SCOL. 1. La nozione *del determinare* quassù recata (*def. 1 e 2.*) parmi esser la più generale di quante ad una tal voce si possan mai adattare. Poichè ella in poche semplicissime parole insiem comprende i diversi generi di determinazioni, e le diverse grandezze da determinarsi, ed i varj modi di ciò fare. Or queste grandezze riduconsi a linee,

angoli, e figure, dovendosi per tal ricerca benanche i punti considerare. E le loro determinazioni son di due generi, cioè geometriche, ed aritmetiche, o analitiche (*def. 1. I.*): e sì le une, che le altre si posson praticare su quelle grandezze, e su que' punti, o almeno, quando il convenga, su i determinanti di esse. Così, per darne un esempio di Geometria elementare, allora sarà determinato quel punto di una retta data, ov' *ella resti divisa in estrema, e media ragione*, quando con un artificio geometrico vi avrem fissato il richiesto punto, o ne avrem valutato il segmento maggiore di tal retta, o il minore [1].

143. SCOL. 2. La determinazione di una grandezza variabile, che nell' analisi sublime si suol praticare, non è la conoscenza del di lei valore, o della genesi di essa; ma è l' assegnarle un definito, ed arbitrario valore, qual ne piace all' analista [2].

---

[1] Cioè quanto sciolgasi analiticamente un tal problema, di cui eccone la

Soluzione—Sia AB $= a$ (*fig. 1.*), AC $= x$, e quindi CB $= a - x$. E dovendo essere AB : AC :: AC : CB, per la condizione del problema, sarà $a : x :: x : a - x$, e con ciò $x^2 = a^2 - ax$, cioè $x^2 + ax = a^2$. E risolvendo quest' equazione sarà $x = -\frac{1}{2} a \pm \sqrt{(a^2 + \frac{1}{4} a^2)}$.

Composizione—Dall' estremo B della data retta AB si elevi la perpendicolare BE uguale ad $\frac{1}{2}$ AB. Si descriva col centro E intervallo EB il cerchio D B d, che intersechi in D, d la congiunta AE. Sarà AD il segmento maggiore di tal retta, che si porterà in AB, descrivendo col centro A intervallo AD l' arco DC.

Se la BA si prolunghi in F, sicchè AF pareggi Ad, la retta AF dinoterà la radice negativa della precedente equazione; cioè $\frac{1}{2} a - \sqrt{(a^2 + \frac{1}{4} a^2)}$; e scioglierà un problema analogo al proposto, cioè di prolungare BA in F, sinchè FB$\times$BA sia uguale ad FA^2. Ma non bisogna confonder le due rette AD, Ad reciproche a due date, ed aventi per differenza la Dd, o AB, le quali sempre son positive, colle due radici dell' equazione, AC, AF.

[2] Ciò sarà dichiarato nell' introduzione all' *analisi degl' infiniti*.

144. Def. iii. Il *quesito* di un problema è quella cosa, che vi si deè determinar dai dati.

145. Cor. 1. Dunque il quesito di un problema l'è una cosa ignota, o un composto di più cose ignote.

146. Cor. 2. E quindi il quesito di un geometrico problema sarà quadriforme al par de' dati (*n. 2. lib. 1.*), cioè *di grandezza, di ragione, di specie, e di sito.* Imperocchè ad una di queste quattro cose si riduce quel, che in un tal problema proponesi a determinare.

147. Cor. 3. Con che i quesiti de' geometri problemi rapportansi a quelle medesime classi, alle quali ne riducemmo i dati. E la diversità de' dati da' quesiti in ciò solamente dovrà riporsi, che i primi son cose note per la sola enunciazione del problema, o in facil modo assegnabili: laddove i quesiti vi si deggiono dai dati determinare.

PROPOSIZIONE I.

PRINCIPIO.

148. I dati di un qualunque problema ne sono i determinanti del quesito. E quivi altro non si domanda, che l' artificio geometrico, o l' analitico da poterne da' dati il quesito rilevare.

Dim. I dati di ciascun problema deggiono essere idonei a farne determinare il quesito: altrimente ei sarebbe insolubile. Dunque son essi i determinanti del quesito. Ed altro non si pretende nel risolvere un problema, che conoscerne il modo, siasi egli geometrico, o analitico, con cui da'suoi dati il quesito si rilevi.

PROPOSIZIONE II.

PRINCIPIO.

149. I dati di ciascun problema debbono essere non solamente connessi col suo quesito, ma benanche sufficienti a determinarlo. Ed in detto nesso, e sufficienza la solubilità del problema dee consistere.

Dim. Essendosi detto quì sopra (§. *prec.*) essere i dati di ciascun problema i determinanti del suo quesito, essi nella natura, e nel numero dovranno esser tali da potersi quel quesito determinare. Dunque nel nesso de' dati col quesito, e nella sufficienza loro dovrà consistere la solubilità di un problema, qualunque ei sia, ed in qualunque modo ne aggrada risolverlo.

150. Riscn. Così *la lunghezza del raggio di un cerchio, quella di una corda di esso, e la grandezza dell' angolo fatto in un de' due segmenti troncati da quella retta,* son tre grandezze talmente tra lor connesse, che da due di loro può sempre determinarsi la rimanente. Dunque due di queste tre grandezze saranno i dati proprj, e sufficienti per la determinazione della terza, che si richiegga. Ma una di dette grandezze sarebbe un dato insufficiente per rinvenirne ciascuna delle altre due. E vi sarebbe un' impropietà nella proposta, se mai si dimandasse la lunghezza dell'arco di ciascun segmento dal rapporto di due di quelle tre grandezze, e dalle lunghezze loro.

PROPOSIZIONE III.

PRINCIPIO.

151. Se dagli Elementi di Geometria intendesi agevolmente il modo, onde determinarne il quesito di un problema da'suoi dati, un tal problema dovrà aversi per uno degli elementari; ed il quesito potrà tenersi come un dato secondario di esso problema.

Dim. Amendue queste parti della proposizione sono chiare da per se stesse, e col seguente esempio le illustreremo. Quando sia dato un angolo, dee pur esser data la sua metà, per la 9. *El. I.*; e quindi anche la quarta parte di esso, l' ottava, la sedicesima, *ec.*, e generalmente la parte $\frac{1}{2n}$ di detto angolo. Inoltre bisecando un angolo del triangolo equilatero ottiensi un terzo di un retto, come per la 32 del primo comprendesi. Dunque la trisezione dell'angolo retto sarà pure un problema elementare: e dato l' angolo retto s' intende data benanche la sua parte $\frac{1}{3.2n}$. Oltre a ciò il problema *della divisione di una retta in estrema, e media ragione*, qual si enuncia nella 30 del VI. degli Elementi, si deriva immediatamente dalla 2. del II., ove proponesi di *dividere una retta terminata, sicchè il rettangolo della tutta in un segmento pareggi il quadrato dell' altro segmento*. E quel problema può dirsi derivativo da questo; imperocchè dall' equalità di questi due spazj rettangolari quella proporzione di rette ne discende immediatamente, per la 17.*El.VI.* Ma non potrebbonsi dire esser derivativi dalla 2.*El. II.* questi altri problemi, cioè la *formazione di un triangolo isoscele avente ciascun angolo alla base duplo del verticale: la descrizione di un pentagono regolare entro di un cerchio: la formazione di tal figura su di una retta data : ec.*; poichè sebbene queste costruzioni dipendano dall' anzidetta proposizione undecima, pure han bisogno di molte altre verità elementari, e di altra loro congegnazione.

PROPOSIZIONE IV.

PRINCIPIO.

152. Sebbene i quesiti de'geometrici problemi sieno, come si è detto (§. 9.), *di grandezza, di ragione, di specie, e di sito*; nondimeno ciascun di essi riducesi a ritrovare un punto, il qual soddisfi a certe proposte condizioni.

Risch. Io m' immagino, che voi nell' apprender gli Elementi di Geometria, o nel risolvere qualche geometrico problema avrete rilevato, che ogni quesito sulle grandezze continue o proponga l'indagine di un punto soddisfacente a certe condizioni, o che a questa quello si riduca. Così il primo problema degli Elementi piani, che domanda la formazione di un triangolo equilatero su di una retta terminata, ad altro non si riduce, che a ritrovare un punto, sicchè le rette, che da esso conducansi agli estremi della data, sieno uguali ed a questa, e fra loro. E la bisezion dell' angolo propostaci nel quarto problema (9.*El.1.*), anche si riduce a ritrovare un punto entro di esso angolo, talchè la retta, che il congiunga col di lui vertice, ne bisechi il dato angolo. Ma perchè rilevar dagli esempj il nostro assunto, quand' ei per la natura della geometriche determinazioni si comprende? (*def.*1.).

PROPOSIZIONE V.

PRINCIPIO.

153. Quando la soluzione di un problema geometrico si è ridotta a ritrovare un punto, ogni grandezza, che ne dipende, sarà ignota al par di esso.

E tutte coteste ignote saran connesse tra loro, cioè dipendenti l' una dall' altra nel valore, o nella geometrica esibizione.

Dim. La prima parte di questa verità è chiara da se stessa; e l' altra da' seguenti capi sarà pienamente illustrata.

154. Avv. Nel seguente capo ragioneremo del nesso delle ignote per la comune lor dipendenza da quel punto ignoto, ove il quesito riducesi del problema. Ma le ignote sogliono esser connesse fra loro per le condizioni, che le avvincono; che però delle condizioni sarà bene discorrere nel cap. III° E nel IV°, e ne' seguenti capi vi parlerò de' luoghi geometrici, co' quali si soglion que' punti ignoti determinare *.

---

* Così aveva l' autore proposto di fare, e così fu pure annunziato nel *Prospetto dell' arte d' inventare* pubblicato nel 1809. Ma in seguito avendo egli composto, e dato alla luce il suo *Trattato analitico delle Sezioni Coniche*, s' indusse a pubblicare in seguito del medesimo l' altro de' *Luoghi geometrici di second' ordine analiticamente trattati*, che da noi, in due altre edizioni di quel primo trattato gli è stato sempre aggiunto in continuazione; e però abbiamo dovuto quì supprimerlo, ritenendovi la sola parte di alcuni luoghi geometrici sinteticamente trattati.

CAPITOLO II.

DEL NESSO, CHE HAN LE IGNOTE IN CIASCUN GEOMETRICO PROBLEMA.

155. Da quel punto ignoto, cui si riduce il quesito di ogni geometrico problema, nasce numerosa famiglia di grandezze al par di esso ignote. Tali sono e *quelle rette, che dal detto punto conduconsi a punti dati*; e quelle altre, che *con dato sito si distendono su linee date*, o che queste sien rette, o che sien curve. Inoltre *le parti di tali rette, che frammezzano linee date* sovente sono ancora grandezze ignote: e di tal natura sono anche *le potenze di coteste ignote*, *i loro rapporti*, *ed ogni espressione algebrica*, o *trascendente*, che formisi da esse. Ma tutte queste grandezze, ancorchè sieno tra lor diverse in varie guise, pure in ciò convengono, che determinandone una di esse ne restino determinate le rimanenti. E quindi da ciascuna di loro si potrà esprimer ciascun' altra convenevolmente. Or queste cose conducono ad intender bene le analitiche soluzioni de' geometrici problemi; e perciò sarà dicevole, ch' io quì le dichiari a sufficienza.

156. Def. iv. Le ignote di un problema si diran *connesse fra loro*, se [3] determinandone una di esse ne resti determinata ciascuna delle altre. O se al farsi nota una di esse vi si faccian note puranche le rimanenti.

157. Queste ignote per brevità di dire si potran chiamare *ignote socie*. Ed oltre a ciò la prima di esse potrà dirsi *ignota principale*, ed *accessorie* le altre.

158. Def. v. due ignote dovran dirsi *distinte fra*

---

[3] Veg. quanto si è detto sulla determinazione nel principio del cap. pr.

loro, se determinandone una di esse non resti determinata l' altra ignota.

159. Cor. Dunque se dinoteremo colla lettera x una grandezza ignota di un problema, ogni altra ignota, che siale connessa, dovrà dinotarsi con un' espressione della x. Cioè, per servirmi della frase de' moderni analisti, la seconda delle due ignote tra lor connesse sarà una *funzione* della prima: e viceversa.

160. Def. vi. Il nesso di due ignote sarà *algebrico*, se per le operazioni dell' Algebra comune può l' un' ignota esprimersi per l' altra.

161. Def. vii. Ed ei si direbbe *trascendente*, se per esprimere un' ignota dall' altra converrebbe ricorrere ad operazioni trascendentali dell' Analisi.

162. Le operazioni algebriche, come vi è noto da' corsi elementari, non son che la *somma*, *la sottrazione*, *la moltiplica*, *la divisione*, *l' elevazione a potenza*; *l' estrazion di radice*; *il maneggio dell' equazioni*, ed altre dipendenti da queste. Laddove i *log-mi*, *le grandezze esponenziali*, *le circolari*, *ec.* son le principali, o le più semplici tra le funzioni trascendenti.

163. Per l' intelligenza delle proposte definizioni immaginatevi, che un problema geometrico siesi ridotto a ritrovare un punto nella data curva ANG [*fig.*2.], il quale debba esser soddisfacente a certe prescritte condizioni. Suppongasi esser N cotesto punto ignoto, di dove intendasi ordinata la NM all' asse AQ di tal curva, condotta la NT tangente di essa curva in N, ed elevata la NQ perpendicolare alla NT. Inoltre si concepisca congiunto il punto ignoto N col punto dato S entro di tal curva, e da N condotta la NO con un dato angolo sulla data ED, *ec.* Saran grandezze ignote le rette AM, MN, MT, TN, QN, MQ, NS, NB, EO, *ec.* ed anche tali saranno le potenze loro, i loro prodotti, il rapporto di due qualunque di esse, il sito delle medesime, ed altre simiglianti cose. Ma tali quantità saran connesse fra loro, o ignote socie: dappoichè una sola di esse, che in un qualunque modo si determini (*n.* 138.), vengonsi a determinar le altre rimanenti. Inoltre il trilineo ANM, l' arco AN, la superficie descritta da questo nel rivolgersi intorno ad una delle anzidette linee, son pure grandezze ignote al par delle prime, cui serban sovente un rapporto tascendentale [4]. Ma se in tal problema, e nella curva ANG si addimandino due punti, i quali suppongansi essere N, n; le loro corrispondenti ascisse AM, Am saran due ignote non già connesse tra loro, come si son dette le precedenti linee, ma tra se distinte; ove non si consideri qualche condizione prescritta, che le avvinca. E lo stesso dee dirsi di ciascun' ignota socia dell' ascissa AN con qualunque altra dell' ascissa An.

164. Scol. Ed ecco qui appresso i principj, onde le grandezze geometriche si possono esprimere analiticamente in convenevol modo.

PROPOSIZIONE VI.

PRINCIPIO.

165. Se un tutto, che indichisi per T, sia composto di due parti, di cui la maggiore sia P, R la minore, e D la differenza loro; sarà sempre $T = P + R$, $P = T - R$, $R = T - P$, $P = \frac{1}{2}(T + D)$, $R = \frac{1}{2}(T - D)$, qualunque sia la natura delle grandezze T, P, R, D, e 'l numero de' termini di ciascheduna.

---

4 Ciò s' intende dalla teorica della quadratura, e della rettificazione delle curve.

Dim. Le prime tre verità esposte in questo principio son chiare da loro stesse. E per le altre due eccone un breve ragionamento preso dalla Geometria elementare.

Le due rette AF, FE [*fig.3.*] comunque disuguali si dispongano per dritto; e bisecata in C l'intera retta AE, si tolga Cf uguale a CF. Si conoscerà per intuizione esser la Ff l'eccesso di AF sulla Af, cioè della maggiore AF sulla minore FE. Ma FC è metà di Ff differenza delle ineguali rette AF, FE, ed AC n'è la loro semisomma. Dunque sarà AF $=$ AC $+$CF; ed EF $=$ EC $-$ CF: cioè, ne' simboli generali, dovrà essere $P = \frac{1}{2}(T+D)$, ed $R = \frac{1}{2}(T-D)$.

PROPOSIZIONE VII.

PRINCIPIO.

166. La grandezza, che serbi all' altra G la ragione di m ad n, dovrà esprimersi per $\frac{mG}{n}$, qualunque sieno le tre grandezze G, m, n, cioè note, o ignote, semplici, o composte, razionali, o irrazionali *ec.*

Dim. È manifesto essere $\frac{mG}{n} : G :: \frac{m}{n} : 1 :: m : n$. Dunque la quarta proporzionale dopo le tre n, m, G sarà espressa per $\frac{mG}{n}$.

167. **Cor.** 1. Se i lati AB, BC, AC [*fig.4.*] del triangolo ABC dato di specie sien proporzionali alle tre grandezze r, n, m, e'l primo di essi, cioè AB, si chiami x, sarà BC $= \frac{nx}{r}$ ed AC $= \frac{mx}{r}$.

168. **Cor.** 2. Ma se il detto triangolo ABC sia rettangolo

in C, la grandezza r dovrà uguagliare $\sqrt{(m^2+n^2)}$ (47 *El.I.*). Dunque sarà in tal caso la

$$BC = \frac{nx}{\sqrt{(m^2+n^2)}}, \text{ ed } AC = \frac{mx}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$$

E questo vuol praticarsi per la riduzione de' calcoli.

169. **Cor.** 3. La ragione del raggio di un cerchio alla sua periferia suol esprimersi per quella di $1 : \pi$. Dunque, se dicasi x tal raggio, sarà πx la sua periferia. E l' aja di esse sarà $\frac{1}{2}\pi x^2$ *.

170. **Cor.** 4. La terza proporzionale in ordine alle due rette m ed n è $\frac{n^2}{m}$. La media tra esse è $\sqrt{mn}$. E la quarta proporzionale dopo le tre m, n, r dovrà essere $\frac{nr}{m}$.

PROPOSIZIONE VIII.

PRINCIPIO.

171. Se T dinoti un tutto, che abbia le grandezze H, e K per sue dimensioni, talchè sia $T=KH$; sarà vicendevolmente $K = \frac{T}{H}$, ed $H = \frac{T}{K}$, qualunque sieno le tre grandezze T, K, H [5].

Dim. Queste verità han bisogno di applicazione, e non di esser dimostrate; e quindi

1. L'aja di un parallelogrammo si valuta dalla di lui base nell' altezza. Dunque ciascuna di queste due rette sarà quanto l' aja di tal parallelogrammo divisa per l' altra retta.

---

* Vedi la *Misura del cerchio*, nel vol. II. del *Corso geometrico*.

[5] Cioè semplici, complesse, note, ignote,

2. Inoltre l' aja di un triangolo ottiensi moltiplicando la metà della base per l' altezza, o la metà dell' altezza per la base. Dunque una di queste due rette, cioè l' altezza, o la base del triangolo, sarà uguale alla doppia aja del triangolo divisa per l' altra retta.

3. E quindi se x dinoti il raggio della base di un cono retto, il cui lato sia y; sarà $\frac{1}{2}\pi x^2$ la base di detto cono [6], ed $\frac{1}{2}\pi xy$ la di lui superficie.

4. Inoltre la solidità di un prisma, e ciò ancora di un cilindro, ottiensi moltiplicando la base per l' altezza. Dunque la di lui base sarà uguale alla solidità divisa per l' altezza: e quest'altezza pareggerà l' aja di tal solido divisa per la base. Sicchè chiamando x il raggio della base di un cilindro, e z la di lui altezza, sarà $\frac{1}{2}\pi x^2 z$ la solidità del cilindro. E πxz sarebbe la superficie, s' ei fosse retto.

5. Di più ogni piramide si misura dalla base per un terzo dell' altezza. Dunque cotest' altezza sarebbe uguale alla tripla solidità della piramide divisa per la base: e la base esprimerebbesi per lo triplo della solidità diviso per l'altezza.

6. E se chiamisi x il raggio della base di un qualunque cono, che abbia v per altezza, sarà $\frac{1}{6}\pi x^2 v$ la solidità di questa figura. E da quella ciascuna delle sue dimensioni potrà raccorsi per lo principio precedente.

7. Finalmente se x dinoti il raggio di una sfera; sarà $\frac{1}{2}\pi x^2$ l' aja di un suo cerchio massimo; $2\pi x^2$ ne sarà il suo quadruplo, cioè la superficie sferica; e la solidità di questa sfera dovrà poi dinotarsi per $\frac{2}{3}\pi x^3$.

172. Cor. Questo principio può anche alle grandezze meccaniche applicarsi in convenevol modo [7].

---

[6] Vegg. i *teoremi di Archimede* nel vol. II. del *Corso geometrico*.

[7] Così se per s si esprima lo spazio di un corpo mosso equabilmente, per t il tempo, in che questo si percorre, e per v la costante velocità di tal mobile; sarà $s = tv$, $v = \frac{s}{t}$, e $t = \frac{s}{v}$. E così in altre teorie

PROPOSIZIONE IX.

PRINCIPIO.

173. Dato un qualunque angolo del triangolo ABC [*fig.* 5.], ciascuno de' di lui lati può esprimersi per gli altri.

Dim. Intendasi dato l' angolo A del triangolo ABC, ed ei esprimasi per A. E si chiamino a, b, c i lati, che in tal figura sottendano gli angoli A, B, C rispettivamente; sarà AC ad AD, come il raggio trigonometrico, ch' è 1, al coseno dell' angolo A. Cioè $1 : \cos. A :: b : AD$ (*n.* 39. *lib. I.*), e quindi $AD = b \times \cos. A$. Ed essendo $CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2BA.AD$ (*13. El. II.*); sarà ne' loro simboli $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc. \cos. A$. E quindi date due delle tre grandezze a, b, c può darsi la rimanente, purchè sappiasi l' angolo A. E lo stesso può dirsi per gli altri angoli [8].

174. Cor. Da questa utilissima, e generale verità di Geometria può trarsi il teorema pitagorico; cioè se r dinoti l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, i cui cateti sieno m, ed n, sarà $r = \sqrt{(m^2 + n^2)}$; e vicendevolmente $m = \sqrt{(r^2 - n^2)}$, ed $n = \sqrt{(r^2 - m^2)}$, qualunque sieno le r, m, n.

175. Scol. Il dottissimo sig. Monge ha in un' altra guisa universalizzato questo teorema pitagorico; cioè: *In ogni piramide triedra, di cui l' angolo verticale sia composto da tre angoli retti, il quadrato della base è uguale a' quadrati degli altri tre triangoli.* Onde l' espressione di ciascun di questi quattro triangoli potrebbesi formare per gli altri tre [9].

---

[8] Se pongasi $AB = a$, $AC = x$, e l' angolo $A = \varphi$; sarà $BC^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cos. \varphi$. E questo trinomio di tanto uso nell' analisi sublime riconosce la sua origine dal lib. II. degli Elementi.

[9] Si dovrebbe rettificare l' esposto teorema con dire: *Il quadrato della dimension della base è uguale ec.* (*La dimostrazione si troverà nelle Note alla nostra Trigonometria*).

PROPOSIZIONE X.

PRINCIPIO.

176. Se il punto ignoto di un geometrico problema stia nella retta ED [*fig*.6.*n*.1.] data di posizione rispetto a' punti A, B, *ec.*; saranno ignote socie, e di facilissima espressione le rette, che da quel punto a questi si conducono.

E tali saran pure quelle altre rette, che da tal punto ignoto si distendano con date inclinazioni su rette date di sito fra loro, e colla ED [*fig*.6.*n*.2.].

Dim. Part. 1. Sia C [*fig.n.1.*] quel punto ignoto della retta ED, e su di essa da' punti A, B si abbassino le perpendicolari AD, BE. Saran date di grandezza le rette AD, BE, DE. Onde potrà porsi AD $= a$, BE $= b$ (*n.71. e 69.*), DE $= c$, DC $= x$, e quindi CE $= c - x$. E saran poi AC $= \sqrt{(a^2 + x^2)}$, e BC $= \sqrt{(b^2 + c^2 - 2cx + x^2)}$ (*47.El.I.*).

E così potrebbonsi esprimere le altre rette condotte da altri punti dati allo stesso punto C ignoto.

Part. 2. Sia B il punto ignoto della retta ED [*fig.n.2.*], e per esso distendasi con dato sito la BRS in mezzo alle rette date FT, AR, GS. Saran date di grandezza le intercette FA, AG. Onde potrà porsi AF $= a$, AG $= b$, AB $= x$, e quindi FB $= a + x$, e BG $= b - x$. Ed essendo dato di specie il triangolo ABR, potrà dinotarsi per $m : n$ la ragione di AB a BR. Sicchè essendo $m : n :: x :$ BR, sarà BR $= \frac{nx}{m}$. Similmente si dinoti per $m : r$ la data ragione di BF a BT; sarà pure $m : r :: a + x :$ BT, e BT$= \frac{r}{m}(a + x)$. E disegnando per $m : t$ la data ragione di BG a BS; sarà $m : t$

$:: b - x :$ BS, e BS $= \frac{t}{m}(b - x)$. Che se nella retta BR prendasi la parte variabile BP $= y$, e da P sotto dati angoli conducansi le PH, PK, PL sulle date RH, TK, SL, saranno

$$\text{PR} = \text{PB} + \text{BR} = y + \frac{nx}{m}$$

$$\text{PT} = \text{PB} + \text{BT} = y + \frac{r}{m}(a + x)$$

$$\text{PS} = \text{PB} + \text{BS} = y + \frac{t}{m}(b - x).$$

E per esserne di data specie i triangoli PHR, PKT, PLS potran raccorsi l' espressioni delle PH, PK, PL. E quindi facilmente potrà risolversi il problema delle quattro rette escogitato da' geometri antichi*, risoluto analiticamente dal Cartesio, e dal Newton coll'analisi geometrica, e con metodo puramente sintetico **.

177. Scol. Dunque non fu colpo di genio, o d' ingegno del gran *Renato delle Carte* l' aver analiticamente risoluto il problema antichissimo *sulle quattro rette*; ma fu conseguenza dell' innesto, ch' ei seppe fare de' simboli analitici alle geometriche grandezze. E su di ciò parmi, che più laude meritasse il geometra inglese, che con principj sintetici, e con questi stessi de' geometri vetusti si fidò di sciorre, e giusta il lor desìo un sì difficile problema ***.

---

* Vedi Pappo nella prefazione al lib. VII. delle sue *Matematiche collezioni.*

** *Principj Matematici*, lem. 17, 18, 19.

*** *Si legga sul proposito ciò che n' è detto dal Fergola nel* Trattato analitico de' Luoghi Solidi, *dallo Scorza nella sua* Divinazione *sulla* Geometria analitica degli antichi, *e da noi nella* dissertazione dell' Analisi antica, e delle opere che ne trattavano, *nel vol.I. degli* Opuscoli matematici, *che escirà alla luc e dopo il presente trattato.*

PROPOSIZIONE XI.

PROBLEMA.

178. Data la natura della curva CMQ [*fig.* 7.], e'l suo sito rispetto al punto R, esprimere i valori delle RM, RQ incidenti da questo punto su quella linea, e della corda MQ.

Sol. Dal punto dato R si meni la RP parallela alla OK asse della data curva; e dal punto A si abbassi sulla qualunque segante RQ, tirata per R, la perpendicolare AT. Ed ordinate le rette MD, QK, si faccia RA $= a$, GO $= c$, GR $= b$, RT $= v$, ed RM $= z$. Sarà AT $= \sqrt{(a^2 - v^2)}$. Ed essendo simili i triangoli RTA, RNM, e quindi RA : RT :: RM : RN, cioè $a : v :: z :$ RN, sarà RN $= \frac{vz}{a}$. E per esser poi RA : AT :: RM : MN, cioè $a : \sqrt{(a^2 - v^2)} :: z :$ MN, sarà MN $= \frac{z}{a}\sqrt{(a^2 - v^2)}$. Dunque dovrà esser la MD $=$ MN $+$ ND $= c + \frac{z}{a}\sqrt{(a^2 - v^2)}$; ed OD $=$ RN $-$ RG $= \frac{vz}{a} - b$. Inoltre sia OD $= x$, DM $= y$, e l' equazione caratteristica della curva CMQ riferita alle coordinate OD, DM sia

$$A + Bx + Cy + Dx^2 + Ey^2 + ec = o.$$

Ed ecco il metodo della cercata soluzione.

1. In quest'equazione caratteristica pongasi per x la $\frac{vz}{a} - b$, e per y l' espressione $c + \frac{z}{a}\sqrt{(a^2 - v^2)}$.

2. Si ordini quest' equazione rispetto all' ignota z, che, come ne appare, è dello stesso grado dell'equazione caratteristica della data curva.

3. E poi si prendano le radici dell' anzidetta equazione, o

i valori della z. Esse dovran dinotare le incidenti RM, ed RQ; e la loro differenza n' esprimerà la corda MQ.

Dim. La medesima equazione coll' ignota z sarebbesi collo stesso processo ottenuta, ponendo la RQ $= z$. Dunque le sue radici dovran dinotare i valori delle incidenti RM, RQ, *ec.* E la loro differenza ne darà le corde.

179. Cor. Se il rettangolo delle incidenti RM, RQ sia dato (come avviene nel cerchio, ed in certe altre curve escogitate da Gio. Bernoulli) ponendo un tal rettangolo $= h^2$, e l'incidente RM $= z$; sarà l'altra RQ $= \frac{h^2}{z}$, e la MQ $= \frac{h^2}{z} - z$.

180. Scol. 1. Alcuni recenti analisti sogliono esprimer le rette, che frammezzano certe linee date, col maneggiarne le equazioni caratteristiche di queste. Il qual metodo l' è talora assai retto, ed ingegnoso. Ma altre volte egli è assai scabro a' giovani, ed a' risultati ne mette assai complessi, e difficili a costruirsi. Mi par dunque ragionevole, che in questi casi la brevità della soluzione, e l'eleganza del risultamento, che potrebbesi co' metodi antichi ottenere, non si debbano sagrificare alla novità del detto metodo, e per omaggio dell' inventore *.

181. Scol. 2. Conducendo all'ignoto punto M [*fig.* 8.] della data curva AMD la tangente MR, e la normale MQ; come dovran queste esprimersi per l'ascissa AN loro corrisponden-

* *Un tal metodo, del quale anche il Fergola in seguito si valse talvolta opportunamente, nelle sue* Sezioni coniche analitiche, *pubblicate la prima volta sette anni dopo, ch' egli scriveva il presente trattato, ha da quest' epoca ricevuti grandi miglioramenti, per opera di taluni indefessi coltivatori di esso, da renderlo assai più trattabile. E noi non mancheremo dar di esso una bastevol conoscenza, e più appresso nel presente libro, e nella* Geometria analitica di sito, *illustrando con opportuni esempj i vantaggi, ed i difetti del medesimo, posto sempre a confronto del Cartesiano da cui è derivato: come vedesi ancor fatto nelle Memorie, che fan seguito al* programma *da noi proposto nel 1836, e pubblicate per le stampe nel 1839.*

te, e come converrà benanche esprimerne la sottangente NR, e la NQ sunnormale? Col metodo Cartesiano, ch' è alquanto affine a quello del proposto problema, può ottenersi l'intento * . E con applicarvi il calcolo differenziale più speditamente ricavansi le cercate espressioni [10].

PROPOSIZIONE XII.

PRINCIPIO.

182. Se il nesso di due ignote di un geometrico problema sembri nascer da una loro corrispondenza di sito, ove non traluce alcun rapporto tra le quantità loro; cotesta indagine dovrà sperarsi dall' acume, e dalla meditazione dell' analista. Ed a ciò parmi esser destinati i porismi de' geometri antichi, e le equazioni locali de' moderni.

Risch. Queste cose, che ho quì solamente indicate, saran poi sufficientemente chiarite da' porismi, dalla risoluzione de' problemi di sito, da' luoghi geometrici, e da altri argomenti affini. Intanto un nuovo genere d' ignote socie offresi in un problema geometrico, allorchè ei sia stato analiticamente risoluto; e son le diverse radici reali dell' equazione finale, che ne fissano i determinanti de' diversi casi di esso problema. E per intenderle adeguatamente convien risalire a' principj delle analitiche risoluzioni, ed a' vantaggi, che dalla scienza del quanto vi si ritrae.

---

* *Di ciò potranno vedersi esempj nel* trattato analitico delle Sezioni Coniche *del Fergola. E se ne potranno ancor rilevare, per le stesse curve, da' diversi trattati moderni di* Geometria analitica.

[10] Qui si procede differenziando l' equazione alla data curva, e poi prendendo il rapporto de' differenziali dell' ascissa, e dell' ordinata.

CAPITOLO III.

DELLE CONDIZIONI DE' PROBLEMI.

183. Il quesito di un geometrico problema offre all' analista un gruppo di grandezze ignote, che, come si è detto quì sopra (155), son connesse fra loro, e per esser discendenti da un medesimo punto, ch' è ignoto al par di esse, e per esserne ad un medesimo subietto inerenti. Ma ne' problemi puramente analitici, e negli aritmetici, ed in alcuni geometrici osservansi grandezze ignote, che sono affatto distinte in fra loro, e che vi si rendon connesse per le condizioni apposte. Dunque per compiere cotesta teoria sarà dicevol cosa, ch' io vi parli delle condizioni de' problemi.

184. Def. VIII. Per *condizione* di un problema intendesi un rapporto esplicito, o implicito, che propongasi tra le ignote di esso, e le grandezze note.

185. Avv. Sì l' uno, che l' altro di questi due rapporti può essere *algebrico*, o *trascendente* (162), *proposto in analogia*, o *tradotto in equazione*. E, per dare qualche chiarimento all' addotta definizione, immaginatevi, che si proponesse a *ritrovare un punto della circonferenza di un cerchio, il quale distasse per una retta data da un dato diametro di esso*[11]. Una tal condizione, come ben si vede, consiste nell' *equalità di quella distanza, e di questa data retta*; ed è poi esplicito, o intuitivo cotesto semplicissimo rapporto. Ma se vogliasi tirare una retta, che insieme tocchi i due cerchi CBR, *ebr* [*fig.9.*] dati di sito, e di grandezza, cotest' altra condizione contiene un implicito, o latente rapporto, cioè,

---

[11] La qual retta dee esser non maggiore del raggio.

che la distanza de' loro centri debba serbare una ragion data alla distanza di uno di essi centri dal concorso A di detta tangente, e della Cc, che unisce tai centri. Infatti tirate a' contatti R, ed r i raggi CR, cr, sarà, per la similitudine de' triangoli CRA, crA, CA : cA :: CR : cr; e convertendo CA, Cc :: CR : CR — cr [12].

186. Def. ix. Due condizioni si potran chiamare *identiche*, se malgrado le diverse loro enunciazioni l' una si determini per l' altra. Ed esse si diranno *diverse*, se l' una non può nascere dall' altra.

187. Avv. Così tant' è dire, che sia dato l' angolo verticale di un triangolo, quanto che vi si dia la ragion dell' aja di tal figura al rettangolo de' lati, che contengon quell' angolo (*21. I.*): o che sia dato di specie quel triangolo, ch' emerge elevando ovunque una perpendicolare ad un di que' due lati (*23. I.*). Ma il *rapporto de' due lati di un triangolo, la loro somma, la loro differenza, il loro sito, il rettangolo di essi*, ec. saranno altrettante condizioni fra loro diverse.

188. Def. x. Una condizione dicesi *vicaria di un' altra*, se a questa quella può sostituirsi.

189. Cor. Se vi sieno più condizioni identiche fra loro, ciascuna di esse sarà vicaria di ciascun' altra.

190. Scol. Per mezzo di queste condizioni vicarie un istesso problema può tranformarsi in molti altri, che sebbene pajan diversi fra loro, e da quello; purnondimeno essi non sono, che una stessa cosa. Or cotesta moltiplice trasformazione di un medesimo problema è uno de' più nobili ripieghi,

---

[12] In questo sviluppo di ragioni n' è rapportata la soluzione di questo problema sciolto nello stesso modo da Pappo (*Collezioni Matem. prop. 118 lib. VII.*).

* *Veggasi eziandio il lemma al n. 167. del nostro trattato della* Geometria di sito.

che l' Analisi geometrica sa ritrovare: ed ella insiem ne mostra la più semplice, ed elegante forma, sotto la quale converrà risolverlo. Io nel terzo libro, e nello scioglimento de' problemi sulle *Tazioni** vi comenterò col fatto la necessità delle vicarie condizioni.

PROPOSIZIONE XIII.

PRINCIPIO.

191. Allorchè impongasi una qualunque condizione a due ignote principali; queste diventan connesse fra di loro.

Dim. La detta condizione fa che l' un' ignota sia determinabile per l' altra, o che l' una diventi una funzione dell' altra [13]. Dunque coteste due ignote per la condizione, che loro impongasi, diventan connesse fra di loro (156).

---

* *Questo argomento, com' è stato già indicato nella prefazione al presente trattato (not. n.15) non vi verrà da noi compreso, come l' autore aveva stabilito, avendone formato, insieme all' altro analogo de'* Contatti sferici, *e ad altri problemi affini, espressamente un volume degli* Opuscoli matematici *(il III. giusta il* prospetto *di pubblicazione per essi). Intanto chi volesse da ora riscontrarlo tal quale il compose il Fergola, il troverà nel vol. I. degli Atti della nostra R. A. delle Scienze.*

[13] Cioè, come si è detto altrove (159), un' espressione qualunque, e comunque composta da detta ignota, e da grandezze note.

PROPOSIZIONE XIV.

PRINCIPIO.

192. Se un problema abbia tante ignote principali, quante sianvi le condizioni proposte [14]; ciascuna di dette ignote dovrà contenere un valore determinato.

Dim. Cas. 1. Supponete esser una sola l' ignota principale di un problema, ed una benanche la condizione ivi proposta. Si conoscerà a priori dover quella contenere un certo valore determinato; o che l' arte dell' analista saprà poi rilevarnelo, o che a far questo ella non valga in alcun modo.

Cas. 2. Immaginatevi esser due le ignote principali di un problema espresse per x, ed y, e due puranche le condizioni di esso, e che queste si dinotino per A, e B. Sarà chiaro (184), che la condizione A debba render determinata una di quelle due ignote per esempio la x, o che almen la debba render connessa con l' altra y, sicchè questa ne diventi una certa funzione della prima x. In tutti e due questi casi si ridurrà il problema ad avere la sola condizione B, ed una sola ignota. Dunque in virtù del caso precedente l' ignota x dovrà avere un valore determinato; ed un altro benanche determinato dovrà competere all' ignota y, che si è detto essere funzione della x.

Cas. 3. La stessa dimostrazione può distendersi nel caso, che le ignote di un problema sien più di due, ed altrettante le condizioni di esso.

193. **Avv.** Quando diciamo esser determinato il valore di un' ignota, non dovete inferirne, ch' ei sia un solo. Impe-

[14] Qui s' intende, che debban esser diverse tali condizioni, e non già identiche.

rocchè dalle teorie algebriche apprendeste esser tante di numero le radici di un' equazione, quante le unità del di lei grado. E più giù [15] rileverete, che un problema geometrico possa aver più punti, ciascun de' quali al suo quesito sia soddisfacente.

194. **Def. xi.** un problema dicesi *determinato*, se le sue principali ignote vi debbano avere valori determinati.

195. **Def. xii.** Ed un altro problema si dirà *indeterminato*, se ciascuna delle sue ignote principali sia suscettiva d' infiniti valori, e tra lor diversi.

196. **Scol.** Immaginatevi, che: *dagli estremi A, B* [*fig. 10.*] *dell'arco circolare ACB si volessero inflettere le due rette AC, BC ad un terzo punto di esso, talchè sieno nella data ragione di m ad n*: un tal problema sarà determinato [16], essendo-

[15] Nel rischiaramento della prop. 16.

[16] Imperocchè, se le inclinate da' dati punti A, B ad un altro punto H dell' arco ACB fosser benanche come m ad n, sarebbe AH : HB :: AC : CB, e permutando AH : AC :: HB : CB. Lo che ripugna alla 14. del V. degli *El.* Ma come potrà risolversi un tal problema? Eccone sulle vestigia di Pappo la soluzione.

La ragion data di m ad n esprimasi per quella della retta PQ all'altra RS: e presa la TQ terza proporzionale dopo le due rette PQ, RS, si prolunghi AB in F, talchè BF sia quarta proporzionale dopo le tre PT, TQ, AB. Dal punto F si meni all' arco BCA la tangente FC. Sarà C il punto richiesto.

Dim. Essendo, per costruzione, PT : TQ :: AB : BF, sarà componendo PQ : QT :: AF : FB. Ma i due triangoli FCA, FBC sono equiangoli, avendo di comune l' angolo F, e l' angolo CAB uguale a BCF, per la 32 *El. III.* Dunque sarà AF : FC :: FC : FB, e la ragione di AF : FB duplicata di quella di AF : FC, per la *def. 10. El. V.* Ed è poi, per la similitudine de' medesimi triangoli FCA, FBC, la ragione di AF : FC uguale a quella di AC : CB. Dunque sarà pure la ragione di AF : FB duplicata di quella di AC : CB. Ed essendo AF ad FB, come PQ a QT, e questa ragione anche duplicata di quella di PQ ad RS, *def. 10 El. V.* sarà AC : CB :: PQ : RS.

vi un solo punto nell' arco ACB, ed un altro nel suo supplemento AEB soddisfacenti al quesito. Ma se: *il rettangolo delle inclinate AC, BC dovesse serbare una ragion data, cioè di m ad n, al triangolo ACB*, di qual natura sarà quest' altro problema? Se la ragione di *m* ad *n* sia quanto quella del raggio alla metà del seno dell'angolo fatto nel segmento ACB, il detto problema sarà indeterminato: poichè ogni punto dell' arco ACB, e dell' altro AEB sarebbevi soddisfacente *. E se la proposta ragione di *m* ad *n* sia diversa dall' anzidetta, un tal problema sarà impossibile.

PROPOSIZIONE XV.

PRINCIPIO.

197. Un problema determinato dee avere tante ignote principali, quante sono le diverse[17] condizioni, che vi si propongono.

Ed un problema sarà indeterminato, se vi sieno più ignote principali, che condizioni tra lor diverse.

Dim. Questo principio è una conseguenza del precedente; e delle due addotte definizioni, onde non si esige, che qui il dimostriamo formalmente.

* *Imperocchè questa proporzione ha luogo in ogni triangolo, come una proprietà di esso. Di fatto abbassando da A [fig.10.a.] su di BC la perpendicolare AK, l' aja del triangolo ACB risultando uguale a* $BC \times \frac{1}{2}AK$, *starà* $AC \times CB$ *all' aja del triangolo ACB* $:: AC : \frac{1}{2}AK :: 1 : \frac{1}{2}$ *sen. ACK, o ACB* (Trigonom.cor.1.def.1.1.) . *E però s' intende ancora, che nel caso della ragione di m : n diversa dall' anzidetta, il problema sia impossibile.*

[17] Più condizioni, che non sien diverse, ma l' una determinabile per l' altra, deggionsi avere per una sola: e 'l problema, che abbia tante ignote, quante le condizioni non diverse tra loro, sarà indeterminato.

198. Scol. I. Non convien confondere le condizioni di un problema colle grandezze note, che in esso si ritrovino. Dunque l' è difettoso quel criterio proposto da alcuni geometri moderni, che *un problema debba dirsi determinato, indeterminato, o più che determinato, secondochè il numero delle grandezze note pareggi, manchi, o ecceda quello delle ignote*. Imperocchè s'io proponessi a ritrovare una retta, il cui quadrato adequasse i quadrati di dieci rette date, di cento, di mille, *ec.*, un tal problema sarà determinato, tuttochè una sia la grandezza ignota, e moltissime le note grandezze. E lo stesso potrete Voi raccorre *a posteriori* da tanti altri esempli, siccome l' intendeste *a priori* per la seconda definizione del presente capo. E sebbene i geometri antichi avesser detto più saggiamente, che *un problema sia solubile, dificiente, o eccedente*, cioè *determinato, indeterminato, o piuchè determinato, secondochè abbia le giuste condizioni ad esser risoluto, o ne abbia di meno, o di più*; pure doveasi da essi chiaramente esporre cotesta convenevolezza, che quì si è fissata nelle condizioni di numero uguali alla ignote.

199. Scol. II. I principj di già esposti appartengonsi a tutti i generi de' problemi: ma quelli, che seguono, convengonsi a' problemi geometrici solamente [18].

[18] Se prescrivasi qualche restrizione, o qualche limitazione a' valori di un' ignota di un problema indeterminato, ei suol chiamarsi *semideterminato*: potendo ella avere un solo valor determinato, o due, tre, quattro, *ec.* Queste restrizioni soglion esser le seguenti, cioè, che i valori delle ignote sieno *interi*, *positivi*, *razionali*, *ec.* Ed i più facili di questi problemi soglion contenersi nella seguente espressione $mx + ny = a$.

PROPOSIZIONE XVI.

PRINCIPIO.

200. La soluzione di un problema geometrico determinato dee somministrare uno, o più punti, ciascun de' quali sia soddisfacente alle condizioni di esso.

DIM. Ogni problema geometrico determinato, o propone a ritrovare un punto soddisfacente alle sue condizioni, o all' indagine di un tal punto ei si riduce (152). Ma l' effettiva soluzione, chè si reca ad esso problema, o ch' ella si pratichi coll' analisi degli antichi geometri, o co'metodi algebrici de' moderni, necessariamente dee somministrare un sol punto, o pur due, tre, *ec.* di cotesti punti soddisfacenti; e ciò secondo il numero delle radici reali dell' equazioni del problema *. Dunque sarà vero il presente principio d' invenzione.

201. RISCH. Per la chiara intelligenza di quest' utilissimo principio gioverà por mente ai tre seguenti problemi, di cui quì reco solamente i temi, e nel libro III. li risolvo.

1. *Nel dato triangolo ABC* [*fig.11.*] *vuol condursi la retta HS parallela al lato BC, talchè ella sia uguale alla sua distanza ED da esso lato.*

Dall' enunciazione di questo problema ben si comprende, ch' ei sia sempre possibile, e che si riduca a ritrovare nella perpendicolare AD un solo punto soddisfacente al suo quesito, cioè un punto E, sicchè la ED pareggi la HI parallela al lato BC.

2. *Ma se il rettangolo di quella parallela HI* [*fig.12.*], *e*

* *Si potrà riscontrare sul proposito l' ultimo capo del lib.IV. della nostra* Analisi algebrica elementare.

della sua distanza ED dal lato BC debba esser dato, quali cose vi dovrem raccorre.

Se l' aja di tal rettangolo sia maggiore del massimo rettangolo iscrittibile nel triangolo ABC, il problema sarà impossibile. È se quell' aja sia minore di questo massimo rettangolo, due punti nel perpendicolo AD saran soddisfacenti al quesito, come nel seguente modo si dimostra. Si prenda Ae uguale a DE, e per e si conduca la hi parallela a BC. Sarà, per la 1.*El.VI*, DE$\times$HI : DE$\times$AE :: HI : AE :: BC : AD. E sarà, per la medesima ragione, D$e\times hi$: D$e\times$Ae :: hi : Ae :: BC : AD. Dunque sarà DE$\times$HI : DE$\times$AE :: D$e\times hi$: D$e\times$Ae, e quindi DE$\times$HI uguale a D$e\times hi$. Cioè a dire, se il rettangolo di DE in HI sia quel che si cerca, anche l' altro di De in hi vi sarà soddisfacente; ed i punti E, ed e saran del pari soddisfacenti al quesito.

3. Finalmente *dato il punto A* [*fig.13.*] *nella circonferenza ABR, si vuol ritrovare un' altro punto R in detta circonferenza, sicchè congiunta la corda AR, la sua parte RC, che resta fra la circonferenza e 'l dato diametro BD, cioè la RC, sia uguale al raggio CD.*

In questo problema vi deggiono essere quattro punti soddisfacenti al quesito, due nel semicerchio superiore BARD, cioè i due punti R, ed R', e gli altri due r, ed r' nell' inferiore BrD. Ed a questo problema si riduce, come vedrassi nel libro III, la trisezione di un angolo *.

* *Veggasi anche il* §. *148 del* Trattato analitico de' Luoghi solidi.

PROPOSIZIONE XVII.

PRINCIPIO.

202. Un problema geometrico, che abbia una condizione di meno delle sue principali ignote, dee essere indeterminato. Ed infiniti punti situati in una linea retta, o in una curva saranno soddisfacenti alle sue condizioni.

Dim. La prima parte di questo principio è una conseguenza delle precedenti cose; e per la seconda eccone una brevissima dimostrazione. I punti soddisfacenti a questo problema sono infiniti, e posti l'uno d' appresso all' altro su di un piano. Dunque la loro serie dovrà trovarsi in una linea, siasi questa una retta, o una curva.

203. Cor. 1. Questa linea dee avere per una delle sue proprietà il quesito del proposto problema. Onde potrà questo cangiarsi in teorema.

204. Cor. 2. Se un problema geometrico racchiuda due condizioni di meno delle sue principali ignote, dovrà esser benanche indeterminato. E gl' infiniti punti ad esso soddisfacenti staranno allogati in una superficie piana, o curva.

205. Risch. Se vogliasi un punto X nello spazio, che abbia date distanze dai tre punti dati A, B, C; quel punto sarà legittimamente per queste tre condizioni determinato *. Toglietene due di quelle tre condizioni: cioè propongasi a ritrovare il punto X, che abbia una data distanza dal solo punto C: ei dovrà ritrovarsi nella superficie sferica, che ha per centro il punto C, e per raggio la detta distanza.

* *Esso sarà uno di que' due punti ne' quali s' intersegano le tre superficie sferiche de' centri A, B, C, e de' raggi le rispettive tre date distanze. E se una sola di tali condizioni si tolga, cioè, che sia data la distanza, ch' esso serba da due soli punti dati, vi soddisferà la circonferenza del cerchio in cui intersegansi le due superficie sferiche de' centri i punti dati, e de' raggi le distanze date. Vedi la nostra* Geometria di Sito.

PROPOSIZIONE XVIII.

PRINCIPIO.

206. Se da un problema geometrico determinato or si tolga una sua condizione, ed ora un' altra, dovranno emergerne due problemi indeterminati ad esso equivalenti. E combinando le locali di questi due problemi indeterminati potrà risolversi quel problema determinato, se l' eleganza, e la semplicità del metodo nol divieti *.

Dim. Queste verità, che discendono dalle precedenti, han bisogno di essere illustrate dagli esempli.

Esempio I.

207. *Sulla data retta AB* [*fig.14.*] *vuol costruirsi un triangolo, di cui sia data sì l' aja, che l' angolo verticale.*

Per la prima condizione, il vertice del triangolo richiesto dovrà esser nella LR parallela ad AB, ed in una data distanza da essa (*39. El. I.*). E per l' altra condizione ei dovrà ritrovarsi in un segmento di cerchio, che abbia la AB per corda, e comprenda quell' angolo dato (*21. El. III.*), cioè nell' arco circolare ARB descritto colle dette condizioni. Dun-

* *Su questo principio è fondata tutta l' analisi de' problemi geometrici col metodo analitico puro, detto* a coordinate; *ed a questo principalmente mira l' avvertimento in fine di esso.*

que il vertice del triangolo addimandato sarà tanto il punto R, che l' altro r, ove la LR tagli l' arco ARB.

ESEMPIO II.

208. *Sulla data retta AB* [*fig.14.*] *deesi descrivere un triangolo, che abbia un dato angolo R verticale, e che sia data la somma de' lati, che il contengano, cioè tal somma sia uguale alla retta V.*

Per la prima condizione di questo problema, il vertice del proposto triangolo dee ritrovarsi nell' arco ARB del segmento circolare ArRB, che abbia per base la data AB, e comprenda un angolo uguale al dato X. Per la seconda condizione il medesimo vertice dovrebbe stare nel perimetro di quell' ellisse, che abbia i punti A, B per suoi fuochi, e per asse maggiore una retta uguale a V (*29.II.Sez.Con.*). Dunque descrivendo un' ellisse, che abbia per fuochi i dati punti A, e B, e per asse la data V, questa dovrà segnare nell' arco ARB, se pur sia possibile un tal problema [19], un punto R, che sarebbe il desiato vertice del triangolo.

Ma questo problema, che di sua natura è *piano*, dee esser risoluto *circino et regula*. Dunque dovrà stimarsi difettosa l' addotta soluzione, come quella, che si serve della combinazione delle curve coniche, qual si dovrebbe ne' problemi *solidi* praticare. Intanto eccone un' elegante, e conveniente soluzione del problema.

---

19 Talora è impossibile un tal problema, come potrà rilevarsi dall' addotta soluzione sintetica, e dalla seguente analitica.

Soluzione analitica del problema. Pongasi la retta $V = a$, la corda $AR = x$, e quindi l' altra $AB = a - x$, dovendo esser le due AR, ed RB uguali ad a. I. Inoltre dal punto A si cali AK perpendicolare a BR, sarà dato di specie il triangolo rettangolo AKR, per esserne dato l' angolo acuto ARK conseguente al dato ARB. E quindi, esprimen-

Si descriva sulla retta AB un segmento di cerchio capiente un angolo metà del dato X, cioè il segmento AIB; dal punto A vi si applichi la retta AS uguale ad V, e si unisca AB. Sarà il triangolo ARB il richiesto.

Imperocchè essendo l' angolo esterno ARB del triangolo BRS doppio di S, sarà l' angolo RSB uguale all' altro RBS, e quindi BR uguale ad RS. Sicchè aggiungendovi di comune la RA, dovrà esserne AR + RB uguale ad AS, cioè alla data V.

---

dosi per $m : n$ la data ragione di AR ad RK, sarà (166.) $RK = \frac{nx}{m}$ II. Finalmante la retta data AB si ponga uguale a c; ed essendo per la 12. *El. II.* $AB^2 = AR^2 + RB^2 + 2BRK$, sarà $c^2 = x^2 + a^2 - 2ax + xx + \frac{2nx}{m}(a - x)$. III., che potrà ordinarsi, e costruirsi per le ovvie regole. E conviene osservare, che ne' num. I, II, e III. vengon poste a calcolo le condizioni del problema.

CAPITOLO IV.

RICERCHE SINTETICHE SU DI ALCUNI LUOGHI GEOMETRICI.

209. La teorica de' luoghi geometrici, che parrebbe appartenere al seguente libro, ho dovuto qui per due ragioni inserirla; e perchè ella discende da' capi precedenti, e perchè n' è la base di molti argomenti di esso. Intanto per ragion di ordine la divido in due rami, l' uno sintetico, che qui contemplo, ed analitico l' altro, che nel seguente capo sarà chiarito convenevolmente *.

210. Def. xiii. *Luogo geometrico* è una serie d' infiniti punti, ciascun de' quali è soddisfacente ad un problema geometrico indeterminato.

211. Cor. Dunque un luogo geometrico può essere una linea, una superficie, ed anche un solido **.

212. Scol. Ma qui mi arresto a' soli luoghi alle linee, ed a quelle di queste, che diconsi del *primo*, e del *second' ordine*, cioè rette, e curve coniche. E per la piena intelligenza di questo argomento giova rammentarsi ciò, che si è detto nel cap. iii, e propriamente nella prop. 17.

213. Def. xiv. Se i punti soddisfacenti ad un problema geometrico indeterminato costituiscano una

* *Questa seconda trattazione non essendosi trovata tra' MSS. del* Fergola, *l' editore vi ha supplito con un breve trattatino de' luoghi alla linea retta, ed al cerchio, che costituiscono gli elementi della moderna Geometria analitica detta a* due coordinate, *e vi ha pur recata una semplicissima applicazione di essi a rinvenire alcune proprietà del triangolo, di cui occorrerà usare in appresso.*

** *Su tal distinzione si riscontri la prima dissertazione nel vol. I. degli* Opuscoli; *e potrà anche bastare quanto se ne dice nella prefazione alla* Geometria di Sito.

linea retta, o la circonferenza di un cerchio, tal luogo geometrico si dirà *piano*.

214. Def. xv. Ed ei si direbbe *solido*, se la mentovata linea fosse una delle curve coniche, cioè una parabola, un' ellisse, o un' iperbole.

215. Scol. I luoghi alla retta, ed al cerchio furon detti *piani* dagli antichi, perchè colla combinazione, ed intersecamento di tali linee si deggion risolver que' problemi di Geometria, che noi diciamo di *primo*, e di *secondo grado*, ed essi chiamavan *piani*. E poichè le curve coniche nascon dal cono, che l' è un solido; i luoghi a queste linee furon chiamati *solidi* da' geometri antichi, e *solidi* disser pure que' problemi, che per l' intersezione di tali curve, che fosser ben combinate, si risolveano*.

216. Avv. Qui badisi a non confonder fra loro i luoghi geometrici de' problemi, e quelli delle indeterminate equazioni **.

* Solida appellantur, namque ad constructionem necesse est solidarum figurarum superficiebus, nimirum conicis uti. *Così Pappo nello scolio alla prop. 4. lib. III., e nell' altro alla 30. lib. IV. Il qual luogo di Pappo sarà da noi dichiarato altrove. Per la seguente trattazione de'* luoghi geometrici, *si abbia present e quello, che si è detto nella nota 10. alla prefazione.*

** *Co' primi si considera una proprietà sola di quel luogo geometrico, che viene rappresentato dalla seconda.*

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

217. I vertici di que'triangoli uguali, che abbiano una medesima base, o basi uguali poste in una retta, e rivolti da una stessa parte, sono allogati in una parallela a quella base, o a questa retta.

Dim. Vedete le prop. 39, e 40. *El. I*, da cui è facile trarre le converse (*pr. 41. e 42. El. I.*). *

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

218. I vertici di que' triangoli, che abbiano una stessa base, ed uguali i loro angoli verticali, e che sien rivolti dalla stessa parte, han per *luogo piano* l' arco di un cerchio descritto coll' artificio della 33. *El. III.*

Dim. Se oltre al segmento circolare AMB [*fig. 15.*], de-

---

* *Con l' affermarsi anche le converse delle prop. 39, 40, viene a stabilirsi, che non solamente sono uguali fra loro i triangoli costituiti sulla stessa, o uguali basi poste in una retta, ed aventi i vertici in una parallela a questa; ma ancora, che altri non possano esservene, il cui vertice non si ritrovi in quella parallela; il che risulta evidente dalle dimostrazioni recate da Euclide alle 41, e 42. Ed una tal circostanza è essenziale a costituire un luogo geometrico, bisognando, che non solamente tutt' i suoi punti soddisfino ad una data condizione geometrica, ma che sieno ancora i soli a soddisfarvi. E l' autore ciò ne dichiara ancora con la dimostrazione del seguente teorema, ed in altri appresso.*

**

scritto come nella 35. *El. III*, un' altra curva AmB potesse avere la proprietà qui proposta, si conduca dal punto A una qualunque corda AmM; e da' punti m, M, ove questa incontra gli archi AmB, AMB, conducansi le rette mB, MB al punto B; sarà l'angolo AmB uguale all' altro AMB; cioè l' esterno di un triangolo uguale al suo interno, ed opposto. Lo che ripugna.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

219. Se l' intera retta DP [*fig. 16.*], e le sue parti DB, DQ sieno in armonica proporzione *; il semicerchio descritto sulla media DB sarà tale, che le rette PN, QN condotte da' punti P, Q di quella retta ad un qualunque punto N di questo cerchio saranno come la DP alla DQ, cioè come la prima alla terza di tali rette.

Dim. Si tiri il raggio CN, e per Q si meni la QH parallela alla PN. Ed essendo PB : BQ :: DP : DQ, sarà PB : BQ :: 2PC : 2CB ** :: PC : CB, e per la 19. *El. V*, CP : CB :: CB : CQ, e quindi CP a CQ in duplicata ragione di CP a CB, o della sua uguale di PB a BQ.

Ciò posto, essendosi poc' anzi dimostrato, che stia PC a CB, ovvero CN, come CN a CQ, i due triangoli PCN, NQC, che hanno l' angolo in C di comune, saranno equiangoli, (6. *El. VI.*), onde sarà l'angolo CPN uguale all' altro CNQ. Ma gli altri due angoli QNP, NQH alterni delle parallele

---

* *Veg. le Sez. Con. alla def. 6. lib. I.*

** *Ciò risulta dal permutando, e componendo.*

PN, QH son pure fra loro uguali. Dunque saranno equiangoli i due triangoli PNQ, QNH, e dovrà stare PN : NQ :: NQ : QH, e quindi ancora PN a QH in duplicata ragione di PN ad NQ. Ma la ragione di PN a QH è uguale a quella di CP a CQ, pe' triangoli simili CPN, CQH. Dunque saran pure uguali le loro sudduplicate di PN ad NQ, e di PB a BQ, ovvero di DP a DQ.

220. Cor. 1. Dagli estremi P, Q della retta PQ si elevino ad essa le perpendicolari PE, QF respettivamente uguali a' segmenti PB, BQ, in che si trova divisa una tal retta, e si unisca la FE, che incontri la PQ in D: indi bisecata la DB in C, dal centro C, con l' intervallo CB si descriva il cerchio BND; saranno le inclinate PN, QN nella ragion de' segmenti PB, QB, della data PQ. E tal costruzione potrà impiegarsi nel costruire questo *luogo piano*.

221. Cor. 2. E niun' altra curva RnS può anche aver le inclinate Pn, Qn nella data ragione di PB a BQ. Imperocchè se fia possibile, si tiri dal punto Q una qualunque retta QNn, che seghi quel cerchio, e questa curva in N, n, e si uniscano le rette PN, Pn. Saranno uguali le due ragioni di PN ad NQ, e di Pn ad nQ, come uguali alla stessa ragione di PB a BQ. E quindi i due triangoli NPQ, nPQ, che hanno anche comune l' angolo NQP, dovranno essere equiangoli (7. *El. VI.*) Onde sarebbe l' angolo NPQ uguale all' altro nPQ. Lo che ripugna.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA.

222. Se da' due punti A, B [*fig.* 17.], la cui distanza sia d, conducansi ad un terzo punto N le due rette AN, BN, i quadrati delle quali facciano una data somma s^2; il punto N, ed ogni altro similmente condizionato avrà per luogo geometrico la circonferenza di un cerchio, il cui centro è il punto medio della distanza d, e 'l raggio n'è la retta espressa per $\sqrt{(\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{4}d^2)}$.

Dim. Imperocchè sia PNQ un tal cerchio; tirata la NM perpendicolare al diametro AB, e congiunto il centro C col punto N per la CN, sarà $NA^2 + NB^2 = 2AC^2 + 2CN^2$ (A. *El. II.*), cioè $s^2 = \frac{1}{2}d^2 + 2CN^2$; quindi $CN^2 = \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{4}d^2$, e però $CN = \sqrt{(\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{4}d^2)}$.

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA.

223. Se da' due punti A, B [*f.* 18. *n.* 1] sien condotte ad un terzo punto M le rette AM, BM, la somma delle quali uguagli la data PQ; quel punto M, ed ogni altro similmente condizionato avrà per *luogo solido* il perimetro di un' ellisse, che abbia per fuochi i punti A, B, e per asse maggiore la PQ.

E se rette AM, BM [*f.* 18. *n.* 2] avesser per differenza la data PQ; il luogo de' punti M sarebbe un iperbole avente per fuoco i punti A, B, e per asse principale la PQ.

Dim. Part. i. Se la curva PMQ [*f.18.n.1.*], ove supponesi allogato ciascuno de' punti M, non fosse la proposta ellisse, il sia la PmQ; si tiri dal punto A una qualunque retta AMm, la quale seghi in M, m le anzidette curve, e poi si congiungano le rette BM, Bm. Sarà per tal supposizione Am + Bm = PQ; e per la natura dell' ellisse PMQ anche AM + BM = PQ. Dunque sarà AM + BM = Am + Bm; e toltovi la comune AM, resterebbe BM = Bm + Mm. Lo che ripugna alla 20.*El.I.*

Part. ii. E se la curva nQm [*fig.18.n.2.*] luogo de' punti proposti sia diversa dall' iperbole NQM descritta in questo teorema, si dimostrerà come quì sopra essere AM — BM = Am — Bm; e quindi AM — Am, cioè Mm = BM—Bm. Sicchè aggiunta comune la Bm si avrebbe Mm + Bm = BM, contro la medesima 20.*El.I.*

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA.

224. Se i parallelogrammi equiangoli FDBG, HEBI, *ec.* [*fig.*19.] abbian comune l' angolo B; i vertici F, H de' loro angoli opposti a B staranno in una retta, se que' perimetri sieno tra se uguali.

Ed essi vertici staranno in un' iperbole, se le loro aje sieno uguali.

Dim. Part. i. Si produca la BD, sicchè DC uguagli DF, e si unisca CF; questa retta sarà il luogo di que' vertici opposti a B. Imperocchè il triangolo HEC è isoscele al pari del suo simile FDC; dunque sarà BE + EH = BC, cioè a

BD + DF, e duplicando siffatti termini sarà il perimetro del parallelogrammo HEBI uguale a quello dell' altro FDBG. E lo stesso per qualunque altro di tali parallelogrammi. Cioè a dire i vertici degli angoli opposti al comune angolo B di questi infiniti parallelogrammi isoperimetrici hanno per luogo la retta CFH data di posizione.

La parte ii. di questo teorema è chiara da' *Conici* (*Veg. la prop.17. lib.*iii. *vol. III. del Corso geom. e la prop.39. Sez. con. anal.*).

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA.

225. Sien dati di posizione il punto C [*fig.*20.] e la retta PQ, e da quel punto su questa retta s' inclini una qualunque retta CM, e si divida in D in una ragion data; questo punto D, e gl' infiniti altri similmente rilevati apparterranno ad una data parallela alla PQ.

Dim. Dal dato punto C si meni la CA perpendicolare alla data PQ, e divisala in B nella ragion data, si tiri per quest' altro punto B la BN parallela alla PQ. Sarà la BN il luogo indicato. Imperocchè ciascuna retta, che dal punto C s' inclini sulla PQ vien divisa dalla BN, ch' è parallela alla PQ, nella data ragione di CB a BA (*2.El.VI.*).

226. Cor. E lo stesso dovrà dirsi convenevolmente, se la CM protraggasi in F, sicchè stia CM a CF in una data ragione.

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA.

227. Sien dati di posizione il punto C [*fig.* 21.], e la retta PQ, e da quel punto su questa retta s'inclini una qualunque CM, e si produca in N, sicchè le CM, CN sien reciproche alle due rette date A, B; il punto N toccherà un cerchio dato di sito, e di grandezza.

Dim. Dal dato punto C si tiri la CP perpendicolare alla data PQ, ed essa prolunghisi in R, finchè CR sia quarta proporzionale dopo le tre rette CP, A, B, e si unisca la RN. Sarà il rettangolo PCR uguale all'altro di A in B. Ma questo rettangolo è per ipotesi uguale ad NCM. Dunque saranno fra loro uguali i rettangoli PCR, NCM. Onde sarà PC : CM :: CN : CR; e l'angolo CNR dovrà pareggiare il retto CPM (32. *El. I.*). Il perchè il punto N dovrà essere allogato nel semicerchio descritto col diametro CR.

228. Cor. E se verso M prendasi il punto *n* nella CM, sicchè le due CM, C*n* sien reciproche alle due date A, B; il punto *n* toccherà benanche un cerchio, il quale si potrà descrivere, come nell'esposto teorema si è praticato.

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA.

229. Sien dati di posizione il punto P [*fig.* 22.], e la retta CB, e poi da quel punto su questa retta si tiri qualunque inclinata PB, e si protragga in G, sicchè la BG parte aggiunta sia uguale alla data retta K, il punto G toccherà una linea di quart' ordine detta *concoide* da' geometri antichi *; di cui è facile indicar la natura, e la genesi con moto organico.

Dim. Par. 1. Il punto P dato suol dirsi *polo* della concoide; e di essa n'è assintoto la data retta CB. Imperocchè i punto G di tal curva tanto più si accosta alla CB, quanto l'inclinata PB più diverge dalla perpendicolare PC. Ma non può alcun di tai punti cadere nella CB, altrimenti un' inclinata della CB potrebbe con essa combaciare. E se la PC producasi in A, finchè CA pareggi la stessa K; CA sarà l'asse della concoide, sul quale ogni perpendicolare NM, che da un punto della curva gli si abbassi, sarà un' ordinata, e la MA la sua ascissa corrispondente.

E per ottenere l'equazione caratteristica di tal curva, pongasi CA $=a$, CP $=c$, CM $=$ EF $=x$, MN $=y$, e quindi PM $=c+x$; sarà, pe' triangoli simili PMN, PCE,

* *Detta da' moderni* di Nicomede, *da questo geometra antico, che ne fu l'inventore, e ne compose un trattato delle sue proprietà, a noi non pervenuto, valendosene acconciamente a risolvere i problemi delle due medie proporzionali, e della trisezione dell' angolo, come vedrassi in appresso.* (Si riscontri *Proclo* nel comento alla prop. 9. El. I., *Pappo* dopo la prop. 22. IV. *Collect. Math.*, ed *Eutocio* nel comento al lib. II. di *Archimede* de sph. et cyl.).

PM : FE :: MN : NF, cioè, ne' loro simboli, $c + x : c :: y$: NF $= \frac{cy}{c+x}$. E dovendo essere $FN^2 = EN^2 - EF^2$, sarà $\frac{c^2y^2}{(c+x)^2} = a^2 - x^2$, cioè $c^2y^2 = (a^2 - x^2)(c+x)^2$.

Part. II. Intendasi esser CP [*fig.23.*] una riga saldata coll' altra DB, ed in quella fermarsi l' anello P, in questa esservi il canaletto rettilineo BED. Inoltre NEP sia un' altra riga, che passi per l' anello P, ed abbia un chiodetto E in un punto della sua lunghezza: se questo chiodetto vadasi movendo per quel canaletto d' ambe le parti del punto C, l' estremo N di tal verga dovrà descrivere l' anzidetta concoide.

PROPOSIZIONE XXVIII.

TEOREMA.

230. Se in una qualunque ordinata ED [*fig.24.*] del semicerchio AEB si prenda la DO terza proporzionale dopo la detta ordinata, e la sua ascissa AD; il punto O avrà per luogo una linea di terz' ordine, detta *cissoide* dagli antichi *; di cui sarà indicata la natura, e la genesi per moto organico.

Dim. Part. I. Sia GM una qualunque ordinata di questa cissoide AGH, ed AM la sua corrispondente ascissa; saranno continuamente proporzionali le tre rette PF, FA, FG; e quindi i quadrati loro PF^2, FA^2, FG^2. Ma la ragione di $PF^2 : FA^2$ è uguale a quella di BF : FA. Dunque sarà BF : FA :: $FA^2 : FG^2$, e quindi $FA^3 = BF \times FG^2$, cioè $GM^3 = BF \times AM^2$.

* *Da' moderni specialmente detta di* Diocle, *geometra, come ben argomenta il Montucla, di circa il sesto secolo della nostra Era.*

Quindi dinotando il diametro AB con $2r$, e ponendo GM $= y$, ed AM $= x$, sarà $y^3 = (2r - y)x^2$. E si vedrà finalmente per più modi, che tal curva debba aver per assintoto la BI distesa per lo punto B parallela alla DE.

Part. II. Intanto la genesi della cissoide per moto organico è la seguente.

Le due verghe a squadra BCE, BDE [*fig.25.*] abbiano uguali i loro lati CB, DE, di cui ciascuno sia fornito di un anello nel suo estremo, ed indefiniti gli altri due lati CE, DB. Ma ciascun di questi due lati indefiniti passi per l'anello dell' altra squadra, cioè CE per E, DB per B; e poi la squadra BDE intendasi mossa sull' altra immobile BCE, sicchè l' angolo D si accosti, e si discosti dall' altro C, rimanendone nello stesso lor piano; io dico, che il punto medio G del lato DE descriverà la cissoide indicata *.

Imperocchè bisecata la BC in A congiungansi le AG, BE. Inoltre distendasi per G la FGM parallela alla CB, e toltavi la GF uguale alla GE, si unisca la FE, che incontri la AG in H. Finalmente si abbassi la AM perpendicolare alla FM, e la MI alla AG. E poichè per supposizione è CB uguale a DE, ne' triangoli equiangoli BCR, EDR, sarà, per la 26.*El.I.*, la BR uguale alla RE. Il perchè essendo isoscele il triangolo BRE, sarà il suo angolo esterno DRE doppio di RBE interno, ed opposto. Ma per tal ragione è anche l' angolo VGE

* *Gli antichi, intendendo per essi i geometri de' tempi di Diocle, si valsero della* cissoide *per costruire l' elegante analisi geometrica già prima recata al problema delle due medie proporzionali; ma non diedero una maniera convenevole per descrivere tal curva; lo che fu praticato dal Newton.* (*Veg. la sua* Appendix de aequat. const. lin.), *al qual modo corrisponde più meccanicamente la descrizione qui sopra recata.*

doppio di GEF. Dunque siccome sono uguali gli angoli DRE e VGE, così dovran pareggiarsi le metà loro RBE, GEF, a' quali unendo comune l' angolo DEB, sarà la somma degli angoli RBΞ, DEB uguale ad FEB. Dunque questo sarà retto, come quelli ne fanno un retto: e quindi la retta AGH sarà perpendicolare ad FE, al par della sua parallela BE.

Ciò posto, il triangolo FHG è equiangolo, e con ciò simile a GIM: e 'l primo di essi è simile ad FEO, e l' altro a GMA; dunque saran simili tra loro i due triangoli FEO, GMA, e dovrà stare OV : VF :: GI : IA :: GM^2 : MA^2. Ma l' è poi FO uguale a CB, ed FV a GM; laonde OV, ch'è FO — FV, sarà uguale a CB — GM; e quindi la precedente analogia avrà i termini seguenti CB — GM : GM :: GM^2 : MA^2, e sarà $GM^3 = MA^2(CB - GM)$. Il perchè la curva descritta sarà una cissoide (230. *part. 1.*), e 'l semicircolo generatore avrà per diametro la CB.

231. Cor. 1. Dal vertice A della cissoide [*fig. 26.*] si tiri una qualunque corda AG, che incontri in E il semicerchio generatore: sarà, congiunte le indicate rette, DE : DA :: DA : DO, ed FG : FA :: FA : FP, per la natura di tal curva. Ma è poi DE : DA :: FG : FA. Adunque sarà DA : DO :: FA : FP, ed i tre punti A, O, P per diritto.

232. Cor. 2. Ed essendosi dimostrate uguali le due ragioni di FA : FP, e di DA : DO, o la sua uguale di DE a DA, si dovran pareggiare anche le duplicate loro, cioè le ragioni di FA : FB, e di BD, DA. Dunque dee essere FA = BD, ed FB = DA.

233. Cor. 3. In oltre, pe' triangoli simili DAO, FAG, essendo AE : AG :: AD : AF, ovvero BD; ed è poi AD : DB :: AE : EK (distendendo la AG insino alla BK, che da B conducesi parallela alla DE). Adunque sarà AE : AG :: AE : EK, ed AG uguale ad EK.

234. Cor. 4. Dal precedente corollario si ritrae la genesi, che gli antichi attribuivano alla cissoide nel seguente modo.

Siavi il semicerchio APB [*fig. 24.*], e dall' estremo B del suo diametro AB gli si conduca la tangente BK, e per l' altro estremo A una qualunque segante AEK, in cui si tronchi la parte AG uguale all' esterna parte EK di essa; il punto G apparterrà alla cissoide predetta *.

235. Cor. 5. Pe' triangoli simili AFP, ADO sta AF ad FP, cioè le loro uguali BD a DE, come AD a DO; e per la natura del cerchio è anche BD : DE :: DE : DA. Dunque si dovran verificare le seguenti analogie, BD : DE :: DE : DA, DE : DA :: DA : DO; e però dovranno esser continuamente proporzionali le rette BD, DE, DA, DO, e quindi la ragione di DA : DO sarà suttriplicata di quella di BD : DO. Lo che giova per l' invenzione delle due medie proporzionali, come si vedrà a suo luogo.

PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA.

236. Se l' ordinata da un punto di una retta ad un' altra si protragga, sicchè il prolungamento sia media proporzionale fra detta ordinata, e l' ascissa, che da quel punto le corrisponde sulla retta presa per asse; l' estremo di quel prolungamento avrà per luogo un'altra retta, o pur una delle sezioni coniche.

237. Cas. 1. Il punto P [*fig. 26. n. 1.*] principio delle ascisse sia il vertice dell' angolo NPR, che la retta PL da cui partono le ordinate RN all' asse PN, fa con questo, e per un altro punto S della PN conducasi SX parallela ad NR, e sieno NM, ST le produzioni corrispondenti alle RN, SX, . Ed es-

* Veg. *Eutocio nel comento al lib. III. di Archimede* de sphaera, et cylindro.

sendo continuamente proporzionali le tre rette NR, NM, NP, sarà NR : NP :: NM^2 : NP^2, e così pure sarà SX : SP :: ST^2 : SP^2. Ma sono uguali le prime ragioni di queste due analogie; dunque il saran pure le altre due, e le loro suddupli-cate. Vale a dire sarà MN : NP :: ST : SP, ed i punti, M, T avranno per lungo una retta, che passa per lo punto P.

238.Cas.2.Il punto P [*fig.26.n.2.*] principio di dette ascisse sia diverso dal vertice Q dell' angolo NQR, in cui è ordinata la NR all' asse PQ; fatto lo stesso apparecchio del caso precedente,si avrà $NM^2 = PN \times NR$, ed $ST^2 = PS \times SX$, e però $NM^2 : ST^2 :: PN \times NR : PS \times SX$, ovvero $:: PN \times NQ : PS \times SQ$. Quindi il luogo de' punti M, T sarà un' ellisse, o un' iperbole, secondochè il punto P cada sotto del punto N, o pur sopra. E ne sarà PQ il lato traverso, e PG parallela ad NR il retto.

E si vedrà egualmente, che quest' ellisse diventi un cerchio, quando la PQ pareggi la PG, e sia retto l'angolo PNM.

Di più una tal curva sarà una parabola, allorchè si ritrovi la GR parallela alla PN.

239.Cor.1.La linea QR può dirsi direttrice della curva, che passi pe' punti M. E se ancor ella fosse una curva, la linea, che passa pe' detti punti sarà di grado superiore alle coniche.

240.Cor.2. Viceversa se la semiordinata MN di una qualunque curva conica si protragga in R, sicchè tal prolungamento sia terza proporzionale dopo l' ascissa PN dal di lei vertice; e l' anzidetta semiordinata; il punto R toccherà una retta di posizione *.

241.Cor. 3. Ma se la NR fosse terza proporzionale dopo quella semiordinata MN, e la sua ascissa PN; il punto R

* *Questa conversa del teorema proposto trovasi dall' autore direttamente dimostrata nella prop. 7. delle* prenozioni alle Sezioni Coniche, *vol.3°* *del* nostro corso geometrico.

apparterrà ad una cissoide di cui n' è una specie quella degli antichi (230.). E 'l contraposto di questi due corollarj daran risalto alla teorica, che ho voluto qui sinteticamente illustrare.

242.Scol. Un giovane studioso, col solo convertire alcuni teoremi elementari, o su i conici, potrebbe proccurarsi altrettante locali per suo gradimento. E se di cio fare non gli arrida, potrà attignerle dal Fermat, da Roberto Simson, dalla *divinazione* del Viviani su i *luoghi solidi* di Aristeo Seniore, e da qualche altro.

GIUNTA AL CAP. IV.

PER ALCUNE CURVE TRASCENDENTI.

243. Come fu accennato nel *Prospetto dell' Arte d' inventare* pubblicato fin dal 1809, ed ora recato in seguito della prefazione al presente trattato, un tal capitolo doveva ancor considerare tra' luoghi geometrici le *trocoidi*, la *spirale Archimedea*, e la *quadratrice di Dinostrato*: le quali cose non essendosi ritrovate ne' MSS. del Fergola, vi si è supplito alla meglio nel seguente modo.

PRINCIPIO I.

244. *Ogni linea può prendersi pel luogo geometrico di una proprietà indeterminata di essa; e però di quella, che ne costituisce la sua genesi.*

Ciò è manifesto dalla def. 13 (210), e dal suo corollario; e può anche estendersi a' luoghi alla superficie, ed a' solidi. Di esso ne sono pure un bastevole chiarimento le precedenti proposizioni di questo capitolo.

PRINCIPIO II.

245. *Se due punti segnati in due linee scorranno equabilmente sulle medesime, come per descriverle, segnandovi costantemente, dal principio del loro movimento parti proporzionali alle intere linee; queste saranno da essi contemporaneamente descritte.*

PROPOSIZIONE A.

TEOREMA.

246. Se dal punto A [*fig.* 27.] segnato nella circonferenza del cerchio ADB prendansi su' raggi successivi ad OA, per lo stesso verso, cioè in OB, OC, OD, e fino a che ritornisi al medesimo punto A, le particelle O*b*, O*c*, O*d*... quarte proporzionali in ordine alla circonferenza di un cerchio, al suo raggio, ed agli archi AB, AC, AD ... che quei raggi comprendono col primo OA; i punti *b*, *c*, *d*... avranno per loro luogo geometrico una curva trascendente detta *elica*, o *spirale*, di cui indicheremo l' equazione caratteristica, e la genesi per un movimento continuo.

Prendansi per ascisse gli archi AB, AC, AD ... computati dal punto A, e ciascuna di esse dinotisi per y; e le ordinate corrispondenti sieno le parti O*b*, O*c*, O*d* ... prese come si è detto su' raggi OB, OC, OD dal centro O, e dinotate da x; ed esprimasi per 2π il rapporto della circonferenza al raggio: è chiaro, che l' equazione per una tal curva debba risultare $2\pi x = y$, dalla quale è facile rilevare, ch' essa curva abbia il suo *principio* nel centro O, e che prendendo nel cerchio ADB gli uguali archi, e successivi AB, BC, CD ..., le ordinate O*b*, O*c*, O*d* ... debbano risultare equidifferenti, e la seconda doppia della prima, la terza tripla, e così in seguito. Il che può farla descrivere facilmente per punti.

Per la descrizione con moto continuato, basterà immaginare, che mentre il raggio OA si aggira intorno al centro O, per descrivere la circonferenza ABDA, il punto O scorra lungo un tal raggio, e verso il suo estremo A, in modo, che i due movimenti uniformi compiansi contemporaneamente, sicchè ritornando il raggio OA in A, vi sia anche giunto il punto O scorrente sul medesimo. Ed è facile a comprendersi, che le velocità di tali movimenti debbano esser fra loro nella ragione di 2π ad 1, cioè come la circonferenza al raggio.

247. Cor. 1. Allorchè il raggio OA, ha compiuto l' intero suo giro, e che il punto O ha percorso il raggio OA, può tuttavia considerarsi, che questo seguiti a scorrere in continuazione del raggio, percorrendolo un' altra volta, mentre esso raggio compie una seconda rivoluzione, sicchè la spirale si termini in A'; e così in seguito, per quante altre rivoluzioni si voglia considerare: e le spirali descritte, nell' eseguirsi la seconda rivoluzione del raggio, la terza, *ec.* diconsi *seconda*, *terza*, *ec.*

È chiaro, che l' equazione rilevata pel primo ramo si appartenga ad essa curva in generale, cioè indefinitamente presa; e che una retta possa intersegar la spirale in un numero infinito di punti, come la sua qualità trascendente esigeva.

248. Cor. 2. Una tale equazione, poichè le ordinate sono prese in giro da un punto fisso, considerato come polo, si dice *polare*: da che si è questa denominazione in casi simiglianti estesa anche ad altre curve algebriche. E ciascun' ordinata della spirale, perchè parte sempre da un punto, suole anche dirsi *raggio vettore*.

249. Cor. 3. Il cerchio ABD potrebbe dirsi *modulo* della spirale indefinita per quanto si voglia. E dall' equazione ad essa, o dalla sua genesi è facile rilevare, che le *spirali* sieno tutte simili.

250. Scol. La spirale di cui abbiamo ragionato escogitata da Conone di Samo contemporaneo, ed amico di Archimede, esercitò il costui genio in assegnarne le proprietà, e la quadratura (*Vedi Archimede nell' epistola a Dositeo innanzi al libro* de lincis spiralibus, *e Pappo nel lib. IV. delle sue* Collezioni Matematiche, *dopo la prop. 18.*)

PROPOSIZIONE B.

TEOREMA.

251. Se per ciascun raggio OF [*fig.* 28], tirato nel quadrante circolare BDA, stia come l'arco quadrantale BA al raggio OB, così l' arco BF, limitato tra l'estremo B del quadrante, e'l raggio OF, al quarto proporzionale BH; il punto f in cui l'ordinata per H intersega il raggio OF, ed ogni altro punto similmente determinato avrà per luogo geometrico la linea Bfcd ... K, detta dagli antichi *quadratrice*, la cui equazione, e la genesi sono le quì appresso.

S' indichino con x, y le coordinate BH, Hf della quadratrice, con φ l'arco BF corrispondente al punto f, e per $\frac{\pi}{2}$ il rapporto del quadrante BA al raggio 1; sarà OH$=1-x$. Ed essendo

$$cos.\varphi : sen.\varphi :: \mathrm{OH} : \mathrm{H}f :: 1-x : y$$

si avrà

$$y=\frac{sen.\,\varphi}{cos.\,\varphi}(1-x)=tang.\varphi\,(1-x)$$

Ma per la genesi assegnata della quadratrice è $\varphi=\frac{\pi x}{2}$

Adunque l' equazione ad essa sarà

$$y=tang.\frac{\pi x}{2}\,(1-x).$$

Or la sua genesi per un movimento continuato è questa. Essendo l'arco BF, e l'ascissa BH proporzionali al quadrante BA, ed al raggio BO, dovranno l'uno, e l'altro venir contemporaneamente descritti con moto uniforme da due punti, l'uno che scorra lungo l' arco, l' altro lungo il raggio (*princ.* 2.), e però se mentre il raggio OB circolarmente si aggiri con moto uniforme da B verso A, la tangente BC nel punto B si muova parallelamente a se stessa da B verso O, con tal altro moto uniforme, da pervenire a coincidere col raggio OA, appunto allorchè giugne a far lo stesso il raggio OB col suo moto circolare; la curva rappresentata dalle continue intersezioni *f*, *c*, *d*... di quelle due rette sarà la *quadratrice*.

252. Cor. Allorchè la tangente BC mossa con moto sempre parallelo a se stessa sarà pervenuta a coincidere col raggio OA, ossia, che il punto B sia giunto nel centro O, può ben essa, e questo punto continuare il suo movimento in modo inverso nel sottoposto quadrante OAB', e quindi descriversi l' altro arco di quadratrice KB' identico al primo BK, e situato inversamente. E così pure pervenuta quella in B, potrà sempre continuare il suo movimento lungo la retta indefinita BOB'... sicchè la curva descritta non abbia termine; ma si estenda, e si continui all' infinito. Da che ancor si rileva la sua natura trascendente, potendo essere incontrata da una retta in infiniti punti.

253. E dalla genesi di tal curva, e dalla sua equazione rilevasi evidentemente esser le quadratrici tutte simili.

254. Scol. Il primo uso geometrico di una tal curva, sembra essere stato quello di dividere un arco circolare in data ragione, poichè si vede, che in essa gli archi circolari BF, BE, BD... o pure BF, FE, ED... risultino proporzionali alle parti corrispondenti BH, BL, BM..., o pure BH, HL, LM... del raggio BO: che però la divisione di un arco BE in data ragione si riduce a quella della corrispondente ascissa BL, nella quadratrice, in tal ragione; e lo stesso per un arco FD. Ma posteriormente fu dalla medesima dedotta la quadratura del cerchio, da che le fu dato il nome di *quadratice*; alla qual cosa adoperaronsi Dinostrato fratello di Menecmo, e discepolo con lui di Platone, e poi

Nicomede, come abbiamo da Pappo*. E da' lavori di que' sopraindicati geometri può conoscersi quale profondo studio si fosse fatto sulle curve nella scuola di Platone, e però fin da' primi tempi della Geometria scientificamente coltivata. Intanto il Montucla, da un luogo del comentario di Proclo alla prop. 9 del lib. I. di Euclide, argomenta, che non già Dinostrato, ma un altro geometra Ippia contemporaneo di Socrate fosse stato l'inventore di tal curva, per risolvere il primo degli anzidetti problemi; e che poi per averla Dinostrato applicata al famoso problema di quadrare il cerchio, le si fosse dato il nome di *quadratrice*, ed a lui intitolata, appunto come si disse di Archimede la spirale ritrovata da Conone, perchè quello ne rinvenne, ed espose le proprietà. E noi facendo eco alla sua opinione, vi aggiugniamo la ragione più valida, che Pappo parlando di una tal curva non dice, che fu rinvenuta da Dinostrato, per quadrare il cerchio; ma sì bene, che fu da lui *assunta* a tale uopo, e vi associa ancor Nicomede, ed altri. Ed ecco come si esprime: *Ad circuli quadraturam assumpta est a Dinostrato, et Nicomede, et nonnullis iunioribus quaedam linea, cui ab accidente, quod circa ipsam, nomen impositum est. Vocatur enim ab ipsis* τετραγωνίζουσα, *hoc est linea quadrans***. Ma non sappiamo d'onde abbia egli tratta la notizia, che dà intorno ad Ippia, di cui non troviamo fatta menzione presso alcuno degli antichi geometri.

PROPOSIZIONE C.

TEOREMA.

255. Sia il circolo AEB [*fig.* 29.], col suo diametro verticale AB, nel quale ciascuna semiordinata

* *Dopo la prop. 25. lib. IV.* Collect. Math., *e nelle seguenti prop. 26, e 27.*

** Collect. Math. *nel luogo citato*.

ME producasi in N, sicchè la parte prodotta EN pareggi l'arco corrispondente AE, preso nella semicirferenza AEB dall' estremo superiore A ; e lo stesso si pratichi dall' altra parte del diametro AB : tutti questi punti N saranno allogati in una curva trascendente detta *cicloide volgare* o *Galileana* , di cui la genesi e l' equazione sono come quì appresso .

Il diametro AB del cerchio dividendo una tal linea curva DAK in due rami identici AD , AK n' è l' asse ; il punto A sommità di essa n' è il vertice , e n' è *base* la retta DK ove la medesima è terminata : che però indicando per x , y le sue coordinate AM, MN, e per $2r$ il diametro del cerchio, sarà l'ordinata ME nel semicerchio, corrispondente all' ascissa x, espressa da $\sqrt{(2rx-x^2)}$, che sarà il seno dell'arco EA; e quindi la EN verrà dinotata da $y - \sqrt{(2rx - x^2)}$, che essendo uguale all' arco EA , darà per la cicloide la seguente equazione

$$y = \sqrt{(2rx - x^2)} + \text{arc.sen.} \sqrt{(2rx - x^2)}$$

Essa poi si descriverà con moto continuo nel seguente modo , pel quale n' è anche congegnata una macchinetta ad eseguirlo.

Il circolo DRP il quale tocchi nel punto D la retta indefinita DBF , vada sulla medesima rotolando , serbandosi nel piano stesso , finchè essendosi adattati tutt' i punti della sua circonferenza su quella retta ne pervenga il punto D in K ; la curva descritta da un tal punto D sarà la *cicloide*.

Imperocchè primieramente risulta evidente , che la DB pareggi la semicirconferenza del cerchio BEA, come dalla condizione apposta al precedente luogo per essa rilevasi : rimane dunque a dimostrare , che per una qualunque ordinata NM , sia la parte NE , esterna al circolo generatore AEB intorno l' asse AB della cicloide, uguale all'arco corrispondente AE.

Or rappresenti INL il cerchio generatore quando il suo punto descrivente la cicloide è passato in N, sarà il suo arco NI uguale alla IK, e però l'arco NL supplemento di NI uguale alla IB. Ed essendo uguali gli archi IN, BE, il sono ancora le loro corde IN , BE , e gli angoli che queste comprendono con la MN ; sicchè risultando esse parallele, sarà la EN uguale alla BI ; e per conseguenza all' arco NL , o sia all'altro EA.

256. È chiaro dalla genesi precedente , che il cerchio che col suo punto D ha descritta la cicloide DAK , compita questa , possa, senza arrestare il suo movimento , continuare a scorrere lungo la retta indefinita DBF , descrivendo una seconda cicloide , una terza . . . ; e però considerandole come una sola curva possa questa venire intersegata da una retta in infiniti punti , come la sua natura di curva trascendente richiede .

257. E dalla medesima genesi rilevasi , che il centro del cerchio generatore debba nel movimento rotatorio di questo percorrere la retta CGH parallela alla base DBK della cicloide , a distanza del raggio di esso cerchio. Da che risulta potersi la cicloide concepir anche generata dall' angolo retto DCR, che equabilmente si aggiri d' intorno al suo vertice C verso il lato CR , mentre esso vertice C equabilmente vada scorrendo per la direzione del lato CR , e verso G , con la stessa velocità del punto D : per tali due movimenti questo punto D descriverà la *cicloide Galileana*. E la stessa genesi ne darà qualunque delle trocoidi , se tali velocità non sieno uguali.

Scolio.

258. Dalle descrizioni superiori, per moto continuo, della *spirale*, della *quadratrice*, e da quella or data della *cicloide* , è facile rilevare , che le genesi di tali curve sieno conformi fra loro ; mentre per ciascuna di esse esigesi la composizione del movimento rettilineo , e dell' angolare.

CAPITOLO V.

DE' LUOGHI GEOMETRICI ALLA RETTA, ANALITICAMENTE RILEVATI.

259. Siccome per risolvere un problema con metodo puramente geometrico, o anche col Cartesiano, giova talvolta scinderlo in due indeterminati, trattando una delle condizioni di esso per volta; sicchè dalla convenevole combinazione de' luoghi geometrici per ciascheduno di quelli risultino i punti soddisfacenti a tutte le condizioni del problema proposto, e se ne abbia però la soluzione, di che si è precedentemente ragionato (206); così pure possonsi adoperare talune acconce equazioni a due indeterminate rappresentanti proprietà della linea retta pel sito che ha con altre linee rette, o con le altre parti di una figura, affinchè dalla combinazione di esse risulti l' equazione determinata al problema proposto; o pure dal costruire ciascuna si abbiano nella loro intersezione i punti soddisfacenti al medesimo.

Or siffatte equazioni non essendo che le espressioni compendiate di proprietà della retta, risultanti da considerazioni di triangoli simili, ne segue, che a convenevolmente costruirle a quelli si ritorni. E coloro i quali, con poco avvedimento hanno preteso aver con quelle formole bandite dall' analisi de' problemi geometrici le proprietà de' triangoli simili, hanno con ciò dimostrato di averle poco considerate, e di ammettere una scienza senza principj, solo per soddisfare ad uno spirito innovatore in pura apparenza.

L' andamento puramente algebrico che terremo nelle ricerche che passiamo ad imprendere, fondato su pochi principj di Geometria, non ci farà mai perder di mira questa alla quale tendiamo; da che si vedrà risultarne chiarezza e brevità insieme, che in un argomento tante volte trattato da altri, in taluna parte non ravvisiamo.

260. Il punto non ha altra proprietà, che semplicemente quella del sito; e questo nel piano vien determinato dalle date distanze da due *direttrici*, o *assi* posti ad angolo (79) per lo più retto, come sempre il supporremo nelle seguenti ricerche, a meno che non fosse diversamente dichiarato; sicchè esso risulterà dall' intersezione di due parallele agli assi, alle rispettive distanze date da' medesimi (79). Or queste parallele avendo per proprietà caratteristica l' equidistanza de' loro punti dall' asse rispettivo, ne segue, che indicando per β la distanza dall' asse delle ascisse, e per α l' altra da quello delle ordinate, le corrispondenti equazioni ad esse saranno

$$y = \beta$$
$$x = \alpha$$

che sono le medesime di quelle al punto, che da essa vien determinato.

261. Che se suppongasi

$$\beta = o$$

la parallela all' asse delle x coinciderà con questo, la qual condizione si troverà algebricamente espressa dall' equazione

$$y = o$$

Il luogo del punto sarà in tal caso l' asse delle ascisse, ed esso risulterà dato dall' essere

$$y = o$$

E sarà poi

$$x = o$$

la condizione corrispondente all' annullamento della distanza α della parallela all' asse delle y, da questo; ed il luogo del punto sarà l' asse delle ordinate.

262. Avendo poi contemporaneamente luogo le condizioni

$$y = o$$
$$x = o$$

si esprimerà da esse il punto ove gli assi s' incontrano, cioè il *principio* delle ascisse *.

* *Abbiamo preferita la denominazione Euleriana* principio *delle ascisse a quella di* origine *delle ascisse, di cui si valse il Cramer, e co-*

263. Considerando ora una qualunque retta AP [*fig.30.*] inclinata agli assi, che incontri nel principio delle ascisse: è noto dagli *Elementi*, che debbano le sue ordinate serbare una costante ragione alle ascisse corrispondenti; e però indicando con α, β le coordinate di un punto assegnato della medesima, e con x, y quelle di un qualunque altro punto di essa, la sua equazione sarà $y = \frac{\alpha}{\beta} x$

264. E volendo al contrario passar da tale equazione alla retta ch' essa rappresenta, cioè costruirla, è evidente, che basti prendere sull' asse delle x, dal punto A, un' ascissa AC uguale ad α, e per l' estremo C condurre una parallela CE all' asse AY, ed uguale a β; la congiunta AE, indefinitamente prodotta, sarà la retta dell' equazione proposta.

265. Or essendo noto dalla Trigonometria che $\frac{\alpha}{\beta}$ sia la tangente dell' angolo PAX, in cui la retta AP inclinasi all' asse delle ascisse (*Trig.* §.20.), indicandola con k, l' equazione di sopra recata prenderà la seguente forma

$$y = kx$$

ed essa dovrà ammettere que' cambiamenti di segno, che ammette la tangente, e quindi il seno, e coseno dell' angolo, o arco cui corrisponde.

266. A discutere tali cambiamenti, si descriva dal principio A delle ascisse un cerchio qualunque MNRS [*fig.31*]: e cominciando a computar gli archi dal punto M verso N, nel qual quadrante la tangente è positiva, per esser positivo il seno Dd, e 'l coseno AD di un arco Md tra questi limiti compreso (*Trig.*§.21 e 22.); l' equazione per tutte le rette AP, che cadono da M ad N serberà esattamente la forma

$$y = \quad kx$$

e per essa saranno positive le x e le y.

me più comunemente or si usa, sembrandoci la voce origine dinotare una derivazione, che qui non ha luogo.

267. Che se producasi la Dd ($+y$) in d', nel quarto quadrante, la tangente k essendo negativa, l' equazione prenderà la forma

$$y = -kx$$

Ed essendo l' ascissa AD rappresentante il coseno la stessa di poc' anzi, e quindi positiva, l' ordinata Dd', che rappresenta il seno, dovrà esser negativa; che però, per la retta AP′ costituente con l' asse AX lo stesso angolo, che la AP, ma l' una al di sotto, l' altra al di sopra di un tal asse, dalle parti stesse, le ascisse saranno espresse uniformemente da $+x$, le ordinate poi, per la prima da $+y$, per l' altra da $-y$.

268. Ma quelle rette AP′, AP non avendo da alcuna condizione limitato il loro corso al punto A della AX, e potendo scorrere verso la parte sinistra della figura, anche al di sopra, o al di sotto della AX indefinita pel verso stesso; in tal caso corrispondendo il punto d''' all' estremo dell' arco Mdd''', supplemento dell' arco Md; dovrà risultar negativo il coseno dell' angolo MAd''', cioè esser negativa l' ascissa AD′ (x) corrispondente al punto d''', rappresentando essa il coseno di quell' angolo, e positiva l' ordinata D′d''' (y), che n' esprime il seno. Ond' è che la retta Ap', opposta alla AP′, sarà rappresentata dalla stessa equazione

$$y = -kx$$

ma non per le ordinate negative, sì bene per le ascisse.

269. Finalmente pervenendo al punto d'', per l' equazione alla AP prolungata al di sotto del punto A, verso p, essendo negativi ad un tempo il seno ed il coseno dell' arco che vi corrisponde, a computarli da M, cioè le y e le x, l' equazione per essa prenderà la forma

$$-y = -kx$$

cioè

$$y = \quad kx$$

identica a quella per l' altro ramo superiore AP di tal retta; ma però per le ordinate ed ascisse del pari negative.

270. Da ciò intendonsi le denominazioni date dagli analisti a' quattro angoli, che formano tra loro gli assi coordinati XX′, YY′, cioè a ciascun di quelli compresi nel primo quadrante MN, di *angolo delle ascisse ed ordinate positive*; nel secondo NR, di *angolo delle ascisse negative ed ordinate positive*; nel terzo RS, di *angolo delle ascisse, ed ordinate negative*. Finalmente nel quarto S M di *angolo delle ascisse positive ed ordinate negative*.

271. Adunque l' equazione ad una retta, che passa pel principio delle ascisse, viene generalmente espressa da

$$y = \pm kx$$

corrispondendo il segno + alla retta che cade nel primo e terzo quadrante, il — all'altra che cade nel secondo e quarto.

272. Dalle precedenti considerazioni risulta evidentemente assegnata la regola pe' segni, che corrispondono alle ascisse ed ordinate di una retta, o di qualunque linea curva, senza esservi bisogno di ricorrere alla nozione di opposizione di sito, assumendola come principio, senza dimostrarlo; che anzi un tal principio potrà derivarsi appunto dalle precedenti considerazioni, che ridurremo nella seguente

REGOLA.

Se da un punto, e sopra una retta di sito comincinsi a prendere le ascisse positive per un dato verso; le negative dovranno prendersi sulla stessa retta, e dallo stesso punto, nel verso contrario. E se le ordinate dal verso superiore ad essa retta si considerino come positive, quelle dal verso opposto, cioè al di sotto della medesima, dovranno prendersi negativamente.

273. Or suppongasi che il principio delle ascisse per la retta pAP [*fig.30.*] della equazione

$$y = kx \qquad (1)$$

passi in B, nel verso delle ascisse positive, alla distanza AB = a dal principio A già stabilito, e che aveva dato luogo a quell'equazione; è chiaro che avrassi tra le ascisse primitive AD (x) e le nuove BD (x') l' equazione

$$x = x' + a$$

e però l' equazione (1) prenderà la forma

$$y = k(x' + a)$$

Il contrario avverrebbe se il nuovo principio delle ascisse si prendesse dalla parte delle x negative, come in B′, nel qual caso essendo la AD = B′D — B′A, cioè $x = x' - a$, l' equazione (1) prenderà la forma

$$y = k(x' - a)$$

E si vede che nel primo di questi due casi, quando la $y = o$, si abbia $x' = -a$, e nel secondo $x' = +a$; il che riconduce la regola stessa poc' anzi data pe' segni della x.

274. Che se l' equazione fosse stata alla P′p', e quindi

$$y = -kx \qquad (2)$$

con lo stesso ragionamento si sarebbe rilevato per la nuova equazione riferita al principio B′ delle ascisse

$$y = -k(x' + a)$$

e riferendola al principio delle ascisse B,

$$y = -k(x' - a)$$

275. Sicchè l'equazione ad una retta riferita ad un principio di ascisse x diverso dall' incontro degli assi, e distante da questo punto per $\pm a$, verrà espressa nelle quattro forme seguenti

$$y = k(x + a) = kx + ka$$
$$y = k(x - a) = kx - ka$$
$$y = -k(x + a) = -kx - ka$$
$$y = -k(x - a) = -kx + ka$$

E quindi, indicando ka con h, essa verrà generalmente compresa nella formola

$$y = \pm kx \pm h$$

276. Ma come che le considerazioni a farsi sulla medesima sono sempre le stesse, comunque si prendano i segni del secondo membro; però la esprimeremo nella sola forma

$$y = kx + h$$

277. E da esse risulta, che il terzo termine h non valga a cambiare, che il solo principio delle ascisse, rimanendo la stessa la posizione relativa della retta rispetto agli assi; e però che tutte le equazioni che abbiano lo stesso coefficiente per la x appartengano a rette parallele fra loro.

278. È facile anche l' intendere, che a stabilire il sito della retta primitiva dell' equazione

$$y = kx$$

basti la sola conoscenza di k (264.); poichè essa parte da un punto dato, ch' è il principio delle ascisse; mentre a stabilir quello di una retta rappresentata dall' equazione

$$y = kx + h$$

bisogni conoscere oltre l'angolo d' inclinazione all' asse delle x, ancora il punto ov' essa l' incontra, il quale si determinerà facilmente col supporre la $y = o$; d' onde si ottiene $x = -\frac{h}{k}$: cioè che un un tal punto d' incontro disterà da quello dell' intersezione degli assi per la quantità $\frac{h}{k}$, e per quel verso che ne indicherà il segno di $\frac{h}{k}$ risultante da quelli ond' erano affetti k ed h nell' equazione alla retta; giusta la regola di sopra data (272).

279. Poste le precedenti generali considerazioni per la forma dell' equazione alla retta, passiamo ora ad esaminare le modificazioni ch' essa riceve per le diverse condizioni che le se appongono.

E primieramente suppongasi, che la retta dell' equazione

$$y = kx + h$$

debba passare pur un dato punto delle coordinate α, β; onde si abbia per esso $x = \alpha$, $y = \beta$, e però l' equazione alla retta in tal punto si trasmuterà in

$$= k\alpha + h$$

d' onde $$h = \beta - k\alpha$$

vale a dire, che tal retta incontra l' asse delle y alla distanza $\beta - k\alpha$ dal principio delle ascisse (273). Quindi sostituendo tal quantità in luogo di h nell' equazione generale di sopra esposta, questa rimarrà trasmutata nell' altra

$$y - \beta = h\,(x - \alpha)$$

la quale rappresenta in conseguenza una retta, che passa pel punto delle coordinate α, β, e fa coll' asse delle ascisse un angolo la cui tangente è dinotata da k.

280. E volendo geometricamente ottenere la precedente equazione, tirisi pel punto dato B [*fig. 32.*] la BR parallela all' asse AX, si avrà

$$\text{MR} : \text{BR} :: k : 1$$

ma è $$\text{MR} = \text{MN} - \text{BC} = y - \beta$$
$$\text{BR} = \text{AN} - \text{AC} = x - \alpha$$

Si avrà dunque la proporzione

$$y - \beta : x - \alpha :: k : 1$$

dalla quale si ottiene la stessa equazione di sopra.

281. Da ciò risulta, che l' equazione alla parallela tirata pel punto delle coordinate α, β ad una retta dell' equazione

$$y = kx + h$$

debba essere (277)

$$y - \beta = t\,(x - \alpha)$$

282. Se la retta espressa dall' equazione

$$y - \beta = k\,(x - \alpha)$$

passar dovesse per un altro punto dato B', delle coordinate α', β'; sicchè rimanga interamente determinata nel sito, si avrà la relazione

$$\beta' - \beta = k\,(\alpha' - \alpha)$$

e però $k = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}$; ond' è che l' equazione alla retta, che passa pe' punti delle coordinate α, β; α', β' sarà

$$y - \beta = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}\,(x - \alpha).$$

283. Il che potrebbesi ancora geometricamente comprovare nel seguente modo.

Sia LP la retta, che passa pe' punti dati B, B' delle coordinate α, β; α', β'. Condotta per l'un di essi la BQ parallela alla AX, sarà

$$BQ = CC' = \alpha' - \alpha,$$
$$B'Q = \beta' - \beta.$$

Or sieno AN, NM le coordinate di qualunque altro punto M della retta BB'. La BQ incontrando la MN in R, sarà

$$MR = y - \beta,$$
$$BR = x - \alpha.$$

Quindi essendo, pe' triangoli simili BRM, BQB',

MR : RB :: B'Q : QB

ed in simboli

$$y - \beta : x - \alpha :: \beta' - \beta : \alpha' - \alpha$$

si avrà per l'equazione alla BB'

$$y - \beta = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha)$$

284. Cor. Che se prendasi nella medesima retta un altro punto B'' delle coordinate α'', β'', essendo i punti B,B',B'' per diritto, dovrà aver luogo l'equazione

$$\frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} = \frac{\beta'' - \beta}{\alpha'' - \alpha}$$

che riducesi a

$$\beta(\alpha' - \alpha'') + \beta'(\alpha'' - \alpha) + \beta''(\alpha - \alpha') = o$$

285. Or se vogliasi l'espressione della retta interposta tra' punti dati B,B', cioè della loro distanza, essa si ha evidentemente nella formola

$$BB' = \sqrt{\left((\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2\right)}$$

286. Che però, se diventi zero il primo dei binomii sotto il radicale, la distanza de' punti sarà rappresentata semplicemente da $\beta' - \beta$, ed essi dovranno quindi trovarsi nella perpendicolare all' asse delle x; se al contrario sia zero l'altro binomio $\beta' - \beta$, tal distanza verrà espressa da $\alpha' - \alpha$, ed i punti si troveranno nella parallela a quell' asse.

Il che poteva anche rilevarsi dall' equazione

$$y - \beta = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha)$$

Poichè divenendovi zero l' $\alpha' - \alpha$, e facendosi però infinita la tangente dell'angolo, che la retta di essa equazione forma con l' asse dell' ascisse, ciò dinota, che la medesima gli sia perpendicolare; mentre al contrario, essendo zero $\beta' - \beta$, l' equazione vedesi ridotta ad $y = \beta$, ch' è per la parallela all' asse delle x alla distanza β (261.).

287. Sostituendo nell' espressione della BB', invece dell' un termine quadrato sotto al segno radicale, quello, che le corrisponde nell'altro di essi, per l' equazione ottenuta nel §. 282

$$\beta' - \beta = k(\alpha' - \alpha)$$

si avranno i due seguenti valori razionali della BB'.

$$BB' = (\beta' - \beta)\frac{1}{k}\sqrt{(1 + k^2)} = (\beta' - \beta)\frac{\text{seg.}\,\varphi}{\text{tan.}\,\varphi} = \frac{1}{\text{sen.}\,\varphi}(\beta' - \beta)$$

$$BB' = (\alpha' - \alpha)\sqrt{(1 + k^2)} = (\alpha' - \alpha)\,\text{seg.}\,\varphi$$

dal primo de'quali si ha il valore della distanza tra due punti dal conoscersi solamente le loro altezze, e l' angolo in cui la retta per essi incontra la retta di sito cui riferisconsi quelle altezze; e dall' altra si ha quel valore dal conoscersi un tal angolo, e la projezione della retta tra que' punti. E questa seconda espressione può riescire utilissima neltrattare analiticamente le quistioni geometriche nello spazio.

288. Or sieno
$$y = kx + h$$
$$y' = k'x' + h'$$
le equazioni a due rette LP, QR [*fig.33.*] riferite agli stessi assi, inclinandosi a quello delle ascisse l' una LP nell'angolo φ della tangente k, l' altra QR in quello φ' della tangente k'; che però non essendo parallele, dovranno incontrarsi.

E dovendo nel punto Y′ del loro incontro aver comuni le coordinate AX′, X′Y′, cioè esser la $x = x'$, $y = y'$; si avranno però di esse i rispettivi valori

$$x = \frac{h' - h}{k - k'} \quad , \quad y = \frac{kh' - k'h}{k - k'}$$

289. E se suppongasi una terza retta dell' equazione

$$y'' = k''x'' + h''$$

questa intersegherà la prima nel punto delle coordinate

$$x = \frac{h'' - h}{k - k''} \quad , \quad y = \frac{k''h - k''h}{k - k''}$$

Che però volendo, che questo punto d' intersezione sia lo stesso di quello delle prime due rette, è chiaro dover essere

$$\frac{h' - h}{k - k'} = \frac{h'' - h}{k - k''}$$

$$\frac{kh' - k'h}{k - k'} = \frac{kh'' - k''h}{k - h''}$$

ciascuna delle quali equazioni sviluppata, e ridotta condurrà, come doveva avvenire, essendo esse l' una conseguenza dell' altra, alla medesima equazione

$$h(k'' - k') + h'(k - k'') - h''(k - k') = o$$

ch' esprime la condizione perchè tre rette s' interseghino in un medesimo punto.

290. Volendo determinare l' angolo LY′Q, che le due rette, forman fra loro, è chiaro esser questo la differenza degli angoli Y′QX, Y′LX, ne' quali inclinansi respettivamente all' asse delle ascisse; che però essendo k', k le loro tangenti, e dinotando con t quella dell' angolo cercato LY′Q, si avrà

$$t = \frac{k' - k}{1 + kk'} \,.$$

291. Che se al contrario fosse noto l' angolo LY′Q, in cui l' una retta QY′ inclinasi all' altra LP, e si cercasse l' equazione di quella.

Prendendo dalla precedente equazione il valore d'

che sarà
$$k' = \frac{t + k}{1 - tk}$$
l' equazione rischiesta, per la retta Q′Y sarebbe

$$y = \frac{t + k}{1 - tk}x + h'$$

292. E se la retta QY′ passar dovesse in oltre pel punto delle coordinate α, β, la sua equazione diverrebbe

$$y - \beta = \frac{t + k}{1 - tk}(x - \alpha)$$

293. Che se l' angolo LY′Q fosse retto, divenendo infinita la t (*Trig.* §. 23.) il fratto $\frac{t + k}{1 - tk}$ ridurrebbesi a $-\frac{1}{k}$, e però le equazioni precedenti, che divengon quelle della perpendicolare alla LP, si trasmuterebbero nelle altre

$$y = -\frac{1}{k}x + h'$$

$$y - \beta = -\frac{1}{k}(x - \alpha)$$

Ma tali equazioni possono ottenersi più geometricamente nel seguente modo.

294. Essendo retto l' angolo LY′Q [*fig. 34.*], l' angolo Y′QL dovrà esser complemento dell' altro Y′LQ; e però essendo k la tangente di questo, quella del primo dovrà essere $\frac{1}{k}$, e quindi $-\frac{1}{k}$ l' altra del suo supplemento Y′QX (*Trig.* §. 23.), cioè dell' angolo che la Y′Q fa coll' asse delle ascisse; laonde l' equazione di quella retta risulterà della forma poc' anzi stabilita.

295. In oltre le coordinate del punto d' incontro della perpendicolare con la LP saranno le ridotte dal §. 288 col sostituire $-\frac{1}{k}$ a k', e però le seguenti

$$x = \frac{k(h' - h)}{1 + k^2} \quad , \quad y = \frac{k^2h' + h}{1 + k^2}$$

Dalle quali rimane determinato quel punto d' incontro.

296. E volendosi la grandezza della perpendicolare alla retta dell' equazione

$$y = kx + h$$

tra il punto d' incontro poc' anzi assegnato, ed un altro di essa perpendicolare delle coordinate α, β, bisognerà sostituire nella formola

$$\sqrt{\left((x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2\right)} \qquad (285)$$

le equivalenti espressioni per x, y, poc' anzi rinvenute.

Or in tal caso la quantità $x - \alpha = \frac{k(h'-h)}{1+k^2} - \alpha$ diviene $\frac{kh' - kh - \alpha - \alpha k^2}{1+k^2}$, nella quale essendo, per l' equazione della perpendicolare dal punto delle coordinate α,β,

$$k\beta = -\alpha + kh' \qquad (293)$$

facendo tal sostituzione si ha

$$x - \alpha = \frac{k(\beta - k\alpha - h)}{1+k^2}$$

e similmente si troverà

$$y - \beta = -\frac{\beta - k\alpha - h}{1+k^2}$$

delle quali quantità fattane la sostituzione nella formola

$$\sqrt{\left((x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2\right)}$$

e poi operandovi le convenevoli riduzioni, si avrà finalmente, per espressione della lunghezza richiesta,

$$\frac{\beta - k\alpha - h}{\sqrt{(1+k^2)}}$$

297. Ma questo risultamento può ottenersi con maggior semplicità, ed eleganza riflettendo, che nel triangolo rettangolo BCY' l' angolo in B [*fig.34.*] compreso dalla perpendicolare, e dall' ordinata del punto B sia lo stesso dell' ango-

lo φ, che la retta proposta fa coll'asse delle ascisse (77), e però si avrà (*Trig.74.*)

$$BY' = \frac{BC}{\text{seg.}B}.$$

Ciò posto essendo $x = \alpha$ l' equazione alla BG,
ed $y = kx + h$ quella di PL;
nel punto d' incontro C si avrà

$$y = CG = k\alpha + h.$$

Quindi $BC = BG - CG = \beta - (k\alpha + h)$;
ed è poi seg. $\varphi = \sqrt{(1 + \text{tang.}^2\varphi)} = \sqrt{(1 + k^2)}$
Risulterà dunque

$$BY' = \frac{\beta - (k\alpha + h)}{\sqrt{1+k^2}}.$$

298. Ritornando alle espressioni delle x, y pel punto d' incontro di due rette rilevate nel §.288. vedesi, che essendo $k = k'$, debbano risultar infinite le x, y, dal che si scorge, che le rette debbano in questo caso esser parallele fra loro, come si ha dagli Elementi di Geometria; poichè tali due rette s' inclinano sotto angoli uguali all' asse delle x.

299. Ma prima di lasciare quest' argomento, che abbiamo cercato esporre nella maniera più elementare, che si poteva, accenneremo brevemente qualche cosa per le precedenti equazioni alla retta, supposte le coordinate oblique.

Sia dunque φ l' angolo in cui inclinasi la retta PL [*f.35.*] all' asse delle x, e θ quello degli assi, o delle coordinate, cioè YAX; condotta da H la HF parallela a quell' asse, ed indicando la HA per h, si avrà

$$MF = y - h \quad , \quad HF = x$$
$$ang.YAX = ang.\ YHF = \theta$$
$$ang.MHF = \ldots\ldots\ \varphi$$
$$ang.HMF = YHM = \theta - \varphi.$$

e però essendo nel triangolo BMF (*Trig.* §.77.)

$$MF : FB :: \text{sen.}\ \varphi : \text{sen.}\ (\theta - \varphi)$$

cioè $y - b : x = \text{sen.}\varphi : \text{sen.}(\theta - \varphi)$

si otterrà però l' equazione di PL

$$(y-h)\,\text{sen.}(\theta-\varphi)=x\,\text{sen.}\varphi$$

o sia

$$y=\frac{\text{sen.}\varphi}{\text{sen.}(\theta-\varphi)}x+h.$$

E se pongasi per brevità il rapporto costante $\frac{\text{sen.}\varphi}{\text{sen.}(\theta-\varphi)}=k$ la precedente equazione prenderà la stessa forma finora considerata.

$$y=kx+h$$

in cui però la k non più rappresenta la tangente trigonometrica dell' angolo onde la retta inclinasi all' asse delle ascisse, com' era per lo innanzi; sì bene il *rapporto dei seni degli angoli, ch' essa fa coll' asse delle ascisse, e con quello delle ordinate*; e questo rapporto tornerà ad esprimere una tangente quando un degli angoli sia complemento dell' altro, cioè quando l' angolo degli assi fosse retto.

300. E sarà facile modificarla per tutt' i casi precedentemente considerati; e rilevarne ancor quelli ne'quali essa non cambj di forma, quando ciò non riesca avvertirlo direttamente, come avviene, per esempio, per l' equazione alla retta, che passi per un punto dato (280), e sia ancor parallela ad una retta data, o pur passi per due punti dati (283.).

301. E volendo la distanza tra questi riferita alle coordinate obblique sotto l' angolo θ, è manifesto ch' essa venghi espressa (*Trig.* §. 79.) da

$$\sqrt{\left((x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-2(x-\alpha)(y-\beta)\cos.\theta\right)}$$

302. E ciò può bastare pel presente argomento, di cui più appresso si vedrà in che modo convenga usare nelle ricerche geometriche, sia teorematiche, sia problematiche.

CAPITOLO VI.

Particolari artifizj per la costruzione delle equazioni complesse alla retta.

303. Si è già veduto, che la forma nella quale dee presentarsi l' equazione alla retta sia generalmente

$$y=kx+h$$

e si è pur mostrato come essa debba geometricamente costruirsi, cioè esibirla in effetto da' suoi determinanti k, h (266.). Or le quantità k, h risultano talvolta, sia per gli apparecchi geometrici, che ha bisognato praticare per pervenire a derivarle da altre date, sia per le operazioni del calcolo algebrico a ciò occorse, sì complesse, che troppo lunga, e nojosa riescirebbe la costruzione dell' equazione ottenuta, ed assai inelegante la soluzione del problema, che l' ha somministrata, da doverne però abbandonare ogni pensiero.

A rimuovere siffatto inconveniente stabiliremo le seguenti considerazioni.

304. Suppongasi un'equazione complessa qualunque ad una retta ridotta nella forma

$$(A+B)y+(C+D)x+(M+N)=o \qquad (1)$$

ove $A+B$, $C+D$, $M+N$ rappresentino qualunque polinomii, che arbitrariamente siensi scissi ciascuno in due parti: è chiaro, che essendo indeterminate le x, y, si potrà prender per l' una un qualunque valore, non escluso il *zero*, o pur che sia rappresentato da una relazione arbitraria, espressa da

$$Py+Qx+R=o \qquad (2)$$

la quale per nulla contraddice all' equazione proposta; ma solamente valendo combinata con quella a determinare le x,y, non farebbe altro, che assegnare quel punto ove le rette espresse dalle equazioni (1), (2) s' intersegano.

305. Cominciamo dal supporre ricavata tal relazione da' termini della stessa equazione proposta, e sia essa dinotata da

$$Ay + Cx + M = o \qquad (3)$$

ne deriverà per conseguenza ancor l' altra

$$By + Dx + N = o \qquad (4)$$

Or di queste due relazioni, esprimenti due rette, costruendone ciascuna, rimarranno determinati dall' incontro di esse i valori delle x, y, i quali dovranno corrispondere ad un punto della retta dell' equazione proposta.

Sicchè operando su' termini dell' equazione stessa un qualunque altro arbitrario scindimento, come di

$$Ay + Cx + N = o \qquad (5)$$
$$By + Dx + M = o \qquad (6)$$

o in qualsivoglia altra guisa, e però ottenendosi dal costruir queste novelle equazioni un altro punto della retta corrispondente alla proposta, una tal retta risulterebbe geometricamente assegnata.

306. Ed il quì sopra esposto potrebbe ancora verificarsi ricavando dalle equazioni (1), (3), (4), o pure dalle (1), (5), (6) l' equazione di condizione di cui è stato detto nel §. 289; lo che tralasciamo di fare, riducendosi a puro, e semplicissimo calcolo.

307. Nel caso, che si fosse supposta la x, o la y uguale a *zero*, l' altra delle relazioni sarebbe stata

$$(A + B)\, y + M + N = o$$
$$(C + D)\, x + M + N = o$$

e nel primo caso si sarebbe avuto per un de' punti della retta quello ov' essa intersegava l' asse delle y, nell'altro quello ove intersegava l' asse delle x: e se ad un tempo si fosse fatta l' una, e poi l' altra di tali supposizioni, i punti poc' anzi detti avrebbero fissata a dirittura la posizione della retta, che rimarrebbe però per tal modo costruita. Ma la scelta di queste relazioni dipende dalla sagacia, ed espertezza dell' analista; ed i problemi, che in appresso recheremo, ove

questo metodo verrà adoperato, e quelli, che occorreranno negli *Opuscoli*, serviranno a confermare ciò, che abbiamo accennato, ed a sviluppare nell' animo de' giovani analisti lo spirito d' invenzione per la scelta di questi mezzi più opportuni, non potendosi ciò con regole stabilire.

308. Lo stesso modo di costruzione potrà usarsi, se l'equazione appartenesse ad una retta parallela ad un degli assi, ed espressa quindi nella forma

$$(A + B)\, y + (M + N) = o$$

Poichè assumendo un' equazione arbitraria in x, y, che si stimi la più propria, affinchè combinata con la proposta ne risulti l' altra dalla cui costruzione, e da quella dell' assunta si abbia un punto della parallela, risulterà costruita ancor questa.

309. Ma prima di recare un qualche esempio atto a dilucidare il precedente modo di costruzione, non sarà fuori proposito, poichè esso è la prima volta, che si vede esposto in forma didascalica, di addurne in comprova una dimostrazione diretta, ricavata dagli ovvj principj su'quali sono fondati i metodi delle *eliminazioni* delle incognite.

310. Rilevasi da questi, che comunque combininsi due equazioni a due incognite, quella che risulta, e le altre successive, che da novelle combinazioni ottengonsi, debbano serbar sempre per le incognite gli stessi valori. Adunque se le primitive equazioni rappresentassero rette, le espressioni risultanti nel modo anzidetto, sebbene esprimeranno rette diverse da quelle, dovranno però queste intersegarsi tutte in un medesimo punto, sicchè a tutte le intersezioni di esse rette due a due debbano corrispondere le stesse coordinate; che però scegliendo due qualunque delle equazioni a tali rette, le più semplici, e costruendole effettivamente, il punto della loro intersezione si apparterrà a qualunque altra delle rette di quelle equazioni.

311. Così rappresentando

$$Ay + Bx + C = o \qquad (1)$$

l' equazione ad una retta, ove i coefficienti A, B, e 'l termine noto C sieno espressioni sì complesse, da renderne difficile la diretta costruzione, assumendo un' altra equazione

$$ay + bx + c = o \qquad (2)$$

ad una retta riferita a' medesimi assi, ove taluna delle a,b,c può ancora esser *zero*, e prendendo la somma, o la differenza di queste equazioni, ne risulteranno le altre due

$$(A + a)y + (B + b)x + (C + c) = o \qquad (3)$$
$$(A - a)y + (B - b)x + (C - c) = o \qquad (4)$$

le quali esprimono due nuove rette, che debbono intersegarsi con le (1), (2) nello stesso punto: che però se costruiscasi l' intersezione di esse tra loro, o pur dell' una di esse con la (2), prendendo la combinazione di più facile costruzione, dovrà risultarne un punto corrispondente alla retta (1). Ed assegnando nel modo stesso un altro punto della retta proposta, assumendo un' altra equazione, la medesima rimarrà completamente determinata.

312. A rischiarare ciò, che finora si è detto, può bastare per ora il seguente

ESEMPIO.

313. Debbasi costruir la retta espressa dall' equazione

$$(ac - bd)y - (ad - bc)x + cd(a - b) = o \; (1)$$

Assumasi per relazione arbitraria la seguente

$$(ac + bd)y - (ad + bc)x + cd(a + b) = o \qquad (2)$$

si avrà prendendo la somma, e la differenza delle due equazioni (1), (2), fatte le convenevoli riduzioni,

$$cy - dx + cd = o \qquad (3)$$
$$dy - cx + cd = o \qquad (4)$$

le quali equazioni essendo di semplicissima forma, e però di ovvia costruzione, daranno nel seguente modo un punto della retta dell' equazione (1).

Dall' equazione (3)

per $\quad y = o \quad$ si ha $\quad x = c$

e per $\quad x = o \; . \; . \; . \; y = -d$

e però supponendo essere OX, OY [*fig.36.*] gli assi coordinati, prendasi nell' asse OX, nel verso delle $+x$, la $OD = c$, e sull' asse OY, nel verso delle $-y$, la $OH = d$; sarà HD la retta corrispondente all' equazione (3).

Similmente per l'equazione (4)

per $\quad y = o \quad$ si ha $\quad x = d$

e per $\quad x = o \; . \; . \; . \; . \; y = -c$

e quindi tagliata nel senso delle $+x$ la $Od = d = OH$, e nel verso delle $-y$ la $Oh = c = OD$, si avrà la retta dh dell' equazione (4); ed il punto P d' intersezione delle rette HD (3), ed hd (4) sarà un punto della retta (1).

Or prendasi per seconda relazione arbitraria la seguente

$$acy + bcx - bcd = o$$

Che sottratta dalla proposta dà l' altra equazione

$$bdy + adx - acd = o \qquad (5)$$

e queste riduconsi alle seguenti

$$ay + bx - bd = o \qquad (6)$$
$$by + ax - ac = o \qquad (7)$$

la costruzione delle quali si otterrà come precedentemente; cioè essendo, dalla (6)

per $\quad y = o \quad , \quad x = d$

e per $\quad x = o \; . \; . \; . \; . \; y = \frac{bd}{a}$

e trovandosi già tagliata sull' asse delle $+x$ la $Pd = d$, prendasi in quello delle $+y$ la $OK = \frac{bd}{a}$, cioè terza proporzionale dopo a, b, d, congiunta la dh sara questa la retta dell' equazione (6).

In oltre dall' equazione (7) si ha

per $\quad y = o \quad ; \quad x = c$

e per $\quad x = o \; . \; . \; . \; . \; y = \frac{ac}{b}$

ed avendosi già sull'asse delle x la $OD = c$, taglisi su quello delle $+y$ la $OB = \frac{ac}{b}$, cioè terza proporzionale dopo b, a, c, la retta BD corrisponderà all' equazione (7); ed il punto p d' intersezione delle rette dA, DB ne dovrà dinotare un altro appartenente alla retta della proposta equazione (1). Laonde una tal retta sarà la Pp.

314. Questo argomento, sul quale, per difetto nelle dottrine algebriche, e geometriche, sonosi veduti cespicare taluni nostri novelli professori, verrà in appresso rischiarato da altri opportuni esempj, all'occasione di problemi la cui risoluzione ha condotto ad equazioni, che esigevano cotesto metodo di costruzione *. Ed esso verrà reso ancora più agevole, mediante altri principj algebrico-geometrici, che in appresso stabiliremo.

* *Si potrà da ora riscontrare all' uopo la soluzione elegantissima data dal sig. Nicola Trudi del problema d'* iscrivere in una sezione conica un poligono coi lati tendenti a punti dati. *(V. produzioni relative al programma ec.)*

CAPITOLO VII.

Del cerchio considerato come un luogo geometrico, e della sua combinazione con una retta.

315. Siccome la sola definizione della linea retta ci ha condotti alla sua equazione, così la sola definizione del cerchio ne offre l'equazione ad esso. Poichè ponendo per gli assi delle coordinate due diametri l' un l' altro perpendicolari, e prendendo per principio delle x, come naturalmente si presenta, il punto fisso dal quale debbono essere equidistanti tutti quelli della circonferenza, e ch' è l' intersezione di que' diametri, o assi, cioè il centro del cerchio, si vede dover per ognuno di que' punti aver luogo la seguente equazione

$$y^2 + x^2 = r^2$$

essendo ciascuna di quelle distanze espressa da $\sqrt{(y^2 + x^2)}$,

ed $$y^2 = r^2 - x^2 = (r + x)(r - x)$$

che coincide con la proprietà del cerchio incidentemente dimostrata da Euclide nella prop. 14. El. II, e di proposito nel caso 2 della prop. 33. III, cioè, che:

Il quadrato della perpendicolare al diametro da un punto della circonferenza è uguale al rettangolo delle parti in cui rimane il diametro da quella diviso.

216. La semplice ispezione dell' equazione

$$y^2 + x^2 = r^2$$

fa pur vedere, che in essa possonsi scambiare le x con le y; di più, che se $x = o$, sarà $y = \pm r$, e se $x = \pm r$, sarà $y = o$; cioè, che nel principio delle x corrisponda la massima ordinata; e che l' ordinata è zero ne' due estremi delle ascisse positiva, e negativa uguali al raggio, ch' è pure la massima ascissa. Da che si vede, che una tal curva vien contenuta tra' limiti $+ r$, e $- r$, si per le x, che per le y, e che abbia però quattro parti identiche racchiuse ne' quattro angoli degli assi. Ed è facile ancora rilevarne, che ad ogni ordinata positiva debba corrispondere l' uguale negativa, sicchè:

Ogni perpendicolare ad un diametro prodotta fino a divenir corda del cerchio deve rimaner bisecata dal diametro stesso (3.III.).

317. Che se il principio delle x s' intenda trasferito per r sul diametro corrispondente, cioè in uno degli estremi di esso, è chiaro, che ciascuna delle nuove ascisse x' si farà uguale ad $x + r$, e però essendo $x = x' - r$, l'equazione sopra rilevata si trasmuterà nell' altra

$$y^2 - 2rx' + x'^2 = o$$

ch' esprime algebricamente la stessa proprietà di poc' anzi.

318. Estendendo il caso particolare di cambiamento del principio delle x considerato nel §. antecedente, si potrà generalmente supporlo dilungato dal centro per la distanza m, sicchè ponendo $x' + m$ invece di x nell' equazione semplicissima

$$y^2 + x^2 = r^2$$

essa prenderà la forma

$$y^2 + (x' + m)^2 = r^2$$

ossia

$$y^2 + x'^2 + 2mx' + m^2 = r^2.$$

E potendosi nel cerchio, come si è di già detto, scambiare le y nelle x, sicchè la stessa modificazione poteva ottenersi col porvi $y' + n$, invece di y, l' equazione allora sarebbe

$$y'^2 + x^2 + 2ny' + n^2 = r^2 \qquad (2)$$

319. Finalmente se queste due sostituzioni si facciano contemporaneamente, nel qual caso i nuovi assi delle x, e delle y, rimanendo paralleli ai primi, cioè perpendicolari fra loro potranno trovarsi o dentro, o fuori il cerchio, l' equazione al cerchio prenderà la seguente forma generalissima

$$y'^2 + 2ny' + x'^2 + 2mx' + n^2 + m^2 = r^2 \qquad (3)$$

o, tolti gli apici, introdotti a solo oggetto di maggior di-

stinzione

$$y^2 + 2ny + x^2 + 2mx + n^2 + m^2 = r^2 \qquad (3)$$

ed il principio delle ascisse sarà in tal caso distante dal centro per la quantità $\sqrt{(m^2 + n^2)}$.

320. La precedente equazione generale al cerchio si avrebbe potuto anche ottenere a dirittura da principio, riferendo la curva a due assi ortogonali qualunque. Ed in vero dinotando con α, β le coordinate del centro rispetto a tali assi, e per x, y quelle di un punto qualunque della circonferenza, si avrà la distanza di tali punti espressa da

$$\sqrt{\left((y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2\right)}$$

che dovendo pareggiare il raggio del cerchio, produrrà per esso l' equazione

$$(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = r^2$$

cioè sviluppandola

$$y^2 - 2\beta y + x^2 - 2\alpha x + \beta^2 + \alpha^2 - r^2 = o$$

identica alla già ottenuta nel numero precedente.

321. La differenza de'segni ne'termini affetti dalle y, x nelle due equazioni, non implica diversità tra esse, dipendendo solamente dal sito degli assi rispetto al centro, il che rende le α, β, o entrambe positive, o pur negative, o l' una del segno contrario all' altra. E dal ragionamento fatto nel §. 319, ognuno da se rileva, che le sostituzioni eseguite pel cambiamento degli assi, di $x + m$, ed $y + n$ in luogo di x, e di y potevano essere a seconda dei casi $x \pm m$, ed $y \pm n$. Sicchè in generale a que'termini dell' equazione al cerchio può darsi il doppio segno, e quindi esprimerla per

$$(y \pm \beta)^2 + (x \pm \alpha)^2 = r^2$$

o pure sviluppandola

$$y^2 \pm 2\beta y + x^2 \pm 2\alpha x + \beta^2 + \alpha^2 - r^2 = o$$

ove indicando $\pm 2\beta$ per B, $\pm 2\alpha$ per C, e $\beta^2 + \alpha^2 - r^2$ per D, essa prenderà la forma nella quale suole generalmente esprimersi

$$y^2 + By + x^2 + Cx + D = o$$

322. Per tanto dalla genesi della precedente equazione si rileva, 1°, che i termini y^2, x^2 debbano essere essenzialmente positivi, ed affetti dal coefficiente 1 *; 2°, che i termini By, Cx, che contengono le prime potenze delle coordinate possano essere indifferentemente positivi, o negativi; 3°, e che l' ultimo termine D sarà positivo se $\beta^2 + \alpha^2$, che dinota la distanza del centro dal principio delle coordinate, sia maggiore di r^2, quadrato del raggio, o sia se un tal principio cada fuori del cerchio, ed al contrario risulterà negativo, se $\beta^2 + \alpha^2$ sarà minore di r^2, o sia, che quel punto cada dentro il cerchio. E poichè si avrebbe $\beta^2 + \alpha^2 = r^2$, e quindi $\beta^2 + \alpha^2 - r^2 = o$, se il principio delle ascisse si trovasse sulla circonferenza del cerchio; dovrà in questo caso esser $D = o$, e l' equazione generale prenderà la seguente forma

$$y^2 + By + x^2 + Cx = o$$

323. Passando l' un degli assi pel centro, se fosse quello delle x, nel qual caso $\beta = o$, si avrebbe

$$y^2 + (x - \alpha)^2 = r^2$$

ed essendo quello delle y, sarebbe $\alpha = o$, e quindi

$$(y - \beta)^2 + x^2 = r^2$$

e però nel primo caso l' equazione al cerchio avrà la forma

$$y^2 + x^2 + Cx + D = o$$

---

* *Una tal condizione equivale a quella di aver lo stesso coefficiente; mentre se l' equazione fosse a cagion d' esempio*

$$ay^2 + ax^2 + by + cx + d = o$$

divisa tutta per a si ridurrebbe alla forma suddetta

$$y^2 + x^2 + \frac{b}{a}y + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = o.$$

Ed é ancor manifesto, che nell' equazione al cerchio non possa mancare alcun de' termini y^2, x^2, cioè quelli, che contengono le seconde potenze delle coordinate,

nell' altro

$$y^2 + By + x^2 + D = o$$

che corrispondono alle già assegnate nel §. 318.

324. Or nel primo di questi casi è $D = \alpha^2 - r^2$; e però se il principio delle ascisse cada sulla curva si avrà $\alpha = r$, quindi $D = o$, e l' equazione al cerchio diviene

$$y^2 + x^2 - 2rx = o$$

ossia

$$y^2 + x^2 + Cx = o$$

e nell' altro caso, cadendo pur sulla curva il principio delle ascisse, si troverebbe essere

$$y^2 - 2ry + x^2 = o$$

ed

$$y^2 + By + x^2 = o$$

325. Finalmente se ambedue gli assi passassero pel centro, si avrebbe contemporaneamente $\alpha = o$, $\beta = o$, e l' equazione generale si ridurrebbe alla semplicissima

$$y^2 + x^2 = r^2.$$

326. Dopo aver esaminata l' equazione generale al cerchio, e le forme diverse nelle quali essa può presentarsi, la prima considerazione, che ci si offre, è di conoscere in quanti punti una retta possa intersegare il cerchio.

Sieno per tanto

$$y^2 + By + x^2 + Cx + D = o$$

ed

$$y = kx + h$$

le equazioni rispettive a tali linee riferite agli stessi assi.

Essendo ne' punti d' intersezione le x, y comuni alle due linee, è chiaro, che l' eliminata in x, o in y tra le equazioni al cerchio, ed alla retta, che risulterà della forma

$$x^2 + px + q^2 = o$$

avrà per radici due valori della x corrispondenti a due punti d' intersezione, se risultino reali; e nel caso che sieno ancora uguali, tali punti si raccoglieranno in un solo, che sarà quello di contatto della retta col cerchio.

327. Quest' ultima conseguenza conduce a risolvere il

problema di : *tirar la tangente al cerchio per un punto dato.*

Presi a tal' effetto per assi due diametri ortogonali , l' equazione del cerchio sarà

$$y^2 + x^2 = r^2$$

e supponendo , in primo luogo , che il punto dato M stia [*fig.37.*] sulla stessa curva , s' indichino con x', y' le sue coordinate, e con k l' ignota tangente trigonometrica dell' angolo , che la richiesta tangente del cerchio fa con l' asse delle ascisse ; sarà

$$y - y' = k(x - x') \qquad (1)$$

l' equazione per tal retta (280), che risulterà assegnata, e costruibile col determinar la k . Ad ottener ciò , s' immagini, che la retta (1) invece di esser tangente del cerchio lo interseghi in qualunque altro punto M' ; dinotando con x'', y'' le coordinate di questo punto , l' equazione della retta , che passa pei punti M , M' , sarà

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x') \qquad (2)$$

Or se la retta MM' giri intorno al punto M, fino a confondersi colla retta (1) , cioè colla tangente in M , gli angoli , che queste rette formeranno allora coll' asse delle ascisse diverranno eguali , e si avrà (282)

$$k = \frac{y' - y''}{x' - x''} \qquad (3)$$

Ciò posto, poichè i punti M, M' si trovano entrambi sul cerchio , dovranno verificarsi le relazioni

$$y'^2 + x'^2 = r^2$$
$$y''^2 + x''^2 = r^2$$

e sottraendo la seconda di esse dalla prima , si ha

$$y'^2 - y''^2 = -(x'^2 - x''^2)$$

che può mettersi sotto la forma

$$\frac{y' - y''}{x' - x''} = -\frac{x' + x''}{y' + y''}.$$

Quindi per l' equazione (3) avremo

$$k = -\frac{x' + x''}{y' + y''}$$

ove facendo

$$x'' = x' \text{ , ed } y'' = y'$$

come dev' essere nel contatto , risulterà

$$k = -\frac{x'}{y'}. \qquad (4)$$

In tal modo determinata la k , giacchè le x', y' non sono che le note coordinate del dato punto M , l' equazione (1) potrà esser costruita, e la retta , che ne risulta sarà la tangente cercata del cerchio nel punto M .

328. Sostituendo per tanto il valore di k in (1), si ha per equazione della tangente nel punto del cerchio , che ha per coordinate x', y'

$$y - y' = -\frac{x'}{y'}(x - x') \qquad (5)$$

Ma quest' equazione può mettersi sotto una forma più semplice , giacchè trasportando l' y' nel 2° membro si ha

$$y = -\frac{x'}{y'}x + \frac{y'^2 + x'^2}{y'}$$

ed è poi $y'^2 + x'^2 = r^2$

quindi l' equazione della tangente diverrà

$$\left.\begin{array}{ll} & y = -\dfrac{x'}{y'}x + \dfrac{r^2}{y'} \\ \text{o pure} & yy' + xx' = r^2 \end{array}\right\} (6)$$

nella qual forma viene più frequentemente usata.

329. Adunque tirando dal punto dato M una retta , che faccia coll' asse delle ascisse un angolo , la cui tangente trigonometrica sia $-\frac{x'}{y'}$, questa retta toccherà il cerchio , e rimarrà così risoluto il problema proposto.

330. Lo stesso può ancora più elegantemente ottenersi costruendo l' una delle equazioni (6) , ch' esprime la retta medesima . In fatti passando essa pel punto dato M , basta per

determinarla assegnarne un altro punto. Or quell' equazione, facendovi $y = o$, riducesi ad

$$x = \frac{r^2}{x'} \qquad (7)$$

adunque : *La tangente incontra l' asse delle ascisse ad una distanza dal centro terza proporzionale dopo l' ascissa dal centro, ed il raggio.*

331. Considerando l'equazione della tangente sotto la prima delle forme (6) si vede (293), ch' essa sia perpendicolare alla retta dell' equazione

$$y = \frac{y'}{x'} x$$

la quale, com' è chiaro, passa pel principio delle ascisse, cioè pel centro, e per lo stesso punto (x', y') *; vale a dire: *La tangente è perpendicolare al raggio, che passa pel contatto.*

332. Che se il punto fosse dato fuori della curva, il problema della tangente rimarrà risoluto dalla stessa equazione (6). In fatti chiamando α, β le sue coordinate, ed x', y' quelle del punto cercato di contatto, l' equazione della tangente in tal punto sarà (328)

$$yy' + xx' = r^2$$

E dovendo una tal retta passare pel punto (α, β), si avrà

$$\beta y' + \alpha x' = r^2 \qquad (8)$$

ove le x', y' sono incognite. Ma poichè il punto (x', y') è sul cerchio. si ha

$$y'^2 + x'^2 = r^2 \qquad (9)$$

combinando dunque quest' ultima equazione colla precedente si otterranno i valori delle incognite x', y' ; e si avrà così sul cerchio il punto cercato (x', y'). In oltre dovendo i valori di x', ed y' ottenersi per equazioni di 2° grado, do-

* *Da qui innanzi useremo una tale abbreviazione, per indicare il punto delle coordinate, che gli corrispondono, dinotando per prima di esse l' ascissa.*

vranno però risultarne due punti di contatto ; e quindi *due tangenti potranno condursi al cerchio da un dato punto.*

333. Questi punti di contatto si potranno ancora ottenere con più facilità costruendo i luoghi geometrici, che rappresentano isolatamente le equazioni (8), (9), l' ultima delle quali non è che lo stesso cerchio dato ; e l' altra, ch' è ad una retta, potrà divenire più semplice facendo passare un degli assi, per esempio, quello delle ascisse, per lo stesso punto dato ; ed avendosi per tal modo $\beta = o$, l' equazione si ridurrà ad

$$x' = \frac{r^2}{\alpha}$$

ch' esprime una parallela all' asse delle ordinate, distante dal centro per la terza proporzionale dopo la congiungente del centro stesso col punto dato, ed il raggio; il che ritorna alla proprietà della tangente il cerchio dimostrata nel §.330. Questa parallela intanto segherà il cerchio in due punti (326) ; e le rette, che uniscono questi punti col punto dato saranno entrambe tangenti del cerchio.

334. L' equazione trovata per la tangente del cerchio nel punto (x', y') è riferibile all' equazione di questa curva nella forma semplicissima

$$y^2 + a^2 = r^2$$

Ma se l' equazione al cerchio fosse la generale

$$y^2 + By + x^2 + Cx + D = o$$

si troverebbe collo stesso procedimento, che l' equazione della tangente del cerchio nel punto (x', y') debba essere

$$(2y' + B) y + (2x' + C) x + By' + Cx' + 2D = o$$

335. Poste le precedenti considerazioni locali, delle quali occorrerà usare nelle ricerche geometriche, che trattansi col metodo algebrico, continueremo a dimostrare altre principali proprietà del cerchio, già note dagli Elementi ; onde si vegga ancora la corrispondenza del metodo geometrico puro con quello che ora usiamo.

336. Dagli estremi A, B di una corda del cerchio s' inflet-

tano a qualunque punto C della circonferenza le AC , CB, e vogliasi determinar l'angolo ACB .

Preso a tal effetto per asse delle ascisse la stessa AB , e per quello delle ordinate la perpendicolare ad essa nel punto A , si dinotino con α , β le coordinate del centro O.

L' equazione al cerchio sarà (322)

$$y^2 - 2\beta y + x^2 - 2\alpha x = o \qquad (1)$$

ed indicando con x' , y' le coordinate del punto C, le equazioni delle rette AC , BC saranno rispettivamente

$$y = \frac{y'}{x'}\,x \qquad (2)$$

$$y = \frac{y'}{x'-2\alpha}\,(x-2\alpha)\,^* \qquad (3)$$

osservando che le coordinate del punto B sono espresse da 2α , e *zero* . Ciò posto calcolando (290) la tangente dell' angolo compreso dalle rette (2) , (3) , trovasi

$$\text{tang.C} = \frac{\dfrac{y'}{x'-2\alpha} - \dfrac{y'}{x'}}{1 + \dfrac{y'}{x'-2\alpha} \times \dfrac{y'}{x'}} = \frac{2\alpha y'}{y'^2 + x'^2 - 2\alpha x'}$$

* *Essendo* α , *e* zero *le coordinate del punto B , ed* x' , y' *quelle del punto C , l' equazione della retta BC , che passa per questi due punti , modellata sulla formola*

$$y-\beta = \frac{\beta-\beta'}{\alpha-\alpha'}(x-\alpha)$$

esposta nel §. 282 , *sarebbe*

$$y-o = \frac{o-y'}{2\alpha-x'}(x-2\alpha)$$

che riducesi , come sopra , ad

$$y = \frac{y'}{x'-2\alpha}(x-2\alpha)$$

e ciò sia di norma per tutt' i casi simili , giacchè ne' risultamenti non daremo da ora innanzi , che le espressioni convenevolmente ridotte sulle formole , che si citeranno.

Ma trovandosi sul cerchio il punto C , cioè il punto (x', y'), si ha dalla (1)

$$y'^2 - 2\beta y' + x'^2 - 2\alpha x' = o$$

e quindi

$$y'^2 + x'^2 - 2\alpha x' = 2\beta y'$$

si avrà perciò

$$\text{tang. C} = \frac{2\alpha y'}{2\beta y'} = \frac{\alpha}{\beta}$$

d' onde rilevasi, che l'angolo C sia di costante grandezza, ovunque prendasi il punto C sull' arco ACB . In conseguenza

Tutti gli angoli compresi nella stessa porzione di cerchio sono eguali fra loro.

337. Essendo tang. $C = \frac{\alpha}{\beta} = \text{tang.AOD} = \text{tang.}\frac{\text{AOB}}{2}$ ne risulta ancora , che

L' angolo al centro è doppio di quello alla circonferenza , poggianti sullo stesso arco (20.*El.III.*).

338. Si è detto quì innanzi *ovunque prendasi il punto C nell' arco ACB*, per essersi considerata nel calcolo come positiva l'ordinata y' del punto C; ma se questo punto si prenda sull' arco AC'B, ch' è nel verso delle ordinate negative, la sua ordinata sarà essenzialmente negativa , cioè $-y'$. E dando luogo a tal modifica si avrà

$$\text{tang.}C' = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Vale a dire gli angoli nel segmento di cerchio AC'B son pure tutti eguali tra loro ; ma ciascun di essi l' è supplemento degli angoli contenuti nel segmento ACB . Da ciò rilevasi per tanto, che :

Gli angoli opposti di un quadrilatero iscritto nel cerchio sono , presi insieme , eguali a due retti (22.*El.III.*).

339. Essendo $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ l' equazione del raggio , che passa per A , quella della perpendicolare AZ elevatagli per

quel punto, cioè la tangente del cerchio in A (293), sarà $y = -\frac{\alpha}{\beta}x$, quindi tang. ZAB $= -\frac{\alpha}{\beta} =$ tang. C'.
Risulta da ciò, che gli angoli ZAB, AC'B sono eguali fra loro, al par degli angoli Z'AB, ACB. Vale a dire

L' angolo formato dalla tangente, e dalla segante è quanto l'angolo posto nella porzione alterna del cerchio (32.*El.III.*).

340. Se la AB passasse pel centro, cioè fosse un diametro del cerchio, si avrebbe in tal caso $\beta = o$; e tang.C $= \frac{\alpha}{o} = \infty$, d' onde si ricava, che

Ogni angolo nel semicerchio è retto (31.*El.III.*).

341. Or da qualsivoglia punto A [*fig.39.*], dentro, o fuori di un cerchio si tiri comunque la retta AP, che incontri la circonferenza ne' punti M,N, e si cerchi l' espressione del rettangolo AM$\times$AN in funzione delle coordinate di que' punti. Ad ottenerla, presi per assi il diametro, che passa per A, e la perpendicolare elevatagli dal punto medesimo, e dinotando con k la tangente dell' angolo MAX, e con x', x'' le ascisse de' punti M, N; la formola

$$(\alpha' - \alpha)\sqrt{(1+k^2)}$$

del §. 287, darà

$$AM = x'\sqrt{(1+k^2)}$$
$$AN = x''\sqrt{(1+k^2)}$$

e quindi

$$AM \times AN = x'x''(1+k^2) \qquad (1)$$

Ciò posto chiamando α l' ascissa del centro, l' equazione al cerchio sarà

$$y^2 + (x-\alpha)^2 = r^2$$

ed essendo in oltre $\quad y = kx$

quella della retta AM; eliminando la y tra queste due equazioni, le radici dell' equazione risultante

$$x^2 - \frac{2\alpha}{1+k^2}x + \frac{\alpha^2 - r^2}{1+k^2} = o$$

corrisponderanno alle ascisse x', x''. E dovendo essere il loro prodotto quanto l' ultimo termine, cioè

$$x'x'' = \frac{\alpha^2 - r^2}{1+k^2}$$

sostituendo questo valore di $x'x''$ in (1) si avrà

$$AM \times AN = \alpha^2 - r^2$$

da che vedesi essere quel rettangolo di data grandezza, qualunque sia l'angolo della AP coll' asse delle ascisse; e però:

Se da un punto dentro, o fuori del cerchio si tiri comunque una segante; il rettangolo de' segmenti di questa fra il punto, e la circonferenza sarà sempre della stessa grandezza, cioè quanto la differenza de' quadrati del raggio, e dell' ascissa corrispondente a quel punto (*cor.*36.*El.III.*).

242. Cadendo il punto A fuori del cerchio, se avvenga che i punti M, N si raccolgano in uno, come in M', nel qual caso la segante diventa tangente del cerchio (326): il rettangolo di AM in AN si cambia in AM'^{2}, che non cessa di essere uguale ad $\alpha^2 - r^2$. Quindi:

Se da un punto fuori del cerchio vi cadano una segante ed una tangente, il rettangolo de' segmenti della segante, tra il punto, e 'l cerchio, pareggia il quadrato della tangente (36. *El.III.*).

343. Dopo aver veduto in quanti punti una retta possa intersegare un cerchio, esamineremo ancora in quanti punti possano intersegarsi due cerchi fra loro; il che analogamente a ciò, che si è detto nel §.326. dovrà venir dinotato dal grado dell' eliminata in y, o in x tra le equazioni a' cerchi proposti, le cui rispettivi equazioni sieno

$$y^2 + By + x^2 + Cx + D = o$$
$$y^2 + B'y + x^2 + C'x + D' = o$$

Or tali equazioni essendo entrambe del 2° grado, a giudicarne dall' ovvio teorema algebrico, che assegna il grado dell' eliminata, dovrebbe questa ascendere al 4° grado. Ma perchè i termini, che contengono le seconde potenze di y, ed x, per la natura delle equazioni al cerchio, debbono essere affetti da coefficienti eguali, essi si distruggeranno vicendevolmente, sottraendo l'una equazione dall'altra; ed ascenderà al 1° grado l'equazione risultante in x, y, che sarà la quì appresso

$$(B - B')y + (C - C')x + D - D' = o$$

dalla quale se ricavisi il valore di y, o pur quello di x, e si sostituisca in una delle precedenti, l'eliminata sarà del 2° grado; e però:

Due cerchi non s'intersegano in più di due punti(10.*El.III.*)

344. Che se le radici dell'eliminata risultino eguali, raccogliendosi in una le due intersezioni, i cerchi si toccheranno; e quindi:

Due cerchi non si toccano in più di un punto (13.*El.III.*)

345. L'equazione generale al cerchio esibita nel §. 320. oltre le indeterminate x, y alla curva, per le quali ne viene espressa la natura, e costituito di essa un luogo geometrico, contiene ancora le quantità α, β, che sono le determinanti il sito del centro, e l'altra r, cioè il raggio, da cui dipende la grandezza del cerchio; e queste quantità variandosi nella equazione generale, la fanno appartenere a cerchi diversi nel sito, e nella grandezza. Che però, se vogliasi far corrispondere quell'equazione ad un determinato cerchio, conviene che le tre suddette quantità prendano ad un tratto determinati valori; il che non potendo avvenire, se non per mezzo di tre equazioni *dissocie* *, che le connettano fra loro, e derivino da condizioni appartenenti al cerchio, si vede quindi, che ad assegnare il sito, e la grandezza di un cerchio, così in generale, come si è detto, vi bisognano tre condizioni, come, per esempio, di *dover passare per tre punti dati*, o di *toccare tre rette date*; e queste condizioni si minoreranno di numero, secondo che si

* *Cioè l'una indipendente dall'altra.*

minori quello delle indeterminate α, β, r, cioè, che tal un di queste prenda un dato valore. Così volendo far passare per punti, o toccar rette un cerchio di un dato raggio, le condizioni dovranno esser due, necessarie a determinare il sito del centro: e se fosse ancor data la distanza del centro da una retta data di sito, basterà, che si supplisca un'altra condizione sola, come di passare per un punto, o toccare un'altra retta. E di tutte le cose quì accennate se ne vedranno esempj in appresso.

346. Chiuderemo questo argomento del cerchio col seguente

PROBLEMA.

Ritrovare il luogo geometrico del concorso delle tangenti AB, BC [fig.40.] tirate al cerchio dagli estremi di qualunque corda AC, che passi sempre per un punto dato P, dentro, o fuori di esso.

Si prendano per assi due diametri ortogonali del cerchio, e si dinotino con α, β le coordinate del punto P, per x', y'; x'', y'' quelle delle estremità A, C della corda AC, e sieno t, u le coordinate del punto B. L'equazione del cerchio essendo

$$y^2 + x^2 = r^2$$

quelle delle tangenti ne' punti (x', y'), (x'', y'') saranno rispettivamente (328)

$$yy' + xx' = r^2$$
$$yy'' + xx'' = r^2$$

e poichè queste due tangenti incontransi nel punto (t, u), si avranno le due relazioni

$$uy' + tx' = r^2$$
$$uy'' + tx'' = r^2$$

dalle quali si scorge, che l'equazione della retta fra' contatti A, C, o sia fra' punti (x', y'), (x'', y''), sia

$$uy + tx = r^2$$

mentre sostituendo in essa le coordinate corrispondenti riproduconsi le due ultime equazioni. Dovendo dunque questa retta passar pel punto (α, β), si avrà tra le coordinate t, u la relazione determinata

$$\beta u + \alpha t = r^2$$

ovvero, cambiandovi le t, u in x, y rispettivamente,

$$\beta y + \alpha x = r^2$$

Quest' equazione sarà in conseguenza quella del luogo cercato; ed essa esprimendo una linea retta, ne risulta il

TEOREMA.

347. *Il luogo de' punti di concorso delle tangenti condotte al cerchio per gli estremi di una sua corda, che giri intorno ad un dato punto è una retta data di sito.*

Essendo l' equazione di questa locale della stessa forma della (8) nel §.382, potrà la retta corrispondente assegnarsi come fu fatto per quella nel §. 383. Quindi presa sulla OP, congiungente del centro O col punto dato P, la Op terza proporzionale dopo la stessa OP, e 'l raggio OR, la locale richiesta sarà la perpendicolare BB′ elevata da p sul la OP.

348. È chiaro per tanto, che la locale BB′ cadrà fuori del cerchio se il punto dato P stia dentro di esso; e per l' opposto cadrà tutta al di fuori se il punto stia dentro.

349. Siccome dato il punto P si è determinata la retta BB′, che ha con esso la relazione espressa dall' equazione

$$\beta y + \alpha x = r^2$$

così, viceversa, se fosse data una retta potrà determinarsi un punto, che abbia con tal retta la medesima relazione; allora le α, β coordinate del punto sarebbero incognite; e se ne determinerà il valore col supporre, che l' equazione precedente, e quella della retta proposta, che sia rappresenta-

ta da

$$y = kx + h$$

esprimano entrambe una medesima retta. Quindi messa la prima equazione sotto la forma

$$y = -\frac{\beta}{\alpha}x + \frac{r^2}{\beta},$$

si avranno per determinare α, e β le relazioni

$$k = -\frac{\alpha}{\beta}$$

$$h = \frac{r^2}{\beta}$$

e però $\alpha = -\frac{r^2 k}{h}$, $\beta = \frac{r^2}{h}$. Adunque la retta data sarà la locale ricercata nel precedente problema relativamente al punto $\left(-\frac{r^2 k}{h}, \frac{r^2}{h}\right)$. E da queste considerazioni ricavasi il teorema inverso del precedente, cioè, che:

TEOREMA.

350. *Tirando da ciascun punto di una linea retta data di sito le due tangenti ad un cerchio; le rette, che passano pe' rispettivi contatti s' intersegano tutte in un medesimo punto.*

351. Laonde supponendo che sia BB′ la retta data, questo punto si determinerà sul diametro perpendicolare ad essa, prendendosi dal centro la OP terza proporzionale dopo Op, e 'l raggio del cerchio.

352. La relazione, che esiste fra la locale, e 'l punto ha meritato una particolare attenzione dei geometri di tutt' i tempi, come lo mostrano i Conici di Apollonio, e poi quelli del de la Hire, del Simson, e per ultimo ancora del nostro Fergola, tanto quelli geometricamente trattati *(Corso geom. del Flauti vol. III.)* quanto gli analiticamente esposti *(Trat. anal. delle sez. con. ec.)*. Ma posteriormente si è data a quella locale, ed al punto correlativo un' acconcia

denominazione, chiamando l' una *polare* rispetto al punto, e questo *polo* rispetto a quella retta.

353. Ritornando ora sull' equazione

$$\beta y + \alpha x = r^2$$

ottenuta per la polare relativamente al punto (α, β), si vede essere identica a quella della retta fra' contatti delle tangenti il cerchio tirategli dal punto stesso; e però l' un di tali problemi trarne con se l' altro, quando il punto dato sia fuori del cerchio; mentre, supponendolo dentro di questo, essa ne assegna la sola polare; poichè in tal caso non possono esistervi tangenti, e per conseguenza punti di contatto.

354. In oltre se paragonisi l' equazione della polare

$$\beta y + \alpha x = r^2$$

con l' altra

$$y'y + x'x = r^2$$

della tangente il cerchio nel punto (x', y'), si vedrà, che da questa si ottenga quella sol che le coordinate del contatto si scambiino con quelle del polo; e però essendo, pel cerchio rappresentato generalmente da

$$y^2 + By + x^2 + Cx + D = o$$

l' equazione della tangente nel punto (x', y') espressa da

$$(2y' + B)y + (2x' + C)x + By' + Cx' + 2D = o$$

quella della polare del punto (α, β) risulterà

$$(2\beta + B)y + (2\alpha + C)x + B\beta + C\alpha + 2D = o$$

355. Termineremo il presente articolo delle polari colla enunciazione de' seguenti principali teoremi su di esse, che si deducono dalle dottrine finora esposte.

I°. *I poli delle rette, che passano per uno stesso punto, sono allogati in linea retta.*

È questo per l' appunto il primo de' teoremi di sopra dimostrato (§.347.).

II°. *Le polari corrispondenti a punti messi in linea retta s' intersegano in uno stesso punto.*

È l' altro teorema del §. 350:

III°. *Il punto dal quale tiransi ai cerchi le due tangenti, è il polo della corda fra' contatti.*

IV°. *La parallela condotta per quel punto alla retta fra' contatti, è la polare del punto medio di questa.*

V°. *La congiungente due punti, è la polare del punto d' incontro delle polari de' punti medesimi.*

VI°. E: *L' intersezione di due rette è il polo della congiungente i poli delle rette stesse.*

VII°. *Le polari de' punti posti sopra un diametro sono parallele fra loro.*

VIII°. Ed: *I poli delle rette parallele trovansi allogati nel diametro perpendicolare ad esse.*

356. Non essendo nostro scopo il dar quì un trattato algebrico-geometrico delle proprietà del cerchio, basterà per un saggio di esso quel tanto, che se n' è finora indicato, dal quale potrà facilmente taluno, che il voglia, pervenire a svilupparne in simil modo altre proprietà già geometricamente conosciute, o pure dedurle per immediate conseguenze dalle indicate.

Del resto avvertiamo i giovani a guardarsi bene dal credere di potersi esimere dall' apprenderle, per prima loro istituzione, in modo affatto geometrico, e specialmente studiando gli *Elementi di Euclide*. E quello, che da noi si è quì operato, ha avuto solamente per iscopo di mostrar loro sempre più la corrispondenza de' due metodi geometrico, ed algebrico, e di fare ad essi riconoscere col fatto l' esattezza de' risultamenti geometrici, che ottengonsi coi metodi algebrici.

CAPITOLO VIII.

SAGGIO DI APPLICAZIONE DE' PRINCIPJ DI GEOMETRIA ANALITICA PRECEDENTEMENTE ESPOSTI AD ALCUNE RICERCHE GEOMETRICHE

357. Sebbene la materia dell' invenzione geometrica, che finora abbiamo trattata in due libri, non fosse, che preliminare ad essa, di cui specialmente si dovranno esporre i principj, ed il modo di usarne nel seguente libro III. di questa parte 1, pur tuttavia, la specialità dell' argomento di questi ultimi capitoli c' induce a quì recarne un saggio di sua applicazione ad alcune quistioni geometriche; serbandoci ad estenderlo maggiormente in appresso, e nel luogo suo più proprio.

Le poche ricerche su tal proposito, che quì recheremo daranno ancor occasione a speciose proprietà del triangolo, del quadrilatero, e del cerchio, le quali concorrono ancor esse ad estendere l' immensurabile campo della natura di tali figure, ed a somministrare altro materiale a nuove indagini. E taluna di quelle è a dirittura nuova, le altre sebbene ripetutamente trattate da illustri analisti moderni, si vedranno pur tuttavia più semplicemente esposte, ed in un modo ancora fecondo di utili conseguenze; da che rimane ancor giustificato il loro inserimento in questo luogo del presente trattato.

Sono poi esse anche tali da condurre a quel paragone dell' un metodo con l' altro nell' inventar geometrico, da che dee risultar sempre più convalidato il precetto da noi ripetutamente insinuato a' giovani di non doverne trascurare alcuno, se il chiaro nome di geometri vogliansi a' nostri tempi meritare. Ed un tal confronto si renderà più evidente nelle noti corrispondenti, non avendo stimato conveniente d' interrompere per esso l' uniformità della presente trattazione.

PROPOSIZIONE I.

PROBLEMA.

358. *Date di grandezze le congiungenti i vertici degli angoli di un triangolo co' punti medj de' lati opposti costruire il triangolo* [*fig.41.*].

Fissati due assi ortogonali, suppongasi il triangolo richiesto ABC costruito in modo, che un de' suoi vertici A cada nel principio delle ascisse, e la congiungente di esso col punto medio del lato opposto coincida con questo asse, e sieno E, F i punti medj degli altri due lati. Indicando con x', y' le coordinate del punto B, quelle di E saranno $\frac{x'}{2}$, $\frac{y'}{2}$. Dicasi in oltre x'' l' ascissa di C, che ha per ordinata $-y''$ *; saranno $\frac{x''}{2}$, $-\frac{y'}{2}$ le coordinate del punto F. In fine se indichinsi con a, b, c le tre rette date AD, BF, CE, si avrà (285)

$$\left.\begin{aligned} BF &= \sqrt{\left(\left(y' + \frac{y'}{2}\right)^2 + \left(x' - \frac{x''}{2}\right)^2\right)} = b \\ CE &= \sqrt{\left(\left(-y' - \frac{y'}{2}\right)^2 + \left(x'' - \frac{x'}{2}\right)^2\right)} = c \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

E sviluppando queste equazioni, e sottraendo l' una dall' altra si ha tosto

$$x'^2 - x''^2 = \frac{4}{3}(b^2 - c^2) \qquad (2)$$

Ciò premesso l' equazione della BC essendo (282)

* *Poichè il punto medio di BC trovar si dee sull asse delle ascisse, prendendosi positiva l' ordinata del punto B, quella del punto C dev' essere essenzialmente negativa.*

$$y - y' = \frac{2y'}{x' - x''}(x - x')$$

sostituendovi le coordinate del punto D, che trovasi su di essa, e che son dinotate da a, e *zero*, ne risulterà

$$x' + x'' = 2a \qquad (3)$$

E dividendo ciascun membro di (2) per ciascun di quelli di (3) si ottiene

$$x' - x'' = \frac{2}{3}\left(\frac{b^2 - c^2}{a}\right) \qquad (4)$$

e dalla (3), e (4) si ricaverà immantinenti

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{3a^2 + b^2 - c^2}{3a} \\ x'' &= \frac{3a^2 - b^2 + c^2}{3a} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Son questi i valori delle ascisse de' punti B, C: ma per determinare compiutamente tali punti è d'uopo assegnare ancora le loro corrispondenti ordinate, cioè la sola y'; poichè quella di C è $-y'$; da che il triangolo proposto risulterà costruibile combinando ciascuna delle (1) co' valori (5).

359. Ma si perverrà a risultamenti di più agevole costruzione considerando le equazioni delle BF, CE, espresse rispettivamente da

$$y - y' = \frac{3y'}{2x' - x''}(x - x')$$

$$y + y' = \frac{3y'}{x' - 2x''}(x - x'')$$

ossia da

$$y\,\frac{2x' - x''}{3y'} + \frac{x' + x''}{3} = x$$

$$y\,\frac{x' - 2x''}{3y'} + \frac{x' + x''}{3} = x$$

alle quali evidentemente soddisfano le coordinate

$$y = o\,, \quad x = \frac{x' + x''}{3}$$

cioè, per la (3),

$$y = o\,, \quad x = \frac{2a}{3}.$$

Ed il primo valore mostra, che le rette BF, CE s'intersegano sull' asse delle ascisse; l' altro, che vi s' intersegano a $\frac{2}{3}$ di a, cioè di AD, dal vertice A. Or potendo egualmente supporsi, che l' asse della ascisse coincida alla sua volta con ciascuna delle altre due congiungenti BF, CE, è chiaro, che allo stesso risultamento si perverrebbe rispetto ad esse prendendo per asse BF, o CE; vale a dire che ciascuna delle rette OF, OD, OE è terza parte di ciascuna delle rette date BF, AD, CE. E però ne derivano per incidenza dimostrati i due seguenti

TEOREMI.

360. I. *Le tre rette condotte dai vertici di un triangolo ai punti medj dei lati opposti s'incontrano in un medesimo punto.*

361. II. *E ciascuna di esse riman divisa in quel punto nella ragione di 2 ad 1, a contar dal vertice.*

362. Or questi teoremi rendono più facile la costruzione del triangolo richiesto, imperciocchè risultando l' ascissa AP (x') del punto B determinata dalla prima delle equazioni (5), si eleverà da P la perperpendicolare, e 'l punto B segnato in essa dal cerchio descritto col centro O, ch' è il punto in cui la AD è divisa nella indicata ragione, e coll' intervallo $OB = \frac{2}{3}BF$, sarà l' un de' vertici del triangolo; il quale rimarrà in conseguenza determinato.

Per tanto a determinar la AP non è necessario costruire alcuna delle equazioni (5); potendo ciò ottenersi dall' equazione (4), dalla quale si ha,

$$\frac{x' - x''}{2} = \frac{b^2 - c^2}{3a}$$

e quindi $DP = \frac{1}{3}\,\frac{c^2 - b^2}{a}$; espressione di facile costruzione.

PROPOSIZIONE II.

PROBLEMA.

363. *Date le tre perpendicolari, che da' vertici degli angoli di un triangolo si tirano a' lati opposti, costruire il triangolo [fig. 42.]*.

Le tre perpendicolari ai lati BC, CA, AB sieno rispettivamente dinotate da a, b, c; cioè AE con a, BF con b, CD con c, e 'l triangolo intendasi costruito in modo che un de' suoi lati, AB per esempio, cada sull' un degli assi, e 'l vertice A coincida nel principio delle ascisse; chiamando x', y' le coordinate del punto E, la distanza AE de' punti A, E sarà espressa da $\sqrt{(y'^2 + x'^2)}$, e quindi si avrà

$$y'^2 + x'^2 = a^2 \qquad (1)$$

In oltre l' equazione della retta AE essendo

$$y = \frac{y'}{x'}\,x$$

dovrà l' altra di BC, che l' è perpendicolare, essere (293)

$$y - y' = -\frac{x'}{y'}(x - x').$$

e facendovi successivamente $x = o$, $y = c$, si troveranno le coordinate dei punti B, C espresse per

$$\left.\begin{array}{lll} \text{B da} & \dfrac{y'^2 + x'^2}{x'} & , o \\ \text{C da} & \dfrac{y'^2 + x'^2 - cy'}{x'} & , c \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{ovvero}\\ \text{per la (1)}\end{array} \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{a^2}{x'} & , o \\ \dfrac{a^2 - cy'}{x'} & , c \end{array}\right.$$

Quindi l' equazione della retta AC, sarà

$$y = \frac{cx'}{a^2 - cy'}\,x$$

e la lunghezza della perpendicolare condottale da B essendo (296)

$$\frac{\dfrac{cx'}{a^2 - cy'} \times \dfrac{a^2}{x'}}{\sqrt{\left(1 + \dfrac{c^2x'^2}{(a^2 - cy')^2}\right)}}$$

si otterrà

$$\frac{a^2\,c}{\sqrt{\left((a^2 - cy')^2 + c^2x'^2\right)}} = b$$

cioè

$$b^2c^2(y'^2 + x'^2) - 2ca^2b^2y' + a^4b^2 - a^4c^2 = o \qquad (2)$$

Or combinando quest' equazione con la (1) potrà ottenersi il valore tanto di x', che di y'; quindi il punto E rimarrà costruito; e sarà poi facile ottenersi il triangolo ABC.

Imperocchè descritto il cerchio EHI, col centro A, ed intervallo la data AE, gli si tiri per E la tangente BEC, ed applichisi nell' angolo ABC perpendicolarmente ad AB la $CD = c$; si avrà il vertice C del triangolo, che risulterà interamente esibito congiungendo la AC.

364. Ma se riflettasi, che le equazioni (1), e (2) rappresentano due cerchi, quel punto E potrà ottenersi dalla loro intersezione. Di fatti il cerchio dell' equazione (1) è lo stesso poc' anzi descritto, e l' altro dell' equazione (2), la quale divisa per b^2c^2 riducesi ad

$$\left(y'^2 - \frac{2a^2}{c}\,y' + \frac{a^4}{c^2}\right) + x'^2 = \frac{a^4}{b^2}$$

ossia ad

$$\left(y' - \frac{a^2}{c}\right)^2 + x'^2 = \left(\frac{a^2}{b}\right)^2$$

costruiscesi facilmente nel seguente modo.

Presa sulla perpendicolare ad AB la AG terza proporzionale dopo c, ed a, cioè dopo CD, ed AE; sarà G il centro del cerchio, ed il suo raggio sarà quanto la terza proporzionale dopo b, ed a, cioè dopo BF, ed AE: e l' intersezione di questo cerchio col primo n' esibirà il punto E.

365. E potrebbesi ancora costruire il problema con l' intersezione del cerchio EHI, e di una retta, sostituendo nell'equazione (2) a^2 ad $y'^2 + x'^2$; da che si ha l'eliminata in y'

$$b^2c^2a^2 - 2ca^2b^2y' + a^4b^4 - a^4c^2 = o$$

ossia

$$2cb^2y' = b^2c^2 + a^2b^2 - a^2c^2$$

equazione, ch' esprime una parallela all' asse delle ascisse.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

366. *Le tre perpendicolari tirate da' vertici degli angoli di un triangolo a' lati opposti s' intersegano in un medesimo punto* [*fig.42.*] *.

Presi per assi un de' lati AB, e la perpendicolare elevatagli dal punto A, si dinotino con α, β le coordinate del punto C, e dicasi α' l' ascissa AB del punto B. Saranno

$$y = \frac{\beta}{\alpha}x$$

$$y = \frac{-\beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha)$$

le equazioni delle AC, BC rispettivamente; e però

$$y = -\frac{\alpha}{\beta}(x - \alpha')$$

* *Questa verità potea facilmente dedursi dall' analisi del precedente problema; ma poichè non vi si è presentata direttamente, com' è avvenuto nella precedente ricerca, si è preferito di dimostrarla a parte.*

$$y = \frac{\alpha' - \alpha}{\beta}x$$

quelle delle perpendicolari BF, AE. Eliminando la y tra queste equazioni trovasi per l' ascissa del loro punto d' incontro

$$x = \alpha$$

ch' è l' equazione della terza perpendicolare CD; le quali adunque s'intersegano tutte in un punto, come si è proposto.

PROPOSIZIONE IV.

PROBLEMA.

367. *Dati di sito tre punti, esibire il triangolo, che si ottiene congiungendoli* [*fig.43.*].

Le coordinate de' punti dati A, B, C riferiti agli assi ortogonali PX, PY sieno rispettivamente (α, β), (α', β'), (α'', β''); e dall' un de' punti A si tiri alla congiungente BC gli altri due la perpendicolare AD. Dinotando con S la superficie del triangolo sarà

$$S = \frac{AD \times CB}{2}$$

Ciò posto l' equazione di CB essendo

$$y = \frac{\beta' - \beta''}{\alpha' - \alpha''}x + \frac{\alpha'\beta'' - \alpha''\beta'}{\alpha' - \alpha''}$$

pel valore della perpendicolare condotta su questa retta dal punto A (α, β) si avrà (296)

$$AD = \frac{\beta - \alpha\frac{\beta' - \beta''}{\alpha' - \alpha''} - \frac{\alpha'\beta'' - \alpha''\beta'}{\alpha' - \alpha''}}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{\beta' - \beta''}{\alpha' - \alpha''}\right)^2\right)}} = \frac{\beta(\alpha'' - \alpha') + \beta'(\alpha - \alpha'') + \beta''(\alpha' - \alpha)}{\sqrt{\left((\beta' - \beta'')^2 + (\alpha' - \alpha'')^2\right)}}$$

Laonde essendo (285)

$$DB = \sqrt{\left((\beta'-\beta'')^2 + (\alpha'-\alpha'')^2\right)}$$

risulterà

$$S = \frac{\beta(\alpha'-\alpha'') + \beta'(\alpha''-\alpha) + \beta''(\alpha-\alpha')}{2}$$

368. Coincidendo un qualunque de' vertici C del triangolo col principio delle ascisse, si avrà

$$\alpha'' = o \quad , \quad \beta'' = o \, ,$$

e l' espressione dell' aja di esso ridurrassi alla forma più semplice

$$S = \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{2} \, .$$

369. Se i tre punti dati fossero per diritto, in tal caso svanendo l' aja S del triangolo, si avrà la relazione stessa

$$\beta(\alpha'-\alpha'') + \beta'(\alpha''-\alpha) + \beta''(\alpha-\alpha') = o$$

che fu rinvenuta nel §. 284. per condizione di tre punti in linea retta.

PROPOSIZIONE V.

PROBLEMA.

370. *Esprimere l' aja del triangolo in funzione de' lati.*

Si prenda per principio delle ascisse un qualunque de' vertici C [*fig. 44.*] del triangolo ABC, e s' indichino gli altri due A, B con (α, β), (α', β') rispettivamente, sarà (368)

$$S = \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{2} \, . \qquad (1)$$

Ciò posto dinotando con a, b, c i lati BC, CA, AB del triangolo, si avrà (285)

$$a^2 = \beta'^2 + \alpha'^2$$
$$b^2 = \beta^2 + \alpha^2$$
$$c^2 = (\beta - \beta')^2 + (\alpha - \alpha')^2$$

sottraendo l' ultima eguaglianza dalla somma delle prime due, risulterà

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} = \beta\beta' + \alpha\alpha' \qquad (2)$$

ed, elevando a quadrato,

$$\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}\right)^2 = \beta^2\beta'^2 + \alpha^2\alpha'^2 + 2\beta\beta'\alpha\alpha'$$

In oltre sottraendo ancora quest' eguaglianza dal prodotto delle stesse prime due, si otterrà

$$a^2b^2 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2 = \alpha^2\beta'^2 + \alpha'^2\beta^2 - 2\beta\beta'\alpha\alpha' = (\alpha'\beta - \alpha\beta')^2$$

quindi per la (1) sarà

$$16S^2 = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$$

ed

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{\left(4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2\right)}$$

formola identica a quella trovata in altro modo nella *Trigonometria* (*V. Note* a §. 90, e 91).

PROPOSIZIONE VI.

PROBLEMA.

371. *Trovare il centro, e 'l raggio del cerchio circoscrittibile ad un dato triangolo.*

Si riferisca il triangolo [*fig. 45.*] agli assi ortogonali PX, PY, e sieno x', y' le coordinate del centro del cerchio; e quelle de' vertici A, B, C sieno rispettivamente dinotate da α, β ; α', β' ; α'', β''. Chiamando r il raggio ignoto del cerchio, si avrà per l' equazione ad esso (320)

$$(y - y')^2 + (x - x')^2 = r^2$$

Dovendo dunque questo cerchio passare pe' tre punti A, B, C si avranno le corrispondenti equazioni di condizione.

$$\left.\begin{aligned}(\beta-y')^2+(\alpha-x')^2&=r^2\\(\beta'-y')^2+(\alpha'-x')^2&=r^2\\(\beta''-y')^2+(\alpha''-x')^2&=r^2\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

le quali risolvono il problema, giacchè rimangono per esse determinate tanto le coordinate x', y' del centro, quanto il raggio r. Per tanto sottraendo la terza dalla prima, e dalla seconda, si avranno le due seguenti equazioni nelle sole incognite x', y'

$$\left.\begin{aligned}2y'(\beta-\beta'')+2x'(\alpha-\alpha'')&=(\beta^2+\alpha^2)-(\beta''^2+\alpha''^2)\\2y'(\beta'-\beta'')+2x'(\alpha'-\alpha'')&=(\beta'^2+\alpha'^2)-(\beta''^2+\alpha''^2)\end{aligned}\right\}(2)$$

dalle quali si possono dedurre i valori di x', y', cioè le coordinate del centro O.

372. Ma se trattisi di assegnare il centro geometricamente potranno costruirsi i due luoghi geometrici (2), che rappresentano due rette, le quali nella loro intersezione daranno un tal punto. In questo caso però sarà permesso di render più semplici le equazioni alle due rette, dando agli assi un sito più conveniente; giacchè, supponendo solo *, che l' un de' tre punti A, B, C, l' ultimo per esempio, cada nel principio delle ascisse, per essere allora $\alpha''=o$, $\beta''=o$, le equazioni (2) si ridurranno rispettivamente a

* *Oltre a supporre che un de' vertici del triangolo coincida nel principio delle ascisse, potrebbe ancora l' un degli assi farsi coincidere con un lato del triangolo; e i risultamenti diverrebbero anche più semplici. Così supponendo per esempio che l' asse delle ascisse coincida col lato BC, oltre ad $\alpha''=o$ $\beta''=o$; si avrà pure $\beta'=o$, e le equazioni delle due rette (2) si trasmuterebbero in*

$$\beta y'+\alpha x'=\frac{\beta^2+\alpha^2}{2}$$

$$x'=\frac{\alpha'}{2}$$

le quali riproducono, com' è chiaro, la stessa costruzione quassù recata.

$$\beta y'+\alpha x'=\frac{\beta^2+\alpha^2}{2}\qquad(3)$$

$$\beta' y'+\alpha' x'=\frac{\beta'^2+\alpha'^2}{2}\qquad(4)$$

e vedesi chiaramente, che alla (3) soddisfino le coordinate $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, corrispondenti al punto medio di CA, ed alla (4) le coordinate $\frac{\alpha'}{2}$, $\frac{\beta'}{2}$ corrispondenti al punto medio di CB. Di più mettendo la (3) nella forma

$$y'=-\frac{\alpha}{\beta}x'+\frac{\beta^2+\alpha^2}{2\beta}$$

si vede (293), che sia tal retta perpendicolare all' altra

$$y=\frac{\beta}{\alpha}x$$

cioè al lato AC: e nello stesso modo si conchiuderà, che la (4) sia perpendicolare all' altro lato CB.

Adunque dividendo i lati AC, CB per metà in D, E, ed elevando ad essi da tai punti le perpendicolari, il punto O, in cui queste s' incontrano, sarà il centro cercato; com' era già noto dagli *Elementi*.

373. Che se in vece si cerchino i valori delle coordinate del centro, eseguendo l' eliminazione tra le equazioni (2) si avrà

$$x'=\frac{(\beta^2+\alpha^2)(\beta''-\beta')+(\beta'^2+\alpha'^2)(\beta-\beta'')+(\beta''^2+\alpha''^2)(\beta'-\beta)}{2\left(\beta(\alpha'-\alpha'')+\beta'(d'-\alpha)+\beta''(\alpha-\alpha')\right)}$$

$$y'=-\frac{(\beta^2+\alpha^2)(\alpha''-\alpha')+(\beta'^2+\alpha'^2)(\alpha-\alpha'')+(\beta''^2+\alpha''^2)(\alpha'-\alpha)}{2\left(\beta(\alpha'-\alpha'')+\beta'(\alpha''-\alpha)+\beta''(\alpha-\alpha')\right)}$$

e si riconosce a colpo d' occhio, che il denominatore equivalga al quadruplo dell' aja del triangolo, cioè a $4S$ (367). Inoltre, sostituendo questi valori di x', y' in una delle equazioni (1), sarà facile di ottenere il valore di r, cioè del raggio del cerchio circoscrittibile al triangolo.

374. I precedenti valori delle coordinate del centro potrebbero rendersi più semplici, particolarizzando il sito degli assi; ma essi non avranno allora quella generalità di cui le formole debbono essere rivestite onde applicarsi a tutt' i casi. Pertanto facendo coincidere il punto C col principio delle ascisse quei valori si ridurranno ad

$$x' = \frac{\beta(\alpha'^2 + \beta'^2) - \beta'(\alpha^2 + \beta^2)}{2(\alpha'\beta - \alpha\beta')}$$

$$y' = -\frac{\alpha(\alpha'^2 + \beta'^2) - \alpha'(\alpha^2 + \beta^2)}{2(\alpha'\beta - \alpha\beta')}$$

nelle quali espressioni il denominatore equivale tuttavia al quadruplo dell' aja del triangolo cioè a $4S$ (368).

375. Or si chiamino a, b, c i lati del triangolo rispettivamente opposti agli angoli A, B, C, e si osservi, che essendo

$$\alpha'^2 + \beta'^2 = a^2 \quad , \text{ ed } \quad \alpha^2 + \beta^2 = b^2 \qquad (5)$$

i precedenti valori di x', y' riduconsi ad

$$x' = \frac{\beta a^2 - \beta' b^2}{4S}$$

$$y' = -\frac{\alpha' a^2 - \alpha' b^2}{4S}$$

ma si ha per l' attual posizione degli assi $y'^2 + x'^2 = r^2$ sostituendovi adunque i corrispondenti valori, si avrà

$$r^2 = \frac{a^4(\beta^2+\alpha^2) + b^4(\beta'^2+\alpha'^2) - 2\,a^2b^2(\beta\beta'+\alpha\alpha')}{16S^2}$$

che, in virtù dell' eguaglianze (5), e della (2) del problema precedente, riducesi ad

$$r^2 = \frac{a^4b^2 + b^4a^2 - a^2b^2(a^2 + b^2 - c^2)}{16S^2}$$

$$= a^2b^2\,\frac{(a^2 + b^2 - a^2 - b^2 + c^2)}{16S^2} = \frac{a^2b^2c^2}{16S^2}$$

e quindi estraendo la radice quadrata, sarà

$$r = \frac{abc}{4S}$$

espressione semplicissima, dalla quale si ha il valore del raggio del cerchio circoscrittibile ad un triangolo in funzione de' lati, e dell' aja, come fu già rinvenuta nella *Trigonometria*.

376. Essendosi dimostrato nel §. 370.

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{\left(4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2\right)}$$

sostituendo questo valore di S nella precedente formola, si avrà il raggio espresso ne' lati del triangolo, cioè

$$r = \frac{abc}{\sqrt{\left(4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2\right)}}$$

come si era egualmente ottenuto nelle note alla *Trigonometria*.

PROPOSIZIONE VII.

PROBLEMA.

377. Trovare il centro, e 'l raggio del cerchio iscrittibile in un dato triangolo.

Sia O il centro cercato [*fig.* 46.]; le perpendicolari Oc, Oc', Oc'' tirate da esso su i lati saranno uguali fra loro, essendo ciascuna raggio del cerchio. Ciò posto si adottino le seguenti denominazioni

pel punto B	(α, β),	lato $B'B'' = c$
pel punto B'	(α', β'),	lato $BB'' = c'$
pel punto B''	(α'', β''),	lato $BB' = c''$
pel centro O	(x', y'),	raggio $= Oc = Oc' = Oc'' = r$

Le equazioni dei lati saranno

$$\text{per B}'\text{B}'' \quad y = \frac{\beta' - \beta''}{\alpha' - \alpha''}\, x + \frac{\alpha'\beta'' - \alpha''\beta'}{\alpha' - \alpha''}$$

$$\text{per B B}'' \quad y = \frac{\beta - \beta''}{\alpha - \alpha''}\, x + \frac{\alpha\,\beta'' - \alpha''\beta}{\alpha - \alpha''}$$

$$\text{per B B}' \quad y = \frac{\beta - \beta'}{\alpha - \alpha'}\, x + \frac{\alpha\,\beta' - \alpha'\,\beta}{\alpha - \alpha'}$$

e per le lunghezze delle perpendicolari si avrà in conseguenza

$$\text{O}c = \frac{y'(\alpha' - \alpha'') - x'(\beta' - \beta'') - (\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')^{*}}{c} \quad (1)$$

$$\text{O}c' = \frac{y'(\alpha - \alpha'') - x'(\beta - \beta'') - (\alpha\,\beta'' - \alpha''\beta)}{c'} \quad (2)$$

$$\text{O}c'' = \frac{y'(\alpha - \alpha') - x'(\beta - \beta') - (\alpha\,\beta' - \alpha'\,\beta)}{c''} \quad (3)$$

Essendo dunque queste perpendicolari eguali fra loro, e ciascuna eguale ad r, si avranno le tre equazioni di condizione

$$\begin{aligned} y'(\alpha' - \alpha'') - x'(\beta' - \beta'') - (\alpha'\beta'' - \alpha''\beta') &= c\,r \\ y'(\alpha'' - \alpha\,) - x'(\beta'' - \beta\,) - (\alpha''\beta - \alpha\,\beta'') &= c'\,r \quad (4) \\ y'(\alpha - \alpha'\,) - x'(\beta - \beta'\,) - (\alpha\,\beta' - \alpha'\,\beta\,) &= c''r \end{aligned}$$

Ricavando da queste tre equazioni i valori di x', y', ed r si sarà risoluto il problema.

---

* *La lunghezza della perpendicolare Oc sarebbe propriamente* (296)

$$\frac{y' - x'\,\dfrac{\beta' - \beta''}{\alpha' - \alpha''} - \dfrac{\alpha'\beta'' - \alpha''\beta'}{\alpha' - \alpha''}}{\sqrt{\left(1 + \left(\dfrac{\beta' - \beta''}{\alpha' - \alpha''}\right)^2\right)}} = \frac{y'(\alpha' - \alpha'') - x'(\beta - \beta'') - (\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')}{\sqrt{\left((\alpha' - \alpha'')^2 + (\beta' - \beta'')^2\right)}}$$

ed or si ravvisa, che il denominatore del secondo membro esprima appunto la distanza dei punti B', B'', che si è dinotata con c; e valga lo stesso per le espressioni di Oc', Oc''.

Eseguendo per tanto l' eliminazione co' metodi conosciuti, si avranno per le coordinate del centro, e del raggio le seguenti simmetriche, e marchevolissime formole

$$x' = \frac{\alpha c + \alpha' c' + \alpha'' c''}{c + c' + c''}$$

$$y' = \frac{\beta c + \beta' c' + \beta'' c''}{c + c' + c''}$$

$$r = \frac{\beta(\alpha' - \alpha'') + \beta'(\alpha'' - \alpha) + \beta''(\alpha - \alpha')}{c + c' + c''} = \frac{2\,S}{c + c' + c''}$$

378. Essendo $c = \sqrt{\left((\alpha' - \alpha'')^2 + (\beta' - \beta'')^2\right)}$

$$c' = \sqrt{\left((\alpha - \alpha'')^2 + (\beta - \beta'')^2\right)}$$

$$c'' = \sqrt{\left((\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2\right)}$$

sostituendo questi valori nelle precedenti espressioni di x', y', ed r, si avranno le coordinate del centro, e 'l raggio del cerchio iscrittibile in un triangolo, espresse solamente in funzione delle coordinate de' vertici di esso.

379. Se un vertice del triangolo, per esempio B'', cada nel principio delle ascisse, e 'l lato B''B' si distenda su quest' asse, le espressioni quassù recate diverranno alquanto più semplici, riducendosi, per essere allora $\alpha'' = o$, $\beta'' = o$ $\beta' = o$, $\alpha' = c$, ad

$$x' = \frac{\alpha\,c + cc'}{c + c' + c''}$$

$$y' = \frac{\beta c}{c + c' + c''}$$

$$r = \frac{\beta c}{c + c' + c''}$$

e potea già prevedersi che in tal caso il raggio, e l' ordinata del cerchio risultar dovessero la stessa cosa.

380. Dee osservarsi sull'analisi precedente, che essendo negativo il numeratore dell' espressione (2) rilevata dalla formola (296).

$$\frac{\beta-(k\alpha+h)}{\sqrt{(1+k^2)}}$$

per la lunghezza della perpendicolare Oc', è d' uopo cambiarvi i segni a fin di renderlo positivo. In fatti è chiaro, che l' ordinata della retta BB'', su cui cade Oc', corrispondente all' ascissa x' dal centro, dev' essere, per la sua posizione nella figura, maggiore dell' ordinata del centro stesso y'. Quindi l' equazione della retta BB'' essendo come sopra

$$y=\frac{\beta-\beta''}{\alpha-\alpha''}x+\frac{\alpha\beta''-\alpha''\beta}{\alpha-\alpha''}$$

pel punto di essa cui corrisponde l' ascissa x', sarà

$$y'<\frac{\beta-\beta''}{\alpha-\alpha''}x'+\frac{\alpha\beta''-\alpha''\beta}{\alpha-\alpha''}$$

e moltiplicando tutta l' ineguaglianza per $(\alpha-\alpha'')$, che per effetto ancora della posizione della retta BB'' è una quantità positiva *, essendo $\alpha>\alpha''$, si avrà

$$y'(\alpha-\alpha'')<x'(\beta-\beta'')+(\alpha\beta''-\alpha''\beta)$$

ed $$y'(\alpha-\alpha'')-x'(\beta-\beta'')-(\alpha\beta''-\alpha''\beta)<o$$

Risulta da ciò, che il primo membro di questa ineguaglianza sia una quantità negativa: ma esso è identico, a meno de' segni, al numeratore del valore di Oc'; dunque il valore di questa perpendicolare dedotto dalla formola poc' anzi indicata è negativo, ed a renderlo positivo, non si avrà, che a cambiarvi i segni. La stessa discussione farà conoscere, che i numeratori delle espressioni (1), (3), per le Oc, Oc'', sien già positivi, sicchè non occorra farvi alcun cambiamento.

* *Se la quantità $(\alpha-\alpha'')$ fosse stata negativa, nell' ineguaglianza avrebbe dovuto cambiarsi il segno $<$ in $>$, com'è noto dall' Algebra.*

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

381. *Il punto di concorso delle tre congiungenti i vertici di un triangolo co' punti medj de' lati opposti, quello delle tre perpendicolari tirate da' vertici a' lati medesimi, e 'l centro del cerchio circoscrittibile al triangolo sono in linea retta.*

Prendasi per asse delle ascisse un lato AB' [*fig.47.*] del triangolo ABB', e la perpendicolare innalzatagli dal punto A sia l' asse delle ordinate. Dinotando con α, β le coordinate del punto B, e con α' il lato AB', sarà

$$y=\frac{\beta}{\alpha}x$$

l' equazione del lato AB. Laonde l' equazione della perpendicolare $B'F$ condottagli dal punto B' (α', o) sarà (293)

$$y=-\frac{\alpha}{\beta}\left(x-\alpha'\right)$$

e però le coordinate del punto T, in cui s'incontrano le perpendicolari, saranno

I. *per l' incontro T delle perpendicolari* $\left\{\begin{array}{l} x=\alpha \\ y=\dfrac{\alpha(\alpha'-\alpha)}{\beta}\end{array}\right.$

In oltre essendo $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ le coordinate del punto E, medio di AB, ed $\frac{\alpha'}{2}$, e *zero* quelle del punto C, medio di AB', le equazioni delle $B'E$, BC saranno respettivamente

$$y=\frac{\beta}{\alpha-2\alpha'}(x-\alpha')$$

$$y=\frac{2\beta}{2\alpha-\alpha'}\left(x-\frac{\alpha'}{2}\right)$$

e le coordinate del punto V, in cui s' incontrano, saranno in conseguenza

II. *per l'incontro V delle congiungenti de' vertici co' punti medj de' lati*
$$\begin{cases} x = \dfrac{\alpha + \alpha'}{3} \\ y = \dfrac{\beta}{3} \end{cases}$$

Finalmente per avere le coordinate del centro del cerchio circoscrittibile al triangolo, basterà porre nelle espressioni del §.373 $\alpha'' = o$, $\beta'' = o$, $\beta' = o$, giacchè nel caso attuale il punto (α'', β'') cade nel principio delle ascisse, e di più il lato AB' si confonde con quest' asse; e si troverà

III. *pel centro O del cerchio circoscrittibile*
$$\begin{cases} x = \dfrac{\alpha'}{2} \\ y = \dfrac{\beta^2 + \alpha^2 - \alpha\alpha'}{2} \end{cases}$$

Or sostituendo convenientemente i sei valori I, II, e III nell' espressione (284)
$$\beta(\alpha' - \alpha'') + \beta'(\alpha'' - \alpha) + \beta''(\alpha - \alpha') = o$$
ch' è la condizione da verificarsi perchè tre punti sieno in linea retta (284.), risulta pel primo membro, dopo i necessarj sviluppi,
$$(\alpha\alpha' - \alpha^2 - \beta^2) + (\beta^2 + \alpha^2 - \alpha\alpha')$$
e quindi
$$o = o$$
Il qual risultamento mostra, che la condizione di cui trattasi ha luogo effettivamente pe' tre punti T, V, O; d' onde segue, ch' essi debbano stare per dritto: come si è proposto a dimostrare.

PROPOSIZIONE IX.

PROBLEMA.

382. *Esibire la relazione, che dee aver luogo tra' determinanti di una retta, e di un cerchio dati, perchè si tocchino.*

Le equazioni del cerchio, e della retta, per assi rettangolari qualunque, sieno rispettivamente dinotate da
$$y^2 + By + x^2 + Cx + D = o \qquad (1)$$
$$y = kx + h \qquad (2)$$
Eliminando la y tra queste due equazioni, le radici della risultante equazione di 2° grado in x, cioè,
$$x^2 + \frac{2kh + Bk + C}{1 + k^2}x + \frac{h^2 + Bh + D}{1 + k^2} = o$$
corrisponderanno (326) alle ascisse de' punti d' incontro delle due linee. Ma per ragion del contatto queste ascisse debbono eguagliarsi; dunque per le note teoriche algebriche, sarà
$$\frac{(2kh + Bh + C)^2}{4(1 + k^2)^2} = \frac{h^2 + Bh + D}{1 + k^2}$$
cioè,
$$(2kh + Bk + C)^2 = 4(1 + k^2)(h^2 + Bh + D)$$
e sviluppando, e riducendo, si rileverà per la richiesta relazione
$$k^2(B^2 - 4D) + 2kC(B + 2h) - 4h(B + h) + (C^2 - 4D) = o$$
Vale a dire, che il cerchio, e la retta si toccheranno quantevolte fra' determinanti di esse due linee abbia luogo l' indicata relazione.

PROPOSIZIONE X.

PROBLEMA.

383. *Dati due cerchi di sito, e di grandezza; iscrivere nell' uno un triangolo, che risulti circoscritto all' altro.*

Si dinoti con (C) il cerchio nel quale il triangolo dee trovarsi iscritto, e l' altro con (C'). I vertici ignoti V, V', V'' del triangolo, si esprimano rispettivamente con (z, v) (z', v'), (z'', v''), prendendo per assi il diametro, che passa pe' centri de' cerchi, e la perpendicolare elevatagli da una delle estremità nel circoscritto; sicchè chiamando a l' ascissa dal centro dell' iscritto, ed r, r' i raggi di quello, e di questo, le loro equazioni saranno rispettivamente

$$y^2 = 2rx - x^2 \qquad \text{per (C)}$$

$$y^2 + (x-a)^2 = r'^2$$

cioè, $$y^2 + x^2 - 2ax + a^2 - r'^2 = 0 \qquad \text{per (C')}$$

In oltre quelle de' lati del triangolo saranno

$$\left.\begin{array}{ll} y(z-z') - x(v-v') = zv' - z'v & \text{, per VV'} \\ y(z'-z'') - x(v'-v'') = z'v'' - z''v' & \text{, per V'V''} \\ y(z''-z) - x(v''-v) = z''v - zv'' & \text{, per V''V} \end{array}\right\} \quad (1)$$

E poichè i tre vertici (z, v), (z', v'), (z'', v'') trovansi sul cerchio (C), dovranno per essi aver luogo le relazioni

$$\left.\begin{array}{l} v^2 = 2rz - z^2 \\ v'^2 = 2rz' - z'^2 \\ v''^2 = 2rz'' - z''^2 \end{array}\right\} \quad (2)$$

Di più esprimendo, mediante la relazione generale esposta nell' antecedente proposizione, che le tre rette (1) debbono esser tangenti al cerchio (C'), si avranno, colle tre equazioni (2), sei equazioni nelle sei incognite z, v, z', v',

z'', v'', per le quali il problema rimane compiutamente condizionato. Ed eliminando da tali equazioni cinque delle sei incognite, se ne avrà una sola nella rimanente, per esempio in z; per mezzo della quale conoscendosi la z, ch' è l'ascissa dell' ignoto vertice V, un tal punto rimarrà determinato, e quindi si sarà risoluto il problema.

384. Ma può ben comprendersi, che un' eliminazione di tal natura sia del tutto ineseguibile *; cosicchè l' analisi recata del problema, non dia già la soluzione di esso, ma ne mostri appena la via per eseguirla. Converrà dunque rivolgersi ad altro espediente; e noi uno ne mostreremo proprio non solo a dare un' elegante soluzione dell' attual quistione; ma da potersi ancora vantaggiosamente applicare ad altre ricerche, come mostreremo più innanzi con qualche altro esempio. E crediamo, che senza di esso riesca inutile ogni sforzo per una pura soluzione algebrica del presente problema, che ha richiamata l' attenzione de' più valenti analisti.

385. Sieno dunque espressi, come innanzi, con (z, v), (z', v') due punti qualunque V, V' del cerchio (C), l'equazione della retta, che passa per essi sarà

$$y = \frac{v-v'}{z-z'}\,x + \frac{zv'-z'v}{z-z'} \qquad (3)$$

* *Volendo compiere l' analisi del problema nell' indicato modo, le sei equazioni, che ne risultano, e tra le quali converrebbe eseguire l' eliminazione, sarebbero le seguenti*

$$(v-v')^2(r'^2-a^2) - 2a(v-v')(zv'-z'v) - (zv'-z'v)^2 + r'^2(z-z')^2 = 0$$
$$(v'-v'')^2(r'^2-a^2) - 2a(v'-v'')(z'v''-z''v') - (z'v''-z''v')^2 + r'^2(z'-z'')^2 = 0$$
$$(v-v'')^2(r'^2-a^2) - 2a(v-v'')(zv''-z''v) - (zv''-z''v)^2 + r'^2(z-z'')^2 = 0$$
$$v^2 = 2rz - z^2$$
$$v'^2 = 2rz' - z'^2$$
$$v''^2 = 2rz'' - z''^2$$

Ed ognuno che sia esercitato nel calcolo algebrico vede bene in qual laberinto s' entrerebbe, volendosi con gli ovvj metodi ottener l' eliminata; la quale alla fine, per la sua complicazione, darebbe luogo a risultamenti incerti, ed inintelligibili, e l' esistenza sul cerchio (C) de' punti (z , v) , (z', v') sarà condizionata dalle relazioni

$$v^2 = 2rz - z^2$$
$$v'^2 = 2r' - z'^2$$

Pongasi intanto
$$v = z u$$
$$v' = z'u'$$

ove u , u' sieno due novelle incognite ; si avranno i seguenti valori di z , z' ; v , v', in u , u'

$$z = \frac{2r}{u^2+1} \quad , \quad z' = \frac{2r}{u'^2+1}$$
$$v = \frac{2ru}{u^2+1} \quad , \quad v' = \frac{2r}{u'^2+1}$$

che sostituiti nell' equazione (3) la riducono ad

$$y = \frac{uu'-1}{u+u'}\,x + \frac{2r}{u+u'} \qquad (4)$$

Or le equazioni (3) , (4) esprimono, com' è manifesto, la medesima retta VV' ; ma però la (3) indica in generale , che tal retta passa pe' due punti (z , v) , (z', v'), ovunque situati sul piano del cerchio , mentre per l' altra esigesi essenzialmente, che i due punti stieno nella sua circonferenza. Laonde potrem dire , che la (4) sia l' equazione di una corda del cerchio (C), espressa semplicemente in funzione de' rapporti delle coordinate delle sue estremità , avendosi

$$u = \frac{v}{z} \quad , \quad u' = \frac{v'}{z'}$$

386. Dopo ciò è chiaro, che le equazioni (1) pe' tre lati del triangolo, facendo $v''=z''u''$, si trasmutino nelle seguenti

$$\left.\begin{array}{ll} y(u+u') - x\,(uu'-1) = 2r\ , & \text{pel lato V V}' \\ y(u'+u'') - x\,(u'u''-1) = 2r\ , & \text{pel lato V}'\text{V}'' \\ y(u+u'') - x\,(uu''-1) = 2r\ , & \text{pel lato V V}'' \end{array}\right\} (5)$$

E di esse paragonando la prima coll' equazione

$$y = kx + h$$

adoperata nell' antecedente proposizione ; e quella del cerchio (C') coll' altra

$$y^2 + x^2 + \text{B}y + \text{C}x + \text{D} = o$$

si avrà

$$k = \frac{uu'-1}{u+u'} \quad , \quad h = \frac{2r}{u+u'}$$
$$\text{B} = o \ , \ \text{C} = -2a \ , \ \text{D} = a^2 - r'^2$$

Fattane la corrispondente sostituzione nella relazione assegnata nel §.382, la condizione del contatto tra il lato VV', e 'l cerchio (C') verrà espressa da

$$(r'^2-a^2)\,u^2u'^2 + r'^2(u^2+u'^2) - 2a(2r-a)uu' + r'^2 - (2r-a)^2 = o$$

Ma essendo a la distanza tra il centro del cerchio (C) e l'una delle estremità del diametro $2r$ del medesimo sull' asse delle ascisse , $2r - a$ esprimerà la distanza del centro stesso dall' altra estremità di quel diametro ; sicchè dinotandola con a' , cioè ponendo

$$2r - a = a' \qquad (6)$$

la precedente condizione ridurrassi nella forma più semplice

$$(r'^2-a^2)u^2u'^2 + r'^2(u^2+u'^2) - 2aa'uu' + r'^2 - a'^2 = o$$

che , facendo ancora per maggior brevità ,

$$\left.\begin{array}{ll} r'^2 - a^2 & = \text{S} \\ r'^2 = & \ \ \text{P} \\ -2a\beta' & = \text{Q} \\ r'^2 - a'^2 & = \text{H} \end{array}\right\} \qquad (7)$$

diviene

$$\text{S}u^2u'^2 + \text{P}\,(u^2 + u'^2) + \text{Q}uu' + \text{H} = o$$

Trattando allo stesso modo le equazioni degli altri due lati V'V'',V''V, cioè la seconda, e terza delle (5), si perverrà senza nuovo calcolo a due relazioni della stessa forma . E però le condizioni del problema proposto si troveranno tutte comprese nelle tre seguenti equazioni

$$\left.\begin{array}{l} Su^2\,u'^2 + P\,(u^2 + u'^2) + Quu' + H = o \\ Su'^2\,u''^2 + P\,(u'^2 + u''^2) + Qu'u' + H = o \\ Su''^2u^2 + P\,(u''^2 + u^2) + Qu''u + H = o \end{array}\right\} \quad (8)$$

contenenti le tre incognite u, u', u''; che però la ricerca proposta trovasi ridotta ad eliminar due di queste, la seconda e terza, per esempio, per quindi trasmutare l' eliminata in u, in un' altra equazione in z, v, mediante la relazione

$$v = zu$$

e determinare poscia i valori di z, v, coordinate dell' ignoto vertice V, per mezzo dell' altra equazione

$$v^2 = 2rz - z^2$$

Per eseguire intanto l' eliminazione tra le precedenti equazioni, ponga nsi le prime due sotto la forma

$$u'^2(\,Su^2 + P\,) + Quu' + (\,Pu^2 + H\,) = o$$
$$u'^2(\,Su''^2 + P\,) + Qu''u' + (\,Pu''^2 + H\,) = o$$

Moltiplicando la prima per $(\,Su''^2 + P\,)$, la seconda per $(\,Su^2 + P\,)$, si sottragga l' un prodotto dall' altro, e diviso il residuo pel fattore superfluo $(\,u - u''\,)$, si avrà

$$SQuu'u'' - PQu' + (\,SH - P^2\,)(\,u + u''\,) = o$$

Praticando lo stesso fra la seconda, e terza, si avrà l' altro residuo

$$SQuu'u'' - PQu'' + (\,SH - P^2\,)(\,u + u'\,) = o$$

e prendendo la differenza di questi residui si otterrà finalmente

$$PQ + SH - P^2 = o \qquad (9)$$

Il qual risultamento scevro da incognite fa conoscere, che il problema in generale non possa risolversi se non si verifichi fra' dati, cioè fra' determinanti del sito, e della grandezza de' due cerchi la relazione (9). Ma è poi chiaro, che quando una tal relazione abbia luogo il problema diventi indeterminato, cioè a dire, che una volta, che possa descriversi tra due cerchi un triangolo colle condizioni proposte, infiniti altri triangoli si potranno tra essi adattare con le me-

desime condizioni; o ch' è lo stesso, prendendo un qualunque punto nell' un de' cerchi, si potrà da questo convenevolmente procedendo, giusta le condizioni del problema, costruirlo. E però esso trasmuterassi nel seguente

TEOREMA.

387. *Se un triangolo iscritto in un cerchio si trovi circoscritto ad un altro cerchio; qualunque altro triangolo s' iscriva nel primo, con due lati tangenti il secondo, avrà il terzo suo lato tangente il cerchio medesimo.*

388. Nella relazione poc' anzi trovata

$$PQ + SH - P^2 = o$$

sostituiscansi a P, Q, S, H i proprj valori (7), si troverà

$$4r^2r'^2 = a^2\,(\,4\,r^2 + 4a^2 - 4ra\,)$$

ed estraendo da ambo i membri la radice quadrata, si avrà

$$2rr' = a(\,2r - a\,)$$

ossia

$$2rr' = aa'$$

relazione che tradotta in linguaggio geometrico dà luogo al

TEOREMA.

389. *Il centro del cerchio iscritto in un triangolo divide il diametro del circoscritto in due parti, sicchè il loro rettangolo è quanto il doppio di quello contenuto dai raggi de' due cerchi.*

390. Chiamando D la distanza tra' centri de' cerchi si avrà

$$r + D = a\,,$$
$$r - D = a'$$

e da ciò si otterrà, moltiplicando ciascun termine pel corrispondente ad esso,

$$r^2 - D^2 = aa' = 2rr'$$

e quindi

$$D^2 = r^2 - 2rr'$$

ch' è la relazione trovata per altre vie fra la distanza de' centri, ed i raggi de' cerchi iscritto, e circoscritto ad un triangolo, da Eulero, Fuss, Lhuilier, Sturm, Hunger, Iacobi *, ed altri ancora.

391. Ma prima di lasciare la ricerca trattata in questo problema di singolar natura, sarà bene soffermarci alquanto a considerare quel ripiego, che di tanta utilità ci è stato per condurla a fine. Ritornando dunque all' equazione (4) è facile ravvisare, ch' essa equivalga al sistema delle tre equazioni

$$y = \frac{v - v'}{z - z'}\,x + \frac{zv' - z'v}{z - z'}$$
$$v^2 = 2rz - z^2$$
$$v'^2 = 2rz' - z'^2$$

che però possa quella sola adoperarsi invece di queste. E di un tale analitico ripiego se ne vedrà anche meglio l' importanza nella seguente proposizione: ma quì per un esempio più semplice, ed ovvio mostreremo come da esso ottengasi prontamente l' equazione della tangente del cerchio in un punto (z, v).

In fatti, poichè l' equazione

---

* *Le dimostrazioni date di questa relazione da' citati geometri sono tutte fondate sul teorema da noi dedotto nel* §. 387, *ch' essi prendono come conosciuto; mentre la difficoltà della ricerca sta appunto in quel teorema. I varj metodi da essi seguiti son per altro esclusivamente applicabili al cerchio, ed al semplice caso del triangolo, eccettuandone però quello di Iacobi, il quale quantunque limitato al cerchio, ha però generalizzata la quistione per un poligono di qualsivoglia numero di lati. Ma ci si vale a tal uopo de' mezzi più sublimi, che or possegga la scienza, cioè delle* trascendenti ellittiche. *Or il metodo da noi tenuto oltre ad estendersi identicamente al caso generale del poligono, si applica colla stessa facilità alle sezioni coniche, e possiamo anche aggiungere alle curve di ordini superiori; come non mancheremo di far rilevare nel luogo, che si conviene.*

$$y = \frac{uu' - 1}{u + u'}\,x + \frac{2r}{u - u'}$$

esprime una retta condotta per due punti (z, v), (z', v') del cerchio (C), questa retta gli sarà tangente, quando si abbia

$$z = z' \quad , \quad v = v'$$

e quindi
$$\frac{v}{z} = \frac{v'}{z'} = u = u'$$

nella quale ipotesi l' equazione (4) riducesi ad

$$y = \frac{u^2 - 1}{2u}\,x + \frac{r}{u} \tag{10}$$

che sarà in conseguenza l' equazione della tangente del cerchio (C) nel punto (z, v). Ed essa può, se sia opportuno, ritenersi sotto tal forma: e volendo ripristinarvi le coordinate z, v, basterà sostituirvi $\frac{z}{v}$ in vece di u; da che avrassi

$$y = \frac{v^2 - z^2}{2zv}\,x + \frac{rz}{v}$$

ossia, per essere $v^2 = 2rz - z^2$,

$$y = \frac{r - z}{v}\,x + \frac{rz}{v} \tag{11}$$

ch' è l' equazione della tangente nel punto (z, v) identica a quella, che si troverebbe usando il metodo del §. 334. Ma vedremo or ora quanto riesca utile ritener l' equazione della tangente al cerchio nella forma (10), per la quale si ha il gran vantaggio di trovarvisi il solo elemento indeterminato u, invece delle coordinate z, v.

392. Per mostrare intanto con altro esempio, come abbiamo promesso, l' uso vantaggioso, che può farsi dell' equazione tanto di una corda, quanto della tangente di un cerchio sotto la forma novella, che le abbiam data, ci occuperemo di un altro problema non men difficile, tralasciando però la discussione de' risultamenti, che non sarebbe questo il luogo opportuno a farla.

PROPOSIZIONE XI.

PROBLEMA.

393. *Due lati di un angolo $VV''V'$ [fig. 47.] iscritto in un cerchio passino costantemente per due punti dati B, B'; si cerca il luogo del concorso delle tangenti condotte per le sue estremità V, V'.*

Si prendano per assi il diametro perpendicolare alla congiungente de' punti dati A, B, e la tangente per una delle sue estremità. L' equazione del cerchio sarà

$$y^2 = 2rx - x^2$$

Quindi dinotando le estremità V, V' de' lati dell' angolo con (z, v), (z', v'), e con (z'', v'') il suo vertice, e poi facendo $v = zu$, $v' = z'u'$, $v'' = z''u''$

le equazioni de' due lati VV'', V'V'' saranno

$$y(u + u'') - x(uu' - 1) = 2r$$
$$y(u' + u'') - x(u'u'' - 1) = 2r$$

e quelle delle tangenti ne' punti V, V' (391)

$$2uy - (u^2 - 1)x = 2r$$
$$2u'y - (u'^2 - 1)x = 2r$$

Dinotando adunque con β, β' le ordinate de' punti dati B, A, con α la loro ascissa comune, e chiamando x', y' le coordinate di un punto del luogo cercato, si avranno per risolvere il problema le quattro equazioni di condizione

$$\beta(u + u'') - \alpha(uu'' - 1) = 2r$$
$$\beta'(u' + u'') - \alpha(u'u'' - 1) = 2r$$
$$2uy' - (u^2 - 1)x' = 2r$$
$$2u'y' - (u'^2 - 1)x' = 2r$$

Trattasi ora di eliminar da queste quattro equazioni le u, u', u''. A tal' effetto eliminando u'' fra le prime due, e

messo per brevità

$$2r - \alpha = \alpha'$$

si troverà prontamente

$$(\alpha uu' - \alpha')(\beta - \beta') - (u - u')(\beta\beta' - \alpha\alpha') = o \quad (1)$$

Ordinando poi le altre due rispetto ad u, u', si ha

$$u^2 - \frac{2y'}{x'}u + \frac{2r - x'}{x'} = o$$
$$u'^2 - \frac{2y'}{x'}u' + \frac{2r - x'}{x'} = o$$

in ciascuna delle quali equazioni le radici u, o u' risultando le stesse, possono però valer per esse quelle di una sola equazione; e quindi si avrà per la loro differenza

$$u - u' = \pm\frac{2\sqrt{(y'^2 + x'^2 - 2rx')}}{x'};$$

e sarà poi per le note teoriche delle equazioni

$$uu' = \frac{2r - x'}{x'}$$

Sostituendo in (1) questi valori di uu', e di $u - u'$, si avrà, per la locale richiesta, l' equazione

$$(\beta - \beta')\left(\alpha(2r - x') - \alpha' x'\right) = \pm 2(\beta\beta' - \alpha\alpha')\sqrt{(y'^2 + x'^2 - 2rx')}$$

cioè, elevando a quadrato,

$$(\beta - \beta')^2(2\alpha r - \alpha x' - \alpha' x')^2 = 4(\beta\beta' - \alpha\alpha')^2(y'^2 + x'^2 - 2rx')$$

Adunque la locale cercata è una linea di 2° ordine.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

394. *Nel quadrilatero ABCD* [*fig.48.*], *le congiungenti i punti medj de' lati opposti, e la congiungente i punti medj delle diagonali s' incontrano in un punto.*

Presi per assi due lati AD, DC, si ritengano pe' vertici le seguenti indicazioni
per A (o, a'), per B (b, b'), per C (c, o), per D (o, o).
Quindi i punti medj de' lati verranno espressi nel seguente modo, cioè,

$$A' \text{ da } \left(o, \frac{a'}{2}\right), \quad B' \text{ da } \left(\frac{b}{2}, \frac{a'+b'}{2}\right)$$

$$C' \text{ da } \left(\frac{b+c}{2}, \frac{b'}{2}\right), \quad D' \text{ da } \left(\frac{c}{2}, o\right)$$

Ed i punti medj delle diagonali

$$S \text{ da } \left(\frac{b}{2}, \frac{b'}{2}\right), \quad R \text{ da } \left(\frac{c}{2}, \frac{a'}{2}\right)$$

Adunque le equazioni delle tre congiungenti de' punti medj de' lati, e delle diagonali saranno rispettivamente

$$\text{per } A'C' \quad y - \frac{a'}{2} = -\frac{a'-b'}{b+c}\, x$$

$$\text{per } B'D' \quad y - \frac{a'+b'}{2} = \frac{a'+b'}{b-c}\, x \left(x - \frac{b}{2}\right)$$

$$\text{per } SR \quad y - \frac{a'}{2} = -\frac{a'-b'}{b-c}\, x \left(x - \frac{c}{2}\right)$$

Or comunque si combinino fra loro queste tre equazioni due a due, per ricavarne le coordinate de' punti d' incontro delle rette corrispondenti, trovandosi sempre

$$x = \frac{b+c}{4}, \quad y = \frac{a'+b'}{4}$$

ne segue, che le tre rette A'C', B'D', SR s' intersegano in uno stesso punto M.

395. Porremo fino a questo saggio di applicazioni del metodo algebrico puro alle ricerche geometriche, accennando alcune altre proprietà de' quadrilateri, e lasciando a' giovani matematici, per loro esercizio, la cura di tesserne le dimostrazioni col metodo suddetto.

I. *Le tre congiungenti indicate nel teorema precedente rimangono bisecate nel punto comune di loro incontro.*

II. *In ogni quadrilatero la somma de' quadrati delle diagonali è doppia della somma de' quadrati delle congiungenti de' punti medj de' lati opposti.*

III. *La somma de' quadrati delle diagonali di un quadrilatero col quadruplo quadrato della congiungente de' loro punti medj è quanto la somma de' quadrati de' lati.*

IV. *I quattro punti in cui s' incontrano due a due le bisecanti gli angoli interni di un quadrilatero sono nella circonferenza di un cerchio.*

V. *E se le quattro bisecanti s' incontrino in un medesimo punto, allora il quadrilatero stesso sarà circoscrittibile ad un cerchio, e quel punto ne sarà il centro.*

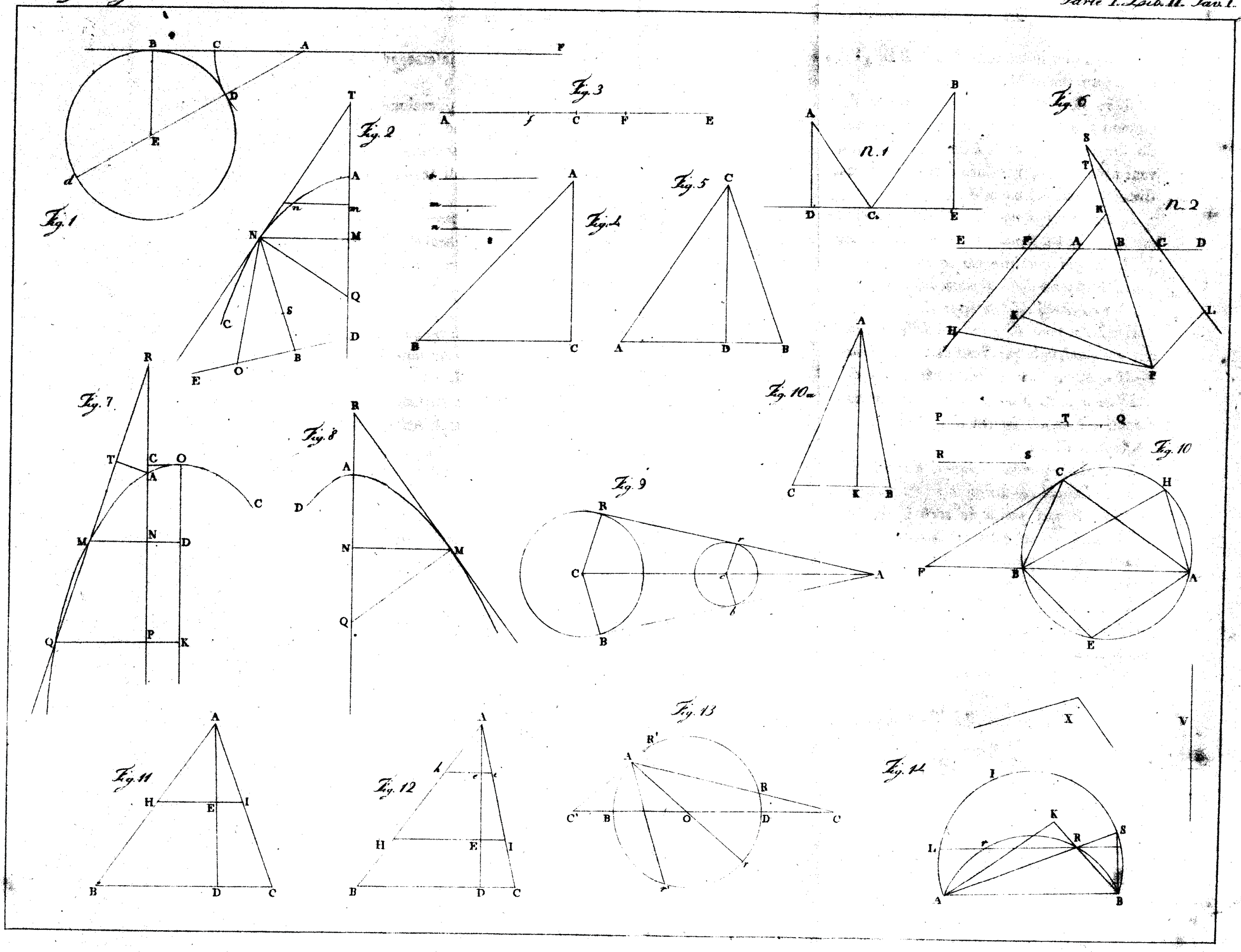
VI. *Le bisecanti gli angoli esterni di un quadrilatero s' incontran pure in quattro punti situati egualmente sulla circonferenza di un cerchio.*

VII. *Le diagonali de' due quadrilateri, che risultano da' teoremi IV, e VI per uno stesso quadrilatero, coincidono le une sulle altre.*

Fine del libro secondo.

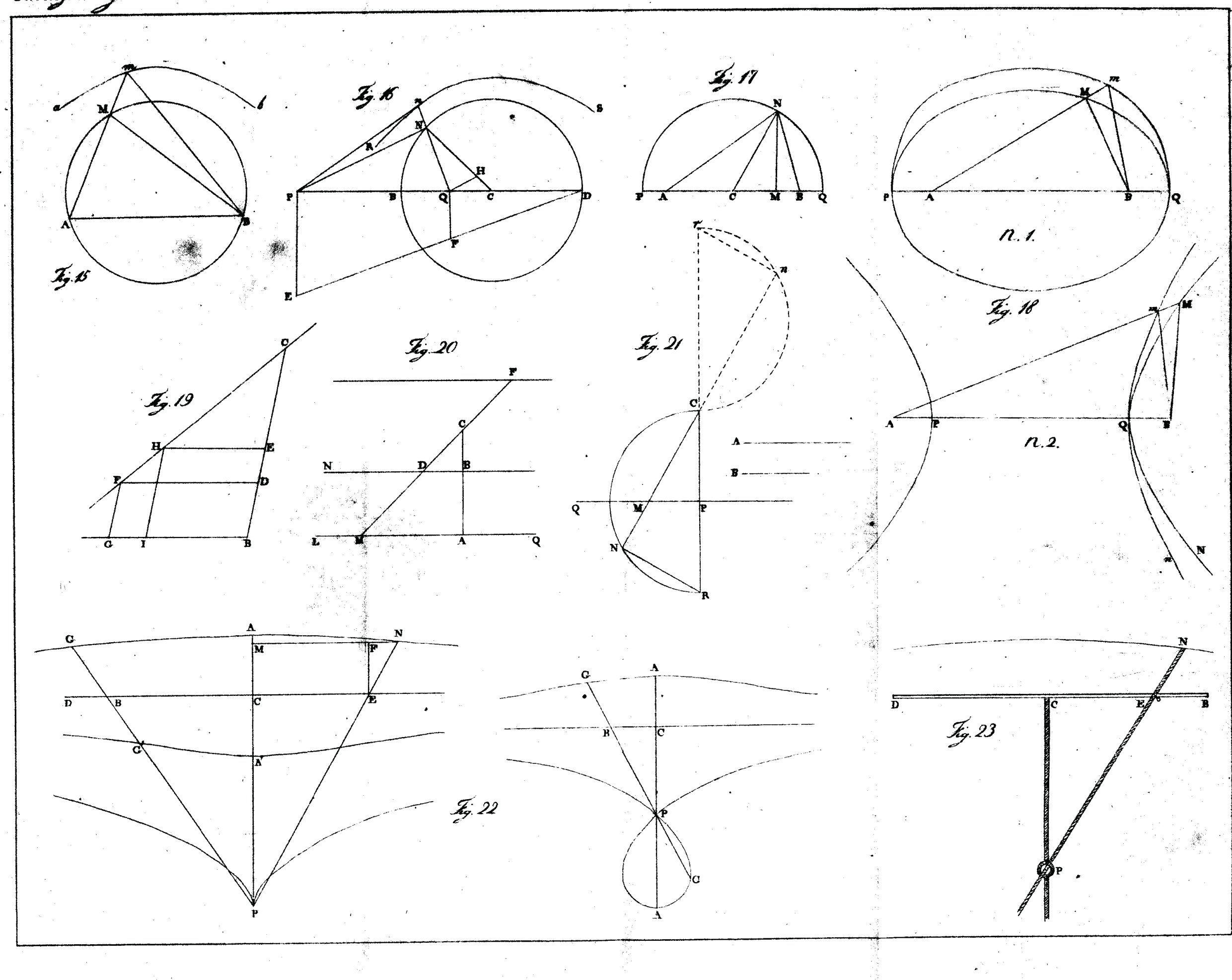
Invenzione Geometrica

Parte I. Lib. II. Tav. I.



Invenzione Geometrica

Parte I. Lib. II. Tav. II.



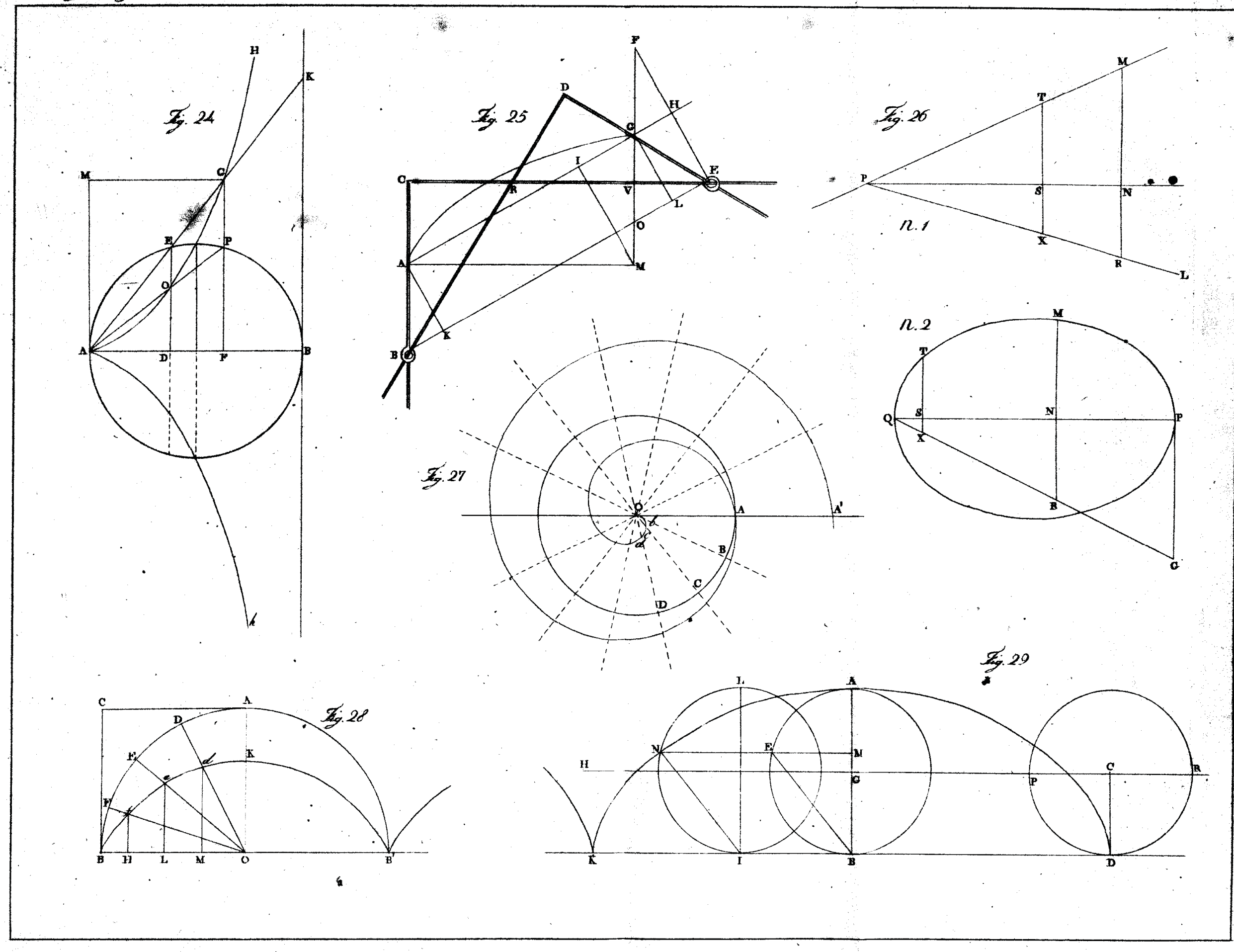


Fig. 24
Fig. 25
Fig. 26
n. 1
n. 2
Fig. 27
Fig. 28
Fig. 29

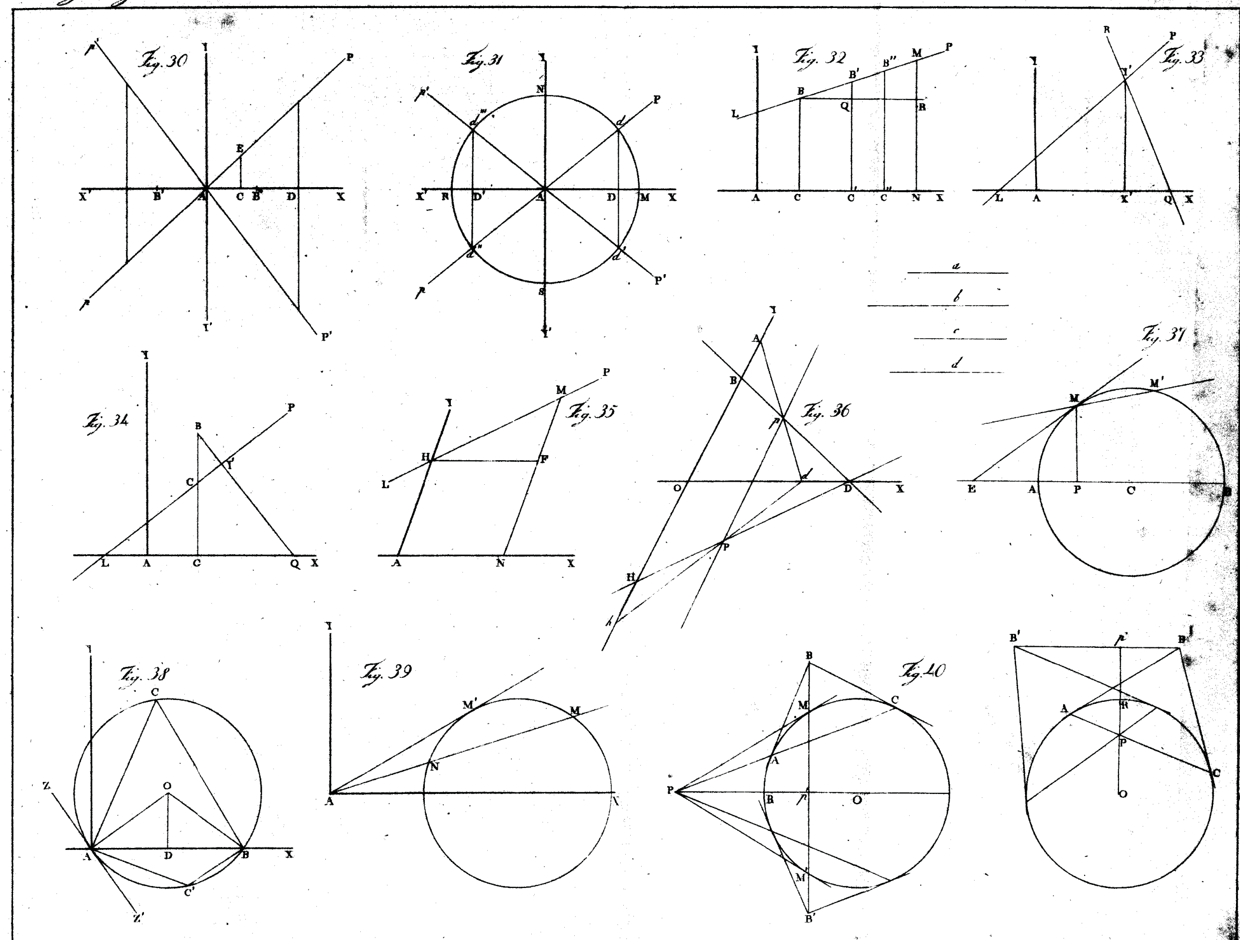
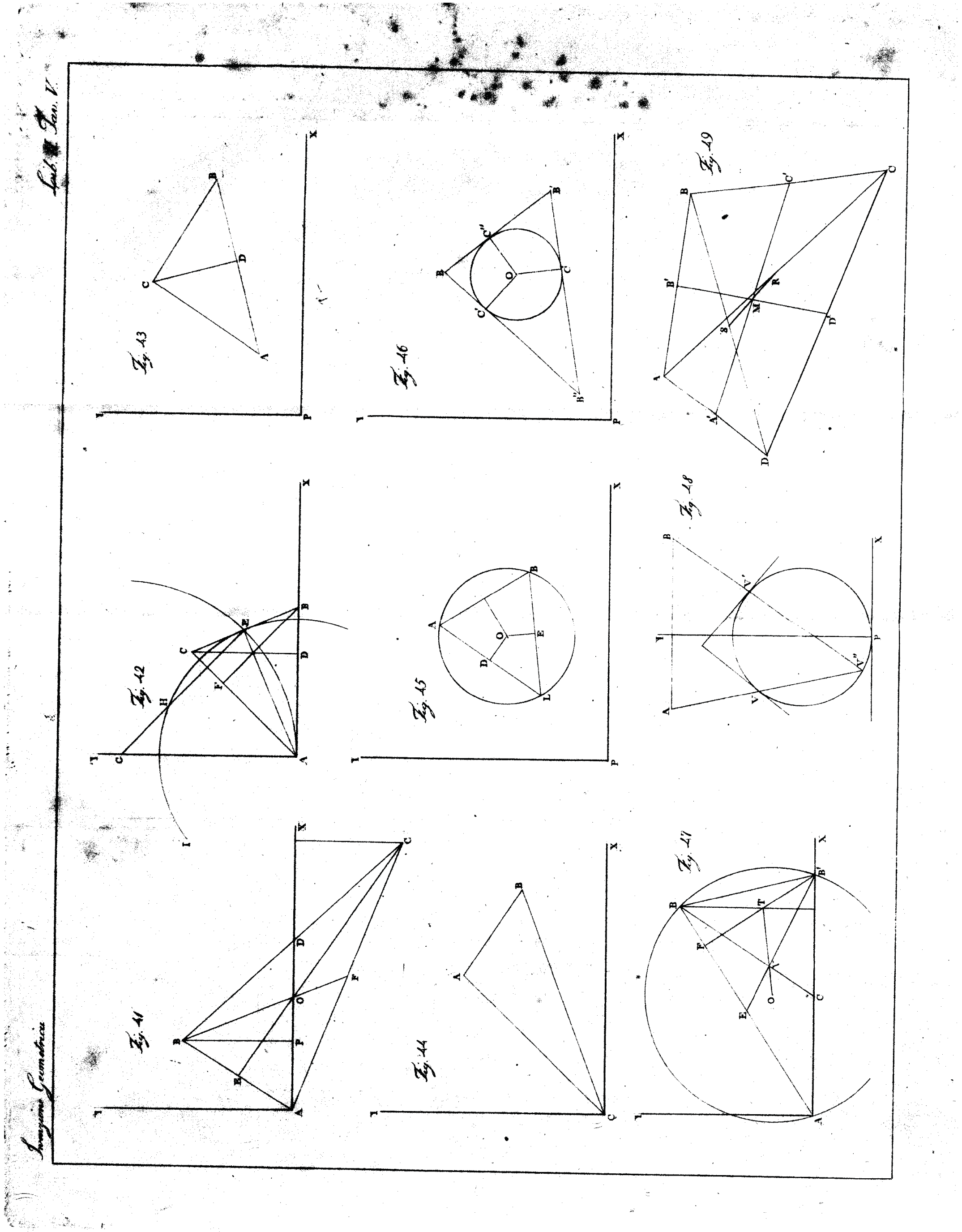


Fig. 30
Fig. 31
Fig. 32
Fig. 33
Fig. 34
Fig. 35
Fig. 36
Fig. 37
Fig. 38
Fig. 39
Fig. 40



LIBRO TERZO.

DELL' ANALISI GEOMETRICA

CAPITOLO I.

Prenozioni di questo argomento.

396. Se un inventore tanto prevale ad un' uomo scienziato, e saggio ; quanto questi estollesi sull' ignaro volgo, qual pregio non avrà colui, che l' arte rinvenne dell' inventare ? Platone la scoprì ne' primi albori della Geometria, ei ne guidò i geometri de' suoi tempi, e della posterità erudita ad inventar per arte, onde parmi, che il valentuomo più per questo ritrovato, che per ogni altra filosofica speculazione siasi detto il *divino ingegno*, quasi che angelica mente in cerebro d' uomo accogliesse. Or io in questo libro, come più fiate ho promesso, imprendo a ragionare de' metodi di sciorre i problemi, e di poi dimostrarli. Dunque dovrò principalmente, e giusta mia possa dichiararvi la natura dell' *Analisi geometrica*, e 'l potere, che ad inventare la stessa tiene.

Mi duole, che il tempo vorace, non ci abbia trasmessi i principj euristici de' geometri greci, e di tanti altri dell'antichità rimota ; spero nondimeno, che certi tratti sintetici de' geometri moderni, e quel tanto, che io di propria avvertenza ho rilevato dagli antichi, e quì proposto ordinatamente, bastino ad empiere il voto di cotesta arte sì attiva, e chiara.

397. Ma quale mai n' è l'*Anâlisi geometrica* inventata dall' acutissimo Platone, e fedelmente seguita da' geometri posteriori ? In quattro semplicissime parole fu questa abbozzata dal saggio Teone alessandrino, nel seguente modo :

Est sumptio quaesiti tanquam concessi, per ea quae consequuntur in aliquod verum concessum .

Del che eccone il seguente sviluppo.

I. Suppongasi fatto quello che si domanda di fare in un problema.

II. Si sviluppino le congrue conseguenze di cotesta supposizione .

III. Ed una di loro si rinvenga , che sia fattibile .

Cioè : Suppongasi risoluto quel problema , che a risolvere si propone ; e poi da tale supposizione ritraggansi le conseguenze corrispondenti a' dati , ed a' quesiti di esso : e si continui il filo delle anzidette conseguenze , finchè ei si riduca ad un' altro problema di già risoluto , o effettivamente si risolva .

Intanto per più ampliare coteste vie di risoluzione calcate dall' analisi geometrica degli antichi , ed ora dall' Algebra de' moderni, ho stimato convenevole proporre i seguenti canoni euristici.

Canone I.

398. Supponi di già risoluto quel problema geometrico , che imprendi a risolvere ; e dal punto ignoto , cui riducesi il suo quesito , conduci rette a' punti dati , o con dato sito su linee date, se pur vi sieno queste, o quelli ; ed ancora su tali grandezze , o altre del problema potrai praticare qualcuna delle operazioni della Geometria elementare , che ti parrà conveniente . Ciò fatto , esamina con avvedutezza i rapporti delle grandezze ignote del problema ad altre quantità note di esso , regolandoti colle condizioni del problema , e colle proprietà del subietto dello stesso . E finalmente va traendone da ciò le conseguenze successivamente, finchè una tra le medesime ne appaja, che risolva effettivamente il problema , o che il riduca ad un altro di soluzione manifesta . Si sarà risoluto il problema.

Canone II.

399. E se di un tal problema vorrai farne la composizione geometrica , celandone l' analisi precedente ; dovrai costruirlo in virtù delle preparazioni geometriche, e delle riduzioni di già in esso praticate ; e dal resto dell'analisi geometrica ne carpirai la dimostrazione come in appresso sarà detto.

Canone III.

400. E se ti aggrada di risolvere cotesto problema coll' Algebra , dovrai pur praticarvi quanto nel Canone I. sprescrive . Di poi indicandone colla lettera x , o con qualche altra delle finali l' ignota principale del problema , e colle iniziali le grandezze note , ne formerai da queste, e da quella , e co' precetti del cap. 2. del lib. II. le espressioni di quelle ignote socie , che vi si dovran maneggiare . Ciò premesso traduci le condizioni di un tal problema in equazioni ; e se mai n' emergerà una sola equazione determinata , la dovrai ordinare , sciogliere , e costruire co' precetti dell' Algebra. Ed incontrandosi più equazioni indeterminate, vi si dovranno eliminar le ignote, giusta gli artifizj ovvj , o pure combinerai giustamente quelle linee , che abbiano le dette equazioni per locali .

Canone IV. *

401. Che se, cominciato ad operare come nel Canone precedente , ti piaccia condurre innanzi la ricerca col mezzo di acconce equazioni locali, che i determinanti di quella in loro comprendano , come i moderni analisti propongon fare ; bisognerà prima ben esaminare quali sieno que' determinanti . e come meglio convenga nella loro forma algebrica rappre-

---

* *Un tal canone è stato da noi aggiunto , per non tralasciare alcun de' mezzi , che l' analisi moderna può utilmente offrire all' invenzione geometrica ,*

sentarli; ed esprimendo in tal guisa tutte le condizioni, che convengono alla ricerca, che trattasi, per le corrispondenti equazioni, rilevar da queste, convenevolmente ridotte, l'equazione finale al problema, per indi costruirla; o pure pervenire a tali equazioni indeterminate, che separatamente costruite, e tra lor combinate, ne offrano nell' intersezioni de' luoghi geometrici, ch'esse rappresentano, il quesito del problema.

PROPOSIZIONE I.

Principio.

402. Le parti principali dell' analisi geometrica riduconsi alle tre seguenti: cioè, alla *supposizione del fatto*; allo *sviluppo congruo delle conseguenze*, che se ne traggono; all' *effettiva risoluzione del problema*, o alla *riduzione* del medesimo ad un altro di soluzione manifesta. Del che in appresso.

PROPOSIZIONE II.

Principio.

403. Le risoluzioni de' problemi geometrici o saranno *effettive*, o *ridotte*. Ma sempre l' analisi loro è quell' ontologico principio di riduzione, che di verità, e di metodi n' è copiosa vena.

PROPOSIZIONE III.

Principio.

404. Un problema geometrico, in parità di altre cose, sarà tanto più difficile ad essere risoluto, quanto sono più numerose le conseguenze, che dalla supposizion del fatto convien trarre, e quanto men vi si vegga il nesso loro.

405. L' arte d' inventare, e di dimostrare, che è una delle più belle virtù dianoetiche, o è dono di Natura, o di un esercizio regolato l' effetto. Raccontasi, che il gran Newton nell' apprender, ch' ei fece gli Elementi della Geometria, non vi avesse letto, che i soli temi delle proposizioni, e che un genio interiore gliene avesse suggerite le dimostrazioni*. Ma tanti ingegni da meno del Newton con un volo di riflessione valgon pur essi ad isciorre difficili problemi, e a dimostrar teoremi, sol che abbiano contratta in convenevol modo quest' arte, che io qui riduco in didascalici precetti.

406. Prima di ragionar diffusamente di quelle tre parti dell' analisi geometrica, che ho qui nel princ. 1. designate, quaggiù propongo cinque geometrici problemi, risolvendone sinteticamente i due primi; con pura analisi gli altri due, che seguono: e recandone al quinto l' analisi geometrica, e l' algebrica soluzione posta accanto a quella**.

Le quali cose serviranno a render chiare le verità proposte in questo capo, e quelle altre ancora, che ne' seguenti capi mi restan da dire.

---

* *Fontenelle* — Elog. Newt. *nell'* Hist. de l' Acad. royale *des scienc. an. 1727.* — *Pemberton* — Pref. in a view of sir Isaac Newton's — Frisi — *Elogio del Newton, e nell' introduzione a quello del Galilei*.

** *Non abbiamo soggiunta anche una soluzione fatta col* metodo a coordinate; *poichè di queste già si hanno esempj nel cap.8. lib.II,*

PROPOSIZIONE IV.

PROBLEMA.

407. Dato di specie, e di grandezza il triangolo ABC [*fig.* 1.] iscrivervi un quadrato, di cui un lato resti adattato sulla sua base.

SUPPOSIZIONE DEL FATTO

PARTE I. DELL' ANALISI GEOMETRICA.

Suppongasi di già iscritto nel triangolo ABC il quadrato EGHF, in modo, che il lato FH di questo stia adattato sulla base BC di quello, e gli angoli FEG, HGE si trovino ne' lati AB, AC di esso triangolo. O, ch' è lo stesso, suppongasi essere O quel punto della data altezza AD del triangolo, sicchè conducendo per esso la retta EG parallela alla BC base del triangolo, e per gli estremi E, G di questa le perpendicolari EF, GH alla stessa base, sien queste perpendicolari ugnali a quella parallela.

SVILUPPO DELLE CONSEGUENZE

PARTE II. DELL' ANALISI GEOMETRICA.

Supposta la retta EG uguale all' altra EF, o alla sua uguale OD, dovrà essere

$$EG : AO :: DO : AO \qquad (1)$$

Ma l' è poi, per la natura del dato triangolo,

$$EG : AO :: BC : AD.$$

Dunque sarà

$$BC : AD :: DO : AO. \qquad (2)$$

RIDUZIONE DEL PROBLEMA

PARTE III. DELL' ANALISI GEOMETRICA.

Essendosi conchiuso esser le due rette DO, AO nella ragion delle due altre BC, AD, che son date di grandezza; e pareggiandone insieme prese la data AD, il problema proposto ridurrassi a dividere la data AD nella ragion data, o a trovar due rette, che facciano una data somma, ed abbiano pure un dato rapporto. Le quali cose possono farsi apertamente (*3.I.*).

COMPOSIZIONE GEOMETRICA DEL PROBLEMA,

CIOÈ COSTRUZIONE, E DIMOSTRAZIONE DI ESSO.

COSTR. Dal punto estremo B della base BC del triangolo dato le si eriga la perpendicolare BP uguale ad essa base; e congiunta la PD, si meni per lo punto E, ove tal retta sega il lato BA del detto triangolo, la retta EG parallela alla base BC, e pe' suoi estremi E, G le due EF, GH perpendicolari alla stessa base. Sarà il quadrilineo EGHF il quadrato richiesto.

DIM. Sta	PB : EF :: BD : DF, o sia EO.
Ma è poi	BD : EO :: BC : EG.
Dunque sarà	PB : EF :: BC : EG.

Quindi la EF uguale alla EG; e'l quadrilineo EGHF sarà un quadrato, ch'è di più iscritto nel dato triangolo ABC.

408. SCOL. Prima di addurre quegli altri problemi, che ho promesso di snodar qui appresso, gioverà fermarci alquanto ad osservare le tracce euristiche dell' esibita soluziono, per rilevarvi la proprietà, e 'l merito di essa. Ed in primo luogo la proporzione (1) non è che conseguente al quesito, o alle condizioni del problema, e l' altra (2) alla natura del subbietto dello stesso, cioè al triangolo proposto. Dunque l'addotta soluzione sarà adeguata in se stessa, come quella, che vi tien conto sì dell' una cosa, che dell' altra. Ma oltre a ciò ancora è semplicissima nel suo genere; perciocchè col menomo dispendio di ragioni si è all' intento pervenuto.

La costruzione poi di tal problema si è ancora recata in una maniera assai semplice, e più facile di quella, che avrebbesi potuto dal problema ridotto ottenere.

PROPOSIZIONE V.

PROBLEMA.

409. Dato di specie, e grandezza il triangolo ABC [*fig.*2.], iscrivervi un rettangolo di data aja: la quale per comodo dell' analisi seguente pareggi il rettangolo della base BC * nella data retta DP.

Supposizione del fatto.

Il punto O della retta AD, ch' è la data altezza del triangolo proposto, sia quello, che si domanda. Per tal punto intendasi distesa la EG parallela alla BC, base di esso triangolo, e da' suoi estremi G, E si abbassino le due GH, EF perpendicolari alla medesima base BD.

Dovendo essere tra se uguali i due rettangoli BTRC, FEGH saranno le basi loro reciproche alle altezze(*16.El.VI.*); cioè:

I. Dovrà stare

BC : EG :: DO : DP.

II. Per la natura del dato triangolo è poi

BC : EG :: DA : AO.

III. Dunque sarà

DA : AO :: DO : DP.

Riduzione del problema.

410. Le due rette AO, DO sono reciproche alle due date DA,DP (*16.El.VI.*), ed hanno per somma la data retta AD. Dunque un tal problema si è ridotto a quello del §.14. lib.I.

Ma eccone di esso un' effettiva soluzione, che quaggiù distendo nel comporlo.

* *S' introduce la BC per lato del rettangolo dato, a guidarne l' analisi, come in quella si osserva. E ciò sia per documento de' giovani.*

Composizione geometrica del problema.

411. Costr. Si bisechi nel punto V l' altezza AD del dato triangolo, e poi col centro V intervallo VD si descriva il cerchio ADK, che segherà in K la RT. Si unisca la corda KD, e poi presa la DL uguale alla DK, si meni per lo punto L la retta LM parallela alla DA, che dovrà incontrare esso cerchio in qualche punto M (lo che accade, quando sia possibile un tal problema). Finalmente si tiri per M la retta EG parallela alla BC base del detto triangolo. Sarà il punto O quello che si dimanda.

Dim. Le due rette DK, OM avvegnacchè uguali alla medesima DL, sono uguali fra loro. Dunque sarà $DK^2 = MO^2$, cioè il rettangolo ADP uguaglierà l' altro AOD, e quindi starà AD : AO :: DO : DP. Ma la prima di queste due ragioni è quanto quella di BC ad EG. Dunque sarà BC : EG :: DO : DP, e con ciò il rettangolo FEGH pareggerà l' altro BTRC.

E nello stesso modo potrebbesi ordire la dimostrazione per l' altro punto *o*, quando la LM ne' due punti M, *m* incontri il descritto cerchio (§.201.).

412. Cor. 1. Se la retta DL si ritrovasse uguale a VD raggio del descritto cerchio; l' altra LM, che si è condotta parallela alla DA, gli sarebbe tangente; e 'l rettangolo, che vi si doveva iscrivere in tal caso ne sarebbe un *massimo*.

413. Cor. 2. Ma in questo caso la DK, cui si è fatta uguale la DL, sarà ancor essa uguale al raggio VD, o VK. Il perchè essendo equilatero il triangolo VDK, la DP sarà una metà di DV; e quindi il rettangolo BTRC quarta parte del rettangolo di DA in BC, cioè metà del dato triangolo ABC.

E da ciò potrà rilevarsi il seguente teorema:

Il massimo rettangolo iscrittibile in un triangolo dato è metà dell' aja di esso triangolo.

414. Cor. 3. E sarà poi impossibile il proposto problema, se il rettangolo dato fosse maggiore della metà dell' aja di quel triangolo.

415. Scol. Le verità esposte in questi tre corollarj, ed altre simiglianti cose debbono essere avvertite, ed indicate da un sagace scioglitore di problemi. E qui si potrebbe eziandio avvertire quel che fu indicato nel §. 408.

PROPOSIZIONE VI.

PROBLEMA.

416. Dato il punto G [*fig.*3.] nel diametro PV del semicerchio POV, e data di posizione la retta AR perpendicolare ad esso diametro, inclinare tra questa retta, e quella semiconferenza l'altra retta RB, che sia di data grandezza, e passi per lo dato punto G.

Soluzione algebrica.

Il punto B sia quello, che si domanda; e da esso si ordini la retta BF, e si tiri al centro C la BC. Ciò premesso pongasi

$$GB = x \qquad GA = a$$
$$RB = b \qquad GC = c$$

e quindi $GR = b + x \qquad CB = r$

sarà, pe' triangoli simili GAR, GFB,

$$GR : GA :: GB : GF$$

cioè $b + x : a :: x : GF = \frac{ax}{b+x}$

e quindi $CF = GF - GC = \frac{ax}{b+x} - c.$

Ma $GB^2 = GC^2 + CB^2 + 2CG \times CF$

Dunque sarà ne' loro simboli

$$x^2 = c^2 + r^2 + \frac{2acx}{b+x} - 2c^2$$
$$= r^2 - c^2 + \frac{2acx}{b+x}$$

Ed ordinando questa equazione, avrassi

$$x^3 + bx^2 + (c^2 - r^2 - 2ac)\,x + (c^2 - r^2)\,b = o$$

417. Cor. 1. Questo problema avrebbesi potuto coll'uso della *concoide* geometricamente costruire, ed in facil modo, come in simili casi seppesi condurre Archimede, principe de' geometri antichi, ed il Newton, genio della moderna Filosofia, cioè:

Si descriva una concoide, che abbia G per polo, per assintoto la data retta AR, e per *intervallo* * una retta uguale ad RB. Il punto ove questa curva incontra il dato semicerchio, sarà il richiesto. Ma si vedrà qui appresso come poterlo in altra guisa costruire.

418. Cor. 2. Se il dato punto G stia in P, ch' è un estremo del dato diametro, il proposto problema sarà *piano*. Percioc-chè in tal caso sarebbe $c = r$, e quindi $c^2 - r^2 = o$. Dunque l' ultima equazione si ridurrà alla seguente:

$$x^3 + bx^2 - 2acx = o$$

ossia $x^2 + bx - 2ac = o.$

419. Cor. 3. Essendo

$$GB^2 + CG^2 = CB^2 + 2FG \times CG$$

sarà (toltovi le uguali grandezze CO^2, e CB^2),

$$GB^2 - GO^2 = 2FG \times CG.$$

E moltiplicando per GB + BR il primo membro di quest'equazione, e 'l secondo per GR n' emergerà

$$GB^3 + BR \times GB^2 - GO^2 \times GB - BR \times GO^2 = 2FG \times CG \times GR.$$

Ma essendo GF:GB::GA:GR, si ha $FG \times GR = GB \times AG$

* *Veg. la nota alla prop. 27. II.* (§. 229.).

e quindi $2GF \times GR \times CG = 2GB \times AG \times CC$.

E sostituendo nella precedente equazione questo valore di $2GF \times GA \times CG$, ed ordinandola per le potenze di GB, sarà $GB^3 + BR \times GB^2 - (2CG \times AG + GO^2)\, GB - BR \times GO^2 = o$.

420. Cor. 4. Quest' equazione potrebbe tradursi in un geometrico teorema, qual fu proposto dal gran Newton [1] per ridurre tutte le costruzioni delle equazioni cubiche ad *Applicare una retta data tra 'l semicerchio POB, e la data retta, sicchè ella passasse per un dato punto G del di lui diametro, o nel di lui prolungamento.*

PROPOSIZIONE VII.

PROBLEMA.

421. Dato il punto A [*fig*. 4.] nell' asse della parabola MBO condurle da esso la segante ABO, tal che sia data di grandezza la corda BO.

Soluz. Suppongasi essere AB la segante richiesta, che seghi in S la tangente verticale MS. Ed ordinata all' asse la BC dal punto B, pongasi $AB = x$, $AM = a$, $MS = v$, e quindi $AS = \sqrt{(a^2 + v^2)}$, che per brevità di calcolo si disegni per z. In oltre, pe' triangoli simili AMS, ACB, essendo $AS : SM :: AB : BC$, cioè, $z : v :: x : BC$, sarà $BC = \frac{vx}{z}$; ed essendo, $AS : AM :: AB : AC$, cioè del pari $z : a :: x : AC$, sarà $AC = \frac{ax}{z}$; e quindi $MC = AC - AM = \frac{ax}{z} - a$. Ma per la natura della parabola MBO dee essere

$$BC^2 = MC \times c$$

dinotando con c il parametro principale. Dunque, sarà ne' simboli di queste grandezze

[1] Arithm. Univers. Appendix de aequat. const. lin. n. XXII.

$$\frac{v^2x^2}{z^2} = \frac{acx}{z} - ac,$$

ed ordinando l' equazione, avrassi

$$x^2 - \frac{acz}{v^2}\, x = -\frac{caz^2}{v^2}$$

cioè,
$$x = \frac{acz}{2v^2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2c^2z^2}{4v^4} - \frac{caz^2}{v^2}\right)}$$

II. Ciò posto, i due valori dell'ignota x, esprimono AO ed AB [2]; dunque la BO differenza di queste rette sarà uguale alla differenza di que' due valori. E dovendo esser data una tal differenza, che comodamente può esprimesi per $2b$, sarà

$$2\sqrt{\left(\frac{a^2c^2z^2}{4v^4} - \frac{caz^2}{v^2}\right)} = 2b$$

Si elevino a quadrato i membri di quest' ultima equazione, con farvisi i dovuti riducimenti de' termini, e si ponga per z^2 il suo valore $a^2 + v^2$, sarà

$$\frac{a^4c^2}{4v^4} - \frac{a^3c}{v^2} + \frac{a^2c^2}{4v^2} - ac = b^2$$

E quindi moltiplicando per v^4 quest' equazione, ed ordinandola rispetto all' ignota v, se ne otterrà quest' altra

$$v^4 + \left(\frac{a^3c - \frac{1}{4}a^2c^2}{ac + b^2}\right)v^2 = \frac{a^4c^2}{4(ac + b^2)}$$

Sicchè esprimendo per $2h^2$ il coefficiente del secondo termine (§. 124.), e per k^4 l' ultimo termine (§. 132.), sarà

$$v^4 + 2h^2v^2 = k^4$$

$$v^2 = -h^2 \pm \sqrt{(k^4 + h^4)}$$

e
$$v = \pm\sqrt{\left(-h^2 \pm \sqrt{(k^4 + h^4)}\right)}$$

[2] Perchè alla stessa equazione, e col calcolo medesimo si perviene, ponendo $AO = x$.

Considerazioni sul proposto problema.

422. I. I valori della v sono quattro, due reali espressi per

$$\pm\sqrt{\left(-b^2+\sqrt{(k^4+h^4)}\right)}$$

ed immaginarj gli altri due

$$\pm\sqrt{\left(-h^2-\sqrt{(k^4+h^4)}\right)}$$

Ma in questa indagine geometrica debbono militarne que' due reali solamente [3]. Cioè, sulla tangente verticale Ss debbonsi troncare, dall' una parte, e dall'altra del vertice M le due parti MS, ed Ms uguali fra loro, e ciascuna di esse quanto il valore geometrico dell' espressione

$$\sqrt{\left(-h^2+\sqrt{(k^4+h^4)}\right)}.$$

423. II. Questo problema potrebbesi elegantemente risolvere per la teoria del fuoco della parabola. Cioè, supposta essere AO la segante richiesta, e QP una tangente di tal curva parallela ad essa segante, si congiunga il fuoco F della parabola col punto Q del contatto, e si meni da Q la QR parallela all' asse MF. Ciò premesso pongasi

$$FQ = FP = x,$$

ed

$$FA = e;$$

sarà

$$AP = QR = x - e;$$

e sarà poi il parametro del diametro QR uguale a $4FQ = 4x$ (*pr.18.lib.I.Con.*). Quindi dovrà essere

$$BR^2 = QR \times 4QF = (x-e)\times 4x.$$

Ma per le condizioni del problema l' è ancora

$$BR^2 = b^2$$

Dunque sarà

$$4x^2 - 4ex = b^2.$$

Onde facilissimamente si distende per tal via la soluzione del

[3] Non essendovi rette immaginarie.

proposto problema, o che vogliasi analiticamente esibire *, o per operazioni geometriche solamente.

424. III. Se il dato punto fosse fuori dell'asse della parabola, com'è il punto D, si dovrebbe per la proposta ricerca abbassare la DE perpendicolare ad AT, e la QT alla stessa AT. Ciò posto si ponga $MT = MP = x$, *param.princ.* $= p$, e quindi $QT = \sqrt{px}$; e ponendo la $DE = q$, e la $FE = f$, sarà, pe' triangoli simili QTP, DEA,

$$QT : TP :: DE : EA,$$

cioè $\sqrt{px} : 2x :: q : EA = \dfrac{2qx}{\sqrt{px}}$. Onde dovrà essere

$$FA = f + \frac{2qx}{\sqrt{px}},\ PA = FP - FA = x + \tfrac{1}{4}p - f - \frac{2qx}{\sqrt{px}}$$

$$\text{ed } RB^2 = RQ \times 4QF = \left(x + \tfrac{1}{4}p - f - \frac{2qx}{\sqrt{px}}\right)(4x+p).$$

Ma per le condizioni del problema dee essere

$$RB^2 = b^2.$$

Dunque pareggiando questi due valori di RB^2 otterrassi un'equazione biquadratica, qual dee essere in questo caso.

425. IV. Questo problema avrebbesi potuto ancor risolvere con la moderna Geometria analitica *a due coordinate*; ma ho stimato ragionevole l' omettere i tratti euristici di questo metodo, come quello, che in sostanza non differisce dall' ovvio artifizio dell' eliminazione di un' ignota da due equazioni locali, ov' ella si contiene; ed è sovente di un duro maneggio, e che mette a risultamenti malagevoli a costruirsi, e

* *Essendo* $RB^2 = RQ \times 4QF = PA \times 4PF$, *si avrà* $4PF : RB :: RB : PA :: 4RB : 4PA$; *e però le due rette* 4PA, 4PF *aventi la data differenza* 4AF *saranno reciproche alle due rette date* RB, 4RB ; *ed il problema si costruirà facilmente pel* §.14. *Il che può servire di comprova, che la costruzione delle equazioni del 2° grado riducasi al problema fondamentale degli antichi ivi indicato, come è stato da noi detto nel citato* §., *e sarà ancora più appresso dimostrato dal Fergola.*

con poca eleganza . E ciò può intendersi dalla considerazione seconda , e da tanti altri esempj.

426. Cor. 1. Suppongasi esser la BO $= o$, lo che si avvera quando la retta AO diviene tangente della parabola . In tal caso sarà

$$x = \frac{acz}{2v^2}\ [4],$$

e quindi

$$BC^2 = \frac{v^2x^2}{z^2} = \frac{v^2}{z^2} \times \frac{a^2c^2z^2}{4v^4} = \frac{a^2c^2}{4v^2}$$

donde si ha [5] $CM = \frac{BC^2}{c} = \frac{a^2c}{4v^2}$.

Ma pe' triangoli simili SMA , BCA è poi

$$SM : MA :: BC : CA$$

cioè $v : a :: \frac{ac}{2v} : CA$

Dunque sarà $CA = \frac{a^2c}{2v^2}$

E con ciò :

La sottangente CA dupla della sua corrispondente ascissa CM.

427. Cor. 3. Con simigliante artifizio potrebbesi risolvere quest' altro malagevole

PROBLEMA.

Dato di grandezza il cerchio FDG [fig.5.] , che abbia il suo centro G nell' asse MG della data parabola BMO ; condurre ad esso cerchio la tangente ODB , sicchè sia data la parte OB , che resti nella parabola.

Sol. Compita la figura , come qui si ravvisa , pongasi AB

4 Quando un'equazione quadratica ha due radici uguali , l' incognita pareggia la metà del coefficiente del 2° termine col segno contrario .

5 Per la natura della parabola .

$= x$, AG $= v$, GD $= a$, AD $= z = \sqrt{(v^2 - a^2)}$, GM $= c$; ed il *param. princ.* $= c$.

E poichè i triangoli ADG, ACB sono simili , starà

$$AG : GD :: AB : BC ,$$

cioè $v : a :: x : BC = \frac{ax}{v}$.

E similmente

$$AG : AD :: AB : AC ,$$

cioè $v : z :: x : AC = \frac{zx}{v}$,

ed $MC = GM - GA - AC = c - v - \frac{zx}{v}$

Ma per la natura della data parabola dee essere

$$BC^2 = MC \times param.$$

Dunque ne' loro simboli avremo la seguente equazione

$$\frac{a^2x^2}{v^2} = cc - vc - \frac{czx}{v} .$$

La quale maneggiata, come quella del problema precedente darà il valore delle retta AG, dal cui punto A dovrebbesi condurre ad esso cerchio la tangente addimandata.

PROPOSIZIONE VIII.

PROBLEMA.

428. Costruire un triangolo, di cui sia data l' aja, il perimetro , ed un angolo .

Sol. Supponghasi essere ABC [*fig.6.*] il triangolo richiesto , sicchè siavi dato l' angolo in B , ed oltre a ciò sia AB + BC + CA $=$ P, e l'aja ACB uguale al rettangolo di P in M . Ed ecco di rincontro , nelle due seguenti pagine , i procedimenti de' due metodi , sintetico , ed analitico , onde potrebbesi guidare la soluzione di un tal problema.

20

Analisi Geometrica.

I. Si prolunghi il lato AC in a, sicchè sianvi le due parti Cb, e ba uguali a CB, e BA respettivamente, onde n' emerga tutta la retta Aa uguale alla data P.

II. Tirisi dal punto C la CD perpendicolare alla AB. Sarà dato di specie il triangolo CBD, per esserne dato l'angolo B. Dunque sarà data la ragione di BD a BC (§.60.), e quella del rettangolo ABD all' altro di AB in BC (*1.El.VI.*). Ma questo rettangolo è dato, per avere una data ragione al dato triangolo ABC (§.21.). Dunque sarà dato tanto il rettangolo di AB in BC, che l' altro di AB in BD; e questo potrà supporsi uguale ad $R\times P$, l' altro ad $S\times P$.

III. Intanto è

$$Aa^2+Ca^2=2AaC+AC^2 \qquad (7.El.II.).$$

Dunque togliendo Cb^2+ba^2 dal 1° membro di questo pareggiamento, e dal 2° togliendovi CB^2+BA^2, cioè AC^2+2ABD, resterà

$$Aa^2+2Cba=2AaC-2ABD.$$

IV. Finalmente si pongano in questo pareggiamento le loro equivalenti quantità, avrassi

$$P^2+2R\times P=2P\times aC-2S\times P$$

cioè
$$P+2R+2S=2aC.$$

Dunque aC, o le due AB, BC hanno $\frac{1}{2}P+R+S$, per somma data, e contengono un rettangolo dato. E con ciò possono geometricamente esibirsi (§.14.).

Soluzione analitica.

I. Il dato perimetro del triangolo richiesto si chiami P; ed i due lati AB, BC di esso dicansi respettivamente x, ed y. Sarà l' altro lato $AC=p-x-y$.

II. È data l' aja del triangolo ABC, per le condizioni del problema; e per esserne dato l' angolo ABC, e quindi il rapporto di esso triangolo al rettangolo di AB in BC(§.21.), sarà però dato tal rettangolo, che si esprima per pc; quindi sarà
$$xy=pc,$$
e con ciò
$$y=\frac{pc}{x}.$$

III. Ed esprimendosi la data ragione di CB a BD per $n:m$ sarà $n:m::ABC:ABD$, cioè $n:m::pc:ABD=\frac{mpc}{n}$

Ed essendo
$$AC^2=AB^2+BC^2-2ABD,$$
sarà
$$(p-x-y)^2=x^2+y^2-\frac{2mpc}{n}$$

IV. Si contraggano i termini della precedente equazione, sarà
$$p^2-2px-2py+2xy=\frac{2mpc}{n}.$$

Ma quì sopra si è dimostrato $xy=pc$, ed $y=\frac{pc}{x}$. Dunque riportando tali valori in quell' equazione, ne risulterà
$$p^2-2px-\frac{2p^2c}{x}+2pc=\frac{2mpc}{n}$$
cioè
$$px-2x^2-2pc+2cx=\frac{2mcx}{n}.$$

CAPITOLO II.

Della I^a. parte dell'analisi geometrica, cioè, della supposizione del fatto.

429. Io quì m' impegno a dichiararvi le seguenti cose: cioè, qual sia la supposizione del fatto; quanta la sua estensione nelle Matematiche ricerche: perchè ne' problemi di sito, e posizione soglia esserne infeconda; e finalmente per qual ragione ella si differenzj da certi altri principj euristici, o dimostrativi, che le pajono identici, o affini.

PROPOSIZIONE IX.

Principio.

430. Ne' problemi geometrici la supposizione del fatto in queste due cose consiste principalmente: cioè nel concepire come già ritrovato quel punto, cui si riduce l' indagine di ciascuno di essi. E nel poi distenderne l' analisi geometrica, e l' algebrico maneggio su i determinanti di esso punto, e su di altre grandezze, che ne dipendono.

Dim. Ogni problema geometrico, come più volte l'ho indicato (§.152.), si riduce a ritrovare un punto in una linea, o in una superficie, sicchè ei possa soddisfare a certe proposte condizioni. Dunque la detta supposizion del fatto dovrà consistere nel concepire come di già ritrovato un tal punto; e nel divisarne i rapporti de' suoi determinanti per un processo di pura sintesi, o con analitici maneggi.

PROPOSIZIONE X.

Principio.

431. E quindi una tal supposizione del fatto ci permette di poter condurre rette da quel punto ignoto ad altri dati; di tirarle con data posizione su linee date; di troncarne date parti da queste rette, o da quelle, e di formar su di esse figure date; ed altre simiglianti cose, che parranno convenienti all' analista.

La dimostrazione di questo principio contiensi in quella del precedente: ed i cinque problemi dianzi recati potranno esser di lume a questi due principj.

PROPOSIZIONE XI.

Principio.

432. Talora gioverà distender quella locale, ove il punto richiesto deesi ritrovare; e poi supporlo, come di già ritrovato. Ed una tal condotta di analisi si dovrà praticare quando un problema geometrico proponga più condizioni fra loro distinte.

Dim. Troncando una sola di più condizioni, che contengansi in un geometrico problema, si otterrà, come sopra l' ho divisato, una certa locale, cioè una linea retta, o curva (§§. 202, e 206). In questa dunque dovrà ritrovarsi il punto ignoto del proposto problema, quando gli si restituisca la troncata condizione. E quindi gioverà distender prima l' anzidetta locale, e poi supporvi noto il punto addimandato.

Il seguente problema chiarirà le proposte cose.

PROPOSIZIONE XII.

PROBLEMA.

433. Vogliasi formare un triangolo, che abbia per base la data retta AB [*fig.* 7.], e per altezza l' altra P, e che il rettangolo de' suoi lati sia uguale al dato V.

Si distenda la Cc parallela ad AB, e da essa distante per la data P. Questa retta Cc sarà la locale del problema, cui siasi tolta l' ultima delle riferite condizioni. Dunque in tal retta dovrà supporsi come già noto il punto C, che si domanda, e poi effettivamente ritrovarlo.

434. Scol. Il resto dell' analisi geometrica, con cui guidasi a fine un tal problema, a queste poche ragioni si riduce.

Intendansi condotte da' punti A, e B dati all' ignoto punto C le due rette AC, BC, e sulla CA dal punto B la perpendicolare BD.

Sarà $AC \times BC : AC \times BD :: BC : BD$ (*1.El.VI.*).

Ma la prima di queste due ragioni è data per esser que' due rettangoli respettivamente uguali a' due rettangoli V, ed $AB \times P$. Dunque sarà data eziandio la seconda di dette ragioni, cioè quella di BC a BD. Quindi ne sarà dato di specie il triangolo rettangolo BDC (§.60.); e sarà dato l' angolo acuto BCD, ed il suo conseguente BCA', se questo ne occorra.

Dunque dovrà descriversi sulla data AB il segmento ACB capiente di quest' angolo dato, ed incontrandone la Cc vi segnerà due punti C, c soddisfacenti al problema [6].

[6] Se la retta tocchi quel cerchio, sarà un solo il punto soddisfacente al problema; e s' ella affatto non l' incontri il problema sarà impossibile.

PROPOSIZIONE XIII.

PRINCIPIO

435. La supposizion del fatto, che ne' problemi di sito, e posizione suol esserne infeconda, vi dee essere avvalorata da qualche nuovo principio d' invenzione. Gli antichi a tal oggetto servivansi saggiamente de' porismi. Ed io per alcuni problemi di tal genere ho escogitato il principio *della conversion de' dati*, quell' altro della loro *trasposizione*, o qualche altro affine; del che nella Parte II^a^. *

Risch. Spesso in un problema di sito non appare ove debba esistere quell' ignoto punto, cui convien ridurne l' indagine di esso **: molto meno di tal punto ne appajono i determinanti. E qual ripiego un saggio analista dovrà prenderne in tal rincontro, per potervi la prima parte dell' analisi geometrica praticare? Ei con uno di que' principj esposti negli Atti della nostra Accademia ***, dovrà fissare una certa locale del problema, e quivi concepir come noto l' ignoto punto. E se ciò non convenga fare, altro scampo non rimane all' analista, che il proccurarsi un geometrico porisma opportunamente. Ma che son mai cotesti porismi, di cui pregiaronsi i geometri antichi, e che i moderni si dolgon d' ignorare [7]? La loro investigazione, per quel che a me sembra, può ridursi alla seguente.

È un *Porisma* geometrico, quando dato il rapporto di alcune geometriche grandezze poste fra loro in un dato mo-

* *Veggansi le note 23, e 32 del Prospetto.*

** *Un esempio di ciò può rilevarsi dal probl. 10. cap.* VIII. *lib. II.*

*** *Si potranno ora riscontrar tali cose nella nostra* Geometria di sito.

[7] Leggasi Pappo nella pref. lib. VII. *Collez. Matem.*

do, cerchisi di conoscere *le località di certi punti*; *la concorrenza di certi altri*; *il sito, che prendono certe nuove grandezze*; ec. [8]. O viceversa da queste cose trarne que' rapporti. Or cotesta indagine è assai scabra, e malagevole; dappoichè tra' dati di rapporto (cui riduconsi i primi tre generi [9]), e tra que' di sito non v' è che di rado una corrispondenza investigabile in facil modo. E quindi per la fissazion de' porismi esigesi, che sien grandemente familiari all' analista le geometriche nozioni, e ch' egli abbia pure una somma sagacia nel saperle combinar fra loro, ed a' proprj subbietti applicare. E con tal ricerca più famiglie di geometrici problemi si potran proporre, e poi risolvér facilmente [10]. Ma un tal lavoro da' giovani del moderno conio sperasi all' indarno.

Si è detto nel precedente libro (§.206.), che se da un problema geometrico determinato si tolga una sua qualunque condizione, ei debba divenirne indeterminato. In tal caso infiniti punti posti in una locale saranno soddisfacenti al problema indeterminato; e cotesta linea dovrà tenere per una delle sue proprietà il quesito del problema. Dunque l'è facil cosa il cangiare un problema locale, o indeterminato in un locale teorema. Ma sì l' uno, che l' altro si cangerà in porisma, quando dalla detta località vogliasi conoscere un de' di lei determinanti. Così l' è un teorema locale la 21. *Elem. III.*, cioè, che: *gli angoli posti in un medesimo segmento circolare sieno uguali fra loro*. Ed ei potrebbesi cangiare in un problema locale, che si concepirebbe nel seguente modo: *Ritrovare i vertici de' triangoli, che abbiano una stessa base, ed un dato angolo verticale, e sien rivolti dalla stessa parte.*

---

[8] Si riscontrino alcuni lemmi dello stesso Pappo nel lib. VII. *Collez Matem.*

[9] Cioè i dati di grandezze, di specie, e di rapporto.

[10] Il sito di certe grandezze c' instruisce a poter proporre, e risolvere non pochi di siffatti problemi.

Ma sì dall' una, che dall' altra di queste due proposizioni potrebbesi trarre la segnente indagine, cioè: *Da un estremo di un dato arco circolare si conducano in esso quante corde ne piacciano, ed al termine di ciascuna di queste formisi un angolo dato; qual sarà il concorso di queste rette inclinate a quelle corde?* Il divisato concorso, come l' è noto dalla *21. El. III.*, è un punto del detto arco, o nel suo compimento alla circonferenza. E tal ricerca, ed un tal ritrovato sarebbe una specie di porisma, o di proposizione media tra' problemi locali, ed i locali teoremi *.

PROPOSIZIONE XIV.

Principio.

436. La supposizione del fatto non sol ci guida a risolvere i problemi di Geometria, ma ella è puranche un principio regolatore di tutti gli altri metodi euristici nell' *Analisi de' finiti*, e *degl' infiniti*, e di tutte le altre indagini, che sulle quantità, qualunque ne sieno, si posson mai proporre.

Risch. Da questa supposizione, come da copiosa vena sporgono i diversi maneggi delle algebriche equazioni, le risoluzioni di esse, le tante sì diverse evoluzioni delle formole analitiche; la genesi, lo sviluppo, e la sommazione di certe serie, le integrazioni di alcune equazioni differenziali, l' invenzione de' massimi, e de' minimi, *ec.*, ed altre non poche indagini sulle analitiche grandezze. Su di che eccone una più precisa indicazione.

---

* *Si riscontri sul proposito la nostra prima dissertazione nel vol. 1. degli* Opuscoli.

PROPOSIZIONE XV.

Principio.

437. Chiamando x, y, z, ec. le ignote distinte di un qualunque problema, ed a, b, c, ec. le sue grandezze note: dovremo proccurarci, pe' principj stabiliti nel cap. 2. del lib. II., le espressioni delle ignote, che trovansi annesse alle anzidette, e che ne cale di esaminare. E poi tradurne le condizioni di esso problema in equazioni, che si dovranno per le algebriche teorie saggiamente maneggiare.

Risch. Questo principio, e 'l seguente racchiudono in pochi versi la condotta degli analisti nel risolvere un qualunque problema per mezzo dell' Analisi de' finiti, o degl' infiniti.

PROPOSIZIONE XVI.

Principio.

438. Similmente se chiameremo x, y, z, v, ec. le diverse *variabili* di un qualunque problema, ed a, b, c, ec. le grandezze *costanti* * di esso; dovremo pure proccurarci le espressioni di certe variabili connesse colle prime, cioè di certe loro funzioni. E dovremo poi maneggiar tali grandezze giusta le condizioni del problema, e colle regole dell'Analisi de' finiti, e di quelle altre degl' infiniti altresì.

* *Per la definizione di queste grandezze, veggasi il nostro corso di* Analisi algebrica.

Risch. Le grandezze variabili oltre al maneggio algebrico, che loro può adattarsi, sono anche suscettive di certe operazioni particolari, che sulle ignote de' problemi non è lecito di fare. Tra queste operazioni, che rapportansi nell' Analisi degl' infiniti, deggionsi numerare le prime, e le ulteriori differenziazioni di esse, e delle funzioni loro.

PROPOSIZIONE XVII.

Principio.

439. La supposizione del fatto non consiste, come talun di voi potrebbe credere, nel prender l' ignoto per noto, o per determinato ciò, che non è tale. E nè tampoco deesi confondere col tipo di certe dimostrazioni indirette, o colla regola del falso, che nell' Aritmetica volgare, ed in altre analitiche ricerche talor giova praticare.

Dim. Nella supposizion del fatto non si annida veruna petizione di principio, qual sarebbe quella di prender l' ignoto per cosa nota, o creder determinato ciò, che non è tale, ec. Imperocchè la detta supposizione non fa, che assumere i determinanti del quesito (che per altro sono grandezze ignote), e ragguagliandoli alle cose date del problema, renderli poi noti con un processo di pura sintesi, o con analitici ripieghi.

In oltre basta essere iniziato ne' precetti di Logica, per intender bene quanto le indirette dimostrazioni sien diverse dal tipo di quest' analisi geometrica, di cui n' è principio la detta supposizione del fatto.

Finalmente da questa supposizione del fatto n' è anche diversa la *regola del falso*, colla quale prodigiosamente risolvonsi ardui problemi di Aritmetica, e tanti altri benanche dell' Analisi sublime, a risolvere i quali o non v' ha arte alcuna, o l'arte n' è da meno. Poichè in tal regola si assume un numero falso, come s' ei fosse il vero, cioè veramente quello, che si domanda; e vi si va poi saggiando se da esso ne risultino gl' identici dati del problema, o pur de' diversi. Nel primo caso l' assunto numero sarà il vero: e nell' altro dalla differenza de' dati, e de' detti risultamenti suol ricavarsi il vero numero esattamente, o per approssimazione: usando in ciò la *regola aurea* una, o più volte, ed altre del volgare algorismo.

CAPITOLO III.

Dello sviluppo delle conseguenze del fatto.

440. Lo sviluppo delle conseguenze, che deduconsi dalla supposizione del fatto, è il secondo ramo dell'analisi geometrica, e forse il più insigne di que' tre, ch' io dissi dovernela essenzialmente costituire (§.397). E sebben ei più per l' ingegno dell' analista, che da' precetti dell' arte rendasi attivo, e di verità utili fecondo, nondimeno il recarvene la sua natura, ed alcune principali regole, che ad usarne conducono, non sia grave.

PROPOSIZIONE XVIII.

Principio.

441. Lo sviluppo delle conseguenze del fatto consiste, nel trarne certe opportune analogìe, ove contengansi alcuni determinanti de' dati del problema, ed alcuni altri del quesito; e maneggiando poi, e riducendo cotesti rapporti colle regole degli *Elementi piani*, o con altre, che se ne posson dedurre.

Dim. I dati, ed i quesiti di un problema hanno fra loro un nesso (*pr.2..lib.II.*), sicchè da' primi si possono gli altri determinare. Dunque se rinverremo qualche analogìa, ove si contengano i determinanti de' dati, e de' quesiti di esso, e colle regole use in Geometria la maneggeremo, ci potrà riescire agevolmente (se pure un tal problema non sia di alto grado, o di sublime indagine) di render noti que' determinanti del quesito, o di ridurre il problema ad un altro di già risoluto. E per tal mezzo potremo proccurarci una soluzione *effettiva* del problema, o un' altra di *riduzione*.

PROPOSIZIONE XIX.

Principio.

442. I fonti, da' quali attingonsi i divisati rapporti tra' i determinanti de' dati, e quei de' quesiti di un problema, sono le condizioni di esso, e le proprietà del di lui subietto.

E 'l maneggio di questi rapporti potrà farsi colle regole prescritte in Geometria, co'teoremi del II° degli *Elementi*, o con altre verità elementari.

Dim. La soluzione di ciascun problema dee corrispondere al soggetto, che vi si propone, ed alle condizioni, che gli s' impongono. Dunque non men da queste, che dalle proprietà di quello si dovranno trarre i rapporti fra i determinanti de' dati, e de' quesiti.

443. Scol. Per la piena intelligenza di questo principio euristico giova por mente al sottoposto canone, ed all' avvertimento, che il segue.

Canone.

444. Niuno mai imprenda a sciogliere un geometrico problema, se non gli sien conte le proprietà del di lui subietto, e se non siagli familiare il maneggio delle geometriche ragioni applicate alle semplici rette, alle loro potenze, ed alle figure, che chiudonsi da rette, o dalle linee circolari.

Avv. La prima parte di questa proposizione ammette qualche limitazione, che si osserverà quì appresso; e poi nel decorso di questo libro. E per la seconda gioverà intender bene le seguenti cose. L' essenza di una dimostrazione sintetica consiste principalmente in una saggia evoluzione di geometriche ragioni. Non di meno cotesta tela dimostrativa vuol esserne intarsiata da altre verità degli *Elementi*, se ciò

può esserlo, a fin di renderne comoda l' intelligenza. Su di che gli antichi si distinsero mirabilmente.

PROPOSIZIONE XX.

Principio.

445. La soluzione di un problema dovrà stimarsi legittima, e conveniente, s' ella si derivi da tutte le di lui condizioni, e da una, o più proprietà del subietto.

E dovrà poi aversi per elegantissima la soluzione di un problema, se da meno proprietà del di lui subietto si derivi, e sia pur conciso, quanto più può esserlo, il tessuto delle ragioni, che traggonsi da essa, e dalle condizioni del problema.

Dim. Siccome Natura non fa veruna cosa all' indarno, nè mai con profusion di mezzi, e senza un minimo di azione il produce; così la soluzione di un problema, perchè sia naturale, ed elegante, dee esser fatta con un certo minimo di euristici principj [1]. Cioè a dire convien trarla da un minor numero possibile delle proprietà del subietto, e con più conciso maneggio di ragioni, che n' esprimano le proprietà anzidette, e le condizioni del problema.

---

[1] Cioè con meno artifizj di risoluzione; o come si espresse l'Halley: *Analysi brevissima, et simul perspicua*, soggiugnendo per l' altra parte essenziale ancora alla soluzione: *Sinthesi concinna, et minime operosa* (*Praef. in Apoll. de Sectione rationis*, ec.)

PROPOSIZIONE XXI.

Principio.

446. Ed un problema, la cui soluzione non siasi dedotta da tutte le condizioni ivi proposte, ed almen da qualcuna delle proprietà del subietto, o non è sciolto bene, o l' è mal proposto.

Dim. Se mai una qualche condizione di un problema sia ridondante, o pur si contenga in un'altra ivi espressa[12], glisi potrà fare un' ottima soluzione, senza che di essa se ne abbia conto. Ed in tal caso un tal problema sarà sciolto bene; ma sarà mal proposto [13]. Così: se propongasi d' *iscrivere un quadrato in un triangolo*, e soggiungasi *aver questo una data aja*, o dover *serbare a quel triangolo una data ragione*, basterà l' analisi geometrica della prop. 4. per ottener l' intento, senza tener conto della prima, o dell' altra delle soggiunte condizioni. Conciosiachè la prima di esse è superflua, e la seconda n' è implicante. Ma tranne questi casi si dovrà concluder mai sempre esser fallace la soluzione di un problema, nella quale siasi omessa qualche di lui condizione, o di niuna proprietà del subietto vi si abbia conto.

447. Cor. E sarà benanche fallace la dimostrazione di un teorema, quando ella non dipenda in alcun modo dalla natura del subietto, o non si tragga dalle condizioni della sua ipotesi, e dalle geometriche preparazioni [14]. In questo scoglio urtan sovente que' giovanetti, che avendo più ingegno,

---

[12] Leggansi le prime definizioni del cap.3.lib.II.

[13] Dovendosi almeno proporre più generalmente.

[14] Cioè da una certa costruzione, che ne' teoremi premettesi alle dimostrazioni loro.

che arte imprendono a sciogliere problemi superiori alle loro forze, o pretendon di risolvere *circino et regula* problemi solidi, ipersolidi, e trascendenti.

PROPOSIZIONE XXII.

Principio.

448. Per inventare la dimostrazione di un teorema, convien dedurre dalla sua tesi continue, e legittime conseguenze, finchè una tra lor si rinvenga esser vera notoriamente.

E da questa conseguenza poi risalendo alla tesi, potrà comporsi l' anzidetta dimostrazione.

Risco. Le ragioni di questo lavorio contengonsi nelle verità del cap. preced., ed in alcuni principj di questo. Sicche ad altro non c' impegneremo, che a chiarirlo con recare una nitida geometrica dimostrazione ad un di que' teoremi del Fermat lasciati a noi senza di essa.

PROPOSIZIONE XXIII.

Teorema.

449. Se sopra il diametro AB [*fig*.8.] del semicerchio AMB si formi il rettangolo ABFE, di cui l' altezza AE pareggi la corda del quadrante, e da'punti E, F conducansi ad un qualunque punto M della circonferenza le due rette EM, FM: saranno sempre i quadrati delle intercette alternative AS, RB uguali al quadrato del diametro AB.

Analisi geometrica della dimostrazione.

I. Sia vero esserne $AS^2 + RB^2 = AB^2$. E poichè la RB è divisa nelle parti RS, SB, e l' altra AB nelle sue parti AS, SB; prendendo, per la *4. El. II.*, gli equivalenti di RB^2, ed AB^2, sarà $AS^2 + SB^2 + RS^2 + 2RS.SB = AS^2 + SB^2 + 2AS.SB$: cioè, togliendo le comuni grandezze AS^2, ed SB^2, d' ambe le parti, resterà $RS^2 + 2RS.SB = 2AS.SB$. E togliendovi anche $2RS.SB$ da queste uguali quantità, dovrà rimanervi $RS^2 = 2AR.SB$.

II. In oltre si uniscano le due rette MA, MB, che prodotte incontrino in P, Q la EF distesa d' ambe le parti. Sarà la PQ similmente divisa in E, F, che l' altra AB in R, S: vale a dire sarà pure $EF^2 = 2PE.FQ$; e prendendone le metà loro, dovrà essere $AE^2 = PE.FQ$; imperocchè l' è per ipotesi $AE^2 = \frac{1}{2}AB^2$.

III. E per l' egualità del quadrato di AE, e del rettangolo di PE in QF starà PE : AE :: BF : QF. E dovrà essere il triangolo AEP equiangolo all' altro QFB (*1.El.VI.*). Ma *questi triangoli sono veramente equiangoli*, per esser simili al medesimo triangolo PMQ rettangolo in M [15]. Adunque l' è vera la proposta tesi, che sia $AS^2 + RB^2 = AB^2$.

450. Avv. Che se vogliasi ordire un' elegante dimostrazione a questo teorema Fermaziano, cioè ritrarre la geometrica composizione dall' analisi recata, vi bisognerà con moto retrogrado ascenderne alla tesi dall' ultima conseguenza addotta, cioè dall' esser equiangoli i due triangoli AEP, QFB raccorne, che sia $AS^2 + RB^2 = AB^2$. E questo regresso di analisi geometrica dovrà farsi salendo dal n. III. al II.: dal II. all' I, e quivi cangiar in somme le indicate sottrazioni.

[15] Essendo retto l' angolo PMQ nel semicerchio.

PROPOSIZIONE XXIV.

Principio.

451. Se propongasi di ritrovare un punto in una linea retta, o curva, il quale debba soddisfare ad una certa condizione; un tal punto resterà determinato dall' intersezione di quella data linea, e della locale della condizione proposta. E nella combinazione di queste due linee dovrà consistere l' impegno dell' analisi geometrica.

Ma se con tal mezzo si pregiudichi alla proprietà, o all' eleganza della soluzione, si dovrà per altre vie guidar l' analisi del problema, o esplorarne certe condizioni vicarie della data, e più maneggevoli di essa.

Dim. Part. I. Ogni punto dell' anzidetta locale dee contenere la proposta condizione. Dunque descrivendo cotesta linea, e combinandola colla data legittimamente, si otterrà nella loro intersezione il richiesto punto [16].

Par. II. Se la divisata locale sia una retta, o un cerchio, cioè un *luogo piano*, la risoluzion del problema eseguita in tal modo sarà semplice, e conveniente. Ma s' ella non sia tale, potrà dubitarsi, che da' determinanti di essa condizione, o da una sua vicaria, o in altro modo ottengasi una costruzione assai più facile dell' indicata, e talvolta eseguita *circino et regula*. Su di che vedi il §. 208. lib. II.

452. Scol. Prima d' illustrare il terzo ramo dell' analisi geometrica, cioè la riduzion del problema, io qui distendo

[16] Poichè questo punto contiene al par degli altri la proposta condizione.

in forma di canoni le principali regole da eseguir lo sviluppo delle conseguenze, che in un geometrico problema derivansi dalla supposizione del fatto.

CANONE I.

453. I modi di argomentare in proporzione, che il sommo Euclide ha prescritti, ed applicati ne' libri di Geometria elementare, formino l' ordinario maneggio delle geometriche ragioni da doversi adoperare nello sviluppo delle conseguenze del fatto. Ed altri modi affini si potranno pure adottare[17].

CANONE II.

454. L' ignota ragione di x ad y ti si farà nota, se ti riesca ritrovare un' altra grandezza v, che serbi a ciascuna di quelle due x, ed y, ragioni date.

DIM. La ragione di x ad y, ponendo la v in mezzo alle x ed y, si compone dalle due di x ad v, e di v ad y. Ma queste si suppongon date. Dunque sarà anche data la ragione di x ad y.

CANONE III.

455. Se troverai due rettangoli proporzionali alle loro basi, dirai esserne uguali le altezze (*1. El. VI.*). E se l' un rettangolo stia all' altro, come la base del primo ad una terza retta; dovrai dire, che il secondo rettangolo ne uguagli un altro fatto da cotesta retta nell' altezza del primo de' due rettangoli.

DIM. Supponi essere $XY : xy :: X : A$ sarà, moltiplicando per Y i termini della seconda ragione, $XY : xy :: XY : AY$; e quindi $xy = AY$, ed $y : Y :: A : x$. Vale a dire in tal

[17] Cioè se stia $x : y :: m : n$, ed $X : Y :: m : n$; sarà $x \pm X : y \pm Y :: m : n$. E così pure $x + X : y + Y :: x - X : y - Y$, ec.

caso si renderà più semplice la proposta analogia. Lo che giova avvertire.

CANONE IV.

456. Spesso conduce ridurre su di una stessa retta una proporzione tra quattro rette, per poter intuitivamente conoscere, se siavi data la somma, o la differenza di due di esse, e per potervi adattare facilmente, se sia d' uopo, le verità del II° *degli Elementi*.

CANONE V.

457. Se ritrovinsi due rettangoli proporzionali a due rette, ingegnati per lo canone 3. di simplificare una tale analogia, e di ridurre su di una retta l' anzidetta proporzione.

CANONE VI.

458. E se convenga usar molti modi di argomentare in ragione, per maneggiar convenevolmente la detta analogia, che siasi ridotta su di una retta, potrai valerti delle verità del II° *degli Elementi*, se ti riuscirà più breve un tal sentiero, o più comodo con introdurvi queste altre teorie.

CANONE VII.

459. Prima d' incominciare l' analisi geometrica di un problema, vedi se ti riesca simplificarne il quesito. Su di che ecco il seguente problema.

PROPOSIZIONE XXV.

PROBLEMA.

460. Dati i due punti A, B [*fig*. 9.] nell' arco circolare ACB, condurre ad un terzo punto C le corde AC, BC, e la BD perpendicolare su di AC, sicchè sia $AD + BD = BC + DC$.

Sol. Toltavi di comune la BC, resterà AC + BD = BC, cioè AC = BC — BD. Premessa questa simplificazione del tema proposto, eccone una breve analisi.

Il triangolo BDC è dato di specie [18]; dunque l'è data la ragione di BC a BD, e quindi, convertendo, quella di BC a BC — BD, cioè di BC a CA, essendo CA = BC — BD. Laonde il triangolo ACB sarà dato di specie, e con ciò l'angolo ABC sarà dato. E 'l proposto problema si ridurrà a fare un angolo dato al dato punto A della retta AB [19].

461. Scol. Giov. Bernoulli nel risolvere un tal problema pervenne ad un'equazione quadratica di 25. termini di quattro dimensioni (*Oper.vol.IV.*) *.

[18] Per esser dato l'angolo BCD conseguente al dato BCA, e per esserne retto l'angolo D.

[19] Essendo dato un angolo, e la ragione de' lati che il comprendono.

* *Di un tal problema se ne potrà vedere ancora una soluzione nelle note alla nostra* Trigonometria (*scol. al probl. 15. di Regiomontano.*).

CAPITOLO IV.

Dell' ultima parte dell' analisi geometrica cioè della riduzione del problema.

462. La riduzione di un problema geometrico, ch'è l'ultima parte dell'analisi degli antichi, è l'averne incontrata fra le conseguenze del fatto quella che si conosca esser fattibile, e nel saperne poi da essa la costruzion del problema derivare. Su di che eccone le convenienti riflessioni.

463. Def. i. Problema di *notoria soluzione* può dirsi quello, che vien rapportato negli *Elementi*.

E si dirà problema di *facilissima soluzione* quell'altro, che sappiasi trarre agevolmente da' problemi elementari.

464. Def. ii. Un problema geometrico si dice esser di *primo grado*, s'ei ne mostri, che il rettangolo di una retta ignota in un'altra nota sia uguale ad un rettangolo dato.

465. Cor. Dunque se chiameremo x cotesta retta ignota, p la retta nota, e q, r i lati del rettangolo dato, sarà

$$px = qr$$

l'equazione pe' problemi geometrici di *primo grado*.

466. Def. iii. Un problema geometrico si dirà di *secondo grado*, se il quadrato di una retta ignota unito al rettangolo di essa retta in un'altra nota, o pur la differenza di cotesti due spazj, debba pareggiarne un rettangolo dato.

467. Cor. Ritenendo i simboli del corollario precedente, otterremo la seguente equazione generale

$$px \pm x^2 = \pm qr$$

pe' problemi geometrici del *secondo grado*.

PROPOSIZIONE XXVI.

PRINCIPIO.

468. La riduzione di un problema geometrico o c' indica un altro problema di notoria, e facilissima soluzione, da cui sappiasi derivar quella del proposto problema; o ne mostra l' artificio da effettivamente ritrovarsi l' ignoto punto.

DIM. Queste due verità sono chiare pe' principj del capo precedente.

469. SCOL. Io quì mi restringo a ragionarvi solamente delle soluzioni derivative de' problemi piani, cioè che si possono risolvere *circino*, *et regula*, come sono dichiarati dalla seguente definizione.

PROPOSIZIONE XXVII.

PRINCIPIO.

470. I problemi geometrici di 1° grado riduconsi a ritrovar due rette proporzionali a due rette date, ed aventi una data somma, o una data differenza. E ciò poi si ottiene con ritrovare una quarta proporzionale in ordine a tre rette date.

DIM. Sviluppando le conseguenze del fatto in un geometrico problema s' incontri la seguente analogia

$$q \pm x : x :: n : r$$

sarà dividendo, o componendo

$$q : x :: n \mp r : r$$

E facendovi $p = n \mp r$, sarà

$$px = qr.$$

Dunque un tal problema (§. 464.) è di 1° grado, e si riduce a ritrovar due rette $q \pm x$, ed x proporzionali alle date n ed r; ed aventi per somma, o per differenza la data q; o finalmente a ritrovare una quarta proporzionale in ordine alle tre date rette $n \mp r$, r, e q. E questa ne darà l'ignoto punto.

Che se rinvengasi fra le conseguenze del fatto quest' altra analogia

$$x : x - q :: r : n,$$

sarà, convertendo,

$$x : q :: r : r - n.$$

E vi si trarrà lo stesso ragionamento di quì sopra.

PROPOSIZIONE XXVIII.

PRINCIPIO.

471. I problemi geometrici di 2° grado si riducono a ritrovar due rette reciproche a due date, ed aventi una data somma, o una data differenza.

Talora amendue queste rette saranno soddisfacenti allo stesso soggetto del problema: e talun' altra volta una di esse servirà per lo preciso soggetto del problema, e l' altra per un altro affine [20].

DIM. Dalla supposizion del fatto in un geometrico problema si rinvenga la seguente analogia

$$q : x :: x \pm p : r.$$

Si dovranno ritrovare due rette x, $x \pm p$ reciproche alle due date q, r, ed aventi per differenza, o per somma la data p. Ma l' anzidetta analogia si traduce nell' equazione quadratica

$$x^2 \pm px = qr.$$

[20] Io quì per problema affine intendo un caso del problema proposto, cui si adatti la medesima equazione.

Dunque un problema geometrico di 2° grado si riduce a trovar due rette co' caratteri divisati. E lo stesso si dica se sia quest' altra

$$q : x :: p \pm x : r,$$

l' analogia incontrata nelle conseguenze del fatto.

Part. II. Delle due cose proposte nella 2^a parte, l' una s' intende dal problema 2. di questo libro (§.411.), e l' altra da un problema, che più giù distendo.

472. Avv. Prima di passar oltre in questo argomento è convenevol cosa descrivere i principali vantaggi, che ritraggonsi dalle anzidette riduzioni.

I. Un geometra, che sta risolvendo un problema di 1° o di 2° grado, senza che si roda il cervello nel saperlo ridurre ad un altro di già risoluto, stia sicuro di averne ottenuta la soluzione, tosto che vi avrà rilevato quattro rette con uno de' caratteri prescritti.

II. Che anzi riuscendogli di ridurre uno di questi problemi alla proporzione di quattro rette, altro non gli resta per la soluzione, che l'esplorare, se in esse rinvengasi uno di que'caratteri; o co' modi di argomentare proccurarlo, s' ei non vi sia.

III. Di rado incontrasi un di questi problemi dover dipendere da que' particolari, che offronsi negli Elementi. Ma tutti poi a que' due soli si riducono.

PROPOSIZIONE XXIX.

PROBLEMA.

473. Dato l' angolo BAC [*fig.* 10.] e 'l punto E dentro, o fuori di esso; condurre per tal punto l' inclinata EC, sicchè risulti il triangolo BAC uguale ad un dato.

Sol. Per condotta dell' analisi geometrica il triangolo BAC suppongasi pareggiar l' altro EFO, essendo la EF perpendicolare alla CA. Si conduca EG parallela a BA. E dovendo essere uguali i due triangoli ABC, EFO, sarà (tirando BD perpendicolare ad AC) AC : FO :: EF : BD. Ma la ragione di EF a BD è uguale a quella di EG a BA, pe' triangoli simili EFG, BDA; e quest' altra ragione è identica al rapporto di CG a CA, pe' triangoli simili ECG, BCA. Dunque sarà

$$GC : AC :: AC : FO;$$

e dividendo

$$GA : AC :: AC - FO : FO.$$

Ma le due rette GA, ed FO sono date, e le altre due AC, ed AC — FO hanno per differenza la data FO. Dunque un tal problema si riduce a trovar due rette reciproche a due date, ed aventi una data differenza.

474. Or questo problema risoluto cogli algebrici artifizj darebbe un' equazione quadratica, e nel seguente modo.

Facciasi $AC = x$, $AG = h$, $FO = k$, e si rilevi per le vie geometriche quassù calcate la seguente analogia

$$GA : AC :: AC - FO : FO;$$

sarà $\quad h : x :: x - k : k$

cioè $\quad x^2 - kx = kh$

ed $\quad x = \frac{1}{2}k \pm \sqrt{(kh + \frac{1}{4}k^2)}$

Dunque dovrà prendersi la retta

$$AC = \tfrac{1}{2}k + \sqrt{(kh + \tfrac{1}{4}k^2)}$$

o l' altra $\quad Ac = \frac{1}{2}k - \sqrt{(kh + \frac{1}{4}k^2)}$

e poi congiungersi le due rette EC, Ec. Sarà tanto il triangolo ABC, che l' altro Abc uguale al dato OFE.

Su di che eccone un' analitica, e completa

Dim. Essendo $\quad GC : CA :: CA : FO$

sarà ne' loro simboli

$$\div\, h + \tfrac{1}{2}k + \sqrt{(kh + \tfrac{1}{4}k^2)}\ ,\ \tfrac{1}{2}k + \sqrt{(kh + \tfrac{1}{4}k^2)}\ ,\ k.\,;$$

e 'l rettangolo dell' estreme pareggerà il quadrato della media. Ma eseguendo le indicate operazioni intuitivamente si conosce cotesta egualità di espressioni, essendone identiche. Dunque la CA sarà soddisfacente al problema. Cioè a dire il valore $\frac{1}{2}k + \sqrt{(kh + \frac{1}{4}k^2)}$ sarà soddisfacente all' equazione

$$x^2 - kx = kh.$$

Ma prendendo l' altra retta

$$Ac = -\tfrac{1}{2}k + \sqrt{(kh + \tfrac{1}{4}k^2)} = -x$$

e condotta pe' punti E, c l' altra retta Ecb, e dal punto b abbassando la bd perpendicolare alla CA, ne vien pure, per la supposizione del triangolo Abc uguale al dato EFO,

$$Ac : FO :: EF : bd :: Ec : cb :: cG : Ac,$$

pe' triangoli simili EFc, bdc, e per gli altri Acb, EcG.

Dunque sarà

$$Ac : FO :: cG : Ac,$$

cioè $\quad -x : k :: h + x : -x$

e quindi $\quad x^2 = kh + kx,$

o pure $\quad x^2 - kx = kh.$

E sarà benanchè cotesto valore di $-x$ soddisfacente all' addotta equazione.

475. Avv. Ho voluto alquanto diffondermi nel dichiarar l'uso delle radici negative ne' geometrici problemi. Imperocchè i geometri l' han trasandato concordemente, ed un saggio analista, che si è impegnato a chiarirle, dovea farlo più convenevolmente.

476. Def. iv. Un problema geometrico si dirà *Piano*, s' ei possa costruirsi *circino, et regula*, cioè impiegando nella sua costruzione i soli postulati di Geometria elementare, o altre operazioni, che dipendano da essi.

477. Def. v. Ed un altro problema geometrico si dirà *Solido*, se nel costruirlo convenga benanche impiegarvi delle curve coniche combinate col cerchio, o fra loro.

La ragione perchè questi problemi fossero stati così detti dagli antichi si vedrà in appresso, quando tratteremo di tal genere di problemi.

PROPOSIZIONE XXX.

Principio

478. I problemi geometrici di 1°, e di 2° grado sono problemi *piani*; e viceversa.

E tutt' i problemi *piani* si riducono a ritrovar due rette aventi una data somma, o una data differenza, e che sien proporzionali, o reciproche a due rette date.

Dim. Parte i. Che i problemi geometrici di 1°, e di 2° grado sien piani è chiaro per l' addotta definizione precedente, e da' *principj* stabiliti ne' §§. 470, e 471. Ma sarà poi vera la conversa di cotesta proposizione? Il punto ignoto in un problema piano (così io ne dimostro una tal conversa) si dee determinare coll' intersezione di due rette, di due cerchi, o di una linea circolare, e di una retta (§. 13, e 14. *lib. I.*). Ma il primo de' detti punti d' intersezione, qualunque sieno le direttrici, alle quali ei si rapporti, ci offre un' equazione di 1° grado, la qual n' esprime le condizioni del problema [1]. Ed è di simil natura e di 2° grado l' equazione, che ne determina ciascun degli altri punti d' intersezione, cioè quando si seghino due cerchi, o uno di essi, ed una retta. Dunque tutte l' equazioni in che si traducono i problemi piani non eccedono il secondo grado.

[1] Perchè l' equazione di un problema contiene in simboli analitici le di lui condizioni.

PARTE II. E quindi tutt' i problemi piani si riducono a ritrovar due rette aventi una data somma, o una data differenza, che sieno proporzionali, o reciproche a due rette date.

479. SCOL. E si si vedrà ne' capi ulteriori, che tutt' i problemi solidi, cioè di 3°, o di 4° grado debbansi ridurre alla trisezione dell' angolo, o all' invenzione di due medie proporzionali tra due rette date *.

PROPOSIZIONE XXXI.

PRINCIPIO.

480. Talora un problema geometrico non sarà piano, tuttochè l' artifizio di sua costruzione siasi praticato *circino*, *et regula*.

DIM. Se propongasi a ritrovare un punto in una curva diversa dal cerchio, e vi si addica una condizione, che somministri un luogo piano; la combinazione di questa locale con quella curva ne darà i punti soddisfacenti. Or la descrizione di questa locale eseguesi *circino*, *et regula*, ed a questo si riduce la costruzione del problema, il qual si è supposto non esser piano. Dunque potrà praticarsi *circino*, *et regula* la costruzione di un problema geometrico, ed ei potrà non esser piano. Così: *Se diansi due punti entro una qualunque curva, e da quelli vogliansi tirar due rette ad un punto di questa, sicchè sieno in una data ragione*; basterà con un solo cerchio, ch' è la locale della proposta condizione **, rilevar quel punto. Ma intanto, trattandolo con l' analisi moderna, l' equazione finale sarebbe di altro grado, e ne mostrerebbe esser solido il problema, o ipersolido, o trascendente. Di che sarà ragionato in appresso.

* *Come sarà dimostrato nella parte* II. *del presente trattato.*

** *prop. 21. lib. II, e nota corrisp.*

CAPITOLO V.

DELLA COMPOSIZIONE GEOMETRICA DE' PROBLEMI.

481. È massima delle antiche scuole di Geometria, e delle moderne altresì, che niun problema geometrico debbasi avere per risoluto, s' ei non siavi legittimamente costruito. Imperocchè in ciò principalmente consiste la natura, e l'impegno di ciascun geometrico problema, il quale secondo la dottrina di Pappo in *propositi proponitur constructionem* *. Che dovrem poi dire della dimostrazione, ch' è l' altra parte della risoluzione del problema? La dimostrazione serve ad autorizzarne la costruzione. Quella può a questa premettersi, quando vi si pratichi l' analisi geometrica: e dee poi seguirla nel metodo di composizione, qual si osserva in Euclide, ed in altri geometri antichi. Si nell' uno, che nell'altro caso la dimostrazione può guidarsi nelle geometriche grandezze, o con de' simboli algebrici di esse. E l' un di questi due tessuti può sagacemente nell' altro convertirsi. Intanto tra questi varj oggetti, che ci si offrono all' intelligenza, noi ci fisseremo principalmente alla geometrica composizione de' problemi, della quale eccone la natura.

482. DEF. VI. Per composizione geometrica di un problema intendesi la costruzione geometrica di esso, cui soggiungasi un' accurata dimostrazione.

483. SCOL. I materiali della costruzione di un problema, e della dimostrazione di essa contengonsi nell' analisi geometrica, con cui l' avremo saggiamente risoluto. Ma la nitidezza di

* Ed il Newton si espresse dicendo: *Multiplicationes, divisiones, et eiusmodi computa in Geometriam recens introducta sunt, idque inconsulto, et contra primum institutum scientiae huius*. Appendix ec.

questa geometrica composizione suol rilevarsi dall' arte, e dall' ingegno dell' analista. Su di che eccone alcune regole principali.

PROPOSIZIONE XXXII.

Principio.

484. Se dinotisi per A la supposizione del fatto nell' analisi geometrica di un problema, e per B, C, D, E le verità, che discendon da quella successivamente; la composizione geometrica dovrà eseguirsi costruendo l' ultima E di queste, che sia fattibile, e poi proccurando di dimostrare accuratamente le verità D, C, B infino ad A, con ordine retrogrado al primiero, e con opposte operazioni.

Dim. Dalla supposizione A discendono successivamente le verità B, C, D, E. Dunque posta la verità E si dovrà vicendevolmente conchiudere, che A sia vera, se mai ci riesca di dimostrare, che da E ne venga D, da D l'altra C, da questa B; e finalmente da B la prima verità, che si è assunta, cioè A.

PROPOSIZIONE XXXIII.

Problema.

485. Data la retta MN [*fig.* 11.] divisa in P dividerla in un altro punto Q, sicchè la somma de' quadrati delle due parti ignote MQ, QN stia al doppio del rettangolo di esse parti nella ragione di MP a PN.

*Quì la MP, come dagli Elementi può intendersi, non dee essere minore di PN *.*

Analisi geometrica.

Suppongasi esser Q il punto addimandato, cioè che stia

$$MQ^2 + QN^2 : 2MQN :: MP : NP \qquad [A]$$

Sarà componendo

$$MN^2 : 2MQN :: MN : NP :: MN^2 : MNP \qquad [B]$$

E quindi dovrà essere

$$2MQN = MNP \qquad [C]$$

E bisecando la NP in O, sarà pure

$$MQN = MNO \qquad [D]$$

Dunque le due rette MQ, e QN sono reciproche alle due date MN, NO, ed hanno la data MN per loro somma [E]

Lo che si è detto più volte in quest' opera esser fattibile.

Composizione geometrica.

Cost. Descritto il semicerchio sulla data retta MN, e bisecata la PN in O, si elevi dal punto O sulla PN la perpendicolare OS, che incontri quel semicerchio in R. In oltre prendasi in tal retta la OS uguale alla corda RN, e per lo punto S si distenda la ST parallela alla MN, che dovrà incontrare quel semicerchio, se il proposto problema sia possibile. Dal punto T di tal incontro si tiri TQ perpendicolare alla medesima MN. Sarà Q il punto ricercato.

Dim. I due rettangoli MQN, ed MNO, avvegnachè uguali a' quadrati di TQ, e di RN, che dalla costruzione si pareggiano [E], sono tra loro uguali [D]: e con ciò anche i loro dupli, cioè 2MQN, ed MNP [C]. Onde dovrà stare

$$MN^2 : 2MQN :: MN^2 : MNP :: MN : NP. \qquad [B]$$

---

* *Poichè il rettangolo MQN diventa massimo quando il punto Q divide per metà la MN, nel qual caso la ragione propos ta di MP a PN si fa di uguaglianza.*

E quindi dividendo

$$MQ^2 + QN^2 : 2MQN :: MP : PN. \qquad [A]$$

486. Scol. Le verità che servono a dimostrare la costruzione di un problema, non solo vi debbono avere un corso retrogrado a quello dell' analisi geometrica; ma alcune di esse debbono benanche contenere operazioni opposte alle loro analoghe nell' analisi suddetta. Così la verità [B] si è dedotta nell' analisi geometrica col componendo; e nella dimostrazione n'è poi sorta col dividendo. *E ciò serva di chiarimento a quello ch' è stato detto in fine del* §. 484.

PROPOSIZIONE XXXIV.

Principio.

487. Se talun di que' passaggi retrogradi, che convien fare nella dimostrazione, per esempio, quello di E a D, di D a C, di C a B, o di B ad A, non sia dimostrabile esattamente, gioverà in tal caso praticare una dimostrazione indiretta, di cui la forma sarà qui appresso indicata.

E se a dimostrar qualcuno di que' retrogradi passaggi abbisognino lunghi ragionamenti, converrà premettere uno, o più lemmi, per render più breve la desiata dimostrazione.

Dim. Parte i. Non ogni proposizione è convertibile. Dunque non può sempre dimostrarsi, o in agevol modo, o senza supporvi altre condizioni, che se mai da D si derivi E, debba vicendevolmente da E risultarne D. E lo stesso valga per gli altri retrogradi passaggi. E che dovrà fare il geometra in un tal caso? Dovrà prevalersi della dimostrazione indiretta, il cui tipo io qui appresso dichiaro, ed illustro.

Parte ii. La seconda parte dell' addotto principio ben s' intende da per se stessa.

PROPOSIZIONE XXXV.

Principio.

488. L' ordinario tipo della dimostrazione per assurdo è il seguente: *Se dalla costruzione della conseguenza* E *non sia vero, che derivi la verità* A, *ne nasca, se fia possibile l' altra* a. *E praticando in* a *l' istessa analisi geometrica del problema ne vengano le successive conseguenze* b, c, d, e. *O dovrà esserne* e *identica ad* E, *o pur* d *con* D, *ec. Ed ognuna di queste cose è un assurdo.*

Dim. Questa verità, che può comprendersi col solo rimembrarsi degli *Elementi* Euclidei, sarà anche illustrata con altri esempli in appresso *.

PROPOSIZIONE XXXVI.

Principio.

489. La dimostrazione ad un problema analiticamente risoluto può farsi o col solo verificarne le di lui condizioni nelle radici della detta equazione, o nel rimontare dalle radici all' equazione, e da queste alle condizioni del problema.

* *Per indicarne l' un di questi, potrà vedersi la dimostrazione all' ultimo problema* delle Inclinazioni, *nell'* Appendice.

Dim. La prima delle suddette cose è evidente ; e l'altra ancor manifesta potrà meglio rilevarsi dal seguente problema.

PROPOSIZIONE XXXVII.

Problema.

490. Data la retta AC [*fig.* 12.] ; dividerla in B, sicchè il quadrato delle parte AB stia al rettangolo di tutta la AC nell' altra parte BC, in un data ragione , che per comodità di analisi sia quella di n ad AC .

Soluzione analitica.

Pongasi $AC = a$, $AB = x$; sarà $CB = a - x$, ed $AC.CB = a^2 - ax$.

Quindi essendo , per la condizione del problema ,

$$x^2 : a^2 - ax :: n : a :: n(a - x) : a^2 - ax \qquad [A]$$

sarà , per la 7.*El.V*,

$$x^2 = an - nx. \qquad [B]$$

Ed aggiugnendo nx ad ambo i membri dell' equazione, sarà

$$x^2 + nx = an \qquad [C]$$

Ed a' membri di questa aggiugnendo ancora $\frac{1}{4}n^2$, risulterà

$$x^2 + nx + \frac{1}{4}n^2 = an + \frac{1}{4}n^2 \qquad [D]$$

Indi estraendo da ciascun di essi la radice quadrata , sarà

$$x + \frac{1}{2}n = \pm\sqrt{(an + \frac{1}{4}n^2)} \qquad [E]$$

E togliendo di comune $\frac{1}{2}n$, resterà

$$x = -\frac{1}{2}n \pm \sqrt{(an + \frac{1}{4}n^2)} \qquad [F]$$

Dal quale risultamento [F] ottiensi con cammino retrogrado la seguente

Dim. Essendo $x = -\frac{1}{2}n \pm \sqrt{(an + \frac{1}{4}n^2)}$ [F]

sarà aggiugnendo di comune $\frac{1}{2}n$

$$x + \frac{1}{2}n = \pm\sqrt{(an + \frac{1}{4}n^2)} \qquad [E]$$

Ed elevando questi due membri a quadrato , sarà

$$x^2 + nx + \frac{1}{4}n^2 = an + \frac{1}{4}n^2 \qquad [D]$$

Sicchè togliendo di comune $\frac{1}{4}n^2$, resterà

$$x^2 + nx = an \qquad [C]$$

E di nuovo togliendovi nx , si avrà

$$x^2 = an - nx = n(a - x) \qquad [B]$$

E quindi , per la 7. *El. V*, sarà

$$x^2 : a^2 - ax :: (a - x)a : (a - x)n :: n : a \qquad [A]$$

PROPOSIZIONE XXXVIII.

Principio.

491. E volendo ordire al precedente problema una dimostrazione sintetica , converrà prima geometricamente costruir le radici dell' equazione cui si è pervenuto analiticamente risolvendolo ; e poi salire all' equazione , e da questa alle condizioni del problema , riducendo in sintesi que' retrogradi passaggi , che nell' istituir l' analitica dimostrazione converrebbe praticare.

Dim. Volendosi occultare le tracce analitiche della soluzione di un problema geometrico, converrà costruirlo, e poi mostrare la verità della costruzione , o per mezzo di retrogradi passaggi della detta analisi , o per mezzo di operazioni sintetiche ad essi corrispondenti . E dee quindi l' analista non solo aver distinte , e familiari le costruzioni geometriche delle espressioni analitiche; ma esser benanche versatissimo ne' ripieghi sintetici in bene , e rigorosamente dimostrare.

492. Trarremo un esempio , per vieppiù convalidare ciò che si è detto , dalla

COMPOSIZIONE GEOMETRICA DEL PREC. PROBLEMA.

COST. Si prolunghi la CA in D [*fig.12.*] , sicchè AD pareggi *n* , e sulla CD si descriva il semicerchio DGC , nel quale si tiri dal punto A la semiordinata AG. Finalmente bisecata la DA in F, si unisca FG , e col centro F, intervallo FG descrivasi l' arco circolare GB , che segnerà nella data CA il richiesto punto B.

DIM. Poichè la FB pareggia la FG [F , E]
si avrà, prendendone i quadrati ,

$$FA^2 + AB^2 + 2FAB = FA^2 + AG^2 \qquad [D]$$

e togliendone di comune FA^2 , e ponendovi DAC per GA^2 , e DAB per 2FAB , sarà

$$AB^2 + DAB = DAC \qquad [C]$$

Onde di nuovo togliendovi DAB , resterà

$$AB^2 = DAC - DAD = DA.BC \qquad [B]$$

E per la 7. *El. V.* sarà

$$AB^2 : AC.BC :: DA.BC : AC.BC ,$$

cioè

$$AB^2 : ACB :: DA : AC \qquad [A]$$

493. Dalla proposizione precedente , e dall' esempio addottone in chiarirla potrà rilevarsi la seguente altra

PROPOSIZIONE XXXIX.

PRINCIPIO.

494. Una dimostrazione analitica si converte in geometrica , quando alle espressioni algebriche di quella si surroghino grandezze geometriche loro equivalenti , e le equazioni , che quivi succedonsi , si riducano in analogìe , o in altre verità , che le contengano.

DIM. La verità di questo principio può aversi per intuitiva , quando si accordi , come si è praticato nell' ultimo capo del libro I. , che le grandezze analitiche sien riducibili in geometriche , e che ogni equazione possa cangiarsi in analogìa . E solamente converrà aggiungere , che per tal uopo debbano essere familiari all' analista le anzidette trasmutazioni.

495. COR. E di quì s' intende, come poi una dimostrazione geometrica possa convertirsi in un' altra che sia analitica , e quanto vi si richiegga per ciò fare.

PROPOSIZIONE XL.

PRINCIPIO.

496. Ma se vogliasi puntualmente seguire quanto nel precedente principio è prescritto , le dimostrazioni sintetiche vi riuscirebber talvolta assai lunghe, e tormentose. Sicchè per recar loro l' eleganza , ed una comoda intelligenza , gioverà colle seguenti regole prepararne le suddette riduzioni.

Cioè

I. In luogo de' valori dell' ignota x esibiscansi quelle rette alle quali il problema si riduce.

II. Le equazioni , che succedonsi nella di lui risoluzione si convertano in analogìe.

III. E queste si trasmutino convenevolmente in egualità di rettangoli : e si vada scorgendo , se tale uguaglianza si possa rilevare per altra via , diversa da quella che l' analisi del problema ne ha somministrata. O pure si stacchi dalla dimostrazione premettendovela come lemma.

IV. O finalmente si useranno tutti quegli altri artifizi , che l' esercizio , e la sagacia del geometra saprà rinvenire all' uopo ; e che a regole generali non possono ridursi.

PROPOSIZIONE XLI.

Principio.

497. Non potendosi ne' problemi di terzo, e di quarto grado passar geometricamente dalle radici all' equazione, come ne' problemi *piani* riesce agevole il farlo, gioverà rimontare alle condizioni del problema dalla combinazione delle due locali, geometricamente, e con retrogrado passo dimostrando quello, che si è operato analiticamente nel rinvenirle, e combinarle.

Dim. Se le equazioni cubiche si sciogliessero completando il cubo del 1° membro, come dal render completo il di lui quadrato risolviamo le quadratiche, si potrebbe geometricamente, ed in agevol modo passar dalle radici all' equazione, e da queste poi ascendere alle condizioni del problema. Ma tutt' altro n' è l' artifizio, che l' arte ne prescrive. Poichè le radici delle equazioni cubiche, e biquadratiche si prendono combinando due curve coniche, che l' introduzione di una nuova indeterminata nell' equazione finale ha prodotte; e però siccome interrotta rimane la catena dell' analisi del problema fino a pervenire alle radici che vi soddisfano, così del pari interrotto n' è il cammino retrogrado per giugnere da queste all' equazione, d' onde si potrebbe poi pervenire a verificar le condizioni del problema: Quindi non è che dalla combinazione delle locali, che offrono le radici dell' equazione, che può pervenirsi alle condizioni suddette, e nel modo indicato in questo *principio**.

* *Quest' ultima conseguenza verrà con apposito esempio dilucidata nel lib. I. della Part. II.*

PROPOSIZIONE XLII.

Principio

498. Spesso non è agevol cosa dalla composizione di un problema indovinarne l' analisi geometrica di esso: massimamente se il geometra, che l'abbia trattata, sia un gran sintetico, ed insiem procccuri celarne ad altri l' euristiche sue tracce, come gli antichi solean fare *.

Risch. Se la composizione di un problema marcasse puntualmente, ed in ordine retrogrado l' analisi di esso, il raccorre questa sarebbe agevol cosa. Ma spesso addiviene, che la sua dimostrazione facciasi per assurdo; ch'ella rendasi più corta, e spedita col premetterle uno, o più lemmi; che per renderla nitida, ed elegante si cangino talvolta le analogìe in egualità di rettangoli; che a fin di evitare un soverchio numero di proporzioni, ed uguaglianze facciasi uso di altre verità geometriche, o con altro artifizio ella si guidi a fine. E non sarà in tal caso agevol cosa dalla composizione di tal problema l' analisi di esso rilevare ** .

PROPOSIZIONE XLIII.

Principio.

499. Se un problema sia proposto in un corso didascalico, siasi questo elementare, o pur sublime, l'eleganza della sua costruzione dovrà ripetersi dal

* *In ciò tra' moderni si sono grandemente distinti il Newton, e l' Ugenio.*
** *Questo* principio, *com' è chiaro, inverte, la prop. 40. (§. 496).*

facile riducimento a' problemi, che il precedono, e dalla nitidezza in dimostrarlo.

Ma se tal problema sia recato in un opuscolo, o in qualche trattato di diverso argomento, sarà lodevol cosa il risolverlo col solamente ridurlo a qualunque degli elementari, o de' precedenti ad esso.

Finalmente s' ei sia destinato alla pratica, condurrà farlo dipendere da problemi di facilissima costruzione.

Dim. Una scienza, cui s' induca una rigida forma didascalica, vien destinata a farn' intender chiaramente, ed in agevol modo le verità, che vi si propongono, e le operazioni quivi prescritte. Da cotesti due fini deesi ripetere il nesso, e la dipendenza delle sue parti; ed in ciò la sapienza riluce dello scrittore. Ma se qualche problema vogliasi alla sola pratica destinare, o proporlo in qualche operetta per un principio di altre operazioni; da questi altri fini, e giusta le regole di questa proposizione dovrà valutarsi l' eleganza della soluzione. In fatti, se cerchisi di praticamente bisecare una retta data, si otterrà l' intento *col descriver due cerchi, che abbiano per centri gli estremi della retta data, e per intervallo la sua lunghezza, e con condurvi una retta tra le sezioni loro*. E sebbene questa soluzione sarebbe più breve dell' Euclidea, che si fa dipendere dalla formazione di un triangolo equilatero, e dalla bisezione di un suo angolo; pur nondimeno la sua dimostrazione ne verrebbe più lunga.

E lo stesso in altri problemi Euclidei si può benanche osservare. Su di che giova intender le seguenti cose.

500. Def. vii. Una dimostrazione si dirà elegante, s' ella per agevoli, e chiare vie c' induca ad assentire ad una verità proposta.

501. Cor. E quindi in una dimostrazione, perchè si dica elegante, non vi debbono essere nè salti di ragioni, nè inviluppi di metodi, e nè tampoco ella dee esser grave di principj soverchi, o con soverchio scrupolo preparati, ed onusta di corollarj.

502. Def. viii. La sapienza geometrica consiste nel dimostrar con massima eleganza le verità, che si propongono.

I sei libri *piani* di Euclide sono il modello di cotesta geometrica sapienza; e niun de' moderni si è fidato di emularla *. I Ramisti rammassando le verità geometriche in un discorso continuato non hanno fatto altro, che ordinarne le materie, ma ne hanno tolto il geometrico rigore, e l' eleganza; e quegli altri, che hanno serbato ne' loro scritti le forme Euclidee, ne hanno reso i teoremi onusti di corollarj, e talora vi hanno peccato benanche nel definire. E se lice volger lo sguardo a' sommi uomini, potrà dirsi, che Cristiano Wolfio sia stato un prodigioso definitore di termini, ma non del pari dimostratore di verità geometriche. Che il cav. Newton, il quale valea più di ogni altro nel dimostrare ed inventare, non siasi curato di scrivere con eleganza i sublimi prodotti del suo ingegno. Che l' Eulero tutto che abbia elegantemente definito, e dimostrato in immense opere matematiche, pur le abbia rese assai gravi co' molti esempj, e corollarj.

* *Si potrà rilevare dalla pag.* xxi. *del* discorso preliminare *a' nostri* Elementi di Euclide *la ragione per la quale l' autore quì si limita a soli primi sei libri di essi.*

PROPOSIZIONE XLIV.

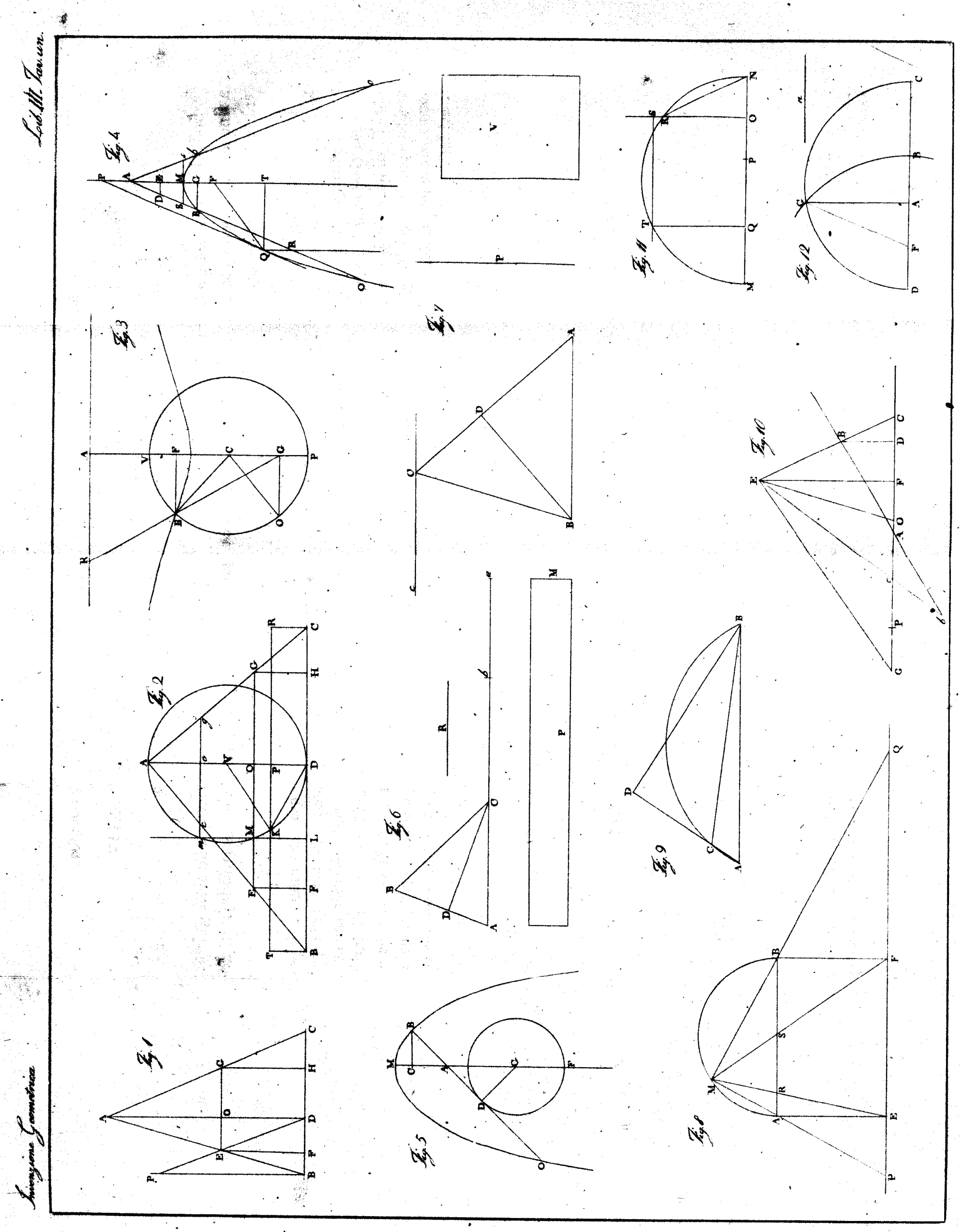
Principio.

503. **Un problema geometrico, che siasi guidato a fine analiticamente, se non sia costruibile, non dovrà tenersi per risoluto.**

Dim. Questo *principio* è conseguenza della natura, de' problemi geometrici, e ben si rileva ancora da molte verità sparse in questo capo*. E giova notare, che il Cartesio non mirò nella sua *Geometria*, che a costruire i problemi. Di fatti il libro I°. di questa insigne opera riguarda la costruzione de' problemi *piani*: e nel II° egli apparecchia la materia per la composizione de' problemi *solidi*, di cui tratta diffusamente nel III°.

Fine del libro terzo.

* *Veggasi anche sul proposito ciò che n' è stato detto nell' introduzione a questo capitolo (§. 481), e nelle note 15 e 18 al prospetto della presente opera.*



APPENDICE

AL LIBRO III.

RISOLUZIONE DE' PRINCIPALI PROBLEMI, CHE APPARTENGONSI AL LUOGO RISOLUTO DEGLI ANTICHI.

504. Gli esempj, che saggiamente spargonsi in un corso didascalico, gli dan più luce, ch' ei non riceva da' precetti in chiara forma espressi, e dichiarati. Io dunque per tal ragione erami proposto di quì rammassare alquanti geometrici problemi, risolvendone alcuni di essi coll' analisi moderna, ed altri con quella delle antiche scuole. Ed affinchè essi non vi formassero, come il più delle volte interviene, una rozza mole, e disgregata, ho stimato convenevole ordinarli secondo le famiglie de' problemi, che apparteneansi al *Luogo risoluto* degli antichi *, e recar loro le più venuste soluzioni analitiche, e geometriche; come ne' seguenti capitoli eseguo **.

* *Nella prima delle dissertazioni, che compiono il vol. I. degli* Opuscoli, *più volte citata, daremo una distinta notizia di un tal* Luogo, *indicandone sulle orme di Pappo la sua divisione, i libri che il componevano, ed il loro ordinamento; da che rimarranno vieppiù rischiarati quegli argomenti, che ne' seguenti capitoli l' autore ne accenna, trattandoli a suo modo. Da essi abbiamo però tolto quello riguardante i problemi* Tactionum, *per formarne (come è stato promesso nel* manifesto, *ed indicato ancora nella nota 2ª* al prospetto *della presente opera) insieme ad altri argomenti affini, il vol. III. dogli* Opuscoli matematici. *Ed il ripetiamo quì ancora, che principalmente questi tre primi volumi di Opuscoli sono di compimento al presente trattato dell'* Invenzione geometrica.

** *Ciò non toglie, che noi recassimo in fine del presente trattato quell' esercizio di problemi, che abbiamo promesso a pag.* XIII. *della prefazione ad esso.*

CAPITOLO I.

DE' PROBLEMI, DHE DICEANSI DAGLI ANTICHI *DETERMINATAE SECTIONIS.*

505. Tutti questi problemi, che possono esser ben molti *, si riducono ad un solo, e generalmente espresso ne' termini seguenti:

Data una retta divisa in uno, o più punti; dividerla in un altro punto, sicchè il rettangolo delle interposte tra questo punto, e tra que' dati, o il quadrato di una di esse stia al rettangolo di altre simili parti in una ragione data.

PROPOSIZIONE I.

PROBLEMA.

506. Data la retta AB [*fig.* 1.] divisa nel punto C; dividerla in un altro punto P, sicchè il rettangolo di AP in PC stia al quadrato di PB nella data ragione della retta M all' altra N.

SOLUZIONE ANALITICA.

507. Pongasi l' intera retta AB $= a$, e 'l dato segmento

* *Veggasi Pappo, nella prefazione al lib. VII.* Collectionum mathem.; *la nostra dissertazione* sull' Analisi degli antichi *più volte citata; e principalmente lo sviluppo che fa di tal problema il Simson nella sua elaborata restituzione de' libri* de Sectione determinata (Opera reliqua ec.); *da ove ciascuno potrà trarre i particolari problemi compresi in quel generale, ed esercitarsi in risolverli, prendendo a modello quelli che il Fergola ha quì recati.*

CB $= b$, l' ignota parte PB $= x$. Sarà AP $=$ BA $-$ BP $= a - x$, e PC $=$ CB $-$ BP $= b - x$. Ed indicando per m, ed n le respettive rette M, ed N, sarà per la condizione del problema

$$AP.PC : PB^2 :: m : n$$

cioè ne' loro simboli dovrà essere

$$(a - x)(b - x) : x^2 :: m : n,$$

o pur distendendo l' indicata moltiplicazione

$$ab + x^2 - (a + b)\, x : x^2 :: m : n.$$

Dunque dovendo il prodotto de' termini medj di quest' analogia pareggiar quello degli estremi, avrassi

$$\frac{mx^2}{n} = ab + x^2 - (a + b)x.$$

Cioè riducendo la x^2 nel 1° membro dell' equazione, e facendovi per brevità di calcolo $a + b = h$, ed $m - n = r$, sarà

$$\frac{rx^2}{n} = ab - hx,$$

o sia
$$x^2 + \frac{nh}{r}x = \frac{abn}{r}$$

Si risolva dunque cotest' ultima equazione, e sarà finalmente

$$x = -\frac{nh}{2r} \pm \sqrt{\left(\frac{nab}{r} + \frac{n^2h^2}{4r^2}\right)}$$

di cui eccone la

Geometrica costruzione.

Facciasi $2r$ ad n, così h ad una quarta RQ [*fig. 2.*]; e similmente r ad n, così b ad un' altra retta T. E poi si prenda QS media proporzionale tra le due rette T ed a. Ciò posto si formi il triangolo rettangolo RQS, che abbia per cateti le rette RQ, e QS, dianzi esibite. E sulla retta data si tronchi BP uguale alla differenza del cateto RQ dall' ipotenusa RS di detto triangolo. Sarà il punto P quello, che si cerca nel problema precisamente *.

* *Cioè secondo sta enunciato.*

E se poi la CB si distenda in p [*fig. 1, e 2.*], sicchè sia Bp uguale alla somma del cateto RQ, e dell' ipotenusa RS; quest' altro punto p sarà soddisfacente ad un problema affine. Cioè si troverà esser benanche

$$Ap.pC : pB^2 :: m : n$$

La dimostrazione potrebbe ordirsi analiticamente risalendo dall' ultima dell' esposte equazioni alla prima di esse, o all' analogia prescritta nel problema.

Ma eccone su di ciò altre ricerche.

Altra risoluzione del medesimo problema.

508. Per la condizione del problema si è detto essere

$$ab + x^2 - (a + b)\, x : x^2 :: m : n.$$

Dunque sarà dividendo

$$ab - hx : x^2 :: r : n.$$

Ed essendo, come l' è chiaro,

$$ab - hx = h\left(\frac{ab}{h} - x\right),$$

si faccia la data ragione di r ad n uguale a quella di h ad un' altra k, sarà

$$h\left(\frac{ab}{h} - x\right) : x^2 :: h : k :: h\left(\frac{ab}{h} - x\right) : k\left(\frac{ab}{h} - x\right)$$

E quindi avrassi

$$x^2 = k\left(\frac{ab}{h} - x\right)$$

Cioè risolvendo quest' equazione in analogia, sarà

$$\frac{ab}{h} - x : x :: x : k.$$

E componendo

$$\frac{ab}{h} : x :: x + k : k.$$

Dunque le due rette x, ed $x + k$ hanno per differenza la data k, e sono reciproche alle due date k, ed $\frac{ab}{h}$: e con ciò sono investigabili per gli *Elementi piani* (§.14.).

ELEGANTE SOLUZIONE GEOMETRICA DI DETTO PROBLEMA.

509. Su di AC [*fig.3.*] si formi il semicerchio AFC, cui intendasi tirata la tangente PF dall' ignoto punto P, la quale incontri in H la BH perpendicolare alla BC dal punto B. E poi si prenda la retta Q media proporzionale fra le date M, ed N. Sarà APC, o PF^2 a PB^2, come M ad N; cioè prendendo le loro sudduplicate PF : PB :: M : Q. Ma, unita la FG, il triangolo GFP, è simile all' altro PBH; onde sta PF : PB :: GF : BH. Dunque starà pure M : Q :: GF : BH.

Se dunque dal punto B si elevi a BA la perpendicolare BH, che sia quarta proporzionale dopo le tre rette date M, Q, e GF, e per H si meni HF tangente al dato semicerchio AFC, il punto P sarà il cercato.

510. Cor. Se si proponesse a *divider la retta AB, già divisa in C [fig.4.], sicchè stia $AC \times CP : PB^2 :: m : n$;* co' medesimi simboli del precedente problema potrebbesi risolver quest' altro più facile di esso, ottenendosi

$$(a - b)\ (b - x) : x^2 :: m : n.$$

Da questa analogia può trarsene l' equazione finale, ch' è costruibile come quella del detto problema.

511. E se vi si voglia ottenere una soluzione riducibile in sintesi, com' è la seconda delle tre quì sopra esibite, potrà porsi la data ragione di m ad n uguale a quella di $a - b$ ad una quarta q; e distendendone l' analisi geometrica nell' istesso modo si avrà

$$(a-b)\,(b-x) : x^2 :: (a-b) : q :: (a-b)\,(b-x) : q\,(b-x)$$

Dunque sarà $x^2 = q\,(b - x)$

e quindi $b - x : x :: x : q$

e componendo $b : x :: x + q : q.$

E saranno le due rette x, ed $x + q$ determinabili ugualmente, che quelle della 2ª soluzione (§.508.).

PROPOSIZIONE II.

PROBLEMA.

512. Data la retta AB [*fig.5.*] divisa ne'due punti C,D dividerla in altro punto P; sicchè stia ACP a BPD in ragion data, cioè come AC ad AO.

Soluzione analitica.

513. Pongasi $AC = a$, $BC = b$, $CD = c$, $CP = x$, $BP = b - x$, $PD = c - x$, $AO = n$. Ed essendo per la condizione del problema

$$AC.CP : BP.PD :: AC : n$$

sarà ne' loro simboli corrispondenti

$$ax : (b - x)(c - x) :: a : n :: ax : nx$$

e quindi si avrà pel problema l' equazione semplicissima

$$x^2 - (b + c + n)x + bc = o$$

cioè $$x^2 - px + bc = o$$

di cui o se ne costruiranno le radici dopo averle con l' ovvia regola assegnate, o pure si costruirà a dirittura essa *.

Soluzione geometrica.

514. Dovendo essere

$$ACP : BPD :: AC : AO :: ACP : AO.CP,$$

sarà $$BPD = AO.CP.$$

E quindi $$BP : CP :: AO : PD.$$

E sarà, paragonando gli antecedenti alla loro somma co' conseguenti **,

$$BP : BC :: AO : AO + PD.$$

Ma in questa proporzione sono dati i termini medj, ed è pur data la differenza degli estremi. Dunque il problema resterà risoluto.

---

* *Vegg. il §.14.lib.I., e la nota corrispondente.*

** *Cioè invertendo, componendo, e di nuovo invertendo.*

PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA.

515. Data la retta AB [*fig.*6.] divisa ne' punti C, D; dividerla in un altro punto P, sicchè stia il rettangolo APC all' altro BPD nella ragion data di m ad n.

SOLUZIONI ANALITICHE.

516. Facciasi $AB = a$, $BC = b$, $DB = c$, e $BP = x$. Saranno $AP = a - x$, $PC = BC - BP = b - x$, $DP = DB - BP = c - x$; e quindi

$$AP \times PC = (a - x)(b - x)$$

e

$$DP \times PB = (c - x)x.$$

Ma per la condizione del problema dee essere

$$ab + x^2 - (a + b)x : cx - x^2 :: m : n.$$

Dunque moltiplicando i termini estremi di quest' analogia, ed i medj rispettivamente, avrassi l' equazione finale del problema, che potrà con le ovvie regole ordinarsi; e poi risolversi, e costruirsi, come nel primo problema.

517. E se piaccia prepararne l' addotta soluzione ad una geometrica composizione si dovrà soggiugnere, che componendo debba essere

$$ab - (a + b)x + cx : cx - x^2 :: m + n : n.$$

Intanto facciasi $m + n : n :: a + b - c$ *ad una quarta* q; e fattosi pure $\frac{ab}{a+b-c} = h$, sarà

$$(a+b-c)\left(\frac{ab}{a+b-c} - x\right) : cx - x^2 :: a + b - c : q$$

$$:: (a+b-c)\left(\frac{ab}{a+b-c} - x\right) : q\left(\frac{ab}{a+b-c} - x\right)$$

Cioè sarà $\quad cx - x^2 = q(h - x)$,

Ed in analogia dovrà essere

$$c - x : h - x :: q : x$$

Quindi convertendo

$$c - x : c - h :: q : q - x.$$

Per la qual cosa le rette $c - x$, e $q - x$ hanno per differenza $c - q$, e sono reciproche alle date $c - h$, e q.

SOLUZIONE GEOMETRICA.

518. Sulle date rette AC, DB [*fig.* 7.] si descrivano i semicerchi ALC, DMB respettivamente. E dall' ignoto punto P intendasi tirata la PL tangente al primo de' detti semicerchi, e la FE ordinata nell' altro. Ed oltre a ciò la retta FE suppongasi prodotta in H, sicchè stia $EHF : GL^2 :: n : m$; ed in fine si congiunga la GH.

Ciò premesso, dee essere, per la condizione del problema, $APC : DPB :: m : n$. Dunque, prendendo i quadrati di PL, e di PF respettivamente uguali a que' rettangoli, sarà pure $PL^2 : PF^2 :: m : n$. Ma precedentemente si è supposto $GL^2 : EHF :: m : n$. Quindi per la *12. El. V.* dovrà stare $GP^2 : PH^2 :: m : n$. E quindi GP a PH in sudduplicata ragione di m ad n. Per la qual cosa essendo data la ragione de' cateti del triangolo rettangolo GPH, sarà dato l' angolo PGH fatto al dato punto G della GB; e sarà poi data di sito, e di grandezza la KM. Ma il rettangolo KHM, o il suo uguale EHF è ancor dato, per avere una ragion data al dato quadrato di GL. Dunque saranno date le due rette KH, ed HM, che contengono un rettangolo dato, ed hanno una data differenza. Ed abbassando dal punto H determinato co' principj del libro I. (§.14.) la perpendicolare HP sulla BA, avrassi il richiesto punto P.

ALITER.

519. Le due rette AC, BD [*fig.8.*] si dividano per metà ne' punti O, V, e si prenda la r media proporzionale tra le due rette m ed n. In oltre elevata alla DB dal punto B la perpen-

dicolare BE s' inclini da V sulla BE la retta VE, quarta proporzionale in ordine alle tre rette m, r, ed OC. Si compia il parallelogrammo BF, e da F s' inclini alla BA la retta FI, che stia ad IO come r ad m, lo che può farsi agevolmente *. Dico il punto I esser quello che si richiede.

Dim. Il quadrato di FI pareggia la somma de' quadrati di FV, e di VI: e 'l quadrato di VE è quanto la somma de' quadrati di EB, e di BV. Dunque la differenza de' quadrati di FI, di EV è quanto quella de' quadrati di VI, e di BV (essendo uguali i due di FV, e di EB), cioè quanto il rettangolo BID. Ciò premesso sta $OI^2 : IF^2 :: m : n$, per costruzione; ed è anche $OC^2 : VE^2 :: m : n$. Dunque sarà, per la 19. *El. V.*, $m : n :: OI^2 - OC^2 : IF^2 - VE^2 :: AIC : BID$.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

420. Tutt' i problemi, che dagli antichi diceansi *determinatae sectionis*, sono generalmeute riducibili alla seguente analogìa

$$a^2 + bx + x^2 : h^2 + kx + x^2 :: p : q.$$

E questa riducesi a ritrovar due rette, che sien reciproche a due date, e che abbiano una data somma, o una data differenza.

Dim. Parte i. Cotest' analogìa nella massima generalità concepibile ha la seguente forma

$$\alpha^2 + \beta x + \frac{m}{n} x^2 : \gamma^2 + \delta x + \frac{r}{t} x^2 :: \pi : \varphi.$$

* *Veggasi la* Geometria di sito *parte 1.* §.198.

E questa per le operazioni algebriche può semplificarsi nel seguente modo

$$\frac{m}{n}\left(\frac{\alpha n}{m} + \frac{\beta n}{m} x + x^2\right) : \frac{r}{t}\left(\frac{\gamma t}{r} + \frac{t\delta}{r} x + x^2\right) :: \pi : \varphi,$$

Cioè in

$$\frac{\alpha n}{m} + \frac{\beta n}{m} x + x^2 : \frac{\gamma t}{r} + \frac{t\delta}{r} x + x^2 :: \frac{\pi r}{t} : \frac{\varphi m}{n}.$$

Se dunque porremo

$$\frac{\alpha n}{m} = a^2,\ \frac{\beta n}{m} = b,\ \frac{\gamma t}{r} = h^2,\ \frac{t\delta}{r} = k,\ \frac{\pi r}{t} = p,\ \frac{\varphi m}{n} = q,$$

avrassi la proporzione proposta nel teorema.

Parte ii. Ed eseguendo la divisione di ragione nell' analogia proposta in questo teorema, sarà

$$a^2 - h^2 + (b - k)\, x : h^2 + kx + x^2 :: p - q : q$$

Intanto si ritrovi la retta f quarta proporzionale dopo le tre rette $b - k$, $a + h$, ed $a - h$, onde sarà $a^2 - h^2 = f(b - k)$. E l' altra retta g sia anche quarta proporzionale in ordine alle tre $p - q$, q, e $b - k$, sarà

$$f(b-k) + (b-k)x : h^2 + kx + x^2 :: b-k : g :: (b-k)(f+x) : g(f+x).$$

Ma il 1° termine di quest' analogia è uguale al terzo. Dunque sarà il secondo uguale al quarto, cioè

$$h^2 + kx + x^2 = gf + gx,$$

cioè $$x^2 + (k - g)\, x = gf - h^2$$

Ove facendo $eh = gf$: e risolvendo in analogia quest' ultima equazione avrassi.

$$x + k - g : e - h :: h : x$$

Ch' è la riduzione indicata nella 2ª parte dell' enunciazione del presente teorema.

CAPITOLO II.

Soluzioni de' problemi detti da Apollonio *de sectione rationis, et de sectione spatii.*

521. Qual sia lo scopo di questi due problemi ben si rileva da' loro due temi, ch' io quì soggiungo immantinente. Ciascun di essi n' è risoluto in due guise, cioè per le algebriche guide de' moderni, e poi coll' analisi geometrica degli antichi. E queste geometriche risoluzioni sono assai agevoli, e ben diverse da quelle, che leggonsi in una elaborata opera del sommo Halley su tale argomento *.

PROPOSIZIONE V.

Problema.

522. Dato di posizione il punto P [*fig.* 9.], e le due rette CA, CB terminate ne' punti A, B; condurre da quel punto su queste rette l'inclinata PDE, che da esse ne ascinda verso di que' punti A, B, le parti AD, BE in data ragione.

Soluzione analitica.

523. Dal dato punto P conducasi la PG parallela alla data retta AD, che incontri la BC in un qualche punto G. Saranno date di grandezza le due rette PG, GC (§.72, e 69.). Sicchè potrà porsi PG $=b$, AC $=a$, GC $=c$, CB $=e$,

* *Apollonii Pergaei* de Sectione rationis lib. II., ex arabico MSS. latine versi, et de Sectione spatii lib. II. restituti. *Veggasi pure, su tali libri, che formavano il secondo e terzo anello del* Luogo risoluto, *la nostra prima dissertazione nel vol.* I. *degli* Opuscoli.

e l' ignota CE $=x$; onde sarà EB $=e-x$, GE $=c+x$. Ed essendo poi, pe' triangoli simili GEP, CED,

GE : CE :: PG : DC

sarà ne' loro simboli

$$c+x : x :: b : \mathrm{DC}$$

onde sarà $\mathrm{DC}=\frac{bx}{c+x}$, e quindi $\mathrm{AD}=\mathrm{AC}-\mathrm{CD}=a-\frac{bx}{c+x}$

E dovendo essere per la condizione del problema AD a BE in una ragion data, che dinotisi per quella di m ad n; sarà ne' simboli di tali termini

$$a-\frac{bx}{c+x} : e-x :: m : n.$$

E riducendo quest' analogia in equazione avrassi

$$a-\frac{bx}{c+x}=\frac{m}{n}(e-x)$$

cioè $$ac+(a-b)x=\frac{m}{n}(e-x)(c+x).$$

E quest' ultima equazione, che è del 2° grado, può ordinarsi, e risolversi pe' precetti dell' Algebra volgare, e quindi poi geometricamente costruirsi *.

Analisi geometrica dello stesso problema.

524. Si meni dal dato punto P la PG parallela alla DC, e poi si prenda sulla stessa PG la PK, sicchè stia $m : n$ :: PG : PK, (per $m : n$ esprimendo la ragion data). Ed oltre a ciò facciasi $m : n$ :: AC : BH. E supponendo esser PE la retta addimandata, dovrà essere, per la condizione del problema

$m : n$ :: AD : BE.

E sarà quindi, per la *19. El. V.*,

$m : n$ :: DC : EH :: GP : PK.

Ciò premesso, pe' triangoli simili GEP, CED sta

GE : GP :: CE : CD.

* *O pure potrà costruirsi senza risolverla* (§§. *471, e 14.*)

E si è qui sopra dimostrato essere

$$GP : PK :: CD : EH.$$

Dunque sarà, *ex aequo*,

$$GE : PK :: CE : EH,$$

e dividendo starà poi

$$GE - PK : PK :: CH : EH.$$

Ma in quest' analogia son dati di grandezza i termini medj PK, CH, e n'è anche data la differenza degli estremi, cioè $GE - PK - EH = GH - PK$. Dunque sarà noto il punto E. (§. 14.)

PROPOSIZIONE VI.

PROBLEMA.

525. Date le medesime cose del problema precedente; condurre dal punto P la PE [*f.* 10.], sicchè sia dato il rettangolo delle parti AD, BE, che questa ne tronchi dalle rette date AC, BC, e verso de' dati punti A, B.

Soluzione analitica.

Ritenendo i medesimi simboli del problema precedente esprimasi per h^2 l'aja data di quel rettangolo; si avrà, per la condizione del problema,

$$AD.BE = h^2,$$

cioè

$$\left(a - \frac{bx}{c+x}\right)(e - x) = h^2.$$

E moltiplicando per $c + x$ quest' equazione avrassi l'altra

$$(ac + ax - bx)(c - x) = h^2 (c + x),$$

ch'è di 2° grado al par di quella del problema precedente, e può facilmente ordinarsi, risolversi, e geometricamente poi costruirsi *.

* *E potrebbe ancora eseguirsene la costruzione senza risolverla, come rilevasi da'* §§. *471, 14, e nota a questo.*

Analisi geometrica del medesimo problema.

526. Dal punto P conducansi le due rette PG, PT rispettivamente parallele alle due date AC, BC. Si congiunga la PA, ed ella protraggasi finchè incontri la BC in Q. In oltre suppongasi esser la PE la retta addimandata: e 'l rettangolo delle parti AD, BE, che vi dee esser dato, si ponga uguale a quello della data AT in un' altra GR (*16. El. VI.*).

E poichè sono simili i due triangoli APT, PQG, dovrà essere

$$AT : TP :: PG : GQ.$$

In oltre, per gli altri triangoli PDT, GPE anche simili tra loro dee stare

$$TP : TD :: GE : PG.$$

Dunque per egualità perturbata sarà

$$AT : TD :: GE : GQ,$$

Ed invertendo

$$TD : AT :: GQ : GE$$

E finalmente, sarà componendo,

$$AD : AT :: EQ : GE.$$

Ma per la supposizione fatta precedentemente, cioè che debba essere

$$AT.GR = AD.BE,$$

è

$$AD : AT :: GR : BE$$

Dunque sarà pure

$$EQ : GE :: GR : BE$$

e per la *12. El. V.* dovrà risultarne

$$EQ + GR : GB :: GR : BE.$$

Ma in quest' analogia sono dati i termini medj, cioè le rette GB, GR, e gli estremi hanno per somma la data BQ + GR. Dunque vi si farà noto il punto E (§. 14.).

CAPITOLO III.

De' problemi sulle inclinazioni.

527. Tutt' i problemi sulle inclinazioni a quest' indagine generale si riducono, cioè:

Date due linee qualunque, applicare in mezzo ad esse una retta data, che distesa passi per un punto dato.

Noi qui scioglieremo solamente i problemi piani di tal ricerca indicatici da Pappo, e risoluti con geometrica divinazione da Marino Ghetaldo *.

PROPOSIZIONE VII.

Problema.

528. Dato il semicerchio ANC [*fig.* 11], e la retta NL perpendicolare al suo diametro; applicare una retta data tra la circonferenza e la NL, sicchè distesa passi per l' estremo A del diametro.

Soluzione geometrica.

529. Suppongasi essere AH la corda addimandata, sicchè l' interposta KH pareggi la data retta F; e si unisca la corda HC. Saranno simili i due triangoli rettangoli AHC, ALK aventi di comune l' angolo acuto A. Onde dovrà stare AC : AH :: AK : AL. Il perchè saranno investigabili le

* *Si riscontri la dissertazione più volte citata, nella quale si troverà ancor detto dal lavoro più distinto sullo stesso argomento pubblicato dall' Horsley in Oxford nel 1770, col titolo:* Inclinationum lib. II. restituti.

due AH, ed AK reciproche alle due date AC, AL, ed aventi per differenza la data F.

Scol. A questa soluzione geometrica, che può aversi per un caso della prop. 6. lib. III. (§. 416) * è affine la segnente soluzione analitica.

530. Si tiri la corda AN, e pongasi

$$AH = x \quad , \quad AN = a \quad , \quad F = c.$$

Imperocchè per la similitudine di que' triangoli sarebbe

$$AC : x :: AK : AL$$

ed
$$x \times AK = AC \times AL = a^2$$

e però
$$AK = \frac{a^2}{x}$$

Ed essendo

$$KH = AH - AK = x - \frac{a^2}{x}$$

sarà per la condizione del problema

$$x - \frac{a^2}{x} = c$$

cioè
$$x^2 - a^2 = cx.$$

Risolvendo la quale equazione avrassi finalmente il duplice valore dell' ignota x,

cioè
$$x = \tfrac{1}{2} c + \sqrt{(a^2 + \tfrac{1}{4} c^2)}$$

ed
$$x = \tfrac{1}{2} c - \sqrt{(a^2 + \tfrac{1}{4} c^2)}$$

531. Di questi due valori il primo è positivo, e l' altro è negativo. Sicchè descrivendo un cerchio, che abbia per centro, e per intervallo il primo de' detti due valori, avrassi nell' intersezione H il punto addimandato.

Ma per lo valore negativo dell' ignota x qual retta dovrà assumersi per intervallo, e qual arco dovrà poi segnarne? Eccolo.

Compiasi il cerchio ANCn, e col centro A [*fig.* 12.]

* *Un tal caso trovasi effettivamente considerato nel cor. 2. di essa.* (§. 418.)

intervallo $\sqrt{(a^2 + \frac{1}{4}c^2)} - \frac{1}{2}c$ descrivasi il cerchio, che dovrà tagliare l' arco An in un punto h. Questo sarà quello che si cerca.

Imperocchè la corda AH, ch' è x, s' intenda rivolgersi intorno ad A, e verso N, si farà successivamente minore di prima; e diverrà *zero*, quando tal retta rivolgente si trovi a diritto con AC. E seguitando a rivolgersi tal retta verso h, ogni corda Ah sarà $-x$, come la genesi delle grandezze negative il prescrive. E perciò nell' arco An dovrà applicarsi una corda uguale a $\sqrt{(a^2 + \frac{1}{4}c)} - \frac{1}{2}c$, cioè uguale ad AK, e sarà l' interposta hk uguale alla data F.

Imperocchè essendo uguali i rettangoli di HA in AK, e di hA in Ak, perchè ciascun di essi uguaglia lo stesso quadrato di AN, o di An, ed essendo uguali le AK, ed Ak per costruzione, saranno pure uguali le AH, ed Ah, e quindi le rimanenti KH, ed hk.

532. Cor. L'interposta KH, come apparisce dal calcolo del problema, è uguale ad $x - \dfrac{a^2}{x}$; e tal diviene ancora la hk, ponendovi A$h = -x$. Imperocchè pe' triangoli AhC, ALk sta AC : Ah :: Ak : AL, e quindi Ah.Ak = AC.AL = AN^2. Sicchè prendendo i loro simboli avrassi A$k = \dfrac{a^2}{-x}$ ed $hk = \dfrac{a^2}{-x} + x = x - \dfrac{a^2}{x}$.

533. Scol. Queste cose si sono rilevate per farne intendere la natura delle radici negative, e quali debbansi dire problemi affini, ov' esse deggionsi rapportare. Ma di questo problema eccone un'

Altra soluzione piu' idonea.

534. Pongasi [*fig. 11.*]

$$AC = 2r,\ AB = x,\ AL = b,\ e\ KH = a.$$

Dovrà essere la retta AH $= \sqrt{2rx}$. Ed essendo pe' trian-

goli simili ABH, ALK,

$$AB : AH :: AL : AK,$$

sarà
$$x : \sqrt{2rx} :: b : AK = \frac{b}{x}\sqrt{2rx}.$$

E quindi

$$KH = AH - AK = \left(1 - \frac{b}{x}\right)\sqrt{2rx}.$$

Ma tal retta dee essere uguale ad a. Dunque sarà

$$\left(1 - \frac{b}{x}\right)\sqrt{2rx} = a,$$

cioè
$$\left(1 - \frac{b}{x}\right)^2 . 2rx = a^2.$$

E ponendo per brevità di calcolo $a^2 = 2rh$, onde la precedente equazione risulti divisibile per $2r$; si avrà

$$\left(1 - \frac{b}{x}\right)^2 x = h,$$

o pure
$$x^2 - 2bx + b^2 = hx.$$
cioè
$$x^2 - (2b + h)\,x = -b^2.$$
E quindi

$$x = b + \tfrac{1}{2}h \pm \sqrt{(bh + \tfrac{1}{4}h^2)}$$

Questi due valori della x sono facili a costruirsi, e sono amendue positivi, l' uno però di essi osservasi maggiore di b, o di AL, e l' altro n' è minore. Imperocchè essendo

$$\tfrac{1}{2}h < \sqrt{(bh + \tfrac{1}{4}h^2)},$$

aggiuntavi la b di comune sarà

$$\tfrac{1}{2}h + b < \sqrt{(bh + \tfrac{1}{4}h^2)} + b.$$

E toltovisi d' ambe le parti il radicale, avrassi

$$b + \tfrac{1}{2}h - \sqrt{(bh + \tfrac{1}{4}h^2)} < b.$$

E l' un di tali valori x ne somministrerà l' applicata HK dentro del cerchio, l' altra la H'K' al di fuori di esso.

PROPOSIZIONE VIII.

PROBLEMA.

535. Dati i due semicerchi AIC, DGB [*fig.* 13], i cui diametri sieno per dritto; condurre dall' estremo A del primo di detti diametri la segante AIG, talchè l'interposta IH sia uguale alla data retta N.

SOLUZIONE ANALITICA.

536. Sia AG la segante richiesta, su cui cada dal centro O la perpendicolare OP. Questa retta dovrà esser parallela alla corda CI (*31.El.III.*). Onde la ragione di AI ad IP sarà uguale a quella di AC a CO, ch'è data, e che può esprimersi per $m : n$. Ciò posto pongasi AI $= x$, IH $=$ N $= a$, e la tangente condotta dal punto A al circolo DGB $= c$.

Sarà $\text{IP} = \frac{nx}{m}$, $\text{HG} = \frac{2nx}{m} - 2a$, $\text{AH} = x + a$

$$\text{AG} = x + a + \frac{2nx}{m} - 2a = \frac{m+2n}{m}x - a.$$

E dovendo essere AH.AG $= c^2$ (36.*El.III.*)

sarà $$(x+a)\left(\frac{m+2n}{m}x - a\right) = c^2.$$

E dal maneggio, e poi dalla costruzione di quest' equazione potrà ottenersi il punto I.

SOLUZIONE SINTETICA DELLO STESSO PROBLEMA.

537. Si pratichi la costruzione precedente, ed oltre a ciò si prenda BQ uguale a CD; si tiri dal punto Q la QF perpendicolare ad AG: finalmente si faccia come QA ad AC così IH ad IK. Ed essendo parallele le tre rette CI, OP, QF, sarà CO : OQ :: IP : PF, e quindi IP uguale a PF, da cui tolte le uguali PH, PG, resterà IH $=$ GF. Ciò premesso, alla ragione di QA ad AC è uguale tanto quella di FA ad AI (*2.El.VI.*), quanto l' altra di IH ad IK. Dunque sarà (*19.El.V.*)

QA : AC :: GA : KA :: GA.AH : KA.AH.

Ma è dato il rettangolo GAH, come uguale al dato BAD. Dunque sarà anche dato l'altro di KA in AH; ed essendovi data la KH, sarà ancor data ciascuna delle AK, AH (§.14). E quindi si farà noto il punto H soddisfacente al problema.

PROPOSIZIONE IX.

PROBLEMA.

538. Applicare nell'angolo esteriore DCG [*f.* 14] del dato rombo AC una retta uguale alla data rg, e che passi per l' angolo opposto A di tal figura.

ANALISI GEOMETRICA.

Sia RG la retta che si domanda. Pe' tre punti R, C, G intendasi descritto il cerchio PGCR, che intersechi la diagonale AC del rombo in E; e dal punto medio P dell' arco RPG si conducano a' punti R, C, E, G le rette PR, PC, PE, PG. Saranno uguali i due angoli DCB, RPG; poichè ciascun di essi compie due retti col medesimo angolo RCG. E saranno pure uguali gli altri due angoli ECG, EPG compresi nel medesimo segmento ERPG. Ma l' angolo DCB è duplo di BCA, o del suo uguale ECG: dunque sarà benanche l' angolo RPG doppio di EPG. Cioè saranno tra loro uguali gli angoli GPK, RPK, come son pure uguali, per costruzione i lati, che li comprendono. Onde, per la *4.El.I.*, sarà GK uguale ad RK, e l' angolo PKG uguale a PKR; e quindi PE un diametro del descritto cerchio, e retto l' angolo PCE. Ciò posto, essendo equiangoli i due triangoli AKE, PCE, sarà AE : EK :: PE : EC. Onde le due rette AE, EC hanno per differenza la data AC, e sono reciproche alle due date EK, PE, e si possono quindi esibire (§.14).

Composizione geometrica.

Costr. Sulla data retta *rg* si descriva il segmento circolare capiente un angolo uguale al dato RCG ; ed *eg* sia la corda di una metà dell' arco *reg* . In oltre si ritrovino le due rette AE , CE reciproche alla *eg* * , ed aventi AC per differenza (§. 14). E finalmente dal punto E s' inclini alla BG la EG uguale alla *eg*. Sarà il punto G quello che si dimanda.

Dim. Se la retta, che unisce il dato punto A col punto G di già ritrovato, non abbia la sua parte RG uguale alla data *rg*, intendasi esserne un altro punto M della CG soddisfacente al problema, cioè la retta AM abbia la sua parte LM uguale alla *rg*. Ciò supposto s'intenda descritto il cerchio pe' tre punti L , C, M , il quale dovrà segare la CE in un punto N diverso da E : poichè se la segasse in E , se ne rileverebbe EM^2 uguale ad EG^2, ch' è un assurdo. Si dimostrerà col ragionamento addotto nell' analisi geometrica dover esser ANC uguale ad eg^2, e con ciò ad AED . Lo che è un assurdo **.

Soluzione analitica.

539. Dal punto A [*fig.15.*] si tiri al lato BC la perpendicolare AT, che cada fuori del rombo (la soluzione procederebbe analogamente , se cadesse dentro) ; e pongasi

$$AB = BC = a\ ,\ BT = h\ ,\ KH = b\ ,\ BH = x\ ,$$

sarà $CH = x - a$; e per la *12. El. II.* si avrà

$$AH^2 = AB^2 + BH^2 + 2TBH = a^2 + x^2 + 2hx.$$

Or pe' triangoli simili ABH, KCH essendo

$$AH : KH :: BH : CH$$

e quindi $AH^2 : KH^2 :: BH^2 : CH^2$,

sarà , ne' loro simboli ,

$$a^2 + x^2 + 2hx : b^2 :: x^2 : x^2 - 2ax + a^2$$

E passando da analogia ad equazione , sarà

$$(x^2 + a^2)^2 + 2\,(x^2 + a^2)(hx - ax) + 4ahx^2 = b^2x^2$$

* *Cioè tali che il loro rettangolo pareggi il quadrato della eg.*

** *È questa precisamente la dimostrazione indiretta, di cui fu accennato nella nota al* §. *488.*

Ed aggiungendo a' due membri di quest'equazione il trinomio $h^2x^2 + a^2x^2 + 2ahx^2$, risulterà , fatte le riduzioni ,

$$(a^2+a^2)^2+2(x^2+a^2)(hx-ax)+(hx-ax)^2 = (b^2+h^2+a^2+2ah)x^2$$

Ma il 1° membro di detta equazione l'è un quadrato perfetto. Dunque estraendo la radice quadrata d'ambe le parti avrassi

$$x^2 + a^2 + (h - a)x = \pm x \sqrt{(b^2 + h^2 + a^2 + 2ah)}$$

Sicchè fattovi $\sqrt{(b^2 + h^2 + a^2 + 2ah)} = n$, sarà , per trasposizione di termini , $x^2 + (h - a \mp n)\,x = -\,a^2$.

E quest' equazione facilmente può risolversi , e costruirsi.

540. Cor. Se la figura ABCD fosse un quadrato [*fig.16.*], in questo caso divenendo *zero* la BT , o sia la *h* , quest' ultima equazione si dovrà nel seguente modo semplificare

$$x^2 - (a \pm n)\,x = -\,a^2.$$

441. Scol. Sebbene questo problema di sua natura sia *piano*, e con principii elementari risoluto , pure l' equazione in ch' ei si traduce è biquadratica , e par che *solido* il dichiari. Il perchè non vi potendo essere una tal contraddizione tra 'l grado , e la natura di un medesimo problema , necessariamente l' anzidetta equazione dovrà ricevere abbassamento. Ed a ciò fare s' impegnano gli analisti di usare il metodo del Cartesio , e quello delle reciproche equazioni , che sono del pari sublimi , ed ingegnosi. Ma perchè girne a rinvenire cotesta cosa tra' principii alti , e stranieri , ov' ella s' incontra nel piano del volgare algorismo ?

Considerazioni sul precedente problema , e conseguenze importanti di esse.

542. Dopo le eleganti soluzioni , l' una geometrica l' altra algebrica, recate di questo problema famoso , tanto nell' antica, che nella moderna Geometria , non istimiamo inopportuno ed inutile alla scienza indicare le principali soluzioni , che ne sono state date , sì pel caso del rombo quì innanzi trattato , che per quello più semplice del quadrato ; onde possano i giovani riscontrandole , e studiandole , non solo erudirsi nell' arte di risolvere i problemi , ma ancora

conoscere, ed apprezzare la fecondità de' metodi, che per ottenerle si sono adoperati. Un problema, che ha meritata l' attenzione degli antichi, e de' moderni geometri; che non v' ha opera di questi ove di ricerche geometriche si tratti con qualunque metodo, che non lo rechi; che dà luogo a buone, ed importanti regole per riescire a più elegantemente risolvere i problemi col metodo algebrico, merita bene una special considerazione, dalla quale trarremo ancor noi opportunamente le regole suddette.

543. Prima tra le soluzioni geometriche si presenta l'elegantissima di Eraclito pel caso del quadrato, recataci da Pappo nelle prop. 70 e 71 del lib. VII. *Collect.*, la quale fu tenuta presente dal Cartesio nel risolverlo col suo metodo, per trarne la regola, che *quando un problema* piano *conduca ad un' equazione che lo indichi* solido, *si possa, con un più convenevole stabilimento dell' incognita, ottener quella in modo più semplice**: indicando ciò avvenire nel caso presente, quando si stabilisca per incognita la retta al cui rinvenimento tendesi nella soluzione di Eraclito.

544. Tra' geometri moderni meritano special considerazione, per le soluzioni geometriche, quella di *Ugone d' Omerique*** pel rombo, e l'altra, che, imitando più d' appresso gli antichi, ne diede l'Horsley nella sua restituzione de' due libri *Inclinationum* di Apollonio; e deve ancor riputarsi assai elegante quella dell'Ugenio, che cercò aprirsi nell' analisi geometrica una via pariforme a quella di Eraclito pel quadrato; che aveva egli già prima recata, dimostrandola a suo modo***.

* *Quod quidem hic refero, ut vobis indicem, quod cum problema propositum non est solidum, si quaerendo illud una via ad aequationem deveniatur valde compositam, tum communiter alia via ad simpliciorem aequationem perveniri possit.* (Geom. lib. III.)

** *Analysis geomet. lib. I. prop. 47.*

*** *V. Illustrium quorundum problematum constructiones, nel vol. III.* Op. var.

Ma a questa non cede quella poc' anzi esposta dal Fergola.

545. Per soluzioni algebriche, non v' ha trattato di Geometria analitica che nol riporti: ma quì basterà recare quella che pel quadrato ne diede il Newton nella sua *Arithmetica Universalis**, ad oggetto di trarne in modo più definito la suddetta regola vagamente indicata dal Cartesio; e di accennare l'altra soluzione del de l' Hopital pel caso del rombo.

PROBLEMA.

546. *Sottendere l' angolo retto DCF [fig. 16.] con la data retta EF, la quale passi pel dato punto A equidistante da' lati dell' angolo retto*

SOLUZIONE ANALITICA.

Compiasi il quadrato ABCD, e la retta EF si bisechi in G. Poi pongasi CB, o CD $= a$, EG, o FG $= b$, AG $= x$; sarà AE $= x - b$, AF $= x + b$. Ed essendo $AF^2 - AB^2 = BF^2$, sarà BF $= \sqrt{(x^2 + 2bx + b^2 - a^2)}$.

E poichè, pe' triangoli simili ADE, ABF, sta

$$AE : AD :: AF : BF$$

cioè $\quad x - b : a :: x + b : \sqrt{(x^2 + 2bx + b^2 - a^2)}$

avrassi $\quad ax + ab = (x - b)\sqrt{(x^2 + 2bx + b^2 - a^2)}$

e quadrando i membri, e poi ordinando l' equazione, sarà

$$x^4 = (2a^2 + 2b^2)\,x^2 + 2a^2b^2 - b^4$$

che maneggiata come le derivative dal secondo grado darà

$$x = \pm\sqrt{\left(a^2 + b^2 \pm \sqrt{\ a^4 + 4a^2b^2}\right)}$$

Ed ottenuta per tal modo la CG, si avrà la CE e la CF, ciascuna delle quali determinerà il punto E, o l'altro F soddisfacenti al problema.

ALITER.

547. Sia AE $= x$, AD $= a$, EF $= b$, sarà

* *Sez. IV, cap. 2, probl. 24.*

$$AF = x + b\ ,\ BF = \sqrt{(x^2 + 2bx + b^2 - a^2)}.$$

che però essendo AE : AD :: AF : FB

cioè $x : a :: x + b : \sqrt{(x^2 + 2bx + b^2 - a^2)}$,

sarà $ax + ab = x\sqrt{(x^2 + 2bx + b^2 - a^2)}$

e quadrando i membri, ed ordinando

$$x^4 + 2bx^3 + (b^2 - 2a^2)x^2 - 2a^2bx - a^2b^2 = o$$

equazione biquadratica completa, nella quale l' investigazione delle radici riesce più difficile, che nel caso precedente. Per la qual cosa egli adopra lo stesso ripiego di trasportare il termine $-a^2b^2$ nel secondo membro, e poi completare il quadrato del primo membro con aggiugnervi di comune a^4.

548. Esposte le due precedenti soluzioni, il Newtou comincia dall' osservare, che nel presente problema la linea EF riferendosi del pari all' una, o l' altra delle CB, CD(il che rendesi manifesto se la retta da applicarsi cadesse nell'angolo BCH); che però non vi sia più ragione di scegliere per incognita la ED piuttosto che la BF, o la CE piuttosto che la CF, o la AE piuttosto che la AF : dalla quale ambiguità egli dice essere stato indotto, nella prima delle soluzioni, a prendere per incognita la AG, che serba la medesima relazione alle CE, CD. Nè tampoco abbassò da G la perpendicolare alla CF, per procedere innanzi nella soluzione del problema; poichè egualmente potevala abbassare alla CD : e per la stessa ragione non abbassolla nè sulla AB nè sulla AD; e si rivolse a cercare l' espressione della AG, che non ammette altra linea di simile determinazione. E per tal modo pervenne ad ottenere un' equazione di 4° grado derivativa dal secondo; mentre con l' altro modo*, in cui tali avvertenze non aveva usate, gli era risultata completa di tal grado.

549. E dopo altre considerazioni da lui fatte, valendosi di un semplicissimo ripiego geometrico, e supponendo tirata dal punto medio G dell' applicata EF la perpendicolare GK alla diagonale AC prolungata, e prendendo per incognita la AK, che ha un indifferente relazione al lato del qua-

drato (lo stesso sarebbe per la CK), dinotando la AC con c, la EG con b, egli perviene ad ottenere pel problema la semplicissima equazione quadratica *.

$$y^2 = -\tfrac{1}{2}cy + \tfrac{1}{2}b^2$$

Da tutte le precedenti considerazioni fu egli indotto a stabilire la seguente utilissima *regola per la scelta dell' incognita*, onde più convenevolmente avviare il calcolo per l' analisi di un problema.

550. *Quando è tale l' affinità, ossia la similitudine di relazione di due termini agli altri del problema, sicchè dal prendere per ignota l' uno o l' altro, o ancora entrambi, insieme adoperandoli, si perverrebbe con lo stesso calcolo alla medesima equazione finale (a meno di qualche diversità di segni); allora non è espediente di prendere per incognita nè l' uno, nè l' altro di que' termini, ma conviene sceglierne in vece loro un terzo, che riguardi similmente ciascun di quelli, come la semisomma, o la semidifferenza, o il medio proporzionale, o qualsivoglia altra quantità, che indifferentemente si riporti all' uno e l' altro di que' termini.*

551. Ed egli in conferma di una tal regola si richiama a ciò che, aveva anche operato ne' precedenti problemi 9 e 10, conchiudendo finalmente, che una tal regola verrebbe più rischiarata dal problema 28 **, ch' è quello della segante alla parabola da noi recato nella prop. 7. del lib. III. E poteva ancor aggiugnere dall' altro 41, nel quale pur si prevale con vantaggio di una tal regola, e lo avverte ***.

---

* *Riguardando alla soluzione geometrica del Fergola (§. 538.), ed anche all' altra dell' Horsley, si vede come concorrano uniformemente a risolverlo le due analisi geometrica ed algebrica, allorchè si riducono a rinvenire un punto nella diagonale AC del rombo prolungata* [*f.14.III.*]

** *Ad hanc regulam animum advertens, in probl. 9, et 10, ubi trianguli latera germana BC, et AC determinanda erant; quaesivi potius semidifferentiam, quam alterutrum eorum. Sed regulae huius utilitas ex vigesimo octavo problemate magis elucescet.*

*** *Veggasi l'* idem brevius, *per questo problema.*

552. Ma senza tante nuove ricerche, basta a convalidarla l'elementarissimo problema di *dividere una retta data in modo, che il rettangolo delle parti sia dato*. Poichè avendo ciascuna delle parti la medesima relazione alla retta, che indichisi con a, sicchè sia indifferente il dinotar con x l'una, o l'altra di esse; l'equazione, che ne risulterebbe pel problema sarebbe

$$x^2 - ax + b^2 = o$$

mentre prendendosi per incognita l'interposta tra 'l punto cercato, e 'l punto medio della retta data, la quale ha una relazione indifferente alle due parti della retta, essendo la metà della loro differenza, l'equazione finale sarebbe

$$x^2 = a^2$$

553. L'illustre marchese de l'Hopital, cui non fu nota la regola del Newton, quando eseguì la sua soluzione pel quadrato *, prendendo per incognita il lato del quadrato prodotto fino all'incontro con l'inclinata, pervenne, come doveva avvenire, ancor egli, ad una equazione completa di quarto grado, che con un facilissimo ripiego mostrò scindersi in due del 2° grado. E come che l'una di esse davagli le stesse radici dell'altra, se non che erano esse positive in quella, negative in questa; egli però si attenne a costruire la sola prima, che poi mostrò offrirne anche le due soluzioni corrispondenti alle x negative **.

554. In seguito passò ancor egli ad avvertire, che quando l'equazione risultante dallo scioglimento di un problema sia abbassabile, conviene tentare, se per altre vie possa pervenirsi ad equazione più semplice; ed in conferma di ciò che aveva detto reca due altre maniere elegantissime da risolvere il problema proposto, nell'una introducendo due incognite,

* *Sections Coniques l. X. es. 2. — Questo sommo geometra francese morì nel 1704, avendo appena 55 anni di età, e l'* Arithmet. Univers. *del Newton fu pubblicata per la prima volta in Cambrigia nel 1707. E dee ancor notarsi, che il de l'Hopital lasciò incompleto il suo egregio lavoro delle* Sections coniques, *che fu pubblicato dopo la di lui morte.*

** *Osserv. 1. §. 429.*

cioè la parte dell'inclinata che rimane tra 'l vertice dell'angolo del quadrato e 'l lato opposto, e la parte di questo, che ne rimane al di sotto; pervenendo per tal via ad una semplicissia equazione pura del 2° grado, conducente alla stessa costruzione da lui già ottenuta; l'altra di gran pregio, se riguardisi essere applicabile ancora al caso del rombo invece del quadrato, nella quale, mediante un semplicissimo apparecchio geometrico, e stabilendovi pur due incognite pel calcolo a condurre l'analisi del problema, perviene ad una equazione assai semplice del 2° grado, della quale dà un elegantissima costruzione. E noi consigliamo i giovani a non tralasciare di originalmente riscontrar tali cose nella citata opera, il cui studio riescirà loro di grandissima utilità, essendo essa un di que' pregevolissimi lavori de' moderni, che terrà sempre un posto distinto nella scienza *analitico-geometrica* di costoro, qualunque sieno i progressi, che questa faccia, e le modificazioni, che possa ricevere la Geometria Cartesiana.

555. Di più recente data ci si presenta la soluzione, che col metodo Cartesiano ne diede l'illustre Lacroix, in più pagine della sua *Application de l'Algébre a la Géométrie*, ove per altro ne offre un'analisi completa del problema, sì pel caso di un rettangolo, che per quello elementare del quadrato. Ma invero le vie da lui usate, che sono più ricercate di quelle da altri già adoperate, non conducono ad un risultamento più semplice, e ad una più elegante composizione del problema; sicchè egli stesso si vide in fine indotto a doverne ripetere la soluzione analogamente al Newton. Ma volendo in seguito usare il metodo detto *a coordinate* ottiene i medesimi risultamenti di prima, avendo avuto bisogno per l'analisi del problema non solo di quelle verità, che occorrevano per la soluzione geometrica, o Cartesiana; ma anche di alcune altre derivanti dal nuovo metodo, che volle adoperarvi. Nè sappiamo intendere, come abbia potuto il Collalto, dopo aver riportata tal soluzione del Lacroix, nelle sue *Lezioni di Geometria analitica*

a due coordinate * , conchiudere, di aver egli ciò fatto » per » far vedere come questi nuovi metodi servono mirabilmente » a rinvenire di queste soluzioni più semplici. «

556. Dopo di aver alquanto ragionato delle principali soluzioni di questo problema, e di averne tratte regole da servir di norma in altri di simile natura, non è fuori proposito riguardarlo ancora per essa, esaminandola prima di tentarne la soluzione. E perchè una tale indagine risulti più chiara, enuncieremo il problema nel seguente modo :

Pel punto A [fig.17.] equidistante dalle due rette di sito DC, CB si vuole inclinare tra esse una retta di data grandezza.

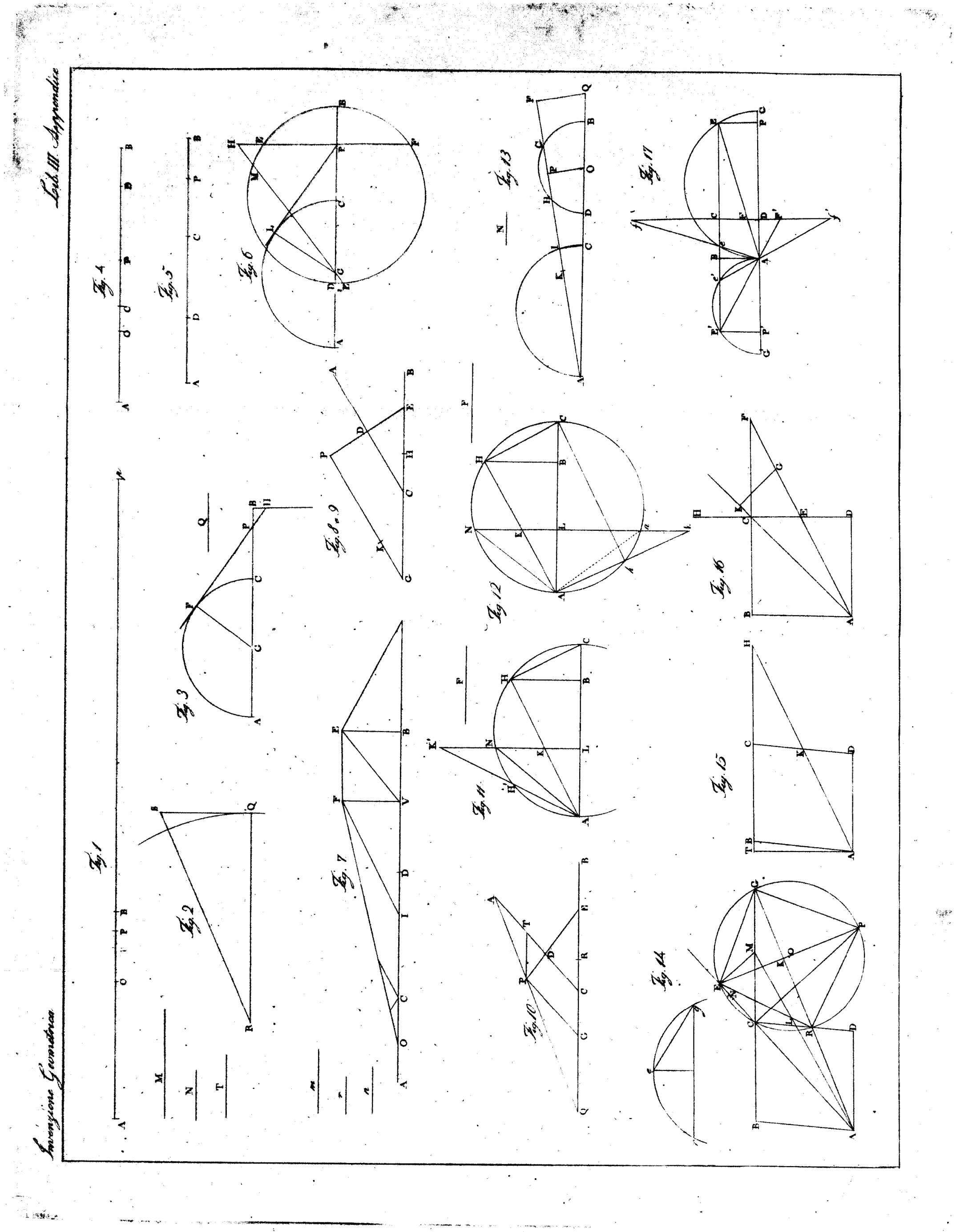
Or per poco che si consideri il problema così enunciato, si scorge, che una tal retta possa rimanere interposta tra le date, come la EF, o la *ef*, o ancora come l' una, o l' altra delle due E'F', *e'f'* ; sicchè il problema sia suscettivo di quattro diverse soluzioni, cioè abbia effettivamente quattro casi ciascuno corrispondente ad una di quelle ; e però che debbasi, risolvendolo algebricamente, pervenire ad una equazione del quarto grado, che tutti gli contenga, come è stato dimostrato in fine del trattato di *Analisi Algebrica elementare*, e 'l dovrà essere ancora nella parte II. di questo dell' *Invenzione geometrica*. E tale dovrà pur essere l' artifizio della sua compiuta soluzione geometrica, da risultarne i quattro punti soddisfacenti ad essi quattro casi, o soluzioni affini. Ma siccome due di tali soluzioni sono affatto identiche alle altre due, come l' è la EF con la *ef*, e la E'F' con la *e'f'* ; però l' analisi del problema, comunque condotta, mentre ne offre i quattro casi, ne dà la riduzione a due soli, o con l' estrazione di radice quadrata dall' equazione risultante, come nella soluzione algebrica del Fergola (§.539), o con lo scindimento in due equazioni di secondo grado d'identiche radici, a meno de' segni, come in quella che ne abbiamo accennata del de l' Hopital (§.553).

* *Pubblicate in Milano nel 1806.*

557. Ed in fatti, se il punto A non fosse stato equidistante dalle due rette CB, CD, cioè nel caso di un rettangolo, o romboide invece del quadrato, o rombo, cessando l' identicità di que' casi, il problema avrebbe quattro distinte soluzioni, e la sua equazione ascenderebbe al quarto grado insuscettiva di abbassamento, come dalla soluzione del Lacroix si rileva (§.555), e come faremo anche notare quando di esso tratteremo nella Parte II. della presente opera.

558. Un tal genere di problemi meritando una special considerazione, per la buona condotta della loro analisi, sia a modo de'moderni, sia con quella degli antichi, venne da noi riguardato abbastanza in occasione dell' altro specioso problema della *piramide triangolare*, nelle *Osservazioni* concernenti la natura di esso, che presentammo alla R. A. delle scienze di Napoli, in seguito della soluzione algebrica datane dal Lhuilier, che trovasi inserita nel vol. II. degli Atti di questa, caratterizzandoli col nome di *complessi*. Ed è chiaro, che se nel risolverli si abbia tal sagacia da condurre la riduzione ad un tal punto, e però ad esibire tal retta, che essendo indifferente ad ogni due casi, valga ad esibirne ad un tratto l' uno e l' altro di essi, l' equazione al problema risulterà a dirittura del grado cui essa appartiene, senza esservi bisogno di altra ricerca per ridurvela, che potrebbe in molti casi riuscire assai difficile, principalmente trattandosi di un problema solido, che si raddoppiasse nel numero de'casi, come l'è per appunto quello delle piramide. Ed un esempio di ciò che abbiamo detto può nel caso del problema di cui trattasi aversi dalla terza soluzione del Newton di sopra accennata (§.549).

Fine dell'appendice al libro III.
e della parte I. del presente trattato.



NOTE

ALLA

INVENZIONE GEOMETRICA

AVVERTIMENTO.

Le note, che quì rechiamo sono destinate o a render ragione di alcuni articoli del testo, o a darvi maggiore estensione, la quale avevamo giudicata eccedente in esso; o pure a stabilir parallelo tra alcune ricerche eseguite con diverso metodo; o ancora a porre un nesso, ed una corrispondenza tra le opere, che ci siamo proposto pubblicare; o finalmente per quello che concerneva la parte storica di taluni argomento, principalmente ove fosse stato da altri, o prima, o dopo che da noi trattato. Al qual proposito, non tralasceremo di attribuire, com'è di ragione, e come abbiamo sempre operato, a ciascuno quello che gli spetta, contro un costume, che da qualche tempo a questa parte vediamo con dispiacere vieppiù confermato oltremonti, di non considerare affatto i lavori degl'italiani in argomenti, ch'essi espongono, e ne' quali da questi sono stati preceduti *.

Se credemmo utili tali note, e 'l fatto, e l'autorità di distinti matematici ce l'ha comprovato, nelle opere costituenti il *Corso elementare*; tanto più l'era in questi trattati, ne' quali tutte le nostre mire sono rivolte a formare ne' giovani lo spirito d'invenzione, e di discernimento ne' metodi varj, che abbondevolmente le Matematiche ora posseggono, e pe' quali è necessario apprendere a giudiziosamente adoperarli.

Un tale avvertimento valga ancora per le note, che apporremo agli altri trattati della *Geometria di sito*, delle *Sezioni coniche analitiche*, e de' loro *luoghi geometrici*.

---

* Quantunque nella pratica di questo dovere non bisogni autorità, pure stimiam quì recare ciò, che il Leibnitz ne scriveva a Giov. Bernoulli: *Eo enim ingenio sum* (così diceva quel sommo uomo) *ut libenter suum cuique tribuam* (Comm. epist. 12.)

AL LIBRO I. DELLA PARTE I.

Al cap. I. — L' accuratissimo Euclide, che trattò sì bene questo euristico argomento, che altri non ardì mai calcar sue orme, se non comentando le dottrine da lui esposte, distinse i *dati* in quattro generi, del pari che vedesi fatto nel capitolo presente, e di essi diede in un solo libro chiare, ed accurate teoriche, distribuendole in XCV *proposizioni di Dati*; in ciascuna delle quali proponendosi le cose date *per concessione*, si dimostra quali altre ne derivino date *per conseguenza*: nel quale svolgimento, fatto dietro convenevole apparecchio, consistendo tutta l' *analisi* degli antichi, si vede però, che un tal libro formava ragionevolmente la base, e 'l fondamento di essa.

Or Euclide non definì il *dato* in generale, giudicando ciò superfluo dopo la cognizione, che se ne aveva pel frequente uso fattone negli Elementi di Geometria, ed anco perchè dalle seguenti definizioni speciali per essi, ch' ei diede, rimaneva vieppiù rischiarata la sua natura. Ciò produsse, che dagli antichi stessi, ed a diverse epoche fu il *dato* diversamente definito, su di che potrà leggersi la dotta prefazione del geometra Marino, discepolo di Proclo, al libro *de' Dati* di Euclide. Per noi basterà quella, che se ne dà dal nostro autore, nella def. 1, dalla quale evidentemente rilevasi la necessaria distinzione del *dato* in due generi, l' uno alla Geometria appartenente, che è quello trattato da Euclide, e che nel presente libro esponesi; l' altro spettante all' Aritmetica siasi volgare, o speciosa. Ed a maggiormente chiarire una tal distinzione, principalmente ora, che alcuni esclusivi coltivatori della moderna analisi, par che nessun' idea abbiano del *dato geometrico*, quì ripeteremo: *una cosa esser data* geometricamente, *se sapremo esibirla con un artifizio di Geometria*, cioè, *con una geometrica costruzione*. E le cose, che richieggonsi per tale esibizione se ne diranno i *determinanti*. Da che vedesi essere il *dato geometrico* non solo determinato in se stesso, ma anche determinabile per gli Elementi di Geometria, ed in agevol modo. *Una grandezza sarà poi* data aritmeticamente; *se ne sapremo il valore rapportandola ad una certa unità assunta*. Da che risulta evidente essere il dato geometrico assai più generale dell' aritmetico, e però non doversi con questo confondere; come ora ordinariamente suol farsi dagl' imperiti di Geometria. Imperocchè questo secondo le sole quantità commensurabili può riguardare, e per esse dovendo ancor dipendere da una quantità continua assuntavi per unità, diventa ancor vago come l' è questa (§. 8). E poi i punti, che tanta parte prendono tra' dati ne' problemi, sono dal *dato aritmetico* assolutamente esclusi. E dee ancora avvertirsi, che essendo il dato *geometrico* di una cosa relativo alla genesi geometrica della medesima, mentre l' *aritmetico*, o *algebrico* l' è al valore, spesso avviene, che quella non si possa in agevol modo rilevare; e talvolta divenga trascendente l' artifizio per siffatta determinazione (§§. 9, e 54).

Alla def. V. (§. 7.). — La definizione Euclidea, di cui accennasi dall' autore nella nota alla sua pel *dato di sito*, è la seguente: *Positione dari dicuntur, puncta, lineae, spatia, et anguli, quae eundem situm* (meglio tradotto *locum*) *semper obtinent*. La qual definizione produce una certa oscurità, per dovervisi chiarire le voci di *luogo*, o *sempre*. Di fatti lo stesso Euclide nel prevalersene adottò poi un concetto affine a quello di cui ci siamo serviti nella *Geometria di sito* (*def.2.*), e del quale fa pur menzione il Fergola introducendosi a ragionare de' dati di sito (*cap.3. lib. I.*)

Alla prop. I. (§. *10.*) — Euclide diede come definizione il num. 1. di tal proposizione, del pari che aveva fatto per la verità compresa nella def. 1. Elem. III. Ma questa, come fu detto (*nota a tal def.*), come pur quella di cui ora si ragiona, non è una definizione, sì bene un teorema, conseguenza immediata della definizione del cerchio; e però da prendersi al più come un postulato; ond' è che quì, come conseguenza della definizione vedesi stabilita.

Alla prop. II. (§. *11*) — Nel num. VIII. dell' enunciazione, si vede tralasciata la *suttriplicata*; poichè per assegnarla esigesi un artifizio non elementare. Ma essa può ancora esibirsi per la Geometria sublime, e quindi prendersi per data, ne' problemi, che a questa appartengono per la loro natura.

Alle prop. III, e IV (§§. *13, e 14*) — Sono questi i problemi fondamentali di riduzione geometrica, il primo per tutti quelli del 1° *grado*, il secondo per gli altri del 2° *grado* (Veg. la prop.27.lib. III. *Inv.geom.*)

Alla prop. IV. (§. *14.*) — Se il problema proposto si volesse algebricamente risolvere, esso darebbe luogo (indicando con a, b le rette date, e con d la differenza delle cercate, nel secondo caso) all' equazione

$$x^2 \pm dx - ab = 0$$

secondochè per la x si fosse indicata la minore delle rette cercate, o pur la maggiore.

Or una tale equazione ha com' è noto due radici sempre reali, l' una positiva, l' altra negativa; per avere una permutazione, ed una successione di segni ne' suoi termini; ed effettivamente risolvendola ne offre, nel primo de' casi, ch' essa presenta,

$$x = -\tfrac{1}{2}d + \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^2 + ab)}$$
$$x = -\tfrac{1}{2}d - \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^2 + ab)}$$

delle quali si vede esser positiva la prima, come alla supposizione fatta di x per la parte minore doveva corrispondere.

Al contrario risolvendolo nel 2°. caso del segno — al secondo termine, le radici sono

$$x = +\tfrac{1}{2}d + \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^2 + ab)}$$
$$x = +\tfrac{1}{2}d - \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^2 + ab)}$$

e di esse la positiva è la maggiore, come in tal caso si era supposto.

Sicchè essendo arbitraria l' una, o l' altra di quelle supposizioni per la x, l' analisi algebrica in ciascun de' casi ne offre le radici per ciascheduna; se non che dà per positiva quella, che corrisponde alla supposizione effettivamente fatta, per negativa l' altra corrispondente alla supposizione contraria. E ciò veniva anche indicato dalle stesse equazioni alle quali si è pervenuto con le due supposizioni contrarie; poichè si vede, che col cambiamento di segno nel secondo termine dell' una rispetto all' altra, non si viene a far altro, che cambiare la radice positiva in negativa, e la negativa in positiva.

Che se pel primo caso del problema s' indichi la data somma per s, è chiaro, che l'equazione ad esso non possa essere, che della sola forma

$$x^2 - sx + ab = o.$$

qualunque delle parti della s s' indichi con x, sia la minore, o la maggiore, che però le due radici

$$x = +\tfrac{1}{2}s + \sqrt{(\tfrac{1}{4}s^2 - ab)}$$
$$x = +\tfrac{1}{2}s - \sqrt{(\tfrac{1}{4}s^2 - ab)}$$

che vi soddisfano debban risultare tutte due positive; potendo sol divenire immaginarie, come la natura del problema il mostra, e dalla costruzione ancor si rileva.

Adunque l' altra equazione

$$x^2 + sx + ab = o$$

che ottiensi col cambiare il segno al secondo termine della precedente, dovrà avere le due radici identiche a quelle di questa, e di segno contrario, e però entrambe negative, le quali nulla esprimendo relativamente al proposto problema, dimostrano, che con quel cambiamento

di segno non si abbia, che solo una pura forma algebrica di equazione, che nel linguaggio geometrico nulla dinota.

Risulta dal fin qui esposto, che la costruzione geometrica esibita nel §.14 dia ad un tratto le due radici dell' equazione cui si perverrebbe algebricamente trattando il problema, le quali offrono le due rette richieste; e non già che una se ne ottenga, per poi rilevar l' altra, come dal calcolo algebrico avviene. Al che se avesse avvertito il Montucla, non sarebbe caduto, nell' equivoco di credere aver gli antichi riconosciuto ne' problemi del 2°. grado, che da essi riducevansi a' due fondamentali recati nel §. suddetto, che sono i problemi risoluti nelle prop. 28, e 29. *El. VI.* diversamente esposti, la sola radice positiva (*Nota al lib. I. part. II. Hist. des Math.*). Nè tampoco il Cartesio, se avesse un poco più considerate le opere di quelli, avrebbe in loro detrimento profferita l' erronea sentenza, che fosse ad essi mancata, per tali problemi, una riduzione nel genere.

Ma di tutto quello, che abbiamo qui accennato, dovrà più estesamente trattarsi nella seconda dissertazione del vol. I. degli *Opuscoli matematici*; e si potrà anche da ora riscontrare la nota alle prop. 28. e 29 *El. VI.* in più edizioni del nostro Euclide.

E sarebbe stato facile a ciascun di loro l' avvertire l' identità di questi problemi, con le equazioni di 2° grado, che trattavano, anche senza la soluzione algebrica di quelli, ma semplicemente riguardando a queste equazioni. Imperocchè l' equazione

$$x^2 \pm dx = ab$$

dà evidentemente luogo alla proporzione

$$x : a :: b : x \pm d$$

ch' è il secondo caso del problema; e l' altra

$$x^2 - sx = -ab$$

ridotta ad $\quad sx - x^2 = ab$

espone l' altra proporzione del primo caso, cioè

$$x : a :: b : s - x$$

E si vede pure evidentemente, che ad alcuna proporzione non si pervenga dall' altro caso dell' equazione

$$x^2 + sx = -ab$$

A' §§. dal 29 al 32. — Le cose, che l' autore ha, per solo ordine di scienza qui recate, sono già note dagli Elementi di Trigonometria, e si potranno ancora in essa riscontrare.

Al §. 32. geometriche teorie, — come nella nostra Trigonometria ve-farsi eseguito — *da serie convergenti*, come si vedrà operato nel vol. II del *corso di Analisi algebrica*.

Al §.39. (*tolto dal* lato *dato AC*) — L' autore non volendo qui dare, che una semplice indicazione della risoluzione del triangolo, già trattata nella Trigonometria, lo ha considerato nel solo caso, che la perpendicolare da B [*fig. 9*] dividesse il lato opposto AC ; e però ha detto *AD tolta dal* lato *dato AC*. Ed è facile vedere quello che debba farsi cadendo la perpendicolare fuori del triangolo verso C, o verso A.

Si potrà sul proposito anco riscontrare il caso 3 prop. 8 lib. II. della nostra *Trigonometria*.

Al §. *40*. — Per tal caso si vegga anche la prop. 10. lib. II. *Trig*.

Alla prop.XII. (§. *43.*) — Si vegga la nota alla prop. II.

Alla prop. XVI. (§. *53*) — Si riscontri la nota alla prop.F. lib.V. del nostro Euclide.

Allo scol. (§.*61.*)—Nel primo de' due casi qui accennati dall' autore, avendosi nel triangolo ABC [*fig. 9.*] la ragione di BD : DA, e quella di DA : DC, si avrà per conseguenza ancor l' altra di BD : DC ; e però i due triangoli rettangoli ADB, BDC risulteranno dati di specie, e quindi ancor l' altro ABC.

Nel secondo caso poi, esposta una qualunque retta BC [*fig.3.n.2.*], e costituitovi sopra il segmento di cerchio BAC capiente l' angolo verticale dato del triangolo, si applichi in esso la AD perpendicolare alla BC, ed uguale alla quarta proporzionale in ordine alla data ragione della base all' altezza del triangolo, ed all' assunta BC ; congiunte la BA, AC risulterà il triangolo BAC dato di sola specie.

Alle precedenti cose aggiugneremo riportarsi da Euclide, nella pr.46. *Dati*, l' altro caso, che sia *dato un angolo di un triangolo, e la ragione della somma de' lati d'intorno ad un altro angolo al terzo lato* : ed il geometra inglese *Samuele* vescovo di Asafa, nella sua dotta esposizione del libro de' *Dati* di Euclide pubblicata in Oxford nel 1803, aggiugne per corollario il caso, che fosse data *la differenza di que' lati*. Ma quel caso, e questo riduconsi facilmente al secondo della proposizione precedente, usando lo stesso artifizio praticato nella prop.17.lib.II.*Trigon*.

Alla prop. XXIII. (§. *65.*) — La prima parte di questa proposizione è il lemma di cui si valse Pappo, per dimostrar la prop.8. lib.IV. delle sue *Coll. math.* ; e la seconda comprende le prop.102, e 106 del lib. VII, che sono i lemmi 7 ed 11 pel lib. I. *Tactionum*.

A' §§. *69*, *70*, *71*. — Le verità qui assunte come assiomi, per la loro chiarezza, trovansi dimostrate nella *Geometria di sito*. E sarà anche ben fatto rileggere la nota alla prop. 1.

Alla prop. XXIX. — (§. *77.*) Aggiungasi che : *la congiungente il punto dato col vertice dell' angolo è il luogo de' punti da cui abbassate le perpendicolari su i lati di esso, serbansi queste la stessa ragione, che quelle che tiransi a' medesimi lati dal punto dato* (*Geom. di sito* §.*75.*)

Al §. *88*. — Cartesio seguendo la distinzione de' problemi fatta dagli antichi, e la generale riduzione di essi, che lasciarono indicata nel *problema alle rette* (*Vedi* Pappo, *prefaz. al lib. VII*, *ed il nostro* Scorza *nella sua* Divinaz. dell' analisi geometrica degli antichi) distinse le linee in *generi*, formando il *primo genere* dalle sole linee di *second' ordine*, e seguentemente ciascun altro *genere* da ogni due *ordini* successivi di curve (*Geom.lib. II.*). Ma la divisione in *ordini*, a cominciar dalla linea retta, è stata dopo il Newton adottata da' geometri.

A' §§. *dal 90 al 95*. — Si riscontri la *Geometria di sito*.

Alle prop. da XXXIII a XXXV. (§§. *97 a 100.*) — Queste proposizioni sono espressamente qui recate dal Fergola, perchè fondamentali del suo metodo di *trasferimento* per la soluzione de' problemi *di sito*, di cui fu detto nel *prospetto* al §. 27 pag.XIV. E di esse vedrassene l' uso vantaggioso al suo luogo, nella nostra *Geometria di sito*.

Alla prop. XXXVI. (§. *102*) *e nota corrisp.* — Un tal porisma, semplicemente enunciato più particolarmente dal Fermat, e qui dimostrato dal Fergola, si vedrà esteso alle curve coniche, nella *prima dissertazione* del vol. I. degli *Opuscoli matematici*.

Alla prop.XXXVII. (§.*103.*) — In questa proposizione si enuncia a forma di porisma il problema da Pappo recato nella prop.117. lib.VII, e di tal porisma potrà vedersene un' altra elegante dimostrazione nella nostra *Geometria di sito*. Avvertiamo in oltre che la verità stessa regge sempre ancorchè i punti dati sieno dentro del cerchio, o l' uno dentro, l' altro fuori ; e che solamente convenga per la dimostrazione modificarne il primo passaggio, che dee condurre alla similitudine de' triangoli. Intanto avendo il nostro Trudi estesa alle sezioni coniche la proprietà del cerchio esposta in tal lemma (*Memoria su i poligoni iscritti e circoscritti alle curve coniche*, tra le *Produzioni relative al programma proposto nel 1839*), si vede che ancora quel porisma debba a tali curve convenire. Ed il suo distinto collega prof. Grimaldi vi aggiunse un' assai elegante dimostrazione geometrica, che potrà riscontrarsi in fine delle *Produzioni* suddette, e verrà di nuovo recata in trattar de' *porismi*, nella prima delle dissertazioni inserite nel vol. I. degli *Opuscoli matematici*. Ma è bene di qui accennare per qual via egli si fosse avveduto di estendersi quel lemma alle curve coniche; potendo il ripiego da lui usato servir di regola in casi analoghi.

La dimostrazione di Pappo poggia interamente sull' eguaglianza degli angoli posti in uno stesso segmento di cerchio; il che rende tal dimostrazione speciale pel cerchio. Or il nostro geometra essendo riuscito ad ottenerla per mezzo di altra affezione del cerchio, che poteva convenevolmente estendersi a tutte le curve di second' ordine, ben ne conchiuse, che ancora a queste si appartenesse quella tal proprietà.

Alla prop. XXXVIII. (§.105.) — Questa proposizione è una convenevole trasformazione in forma di porisma della prop. 156. lib. VII. delle *Collezioni* di Pappo, ch' è il lemma 30 a' *Porismi Euclidei*. Or Pappo nel dimostrarlo, nel modo che il propone, dovè prevalersi di altro lemma, che cita senza indicazione; ma ben vedesi dover essere la conversa della prop. 52. VI. *Coll.*, alla quale diede il Commandini nel suo comento una buona dimostrazione; sebbene poi si fosse di nuovo impegnato a dimostrare la prop. 156. senza quel lemma. Ma nè l uno nè l' altro de' suoi modi di dimostrare sono da preferirsi a quello semplicissimo che dal Fergola si è tenuto.

Al cor. della prop. prec. (§. 106.) — L' autore in fine di questo corollario ne accenna la prop. 21 del libro seguente, ove in forma di *luogo geometrico* vien riportata la stessa verità, della quale vedesi ancora un' altra esibizione in quella nota della nostra *Trigonometria*, ove e spongonsi i problemi del Regiomontano (*cor. al probl.*XII.).

Alla prop. XXXIX. (§.107.) — Il dotto geometra *de la Hire*, nelle sue elaboratissime *Sectiones Conicae*, riportò tal proposizione come un caso della divisione armonica appartenente al cerchio (*lib.I.pr.25*). Ed essa potrebbesi ancora convenevolmente estendere alle curve coniche.

Alla prop. XL. ed al cor. (§§. 110 e 111.) — Quest' altra proposizione è il lemma di Pappo a' *porismi* Euclidei, che fu riprodotto dal de la Hire nelle sue *Sectiones conicae*; e costui denominò *armonicali* le quattro rette tirate da un punto a' punti estremi e medii di una retta divisa armonicamente, appunto perchè ogni altra retta interposta tra esse vi rimaneva armonicamente divisa.

La proposizione inversa poi, enunciata nel corollario, ch' è facile a dimostrarsi indirettamente, si potrà vedere presso il *de la Hire* (*pr.18.lib.I. Section. conic.*), come ancora nelle *Sezioni Coniche* del nostro *Corso geometrico*, o in quelle *analitiche* del Fergola. E nelle note a queste se ne troverà ancora una dimostrazione del nostro prof. Grimaldi con l' analisi pura; il che servirà ad un tempo per convalidare un tal metodo, e per rilevare al paragone la semplicità, ed evidenza della dimostrazione geometrica.

Alla prop. XLI. ed a' suoi cor. (§§.112 a 114.) — Si riscontri la *Geometria di sito* ne' §§.*dal 281 al 283*, e la nota corrispondente a questi.

Alla prop. XLII, ed allo scol. (§§. 115, a 116.) — Vedi il §.173 della *Geometria di sito*, e la nota ad esso.

Al cap. VI. — In questo capitolo l' autore reca la riduzione del dato algebrico di una retta a geometrico, cioè la costruzione di esso; da che i problemi di primo grado risoluti col metodo Cartesiano risultano geometricamente costruibili, e quelli del 2°, 3°, e 4° grado riducibili sempre alla loro forma convenevole, per ottenere la corrispondente costruzione dell' equazione ad essi.

AL LIBRO II. DELLA PARTE I.

Alla prop. I. (§. *148.*) — Nel *principio* che in questa esponesi traluce già tutto l' artifizio dell' analisi di un problema, che verrà poi pienamente sviluppato nel lib. III. E gli altri *principj*, che espongonsi nelle seguenti prop. 2, 3, 4, 5, sono pure relativi all' argomento dell' analisi geometrica, di cui dovrà esser trattato nell' indicato libro.

Alla fine del §. *176.* — Fu questa l' opinione che della sua soluzione di tal problema n' espresse lo stesso Newton, in fine del cor. 2. *lem.* 19. *Princ. math.*, dicendovi: *Atque ita problematis Veterum de quatuor lineis ab* Euclide *incepti, et ab* Apollonio *continuati non calculus* (alludendo a ciò che aveva fatto il Cartesio), *sed compositio geometrica, qualem Veteres quaerebant, in hoc corollario exhibetur*. Ed il Fergola adottandola nella prima edizione delle *Sezioni Coniche* (an. 1791), recovvela, e vi supplì la corrispondente analisi in fine del lib. IV. Ma posteriormente, avvertita la particolarità della medesima, la suppresse, serbandosi a dare di quel problema una general soluzione da lui già elaborata, alla quale affaticandosi ancor lo Scorza, sulle orme segnategli dal di lui maestro, pubblicolla nella sua *Divinazione dell' Analisi geometrica degli antichi*.

Alla prop. XII. (§. *182.*) — L' altro *principio*, che riguardando a' quesiti de' problemi geometrici di sito si propone in questa proposizione, vedesi connesso con quello che n' è poi recato nella prop. 13, lib. III. relativamente alla *supposizione del fatto* in tali problemi.

Al §. *193.* — Nell' avvertimento in esso recato ne traluce la natura diversa de' problemi, e la diversità de' mezzi, che vi si dovranno adoperare in costruirli, di chè sarà specialmente trattato nel seguente libro, e nella Parte II. Ed è pur connesso con tale avvertimento, come vi si accenna, il *principio* recato nella seguente prop. 16. (§. 200.)

Alla prop. XXI. (§. *219.*) — Vedi la nota al cor. della prop. 38. I.

Alle prop. XXV e XXVI. (§§. *225, e 227*) — Questi due teoremi locali, che sono le trasformazioni de' due problemi riportati nelle pr. 2. e 4. lib. I, e che, come si è veduto nella nota ad esse, corrispondono l' uno alla costruzione geometrica delle equazioni di 1° grado, l'altro a quelle del 2°, ne mostrano rientrar tali costruzioni nel problema generale *alle rette*.

Alla prop. XXVII. (§. *229.*) Il punto P [*fig. 22. II.*], come si è detto, è il polo della concoide, la CB, che abbiamo chiamata, come i moderni usano, *assintoto*, tale essendone la natura, dagli antichi era detta *regolo*, perchè esso dirige il movimento della riga mobile, e fissa *l' intervallo* costante CA, BG, ec. Ed è poi chiaro, che dato il *polo*, il *regolo*, e *l' intervallo*, possa la descrizione di tal curva aversi per un postulato.

Intanto dalla stessa definizione della concoide, o pure dalla sua descrizione rilevasi, che l'intervallo AC possa prendersi sulla PCA anche al di sotto del *regolo* CB, come l'è CA′; ed in tal caso si verrà, con lo stesso movimento di riga, a descrivere un'altra concoide rivolta in senso contrario alla prima. E queste due concoidi si dicono da' moderni l'una *superiore* l'altra *inferiore*, o come più piacque all'Eulero *esteriore* l'una, *interiore* l'altra. Ma siccome il punto A′ può cadere o tra P, e C, o in P a dirittura, o ancora al di sotto di P, come l'è A″, così vedesi, che questa concoide *inferiore* risulta di triplice forma, mentre di una sola è sempre la *superiore*; essendo nel primo di que' tre casi affatto simile alla superiore, ma rivolta, come si è detto, in senso contrario; nel secondo di essi avendo una forma cuspidata nel polo P, e nel terzo presentando un nodo nel punto A″. Ed i geometri moderni, volendo considerarla sono obbligati a distinguere questi tre casi: non così gli antichi, i quali considerando che con lo stesso movimentò di riga descrivevansi ad un tratto la concoide superiore, e le tre forme d' inferiori, le distinsero però co' nomi di *prima*, *seconda*, *terza*, *quarta*. Il che abbiamo voluto notare, per chiarire il luogo di Pappo (*prop. 22. IV.*), ove dopo aver detto essere stata una tal curva *escogitata* da Nicomede per la duplicazione del cubo, ed aver assegnata di essa la descrizione, conchiude: *linea vero . . . vocetur conchoides prima : nam et secunda, et tertia, et quarta exponitur; quae ad alia theoremata utiles sunt.* E notisi che Pappo, conchiudendo in tal modo, dovè aver presenti alcune delle ricerche nelle quali le altre tre specie di concoide erano utilmente adoperate: di che non rimangono vestigia. E ciò basti per ora su tal curva, che dovremo altra volta considerare, per vederne l' uso che ne fecero gli antichi, e quello che le hanno voluto attribuire i moderni: il che non sarà certamente superfluo anche per distruggere, come a noi pare, un qualche equivoco, nel quale questi sono caduti.

Alla prop. XXVIII. ed al cor. 4 di essa (§§. *230, e 234.*) — La descrizione meccanica della *cissoide* data dal Newton, e l' altra per punti secondo gli antichi indicano che tal curva debba aver due rami cuspidalmente riuniti in B [*fig. 24.*], formando come una punta di edera, da che ne venne ad essa il nome di *cissoide*, dalla voce greca κισσος *edera*; del pari che si era detta *concoide* la precedente, perchè a *for*-

ma di conca. Gli antichi si mostrarono assai più attenti nell'attribuire i nomi agli oggetti geometrici che consideravano, cercando sempre di dare nella voce stessa l'indicazione della forma, o qualità della cosa, o almeno la corrispondenza del nuovo soggetto con altro già conosciuto Così dissero *spirale*, *quadratrice*, e pure *conoide*, *sferoide*, ec. Basterebbe quindi la sola denominazione della cissoide a mostrare che gli antichi ne dovettero conoscere i due rami, e non un solo, come con poca avvertenza si lasciò dire il Montucla (*Hist. des Math. vol. I. p. 34*); quando anche non vi fossero altri argomenti a dimostrar falsa la sua proposizione, de' quali uno evidentissimo ne offre Proclo dicendo: *Cum autem cissoides, hoc est hederae similes lineae, ad unum coeuntes signum, sicut hederae folia (illinc nam denominationem habuere) angulum fecerint* .... Ma anche più male avventurata è la ragione ch' egli ne adduce soggiugnendo subito dopo: *perchè non fu loro nota la natura intima delle curve*. Ed egli che era molto internato nella lettura delle opere degli antichi dovè non ricordare il luogo di Pappo che va innanzi alla prop. 21. IV. *Coll.*, ove parla d' interi trattati per linee a doppia curvatura, ch' è ben più difficile considerare, composti da Demetrio Alessandrino e da Filone Tianeo, delle quali curve egli dice che: *multa et admirabilia simptomata continent*; il che mostra che ne dovettero scrutare le proprietà, e però penetrarne la natura. Soggiugnendo in oltre, che per talune di queste da' geometri prossimi in tempo a lui, che chiama *iuniores*: *dignae existimatae sunt, de quibus longus sermo haberetur*. E continua poi a dire: *Una autem aliqua ex ipsis est, quae et admirabilis a Menelao appellatur*; il qual nome non poteva derivare che dalle speciose proprietà sue. Passa quindi ad enumerare le *eliche*, le *quadratrici*, le *concoidi* e le *cissoidi*. Che forse abbiamo da' moderni trattato più compito di quello di Archimede per la sola spirale di Conone? E se non ci sono giunti i trattati da Dinostrato, da Nicomede, e da Diocle composti per ciascuna delle altre tre curve, non è della retta critica l' asserire che costoro non ne avessero penetrata la natura, e discusse le proprietà,

Alla prop. XXIX. (§. *236.*)— Questa facilissima maniera di comprendere in una sola proprietà generale tutte le linee nascenti dalla sezione di una superficie conica con un piano, e dalla quale facilmente ottiensi l'equazione caratteristica per ciascheduna di esse, è nuova ed ingegnosa.

Alla giunta al cap. IV. (§§. *243 a 253.*)— Per la stessa ragione di trovarsi tali curve trascendenti, cioè la *spirale* e la *quadratrice*, adoperate dagli antichi nella costruzione di taluni problemi trascendenti, e lo stesso praticato da' moderni con la *cicloide Galileana*, aveva il Fergola trattato di esse in questo luogo: e noi abbiamo alla meglio supplito alla dispersione del suo MSS., come nella prefazione si è accennato; onde trovarci preparati questi mezzi nel trattar di quelli nella Parte II. del presente trattato. Intanto per rischiarare ciò che sta detto nel §. 257. quì soggiugneremo, che se la velocità con la quale il punto D [*f. 29. II.*] aggirasi d' intorno all' altro C, nel rivolgersi che fa l' angolo retto DCR intorno a questo, non pareggi quella con cui scorre un tal punto lungo la CG, ma le serbi la ragione di m ad n; dovrà risultarne anche l' arco AE alla corrispondente retta NE nella stessa ragione; e quindi sarà $NE = \frac{n}{m} AE$; e l' equazione alla trocoide descritta in questi casi sarà

$$y = \sqrt{(2rx - x^2)} + \frac{n}{m} \mathit{arc.}\mathrm{sen.}\sqrt{(2rx - x^2)}$$

Ed essa corrisponderà ad una *cicloide accorciata o allungata*, come soglion dirsi, secondo che m sia maggiore o minore di n.

Al cap. V. del lib. II. — Secondo accennammo nella breve prefazione al presente trattato dovevamo quì esporre taluni luoghi geometrici alla retta ed al cerchio algebricamente espressi; di che già prima si era fatto convenevole uso da' moderni analisti, e principalmente dall' Eulero, dal Cramer, e poscia resi di un più frequente maneggio nelle ricerche geometriche dal *Lagrange*, dal *Monge* e dal *Lacroix*, hanno finito per costituire un metodo elementare algebrico-geometrico, per la risoluzione de' problemi. Or in ciò fare, con quella brevità che convenivasi al nostro trattato, ci siamo pel cerchio estesi un poco più, esponendo alcune principali proprietà di esso già elementarmente note, a solo oggetto di stabilir sempre la corrispondenza tra' due metodi algebrico, e geometrico, e dare a quello maggior consistenza, afforzandolo con l' evidenza e la persuasione che portan seco i ragionamenti di pura Geometria

Nello stabilire i principj di questo metodo abbiamo ancora severamente avvertito, a non trar conseguenze da que' risultamenti algebrici, che a ricerche geometriche dovevano corrispondere, quando tal corrispondenza non fosse manifesta; nel che osserviamo essersi peccato da taluno de' moderni istitutisti di esso. Abbiamo poi serbato nelle ricerche esposte uno stretto nesso geometrico, e messo ogni studio nell' eleganza di esse, come in ogni altro trattato puramente geometrico si sarebbe fatto. Ed in tutta l'esposizione delle proprietà locali di una retta, e di quelle che da esse derivano, non abbiamo improntate dalla Geometria elementare, che le sole nozioni delle parallele, della natura del triangolo per gli angoli, e di quella del triangolo rettangolo pe' quadrati de' lati, e de' triangoli simili; e dalla Trigonometria le pure, e sempliei definizioni delle linee trigonometriche, e de' loro segni, da che n'è risultato un mezzo da escludere qualunque idea *paradossale* di sito nel fissare i segni per le diverse coordinate alla retta, ed al cerchio; ed appena qualche principio fondamentale, ed elementarissimo di tale scienza. Come ancora, nel trattatino delle proprietà locali del cerchio, e di altre da esse dedotte, ci è stata bastante la sola definizione di questa curva.

A' §§. da 273 a 275.—Volendo verificare l'equazione a ciascuna delle rette indicate in tali §§., per tutt' i punti di essa, sì al di sopra, che al di sotto dell' asse delle x, si dovrà tener conto non solamente della grandezza delle coordinate, ma ancora del segno che loro corrisponde per le precedenti considerazioni.

Al §§. 279. — Troviamo in qualche istituzione moderna di *Geometria analitica* rilevata l' equazione di cui qui trattasi, col semplicemente sostituir nell' equazione $x = kx + h$ le coordinate α, β invece delle x, y, e sottrarre poi la nuova equazione dalla precedente; il qual modo di dimostrare non è affatto concludente.

Al §. 282. — Trasportando l' α nel secondo membro, e praticandovi un' ovvia riduzione, l' equazione ottenuta riducesi nell' altra forma in cui conviene talvolta adoperarla $y = \frac{\beta - \beta'}{\alpha - \alpha'} x + \frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{\alpha - \alpha'}$

Al §. 284.—L'equazione di condizione qui dedotta, si vedrà in appresso di quanta utilità riesca nelle ricerche fatte per mezzo di questo metodo.

Al §. 287. Questi altri due valori della BB' [*fig. 32. II.*], che riescono utilissimi in molte ricerche, non trovansi rilevati nelle comuni istituzioni di *Geometria analitica.*

Al §. 289. — L' equazione di condizione per tre rette, che riunisconsi in un punto era pur necessario farla rilevare, riescendo essa utilissima in molti casi; e dovendocene servire come fondamento della costruzione di un' equazione complessa ad una retta (*Vedi cap. seg.*).

Al §. 294. — Si osservi con quanta facilità, e chiarezza, usando un principio semplicissimo, ed elementare di Geometria, si ottenga l' equazione della perpendicolare ad una retta di sito.

Al §. 296. — L' espressione ottenuta per la lunghezza della perpendicolare, derivando dall' estrazione di radice quadrata dall' altra

$$\frac{(\beta - k\alpha - h)^2}{1 + k^2}$$

vi si avrebbe dovuto prefiggere il doppio segno $\pm$; ciò non ostante si è ritenuta col solo segno positivo, per indicare, che in tal modo conviene sempre adoperarla, giacchè alcun significato non può avere l' altro valor negativo di essa, dalla quale ambiguità rifugge interamente la Geometria, trattandosi in tal problema di dati *di sito* che non hanno altri determinanti, ch' essi medesimi.

Adunque quel doppio segno $\pm$ non deve avere altro uso che a render positiva quell' espressione; dovendo adoperarsi il segno $+$ se da' dati del problema risulti $k\alpha + h >$ di β, il segno $-$ quante volte ne risulti minore. Laonde converrà premettere all' uso di tal formola una ricerca per quest' oggetto, come si vede praticato nel problema proposto nella prop. 7. cap. VIII. (§. 380.). E questo espediente abbiamo giudicato preferibile, come più sicuro, ad una regola generale sulla posizione del punto rispetto alla retta, ed all' asse delle ascisse, che troviamo recata in alcune opere di Geometria analitica di distinti geometri moderni, e che non sembraci esatta, o al meno l' è assai oscura, ed atta ad indurre in equivoco. Intanto non è fuori proposito, che a spianare la via a questa ricerca c' intrattenessimo in un qualche esame di tal formola, dal quale resti ancor meglio dichiarato l' andamento del problema cui corrisponde.

Or se riguardisi al denominatore di essa formola, si vede chiaramente dinotare la segante dell' angolo in cui la retta alla quale tirasi la perpendicolare incontra l' asse delle x; e però, che l' espressione della perpendicolare, che dal punto dato si tira ad una retta rappresentata non per se medesima, ma per la sua equazione, ne tragga seco l' altra di quella all' altra retta, che partendo dal punto stesso d' incontro con l' asse delle x, gli s' inclina nell' angolo supplementale della precedente: sicchè tali perpendicolari sieno due, come pur due sono le rette corrispondenti sulle quali debbono abbassarsi.

Di fatti, per veder ciò geometricamente, suppongasi, per chiarezza maggiore, passare la retta AN [*fig. 1. N*] pel principio A delle ascisse, e sia AN' la retta sua supplementale, cioè tale che l' angolo N'AX sia supplemento dell' altro NAX; e dal punto P dato cada sull' una AN la perpendicolare PR, sull' altra AN' la perpendicolare PR'. Da P si tiri alla XX' la perpendicolare PB, che incontri le AN, AN' in B', B''; sarà l' angolo B'AB uguale all' altro B''AB, e la BB' = BB''. Che però indicando con α, β le coordinate AB, BP del punto P, si avrà BB' = BB'' $= k\alpha$, e quindi PB' $= \beta - k\alpha$, PB'' $= \beta + k\alpha$. Laonde avendosi da' triangoli simili ABB', B'PR, PB''R'

$$AB' : AB :: \begin{cases} PB' : PR \\ PB'' : PR' \end{cases}$$

si avrà ne' loro simboli rispettivi

$$\sqrt{(1+k^2)} : 1 :: \begin{cases} \beta - k\alpha : \mathrm{PR} = \dfrac{\beta - k\alpha}{\sqrt{(1+k^2)}} \\[2ex] \beta + k\alpha : \mathrm{PR'} = \dfrac{\beta + k\alpha}{\sqrt{(1+k^2)}} \end{cases}$$

Le quali due espressioni corrispondono, e dichiarano il ragionamento che di sopra si è fatto.

A' §§. 299 a 301. — Nel §. 299. abbiamo esibita l'equazione alla retta inclinata all'asse delle x in un angolo φ, quando l'angolo degli assi fosse θ, mostrando che in tal caso il coefficiente k della x venisse espresso da $\dfrac{\text{sen.}\,\varphi}{\text{sen.}\,(\theta-\varphi)}$; e nel seguente §. 300 abbiamo detto che sarebbe stata cosa facile modificare questa equazione alla retta per assi obbliqui pe' casi stessi considerati per gli assi ortogonali dal §. 279 al 296, recandovi solamente per un esempio (§. 301) l'espressione analoga al §. 285. Ed ora per togliere anche il fastidio di eseguir tali modificazioni occorrendo le recheremo quì appresso. E perchè non si equivochi tra le due consimili equazioni alla retta ne' due sopraddetti casi, quella più generale sulla quale ora opereremo la dinoteremo per

$$y = \mathrm{K}x + \mathrm{H}$$

che però sarà (§.299.)

$$\mathrm{K} = \frac{\text{sen.}\,\varphi}{\text{sen.}\,(\theta-\varphi)} = \frac{\text{sen.}\,\varphi}{\text{sen.}\,\theta\,\cos.\,\varphi - \cos\varphi\,\text{sen.}\,\theta}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{sen.}\,\varphi}{\cos.\,\varphi}}{\text{sen.}\,\theta - \dfrac{\text{sen.}\,\varphi}{\cos.\,\varphi}\cos.\,\theta} = \frac{\text{tang.}\,\varphi}{\text{sen.}\,\theta - \text{tang.}\,\varphi\,\cos.\,\theta}$$

e però

$$\mathrm{K}\,\text{sen.}\,\theta - \mathrm{K}\,\text{tang.}\,\varphi\,\cos.\,\theta = \text{tang.}\,\varphi$$

che risoluta riguardo a tang. φ darà

$$\text{tang.}\,\varphi = \frac{\mathrm{K}\,\text{sen.}\,\theta}{1+\mathrm{K}\cos.\,\theta}$$

D'onde risulta, che essendo lo stesso il valore della K nelle equazioni a due rette riferite a' medesimi assi, debbano queste esser fra loro parallele, come si verificava per gli assi ortogonali (§.277.).

Ciò premesso:

I° Sarà facile rilevare, con lo stesso ragionamento de' §§. 279 e 282, che l'equazione a tal retta quando passi pel punto delle coordinate α, β sia, analogamente a quella del §. 279, espressa da

$$y - \beta = \mathrm{K}(x - \alpha)$$

E l'altra di quella, che passi ancora per un altro punto delle coordinate α', β' sia

$$y - \beta = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha).$$

II° E per la parte di essa interposta tra tali punti, se n'è data l'espressione nel §. 301.

III° Or sieno analogamente al §. 288.

$$y = \mathrm{K}x + \mathrm{H}$$
$$y = \mathrm{K'}x + \mathrm{H'}$$

le equazioni a due rette riferite a' medesimi assi obbliqui, che non essendo parallele, perchè sono disuguali i coefficienti della x, debbono però incontrarsi; si avranno, con lo stesso ragionamento del suddetto §., le coordinate del punto d'incontro espresse da

$$x = \frac{\mathrm{H'}-\mathrm{H}}{\mathrm{K}-\mathrm{K'}}, \quad y = \frac{\mathrm{KH'}-\mathrm{K'H}}{\mathrm{K}-\mathrm{K'}}$$

E si potrebbe similmente al §. 279 ottenere l'equazione di condizione per tre rette che s'incontrassero in un medesimo punto.

IV° E dal §.290 si rileverà facilmente, che per ottenere la tangente dell'angolo in cui s'inclinano tali rette basterà sostituire nell'espressione ivi rinvenuta

$$t = \frac{k'-k}{1+kk'}$$

invece di k, k' le tangenti degli angoli in cui inclinansi tali rette all'asse delle x, che sono espresse rispettivamente da

$$\frac{\mathrm{K}\,\text{sen.}\,\theta}{1+\mathrm{K}\cos.\,\theta}, \quad \frac{\mathrm{K'}\,\text{sen.}\,\theta}{1+\mathrm{K'}\cos.\,\theta}$$

da che si troverà per la tangente dell'angolo formato da quelle due rette

$$\mathrm{T} = \frac{(\mathrm{K}-\mathrm{K'})\,\text{sen.}\,\theta}{1+\mathrm{KK'}+(\mathrm{K}+\mathrm{K'})\cos.\,\theta}$$

V° Che se un tal angolo fosse retto, la sua tangente essendo infinita, il denominatore della precedente formola sarebbe zero. E però la condizione che esprimerebbe esser l'una di esse perpendicolare all'altra sarebbe

$$1+\mathrm{KK'}+(\mathrm{K}+\mathrm{K'})\cos.\,\theta = o$$

la quale nel caso degli assi rettangolari come nel §.293, per essere allora $\cos.\,\theta = o$, ritorna ad

$$1+kk' = o$$

VI° Avendosi dall' equazione del numero precedente

$$K' = -\frac{1 + K\cos.\theta}{K + \cos.\theta}\,.$$

l' equazione della perpendicolare alla retta

$$y = Kx + H$$

verrà in generale espressa da

$$y = -\frac{1 + K\cos.\theta}{K + \cos.\theta}x + H'$$

VII° E laddove questa perpendicolare passar dovesse pel punto (α, β), la sua equazione sarebbe

$$y - \beta = -\frac{1 + K\cos.\theta}{K + \cos.\theta}(x - \alpha)$$

VIII°. Per ottenere poi la lunghezza della perpendicolare BY′[*f.2.N*], che dal punto B delle coordinate BC (β), CA (α) riferite agli assi obbliqui AY, AX tirasi sulla retta LB, la cui equazione riferendola a' medesimi assi sia

$$y = Kx + H$$

che però la sua ordinata GC corrispondente all' ascissa AC (α) risulta uguale a $K\alpha + H$, è facile vedere, che la BG essendo uguale a $\pm$ (BC — CG), secondochè il punto B si trovi fuori, o dentro l' angolo PLX, venga espressa da

$$\pm\Big(\beta - (K\alpha + H)\Big)$$

Ed essendo nel triangolo BGY′

$$BG : BY' :: 1 : \text{sen}, BGY'$$

cioè

$$\pm\Big(\beta - (K\alpha + H)\Big) : BY' :: 1 : \text{sen.}(\theta - \varphi)$$

si avrà

$$BY' = \pm\Big(\beta - (K\alpha + H)\Big)\,\text{sen.}(\theta - \varphi)$$

Ma poichè $K = \dfrac{\text{sen.}\,\varphi}{\text{sen.}\,(\theta - \varphi)}$, si ha $\text{sen.}(\theta - \varphi) = \dfrac{\text{sen.}\,\varphi}{K}$.

Quindi sostituendo avrassi

$$BY' = \pm\frac{\Big(\beta - (K\alpha + H)\Big)\,\text{sen.}\varphi}{K}$$

da valore il doppio segno a render sempre positiva una tale espressione.

Al Cap. VI. — La ricerca qui chiaramente esposta manca in tutte le istituzioni di *Geometria analitica*; ed è stata però cagione di smarrimento anche per esperti geometri, per non aver saputo deciferare un artifizio così semplice in trovarla adoperata da' moderni analisti alla costruzione di alcun problema, tal che, per un esempio, nella soluzione data dal Gergonne di quello d' *iscrivere in una curva conica un triangolo co' lati tendenti a punti dati* (Vedi il Vol. VII. *Annales des Mathématiques* an.1816, e le *Considerazioni generali su tre difficili problemi* proposti nel *programma* di essi pubblicato nel 1839.)

Gli esempi che abbiamo addotti a rischiararla sono sufficienti allo scopo; ma chi volesse vederne ancor altri più complessi, potrà riscontrare l' opuscolo del sig. Trudi su i *poligoni iscritti e circoscritti alle curve coniche con date condizioni*, pubblicato in seguito del programma suddetto.

Al Cap. VII. a' §. da 313 a 323. — L'ordine piuttosto geometrico, che abbiamo tenuto, onde pervenire dalla semplice definizione già nota del cerchio alla sua equazione generale, non solamente ha resa evidente l' esibizione di questa; ma nel cammino per essa ci ha già somministrate due proprietà essenziali del cerchio. Finalmente non abbiamo tralasciato mostrare nel §. 320 il modo di poterla ottenere ad un tratto, senza pervenirvi per gradi, da che non si ha alcun risparmio, dovendo rifare lo stesso cammino retrogrado, a fin di assegnare le equazioni particolari al cerchio delle quali continuamente occorre usare nelle ricerche algebrico-geometriche, come vedesi eseguito dal §. 323 al 325.

Non possiamo approvar poi ciò che suol farsi, di presentare innanzi a' giovani geometri l' equazione generale di second' ordine a due indeterminate, come dinotante già una linea curva, per indi ricavare dalle modificazioni ch' essa può ricevere le specie di quella. E se coloro medesimi, che così fanno, credettero necessario mostrare, che l' equazione di prim' ordine derivi da una proprietà della linea retta; quanto più correva ad essi l' obbligo di farlo per questo primo ingradamento alle linee curve.

Posto ciò abbiamo con facilità, e brevità grandissima recate tutte le affezioni del cerchio elementarmente dimostrate da Euclide nel lib. III; la qual cosa conveniva fare, sì perchè la cognizione di tutte quelle verità era necessaria, e sì ancora onde apparisse sempre la corrispondenza tra l' un metodo e l' altro, e si giudicasse da' risultamenti, e però dal fatto del modo di adequatamente adoperarli. Imperocchè sono i metodi gli strumenti che il geometra adopra per riuscire con tutta la perfezione che richiedesi in una qualche ricerca; e siccome ad industre fabbro sconverrebbe il voler tutto ottenere col solo martello, o con la sola lima, o con qualunque altro solo istrumento di sua arte; ma tal volta gli conviene adoperar l'uno, talvolta l'altro, e spesso l'uno e l'altro accoppiare alla perfezione del lavoro; così pure deve usar de' metodi il sapiente geometra. Questo esclusivo potere e preminenza, che da alcuno vuole darsi ad un metodo più che all'altro, è una puerilità sol degna di chi non conoscendo che appena quel solo, non è nel caso di giudicare del valore degli altri.

Nel dedurre con tal metodo le proprietà elementari del cerchio, abbiamo avuto ancora un altro scopo, cioe quello di persuadere col fatto, essere una sciocchezza imperdonabile di taluni a' dì d' oggi, che gli Elementi geometrici si potessero in simil guisa comporre, per istituirvi la gioventù con metodo puro analitico. Certamente, che in nessun libro di moderna Geometria analitica si vede l' argomento del cerchio sì prolungato, e trattato con tanta chiarezza ed evidenza, quanta noi ve n' abbiamo posta. Ma pure chi non vede la mostruosità di premettere alle verità elementari di Geometria pel cerchio i principj di Trigonometria, che da quella debbono dipendere? e chi potrà mai concedere, che si assuma in Geometria, che una quantità divisa pel *zero* pareggi l' infinito. E se quest' idea paradossale dell' infinito tanto tormento ha dato a' geometri, per non poterla eliminare dalla natura delle parallele, vorremmo obbligarci a farne un uso più frequente, e comune in tutt' il resto della Geometria elementare, facendo perdere a questa il carattere di chiarezza, e di rigore che l' è proprio, per formarne la base della istituzione matematica, e che tanto si ammira da' sapienti nelle opere di Euclide, e di tutti gli antichi geometri. E si vorrà eziandio trasportar nella prima istituzione geometrica tutte quelle nozioni, che l' Algebra ci somministra, ed alle quali il nostro spirito si acqueta appunto perchè da nozioni geometriche precedentemente bene stabilite ne viene convinto, e rischiarato. La Geometria si versa nel campo di cose reali, nè mai ha riconosciuto, nè può giustamente riconoscere, ed ammettere considerazioni sugl' *immaginarj*, che non sono più grandezze, e però interamente aliene dal suo oggetto. Essa ne' problemi non ravvisa che possibilità, ed impossibilità; e questa o gli viene manifestata da un' attenta considerazione su i dati, e le condizioni del problema precedentemente alla soluzione di esso, il che costituisca quella *determinazione*, che precede l' *analisi geometrica* del problema, o pure dal risultamento di questa, ch' è un' altra specie di *determinazione*; o finalmente dalle intersezioni delle linee che il costruiscono.

Vorremmo dunque privarla di un sì gran pregio insito ad essa, e del quale abbiamo poi bisogno a persuaderci di que' risultamenti immaginarj de' problemi, che con l' uso dell' Algebra ottengonsi? Ma in oltre, come si farà mai a persuadere le menti de' giovani principianti, che pure operazioni aritmetiche dieno luogo a conseguenze, e verità geometriche; mentre in essi tal persuasione può solamente ottenersi col vedere, quando sieno stati ben fondati nella Geometria, la corrispondenza di que' risultamenti alle verità e costruzioni in questa apprese.

E ciò basti per l' uso elementare, che da taluni idioti in Geometria si pretende poter fare del metodo algebrico puro: ritorneremo poco appresso a discettare sulla forza, ed energia di un tal metodo, come mezzo di ricerca nelle cose geometriche, a fin di definire quando, ed in qual modo debba utilmente adoperarsi.

A' §§. 327 a 332. — La maniera che abbiamo tenuta ne' §§. 327, e 332 per assegnare la tangente al cerchio, per un punto dato sia nella circonferenza, sia al di fuori del cerchio, è semplicissima e rigorosa. Non così il modo adoperatovi dal dotto matematico francese Puissant, il quale cadde su tal proposito in un equivoco (*Propos. de Géométrie §. 17. ediz. del 1801*), dal quale, poichè *egregiorum hominum etiam errata docent*, come ben dicea il Leibnitz, a suo luogo trarremo argomento di utili considerazioni.

In oltre la riduzione, che abbiamo data dell' equazione alla tangente il cerchio nel §.328, ci ha condotti nel seguente §. 329 ad una facile costruzione del problema, e ne' §§.330, e 331 a due proprietà di tal tangente, per mezzo delle quali la costruzione del problema di tirar la tangente al cerchio per un punto dato nella circonferenza o fuori di essa riesce elegantissima ed elementare.

A' §§. da 336 a 340. — L' importante ed elementare proprietà del cerchio, risultata dal §.336, e che costituisce un degli ovvj luoghi geometrici ad esso, necessario all' analisi ed alla composizione di molti problemi, e dalla quale ne vengono chiaramente e con brevità dedotte altre di pari importanza ne' §§. dal 337 al 340, non vedesi recata, per quanto ne sappia, in alcuno de' trattatini di *Geometria analitica*.

E volendo per via più diretta pervenire ad ottenerla, propongasi a: *Determinare il luogo de' vertici de' triangoli posti su di una stessa base, ed aventi lo stesso angolo verticale*; val quanto dire, *che abbiano la medesima somma degli angoli alla base.*

Pongasi la base di essi triangoli $= a$, e s' indichino con k la tangente della somma degli angoli adjacenti ad essa, e con t, t' le rispettive di ciascun di questi ; sarà

$$k = \frac{t + t'}{1 - t t'}, \text{ e però } t' = \frac{k - t}{1 + tk}$$

Or dinotino x , y le coordinate ortogonali del vertice di un di que' triangoli rapportato alla base , e ad un estremo di questa ; le equazioni corrispondenti a' lati del triangolo saranno

$$y = t x$$

$$y = - \frac{k - t}{1 + t k} (x - a)$$

e da esse eliminando la t risulterà

$$y^2 + x^2 + \frac{a}{k} y - ax = o$$

che vedesi appartenere al cerchio , e costruirsi nel seguente modo :

All' un degli estremi A della retta data AB [*fig.58.*] si costituisca l' angolo BAZ la cui tangente sia $\frac{1}{k}$, cioè che sia compimento a due retti della proposta somma costante degli angoli alla base de' triangoli , e dal punto medio B della AB le si tiri la perpendicolare BO fino all' incontro O con la perpendicolare tirata dal punto A alla AZ ; il cerchio descritto col centro O e col raggio AO soddisferà all' equazione proposta , e quindi al problema . Ed è manifesto che il centro di esso cadrà al di sopra o al di sotto della AB , secondo che la K sia positiva o negativa , cioè l' angolo cui essa corrisponde sia acuto o ottuso.

E questo procedimento di analisi analogo a quello tenuto per incidenza dal Fergola nella noterella a piè di pagina del §.167 delle *Sezioni coniche analitiche* potrebbe del pari adoperarsi per la data differenza degli angoli alla base , nel qual caso la locale è un' iperbole , come dagli Elementi conici è pur noto . Intanto il commendator di Niewport , nell' appendice al suo trattato *delle equazioni a differenze parziali* , impiega più pagine in 4° per risolvere un tal problema col metodo a coordinate ; e par veramente ch' egli abbia messo ogni studio in intralciar la via di una ricerca sì semplice ed elementare .

Il Newton proponendosi quel primo problema nella prop. 41 della sua *Arith. Univ.* pervenne in risolverlo ad un' equazione biquadratica , dalla quale ne ricavò , scindendola ne' suoi due fattori di secondo grado , l' una al cerchio pel caso proposto , e l' altra all' iperbole per quello , come si è detto , della differenza data degli angoli alla base .

Al §. *341.* — La ricerca del §. 341 potrebbesi ancora ottener facilmente nel seguente modo .

Preso per asse delle ascisse , come sempre si può , la retta che passa pel centro O e pel punto dato P [*fig.3.N.*] , l' equazione a tal retta sarà

$$y = a (x - \alpha)$$

e quella della perpendicolare OD ad essa pel principio O delle ascisse sarà

$$y = - \frac{1}{a} x$$

e però la perpendicolare $\mathrm{OD} = \frac{a\alpha}{\sqrt{(1 + a^2)}}$

Ma è $\mathrm{CD}^2 = \mathrm{CO}^2 - \mathrm{OD}^2 = r^2 - \frac{a^2\alpha^2}{1 + a^2}$

e $\mathrm{PD}^2 = \mathrm{PO}^2 - \mathrm{OD}^2 = \alpha^2 - \frac{a^2\alpha^2}{1 + a^2}$

Quindi $\pm(\mathrm{CD}^2 - \mathrm{PD}^2) = \pm (r^2 - \alpha^2)$

cioè di costante grandezza, e precisamente quanto BPA.

A' §§ *da 346 a 356.* — La soluzione del problema recato nel §. 346 ci ha condotti nel seguente ad una importantissima proprietà locale del cerchio , dalla quale molte ricerche sul medesimo risultano immantinente dichiarate . E noi abbiamo però voluto dedurne l' altro teorema di non minor rilievo esposto nel §. 350 , e poi tutti quegli altri , che veggonsi nel §. 355. Di che mancano le ordinarie istituzioni di Geometria analitica .

Al §. *346* . — Volendo stabilire l' equazione

$$uy + tx = r^2$$

senza ricorrere all' induzione ivi adoperata, basterà avvertire, che dovendo la retta da essa rappresentata passare pe' punti (x', y') , (x'', y'') debba venir espressa da un' equazione della seguente forma (§§.*282* , *e 283.*)

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''} (x - x') \qquad (1)$$

Ma $\frac{y' - y''}{x' - x''} = - \frac{t}{u}$, come si ha sottraendo l' equazione

$$uy'' + tx'' = r^2$$

dall' altra $\quad uy' + tx' = r^2$

Adunque eseguendo tal sostituzione nell' equazione (1) , essa diverrà

$$y - y' = - \frac{t}{u} (x - x')$$

cioè $$uy + tx = uy' + tx'$$
E però essendo $$uy' + tx' = r^2$$
sarà ancora $$uy + tx = r^2$$

L' argomento esposto in questo problema, e ne' teoremi che il seguono trovasi ancora trattato nelle *Sezioni coniche analitiche* del Fergola *(Vegg. la nota a' §§. 143, 144, 295, 296, 376, 377)*, ed in quelle geometriche *(Si riscontri la nota alle prop.16. I, 2. II, 32.III del vol.III. del nostro Corso geometrico.)*

Al Cap.VIII.—Alla prop.I.(§ 358 a 361) — Il Puissant ebbe bisogno di un lungo calcolo per la soluzione di questo problema, e di premettervi come lemma le verità, che al nostro modo di trattarlo ne sono risultate incidentemente ne' §§.360 e 361, e che rendono il problema di una più elegante costruzione. Intanto non sarà fuor di proposito di qui porre a confronto della soluzione algebrica recata la seguente altra geometrica, premettendovi il lemma, che *quelle tre congiungenti s' intersegano in un medesimo punto, ove ciascuna rimane divisa nella ragione di 2 ad 1*: di cui eccone la breve, e facile dimostrazione.

Si unisca la retta EF [*fig.4.N.*], che sarà parallela a BC (2.*El.VI.*) e metà di essa; però anche la DO sarà doppia di OG, e DG tripla di OG, e prendendone rispettivamente i doppj risulterà AD tripla di DO. Che se le rette BF, CE incontrassero la AD, l' una in O, l' altra in *o*, sarebbe AD tripla di due rette disuguali DO, D*o*. Quindi necessariamente le BF, CE debbono intersegarsi con la AE nello stesso punto O.

Ciò posto ecco la soluzione elegantissima del proposto problema.

Essendo date le due rette AD, CE, saranno ancor date le AO, CO, che ne sono rispettivamente le due terze parti. Ma è pur data la FO = $\frac{1}{3}$ BF. Adunque sarà data la AF (B. *El. II.*), e quindi l' un lato AC del triangolo. E lo stesso per gli altri.

Alla prop. II. (§. 363.) — Ottenute le coordinate del punto E [*fig.42.*], e quindi la AE, la costruzione del problema si potrà anche effettuare elevando da E alla AE la perpendicolare BEC, ed applicando nell' angolo ABC la perpendicolare data CD.

Ma un tal problema risolvesi geometricamente nel facil modo che segue.

Essendo simili i triangoli ACF, BEA [*fig.5.N.*], sta AB : AC :: BE : CF; ed è però data la ragione di AB : AC. E similmente si rileverà data quella di BA : BC; sicchè il triangolo ABC risulterà dato di specie (§.60.). Laonde costruito il triangolo *b*A*c* con la data proporzione de' lati, e tirata sull' un di essi la perpendicolare A*d*, si tagli da questa la AD uguale alla corrispondente altezza del triangolo cercato: condotta per D la BC parallela alla *bc*, sarà ABC il richiesto triangolo.

Al §. 366. — La verità qui esposta dimostrasi geometricamente nel seguente modo.

I due triangoli BOD, ADC [*fig.5.N.*] sono simili fra loro, perchè entrambi simili ad AOE; e però sarà OD : DB :: DC : AD, ed OD×AD = DB×DC. Or se l' altra perpendicolare CF intersegasse la AD nel punto *o* diverso da O, risulterebbe ancora *o*D×AD = DB×DC = OD×AD. Dunque *ec.*

Al §. 367. — Allorchè sono dati di sito tre punti, il triangolo che si ottiene congiugnendoli è geometricamente dato (§.73); ne v' ha bisogno di altra ricerca per ottenerlo. Ma per gli usi della *Geometria analitica a coordinate* occorre talvolta l' espressione dell' aja di esso in funzione delle coordinate di que' punti: ed è questa la ricerca algebricamente trattata nel presente problema. Si vede da ciò, che usando questo metodo ancora i dati che non hanno bisogno di determinanti, perchè determinati in loro stessi (cioè *effettivi*), convenga esibirli mediante quelli; il che non può che complicare la soluzione de' problemi.

Alla prop. V. (§. 370.) — Nella Trigonometria fu già rilevata l' espressione dell' aja del triangolo ne' lati (§.91.), e qui vuolsi ottenerla per mezzo de' determinanti di essi, cioè delle coordinate de' vertici del triangolo; poichè di una tal formola si può aver bisogno nella risoluzione di certi problemi d' iscrizioni posizionali di tal figura nel cerchio, o ancora nelle curve coniche.

Intanto nella conchiusione di questo problema, si è anche mostrata la corrispondenza immediata del risultamento di esso con quello ottenuto nella Trigonometria; al che abbiamo, sempre che ci è occorso, posto mente, non solo per rischiaramento di dottrine a' giovani; ma ancora per mostrar loro la facile corrispondenza, che si ha convenevolmente adoperando in una ricerca ciascun mezzo proprio ad ottenerla. Dopo ciò alle altre esibizioni già esposte dell' aja del triangolo, nelle prop.1, 2, 4, 5, aggiugneremo ancor quella derivante dal seguente

Teorema.

In ogni triangolo la doppia aja è media proporzionale tra il rettangolo di due lati, e quello delle perpendicolari tirate ad essi da' vertici degli angoli opposti.

Compita la figura con le tre perpendicolari, si avrà [*fig.5.N.*]

$$AB \times CF = BC \times AD$$

e quindi $\quad AB : BC :: AD : CF$

e similmente si rileverà

$$AC : BC :: AD : BE$$

Che però risulterà

$$AB \times AC : BC^2 :: AD^2 : CF \times BE$$

ond'è che $AB \times AC$, $BC \times AD$, $CF \times BE$ saranno in continua proporzione.

E questo bel teorema del Lhuilier riesce difficile dimostrarlo col metodo analitico puro, come potranno i giovani assicurarsene tentandone per tal modo la dimostrazione.

Alla prop. VI, e nota corrispondente (§§.371 e 372.)—Non ci siamo prevaluti nella soluzione del problema della scelta degli assi indicata nel §.372. e molto meno dell'altra espressa nella nota, il che l'avrebbe resa, come qui vedesi, assai più semplice, poichè spesso occorre usarne nella forma generale, come nel §. 371 l'abbiamo trattata.

Era poi necessario recare la riduzione fattane nel §. 372; poichè per essa agevolmente pervenendosi alla costruzione Euclidea del problema, risultasse evidente la corrispondenza dell'un metodo con l'altro.

Al §. *373.* — Se il centro del cerchio circoscrittibile al dato triangolo congiungasi co' suoi vertici, si vede subito risultarne esso diviso in tre triangoli isosceli, le cui basi sono i lati rispettivi del triangolo, ed i lati il raggio di quel cerchio; il che già stabilisce, per mezzo della formola ottenuta nel §. 370, la corrispondenza delle coordinate del centro con quelle de' vertici del triangolo, che poi si sono per via più breve assegnate; ed era però conveniente far osservare che l'aja del triangolo proposto entrasse a comporre le espressioni di tali coordinate.

Alle prop. VI e VII. (§§. *371 a 379.*) — Limitando lo scopo di tali problemi a rinvenire il centro del cerchio circoscrittibile, o iscrittibile in un dato triangolo, sarà facile a chiunque ravvisare la semplicità e l'eleganza delle corrispondenti soluzioni geometriche apprese negli Elementi.

Alla prop. VII. (§. *377.*) — Può talvolta occorrere la soluzione del presente problema riferendosi a coordinate generali, come si era praticato nel precedente pel cerchio circoscrittibile al triangolo. Ma siccome una soluzione cosiffatta ne mena ad una lunga calcolazione, sebbene non difficile, così non abbiamo creduto espediente, per l'occorrenza di qualche caso non ordinario, di complicare il presente argomento, in un trattato elementare, e ci siamo però attenuti alla scelta di assi più proprj a pervenire al risultamento, da compararlo con quello già ottenuto nella nota al lib. V. della *Trigonometria*.

Intanto non istimiamo superfluo di qui aggiugnere, che considerando i lati, c, c', c'' come le distanze tra' punti B', B''; B, B''; B, B' [*fig.46.*] le espressioni di x', y', r ottenute nel §.277 diverranno

$$x' = \frac{\alpha\sqrt{(\alpha'-\alpha'')^2+(\beta'-\beta'')^2} + \alpha'\sqrt{(\alpha-\alpha'')^2+(\beta-\beta'')^2} + \alpha''\sqrt{(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2}}{\sqrt{(\alpha'-\alpha'')^2+(\beta'-\beta'')^2} + \sqrt{(\alpha-\alpha'')^2+(\beta-\beta'')^2} + \sqrt{(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2}}$$

$$y' = \frac{\beta\sqrt{(\alpha'-\alpha'')^2+(\beta'-\beta'')^2} + \beta'\sqrt{(\alpha'-\alpha'')^2+(\beta-\beta'')^2} + \beta''\sqrt{(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2}}{\sqrt{(\alpha'-\alpha'')^2+(\beta'-\beta'')^2} + \sqrt{(\alpha-\alpha'')^2+(\beta-\beta'')^2} + \sqrt{(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2}}$$

$$r = \frac{\alpha'\beta-\alpha\beta'+x''\beta'-\alpha'\beta''+\alpha\beta''-\alpha''\beta}{\sqrt{(\alpha'-\alpha'')^2+(\beta'-\beta'')^2} + \sqrt{(\alpha-\alpha'')^2+(\beta-\beta'')^2} + \sqrt{(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2}}$$

ed in tal guisa le coordinate del centro, ed il raggio del cerchio iscrittibile in un triangolo rimangono espresse solamente in funzioni delle coordinate de' vertici di esso.

Alla prop. VIII. (§. *381.*) — Non ostante la semplicità alla quale videsi da noi ridotta la presente dimostrazione algebrica del teorema proposto, ne recheremo di esso la seguente altra geometrica.

Il punto O [*fig.6.N.*] sia il centro del cerchio circoscrittibile al triangolo scaleno AMP, e l'altro V sia il concorso delle perpendicolari tirate da' vertici degli angoli di tal figura a' lati opposti. Dico che il punto W intersezione delle congiungenti i vertici stessi co' punti medj de' lati opposti debba cadere nello VO.

Si tirino da' punti W, O le perpendicolari al lato AP, cui è ancor perpendicolare la MVQ, e si tiri per V la VHK parallela alla AP. Pongasi in oltre, per brevità, $MQ = A$, $AP = B$; dovrà essere $WR = \frac{1}{3} A$, come l'è $WL = \frac{1}{3} ML$; e per la stessa ragione l'è $OL = \frac{1}{2} MV = \frac{1}{2}(A - VQ)$. Dunque sarà $OT = OL - WR = \frac{1}{6}A - \frac{1}{2}VQ$. E sarà poi $OK = OL - VQ = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}VQ - VQ = \frac{1}{2}A - \frac{3}{2}VQ$. Dunque sarà

$$OK : OT :: 3 : 1$$

Ma è pure

$$LQ : LR :: LM : LW :: 3 : 1.$$

Adunque sarà

$$OK : OT :: LQ : LR :: KV : TW$$

E però il punto W dovrà cadere nella retta VO.

Cor. Si rileva ancora ch' esso punto cadrà ad un terzo della VO verso O.

Alla prop. XI. (§. 282.) — Questo problema vi si è recato come lemma al seguente, e può eziandio occorrere in altri casi.

Alla prop. X. (§.383. a 390.) — Nelle ricerche recate nel presente capitolo di applicazione de' principj stabiliti di Geometria analitica abbiamo avuto sempre in mira di sceglier quelle, che davano luogo a qualche considerazione importante per coloro che s' istruiscono, e coltivano l' invenzione geometrica; ed è però che vi abbiamo trattato il presente problema dalla cui analisi può trarsi un canone essenzialissimo alla determinazione de' problemi, da alcuno finora non avvertito.

Intanto giova osservare nella presente ricerca l' insufficienza diretta del metodo analitico puro, il quale come nel §.384, e nella nota corrispondente si è fatto avvertire ci menerebbe a sviluppi di calcolo interminabili, e penosi, e da' quali forse si otterrebbero risultamenti sì complicati da non potervi affatto ravvisare quella conseguenza, che doveva condizionare i dati del problema, e cambiarlo in teorema.

Or il sig. Trudi occupatosi di tal ricerca subito ebbe ricorso ad un ripiego algebrico valevolissimo, di cui altra volta erasi ancor servito utilmente *(Vedi il §. 12 del suo bellissimo lavoro* su i poligoni iscritti e circoscritti alle curve coniche con date condizioni, *pubblicato in seguito della risposta al 1° quesito del Programma)*, per mezzo del quale con un calcolo semplicissimo ne perviene alla desiderata determinazione della proposta quistione. E spiace vedere, che un tal ripiego usato dagli antichi analisti italiani ad abbreviare in alcuni casi le lunghe eliminazioni ne' problemi numerici non fosse stato più considerato ne' progressi maravigliosi fatti nella scienza algebrica, e che solamento trovisi ripristinato nel nostro trattato di Analisi algebrica elementare.

Dalla riduzione ottenuta, si vede facilmente dedotta, nel §. 390. la relazione, che assegnò l' Eulero tra i raggi del cerchio iscritto, e circoscritto ad un triangolo, e la distanza de' centri, della quale trattarono ancora altri illustri geometri moderni, e che videsi pur da noi recata nella nota al lib. V. della *Trigonometria*.

Al §. 390. — Si tenga qui presente la deduzione di tal verità ottenuta nello scolio al problema risoluto nella nota qui sopra citata, ove nel *cor. 2.* che la segue si vede con grandissima facilità ricavato il teorema esposto nel §. 387. Intanto atteso la celebrità data a questo teorema, per essersene occupati tanti sommi geometri, ci permetteremo di qui recarne ancor un' altra elegante dimostrazione puramente geometrica.

Sieno O, *o* [*fig.7.N.*] i centri de' cerchi, nell' un de' quali è iscritto il triangolo ACB, che è circoscritto all' altro, Si unisca la A*o*, e prodottala in D tirisi per tal punto il diametro DOE, sul quale si abbassi da *o* la perpendicolare *o*T, e si congiungano le C*o*, *o*O.

Poichè l' angolo $oCD = oCB + BCD$, ed è $oCB = oCA$, e $BCD = BAD = oAC$; però risulterà l' angolo $oCD = oCA + oAC = CoD$, e quindi $Do = DC$. Or essendo l' angolo $CAD = DAB$, sarà pure $CBD = DCB$, e però CV perpendicolare al diametro ED, e quindi $Do^2 = DC^2 = ED \times DV = 2OD \times DV$. Ma è $Oo^2 = OD^2 + oD^2 - 2OD \times DT$. Dunque sarà $Oo^2 = OD^2 + 2OD \times DV - 2OD \times DT = OD^2 - 2OD \times oP$.

Dopo ciò non istimiamo fuori proposito osservare, che spesso negli animi de' più accorti e valenti geometri ingenerasi tal prevenzione di difficoltà per una qualche ricerca, da far loro sfuggire que' mezzi da' quali potrebbesi facilmente ottenerla. Così fu per tanto tempo del famoso problema proposto dal Cramer del triangolo da iscriversi nel cerchio co' lati tendenti a punti dati; e così l' è stato egualmente pel teorema suddetto della distanza de' centri del quale si è indicato nel §. 390 quanti illustri geometri se ne fossero occupati. E negli *annali* del Gergonne vol. I. *(anno 1811.)* si dice, che il medesimo era stato inviato a' compilatori dal celebre Kramp senza dimostrazione, e che costoro il conoscevano ancor prima fin dal 1807, per comunicazione fattagliene dal fu M. Mathieu professore di Matematiche, che il teneva da Maisonneuve ingegnere delle Miniere. Tutti costoro dunque ignorarono che Eulero e Fuss se ne fossero gran tempo prima occupati.

All' equaz. (9) della prop. 10. Cap. VIII. — Si è già indicato in questo luogo qual fosse il significato dell' equazione di condizione

$$PQ + SH - P^2 = o$$

tra le quantità note di questo specioso problema, alla quale si è pervenuto risolvendolo, e come esso rendendosi possibile a tal condizione de' dati, si cangiasse immantinente in indeterminato, e però divenisse un teorema come l' è stato enunciato nel §. 387. E da questo caso noi trarremo per altri simili il seguente

CANONE.

Vi sono de' problemi, che sebbene regolarmente proposti, hanno però bisogno di una determinazione tra' loro dati, sia pel sito, sia per la grandezza di questi, nella qual ricerca consiste tutta la loro analisi, per lo più assai difficile: ma che però pervenuti che siesi ad ottenere tal determinazione, passano senza intermezzo dallo stato d' impossibilità a quello d' indeterminazione, divenendo teoremi.

Di questa natura è il problema delle quattro sfere da iscriversi in una piramide triangolare, proposto per terzo quesito del programma, che noi producemmo nel 1839; e sul quale dovremo ritornare allorchè ripiglieremo questo stesso argomento negli *Opuscoli matematici*. Ma di tali problemi sarà più a lungo ragionato nella terza dissertazione del vol. I. de' medesimi opuscoli, ove ci abbiamo proposto trattare l' importante argomento della *determinazione* ne' problemi geometrici.

A questo proposito noteremo ancora ciò che per altro è elementarmente conosciuto (*Vedi scol. al probl. 7. cap. VI. lib. II.* della nostra *Analisi algebrica elementare*), che se mai risolvendo un problema si pervenga in fine ad un' equazione identica, essendosi regolarmente condotta l' analisi algebrica di esso, cioè che non siesi nell' equazione ripetuta una condizione già trattata nell' analisi suddetta; sarà ciò un indizio che il problema abbia luogo per un qualunque valore dell' incognita, e però risulti indeterminato, essendo il quesito una proprietà del soggetto da cui si voleva derivare; e quindi ch' esso debbasi trasmutare in teorema.

Alla prop. XI. (§. *393.*) — Per valutar convenevolmente la soluzione recata a questo problema si dovrà tener presente ciò che si è detto ne' §§. 391 e 392.

Alla prop. XII. (§§. *394 e 395.*) — Per rendere in certo modo uniformi le ricerche sul quadrilatero a quelle sul triangolo, abbiamo recato nella prop. 12. una proprietà di quello analoga all' esposta per questo nel §.360, e ne abbiamo in seguito indicate un numero di altre, lasciandone la dimostrazione algebricamente fatta ad esercizio de' giovani, a' quali non crediamo fuor di proposito di qui presentare le corrispondenti facilissime dimostrazioni geometriche.

TEOREMA I.

Nel quadrilatero ABCD [fig.8.N.], le congiungenti EG, FK i punti medj de' lati opposti, e l' altra LM de' punti medj L, M delle diagonali AC, BD s' incontrano in un medesimo punto, ove rimangono bisecate (pr. 12 e n. *I.* §. *395.*)

Imperocchè primieramente si vede, che congiunte le EF, FG, GK, KE la figura che ne risulta debba essere un parallelogrammo, mentre le EK, FG debbono risultar parallele alla stessa AC (*2.El.VI.*), e le EF, KG alla DB. Adunque le EG, KF, che ne sono diametri, dovranno bisecarsi in H.

Ed essendo L, M i punti medj delle diagonali AC, BD, congiunte le FL, LK, KM, MF, per la stessa ragione di poc' anzi, sarà parallelogrammo ancora il quadrilatero FLKM; e però le diagonali FK, LM dovendo bisecarsi vicendevolmente, dovrà la LM passare pel punto H medio della KF.

TEOREMA II.

I quadrati delle diagonali AC,BD [fig.8.N.] del quadrilatero ABCD sono il doppio di quelli delle congiungenti EG, FK i punti medj de' lati opposti di esso (*n. II.* §. *395.*).

DIM. Congiunte, come nel prec. teorema, le EK, KG, GF, FE, la figura che risulta è un parallelogrammo, ed AC doppia di EK, DB di KG. Quindi i quadrati dl AC e di BD sono il quadruplo di quelli di EK, KG. Ma questi sono il doppio degli altri di EH, HK (*A. El.II.*), di cui sono quadrupli quelli di EG, KF. Adunque i quadrati di AC, BD risultano doppj di quelli di EG, FK.

TEOREMA. III.

La somma de' quadrati delle diagonali di un quadrilatero, col quadruplo quadrato della congiungente de' loro punti medj è quanto la somma de' quadrati de' lati (*n.III.* §.*395.*).

Imperocchè essendo [*fig.9.N.*]

$$\left.\begin{aligned} AB^2 + BC^2 &= 2EA^2 + 2EB^2 \\ CD^2 + DA^2 &= 2EA^2 + 2ED^2 \end{aligned}\right\} \quad (A.\ El.\ II.)$$

sarà
$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 &= AC^2 + 2EB^2 + 2ED^2 \\ &= AC^2 + BD^2 + 4EF^2 \ (A.El.II.) \end{aligned}$$

Chi dunque non si dovrà maravigliare che di questo teorema sempli-

e

cissimo, la cui dimostrazione qui recata è l' immediata conseguenza di una proposizione elementare di Geometria, il Puissant ne abbia data una assai lunga ed intralciata con l' analisi a coordinato, nel suo *Recueil de diverses propositions de Géométrie pag. 31*, attribuendola come altri all' Eulero.

TEOREMA IV.

I quattro punti ne' quali s' incontrano due a due le bisecanti gli angoli interni o gli esterni di un quadrilatero sono nella circonferenza di un cerchio (n. IV. e VI. §. 395.).

Sieno AH, DF, CF, BH [*fig.10.N.*] le bisecanti gli angoli interni del quadrilatero ADCB, che incontrinsi vicendevolmente in E, F, G, H, e per brevità s' indichino con 2π gli angoli di un triangolo. Sarà l' angolo HEF $=$ DEA $= 2\pi - {}^1/_2$ (ADC $+$ DAB); e similmente sarà l' angolo G $= 2\pi - {}^1/_2$ (DCB $+$ CBA). Quindi sarà HEF $+$ HGF $= 4\pi - {}^1/_2$(ADC $+$ DAB $+$ DCB $+$ CBA) $= 4\pi - 2\pi = 2\pi$ E però il quadrilatero EFGH risulterà iscrittibile nel cerchio, ossia pe' punti E, F, G, H passerà una circonferenza.

Sieno ora prodotti i lati AD, BC di tal quadrilatero, e bisecati gli angoli esterni, come la figura rappresenta, ne risulti l' altro quadrilatero E'F'G'H'; sarà un retto l' angolo EDG', come risultante dalle metà de' due angoli ADC, CDK. Ed essendo del pari retto l' angolo EAG'; i due angoli in E, G' dovranno compiere due retti. Lo stesso per gli altri in G, E'. Adunque i quattro angoli E, G, E', G' compiono quattro retti: e son due retti quelli in E, G. Laonde ancor due retti saranno gli altri in E', G': per conseguenza ancor quelli in F', H'; e però pe' punti E', F', G', H' passerà una circonferenza.

TEOREMA V.

Se le quattro bisecanti gli angoli di un quadrilatero s' incontrino in un punto, il quadrilatero risulterà circoscrittibile al cerchio di cui quel punto n' è centro (n. V. §. 395.).

La dimostrazione si fa analogamente a quella della prop. *4. El. IV.*

TEOREMA VI.

I vertici corrispondenti de' due quadrilateri che risultano bisecando gli angoli interni, o gli esterni di un quadrilatero sono allogati in una retta (n. VII. §. 395).

Imperocchè sia il quadrilatero ABCD [*fig. 11. N.*], e prodotti i lati AD, BC finchè s' incontrino in O, si bisechi l' angolo AOB per la OP, sarà questa retta sì il luogo de' concorsi H, F delle bisecanti gli angoli interni del quadrilatero, che quello degl' incontri delle bisecanti gli angoli esterni del medesimo; essendo ciascun di tali punti di concorso il centro di un cerchio che tocca i tre lati del triangolo, il primo da dentro di esso, il secondo al di fuori; il che dimostrasi come nella prop. *4. El. IV.* E similmente, prolungando le AB, DC fino ad incontrarsi in O', la retta che biseca l' angolo O' dovrà passare per E, G, e per G', E'.

Aggiugneremo a' prec. teor. sul quadrilatero ancora il seguente

TEOREMA VII.

Se due rette di data grandezza s' interseghino sempre in uno stesso angolo; il quadrilatero che si ottiene congiugnendone gli estremi sarà dato.

Sieno AC, BD [*fig.12.N.*] tali rette, che s' interseghino in O nell' angolo AOB, e sia ABCD, il quadrilatero che ne risulta nel suddetto modo. Tirate dagli estremi A, C dell' una di esse AC le perpendicolari AP, CQ sull' altra DB si avrà AO : OC :: AP : CQ, e componendo e permutando AC : AP $+$ CQ :: OC : CQ. Ma la ragione di OC : CQ è costante ovunque prendasi il punto O nella BD, e comunque questa vi si tiri scambiando le parti AO, OC, serbandosi però essa sempre parallela alla AC. Adunque sarà ancora costante la ragione di AC : AP $+$ CQ; che però non variandosi la AC la somma delle perpendicolari AP, CQ risulterà sempre la stessa. Laonde il quadrilatero ABCD, che è quanto ${}^1/_2$ DB (AP $+$ CQ) avrà sempre la stessa grandezza.

ALITER.

Sia AO $= a$, OC $= b$, OD $= c$, OB $= d$, sen. AOD $=$ sen. COB $=$ sen.φ. I quattro triangoli AOD, AOB, BOC, COD risulteranno rispettivamente uguali ad ${}^1/_2 ac$ sen.φ, ${}^1/_2 ad$ sen.φ, ${}^1/_2 bd$ sen.φ, ${}^1/_2 bc$ sen.φ, e la loro somma, cioè l' aja dal quadrilatero, sarà ${}^1/_2\,(ac + ad + bd + bc)$ sen.$\varphi = {}^1/_2(a + b)\,(c + d)$ sen.φ; e però costante.

E dalla precedente formola si rileva, che se fosse data l' aja M^2 di un quadrilatero, e ciascun de' suoi due diametri P, Q; sarà dato l' angolo in cui questi debbono costantemente inclinarsi, ed espresso da

$$\text{sen.}\ \varphi = \frac{2M^2}{P \times Q}$$

Abbiamo qui recato un tal teorema ancora perchè i giovani potessero paragonare ciascuna delle dimostrazioni che se ne sono date, con quella orditagli dal Puissant nell' opera poc' anzi citata, §. 29.

Alle ricerche trattate nel cap. VIII.

Ciascuno che riguardi le analisi de' problemi, e teoremi recati in questo capitolo, e le ponga al confronto con le stesse da' più distinti analisti moderni prodotte in loro ben elaborate opere, rimarrà convinto della preferenza che meritano le nostre, perchè conseguite con maggior brevità, e chiarezza. Con tutto ciò paragonandole alle corrispondenti rilevazioni geometriche, che ne abbiamo espressamente recate nelle precedenti note, si avvedrà di quanto queste superino in eleganza ancor quelle; e spesso ancora troverà superfluo, che noi ci fossimo immersi in tanto calcolo, ed in tante considerazioni difficili per cose che la Geometria presentava quasi per intuizione. Ad evitare la qual taccia, noi non abbiamo tralasciato mostrare in qualche caso il motivo del nuovo procedimento algebrico, che avevamo adoperato. Nè potrà fare a meno di osservare, che in molti casi, de' quali uno ne presenta la prop. 10, senza un particolare artifizio tutto proprio dell' ingegno dell' analista, e non soggetto a regole, si sarebbe rimasto insufficiente ogni sforzo a condurre a fine la richiesta soluzione del problema.

E quanta maggiore sproporzione non ravviserebbe ancora in altre ricerche, le quali mentre con l' un metodo risultano elementari, ed intuitive, usando il metodo analitico puro riescono difficilissime. Così chi non vede intuitivamente, che: *Il luogo geometrico di un angolo dato, i cui lati tocchino sempre un dato cerchio, sia un' altra circonferenza di cerchio concentrica alla prima*: e pure la risoluzione di un tal problema risulta ben lunga e penosa, quando si volesse con quel metodo trattare, come qui in fine mostreremo. Si dirà però, che per mezzo di questo si perviene uniformemente ad assegnar quella locale eziandio per le altre curve coniche, la quale risulta per la parabola una curva dello stesso ordine, e per l' ellisse, e l' iperbole del *quarto* (*Vedi Fergola* Sezioni Coniche *analitiche dal* §. *285. al 289.*). Ma chi mai sarà sì strano da rinunziare al gran benefizio della conoscenza intuitiva di una cosa solo per ottenerla uniformemente ad altre affini, e per vie lunghe, e tortuose? Sarebbe bella a vedere, che per condurre la tangente al cerchio, da un punto nella circonferenza, o fuori di esso, si volesse per uniformità dedurla dal metodo generale per condurre la tangente ad una curva qualunque; della quale stranezza non v' ha geometra, che non si richiamerebbe. Si conviene ancora da tutt' i moderni analisti della facilità e chiarezza del metodo geometrico puro sull' analitico puro; ma a vantaggiar questo si adduce l' uniformità de' principj, che vi si adoprano, e 'l piccol numero di essi, mentre per l' uso del primo si esige un vasto numero di conoscenze preliminari, e mentre tanto più facilmente si riesce in qualche ricerca, quanto maggiore sia il numero di quelle. Noi non vogliamo qui entrare in esame se non sia un gran male il fare svanire, se pur potesse succedere, questa necessità di dare al nostro spirito un grandissimo slancio all' invenzione, facendogli acquistare quel gran numero di verità, che formano per esso un bello e magnifico corredo, e che non solamente gliene preparano un grande aumento, ma il rendono spessissimo soddisfatto in vedersi schierati innanzi tanti mezzi, per ottenere l' intento, e questo comprovato in modi diversi. Ma faremo solamente osservare, che siffatta uniformità di principj, e quel ristretto numero di essi, ci obbliga a rimontar troppo alto per ciascuna ricerca, e spesso l' implica in aggiunti, che le sono affatto estranei, e che la rendono però assai difficile. Tal' è per esempio il caso semplicissimo della prop.6 geometricamente trattata. Senza dire, che molti sono i casi, ne' quali la strana forma di determinanti, che con tal metodo conviene adottare, e l' uso de' luoghi geometrici affatto sconvenendosi alla ricerca proposta, questa rimane con tal metodo preclusa, deludendo l' analista nella sua aspettativa; nè potendo ottenere un intento possibile, e forse ancor facile, quando un' altra strada da pervenirvi non gli sia nota. E ciò avviene precisamente ne' teoremi, e ne' problemi di pura *grandezza*, ove affatto non si convenga alcun sito, che necessariamente vi addirebbe l' uso delle *locali*. E di tali ricerche spesso veggonsene notate da' più accorti e diligenti analisti moderni. E di fatti il Lhuilier si è spesso veduto in obbligo, nella sua elaborata opera *de l' Analyse géométrique*, *et de l' Analyse agébrique*, a dire, che non credeva conducente, e talvolta ancor possibile ottenerne taluna col metodo a *coordinate*.

Ma senza ricorrere alle autorità di sommi geometri, basterà a convincerne il tentar di risolvere con quel metodo i seguenti problemetti elementari.

Problema I.

Costruire il triangolo rettangolo di cui sia data la somma di ciascun cateto col segmento della base adjacente o alterno, prodottovi dalla perpendicolare tirata ad essa dal vertice.

Sia BAC [*fig.13.N.*] il triangolo cercato in cui dal vertice A dell' angolo retto si è tirata alla base la perpendicolare AD; e sia

$$\begin{aligned} AB + BD &= f \\ AC + CD &= g \\ BC &= x \end{aligned}$$

Sarà $\mathrm{AB} + \mathrm{AC} + x = f + g$

ed $\mathrm{AB} + \mathrm{AC} = f + g - x$

Facciasi $\mathrm{AB} = \frac{1}{2}(f + g - x) + y$

sarà $\mathrm{AC} = \frac{1}{2}(f + g - x) - y$

Ed essendo per l' altra condizione del problema

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = \mathrm{BC}^2$$

cioè $\frac{1}{2}(f + g - x)^2 + 2y^2 = x^2$

si avrà $y = \sqrt{\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}(f + g - x)^2\right)}$

e quindi

$$\mathrm{AB} = \tfrac{1}{2}(f + g - x) + \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{4}(f + g - x)^2\right)}$$

$$\mathrm{AC} = \tfrac{1}{2}(f + g - x) - \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{4}(f + g - x)^2\right)}$$

$$\mathrm{BD} = f - \tfrac{1}{2}(f + g - x) - \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{4}(f + g - x)^2\right)}$$

$$\mathrm{DC} = g - \tfrac{1}{2}(f + g - x) + \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{4}(f + g - x)^2\right)}$$

Or $\mathrm{AB}^2 - \mathrm{AC}^2 = \mathrm{BD}^2 - \mathrm{DC}^2$

Adunque si avrà finalmente per equazione al problema la seguente

$$4fgx^2 + 2(f + g)^3 x = (f + g)^4$$

E con pari andamento di analisi algebrica si perverrà all' equazione per l' altro caso di

$$\mathrm{AB} + \mathrm{DC} = h$$
$$\mathrm{AC} + \mathrm{BD} = k$$

la quale però risulterà del quarto grado.

Problema II.

Costruire quel triangolo isoscele di cui sia dato il perimetro e l' aja, che com' è evidente riducesi all' altro.

Costituire il triangolo rettangolo ADB [*fig.14.N.*], *data la somma p di AB , BD , e l' aja* m^2 .

Pongasi $\mathrm{BD} = x$, sarà $\mathrm{DA} = \frac{2m^2}{x}$, e $\mathrm{BA} = \frac{1}{x}\sqrt{(x^4 + 4m^4)}$:

e però avrassi l' equazione

$$\frac{1}{x}\sqrt{(x^4 + 4m^4)} + x = p$$

che ridotta convenevolmente diviene

$$x^3 - \frac{px^2}{2} + \frac{4m^4}{2p} = 0 .$$

E di questi esempi potremmo moltiplicarne il numero a piacere. Ma ci basti per tutti notare, che la *Geometria analitica a due coordinate* manca niente meno che della soluzione de' due problemi fondamentali per quelli di terzo e quarto grado, cioè della *trisezione dell' angolo*, e delle *due medie proporzionali*, e dee necessariamente ripeterla dalla Geometria antica, o dalla Cartesiana, che ne posseggono a dovizia elegantissime soluzioni. E qui per compimento recheremo due soluzioni del problema enunciato nel principio di questa nota, l' una del prof. Grimaldi, l' altra del Trudi ricavata da quella da lui regolarmente fattane con questo metodo analitico per le curve coniche in generale (*Vedi probl.* IX nella *Memoria su i poligoni iscritti e circoscritti alle curve coniche con date condizioni*, in seguito al programma da me proposto nel 1839). E da questa andremo a mano a mano ricavando opportunamente alcuni importanti principj di scienza necessari a conoscersi da chi tratta ricerche geometriche principalmente con tal metodo. Sarà questo l' ultimo argomento che qui offriremo a comprovare sempre più ciò che ha formato lo scopo della presente nota.

Problema III.

Determinare il luogo del concorso delle tangenti il cerchio, che comprendono un dato angolo φ .

1ª. Soluzione.

Sieno (α, β), (α', β') le coordinate di due punti di contatto, ed x, y, quelle del loro incontro, cioè di un punto del luogo cercato. Le rispettive equazioni delle tangenti il cerchio in que' punti saranno

$$\beta y + \alpha x = r^2$$
$$\beta' y + \alpha' x = r^2$$

dalle quali si avrà

$$x = \frac{(\beta' - \beta) r^2}{\beta'\alpha - \beta\alpha'}$$

$$y = \frac{(\alpha - \alpha') r^2}{\beta'\alpha - \beta\alpha'}$$

e quindi

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{(\beta' - \beta)^2 + (\alpha' - \alpha)^2}{(\beta'\alpha - \beta\alpha')^2}\right) r^4 \qquad (1)$$

E poichè i punti (α, β), (α', β') stanno nella circonferenza del cerchio del raggio r, dovranno aver luogo per essi le equazioni

$$\beta^2 + \alpha^2 = r^2 \qquad (2)$$

$$\beta'^2 + \alpha'^2 = r^2 \qquad (3)$$

che però se dopo sviluppati i quadrati del numeratore dell' equazione (1) vi si faccia la sostituzione di r^2 invece delle quantità indicate da' primi membri delle equazioni (2), (3), si avrà

$$x^2 + y^2 = r^4 \left(\frac{2r^2 - 2(\beta\beta' + \alpha\alpha')}{(\beta'\alpha - \beta\alpha')^2} \right) \qquad (4)$$

Ciò posto si moltiplichino membro con membro le equazioni (2), (3), e si aggiunga a ciascun prodotto la quantità $-2\beta\beta'\alpha\alpha'$, si otterrà

$$(\beta'\alpha - \beta\alpha')^2 = r^4 - (\beta\beta' + \alpha\alpha')^2 \qquad (5)$$

e cambiato per mezzo di questa il denominatore dell' equazione (4) questa diverrà

$$x^2 + y^2 = 2r^4 \left(\frac{r^2 - (\beta\beta' + \alpha\alpha')}{r^4 - (\beta\beta' + \alpha\alpha')^2} \right)$$

$$= \frac{2r^4}{r^2 - (\beta\beta' + \alpha\alpha')} \qquad (6)$$

In oltre essendo (290)

$$\text{tang.}\varphi = \frac{\beta'\alpha - \beta\alpha'}{\beta\beta' + \alpha\alpha'}$$

sarà $\quad \beta'\alpha - \beta\alpha' = \text{tang.}\varphi(\beta\beta' + \alpha\alpha')$

e $\quad (\beta'\alpha - \beta\alpha')^2 = \text{tang.}^2\varphi(\beta\beta' + \alpha\alpha')^2$

da che l' equazione (5) rimane trasmutata in

$$(\text{tang.}^2\varphi + 1)(\beta\beta' + \alpha\alpha')^2 = r^4$$

o sia $\quad \text{sec.}^2\varphi(\beta\beta' + \alpha\alpha')^2 = r^4$

d' onde $\quad \beta\beta' + \alpha\alpha' = \pm \dfrac{r^2}{\text{sec.}\,\varphi} = \pm r^2\cos.\varphi$

Adunque

$$x^2 + y^2 = \frac{2r^4}{r^2(1 \pm \cos.\varphi)} = \frac{2r^2}{1 \pm \cos.\varphi} \qquad (7)$$

E poichè $\quad \cos.\varphi = 1 - 2\,\text{sen}^2\,{}^1\!/_2\,\varphi$

si avrà $\quad x^2 + y^2 = \dfrac{2r^2}{1 \pm 1 \mp 2\,\text{sen.}^2\,{}^1\!/_2\varphi}$

e prendendo una volta i segni inferiori ed un' altra i superiori, si avranno le due equazioni

1ª $\quad x^2 + y^2 = \dfrac{r^2}{\text{sen.}^2\,{}^1\!/_2\varphi}$

2ª $\quad x^2 + y^2 = \dfrac{r^2}{1 - \text{sen.}^2\,{}^1\!/_2\varphi} = \dfrac{r^2}{\cos.^2\,{}^1\!/_2\varphi}$

che sono a due cerchi concentrici al proposto, l'uno del raggio $\dfrac{r}{\text{sen.}\,{}^1\!/_2\,\varphi}$ l' altro del raggio $\dfrac{r}{\cos.\,{}^1\!/_2\,\varphi}$, e che, com' è chiaro, rappresentano le due locali, l' una per l' angolo dato φ, l' altra pel suo supplementale $2\pi - \varphi$.

E ciascun di essi si costruirà facilmente tirando al cerchio ovunque una tangente, ed inclinando a questa dal centro due rette l' una che vi vada a formare l' angolo del sen.${}^1\!/_2\varphi$ l' altra del cos.${}^1\!/_2\varphi$.

Ma chi mai sarà sì strano da voler preferire una ricerca algebrica sì lunga, con un corredo di tante verità superiori agli Elementi, per ottenerne una conseguenza che proposizioni elementarissime del lib. III. di Euclide danno presso che intuitivamente.

Passiamo intanto a riguardarlo per la seguente

Altra soluzione.

Si dinoti con n la tangente dell' angolo dato φ, e sieno t, u le coordinate pel vertice di esso, (x', y'), (x'', y'') quelle de' due contatti. Presa pel cerchio proposto l' equazione

$$y^2 + x^2 = r^2 \qquad (1)$$

quelle delle due tangenti esso costituenti i lati dell' angolo φ saranno (328.).

$$y = -\frac{x'}{y'}x + \frac{r^2}{y'} \quad , \quad y = -\frac{x''}{y''}x + \frac{r^2}{y''}$$

e però si avrà (290.)

$$\frac{x'y'' - x''y'}{y'y'' + x'x''} = n \qquad (2)$$

Ciò posto, l' equazione della retta fra' contatti, polare del punto (t, u), essendo (346.)

$$uy + tx = r^2 \qquad (3)$$

eliminando la y tra questa e la (1) si avrà

$$x^2 - \frac{2r^2t}{u^2 + t^2}x + \frac{r^2(r^2 - u^2)}{u^2 + t^2} = 0$$

le cui radici dinoteranno le ascisse x', x'' de' punti di contatto: sicchè ponendo per brevità

$$u^2 + t^2 - r^2 = s^2 \qquad (4)$$

risulterà

$$x' = r\frac{su + rt}{u^2 + t^2} \quad , \quad x'' = r\frac{rt - su}{u^2 + t^2}$$

E da questi valori delle ascisse pe' suddetti punti, per mezzo dell' equazione (3), si perverrà ad ottener quelli per le corrispondenti ordinate, cioè

$$y' = r\frac{ru - st}{u^2 + t^2} \quad , \quad y'' = r\frac{ru + st}{u^2 + t^2}$$

E sostituendo gli uni e gli altri nell' equazione (2) si otterrà la seguente

$$s^2 + \frac{2r}{n}s = r^2 \qquad (5)$$

che risoluta offre per s i due valori

$$s = \frac{r}{n}\left(-1 \pm \sqrt{(1 + n^2)}\right) \qquad (6)$$

Ed elevando a quadrato l' equazione (6), e combinandola con la (4) si avrà per la locale richiesta la seguente equazione

$$u^2 + t^2 = \frac{2r^2}{n^2}\left(1 + n^2 \mp \sqrt{(1 + n^2)}\right) \qquad (7)$$

ch' è al cerchio; e che per cagione del doppio segno del radicale ne rappresenta due diversi, come doveva effettivamente aver luogo; poichè la n tangente dell' angolo φ l' è ancora di $2\pi - \varphi$. E sebbene per questo risulti negativa, nulladimeno non essendovi nell' equazione (7) che il solo quadrato della n, rimane essa inalterata ne' due casi, i quali debbono però risultare indicati e distinti, come si è detto, dal segno $\mp$ del radicale.

2. Volendo costruire essi cerchi identicamente alla maniera facile e piana, che ne offriva la prima soluzione, si ponga $m = \text{tang.}\ {}^1/_2\ \varphi$, sicchè si abbia $n = \frac{2m}{1 - m^2}$, e fatta la sostituzione di tal valore di n nell' equazione (7), e quindi eseguite le ovvie riduzioni, e poi le trasformazioni risultanti dal valore trigonometrico della m, si ridurrà essa in ciascuno de' due casi alle seguenti rispettive

$$u^2 + t^2 = r^2(1 + m^2) = \frac{r^2}{\cos.^2\ {}^1/_2\varphi}$$

$$u^2 + t^2 = \frac{r^2}{m^2}(1 + m^2) = \frac{r^2}{\text{sen.}^2\ {}^1/_2\varphi}$$

3. Se taluno giunto che fosse all' equazione (5), ch' è già quella al problema, vi si fosse arrestato, semplicemente restituendovi per s^2, s le loro equivalenti espressioni prese dall' equazione (4), e poi liberandola dal radicale, sicchè per tal procedimento fosse pervenuto all' equazione.

$$u^4 + 2u^2t^2 + t^4 - \frac{4r^2}{n^2}(1 + n^2)(u^2 + t^2) + \frac{4r^4}{n^2}(1 + n^2) = 0$$

avrebbe potuto di leggieri giudicare, che la locale richiesta fosse una curva del *quart' ordine*, come di fatti ha luogo pel caso del problema proposto sull' ellisse, o l' iperbole. Ma attentamente esaminandola si perverrà a scorgere, che essa sia scindibile in due fattori di secondo grado, precisamente quelli compresi nell' equazione (7).

In fatti si osservi, che i primi tre termini di essa costituendo il quadrato di $u^2 + t^2$, può però la medesima porsi sotto l' altra forma

$$(u^2 + t^2)^2 - \frac{4r^2}{n^2}(1 + n^2)(u^2 + t^2) + \frac{4r^4}{n^2}(1 + n^2) = 0$$

d' onde si ha

$$u^2 + t^2 = \frac{2r^2}{n^2}\left(1 + n^2 \mp \sqrt{(1 + n^2)}\right)$$

che sono come si è detto le due dell' equazione (7).

4. Le precedenti considerazioni ne mostrano quanta accortezza bisogni in trattare un problemetto elementare, per non essere indotto in equivoci da' suoi risultamenti; e serviranno però di norma a rendere accorti i giovani analisti nelle ricerche le quali verranno da essi trattate principalmente con l' analisi pura, la quale considerando, per la sua natura, le condizioni del problema separatamente, ed esprimendone ciascuna nella sua corrispondente forma algebrica, dee poi ricorrere di necessità a' metodi di eliminazione per inchiuderle tutte in una sola, che rappresenti quella al problema proposto.

Così per quello che abbiamo qui trattato concorrono ed esibire l' equazione finale nientemeno che cinque equazioni di condizione, che sono

1ª. $\quad uy' + tx' = r^2$

2ª. $\quad uy'' + tx'' = r^2$

necessarie ad esprimere le relazioni per due rette tangenti il cerchio che incontransi nel punto delle coordinate t, u.

L' altra

3ª. $\quad \dfrac{x'y'' - x''y'}{y'y'' + x'x''} = n = \text{tang.}\varphi$

che rinchiude la condizione che quelle rette comprendano l' angolo dato.

Finalmente le altre due

4ª. $\quad y'^2 + x'^2 = r^2$

5ª. $\quad y''^2 + x''^2 = r^2$

sono necessarie per la condizione che i punti di contatto (x', y'), (x'', y'') esistano nella circonferenza dell' equazione $y^2 + x^2 = r^2$.

E quì comincia la maggior difficoltà del problema, per dover liberare tali equazioni dalle coordinate x^{I}, y^{I}; x^{II}, y^{II} de' punti di contatto, introdotte semplicemente per condotta del calcolo, mentre l'equazione al luogo richiesto dee contenere solamente le coordinate di esso e le quantità note del problema, cioè le t, u, e le r, s. E però il problema trovasi ridotto ad un artifizio di eliminazioni, e quindi soggetto alle imperfezioni che presentano questi metodi; o pure bisogna ricorrere a particolari artifizi, che sono assolutamente dipendenti dalla sagacia, ed espertezza dell' analista.

Chi desiderasse conoscere la storia delle diverse soluzioni di questo specioso problema, per le curve coniche, potrà rinvenirla nelle nostre note alla terza edizione del trattato analitico delle *Sezioni Coniche* del Fergola (*a' §§. dal 383 al 389*), ove troverà eziandio una soluzione del prof. Grimaldi col metodo analitico puro, pel caso della parabola, ed un' altra geometrica elegantisssima dello stesso ne conserviamo per produrla nel luogo che le sarà proprio.

CONCHIUSIONE.

Da tutto l'esposto finora conchiuderemo, come sempre abbiamo detto, che convenga coltivare il metodo analitico puro, e cercare sempre più di perfezionarlo, seguendo le orme ben segnate da tanti illustri analisti principalmente francesi nel corso del secolo attuale; ond' è che al presente assai più perfetto ed attivo si ravvisa, che non lo era nel principiar di esso. Che il medesimo riesce utile in dimostrar molti teoremi difficili, e nel condurre le analisi di que' problemi i cui dati, e 'l quesito possono a determinanti di sito convenevolmente riferirsi. Che talvolta ancora sia assolutamente necessario per talune ricerche geometriche, nelle quali affatto non si ravvisa un qualche punto cui vada annessa la loro soluzione, come l' è per appunto il problema trattato nella proposizione 10; ed in questi casi un tal metodo rende veri servigi alla scienza geometrica. Ma che sarebbe stranezza imperdonabile il pretendere, che possa tenere un impero assoluto nell' invenzione geometrica, e valesse a far dimenticare affatto gli altri metodi, non escluso il Cartesiano di cui è derivazione. E finalmente conchiuderemo come l' illustre Cramer in un caso inverso dell' attuale (*Introd. a l' Analyse des lignes courbes algébriques*), essere una vera follia di taluni de' tempi nostri di disprezzare tutt' i metodi per l'invenzione matematica, riducendo tutta la loro scienza a quel solo che imperfettamente possono conoscere, e che hanno appena elementarmente appreso. Il qual disprezzo nasce in essi dall' impossibilità di poter intendere le opere profonde degli antichi, e le prodotte da' moderni a tutto il passato secolo, anche perchè, per l' attual sistema d' istituir la gioventù nelle scuole, ignorano essi la lingua in cui quelle sono scritte. Soggiugnendo con lo stesso illustre geometra ed analista che: *le verità matematiche non sono sì facili a rinvenirsi, che debbasi far merito di chiudersi alcuna delle strade che possono condurvi*.

E per non divenire infiniti in ripetere uno ad uno i sentimenti uniformi di tutti i sommi geometri su questo proposito, ci limiteremo a recar quelli che ci troviamo alle mani, del Newton, il quale così chiudeva il suo trattato di Geometria analitica: *Atque hactenus varia evolvi problemata. In scientiis enim addiscendis prosunt exempla magis quam praecepta. Qua de causa in his fusius expatiatus sum. Sed et aliqua, quae inter scribendum occurrebant immiscui sine algebra soluta, ut insinuarem in problematibus, quae prima fronte difficilia videntur, non semper ad algebram recurrendum esse.* Del de l' Hopital, che dopo aver, nell'esempio 1. lib. VIII. *Sections coniques*, risoluto, servendosi del calcolo, il problema di: *Trovare il luogo de' punti da' quali tirando a due rette di sito le inclinate a ciascuna in uno stesso angolo, e verso la medesima parte, queste risultino sempre in data ragione*, si credè in obbligo di soggiugnere: » Je n' ai resolu cette question par le calcul, que pour la rapporter a la proposition générale, et commencer par des exemples simples, et aisés à en faire voir l' application; *car on peut résoudre ce probléme sans aucun calcul, et d' une maniere plus facile en cette sorte* «.

Ed il Lhuilier dopo aver data geometricamente la facile analisi del problema: *Dati tre puuti assegnarne un* quarto *nel piano stesso*, *che congiunto con essi risultino dati gli angoli delle congiungenti*, passando a darne la soluzione algebrico-trigonometrica, così conchiude: » La longueur de ce procédé (sur-tout quand on le compare avec quel» qu' un des procédés géométriques) ne permet pas de l' envisager autrement que comme un exercice de calcul, qui peut occuper utilement les éléves, sur tout lorsque ils en poursuivront les résultats pour montrer leur accord avec ceux que donnent les solutions géométriques «.

AL LIBRO III. DELLA PARTE I.

Al §. 397. — Per la definizione dell' *Analisi geometrica* si tenga ancor presente quella di Pappo, recata nel §. 13 del *Prospetto*.

Alle prop. IV. e V. (§. *407 e 409.*) — La riduzione del primo di questi problemi è alla prop. 3. lib. 1, che lo mostra però del primo grado *(Vedi nota ad essa)*, come era chiaro, non potendo essere che un solo il punto che vi soddisfi : mentre quella dell' altro è alla prop. 4, da che la sua natura risulta del secondo grado *(V. nota cit., ed il* §. 471.*)*

Alla prop. VI, ed a' suoi cor. (§§. *411 a 420* .) — Su tal problema, e sulle conseguenze dedottene dovremo ritornare nella *parte II.* del presente trattato .

Alla prop. VII. (§§. *421 a 426*)—Il presente problema è preso dall'*Arithm. Univ.* del Newton *(probl. 28*), ov' è proposto e risoluto generalmente per le curve coniche, ed un punto al di fuori dell' asse, e per sola facilitazione del calcolo trovasi eseguito per la parabola. Quel sommo uomo nel recarvelo ebbe in mira di comprovare con un altro esempio la regola per la convenevole scelta dell' incognita in taluni problemi, che aveva già data all' occasione di risolvere, pel caso del quadrato, il problema di *sottendere un angolo dato con una data retta*, la *quale passi per un punto dato* (probl. 24*)*. Su di che è stato abbondevolmente ragionato dal §. 538 al 558, e nella nota corrispondente. E di fatti dopo aver egli ottenuta dalla sua analisi l' equazione propria alla natura di tal problema pel punto dato fuori dell' asse, soggiugne che stabilendo l' incognita nell' altro modo da lui già discusso e tralasciato, perchè contrario alla regola assegnata, l' equazione sarebbe risultata dell' 8° grado, mentendo la natura del problema.

Ma tal soluzione del Newton ha il difetto di non potersi da essa, come si dovrebbe, passare al caso particolare del punto dato nell' asse, che però il Fergola dovè allontanarsene; e tenendo altro cammino, senza usar quella regola, pervenne di fatti ad un' equazione di quarto grado, che sebben derivativa dal secondo, pure non era quella che per la natura del problema esigevasi, alla quale poi pervenne usando l' altro ripiego del §. 423, ch' è consono alla regola suddetta e che poi nel §. 424 mostra convenire ancora al caso del punto fuori dell' asse, dandone per esso la convenevole equazione di quarto grado. E però dalle due analisi diverse recate dal Fergola a tal problema rimane vieppiù confermata la regola del Newton, pel convenevole stabilimento dell' incognita in taluni problemi (*Vedi* §. 550.)

Osserva egli in seguito (§. 425), che un tal problema avrebbesi potuto anche risolvere con l' analisi *a coordinate*, indicando i motivi pe' quali non era conveniente prevalersene. A che deve credersi essere stato indotto dall' aver veduta la soluzione per tal modo datane dal Collalto, in fine delle sue *Lezioni di Geometria analitica a due coordinate*, di recente allora stampate in Milano (an. 1806), che ben gravosa, e di poca eleganza riesce in paragone di quella del Fergola, pel caso del punto nell' asse. Poichè deesi notare, che sebbene il Collalto avesse proposto il problema generalmente al pari del Newton, e che così avesse creduto risolverlo, pure per grande inavvertenza nel condurne l' analisi vi assume l' espressione della corda della parabola per coordinate ortogonali ; il che ne riduce la soluzione al solo caso del punto nell' asse. Di che avrebbe almen dovuto farlo accorgere la sola differenza di grado tra la sua equazione e quella ottenuta dal Newton, che l' è propria, com' è stato detto, al problema generalmente proposto.

Al §. *427.* — Starà bene che coloro i quali coltivano esclusivamente il metodo analitico puro eseguano per mezzo di esso la soluzione del problema trattato in questo §, per istituirne parallelo con quella elegantissima quivi recata.

Alla prop. VIII. (§. *428*) — Questo problema è l' ottavo della *Sezione IV.* cap. 2. dell' *Arithmetica Univ.* del Newton

Alla prop. XII. (§. *433*) — Se ne vegga eziandio la corrispondente soluzione nella *Trigonometria* al §. 112, *prop. 24. II.*

Al rischiar. della prop. XIII. (§. *435*) — Per ciò che riguarda la natura de' *porismi*, de' quali qui si accenna dal Fergola, si riscontri la *dissertaz. 1.* nel vol. I. degli *Opuscoli matematici*.

Alla prop. XVII. (§. *439.*) — Veggasi ancora la nota 14 al *Prospetto* dell' opera, a piè della pag. XXIII.

Alla prop. XX. (§. *445.*) — Avvertasi però, che trattando il problema con l' analisi algebrica, le condizioni delle quali si è fatto uso per ottener le espressioni di quelle rette dalle quali vuol farsi dipendere l' esibizione del punto soddisfacente al quesito, non debbano essere adoperate ad esprimerne l' equazione ad esso, la quale in tal caso si dovrà assolutamente trarre da una qualche proprietà geometrica del soggetto, e non più da una delle condizioni, come sarebbesi convenevolmente fatto, quando di questa non si fosse usato nell' analisi per pervenire all' equazione. E quando avvenisse di cadere in quest' equivoco, come a' giovani geometri suole intervenire, essi ne verranno avvertiti dall' equazione stessa, che risulterà identica, come quella la quale esprime una cosa, ch' è conseguenza di se medesima.

Ed a tal proposito conviene anche avvertire, che laddove poi l' analisi siesi rettamente condotta, e l' equazione risulti identica, ciò indica che la quistione proposta sia indeterminata, cioè che il quesito del problema sia una proprietà del soggetto al quale si voleva attribuire, e però che il problema senz' altro artifizio si trasmuti in teorema.

Noi ne abbiamo dato un esempio nel probl. 7. cap. VI. lib. II. dell' *Analisi Algebrica*, ed or ne addurremo il seguente altro geometrico semplicissimo

Problema.

Vogliasi ritrovare nell' aja del triangolo equilatero ABC [*fig.15.N.*] *un tal punto O, sicchè la somma delle perpendicolari OD, OE, OF tirate da esso a' suoi lati ne pareggi l' altezza AK del triangolo.*

Pongasi BF$=x$, FO$=y$, BC$=a$, e però BK $=\frac{1}{2}a$, FC$=a-x$, ed AK $=\frac{1}{2}a\sqrt{3}$. Si avrà pe' triangoli simili AKB, GFB, BK : KA :: BF : FG, cioè, nelle corrispondenti espressioni simboliche, $1:\sqrt{3}::x:$ FG $=x\sqrt{3}$, e però GO $=$ GF $-$ FO $=x\sqrt{3}-y$. Ma è poi, pe' triangoli simili BAK, DGO, BA : BK :: GO : OD, ossia $1:\frac{1}{2}::x\sqrt{3}-y:$ OD $=\frac{1}{2}x\sqrt{3}-\frac{1}{2}y$.

In oltre essendo, pe' triangoli simili CKA, CFH, CK : KA :: CF : FH, si avrà in simboli algebrici $1:\sqrt{3}::a-x:$ FH $=(a-x)\sqrt{3}$, ed OH $=(a-x)\sqrt{3}-y$. Laonde dovendo essere OH doppia di OE, come l' è CA di CK (pe' triangoli simili AKC, HOE), si avrà OE $=\frac{1}{2}(a-x)\sqrt{3}-\frac{1}{2}y$.

E però siccome dalla condizione del problema si ha

$$\text{OD}+\text{OE}+\text{OF}=\text{AK}$$

così sarà nelle loro espressioni simboliche

$$\tfrac{1}{2}x\sqrt{3}-\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{2}a\sqrt{3}-\tfrac{1}{2}x\sqrt{3}-\tfrac{1}{2}y+y=\tfrac{1}{2}a\sqrt{3}.$$

La quale equazione riducendosi ad

$$\tfrac{1}{2}a\sqrt{3}=\tfrac{1}{2}a\sqrt{3}$$

ne mostra che un qualunque punto preso nell' aja del triangolo proposto soddisfi alla dimandata condizione, e però che il problema si trasmuti nel seguente

Teorema.

Le perpendicolari tirate da un punto qualunque preso nell' aja di un triangolo equilatero su i lati di esso sono, insieme prese, uguali all' altezza del triangolo.

La qual verità rilevavasi immediatamente dalla 41. *Elem. I.*, e 1. *II.*

Alla prop. XXII. (*§. 448.*) — La chiarezza ed il rigore del dimostrare formando il principal pregio di un geometrico lavoro, non troviamo superfluo di prender occasione dal *principio* esposto nella presente proposizione per dire alcuna cosa su questo importante argomento, che valga anche a chiarire ciò che in esso stabiliscesi, e poi viene in appresso sviluppato dall' autore nelle proposizioni da 32 a 40.

La *dimostrazione* di un teorema è una catena di verità chiare, dalle quali n' è la tesi di esso dimostrata. E tale è per l' appunto ancora la dimostrazione che fa parte della composizione di un problema, ove la costruzione costituisce come l' ipotesi di un teorema, e la tesi è che quella ne conduca ad ottenere ciò che nelle condizioni del problema esigevasi.

Le verità concatenate in ogni dimostrazione il più delle volte sono le definizioni de' termini usi nel teorema, le proprietà note del soggetto di esso, gli assiomi, o altri principii anteriormente stabiliti, oltre l' intera ipotesi del teorema, che dee formar sempre il fondamento della dimostrazione, altrimenti questa riescirà fallace ed insulsa.

L' assenso che prestiamo ad una verità dimostrata è in parità di altre cose tanto più celere, quanto più chiari sieno i principii su cui è fondata la dimostrazione, meno numerosi, e con nesso più idoneo tra loro connessi ed ordinati.

Le operazioni che connettono tra loro le verità delle dimostrazioni possono essere sintetiche o analitiche, come sarà specificato in appresso.

Una dimostrazione sintetica consiste principalmente in un giudizioso maneggio di *ragioni* delle grandezze guidato da' principii della Geometria elementare. E questi sono di due generi. L' uno, che è più agevole, fondato nella sola uguaglianza di due grandezze geometriche regolata da' primi assiomi di Geometria. L' altro contiene i rapporti di disuguaglianza tra le grandezze guidati dalle verità del V° e VI° degli Elementi, o da altre dipendenti da queste (*Vegganzi i supplimenti al V° libro del nostro Euclide , ed il cap. 3. lib.I. del presente trattato*) . E ciò risulta dilucidato , pel primo genere suddetto , dalle dimostrazioni de' primi quattro libri degli Elementi di Euclide , e pel secondo da' libri geometrici dal VI° in avanti , e da quelli di Archimede , di Apollonio , e di altri geometri antichi e moderni , ove ancora a questi sia tornato a grado scriver cose sublimi in sintesi rigorosa .

L' egualità delle grandezze geometriche o dimostrasi col principio di congruenza , o con quello di una prossima conterminazione , come vedesi usato da Euclide nel lib. XII. e da Archimede nelle profonde ed impareggiabili sue opere. Ed i moderni vi hanno ancora aggiunto *essere uguali quelle grandezze, che differiscano per una quantità inassegnabile*.

Col solo principio di congruenza si dimostra la perfetta egualità de' triangoli , che sono le parti elementari delle altre figure rettilinee ; laddove l' imperfetta eguaglianza di essi e di altre figure deducesi dallo stesso principio maneggiandolo con gli assiomi , come sono fatte le dimostrazioni del lib. II° degli Elementi.

L' uguaglianza delle grandezze suole ancor dimostrarsi col *metodo degl' indivisibili* del Cavalieri , o con quello *delle prime ed ultime ragioni* del Newton (*Vegg. per essi il* discorso preliminare alle Sezioni coniche *in fine*).

L' eleganza di una dimostrazione sintetica consiste nella concisione e chiarezza del di lei tessuto ; onde sarà elegantissima quella che si derivi da una sola proprietà del soggetto della proposizione , e dalle sue condizioni , o da pochissime di quelle . E molti esempi di queste dimostrazioni si hanno ne' primi sei libri Euclidei , tal che quelle delle prop.13. 15. *I. ec.* ; 1 , 2 , 3. *II. ec.*

E però se una dimostrazione risulti troppo lunga ed intralciata converrà ingegnarsi in ogni modo per abbreviarla e chiarirla ; e quando ciò non possa succedere sarà ben fatto staccarne alcuna parte, formandone un previo teorema , o un lemma , secondo che questa nuova proposizione sia dello stesso argomento che si sta trattando , o di diverso. Così fece , per un esempio del primo caso , Euclide , staccando la 7.*El.I.* dall' 8 , e pel secondo premettendo alla 2. *El.XII.* il lemma che enunciasi nella prima.

Una dimostrazione sintetica perde la sua eleganza qualor vi s' intruda qualche operazione che all' Aritmetica o all' Analisi algebrica propriamente si appartenga , come moltiplica , divisione , *ec.* Al qual proposito il Newton così esprimevasi : *Multiplicationes , divisiones , et eiusmodi computa in Geometriam recens introducta sunt : idque inconsulto , et contra primum institutum scientiae huius* , soggiungendovi . *Nam qui constructiones problematum per rectam et circulum a primis geometris adinventas considerabit , facile sentiet Geometriam excogitatam esse ut expedito linearum ductu effugeremus computandi taedium . Proinde hae duae scientiae confundi non debent . Veteres tam sedulo distinguebant eas ad invicem , ut in Geometriam terminos aritmeticos nunquam introduxerint . Et recentes utramque confundendo amiserunt simplicitatem in qua Geometriae elegantia omnis consistit.* (Appendix *de aequat. const. lin.*)

Le dimostrazioni analitiche poi o consistono nel maneggio delle equazioni algebriche , o nell' evoluzione di qualche formola siasi algebrica o trascendente , o nel passaggio da' differenziali agl' integrali loro , o da questi a quelli , cioè nell' integrare o differenziare espressioni date .

Alla prop.XXVIII. parte 1. (§. 471.) — Da ciò si rileva la costruzione geometrica delle equazioni del 2° grado identicamente alla ricerca di quelle due rette che ne rappresentano le radici , e delle quali fu assegnata l' esibizione nel §. 14.

Al §.471 parte 2 , ed alla noterella a piè pagina. — L'autore ha in noterella ben caratterizzati i problemi che avea detti *affini* nella proposizione , dichiarandoli *casi* del problema proposto , a ciascun de' quali soddisfa ciascuna radice reale dell' equazione cui si è pervenuto risolvendolo . E tutt' i diversi problemi risoluti nel corso del presente trattato con l' analisi Cartesiana confermano questa dottrina consona alla natura de' problemi , ed a quel nesso che debbono aver fra loro le radici dell' equazione cui si perviene in risolverli *(Vegg. l' ultimo capo del lib. IV. dell'* Analisi Algebrica elementare) .

Ma poichè due sommi geometri italiani de' bei tempi del passato secolo , *Vincenzo Riccati* , e *Saladini* , equivocando , come può pure a' geometri avvenire , essendo ancor essi uomini , vi hanno manifestamente contraddetto , stabilendo il falso principio , che in taluni problemi non tutte le radici dell' equazione che vi corrisponde soddisfino ad essi ; mentre l' una il risolve , ed un' altra corrisponde ad un problema tutto diverso , e che al più è una conseguenza della soluzione del primo ; nè altri avendo ancora ciò avvertito , il che di grave danno risulta per quella scienza diretta e positiva , che forma la vera dottrina di un geometra , noi ci crediamo in dovere , or che l' occasione ci si presenta di chiarire siffatto importante argomento , e di rimuovere , e spiegare le difficoltà indottevi da que' distintissimi matematici .

Essi dunque , tra gli altri problemi elementari , che propongono per esercizio nel cap. 9 lib. I. delle loro ben elaborate *Institutiones analy-*

ticae vi recano quello di: ***Costituire su di una data base il triangolo isòscele, di cui ciascun angolo a questa adjacente risulti doppio di quello al vertice***. E col bisecar l'un degli angoli alla base, ottenendo il triangolo verso questa, di cui essa n'è lato, simile al richiesto con la base data a, e con x pel lato cercato, pervengono facilmente all' equazione

$$x^2 - ax - a^2 = o$$

Or questa è precisamente quella della divisione di una retta ***in estrema e media ragione***, col segno cambiato nel secondo termine, il che non ha fatto altro, com'è noto, che cambiar la radice positiva di quella nella negativa di questa, e viceversa. Ed essi ottenute tali radici, che sono

l' una positiva $\quad {}^1\!/_2 a + \sqrt{(a^2 + {}^1\!/_4 a^2)}$

l' altra negativa $\quad {}^1\!/_2 a - \sqrt{(a^2 + {}^1\!/_4 a^2)}$

manifestamente dicono, che commetterebbe errore gravissimo colui che dicesse, che l'una e l'altra potesse risolvere il problema, mentre non può soddisfarvi che la sola positiva. ***Si quis tamen ex eo, quod ex analysi eadem profluant existimaret ambas propositum problema solvere erraret is sane vehementer; unica enim usui esse potest radix positiva***.

Ma a mostrar chiaramente, che non si errerebbe così pensando, e che quelle due radici dieno effettivamente due soluzioni diverse del problema stesso, basterà ripigliarlo proponendolo, ed eseguendone la soluzione alla maniera giudiziosa Euclidea, cioè prendendo per noto il lato del triangolo richiesto, e per ignota la base; da che si perviene all'identica equazione che per la divisione di una retta in estrema e media ragione, cioè

$$x^2 + ax - a^2 = o$$

le cui radici sono

$$x = -{}^1\!/_2\, a + \sqrt{(a^2 + {}^1\!/_4\, a^2)}$$

$$x = -{}^1\!/_2\, a - \sqrt{(a^2 + {}^1\!/_4\, a^2)}$$

Ed è chiaro che le soluzioni del problema principale, cioè il proposto, debbano corrispondere a quelle del problema ridotto, e quindi dipendere dalle radici di questo.

Or Euclide si valse della prima positiva a risolvere il problema, poichè di questa aveva ancora usato nella suddetta divisione di retta, e nell'identico problema della *prop. 11. El. II.* Ma ben poteva adoperarvi ancor l'altra negativa, prendendovi questa per base del triangolo, ed eseguendo la medesima costruzione. Adunque i due triangoli corrispondenti a' due casi del problema risultano l'uno costituito dalla retta assunta per lato, cui corrisponde per base la parte di essa, che nella divisione in estrema e media ragione costituisce il termine medio della proporzione; l'altro tiene per lato la retta assunta prodotta finchè il rettangolo di essa nella medesima con l'aggiunta pareggi il quadràto di questa, e per base la retta assunta. E ciò che dal ragionamento finora fatto è direttamente chiaro potrà anche rilevarsi dall' osservare, che tali triangoli risultino simili; poichè dee stare

$$a : -{}^1\!/_2 a + \sqrt{(a^2 + {}^1\!/_4 a^2)} :: a + {}^1\!/_2 a + \sqrt{(a^2 + {}^1\!/_4 a^2)} : {}^1\!/_2 a + \sqrt{(a^2 + {}^1\!/_4 a^2)}$$

mentre sono uguali i prodotti de' termini estremi, e de' medii.

E nel modo come vien considerato il problema da Riccati e Saladini partendo dalla base data, le soluzioni sono, per quella direttamente richiesta e trattata, il triangolo ABC di cui essendo a la base BC [*fig. 110.*], il lato AB risulta ${}^1\!/_2\, a + \sqrt{(a^2 + {}^1\!/_4\, a^2)}$, e l'altra è precisamente il triangolo BCD nel quale la base è BD $= -{}^1\!/_2\, a + \sqrt{(a^2 + {}^1\!/_4 a^2)}$, ed il lato è BC $= a$, cioè quello che si era dato per base. Da che rendesi ancora evidente, che le soluzioni del problema per questo modo preso corrispondonsi inversamente a quelle che ottengonsi dal modo come l'aveva trattato Euclide. Il che veniva già dimostrato dal cambiamento solo di segno al secondo termine nelle loro identiche equazioni, e però dall' inversione delle loro radici.

Dopo ciò stimiamo inutile il discendere ad analizzare tutto il rimanente ragionamento che que' due geometri fanno per cercare di stabilire un principio contraddittorio alla natura de' problemi, e la cui falsità risulta evidente dall' aver noi direttamente assegnate le due soluzioni del problema in quistione corrispondenti alle due radici dell' equaziono ad esse.

Alla prop. XXIX. (§. *473.*) — Se il triangolo dato invece di rappresentarlo per EFO [*fig. 17. N.*] si fosse dinotato per EGP, sarebbesi ottenuta più immediatamente l' analogia di riduzione GA : AC :: AC — GP : GP.

Al §. *475.* — Questo argomento importante e difficile della moderna analisi geometrica è stato da noi a lungo trattato in una *memoria*, che da più anni addietro presentammo alla R. A. delle Scienze di Napoli, e che ritennimo per compierla, la quale verrà ora pubblicata a suo luogo negli *Opuscoli matematici*.

Alla prop. XXXI. (§. *480.*) — Di tali problemi, per quanto conviensi al presente trattato, sarà ragionato nella Part. II.; ed una ben lunga serie de' medesimi elegantemente risoluti dal Fergola ne fu recata negli *opuscoli* 9, 10, 11 di quelli inseriti nel volume pubblicatone nel 1811.

Al §. *481.* — Veggansi ancora le note 15 e 18 al *Prospetto.*

Al §. *485.* — L' elegante costruzione che vedesi recata al problema proposto in questo §. corrisponde assolutamente al problema al quale esso è ridotto (*Vedi* §. 14.), ed alla costruzione geometrica dell' equazioni del 2° grado

$$x^2 - ax + b^2 = o$$

(*Vedi nota alla prop. 4. I.* §. *14.*)

Al §. *493.* — Il Newton voleva assolutamente, che si praticasse ciò che in fine di questa proposizione si accenna. Ed egli così esprimeasi: *ut omisso quatenus fieri potest, calculo algebrico, theorema fiat concinnum et elegans, et publicam lucem sustinere valeat. (Opusc. t. I. p. 170.)* Ed al di lui sentimento assentirono tutt' i geometri de' suoi tempi, e specialmente l' Ugenio.

Al cap. I. App. — I problemi *de Sectione determinata* sono di quelli a' quali soddisfa meglio l' analisi Cartesiana che l' antica, non avendo bisogno per l' una di tante distinzioni di casi, di soluzioni, e di determinazioni quanto per l' altra; da che potè Apollonio comporne due libri, che formavano il quarto anello del *Luogo risoluto piano*, secondo l' ordine datovi da Pappo. È per questa ragione, che il Fergola si è limitato ad esibirne tre di essi solamente, premettendo le soluzioni algebriche alle geometriche. E dee ancor notarsi, che tali problemi essendo di pura quantità o rapporto non danno affatto luogo ad applicarvi l' *analisi a coordinate*.

Alla prop. I. (§§. *506*, *507*, *508*) — La costruzione geometrica recata nel §. 507 non è che l' ordinaria per le radici delle equazioni di secondo grado (*Vegg. la prop. 4. I, e la nota corrisp.*). L' altra soluzione algebrica poi, che vien riportata nel §. 508, in cui l' analisi è prolungata fino ad ottener l' analogia proposta nel *principio* di riduzione geometrica pe' problemi del 2° grado, serve a comprovare sempre più la corrispondenza di un tal principio con la costruzione delle equazioni suddette.

Al §. *509.* — Questa elegante soluzione del problema per mezzo del semicerchio vi fu recata dal valoroso giovine matematico siciliano conte Ruggiero di Ventimiglia (*Vedi pag. 256 dell'* Analisi geometrica *di Ugone di Omerique*), ed essa è a detto del Simson assai migliore di quella che ne diede l' Anderson nel cas. 1. del probl. 9 del suo *supplementum Apollonii redivivi*.

Intanto giova qui notare, che avendo Pappo lasciato detto aver Apollonio, dopo trattati i problemi di questa famiglia *communi methodo tentamen faciens, ac solis rectis lineis usus, ad exemplum secundi libri Elementorum primorum Euclidis* (il che c' indica che Euclide servissi in tali sue dimostrazioni della semplice retta divisa, senza costruir figure, come ora vedesi; e ciò dovè esservi stato mutato da Teone): *ac rursus idem demonstravit ingeniose quidem, et magis ad istitutionem accomodate, per semicirculos*, il Simson sì per la precedente soluzione del Ventimiglia, che per le altre in consimil modo date per le varie disposizioni del punto cercato in tal problema rispetto a' dati, e che appartengonsi all' Anderson, e ad Ugone d' Omerique, opinò che non fossero quelle che per tali casi recovvi Apollonio, adducendo per ragione, che: *demonstrationes epitagmatum probl. 5 et 6 per semicirculos hic traditae, parum aut nihil ingenii requirunt.* Ma a noi pare che precisamente per questa somma facilità esse abbiano maggior merito, e però potessero corrispondere a quelle che ne diede Apollonio; e ci conferma in tale opinione la soggiunta di Pappo *magis ad institutionem accomodatae*; il che dinota dover le medesime essere ancora più semplici di quelle fatte *solis rectis lineis*; e però elementarissime.

Alle prop. II. e III. (§§. *512 a 519.*) — Questi due problemi possono comprendere tutt' i casi di que' due che costituivano il lib. II. *de Sectione determinata* di Apollonio; e del secondo di essi problemi (§. 515) il Fergola, dopo averne data una soluzione algebrica che poi prolunga fino a pervenire direttamente all' ovvio problema di riduzione per quelli di secondo grado, aggiugne una sua soluzione *per semicirculos*; ed un' altra essendosene ancor rinvenuta ne' suoi MSS. in un foglietto volante, che ci è sembrata assai elegante, l' abbiamo però recata nell' *Aliter*. A che soggiugniamo valer questa sì pel caso che il punto richiesto cada nel segmento medio della retta data, che in uno degli estremi; mentre l' altra soddisfa al solo caso che un tal punto cada nell' un de' segmenti estremi.

Alla prop. IV. (§. *520.*) — Non contento il Fergola di avere ne' precedenti problemi dimostrato, e dalla loro equazione, e con l' uniforme riduzione al *principio* stabilito nel §. 471, ch' essi ascendono al 2° grado, ha voluto in questa proposizione direttamente stabilirlo con un ragionamento algebrico. E quì conchiudendo osserveremo, che se i problemi *de Sectione determinata* costituivano nell' antica analisi un de' cardini principali per la riduzione de' problemi *piani* del 2° grado, non tralasciano di render simile importante servigio alla moderna analisi, di che può darne un argomento la costruzione esibita dal Trudi della soluzione del Lagrange del problema del cerchio e de' tre punti (*Vedi la risposta al quesito n. 1. del programma proposto nel 1839.*) -

Alla prop. V. (§§. *522 a 524.*) — Questo problema comprende tutti quelli che Apollonio espose ne' due libri *de Sectione rationis* la diversità de' quali per la varia disposizione del punto dato rispetto alle date rette ne costituiva tanti diversi, che quel gran geometra, seguendo il costume e le regole dell' antica Geometria, trattò separatamente (*Veggasi la loro esposizione secondo il testo tradotto dall' arabico dall' Halley*; *ed anche la 1ª dissert. nel vol. I. degli Opuscoli*). Ed il Fergola ha ancor voluto, con l' elegante soluzione geometrica, che ne ha data condurne la riduzione al problema fondamentale per quelli del 2° grado.

Alla prop. VI. (§. *525*) . — Quest' altro problema comprende ancora tutt'i casi di quello *de Sectione spatii* considerati da Apollonio ne'due suoi libri di tale argomento (*Veggasi la restituzione fattane accuratamente dall' Halley, e la dissert. di sopra cit.*). Ed il Fergola ne ha ancora ridotta la soluzione geometrica a quel principio fondamentale.

A' problemi delle Inclinazioni trattati nel cap.III. (§§.*510 a 556.*)— Tutt' i problemi *de sectione determinata* si è veduto, ed è stato pur dimostrato esser *piani*; ed ancor tali sono risultati quelli *de Sectione rationis*, e *de Sectione spatii*. Non così però de' problemi *Inclinationum*, che però Pappo dovendo parlare di quelli trattati da Apollonio ne' due libri di siffatto argomento, che terminavano il *Luogo risoluto piano*, si vide nell' obbligo di specificare che di essi *quaedam sunt plana, quaedam solida, quaedam etiam linearia*, dichiarando poi che Apollonio in tali due libri non trattava che solamente *selecta quaedam e planis, quae ad plura magis utilia sunt*. Ed il Fergola ha pur fatto lo stesso nel principiar questo argomento (§. 527), serbandosi a trattar gli altri, ed ancora estendendone il campo, in appresso (*Vedi il* §. *25 del prospetto*).

Intanto ci conviene notare, ch' egli per quelli che quì elegantemente scioglie non ebbe presente che la divinazione fattane dal Ghetaldo, nel suo *Apollonius redivivus*, ove questo geometra diede le semplici composizioni di tali problemi; e forse le derivò dalle soluzioni fattene col metodo Cartesiano, come congetturò fondatamente l' Horsley, in fine della sua *restituzione* di tali libri di Apollonio; il che le rese ineleganti e stentate. Nè potè il Fergola veder quelle del citato geometra inglese, perchè all' epoca in cui egli rifaceva per l' ultima volta la sua *Arte Euristica* quell' opera non era tra noi giunta.

I problemi trattati in que' due libri Apolloniani possonsi ridurre a' tre che quì da noi espongonsi nelle prop. 7, 8, 9, risoluti in più modi geometricamente, e col metodo Cartesiano (*Veg. la dissert. 1. nel vol.I. degli* Opuscoli matematici).

Alla soluz.anal.della prop.VII. (§§.*530-531.*) — Qui cade in acconcio l' accennar qualche cosa intorno alla difficile ed oscura esibizione geometrica delle radici negative, che tanto ha impicciato ed impiccia sommi analisti moderni, fino ad aver dato luogo a manifesti errori, de' quali uno se n' è già veduto nella nota al §. 471.

Tratto a meditare su questo argomento dagli equivoci in cui vedeva essere stato indotto da ultimo il Carnot (*Géométrie de position*) inconsideratamente adottati in opere elementari, composi, sono parecchi anni, su di esso una *memoria* che presentai, ancora non interamente compiuta, alla R.A. delle Scienze di Napoli, in tempi per questa più regolari e decenti, che ritenni presso di me per compierla, ed ora serbo a miglior uso per gli *Opuscoli matematici*, che dovrò pubblicare, come fu annunziato nel *Prospetto*, e ripetuto nel *Manifesto* di tal pubblicazione.

Estrarrò dunque da tal memoria quello che concerne specialmente caso del problema presente, per quì indicarlo in breve.

Or il Fergola, nella sua prima soluzione analitica, prendendo per ignota la distanza del punto A [*fig. 12. III.*] da quello ove la retta da applicarsi incontra la circonferenza, ossia il raggio di quel cerchio, che con l' intersegar questa ne dà il punto soddisfacente al quesito, nell' imbattersi nelle due radici

$$x = {}^1/_2\, c + \sqrt{(a^2 + {}^1/_4\, c^2)}$$
$$x = {}^1/_2\, c - \sqrt{(a^2 + {}^1/_4\, c^2)}$$

l' una positiva, l' altra negativa, mentre gli era facile assegnar la prima per la AH, esitando in assegnar la seconda, ebbe ricorso al ragionamento che leggesi nel §. 531, stabilendo una opposizione di sito tra il semicerchio superiore alla retta AC, e l' inferiore, come se nel problema, o nell' intrapresa analisi di esso vi fosse qualche circostanza che valesse a distinguer quello da questo.

Ma un tal cambiamento di sito nè meno è quella opposizione diretta che si richiede per distinguere il positivo dal negativo; sicchè il d'Alembert ed il Carnot, servendosi dello stesso suo ragionamento, ne traevano per conseguenza, in un problema analogo, che la radice positiva e la negativa potessero risultare dal verso stesso.

Non potendo qui esporre su tale assunto tutto quello che si troverà rapportato nella memoria suddetta, mi limiterò a dire, che l'equivoco in cui si cade in simili casi dipende dall' irregolare stabilimento dell' incognita in giro, e quindi senza sito. E perchè si vorrà poi ch' ella ne avesse nel risultamento dell'analisi, e quando si ha bisogno di costruirla? E però, volendo uno assegnargliene, giunti a questo termine, conviene prender la radice positiva dal punto A sul diametro AC, come la AP [*fig. 17. N.*], e la negativa sul medesimo prolungato dal verso A, come la AP'. Or come che l' incognita presa in giro non si appartiene piuttosto ad una parte del piano su cui segnasi la figura, che all' opposta, cioè più alla destra del punto A, che alla sinistra, ne segue però che bisognerà descrivere un altro identico cerchio col diametro AC prolungato dalla parte A, e presa in questo la AL' uguale alla AL, ed ordinatavi la N'L' n', descrivendosi con le due radici AP, AP' i due cerchi HHH'H', *hhh'h'*, l' un di essi darebbe la radice positiva nell' uno o nell'altro de' semicerchi AHHA, AH'H'A, l' altro inversamente ne' medesimi la negativa, essendo indifferente il considerare per la compiuta costruzione di tal problema, o i due semicerchi superiori alla C'C, o gl' inferiori, o l' uno superiore l' altro inferiore. E solamente, attesa l' identità di soluzioni sì per l' un cerchio, che per l' altro; se vogliansi le due soluzioni ridurre su di un medesimo, si potrà prendere, nel cerchio ACA per l' una la AH, per l' altra la A *h*.

Si è poi fatto osservare dallo stesso Fergola, come ogni equivoco rimaneva tolto con lo stabilimento convenevole dell' incognita dal punto A, e sulla retta di sito AC; ed egli ha però detta tal soluzione *più idonea* (534). E noi trarremo da ciò e dalle precedenti considerazioni, la seguente regola di stabilire l' incognita, per la regolare soluzione e costruzione de' problemi.

REGOLA.

Doversi prender sempre l' incognita da un punto di sito, e su di una retta di sito, salvo qualche caso in cui si vantaggi grandemente nella soluzione del problema, e che siesi sicuri di non cadere in equivoci sulle soluzioni corrispondenti alle radici negative, per le quali si abbia presente la maniera da noi poc' anzi esposta. Di che non mancheranno esempi nella raccolta di problemi che, come abbiamo detto a pag. XIII. della *prefazione*, recheremo in fine del presente trattato.

Alla prop. VIII. (§.535) — All' equazione di questo problema corrispondendo pur due radici l' una positiva l' altra negativa, ha però esso due soluzioni, delle quali l' una apparisce dalla AI [*fig.13.III.*]; ma l' altra affatto non si rinverrebbe, nè tampoco ammettendo quel ragionamento fatto dal Fergola per assegnar la radice negativa, nella prima soluzione algebrica da lui recata al problema precedente (Veg. *la prec. nota*); poichè non può mai dal punto A inclinarsi, altra corda al di sopra o al di sotto della AI (sia che prendasi questa nel semicerchio superiore, sia nell' inferiore al diametro AC, sicchè l' interposta risulti uguale alla IH.

Ma continuando a ragionare nel modo stesso come nella nota precedente si è fatto: ecco in qual modo si avrà l' altra radice.

Nell' analisi recata al problema non v' ha cosa che dichiari dover l' un semicerchio essere al di fuori dell' altro; e potrebbe quindi il semicerchio DGB intersegare l' altro AIC, ed il punto O trovarsi tra C ed A, senza che l' equazione al problema ne rimanesse in altro alterata che nel solo segno del secondo termine, per indicar giusto l' inversione delle radici della precedente. Ma nè tampoco essendo dichiarato il sito del semicerchio DGB rispetto all' altro AIC, cioè se a destra o a sinistra di questo, dee il risultamento del problema corrispondere all' una o l' altra posizione indicata. Adunque si vede, che mentre la radice positiva dell' equazione corrisponde all' un caso de' cerchi per un verso, la negativa soddisfa al caso opposto de' cerchi nel verso contrario; o sia mentre l' una radice offre la IH tra i cerchi AIC, DGB l' un fuori dell' altro, e 'l secondo a destra del primo, la radice di segno contrario corrisponde all' interposta tra il cerchio AIC, e l' altro corrispondente a DGB dal verso opposto, cioè a sinistra, e che interseca esso AIC.

E questa strana maniera di andar congetturando le radici di un' equazione risultante da un problema geometrico, per costruirlo, è, come si è detto, l' effetto dell' improprio modo di stabilire l' incognita in giro, e però senza un determinato sito rispetto alle linee costituenti i dati del problema: laonde un tal modo dovrà sempre evitarsi, giusta la regola che ne abbiamo data in fine della precedente nota. E di ciò si rimarrà vieppiù convinti, se, stabilendo l' incognita nel modo proprio, trattisi l' analisi di questo problema analogamente a come si fece dal Fergola pel problema precedente, nella soluzione ch' egli disse *più idonea*.

Al §.340. — Le due equazioni al problema proposto nella precedente prop. ed algebricamente risoluto nel §. 539 riduconsi nel caso del quadrato, come si è veduto nel presente §., ad

$$1 \qquad x^2 - (a+n)x = -a^2$$
$$2 \qquad x^2 - (a-n)x = -a^2$$

dalla prima delle quali si ha

$$x - a + \frac{a^2}{x} = n$$

Or abbassando dal punto E la perpendicolare EP sulla AG[*fig.17.III.*], ed elevando alla FE la perpendicolare EG risulta

$$\mathrm{DP} = \mathrm{CE} = x - a \quad , \quad \mathrm{PG} = \frac{\mathrm{EP}^2}{\mathrm{AP}} = \frac{a^2}{x}$$

e però
$$\mathrm{DG} = \sqrt{(a^2 + b^2)}$$

Adunque prolungando la AB in G, finchè $\mathrm{BG} = \sqrt{(a^2 + b^2)}$, e descrivendo sulla AG il semicerchio AEG, le intersezioni E, *e* di questo col lato BC del quadrato segneranno i due punti soddisfacenti alle radici della 1ª equazione; il quale artifizio sorrisponde appunto a quello di Eraclito, recatoci da Pappo nella prop. 70. lib. VII. *Collect. math.*

Imperocchè tale equazione indica per le due rette reciproche ad a, a ed aventi per differenza $a + n$, le $a + n - x$ ed x; e queste, com'è chiaro, sono le AP, PG. o sia le BE, B*e*. Nè quì vi ha caso impossibile, per esser sempre $a < a + n$, cioè di $a + \sqrt{(a^2 + b^2)}$.

Ma dal maneggio dell' altra equazione

$$x^2 - (a - n)x = -a^2$$

rileviamo dover essere

$$x = \frac{a-n}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n-a}{2}\right)^2 - a^2}.$$

Onde ad evitare il caso impossibile dovrebb' essere

$$n^2 + a^2 - 2an > 2a^2 ,$$

e ponendovi per n il suo valore $\sqrt{(a^2 + b^2)}$, dovrebb' essere a tal uopo

$$a^2 + b^2 + a^2 - 2a\sqrt{(a^2 + b^2)} > 4a^2$$

cioè
$$b^2 - 2a^2 > 2a\sqrt{(a^2 + b^2)}$$

ovvero
$$b^4 + 4a^4 - 4a^2b^2 > 4a^4 + 4a^2b^2 .$$

Ed essendo finalmente $b^4 > 8a^2b^2$, dee essere $b^2 > a^2$

Intanto le radici delle equazioni

$$x^2 - (a - n) = -a^2$$

quando non sono impossibili, sono false, cioè negative: poichè vedesi essere

$$\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{(n-a)}{2} - a^2\right)} > \frac{n}{2},$$

ovvero

$$\left(\frac{n-a}{2}\right)^2 - a^2 < \left(\frac{a-a}{2}\right)^2$$

E lo stesso avrebbesi potuto benanche rilevare nella duplice succéssione di segni, che scorgesi nell' indicata equazione

$$x^2 + (n - a)x + x^2 = o,$$

essendo la $n > a$.

Or questa seconda equazione può costruirsi con quel medesimo artifizio della precedente, cioè,

Fatta la $\mathrm{DG}' = n$, si descriva un semicerchio sulla AG'; gl' incontri della circonferenza di esso col lato AC del quadrato, disteso quanto conviensi, cioè i punti E', *e'* saranno quelli, che si cercano.

Imperocchè essendo $\mathrm{DG}' = n$, ed $\mathrm{AD} = a$, sarà $\mathrm{AG}' = n - a$. Ma è poi la $\mathrm{AP}' = -x$, come opposta alla $+x$, e quindi $\mathrm{P'G'} = -\frac{a^2}{x}$; onde sarà $n - a = -x - \frac{a^2}{x}$, per esserne $\mathrm{AG}' = \mathrm{AP}' + \mathrm{P'G'}$. E quindi avremo la proposta equazione

$$x^2 + (n - a)x + a^2 = o.$$

Conchiuderemo questo argomento con le seguenti riflessioni. Ed in primo la soluzione Cartesiana di questo problema sebbene sia ingegnosa, non è naturale, nè naturalmente può fluirne da essa quell' elegante composizione che Pappo ci ha tramandata. Il marchese de l' Hopital imbattendosi in una consimile biquadratica equazione propose come un artifizio intuitivo, ch' ella era il prodotto delle due equazioni di 2º grado

$$x^2 - (a + n)x + a^2 = o$$
$$x^2 + (n - a)x + a^2 = o$$

e che bisognava risolver queste per aver le radici di quella biquadratica equazione. Il sommo Newton ponendo la $\mathrm{AF} = x$ incontrò pure un' equazione biquadratica, e si valse di un artifizio affine al nostro per abbassarla al secondo grado. Ma quali saranno le radici false di tal" equazione, o dove avranno a prendersi le rette negative rispetto alla AF? Ed eccoci al solito inconveniente per l' incognita presa in giro. In oltre quell'artifizio di composizione come potrà ottenersi da quest'altro tipo di analitica soluzione? o come poterlo estendere al rombo?

CONCHIUSIONE

per questa parte Iª delle note.

Dopo le riflessioni fatte sulla natura de' problemi geometrici, ed il modo di convenevolmente risolverli ci è lecito conchiudere ad istruzione de' giovani, che nello stato in cui sono le Matematiche, e con tanto sopruso che si fa della moderna Analisi, la scienza ha però ragione di richiamarsi, che siensi tralasciate di rettificare alcune nozioni fondamentali ne' metodi geometrico-analitici, dimenticando anche le sagge proposte, che avvedutamente ne avevano fatte sommi uomini del passato sècolo; sicchè mentre tutto giorno i coltivatori di essi vanno spigolando ne' campi da altri già mietuti, per raccogliervi qualche avanzo talvolta non isfuggito a quelli, ma poco curato, tralascian poi quelle ricerche delle quali la scienza ha bisogno, perchè al suo vero nome, ed alla qualità sua corrisponda. E per talun argomento diviene ciò tanto più necessario, quanto che troppo leggiermente considerato, n' è risultato di gettar l' incertezza nella scienza stessa, di porre innanzi paradossi, e di fin giugnere a dar fondamento a' detti del Wolfio, che nell' Analisi moderna *plura irrepserint a veritate aliena, et quamplurima firmiori fundamento superstrui mererentur.*

È facile al presente la soluzione di un problemetto, lo sviluppo di una formola, la trasformazione di qualche altra, che talvolta con poco accorgimento si valuta per nuova. Ma da ciò poco o nessun vantaggio la scienza riceve. Intanto alcuna nuova ricerca da più tempo non appare ne' metodi; e mentre tanto si contende per particolari in essi, nessuno osa penetrarvi addentro, ed impossessarsi di lor natura. È questa scienza diretta che costituisce il matematico, non già quella per la quale ora piana n' è la via, e facilmente si apprende, e che tanto vale, quanto che può a quella condurre. Disgraziatamente però or quasi tutti si arrestano a questo limitare, nè oltre procedono, che grave fatica bisogna durare in leggere e meditare sulle cose da' sommi uomini prodotte, e che avrebber bisogno di qualche perfezionamento.

E poichè dall' ignoranza si genera orgoglio, si è veduto schiuder tra noi uno sciame di sciagurati giovani professori, i quali gridano alla napoletana contro ogni istituzione antica, ed ogni metodo che a questa appartengasi, e che essi affatto affatto non conoscono, nè valgono a poter conoscere, e si fan pregio di confessarlo; e dove non giungono in trattare a lor modo qualche problema geometrico che venga proposto, impudentemente rivolgonsi a dir puerili le ricerche di tal natura. Or a costoro serva d' istruzione, per rimetterli in buon cammino, se mai sia possibile, il conoscere, che per quanto valga l' attuale scuola matematica Europea, essa non vanta nel momento uomini di quel merito, e di quella profondità che ha avuti ne' secoli XVIIº, e XVIIIº. Nè certamente in questi felicissimi nostri tempi, di un secolo che da se si è appellato *del progresso*, abbiamo chi comparare a' Newton, Leibnitz, i Bernoulli, l' Eulero, ed a tanti altri, e finalmente al Lagrange, per opera de' quali l' Analisi moderna, ed i metodi ch' essa adopra sono saliti a grado sì eminente. E pur costoro e coltivarono essi, ed altamente raccomandarono lo studio e la conoscenza dell' antica Geometria, e l' ebbero sempre come la base, e 'l fondamento de' nuovi metodi, poichè dal fatto riconoscevano quale e quanto profitto ne avessero tratto, dolendosi ancor talvolta di non aver abbastanza studiati gli antichi. E per recarne di alcuno i detti, il Fermat scrivendo una lunga lettera all' inglese Kenelm Digby, che inviavala al Wallis, così conchiudeva: *Monemus clarissimos viros, ut sepositis tantisper speciebus Analyseos problemata geometrica via Euclideana et Apolloniana exequantur, ne pereat paulatim elegantia et construendi et demonstrandi, cui precipue operam dedisse Veteres innuunt satis et Data Euclidis, et alii a Pappo enumerati Analyseos libri*, (Wallis Op, t. II, pag.859); e Roberto Simson, ragionando sullo stesso proposito, nella prefazione alle sue elaboratissime *Sectiones Conicae*, così conchiude: *Quapropter Geometriae cultores verbis doctissimi Fermatii monitos velim, ut sepositis etc.*

Ma che vale ammassare autorità di sommi uomini, delle quali non è questa la prima volta che ne rechiamo, quando la ragione stessa persuade ognuno che non l' abbia stravolta, che l' invenzione geometrica essendo un arte difficilissima, non convenga precludersi alcuna strada per ben riescire in una ricerca, e cercar anzi il perfezionar quelle, che sembrano ancor difettose. E poichè i metodi sono gli strumenti per l' invenzione, conviene apprenderli, impossessarsene, ed adoperarli tutti, ed a proposito, e talvolta facilitarsi il lavoro facendoli concorrere all' opera. Ciò dice il buon senso a chiunque non v' abbia rinunziato per cattiva istituzione ricevuta; che come con buon metodo erudendosi s' impara a ragionare, così i cattivi metodi d' istituzione ci assuefanno al contrario.

E per la nostra scuola starà sempre di aver essa sostenuta la purità dell' antica Geometria, accoppiandone all' uopo i metodi a quelli dell' Analisi moderna, e di essere stata da tanto, di vedere per sua opera ritornar le altre ancora su questo retto sentiero, dal quale solo potranno deviare coloro, che appena iniziati nelle Matematiche, e mancando pure della conoscenza del linguaggio in cui ci furono tramandati i lavori egregi de' matematici di altre età, non sono affatto nel caso di progredirvi, cercando loro risorse in disprezzar quello che nè men valgono ad apprendere.