CORSO

DI

MATEMATICA SUBLIME

TOMO IV.

CALCOLO INTEGRALE E SUE APPLICAZIONI

DEL DOTT. VINCENZIO BRUNACCI

CAV. DELL' ORDINE DELLA CORONA FERREA

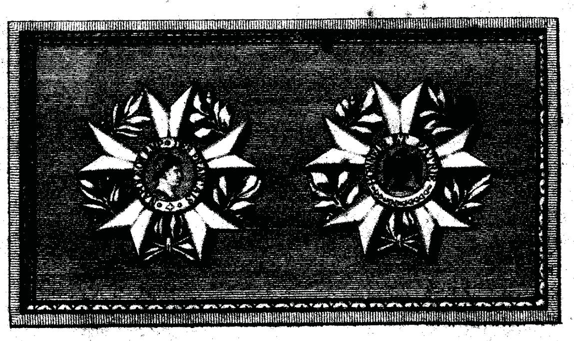
M. DELLA LEGIONE D' ONORE DI FRANCIA

DELL' IST. NAZ. C. DELL' ACCAD. DI TURINO EC.

ISPETTORE GEN. D' ACQUE STRADE E PORTI DEL REGNO

P. P. DI MAT. SUB. NELLA R. UNIVERSITA' DI PAVIA

UNO DEI QUARANTA DELLA SOC. ITAL. DELLE SCIENZE.



FIRENZE 1808.

PRESSO PIETRO ALLEGRINI

CON APPROVAZIONE.

COSTO DI TUTTA L' OPERA.

In Carta ordinaria per gli Associati lire Milanesi . . £ 62. — —

In Carta Reale per i suddetti . . . . £ 74. — —

Per i non Associati il prezzo è maggiore del 25 per %

Si avverta che per i detti prezzi i Tomi si danno legati alla rustica.

AVVERTIMENTO
DELL' AUTORE

Questo quarto ed ultimo Tomo compie il mio Corso di Matematica Sublime e l'impegno che io presi sino dal 1804 di darlo alla luce. Voglia il Cielo che ei riceva nel Pubblico l'accoglienza che ottennero i suoi fratelli! Certo ch'io nulla trascurai per rendernelo degno e per non defraudare l'espettativa di uno (*a*) dei più celebri Astronomi e Matematici dell'Europa, che primo incitommi a scrivere questo Trattato.

(*a*) Oriani nell'Aprile dell'anno 1800 così mi scriveva „ Voi mi parlate „ della Teorìa di La-Grange in maniera da farmi credere che vogliate occuparvene per rendere questa Teorìa più ovvia e più facile all'uso. Quando io „ la lessi mi parve un capo d'opera di precisione e di esattezza; ma ogni „ volta che voleva verificare una formula era obbligato a servirmi dei noti segni „ differenziali. E questo non è che un piccolo difetto, che nulla toglie all'evidenza dei fondamenti posti da La-Grange. Per rendere quest'Opera più popolare bisognerebbe dare *un Corso intiero di Calcolo Differenziale ed Integrale* „ fondato sui principj Lagrangiani, e Voi solo fra gli Italiani potreste intraprenderlo con felice successo. „

INDICE

DELLE COSE CONTENUTE IN QUESTO TOMO IV.

§§. Pag.

CAP. XI. *Delle soluzioni particolari e dell' integrazione di quelle Equazioni che non compiono i criterj d' Integrabilità.*

*262, 263, 264 — *Soluzioni particolari pell' equazioni del primo e secondo ordine* . . . 1
*265, 266, 267 — *Soluzioni particolari pell' equazioni degli ordini superiori. Soluzioni doppie* . . . 8
*268, 269, 270, 271 — *Analisi delle soluzioni particolari doppie, e loro proprietà* . . . 13
*272, 273, 274, 275, 276, 277 — *Come si trovino le soluzioni particolari non conoscendo l' integrale completo. Come possa riconoscersi se una relazione tra le variabili è soluzione particolare* . . . 20

CAP. XII. *Continuazione dello stesso Soggetto.*

*278, 279 — *Data una relazione tra le variabili, come si trovi l' equazione differenziale, di cui quella relazione è soluzione particolare* . . . 33
*280, 281, 282, 283 — *Problemi Geometrici in cui hanno luogo le soluzioni particolari. Loro significato in Geometria; rapporti Geometrici tra le soluzioni particolari e gl' integrali. Soluzioni particolari nella Meccanica* . . . 37
*284, 285, 286, 287 — *Soluzioni particolari nelle equazioni a differenziali parziali. Problema sulle trajettorie* . . . 45
*288, 289, 290 — *Cosa significhino le equazioni che non compiono i criterj d' integrabilità* . . . 55
*291, 292 — *Equazioni di tal sorta a più variabili, e degli ordini superiori. Ricerca delle curve rettificabili* . . . 62

CAP. XIII. *Ulteriori applicazioni alla Geometria ed alla Meccanica.*

*293, 294 — *Teorìa Generale dei Contatti* . . . 68
*295, 296 — *Casi nei quali lo sviluppo ordinario dell' ordinata corrispondente ad* x + ω, *non può aver luogo. Delle curve asintotiche* . . . 72

*297, 298, 299 — *Altro metodo di sviluppar le funzioni in serie ordinate per potenze di* x . . . 77
*300, 301, 302 — *Altre osservazioni sulla Teorìa dei Contatti anche di secondo ordine* . . . 84
*303, 304, 305 — *Teorìa dei Contatti delle curve a doppia curvatura: loro quadratura e rettificazione* . . . 90
*306, 307, 308, 309, 310 — *Teorìa dei Contatti delle superficie. Linee della loro massima e minima curvatura* . . . 98

CAP. XIV. *Continuazione dello stesso Soggetto.*

*311 — *Ricerca di quelle superficie, le quali aver debbono un determinato Contatto, ed una certa relazione tra gli elementi del Contatto* . . . 111
*312 — *Cosa significhino geometricamente le tre equazioni che sodisfanno ad una equazione a differenziali parziali* . . . 113
*313, 314, 315 — *Ricerca delle equazioni delle superficie per mezzo della considerazione del piano tangente. Considerazioni sopra le superficie generate dall' intersezione continua di altre superficie* . . . 117
*316, 317 — *Applicazioni a casi particolari* . . . 125
*318, 319, 320 — *Massimi e minimi delle superficie curve; loro quadratura; cubatura dei solidi* . . . 131
*321, 322, 323 — *Soluzione del celebre Problema proposto da Viviani, detto* Enimma Fiorentino . . . 136

CAP. XV. *Ulteriori Applicazioni alla Meccanica.*

*324, 325, 326, 327, 328 — *Del movimento per una curva a doppia curvatura: determinazione della curva descritta da un corpo attratto verso un punto fisso* . . . 147
*329, 330, 331 — *Ricerca della curva che descrive il centro di Gravità di un uomo che cammina* . . . 160

CAP. XVI. *Estensione del metodo dei Massimi e dei Minimi conosciuta altra volta sotto il nome di Calcolo delle Variazioni.*

*332, 333, 334 — *Spiegazione della natura di queste ricerche* . . . 166
*335, 336, 337 — *Ricerca delle curve pelle quali è Massima o Minima una funzione di* x, y *e dei differenziali della* y *rapporto ad* x . . . 171
*338 — *Cenno dell' Istoria dell' invenzione del Calcolo delle Variazioni* . . . 177

*339, 340, 341, 342 Ricerca delle curve pelle quali è Massima o Minima la quantità integrale $\int \Psi dx$ essendo funzione di x, y, $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ 179

*343, 344, 345, 346 Soluzione del Problema della più corta distanza tra due curve qualunque situate nello stesso piano. Soluzione del Problema della Brachistocrona o curva della più veloce discesa 188

*347, 348, 349, 350 Ricerca delle curve pelle quali è massima o minima la quantità integrale $\int \Psi dx$ quando in Ψ si trova anche $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ 201

*351, 352, 353 Indagine sopra i criterj che distinguono il massimo dal minimo nelle formule sopra considerate 214

*354, 355, 356, 357 Ricerca delle curve, nelle quali è massima o minima la quantità $\int \Psi dx$ quando in Ψ si contengono formule integrali. Criterio per distinguere in questo caso il massimo dal minimo 222

*358, 359 Ricerca delle curve, le quali appartenendo ad una classe d' infinite curve dotate tutte di una proprietà comune, debbono avere un massimo o minimo. Soluzione del Problema degli Isoperimetri 232

*360 Considerazione del caso nel quale la formula che divenir debbe massima o minima, è composta di più formule integrali 236

*361, 362, 363 Alcuni cenni sulla ricerca delle superficie che godono di una certa proprietà di massimo o di minimo 239

*364 Ricerca della superficie che è minima tra quelle che chiudon la stessa solidità 246

*365 Aggiunta al Capitolo delle Variazioni 248

*366 APPENDICE I. Sul Calcolo delle differenze differenziali . . 256

*367 Differenze differenziali del secondo ordine delle funzioni semplici 258

*368 Differenze differenziali dell' Equazioni 259

*369 Differenze differenziali delle Funzioni a più variabili . . 261

*370 Somme integrali 262

*371 Somma dell' integrale eguale all' integral della somma . . 266

*372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379 Integrali dell' Equazioni 268

*380 Equazioni alle differenze differenziali parziali, in cui la differenza finita riguarda una variabile, e la differenziale un' altra 285

*381, 382, 383 Equazioni a differenze differenziali parziali lineari . . . 288

*384 APPENDICE II Sopra gli Infinitesimi 294

*385 Confronto dei due Metodi antico e moderno di differenziare 295

*386 Lo stesso discorso per la differenziazione ed integrazione delle Equazioni 296

*387, 388 Applicazioni del Calcolo differenziale alla Geometria, Meccanica ec. 299

CAP. XI.

Delle Soluzioni Particolari e dell' Integrazione di quelle Equazioni, che non compiono i Criterj d'Integrabilità.

§. 262. Ai §§. 117 e 123 abbiamo detto qualche cosa riguardo alle Soluzioni Particolari (a) delle Equazioni Differenziali, e Differenziali Parziali, e promesso di dare una più estesa Teorìa di queste Soluzioni. A ciò è destinato il Capitolo presente.

Già abbiamo dimostrato al luogo citato, che se $\varphi(x, y, a) = 0$, o semplicemente $\varphi = 0$, è l' integrale completo di una equazione differenziale del primo ordine $F\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\} = 0$, essendo a la costante arbitraria, la relazione tra x ed y, che ci è data dalla eliminazione di a per mezzo delle due equazioni $\varphi = 0$, $\left(\frac{d\varphi}{da}\right) = 0$, soddisfà alla medesima equazione differenziale $F = 0$, ed abbiamo detto che questa relazione suol chiamarsi dai Geometri *Soluzione Particolare*: ecco in che essa differisce dagli integrali particolari. Questi si ottengono col dare ad a dei determinati valori costanti; mentre la soluzione

(a) All' equazioni, cui La-Grange dette una volta il nome di *Soluzioni particolari*, nella Teorìa delle funzioni analitiche (ove chiama *equazioni primitive* gli integrali) ha dato quello di *equazioni primitive singolari*: noi abbiam ritenuto il primo nome.

particolare si ottiene col sostituire in $\varphi = 0$ in vece di a quella funzione di x, y dataci dall' equazione $\left(\frac{d\varphi}{da}\right) = 0$.

Se dunque quest' ultima equazione ci desse per a una quantità costante, o ci desse una tal funzione di x, y, che divenisse eguale ad una quantità costante mercè l' equazione $\varphi(x, y, a) = 0$ ove dee sostituirsi; o che in fine sostituita in $\varphi(x, y, a) = 0$ portasse una equazione, la quale d' altr' onde potesse ottenersi col dare ad a certo valore costante, in questi casi l' ottenuta relazione sarebbe un' integrale particolare, e non una soluzione particolare.

Nell' esempio addotto al luogo citato dell' equazione differenziale, essendo

$y - 2x\left(\frac{dy}{dx}\right) + y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$, il suo integrale completo era

$y^2 - 2ax + a^2 = 0$, e la soluzione particolare $y = x$.

Dell' altra equazione differenziale

$\sqrt{(x^2 + y^2 - b)} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right) - y\left(\frac{dy}{dx}\right) - x = 0$, l' integrale completo è

$x^2 - 2ay - a^2 - b = 0$: facendo dunque

$x^2 - 2ay - a^2 - b = \varphi$, si avrà $\left(\frac{d\varphi}{da}\right) = -2y - 2a = 0$, quindi $a = -y$, e questo valore di a ci darà, quando sostituiscasi nell' integrale completo, $x^2 + y^2 - b = 0$, la quale equazione è la soluzione particolare, poichè soddisfà all' equazione differenziale, e non può d' altr' onde ottenersi coll' assegnare ad a qualunque valore costante.

Se di una certa equazione differenziale l' integrale fosse

$\varphi = (x^2 + y^2 - b)(y^2 - 2ay) + (x^2 - b)a^2 = 0$, in cui a rappresentasse la costante arbitraria, si avrebbe allora

$\left(\frac{d\varphi}{da}\right) = -2y(x^2 + y^2 - b) + 2(x^2 - b)a = 0$, quindi

$a = \frac{y(x^2 + y^2 - b)}{x^2 - b}$. Questo valore sostituito nell' integrale ci dà

$\frac{y^4(x^2+y^2-b)}{x^2-b}=0$, e perciò $x^2+y^2-b=0$, esser dovrebbe la soluzione particolare; siccome però in virtù di essa il valore di a diventa nullo, così essa non è che un integrale particolare, il quale risulta dal fare eguale a zero la costante arbitraria contenuta nell' integrale completo.

Osserviamo una proprietà importante delle soluzioni particolari.

Si sa dalla Teorìa delle equazioni, che l' equazione $\left(\frac{d\varphi}{da}\right)=0$ riguardando a come incognita, contiene la relazione, la quale rende eguali due radici nell' equazione $\varphi(x,y,a)=0$ ordinata per rapporto ad a; dunque il valore di y in x, che ci è dato dalla soluzione particolare, renderà eguali due radici dell' equazione $\varphi(x,y,a)=0$.

Non è però generalmente vera la proposizione inversa, che cioè ogni volta che un valore di y in x ci dà due radici eguali, sia indizio di una soluzione particolare. Infatti nei due primi casi quì sopra contemplati, i valori $y=x$, $y^2=b-x^2$ che dipendevano dalle soluzioni particolari $y-x=0$, $y^2+x^2-b=0$, sostituiti nei respettivi integrali completi, conducevano alle due equazioni $x^2-2ax+a^2=0$, $a^2+2ay+y^2=0$, in ciascuna delle quali considerando a per incognita, vi è una radice doppia; ma lo stesso avviene anche nel terzo caso, per quanto non siavi allora soluzione particolare;

$x^2+y^2-b=0$ sostituito in

$(x^2+y^2-b)(y^2-2ay)+(x^2-b)a^2=0$, ci dà $a^2=0$, e quindi due valori eguali di a.

§. 263. Veniamo all' equazioni differenziali degli ordini superiori.

Se $\varphi\left\{x,y,\left(\frac{dy}{dx}\right),\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right),\ldots\ldots\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right),a\right\}=0$

rappresenta l' integrale primo completo di un' equazione differenziale

$F\left\{x,y,\left(\frac{dy}{dx}\right),\ldots\ldots\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)\right\}=0$, essendo a la costante

arbitraria, e si sa che quest' ultima equazione $F=0$ dee risultare dall' eliminazione della costante a per mezzo dell' equazione $\varphi=0$, e del differenziale primo di questa: ora se noi supporremo la quantità a variabile, ma tale che i termini portati dalla di lei variabilità si annullino da se medesimi, avremo sempre lo stesso risultato per l' eliminazione di a, cioè l' equazione $F=0$: questa condizione dipendentemente dalla quale dee determinarsi il valore di a, ci darà $\left(\frac{d\varphi}{da}\right)=0$, ed il valore di a che ne ricaveremo sostituito in $\varphi=0$, ci somministrerà una nuova relazione, la quale soddisfarà alla differenziale proposta, e ne sarà una soluzione particolare. Il ragionamento è lo stesso che quello fatto per le equazioni differenziali del primo ordine, ed al valore di a, datoci da $\left(\frac{d\varphi}{da}\right)=0$, si faranno le medesime limitazioni.

Ma per analizzare questa dottrina con più precisione, prendiamo una equazione differenziale qualunque del secondo ordine $F\left\{x,y,\left(\frac{dy}{dx}\right),\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\right\}=0$.

Essa ha (§. 116.) due integrali primi $P=0$, $Q=0$, ognuno dei quali contiene una costante arbitraria diversa, e sia a la costante contenuta in $P=0$, e b quella in $Q=0$. Ciascuno di questi conduce al medesimo integrale finito completo, e questo sia $\varphi(x,y,a,b)=0$, essendo a,b due costanti arbitrarie.

Se per mezzo dell' integrale primo $P=0$ se ne ricerca la soluzione particolare, ella si avrà eliminando a mercè queste due equazioni $P=0$, $\left(\frac{dP}{da}\right)=0$: sia $R=0$ il risultato di questa eliminazione, ed in conseguenza quella soluzione particolare; se poi facciamo uso dell' altro integrale primo $Q=0$, l' eliminazione di b tra le due equazioni $Q=0$, $\left(\frac{dQ}{db}\right)=0$, ci darà un' altra soluzione particolare $S=0$. Ora le due soluzioni particolari $R=0$, $S=0$, per quanto dedotte da integrali primi diversi, sono però eguali tra di loro, per cui in sostanza una sola è la soluzione particolare prima di un' equazione differenziale del secondo ordine, mentre due sono gli integrali primi completi.

Per dimostrare questo interessante Teorema riprendiamo le due equazioni

$F\{x, y, (\frac{dy}{dx}), (\frac{d^2y}{dx^2})\} = o$, $\phi(x, y, a, b) = o$, la seconda delle quali ci rappresenta l' integrale finito completo della prima. Differenziamo l' equazione $\phi(x, y, a, b) = o$, e se noi indichiamo questa differenziale per $\phi'(x, y, (\frac{dy}{dx}), a, b) = o$, si avrà un integrale primo $P = o$ eliminando b per mezzo delle due equazioni $\phi = o$, $\phi' = o$, e se ne avrà l'altro $Q = o$ eliminando a mercè le stesse equazioni; per aver poi le due soluzioni particolari, converrà eliminare a dall'equazione $P = o$ per mezzo di essa medesima e della sua differenziale ad a relativa, e converrà eliminare b dalla $Q = o$ mercè essa e la sua differenziale relativamente alla b.

Ora riguardiamo nella equazione $\phi'(x, y, (\frac{dy}{dx}), a, b) = o$ la quantità b come funzione di x, y, a determinataci dall' equazione $\phi(x, y, a, b) = o$, e la sua equazione differenziale presa relativamente ad a sarà

$(\frac{d\phi'}{da}) + (\frac{db}{da})(\frac{d\phi'}{db}) = o$: nella medesima ipotesi, differenziando l' equazione $\phi = o$, si avrà

$(\frac{d\phi}{da}) + (\frac{db}{da}) \cdot (\frac{d\phi}{db}) = o$.

Eliminiamo $(\frac{db}{da})$ per mezzo di queste due ultime equazioni, ed otterremo l' equazione

$(\frac{d\phi'}{da}) \cdot (\frac{d\phi}{db}) - (\frac{d\phi'}{db}) \cdot (\frac{d\phi}{da}) = o$, la quale combinata con le due equazioni $\phi(x, y, a, b) = o$, $\phi'(x, y, (\frac{dy}{dx}), a, b) = o$, ed eliminate in virtù di esse le due costanti, ci darà la soluzione particolare risultante dall' integrale primo completato con la costante arbitraria a.

Nello stesso modo riguardando a come una funzione di b nella equazione $\phi'(x, y, (\frac{dy}{da}), a, b) = o$, si avrà l' equazione differenziale relativa alla b,

$(\frac{d\phi'}{db}) + (\frac{da}{db}) \cdot (\frac{d\phi'}{da}) = o$, ed il valore di $(\frac{da}{db})$ dipenderà dall' equazione differenziale

$(\frac{d\phi}{db}) + (\frac{da}{db})(\frac{d\phi}{da}) = o$. Ora l' eliminazione di $(\frac{da}{db})$ tra queste due ultime equazioni, ci darà egualmente

$(\frac{d\phi'}{da}) \cdot (\frac{d\phi}{db}) - (\frac{d\phi'}{db}) \cdot (\frac{d\phi}{da}) = o$.

L' altra soluzione particolare dunque dipendente dall' integrale primo relativamente alla b, sarà il risultato dell' eliminazione delle due costanti a, b mercè le tre equazioni

$\phi(x, y, a, b) = o$,

$\phi'(x, y, (\frac{dy}{dx}), a, b) = o$,

$(\frac{d\phi'}{da}) \cdot (\frac{d\phi}{db}) - (\frac{d\phi'}{db}) \cdot (\frac{d\phi}{da}) = o$, e sarà in conseguenza la medesima che la già ritrovata, come annunzia il Teorema.

Se dunque conosceremo l' integrale finito completo di una equazione differenziale del secondo ordine, potremo subito per mezzo di esso conoscere la soluzione particolare senza alcun bisogno della conoscenza degli integrali primi; infatti essendo $\phi(x, y, a, b) = o$ quest' integrale completo, la soluzione particolare ci sarà data eliminando a, b, $(\frac{db}{da})$ per mezzo delle quattro equazioni

$\phi(x, y, a, b) = o$,

$(\frac{d\phi}{da}) + (\frac{db}{da})(\frac{d\phi}{db}) = o$,

$(\frac{d\phi}{dx}) + (\frac{dy}{dx})(\frac{d\phi}{dy}) = \phi'(x, y, (\frac{dy}{dx}), a, b) = o$,

$(\frac{d\phi'}{da}) + (\frac{db}{da}) \cdot (\frac{d\phi'}{db}) = o$.

§. 264. Illustriamo con qualche esempio questa Teorìa. Sia l' equazione del secondo ordine

$$y - x\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \left\{\left(\frac{dy}{dx}\right) - x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\right\}^2 - \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0$$

di cui l' integrale finito è

$$y - \frac{a}{2}x^2 - bx - a^2 - b^2 = 0.$$

Differenziamo quest' ultima equazione, ed avremo $\left(\frac{dy}{dx}\right) - ax - b = 0$: se ora con queste due equazioni eliminiamo prima b, poi a, avremo i due integrali primi della proposta

$$P = y - \left(\frac{a}{2} - a^2\right)x^2 - (1 - 2a)\,x\left(\frac{dy}{dx}\right) - a^2 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

$$Q = y - \frac{\left\{b + \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}x}{2} - \frac{\left\{b - \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}^2}{x^2} - b^2 = 0.$$

Se ora prendiamo la differenziale di $P = 0$ relativamente ad a, si avrà

$\left(\frac{1}{2} - 2a\right)x^2 + 2x\left(\frac{dy}{dx}\right) - 2a = 0$, d' onde si ricava

$a = \frac{x^2 + 4x\left(\frac{dy}{dx}\right)}{4(1 + x^2)}$, il qual valore sostituito nella stessa $P = 0$, ci dà

$y - x\left(\frac{dy}{dx}\right) - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\left\{4x\left(\frac{dy}{dx}\right) + x^2\right\}^2}{16(1 + x^2)} = 0$, e questa sarà la soluzione particolare dataci dall' integrale $P = 0$.

Egualmente differenziando relativamente alla b, l' equazione $Q = 0$, si avrà

$\frac{x}{2} + \frac{2\left\{b - \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}}{x^2} + 2b = 0$, e quindi

$b = \frac{4\left(\frac{dy}{dx}\right) - x^3}{4(1 + x^2)}$, la cui sostituzione in $Q = 0$, ci conduce all' equazione

$y - \frac{x}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right) - \frac{1}{x^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\left\{4\left(\frac{dy}{dx}\right) - x^3\right\}^2}{16x^2(1 + x^2)} = 0$, altra soluzione particolare dataci dall' altro integrale $Q = 0$.

Queste due soluzioni particolari però sono in sostanza la medesima, poichè ciascuna di esse si riduce all' equazione

$(1 + x^2)\,y - \left(x + \frac{x^3}{2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{x^4}{16} = 0$, che sarà in conseguenza la soluzione particolare dell' equazione del secondo ordine proposta.

Giungeremo al medesimo risultato eliminando subito a, b, $\left(\frac{db}{da}\right)$ per mezzo dell' integrale completo

$y - \frac{a}{2}x^2 - bx - a^2 - b^2 = 0$, della sua differenziale $\left(\frac{dy}{dx}\right) - ax - b = 0$, e dei differenziali di queste due per rapporto ad a, cioè delle equazioni

$\frac{x^2}{2} + 2a + (x + 2b)\left(\frac{db}{da}\right) = 0, \quad x + \left(\frac{db}{da}\right) = 0.$

Eliminando $\left(\frac{db}{da}\right)$ per mezzo di queste due ultime, si ha

$-\frac{x^2}{2} + 2a - 2bx = 0$; ma la seconda equazione ci dà

$b = \left(\frac{dy}{dx}\right) - ax$; dunque

$-\frac{x^2}{2} + 2a - 2x\left(\frac{dy}{dx}\right) + 2ax^2 = 0$, e quindi

$a = \frac{x^2 + 4x\left(\frac{dy}{dx}\right)}{4(1 + x^2)}$; egualmente si troverebbe

$b = \frac{4\left(\frac{dy}{dx}\right) - x^3}{4(1 + x^2)}$.

Sostituendo questi valori nella prima equazione, si ritrova

$y(1 + x^2) + \frac{x^4}{16} - \left(\frac{x^3}{2} + x\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$ come sopra.

§. 265. Il ragionamento che abbiamo fatto al §. 263. per l' equazioni del secondo ordine si può estendere a quelle degli ordini superiori, e ne avremo dei teoremi analoghi. Così indicando per $\varphi(x, y, a, b, c) = 0$ l' integrale finito completo di una equazione del terzo ordine, i tre integrali primi completi di questa equazione differenziale condurranno tutti alla medesima soluzione particolare, e questa sarà il risultato dell' eliminazione delle tre costanti a, b, c e dei differenziali $(\frac{db}{da})$, $(\frac{dc}{da})$ per mezzo delle sei equazioni

1.ª . . . $\varphi(x, y, a, b, c) = 0$,

2.ª . . . $\varphi'(x, y, (\frac{dy}{dx}), a, b, c) = 0$ differenziale della 1.ª,

3.ª . . . $\varphi''(x, y, (\frac{dy}{dx}), (\frac{d^2y}{dx^2}), a, b, c) = 0$ differenziale della 2.ª,

4.ª . . . $(\frac{d\varphi}{da}) + (\frac{db}{da})(\frac{d\varphi}{db}) + (\frac{dc}{da})(\frac{d\varphi}{dc}) = 0$,

5.ª . . . $(\frac{d\varphi'}{da}) + (\frac{db}{da})(\frac{d\varphi'}{db}) + (\frac{dc}{da})(\frac{d\varphi'}{dc}) = 0$,

6.ª . . . $(\frac{d\varphi''}{da}) + (\frac{db}{da})(\frac{d\varphi''}{db}) + (\frac{dc}{da})(\frac{d\varphi''}{dc}) = 0$.

§. 266. Se noi facendo $p = (\frac{dy}{dx})$, $q = (\frac{d^2y}{dx^2})$, $r = (\frac{d^3y}{dx^3})$, ... $v = (\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}})$, $w = (\frac{d^ny}{dx^n})$, supponiamo essere $F(x, y, p, q, \ldots\ldots v, w) = 0$ un' equazione differenziale dell' ordine n^{esimo}, ed $f(x, y, p, q, \ldots\ldots v, a) = 0$ il suo integrale primo completo, indicandone a la costante arbitraria, è manifesto che preso da quest' ultima equazione il valore di a, che sia $a = \varphi(x, y, p, \ldots\ldots v)$, e sostituito di nuovo in essa, si avrà

$f\{x, y, p, q, \ldots\ldots v, \varphi(x, y, p, q, \ldots\ldots v)\} = 0$, che sarà un' equazione identica. Ora essendo y, p, q ec., funzio-

ni di x dipendenti tra loro ma incognite, quell' equazione in conseguenza sarà identica anche relativamente a ciascuna di esse, vale a dire tutti i termini che contengono il più alto differenziale v, si distruggeranno da se medesimi: quei che contengono il differenziale immediatamente inferiore, si distruggeranno egualmente, e così di seguito.

Tutti i differenziali di quell' equazione identica, presi relativamente ad x, y, p, q ec., formeranno anche tante equazioni identiche: avremo dunque l' equazioni

$(\frac{df}{dx}) + (\frac{da}{dx})(\frac{df}{da}) = 0$,

$(\frac{df}{dy}) + (\frac{da}{dy})(\frac{df}{da}) = 0$,

$(\frac{df}{dp}) + (\frac{da}{dp})(\frac{df}{da}) = 0$,

ec.

identiche, quando vi si ponga per a il suo valore φ.

Supposta questa sostituzione, noi ricaviamo

$(\frac{da}{dx}) = (\frac{d\varphi}{dx}) = -(\frac{df}{dx}) : (\frac{df}{da})$,

$(\frac{da}{dy}) = (\frac{d\varphi}{dy}) = -(\frac{df}{dy}) : (\frac{df}{da})$,

$(\frac{da}{dp}) = (\frac{d\varphi}{dp}) = -(\frac{df}{dp}) : (\frac{df}{da})$,

ec.;

e siccome la funzione $(\frac{df}{da})$ debb' essere nulla quando si ha la soluzione particolare, perciò in questo medesimo caso i valori delle funzioni $(\frac{da}{dx})$, $(\frac{da}{dy})$, $(\frac{da}{dp})$ ec., sino al $(\frac{da}{dv})$ inclusive, dovranno essere infiniti ciascuno.

Di qui si ricava un altro metodo per trovare le soluzioni particolari, ed ha il vantaggio sopra quello spiegato nei §§. antecedenti, che può applicarsi al caso in cui l' integrale abbia questa forma $\Psi(x, y, p, q, \ldots\ldots v) = a$: allora l' altro metodo non conduceva a nulla; infatti avendosi $f(x, y, p, \ldots v) = \Psi(x, y, p, \ldots v) - a = 0$, ne seguiva $\left(\frac{df}{da}\right) = -1$, che non diceva cosa alcuna.

Per fare un esempio di questo metodo, prendiamo l'equazione integrale del §. 162,

$x^2 - 2ay - a^2 - b = 0$: si ricava da essa

$a = -y + \sqrt{(x^2 + y^2 - b)}$, quindi

$\varphi(x, y) = a = -y + \sqrt{(x^2 + y^2 - b)}$,

$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = \left(\frac{da}{dx}\right) = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 - b)}}$,

$\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = \left(\frac{da}{dy}\right) = -1 + \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2 - b)}}$; queste due ultime funzioni saranno infinite se $x^2 + y^2 - b = 0$: dunque questa equazione ci darà la soluzione particolare. E quì bisogna fare un' osservazione sopra il metodo generale. Egli è vero che la soluzione particolare rende sempre $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right), \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)$ ec. infiniti, ma non è però vera la proposizione inversa, che cioè ogni relazione la quale fa infinite quelle quantità, dia una soluzione particolare. Perchè ciò succedesse, bisognerebbe che quella relazione non rendesse la funzione φ eguale ad una costante, giacchè in questo caso si avrebbe un integrale particolare, e non una soluzione.

Per esempio. Sia $a = \varphi(x, y) = (y - x)^m$, e si avrà

$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = -m(y - x)^{m-1}$,

$\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = m(y - x)^{m-1}$, e se $m < 1$, ambedue queste quantità divengono infinite facendo $y - x = 0$. Questa relazione però non darebbe una soluzione particolare, perchè sostituita in φ, lo riduce o nullo o infinito, secondo che m è positivo o negativo.

§. 267. Cercando la soluzione particolare dell' equazione del secondo ordine

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) - x\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \left\{\left(\frac{dy}{dx}\right) - x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\right\}^2 - \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0$$

abbiam trovato

$$(F) \ldots\ldots y(1 + x^2) + \frac{x^4}{16} - \left(\frac{x^3}{2} + x\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

che risulta relativamente a $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, ci dà

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{2x + x^3}{4} - \frac{\sqrt{(1 + x^2)} \cdot \sqrt{(16y + 4x^2 + x^4)}}{4} = 0.$$

Dividiamola per $\frac{1}{8}\sqrt{(16y + 4x^2 + x^4)}$, ed avremo

$\frac{8\left(\frac{dy}{dx}\right) + 4x + 2x^3}{\sqrt{(16y + 4x^2 + x^4)}} = 2\sqrt{(1 + x^2)}$, ovvero

$\frac{8dy + 4xdx + 2x^3dx}{\sqrt{(16y + 4x^2 + x^4)}} = 2dx\sqrt{(1 + x^2)}$, il cui integrale completo è

$(E) \ldots\ldots \sqrt{(16y + 4x^2 + x^4)} = x\sqrt{(1 + x^2)} - l\left\{\sqrt{(1 + x^2)} - x\right\} + K$, essendo K la costante arbitraria.

Quest' equazione è ben diversa dall' integrale completo $y - \frac{a}{2}x^2 - bx - a^2 - b^2 = 0$: essa però soddisfà alla proposta equazione differenziale del secondo ordine, poichè soddisfà alla soluzione particolare del primo ordine, per cui è soddisfatta la proposta medesima.

La soluzione particolare (F) essendo una equazione differenziale del primo ordine, può avere ancora essa una soluzione particolare. Per trovarla, quando vi sia, adopriamo il secondo metodo quì sopra spiegato. Avendo dunque

$K = \sqrt{(16y + 4x^2 + x^4)} - x\sqrt{(1 + x^2)} - l\left\{\sqrt{(1 + x^2)} - x\right\}$, si trova subito

$\left(\frac{dK}{dy}\right) = \frac{8}{\sqrt{(16y + 4x^2 + x^4)}}$; e questa quantità dovendo essere infinita, ci dà $16y + 4x^2 + x^4 = 0$, che sarà la soluzione particolare dell' equazione (F). Tai soluzioni particolari possono chiamarsi *Soluzioni particolari doppie*, essendo esse nate da un' altra soluzione particolare.

Questa relazione $16y + 4x^2 + x^4 = 0$, la quale soddisfà all' equazione (F), non soddisfà però alla proposta del secondo ordine: noi l' avremmo potuta dedurre immediatamente dall' integrale completo $y - \frac{a}{2}x^2 - bx - a^2 - b^2 = 0$, determinando a e b per mezzo delle due equazioni differenziali relativamente alle stesse a, b: si avrebbe in questa guisa

$\frac{1}{2}x^2 + 2a = 0$,

$x + 2b = 0$, e quindi

$a = -\frac{x^2}{4}$, $b = -\frac{x}{2}$; questi valori sostituiti nell' integrale, ci danno

$y + \frac{x^4}{16} + \frac{x^2}{4} = 0$ come sopra.

§. 268. Per mezzo della Teorìa generale delle soluzioni particolari si può dimostrare, che quelle soluzioni particolari doppie, delle quali abbiam parlato al §. antecedente, risultano dall' integrale completo $F(x, y, a, b) = 0$, eliminandone le due costanti arbitrarie per mezzo delle due equazioni particolari $(\frac{dF}{da}) = 0$, $(\frac{dF}{db}) = 0$; e si può di più comprendere la ragione per la quale esse non soddisfanno all' equazione differenziale del secondo ordine, di cui $F(x, y, a, b) = 0$ è l' integrale completo.

Infatti se rappresentiamo per

$f\{x, y, (\frac{dy}{dx}), (\frac{d^2y}{dx^2})\} = 0$ quell' equazione del secondo ordine, noi la potremo considerare come nata dall' eliminazione delle due costanti a, b per mezzo di queste tre equazioni

$F(x, y, a, b) = 0$,

$dF = 0$,

$d^2F = 0$.

Se noi ora riguardiamo a e b come funzioni di x e di y,

la differenziale prima di $F = 0$, non è già $dF = 0$ semplicemente, ma $dF + da.(\frac{dF}{da}) + db.(\frac{dF}{db}) = 0$, la quale si riduce alla $dF = 0$, determinando a, b per mezzo dell' equazioni $(\frac{dF}{da}) = 0$, $(\frac{dF}{db}) = 0$, che danno la soluzione particolare doppia.

La differenziale dF sviluppata che sia, contiene le variabili $x, y, (\frac{dy}{dx})$ e le due costanti a, b: rappresentiamola in conseguenza per $\varphi(x, y, (\frac{dy}{dx}), a, b)$: l' equazione allora $d^2F = 0$ sarà la differenziale prima di $\varphi = 0$, cioè $d\varphi = 0$: se adesso riguardiamo a, b come variabili determinate secondo che si è detto, la differenziale dell' equazione $\varphi = 0$ non sarà $d\varphi = 0$, ma $d\varphi + da.(\frac{d\varphi}{da}) + db.(\frac{d\varphi}{db}) = 0$, la quale non si riduce già alla semplice $d\varphi = 0$, poichè in generale le equazioni $(\frac{dF}{da}) = 0$, $(\frac{dF}{db}) = 0$, che determinavano a, b, non soddisfaranno a quest' altre $(\frac{d\varphi}{da}) = 0$, $(\frac{d\varphi}{db}) = 0$.

E' dunque impossibile che l' equazione $F(x, y, a, b) = 0$ nella quale a, b sono funzioni di x e di y dateci dall' equazioni $(\frac{dF}{da}) = 0$, $(\frac{dF}{db}) = 0$, soddisfaccia generalmente all' equazione differenziale del secondo ordine, che si ricava dalla stessa equazione eliminando a, b con l' ajuto delle di lui differenziali prima e seconda, riguardando a, b come costanti.

Si può estendere questa Teorìa agli integrali dell' equazioni degli ordini superiori. Così se abbiasi un integrale completo $F(x, y, a, b, c) = 0$ ove a, b, c sono tre costanti arbitrarie, e si determinino per mezzo delle tre equazioni $(\frac{dF}{da}) = 0$, $(\frac{dF}{db}) = 0$, $(\frac{dF}{dc}) = 0$, si avrà una soluzione particolare tripla, che sarà in conseguenza la soluzione particolare di una equazione differenziale del primo ordine, questa ultima essendo una soluzione particolare di una equazione differenziale del secondo ordine, la quale è la soluzione particolare dell' equazione del terzo ordine, che ha per integrale completo $F(x, y, a, b, c) = 0$.

Questa soluzione particolare tripla però non soddisfarà nè all' equazione del terzo ordine, nè all' equazione del secondo, che è la soluzione particolare di quella del terzo.

§. 269. Abbiam detto quì sopra che le soluzioni particolari doppie delle equazioni differenziali del secondo ordine, soddisfacendo alle soluzioni particolari del primo ordine, non soddisfanno generalmente a quelle equazioni differenziali del secondo: ora per compimento di questa dottrina si può dimandare se ponno esistere delle equazioni finite, o senza differenziali, le quali soddisfacciano all' equazione del secondo ordine, senza soddisfare alle equazioni differenziali di primo ordine (cioè ai suoi due integrali primi completi, e alla sua soluzione particolare prima) da cui essa dipende. Per rispondere a questa questione rappresentiamo per

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = F\left(x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)\right)$ una differenziale del secondo ordine e per $y = f(x, a, b)$ il suo integrale finito completo, a, b essendo costanti arbitrarie. Se noi le supponiamo variabili e dipendenti una dall' altra, differenziando l' integrale completo, avremo

$dy = dx \cdot \left(\frac{df}{dx}\right) + da \cdot \left(\frac{df}{da}\right) + db \cdot \left(\frac{df}{db}\right)$, che si riduce alla

$dy = dx\left(\frac{df}{dx}\right)$, ovvero $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{df}{dx}\right)$, facendo

$da\left(\frac{df}{da}\right) + db \cdot \left(\frac{df}{db}\right) = 0$.

Siccome in $\left(\frac{df}{dx}\right)$ sono contenute anche le quantità a, b, indichiamolo per $f'(x, a, b)$ ed avremo $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \left(\frac{df'}{dx}\right)$ quando facciasi

$da\left(\frac{df'}{da}\right) + db\left(\frac{df'}{db}\right) = 0$: mentre dunque a, b sono variabili noi otterremo gli stessi valori per $\left(\frac{dy}{dx}\right), \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, e quindi egualmente soddisfaremo all' equazione differenziale del secondo ordine come se quelle quantità fosseso state costanti, quando esse siano determinate per mezzo delle due equazioni

$$da\left(\frac{df}{da}\right) + db\left(\frac{df}{db}\right) = 0,$$

$$da\left(\frac{df'}{da}\right) + db\left(\frac{df'}{db}\right) = 0.$$

Si soddisfà subito a queste due equazioni col fare $da = 0$, $db = 0$, ciò che ci dà per a e per b due costanti arbitrarie, e si ricade nell' equazione d' onde partimmo.

Se poi eliminiamo da queste equazioni il rapporto $da : db$, otteniamo l' equazione

$\left(\frac{df}{da}\right) \cdot \left(\frac{df'}{db}\right) - \left(\frac{df}{db}\right)\left(\frac{df'}{da}\right) = 0$, la quale ci darà una di quelle quantità espressa per l' altra.

Supponiamo che il valore di b espresso per a, sia rappresentato dall' equazione $b = \Psi(x, a)$. Sostituendo questo valore in una di quelle equazioni, ne ricaveremo un' equazione differenziale (E) in x, a e da, il cui integrale ci darà il valore di a espresso per x.

Sia l' integrale completo di quest' ultima equazione $a = \varphi(x, c)$ essendo c la costante arbitraria, e trovandone la soluzione particolare col determinar c per mezzo dell' equazione $\left(\frac{d\varphi}{dc}\right) = 0$, si avrà un altro valore di a senza la costante c.

Se ora sostituiamo $\varphi(x, c)$ in luogo di a nell' equazione $b = \Psi(x, a)$, ed in seguito poniamo i valori di a e di b nell' equazione $y = f(x, a, b)$, avremo l' equazione $y = f(x, \varphi, \Psi)$ che conterrà una costante c, e soddisfarà alla proposta

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = F\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}$ tanto nel caso in cui c è costante arbitraria, che in quello in cui c è una funzione di x dataci dall' equazione $\left(\frac{d\varphi}{dc}\right) = 0$.

Quest' equazione del secondo ordine avrà dunque in generale due soluzioni particolari finite o senza differenziali, una delle quali contiene una costante arbitraria, e l' altra no.

§. 270 Esaminiamo ora i rapporti che hanno queste soluzioni particolari con la soluzione particolare differenziale del primo ordine, dalla quale è soddisfatta l' equazione

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = F\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}.$$

Primieramente l' equazione $y = f(x, \phi, \Psi)$, mentre vi si riguarda c come una costante arbitraria, non può essere che l' integrale completo della soluzione particolare del primo ordine dell' equazione

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = F\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}$, perchè eliminando c tra l' equazione $y = f(x, \phi, \Psi)$ e la sua differenziale, si ottiene un' equazione del primo ordine, che dovendo soddisfare all' equazione $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = F\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}$, ne sarà in conseguenza la soluzione particolare del primo ordine stesso.

Essendo $y = f(x, \phi, \Psi)$ l' integrale completo della soluzione particolare del primo ordine, avremo in conseguenza una soluzione doppia, considerando la costante c di quell' integrale completo come una funzione di x determinata per mezzo dell' equazione $\left(\frac{df}{dc}\right) = 0$: ora essendo f una funzione di ϕ, Ψ, mentre Ψ è funzione di ϕ, e la stessa ϕ di c, si avrà $\left(\frac{df}{dc}\right) = \left(\frac{d\phi}{dc}\right)\left\{\left(\frac{df}{d\phi}\right) + \left(\frac{df}{d\Psi}\right)\left(\frac{d\Psi}{d\phi}\right)\right\} = 0$, e questa equazione ci darà il valore di c espresso per x.

Tale equazione si decompone in due altre

$$\left(\frac{d\phi}{dc}\right) = 0,\quad \left(\frac{df}{d\phi}\right) + \left(\frac{df}{d\Psi}\right)\left(\frac{d\Psi}{d\phi}\right) = 0.$$

Si hanno pertanto due soluzioni particolari doppie, l' una che risulta dall' eliminazione di c tra le equazioni

$y = f(x, \phi, \Psi)$ e $\left(\frac{d\phi}{dc}\right) = 0$, l' altra che risulta dall' eliminazione di c tra le equazioni $y = f(x, \phi, \Psi)$, e $\left(\frac{df}{d\phi}\right) + \left(\frac{df}{d\Psi}\right)\left(\frac{d\Psi}{d\phi}\right) = 0$.

La prima (che è quella stessa di cui si parla alla fine del §. antecedente) soddisfà all' equazione differenziale $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = F\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}$, di cui essa è una soluzione particolare finita, cioè senza differenziali e senza costanti arbitrarie; e la seconda non soddisfà alla differenziale $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = F\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}$, quando essa non sia contenuta nella prima.

Ricaveremo poi da questa analisi che una equazione del secondo ordine non può avere soluzioni particolari finite, che nello stesso tempo non soddisfacciano quali integrali completi, o soluzioni particolari alle equazioni differenziali del primo ordine, da cui essa dipende. Non è però vera la contraria, giacchè l' equazioni differenziali del primo ammettono delle soluzioni particolari, le quali non soddisfanno a quella del secondo.

§. 271. Un' altra proprietà delle soluzioni particolari è che esse rendono infinito qualunque moltiplicatore, che faccia integrabile l' equazione cui appartengono.

Sia infatti

$\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right) + f\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), \ldots\ldots \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)\right\} = 0$ l' equazione differenziale di un ordine qualunque n, e rappresentiamo per M un moltiplicatore di quest' equazione: sarà allora

$$M\left\{\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right) + f\left[x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), \ldots \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)\right]\right\} = d\phi\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), \ldots \ldots \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)\right\} = 0.$$

Avremo dunque per integrale

$\varphi\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), \ldots \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)\right\} = a$, essendo a la costante arbitraria.

Ora la soluzione particolare debbe soddisfare alla proposta $\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right) + f\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), \ldots \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)\right\} = 0$ senza esser compresa nell' integrale completo $\varphi\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), \ldots \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)\right\} = a$: dunque il valore di $\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$ ricavato dalla soluzione particolare, e sostituito nella funzione $\varphi(x, y, \text{ec.})$ non dee renderla eguale ad una quantità costante; per conseguenza non debbe rendere nulla la sua differenziale

$d\varphi\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), \ldots \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)\right\}$.

Dunque questo valore debbe rendere nulla la quantità $\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right) + f\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), \ldots \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)\right\}$, mentre non dee annullare

$M\left\{\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right) + f\left[x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), \ldots \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)\right]\right\}$, la qual cosa non può avvenire se non sia $M = \infty$.

Avremo così un nuovo mezzo per trovare le soluzioni particolari, eguagliando all' infinito i fattori dell' equazioni differenziali.

Per farne un esempio, sia proposta l' equazione $\left(\frac{dy}{dx}\right) - \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2-b)}-y} = 0$: un di lei moltiplicatore è $\frac{\sqrt{(x^2+y^2-b)}-y}{\sqrt{(x^2+y^2-b)}}$, il quale eguagliato all' infinito, ci dà $x^2 + y^2 - b = 0$ che ne è la soluzione particolare, e combina con quanto abbiam trovato al §. 266.

§. 270. Quando è dato l' integrale completo, abbiamo veduto come può ritrovarsi la soluzione particolare se vi è; vediamo adesso come può aversi questa relazione tra le variabili, quando non è conosciuto l' integrale completo.

Riprendendo il principio delle soluzioni particolari, sia $F(x, y, a) = 0$ l' integrale completo di un' equazione differenziale del primo ordine.

Questa differenziale sarà il risultato dell' eliminazione della costante a tra le due equazioni $F = 0$,

$dF = \left\{\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\} dx = 0$; e la soluzione particolare sarà il risultato dell' eliminazione della stessa a tra le due equazioni $F = 0$, $\left(\frac{dF}{da}\right) = 0$.

Supponiamo che dall' equazione $dF = 0$ si ricavi il valore di a dato per x, y e $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, e sia $a = \varphi\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}$; si sostituisca questo valore in $F = 0$, e si avrà $F(x, y, \varphi) = 0$ per rappresentare la differenziale della $F = 0$.

Prendiamo ora la differenziale di questa equazione $F(x, y, \varphi) = 0$, ed avremo

$\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\} dx + \left(\frac{dF}{d\varphi}\right) d\varphi = 0$, la quale si riduce a $\left(\frac{dF}{d\varphi}\right) d\varphi = 0$, essendo la quantità

$\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)$ identicamente nulla, dal momento che avremo in essa sostituito per a il suo valore ricavato da $\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$.

La differenziale dunque dell' equazione $F(x, y, \varphi) = 0$ sarà semplicemente $\left(\frac{dF}{d\varphi}\right) d\varphi = 0$, la quale si decompone in queste due $d\varphi = 0$, $\left(\frac{dF}{d\varphi}\right) = 0$.

La prima $d\varphi = 0$ è una equazione del secondo ordine, e ci dà il valore di $(\frac{d^2y}{dx^2})$ in x, y e $(\frac{dy}{dx})$; e l'integrale di essa è $\varphi = a$ costante: in questa guisa $\varphi = a$, $F(x, y, \varphi) = a$ sono due integrali primi della stessa equazione differenziale del secondo ordine $(\frac{dF}{d\varphi}) d\varphi = o$, ed in conseguenza eliminando tra essi $(\frac{dy}{dx})$, si avrà (§. 206.) l'integrale della medesima $F(x, y, \varphi) = o$ completato con la costante arbitraria a. Questa eliminazione si ottiene con eliminare la quantità φ, e si ha $F(x, y, a) = o$, che è l'equazione d'onde partimmo.

Se noi prendiamo in esame l'altra equazione $(\frac{dF}{d\varphi}) = o$, si vede che essa soddisfà alla medesima equazione del secondo ordine; e siccome essa contiene $x, y, (\frac{dy}{dx})$, ma non vi si trova la costante arbitraria, così può riguardarsi come un integrale primo della stessa equazione non completo. Eliminando perciò $(\frac{dy}{dx})$ tra le due equazioni $(\frac{dF}{d\varphi}) = o$, $F(x, y, \varphi) = o$ si avrà una relazione tra x ed y, la quale soddisfarà alla $F(x, y, \varphi) = o$, e non potrà esser presa per integrale completo, mancandovi la costante arbitraria.

Questa relazione è anzi la stessa soluzione particolare della $F(x, y, \varphi) = o$: infatti per eliminare tra le due equazioni $(\frac{dF}{d\varphi}) = o$, $F(x, y, \varphi) = o$ la quantità $(\frac{dy}{dx})$, basterà eliminare φ che la contiene; ora il risultato dell'eliminazione di φ tra quelle due equazioni, è lo stesso che il risultato dell'eliminazione di a tra queste altre $(\frac{dF}{da}) = o$, $F(x, y, a) = o$; dunque il risultato dell'eliminazione di φ, ovvero di $(\frac{dy}{dx})$, ci darà la soluzione particolare.

§. 273. Ciò premesso, sia proposta un' equazione differenziale qualunque del primo ordine $fdx = o$, essendo f una funzione

$f\{x, y, (\frac{dy}{dx})\}$ qualunque di $x, y, (\frac{dy}{dx})$. L'equazione $f\{x, y, (\frac{dy}{dx})\} = o$ risulta dall'eliminazione della costante a per mezzo dell'integrale completo $F(x, y, a) = o$, e della sua differenziale

$(\frac{dF}{dx}) + (\frac{dF}{dy})(\frac{dy}{dx}) = o$: ora il risultato di questa eliminazione essendo $F(x, y, \varphi) = o$, le due equazioni $f\{x, y, (\frac{dy}{dx})\} = o$, $F(x, y, \varphi) = o$, o saranno identiche, o differiranno per qualche fattor comune, che si ritrovi in una di esse: sia dunque M il fattore, che moltiplicando $F(x, y, \varphi) = o$, la renda identica con l'altra, ed avremo

$f\{x, y, (\frac{dy}{dx})\} = MF(x, y, \varphi)$; quindi

$$F(x, y, \varphi) = \frac{f\{x, y, (\frac{dy}{dx})\}}{M}.$$

Differenziamo quest' ultima equazione, e verrà

$(\frac{dF}{d\varphi}) d\varphi = \frac{df}{M} - \frac{dM.f}{M^2}$, da cui ricavasi

$df = M.(\frac{dF}{d\varphi}) d\varphi + \frac{dM.f}{M}$, che è la forma generale della differenziale di

$f\{x, y, (\frac{dy}{dx})\}$, cioè del primo membro della equazione proposta. Si avverta che la lettera f sta in vece di $f\{x, y, (\frac{dy}{dx})\}$: lo stesso vale per le altre F, φ.

Di qui si ricava che data un' equazione del primo ordine $f\{x, y, (\frac{dy}{dx})\} = o$, si potrà soddisfare alla di lei differenziale indipendentemente dal valore di $(\frac{d^2y}{dx^2})$ per mezzo dell'equazione $(\frac{dF}{d\varphi}) = o$ combinata con la proposta

$f\{x, y, (\frac{dy}{dx})\} = 0$, di modo che queste due equazioni potranno riguardarsi come due integrali del primo ordine della medesima equazione $df = 0$: basterà in conseguenza eliminare $(\frac{dy}{dx})$ tra le equazioni $(\frac{dF}{d\phi}) = 0$, $f\{x, y, (\frac{dy}{dx})\} = 0$, ovvero $(\frac{dF}{d\phi}) = 0$, $MF(x, y, \phi) = 0$, onde avere l' integrale della proposta, che secondo il detto quì sopra, sarà una di lei soluzione particolare.

Ora differenziando la funzione $f\{x, y, (\frac{dy}{dx})\}$, si ha (pongo p per $(\frac{dy}{dx})$)

$\{(\frac{d^2y}{dx^2})(\frac{df}{dp}) + (\frac{df}{dx}) + (\frac{dy}{dx})(\frac{df}{dy})\} dx$, dunque paragonando questa differenziale con la forma generale sopra trovata, si avrà l' equazione

$$\{(\frac{d^2y}{dx^2})(\frac{df}{dp}) + (\frac{df}{dx}) + (\frac{dy}{dx})(\frac{df}{dy})\} dx = M(\frac{dF}{d\phi}) d\phi + \frac{dM.f}{M},$$

che sarà identica.

Si riduce nullo il secondo membro, indipendentemente dal valore di $(\frac{d^2y}{dx^2})$, col fare $(\frac{dF}{d\phi}) = 0$, $f = 0$: si riduce nullo il primo membro indipendentemente dal valore di $(\frac{d^2y}{dx^2})$ col fare $(\frac{df}{dp}) = 0$, $(\frac{df}{dx}) + (\frac{dy}{dx})(\frac{df}{dy}) = 0$; dunque quelle due prime equazioni si tireranno dietro le seconde; dunque si avrà una soluzione particolare eliminando $(\frac{dy}{dx})$ per mezzo dell' equazione proposta, da queste due equazioni

$$(\frac{df}{dp}) = 0, \ (\frac{df}{dx}) + (\frac{df}{dy})(\frac{dy}{dx}) = 0.$$

Se i due risultati danno la medesima equazione tra x, y, sarà questa una soluzione particolare: in caso diverso la proposta ne mancherà.

Se le due equazioni

$(\frac{df}{dp}) = 0$, $(\frac{df}{dx}) + (\frac{dy}{dx})(\frac{df}{dy}) = 0$ avranno un fattore comune N, questo eguagliato a zero, ci darà l' equazione $N = 0$, la quale combinata con la proposta, somministerà la soluzione particolare.

Sia per esempio l' equazione

$(\frac{dy}{dx})^2 (x^2 - b) - 2xy(\frac{dy}{dx}) - x^2 = 0$; differenziamola, ed avremo

$2\{(\frac{dy}{dx})(x^2 - b) - xy\}(\frac{d^2y}{dx^2}) - 2\{y(\frac{dy}{dx}) + x\} = 0$, che ci dà

$$(\frac{dy}{dx})(x^2 - b) - xy = 0,$$

$$y(\frac{dy}{dx}) + x = 0.$$

Ricavando da ciascuna di queste equazioni il valore di $(\frac{dy}{dx})$, avremo $(\frac{dy}{dx}) = \frac{xy}{x^2 - b}$, $(\frac{dy}{dx}) = -\frac{x}{y}$, valori che sostituiti nella proposta, ci daranno due equazioni, le quali si riducono alla $x^2 + y^2 - b = 0$, che sarà perciò la soluzione particolare.

§. 274. Risulta da quanto abbiamo detto quì sopra, che data un' equazione differenziale

$f\{x, y, (\frac{dy}{dx})\} = 0$, per averne la soluzione particolare, se vi è, la differenzieremo, ed ottenendo un' equazione della forma $P(\frac{d^2y}{dx^2}) + Q = 0$, ne ricaveremo il valore di $(\frac{d^2y}{dx^2})$, che è $(\frac{d^2y}{dx^2}) = -\frac{Q}{P}$: eguagliato questo valore a $\frac{0}{0}$, ci somministrerà le due equazioni $Q = 0$, $P = 0$, ciascuna delle quali combinata colla proposta

$f\{x, y, (\frac{dy}{dx})\} = 0$ eliminandovi $(\frac{dy}{dx})$, ci darà una relazione tra x, y. Se queste due relazioni saranno in sostanza la stessa, la proposta avrà una soluzione particolare, e sarà espressa da tal relazione: in caso diverso, la proposta non ammetterà soluzione particolare.

Quando le due equazioni $P = 0$, $Q = 0$ avessero un fattor comune, combinato questo con la proposta, ci darà la soluzione particolare.

Per esempio l' equazione

$\left\{x\left(\frac{dy}{dx}\right) - y\right\} \cdot \left\{x\left(\frac{dy}{dx}\right) - 2y\right\} + x^3 = 0$, ci dà

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \dfrac{x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\left(\frac{dy}{dx}\right) - 3x^2}{x\left\{2x\left(\frac{dy}{dx}\right) - 3y\right\}} = \frac{0}{0}$, quindi

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\left(\frac{dy}{dx}\right) - 3x^2 = 0,$$

$$2x\left(\frac{dy}{dx}\right) - 3y = 0.$$

Da queste equazioni eliminando $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ con l' ajuto della proposta, ricavar se ne debbe la soluzione particolare.

La seconda di queste due equazioni ci dà $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{3y}{2x}$, che sostituito nella prima, dà questa relazione $\frac{3y^2}{4x} - 3x^2 = 0$. Lo stesso valore sostituito nella proposta, porta l' equazione $-\frac{y^2}{4} + x^3 = 0$. Queste due ultime equazioni si riducono alla medesima $y^2 - 4x^3 = 0$, che è perciò la soluzione particolare cercata.

§. 275. Riprendiamo il valore di $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$: sia $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -\frac{Q}{P}$, sia $f = 0$ l' equazione proposta, $s = 0$ la soluzione particolare. Le due equazioni $f = 0$, $s = 0$ ci danno $Q = 0$, $P = 0$, e queste quattro equazioni sussistono tutte nello stesso tempo: dunque sussisteranno anche nel medesimo tempo l' equa-

zioni differenziali $df = 0$, $d^2f = 0$ ec., $dP = 0$, $d^2P = 0$ ec., $dQ = 0$, $d^2Q = 0$ ec., che da esse si deducono: dunque i valori di $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$, $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)$ ec., ricavati dalle successive differenziazioni di $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -\frac{Q}{P}$, diverranno anche $\frac{0}{0}$, riducendoli prima in semplici funzioni di x, y per mezzo della sostituzione successiva dei valori di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ ec. dedotti dall' equazioni $f = 0$, $df = 0$ ec., quindi sostituendovi il valore di y in x dato dalla soluzione particolare $s = 0$.

Questa proprietà di rendere indeterminate le quantità $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ ec., è il vero carattere che aver debbono le soluzioni particolari, e si giungerebbe all' assurdo quando esse ne fossero prive.

Per comprendere tutto questo, io osservo che se per mezzo dell' equazioni $f = 0$, $df = 0$, $d^2f = 0$ ec. si trovano i valori di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ ec. in funzioni di x, y, e supponiamo $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \varphi(x, y)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \varphi'(x, y)$, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = \varphi''(x, y)$ ec., avremo per esprimere l' integrale completo di quest' equazione $f = 0$, la serie

$$y = A + x\varphi(x, y) + \frac{x^2}{2}\varphi'(x, y) + \frac{x^3}{2 \cdot 3}\varphi''(x, y) + \text{ec.}$$

nella quale però dee farsi $x = 0$ nei coefficienti della variabile x, cioè in $\varphi(x, y)$, $\varphi'(x, y)$ ec. La A costante che resta arbitraria, rappresenta il valore di y quando $x = 0$.

Dando ad A diversi valori particolari, si hanno i diversi integrali particolari della proposta; e se fosse dato un integrale particolare espresso dall' equazione $s = 0$, si troverebbe il valore di A e quindi la serie che a quello corrisponde in questa guisa. Ricavato il valore di y in x sia $y = \Psi x$, e si avrà

$y = \Psi x + x\varphi(x, \Psi x) + \frac{x^2}{2}\varphi'(x, \Psi x) + \text{ec.}$, ove dee farsi

$x = 0$ in Ψx, $\varphi(x, \Psi x)$, $\varphi'(x, \Psi x)$ ec.

Questa serie sarebbe allora un valore particolare di y compreso nel completo, e che avremmo ottenuto addirittura se avessimo fatto $A = \Psi 0$.

Se quell' equazione $s = 0$ fosse stata una soluzione particolare, e non avesse rese eguali $\frac{0}{0}$ le quantità $\varphi'(x, y)$, $\varphi''(x, y)$ ec., ci avrebbe condotto egualmente alla suddetta serie, la quale è un integrale particolare e non una soluzione, il che sarebbe stato assurdo: col divenire indeterminate le quantità $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ ec., l' analisi ci ha avvertito che quella serie non può rappresentare la soluzione particolare.

Data un' equazione tra x, y, la quale soddisfaccia ad una differenziale, e sia priva di costante arbitraria, si potrebbe di qui ricavare anche il mezzo, onde conoscere se quella relazione è un integrale, ovvero una soluzione particolare.

§. 276. Queste considerazioni ponno estendersi alle equazioni degli ordini superiori. Sia

$F\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), a\right\} = 0$ un integrale primo completo di una equazione differenziale di secondo ordine; eliminandone a per mezzo della $dF = 0$, si avrà l' equazione differenziale del secondo ordine; ed eliminandola per mezzo dell' equazione $\left(\frac{dF}{da}\right) = 0$, si ha la soluzione prima particolare.

Sia $\varphi\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\right\}$ o semplicemente φ il valore di a ricavato dall' equazione $dF = 0$: sostituendo questo valore nell' integrale completo, si avrà un' equazione differenziale di questa forma

$F\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), \varphi\right\} = 0$; della quale si prenda la differenziale, e vedremo che la porzione relativa ad x, y, $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ sarà identicamente nulla, poichè φ che vi è riguardato come costante, è stato determinato per mezzo dell' equazione che ci è

data dall' eguagliare quella porzione allo zero.

La differenziale dunque di $F\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), \varphi\right\} = 0$ si ridurrà soltanto all' equazione $\left(\frac{dF}{d\varphi}\right) d\varphi = 0$, che si decompone in queste due $\left(\frac{dF}{d\varphi}\right) = 0$, $d\varphi = 0$.

La $d\varphi = 0$ è un' equazione differenziale del terzo ordine, essendone $\varphi = a$ il suo integrale completo. Se eliminiamo $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ tra queste due equazioni $\varphi = a$,

$F\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), \varphi\right\} = 0$, che equivale all' eliminazione di φ, avremo per l' integrale primo completo l' equazione

$F\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), a\right\} = 0$, che è quella d' onde siamo partiti.

L' altra equazione $\left(\frac{dF}{d\varphi}\right) = 0$ ci darà, con l' eliminazione di φ tra essa e

$F\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), \varphi\right\} = 0$, lo stesso risultato che si ottiene con l' eliminazione di a tra $\left(\frac{dF}{da}\right)$ e

$F\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), a\right\} = 0$: dunque quel risultato sarà una soluzione prima particolare dell' equazione differenziale del secondo ordine, di cui

$F\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), a\right\} = 0$ è l' integrale completo.

Ciò posto sia data l' equazione del secondo ordine

$f\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\right\} = 0$, e supponiamone

$F\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), a\right\} = 0$ l' integrale primo completo. Differenziando questo integrale, ed eliminandone la costante arbitraria, si ha l' equazione del secondo ordine

$F\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), \varphi\right\} = 0$, la cui differenziale abbiam veduto essere $(\frac{dF}{d\varphi})\,d\varphi = 0$.

Le due equazioni $f\{x, y, (\frac{dy}{dx}), (\frac{d^2y}{dx^2})\} = 0$, $F\{x, y, (\frac{dy}{dx}), \varphi\} = 0$ debbono combinare tra loro, essendo o potendo considerarsi ambedue il risultato dell' eliminazione della costante a dall' integrale completo $F\{x, y, (\frac{dy}{dx}), a\} = 0$: avremo dunque $f\{x, y, (\frac{dy}{dx}), (\frac{d^2y}{dx^2})\} = MF\{x, y, (\frac{dy}{dx}), \varphi\}$, M essendo un fattore funzione di $x, y, (\frac{dy}{dx}), (\frac{d^2y}{dx^2})$.

Di qui si ricava $F\{x, y, (\frac{dy}{dx}), \varphi\} = \frac{1}{M} f\{x, y, (\frac{dy}{dx}), (\frac{d^2y}{dx^2})\}$, e differenziando quest' ultima equazione, si ha

$$df = M(\frac{dF}{d\varphi})\,d\varphi + \frac{dM}{M}\cdot f.$$

Si potrà dunque soddisfare alla differenziale $df = 0$ della proposta, indipendentemente dal valore di $(\frac{d^3y}{dx^3})$ per mezzo delle due equazioni $(\frac{dF}{d\varphi}) = 0$, $f\{x, y, (\frac{dy}{dx}), (\frac{d^2y}{dx^2})\} = 0$, e se ne avrà la soluzione particolare eliminando $(\frac{d^2y}{dx^2})$ tra queste due equazioni stesse.

Ora essendo $df = \{(\frac{d^3y}{dx^3})(\frac{df}{dq}) + (\frac{d^2y}{dx^2})(\frac{df}{dp}) + (\frac{dy}{dx})(\frac{df}{dy}) + (\frac{df}{dx})\}\,dx = 0$ (le lettere p, q stanno per $(\frac{dy}{dx}), (\frac{d^2y}{dx^2})$) avremo quest' equazione identica

$$\{(\frac{d^3y}{dx^3})(\frac{df}{dq}) + (\frac{d^2y}{dx^2})(\frac{df}{dp}) + (\frac{dy}{dx})(\frac{df}{dy}) + (\frac{df}{dx})\}\,dx = M(\frac{dF}{d\varphi})\,d\varphi + \frac{dM}{M}\cdot f.$$

Il secondo membro si riduce nullo indipendentemente dal valore di $(\frac{d^3y}{dx^3})$, col fare $(\frac{dF}{d\varphi}) = 0$, $f = 0$: il primo si annulla indipendentemente dal detto valore col fare $(\frac{df}{dq}) = 0$, $(\frac{d^2y}{dx^2})(\frac{df}{dp}) + (\frac{dy}{dx})(\frac{df}{dy}) + (\frac{df}{dx}) = 0$; dunque quelle due prime equazioni si tireranno dietro le due seconde: dunque si avrà una soluzione particolare eliminando $(\frac{d^2y}{dx^2})$ da quelle due seconde equazioni per mezzo della proposta. L' identità dei due risultati ci darà una soluzione particolare: quando questa non vi fosse, i due risultati sarebbero diversi. Il tutto è conforme a ciò che abbiamo detto per l' equazioni di primo ordine.

Dunque data l' equazione del secondo ordine $f = 0$, per averne la soluzione particolare, da essa caveremo il valore di $(\frac{d^2y}{dx^2})$, e se questo sarà $= \frac{P}{Q}$, faremo $(\frac{d^2y}{dx^2}) = \frac{0}{0}$, quindi $P = 0$, $Q = 0$: queste due equazioni combinate con la proposta, ci daranno la soluzione particolare se vi è.

Estendendo la ricerca alle equazioni di un ordine qualunque, ne concluderemo, che per trovare la soluzione particolare, se vi è, di una equazione dell' ordine n^{esimo}, conviene differenziandola, ricavare da essa il valore di $(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}})$, ed egualgliarlo a $\frac{0}{0}$: se questo valore sarà $\frac{P}{Q}$, le due equazioni $P = 0$, $Q = 0$ ci daranno la soluzione particolare, quando con l'ajuto della proposta eliminando da ciascuna di esse $(\frac{d^ny}{dx^n})$ giungasi allo stesso risultato.

§. 277. Per farne qualche esempio sia l' equazione del secondo ordine

$$x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + x = 0.$$

Io la differenzio e ne ricavo

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = \frac{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 1}{2\left\{x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}} = \frac{0}{0}:$$ sarà dunque

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 1 = 0, \quad x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \left(\frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

La prima mi dà $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \pm 1$, che riduce la proposta a $2\left\{x \pm \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\} = 0$, cioè $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x^2 = 0$. La seconda dà $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{dy}{dx}\right)$, che sostituito nella proposta, la cangia in $-\frac{1}{x}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x = 0$, cioè $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x^2 = 0$: sarà dunque $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x^2 = 0$ la soluzione particolare.

Per un altro esempio, sia l' equazione

$$y - x\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \left\{\left(\frac{dy}{dx}\right) - x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\right\}^2 - \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0.$$

Prendiamone la differenziale per avere il valore di $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$, e troveremo $\left\{\frac{x^2}{2} + 2\left[\left(\frac{dy}{dx}\right) - x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\right]x - 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\right\}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = 0$; avremo dunque $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = \frac{0}{0}$ se eguagliamo a zero il fattore per il quale $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ è moltiplicato: si avrà in questa guisa la sola condizione $\frac{x^2}{2} + 2\left[\left(\frac{dy}{dx}\right) - x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\right]x - 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$, dalla quale si ricava

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{4x\left(\frac{dy}{dx}\right) + x^3}{4(1 + x^2)}.$$

Per ottenere poi la soluzione particolare, basta sostituire nella proposta questo stesso valore: si trova allora

$$y - x\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{x^2}{2} \times \frac{4x\left(\frac{dy}{dx}\right) + x^3}{4(1 + x^2)} - \frac{\left\{4\left(\frac{dy}{dx}\right) - x^3\right\}^2 + \left\{4x\left(\frac{dy}{dx}\right) + x^3\right\}^2}{16(1 + x^2)^2} = 0,$$

la quale si riduce a quest' altra

$$y - \frac{2x + x^3}{2(1 + x^2)}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{x^4 - 16\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{16(1 + x^2)} = 0.$$

L' equazione del terzo ordine $\left\{\frac{x^2}{2} + 2\left[\left(\frac{dy}{dx}\right) - x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\right]x - 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\right\}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = 0$ trovata quì sopra, ci dà $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = 0$, di cui l' integrale completo è $y = \frac{a}{2}x^2 + bx + c$ essendo a, b, c tre costanti arbitrarie. Ora quell' equazione del terzo ordine essendo la differenziale della proposta, che è del secondo, se vuolsi che $y = \frac{a}{2}x^2 + bx + c$ soddisfaccia a questa, converrà sostituire in essa i respettivi valori per y, $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, e si avrà tra le costanti a, b, c l' equazione $c - b^2 - a^2 = 0$, quindi $c = a^2 + b^2$, e perciò $y = \frac{a}{2}x^2 + bx + a^2 + b^2$ sarà l' integrale completo della proposta medesima.

CAP. XII.

Continuazione dello stesso Soggetto.

§. 278. Date le equazioni differenziali, noi ci occupammo sin quì a determinarne le soluzioni particolari. Qualche cosa diciamo sul problema inverso: data cioè una relazione tra x, y, la quale prender si debba per soluzione particolare, ricerchiamo l' equazione differenziale cui appartiene. Noi vedremo che se la soluzione particolare è più limitata dell' integrale completo, perchè non contiene costanti arbitrarie, ha però il pregio di corrispondere nel tempo stesso ad una infinità d' equazioni differenziali diverse.

Rappresentiamo per $F(x, y, a, b) = o$ un integrale completo tra x, y e due costanti a, b, una delle quali sia funzione qualunque dell' altra, ed in generale che tra di esse siavi la relazione espressa da $f(a, b) = o$. Otterremo la differenziale che ne risulta, eliminando queste due costanti per mezzo delle tre equazioni

$$F(x, y, a, b) = o,$$

$$dF = \left(\frac{dF}{dx}\right) dx + \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = o,$$

$$f(a, b) = o.$$

Se dunque noi deduciamo dalle due prime i valori di a e di b dati per x, y e $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, di modo che sia

$$a = \varphi \left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\} = \varphi,$$

$$b = \Psi \left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\} = \Psi,$$ e gli sostituiamo nella terza equa-

zione, avremo l' equazione differenziale $f(\varphi, \Psi) = o$.

Dunque reciprocamente ogni equazione differenziale di questa forma, avrà per integrale completo l'equazione $F(x, y, a, b) = o$, regnando tra le due costanti a, b la relazione espressa dall' equazione $f(a, b) = o$, ed avremo nel tempo stesso

$$a = \varphi \left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\},$$

$$b = \Psi \left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}.$$

Dunque ogni valore di y in x, che verificando l' equazione $f(\varphi, \Psi) = o$ non renderà le funzioni φ, Ψ costanti, non potrà esser compreso nell' integrale completo generale, e sarà quindi una soluzione particolare.

Sia $y = f'(x)$ questo valore o soluzione particolare, e sostituendo $f'(x)$, $\left(\frac{df'}{dx}\right)$ per y e $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ nelle funzioni φ, Ψ, diverranno queste semplici funzioni di x, ed eliminando x tra di esse, si avrà un' equazione tra φ e Ψ, che si prenderà per l' equazione $f(\varphi, \Psi) = o$: l' equazione dunque $y = f'x$ soddisfarà all' equazione $f(\varphi, \Psi) = o$, ma non rendendo costanti le quantità φ, Ψ, non potrà essere compresa nell' integrale completo generale, e sarà in conseguenza una soluzione particolare.

Ecco dunque a cosa si riduce tutto questo: sia $y = f'x$ la soluzione particolare. Per avere l' equazione differenziale cui appartiene, prendasi ad arbitrio un' equazione qualunque

(A) . . . . . $F(x, y, a, b) = o$.

Da questa equazione e dalla sua differenziale $\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) = o$ si ricavino i valori di a e di b in $x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)$, e sostituendo in essi in vece di y e di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ i respettivi valori $f'x$, $\left(\frac{df'}{dx}\right)$, si avranno due equazioni in x, le quali per mezzo dell' eliminazione di x, ci daranno un' equazione $f(a, b) = o$ tra a e b.

Riponiamo in $f(a,b)=0$ i primi valori di a, b in x, y, $(\frac{dy}{dx})$, ed avremo l' equazione differenziale, della quale $y=f'x$ sarà la soluzione particolare, ed $F(x,y,a,b)=0$ l' integrale completo, essendo una delle due costanti, funzione dell' altra data per l' equazione $f(a,b)=0$.

E siccome l' equazione (A) è arbitraria, si avranno così infinite equazioni differenziali che corrisponderanno alla stessa soluzione particolare $y=f'x$.

Per esempio, propongasi per soluzione particolare l' equazione $y-Ax-B=0$, e si dimandi a quale equazione differenziale corrisponde.

Prendendo per (A) l' equazione $y^2-ax^2-b=0$ e differenziandola, si avrà

$y(\frac{dy}{dx})-ax=0$, e quindi $a=\frac{y}{x}(\frac{dy}{dx})$, $b=y^2-xy(\frac{dy}{dx})$.

La soluzione particolare proposta ci dà $y=Ax+B$,

$y^2=A^2x^2+2ABx+B^2$, e

$y(\frac{dy}{dx})=A^2x+AB$; dunque facendo le opportune sostituzioni nei valori di a e di b, avremo

$a=A^2+\frac{AB}{x}$, $b=ABx+B^2$, e l' eliminazione di x ci darà

$(a-A^2)(b-B^2)-A^2B^2=0$, cioè

$ab-B^2a-A^2b=0$.

Sostituiamo in quest' ultima equazione i valori di a e di b in x, y e $(\frac{dy}{dx})$, e si avrà

$$\frac{y}{x}(\frac{dy}{dx})\{y^2-xy(\frac{dy}{dx})\}-\frac{B^2y}{x}(\frac{dy}{dx})-A^2\{y^2-xy(\frac{dy}{dx})\}=0.$$

Quest' equazione differenziale avrà per soluzione particolare $y-Ax-B=0$, e per integrale completo $y^2-ax^2-b=0$, supponendo tra a e b quest' equazione $ab-B^2a-A^2b=0$; se ne ricerchiamo il valore di b, avremo

$b=\frac{B^2a}{a-A^2}$, e l' integrale completo sarà $y^2-ax-\frac{B^2a}{a-A^2}=0$.

Se da questo integrale completo si ricavasse per mezzo delle regole date sopra, la soluzione particolare, troveremmo appunto quella proposta in quest' esempio.

§. 279. Veniamo alle equazioni del secondo e degli ordini superiori.

Data l' equazione $(\frac{dy}{dx})+f(x,y)=0$ come soluzione particolare, potranno ottenersi infinite equazioni del secondo ordine ad essa corrispondenti.

Per questo, prenderemo un' equazione qualunque (A) in x, y e tre costanti arbitrarie a, b, c. Con l' equazione (A) e quelle che se ne deducono differenziandola due volte, troveremo i valori di a, b, c dati per x, y, $(\frac{dy}{dx})$: siano $a=\varphi$, $b=\Psi$, $c=\Phi$.

In questi valori sostituiremo quei di $(\frac{dy}{dx})$, $(\frac{d^2y}{dx^2})$ dati dalla soluzione particolare $(\frac{dy}{dx})+f'(x,y)=0$, e dalla di lei differenziale

$(\frac{d^2y}{dx^2})+(\frac{df'}{dx})+(\frac{df'}{dy})(\frac{dy}{dx})=0$, ed avremo in questa guisa le costanti a, b, c, date per x e per y.

Eliminando in fine per mezzo di queste tre equazioni le variabili x, y, avremo un' equazione tra a, b, c, $f(a,b,c)=0$, nella quale sostituendo φ, Ψ, Φ per a, b, c, otterremo l' equazione del secondo ordine $f(\varphi,\Psi,\Phi)=0$, che avrà per soluzione particolare la proposta, e per integrale l' equazione (A) contenente due costanti arbitrarie, giacchè potremo far conto che siasi da essa eliminato il c, sostituendovi il suo valore in a, b dato da $f(a,b,c)=0$.

Siccome possono prendersi infinite equazioni (A), così potremo ottenere infinite equazioni del secondo ordine che abbiano quella soluzione particolare.

Se la soluzione particolare data fosse del secondo ordine, prenderemmo ad arbitrio un' equazione tra x, y e quattro costanti a, b, c ec., e così di seguito.

Per farne un esempio, sia $(\frac{dy}{dx}) = Ay$ la soluzione particolare: prendasi l' equazione

$y - \frac{a}{2}x^2 - bx - c = 0$, e la differenziazione ci darà

$(\frac{dy}{dx}) - ax - b = 0$, $(\frac{d^2y}{dx^2}) - a = 0$: queste tre equazioni ci somministrano

$a = (\frac{d^2y}{dx^2})$, $b = (\frac{dy}{dx}) - x(\frac{d^2y}{dx^2})$, $c = y - x(\frac{dy}{dx}) + \frac{x^2}{2}(\frac{d^2y}{dx^2})$.

Ora la soluzione particolare ci dà $(\frac{dy}{dx}) = Ay$, $(\frac{d^2y}{dx^2}) = A(\frac{dy}{dx}) = A^2y$; dunque

$a = A^2y$, $b = Ay(1 - Ax)$, $c = y(1 - Ax + \frac{A^2}{2}x^2)$;

eliminiamone x ed y, ed avremo $a^2 + A^2(b^2 - 2ac) = 0$, in cui sostituendo i valori primi per a, b, c, troveremo

$(\frac{d^2y}{dx^2})^2 - 2A^2y(\frac{d^2y}{dx^2}) + A^2(\frac{dy}{dx})^2 = 0$: quest' ultima equazione del secondo ordine ha per soluzione particolare $(\frac{dy}{dx}) = Ay$, e per integrale completo $y - \frac{a}{2}x^2 - bx - c = 0$, ovvero

$y - \frac{a}{2}x^2 - bx - \frac{a^2 + A^2b^2}{2a} = 0$, avendo messo per c il suo valore ricavato da $a^2 + A^2(b^2 - 2ac) = 0$; a, b sono le due costanti arbitrarie.

§. 280. Veniamo a qualche Problema Geometrico, nel risolvere il quale ha luogo la ricerca delle soluzioni particolari dell' equazioni differenziali.

Si dimanda una curva tale, che la normale in qualunque suo punto abbia una data relazione con la porzione dell' asse intercetta tra l' origine dell' ascisse e la normale medesima di modo che, se per a si rappresenti questa porzione e per b quella normale, sia $b = \Psi(a)$.

Da ciò che abbiam detto (§. 78.) nell' applicazione alla Geometria, si ha

$a = x + y(\frac{dy}{dx})$, $b = y\sqrt{\{1 + (\frac{dy}{dx})\}}$; dunque l' equazione differenziale

$y\sqrt{\{1 + (\frac{dy}{dx})\}} = \Psi\{x + y(\frac{dy}{dx})\}$ sarà quella, dalla integrazione della quale dipende la soluzione del Problema.

Non si saprebbe però integrare generalmente per qualunque forma della funzione Ψ. Sia per un caso particolare $b^2 = ac$, e l' equazione differenziale diverrà

$y\sqrt{\{1 + (\frac{dy}{dx})\}} = \sqrt{(c\{x + y(\frac{dy}{dx})\})}$.

Ricaviamo da questa equazione il valore di $y(\frac{dy}{dx})$ e si avrà

$y(\frac{dy}{dx}) = \frac{c}{2} + \sqrt{\{\frac{c^2}{4} + cx - y^2\}}$, ovvero

$c - 2y(\frac{dy}{dx}) + 2\sqrt{(\frac{c^2}{4} + cx - y^2)} = 0$, ovvero

$cdx - 2ydy + 2dx\sqrt{(\frac{c^2}{4} + cx - y^2)} = 0$, ovvero

$$\frac{cdx - 2ydy}{2\sqrt{(\frac{c^2}{4} + cx - y^2)}} + dx = 0.$$

L' integrale di quest' equazione è $\sqrt{(\frac{c^2}{4} + cx - y^2)} + x = h$, indicando per h una costante arbitraria: tale dunque sarà l' equazione della curva che risolve il Problema.

Mandiamo via il radicale da quell' integrale, ed avremo $\frac{c^2}{4} + cx - y^2 = (h - x)^2$, che è l' equazione al circolo.

Per riconoscerla anche più facilmente facciamo $h = e - \frac{c}{2}$, essendo e una nuova costante arbitraria, e si avrà $y^2 + (e - x)^2 = ec$, ove la e rappresenta l' ascissa del centro; la $\sqrt{ec}$ il raggio.

Concluderemo dunque che un circolo che abbia il suo centro nell' asse corrispondente a qualunque ascissa $= e$, ed il cui raggio, che è la stessa normale, sia $\sqrt{ec}$, risolverà il Problema: e siccome infiniti valori dar possiamo ad e, così infiniti circoli soddisfaranno alla dimanda.

Ora si può dimandare se vi saranno altre curve che sciolgano lo stesso quesito, ciò che equivale a dire, se vi saranno altre relazioni tra le variabili x, y che soddisfacciano alla differenziale

$cdx - 2ydy + 2dx\sqrt{(\frac{c^2}{4} + cx - y^2)} = 0$, oltre l' integrale $y^2 + (e - x)^2 = ec$.

Ad una equazione differenziale, oltre l' integrale completo, soddisfanno le soluzioni particolari se ve ne sono. Cerchiamo dunque queste seconde relazioni nel nostro caso. Data all' integrale la forma

$y^2 + (e - x)^2 - ec = 0$, prendiamone il differenziale considerando soltanto e variabile, quindi dividendo per de, avremo

$2(e - x) - c = 0$, $e = \frac{c+2x}{2}$. Questo valore sostituito nell' integrale completo, ci dà

$y^2 = cx + \frac{c^2}{4}$, che è la soluzione particolare di quella equazione differenziale: soddisfarà dunque al Problema anche la curva espressa da

$y^2 = cx + \frac{c^2}{4} = c(x + \frac{c}{4})$, che è una parabola Apolloniana.

Abbiamo dunque un numero infinito di circoli che risolvono la questione, ed una sola parabola Apolloniana. Quei ci sono dati dall' integrale completo, questa dalla soluzione particolare.

§. 281. Il Problema che abbiamo trattato nel §. antecedente fu risoluto la prima volta da Leibnizio. Negli Atti di Lipsia del 1694. questo gran Geometra dette la maniera di trovare la curva formata per l' intersezione continua di una infinità di curve, comprese in una medesima equazione, facendo variare in essa il parametro per cui differiscono l' una dall' altra. In tal guisa egli otteneva una nuova equazione, dalla quale si aveva il parametro dato per le coordinate, e questo valore sostituito nell' equazione proposta, somministrava subito l' equazione della curva cercata.

Applicando questa teoria al Problema suddetto, Leibnizio riguardava la curva cercata come nata dall' intersezione continua di un' infinità di circoli che hanno i loro centri nell' asse. I raggi dei circoli erano allora le normali alla curva, e la relazione data dal Problema tra le normali e le parti corrispondenti dell' asse, ha luogo tra i raggi e le ascisse corrispondenti ai centri dei circoli.

Secondo ciò, chiamando b il raggio di un circolo, a l' ascissa corrispondente al centro, x, y le coordinate, si ha $y^2 + (a - x)^2 = b^2$ per l' equazione di questo circolo; e supponendo che il quadrato della normale b esser debba eguale al rettangolo della ascissa a in una data costante c, cioè $= ac$, quell' equazione del circolo diverrà

$y^2 + (a - x)^2 = ac$.

Leibnizio differenzia questa equazione, riguardando sola a variablle, ed ottiene

$2(a - x)da = cda$, da cui $a = \frac{c+2x}{2}$; sostituendo questo valore di a in $y^2 + (a - x)^2 = ac$, ei trova l' equazione

$y^2 = (x + \frac{c}{4})c$ alla parabola Apolloniana che risolve il Problema.

Si vede che quel Geometra ha risoluto il Problema in quella guisa medesima che si ha dalla soluzione particolare dell' equazione differenziale, cui lo stesso Problema conduce: egli perciò lasciò in questo caso da banda la ricerca dell' equazione differenziale, e quindi della sua integrazione.

§. 282. La soluzione di Leibnizio è dedotta, come abbiam veduto, dalla considerazione della curva formata dall' intersezione continua di tutti i circoli che ottengonsi facendo continuamente variare il parametro costante a; in generale, si può dimostrare che le soluzioni particolari godono di questa proprietà generale: esse appartengono alle curve generate dalla continua intersezione di altre curve rappresentate dall' integrale completo, nel quale si faccia continuamente variare la costante arbitraria.

Infatti la curva prodotta dall' intersezione continua di una serie di curve pochissimo differenti l' una dall' altra, è la curva che abbraccerebbe o toccherebbe tutte queste curve, e che perciò avrebbe in ciascuno dei suoi punti una tangente comune con una di queste curve stesse.

Ora sia $F(x, y, a) = 0$ l'equazione generale delle curve, delle quali si tratta, a essendo il parametro che è costante in ciascuna di esse, ma che è diverso dall'una all'altra: la curva che deve abbracciarle ha un punto comune con ciascuna di queste curve; essa avrà in conseguenza le medesime coordinate x, y, e la stessa equazione tra di esse, con questa sola diversità che il parametro a sarà variabile nell'equazione $F(x, y, a) = 0$ finchè essa apparterrà alla curva che abbraccia tutte le altre.

Di più, bisognerà che la posizione della tangente sia la medesima nella curva dove a è costante, ed in quella ove è variabile: ora si sa che la posizione di una tangente dipende dal valore di $(\frac{dy}{dx})$, giacchè (§. 78) la suttangente è rappresentata da $y : (\frac{dy}{dx})$; dunque bisognerà che il valore di $(\frac{dy}{dx})$ ricavato dalla differenziale di $F(x, y, a) = 0$, sia il medesimo tanto riguardandovi a come costante, che come variabile funzione di x: dunque la porzione della differenziale di $F(x, y, a) = 0$ relativa ad a cioè $da(\frac{dF}{da})$ dovrà essere nulla: dunque riguardando $F(x, y, a) = 0$ come l'equazione della curva che abbraccia le altre, bisognerà che il parametro a sia una tal funzione variabile da annullare la quantità $(\frac{dF}{da})$.

Avremo pertanto il valore di a in funzione di x, y risolvendo l'equazione $(\frac{dF}{da}) = 0$. Questo sostituito in $F(x, y, a) = 0$, ci darà l'equazione della curva abbracciante.

L'equazione $(\frac{dF}{da}) = 0$ è quella che ci dà la soluzione particolare, quando l'integrale completo è $F(x, y, a) = 0$.

Dunque l'equazione della curva abbracciante tutte le altre,

e la soluzione particolare corrispondente all'integrale completo $F(x, y, a) = 0$, dal quale sono rappresentate le curve abbracciate, sono la cosa stessa.

Questa considerazione Geometrica ci presenta il legame che vi è tra le curve rappresentate dalla soluzione particolare, e dall'integrale completo.

Osserviamo che il problema analitico da noi risoluto (§. 278) si riduce a trovare delle curve, le quali avendo un parametro variabile, possano formare con la loro reciproca intersezione una curva data: possiamo in conseguenza esporre il problema sotto questo punto di vista.

„ Abbiansi due curve di cui l'equazioni siano date, e
„ delle quali una contenga due costanti arbitrarie, e si ricer-
„ chi la relazione necessaria tra queste due costanti, onde fa-
„ cendo variare quella che resta arbitraria, ne nascano un' in-
„ finità di curve del medesimo genere, le quali con la loro
„ reciproca intersezione producano l'altra curva data „.

La soluzione di questo problema dipende dalla determinazione della relazione tra le due costanti a, b dell'equazione data $F(x, y, a, b) = 0$, affinchè quest'equazione presa per integrale completo, abbia per soluzione particolare $y = \Sigma x$, che sarà l'equazione della curva abbracciante tutte quelle date dall'altra equazione.

§. 283. Giovanni Bernulli risolvè lo stesso problema di Leibnizio per altra via; così questi due Geometri fino dalla nascita del calcolo differenziale ed integrale, s'imbatterono nelle soluzioni particolari dell'equazioni differenziali, senza però riguardarle come relazioni capaci di soddisfare alle equazioni differenziali.

Il primo Geometra, cui si presentarono sotto questo aspetto, fu Taylor, come si rileva dalla sua Opera *Methodus incrementorum* pubblicata nel 1715 alla pag. 17. La soluzione di un problema avendolo condotto ad una equazione, la quale cangiata dall'algoritmo flussionale nel differenziale, è

$1 = y^2 - 2zy(\frac{dy}{dz}) + (1 + z^2)(\frac{dy}{dz})^2$, ebbe l'idea di differenziarla, e ne ottenne

$\left\{-2zy+2(1+z^2)\left(\frac{dy}{dz}\right)\right\}\left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)=0$, d' onde ne ricavò

$d^2y=0$,

$zy-(1+z^2)\left(\frac{dy}{dz}\right)=0$.

Quest' ultima equazione dà

$\left(\frac{dy}{dz}\right)=\frac{zy}{1+z^2}$, che riduce la proposta a quest' altra

$1=y^2-\frac{2z^2y^2}{1+z^2}+\frac{z^2y^2}{1+z^2}$, cioè $1+z^2=y^2$, che è, dice quel Geometra, *singularis quaedam solutio problematis*.

La prima equazione $d^2y=0$ ci dà $y=a+bz$, quindi $\left(\frac{dy}{dz}\right)=b$, ed $y=a$ quando $z=0$: ora in questo caso la proposta diviene $1=a^2+b^2$; dunque $b=\sqrt{(1-a^2)}$, e perciò $y=a+z\sqrt{(1-a^2)}$ ne sarà l' integrale completo.

La singolare equazione di Taylor è poi una soluzione particolare: infatti facendo (§. 274) secondo la regola

$\left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)=\frac{0}{-2zy+2(1+z^2)\left(\frac{dy}{dz}\right)}=\frac{0}{0}$, si ha

$-2zy+2(1+z^2)\left(\frac{dy}{dz}\right)=0$.

Anche Clairaut nel 1734, e Vincenzio Riccati nel 1747, adoprando, per integrare un' equazione differenziale, l' artifizio di differenziarla, per ottenerne una equazione di un ordine superiore, ma scomponibile in due fattori, ebbe due integrali differenti, uno dei quali era l' integrale completo, l' altro una relazione tra le variabili priva di costante arbitraria, e che quel Geometra riguardò come una singolarità di calcolo.

Avvenne lo stesso ad Eulero, e nella sua Meccanica si ritrovano molti esempj di questa duplicità d' integrali: ma Eulero fece anche di più; assegnò delle regole per scoprirla in alcuni casi, come si vede ai §§. 268, 303, 335 del secondo Tomo di quell' Opera.

Questo Geometra poi si occupò estesamente di siffatta ri-

cerca in una Memoria inserita negli Atti dell' Accademia di Berlino del 1756.

Sino a quest' epoca le soluzioni particolari erano state riguardate come relazioni, le quali si presentavano da se medesime e senza integrazione, nè aveasi alcun mezzo, onde riconoscere a *priori* se una simile soluzione poteva esser compresa nella soluzione generale data dall' integrale completo. Lo stesso Eulero è il primo, che per questo oggetto ha dato una regola generale che ritrovasi nel primo Volume del suo Calcolo Integrale. La-Place dimostrò poi come le soluzioni particolari si potevano dedurre dalla medesima equazione differenziale; ma la Teoria generale delle soluzioni, la quale ci mostra il legame che è tra esse, l' integrali particolari, ed il completo che ci fa vedere non formare esse un paradosso o bizzarria di calcolo, ma dipendere necessariamente dai primi principj del Calcolo Differenziale che ci spiega qual rapporto geometrico abbian le curve rappresentate dalle soluzioni particolari con quelle rappresentate dagli integrali, deesi a La-Grange. Negli Atti di Berlino del 1774 e del 1779 se ne occupò, e più estesamente ne ha trattato nel dodicesimo quinterno del Giornale della Scuola Politecnica.

Le soluzioni particolari ponno incontrarsi ancora nelle questioni Meccaniche. Sopponiamo per esempio che si cerchi l' equazione del moto di un corpo, il quale debbe moversi lungo l' asse degli x con una velocità che è funzione dello spazio percorso x, e del tempo t impiegato a percorrerlo. Sia $f(x,t)$ l' espressione di questa velocità alla fine del tempo t, ed avremo $\left(\frac{dx}{dt}\right)=f(x,t)$: l' integrale sarà l' equazione del movimento. Sia quest' integrale $x=F(a,t)$ rappresentando per a la costante arbitraria che si determinerà in funzione di uno spazio dato descritto in un tempo dato.

Sia $a=\Upsilon t$ quel valore di a ricavato dall' equazione $\left(\frac{dF}{da}\right)=0$; sarà $x=F(\Upsilon t,t)$ la soluzione particolare, e rappresenterà ancora essa un movimento che risolve il problema: avremo dunque due movimenti

$x=F(a,t)$, $x=F(\Upsilon t,t)$, così generalmente parlando la questione è risoluta in due modi; l'esame però di essa nei casi particolari toglierà ogni equivoco, e potremo conoscere quale delle due soluzioni è quella che risolve il problema.

E quì osservo che il movimento rappresentato dalla soluzione particolare $x = F(\Psi t, t)$ è solo ed unico; mentre l'integrale completo ci dà un numero infinito di movimenti della stessa natura, i quali si ottengono con dare ad a dei valori particolari: tra questo numero però infinito di movimenti se ne potrà sempre trovare uno che alla fine di un tempo qualunque determinato t abbia la stessa velocità che alla fine di quel tempo trovasi nel movimento rappresentato dalla soluzione particolare. Quel movimento si ha facendo $a = \Psi t$ essendo t quel tempo determinato.

Queste riflessioni si estendono al caso di un corpo che movendosi in qualunque maniera nello spazio, ha tre moti secondo la direzione dei tre assi ortogonali.

Se i movimenti fossero dati per mezzo di equazioni tra le forze acceleratrici le velocità, gli spazj ed il tempo, allora avrebbero luogo le considerazioni sopra le soluzioni particolari dell'equazioni del secondo ordine.

§. 284. Venendo a parlare delle soluzioni particolari nelle equazioni ai differenziali parziali, noi osserveremo che se si ha un'equazione del primo ordine

$F\left\{x, y, \left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dy}\right), z\right\} = 0$, il suo integrale completo (§. 119) dee contenere due costanti arbitrarie. Sia $F(x, y, z, a, b) = 0$ quest'integrale, e quell'equazione risulterà dall'eliminazione di a, b per mezzo dell'equazione $f = 0$, e delle due differenziali parziali di essa rapporto ad x, e ad y.

La soluzione poi particolare (§. 123) ci è data dall'eliminazione delle medesime costanti per mezzo di queste tre equazioni

$f = 0, \left(\frac{df}{da}\right) = 0, \left(\frac{df}{db}\right) = 0.$

Per esempio l'integrale completo dell'equazione

$z = y\left(\frac{dz}{dy}\right) + x\left(\frac{dz}{dx}\right) + h\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}$, essendo

$z = ax + by + h\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}$, ecco come ne troveremo la soluzione particolare.

Dalle due equazioni

$\left(\frac{dz}{da}\right) = x + \frac{ha}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}} = 0,$

$\left(\frac{dz}{db}\right) = y + \frac{hb}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}} = 0$, ricaveremo

$a = \frac{-x}{\sqrt{(h^2 - x^2 - y^2)}},$

$b = \frac{-y}{\sqrt{(h^2 - x^2 - y^2)}}$, e sostituendo questi valori nell'integrale completo, otterremo $z = \sqrt{(h^2 - x^2 - y^2)}$, che sarà la ricercata soluzione particolare.

Se non fosse dato l'integrale completo, vediamo come ottener se ne potrebbe la soluzione particolare. Noi seguiamo un ragionamento simile a quello fatto per le equazioni differenziali semplici.

Sia $F(x, y, z, a, b) = 0$ un integrale completo; l'equazione a differenziali parziali cui appartiene, sarà il risultato dell'eliminazione di a, b tra queste tre equazioni

(1) . . . . . $F(x, y, z, a, b) = 0,$

(2) . . . . . $\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dF}{dz}\right) = 0,$

(3) . . . . . $\left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dF}{dz}\right) = 0.$

Siano $a = \varphi\left\{x, y, z, \left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dy}\right)\right\} = \varphi$

$b = \Psi\left\{x, y, z, \left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dy}\right)\right\} = \Psi$

i due valori di a, b, ed avremo

(4) . . . . . $F(x, y, z, \varphi, \Psi) = 0$ per quell'equazione ai differenziali parziali. Così l'equazione (1) sarà l'integrale completo dell'equazione (4).

Prendiamo le due differenziali parziali dell' equazione (4) e si avrà

$(\frac{dF}{dx})+(\frac{dz}{dx})(\frac{dF}{dz})+(\frac{d\varphi}{dx})(\frac{dF}{d\varphi})+(\frac{d\Psi}{dx})(\frac{dF}{d\Psi})=0$

$(\frac{dF}{dy})+(\frac{dz}{dy})(\frac{dF}{dz})+(\frac{d\varphi}{dy})(\frac{dF}{d\varphi})+(\frac{d\Psi}{dy})(\frac{dF}{d\Psi})=0$;

queste si riducono semplicemente alle seguenti

(5) . . . . . $(\frac{d\varphi}{dx})(\frac{dF}{d\varphi})+(\frac{d\Psi}{dx})(\frac{dF}{d\Psi})=0$,

(6) . . . . . $(\frac{d\varphi}{dy})(\frac{dF}{d\varphi})+(\frac{d\Psi}{dy})(\frac{dF}{d\Psi})=0$,

giacchè gli altri termini si annullano mercè le equazioni (2) (3).

All' ultime equazioni si soddisfà facendo $\varphi=a$, $\Psi=b$; così tanto il sistema delle due equazioni $\varphi=a$, $\Psi=b$, quanto l' equazione $F(x,y,z,\varphi,\Psi)=0$ soddisfà alle due equazioni (5), (6), le quali sono differenziali parziali del secondo ordine.

Se dunque eliminiamo per mezzo delle tre equazioni $\varphi=a$, $\Psi=b$, $F(x,y,z,\varphi,\Psi)=0$ le quantità $(\frac{dz}{dx})$, $(\frac{dz}{dy})$, avremo un' equazione tra x,y,z,a,b che sarà l' integrale completo della $F(x,y,z,\varphi,\Psi)=0$; il risultato di quell' eliminazione è la stessa equazione $F(x,y,z,a,b)=0$ d' onde siamo partiti.

Si soddisfarà alle equazioni (5), (6) anche facendo $(\frac{dF}{d\varphi})=0$, $(\frac{dF}{d\Psi})=0$, e si avranno in questa guisa due equazioni in x, y, z, $(\frac{dz}{dx})$, $(\frac{dz}{dy})$, il sistema delle quali soddisfarà anche alle due (5), (6), egualmente che vi soddisfà l' equazione $F(x,y,z,\varphi,\Psi)=0$: avremo dunque una nuova relazione tra x,y,z (la quale soddisfarà all' equazione a differenziali parziali del primo ordine $F(x,y,z,\varphi,\Psi)=0$) eliminando $(\frac{dz}{dx})$, $(\frac{dz}{dy})$ tra queste tre equazioni $F(x,y,z,\varphi,\Psi)=0$,

$(\frac{dF}{d\varphi})=0$, $(\frac{dF}{d\Psi})=0$.

Questa eliminazione dà lo stesso risultato che l' eliminazione di a e b dalle tre equazioni

$F(x,y,z,a,b)=0$,

$(\frac{dF}{da})=0$, $(\frac{dF}{db})=0$: dunque esso è la soluzione particolare.

§. 285. Sia ora proposta un' equazione differenziale qualunque del primo ordine

$f\{x,y,z,(\frac{dz}{dx}),(\frac{dz}{dy})\}=0$: quest' equazione risulta dall' eliminazione delle due costanti a, b per mezzo dell' integrale completo $F(x,y,z,a,b)=0$, e delle sue differenziali parziali

$(\frac{dF}{dx})+(\frac{dz}{dx})(\frac{dF}{dz})=0$,

$(\frac{dF}{dy})+(\frac{dz}{dy})(\frac{dF}{dz})=0$: ora il risultato di quest' eliminazione essendo $F(x,y,z,\varphi,\Psi)=0$, le due equazioni

$f\{x,y,z,(\frac{dz}{dx}),(\frac{dz}{dy})\}=0$,

$F(x,y,z,\varphi,\Psi)=0$, saranno identiche, o differiranno per qualche fattor comune che si ritrovi in una di esse. Sia dunque M questo fattore, ed abbiasi

$MF(x,y,z,\varphi,\Psi)=f\{x,y,z,(\frac{dz}{dx}),(\frac{dz}{dy})\}$: sarà

$F(x,y,z,\varphi,\Psi)=\frac{1}{M}f\{x,y,z,(\frac{dz}{dx}),(\frac{dz}{dy})\}$.

Prendiamo le due differenziali parziali di quest' ultima equazione, ed avremo

$(\frac{d\varphi}{dx})(\frac{dF}{d\varphi})+(\frac{d\Psi}{dx})(\frac{dF}{d\Psi})=\frac{1}{M}(\frac{df}{dx})-\frac{f}{M^2}\cdot(\frac{dM}{dx})$

$(\frac{d\varphi}{dy})(\frac{dF}{d\varphi}) + (\frac{d\Psi}{dy})(\frac{dF}{d\Psi}) = \frac{1}{M}(\frac{dF}{dy}) - \frac{f}{M^2}(\frac{dM}{dy})$ le quali sommate ci daranno un' equazione ai differenziali totali

$d\varphi . (\frac{dF}{d\varphi}) + d\Psi . (\frac{dF}{d\Psi}) = \frac{1}{M} . df - \frac{f}{M^2} . dM$, dalla quale si ricava

$df = M(\frac{dF}{d\varphi}) d\varphi + M(\frac{dF}{d\Psi}) d\Psi + \frac{f . dM}{M}$, che è la forma generale della totale differenziale di

$f\left\{x, y, z, (\frac{dz}{dx}), (\frac{dz}{dy})\right\}$.

Di quì si ricava che data un' equazione del primo ordine $f\left\{x, y, z, (\frac{dz}{dx}), (\frac{dz}{dy})\right\} = 0$, potremo soddisfare alla di lei differenziale totale indipendentemente dai valori di $(\frac{d^2z}{dx^2}), (\frac{d^2z}{dxdy})$, $(\frac{d^2z}{dy^2})$ per mezzo delle due equazioni $(\frac{dF}{d\varphi}) = 0$, $(\frac{dF}{d\Psi}) = 0$, combinate con la proposta $f = 0$.

Ora prendendo la differenziale totale di

$f\left\{x, y, z, (\frac{dz}{dx}), (\frac{dz}{dy})\right\} = 0$, si ha (pongo p, q per $(\frac{dz}{dx}), (\frac{dz}{dy})$)

$$\left.\begin{array}{l} \left\{(\frac{df}{dx}) + (\frac{dz}{dx})(\frac{df}{dz}) + (\frac{d^2z}{dx^2})(\frac{df}{dp}) + (\frac{d^2z}{dydx})(\frac{df}{dq})\right\} dx \\ + \left\{(\frac{df}{dy}) + (\frac{dz}{dy})(\frac{df}{dz}) + (\frac{d^2z}{dy^2})(\frac{df}{dq}) + (\frac{d^2z}{dxdy})(\frac{df}{dp})\right\} dy \end{array}\right\} = 0$$

dunque paragonando questa differenziale con la forma generale sopra trovata, si avrà quest' equazione

$$\left\{(\frac{df}{dx}) + (\frac{dz}{dx})(\frac{df}{dz})\right\} dx + \left\{(\frac{df}{dy}) + (\frac{dz}{dy})(\frac{df}{dz})\right\} dy + (\frac{df}{dp}) \times$$
$$d(\frac{dz}{dx}) + (\frac{df}{dq}) . d(\frac{dz}{dy}) = M(\frac{dF}{d\varphi}) d\varphi + M(\frac{dF}{d\Psi}) d\Psi + \frac{f . dM}{M},$$

che sarà identica.

Ora si riduce nullo il secondo membro idipendentemente dalle differenziali parziali del secondo ordine, col fare $(\frac{dF}{d\varphi}) = 0$, $(\frac{dF}{d\Psi}) = 0$, $f = 0$; si riduce anche nullo il primo indipendentemente dagli stessi differenziali, col fare

$(\frac{df}{dx}) + (\frac{dz}{dx})(\frac{df}{dz}) = 0$

$(\frac{df}{dy}) + (\frac{dz}{dy})(\frac{df}{dz}) = 0$

$(\frac{dF}{dp}) = 0$, $(\frac{dF}{dq}) = 0$; dunque quelle tre equazioni si tireranno dietro queste quattro. Ma si aveva una soluzione particolare eliminando $(\frac{dz}{dx}), (\frac{dz}{dy})$ per mezzo di $f = 0$, $(\frac{dF}{d\varphi}) = 0$, $(\frac{dF}{d\Psi}) = 0$; dunque si avrà egualmente una soluzione particolare eliminando $(\frac{dz}{dx}), (\frac{dz}{dy})$ per mezzo di quelle ultime quattro equazioni e della proposta $f = 0$.

Essendo cinque le equazioni e due le quantità da eliminarsi, si avranno tre equazioni senza di tali quantità; e se queste si ridurranno ad una sola, o avranno un fattore comune, daranno allora la cercata soluzione particolare.

Ecco dunque a cosa si riduce questa regola „ Data un' e-
„ quazione a differenze parziali del primo ordine $f = 0$, se
„ ne prenda la sua differenziale totale, e fatti sparire i deno-
„ minatori, avendo essa la forma
„ $Md(\frac{dz}{dx}) + Nd(\frac{dz}{dy}) + Pdx + Qdy = 0$, si faccia $M = 0$,
„ $N = 0$, $P = 0$, $Q = 0$, quindi eliminando da esse com-
„ binate con la proposta $f = 0$, le quantità $(\frac{dz}{dx}), (\frac{dz}{dy})$, si
„ osservi se i tre risultati che si ottengono, si riducono ad u-
„ na sola equazione in x, y, z; quando ciò succeda, sarà quel-
„ la relazione la soluzione particolare; non vi sarà poi solu-
„ zione, se quelle equazioni non si riducono ad una sola „.

Per esempio, differenziando l' equazione

$$z = y\left(\frac{dz}{dy}\right) + x\left(\frac{dz}{dx}\right) + h\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}, \text{ si ha}$$

$$yd\left(\frac{dz}{dy}\right) + xd\left(\frac{dz}{dx}\right) + h\,\frac{\left(\frac{dz}{dy}\right)d\left(\frac{dz}{dy}\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}} = 0, \text{ e quindi}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left\{y\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}} + h\left(\frac{dz}{dy}\right)\right\} d\left(\frac{dz}{dy}\right) \\ + \left\{x\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}} + h\left(\frac{dz}{dx}\right)\right\} d\left(\frac{dz}{dx}\right) \end{array}\right\} = 0;$$

mancheranno dunque i due coefficienti P e Q, ed avremo soltanto queste due equazioni

$$M = y\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}} + h\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$$

$$N = x\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}} + h\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0,$$

le quali danno primieramente

$$x\left(\frac{dz}{dy}\right) = y\left(\frac{dz}{dx}\right), \text{ poi}$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{\mp y}{\sqrt{(h^2 - x^2 - y^2)}}$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{\mp x}{\sqrt{(h^2 - x^2 - y^2)}},$$

$$\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}} = \frac{\pm h}{\sqrt{(h^2 - x^2 - y^2)}}: \text{ sostituiamo questi}$$

valori nella proposta, ed avremo la soluzione particolare $z = \pm\sqrt{(h^2 - x^2 - y^2)}$ ricercata.

Si vede come potrebbero estendersi alle equazioni di un maggior numero di variabili, ed a quelle degli ordini superiori le cose che in questi due ultimi §§ abbiamo dette per il primo ordine, e per tre variabili.

Osserviamo che all' equazioni a differenziali parziali soddisfanno tre sorte di relazioni: alcune contengono delle costanti arbitrarie: altre delle funzioni arbitrarie; ed altre infine non

contengono alcuna cosa d' arbitrario: nè queste equazioni ponno dedursi l' una dall' altra col dar dei valori particolari, ma costanti a quelle stesse costanti arbitrarie.

Vedremo altrove i rapporti Geometrici che hanno le curve rappresentate da queste relazioni.

§ 286. Analogo al Problema risoluto al § 280. è quello conosciuto sotto il nome di ***Problema delle trajettorie***.

Ecco in che consiste questo problema: supponiamo che si abbia un' equazione tra x, y, ed un parametro costante a. Rappresenti questa la curva AB. Dando ad a infiniti valori si a-
Fig. 5 vranno infinite curve come AB', AB'' ec., della stessa natura, tra le quali avrà luogo la medesima relazione di variabili: la differenza solo consisterà nel parametro, il quale avrà diverse grandezze.

Data ora una famiglia di queste curve, si vuole trovare la curva EMF, che le seghi tutte sotto un angolo dato B'MF. La curva EMF chiamasi trajettoria.

La trajettoria EF ha sempre un punto commune con una delle curve tagliate. In ogni suo punto dunque le coordinate han tra loro la stessa relazione che hanno quelle della tagliata corrispondente. L' espressioni che in due qualunque punti della curva EF rappresentano queste relazioni, non differiranno dunque tra loro che nella grandezza del parametro, avendovi esso in ciascuna quel valore che appartiene alla curva corrispondente a quel punto.

Se dunque $F(x, y, a) = 0$ rappresenta l' equazione delle tagliate, vale a dire la relazione delle coordinate in ciascun punto di una tagliata, la stessa $F(x, y, a) = 0$ rappresenterà l' equazione della trajettoria, o la relazione in ciascun di lei punto, purchè la quantità a si consideri costante nel primo caso, e variabile nel secondo.

Determiniamo la variabilità di a in maniera che siano soddisfatte le condizioni di quel segamento, ed il problema sarà risoluto.

Se noi supponiamo condotte nel punto M due tangenti, una alla curva segata, ed un' altra alla segante, l' angolo che fanno tra loro queste tangenti, sarà quello che fanno tra loro le curve. Rappresenti $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ la tangente di quell' angolo che la tan-

gente della tagliata nel punto M fa con l' asse delle ascisse: Fig. 5
sia $\left(\frac{dy}{dx}\right)'$ la tangente di quell' angolo, che la tangente della trajettoria B'MF nello stesso punto fa col medesimo asse.

L' angolo B'MF sotto cui si segano le curve, sarà dunque la differenza di questi due angoli: la sua tangente sarà dunque eguale all' espressione

$$\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)' - \left(\frac{dy}{dx}\right)}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)' \left(\frac{dy}{dx}\right)}.$$

E siccome questa tangente debbe essere costante, perciò indicata per m, avremo l' equazione

(E) . . . . . $\left(\frac{dy}{dx}\right)' - \left(\frac{dy}{dx}\right) = m + m\left(\frac{dy}{dx}\right)'\left(\frac{dy}{dx}\right)$, dalla quale dipenderà la soluzione del problema.

Il valore di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ si ricaverà dalla differenziale di $F(x, y, a) = 0$ nella supposizione di a costante: sarà questo allora una funzione di x, y, a che sostituiremo nell' equazione.

Il valore di $\left(\frac{dy}{dx}\right)'$ si ricaverà dalla stessa equazione $F(x, y, a) = 0$ nella supposizione di a variabile, e sostituitolo nell' equazione del problema, si avrà allora un' equazione in x, y, a e la differenziale di a. Da quest' ultima equazione elimineremo y per mezzo della $F(x, y, a) = 0$, ed otterremo in fine un' equazione differenziale in x ed a, dall' integrazione della quale si caverà il valore di a dato per x.

§. 287. Gli esempj schiariranno questa teoria. Siano le tagliate tante linee rette, rappresentate dall' equazione $y = ax$: avremo allora $\left(\frac{dy}{dx}\right) = a$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)' = a + \left(\frac{da}{dx}\right)x$: fatte queste sostituzioni nell' equazione (E), essa diverrà

$$a + \left(\frac{da}{dx}\right)x - a = m + ma^2 + max\left(\frac{da}{dx}\right),$$

$$\left(\frac{da}{dx}\right)\left\{x - max\right\} = m + ma^2,$$

$$\frac{1 - am}{1 + a^2}\left(\frac{da}{dx}\right) = \frac{m}{x},$$

$$\frac{1 - am}{1 + a^2}da = \frac{mdx}{x},$$

$$\frac{da}{1 + a^2} - \frac{mada}{1 + a^2} = \frac{mdx}{x},$$

$Arc.\ tang\ a - ml\sqrt{(1 + a^2)} + mlc = mlx$, c rappresenta una costante arbitraria.

Per mezzo di quest' ultima equazione e della $y = ax$, elimineremo a, ed avremo

$ml\frac{\sqrt{(x^2 + y^2)}}{c} = Arc.\ tang\frac{y}{x}$, ovvero

$l\frac{\sqrt{(x^2 + y^2)}}{c} = \frac{Arc.\ tang\frac{y}{x}}{m}$: quest' è l' equazione della trajettoria: rappresenta essa una Spirale Logaritmica. Se la trajettoria dovesse segare ad angolo retto quelle linee, allora la tangente m sarebbe infinita, quindi $l\frac{\sqrt{(x^2 + y^2)}}{c} = 0$, d' onde si deduce $\sqrt{(x^2 + y^2)} = c$: equazione al circolo.

Per un altro esempio, supponiamo che l' equazione delle tagliate sia quella del circolo $y^2 = 2ax - x^2$, ed avremo

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{a - x}{y},$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)' = \frac{a - x}{y} + \frac{x}{y}\left(\frac{da}{dx}\right).$$

Sostituendo questi valori nell' equazione (E) ed eliminandone y, avremo tra x ed a la seguente equazione differenziale $ma^2dx + \left\{m(a - x) - \sqrt{(2ax - x^2)}\right\}xda = 0$, che è omogenea tra x ed a.

Facendo $m =$ all' infinito l' equazione diverrà $a^2dx + (a - x)xda = 0$, di cui l' integrale completo è

$\frac{1}{ax} - \frac{1}{2a^2} =$ C costante, ovvero

$\frac{1}{ax} - \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{2C^2}$,

$a^2x^2 = C^2(2ax - x^2)$. Ma $y^2 = 2ax - x^2$; dunque

$a^2x^2 = c^2y^2$, $a = \frac{cy}{x}$.

Poniamo questo valore di a nell' equazione delle tagliate, ed avremo $x^2 = 2cy - y^2$: così anche la trajettoria è un circolo.

Non mi estendo di più sopra il problema delle trajettorie: quei che ne bramano maggior cognizione vedano il Cap. III. della Sez. I. Parte II. del Calcolo Integrale del Sig. Bossut.

§. 288. Veniamo a parlare di un altro genere d' integrali. Opinarono per lungo tempo i Geometri che l' equazioni differenziali a più variabili, nelle quali non sono adempiute le condizioni o criterj d' integrabilità, e che per questo chiamansi assurde, non esprimessero alcuna cosa di reale, e rilegar si dovessero nella classe degl' immaginarj.

Il Marchese di Condorcet fu il primo (a) a spiegarne il

„ (a) Dall' assurdità di un' equazione (Essais d' Analyse par M. le Marquis de Condorcet, Preface pag. XX a Paris, de l' Imprimerie de Didot „ an. 1768) differenziale, non abbiamo alcun dritto di concludere l' im„ possibilità del problema che vi corrisponde, poichè in generale ciò so„ lo significa che il problema è indeterminato, e che bisogna avere ancora „ una nuova equazione per risolverlo „.

E più chiaramente (le Marquis de Condorcet a M. d' Alembert sur le Sisteme du Monde et sur le Calcul Integral; a Paris, de l' Imprimerie de Didot „ an. 1768). L' Equazioni Differenziali che si chiamano assurde, non hanno „ un integrale, ma il problema ove s' incontrano è egli necessariamente im„ possibile? Io prendo in principio un' equazione assurda del primo ordi„ ne tra tre variabili: *E' chiaro che alcuna superficie curva non soddisfà* „ *al problema, e che perciò in questo senso il problema non ha soluzione,* „ *ma si può considerare quest' equazione come rappresentante una curva a* „ *doppia curvatura, di cui una projezione è arbitraria;* in questo senso il „ problema è possibile, ed anzi ha un' infinità di soluzioni. Bisogna cer-

vero significato, ma non so per qual cagione obliatosi quello che il detto Geometra ne scrisse, il Celebre Monge si applicò in seguito ad una tale ricerca, e nel 1784 fece di pubblico dritto quanto a questo riguardo aveva scoperto.

Quando una data equazione $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ non è, nè per la moltiplicazione di un fattore può divenire una differenziale totale, allora non esiste in natura una relazione tra le variabili x, y, z espressa da una sola equazione $V = 0$ che ne possa rappresentare l' integrale, e quindi non possiamo considerare una variabile, per esempio z, come funzione delle altre due: ecco tutto ciò che abbiamo dritto di concludere dalla non esistenza dei criterj d' integrabilità.

Consideriamo pertanto due di quelle variabili, per esempio z, y come funzioni di una terza x, ed allora scrivendo $(\frac{dy}{dx})dx$, $(\frac{dz}{dx})dx$ invece di dy e di dz, la proposta diverrà

$$P + Q(\tfrac{dy}{dx}) + R(\tfrac{dz}{dx}) = 0.$$

Ora secondo ciò che abbiamo detto al §. 106, per mezzo di questa sola equazione non ponno determinarsi i due valori di y e di z, e bisogna prendere arbitrariamente un' altra equazione qualunque sia differenziale finita tra x, y, z, della quale supponendo l' esistenza insieme con la proposta, resteranno allora determinate le due variabili z, y.

Sia dunque $F(x, y, z) = 0$ l' equazione arbitraria da noi prescelta: avremo allora per la determinazione delle relazioni tra x, y, z queste due equazioni

$$P + Q(\tfrac{dy}{dx}) + R(\tfrac{dz}{dx}) = 0$$

$$F(x, y, z) = 0.$$

Dalla seconda ricaveremo il valore di una delle due variabili y, z dato per le altre, e trovando per esempio $z =$

„ care nelle sue condizioni il mezzo di determinare la projezione arbitra„ ria, ed allora il luogo del problema sarà un cilindro, di cui questa cur„ va a doppia curvatura sarà la base „.

$\varphi(x,y)$ sostituiremo nella prima questo valore di z, ed il valore di $(\frac{dz}{dx})$; la proposta prenderà allora la forma

$S + T(\frac{dy}{dx}) = 0$, ovvero

$Sdx + Tdy = 0$. Sia l' integrale di questa $f(x,y) = 0$ ed avremo il sistema delle due equazioni simultanee

$F(x,y,z) = 0$, $f(x,y) = 0$, il quale rappresenterà l' integrale dell' equazione differenziale

$Pdx + Qdy + Rdz = 0$, in quanto che l' esistenza di quest' ultima equazione, ed il rappresentare essa qualche cosa di reale, dipende dall' esistenza simultanea di quelle due equazioni.

Siccome poi la contemporanea sussistenza (App. N°. XII) delle equazioni $F(x,y,z) = 0$, $f(x,y) = 0$ esprime una curva a doppia curvatura, per questo noi diremo che un' equazione differenziale $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ per la quale non sono soddisfatti i criterj d' integrabilità, rappresenta analiticamente una curva a doppia curvatura; anzi una data equazione differenziale può rappresentare una infinità di curve a doppia curvatura, giacchè una di quelle equazioni che ne compone l' integrale, è pienamente arbitraria.

§. 289. Ma limitiamo in qualche modo la generalità di queste riflessioni.

Sia $z = f(x)$, funzione arbitraria di x, l' equazione arbitraria che assumiamo per l' integrazione di $Pdx + Qdy + Rdz = 0$. Sostituendo in quest' equazione $f(x)$, $df(x)$ invece di z e di dz, avremo un' altra equazione $Sdx + Tdy = 0$ tra due variabili x e y, la quale conterrà una funzione arbitraria, ed il di lei integrale insieme con l' equazione $z = f(x)$ formerà quel sistema di due equazioni, che è l' integrale della proposta.

Per esempio, sia l' equazione

$z^2dx + axdz + ydy = 0$, la quale non soddisfà ai criterj d' integrabilità, e per conseguenza non può sussistere se arbitrariamente non supponiamo un' equazione che abbia luogo insieme con lei.

Sia tale equazione $z = f(x)$ e la proposta (scrivendo $f'x$ per $\frac{df}{dx}$) diverrà

$(f(x))^2 dx + axf'(x) . dx + ydy = 0$, ovvero

$\{(f(x))^2 + axf'(x)\} dx + ydy = 0$, il cui integrale è

$\frac{y^2}{2} + \int \{(f(x))^2 + axf'(x)\} dx = 0$: l' integrale pertanto della proposta equazione sarà il sistema delle due equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} z - f(x) = 0 \\ \frac{y^2}{2} + \int \{(f(x))^2 + axf'(x)\} dx = 0. \end{array} \right.$$

La funzione arbitraria, la quale trovasi sotto il segno integrale, reca ordinariamente imbarazzo per l' effettiva integrazione, come succede in questo caso.

Ogni difficoltà per altro svanisce determinando quella funzione, ma l' integrale allora è un integrale particolare.

Così facendo $f(x) = mx^n$, si avrebbe

$$\left\{ \begin{array}{l} z - mx^n = 0 \\ \frac{y^2}{2} + \frac{m^2x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{amnx^{n+1}}{n+1} + C = 0 \end{array} \right.$$

per esprimere quest' integrale particolare. Altre supposizioni nella funzione ci darebbero altri integrali particolari. Per vedere come si ritorni da quest' integrale alla proposta, differenziamo le due equazioni, ed avremo

$dz - mnx^{n-1} dx = 0$,

$ydy + (m^2x^{2n} + amnx^n) dx = 0$.

Invece di $mnx^{n-1}dx$ poniamo nella seconda dz, e ci verrà $ydy + m^2x^{2n}dx + axdz = 0$: in quest' ultima poniamo z^2 per m^2x^{2n} come ci dà l'equazione $z - mx^n = 0$, ed otterremo in fine $ydy + z^2dx + axdz = 0$.

Facciamo $n = 1$, ed avremo questo sistema

$$\begin{cases} z - mx = 0 \\ 3y^2 + 2m^2x^3 + 3amx^2 + C = 0 \end{cases}$$

che rappresenterà l' integrale della proposta: esso esprime una curva a doppia curvatura formata dall' intersezione di un piano e di una superficie cilindrica: quello è normale al piano degli z, x, passa per l' origine, e lo sega nella linea espressa da $z - mx = 0$: questa ha la base nel piano degli y, x determinata dalla curva espressa dall' equazione $3y^2 + 2m^2x^3 + 3amx^2 + C = 0$. L' asse della detta superficie è parallelo all' asse delle z.

§. 290. E si può anche ottenere l' integrale espresso dal sistema di due equazioni, nelle quali la funzione arbitraria non si trovi sotto il segno d' integrazione, ma sotto quello della differenziazione. Ecco come otterremo tutto questo.

Sia al solito l' equazione $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, per la quale non siano soddisfatti i criterj d' integrabilità. Supponiamo che ad essa si aggiunga e si levi la quantità Sdx, e la proposta si ridurrà alla seguente

$- Sdx + Pdx + Sdx + Qdy + Rdz = 0$.

Scelgasi per S una tal funzione che renda integrabile l'equazione $Sdx + Qdy + Rdz = 0$, e sia quest' integrale $F(x, y, z) = 0$, e la nostra equazione diverrà $(P - S)dx + dF = 0$: se ora noi poniamo $P - S = \left(\frac{df(x)}{dx}\right)$ indicando per $f(x)$ una funzione arbitraria, avremo questo sistema di due equazioni

$$\begin{cases} F(x, y, z) + f(x) = 0 \\ P - S = \left(\frac{df(x)}{dx}\right) \end{cases}$$

che soddisfa alla proposta.

Così alla proposta del §. antecedente $z^2dx + axdz + ydy = 0$ aggiungendo e levando $azdx$, si ha $(z^2 - az)dx + axdz + azdx + ydy = 0$, e quindi il sistema di queste due equazioni

$$\begin{cases} z^2 - az = \frac{df(x)}{dx} \\ \frac{y^2}{2} + axz + f(x) = 0 \end{cases}$$

soddisfarà ad essa.

Così l' equazione $dz = x^2ydx + xy^2dy$, diviene $dz = x^2ydx + \frac{y^3}{3}dx - \frac{y^3}{3}dx + xy^2dy$, $dz = d\left(\frac{xy^3}{3}\right) + \left(yx^2 - \frac{y^3}{3}\right)dx$, e perciò l' integrale completo sarà questo sistema d' equazioni

$$\begin{cases} z = \frac{xy^3}{3} + f(x) \\ yx^2 - \frac{y^3}{3} = \left(\frac{df(x)}{dx}\right). \end{cases}$$

Possiamo anche in altra guisa avere l' integrale completo con la funzione arbitraria sotto i segni differenziali.

Riprendiamo l' equazione $Pdx + Qdy + Rdz = 0$. Supponendo una delle tre variabili, per esempio, z costante, cioè $dz = 0$, integriamo l' equazione $Pdx + Qdy = 0$. Sia questo integrale $F(x, y, z) + C = 0$, e l' arbitraria C sarà una funzione arbitraria della variabile che si è supposta costante, cioè della z. L' integrale dunque di $Pdx + Qdy = 0$, sarà $F(x, y, z) + f(z) = 0$, Acciò questo sia l' integrale dell' equazione proposta bisognerà che il di lei differenziale, facendo tutto variare, sia $=$ $Pdx + Qdy + Rdz$: avremo dunque

$Pdx + Qdy + (\frac{dF}{dz})\,dz + (\frac{df}{dz})\,dz = Pdx + Qdy + Rdz$, quindi

$R = (\frac{dF}{dz}) + (\frac{df}{dz})$.

Se quest' ultima equazione ci darà per f un valore che sia funzione della sola z, come supporremo, allora avremo l' integrale della proposta, espresso da una sola equazione $F(x, y, z) + f(z) = 0$: se poi quell' ultima equazione conterrà una relazione tra la z e le altre variabili, allora essa sussistendo assieme con $F(x, y, z) + f(z) = 0$, comporrà un sistema di due equazioni $R = (\frac{dF}{dz}) + (\frac{df}{dz})$, $F(x, y, z) + f(z) = 0$ contenente la funzione arbitraria $f(z)$, il quale sarà l' integrale completo della proposta medesima.

Questo metodo d' integrazione è quello da noi spiegato, parlando dell' integrazione delle equazioni a più variabili.

L' equazione $z^2dx + axdz + ydy = 0$ integriamola in questa guisa: facendo $dz = 0$, si ha $z^2dx + ydy = 0$, e quindi le due

$z^2x + \frac{y^2}{2} + f(z) = 0$, $2xz + (\frac{df}{dz}) = ax$ ne comporranno l' integrale completo.

Nella supposizione di una variabile per costante, dovrà l' Analista aver riguardo a scegliere quella che conduce ad un' equazione a due variabili più facile ad integrarsi.

Aggiungiamo poi che in molte altre maniere si può giungere a trovare due equazioni che sussistendo nel tempo stesso, conducano ad una equazione differenziale, per la quale non sono soddisfatti i criterj d' integrabilità: non ce ne occupiamo per essere queste di poca importanza dopo quanto si è detto quì sopra.

Una interessante osservazione dovuta al C. Paoli è la seguente:

Taluna volta le equazioni le quali formano l' integrale della proposta sono tali, che dato un certo valore alla funzione arbitraria, si riducono ad una sola: in questo caso si ha un integrale della proposta espresso da una sola equazione.

Data l' equazione

$(y - z)\,dz + xdy + (z - y)\,dx = 0$, si trova questo sistema

$$\begin{cases} z = x + F(y) \\ z - y = x : (\frac{dF}{dy}) \end{cases}$$

per rappresentarne l' integrale completo.

Le due equazioni però di esso si riducono ad una sola facendo $F(y) = y$, e danno $z = x + y$ che soddisfà alla proposta: così questa equazione, per quanto non possa avere un integrale completo espresso da una sola equazione, perchè non vi sono soddisfatti i criterj d' integrabilità, pure rimane verificata da un' equazione priva di costante arbitraria, che può considerarsi come una di lei soluzione particolare.

In questa guisa è spiegata l' origine di quelle relazioni, le quali talune volte soddisfanno alle equazioni da loro stesse non integrabili, e che vengono date dai criterj d' integrabilità. Ciò ha luogo quando una idonea determinazione della funzione arbitraria riduce ad una sola le due equazioni dell' integrale completo.

§. 291. Se l' equazione fosse tra quattro variabili $Pdx + Qdy + Rdz + Sdt = 0$, e non fossero soddisfatti i criterj d' integrabilità, non può sussistere una sola equazione che ne sia l' integrale: non possono dunque tre di quelle variabili essere indipendenti tra loro; e considerata l' equazione rapporto alla Meccanica, rappresentando per t il tempo, non può esistere in natura un movimento tale che le sue velocità $(\frac{dx}{dt}), (\frac{dy}{dt}), (\frac{dz}{dt})$ relativamente a tre assi ortogonali, moltiplicate respettivamente per P, Q, R e sommate, eguaglino la quantità $- S$.

Per avere il sistema dell' equazioni che ne forma l' integrale supponendo $dz = 0$, $dt = 0$, integriamo l' equazione $Pdx + Qdy = 0$, ed avremo $F(x,y,z,t) + \varphi(z,t) = 0$; differenziando quest' equazione e paragonandola con la proposta, si avrà

$$Pdx + Qdy + (\tfrac{dF}{dz})dz + (\tfrac{dF}{dt})dt + (\tfrac{d\varphi}{dz})dz + (\tfrac{d\varphi}{dt})dt =$$

$$Pdx + Qdy + Rdz + Sdt, \text{ e quindi}$$

$(\frac{dF}{dz}) + (\frac{d\varphi}{dz}) = R$,

$(\frac{dF}{dt}) + (\frac{d\varphi}{dt}) = S$; così il sistema di queste tre equazioni

$$\begin{cases} F(x,y,z,t) + \varphi(x,y) = 0, \\ (\frac{dF}{dz}) + (\frac{d\varphi}{dz}) = R, \\ (\frac{dF}{dt}) + (\frac{d\varphi}{dt}) = S, \end{cases}$$

forma l' integrale completo della proposta.

Se tra queste tre equazioni si eliminassero le variabili x, y, otterremmo un' equazione a differenze parziali del primo ordine in φ, $(\frac{d\varphi}{dz})$, $(\frac{d\varphi}{dt})$, z, t, l' integrale della quale, combinato con una delle quì sopra trovate equazioni, comporrà allora il sistema integrale della proposta.

In questo caso due sole equazioni ne formeranno l' integrale completo, ma la funzione arbitraria sarà più limitata. Si vede come dovremmo dirigerci per le equazioni ad un maggior numero di variabili.

§. 292. L' equazioni dei gradi superiori si trattano egualmente che quelle del primo grado: per esempio, l' equazione $dz^2 = dx^2 + dy^2$, la quale per mezzo della risoluzione non può ridursi alla forma $dz = pdx + qdy$, non ha un integrale espresso da una sola equazione. Per avere il sistema che ne può rappresentare l' integrale, si prenda un' altra equazione arbitraria tra quelle variabili, per esempio, la semplice $z = F(x)$: avremo allora fatta la debita sostituzione nella proposta

$(\frac{dF}{dx})^2 dx^2 = dx^2 + dy^2$, quindi

$dy = \sqrt{\{(\frac{dF}{dx})^2 - 1\}}\, xdx$, ed

$$\begin{cases} y = \int dx \sqrt{\{(\frac{dF}{dx})^2 - 1\}} \\ z = F(x) \end{cases}$$

sarà il sistema di due equazioni, che rappresenta l' integrale completo della proposta.

Avremmo anche potuto integrare la proposta nella supposizione che una delle variabili fosse costante, e quindi nullo il di lei differenziale: allora avremmo completato il differenziale con una funzione arbitraria di quella stessa variabile, e differenziando in seguito questa equazione integrale, facendo tutto variare e paragonandone il risultato con la proposta, avremmo trovata l' altra equazione integrale.

Piacemi quì riportare l' elegantissima soluzione che della medesima equazione $dz^2 = dx^2 + dy^2$ ci ha dato La-Grange.

Se per ω rappresentiamo qualunque angolo arbitrario e moltiplichiamo il secondo membro della proposta per

$sen\,\omega^2 + cos\,\omega^2 = 1$, avremo

$dz^2 = (dx^2 + dy^2)(sen\,\omega^2 + cos\,.\,\omega^2)$, ovvero

$dz^2 = (dy\,cos\,\omega - dx\,sen\,\omega)^2 + (dy\,sen\,\omega + dx\,cos\,\omega)^2$.

Supponiamo $dy\,sen\,\omega + dx\,cos\,\omega = 0$, ciò che si può fare per essere ω indeterminato, ed allora ci verrà

$dz = dy\,cos\,\omega - dx\,sen\,\omega$: così la proposta si è spezzata in queste due

$dy\,sen\,\omega + dx\,cos\,\omega = 0$

$dz = dy\,cos\,\omega - dx\,sen\,\omega$.

Se noi riguardiamo in principio l' angolo ω come costante, gl' integrali di queste due equazioni saranno

$y\,sen\,\omega + x\,cos\,\omega = b$

$z = y \cos \omega - x \operatorname{sen} \omega + a$, a, b essendo due costanti arbitrarie, portateci dalle integrazioni.

Queste due equazioni ci danno i valori di y e z in x, che soddisfanno all' equazione proposta, qualunque d' altr' onde siano i valori delle tre costanti a, b, ω, del che può assicurarcene la sostituzione.

Ora è facile a comprendersi che gli stessi valori soddisfaranno alla proposta, supponendo anche che le tre quantità a, b, ω siano variabili, purchè le differenziali delle x, y, z restino le stesse, cioè a dire purchè i termini introdotti dalla variabilità di a, b, ω si distruggano da se medesimi.

Basterà dunque per questo, differenziare quelle due equazioni rapporto alle quantità a, b, ω, riguardando a, b come funzioni di ω: avremo in questa guisa

$$-y \operatorname{sen} \omega - x \cos \omega + \left(\frac{da}{d\omega}\right) = 0,$$

$$y \cos \omega - x \operatorname{sen} \omega = \left(\frac{db}{d\omega}\right);$$

e siccome è già $y \operatorname{sen} \omega + x \cos \omega = b$, si avrà dunque

$-b + \left(\frac{da}{d\omega}\right) = 0$, ciò che dà $\left(\frac{da}{d\omega}\right) = b$, e quindi

$$\left(\frac{d^2 a}{d\omega^2}\right) = \left(\frac{db}{d\omega}\right).$$

Avremo dunque queste tre equazioni

$$z = y \cos \omega - x \operatorname{sen} \omega + a$$

$$y \operatorname{sen} \omega + x \cos \omega = \left(\frac{da}{d\omega}\right)$$

$$y \cos \omega - x \operatorname{sen} \omega = \left(\frac{d^2 a}{d\omega^2}\right).$$

Ora essendo a una funzione qualunque di ω, indichiamo per $f(\omega)$, $f'(\omega)$, $f''(\omega)$ le tre quantità a, $\left(\frac{da}{d\omega}\right)$, $\left(\frac{d^2 a}{d\omega^2}\right)$; le tre equazioni precedenti ci daranno questi tre valori per x, y, z dati in ω

$$x = \cos \omega \times f'(\omega) - \operatorname{sen} \omega \times f''(\omega)$$

$$y = \operatorname{sen} \omega \times f'(\omega) + \cos \omega \times f''(\omega)$$

$z = f(\omega) + f''(\omega)$, nei quali $f(\omega)$ è una funzione arbitraria.

Queste formule potrebbero servire a trovare delle curve rettificabili; imperocchè se x, y sono le coordinate rettangole di una curva piana, e z l' arco corrispondente, si è dimostrato (§. 81), che riguardando quelle tre variabili come funzioni di un' altra variabile ω, è sempre

$\left(\frac{dz}{d\omega}\right)^2 = \left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2$, la quale si riduce all' equazione quì sopra integrata

$$dz^2 = dx^2 + dy^2.$$

Se facciamo $f(\omega) = m\omega + n$, $f'(\omega) = m$, $f''(\omega) = 0$, dalle formule precedenti ricaveremo

$x = m \cos \omega$, $y = m \operatorname{sen} \omega$, $z = m\omega + n$, e questo è il caso del circolo.

Prendendo per $f(\omega)$ delle funzioni qualunque di $\operatorname{sen} \omega$ e $\cos \omega$, avremo quante curve algebraiche vorremo, di cui anche la rettificazione sarà algebraica. Infatti i valori di quelle tre variabili saranno allora altrettante funzioni algebraiche di $\operatorname{sen} \omega$, $\cos \omega$; potremo quindi trovare i valori di $\operatorname{sen} \omega$, $\cos \omega$ espressi per funzioni algebraiche di x, y, ed in ultimo avremo z dato in funzione algebraica delle coordinate x, y.

Per esempio, facendo $f(\omega) = (\operatorname{sen} \omega)^3$, si ha $x = 2(\operatorname{sen} \omega)^3$, $y = 2(\cos \omega)^3$, $z = 2(\cos \omega)^2 - \operatorname{sen} \omega^2$; e perciò $\operatorname{sen} \omega = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$, $\cos \omega = \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$. L' equazione della curva sarà allora

$\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$, e l' arco $z = 2\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Molto si esercitarono altra volta i Geometri in questo Problema, come può vedersi nel Tomo V dei nuovi Commentarj di Pietroburgo.

Nulla diciamo per l' equazioni degli ordini superiori, giacchè per queste si seguono i medesimi metodi.

Un' equazione fra tre variabili si riduce ad essere tra due sole, quando si stabilisce una certa relazione tra due di esse: per esempio, se quella è tra x, y, z, facendo $y = \mathrm{F}x$, la si riduce solamente tra z ed x, ed allora il di lei integrale insieme con l' equazione arbitraria $y = \mathrm{F}x$ ci dà il sistema, il quale rappresenta l' integrale completo della proposta.

CAP. XIII.

Ulteriori Applicazioni alla Geometria, ed alla Meccanica.

§. 293. Abbiamo nel Cap. VI. esposta la Teoria dei contatti delle curve con tutta l' estensione che potea desiderarsi; pure la possiamo presentare sotto un punto di vista e più generale e più elegante.

Rappresentiamo al solito per x, y le coordinate di una qualunque curva piana, della quale in conseguenza l' equazione sia $y = fx$: siano p, q quelle di un' altra curva data, la quale debba paragonarsi con la prima. Sia $\mathrm{F}(p, q, a, b, c \text{ ec.}) = 0$ l' equazione di questa seconda curva, a, b, c ec. indicando dei parametri costanti ed indeterminati.

Affinchè le due curve abbiano un punto comune, è necessario che ad una comune ascissa corrisponda una comune ordinata. Converrà dunque che presa x per quest' ascissa comune, nel tempo medesimo abbiasi $y = fx$,

$$\mathrm{F}(x, fx, a, b, c \text{ ec.}) = 0, \text{ ovvero}$$
$$\mathrm{F}(x, y, a, b, c \text{ ec.}) = 0.$$

In questa guisa se x sarà una ascissa data, per mezzo di quest' ultima equazione potremo determinare una di quelle costanti, onde vi sia il punto comune nel luogo corrispondente all' ascissa suddetta.

Indichiamo per

$$\mathrm{F}(x, y, a, b \text{ ec.})' = 0,$$
$$\mathrm{F}(x, y, a, b \text{ ec.})'' = 0,$$
$$\mathrm{F}(x, y, a, b \text{ ec.})''' = 0,$$
ec.

le differenziali prima, seconda, terza ec., della funzione $F(x, y, a, b$ ec.$)$, divise per dx, dx^2, dx^3 ec.

Ora dai principj stabiliti risulta, che le due curve hanno un contatto di primo ordine, quando la differenziale prima dell' ordinata nel punto comune divisa per dx, è la stessa, sia che si consideri appartenente all' una o all' altra delle due curve medesime: hanno un contatto di secondo ordine, quando questa identità è nei differenziali del secondo ordine, e così di seguito.

Dunque se nell' equazione $F(x, y, a, b$ ec.$) = 0$ vi sono soltanto due costanti indeterminate a, b, e le determineremo per mezzo delle due equazioni $F(x, y, a, b) = 0$, $F(x, y, a, b)' = 0$, la curva data di cui l' equazione è $F(p, q, a, b) = 0$, avrà un punto di contatto del primo ordine con la proposta, o sarà semplicemente tangente nel punto ove $p = x$.

Se vi avranno tre costanti indeterminate a, b, c, e le determineremo per mezzo di queste tre equazioni
$F(x, y, a, b, c) = 0$, $F(x, y, a, b, c)' = 0$,
$F(x, y, a, b, c)'' = 0$, la curva data dall' equazione
$F(p, q, a, b, c) = 0$ avrà un contatto di secondo ordine con la proposta $y = fx$, o sarà di questa osculatrice nel punto corrispondente all' ascissa $p = x$; e così di seguito.

Le costanti a, b, c ec., le quali servono a determinare la qualità del contatto, ponno chiamarsi elementi del contatto.

§. 294. Esaminando per esempio, il contatto che può avere un circolo con una curva qualunque, si vedrà che è questo un contatto di secondo ordine; poichè la di lui equazione $(p - a)^2 + (q - b)^2 = c^2$, contiene tre sole costanti, o tre soli elementi del contatto.

Questi poi si determineranno con le equazioni

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - c^2 = 0,$$

$$x - a + (y - b)\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

$1 + (y - b)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$, di cui la seconda e la terza sono le differenziali prima e seconda divise per dx, dx^2 della prima.

Da queste equazioni si ricava subito

$$y - b = -\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)},$$

$$x - a = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right),$$

$c = \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}} : \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, egualmente che al §. 79.

Anche la parabola, la cui equazione è $q = a + bp + cp^2$, contiene tre elementi del contatto, e quindi può avere un contatto di secondo ordine con una qualunque data curva. Gli elementi del contatto sono allora dati da queste tre equazioni

$y - a - bx - cx^2 = 0$,

$\left(\frac{dy}{dx}\right) - b - 2xc = 0$,

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - 2c = 0$, e perciò

$c = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, $b = \left(\frac{dy}{dx}\right) - x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$,

$a = y - x\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$.

La parabola dunque che nel punto corrispondente all' ascissa $p = x$, ha un contatto di secondo ordine, sarà

$$q = y - x\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$
$$+ p\left(\frac{dy}{dx}\right) - xp\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$
$$+ \frac{p^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right),$$

ovvero

$$q = y + (p - x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{(p-x)^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

Prendiamo la parabola cubica

$y = a + bx + cx^2 + ex^3$: questa contiene quattro elementi del contatto, e quindi è suscettibile di un contatto di terzo ordine. Le equazioni

$$y - a - bx - cx^2 - ex^3 = 0,$$
$$\left(\frac{dy}{dx}\right) - b - 2cx - 3ex^2 = 0,$$
$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - 2c - 6ex = 0,$$

$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) - 6e = 0$, determinano questi elementi e ci danno

$$e = \frac{1}{6}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right),$$
$$c = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \frac{x}{2}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right),$$
$$b = \left(\frac{dy}{dx}\right) - x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \frac{x^2}{2}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right),$$

$a = y - x\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \frac{x^3}{6}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$: ed in conseguenza la parabola cubica che ha quel contatto di terz' ordine, sarà

$$q = y - (p - x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{(p-x)^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \frac{(p-x)^3}{2.3}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right).$$

In generale la curva rappresentata dall' equazione

$q = y + (p - x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{(p-x)^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \ldots\ldots\ldots +$ $\frac{(p-x)^m}{2.3\ldots.m}\left(\frac{d^my}{dx^m}\right)$, le cui coordinate sono p, q, avrà un contatto dell' ordine m^{esimo} con un' altra curva qualunque $y = fx$ nel punto corrispondente all' ascissa $p = x$: nessuna altra curva in conseguenza, che non abbia in quel punto un contatto dello stesso ordine, o di un ordine maggiore, potrà passare tra quelle due.

§. 295. Esaminiamo ora cosa avverrà delle Teorie sopra i contatti da noi esposte, quando $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ ec., sono infinite, cioè quando lo sviluppo di $f(x + \omega)$ per le potenze intiere, positive e crescenti di ω non può sussistere (§. 40).

Sia a il valore particolare di x pel quale annullandosi un radicale d' esponente positivo, ha luogo questo inconveniente: dovremo allora sviluppare in una serie ordinata per le potenze, qualunque siansi, di ω la funzione $f(a + \omega)$. Facciamo per questo $f(a + \omega) = fa + \omega^e P$, prendendo per ω^e la più alta potenza di ω che dividerà $f(a + \omega) - fa$, dopo aver fatte le oppportune riduzioni di modo che il quoziente P non diventi nè nullo nè infinito allorquando si fa $\omega = 0$.

Egualmente se P non è sviluppabile per le potenze intiere positive e crescenti di ω, facciamo $P = A + \omega^l Q$, essendo A il valore di P quando $\omega = 0$, e per avere ω^l cerchiamo la più alta potenza di ω che divide $P - A$, e che dà per Q un quoziente che non diventa zero o infinito quando $\omega = 0$. Nella medesima maniera faremo $Q = B + \omega^m R$, B essendo il valore di Q quando $\omega = 0$, e troveremo ω^m ed R: faremo $R = C + \omega^n S$, e così via discorrendo.

Sarà per tanto

$$\begin{aligned}
f(a+\omega) &= fa + P\omega^e \\
&= fa + A\omega^e + Q\omega^{e+l} \\
&= fa + A\omega^e + B\omega^{e+l} + R\omega^{e+l+m} \\
&= fa + A\omega^e + B\omega^{e+l} + C\omega^{e+l+m} + \text{ec.} \\
&= \text{ec.}
\end{aligned}$$

Questo metodo ci darà quanti termini si vogliono della serie, e potremo anche tener conto del resto.

Ora se $y = fx$ è l'equazione di una curva, la quale abbia un punto comune con quella data dall'equazione $q = Fp$, nel luogo corrispondente all'ascissa a, sarà $fa = Fa$; le due ordinate al di là di questo punto comune corrispondenti all'ascissa $a+\omega$, saranno $f(a+\omega)$, $F(a+\omega)$, e la di loro differenza $D = f(a+\omega) - F(a+\omega)$.

Supponiamo che sviluppando in serie la funzione $F(a+\omega)$ ordinata per le potenze di ω, si abbia

$$\begin{aligned}
F(a+\omega) &= F(a) + \omega^r P' \\
&= F(a) + \omega^r A' + \omega^{r+s} Q' \\
&= F(a) + \omega^r A' + \omega^{r+s} B' + \omega^{r+s+t} R' \\
&= F(a) + \omega^r A' + \omega^{r+s} B' + \omega^{r+s+t} C' + \text{ec.} \\
&= \text{ec.}
\end{aligned}$$

e sarà a causa di $F(a) = f(a)$,

$$D = A\omega^e - A'\omega^r + Q\omega^{e+l} - Q'\omega^{r+s}.$$

Ora se i due secondi termini $\omega^e A$, $\omega^r A'$ degli sviluppi di $f(a+\omega)$, $F(a+\omega)$ sono eguali tra di loro, dovrà aversi $e = r$, $A = A'$, e se non sono eguali, potranno rendersi tali col soddisfare a quelle due condizioni.

La prima di queste dipenderà dalla natura delle due funzioni, e la seconda $A = A'$ potrà essere adempita col medesimo artifizio, col quale si adempie la condizione $F(a) = f(a)$, cioè col determinare opportunamente i parametri b, c ec., che entrano in $F(x)$; avremo allora

$D = Q\omega^{e+l} - Q'\omega^{r+s}$, e nessuna altra curva data dall'equazione $y = \varphi(x)$ avente lo stesso punto comune con le due curve di cui si parla, non potrà continuare il suo tratto tramezzo a queste, se i due primi termini dello sviluppo di $\varphi(a+\omega)$ non siano uguali ai due primi di ciascuno degli altri sviluppi fatti qui sopra.

Infatti facendo $\varphi(a+\omega) = \varphi(a) + \omega^\mu A'' + \omega^{\mu+\lambda} Q''$, ed indicando per Δ la differenza $f(a+\omega) - \varphi(a+\omega)$, si ha a causa di $\varphi(a) = f(a) = F(a)$,

$$\Delta = \omega^e A - \omega^\mu A'' + \omega^{e+l} Q - \omega^{\mu+\lambda} Q''.$$

Paragonata quest' espressione di Δ a quella di

$D = Q\omega^{e+l} - Q'\omega^{r+s}$, si vede che sarà sempre possibile prendere per ω una tale frazione che (astraendo dai segni) renda $\Delta > D$, finchè non si ha $\mu = e$, $A = A''$ come nelle due prime curve: dunque in ogni altro caso la terza curva continuar non potrà il suo tratto framezzo a quelle curve medesime.

Spingendo più innanzi lo sviluppo delle funzioni $f(a+\omega)$, $F(a+\omega)$, si proverà nella stessa guisa, che se i tre primi termini dello sviluppo di esse sono i medesimi, nessuna altra curva passerà tra quelle due, se non abbia anco i tre primi termini dello sviluppo di $\varphi(x+\omega)$ eguali ai termini simili negli altri sviluppi, e così di seguito.

Potremo dunque chiamare *Contatto di primo ordine*, *secondo ec.*, il ravvicinamento di due curve per le quali i due primi termini, o i tre primi ec., saranno i medesimi negli sviluppi delle funzioni che rappresentano le ordinate al di là del punto comune; qualunque d'altr'onde siano gli esponenti positivi e sempre crescenti, i quali ha l'aumento ω in questi sviluppi medesimi. Il tutto è conforme a quanto abbiamo detto ai §§. 76, 77, 78.

Si osservi che il punto di una curva corrispondente all' ascissa $x = a$, pel quale non può farsi lo sviluppo di $f(a + \omega)$ per le potenze intiere crescenti e positive di ω, è un punto singolare della curva, perchè in esso, come negli altri punti singolari, ha luogo qualche circostanza particolare della curva, la quale non è negli altri punti della medesima. Infatti essendo allora le quantità $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ ec. infinite, ci indicano l' esistenza di un flesso contrario, o di un regresso. Si veda il §. 87, 88.

§. 296. Sia $y = fx$ l' equazione al solito di una curva proposta, e ponendovi $\frac{1}{\omega}$ invece di x, si sviluppi $f\left(\frac{1}{\omega}\right)$ in serie ordinata per le potenze crescenti e positive di ω se ciò possa aver luogo, e sia

$$f\left(\frac{1}{\omega}\right) = A\omega^e + B\omega^{e+l} + C\omega^{e+l+h} + \text{ec.}$$

Si faccia la medesima cosa di un' altra curva $y = Fx$, che vuolsi paragonare alla prima, e sia

$$F\left(\frac{1}{\omega}\right) = A'\omega^r + B'\omega^{r+s} + C'\omega^{r+s+t} + \text{ec.}$$

Se i primi termini dello sviluppo di $F\left(\frac{1}{\omega}\right)$ saranno i medesimi che quei dello sviluppo di $f\left(\frac{1}{\omega}\right)$ $\{$ ciò che avverrà se $A = A'$, $e = r$, $B = B'$, $s = l$ ec. $\}$ si proverà facilmente esser sempre possibile dare ad ω un tal valore, che nessuna altra curva, rappresentata dall' equazione $y = \varphi(x)$, potrà passare tra le due prime nel punto corrispondente all' ascissa $x = \frac{1}{\omega}$, ed in quei corrispondenti ad ascisse maggiori, se non avrà i primi termini dello sviluppo di $\varphi\left(\frac{1}{\omega}\right)$ eguali agli omologhi negli altri sviluppi.

Concluderemo di quì che data la curva

$$y = fx = Ax^{-e} + Bx^{-e-l} + Cx^{-e-l-h} + \text{ec.}$$

ad essa si accosterà continuamente la curva $y = Ax^{-e}$, e tanto più quanto sarà maggiore l' ascissa: di modo che vi sarà un' ascissa tale al di là della quale nessuna altra curva $y = \varphi(x)$ potrà passare tra quelle due, se sviluppato $\varphi(x)$ in serie ordinata per le potenze discendenti di x, non sia Ax^{-e} il suo primo termine.

Egualmente la curva dell' equazione $y = Ax^{-e} + Bx^{-e-l}$ si avvicinerà continuamente alla curva data $y = fx$, e tanto più quanto più cresce x, di modo che vi sarà un' ascissa al di là della quale nessuna altra curva dell' equazione $y = \varphi(x)$ potrà passare tra di esse, se i primi due termini dello sviluppo di $\varphi(x)$ non siano $Ax^{-e} + Bx^{-e-l}$, e così di seguito. Queste curve si chiamano curve *Asintotiche*.

Ecco dunque in che consiste il metodo di trovare la curva Asintotica di una curva data.

Sia $F(x, y) = 0$, ovvero $y = fx$ l' equazione di una curva. Si trovi il valore di y espresso per una serie discendente di x, e questo sia, per esempio.

$$y = Ax^{e+l} + Bx^l + C + \frac{E}{x^n} + \frac{F}{x^{n+h}} + \text{ec.}$$

Sarà allora $y = Ax^{e+l} + Bx^l + C$ quella curva di genere parabolico che farà da asintoto alla proposta.

Se prenderemo altri termini, avremo anche le curve

$$y = Ax^{e+l} + Bx^l + C + \frac{E}{x^n},$$

$$y = Ax^{e+l} + Bx^l + C + \frac{E}{x^n} + \frac{F}{x^{n+h}},$$

ec.

le quali saranno altrettanti asintoti curvilinei della proposta medesima.

Se si avessero poi altre serie per esprimere altri valori di y, si troverebbero anche altre curve asintotiche della curva data.

§. 297. Avendo quì sopra parlato dello sviluppo delle funzioni in serie ordinate per potenze qualunque di x, sarà prezzo d'opera il trattenersi a darne un altro metodo.

Sia data un' equazione tra x, y liberata dalle frazioni e dai radicali complessi, e questa sia

$$(E) \ldots\ldots Ax^{m}y^{n} + A'x^{m'}y^{n'} + A''x^{m''}y^{n''} + \text{ec.} = 0.$$

Le quantità A, A′, A″ ec., rappresentano dei coefficienti costanti; m, n, m', n' ec., sono esponenti intieri o fratti, positivi o negativi.

Supponiamo che si voglia il valore di y dato per mezzo di una serie ordinata per le potenze crescenti di x,

$$y = ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + ex^{\varepsilon} + \text{ec.}$$

Parleremo poi delle serie a potenze decrescenti.

Tutta la difficoltà dunque consiste nel determinare i coefficienti a, b, c ec., e gli esponenti α, β, γ ec.: sostituito pertanto il valore di y nella proposta, converrà osservare quali siano quei termini pei quali una idonea determinazione di α rende i loro esponenti eguali e più piccoli di tutti gli altri. Allora eguagliando a zero la somma dei coefficienti di questi termini, si avrà un' equazione per la determinazione di a. Così si dica degli altri.

Ora osservando che le quantità α, β, γ ec., vanno crescendo, concluderemo che per la determinazione di a ed α, non potranno influire i termini bx^{β}, cx^{γ} ec., i quali nell' equazione daranno sempre dei termini che avranno un esponente maggiore di quei corrispondenti dati da ax^{α}: dunque potremo cominciare dal sostituire nella proposta semplicemente $y = ax^{\alpha}$: avremo perciò

$$Aa^{n}x^{m+n\alpha} + A'a^{n'}x^{m'+n'\alpha} + A''a^{n''}x^{m''+n''\alpha} + \text{ec.} = 0,$$

e cercare dovremo per α quel valore, il quale in due o più termini rende gli esponenti eguali tra loro, e questi minori degli esponenti degli altri termini: per riuscire in questa indagine consideriamo la serie degli esponenti

$m + n\alpha$, $m' + n'\alpha$, $m'' + n''\alpha$, $m''' + n'''\alpha$ ec., e vediamo di determinare α che abbia le condizioni dette quì sopra.

E primieramente osservo che se n sarà eguale in due termini, converrà ritenere soltanto quel termine in cui la m è minore; per questo riguarderemo le quantità n tutte diseguali tra loro: supporremo di più che esse siano disposte per ordine di grandezza cioè $n < n' < n'' < n'''$ ec., considerando minori le quantità negative più grandi.

Ciò premesso, facciamo il primo termine di quella serie $= p$ e rappresentiamo gli altri come segue

p, $p + d$, $p + d'$, $p + d''$, $p + d'''$ ec., e sarà

$$d = m' - m + (n' - n)\alpha = (n' - n)\left\{\alpha - \frac{m - m'}{n' - n}\right\},$$

$$d' = (n'' - n)\left\{\alpha - \frac{m - m''}{n'' - n}\right\},$$

$$d'' = (n''' - n)\left\{\alpha - \frac{m - m'''}{n''' - n}\right\}, \text{ ec.}$$

e sarà la nostra serie

$$p,\ p + (n' - n)\left\{\alpha - \frac{m - m'}{n' - n}\right\},$$

$$p + (n'' - n)\left\{\alpha - \frac{m - m''}{n'' - n}\right\},$$

$$p + (n''' - n)\left\{\alpha - \frac{m - m'''}{n''' - n}\right\} \text{ ec.}$$

Le quantità numeriche $\frac{m - m'}{n' - n}$ ec., che sono date, si rappresentino per e, e', e'' ec., e la serie diverrà

p, $p + (n' - n)(\alpha - e)$, $p + (n'' - n)(\alpha - e')$,
$p + (n''' - n)(\alpha - e'')$ ec., ove si vede che facendo α eguale alla maggiore delle quantità numeriche e, e', e'' ec., che

sia per esempio e'', si avrà il quarto termine eguale al primo, e questi due termini saranno i più piccoli di tutti gli altri della medesima serie. Se poi varie delle quantità numeriche e, e', e'' ec, fossero eguali tra loro e nello stesso tempo maggiori di tutte le altre, allora si avrebbero più termini della serie eguali al primo, quando si facesse α eguale ad una di quelle maggiori quantità. In questa maniera troviamo sempre un valore di α che gode delle proprietà volute.

Trovato questo valore di α, il paragone dei termini ove si trovano i medesimi esponenti, ci darà l'equazione, onde determinare il coefficiente a, ed avremo così il primo termine della serie ax^{α} rappresentante il valore di y. Per trovare l'altro bx^{β} noi faremo $y = ax^{\alpha} + y'$, essendo $y' = bx^{\beta} + cx^{\gamma} +$ ec., e sostituendo questo valore nella proposta, avremo una equazione tra x ed y' della forma della proposta medesima; in questa nuova equazione porremo bx^{β} invece di y' e determineremo β come abbiamo fatto α, quindi avremo il coefficiente b; e così sarà conosciuto anche il termine bx^{β}, come lo è stato ax^{α}. Troveremo il termine della serie nella stessa guisa che abbiamo trovati il primo ed il secondo, e così di seguito. E quì conviene avvertire che nella scelta del valore di β (e tra poco vedremo che ponno esservene diversi) debbonsi prendere quei che sono maggiori di α, giacchè supposto abbiamo che la serie sia ascendente.

§ 298. Il valore di α che abbiamo ritrovato non è il solo: altri ve ne sono che goder ponno delle medesime condizioni.

Per ottenerli, io primieramente osservo che α non può esser maggiore della più grande delle quantità e, e', e'' ec., perchè in tal caso il primo termine sarebbe minore di tutti gli altri, essendo $n' - n$, $n'' - n$ ec., $\alpha - e$, $\alpha - e'$ ec. tutte quantità positive. Supponendo dunque come nel §. antecedente che sia e'' la e maggiore di tutte, sarà $\alpha < e''$, ed il termine corrispondente ad e'' sarà più piccolo di tutti i precedenti,

poichè la quantità $(n''' - n)(\alpha - e'')$ è negativa, mentre le quantità corrispondenti negli altri termini o sono positive, o se ve ne è taluna, per esempio $(n' - n)(\alpha - e)$, negativa, sarà questa maggiore di $(n''' - n)(\alpha - e'')$ poichè $n' - n < n''' - n$, così $\alpha - e > \alpha - e''$, onde

$$p - (n' - n)(e - \alpha) > p - (n''' - n)(e'' - \alpha).$$

I più piccoli termini dunque, quando vi siano, dovranno cercarsi in quello che corrisponde ad e'', e nei seguenti.

Presa dunque la serie composta di tali termini, cioè di quello corrispondente ad e'' e dei seguenti, ridotta alla forma di quella del §. antecedente $m + n\alpha$, $m' + n'\alpha$ ec., e trattata come questa, si troverà un secondo valore per α, se ne troverà quindi un terzo, un quarto e così di seguito, sinchè avremo termini da esperimentare.

Ognuno poi di questi termini sarà principio di una nuova serie per esprimere il valore di y. Facciamo qualche esempio.

Sia la serie dei termini

$$1 + \alpha,\ 3 + 2\alpha,\ \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\alpha,\ 2 + 3\alpha,\ 2 + 4\alpha,\ \frac{1}{3} + \frac{9}{2}\alpha$$

e vogliasi determinare α per modo che due di quei termini almeno riescano minori di tutti gli altri.

Paragonata questa serie con quella del §. antecedente, avremo

$$m = 1,\ m' = 3,\ m'' = \frac{1}{2},\ m''' = 2,\ m'''' = 2,\ m^{v} = \frac{1}{3},$$

$$n = 1,\ n' = 2,\ n'' = \frac{5}{2},\ n''' = 3,\ n'''' = 4,\ n^{v} = \frac{9}{2},$$

e quindi

$$e = \frac{m - m'}{n' - n} = \frac{1-3}{2-1} = -2,\ e' = \frac{m - m''}{n'' - n} = \frac{1}{3},$$

$$e'' = \frac{m - m'''}{n''' - n} = -\frac{1}{2},\ e''' = \frac{m - m''''}{n'''' - n} = -\frac{1}{3},$$

$$e'''' = \frac{m - m^{v}}{n^{v} - n} = \frac{4}{21}:$$

essendo pertanto e' la maggiore di tutte queste quantità, sarà

$\alpha = e' = \frac{1}{3}$ uno dei valori idonei di α, ed allora il primo ed il terzo termine saranno i minori di tutti gli altri: ciascun di essi è $\frac{4}{3}$.

Per trovare gli altri valori di α, si prenda la serie superiore cominciando dal terzo termine

$\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\alpha$, $2 + 3\alpha$, $2 + 4\alpha$, $\frac{1}{3} + \frac{9}{2}\alpha$, ed avremo

$m = \frac{1}{2}$, $m' = 2$, $m'' = 2$, $m''' = \frac{1}{3}$

$n = \frac{5}{2}$, $n' = 3$, $n'' = 4$, $n''' = \frac{9}{2}$, e quindi

$e = -3$, $e' = -1$, $e'' = \frac{1}{12}$:

sarà dunque $\alpha = \frac{1}{12}$ un altro valore di α, e dopo questo non ve ne sono altri.

Sia ora proposta l' equazione $1 + xy^2 - y^3 = 0$, dalla quale vogliasi ricavare il valore di y dato per una serie ordinata per le potenze crescenti di x. Se poniamo $y = ax^\alpha$, la nostra equazione diverrà $x^0 + a^2x^{1+2\alpha} - a^3x^{3\alpha} = 0$, e quindi la serie composta dagli esponenti, sarà 0, $1 + 2\alpha$, 3α: avremo perciò $m = 0$, $m' = 1$, $m'' = 0$, $n = 0$, $n' = 2$, $n'' = 3$, onde $e = \frac{m - m'}{n' - n} = -\frac{1}{2}$, $e' = 0$; sarà dunque $\alpha = e' = 0$ quel valore idoneo di α, e per determinare il coefficiente a, avremo l' equazione $1 - a^3 = 0$, che ha due radici immaginarie, ed una reale $a = 1$; il primo termine per tanto della ricercata serie ax^α sarà $= 1$, nè vi sono altri valori per α. Onde trovare il secondo termine, poniamo nella proposta $1 + y'$ invece di y ed essa diverrà

$x - 3y' + 2xy' - 3y'^2 + xy'^2 - y'^3 = 0$.

Vi si faccia $y' = bx^\beta$, ed avremo

$x - 3bx^\beta + 2bx^{1+\beta} - 3b^2x^{2\beta} - b^3x^{3\beta} + b^2x^{1+2\beta} = 0$

e la serie degli esponenti sarà

1, β, $1 + \beta$, 2β, $1 + 2\beta$, 3β,

dei quali solo riterremo

1, β, 2β, 3β perchè gli altri sono sempre maggiori di alcuni di questi qualunque sia β.

La considerazione di questa serie di esponenti ci darà $\beta = 1$, $\beta = 0$: noi prenderemo $\beta = 1$, perchè il valore di β debbe essere maggiore di quello di α: troveremo allora $b = \frac{1}{3}$, ed il secondo termine della serie sarà $\frac{x}{3}$.

Facendo in seguito $y' = \frac{x}{3} + y''$, avremo un' equazione tra x ed y'', e posto $y'' = cx^\gamma$ sarà $c = \frac{1}{9}$, $\gamma = 2$, e così degli altri.

La serie per tanto sarà

$y = 1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} + \frac{2x^3}{81} + \frac{4x^4}{243} +$ ec.

§. 299. Se la serie che rappresenta y esser dovesse determinata per le potenze decrescenti di x, allora sostituendo ax^α invece di y nell' equazione (E) del §. 297, converrebbe determinare α in modo che in due o più termini l' esponente della x fosse eguale, e nel tempo stesso minore di tutti gli altri esponenti. Per questo sarà facile rilevare dalle cose precedenti, che dobbiamo allora eguagliare α alla più piccola delle quantità numeriche e, e', e'', e''' ec., e nella stessa guisa regolarci per le altre serie che danno i valori di β, γ ec.

Per esempio, nell' equazione maneggiata al §. antecedente posto ax^α per y, avremo egualmente la serie degli esponenti

0, $1 + 2\alpha$, 3α,

e quindi come sopra $e = -\frac{1}{2}$, $e' = 0$: sarà per tanto $\alpha = -\frac{1}{2}$. Si troverà anche un altro valore di α che sarà $\alpha = 1$. Preso questo secondo valore, avremo per determinare a l' equazione $a^2 - a^3 = 0$, cioè $a = 1$, e perciò

$ax^{\alpha} = 1 \cdot x^1 = x$.

Facciamo ora $y = x + y'$, ed avremo

$1 - x^2 y' - 2xy'^2 - y'^3 = 0$, ove fatto $y' = bx^{\beta}$, si trova $\beta = -2$, $\beta = 1$. Prenderemo per β il primo valore -2, giacchè debb' essere $\beta < \alpha$, ed avremo $b = 1$, quindi $bx^{\beta} = x^{-2}$.

Facciamo anche $y' = x^{-2} + y''$, e si avrà l' equazione $2x^{-3} + x^{-6} + x^2 y'' + 4x^{-1} y'' + 3x^{-4} y'' + 2xy''^2 + 3x^{-2} y''^2 + y''^3 = 0$, ove ponendo cx^{γ} per y'', avremmo un' altra equazione, nella quale la serie degli esponenti (tralasciati quei che riescono sempre più piccoli degli altri qualunque sia il valore di γ) è la seguente -3, $2 + \gamma$, $1 + 2\gamma$, 3γ.

La considerazione di questa serie ci dà $\gamma = -5$, $\gamma = \frac{2}{3}$, e ritenendo solo -5, perchè in questa guisa $\gamma < \beta$, si troverà $c = -2$, e quindi $cx^{\gamma} = -2x^{-5}$.

Nella stessa guisa troveremo gli altri termini, ed il valore di y sarà

$$y = x + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^5} + \frac{7}{x^8} - \frac{30}{x^{11}} + \text{ec.}$$

Se avessimo preso nel primo termine l' altro valore di α, cioè $\alpha = -\frac{1}{2}$, avremmo avuto per determinare a, quest' equazione $a^2 + 1 = 0$: sarebbe stato a immaginario, e tale anche tutta la serie.

Da quanto abbiamo detto in questi tre ultimi §§. si ricava anche il metodo di sviluppare il valore di y, datoci da una equazione tra x ed y, in serie ordinata per le potenze qualunque siano di ω, quando in quell' equazione si vorrà porre $x + \omega$ per x; infatti fatta questa sostituzione, basterà trattare ω ed y come abbiamo sopra trattate le variabili x, y. I coefficienti della serie ordinata per le potenze di ω, la quale rappresenterà il valore di y, saranno allora generalmente parlando altrettante funzioni di x.

§. 300. Tornando alla Teorìa dei contatti, proponiamoci il Problema seguente:

Fig. 14 „ Supponendo che la curva EMF debba avere questa pro- „ prietà che innalzate in due punti dell' asse B, C dati, le or- „ dinate, e prolungate sino all' incontro di una tangente con- „ dotta ad un punto qualunque M di essa, il prodotto delle „ due porzioni BT, Ct intercette tra l' asse dell' ascisse e la „ tangente, sia sempre eguale ad una costante K, si dimanda „ la natura di questa curva „.

Poniamo $AB = m$, $AC = n$, $AP = x$, $PM = y$.

L' equazione della tangente Tt è (§. 78.) indicando per p e per q le sue coordinate, $q = a + bp$. Facciamovi successivamente $p = m$, $p = n$, ed avremo due valori per p e per q il cui prodotto dovrà eguagliar K.

Otterremo dunque tra gli elementi del contatto a, b quest' equazione

$(a + mb)(a + nb) = K$.

Ma $a = y - x\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $b = \left(\frac{dy}{dx}\right)$; dunque l' equazione che contiene la sopra indicata proprietà, sarà

$$(E) \ldots\ldots \left\{y + (m - x)\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}\left\{y + (n - x)\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\} = K,$$

e per ottenere l' equazione della dimandata curva, fa mestieri ricercarne l' integrale.

Per integrare quest' equazione si adoperi l' artifizio di differenziarla spiegato al §. 206, ed avremo, facendone la differenziazione

$\{y + (n - x)(\frac{dy}{dx})\}(m - x)(\frac{d^2y}{dx^2}) + \{y + (m - x) \times$

$(\frac{dy}{dx})\}(n - x)(\frac{d^2y}{dx^2}) = 0$, equazione che si decompone in queste due

$(1) \ldots\ldots \{y + (n - x)(\frac{dy}{dx})\}(m - x) + \{y +$

$(m - x)(\frac{dy}{dx})\}(n - x) = 0$,

$(2) \ldots\ldots (\frac{d^2y}{dx^2}) = 0$.

La seconda di queste equazioni s' integra subito; essendo essa del secondo ordine, prendiamone l' integrale primo, ed avremo $(\frac{dy}{dx}) = C$ costante arbitraria.

Per mezzo di quest' ultima equazione e della (E) eliminiamo $(\frac{dy}{dx})$ ed avremo l' integrale cercato così espresso $(y - Cx + mC)(y - Cx + nC) = K$; questo ridotto, diviene

$(y - Cx)^2 + (y - Cx)(m + n)C + mnC^2 - K = 0$, che dà $y = Cx - B$, prendendo per C una costante arbitraria, e per B la radice di questa equazione

$B^2 + (m + n)BC + mnC^2 - K = 0$.

La curva cercata sarebbe in questa guisa una linea retta data dall' equazione $y = Cx + B$.

Si potrebbe giungere allo stesso risultato, prendendo l' integrale finito della equazione $(\frac{d^2y}{dx^2}) = 0$. Questo è $y = Cx + E$: le due costanti C, E non ponno essere per noi ambedue arbitrarie, perchè bisogna che l' equazione trovata coincida con la proposta per un valore di x: facciamo pertanto $x = 0$, e si ha $y = E$, $(\frac{dy}{dx}) = C$; avremo dunque tra A, B questa equazione di condizione $(E + mC)(E + nC) = K$, la quale ci dà E espresso per C, come lo era B, quindi viene ad avere lo stesso valore la E ed il B.

§. 301. Anche l' equazione (1) combinata con la (E) somministra una soluzione del problema, e senza passare per alcuna integrazione. Essa infatti ci dà

$(\frac{dy}{dx}) = \frac{(2x - m - n)y}{2(m - x)(n - x)}$, il quale valore sostituito in (E), la riduce a questa

$y^2 + \frac{4K(m - x)(n - x)}{(m - n)^2} = 0$.

Tale equazione è quella di una ellisse, o di una iperbola, a misura che K è una quantità positiva o negativa. Il grande asse vi è $m - n$; il piccolo asse $2\sqrt{(K)}$, e le due sommità del grande asse nei punti $x = m$, $x = n$.

Che l' ellisse e l' iperbola godano della proprietà indicata nel Problema, è dimostrato da Apollonio nella proposizione 42 del terzo Libro delle Coniche, e ripetuto in tutti i trattati di queste curve.

Noi abbiamo dunque trovate due soluzioni del Problema: una dataci dalla linea retta, l' altra dall' ellisse o iperbola. Che la retta risolva il problema quando tra le due costanti che ne determinano la posizione, siavi la relazione data dalle condizioni del problema, si vede facilmente; anzi è questa la vera soluzione generale del quesito, poichè in quell' equazione si contiene una costante arbitraria, ed il quesito stesso porta ad una equazione differenziale del primo ordine, di cui l' equazione alla retta è l' integrale completo.

L' altra equazione poi, è una soluzione particolare della (E): ce ne persuaderemo ricercando la soluzione particolare della (E) o deducendola dal di lei integrale completo, facendo variare la costante arbitraria; ovvero ricavandola dalla differenziale stessa della (E) secondo i metodi spiegati nel Cap. XI.

Da quello poi che si è detto al § 282, che cioè la soluzione particolare esprime la curva formata dalla successiva intersecazione delle curve espresse dall' integrale completo facendovi variare il parametro, risulta che l' ellisse viene formata dalla continua intersecazione delle rette espresse dall' equazione $y = Cx + B$, facendo variare la costante arbitraria C, ed è toccata con un contatto di primo ordine da tutte queste rette medesime.

L' equazione del §. 300.
$(a + mb)(a + nb) = K$, dalla quale dipende la soluzione del problema, contiene solamente gli elementi del contatto a, b, e delle quantità costanti senza x, y. Da questa circostanza dipende l' avere ottenute due soluzioni dello stesso problema.

Onde ciò si comprenda, proponiamoci in generale questo problema „ Data di specie una curva espressa dall' equazione
„ $F(x, y, a, b) = 0$ nella quale a, b sono due parametri
„ indeterminati, si tratta di trovare l' equazione di un' altra
„ curva che tocchi la prima con un contatto di primo ordine
„ e che faccia regnare tra i parametri a, b una relazione con-
„ tenuta in una data equazione $\phi(a, b) = 0$ „.

Da quest' ultima equazione ricaviamo il valore di b dato per a, e sia $b = fa$, e sostituito nella prima, avremo
$F(x, y, a, fa) = 0$.

Il problema allora si ridurrà a trovare una curva che abbia con quella dell' equazione $F(x, y, a, fa) = 0$ un contatto di primo ordine.

L' equazione dunque della curva ricercata dovrà esser tale che dia per y e $(\frac{dy}{dx})$ li stessi valori in x che ci danno l' equazioni

$F(x, y, a, fa) = 0$,

$(\frac{dF}{dx}) + (\frac{dy}{dx})(\frac{dF}{dy}) = 0$.

Si vede intanto che la stessa $F(x, y, a, fa) = 0$ soddisfà al problema, qualunque sia il valore di a.

Ora a, essendo una quantità indeterminata, possiamo supporla tale che la curva cercata sia rappresentata dalla medesima equazione $F(x, y, a, fa) = 0$, purchè la differenziale

prima di questa quì, abbia la stessa forma
$(\frac{dF}{dx}) + (\frac{dy}{dx})(\frac{dF}{dy}) = 0$; ma se a è una quantità variabile, la differenziale prima di $F(x, y, a, b) = 0$ è
$(\frac{dF}{dx}) + (\frac{dy}{dx})(\frac{dF}{dy}) + (\frac{da}{dx})(\frac{dF}{da}) = 0$; dunque la condizione di cui si tratta, sarà adempita se si determina a con l' equazione $(\frac{dF}{da}) = 0$. Avremo così un valore di a, il quale sostituito in $F(x, y, a, fa) = 0$ ci darà l' equazione della curva cercata.

Tale equazione poi è una soluzione particolare, mentre $F(x, y, a, fa) = 0$ è l' integrale completo; e la curva è quella, la quale viene prodotta dalla continua intersezione di quella serie di curve pochissimo differenti l' una dall' altra, che si ottengono dando ad a dei valori poco differenti tra loro nell' equazione $F(x, y, a, fa) = 0$.

§. 302. Consideriamo le curve che ponno avere dei contatti di secondo ordine.

„ Data di specie una curva rappresentata dall' equazione
„ $F(x, y, a, b, c) = 0$ essendo a, b, c tre parametri inde-
„ terminati, si tratta di trovare l' equazione di un' altra curva
„ che abbia con la prima un contatto di secondo ordine, e fac-
„ cia regnare tra i parametri a, b, c la relazione data da una
„ equazione $\phi(a, b, c) = 0$ „.

Si soddisfà alla seconda condizione ricavando da $\phi(a, b, c) = 0$ il valore di c; sia $c = f(a, b)$, e sostituendolo nell' equazione data, avremo allora $F(x, y, a, b, f(a, b)) = 0$, che per maggior semplicità rappresentar possiamo per $\Psi(x, y, a, b) = 0$, e dovremo trovare la curva che ha con questa un contatto di secondo ordine, qualunque siano i valori di a, b: dovremo in conseguenza trovare una curva che tocchi con un contatto di secondo ordine tutte le infinite curve che si hanno, dando ad a, b dei valori particolari qualunque.

Se per mezzo delle equazioni $\Psi = 0$, $d\Psi = 0$, $d^2\Psi = 0$ eliminiamo le due costanti a, b, otterremo un' equazione del secondo ordine $V = 0$ che (non contenendo a, b) apparterrà a tutte le curve rappresentate dall'equazione $\Psi(x, y, a, b) = 0$ dando ad a, b valori qualunque, l' integrale completo della quale sarà la stessa $\Psi = 0$.

Onde una curva ne tocchi un' altra con un contatto di secondo ordine, bisogna che in amendue abbiansi li stessi valori per y, $(\frac{dy}{dx})$, $(\frac{d^2y}{dx^2})$: nel nostro caso dunque bisognerà che essa conduca alla stessa equazione differenziale del secondo ordine $V = 0$. L'equazione dunque della curva toccante, altro non potrà essere che o lo stesso integrale completo $\Psi(x, y, a, b) = 0$, o la soluzione particolare.

Così il problema della ricerca di una curva o delle curve, le quali abbracciano con un contatto di secondo ordine tutte le curve dateci dall' equazione $\Psi(x, y, a, b) = 0$, si riduce alla ricerca della soluzione particolare dell' equazione differenziale del secondo ordine $V = 0$, della quale $\Psi = 0$ è l' integrale completo.

La di lei equazione per tanto si otterrà eliminando a, b, e $(\frac{db}{da})$ $\{$ giacchè supponiamo che b sia una funzione qualunque di a $\}$ da queste quattro equazioni

$$\Psi(x, y, a, b) = 0,$$

$$\Psi' = (\frac{d\Psi}{dx}) + (\frac{dy}{dx})(\frac{d\Psi}{dy}) = 0,$$

$$(\frac{d\Psi}{da}) + (\frac{db}{da})(\frac{d\Psi}{db}) = 0,$$

$$(\frac{d\Psi'}{da}) + (\frac{db}{da})(\frac{d\Psi'}{db}) = 0;$$

una tale equazione conterrà i differenziali del primo ordine.

Si vede di quì, che le soluzioni particolari rappresentano sempre delle curve inviluppanti, e che hanno dei contatti di un dato ordine con le curve inviluppate, rappresentate dagli integrali completi, nei quali le costanti arbitrarie variano da una curva all' altra.

L' eliminazione di a, b, $(\frac{db}{da})$ dalle quattro equazioni superiori, ci dà un' equazione in x, y, $(\frac{dy}{dx})$: se noi viceversa eliminassimo queste ultime quantità per mezzo delle stesse equazioni, otterremmo un' equazione in a, b, e $(\frac{db}{da})$ la quale conterrà la relazione che sussister debbe tra le due variabili a, b: dal che si ricava che queste quantità sono indipendenti tra loro in ciascuna delle curve inviluppate, ma non lo sono più, allorchè si riferiscono alla curva inviluppante. Si otterrebbero dei risultati simili per le curve degli ordini superiori.

Da questi principj dedur se ne potrebbe la Teorìa dell' Evolute, ma avendola noi trattata diversamente al §. 82, rimandiamo i nostri Lettori all' Opera delle Funzioni Analitiche di La-Grange.

§. 303. Una curva a doppia curvatura (App. XII) è rappresentata analiticamente con due equazioni, le quali ne esprimono due delle projezioni.

Siano $y = fx$, $z = \varphi x$ l'equazioni di una qualunque curva a doppia curvatura: x, y, z ne sono le coordinate. Siano parimente $q = Fp$, $r = \Phi p$ l' equazioni di un' altra curva a doppia curvatura data, della quale p, q, r sono le coordinate.

Onde le due curve abbiano un punto comune, converrà che facendo $p = x$, abbiasi $q = y$, $r = z$, che cioè sia $y = Fx$, $z = \Phi x$. Questa circostanza porterà le due equazioni $fx = Fx$, $\varphi x = \Phi x$, dalla risoluzione delle quali se troveremo uno o più valori reali di x che soddisfacciano ad ambedue, avremo uno o più punti comuni di quelle curve; e quando non vi sia un punto comune, ma nell' equazioni della seconda curva si trovino due parametri indeterminati, potremo allora determinarli in funzione dell' ascissa che debbe corrispondere al punto comune, ed in modo che quelle due equazioni siano soddisfatte.

Siavi un punto comune e consideriamo l' andamento delle curve al di là di esso. Essendo per quel punto comune l' ordinate della prima curva x, fx, φx, e quelle della seconda nello stesso punto x, Fx, Φx, per i punti corrispondenti ad un' altra ascissa comune $x+\omega$, le coordinate della prima curva saranno $x+\omega$, $f(x+\omega)$, $\varphi(x+\omega)$, e quelle della seconda $x+\omega$, $F(x+\omega)$, $\Phi(x+\omega)$.

Ora se noi poniamo

$$D = F(x+\omega) - f(x+\omega)$$
$$= \omega\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right) - \left(\frac{df}{dx}\right)\right\} + \frac{\omega^2}{2}\left\{\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)\right\} + \text{ec.},$$
$$\Delta = \Phi(x+\omega) - \varphi(x+\omega)$$
$$= \omega\left\{\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\right\} + \frac{\omega^2}{2}\left\{\left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)\right\} + \text{ec.},$$

sarà la distanza di quei due punti che rappresenteremo per δ,

$$\delta = \sqrt{(D^2 + \Delta^2)}.$$

Questo valore di δ sarà tanto minore, quanti più termini si annulleranno nelle due serie, che esprimono i valori di D, Δ, e quindi tanto più le due curve si avvicineranno tra loro.

Quando si annullano i coefficienti delle prime potenze di ω, ed allora si ha

$\left(\frac{dF}{dx}\right) = \left(\frac{df}{dx}\right)$, $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)$, e le due curve hanno un primo grado di ravvicinamento tra loro, o un contatto del primo ordine: quando si annullano i coefficienti delle potenze seconde di ω, le due curve hanno un secondo grado di ravvicinamento o un contatto di secondo ordine, e così di seguito.

Dunque, perchè due curve a doppia curvatura abbiano una semplice intersezione corrispondente ad una ascissa comune x, converrà che le altre coordinate respettivamente si eguaglino tra loro: perchè quel punto sia un contatto di primo ordine, dovranno eguagliarsi anche i differenziali primi di quelle coordinate: dovranno essere di più eguali i differenziali secondi, se le curve debbono avere un contatto di secondo ordine, e così di seguito.

E queste sono le proprietà analitiche dei contatti delle curve a doppia curvatura. Le proprietà poi Geometriche consistono in questo, che due curve, le quali hanno tra loro un contatto di un certo ordine n^{esimo}, non permettono ad una terza curva avente lo stesso punto comune, il passare tra di esse, se questa non abbia con loro un contatto dello stesso o di un maggiore ordine.

E quì osserviamo che una curva a doppia curvatura dicesi passare tramezzo a due altre, quando le projezioni di quella passano tramezzo alle projezioni di queste.

Si vede dunque che tal grado di ravvicinamento o di contatto hanno due curve a doppia curvatura, quale lo hanno le loro projezioni, e viceversa.

Siano x, y, z le coordinate di una qualunque curva, e p, q, r le coordinate della curva data per la quale si dimandano le condizioni del contatto con la curva proposta.

Siano $F(p,q,r) = 0$, $\Phi(p,q,r) = 0$ l' equazioni della curva data (Appendice XVI): onde abbiasi tra queste due curve un punto comune corrispondente all' ascissa x, bisogna che le due equazioni sussistano, ponendovi x, y, z invece di p, q, r, ciò che darà $F(x,y,z) = 0$, $\Phi(x,y,z) = 0$: e queste due equazioni dovranno aver luogo per l' intersezione semplice delle curve.

Indichiamo per $F(p,q,r)' = 0$, $\Phi(p,q,r)' = 0$ le differenziali prime di quelle due equazioni divise per dp; acciò le due curve abbiano un contatto di primo ordine, non solo nel punto comune eguagliar si debbono le ordinate, ma ancora i differenziali primi di esse; dunque queste due ultime equazioni differenziali debbono anche sussistere ponendovi x, y, z invece di p, q, r: avremo dunque $F(x,y,z)' = 0$, $\Phi(x,y,z)' = 0$.

Per un contatto di secondo ordine dovremmo avere di più le due altre equazioni

$\frac{d^2F}{dx^2} = F(x, y, z)'' = 0$, $\frac{d^2\Phi}{dx^2} = \Phi(x, y, z)'' = 0$, e così di seguito.

A queste equazioni di condizione pe' diversi ordini di contatto soddisfaremo per mezzo delle costanti arbitrarie a, b, c ec., che si troveranno nelle funzioni date $F(p, q, r)$, $\Phi(p, q, r)$, e ad esse, determinate in funzione di x, y, z, $(\frac{dy}{dx})$, $(\frac{dz}{dx})$, potremo dare il nome di *Elementi del contatto*, come si è usato per le curve piane.

Se fosse una superficie curva, quella che aver debbe un contatto con una curva a doppia curvatura, allora rappresentando per $F(p, q, r) = 0$ la di lei equazione, dovrebbero aversi le due equazioni $F(x, y, z) = 0$,

$\frac{dF}{dx} = F(x, y, z)' = 0$, onde vi fosse un contatto di primo ordine: vi si aggiungerebbe l' altra

$\frac{d^2F}{dx^2} = F(x, y, z)'' = 0$, onde il contatto fosse di secondo ordine, e così di seguito. Tutto questo si dimostra con i medesimi principj.

Di quì si vede, che una superficie sferica può avere con una curva a doppia curvatura un contatto di terzo ordine; e che quindi vi sono infinite sfere osculatrici di una curva a doppia curvatura.

§. 304. Si paragoni la linea retta con una curva qualunque a doppia curvatura. Le due equazioni che rappresentano la retta (Appendice N°. I) sono $q = a + bp$, $r = c + ep$. Onde essa abbia un contatto di primo ordine, bisogna che ponendo in queste due equazioni x, y, z per p, q, r, l' equazioni continuino ad esser vere, egualmente che le loro differenziali: dovremmo dunque avere $y = a + bx$, $z = c + ex$, $(\frac{dy}{dx}) = b$, $(\frac{dz}{dx}) = e$, le quali equazioni ci daranno

$a = y - (\frac{dy}{dx})x$, $c = z - (\frac{dz}{dx})x$, ed in conseguenza l' equazioni della retta tangente di una curva a doppia curvatura, saranno

$$q = y - (\tfrac{dy}{dx})x + (\tfrac{dy}{dx})p,$$

$$r = z - (\tfrac{dz}{dx})x + (\tfrac{dz}{dx})p,$$

ove p, q, r sono le coordinate dei suoi punti; x, y, z sono quelle pel punto ove è il contatto con la curva. Quelle due equazioni poi sono le stesse che troverebbersi per determinare le tangenti alle due curve piane, projezioni della curva a doppia curvatura: così per condurre una tangente ad una curva a doppia curvatura, basta condurre le tangenti alle di lei projezioni, essendo siffatte tangenti le projezioni stesse della tangente della curva a doppia curvatura.

Vogliasi ora il circolo osculatore di una curva a doppia curvatura. Riguardando un circolo nello spazio come nato dall' intersezione di una sfera e di un piano che passi pel centro di lei, sarà esso rappresentato dalla simultanea sussistenza delle equazioni di queste due superficie.

L' equazione di una sfera (Appendice N°. XVI) riferita a tre assi ortogonali, ed indicate le coordinate per p, q, r, è $(p - a)^2 + (q - b)^2 + (r - c)^2 = h^2$, ove a, b, c sono le coordinate del centro, ed h il raggio. L' equazione di un piano riferito alle stesse coordinate, e che passa per un punto corrispondente alle coordinate a, b, c (Appendice N°. IV) è in generale $p - a + m(q - b) + n(r - c) = 0$, m, n essendo due costanti arbitrarie, le quali determinano l' inclinazione del piano rapporto ai piani fissi delle coordinate. Il sistema per tanto di queste due equazioni rappresenterà un circolo di raggio h, il cui centro sarà in un punto dello spazio determinato dalle coordinate a, b, c, ed il cui piano dipenderà dalle quantità m ed n.

Onde questo circolo abbia una intersezione con una curva a doppia curvatura in un punto di essa corrispondente alle coordinate x, y, z, bisognerà che quelle due equazioni siano sempre vere, quando vi si pone x, y, z per p, q, r: che sia cioè

$$(1) \ldots\ldots (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = h^2;$$

$$(2) \ldots\ldots x - a + m(y-b) + n(z-c) = 0;$$

onde in quel punto siavi un contatto di primo ordine, dovranno ancora verificarsi queste altre due

$$(3) \ldots\ldots (x-a) + \left(\frac{dy}{dx}\right)(y-b) + \left(\frac{dz}{dx}\right)(z-c) = 0;$$

$$(4) \ldots\ldots 1 + m\left(\frac{dy}{dx}\right) + n\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0.$$

Perchè poi il contatto sia di secondo ordine, anche le due seguenti equazioni dovranno sussistere con le superiori

$$(5) \ldots\ldots 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)(y-b) + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)(z-c) = 0$$

$$(6) \ldots\ldots m\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + n\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = 0.$$

Ora essendo sei le indeterminate, le quali entrano nell' equazioni del circolo, potremo determinarle in modo che siano soddisfatte queste sei equazioni: potremo dunque trovare sempre un circolo che sia osculatore di una curva a doppia curvatura qualunque, e sarà questi determinato di posizione e di grandezza Se volessimo che il circolo fosse soltanto tangente, non avremmo a soddisfare che a quattro equazioni; resterebbero in conseguenza due indeterminate al nostro arbitrio, e possiamo prendere per tali il raggio h ed una delle due m, n.

Allora l' equazione

$(x-a) + \left(\frac{dy}{dx}\right)(y-b) + \left(\frac{dz}{dx}\right)(z-c) = 0$, determinerà il piano ove si troveranno i centri dei circoli che ponno esser tangenti; siccome poi il raggio del circolo tangente è necessariamente perpendicolare alla curva, questa equazione sarà quella di un piano perpendicolare alla curva medesima, prendendo a, b, c per le coordinate del piano.

Esaminiamo il contatto del secondo ordine. Le tre prime equazioni danno

$$x - a = \frac{\left\{n\left(\frac{dy}{dx}\right) - m\left(\frac{dz}{dx}\right)\right\} h}{R},$$

$$y - b = -\frac{\left\{n - \left(\frac{dz}{dx}\right)\right\} h}{R},$$

$$z - c = \frac{\left\{m - \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\} h}{R},$$

facendo per semplicità di scrittura

$$R = \sqrt{\left[\left\{n\left(\frac{dy}{dx}\right) - m\left(\frac{dz}{dx}\right)\right\}^2 + \left\{n - \left(\frac{dz}{dx}\right)\right\}^2 + \left\{m - \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}^2\right]}$$

sostituendo questi valori nella quinta equazione, ne ricaveremo

$$h = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\} R}{\left\{n - \left(\frac{dz}{dx}\right)\right\}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \left\{m - \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)}.$$

Infine la quarta equazione e la sesta ci daranno

$$m = \frac{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)}{\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)},$$

$$n = -\frac{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)},$$

che dovranno sostituirsi nelle precedenti espressioni, onde avere (fatte le opportune riduzioni)

$$h = -\frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\left[\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2\right\} - \left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\right\}^2\right]}}$$

$$a = x - \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\right\}}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2\right\} - \left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\right\}^2},$$

$$b = y + \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \left(\frac{dy}{dx}\right)\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\right\}}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2\right\} - \left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\right\}^2},$$

$$c = z + \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) - \left(\frac{dz}{dx}\right)\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\right\}}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2\right\} - \left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\right\}^2};$$

la quantità h sarà il raggio osculatore della curva proposta, e le quantità a, b, c saranno le coordinate della curva dei centri di tutti i circoli osculatori; ma questa non sarà sempre una sviluppata, come lo è nelle curve a semplice curvatura.

Per sapere in quali casi la curva dei centri è una sviluppata, e per altre interessanti nozioni a questo proposito, noi rimandiamo i nostri Lettori alla Teoria delle Funzioni Analitiche, ed al decimo Volume delle Memorie presentate alla Reale Accademia delle Scienze di Parigi.

§. 305. Se si disegna la projezione di una curva a doppia curvatura sopra il piano delle x, y, si può riguardare questa curva di projezione come l' asse curvilineo della curva a doppia curvatura: allora indicando per s l' arco della curva di projezione, le coordinate della quale sono x, y, e supponendo che quest' arco sia disteso in linea retta, saranno s, z le coordinate rettangolari della curva a doppia curvatura spiegata sopra un piano.

Questa riflessione ci dà diritto di applicare alle curve a doppia curvatura le formule della quadratura e della rettificazione da noi assegnate (§. 90) per le curve piane.

Basterà porre in quelle s invece di x: così per la quadratura avremo lo spazio $= \int z\left(\frac{ds}{dx}\right)dx$, e per la rettificazione, l' arco

$= \int dx\sqrt{\left(\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}$; ma

$ds = \left(\frac{ds}{dx}\right)dx = dx\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$; dunque la prima formula diverrà

$\int zdx\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$; e la seconda

$\int dx\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}$.

E' inutile avvertire che lo spazio espresso dalla prima formula è la superficie del cilindro retto che ha per base la projezione della curva a doppia curvatura, ed è terminata da questa curva stessa.

§. 306. Veniamo ora all' applicazione del calcolo differenziale alle superficie curve.

Siano x, y, z le tre coordinate di una data superficie, e p, q, r le coordinate riferite ai medesimi assi rettangolari di un piano che vuolsi con essa paragonare. Sia $z = f(x, y)$ l' equazione della superficie, ed $r = a + bp + cq$ quella del piano, a, b, c essendo le tre costanti che ne determinano la posizione. Onde il piano abbia con la superficie un punto comune, bisogna che la di lui equazione si conservi vera, quando invece delle coordinate p, q, r vi si pone x, y, z. Avremo allora questa equazione

$z = a + bx + cy$.

Consideriamo tra tanto un altro punto corrispondente alle coordinate $x + \omega$, $y + \theta$. Per questo punto l' ordinata z diventerà $f(x + \omega, y + \theta)$, e l' ordinata perpendicolare r del piano, sarà $= a + b(x + \omega) + c(y + \theta)$: la distanza poi dei due punti corrispondenti della superficie e del piano, sarà

$D = f(x + \omega, y + \theta) - a - b(x + \omega) - c(y + \theta)$.

Sviluppiamo la funzione $f(x + \omega, y + \theta)$ in una serie ordinata per le potenze ed i prodotti degli aumenti indeterminati

ω, θ, (§. 37) e fermandosi ai termini ove trovansi le potenze seconde, tenendo conto dei resti, avremo

$$\begin{array}{llll} D = f(x,y) & + \omega f'(x,y) & + \frac{\omega^2}{2} f''(x+p, y+q) \\ \quad - a & + \theta f_{,}(x,y) & + \omega\theta f'_{,}(x+p, y+q) \\ \quad - bx & - \omega b & + \frac{\theta^2}{2} f_{,,}(x+p, y+q) \\ \quad - cy & - \theta c & \end{array}$$

ove $f'(x,y)$ indica la differenziale parziale prima di $f(x,y)$ riguardo ad x; $f_{,}(x,y)$ quella riguardo ad y; $f''(x+p, y+q)$ la differenziale parziale seconda presa due volte rapporto ad x, e postovi quindi $x+p$ invece di x, $y+q$ invece di y; $f'_{,}(x+p, y+q)$ quella presa prima rapporto ad x, poi rapporto ad y; $f_{,,}(x+p, y+q)$ quella presa due volte rapporto ad y. Le quantità p, q sono contenute, la prima tra o ed ω, e la seconda tra o e θ. Si avverta di non confonderle con le coordinate p, q del principio di questo §.

Ora essendo

$f(x,y) = z = a + bx + cy$, avremo

$$D = \omega \left\{ \left(\frac{dz}{dx}\right) - b \right\} + \theta \left\{ \left(\frac{dz}{dy}\right) - c \right\} + \omega^2 P + \omega\theta Q + \theta^2 R,$$

scrivendo per semplicità P, Q, R invece dei coefficienti delle seconde dimensioni degli aumenti.

Se noi diamo una tal posizione al piano, che sia

$b = \left(\frac{dz}{dx}\right)$, $c = \left(\frac{dz}{dy}\right)$, allora

$$D = \omega^2 P + \omega\theta Q + \theta^2 R.$$

Un piano che gode di queste proprietà, chiamasi tangente della superficie curva nel punto corrispondente alle coordinate x, y, z. L' equazione di questo piano è

$r = z - x\left(\frac{dz}{dx}\right) - y\left(\frac{dz}{dy}\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)p + \left(\frac{dz}{dy}\right)q$; e questa è la proprietà analitica del piano tangente di una superficie curva.

La proprietà poi Geometrica è che nessuno altro piano può esser tangente della superficie nello stesso punto, e passare tra il primo piano e la superficie medesima. Per dimostrarla, osservo che un altro piano non può passare tra la superficie curva ed il primo, se la distanza Δ tra due punti di esso e della superficie corrispondenti alle coordinate $x+\omega, y+\theta$ non sia minore di D.

Ora prendendo

$r = \alpha + \beta p + \gamma q$ per l' equazione del secondo piano, avremo

$$\Delta = \omega \left\{ \left(\frac{dz}{dx}\right) - \beta \right\} + \theta \left\{ \left(\frac{dz}{dy}\right) - \gamma \right\} + \omega^2 P + \omega\theta Q + \theta^2 R:$$

la quantità D contiene soltanto le potenze seconde degli aumenti indeterminati ω, θ; la Δ contiene anche le prime: potremo dunque prendere ω, θ così piccoli, che questa distanza Δ superi la D astraendo dai segni. Dunque sarà impossibile che quel nuovo piano possa passare tra la superficie ed il primo, di cui l' equazione è $r = a + bp + cq$; e se volessimo annullare in Δ i termini delle prime potenze di ω, θ, converrebbe fare $\beta = \left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\gamma = \left(\frac{dz}{dy}\right)$, quindi il nuovo piano cadrebbe sopra l' altro.

Come i coefficienti costanti a, b, c determinino la posizione di un piano, ed in conseguenza cosa esse significhino, si vede nell' Appendice N°. IV.

§. 307. Generalizzando questa Teorìa, sia $z = f(x,y)$ l' equazione di una qualunque superficie, sia $r = F(p,q)$ quella di una superficie data, ed esaminiamo le condizioni, onde queste abbiano un punto comune tra loro. Primieramente dovrà essere $z = F(x,y)$, ovvero $f(x,y) = F(x,y)$.

Facciamo ora $x+\omega, y+\theta$ invece di x, y: l' ordinata della prima curva sarà $f(x+\omega, y+\theta)$ e quella della seconda $F(x+\omega, y+\theta)$; la distanza poi dei due punti corrispondenti in queste due curve, punti che trovansi sopra la medesima ordinata, sarà

$$D = f(x+\omega, y+\theta) - F(x+\omega, y+\theta).$$

Sviluppiamo queste due funzioni in serie, e fermandosi ai termini ove le potenze degli aumenti ω, θ sono le seconde, avremo

$$D = \omega\left\{\left(\frac{dz}{dx}\right)-\left(\frac{dF}{dx}\right)\right\} + \theta\left\{\left(\frac{dz}{dy}\right)-\left(\frac{dF}{dy}\right)\right\} + \frac{\omega^2}{2}\left\{f''(x+p, y+q) - F''(x+p, y+q)\right\}$$
$$+\omega\theta\left\{f'_{,}(x+p, y+q) - F'_{,}(x+p, y+q)\right\}$$
$$+\frac{\theta^2}{2}\left\{f_{,,}(x+p, y+q) - F_{,,}(x+p, y+q)\right\},$$

ove p, q sono contenute tra i limiti o e ω, o e θ.

Supponiamo che i termini moltiplicati per ω e per θ spariscano, il che avviene facendo

$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dF}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{dF}{dy}\right)$, e l' espressione di D non conterrà allora le potenze lineari di ω e θ.

Quando le due curve sono tali, che si verificano queste condizioni, si chiamano tangenti l' una dell' altra; così perchè una curva dell' equazione $r = F(p, q)$ sia tangente di un' altra dell' equazione $z = f(x, y)$, nel punto corrispondente alle coordinate x, y, z, converrà che l' equazione $r = F(p, q)$ si mantenga vera, allorchè in essa pongonsi quelle determinate coordinate x, y, z invece di p, q, r; e che parimente si conservino tali le due differenziali parziali del primo ordine della stessa equazione: bisognerà cioè che siano verificate queste tre equazioni

$$z = F(x, y);\ \left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dF}{dx}\right);\ \left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{dF}{dy}\right).$$

E questa è la proprietà analitica di una superficie tangente di un' altra.

La proprietà poi Geometrica è, che nessuna altra superficie dell' equazione $s = \varphi(t, v)$ può passare tra quella prima superficie e la sua tangente se non è anche per essa

$z = \varphi(x, y)$, $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)$, vale a dire se non gode ancora essa della medesima proprietà analitica dell' altra.

Ciò si dimostra avvertendo che D non contenendo le potenze lineari di ω, θ, potranno per ω e θ prendersi tali frazioni che questa quantità D divenga minore di una simile quantità appartenente a qualunque altra data superficie per la quale non si annullino i termini moltiplicati per ω e per θ: non potrà allora quest' altra superficie passare tra le due prime; la qual cosa non avverrà più, se anche per tal superficie si annulleranno i termini i quali contengono le potenze lineari di ω e di θ.

Quando dunque nella superficie data $r = F(p, q)$ si hanno tre parametri a, b, c da determinarsi, noi li potremo determinare in maniera che restino soddisfatte queste tre equazioni

$z = F(x, y)$, $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dF}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{dF}{dy}\right)$ ed allora la superficie data sarà tangente di quella $z = f(x, y)$ nel punto corrispondente alle coordinate x, y.

Le tre equazioni precedenti sono la stessa equazione della superficie data, nella quale si cangiano p, q, r in x, y, z, e le due differenziali parziali della medesima; in generale dunque rappresentando per $F(p, q, r) = o$ l' equazione di una superficie data, e per z, y, x le coordinate di un' altra superficie proposta che debbe essere toccata dalla prima nel punto corrispondente a quelle coordinate, dovranno essere verificate queste tre equazioni.

$$F(x, y, z) = o,\ \left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dF}{dz}\right) = o,\ \left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dF}{dz}\right) = o,$$

ciò che ci somministrerà i valori dei tre parametri a, b, c, espressi in x, y, z, $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$.

§. 308. Estendiamo lo sviluppo delle funzioni, la cui differenza eguaglia la distanza D, sino ai termini delle terze dimensioni degli aumenti ω, θ, e supponendo che i coefficienti delle prime dimensioni si annullino, avremo

$$\mathrm{D} = \frac{\omega^2}{2}\left\{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^2\mathrm{F}}{dx^2}\right)\right\} + \omega\theta\left\{\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) - \left(\frac{d^2\mathrm{F}}{dxdy}\right)\right\} +$$

$$\frac{\theta^2}{2}\left\{\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - \left(\frac{d^2\mathrm{F}}{dy^2}\right)\right\} + \omega^3\mathrm{P} + \omega^2\theta\mathrm{Q} + \omega\theta^2\mathrm{R} + \theta^3\mathrm{S},$$ essendo P, Q ec., i coefficienti delle terze dimensioni che sonosi trovati al §. 37.

Se dunque l' equazione $r = \mathrm{F}(p, q)$ della superficie è tale, che oltre aver soddisfatte quelle tre equazioni, si possa ancora soddisfare alle altre tre

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2\mathrm{F}}{dx^2}\right), \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) = \left(\frac{d^2\mathrm{F}}{dxdy}\right), \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2\mathrm{F}}{dy^2}\right),$$ i termini del secondo ordine dispariranno dal valore di D, e proveremo facilmente che si potranno sempre dare ad ω e θ, dei valori così piccoli, che la distanza D sia minore di una simile distanza Δ appartenente a qualunque altra superficie data, la quale non soddisfaccia alle stesse condizioni. Sarà dunque impossibile, che questa superficie passi tra le superficie delle equazioni $r = \mathrm{F}(p, q)$, $z = f(x, y)$, dopo avere avuto con esse lo stesso punto comune.

La superficie allora dell' equazione $r = \mathrm{F}(p, q)$ ha un contatto che dicesi di secondo ordine con la superficie $z = f(x, y)$, ed ha il nome di superficie osculatrice.

Si può continuare lo stesso discorso per l' annullamento degli altri termini nel valore di D.

In generale se rappresentiamo per $\mathrm{F}(p, q, r) = 0$ l' equazione della superficie data, onde questa abbia un contatto di secondo ordine con una superficie qualunque $z = f(x, y)$ nel punto corrispondente alle coordinate x, y, dovremo soddisfare a sei equazioni cioè alla $\mathrm{F}(x, y, z) = 0$, alle due di lei differenziali parziali del primo ordine, ed alle tre di lei differenziali parziali del secondo: è per questo necessario che essa

contenga sei parametri indeterminati, onde si determinino in modo da soddisfare a quelle equazioni.

Perchè la superficie data avesse un contatto di terzo ordine converrebbe che contenesse dieci parametri indeterminati, e che si determinassero in maniera da soddisfare a dieci equazioni: cioè alle sei quì sopra annoverate, ed alle quattro differenziali parziali del terzo ordine della $\mathrm{F}(x, y, z) = 0$; e così di seguito.

§. 309. Paragoniamo la superficie di una sfera con una superficie qualunque.

L' equazione della sfera

$(p - a)^2 + (q - b)^2 + (r - c)^2 - h^2 = 0$, contiene quattro parametri a, b, c, h dei quali a, b, c danno la posizione del centro, h la grandezza del raggio.

Essa dunque può avere con una curva qualunque un contatto di primo ordine, determinandone tre opportunamente; non può però divenire osculatrice; imperocchè ci vorrebbero allora sei parametri da determinarsi.

Secondo quanto abbiamo detto al §. antecedente, poniamo nell' equazione della sfera x, y, z invece di p, q, r, ed avremo

$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - h^2 = 0$, le di cui differenziali parziali del primo ordine sono

$$x - a + \left(\frac{dz}{dx}\right)(z - c) = 0,$$

$$y - b + \left(\frac{dz}{dy}\right)(z - c) = 0:$$

se noi determiniamo le tre costanti a, b, c per mezzo di queste tre equazioni, avremo

$$a = x + \frac{h\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}},$$

$$b = y + \frac{h\left(\frac{dz}{dy}\right)}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}},$$

$$c = z - \frac{h}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}},$$

ed il raggio h rimane arbitrario.

Si può dunque sempre avere una sfera di qualsisia raggio, tangente di una qualunque superficie. Quel raggio sarà perpendicolare alla stessa superficie, di modo che riguardando questo raggio come indeterminato, le tre quantità a, b, c saranno le coordinate della perpendicolare alla superficie medesima nel punto corrispondente alle coordinate x, y, z. L' equazioni poi di questa perpendicolare saranno

$$a - x + (c - z)\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0,$$

$$b - y + (c - z)\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0.$$

Onde la sfera divenisse osculatrice, dovremmo soddisfare ad altre tre equazioni, cioè alle differenziali parziali del secondo ordine dell' equazione alla sfera, per il che ci abbisognerebbero altri tre parametri da determinarsi, e non ne abbiamo che il solo raggio h. E' dunque impossibile di trovare in generale una sfera osculatrice di una superficie.

Se invece di una sfera noi prendessimo a considerare la superficie formata dalla rotazione di un arco di circolo attorno della sua corda, siccome allora nell' equazione di questa superficie sarebbero sei costanti arbitrarie, così si avrebbero in questo caso gli elementi necessarj onde far sì che siffatta superficie fosse osculatrice di una superficie qualunque.

Siccome non è possibile ritrovare tra tutte le sfere tangenti di una superficie, una sfera che ne sia osculatrice, limitiamoci a determinare quella sfera che sarà osculatrice di una curva qualunque disegnata sopra la medesima superficie. Basterà

per questo che noi supponiamo y funzione di x, come nelle curve a doppia curvatura, e prendiamo in questa supposizione le equazioni differenziali prima e seconda dell' equazione della sfera

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = h^2.$$

La differenziale prima è

$$x - a + \left(\frac{dy}{dx}\right)(y - b) + \left\{\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\right\}(z - c) = 0,$$

e la seconda è

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)(y - b) + \left\{\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\right\}^2 + \left\{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\right\} \times (z - c) = 0:$$

si avverta che nel differenziare abbiamo considerato z funzione di x, y, mentre y è anche esso funzione di x; così la differenziale di z, rapporto ad x e divisa per dx, è

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

La differenziale prima è soddisfatta da che sono soddisfatte le due differenziali parziali del primo ordine

$$x - a + \left(\frac{dz}{dx}\right)(z - c) = 0, \quad y - b + \left(\frac{dz}{dy}\right)(z - c) = 0,$$

e solo ci rimane da soddisfare alla differenziale seconda, la quale essendo

$y - b + \left(\frac{dz}{dy}\right)(z - c) = 0$, si riduce a questa

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left\{\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\right\}^2 + \left\{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right\}(z - c) = 0:$$

se ora sostituiamo in quest' ultima equazione il valore di c, e ne ricaviamo quindi il valore di h, avremo

$$h = \frac{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left[\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) \right]^2 \right\} \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}}{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)}.$$

Conosceremo in questa maniera ed il raggio della sfera tangente della superficie curva e nel tempo stesso osculatrice di una curva disegnata sopra quella superficie. Determinato poi il raggio, saranno determinate in conseguenza anche le coordinate a, b, c del centro per mezzo delle formule trovate sopra.

§. 310. Siccome la projezione della curva disegnata sopra la superficie è arbitraria, proponiamoci di determinarla in tal guisa che il valore del raggio h sia un massimo o un minimo. L' espressione di h contiene $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ il cui valore dipende da quella projezione: il problema dunque si riduce a trovare per $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ una tal funzione di x che renda h massimo o minimo.

Eguaglieremo dunque a zero la differenziale di h riguardata come funzione di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, ed avremo l' equazione necessaria per risolvere il problema. Se poi noi osserviamo che $h = (z - c)\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}$, e che in conseguenza il massimo o minimo di h, relativamente a $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, corrisponde al massimo o minimo di c, potremo semplificare il calcolo prendendo la differenziale prima dell' equazione del §. antecedente tra c e $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ a riguardo di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, ed eguagliando a zero il valore della differenziale della quantità c.

In questa guisa avremo

$$(e) \ldots\ldots \left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left\{\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\right\} + \left\{\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right\}(z - c) = 0,$$

la quale combinata con l' equazione medesima da cui è stata dedotta, servirà a determinare $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, e c.

Infatti moltiplicando l' equazione (e) trovata per $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ e sottraendola dall' altra, otteniamo questa equazione più semplice

$$1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) + \left\{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)\right\}(z - c) = 0,$$

che combinata con la (e) per eliminare $z - c$, ci dà per $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ un' equazione di questa forma

$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B\left(\frac{dy}{dx}\right) - C = 0$, nella quale

$$A = \left\{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) - \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right),$$

$$B = \left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - \left\{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right),$$

$$C = \left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) - \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right);$$

risolvendo questa equazione, avremo

$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{B \pm \sqrt{(B^2 + 4AC)}}{2A}$, che è un' equazione differenziale del primo ordine in x, y e $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, imperocchè z è una funzione data in x, y dalla natura della superficie toccata: l' integrale completo pertanto conterrà una costante arbitraria, e rappresenterà una infinità di curve, le quali saranno le projezioni delle linee della massima e minima curvatura di una proposta superficie.

Per avere adesso il valore del raggio, basterebbe sostituire il valore di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ nella di lui espressione, ma si può trovare anche così:

Moltiplicata l' equazione (e) per $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)$, da essa si sottri l' altra equazione che segue, moltiplicata per $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$, e dal residuo ricavandone il valore di $z - c$, avremo

$$z - c = \frac{\left\{ 1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \right\} \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) - A\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) - \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)},$$

ove sostituendo il valore di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ e facendo per semplicità

$$E = \left\{ 1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \right\} \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) + \left\{ 1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 \right\} \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right),$$

avremo

$$z - c = \frac{E \pm \sqrt{(B^2 + 4AC)}}{2\left\{ \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 \right\}}, \text{ e quindi}$$

$$h = \frac{\left\{ E \pm \sqrt{(B^2 + 4AC)} \right\} \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}}{2\left\{ \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 \right\}}, \text{ dal che si rile-}$$

va che il doppio segno del radicale ci dà per h due valori, massimo l'uno, minimo l'altro.

Dunque in ciascun punto di una superficie curva sonovi due rami che si segano, e corrispondono uno alla linea della massima curvatura, l'altro alla linea della minima, e l'angolo con cui si tagliano, dipende dal doppio valore di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, il quale eguaglia la tangente dell'angolo formato con l'asse degli x dalla tangente della projezione sopra il piano delle x, y.

Ora la projezione di questo piano essendo arbitraria, possiamo determinarla in tal guisa, che esso divenga parallelo al piano tangente: allora le due tangenti delle projezioni diverranno parallele alle tangenti dei due rami della massima e minima curvatura; quindi l'angolo col quale si segano le tangenti delle projezioni, eguaglierà quello, col quale si segano le tangenti dei detti due rami. Se dunque indichiamo per α, β i due valori di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, essendo l'angolo di cui si tratta la differenza tra gli angoli, che quelle due tangenti fanno con lo stesso asse degli x, avremo dalla trigonometria la di lui tangente

$$= \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta} = \frac{\sqrt{(B^2 + 4AC)}}{A - C}.$$

Affinchè poi il piano tangente di una superficie sia parallelo al piano degli x, y, conviene che $\left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dy}\right)$ siano nulli: avremo allora

$A = \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)$, $B = \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, $C = \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)$, ciò che dà

$A - C = 0$: questa tangente dunque sarà infinita.

Di quì si ricava una bellissima proprietà delle linee della massima e minima curvatura: *tali curve si segano sempre ad angolo retto*.

Un' altra singolare proprietà di queste curve è che esse sono la sviluppante della loro curva dei centri di curvatura, questa essendone la sviluppata; e che in una superficie qualunque le sole linee della massima e della minima curvatura sono quelle che hanno una sviluppata formata dai raggi di curvatura. Non ci fermiamo a dimostrare queste proprietà, e rimandiamo i Lettori all' Opera citata al §. 302, ed all' *Applicazione dell' Analisi alla generazione delle superficie curve* del C. Monge.

CAP. XIV.

Continuazione dello stesso Soggetto.

§. 311. Data una superficie espressa dall' equazione $F(p, q, r) = 0$, abbiamo sopra veduto come possiamo determinarne i parametri, onde essa abbia un contatto di un certo ordine con un' altra data superficie, rappresentata dall' equazione $f(x, y, z) = 0$, nel punto corrispondente alle coordinate x, y, z. Diciamo ora qualche cosa di quei problemi nei quali si cerca l' equazione di una superficie, la quale debbe esser toccata da un' altra con un contatto di un certo ordine, e tra gli elementi di questo contatto regnar debbe un dato rapporto. Questi problemi conducono naturalmente ad equazioni a differenziali parziali, come ora vedremo.

Siano a, b, c tre elementi del contatto del primo ordine, e cerchisi l' equazione $f(x, y, z) = 0$ di una superficie curva, la quale sarà toccata da un' altra dataci dall' equazione $F(p, q, r, a, b, c) = 0$ con un contatto di primo ordine, essendo tra gli elementi del contatto questa equazione $\varphi(a, b, c) = 0$.

Se noi supponiamo data la curva che si cerca, ricaveremo i valori di a, b, c dalle tre equazioni

$$F(x; y, z, a, b, c) = 0,$$

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dF}{dz}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dF}{dz}\right) = 0$$

in funzioni di x, y, z, $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, di modo che sostituendoli

in $\varphi(a, b, c) = 0$, ci verrà un' equazione a differenze parziali del primo ordine, che sarà l' equazione dalla quale dipende il problema; dovremo dunque integrare siffatta equazione, ed il di lei integrale ci darà la superficie, la quale gode della voluta proprietà.

Intanto noi osserviamo che essendovi tre sorte di equazioni (§. 285.) le quali soddisfanno ad un' equazione a differenziali parziali, o che ne sono gl' integrali, in tre maniere risolver potremo il problema, o ci saranno tre superficie curve idonee a risolverlo.

Se la relazione tra gli elementi del contatto voluta dal problema, è soltanto tra questi elementi, non trovandosi nell' equazione nè x, nè y, nè z; allora ne è assai più facile la soluzione.

Infatti sia $\varphi(a, b, c) = 0$ l' equazione tra gli elementi del contatto; se ricavando da essa il valore di c in funzione di a e di b, si ha $c = \Psi(a, b)$, e si sostituisce in $F(x, y, z, a, b, c) = 0$, avremo l' equazione $F(x, y, z, a, b, \Psi(a, b)) = 0$, la quale risolverà il problema supponendo a, b due costanti arbitrarie qualunque: essa infatti soddisfà alla stessa equazione ai differenziali parziali, dalla quale dipende la soluzione del quesito. Tale equazione sarà dunque il di lei integrale completato con due costanti arbitrarie a, b.

Ottenuto questo integrale, ne ricaveremo un altro completato con una funzione arbitraria, e potremo in seguito avere una soluzione particolare.

Se rappresentiamo il primo integrale completo semplicemente per $F(x, y, z, a, b) = 0$, si ha (§. 123.) l' integrale completato da una funzione arbitraria facendo $b = fa$, e prendendo per a una tal funzione di x, y, z, che soddisfaccia a quest' equazione

$\left(\frac{dF}{da}\right) + \left(\frac{df}{da}\right)\left(\frac{dF}{df}\right) = 0$: allora $F(x, y, z, a, fa) = 0$, sarà l' integrale completato dalla funzione arbitraria fa.

In generale questo integrale è rappresentato dal sistema delle due equazioni

$$\begin{cases} F(x,y,z,a,fa)=0, \\ \left(\frac{dF}{da}\right)+\left(\frac{df}{da}\right)\left(\frac{dF}{df}\right)=0, \end{cases}$$

e risulta dall' eliminazione della quantità a.

Per la soluzione particolare, sarà questa il risultato dell' eliminazione di a e di b per mezzo di queste tre equazioni

$F(x,y,z,a,b)=0$,

$\left(\frac{dF}{da}\right)=0$, $\left(\frac{dF}{db}\right)=0$: egli dunque sarà in generale il sistema di tre equazioni. Onde averlo espresso da un' equazione sola, conviene ricavare dalle due ultime equazioni i valori di a e di b espressi per x, y, z e sostituirli nella prima.

Avremo in questa maniera tre equazioni che risolvono il problema, e perciò tre superficie curve diverse. Vedremo i rapporti geometrici che queste hanno tra loro.

§. 312. Ad una equazione a differenze parziali del primo ordine $V=0$ soddisfanno tre equazioni, una contenente due costanti arbitrarie, l' altra contenente una funzione arbitraria, e la terza non contenente nè costanti nè funzioni; e supponendo $F(x,y,z,a,b)=0$ la prima di queste equazioni, la seconda è $F(x,y,z,a,fa)=0$, essendo a una funzione di x, y, z dataci dall' equazione

$\left(\frac{dF}{da}\right)+\left(\frac{df}{da}\right)\left(\frac{dF}{df}\right)=0$; e la terza $F(x,y,z,a,b)=0$ prendendo per a, b due funzioni in x, y, z dateci dalle due equazioni $\left(\frac{dF}{da}\right)=0$, $\left(\frac{dF}{db}\right)=0$.

Indichiamo per s, t i valori di a, b, e siano le tre equazioni suddette

(1) . . . . . $F(x,y,z,a,b)=0$,

(2) . . . . . $F(x,y,z,s,fs)=0$,

(3) . . . . . $F(x,y,z,s,t)=0$.

La prima è l' integrale completato con due costanti arbitrarie, che chiameremo *Integrale completo*; la seconda è l' integrale completato con una funzione arbitraria fs di s, ed a questo daremo il nome di *Integrale generale*; e la terza è la soluzione particolare. Ciascuna di queste tre equazioni dà per z, per $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ e per $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ tali valori che soddisfanno alla medesima equazione $V=0$.

Abbiasi dall' equazione (1)

$z=\Psi(x,y,a,b)$,

$\left(\frac{dz}{dx}\right)=\Psi'(x,y,a,b)$,

$\left(\frac{dz}{dy}\right)=\Psi_{,}(x,y,a,b)$, e l' equazione (2) ci darà egualmente

$z=\Psi(x,y,s,fs)$,

$\left(\frac{dz}{dx}\right)=\Psi'(x,y,s,fs)$,

$\left(\frac{dz}{dy}\right)=\Psi_{,}(x,y,s,fs)$, giacchè la natura della s è tale che i termini portati dalla di lei variazione si annullano da se medesimi.

L' equazione (3) ci darà poi

$z=\Psi(x,y,s,t)$,

$\left(\frac{dz}{dx}\right)=\Psi'(x,y,s,t)$,

$\left(\frac{dz}{dy}\right)=\Psi_{,}(x,y,s,t)$, annullandosi da se medesimi i termini portati dalla variazione di t e di s.

Ora se noi volessimo determinare i coefficienti di un piano tangente della superficie rappresentata dall'equazione (1) nel punto corrispondente alle coordinate x, y, z, sarebbero questi coefficienti altrettante funzioni conosciute di x, y, a, b, di modo che se quel piano fosse rappresentato da $r = A + Bp + Cq$, si avrebbe (§. 306.)

$$A = z - x\left(\frac{dz}{dx}\right) - y\left(\frac{dz}{dy}\right) = \Psi(x, y, a, b) - x\Psi'(x, y, a, b) - y\Psi_{,}(x, y, a, b),\ B = \left(\frac{dz}{dx}\right) = \Psi'(x, y, a, b),\ C = \left(\frac{dz}{dy}\right) = \Psi_{,}(x, y, a, b).$$

Nella medesima guisa gli elementi, onde il piano fosse tangente della superficie rappresentata dall'equazione (2) nel punto corrispondente alle coordinate x, y, z, sarebbero

$$A = \Psi(x, y, s, fs) - x\Psi'(x, y, s, fs) - y\Psi_{,}(x, y, s, fs),$$
$$B = \Psi'(x, y, s, fs),\quad C = \Psi_{,}(x, y, s, fs):$$ vale a dire i medesimi che i ritrovati superiormente, dando alle arbitrarie a, b i valori s e fs.

Dunque di tutte le superficie rappresentate dall'integrale completo, dando ad a, b dei valori particolari costanti, quella la quale corrisponde alla determinazione $b = fa$, { essendo $a = s$, cioè eguale ad una data funzione delle coordinate nel punto del contatto, funzione che è costante in tutta l'estensione della superficie } ha lo stesso piano tangente nel punto corrispondente ad x, y, z, che la superficie rappresentata dall'integrale generale: queste due superficie dunque si toccano tra loro: dunque la superficie dell'integrale generale sarà toccata in ciascun punto da una delle superficie dell'integrale completo: da quella cioè per la quale le costanti a, b sono s, fs, vale a dire funzioni determinate delle coordinate nel punto del contatto, e le quali come abbiamo detto, si mantengono costanti per tutta l'estensione della superficie toccante, e solo variano da una superficie toccante all'altra.

Ora tra gl'infiniti punti che ponno considerarsi nella superficie rappresentata dall'integrale generale $F(x, y, z, s, fs) = 0$, debbono esservene di quei nei quali, per quanto le coordinate x, y, z siano diverse, la quantità però s resterà la medesima (gli aumenti portati da una ordinata compensando i decrementi portati dall'altra) di modo che sopra questa superficie dovrà esservi una linea per la quale il valore di s sarà sempre lo stesso; dunque per tutto il tratto di questa linea, la superficie dataci dall'integrale generale, sarà toccata da una delle superficie dateci dall'integrale completo, cioè da quella in cui le costanti a, b si fanno s, fs.

La posizione di questa linea di contatto tra queste due superficie, ci è data dall'equazione

$\left(\frac{dF}{da}\right) + \left(\frac{df}{da}\right)\left(\frac{dF}{df}\right) = 0$, la quale contiene la condizione che a si mantenga costante.

Ma l'equazione $\left(\frac{dF}{da}\right) + \left(\frac{df}{da}\right)\left(\frac{dF}{df}\right) = 0$, essendo tra le variabili x, y, z, esprime ancora essa una superficie; dunque l'intersezione di questa superficie con quella dataci dall'equazione $F(x, y, z, a, fa) = 0$, ci darà la linea nella quale la superficie dell'integrale generale e quella dell'integrale completo si toccheranno.

Dunque l'integrale completo $F(x, y, z, a, fa) = 0$ ove a è costante, ci darà col variarne successivamente il valore, una infinità di superficie successive, delle quali ciascuna avrà una linea di contatto con la superficie rappresentata dall'integrale generale; ed è facile concepire che queste linee di contatto saranno l'intersezioni mutue delle medesime superficie, e che quindi la superficie rappresentata dall'integrale generale sarà essa medesima formata da tutte queste successive intersezioni.

Con lo stesso ragionamento dimostreremo che la superficie della soluzione particolare $F(x, y, z, s, t) = 0$, e quella dell'integrale completo $F(x, y, z, a, b) = 0$, hanno lo stesso piano tangente nel punto corrispondente alle coordinate

x, y, z, se alle due costanti noi diamo i valori s, t, i quali sono funzioni determinate dalle stesse coordinate al punto del contatto, e si mantengono costanti in tutta l' estensione della superficie dell' integrale completo.

Dunque la superficie della soluzione particolare in qualunque di lei punto, è toccata da una delle superficie dell' integrale completo, da quella cioè ove i parametri a, b sono s, t. Le due superficie si toccheranno in un punto unico, poichè le tre superficie rappresentate dalle equazioni $F(x, y, z, a, b) = 0$, $(\frac{dF}{da}) = 0$, $(\frac{dF}{db}) = 0$ non ponno avere che un solo punto comune.

Assegnati poi due valori qualunque ai parametri a, b, si potranno sempre trovare i valori di x, y, z espressi in a, b, i quali corrispondono al punto di contatto tra quelle due superficie; di modo che la superficie della soluzione particolare sarà toccata da tutte le superficie rappresentateci dall' integrale completo, dando ad a, b dei valori qualunque. Non vi sarà però che un solo punto di contatto tra la soluzione particolare ed una delle superficie dell' integrale completo.

Segue da tutto questo che la superficie dell' integrale particolare si potrà riguardare come l' intersezione mutua e continua di tutte le superficie dell' integrale completo, ottenute col far variare successivamente le costanti a, b.

Ed ecco spiegati i diversi rapporti Geometrici che hanno tra loro gli integrali delle equazioni a differenziali parziali.

§ 313. Nel Num° XVII. dell' Appendice noi abbiamo data l' equazione delle superficie Cilindriche, deducendola dalla maniera con la quale sono generate: per far alcuna applicazione delle cose dette sopra, troviamo l' equazione di questa famiglia di superficie, considerando la proprietà, che aver debbe un piano che ne sia tangente.

Rammentiamo la genesi delle superficie Cilindriche „ Data nello spazio una qualunque linea retta, se c' immaginiamo un' altra retta, cui si dà il nome di *generatrice*, la quale si muova nello spazio, restando però sempre parallela alla data, e che lasci in questo movimento continua traccia

„ del suo passaggio, verrà a descriversi una superficie curva, „ e tutte le superficie generate in questa guisa hanno il nome „ di superficie *cilindriche* „.

Per poco che si rifletta sopra la natura delle superficie cilindriche, si concepirà che un carattere distintivo di esse si è „ che un piano tangente in qualunque punto di esse, è sempre „ parallelo alla retta generatrice „.

Se dunque prendiamo $s = mt$, $v = nt$ per le equazioni di una retta (s, v, t sono le coordinate corrispondenti ad x, y, z) che passa per l' origine, cui la generatrice esser debbe parallela, anche il piano sarà parallelo ad una tal retta.

Siano x, y, z le coordinate del punto del contatto tra il piano e la superficie: siano p, q, r le coordinate del piano tangente, e la di lui equazione $r = a + bp + cq$ diverrà

$$r - z = (p - x)(\tfrac{dz}{dx}) + (q - y)(\tfrac{dz}{dy}).$$

Il piano di questa equazione sarà parallelo se trasportato parallelamente a se stesso sino a passare per l' origine, coinciderà allora con quella retta data.

Perchè il piano passi per l' origine bisogna che la sua equazione sia tale che fatti $p = 0$, $q = 0$, ne venga $r = 0$: l' equazione dunque diverrà

$r = p(\frac{dz}{dx}) + q(\frac{dz}{dy})$: ma dovendo allora questo piano coincidere con la retta, dovrà l' equazione sussistere se invece di r, p, q poniamo le coordinate della retta data s, v, t: avremo dunque

$t = s(\frac{dz}{dx}) + v(\frac{dz}{dy})$, ove ponendo per s, v i respettivi valori, si avrà

$1 = m(\frac{dz}{dx}) + n(\frac{dz}{dy})$, equazione a differenziali parziali, dall' integrazione della quale dipende la soluzione del problema.

Ora osservo che essendo $(\frac{dz}{dx}) = b$, $(\frac{dz}{dy}) = c$, il problema si ridurrà a questo „ Trovare una superficie tale, che il

„ piano tangente in un qualunque suo punto, abbia tra i coefficienti c, b quest' equazione $1 = mb + nc$, essendo esso rappresentato da $r = a + bp + cq$ „.

Secondo ciò che abbiamo dimostrato al §. 311, ricaviamo da quell' equazione di condizione il valore di c, e sostituito nell' equazione del piano, avremo

$z = a + bx + \frac{1-mb}{n} y$, che sarà l' integrale completo di quell' equazione a differenziali parziali; così il piano dell' equazione quì trovata, soddisfà alla questione.

Per aver l' integrale generale, poniamo $b = fa$, e quest' integrale si otterrà eliminando a da queste due equazioni

$$z = a + xfa + \frac{1-mfa}{n} y,$$

$$0 = 1 + x\left(\frac{df}{da}\right) - \frac{ym}{n}\left(\frac{df}{da}\right).$$

La seconda di queste equazioni ci mostra che è $a = \varphi(nx - my)$ indicando per φ una funzione arbitraria della quantità tra le parentesi.

Ridotta poi la prima equazione a questa forma $nz - y = na + (nx - my) fa$, si vede che il secondo membro sarà una funzione arbitraria di $nx - my$, ed in conseguenza avremo $nz - y = \Psi(nx - my)$, equazione che rappresenterà l' integrale generale di quella ai differenziali parziali.

Non vi è poi soluzione particolare; così il problema è solo risoluto dalle due superficie espresse da queste equazioni

$$z = a + bx + \frac{1-mb}{n} y,$$

$$nz - y = \Psi(nx - my).$$

Questa seconda equazione si riduce facilmente a quella trovata al numero citato dell' Appendice.

Se noi facciamo $b = fa$, le due equazioni

$$z = a + xfa + \frac{1-mfa}{n} y,$$

$nz - y = \Psi(nx - my)$, sono tali

1°. Che la superficie rappresentata dalla seconda equazione è toccata per l' estensione di una linea retta da una delle superficie rappresentate dalla prima, cioè da uno di quei piani, da quello cioè che si ha, dando ad a il valore che soddisfà all' equazione

$1 + x\left(\frac{df}{da}\right) - \frac{ym}{n}\left(\frac{df}{da}\right) = 0$, e che si mantiene costante per tutta l' estensione del piano medesimo.

2°. Che questa linea di contatto è l' intersezione dei piani rappresentati da queste due equazioni

$$z = a + xfa + \frac{1-mfa}{n} y,$$

$0 = 1 + x\left(\frac{df}{da}\right) - \frac{ym}{n}\left(\frac{df}{da}\right)$, intersezione che facilmente si vede essere sempre parallela alla linea data, o alla retta generatrice.

3°. Che la superficie espressa dall' integrale completo, cioè la superficie cilindrica, è formata dalle successive e continue intersezioni, che hanno tra loro i piani datici dall' integrale completo facendo variare successivamente il parametro a.

Tutto questo risulta da quanto abbiamo detto al §. antecedente. E quì faccio osservare che l' analisi stessa maravigliosamente ci spiega la genesi delle superficie cilindriche; di modo che avendole dedotte dietro la proprietà del piano tangente, ricavata ne abbiamo la maniera di descriverle, che è quella stessa stabilita a principio.

Relativamente alle superficie cilindriche, si può ricercare l' equazione di quella superficie cilindrica, che generata da una retta data di posizione, abbraccia o inviluppa una superficie data.

Per trovare una tale equazione osservo che la superficie cilindrica e la data superficie si toccheranno in una linea a doppia curvatura, che determinate l' equazioni di questa linea, il problema sarà ridotto a trovare una superficie cilindrica, che passa per una data linea a doppia curvatura, e questo problema è risoluto nell' Appendice Numᵒ. XVII.

Sia $F(x, y, z) = 0$ l' equazione della superficie data: è manifesto che questa superficie e la cilindrica avranno lo stesso piano tangente in tutti i punti della linea a doppia curvatura poichè ivi si toccano: se dunque ricaviamo dall' equazione della superficie toccata i valori di $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ e li sostituiamo nell' equazione differenziale delle superficie cilindriche $1 = m\left(\frac{dz}{dx}\right) + n\left(\frac{dz}{dy}\right)$, avremo un' equazione in x, y, z cioè $f(x, y, z) = 0$, che apparterrà alla curva del contatto. Ora trovandosi questa curva disegnata sopra la superficie data, ha luogo per essa anche l' equazione di quella superficie; dunque $F(x, y, z) = 0$, $f(x, y, z) = 0$, saranno le equazioni che determinano la curva a doppia curvatura, per la quale passar debbe la superficie cilindrica, onde abbracci e tocchi la superficie data.

§. 314. Da ciò che noi abbiamo detto al §. 312 risulta che data una equazione di una superficie curva $F(x, y, z, a, fa) = 0$ nella quale a rappresenta un parametro ed fa è una funzione di esso, se supponiamo che a prenda successivamente tutti i valori possibili da $a = \infty$ sino ad $a = -\infty$, si avrà una serie infinita di superficie, le quali tutte saranno abbracciate da una superficie comune, la cui equazione è $F(x, y, z, s, fs) = 0$, s essendo il valore di a datoci dall' equazione $\left(\frac{dF}{da}\right) + \left(\frac{df}{da}\right) \times \left(\frac{dF}{df}\right) = 0$, ovvero la cui equazione è il risultato dell' eliminazione del parametro a per mezzo delle due equazioni

(1) . . . . . $F(x, y, z, a, fa) = 0$,

(2) . . . . . $\left(\frac{dF}{da}\right) + \left(\frac{df}{da}\right)\left(\frac{dF}{df}\right) = 0$.

Questa superficie inviluppante tocca ciascuna delle inviluppate in una linea, che è l' intersezione delle due superficie rappresentate da queste due ultime equazioni (1), (2).

Questa curva di contatto è dal Geometra Monge chiamata la *caratteristica* della inviluppante; ed una tal superficie si può riguardare, per dir così, come composta delle infinite caratteristiche, ciascuna delle quali è la curva del contatto tra un' inviluppata e l' inviluppante comune. Se tra le due equazioni (1), (2) si elimina y si ha un' equazione $\Psi(x, z, a) = 0$, che è la projezione della caratteristica sul piano degli x, z; e se si elimina x, si ottiene un' equazione $\varphi(y, z, a) = 0$, che ne è la projezione sopra il piano degli y, z. Dando poi ad a differenti valori, si avranno le equazioni delle differenti caratteristiche, delle quali quì sopra abbiam parlato.

Se nella curva piana dell' equazione $\Psi(x, z, a) = 0$ facciamo che a prenda successivamente diversi valori, s' avranno diverse curve piane, le quali con le loro successive intersezioni formeranno un' altra curva. Questa curva avrà la proprietà di toccarle tutte, e sarà l' inviluppante, della quale ciascuna projezione è l' inviluppata. Lo stesso dicasi per l' altra equazione $\varphi(z, y, a) = 0$. L' equazione di una inviluppante si ha eliminando a dall' equazione della inviluppata per mezzo della di lei differenziale presa per rapporto ad a.

Ora siccome due intersezioni corrispondenti alle stesse coordinate nelle quattro projezioni di due curve a doppia curvatura, danno un punto d' intersezione di queste due linee; e le tangenti di due projezioni sono anche le projezioni della tangente della curva a doppia curvatura, quindi è che quelle intersezioni continue delle projezioni delle caratteristiche, daranno una continuata intersezione delle caratteristiche stesse, dalla quale nascerà una curva a doppia curvatura che toccherà tutte le caratteristiche, e sarà la loro inviluppante. Le projezioni di questa curva poi saranno le due inviluppanti delle projezioni delle caratteristiche; così le equazioni della inviluppante delle caratteristiche saranno

$\Psi(x, z, a) = 0$, $\left(\frac{d\Psi}{da}\right) = 0$,

$\varphi(y, z, a) = 0$, $\left(\frac{d\varphi}{da}\right) = 0$.

Eliminando a tra le due prime equazioni, si avrà la projezione della inviluppante delle caratteristiche sopra il piano delle x, z; si avrà l' altra projezione facendo lo stesso nelle due ultime equazioni.

Siccome le equazioni (1), (2) hanno condotto alle altre due $\Psi = 0$, $\varphi = 0$, così invece delle quattro equazioni quì ritrovate, potremo prendere le suddette (1), (2), e le loro differenziali relativamente ad a, di modo che scrivendo per maggior comodo $F = 0$, $\frac{dF}{da} = 0$ invece delle espressioni (1), (2), ed osservando che la differenziazione dell' equazione (1) produce la stessa equazione (2), avremo queste tre equazioni

$F = 0$, $\frac{dF}{da} = 0$, $\frac{d^2F}{da^2} = 0$, le quali terranno il luogo di quelle quattro, e rappresenteranno la inviluppante delle caratteristiche.

Eliminando a tra queste equazioni, si hanno l' equazioni di due superficie curve, la cui intersezione sarà quell' inviluppante. A questa inviluppante, che come abbiam detto, è formata dalla successiva intersezione delle caratteristiche, le tocca tutte ed è da tutte toccata, il Geometra Monge dà il nome di *arête de rebroussement*, che vale per noi *spigolo di regresso*.

Osserviamo che nell' equazione generale $F = 0$ si trova una funzione fa di un parametro a, e dando alla funzione delle forme diverse, si avranno anche delle superficie inviluppanti diverse, delle caratteristiche diverse, e degli spigoli di regresso diversi.

Queste diverse quantità hanno respettivamente delle proprietà comuni, le quali ci forniscono l' equazioni, che generalmente le esprimono indipendentemente dalla natura della funzione fa. Queste equazioni sono alle differenziali parziali.

Spiegheremo meglio le dottrine di questo §. con l' esempio che segue.

§. 315. Supponiamo che nel piano degli x, y sia descritta una curva dell' equazione $b = fa$, a, b corrispondendo ad x, y. In un punto di questa curva siavi il centro di una sfera di raggio h, e la di lei equazione sarà

$(x - a)^2 + (y - fa)^2 + z^2 = h^2$.

Supponiamo che la sfera continuamente si muova, o che il suo centro corra lungo la linea segnata nel piano degli x, y, di modo che il parametro a prenda successivamente diversi valori: il centro si troverà in diversi punti di quella curva piana, e tutte le sfere anderanno successivamente intersecandosi, e comporranno un canale che le inviluppera o toccherà tutte. L' equazione di questa superficie inviluppante le sfere sarà

$(x - s)^2 + (y - fs)^2 + z^2 = h^2$, essendo s una funzione di x, y, z cui è eguale il valore di a ricavato da questa equazione

$(x - a) + (y - fa)\left(\frac{df}{da}\right) = 0$; ovvero essa è il risultato della eliminazione di a per mezzo di queste due equazioni

(2) . . . . . $(x - a) + (y - fa)\left(\frac{df}{da}\right) = 0$,

(1) . . . . . $(x - a)^2 + (y - fa)^2 + z^2 = h^2$.

Il sistema di queste due equazioni esprime tutte le superficie curve sottomesse a questa generazione, ma non si può avere l' equazione di una superficie particolare, senza determinare la forma particolare della funzione fa. Nè ciò potrebbe essere diversamente.

Se nelle equazioni (1), (2) non si riguarda più a come una indeterminata che debba sparire con l' eliminazione, ma come una costante che debbe rimanere, di modo che le due equazioni (1), (2) non siano più riducibili ad una sola, esse allora determinano la natura e la posizione della caratteristica.

L' equazione (2) è quella di una retta normale alla curva dell' equazione $b = fa$ nel punto ove trovasi il centro della sfera: essa rappresenta anche un piano perpendicolare a quello degli x, y, e che passa per la suddetta normale. La caratteristica dunque è un circolo massimo della sfera generatrice, ed è in un piano perpendicolare a quello degli x, y. Il canale pertanto inviluppante quelle infinite sfere, tocca ciascuna di esse in una linea di contatto, che è un circolo massimo della sfera, ed il cui piano è perpendicolare alla curva dell' equazione $b = fa$, la quale curva può riguardarsi come l' asse curvilineo dell' inviluppante medesima.

Indichiamo per (3) l' equazione che nasce dalla differenziale della (2) riguardo ad a. Se nelle tre equazioni (1), (2), (3) si elimina a, riguardata come una indeterminata il valore della quale è indifferente (eliminazione la quale non può eseguirsi che nei casi particolari), si avranno in x, y, z due equazioni, che saranno quelle dello spigolo di regresso. Finchè la forma della funzione f rimane arbitraria, il sistema di quelle tre equazioni rappresenterà lo spigolo di regresso.

Ed ecco come data l' equazione della sfera generatrice, abbiamo trovate le equazioni della inviluppante, della caratteristica, e dello spigolo di regresso. Queste equazioni contengono la funzione arbitraria, da cui dipende il viaggio del centro della sfera generatrice, sopra la qual funzione nulla abbiamo pronunziato. Queste equazioni sono generali per tutte le curve sottomesse alla medesima generazione.

§. 316. Se ora fosse proposto di ritrovare l' equazioni delle superficie dei canali, di cui l' asse è una curva qualunque piana ed orizzontale, e di cui le sezioni perpendicolari a quest' asse sono circoli di raggio costante, facilmente si concepisce che le dimandate equazioni sono quelle delle inviluppanti un numero infinito di sfere, delle quali abbiamo quì sopra parlato.

Noi le abbiamo ritrovate considerando il movimento della sfera generatrice. Cerchiamo ora l' equazioni di siffatti canali per altra via.

La superficie che quì consideriamo essendo l' inviluppante di una serie di sfere del medesimo raggio, è chiaro che il suo piano tangente si confonde col pian tangente della sfera inviluppata, che la tocca nel medesimo punto.

Qualunque poi sia la curva che forma l' asse, l' angolo che il pian tangente della superficie fa coll' orizzontale per un punto di contatto preso ad una certa altezza, debbe dunque essere eguale a quello che fa col medesimo piano orizzontale il

piano tangente ad una delle sfere inviluppate per un punto di contatto preso alla stessa altezza: ora l' equazione del piano tangente essendo (§. 306)

$r = z - x\left(\frac{dz}{dx}\right) - y\left(\frac{dz}{dy}\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)p + \left(\frac{dz}{dy}\right)q$, il coseno dell' angolo che questo piano fa col piano orizzontale è (Appendice Num°. V)

$\cos = \frac{1}{\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}}$; di più essendo h il raggio costante delle sfere inviluppate, ed a, b essendo le coordinate qualunque del centro di una di queste sfere, l' equazione della superficie di questa sfera, sarà

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = h^2.$$

Ricavando ora da questa equazione i valori di $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ e di $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ per sostituirgli nell' espressione del coseno dell' angolo, che il piano tangente di questa sfera fa col piano orizzontale, si troverà

$\cos = \frac{z}{\sqrt{\left\{(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2\right\}}} = \frac{z}{h}$: dunque eguagliando i valori di questi due coseni, nei quali z è la stessa in ambedue, poichè i punti di contatto sono presi alla medesima altezza, avremo

$$(a) \ldots\ldots z^2\left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\} = h, \text{ per l' equazione}$$

generale delle superficie che esaminiamo.

E quì osservo che quest' equazione a differenze parziali, ha per integrale completo la medesima equazione della sfera $(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = h^2$, e per integrale generale il sistema delle equazioni (1), (2) del §. antecedente.

Si vede dunque che la superficie dei canali a sezione circolare è espressa da una sola equazione a differenze parziali, ovvero dal sistema delle due equazioni (1), (2) senza differenziali.

La caratteristica della superficie, cioè la curva di contatto di questa superficie inviluppante con ciascuna delle inviluppate, è in questo caso la linea della massima pendenza della superficie, ovvero, ciò che è lo stesso, di tutte le curve che sono sopra la superficie e passano per lo stesso punto, essa è quella la cui tangente in quel punto fa il massimo angolo col piano orizzontale.

La tangente di questa curva è dunque perpendicolare all' orizzontale condotta nel piano tangente; ed infine la projezione orizzontale di questa tangente è perpendicolare alla traccia orizzontale del pian tangente. Ora x, y, z essendo le coordinate del punto della caratteristica, che è anche il punto del contatto del piano tangente, l' equazione della projezione orizzontale della tangente è

$q - y = (p - x)\left(\frac{dy}{dx}\right)$ essendo p, q le coordinate della medesima.

L' equazione della traccia orizzontale del pian tangente, o dell' intersezione di esso col piano degli x, y, è

$$-z = (p - x)\left(\frac{dz}{dx}\right) + (q - y)\left(\frac{dz}{dy}\right).$$

Ora dovendo queste due linee segarsi ad angolo retto, se aggiungiamo il prodotto dei coefficienti di p a quello dei coefficienti di q, la somma (Appendice Num°. I.) dovrà essere nulla; dunque l' equazione della projezione orizzontale della linea della massima pendenza è

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) - \left(\frac{dz}{dy}\right) = 0.$$

Le due equazioni dunque della caratteristica saranno

$$(a) \ldots\ldots z^2\left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\} = h^2,$$

$$(b) \ldots\ldots \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) - \left(\frac{dz}{dy}\right) = 0.$$

Lo spigolo di regresso della superficie tocca in ciascuno dei suoi punti una delle caratteristiche: le due curve avranno dunque una tangente comune; dunque la tangente dello spigolo di regresso per un punto di contatto, preso ad una certa altezza, fa col piano orizzontale lo stesso angolo che la tangente della caratteristica, per un punto di contatto preso alla medesima altezza. Ora x, y, z essendo le coordinate del punto del contatto preso sopra lo spigolo di regresso, la tangente di questo spigolo fa col piano orizzontale un angolo, il coseno del quale è

$\cos = \dfrac{\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}}{\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}}$, considerando y, z come funzioni di x dateci dalle projezioni dello spigolo di regresso.

Di più la tangente condotta ad un punto di un circolo verticale ad una altezza z, fa col piano orizzontale un angolo il di cui coseno è

$\cos = \frac{z}{h}$, indicando per h il raggio del circolo; dunque l' equazione dello spigolo di regresso sarà

$$\frac{\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}}{\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}} = \frac{z}{h}, \text{ ovvero}$$

$$(c) \ldots\ldots z^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) = h^2(dx^2 + dy^2),$$

dy, dz tenendo luogo di $\left(\frac{dy}{dx}\right)dx$, $\left(\frac{dz}{dx}\right)dx$.

Si vede dunque che la superficie inviluppante è espressa da una sola equazione (a) a differenze parziali, che la caratteristica è espressa dal sistema di due equazioni (a), (b), la prima a differenze parziali, e la seconda a differenze parziali e differenziali ordinarj; e lo spigolo di regresso è espresso per una sola equazione a differenze ordinarie.

Integrata la prima equazione, si ha z dato per x, y, e questo valore differenziato rapporto ad x e ad y e sostituito nella seconda ci dà una vera equazione a differenze ordinarie in x, y. Questa integrata, si trova il valore di y espresso per x, e quindi quello di z egualmente espresso per x.

Per concepire come la sola equazione (c) serve a definire lo spigolo di regresso, osservo che essa ci dà questa proporzione

$\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)+\left(\frac{dz}{dy}\right)\right\}}:\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}}::h:z$ la quale ci dice che lo spigolo di regresso debb' essere una curva nella quale abbia luogo questa proprietà.

Ora se dopo aver descritto sopra un piano verticale qualunque la circonferenza d' un circolo di raggio h, col centro nella orizzontale, si piega questo piano sopra la superficie di un cilindro circolare a base qualunque, la curva a doppia curvatura che formerà la circonferenza di quel circolo, avrà 1°. la proprietà contenuta nella proporzione sopra espressa: 2°. questa curva sarà la sola che goder possa di questa proprietà: dunque essa sarà lo spigolo di regresso del quale parliamo, e la sola equazione (c) basterà a determinarlo.

§. 317. Si potrebbe proporre il problema con maggior generalità: cercare cioè l' equazione della superficie curva, che abbraccia o inviluppa una serie di sfere variabili di raggio, i centri delle quali sono distribuiti sopra una curva qualunque.

Senza trattenersi ad esaminare gli accidenti tutti di siffatte superficie, faremo osservare, che se nell' equazione generale di una sfera

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=h^2$ supponiamo le coordinate del centro funzioni qualunque indeterminate del raggio, se facciamo cioè

$a=fh$, $b=\phi h$, $c=\Psi h$, avremo l' equazione della sfera generatrice

$(x-fh)^2+(y-\phi h)^2+(z-\Psi h)^2=h^2$; l' equazione della superficie inviluppante sarà

$(x-fs)^2+(y+\phi s)^2+(z-\Psi s)^2=h^2$, essendo s uguale ad h funzione di x, y, z dataci dall' equazione

$(x-fh)\left(\frac{df}{dh}\right)+(y-\phi h)\left(\frac{d\phi}{dh}\right)+(z-\Psi h)\left(\frac{d\Psi}{dh}\right)=-h$:

la caratteristica poi è l' intersezione delle due superficie rappresentate da quest' equazioni

$(x-fh)^2+(y-\phi h)^2+(z-\Psi h)^2=h^2$,

$(x-fh)\left(\frac{df}{dh}\right)+(y-\phi h)\left(\frac{d\phi}{dh}\right)+(z-\Psi h)\left(\frac{d\Psi}{dh}\right)=-h$;

differenziando quest' ultima equazione relativamente ad h, avremo il sistema delle tre equazioni, che rappresenta lo spigolo di regresso.

Non ci estendiamo di più sopra l' applicazioni di questa dottrina, la quale riguarda la generazione delle superficie curve, e la maniera di trovarne le equazioni, sia deducendole dal modo con cui sono generate, sia dalle di loro proprietà. Ci basti di esserci assai inoltrati in essa, onde non abbiano difficoltà i nostri Lettori per progredire innanzi. A tale oggetto noi li consigliamo a leggere l' Opera del Sig. Monge citata superiormente (§. 310), la quale è una delle poche originali opere, che siansi pubblicate nella fine dello scorso secolo.

§. 318. Nelle superficie ha luogo la ricerca dei massimi e dei minimi come nelle curve: si può, per esempio, dimandare quali esser debbono i valori di due coordinate x, y, onde l' ordinata z funzione di esse sia massima o minima. Non ce ne occuperemo, imperocchè siffatti problemi dipendono dalla teorìa generale dei massimi e minimi delle funzioni a più variabili, teorìa da noi estesamente sviluppata nel Cap. IV. Solo faremo osservare che l' ordinata z di una superficie è massima o minima nel punto in cui il piano tangente è parallelo a quello degl' x, y: questa condizione è adempita se si fa $\left(\frac{dz}{dx}\right)=0$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)=0$, e tali equazioni determinano i valori di x e di y, cui corrisponde l' ordinata z massima o minima: ciò combina precisamente con quanto è dimostrato nel luogo citato quì sopra.

§. 319. Terminiamo queste applicazioni del calcolo differenziale alla Geometria con parlare della cubatura dei solidi, e della quadratura delle superficie.

Sia NML la base di un solido LNEFM nel piano degli x, y. Sia $PM = y$, $AP = x$, $MF = z$. Indichiamo per $F(x, y)$ funzione di x, y la solidità di questo solido, di modo che sia $F(x, y) = LNEFM$. Fig. 6

Supponiamo che x diventi $x + \omega$, essendo $\omega = Pp$, ed allora la fetta di solido MLEFomSH sarà $= F(x + \omega, y) - F(x, y)$.

Se nell' espressione di questa fetta di solido, supponiamo che y divenga $y + \theta$, essendo $mh = \theta$, avremo la solidità della porzione M$nhmoqr$F $= F(x + \omega, y + \theta) - F(x + \omega, y) - F(x, y + \theta) + F(x, y)$.

Ora se noi sviluppiamo queste funzioni in serie, si avrà, rappresentando per P quella porzione di solido,

$P = \omega\theta\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right) + T$; la quantità T significa il complesso dei termini, che uniti al primo compongono l' espressione di P, e questa è della terza dimensione relativamente alle quantità ω, θ.

Ora se noi supponiamo che in quella porzione P non cadano nè massimi nè minimi, ciò che si può, essendo arbitraria la posizione del punto M del solido, ed arbitrarie le grandezze degli aumenti ω, θ, è facile vedere che quando si rappresentino per z', z'' la maggiore e la minore delle quattro ordinate MF, nr, hq, mo, il solido P sarà minore sempre di $\omega\theta z'$, e maggiore di $\omega\theta z''$. Ma z è una funzione di x, y; così rappresentandola per $f(x, y)$, quelle quattro ordinate saranno $f(x, y)$, $f(x, y + \theta)$, $f(x + \omega, y + \theta)$, $f(x + \omega, y)$. Se dunque la seconda e la terza per esempio, sono quelle da noi chiamate z', z'', avremo sempre

$P < \omega\theta f(x, y + \theta)$, $P > \omega\theta f(x + \omega, y + \theta)$, ed in conseguenza

$\omega\theta\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right) + T > \omega\theta f(x + \omega, y + \theta)$,

$\omega\theta\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right) + T < \omega\theta f(x, y + \theta)$,

ovvero

$\omega\theta\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right) + T > \omega\theta z + \omega\theta S$,

$\omega\theta\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right) + T < \omega\theta z + \omega\theta V$, ove i termini $\omega\theta S$, $\omega\theta V$, T sono quantità della terza dimensione relativamente ad ω, θ.

La differenza dunque tra i due prismi sarà sempre maggiore della differenza tra il solido P ed uno di essi. Dunque $\omega\theta\{S - V\} > \omega\theta\left\{\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right) - z\right\} + T - \omega\theta S$: acciò sussista sempre questo rapporto, comunque piccoli possano prendersi ω e θ, bisogna che sia

$\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right) = z$; dunque $F = \int\int z\,dx\,dy$.

Per cubare dunque un solido qualunque, conviene prendere l' integrale doppio della quantità $z\,dx\,dy$, in cui z è una funzione conosciuta di x, y. Riguardo a siffatte integrazioni ed alla maniera di completarle, io rimando i miei Lettori al Capitolo VI, ove ne abbiamo estesamente parlato.

Osserviamo che considerando il solido come una funzione di x, y, z, si ha

$\left(\frac{d^3F}{dxdydz}\right) = 1$, e quindi $F = \int^3 dx\,dy\,dz$: così la solidità F è sempre eguale all' integrale triplo dell' espressione differenziale $dx\,dy\,dz$.

§. 320. Cerchiamo la misura della superficie curva di un qualunque solido.

E' principio ricevuto da tutti i Geometri e d' altr' onde è per se evidente, che di due curve dotate dei medesimi limiti, e che rivolgono la concavità dalla medesima parte, è sempre maggiore quella che comprende entro di se l' altra. Ora indichiamo al solito per $F(x,y)$ l' espressione della superficie da noi cercata, e se consideriamo nella Fig. 7 la porzione P del solido, del quale abbiam parlato al §. antecedente, e che fa parte della Fig. 6, comprenderemo facilmente che un ragionamento simile al già fatto per la solidità, ci darà la porzione della superficie Fig. 6 7

$Foqr = \omega\theta\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right) + S$, essendo S una quantità della terza dimensione relativamente alle ω, θ.

Ora dal punto F si conduca il piano FBCD tangente della curva in F, e che incontri le ordinate prolungate in B, C, D, e così formi il quadrilatero FBCD. Si conducano le rette Fo, oq, qr, rF, Fq, onde si formino i due triangoli Foq, Frq al disotto della superficie. Consideriamo anche il triangolo FrD, e quello FoB.

Fingiamo che si abbiano altre tre porzioni di solido eguali in tutto e per tutto a quella disegnata nella Fig. 7, nelle quali siansi condotti i respettivi piani tangenti e le respettive linee come nella prima. Si dispongano questi quattro solidi in modo che le faccie eguali e simili $mBCh$, $hCDn$ da solido a solido si combacino tra loro, e non è difficile a concepire che in questa operazione le quattro superficie curve, come $Frqo$, formeranno una volta la cui superficie sarà quadrupla di $Forq$. Sotto a questa volta ve ne sarà un' altra composta di otto triangoli, quattro dei quali saranno eguali ad Foq, e quattro ad Fqr; queste due volte avranno i medesimi termini.

Sopra la volta formata da quelle quattro porzioni di superficie curve, ve ne sarà un' altra formata da quattro trapezi come FDCB, e da otto triangoli come FoB, FrD. Questa volta egualmente che le altre due avrà i termini medesimi di esse. Ora, secondo il principio quì sopra stabilito, questa ultima volta sarà maggiore della volta fatta dalle superficie curve, e questa di quella sottoposta fatta dagli otto triangoli. Le

Fig. 7 quarte parti dunque di queste tre volte avranno tra loro gli stessi rapporti, così sarà

triang. Frq + *triang.* Fqo < *superficie* $Frqo$;

sup. $Frqo$ < *triang.* FrD + *trapez.* FDCB + *triang.* FoB.

Esprimiamo analiticamente questi rapporti.

Il trapezio FDCB eguaglia la projezione $Mmhn = \omega\theta$ divisa pel coseno della inclinazione del piano tangente, in cui si trova il trapezio, col piano degli x, y: questo coseno è

$$\frac{1}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}}; \text{ dunque}$$

$$FDCB = \omega\theta\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}.$$

Il triangolo $FoB = oB \cdot \frac{Mm}{2} = \{mB - mo\} \cdot \frac{Mm}{2} =$

$$\frac{\omega}{2}\left\{z+\omega\left(\frac{dz}{dx}\right)-mo\right\} = \frac{\omega}{2}\left\{-\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+\text{ec.}\right\} = \omega^3R + P,$$

ove R esprime ciò che debbe moltiplicare ω^3, e P il complesso di quei termini che seguono.

Il triangolo $FrD = \theta^3R' + P'$; dunque

$$FDCB + FrD + FoB = \omega\theta\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}} + T,$$

essendo T una quantità composta di termini di dimensioni maggiori della seconda relativamente alle ω, θ.

Nel triangolo Fqo, si ha

$(Fo)^2 = (Mm)^2 + (mo - MF)^2$,

$(oq)^2 = (mh)^2 + (hq - mo)^2$,

$(Fq)^2 = (Mm)^2 + (mh)^2 + (hq - MF)^2$;

ora $Mm = \omega$, $mh = \theta$, $mo = z + \omega\left(\frac{dz}{dx}\right) + \text{ec.}$,

$hq = z + \omega\left(\frac{dz}{dx}\right) + \theta\left(\frac{dz}{dy}\right) + \text{ec.}$, $MF = z$; dunque

Fig. 7

$(Fo)^2 = \omega^2 \left\{1 + (\frac{dz}{dx})^2\right\} + H,$

$(oq)^2 = \theta^2 \left\{1 + (\frac{dz}{dy})^2\right\} + H',$

$(Fq)^2 = \omega^2 + \theta^2 + \left\{\omega(\frac{dz}{dx}) + \theta(\frac{dz}{dy})\right\}^2 + H''$, ove H, H', H'' sono quantità di una dimensione più alta della seconda relativamente agli aumenti ω, θ.

Ora l' area del triangolo Fqo si sà che è $\frac{1}{4}\sqrt{\{4(Fo)^2.(oq)^2 - ((Fo)^2 + (oq)^2 - (Fq)^2)^2\}}$: sostituendo dunque in quest' espressione i valori che noi abbiamo trovati per Fo, oq, Fq, troveremo una quantità di questa forma

$$Foq = \frac{1}{4}\sqrt{\{4\omega^2\theta^2 [1 + (\tfrac{dz}{dx})^2][1 + (\tfrac{dz}{dy})^2] + L - (\omega^2(\tfrac{dz}{dx})^2 + \theta^2(\tfrac{dz}{dy})^2 - [\omega(\tfrac{dz}{dx}) + \theta(\tfrac{dz}{dy})]^2 + L')^2\}}.$$

Se questa espressione si sviluppa in serie, è facile vedere, che avremo

$Foq = \frac{\omega\theta}{2}\sqrt{\{1 + (\frac{dz}{dx})^2 + (\frac{dz}{dy})^2\}} + O$, ove O indica una quantità di dimensione maggiore della seconda relativamente ad ω, θ.

Nella stessa guisa troveremo

$Frq = \frac{\omega\theta}{2}\sqrt{\{1 + (\frac{dz}{dx})^2 + (\frac{dz}{dy})^2\}} + O'$; di modo che

$$Foq + Frq = \omega\theta\sqrt{\{1 + (\tfrac{dz}{dx})^2 + (\tfrac{dz}{dy})^2\}} + O + O'.$$

Per la natura dunque delle superficie curve, dovrà essere sempre

$\omega\theta\sqrt{\{1 + (\frac{dz}{dx})^2 + (\frac{dz}{dy})^2\}} + O + O' < \omega\theta(\frac{d^2F}{dxdy}) + S,$

$\omega\theta\sqrt{\{1 + (\frac{dz}{dx})^2 + (\frac{dz}{dy})^2\}} + T > \omega\theta(\frac{d^2F}{dxdy}) + S$; ovvero

$T - O - O' > \omega\theta[\sqrt{\{1 + (\frac{dz}{dx})^2 + (\frac{dz}{dy})^2\}} - (\frac{d^2F}{dxdy})] + T - S$, ove il primo termine del rapporto è composto di quantità di dimensioni maggiori della seconda.

Ma siccome non annullandosi il coefficiente di $\omega\theta$, si potrebbero determinare gli aumenti in tal modo che questo rapporto non sussistesse, ciò che è contrario al carattere indispensabile delle superficie curve contenuto nell' enunciato principio, dunque è gioco forza che sia

$\sqrt{\{1 + (\frac{dz}{dx})^2 + (\frac{dz}{dy})^2\}} - (\frac{d^2F}{dxdy}) = 0$; e di quì segue che

$$F(x, y) = \iint\sqrt{\{1 + (\tfrac{dz}{dx})^2 + (\tfrac{dz}{dy})^2\}}\, dxdy.$$

Così per avere la superficie di un solido qualunque, conviene prendere l' integrale doppio di questa differenziale

$$\sqrt{\{1 + (\tfrac{dz}{dx})^2 + (\tfrac{dz}{dy})^2\}}\, dxdy.$$

Gli esempj schiariranno questa Teorìa.

§. 321. Si rammenti quì ciò che abbiamo ai §§. 176 e seg. relativamente agli integrali doppj; anzi sarà bene che i nostri Lettori rileggano tutte quelle dottrine.

Fig. 8. Supponiamo che BAC sia il piano degli x, y orizzontale; A l' origine delle coordinate; AB l' asse degli x; AC quello degli y. Col raggio $AE = a$ sia descritto il quarto di circolo EGF, sul quale si appoggi una quarta parte di semisfera, e cerchiamo la solidità di questa porzione di sfera.

La solidità ricercata sarà $P = \int^3 dxdydz$. Si faccia la prima integrazione relativamente a z, e si avrà $P = \int^2 zdxdy$. Ora conviene porre per z il suo valore in x, y dato dall' equazione della superficie sferica, far cioè

$z = \sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}$, onde la solidità si estenda sino alla superficie medesima, ed avremo Fig.

$$P = \int\int \sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}\, dxdy = \int dx \int \sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}\, dy.$$

Noi abbiamo sviluppato questo integrale doppio al §. citato, ed abbiam trovato

$$P = \frac{\pi}{4}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right) + C.$$

Determiniamo ora la costante C per modo, che la solidità svanisca quando $x = 0$, e si avrà $C = 0$; se poi vogliamo estendere l' integrale sino ad $x = a$, avremo $P = \frac{\pi}{6} a^3$, e tale sarà la solidità di un quarto di semi-sfera, da cui si ricaverà quella della intiera sfera $= \frac{4\pi}{3} a^3$.

Supponiamo ora che non si voglia già l' ottava parte della sfera, ma soltanto quella porzione, che si appoggia alla base rettangolare HIKA. 8

Rappresentata egualmente la solidità per $P = \int dx \int \sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}\, dy$, si ha per una prima integrazione

$$\int \sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}\, dy = \frac{1}{2} y \sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)} + \frac{1}{2}(a^2 - x^2) \times \text{Arc. sen}\, \frac{y}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}.$$

Ora facendo $AK = e$, $AH = f$, estendiamo quest' integrale da $y = 0$ ad $y = f$, ed avremo

$$\int \sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}\, dy = \frac{1}{2} f \sqrt{(a^2 - f^2 - x^2)} + \frac{1}{2}(a^2 - x^2) \times \text{Arc. sen}\, \frac{f}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}.$$ Dunque

$$P = \int dx \int \sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}\, dy = \frac{1}{2} f \int \sqrt{(a^2 - f^2 - x^2)}\, dx + \frac{1}{2}\int (a^2 - x^2)\, \text{Arc. sen}\, \frac{f}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}\, .\, dx,$$ e quest' integrale dovrà prendersi tra i limiti $x = 0$, $x = e$.

L' integrale del primo termine del secondo membro si ha subito: esso è

$$\int dx \sqrt{(a^2 - f^2 - x^2)} = \frac{1}{2} x \sqrt{(a^2 - f^2 - x^2)} + \frac{1}{2}(a^2 - f^2) \times \text{Arc. sen}\, \frac{x}{\sqrt{(a^2 - f^2)}}.$$

Riguardo all' altro termine osservo, che essendo

$$d.\, \text{Arc. sen}\, \frac{f}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{fxdx}{(a^2 - x^2)\sqrt{(a^2 - f^2 - x^2)}},$$ si avrà facendo l' integrazione per parti,

$$\int (a^2 - x^2)\, dx\, \text{Arc. sen}\, \frac{f}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \left(a^2 x - \frac{1}{3} x^3\right) \times \text{Arc. sen}\, \frac{f}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} - f \int \frac{(a^2 - \frac{1}{3} x^2)\, x^2 dx}{(a^2 - x^2)\sqrt{(a^2 - f^2 - x^2)}}.$$

Per integrare quest' ultima, si avverta che

$$\text{Arc sen}\, \frac{fx}{\sqrt{(a^2 - f^2)(a^2 - x^2)}} = \int \frac{afdx}{(a^2 - x^2)\sqrt{(a^2 - f^2 - x^2)}};$$ quindi ponendo

$$\int \frac{(a^2 - \frac{1}{3} x^2)\, x^2 dx}{(a^2 - x^2)\sqrt{(a^2 - f^2 - x^2)}} + m\, \text{Arc. sen}\, \frac{fx}{\sqrt{(a^2 - f^2)(a^2 - x^2)}} = \int \frac{(a^2 x^2 - \frac{1}{3} x^4 + maf)\, dx}{(a^2 - x^2)\sqrt{(a^2 - f^2 - x^2)}}:$$ vediamo se possiamo determinare m in tal modo che sia $a^2 x^2 - \frac{1}{3} x^4 + maf$ divisibile per $a^2 - x^2$:

Ora ciò succede facendo $m = -\frac{2a^3}{3f}$, e si ha il quoziente $-\frac{2a^2 - x^2}{3}$; dunque

$\int \frac{(a^2 - \frac{1}{3}x^2)x^2dx}{(a^2 - x^2)\sqrt{(a^2 - f^2 - x^2)}} = \frac{2a^3}{3f}\ Arc.\ sen\ \frac{fx}{\sqrt{(a^2 - f^2)(a - x^2)}} -$ Fig.

$\frac{1}{3}\int \frac{(2a^2 - x^2)dx}{\sqrt{(a^2 - f^2 - x^2)}}$.

E poi

$\int \frac{(2a^2 - x^2)dx}{\sqrt{(a^2 - f^2 - x^2)}} = \frac{1}{2}(3a^2 - f^2)\ Arc.\ sen\ \frac{x}{\sqrt{(a^2 - f^2)}} +$

$\frac{1}{2}x\sqrt{(a^2 - f^2 - x^2)}$, e perciò

$\int \frac{(a^2 - \frac{1}{3}x^2)x^2dx}{(a^2 - x^2)\sqrt{(a^2 - f^2 - x^2)}} = \frac{2a^3}{3f}\ Arc.\ sen\ \frac{fx}{\sqrt{(a^2 - f^2)(a^2 - x^2)}} -$

$\frac{1}{6}(3a^2 + f^2)\ Arc.\ sen\ \frac{x}{\sqrt{(a^2 - f^2)}} - \frac{1}{6}x\sqrt{(a^2 - f^2 - x^2)}$;

sarà pertanto

$\int(a^2 - x^2)dx\ Arc.\ sen\ \frac{f}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = (a^2x - \frac{1}{3}x^3)\ Arc.\ sen \times$

$\frac{f}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} - \frac{2}{3}a^3\ Arc.\ sen\ \frac{fx}{\sqrt{(a^2 - f^2)(a^2 - x^2)}} + \frac{1}{6}f(3a^2 +$

$f^2)\ Arc.\ sen\ \frac{x}{\sqrt{(a^2 - f^2)}} + \frac{1}{6}fx\sqrt{(a^2 - f^2 - x^2)}$.

La solidità dunque della porzione sferica che si appoggia al rettangolo AHIK si avrà facendo $x = e$; sarà 8

$P = \frac{1}{4}ef\sqrt{(a^2 - e^2 - f^2)} + \frac{1}{4}f(a^2 - f^2)\ Arc.\ sen \times$

$\frac{e}{\sqrt{(a^2 - f^2)}} + \frac{1}{6}e(3a^2 - e^2)\ Arc.\ sen\ \frac{f}{\sqrt{(a^2 - e^2)}} - \frac{1}{3}a^3\ Arc.\ sen \times$

$\frac{ef}{\sqrt{(a^2 - e^2)(a^2 - f^2)}} + \frac{1}{12}f(3a^2 - f^2)\ Arc.\ sen\ \frac{e}{\sqrt{(a^2 - f^2)}} +$

$\frac{1}{12}ef\sqrt{(a^2 - e^2 - f^2)}$, la quale espressione si riduce come segue

$P = \frac{1}{3}ef\sqrt{(a^2 - f^2 - e^2)} + \frac{1}{6}f(3a^2 - f^2) \times$

Fig. $Arc.\ sen\ \frac{e}{\sqrt{(a^2 - f^2)}} + \frac{1}{6}e(3a^2 - e^2)\ Arc.\ sen\ \frac{f}{\sqrt{(a^2 - e^2)}} -$

$\frac{1}{3}a^3\ Arc.\ sen\ \frac{ef}{\sqrt{(a^2 - e^2)(a^2 - f^2)}}$.

8 Se il termine I del rettangolo si prolungasse sino alla periferia, onde si avesse $e^2 + f^2 = a^2$, il primo termine di P svanisce, e gli altri tre archi circolari divengono di 90°, ovvero $\frac{\pi}{2}$; sarà allora

$P = \frac{\pi}{2}(\frac{1}{3}a^2e + \frac{1}{2}a^2f - \frac{1}{6}e^3 - \frac{1}{6}f^3 - \frac{1}{3}a^3)$, ovvero essendo $f = \sqrt{(a^2 - e^2)}$,

$P = \frac{\pi}{12}\{(2a^2 + e^2)\sqrt{(a^2 - e^2)} - 2a^3 + 3a^2e - e^3\}$.

Questo solido diviene un massimo se $f = e = \frac{a}{\sqrt{2}}$, e .. ha allora

$P = \frac{\pi a^3(5 - 2\sqrt{2})}{12\sqrt{2}}$. La solidità dell' ottava parte della sfera è $\frac{\pi}{6}a^3$; così il nostro solido starà all' ottava parte della sfera come $5 - 2\sqrt{2} : 2\sqrt{2}$.

Se il punto I non pervenga alla periferia e sia $f = e$, avremo

$P = \frac{1}{3}e^2\sqrt{(a^2 - 2ee)} + \frac{1}{3}e(3a^2 - e^2)\ Arc\ sen\ \frac{e}{\sqrt{(a^2 - e^2)}} -$

$\frac{1}{3}a^3\ Arc.\ sen\ \frac{e^2}{a^2 - e^2}$; onde se prenderemo per e tal quantità che stia

$Arc.\ sen\ \frac{e}{\sqrt{(a^2 - e^2)}} : Arc.\ sen\ \frac{e^3}{a^2 - e^2} :: a^3 : e(3a^2 - e^2)$, il solido P sarà espresso algebraicamente.

§. 322 Cerchiamo ora il solido che si appoggia ad una qualunque base STPV, ed indichiamo al solito per P la solidità. Avremo

$P = \int\int\int dx\,dy\,dz = \int\int z\,dx\,dy = \int dx \int (a^2 - x^2 - y^2)\,dy$, Fig.
estendendo le integrazioni tra i limiti dell' x e dell' y.

Una prima integrazione ci dà al solito

$$\int (a^2 - x^2 - y^2)\,dy = \tfrac{1}{2} y \sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)} + \tfrac{1}{2}(a^2 - x^2) \times$$

$Arc.\ sen\ \frac{y}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$; supponiamo che la natura della curva che forma la base del solido, ci dia per gli estremi valori dell' y, $y = NV = r$, $y = MT = q$, ed allora l' integrale 8
ottenuto, esteso tra questi limiti, sarà

$$\tfrac{1}{2}\left\{ r\sqrt{(a^2 - x^2 - r^2)} + (a^2 - x^2)\,Arc.\ sen\ \frac{r}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} - q\sqrt{(a^2 - x^2 - q^2)} - (a^2 - x^2)\,Arc.\ sen\ \frac{q}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} \right\}.$$

Questi valori di y ponno essere funzioni di x; così la solidità cercata sarà l' integrale di quest' ultima espressione moltiplicata per dx esteso tra i valori estremi della x, cioè tra $x = AL$, ed $x = AO$.

Quando si fosse cercato il solido che si appoggia sopra la base ARDQ, dovremmo allora porre nell' espressione superiore $y = q = 0$, $y = r = AR$, e si avrebbe

$$P = \tfrac{1}{2}\int dx \left\{ r\sqrt{(a^2 - x^2 - r^2)} + (a^2 - x^2)\,Arc.\,sen\,\frac{r}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} \right\}:$$

dovremo poi estendere quest' integrale da $x = 0$ sino ad $x = AQ$. S' avverta che r è una funzione di x data dalla natura della curva RDQ. E quì supponendo incognita la relazione tra x ed r, si potrebbe cercare quella che rende esprimibile algebraicamente il solido che si appoggia sopra la base ARDQ. Noi però non ce ne occuperemo.

Se attentamente noi consideriamo le determinazioni degli integrali date quì sopra, vedremo che i valori estremi della x sono presi in tal modo, che se la curva della base rientra in

Fig. se stessa, uno è massimo e l' altro minimo. Questi due valori si ritrovano se si eguagli a zero $(\frac{dx}{dr})$ secondo il metodo ordinario, considerando x come una funzione di r.

Quando poi la base non è terminata da una sola linea curva, ma da una qualunque porzione RDQ, la cui base AQ sia la massima, allora il minor valore di x è zero, ed il maggiore è AQ; e questi sono i limiti tra i quali estender si debbe la seconda integrazione: i limiti poi riguardo alla prima, sono i termini dell' ordinata r della curva RDQ, il minor dei quali è zero.

Data dunque una qualunque base, bisogna esaminare scrupolosamente la di lei figura, onde assegnarne per ogni verso i termini, per quindi estendere le integrazioni tra i limiti che si conviene. Simili indagini debbono farsi per qualunque integrale doppio o triplo ec. che ci venisse proposto.

§ 323 Facciamo qualche esempio per la misura delle superficie curve.

8 Si cerchi la superficie dell' ottava parte di una sfera, la quale ricopre il quadrante AEGF.

Indicando per P questa superficie, si ha la formula

$$P = \int\int \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 \right\}}\,dx\,dy.$$

Poniamovi $z = \sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}$, ed avremo,

$$P = \int\int \frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}},\ \text{ovvero}$$

$$P = a\int dx \int \frac{dy}{\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}}.$$

Se noi supponiamo x costante, si ha

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}} = Arc.\ sen\ \frac{y}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}.$$

Quest' integrale esteso da $y = 0$ sino ad $y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$, diviene

$\int \frac{dy}{\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}} = Arc.\ sen\ \frac{\sqrt{(a^2 - x^2)}}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = Arc.\ sen\ 1 = \frac{\pi}{2}$. Si ha Fig.

dunque

$P = \frac{a\pi}{2} \int dx = \frac{a^2\pi}{2}$, estendendo questo secondo integrale da $x = 0$ sino ad $x = a$.

La superficie dell' intiera sfera sarà dunque $8P = 4\pi a^2$, cioè eguale a quattro circoli genitori come si sa.

Proponiamoci ora la soluzione di un celebre Problema conosciuto sotto il nome di Problema *Fiorentino*.

Consiste questo nell' „ assegnare geometricamente in una „ superficie sferica una tal porzione che possa esprimersi algebraicamente „.

La porzione di sfera sia quella che copre la base ARDQ, 8
e si cerchi la natura della curva RDQ.

Facendo $Ag = x$, $gU = y$, ed indicando al solito per P la superficie che copre la base AgUR, avremo

$P = \iint \frac{adxdy}{\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}}$, e dopo una prima integrazione

$P = a \int dx\ .\ Arc.\ sen\ \frac{y}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$.

E' questa l' espressione di quella porzione di sfera, la quale copre l' area indefinita AgUH; tutta la difficoltà dunque è ridotta a trovare tra x, y una tale equazione algebraica, che la porzione della superficie sferica corrispondente all' intiera area, sia esprimibile algebraicamente.

Senza andare avanti nello sviluppo dell' ultima formula, permutiamo le variabili di quell' integrale doppio, e facciamo

$x = \frac{t}{\sqrt{(1 + u^2)}}$, $y = \frac{tu}{\sqrt{(1 + u^2)}}$, e ne avremo poi

$x^2 + y^2 = t^2$, $u = \frac{y}{x}$.

Secondo la regola del §. 177 questa permutazione ci dà

$P = \iint \frac{adxdy}{\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}} = \pm \int \frac{atdtdu}{(1 + u^2)\sqrt{(a^2 - t^2)}}$, ove si prenderà quel segno che rende il risultato positivo.

Facciamo una prima integrazione supponendo u costante, e sarà

$\int \frac{tdt}{\sqrt{(a^2 - t^2)}} = C - \sqrt{(a^2 - t^2)} = a - \sqrt{(a^2 - t^2)}$, determinando la costante C in modo che svanisca l' integrale quando $t = 0$.

Avremo pertanto

$P = \pm \int \frac{adu}{1 + u^2} \{a - \sqrt{(a^2 - t^2)}\} = \pm \{a^2 . Arc.\ tang\, u -$

$\int \frac{adu}{1 + u^2} \sqrt{(a^2 - t^2)}\}$.

Con facilità si può rendere quest' ultimo termine assolutamente integrabile; imperocchè eguagliamolo ad una funzione qualunque algebraica di u, e sia V; si avrà allora

$P = \pm \{a^2 . Arc.\ tang\, u + V\}$, e poi

$-\sqrt{(a^2 - t^2)} = \frac{1 + u^2}{a} \left(\frac{dV}{du}\right)$.

Qualunque funzione algebraica dunque si prenda per V, darà una relazione algebraica tra t ed u, dalla quale si ricaverà una relazione algebraica tra x, y ed in conseguenza una soluzione del problema, come or' ora vedremo. Il problema dunque potrà risolversi in infiniti modi. Consideriamone i più semplici.

Facciamo $V = \frac{a(\alpha + \beta u)}{\sqrt{(1 + u^2)}}$, e si avrà

$\left(\frac{dV}{du}\right) = -\frac{a(\alpha u - \beta)}{(1 + u^2)^{\frac{3}{2}}}$; quindi l' equazione tra t ed u sarà

Fig.

$$-\sqrt{(a^2 - t^2)} = \frac{\beta - \alpha u}{\sqrt{(1 + u^2)}}.$$

Da questa risulterà l' equazione della curva cercata $\sqrt{(x^2 + y^2)}\,(a^2 - x^2 - y^2) = \alpha y - \beta x$, e la superficie di quella porzione di sfera sarà

$P = a^2 . Arc.\, tang\, u + \frac{a(\alpha + \beta u)}{\sqrt{(1 + u^2)}}$, ovvero sostituendo per u e per t i respettivi valori in x, y,

$P = a^2 . Arc.\, tang \frac{y}{x} + \frac{a(\alpha x + \beta y)}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$: abbiamo tralasciato il doppio segno, ma ci rammenteremo di moltiplicare per — il secondo membro, se mai ci risultasse negativo, onde farlo tornar positivo.

Se ora si suppone $\beta = 0$, $\alpha = a$, avremo

$P = a^2 . Arc.\, tang \frac{y}{x} + \frac{a^2 x}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$, e l' equazione della curva sarà $a^2 x^2 - (x^2 + y^2)^2 = 0$, ossia $y^2 = ax - x^2$, di modo che la curva RDQ sarà un semicircolo descritto sopra il rag- 8
gio $AF = a$ come diametro.

Estendiamo questa superficie da $x = 0$ sino ad $x = a$, ed avremo

$P = -a^2 . \frac{\pi}{2} + a^2$, cui cangiando i segni secondo il detto sopra, troveremo

$P = \frac{a^2 \pi}{2} - a^2$, ovvero

$P = \frac{1}{8}$, superficie della sfera $- a^2$.

Si abbia sott' occhio la figura 9, e la porzione di superficie sferica indicata per P sarà quella, la quale copre la ba- 9
se CERA.

Fig. Ora la suddetta porzione di superficie sferica è eguale alla superficie dell' ottava parte della sfera meno quella porzione che copre il trilineo CBSAREC; dunque quest' ultima
9 porzione eguaglierà il quadrato del raggio a.

Abbiamo pertanto ritrovata una porzione di superficie sferica, quella cioè che copre il trilineo suddetto quadrabile.

Essa eguaglia il quadrato del raggio CA.

Questo problema fu proposto da Viviani ai primi Coltivatori del Calcolo Differenziale, e fu enunciato così.

„ In una volta semisferica vogliansi aprire quattro fine„ stre, si dimanda di farlo in modo che la superficie della vol„ ta, che rimane, riesca quadrabile „.

Per una maggiore estensione in esso rimandiamo i nostri Lettori al Tom. IV dei novi Commentarj di Pietroburgo.

E qui poniamo fine all' applicazione alla Geometria.

CAP. XV.

Ulteriori Applicazioni alla Meccanica

§. 324. Noi ci estenderemo sopra queste applicazioni assai meno di quello che avevamo divisato, poichè il Volume dell' Opera si è già aumentato oltre i limiti da noi prescritti.

Al §. 94. considerato abbiamo il movimento che si fa in una curva tutta situata in un piano; parliamo ora del moto per una curva a doppia curvatura qualunque.

Movendosi un corpo in una curva a doppia curvatura con un movimento del quale è determinata la legge, il punto M nel quale questi si trova, dipende dal tempo per cui è seguito il movimento. La posizione dunque del punto M sarà una funzione del tempo. Sia riferita la curva del movimento a tre assi ortogonali, e siano x, y, z le coordinate del punto M. La posizione dunque di esso è determinata da queste coordinate: esse dunque sono funzioni del tempo, e perciò ciascuna di loro può rappresentare uno spazio rettilineo descritto da un movimento, espresso dalla funzione del tempo, alla quale è eguale la stessa ordinata.

Sia dunque $x=f(t)$, $y=F(t)$, $z=\varphi(t)$; determinato t, sono subito determinate le coordinate x, y, z, ed in conseguenza il punto M ove trovasi il mobile. Ora supponiamo che oltre il vero corpo che movesi nella curva, vi siano tre corpi fittizj, uno dei quali si muova nell' asse degli x, l' altro lungo l' asse degli y, ed il terzo lungo quello degli z, e che i moti di essi siano respettivamente espressi da queste equazioni $x=f(t)$, $y=F(t)$, $z=\varphi(t)$: è manifesto

che i tre punti dei tre assi nei quali si troveranno i tre corpi immaginati, alla fine del tempo t, determineranno il punto della curva nel quale si trova il vero corpo, essendo quei punti la projezione del punto M della curva; dunque un movimento qualunque può naturalmente ridursi a tre movimenti rettilinei sopra i tre assi delle coordinate, e questi movimenti ponno riguardarsi come descritti dai mobili, i quali sono le projezioni del vero mobile sopra i tre assi medesimi; quindi è che gli stessi movimenti possono considerarsi come la projezione del vero movimento; così potremo dire conosciuto il moto per quella linea curva, quando saranno conosciuti i movimenti rettilinei per i tre assi: infatti conosciute l' equazioni $x=f(t)$, $y=F(t)$, $z=\varphi(t)$, si ha per un qualunque tempo t il luogo M del mobile, ed eliminando t per mezzo di esse, abbiamo due equazioni, le quali determinano la curva a doppia curvatura descritta dal mobile stesso.

Consideriamo pertanto i tre movimenti $x=f(t)$, $y=F(t)$, $z=\varphi(t)$ rettilinei, come componenti quel movimento curvilineo: il mobile posto in un punto dello spazio che abbiamo chiamato M, tenderà a moversi parallelamente all' asse degli x col movimento $x=f(t)$; parallelamente all' asse degli y col movimento $y=F(t)$, ed infine parallelamente all' asse degli z col movimento $z=\varphi(t)$: ora secondo ciò che è detto (§. 93) $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$ rappresentano la velocità e la forza acceleratrice che si ritrova alla fine del tempo t nel movimento $x=f(t)$; egualmente $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$ rappresentano le simili quantità pel movimento $y=F(t)$; ed infine $\left(\frac{dz}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)$ sono la velocità e la forza del movimento $z=\varphi(t)$: dunque il corpo posto in M tende a muoversi, ed effettivamente nel primo istante alla fine del tempo t si muove nel senso degli x con una velocità $=\left(\frac{dx}{dt}\right)$, e con una forza acceleratrice $=\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$; nel senso degli y con una velocità $=\left(\frac{dy}{dt}\right)$, e con una forza $= (\frac{d^2y}{dt^2})$; e nel senso degli z con una velocità $= (\frac{dz}{dt})$, e con una forza $= (\frac{d^2z}{dt^2})$.

§. 325. Sappiamo dalla Meccanica che un corpo animato da tre movimenti uniformi, o da tre movimenti uniformemente accelerati secondo tre direzioni perpendicolari tra loro, dei quali a, b, c siano le velocità o le forze acceleratrici, tende a muoversi e si muove, quando tali movimenti non siano turbati con una velocità o con una forza acceleratrice rappresentata da $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$, e con la direzione, la quale fa con le tre direzioni dei movimenti componenti tre angoli, di cui i coseni sono

$\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}$, $\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}$, $\frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}$: dunque le tre velocità $(\frac{dx}{dt})$, $(\frac{dy}{dt})$, $(\frac{dz}{dt})$ comporranno la velocità

$\sqrt{\{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2\}}$; e le tre forze $(\frac{d^2x}{dt^2})$, $(\frac{d^2y}{dt^2})$, $(\frac{d^2z}{dt^2})$ daranno la forza composta

$$\sqrt{\{(\frac{d^2x}{dt^2})^2 + (\frac{d^2y}{dt^2})^2 + (\frac{d^2z}{dt^2})^2\}}.$$

Se poi noi indichiamo la velocità composta per u, i tre coseni dei quali quì sopra si parla, saranno

$(\frac{dx}{dt}):u$, $(\frac{dy}{dt}):u$, $(\frac{dz}{dt}):u$. Chiamiamo quest' angoli α, β, γ, ed avremo

$$(\frac{dx}{dt}) = u\cos\alpha,\ (\frac{dy}{dt}) = u\cos\beta,\ (\frac{dz}{dt}) = u\cos\gamma.$$

Dunque il corpo posto in M tenderà a muoversi, ed effettivamente alla fine del tempo t incomincerà a muoversi con un movimento del quale la velocità è

$\sqrt{\{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2\}}$, e la forza acceleratrice

$$\sqrt{\{(\frac{d^2x}{dt^2})^2 + (\frac{d^2y}{dt^2})^2 + (\frac{d^2z}{dt^2})^2\}}.$$

Rappresentiamo per s l' arco della curva descritto dal mobile nel tempo t per giungere in M; ed avremo (§. 305)

$(\frac{ds}{dt}) = \sqrt{\{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2\}}$, e quindi sarà

$u = \sqrt{\{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2\}}$: sarà dunque $(\frac{ds}{dt})$ la velocità del mobile alla fine del tempo t. Di più la direzione di questa velocità sarà quella della tangente della curva a doppia curvatura nel punto M; imperocchè i coseni degli angoli che questa tangente fa con i tre assi, sono, riguardando x, y, z come funzioni di t,

$(\frac{dx}{dt}):\sqrt{\{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2\}}$ con l' asse degli x;

$(\frac{dy}{dt}):\sqrt{\{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2\}}$ con l' asse degli y;

$(\frac{dz}{dt}):\sqrt{\{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2\}}$ con quello degli z.

Questi coseni sono in conseguenza gli stessi che quei degli angoli fatti dalla direzione della velocità composta con gli assi: dunque questa direzione coinciderà con quella della tangente della curva; dunque se le cause che impediscono al movimento di essere uniforme, cessassero tutte ad un tratto, da quell' istante il corpo si moverebbe con moto equabile ed uniforme, con una velocità $= (\frac{ds}{dt})$, e nella direzione della tangente alla curva.

Se poi noi indichiamo per P la forza acceleratrice composta

$\sqrt{\{(\frac{d^2x}{dt^2})^2 + (\frac{d^2y}{dt^2})^2 + (\frac{d^2z}{dt^2})^2\}}$, essa avrà per direzione una retta i cui angoli con gli assi avranno per coseni

$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right):P$; $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right):P$; $\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right):P$, e se noi chiamiamo λ, μ, ν questi angoli, si avrà

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = P\cos\lambda,\quad \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = P\cos\mu,\quad \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = P\cos\nu.$$

Conoscendo la legge del movimento del corpo, cioè, i valori di x, y, z in t, dalle equazioni superiori ricaveremo la forza acceleratrice e la sua direzione a ciascun istante: conoscendo poi la forza P con gli angoli λ, μ, ν avremo tre equazioni differenziali del secondo ordine che serviranno a determinare x, y, z in t. I problemi della prima sorte dipendono dalla differenziazione, e sono sempre risolubili; quei della seconda dipendono dall' integrazione delle equazioni.

Supponiamo che il mobile sia nello stesso tempo sollecitato da due forze P e Q secondo direzioni, le quali fanno con gli assi degli x, y, z gli angoli λ, μ, ν per la forza P, e π, ρ, σ per la forza Q; le formule superiori ci daranno

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = P\cos\lambda + Q\cos\pi,$$

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = P\cos\mu + Q\cos\rho,$$

$$\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = P\cos\nu + Q\cos\sigma;$$

e così di seguito per qualunque numero di forze.

§. 326. Premessi questi principj, veniamo alla soluzione di qualche problema.

Proponiamoci dunque di „ determinare il moto di un cor-„ po attratto verso un centro fisso da una forza φ, ed anima-„ to da una impulsione primitivamente ricevuta, secondo una „ qualunque direzione, che non passi pel centro fisso „.

La generalità di questo problema non è in modo alcuno alterata supponendo le coordinate con l' origine nel centro dell' attrazione, la curva che il corpo descrive, situata tutta nel piano che passa pel detto centro e per la direzione della forza φ; e che infine questo piano sia quello delle coordinate x, y.

Fig. 10 Sia $AP = x$, $PM = y$, $sen\, MAP = \alpha$, $sen\, AMP = \beta$. Le due equazioni del movimento sono

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = -\varphi . \cos\alpha,\quad \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -\varphi . \cos\beta;\ \text{ovvero}$$

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = -\varphi . \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}},$$

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -\varphi . \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}}.$$

Diamo il segno — alla forza φ, perchè essa tende a diminuire le coordinate x, y.

Data alle suddette equazioni la forma

$$(1) \ldots\ldots \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \varphi . \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}} = 0,$$

$$(2) \ldots\ldots \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) + \varphi . \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}} = 0,$$

moltiplichiamo la prima equazione per y, e la seconda per x e sottraendo l' una dall' altra, si ha

$y\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) - x\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0$, il cui integrale è

$$(3) \ldots\ldots y\left(\frac{dx}{dt}\right) - x\left(\frac{dy}{dt}\right) = Cost.$$

Quest' equazione (3) si cangia subito in quest' altra

$2y\left(\frac{dx}{dt}\right) - \left\{x\left(\frac{dy}{dt}\right) + y\left(\frac{dx}{dt}\right)\right\} = C$, ovvero mutando la forma della costante arbitraria

$$y\left(\frac{dx}{dt}\right) - \frac{x\left(\frac{dy}{dt}\right) + y\left(\frac{dx}{dt}\right)}{2} = C'.$$

Di quì, integrando si ha

$\int y\left(\frac{dx}{dt}\right)dt - \frac{xy}{2} = C't + E$, ovvero $BAPM - APM =$

BAM $= C't + E$. Se determiniamo E in modo che BAM si annulli quando $t = 0$, si avrà $E = 0$, quindi l'area BAM $= C't$. Sia un altro tempo $t + \omega$ alla fine del quale il corpo si trovi in m, avremo BA$m = C'(t + \omega)$ e quindi BAM : BA$m :: t : t + \omega$. Fig. 10

La curva dunque BMC descritta dal corpo sarà tale che *l'aree descritte dal raggio vettore* AM *saranno proporzionali ai tempi nei quali sonosi descritte, qualunque d'altr'onde sia la legge con la quale il corpo è attratto verso il centro fisso*.

Moltiplichiamo ora l'equazione (1) per $(\frac{dx}{dt})$, e la (2) per $(\frac{dy}{dt})$, e sommandole, avremo

$$(\tfrac{dy}{dt}).(\tfrac{d^2y}{dt^2}) + (\tfrac{dx}{dt}).(\tfrac{d^2x}{dt^2}) + \varphi . \frac{(\frac{dy}{dt})y + (\frac{dx}{dt})x}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} = 0, \text{ ovvero}$$

$$(4) \ldots\ldots \frac{d\left\{(\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dx}{dt})^2\right\}}{dt} + 2\varphi . \frac{d\sqrt{(x^2+y^2)}}{dt} = 0.$$

Ora permutiamo le variabili x, y in due altre che siano il raggio vettore AM, e l'angolo MAP; determiniamo cioè la posizione del corpo in qualunque istante del suo moto per mezzo del raggio vettore AM, e dell'angolo PAM, ciò che è conforme a quanto si pratica in Astronomia: avremo allora (facendo AM $= r$, PAM $= \omega$)

$r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, $x = r \cos \omega$, $y = r \,\mathrm{sen}\, \omega$, onde

$(\frac{dx}{dt}) = (\frac{dr}{dt}) \cos \omega - r \,\mathrm{sen}\, \omega . (\frac{d\omega}{dt})$,

$(\frac{dy}{dt}) = r \cos \omega . (\frac{d\omega}{dt}) + \mathrm{sen}\, \omega . (\frac{dr}{dt})$. Fatte quindi le opportune sostituzioni nelle equazioni (3), (4), esse diverranno

$$(5) \ldots\ldots r^2(\tfrac{d\omega}{dt}) = c,$$

$$(6) \ldots\ldots \frac{d\left\{r^2(\frac{d\omega}{dt})^2 + (\frac{dr}{dt})^2\right\}}{dt} + 2\varphi.(\tfrac{dr}{dt}) = 0.$$

Ora supponiamo che la forza d'attrazione φ sia una funzione della distanza, e rappresentiamo per R l'integrale $\int 2\varphi.(\frac{dr}{dt})\, dt$, ovvero $\int 2\varphi . dr$, ed avremo l'equazione

$$(7) \ldots\ldots r^2(\tfrac{d\omega}{dt})^2 + (\tfrac{dr}{dt})^2 + R = 0.$$

L'equazioni (5), (7) sono quelle le quali contengono tutte le circostanze di quel movimento; infatti se vorremo l'equazione della curva descritta, allora considerando t ed ω come funzioni di r, cioè ponendo in queste equazioni $1 : (\frac{dt}{dr})$ invece di $(\frac{dr}{dt})$, e $(\frac{d\omega}{dr}) : (\frac{dt}{dr})$ invece di $(\frac{d\omega}{dt})$, avremo

$$r^2(\tfrac{d\omega}{dr}) = c(\tfrac{dt}{dr}),$$

$$\frac{r^2(\frac{d\omega}{dr})^2 + 1}{(\frac{dt}{dr})^2} + R = 0;$$

ma $(\frac{dt}{dr}) = \frac{r^2}{c}(\frac{d\omega}{dr})$; dunque

$$\frac{\left\{r^2(\frac{d\omega}{dr})^2 + 1\right\}c^2}{r^4(\frac{d\omega}{dr})^2} + R = 0,$$

$(\frac{d\omega}{dr})^2 \left\{c^2 + r^2 R\right\} r^2 + c^2 = 0$, e di qui

$$(\tfrac{d\omega}{dr}) = \frac{c}{r\sqrt{\left\{-c^2 - r^2 R\right\}}}.$$

Questa è l'equazione il cui integrale ci darà la relazione tra r ed ω, cioè l'equazione della curva descritta dal mobile.

Ora essendo R l' integrale della quantità $2\varphi . dr$, sarà egualmente $R - a$ quest' integrale (indicando per a una costante arbitraria); avremo allora

$$(8) \ldots\ldots \left(\frac{d\omega}{dr}\right) = \frac{c}{r\left\{-c^2 - r^2 R + r^2 a\right\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{c}{r^2\left\{a - R - \frac{c^2}{r^2}\right\}^{\frac{1}{2}}};$$

se poi si sostituisce il valore di $\left(\frac{d\omega}{dr}\right)$ nell' equazione $r^2\left(\frac{d\omega}{dr}\right) = c\left(\frac{dt}{dr}\right)$, si avrà

$$(9) \ldots\ldots \left(\frac{dt}{dr}\right) = \frac{1}{\left\{a - R - \frac{c^2}{r^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Se si prendono gl' integrali di queste due ultime equazioni (8), (9), conosceremo dalla (8) ω dato per r, e dalla (9) il tempo t dato per r, e quindi per ω. Sapremo in questa guisa il tempo che impiegar debbe un corpo a descrivere un arco di quella curva che copre un dato angolo.

§. 327. Applichiamo questa soluzione generale al movimento dei Pianeti e delle Comete attorno del Sole.

In questo caso si farà $\varphi = \frac{F}{r^2}$, F essendo la forza attrattiva del Sole alla distanza 1, ed avremo

$R = \int 2\varphi . dr = \int \frac{2F dr}{r^2} = -\frac{2F}{r}$; dunque

$$\left(\frac{d\omega}{dr}\right) = \frac{c}{r^2\left\{a + \frac{2F}{r} - \frac{c^2}{r^2}\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

$$\left(\frac{dt}{dr}\right) = \frac{1}{\left\{a + \frac{2F}{r} - \frac{c^2}{r^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}, \text{ ovvero}$$

$$\left(\frac{d\omega}{dr}\right) = \frac{c : \sqrt{2}}{r^2\left\{\frac{a}{2} + \frac{F}{r} - \frac{c^2}{2r^2}\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

$$\left(\frac{dt}{dr}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}.\left\{\frac{a}{2} + \frac{F}{r} - \frac{c^2}{2r^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}:$$

cangiamo la forma della costante, e facciamo $c : \sqrt{2} = A$, $\frac{a}{2} = E$, e sarà

$$\left(\frac{dt}{dr}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}.\left\{E + \frac{F}{r} - \frac{A^2}{r^2}\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

$$\left(\frac{d\omega}{dr}\right) = \frac{A}{r^2\left\{E + \frac{F}{r} - \frac{A^2}{r^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Per avere l' integrale dell' equazione ultima, moltiplichiamola per dr, quindi facciamo $-\frac{A}{r} + \frac{F}{2A} = z$, ed avremo $\frac{A}{r^2} = dz$,

$E + \frac{F}{r} - \frac{A^2}{r^2} = E + \frac{F^2}{4A^2} - z^2$, e quindi

$$\omega = \int \frac{dz}{\sqrt{\left\{E + \frac{F^2}{4A^2} - z^2\right\}}}$$

essendo E, F, A quantità costanti. Poniamo per semplicità di calcolo $m^2 = E + \frac{F^2}{4A^2}$, e si avrà

$\omega = \int \frac{dz}{\sqrt{(m^2 - z^2)}} = -Arc. \cos\frac{z}{m} + \gamma$, essendo γ una costante arbitraria: sarà dunque $\omega - \gamma = -Arc. \cos\frac{z}{m}$, ed in conseguenza $\frac{z}{m} = \cos(\omega - \gamma)$, $z = m \cos(\omega - \gamma)$; onde ponendo per z e per m il respettivo valore, si avrà

$$-\frac{A}{r} + \frac{F}{2A} = \sqrt{\left\{E + \frac{F^2}{4A^2}\right\}} . \cos(\omega - \gamma).$$

Se ora dividiamo quest' equazione per $\frac{F}{2A}$, e facciamo

$p = \frac{2A^2}{F}$, $e = \sqrt{\left\{1 + \frac{4A^2E}{F^2}\right\}}$, otterremo

$r = \frac{p}{1 - e\cos(\omega - \gamma)}$; e questa sarà l' equazione della curva cercata; così i Pianeti e le Comete essendo attratti dal Sole con una forza reciproca al quadrato della loro distanza, descriveranno delle orbite, la cui equazione sarà

$$r = \frac{p}{1 - e\cos(\omega - \gamma)}.$$

Consideriamo più particolarmente l' equazione di questa curva, e si veda se essa assomigliasi ad alcuna delle curve che conosciamo.

Siccome in quest' equazione le quantità p ed e sono costanti, solo essendovi di variabile ω ed r, così ne segue che la lunghezza del raggio vettore appartenente a questa curva, cresce o scema col crescere e scemare di ω, ovvero di $\cos(\omega - \gamma)$.

E' poi evidente che quando $\cos(\omega - \gamma)$ sarà massimo, anche r sarà il massimo raggio vettore; e quando $\cos(\omega - \gamma)$ avrà il minimo valore, r sarà il minimo raggio vettore.

Ora il più gran valore di un coseno è l' unità, ed il più piccolo è l' unità negativa; dunque il più gran raggio vettore corrisponderà a $\cos(\omega - \gamma) = 1$, ed il più piccolo a $\cos(\omega - \gamma) = -1$.

Acciò sia $\cos(\omega - \gamma) = 1$, conviene che abbiasi $\omega = \gamma$, ed acciò sia $\cos(\omega - \gamma) = -1$, $\omega = 180° + \gamma$; dunque la curva descritta dal mobile avrà per r un massimo ed un minimo; questo raggio, essendo massimo quando $\omega = \gamma$, egli avrà allora per valore $r = \frac{p}{1 - e}$; ed essendo minimo quando $\omega = \gamma + 180°$, egli sarà $r = \frac{p}{1 + e}$. Al di là di questi due punti ritornano gli stessi valori per r, ed in conseguenza al di quà ed al di là della linea formata dal massimo e dal minimo raggio vettore (giacchè questi due raggi facendo tra loro un angolo di 180° sono per diritto) ricorrono i medesimi raggi vettori; dunque i Pianeti descrivono una curva che ha due parti eguali e simili, al di quà ed al di là della linea

Fig. dei due raggi vettori massimo e minimo: è di più rientrante in se medesima.

La semisomma poi dei due raggi vettori massimo e minimo è

$\left\{\frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e}\right\} : 2 = \frac{p}{1-e^2}$; e la semidifferenza è

$\left\{\frac{p}{1-e} - \frac{p}{1+e}\right\} : 2 = \frac{ep}{1-e^2}$, di modo che il rapporto della semisomma alla semidifferenza eguaglia la quantità e, giacchè $\frac{p}{1-e^2} : \frac{ep}{1-e^2} :: 1 : e$.

Se si fa $\omega = \gamma + 90°$, nel qual caso la direzione di r sarà perpendicolare alla linea del massimo e minimo raggio vettore, avremo

$$r = \frac{p}{1 - e\cos 90°} = p.$$

11 Nella Fig. 11 noi poniamo sott' occhio tutto il risultato di questa analisi. AC è il massimo raggio vettore; AB il minimo. La curva BDCEB è l' orbita rientrante in se medesima; AM, AM' sono due eguali raggi vettori distanti di un medesimo angolo dalla linea BC; DA è il raggio vettore perpendicolare a BC.

§. 328. L' equazione della curva contiene la relazione tra il raggio vettore e l' angolo, che questo fa con l' asse degli x: per riconoscerla, introduciamovi di nuovo le coordinate x, y. Per questo consideriamo il centro dei raggi vettori come l' origine delle ascisse. Prendiamo l' asse degli x nella direzione del maggior raggio vettore, giacchè la posizione degli assi è arbitraria. Si osservi dunque la Fig. 12.

12 L' angolo che un raggio vettore qualunque AM fa col massimo raggio vettore AC, ed in questo caso con l' asse degli x, è (come abbiamo detto quì sopra) $\omega - \gamma$: si avrà dunque $x = r\cos(\omega - \gamma)$, $y = r\,sen(\omega - \gamma)$, e l' equazione $r - er\cos(\omega - \gamma) = p$, diverrà $\sqrt{(x^2 + y^2)} - ex = p$, ovvero

(A) . . . . . $p^2 + 2pex + (e^2 - 1)x^2 - y^2 = 0$, la quale essendo del secondo ordine, ci dà sempre una sezione conica.

Per riconoscere quale sia questa sezione, ecco come si farà.

Siano b ed a il semiasse maggiore, ed il semiasse minore di una ellisse: siano y, z le coordinate di questa curva prese dal centro, e la di lei equazione sarà

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - z^2).$$

Indichiamo per c il rapporto della distanza di uno dei fuochi dal centro alla metà dell' asse maggiore, dimodochè significando per D questa distanza, sia $\frac{D}{a} = c$. Sarà $D = ac$, quindi $b^2 = a^2 - a^2c^2$, e perciò

$$y^2 = \frac{a^2 - a^2c^2}{a^2}(a^2 - z^2) = \frac{1 - c^2}{1}(a^2 - z^2):$$ la quantità c chiamasi *Escentricità*.

Cangiamo l' origine delle ascisse e trasportiamola in uno dei fuochi. A tale effetto dovrem fare $z = x - ac$, essendo x la nuova ascissa, ed avremo

$$y^2 = (1 - c^2)(a^2 - x^2 + 2acx - a^2c^2),$$

(B) . . . . $y^2 = (1 - c^2)^2 a^2 + 2a(1 - c^2)cx + x^2(c^2 - 1)$.

Questa è l' equazione di una ellisse il cui semiasse maggiore è a; l' escentricità c; l' origine delle coordinate in uno dei fuochi.

Paragoniamo l' equazione (B) con (A), e concluderemo che quest' orbita è una ellisse; che ha per semiasse maggiore $\frac{p}{1 - e^2}$; che ha per escentricità e; e che l' origine delle ascisse è in uno dei fuochi. Trovato il semiasse maggiore, avrassi il minore $= \sqrt{(a^2 - a^2e^2)} = a(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}$.

Di più il parametro di questa ellisse (il quale eguaglia il quadrato del semiasse minore diviso pel semiasse maggiore), sarà

$$\frac{a^2(1 - e^2)}{a} = a(1 - e^2) = \frac{p}{1 - e^2}(1 - e^2) = p.$$

Ma l' equazione in x, y ci dà l' ordinata $y = p$ nell' origine delle ascisse, cioè quando $x = 0$; dunque anche di quì si rileva, che quest' origine è in uno dei fuochi di quella Sezione Conica, giacchè la proprietà caratteristica di questo punto è d' avere l' ordinata eguale al parametro.

Così le orbite dei Pianeti e delle Comete sono ellissi, che hanno il Sole in uno dei fuochi, e la cui equazione generale è

$$r = \frac{p'(1 - e^2)}{1 - e\cos(\omega - \gamma)},$$ p' essendo la distanza media, cioè la semisomma del massimo e del minimo raggio vettore, e l' escentricità, r il raggio vettore che fa con la linea del massimo raggio un angolo $\omega - \gamma$.

§. 329. Siccome io voglio che i miei Lettori si addestrino nelle applicazioni del Calcolo Sublime a problemi di qualunque specie, perciò mi sono determinato ad esporne uno relativo al moto degli animali: d' altr' onde questo è della maggiore importanza in differenti usi della vita. Noi lo dobbiamo (a) al sommo Geometra Fossombroni, il quale è al mio parere il solo, che nell' applicare la Matematica alla Meccanica animale, abbia battuta una strada intieramente nuova ed indipendente da quella del Gran Borelli, felice fondatore di quella Scienza.

Supponiamo dunque che sopra un piano orizzontale un uomo caricato di un peso passeggi, e che di più nel muoversi debba strascinare su quel piano medesimo un altro peso, unito per mezzo di una corda di data lunghezza al centro di gravità di quell' uomo caricato. Cerchiamo la curva che descrive questo centro di gravità.

Primieramente osservo che questa non può essere formata da archi di circolo corrispondenti ai passi dell' uomo: ciò avverrebbe se le gambe non si allungassero ed accorciassero nel fare il passo; neppure la curva può essere tutta in un piano

(a) Atti della Società Italiana Tom. XII. par. 1. an. 1805.

e questo per causa di quella ondulazione a destra ed a sinistra, che ha l' uomo nel camminare, la quale nasce dall' alternare il piede che si posa sul terreno: noi dunque la riguarderemo come una curva a doppia curvatura. Sarà questa composta di tante porzioni eguali e simili tra di loro, ciascuna delle quali corrisponderà ad un passo. Queste porzioni alternativamente si volgeranno a destra e a sinistra, di modo che la projezione di tutta la curva sopra il piano orizzontale sarà una specie di Zig Zag.

Per poco che si rifletta sul meccanismo con cui formasi il passo, ci persuaderemo che l' uomo pel quale la verticale del centro di gravità cade tra le due piante dei piedi, quando sopra ambedue si appoggia, porta questa perpendicolare sul piede che vuol tener fermo, ed essa cade allora in un punto del calcagno; in seguito egli alza l' altro piede spingendolo avanti, e nel tempo stesso piegando in avanti tutta la macchina. Con questo movimento il centro di gravità comincia ad abbassarsi, e continuerebbe finchè il piede alzato fosse di nuovo appoggiato al pavimento, se l' uomo distendendo la gamba posteriore ed in questa guisa innalzando tutto il suo corpo, non impedisse al centro di gravità l' abbassarsi di più, mentre lo spinge ad essere a piombo sopra al calcagno del piede anteriore, posto a terra per terminare il passo.

In tal moto il punto, nel quale si riunisce lo sforzo dei muscoli per animare il passo, e che chiameremo *centro di sforzo*, al principio si trova in quel punto del calcagno, cui corrisponde il centro di gravità, in seguito a misura che si forma il passo, o che il centro di gravità si avanza, questo punto progredisce verso l' estremità del piede, e quando il passo termina, il centro di sforzo si trova sotto al dito grosso del piede medesimo. Si vede dunque che nel formarsi un passo, il centro di gravità và dalla verticale del calcagno del piede posteriore, a quella del calcagno del piede anteriore; mentre il centro di sforzo và dal punto di mezzo del calcagno del piede posteriore alla punta del dito grosso del medesimo piede.

§. 330. Supponiamo ora che il piano orizzontale sia il piano delle coordinate x, y: che l' origine di esse sia nel punto

del calcagno, cui corrisponde il centro di gravità nel principiare il passo, punto nel quale si trova il centro di sforzo in detto cominciamento: che già il passo sia cominciato, e che il centro di gravità si trovi in un punto cui corrispondono le coordinate x, y, z; che α, β siano le coordinate orizzontali del centro di sforzo dei muscoli al momento, in cui il centro di gravità si trova corrispondere alle coordinate x, y, z; che t sia il tempo impiegato dal centro di gravità nel fare quella porzione di passo; che sia r la distanza dal centro di gravità al centro di sforzo.

Rappresentiamo per M la massa dell' uomo e del peso sovrimpostole; per b la lunghezza di quella corda, cui è attaccato il peso da strascicarsi, ed è chiaro che avremo

$r = \sqrt{\{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2\}}$; che $\frac{z}{r}$ sarà il seno

dell' angolo fatto da r col piano degli x, y; che

$\frac{\sqrt{\{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\}}}{r}$ sarà il coseno del detto angolo; che

$\frac{z}{b}$ sarà il seno dell' angolo fatto col piano orizzontale dalla corda b considerata per rettilinea, e che $\frac{\sqrt{(b^2-z^2)}}{b}$ ne sarà il coseno.

Tutto questo premesso, io osservo che tre forze agiscono nel produrre il passo, cioè; 1.ª la gravità di tutta la massa, il cui effetto indico per p; 2.ª la forza ritardatrice del corpo attaccato alla corda b, il cui effetto sia indicato per R; 3.ª la forza acceleratrice prodotta dallo spiegarsi che fanno i muscoli nella direzione di r, e l' effetto di questa sia indicato per Q.

La forza di gravità non agisce che secondo l' asse degli z: la forza R decomposta secondo i tre assi, ci dà queste tre forze

$\frac{z}{b}$ R secondo l' asse degli z, e $\frac{y}{b}$ R secondo quello degli y, e

$\frac{\sqrt{\{b^2-z^2-y^2\}}}{b}$ R secondo quello degli x: la forza Q si decompone in queste tre $\frac{z}{r}Q$, $\frac{y-\beta}{r}Q$, $\frac{x-\alpha}{r}Q$ relativamente agli assi delle coordinate z, y, x.

Dunque secondo l' asse degli z vi sarà questa somma di forze $\frac{z}{r}Q - \frac{z}{b}R - p$; secondo quello degli y, quest' altra $\frac{y-\beta}{r}Q - \frac{y}{b}R$; ed infine secondo quello degli x, quest' altra somma

$$\frac{y-\alpha}{r}Q - \frac{\sqrt{(b^2-z^2-y^2)}}{b}R.$$

Abbiamo dato il segno meno alle forze R, p, perchè tendono queste a diminuire le coordinate, mentre la forza Q tende ad accrescerle. Ora le forze acceleratrici alla fine del tempo t in qualunque siasi movimento (§. 324) sono $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)$ essendo x, y, z gli spazj percorsi nel tempo t; avremo dunque queste tre equazioni

$$\frac{z}{r}Q - \frac{z}{b}R - p = \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)$$

$$\frac{y-\beta}{r}Q - \frac{y}{b}R = \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

$$\frac{x-\alpha}{r}Q - \frac{\sqrt{(b^2-z^2-y^2)}}{b}R = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right),$$ le quali contengono la soluzione del problema.

§. 331. Sia m il rapporto della lunghezza del passo a quella del piede, ed n il rapporto della larghezza del passo a quella del piede; supponiamo cioè $\alpha = mx$, $\beta = ny$, e quelle tre prime equazioni diverranno

$$\frac{z}{r}Q - \frac{z}{b}R - p = \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right),$$

$$\frac{y}{r}(1-m)Q - \frac{y}{b}R = \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right),$$

$$\frac{x}{r}(1-n)Q - \frac{\sqrt{(b^2-z^2-y^2)}}{b}R = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right).$$

Se noi facciamo $R = 0$, cioè se noi supponiamo che l' uomo non debba trasportar che la propria macchina ed il peso di cui è caricato, le tre equazioni si ridurranno più semplici, e saranno

$$\frac{z}{r}Q - p = \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right),$$

$$\frac{y}{r}(1-m)Q = \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right),$$

$$\frac{x}{r}(1-n)Q = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right),$$ ove rammenteremo che

$$r = \sqrt{\{z^2 + x^2(1-n)^2 + (1-m)^2y^2\}}.$$

Moltiplichiamo la prima equazione per $\left(\frac{dz}{dt}\right)$, la seconda per $(1-m)\left(\frac{dy}{dt}\right)$ e la terza per $(1-n)\left(\frac{dx}{dt}\right)$, e quindi sommandole insieme, avremo

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)dt + (1-m)\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)dt + (1-n)\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)dt =$$

$$Q\frac{zdz + (1-m)^2ydy + (1-n)^2xdx}{\sqrt{\{z^2 + y^2(1-m)^2 + x^2(1-n)^2\}}} - pdz,$$ che si integra,

e si ottiene

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + (1-m)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + (1-n)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = Q\sqrt{\{z^2 + y^2 \times (1-m)^2 + x^2(1-n)^2\}} - pz + C,$$ essendo C la costante arbitraria aggiunta integrando.

Siccome $(\frac{dz}{dt})$, $(\frac{dy}{dt})$, $(\frac{dx}{dt})$ sono le velocità del centro di gravità nelle direzioni dei tre assi, così chiamando V, V', V'' queste tre velocità, avremo l' equazione finita

$$V^2 + (1-m)V'^2 + (1-n)V''^2 = Q\sqrt{\{z^2 + y^2(1-m)^2 + x^2(1-n)^2\}} - pz + C.$$

Interessante sarebbe trattenersi nei dettagli di tal Problema, ma i limiti di questa Opera non lo permettono; si legga a tal fine la Memoria citata nel §. 329, e quella sopra lo stesso oggetto, che trovasi nella Par. II. Tom. XII. della Società Italiana.

C A P. XVI.

Estensione del Metodo dei Massimi e Minimi spiegato ai §§. 57 e seguenti, conosciuto altra volta sotto il nome di Calcolo delle Variazioni.

§. 332. Data una funzione $f(x,y)$ di x e di y e data una certa relazione tra x ed y, abbiam veduto (§. 61) come giunger poteasi a trovare quel valore di x pel quale la data funzione diventava massima o minima.

Ora il metodo dei massimi e minimi può estendersi alla ricerca della relazione che esser dee tra le due variabili x, y affinchè ponendo in $f(x,y)$ invece di y il suo valore $\varphi(x)$, da tal relazione somministrato, si ottenga una funzione $F(x)$ di x, la quale sia maggiore o minore di tutte quelle, che da qualunque altra relazione tra x ed y ottener si potrebbero; così se per $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ ec. indichiamo tanti valori di y, datici da altrettante diverse relazioni tra x, y, e li sostituiamo in $f(x,y)$, avremo tante funzioni $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$ ec., e si può dimandare quale debb' essere la funzione $\varphi(x)$, acciò la $F(x)$ che da essa risulta, sia la maggiore o la minore di ciascuna di quelle altre.

Supponendo rappresentato per $F(x)$ il massimo (quello che dico vale anche per il minimo) dato dalla relazione $y=\varphi(x)$, e da $F'(x)$, $F''(x)$ ec., quelle funzioni di x, dateci da qualunque altre relazioni $y = \varphi'(x)$, $y = \varphi''(x)$ ec., farò osservare che la $F(x)$ dicesi massima tra tutte le $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$ ec., quando ponendo in ciascuna di esse lo stesso valore per x, qualunque d' altr' onde esso siasi, è sempre $F(x)$ maggiore di $F'(x)$, $F''(x)$ ec.; così se noi facciamo $x = a$, a', a'', a''' ec., perchè $F(x)$ sia massima, debbe aversi

$$F(a) > F'(a) > F''(a) \text{ ec.},$$
$$F(a') > F'(a') > F''(a') \text{ ec.},$$
$$F(a'') > F'(a'') > F''(a'') \text{ ec.},$$
$$\text{ec.} \qquad\qquad \text{ec.}$$

Allorchè la $F(x)$ goderà di questa proprietà, anche la somma

$F(a) + F(a') + F(a'') + \text{ec.}$ sarà maggiore delle corrispondenti somme

$F'(a) + F'(a') + F'(a'') + \text{ec.}$

$F''(a) + F''(a') + F''(a'') + \text{ec.}$

ec. ec.

Supponiamo che tutti i valori che si possono dare ad x, disposti per ordine di grandezza, essendo primi i minori, siano

$$\ldots\ldots\ {}'''a,\ {}''a,\ {}'a,\ a,\ a',\ a'',\ a''',\ \ldots\ldots\ a^{(n)},$$

ed indichiamo per $\int F(a^{(n)})$ la somma

$$F(a^{(n)}) + F(a^{(n-1)}) + \ldots + F(a'') + F(a') + F(a) + F('a) + \ldots$$

sarà $\int F(a) = F(a) + F('a) + F(''a) + \ldots\ldots$

e quindi rappresentando per a e per $a^{(n)}$ due valori di x comunque distanti tra loro, ancora la differenza

$\int F(a^{(n)}) - \int F(a)$ sarà maggiore di qualunque altra differenza

$$\int F'(a^{(n)}) - \int F'(a)$$
$$\int F''(a^{(n)}) - \int F''(a)$$
$$\text{ec.} \qquad \text{ec.}$$

Così la funzione $F(x)$ essendo massima per ciascun valore della x, lo sarà ancora per tutta la di lei estensione tra due valori qualunque di x, presi per limiti, cioè tra $x = a$, ed $x = a^{(n)}$.

Ma l' inversa di questa proposizione non è egualmente vera.

La somma $\int F(x)$ può tra due limiti conosciuti della x essere un massimo, senza che $F(x)$ lo sia per ciascuno dei valori di x intermedj a quei due limiti medesimi; si può ricercare quella relazione $y = \varphi(x)$ la quale renda la quantità $\int f(x, y)$ un massimo da $x = A$ sino ad $x = B$, cioè renda la differenza tra $\int F(B)$, $\int F(A)$ maggiore di qualunque altra differenza $\int F'(B)$, $\int F'(A)$, e facilmente comprendesi che ciò può anche accadere, senza che sia sempre $F(m) > F'(m)$ per tutti i valori m, m ec., della x compresi tra i limiti A, B. La somma poi di tutti i valori possibili di $f(x, y)$ presi da $x = A$ sino ad $x = B$ è l' integrale $\int f(x, y)\,dx$ preso tra questi due limiti stessi (a).

(a) Ecco come si può dimostrare quanto quì sopra si asserisce.

Se per fx si rappresenta una funzione qualunque di x, e per Fx la somma di tutti i valori possibili che può ricevere la fx, cioè di tutti i valori da $f(0)$ sino a fx inclusive, i quali sono x di numero, sarà sempre $Fx = \int fx \,.\, dx$. Infatti se x diviene $x + \omega$, sarà $F(x + \omega)$ la somma di tutti i valori possibili da $f(0)$ sino a $f(x + \omega)$ inclusive, i quali sono $x + \omega$ di numero: avremo dunque $F(x + \omega) - F(x)$ per esprimere la somma di tutti i valori possibili da fx sino a $f(x + \omega)$, i quali sono ω di numero: ora $\omega f x$ esprime la somma di un numero ω di valori eguali a fx, ed $\omega f(x + \omega)$ esprime la somma di un numero ω di valori eguali a $f(x + \omega)$; e siccome di queste due somme $\omega f x$, $\omega f(x + \omega)$ una debb' esser minore, l' altra maggiore di $F(x + \omega) - Fx$ (imperocchè si suppone che i valori di fx vadano sempre crescendo, o sempre scemando da fx sino a $f(x + \omega)$); dunque con un ragionamento simile a quello fatto per la quadratura e rettificazione delle curve, si dimostrerà che ciò non può aver luogo per tutti i valori di ω, senza che

§. 333. Tutto il fin qui detto appartiene sì alle cose Geometriche, che alle Meccaniche, ed in generale alle quantità di qualunque specie esse siano, purchè possano esprimersi analiticamente: noi però a maggiore schiarimento riprenderemo queste dottrine applicandole alle linee curve. In questa guisa potremo metter sott' occhio le quantità che divenir debbono massime o minime, o d' altr' onde niente saranno con ciò limitate le nostre Teorie. Fig.

Sia la curva EF riferita agli assi ortogonali AB, AB': 13
siano per un qualunque punto M, AP $= x$, PM $= y$ le coordinate, e siano a, b, c ec., i parametri della curva.

Quando è determinata la relazione tra x, y, cioè quando è data un' equazione tra x, y, a, b ec., cioè $f(x, y, a, b$ ec.$) = 0$ tutte le affezioni e proprietà della curva, le quali appartengono a ciascuno dei suoi punti, sono anche determinate; poichè esse riguardano quantità espresse in funzioni, come $F(x, y, a, b$ ec.$)$ di quelle coordinate e dei parametri della curva medesima; anzi qualunque di queste quantità si può considerare come una funzione dell' ascissa x soltanto, che corrisponde al punto, cui la stessa proprietà appartiene, da che per mezzo dell' equazione tra x ed y, è in nostro arbitrio eliminare la y da una funzione qualunque, che la contenga; così (tralasciando di scrivere le costanti) da una funzione $F(x)$

sia $\left(\frac{dF}{dx}\right) = fx$, ed in conseguenza $Fx = \int fx \,.\, dx$.

In generale essendo u qualunque funzione di x, sempre $\int f(u) \,.\, du = \int f(u) \,.\, \left(\frac{du}{dx}\right) dx$ sarà la somma di tutti i valori possibili di $f(u)$ da $u = 0$ sino ad u.

La stessa formula ci esprime anche la somma dei valori di $f(u)$ da $u = b$, sino ad u, e ciò per mezzo dell' opportuna determinazione della costante introdotta dall' integrazione; infatti indicando quell' integrale per Fu, si ha $\int f(u) \,.\, du = Fu + C$, e supponendo che la nostra formula, o l' integrale debba cominciare quando $u = b$, si avrà $0 = Fb + C$, e quindi $C = -Fb$, ed in conseguenza $\int fu\,du = Fu - Fb$,

7

Fig. 13 sarà rappresentata quella quantità che si conviene ad un punto qualunque M: ogni punto della curva avrà in generale un diverso valore di quella quantità, secondo che sarà diversa la sua ascissa, e la ricerca di quel punto, o la determinazione dell' ascissa, che corrisponde a quel punto, in cui la $F(x)$ perviene al suo massimo o al suo minimo valore, è stato l' oggetto che ha avuto in mira la dottrina dei massimi e dei minimi spiegata ai §§. 57 e seguenti.

Al presente noi supponiamo incognita la relazione tra x ed y, e di tutte le infinite relazioni che possono immaginarsi, e ciascuna delle quali rappresenta una delle curve ROS, EMF, HNL ec., ci proponiamo di ritrovare quella di una curva EMF tale, che paragonata essa con qualunque altra delle infinite curve HNL, ROS ec., goda in ciascun di lei punto M di una certa proprietà di massimo o di minimo relativamente agli altri punti N, O ec., che a quello corrispondono nelle dette curve; vale a dire indicando per $'y, y, y'$ le tre coordinate PN, PM, PO, e rappresentando per $F(x, y)$ una quantità appartenente al punto M nella curva EMF, per il che saranno rappresentate da $F(x, 'y)$, $F(x, y')$ le simili quantità appartenenti ai punti N, O ec., nell' altre curve, noi ci proponiamo di trovare quella relazione tra x ed y che rende $F(x, y)$ maggiore o minore di $F(x, 'y)$ e di $F(x, y')$ nel tempo stesso, qualunque d' altr' onde siano le relazioni tra x ed $'y$, e tra x ed y'.

Così se si dimandasse quale tra tutte le curve ROS, EMF ec., è quella in cui per qualunque di lei punto il quadrato dell' ordinata diminuito del rettangolo dell' ascissa nell' ordinata stessa, cioè la quantità $y^2 - xy$, è un massimo o un minimo, ciò significherebbe che vuolsi avere quella relazione tra x ed y, la cui curva EMF, ha la proprietà che in qualunque suo punto M la quantità $(PM)^2 - AP.PM$ è sempre maggiore o minore delle simili quantità $(PO)^2 - AP.PO$, $(PN)^2 - AP.PN$ ec., appartenenti ai punti N, O ec., presi in qualunque delle

altre curve, e corrispondenti alla stessa ascissa cui corrisponde Fig.
il punto M. 13

§. 334. La quantità $F(x, y)$ dovendo essere per ciascun punto M della curva EMF massima o minima, relativamente alle altre simili quantità corrispondenti ai punti N, O ec., nelle altre curve, è chiaro che anche la somma di tutte le quantità $F(x, y)$ appartenenti a tutti i punti possibili E, G, M, F ec. della curva EMF, o corrispondenti a tutte le ascisse possibili da C in D, sarà nello stesso tempo maggiore o minore di ciascuna delle somme delle simili quantità $F(x, 'y)$, $F(x, y')$ appartenenti a tutti i punti possibili R, g, O, S ec., H, h, N, L ec., nelle altre curve qualunque ROS, HNL, o corrispondenti a tutte le ascisse possibili da C in D.

Ma può essere la somma delle quantità $F(x, y)$ maggiore o minore di quella delle quantità $F(x, 'y)$, senza che per ogni punto G della curva EMF la quantità $F(x, y)$, che ad esso appartiene, sia nello stesso tempo maggiore o minore della quantità $F(x, 'y)$ appartenente al punto g a lui omologo in una qualunque altra curva ROS; imperocchè la somma delle quantità corrispondenti ad un certo tratto di curva EM, può esser minore della somma di quelle che convengono al tratto RO omologo di un' altra qualunque curva ROS, e nulla ostante la somma di tutte le quantità da E in F superare la somma di quelle da R in S, e ciò per cagione dell' eccesso delle quantità da M in F sopra quelle da O in S, il quale può superare non che eguagliare il difetto delle due prime somme; così potrà esservi il massimo o minimo per un intiero arco di curva terminato tra due limiti, mentre questo stesso massimo può non aver luogo per gli elementi od archi che compongono la curva medesima.

§. 335. Spiegata distesamente la natura delle ricerche che siamo per intraprendere, incominciamo dalle cose più semplici di questa dottrina per passare alle più composte.

Nella funzione $F(x, y)$ di x e di y può la y trovarsi sotto i segni differenziali, o sotto i segni integrali, o sbarazzata affatto da questi segni. Si dice esservi sotto i segni differenziali quando nella formazione della funzione entrano non solo x ed y, ma ancora le quantità $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ ec.: essa vi è sotto i segni integrali, quando la funzione è formata da x, y, $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ec., $\int M dx$, $\int^2 N dx^2$ ec., essendo M ed N funzioni di x, y, $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ec. Così $y^2 - xy$ è una funzione nella quale la y non è imbarazzata nè da segni differenziali, nè da integrali; la funzione $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - xy$ contiene la y sotto il segno differenziale, ed $x\int\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)\right)dx - y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)$ contiene la stessa variabile sotto il segno integrale; d' ora in avanti tra le parentesi accanto alla funzione F, noteremo la y con i segni da cui è affetta; così $F(x, y)$ ci indicherà una funzione nella quale la y non è imbarazzata da differenziali ed integrali.

Si dimandi la relazione che esser deve tra x ed y, perchè la funzione data $F(x, y)$ sia massima, o minima.

Rappresenti $y = \varphi(x)$ questa relazione, ed avremo $F(x, \varphi(x))$ per esprimere questo massimo o questo minimo: ora supponiamo che quella relazione si muti, e divenga $y = \varphi(x) + i\omega$, ovvero $y = \varphi(x) - i\omega$ (indicando per i una costante indeterminata, e per ω una funzione di x parimente indeterminata) ed avremo le due funzioni $F(x, \varphi(x) + i\omega)$, $F(x, \varphi(x) - i\omega)$, le quali dovranno esser maggiori di $F(x, \varphi(x))$ nel caso del minimo, e minori nel massimo, comunque d' altr' onde piccola possa prendersi l' indeterminata i: sarà dunque, riponendo y per $\varphi(x)$, e scrivendo F per $F(x, y)$, $F(x, y + i\omega) - F(x, y) = i\omega\left(\frac{dF}{dy}\right) + \frac{i^2\omega^2}{2}\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right) + \text{ec.} =$ ad una quantità positiva nel minimo e negativa nel massimo, e parimente

$$F(x,y-i\omega) - F(x,y) = -i\omega\left(\frac{dF}{dy}\right) + \frac{i^2\omega^2}{2}\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right) + \text{ec.}$$

$=$ ad una quantità negativa nel massimo e positiva nel minimo; dunque per un ragionamento simile a quello fatto al §. 57, concluderemo che per determinare il massimo od il minimo debbe aversi l'equazione $\left(\frac{dF}{dy}\right) = 0$; da questa ricaveremo il valore di y in x: la funzione $F(x,y)$ è massima se $\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)$ è negativa, ed è minima se positiva.

Per farne un esempio, sia $F(x,y) = y^2 - xy$, ed avremo $\left(\frac{dF}{dy}\right) = 2y - x = 0$, $\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right) = 2$: dunque tra tutte le linee che possono disegnarsi in un piano, quella, nella quale il quadrato di una qualunque sua ordinata diminuito del rettangolo dell' ordinata nell' ascissa, è un minimo, ha per equazione $2y - x = 0$; essa dunque è una linea retta, nella quale le ordinate sono sempre eguali alla metà dell' ascisse corrispondenti, e fa con l' asse un angolo di cui la tangente è $= \frac{1}{2}$.

§. 336. Supponiamo che la funzione, la quale dee divenire massima o minima contenga x, y, e $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, sia cioè $F\left(x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)\right)$ ovvero $F(x,y,p)$, poichè noi d' ora in avanti indicheremo per p la quantità $\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Questa quantità $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, la quale può considerarsi come una funzione cognita di x, allorchè si conosce la relazione tra x ed y, è in questo caso una funzione ancor essa incognita di x come lo era la y: queste due funzioni però sono dipendenti tra loro, e si ottengono una dall' altra per mezzo della differenziazione.

Sia $y = \varphi(x)$ la relazione la quale rende questa funzione massima o minima, ed avremo $p = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$; così il massimo

o minimo sarà $F\left(x, \varphi, \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\right)$. Quando φ sostituito invece di y, rende la funzione massima o minima, se poniamo $\varphi + i\omega$, ovvero $\varphi - i\omega$ invece di y, e perciò $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + i\left(\frac{d\omega}{dx}\right)$, $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) - i\left(\frac{d\omega}{dx}\right)$ invece di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, le due funzioni che indi derivano

$$F\left(x, \varphi + i\omega, \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + i\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right)$$

$$F\left(x, \varphi - i\omega, \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) - i\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right)$$

debbono essere minori di $F\left(x, \varphi, \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\right)$ nel caso del massimo, e maggiori nel minimo, comunque piccola possa prendersi la costante i; dunque (ritenendo y per φ) le differenze

$$F\left(x, y + i\omega, p + i\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right) - F(x,y,p)$$

$$F\left(x, y - i\omega, p - i\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right) - F(x,y,p)$$

debbono essere positive per il minimo e negative per il massimo.

Queste differenze sviluppate in serie secondo le potenze di i per mezzo delle formule del §. 25, sono

$$+ i\left\{\omega\left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{dF}{dp}\right)\right\} + \frac{i^2}{2}\left\{\omega^2\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right) + 2\omega\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d^2F}{dy\,dp}\right) + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2\left(\frac{d^2F}{dp^2}\right)\right\} + \frac{i^3}{2.3}\left\{\omega^3\left(\frac{d^3F}{dy^3}\right) + \text{ec.}\right\} + \text{ec.}$$

$$- i\left\{\omega\left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{dF}{dp}\right)\right\} + \frac{i^2}{2}\left\{\omega^2\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right) + 2\omega\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d^2F}{dy\,dp}\right) + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2\left(\frac{d^2F}{dp^2}\right)\right\} - \frac{i^3}{2.3}\left\{\omega^3\left(\frac{d^3F}{dy^3}\right) + \text{ec.}\right\} + \text{ec.},$$

e debbono essere negative nel massimo e positive nel minimo.

Affinchè ciò succeda per qualunque valore di i, bisogna che i coefficienti della prima potenza di i si annullino da se medesimi, e che quei della seconda siano negativi nel massimo e positivi nel minimo: l' equazione dunque che debbe darci il massimo od il minimo sarà

$$(a) \ldots\ldots \omega\left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{dF}{dp}\right) = 0.$$

Avremo il massimo quando il coefficiente di i^2 sarà negativo, ed il minimo se sarà positivo.

Ora l' equazione (a) dovendo esser vera per qualunque valore di ω, è necessario che i diversi termini della medesima si annullino da se stessi; avremo perciò $\left(\frac{dF}{dy}\right) = 0$, $\left(\frac{dF}{dp}\right) = 0$: queste due equazioni non possono sussistere nello stesso tempo a meno che esse non abbiano un fattor comune funzione di x, y, e p, il quale eguagliandosi a zero, vi soddisfaccia simultaneamente, o che una inchinda in se l' altre: fuori di questi casi, determinata in virtù della prima equazione, la relazione tra x ed y, resta anche determinata quella tra p ed x, la quale in generale non soddisfarà alla seconda equazione $\left(\frac{dF}{dp}\right) = 0$: dunque non si può in generale risolvere questo problema quando si voglia che il massimo o il minimo sia preso relativamente alle due funzioni variabili y e p.

Per questo ci contenteremo di ricercarlo relativamente alla y, oppure alla p, ed avremo in questa guisa due soluzioni del problema: la relazione allora per determinare y in x ci sarà data dall' equazione $\left(\frac{dF}{dy}\right) = 0$ ovvero $\left(\frac{dF}{dp}\right) = 0$, secondo che avrem cercato il massimo o il minimo relativamente alla y od alla p. Vi sarà il massimo rapporto ad y se $\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)$ sarà negativa, ed il minimo nel caso opposto; e relativamente a p, il massimo ed il minimo dipenderanno dall' essere $\left(\frac{d^2F}{dp^2}\right)$ quantità negativa o positiva.

Fig. § 337. Generalizzando questo ragionamento, sarà facile conchiudere, che se dimandasi la curva nella quale una qualunque data funzione di $x, y, p, q = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right), r = \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ ec., debba essere un massimo o un minimo, si potrà cercare il massimo o il minimo relativamente a ciascuna delle quantità y, p, q, r ec., per il che avremo tante soluzioni differenti, quante sono le stesse quantità; l' equazione poi la quale conterrà la relazione che si conviene al massimo o al minimo, sarà in generale un' equazione differenziale dello stesso ordine, del quale è la funzione proposta per diventare massima o minima.

Facciamo un esempio. Si dimandi la curva EF, per la
14 quale condotta in un qualunque di lei punto M la tangente TMt che incontri in T e t due ordinate corrispondenti alle ascisse AB $= m$, AC $= n$, prolungate se fia bisogno, il prodotto delle porzioni TN, tn, intercette tra l' asse e la tangente, sia un massimo o un minimo.

Chiamando α e β le coordinate della tangente Tt, abbiam trovata al §. 78. la di lei equazione così espressa

$\beta = y - x\left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\alpha$; dunque facendo in essa $\alpha = m$, $\alpha = n$, avremo

$$TB = y - x\left(\frac{dy}{dx}\right) + m\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

tC $= y - x\left(\frac{dy}{dx}\right) + n\left(\frac{dy}{dx}\right)$, e perciò sarà

$\left\{y + (m - x)\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}\left\{y + (n - x)\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}$, ovvero

$\left\{y + (m - x)p\right\}\left\{y + (n - x)p\right\}$ la quantità che debbe essere massima o minima.

Ora secondo ciò che abbiam detto quì sopra, possiam prendere il massimo o il minimo per rapporto all' una o all' altra delle due quantità y e p.

Prendiamolo relativamente alla variabile p, che determina la posizione della tangente, e le due coordinate x, y saranno allora riguardate come date per ciascun punto della curva.

Indichiamo per F la quantità che dee divenir massima, ed avremo Fig.

$$\left(\frac{dF}{dp}\right)=(y+(n-x)p)(m-x)+(y+(m-x)p)\times$$
$$(n-x)=0$$
$$\left(\frac{d^2F}{dp^2}\right)=2(m-x)(n-x).$$

La prima equazione ci darà la ricercata relazione tra x ed y, che sarà $\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{(2x-m-n)y}{2(m-x)(n-x)}$. La seconda ci dice che il massimo ha luogo in tutta la porzione di curva, per la quale le due quantità $m-x$, $n-x$, hanno segni differenti, e che il minimo ha luogo quando queste hanno lo stesso segno; di modo che il massimo ha luogo per tutti i valori di x compresi tra i limiti m, n, ed il minimo per quei valori di x, i quali cadono fuori di quei limiti.

L' equazione poi $\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{(2x-m-n)y}{2(m-x)(n-x)}$ si riduce a $2\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{x-m}+\frac{1}{x-n}$, il cui integrale è $2\log y=l(x-m)+l(x-n)+lC$, ovvero passando dai logaritmi ai numeri, $y^2=C(x-m)(x-n)$, essendo C una costante arbitraria: questa sarà l' equazione della curva ENMF, la quale goderà di quella proprietà di massimo. 14

SCOLIO.

§. 338. Il primo dei Problemi di massimi e minimi, della specie di quei che consideriamo, fu risoluto da Neuton: egli nel suo libro dei principj dette la costruzione della curva dalla rivoluzione della quale si genera un solido che soffre la minor resistenza possibile movendosi in un fluido, ma ne occultò la dimostrazione.

Nel 1696. cominciò a rivolgersi l' attenzione dei Geometri verso questioni di questa fatta. Giacomo Bernoulli per il

primo propose il famoso Problema della *Brachistocrona*, o della *linea* della più veloce discesa „ si cerca in questo una cur„ va per la concavità della quale discendendo un corpo, giun„ ga nel minor tempo possibile da un punto all' altro, essen„ do i due punti situati fuori della stessa verticale „.

Risoluto questo Problema da Leibniz, Neuton, de l' Hopital, e Giacomo Bernoulli Fratello di Giovanni, fu da lui proposto il celebre Problema degli *Isoperimetri*, nel quale cioè „ di tutte le curve che hanno lo stesso contorno si cerca quel„ la che chiude il maggiore spazio „. Giovanni Bernoulli, cui principalmente era diretto il Problema, non giunse a risolverlo, finchè nel 1701. comparve la soluzione di Giacomo Bernoulli inserita negli Atti di Lipsia.

Altri Problemi di simil natura furono proposti e risoluti dai Geometri, ed i metodi per i quali si giungeva alle lor soluzioni, erano in ultima analisi quello di Giacomo Bernoulli reso più o meno semplice; essi avevano sempre qualche cosa di particolare al Problema preso in considerazione, e lasciavano desiderare un metodo generale e comodo per trovare le equazioni differenziali, dalle cui integrazioni dipendeva la soluzione di tali questioni.

Questo metodo comparve nel 1744, e fu dato da Eulero nella sua Opera, *Methodus inveniendi lineas curvas maxima minimare proprietate gaudentes;* da quell' epoca in poi la ricerca di una curva, nella quale una certa quantità fosse massima o minima, non dipendè che dall' applicazione del metodo di Euler, ed in quell' Opera immortale non solo si trovarono risoluti i Problemi tutti, le cui soluzioni aveano fatto tanto rumore nei tempi precedenti, ma ancora un' infinità di altri forse di maggiore difficoltà.

Il metodo per altro di Euler era, per dir così, una combinazione di analisi e di sintesi. Si appoggiava ad alcune considerazioni Geometriche, e del resto vi si adoprava il Calcolo Differenziale ordinario. Il celebre Geometra dei nostri tempi l' Italiano La-Grange riuscì a fare di quelle dottrine un nuovo ramo di pura analisi, sbarazzando intieramente il metodo di Eulero dalla Geometria. Egli inventò il Calcolo delle Variazioni, per il quale stabilì il simbolo da usarsi, e dette i fondamentali teoremi di quell' algoritmo.

Eulero fu il primo a riconoscere l' eccellenza del metodo Italiano, e da quel momento i Problemi sopra le curve che godono di qualche proprietà di massimo o di minimo, si considerarono come appartenenti ad un calcolo affatto distinto dal Calcolo Differenziale.

Pareva che per tali indagini nulla più restasse a desiderare. Si aveva un metodo generale per attaccare qualunque Problema, e non si incontravano che difficoltà di puro calcolo; pure restava ancora a farsi un importantissimo avanzamento.

Eulero, cui non vi è parte di Matematica pura o mista, che non debba riguardare come il suo creatore, o almeno promotore, cercò di ricondurre il Calcolo delle Variazioni al semplice Calcolo Differenziale: egli vi riuscì riportandolo alle differenze parziali: ecco come egli si esprime a questo riguardo. „ Videbatur igitur calculus variationum, omnino singulare calculi genus constituere, verum postquam ejus indolem accuratius essem perscrutatus, universum hunc calculum perspexi levi facta immutatione, ad secundam partem Calculi Integralis „ (e questa è quella degli integrali dell' equazioni a differenze parziali) „ cujus elementa in tertio volumine operis mei de hoc argumento exposui, reduci posse „ Nov. Comment. di Pietrob. Tom. XVI. e Cal. Int. Tom. IV.

Anche il celebre Geometra Frisio partendo da considerazioni affatto diverse da quelle di Eulero, ridusse il Calcolo delle Variazioni al semplice Calcolo Differenziale. Si può vedere a questo proposito il primo Volume delle sue Opere pubblicate in Milano nel 1782.

Ritornato così il Calcolo delle Variazioni a non esser che Calcolo Differenziale, è stato liberato da La-Grange da ogni considerazione d' infinitesimi, e ridotto alle quantità finite, di modo che non forma ora che una continuazione dell' ordinario metodo dei massimi e dei minimi. Noi lo esponiamo sotto questo punto di vista, e crediamo poter asserire che non si perverrà a dar maggior semplicità a queste dottrine di quella che esse hanno, trattate in cotal guisa.

§. 339. Veniamo adesso a parlare dei massimi e dei minimi delle funzioni che contengono la y sotto il segno d' integrazione; e per limitare in qualche modo la nostra ricerca

Fig. proponiamoci di trovare il massimo o minimo di una formula integrale $\int \Psi dx$.

Incominceremo dai casi più semplici per andare in seguito ai più composti.

Di tutte le curve HL, EF, RS ec., i di cui estremi cor-
14 rispondono alle stesse ascisse $AC = a$, $AD = b$, troviamo quella per la quale $\int \Psi dx$ è massimo o minimo, essendo Ψ una funzione di x e di y.

Indicando per $\Psi(x,y)$ o semplicemente per Ψ questa funzione, si dimanda dunque la relazione tra x ed y, perchè l' integrale $\int \Psi dx$ sia massimo o minimo, preso quest' integrale da $x = a$ sino ad $x = b$, cioè supponendo che egli sia nullo quando $x = a$, e massimo o minimo quando $x = b$.

Se noi indichiamo per $y = \varphi(x)$ la cercata relazione sarà $\int \Psi(x, \varphi(x)) dx$ il massimo o minimo; facendo pertanto $y = \varphi + i\omega$, $y = \varphi - i\omega$, le due quantità

$$\int \Psi(x, \varphi + i\omega) dx$$
$$\int \Psi(x, \varphi - i\omega) dx$$

saranno nello stesso tempo maggiori di $\int \Psi(x, \varphi) dx$ nel minimo, e minori nel massimo; dunque (riponendo y per φ) le due differenze

$$\int \Psi(x, y + i\omega) dx - \int \Psi(x, y) dx$$
$$\int \Psi(x, y - i\omega) dx - \int \Psi(x, y) dx$$

saranno negative nel massimo, e positive nel minimo.

Sviluppiamo in serie queste differenze secondo le potenze di i, ed avremo

$$i\int \omega \left(\frac{d\Psi}{dy}\right) dx + \frac{i^2}{2}\int \omega^2 \left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right) dx + \text{ec.}$$

$$-i\int \omega \left(\frac{d\Psi}{dy}\right) dx + \frac{i^2}{2}\int \omega^2 \left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right) dx - \text{ec.},$$

le quali, sebbene siano composte di un numero infinito di termini, ponno però ridursi a finire ove si vuole per mezzo delle formule per calcolare i resti date al §. 36.

Siccome possiam dare ad i un valore così piccolo come ci piace, così (§. 57) potremo sempre ridurlo tale, che i due primi termini

$i\int\omega\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)dx$, $-i\int\omega\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)dx$ superino la somma di tutti quei che seguono nelle respettive serie, e che in conseguenza ciascuna di quelle serie sia positiva o negativa, se è positivo o negativo il suo primo termine: ora di quei due termini, uno è necessariamente positivo, l' altro necessariamente negativo; dunque se per y consideriamo aver sostituita quella funzione di x che soddisfà al massimo o minimo, debbono necessariamente annullarsi quei due primi termini, giacchè senza questo le due serie non sarebbero negative insieme e positive insieme; dunque perchè vi sia il massimo o minimo, dovremo avere

$\int\omega\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)dx = 0$ prendendo l' integrale da $x = a$ sino ad $x = b$, qualunque valore d' altr' onde voglia darsi ad ω.

Converrà poi che l' integrale $\int\omega^2\left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right)dx$ sia una quantità negativa nel massimo, positiva nel minimo, il tutto conforme alle Teorie dei §§. 57 e seguenti.

La prima di queste condizioni ci dà $\left(\frac{d\Psi}{dy}\right) = 0$, da cui ricaveremo l' equazione della curva cercata; e la seconda è adempita, se ridotta la quantità $\left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right)$ ad essere una funzione della sola x, rimane essa positiva per tutti i valori di x compresi tra i limiti $x = a$, $x = b$, ovvero negativa per tutti quei medesimi valori. Questa regola meglio si comprenderà dopo il lemma che spiegheremo al §. 351.

Se dando ad x tutti i valori possibili da $x = a$ sino ad $x = b$, i valori di $\left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right)$ passeranno dall' esser positivi all' esser negativi e viceversa, allora nel tratto di curva da noi voluto, avrà luogo il massimo ed il minimo: vi sarà il massimo per la porzione di quel tratto, ove quei valori saranno negativi, ed il minimo ove saranno positivi.

§. 340. Facciamo a maggiore schiarimento qualche esempio. Si cerca la curva, la quale tra tutte le curve i cui termini corrispondono alle stesse ascisse, abbia il valore della formula

$\int\{a'x - yy\}ydx$ massimo o minimo.

Avremo per questo caso $\Psi = (a'x - yy)y$; dunque $\left(\frac{d\Psi}{dy}\right) = a'x - 3y^2 = 0$, e l' equazione cercata sarà

$y^2 = \frac{1}{3}a'x$:

La curva pertanto sarà una parabola Apolloniana.

Per indagare se ha luogo il massimo o minimo, prendiamo il valore di $\left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right)$, ed avremo

$\left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right) = -6y = -6\sqrt{\left(\frac{1}{3}a'x\right)}$; dunque essendo $\left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right)$ sempre negativo, concluderemo che ha luogo il massimo.

Per un altro esempio dimandiamo la curva nella quale il valore della formula

$\int(15a'^2x^2y - 15a'^3xy + 5a'^2y^3 - 3y^5)dx$, è massima o minima.

$$\text{Sarà } \Psi = 15a'^2x^2y - 15a'^3xy + 5a'^2y^3 - 3y^5 : \text{avremo}$$
$$\left(\frac{d\Psi}{dy}\right) = 15a'^2x^2 - 15a'^3x + 15a'^2y^2 - 15y^4$$
$$= 15(a'x - y^2)(a'x + y^2 - a'^2) = 0.$$

Il primo membro di quest' ultima essendo composto di due fattori, potremo in due modi soddisfare al Problema, ed avremo per la curva ricercata o quella data dall' equazione $yy = a'x$, o l' altra rappresentata dall' equazione $y^2 = a'^2 - a'x$. Ciascuna poi di queste curve esprime una Parabola Apolloniana.

Considerando la prima curva, noi abbiamo

$\left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right) = 15(2a'^2y - 4y^3) = 30 . a'\sqrt{(a'x)} . (a' - 2x)$; la

quantità $(a' - 2x)\,a'\sqrt{(a'x)}$ essendo positiva per tutti i va- Fig.
lori della x da $x = 0$ sino ad $x = \frac{a'}{2}$, e negativa per tutti i valori al di là di $\frac{a'}{2}$, ne concluderemo esservi il minimo per i tratti di curva compresi tra i termini $x = 0$, $x = \frac{a'}{2}$, ed il massimo per quei tratti al di là dell' ascissa $\frac{a'}{2}$.

Per la seconda curva si ha

$$\left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right) = 30(a'^2 y - 2y^3) = -30\sqrt{(a'^2 - a'x)}\,.\,a'(a' - 2x),$$

e si vede che da $x = 0$ sino ad $x = \frac{a'}{2}$ abbiamo il massimo; da $x = \frac{a'}{2}$ sino ad $x = a'$ si ha il minimo; e per tutti i valori di x al di sotto di zero, abbiamo sempre il massimo.

S' avverta che la quantità a' si è considerata positiva.

§. 341. Di tutte le curve HL, EF, RS ec., i cui estre- 14
mi corrispondono alle stesse ascisse $AC = a$, $AD = b$, proponiamoci di trovare quella EF, per la quale la quantità $\int \Psi dx$ è un massimo o minimo, essendo Ψ una funzione conosciuta di $x, y, p = \left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Questo Problema potrebbe enunciarsi analiticamente così: indicando per $\Psi(x, y, p)$ o semplicemente per Ψ una funzione di x, y, e p, si dimanda la relazione tra x ed y, perchè l' integrale $\int \Psi dx$ sia un massimo o minimo prendendo quest' integrale da $x = a$ sino ad $x = b$, cioè supponendo che egli sia nullo quando $x = a$, e divenga un massimo o minimo quando $x = b$.

Se noi indichiamo per $y = \varphi(x)$ la cercata relazione, sarà $\int \Psi\left(x, \varphi, \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\right) dx$ il massimo o minimo; facendo pertanto $y = \varphi + i\omega$, $y = \varphi - i\omega$, le due quantità

$$\int \Psi\left(x, \varphi + i\omega, \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + i\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right) dx$$

$$\int \Psi\left(x, \varphi - i\omega, \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) - i\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right) dx$$

saranno nello stesso tempo maggiori di $\int \Psi\left(x, \varphi, \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\right) dx$ nel minimo, e minori nel massimo; dunque (pongo y per φ) le due differenze

$$\int \Psi\left(x, y + i\omega, \left(\frac{dy}{dx}\right) + i\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right) dx - \int \Psi\left(x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)\right) dx$$

$$\int \Psi\left(x, y - i\omega, \left(\frac{dy}{dx}\right) - i\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right) dx - \int \Psi\left(x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)\right) dx$$

saranno negative pel massimo, e positive pel minimo.

Sviluppiamo in serie queste differenze ed avremo, indicandole per D, D',

$$\begin{aligned} D = {} & i \int \left\{ \omega\left(\frac{d\Psi}{dy}\right) + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d\Psi}{dp}\right) \right\} dx \\ & + \frac{i^2}{2} \int \left\{ \omega^2\left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right) + 2\omega\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d^2\Psi}{dy\,dp}\right) + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2\left(\frac{d^2\Psi}{dp^2}\right) \right\} dx \\ & + \frac{i^3}{2.3} \int \left\{ \omega^3\left(\frac{d^3\Psi}{dy^3}\right) + 3\omega^2\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d^3\Psi}{dy^2\,dp}\right) + \text{ec.} \right\} dx \\ & + \text{ec.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D' = {} & - i \int \left\{ \omega\left(\frac{d\Psi}{dy}\right) + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d\Psi}{dp}\right) \right\} dx \\ & + \frac{i^2}{2} \int \left\{ \omega^2\left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right) + 2\omega\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d^2\Psi}{dy\,dp}\right) + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2\left(\frac{d^2\Psi}{dp^2}\right) \right\} dx \\ & - \frac{i^3}{2.3} \int \left\{ \omega^3\left(\frac{d^3\Psi}{dy^3}\right) + 3\omega^2\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d^3\Psi}{dy^2\,dp}\right) + \text{ec.} \right\} dx \\ & + \text{ec.} \end{aligned}$$

Ora queste due serie prendono le forme

$$Ai + Bi^2 + Ci^3 + \text{ec.}$$

$$-Ai + Bi^2 - Ci^3 + \text{ec.}$$

le quali sebbene siano composte di un numero infinito di termini, ponno però ridursi a finire ove si vuole per mezzo delle formule per calcolare i resti, date al §. 36.

Dunque col medesimo discorso fatto al §. antecedente, proveremo che fintanto sussisteranno i primi termini di quelle serie, potrem prendere i così piccolo, che essi superino le somme di tutti quei che gli seguono, per la qual cosa le due serie saranno necessariamente di segni contrarj; e che perciò quelle due serie non potranno essere ambedue positive, o ambedue negative se non si annullino i coefficienti della prima potenza dell' indeterminata i. Si proverà di più che vi sarà il massimo quando il coefficiente della seconda potenza sarà negativo, ed il minimo nel caso opposto: dunque il massimo sarà dato dalle due equazioni

$$A = 0, \quad B = -$$

ed il minimo dà

$$A = 0, \quad B = +.$$

Il tutto passa come nei Problemi ordinarj dei massimi e dei minimi.

Perchè abbia luogo il massimo o il minimo, abbiamo dunque l' equazione

$$\int \left\{ \omega \left(\frac{d\Psi}{dy}\right) + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d\Psi}{dp}\right) \right\} dx = 0;$$

e soddisfatta questa, debbe la quantità

$$\int \left\{ \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right) + \omega\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d^2\Psi}{dy\,dp}\right) + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2\left(\frac{d^2\Psi}{dp^2}\right) \right\} dx$$ esser positiva nel minimo, e negativa nel massimo, qualunque valore voglia darsi ad ω, facendo però sempre le integrazioni da $x = a$ sino ad $x = b$.

Facciamo ora

$$d\Psi = M dx + N dy + P dp, \text{ e sarà } M = \left(\frac{d\Psi}{dx}\right), \; N = \left(\frac{d\Psi}{dy}\right),$$
$$P = \left(\frac{d\Psi}{dp}\right).$$

Per soddisfare alla prima condizione, supponiamo che sia $\int\left(\omega N + P\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right)dx = \alpha + \beta\omega$, essendo α e β due funzioni di x e di p da determinarsi: differenziamo quest' equazione, ed avremo

$N\omega + P\left(\frac{d\omega}{dx}\right) = \left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + \left(\frac{d\beta}{dx}\right)\omega + \beta\left(\frac{d\omega}{dx}\right)$, che ci darà tra i due coefficienti indeterminati α e β queste tre equazioni

$$\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{d\beta}{dx}\right) = N,$$
$$\beta = P.$$

Avendo due quantità da determinare, e tre equazioni, troveremo un' equazione di condizione, la quale deve da per se medesima sussistere, acciò questa determinazione abbia luogo; tale equazione ci sarà data eliminando β per mezzo della seconda e della terza equazione; avremo pertanto $\alpha = C$ costante

$$\beta = P$$

(a) . . . . $N - \frac{1}{dx}\,dP = 0.$

L' ultima equazione è quella di condizione; la quale stabilisce la relazione tra le quantità N e P, ed in conseguenza tra x ed y, acciò la formula $\int \Psi dx$ possa divenir massima o minima. Presa a capriccio una relazione tra x ed y, e determinati in virtù di essa i valori di N e di P, si può vedere se abbiamo indovinata quella relazione che rende la formula $\int \Psi dx$ massima o minima, esaminando se l' equazione (a) è sodisfatta in virtù di tal relazione. Viceversa non conoscendosi la relazione tra y ed x, questa ci sarà data dall' equazione (a).

§. 342. L' equazione dunque della curva che gode di quella proprietà di massimo o di minimo, sarà

$N - \frac{dP}{dx} = 0$; quest' equazione è generalmente parlando un' equazione differenziale del secondo ordine; il suo integrale dunque conterrà due costanti arbitrarie, per mezzo delle quali potrem soddisfare a due condizioni: ho detto in generale, poichè se la funzione Ψ non conterrà p elevato a dimensioni maggiori della prima, l' equazione Fig.

$N - \frac{dP}{dx} = 0$ sarà del primo ordine, poichè nel caso diverso entro la P si trova p, e parciò contiene allora dei termini ove è $(\frac{dp}{dx})$, cioè i differenziali secondi.

Ma perchè effettivamente la curva goda della proprietà del 14
massimo o del minimo per il di lei tratto EF, bisogna che il valore $C + P\omega$ dell' integrale $\int(\omega N + (\frac{d\omega}{dx}) P)\, dx$ preso tra i limiti $x = a$, $x = b$, sia nullo; per questo, supponiamo rappresentata da Ω la quantità $P\omega$, e sarà $C + \Omega$ quella espressione che deve esser nulla da $x = a$ sino ad $x = b$: sia dunque A il valore di Ω quando $x = a$, e B quello della stessa Ω quando $x = b$, ed avremo le due quantità $C + A$, $C + B$ delle quali la differenza dovrà esser nulla: dovremo avere pertanto $B - A = 0$.

A quest' ultima equazione soddisfaremo per mezzo delle costanti arbitrarie, che entreranno nell' espressione di y, data dall' equazione della curva del massimo, avendo nello stesso tempo riguardo alle condizioni speciali del Problema.

Così per esempio, se il valore di y corrispondente al principio ed alla fine dell' integrale, ove le ascisse sono $x = a$, $x = b$, è dato, allora il valore di ω, che ne è l' aumento, sarà nullo nelle due quantità A e B, e l' equazione $A - B = 0$ resta soddisfatta da se medesima.

Si dice poi il valore di y dato per le due ascisse $x = a$, $x = b$, quando la curva, per la quale ha luogo il massimo o minimo, termina a due punti fissi, dei quali son cognite le coordinate, o deve incontrarne due altre curve nei punti corrispondenti alle ascisse $x = a$, $x = b$, giacchè allora le ordinate y che corrispondono a questi punti, sono espresse in a e b in virtù dell' equazioni di quelle curve, la cui natura si suppone conosciuta.

Fig. Noi supporremo prima, che la curva debba terminare a due punti fissi dati di posizione, ed in seguito considereremo il caso in cui essa debba incontrare due curve di natura data.

Si può giungere ai medesimi risultati per altra via.

Per mezzo della regola d' integrare per parti, data al §. 108, si ha

$$\int\left\{\omega N + P\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right\} dx = \int \omega N\, dx + P\omega - \int \omega \frac{dP}{dx}\, dx = P\omega + \int\omega\left\{N - \frac{dP}{dx}\right\} dx,$$

e perchè abbia luogo il massimo o minimo, debbe esser nulla la quantità

$P\omega + \int\omega\left\{N - \frac{dP}{dx}\right\} dx$ tra i limiti $x = a$, $x = b$.

Per determinare la relazione tra x ed y, la quale ci dia la curva cercata, facciamo $N - \frac{dP}{dx} = 0$, ed avremo allora questa relazione data in generale da una equazione differenziale del secondo ordine in x ed y, l' integrale della quale conterrà due costanti arbitrarie.

Fatta la quantità $\int\omega\left\{N - \frac{dP}{dx}\right\} dx$ eguale a zero, resta il termine $P\omega$, che è allora il valore dell' integrale $\int\left\{\omega N + P\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right\} dx$, il quale deve essere nullo da $x = a$ sino ad $x = b$. Sia dunque A il valore di $P\omega$ quando $x = a$, e sia B il di lui valore quando $x = b$, ed avremo la differenza $B - A$ la quale deve esser nulla; dunque $B - A = 0$ è l' altra equazione che deve essere soddisfatta, acciò la curva del massimo o del minimo (la cui equazione è l' integrale dell' equazione $N - \frac{dP}{dx} = 0$) abbia quella proprietà tra le due ascisse $x = a$, $x = b$.

§. 343. Prima d' inoltrarci di più in queste Teorìe fermiamoci a far qualche esempio.

Dati due punti M, N, trovare la linea più corta di tutte
15 quelle che si possono far passare per i medesimi due punti.

Si sa dalla Geometria Elementare che questa linea è la retta, pure abbiamo scelto questo Problema semplicissimo per render facile la prima applicazione delle Teorie quì sopra spiegate, e per mostrare il consenso delle medesime con le verità conoscinte d' altr' onde. Fig.

La dottrina delle rettificazioni (§. 81.) delle curve ci dà per la lunghezza di un arco qualunque la formula $\int dx\sqrt{(1+pp)}$, prendendo quest' integrale dall' origine dell' arco sino al termine del medesimo; la quantità dunque che dovrà per noi divenir minima, sarà $\int dx\sqrt{(1+pp)}$, i termini dell' integrale corrispondendo alle ascisse AD, AC. 15

Facciamo pertanto $\Psi=\sqrt{(1+pp)}$, ed avremo $d\Psi=\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}\,dp$: l' equazione dunque che dar ci deve la relazione per il minimo, e che in generale è $N-\frac{1}{dx}\,dP=0$, diviene $dP=0$; e perciò $P=Cost.$

Avremo dunque $\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}=Cost.$ e lo stesso p sarà eguale ad una costante arbitraria n; dunque $p=n$ sarà l' equazione differenziale della linea del minimo.

Quest' equazione ci dà $y=nx+m$ essendo m un' altra costante arbitraria; dunque la linea retta rappresentata dall' equazione $y=nx+m$ sarà la linea brevissima da noi richiesta.

Questo minimo poi sarà

$$\int dx\sqrt{(1+pp)}=\int dx\sqrt{(1+nn)}=C+x\sqrt{(1+nn)}=$$
$$x\sqrt{(1+nn)}-a\sqrt{(1+nn)}$$

volendo che egli svanisca quando $x=a$. Facciamo dunque $x=b$, e s' avrà $\sqrt{(1+nn)}\times(b-a)$ per esprimere quella minima distanza. Assoggettiamola ora alle condizioni di passare per i punti M ed N.

Siano a, α le coordinate AD, DM che determinano di posizione il punto M, siano b, β quelle per il punto N; per l' equazione $B-A=0$, che come abbiamo detto al §. antecedente, deve essere sodisfatta, si ha

$\frac{n}{\sqrt{(1+nn)}}\,\omega''-\frac{n}{\sqrt{(1+nn)}}\,\omega'=0$ essendo ω'', ω' i valori di ω

Fig. alla fine ed al principio dell' integrale. Ora dovendo passare la linea per due punti fissi, queste due quantità ω', ω'' sono nulle da se medesime; dunque l' equazione $B-A=0$ è sodisfatta da se stessa, e non ci determina cosa alcuna. Le due costanti m ed n rimangono per anche indeterminate; se però facciamo nell' equazione della curva $x=a$, $x=b$, siccome allora dobbiamo ottenere $y=\alpha$, $y=\beta$, così avremo queste due equazioni

$$\alpha=na+m$$
$$\beta=nb+m,$$

dalle quali si ricaverà

$n=\frac{\beta-\alpha}{b-a}$, $m=\frac{\alpha b-a\beta}{b-a}$, e la nostra equazione per la linea del minimo sarà

$y=\frac{\beta-\alpha}{b-a}\,x+\frac{\alpha b-a\beta}{b-a}$, nella quale tutto è determinato.

Il valore poi della minima distanza MN sarà

15 $(b-a).\sqrt{\left\{1+\left(\frac{\beta-\alpha}{b-a}\right)^2\right\}}=\sqrt{((b-a)^2+(\beta-\alpha)^2)}$,

come si sà dalle proprietà del triangolo rettangolo.

Se non fosse prescritta la condizione di passare per due punti dati, allora l' equazione $B-A=0$ ci darebbe $\frac{n}{\sqrt{(1+nn)}}=0$, ovvero $n=0$, il che ci dice che la linea della più corta distanza corrispondente ai punti D, C, è una qualunque parallela all' asse, che ha per equazione $y=m$ come è per se medesimo evidente.

In generale osserviamo che la curva, nella quale $\int\Psi dx$ debb' essere massima o minima, è sempre una linea retta, se Ψ è una sola funzione di p.

§. 344. Proponiamoci lo stesso Problema sotto un aspetto più generale.

Date di posizione in un piano e la linea retta FG ed il circolo NHL, trovare la più corta distanza tra essi. Ci dice la Geometria Elementare che questa minima distanza si ottiene abbassando dal centro del circolo una perpendicolare sopra la retta: troviamo lo stesso risultato col metodo dei massimi e dei minimi. Fig.

Sia l' equazione della retta $s = et$, e quella del circolo $(z - m)^2 + (u - n)^2 = r^2$, essendo m, n le coordinate del centro, ed r il raggio.

Supponiamo che si prendano due punti M ed N, uno nella retta e l' altro nel circolo, e che riguardati come punti dati di posizione, si cerchi la minima distanza: questa l' abbiam trovata nel paragrafo antecedente rappresentata da

$\sqrt{((b - a)^2 + (\beta - \alpha)^2)}$, essendo $a = FD$, $b = FC$, 15
$\alpha = DM$, $\beta = NC$.

Trovandosi il punto M nella linea, ed N nel circolo, sarà $\alpha = ea$, $\beta = m \pm \sqrt{(r^2 - (b - n)^2)}$, e perciò

$(\beta - \alpha)^2 = \{m - ea \pm \sqrt{(r^2 - (b - n)^2)}\}^2$; sarà dunque

$$MN = \{(b - a)^2 + (m - ea \pm \sqrt{(r^2 - (b - n)^2)})^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Per due altri punti M′, N′ si troverà una simile espressione della distanza M′N′, ponendo in quella trovata per MN, invece di a e di b i valori delle ascisse corrispondenti ai punti M′, N′.

Per risolvere il nostro Problema, bisogna tra tutte le distanze MN, M′N′ ec., trovare quella che è la minima.

Questa distanza MN essendo una funzione conosciuta delle due variabili a, b, se ne determinerà il massimo o il minimo relativamente a ciascuna di quelle variabili, con le regole ordinarie insegnate ai §§. 60. e segg.

Siccome poi quando è minima la distanza MN, è anche minimo il di lei quadrato, così cercheremo il minimo della funzione

$$(b - a)^2 + \{m - ea \pm \sqrt{(r^2 - (b - n)^2)}\}^2.$$

Secondo le regole suddette facendo questa quantità eguale a z, s' avrà

$$\left(\frac{dz}{da}\right) = b - a + e\{m - ea \pm \sqrt{(r^2 - (b - n)^2)}\} = 0$$

Fig. $$\left(\frac{dz}{db}\right) = b - a - \{m - ea \pm \sqrt{(r^2 - (b - n)^2)}\} \times \frac{b - n}{\pm\sqrt{(r^2 - (b - n)^2)}} = 0.$$

Questa seconda equazione si riduce a quest' altra

$$\frac{\pm(b - a)\sqrt{(r^2 - (b - n)^2)}}{b - n} - \{m - ea \pm \sqrt{(r^2 - (b - n)^2)}\} = 0,$$

si ricava da queste due equazioni

$$1 \pm \frac{e\sqrt{(r^2 - (b - n)^2)}}{b - n} = 0,$$

$$\pm\sqrt{(r^2 - (b - n)^2)} = -\frac{(b - n)}{e},$$

$$(b - n)^2 = \frac{e^2 r^2}{1 + e^2},$$

$$b - n = \pm\frac{er}{\sqrt{(1 + e^2)}},$$

$$b = n \pm \frac{er}{\sqrt{(1 + e^2)}};$$

per trovare a, si ha

$$b - a + me - e^2 a - b + n = 0;$$

$$-(1 + e^2)a + me + n = 0;$$

$$a = \frac{em + n}{1 + e^2},$$

le due ascisse dunque, cui corrisponde la minima delle minime distanze, sono

$$a = \frac{me + n}{1 + e^2},$$

$$b = n \pm \frac{er}{\sqrt{(1 + e^2)}}.$$

Da queste si ricava

$$\alpha = \frac{me^2 + ne}{1 + e^2}, \quad \beta = m \mp \frac{r}{\sqrt{(1 + e^2)}}.$$

15 Facciamo $FI = a$, $IK = \alpha$, $FQ = b$, $QB = \beta$, e sarà

Fig. 15

$$tang.\,\mathrm{BKP} = \frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PK}} = \frac{b-n}{\alpha-\beta} = \frac{n + \frac{er}{\sqrt{(1+e^2)}} - \frac{me+n}{1+e^2}}{\frac{me^2+ne}{1+e^2} - m + \frac{r}{\sqrt{(1+e^2)}}} = e =$$

tang. KFE; dunque BK è perpendicolare alla FG.

Questa linea BK passa per il centro O; infatti

$$tang.\,\mathrm{OBR} = \frac{n-b}{\beta-m} = \frac{\frac{\pm er}{\sqrt{(1+e^2)}}}{\pm\frac{r}{\sqrt{(1+e^2)}}} = e = tang\,\mathrm{GFE} =$$

tang. BKP; dunque OBR + RBP + PBK = 180°; dunque BO, BK sono per diritto.

Nelle superiori espressioni vi era il doppio segno; prendendo il superiore, come abbiamo fatto, si ha la minima distanza BK tra tutte le perpendicolari che vanno da un punto della circonferenza alla retta, e prendendo l'inferiore, s'avrebbe la massima B'K.

Si vede come avrebbe dovuto trattarsi il Problema, se la più corta distanza avesse dovuto terminare a due curve qualunque.

§. 345. In generale, quando il Problema dimanda che la curva del massimo o del minimo si termini a due altre curve date, noi prenderemo per fissi due punti, ciascuno in una di quelle curve, e risolveremo il Problema come se la curva cercata passar dovesse nel suo principio e nel suo fine per tali due punti fissi.

Supponendo le ascisse per quei due punti a, b, le ordinate saranno $\mathrm{F}(a)$, $\varphi(b)$, se le due curve sono espresse da quest' equazioni

$s = \mathrm{F}(t)$, $z = \varphi(u)$.

Trovata dunque la relazione che dà il massimo o minimo per il caso dei due punti fissi, sostituita questa relazione nella formula $\int \Psi dx$ del massimo o del minimo, se ne faccia l'effettiva integrazione, quindi preso l'integrale tra quei limiti dati, avremo una funzione determinata di a e di b. Allora cer-

Fig. cheremo quali debbono essere i valori di a e di b, da cui sono determinate le estremità della curva del massimo, nelle curve date, acciò tra tutte le curve rappresentate dalla stessa relazione del massimo o minimo, e che finiscono in due qualunque altri punti delle curve estreme, si trovi quella per la quale la determinata funzione in a e b sia massima o minima. Questa seconda ricerca è un Problema dei massimi e dei minimi ordinarj, appartenenti alle dottrine dei §§ 57. e segg.

Gli esempj renderanno più chiare queste Teorie.

16 Date due curve EE, FF descritte in uno stesso piano verticale, si dimanda la curva MN ed i punti M, N, nei quali essa deve segare le curve date, acciò un corpo grave giunga da M in N nel minor tempo possibile: questo è il celebre Problema della *Brachistocrona* o linea della più veloce discesa.

Secondo ciò che abbiamo detto quì sopra, divideremo il Problema in due.

I. Supponendo dati i punti M, N per mezzo delle coordinate AB, BM, AC, CN col metodo del §. antecedente, cercheremo la relazione tra x ed y, che ci dia la curva MN della più veloce discesa, come se il corpo dovesse andare dal punto M ad N.

II. Trovata questa curva MN determineremo analiticamente il tempo che s'impiega da M in N, e questo tempo sarà una funzione di AB, BM, AC, CN, ovvero semplicemente di AB, AC, giacchè BM, CN saranno date per AB, AC in virtù dell'equazioni delle curve EE, FF; cercheremo in seguito col metodo ordinario dei massimi e dei minimi (§. 60), quali debbono essere le ascisse AB, AC, affinchè quell'espressione del tempo divenga la minima, ed avremo in questa maniera i punti M, N (a).

(a) Nel Calcolo delle Variazioni si trattavano siffatti Problemi senza questa distinzione in due parti; ma oltre non guadagnar nulla in sostanza rapporto alla brevità delle lor soluzioni, divenivano esse intrigate ed imbarazzanti; e tanto più poi lo sarebbero state per le Teorie da noi spiegate quì sopra, le quali più non contengono le variazioni infinitesime delle quantità. Quest' idea di separare in due il quesito, la quale lo stesso

I. Sia $AB = a$, $AC = b$, $BM = \alpha$, $CN = \beta$, $AP = y$, $PL = x$: sia m l' altezza dovuta alla velocità, con la quale il corpo debbe incominciare a moversi in un punto della curva EE per giungere nella curva FF. Quando il corpo sarà arrivato in L, l' altezza cui si deve la velocità, sarà dunque $m + HL$, ovvero $m + x - \alpha$: è inutile avvertire che noi consideriamo orizzontale l' asse degli y, e verticale quello degli x. Fig. 16

Nei corpi che cadono per la forza di gravità, essendo la velocità proporzionale alla radice dell' altezza, potremo esprimere per $\sqrt{(m + x - \alpha)}$ la velocità del corpo nel punto L; ed essendo questa (§. 93) velocità $= (\frac{ds}{dt})$, ovvero $(\frac{ds}{dx}):(\frac{dt}{dx})$ quando s e t si riguardano come funzioni di x (§. 71), s' avrà $\sqrt{(m + x - \alpha)} = (\frac{ds}{dx}):(\frac{dt}{dx})$, ed in conseguenza

$$(\frac{dt}{dx}) = \frac{1}{\sqrt{(m+x-\alpha)}} \cdot (\frac{ds}{dx}) = \frac{1}{\sqrt{(m+x-\alpha)}} \cdot \sqrt{(1+p^2)},$$ e quindi

$$t = \int \frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{(m+x-\alpha)}}\, dx.$$

La quantità pertanto che debbe divenir minima è l' integrale

$\int \frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{(m+x-\alpha)}}\, dx$, preso tra i limiti $x = \alpha$, $x = \beta$.

Paragonando quest' integrale con la formula $\int \Psi dx$, avremo

$\Psi = \sqrt{\frac{1+p^2}{m+x-\alpha}}$, $N = (\frac{d\Psi}{dy}) = 0$, $P = (\frac{d\Psi}{dp}) = \ldots\ldots$

$\frac{p}{\sqrt{(m+x-\alpha)} \cdot \sqrt{(1+p^2)}}$, e l' equazione $N - \frac{dP}{dx} = 0$ diverrà $dP = 0$,

$$P = \frac{p}{\sqrt{(m+x-\alpha)} \cdot \sqrt{(1+p^2)}} = Cost.$$

Diamo alla costante arbitraria la forma $\frac{1}{\sqrt{c}}$, essendo c

---

Eulero giudicherebbe degna d' appartenere alla sua Opera immortale, *Methodus inveniendi Lineas Curvas etc.*, mi fu somministrata dal Consultore di Stato Paradisi, Letterato insigne e profondissimo Geometra.

un' arbitraria, ed avremo l' equazione

$\frac{p}{\sqrt{(m+x-\alpha)} \cdot \sqrt{(1+p^2)}} = \frac{1}{\sqrt{c}}$, e questa equazione differenziale del primo ordine, sarà quella della *Brachistocrona*.

Riducendo una tale equazione, si ha

$cp^2 = (m + x - \alpha)(1 + p^2)$, dalla quale si ricava

$p = (\frac{dy}{dx}) = \sqrt{\frac{m+x-\alpha}{c-m-x+\alpha}}$, che integrata diviene

$y = \int dx \sqrt{\frac{m+x-\alpha}{c-m-x+\alpha}} + C$, essendo C un' altra costante arbitraria; e quest' ultima equazione sarà quella della dimandata curva della più veloce discesa. Le due costanti C, c debbono determinarsi in modo che la curva passi per i punti M, N.

L' equazione $(\frac{dy}{dx}) = \sqrt{\frac{m+x-\alpha}{c-m-x+\alpha}}$, diviene

$(\frac{dy}{du}) = -\sqrt{\frac{c-u}{u}}$, facendo $c - m - x + \alpha = u$: ora al §. 83 noi abbiamo trovato

$(\frac{dy}{dx}) = \frac{\sqrt{(2a-x)}}{\sqrt{x}}$ per il differenziale dell' equazione della Cicloide (Fig. 11), $y = \sqrt{(2ax - x^2)} + Arc.\,sen\,v.\,x$, essendo $= 2a$ il diametro del circolo generatore, e ruotando questo nel descriverla sopra l' asse degli y; dunque la cercata curva del minimo avrà per equazione $y = C - \sqrt{(cu - uu)} - Arc.\,sen\,v.\,u$, essendo C un' altra costante arbitraria portata dall' integrazione: essa sarà una cicloide ordinaria generata da un circolo, il cui diametro è c, e che ruota sopra l' asse orizzontale degli y. La posizione particolare di essa dipenderà dalla circostanza di dover passare questa cicloide per i punti M, N. Poniamo nell' ottenuto integrale il valore di u, ed avremo

$$y = -\sqrt{\{c(c - m - x + \alpha) - (c - m - x + \alpha)^2\}} - Arc.\,sen\,v.(c - m - x + \alpha) + C,$$ ovvero

$y = -\sqrt{\{c(m+x-\alpha)-(m+x-\alpha)^2\}} - Arc. sen\, v. \times$ Fig.

$(c-m-x+\alpha) + C$, essendo C un'altra costante arbitraria, e supponendo $= \frac{c}{2}$ il raggio del circolo cui appartiene quel seno verso.

Per determinare queste costanti, osservo che facendo $y = a$, debb' essere $x = \alpha$, e facendo $y = b$, debbe aversi $x = \beta$; avremo pertanto tra C e c queste due equazioni

$a = -\sqrt{(mc-m^2)} - Arc. sen\, v. (c-m) + C$,

$b = -\sqrt{\{c(m+\beta-\alpha)-(m+\beta-\alpha)^2\}} - Arc. sen\, v. \times$

$(c-m-\beta+\alpha) + C$, dalle quali si ricava l'equazione

$-a+b = \sqrt{(mc-m^2)} - \sqrt{\{c(m+\beta-\alpha)-(m+\beta-\alpha)^2\}} + Arc. sen\, v. (c-m) - Arc. sen\, v. (c-m-\beta+\alpha)$, che servirà a determinare la costante c.

In quest' equazione i due archi che s' incontrano, appartengono ad un circolo il cui raggio è $\frac{c}{2}$; per ridurli al circolo che ha per raggio quello delle tavole, cioè l' unità, scriveremo $\frac{c}{2} Arc. sen\, v. (\frac{2c-2m}{c})$, e $\frac{c}{2} Arc. sen\, v. (\frac{2c-2m-2\beta+2\alpha}{c})$ invece di essi.

L' equazione poi $B - A = 0$ del §. 342 sarà soddisfatta da se medesima, poichè considerando come fissi i punti M, N, 16
ove comincia e termina la *Brachistocrona*, sarà il valore di ω in quei due medesimi punti, nullo da se medesimo.

§. 346. II. Cerchiamo ora l' espressione dello stesso tempo minimo t impiegato nella discesa da M in N lungo la Cicloide che passerà per quei due punti.

Abbiamo sopra trovato $t = \int \frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{(m+x-\alpha)}} dx$: poniamo in questa formula il valore di $\sqrt{(1+p^2)}$, che è

Fig. $\frac{p\sqrt{c}}{\sqrt{(m+x-\alpha)}}$, ovvero $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{(c-m-x+\alpha)}}$ avendovi fatto

$p = \frac{\sqrt{(m+x-\alpha)}}{\sqrt{(c-m-x+\alpha)}}$, ed avremo

$t = \int \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\{c(m+x-\alpha)-(m+x-\alpha)^2\}}} dx$, che si riduce a

$t = \int \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{(cz-z^2)}} dz$ facendo $z = m+x-\alpha$. Quest' integrale dee prendersi da $x = \alpha$ sino ad $x = \beta$, ovvero da $z = m$ sino a $z = m+\beta-\alpha$.

L' integrale di quella formula è

$t = \sqrt{(c)} . Arc. sen\, v. \frac{2z}{c} + E$ cost. arbit., il quale preso tra i limiti dati, ci somministra

$t = \sqrt{(c)} . \{Arc. sen\, v. 2(\frac{m+\beta-\alpha}{c}) - Arc. sen\, v. \frac{2m}{c}\}$; e questo è il minimo tempo che può impiegare il corpo per andare dal punto M al punto N, o per parlare più esattamente, a questa quantità è proporzionale quel tempo minimo: essa rappresenterebbe veramente quel tempo, se si moltiplicasse per il fattore costante $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ chiamando g la forza di gravità, o la velocità acquistata da un corpo liberamente cadente in un secondo di tempo. Sarà allora t espresso in secondi.

Per due altri punti qualunque M′, N′ presi nelle due curve EE, FF, troveremo un' altra Cicloide che passerà per essi,
16 ed un' espressione simile a quella sopra ottenuta, la quale ci darà quel minimo tempo che s' impiega ad andare da M′ ad N′.

Ora tra questi minimi tempi nei quali un corpo pesante va da una curva all' altra, cerchiamo ancora il più minimo; per questo noi differenziamo l' espressione di t considerando per variabili le ascisse $AB = a$, $AC = b$, le quali sono indipendenti tra loro.

Riguardiamo poi m, α come funzioni date di a; β come funzione di b, ed avremo per determinare a, b, ed in conseguenza i punti M, N, queste due equazioni $\left(\frac{dt}{da}\right) = 0$, $\left(\frac{dt}{db}\right) = 0$. Fig. 16

La differenziazione del valore di t ci somministra, facendo

$\mu = \frac{2(m+\beta-\alpha)}{c}$, $\nu = \frac{2m}{c}$,

$$\left(\frac{dt}{da}\right) = \frac{1}{2\sqrt{c}}\left(\frac{dc}{da}\right)\left\{Arc.\,sen\,v.\frac{2(m+\beta-\alpha)}{c} - Arc.\,sen\,v.\frac{2m}{c}\right\} +$$
$$\sqrt{(c)}.\left\{\frac{1}{\sqrt{(2\mu-\mu^2)}}.\left(\frac{d\mu}{da}\right) - \frac{1}{\sqrt{(2\nu-\nu^2)}}\left(\frac{d\nu}{da}\right)\right\} = 0,$$

$$\left(\frac{dt}{db}\right) = \frac{1}{2\sqrt{c}}\left(\frac{dc}{db}\right)\left\{Arc.\,sen\,v.\frac{2(m+\beta-\alpha)}{c} - Arc.\,sen\,v.\frac{2m}{c}\right\} +$$
$$\sqrt{(c)}.\left\{\frac{1}{\sqrt{(2\mu-\mu^2)}}.\left(\frac{d\mu}{db}\right) - \frac{1}{\sqrt{(2\nu-\nu^2)}}\left(\frac{d\nu}{db}\right)\right\} = 0,$$ ed i differenziali di c essendo dati dall' equazione trovata per determinarlo.

Per semplicizzare il Problema, facciamo alcune ipotesi sopra il valore di m, e primieramente supponiamolo nullo, vale a dire supponiamo che il corpo, allorchè si pone nel punto M, non abbia alcuna velocità, e cominci ad acquistarla nel momento, nel quale principia a discendere.

L' equazione che determina c, sarà in questo caso

$$-a+b = -\sqrt{\{c(\beta-\alpha)-(\beta-\alpha)^2\}} + \frac{c}{2}\,Arc.\,sen\,v.\times$$
$$(2) - \frac{c}{2}\,Arc.\,sen\,v.\frac{2(c-\beta+\alpha)}{c},$$ ovvero

$$b-a = -\sqrt{\{c(\beta-\alpha)-(\beta-\alpha)^2\}} - \frac{c}{2}\,Arc.\,sen\,v.\times$$
$$\frac{2(c-\beta+\alpha)}{c} + \frac{c}{2}.180°,$$ da cui si ricava, prendendone i differenziali primi rapporto alla a ed alla b, e riducendo,

$$2\sqrt{\{c(\beta-\alpha)-(\beta-\alpha)^2\}} = \left(\frac{dc}{da}\right)[2(\beta-\alpha) +$$
$$\sqrt{\{c(\beta-\alpha)-(\beta-\alpha)^2\}}\times(180° + Arc.\,sen\,v.\times$$
$$\frac{2(c-\beta+\alpha)}{c})] + 2(\beta-\alpha)\left(\frac{d\alpha}{da}\right),$$

$$-2\sqrt{\{c(\beta-\alpha)-(\beta-\alpha)^2\}} = \left(\frac{dc}{db}\right)[2(\beta-\alpha) +$$
$$\sqrt{\{c(\beta-\alpha)-(\beta-\alpha)^2\}}\times(180° + Arc.\,sen\,v.\times$$
$$\frac{2(c-\beta+\alpha)}{c})] - 2(\beta-\alpha)\left(\frac{d\beta}{db}\right),$$ che noi scriveremo più semplicemente

$$(a) \ldots\ldots\; \begin{cases} -N\left(\frac{d\alpha}{da}\right) - M = \left(\frac{dc}{da}\right) \\ N\left(\frac{d\beta}{db}\right) + M = \left(\frac{dc}{db}\right). \end{cases}$$

L' equazioni $\left(\frac{dt}{da}\right) = 0$, $\left(\frac{dt}{db}\right) = 0$ divengono in quest' ipotesi

$$\left(\frac{dc}{da}\right)[Arc.\,sen\,v.\frac{2(\beta-\alpha)}{c}.\sqrt{\{c(\beta-\alpha)-(\beta-\alpha)^2\}} -$$
$$2(\beta-\alpha)] - 2c\left(\frac{d\alpha}{da}\right) = 0$$

$$\left(\frac{dc}{db}\right)[Arc.\,sen\,v.\frac{2(\beta-\alpha)}{c}.\sqrt{\{c(\beta-\alpha)-(\beta-\alpha)^2\}} -$$
$$2(\beta-\alpha)] + 2c\left(\frac{d\beta}{db}\right) = 0,$$ che scriveremo così

$$(b) \ldots\ldots\; \begin{cases} \left(\frac{dc}{da}\right) = K\left(\frac{d\alpha}{da}\right) \\ \left(\frac{dc}{db}\right) = -K\left(\frac{d\beta}{db}\right) \end{cases}$$

sostituiamo nell' equazioni (a) i valori di $\left(\frac{dc}{da}\right)$, $\left(\frac{dc}{db}\right)$, ed avremo

$$-\left\{N\left(\frac{d\alpha}{da}\right) + M\right\} = K\left(\frac{d\alpha}{da}\right)$$

$N\left(\frac{d\beta}{db}\right) + M = -K\left(\frac{d\beta}{db}\right)$: queste due equazioni ci daranno i valori di a e di b, che si convengono al minimo, dopo che avremo però eliminato da esse il valore di c, per il quale abbiamo sopra trovata l' equazione.

Le due ultime equazioni per altro ci danno Fig. 16

$(\frac{d\alpha}{da}) = \frac{-M}{N+K}$, $(\frac{d\beta}{db}) = \frac{-M}{N+K}$, e ci dicono in conseguenza che i due punti M, N sono quei, nei quali condotte le tangenti alle respettive curve, queste sono parallele tra loro.

Se per un' altr' ipotesi si facesse $m = \alpha$, cioè se la velocità, con la quale il corpo grave incomincia a moversi, si dovesse all' altezza α, allora si troverebbe che i due punti M, N sono quegli, nei quali la *Brachistocrona* sega ad angolo retto le curve date. Non ci tratterremo a dimostrare tutto questo.

§. 347. Supponiamo che la funzione Ψ della formula $\int \Psi dx$ contenga ancora la quantità $q = (\frac{d^2y}{dx^2})$, che sia cioè $\Psi(x, y, p, q)$, e si dimandi la curva nella quale $\int \Psi dx$ è massima o minima.

Se y è appunto quella funzione in x, che rende la formula integrale un massimo o un minimo, ponendo $y + i\omega$, $y - i\omega$ invece di y, le differenze

$$\int \Psi \left\{x, y + i\omega, p + i(\tfrac{d\omega}{dx}), q + i(\tfrac{d^2\omega}{dx^2})\right\} dx - \int \Psi(x, y, p, q) dx$$

$$\int \Psi \left\{x, y - i\omega, p - i(\tfrac{d\omega}{dx}), q - i(\tfrac{d^2\omega}{dx^2})\right\} dx - \int \Psi(x, y, p, q) dx$$

debbono essere negative nel massimo, positive nel minimo: indichiamole per D, e D′, e sviluppandole in serie, secondo le potenze di i, avremo

$$\mathrm{D} = i\int \left\{\omega(\tfrac{d\Psi}{dy}) + (\tfrac{d\omega}{dx})(\tfrac{d\Psi}{dp}) + (\tfrac{d^2\omega}{dx^2})(\tfrac{d\Psi}{dq})\right\} dx + i^2\int \left\{\tfrac{\omega^2}{2} \times (\tfrac{d^2\Psi}{dy^2}) + \omega(\tfrac{d\omega}{dx})(\tfrac{d^2\Psi}{dydp}) + \tfrac{1}{2}(\tfrac{d^2\omega}{dx^2})^2(\tfrac{d^2\Psi}{dq^2}) + \omega(\tfrac{d^2\omega}{dx^2})(\tfrac{d^2\Psi}{dydq}) + (\tfrac{d\omega}{dx})(\tfrac{d^2\omega}{dx^2})(\tfrac{d^2\Psi}{dpdq}) + \tfrac{1}{2}(\tfrac{d\omega}{dx})^2(\tfrac{d^2\Psi}{dp^2})\right\} dx + i^3\int \left\{\tfrac{\omega^3}{2.3}(\tfrac{d^3\Psi}{dy^3}) + \text{ec.}\right\} dx + \text{ec.}$$

: sarà dunque D eguale ad una serie di questa forma

$i\mathrm{A} + i^2\mathrm{B} + i^3\mathrm{C} +$ ec., e $\mathrm{D}' = -i\mathrm{A} + i^2\mathrm{B} - i^3\mathrm{C} +$ ec.; le due serie dunque

$i\mathrm{A} + i^2\mathrm{B} + i^3\mathrm{C} +$ ec.

$-i\mathrm{A} + i^2\mathrm{B} - i^3\mathrm{C} +$ ec.

dovranno esser negative nel massimo e positive nel minimo, per il che avremo

$\mathrm{A} = 0$, $\mathrm{B} = +$ nel minimo e

$\mathrm{A} = 0$, $\mathrm{B} = -$ nel massimo;

perchè dunque abbia luogo il massimo o minimo debb' essere

$\int \left\{\omega(\frac{d\Psi}{dy}) + (\frac{d\omega}{dx})(\frac{d\Psi}{dp}) + (\frac{d^2\omega}{dx^2})(\frac{d\Psi}{dq})\right\} dx = 0$ prendendo l' integrale da $x = a$ sino ad $x = b$; ed essendo soddisfatta quest' equazione, deve essere la quantità

$\int \left\{\frac{\omega^2}{2}(\frac{d^2\Psi}{dy^2}) + \omega(\frac{d\omega}{dx})(\frac{d^2\Psi}{dydp}) + \text{ec.}\right\} dx$ positiva nel minimo, negativa nel massimo, qualunque valore voglia darsi ad ω. Sia $d\Psi = \mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy + \mathrm{P}dp + \mathrm{Q}dq$, e l' equazione che deve darci il massimo o minimo, sarà

$$\int \left\{\omega\mathrm{N} + (\tfrac{d\omega}{dx})\mathrm{P} + (\tfrac{d^2\omega}{dx^2})\mathrm{Q}\right\} dx = 0.$$

Facciamo ora

$\int \left\{\omega\mathrm{N} + (\frac{d\omega}{dx})\mathrm{P} + (\frac{d^2\omega}{dx^2})\mathrm{Q}\right\} dx = \alpha + \beta\omega + \gamma(\frac{d\omega}{dx})$, e per determinare α, β, γ troveremo queste equazioni

$(\frac{d\alpha}{dx}) = 0$

$\frac{1}{dx} d\beta - \mathrm{N} = 0$

$\beta + \frac{1}{dx} d\gamma - \mathrm{P} = 0$

$\gamma - \mathrm{Q} = 0$, le quali essendo una di più del numero delle indeterminate, ci daranno una equazione di condizione tra i coefficienti N, P, Q, la quale debbe sussistere acciò abbia luogo il massimo o minimo. Questa equazione di condizione conterrà la ricercata relazione tra x ed y.

Per trovarla, osserviamo che la differenziazione delle equazioni, quì sopra ottenute, ci dà

$\frac{1}{dx} d\beta = N$

$\frac{1}{dx} d\beta + \frac{1}{dx^2} d^2\gamma = \frac{1}{dx} dP$

$\frac{1}{dx^2} d^2\gamma = \frac{1}{dx^2} d^2Q$, dalle quali, sottratte alternativamente una dall' altra, si ricava

$N - \frac{1}{dx} dP + \frac{1}{dx^2} d^2Q = 0.$

Questa sarà l' equazione di condizione, la quale ci darà l' equazione della curva del massimo o minimo. Essa sarà in generale un' equazione differenziale del quarto ordine, il cui integrale conterrà in conseguenza quattro costanti arbitrarie.

Le medesime equazioni ci danno

$\alpha = Cost. = C$

$\beta = P - \frac{1}{dx} dQ$

$\gamma = Q$; così s' avrà

$\int\{\omega N + (\frac{d\omega}{dx})P + (\frac{d^2\omega}{dx^2})Q\}dx = C + \{P - \frac{1}{dx}dQ\}\omega + Q(\frac{d\omega}{dx})$: dovrà dunque la quantità

$C + \{P - \frac{1}{dx}dQ\}\omega + Q(\frac{d\omega}{dx})$ esser nulla da $x = a$ sino ad $x = b$.

Rappresentiamo questa quantità per $C + \Omega$, e supponendo che quando $x = a$ essa divenga $C + A$, e quando $x = b$, $C + B$, dovrà essere $C + B - C - A = 0$, e perciò $B - A = 0$.

Ora essendo β e γ delle funzioni cognite di x e delle costanti arbitrarie, che entrano nell' equazione della curva del massimo o minimo, indichiamo per β', γ' i di loro valori quando $x = a$, e per β'', γ'' quei quando $x = b$; parimente indicando per ω', $(\frac{d\omega}{dx})'$, ω'', $(\frac{d\omega}{dx})''$ i valori di ω e di $(\frac{d\omega}{dx})$ per

i medesimi casi: avremo allora

$A = \beta'\omega' + \gamma'(\frac{d\omega}{dx})'$, $B = \beta''\omega'' + \gamma''(\frac{d\omega}{dx})''$, e quindi

$\beta''\omega'' + \gamma''(\frac{d\omega}{dx})'' - \beta'\omega' - \gamma'(\frac{d\omega}{dx})' = 0.$

Quest' equazione contiene in generale quattro costanti arbitrarie, le quali, se il Problema non è assoggettato ad alcuna condizione particolare, ponno determinarsi in maniera che i coefficienti β'', γ'', β', γ' si annullino da se medesimi, e così sia soddisfatta quell' equazione, qualunque siano ω', ω''. Ma se vi saranno alcune condizioni speciali del Problema, dovremo avervi riguardo.

Così, per esempio, se il valore di y corrispondente alle ascisse $x = a$, $x = b$, cioè al principio ed alla fine dell' integrale, fosse dato, allora il valore di ω, che ne è l' aumento, sarebbe da se medesimo nullo in quei due punti, ed avremo $\omega' = 0$, $\omega'' = 0$; l' equazione cui dovremmo soddisfare si ridurrebbe alla

$\gamma''(\frac{d\omega}{dx})'' - \gamma'(\frac{d\omega}{dx})' = 0$; se di più il valore di $(\frac{dy}{dx})$ fosse anche dato in quei due punti, il valore di $(\frac{d\omega}{dx})$, che ne è l' aumento, sarebbe da se medesimo nullo, e si avrebbe

$(\frac{d\omega}{dx})'' = 0$, $(\frac{d\omega}{dx})' = 0$, e tutta l' equazione $B - A$ sarebbe allora soddisfatta; in questi casi le costanti arbitrarie resterebbero determinate da quelle stesse condizioni speciali del Problema.

Quando la curva per la quale ha luogo il massimo o minimo, deve incontrarne due altre date nei punti che corrispondono alle ascisse $x = a$, $x = b$, i valori di y a questi punti sono dati in virtù dell' equazioni delle curve, e sarà allora $\omega = 0$ in quei due punti: se di più quella curva deve in quei due punti d' incontro avere una determinata direzione nelle tangenti, allora i valori di $(\frac{dy}{dx})$ in quei punti, saranno costanti, ed avremo

$(\frac{d\omega}{dx})'' = 0$, $(\frac{d\omega}{dx})' = 0$.

§. 348. Col secondo metodo del §. 342 può ancora giungersi ai medesimi risultati per altra via.

Integrando per parti le quantità

$\int(\frac{d\omega}{dx})Pdx$, $\int(\frac{d^2\omega}{dx^2})Qdx$, si ha

$$\int(\frac{d\omega}{dx})Pdx = P\omega - \int\omega dP$$

$$\int(\frac{d^2\omega}{dx^2})Qdx = Q(\frac{d\omega}{dx}) - \int(\frac{d\omega}{dx})dQ = Q(\frac{d\omega}{dx}) - \omega\frac{1}{dx}dQ + \int\omega\frac{1}{dx}d^2Q$$, ed in conseguenza

$$\int\{\omega N + (\frac{d\omega}{dx})P + (\frac{d^2\omega}{dx^2})Q\}dx = (P - \frac{1}{dx}dQ)\omega + Q(\frac{d\omega}{dx}) + \int\omega\{N - \frac{1}{dx}dP + \frac{1}{dx^2}d^2Q\}dx.$$

Il secondo membro di quest' equazione deve esser nullo tra i limiti $x = a$, $x = b$ qualunque sia ω. Per questo, facciamo $N - \frac{1}{dx}dP + \frac{1}{dx^2}d^2Q = 0$, ed avremo un' equazione tra x ed y, la quale determinerà la curva cercata.

Il valore dell' integrale sarà allora $(P - \frac{1}{dx}dQ)\omega + Q(\frac{d\omega}{dx})$, il quale se indichiamo per Ω, e supponiamo che divenga A quando $x = 0$ e B quando $x = b$, ci darà l' equazione $B - A = 0$, cui si soddisfarà per mezzo delle condizioni del Problema e delle costanti arbitrarie, come abbiam detto sopra.

Per farne qualche esempio, sia da determinarsi la relazione tra x ed y, che renda massima o minima la quantità $\int\frac{y^n q dx}{p}$.

Sarà in questo caso $\Psi = \frac{y^n q}{p}$, e quindi

$d\Psi = \frac{ny^{n-1}q}{p}dy - \frac{y^n q}{p^2}dp + \frac{y^n}{p}dq$. Avremo adunque

$M = 0$, $N = \frac{ny^{n-1}q}{p}$, $P = -\frac{y^n q}{p^2}$, $Q = \frac{y^n}{p}$, da cui si ricava

$\frac{dQ}{dx} = ny^{n-1} - \frac{y^n q}{p^2} = ny^{n-1} + P$, e quindi

$\frac{1}{dx^2}d^2Q = n(n-1)y^{n-2}(\frac{dy}{dx}) + \frac{1}{dx}dP$: l' equazione dunque del massimo e del minimo

$N - \frac{1}{dx}dP + \frac{1}{dx^2}d^2Q = 0$, diverrà

$0 = y(\frac{dp}{dx}) + (n-1)p(\frac{dy}{dx})$, il cui integrale è $y^{n-1}p = C$ costante. Poniamo in quest' ultima equazione invece di p, il suo valore $(\frac{dy}{dx})$, e si avrà, moltiplicando per dx, $y^{n-1}(\frac{dy}{dx})dx = Cdx$, il cui integrale è $\frac{y^n}{n} = Cx + B$: la curva cercata ha dunque per equazione $\frac{y^n}{n} = Cx + B$; C, B sono due costanti arbitrarie.

Cerchiamo ora l' equazione della curva nella quale $\int\frac{dx\sqrt{(1+p^2)}}{R^2}$ (essendo R il raggio di curvatura) è un minimo. Le curve che godono di questa proprietà sono da Eulero denominate curve Elastiche (*a*).

Essendo, come si sà (§. 79)

$R = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$, avremo $\Psi = \frac{qq}{(1+p^2)^{\frac{5}{2}}}$, e perciò non trovandosi in Ψ nè x nè y, si ha

$d\Psi = Pdp + Qdq$, ove $P = -\frac{5pq^2}{\sqrt{(1+pp)^7}}$, $Q = \frac{2q}{\sqrt{(1+pp)^5}}$.

L' equazione dunque

(*a*) Veggasi l' Appendice all' Opera *Methodus inveniendi Lineas Curvas etc.* citata sopra (§. 338).

$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} = 0$, si riduce a

$-\frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} = 0$, la quale è suscettibile subito d' una integrazione, e diviene

$P - \frac{dQ}{dx} = A$, che è pure una differenziale del terzo grado.

Quest' equazione si può ancora integrare in generale; infatti moltiplichiamola per $qdx = dp$, ed avremo

$Pdp - qdQ = Adp$; essendo poi

$d\Psi = Pdp + Qdq$, si avrà

$Pdp = d\Psi - Qdq$, il qual valore sostituito, ci dà l' equazione

$d\Psi - Qdq - qdQ = Adp$, l' integrale della quale è

$\Psi - Qq = Ap + B$.

Sostituiamo per Q e per Ψ i loro valori, ed avremo

$-\frac{qq}{(1+p^2)^{\frac{5}{2}}} = Ap + B$, la quale mutando i segni delle costanti, diviene

$qq = (Ap + B)(1 + pp)^{\frac{5}{2}}$, e perciò

$q = (1 + pp)^{\frac{5}{4}}\sqrt{(Ap + B)} = (\frac{dp}{dx})$.

Da quest' ultima equazione poi si ricava

$$\frac{(\frac{dp}{dx})dx}{(1+pp)^{\frac{5}{4}}\sqrt{(Ap+B)}} = dx,$$

$$\frac{p(\frac{dp}{dx})dx}{(1+pp)^{\frac{5}{4}}\sqrt{(Ap+B)}} = (\frac{dy}{dx})dx, \text{ ovvero}$$

$$\frac{dp}{(1+pp)^{\frac{5}{4}}\sqrt{(Ap+B)}} = dx,$$

$$\frac{pdp}{(1+pp)^{\frac{5}{4}}\sqrt{(Ap+B)}} = dy,$$

gl' integrali delle quali equazioni dipendono dalle quadrature.

§. 349. In generale indicando per Ψ una funzione qualunque delle variabili x, y, p, q, r ec., supponiamo che si dimandi la curva nella quale la formula $\int \Psi dx$ è massima o minima, prendendo quest' integrale da $x = a$ sino ad $x = b$, cioè supponendo che egli sia nullo quando $x = a$, e che divenga massimo o minimo quando $x = b$.

Ponendo $y + i\omega$, $y - i\omega$ invece di y, dovranno le differenze

$$\int \Psi(x, y + i\omega, p + i(\frac{d\omega}{dx}), q + i(\frac{d^2\omega}{dx^2}), \text{ec.}) - \int \Psi dx$$

$$\int \Psi(x, y - i\omega, p - i(\frac{d\omega}{dx}), q - i(\frac{d^2\omega}{dx^2}), \text{ec.}) - \int \Psi dx$$

esser negative nel massimo, positive nel minimo. Sviluppando in serie secondo le potenze di i, queste differenze diverranno

$$\pm i\int\left\{\omega(\frac{d\Psi}{dy}) + (\frac{d\omega}{dx})(\frac{d\Psi}{dp}) + (\frac{d^2\omega}{dx^2})(\frac{d\Psi}{dq}) + \text{ec.}\right\}dx$$

$$+ i^2\int\left\{\frac{\omega^2}{2}(\frac{d^2\Psi}{dy^2}) + \omega(\frac{d\omega}{dx})(\frac{d^2\Psi}{dydp}) + \frac{1}{2}(\frac{d\omega}{dx})^2(\frac{d^2\Psi}{dq^2}) + \text{ec.}\right\}dx$$

$$\pm i^3\int\left\{\frac{\omega^3}{2.3}(\text{ec.}) + \text{ec.}\right\}dx + \text{ec.};$$

dunque perchè abbia luogo il massimo o il minimo, debb' essere

$$\int\left\{\omega(\frac{d\Psi}{dy}) + (\frac{d\omega}{dx})(\frac{d\Psi}{dp}) + (\frac{d^2\omega}{dx^2})(\frac{d\Psi}{dq}) + \text{ec.}\right\}dx = 0;$$

ed essendo soddisfatta quest' equazione, dobbiamo avere la quantità

$$\int\left\{\frac{\omega^2}{2}(\frac{d^2\Psi}{dy^2}) + \omega(\frac{d\omega}{dx})(\frac{d^2\Psi}{dydp}) + \frac{1}{2}(\frac{d\omega}{dx})^2(\frac{d^2\Psi}{dp^2}) + \text{ec.}\right\}$$

positiva nel minimo, negativa nel massimo, qualunque valore voglia darsi ad ω.

Poniamo $d\Psi = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \text{ec.}$, e l' equazione che deve aver luogo e per il massimo e per il minimo sarà

$$\int \left\{ \omega N + P\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + Q\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) + R\left(\frac{d^3\omega}{dx^3}\right) + \text{ec.} \right\} dx = 0 .$$

Facciamo ora

$$\int \left\{ N\omega + P\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + Q\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) + \text{ec.} \right\} dx = \alpha + \beta\omega + \gamma\left(\frac{d\omega}{dx}\right) +$$

$$\delta\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) + \ldots\ldots\ldots + \pi\left(\frac{d^{n-1}\omega}{dx^{n-1}}\right),$$ essendo α, β, γ ec., funzioni variabili da determinarsi.

Se noi prendiamo il differenziale di quest' equazione, avremo

$$N\omega + P\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + \ldots\ldots\ldots + W\left(\frac{d^n\omega}{dx^n}\right) = \left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + \omega \frac{1}{dx} d\beta +$$

$$\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left\{\beta + \frac{1}{dx} d\gamma\right\} + \left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)\left\{\gamma + \frac{1}{dx} d\delta\right\} + \ldots\ldots + \left(\frac{d^n\omega}{dx^n}\right)\pi,$$

la quale dovendo esser vera per qualunque valore a noi piaccia dare ad ω, ci somministrerà in conseguenza le equazioni

$$\frac{d\alpha}{dx} = 0$$

$$\frac{d\beta}{dx} - N = 0$$

$$\beta + \frac{d\gamma}{dx} - P = 0$$

$$\gamma + \frac{d\delta}{dx} - Q = 0$$

ec. ec.

La prima di queste equazioni ci darà per α una costante arbitraria, e le altre equazioni serviranno a determinare β, γ, δ ec.

E siccome il numero di queste quantità è minore di una unità di quello dell' equazioni, ne risulterà un' equazione di condizione, la quale dovrà esser soddisfatta perchè il massimo o minimo abbia luogo.

Per trovarla osserviamo che la differenziazione delle equazioni quì sopra ottenute, ci dà

$$\frac{1}{dx} d\beta = N$$

$$\frac{1}{dx} d\beta + \frac{1}{dx^2} d^2\gamma = \frac{1}{dx} dP$$

$$\frac{1}{dx^2} d^2\gamma + \frac{1}{dx^3} d^3\delta = \frac{1}{dx^2} d^2Q$$

$$\frac{1}{dx^3} d^3\delta + \frac{1}{dx^4} d^4\epsilon = \frac{1}{dx^3} d^3R$$

ec. ec.

Da queste, sottratte alternativamente una dall' altra, si ricava l' equazione

$$N - \frac{1}{dx} dP + \frac{1}{dx^2} d^2Q - \frac{1}{dx^3} d^3R + \text{ec.} = 0,$$ che non contenendo alcuna delle quantità α, β, γ ec., sarà l' equazione di condizione cercata. Essa avrà luogo per il massimo e per il minimo; conterrà la voluta relazione tra x ed y, e sarà generalmente parlando, di un ordine doppio di quello della funzione $\Psi(x, y, p, q, r$ ec.).

Il valore pertanto della y, il quale si ricaverà dall' integrazione di quell' equazione, conterrà un numero $2n$ di costanti arbitrarie.

Le stesse equazioni

$$\beta + \frac{1}{dx} d\gamma = P$$

$$\gamma + \frac{1}{dx} d\delta = Q$$

ec. ec.

ci danno

$$\beta = P - \frac{1}{dx} d\gamma = P - \frac{1}{dx} dQ + d^2\delta . \frac{1}{dx^2} + \text{ec.}$$

$$\beta = P - \frac{1}{dx} dQ + \frac{1}{dx^2} d^2R - \frac{1}{dx^3} d^3S + \text{ec.}$$

$$\gamma = Q - \frac{1}{dx} dR + \frac{1}{dx^2} d^2S - \text{ec.}$$

$$\delta = R - \frac{1}{dx} dS + \text{ec.}$$

$$\epsilon = S - \text{ec.}$$

Facciamo ora

$\Omega = \omega\beta + \gamma(\frac{d\omega}{dx}) + \delta(\frac{d^2\omega}{dx^2}) +$ ec., ed avremo

$\int\{\omega N + P(\frac{d\omega}{dx}) +$ ec.$\} = \alpha + \Omega$; e siccome quest' integrale deve esser nullo, preso tra i limiti $x = a$, $x = b$; così indicando per A il valore di Ω quando $x = a$, e per B quello quando $x = b$, s' avrà

$\alpha + B - \alpha - A = 0$, ovvero $B - A = 0$.

Se poi noi segniamo con un apice le quantità appartenenti al principio dell' integrale, e con due quelle appartenenti alla fine, quest' equazione si scriverà ancora così

$$\left.\begin{array}{l} \beta''\omega'' + \gamma''(\frac{d\omega}{dx})'' + \delta''(\frac{d^2\omega}{dx^2})'' + \text{ec.} \\ -\beta'\omega' - \gamma'(\frac{d\omega}{dx})' - \delta'(\frac{d^2\omega}{dx^2})' - \text{ec.} \end{array}\right\} = 0$$

A quest' equazione dovrem soddisfare per mezzo delle $2n$ costanti arbitrarie contenute nella relazione tra x ed y conveniente al massimo o minimo.

E quì generalizzando quanto abbiamo detto al §. 347, si concluderà che ridotte, in virtù delle condizioni particolari del Problema, al più piccol numero possibile le quantità

ω', $(\frac{d\omega}{dx})'$, $(\frac{d^2\omega}{dx^2})'$ ec., ω'', $(\frac{d\omega}{dx})''$, $(\frac{d^2\omega}{dx^2})''$ ec., eguaglieremo a zero il coefficiente di ciascuna di quelle che resteranno, e così soddisfaremo all' equazione $B - A = 0$ indipendentemente da queste quantità.

§. 350. Se la quantità $\int\Psi dx$, la quale diventar debbe massima o minima, contenesse oltre le variabili x, y, ancora un' altra variabile z dipendente da x, allora si opererebbe relativamente a questa variabile, come si è fatto relativamente ad y; così indicando per p', q', r' ec. le quantità $(\frac{dz}{dx})$, $(\frac{d^2z}{dx^2})$ ec., nella funzione $\int\Psi(x, y, p, q$ ec. z, p', q' ec.$)dx$ sostituiremo allo stesso tempo $y \pm \omega$, $z \pm \xi$, in luogo di y e di z, e

facendone lo sviluppo, bisognerà che l' integrale della parte nella quale solo si trovano le prime dimensioni

ω, $(\frac{d\omega}{dx})$, $(\frac{d^2\omega}{dx^2})$ ec., ξ, $(\frac{d\xi}{dx})$, $(\frac{d^2\xi}{dx^2})$ ec., sia nulla, e l' integrale di quella ove sono le seconde dimensioni delle stesse quantità, sia positiva nel minimo, negativa nel massimo, indipendentemente dalle quantità ω e ξ; dunque un ragionamento simile a quello fatto al §. antecedente, ci darà (supponendo $d\Psi = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq +$ ec. $+ N'dz + P'dp' + Q'dq' +$ ec) queste due equazioni

$$N - \frac{1}{dx}dP + \frac{1}{dx^2}d^2Q - \frac{1}{dx^3}d^3R + \text{ec.} = 0$$

$$N' - \frac{1}{dx}dP' + \frac{1}{dx^2}d^2Q' - \frac{1}{dx^3}d^3R' + \text{ec.} = 0,$$

le quali serviranno a determinare y e z in x.

In seguito bisognerà relativamente alle quantità z e ξ soddisfare a condizioni simili a quelle trovate per rapporto ad y ed ω; di modo che indicando per b, c, g, e ec. delle quantità in z analoghe a quelle β, γ, δ, ϵ ec. in y si avrà

$$b = P' - \frac{1}{dx}dQ' + \frac{1}{dx^2}d^2R - \text{ec.}$$

$$c = Q' - \frac{1}{dx}dR' + \text{ec.}$$

$$g = R' - \text{ec.}$$

ec.

e per mezzo delle costanti arbitrarie e delle condizioni del Problema, dovrem soddisfare all' equazione

$$\left.\begin{array}{l} b''\xi'' + c''(\frac{d\xi}{dx})'' + g''(\frac{d^2\xi}{dx^2})'' + \text{ec.} \\ -b'\xi' - c'(\frac{d\xi}{dx})' - g'(\frac{d^2\xi}{dx^2})' - \text{ec.} \end{array}\right\} = 0,$$

nella quale le quantità segnate con doppio apice si riportano alla fine dell' integrale, e quell' altre si riportano al principio.

Non ci fermeremo di più sopra quest' oggetto. Si vede poi come dovremo regolarci per un' altra variabile u.

Per un esempio di siffatti Problemi riprendiamo la ricerca della *Brachistocrona* che abbiamo già trattata al §. 345. e supponiamo che essa non sia assoggettata a star sempre in un medesimo piano.

Supponiamo che x, y, z siano le tre coordinate rettangolari della curva descritta dal corpo, essendo sempre x le ascisse verticali: s' avrà, come nel §. citato, $\sqrt{(m + x - \alpha)}$ per l' espressione generale della velocità, e

$\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}} = \left(\frac{ds}{dx}\right)$, indicando per s l' arco della curva. Chiamando poi t il tempo, il quale dee divenir minimo, si avrà

$t = \int \frac{\sqrt{(1 + p^2 + p'^2)}}{\sqrt{(m + x - \alpha)}}\, dx$, e perciò $\Psi = \frac{\sqrt{(1 + p^2 + p'^2)}}{\sqrt{(m + x - \alpha)}}$.

Differenziamo quest' espressione, ed avremo

$$d\Psi = -\frac{\sqrt{(1 + p + p')}}{2\sqrt{(m + x - \alpha)}^{\frac{3}{2}}}\, dx + \frac{p}{\sqrt{(1 + p^2 + p'^2)}\sqrt{(m + x - \alpha)}}\, dp + \frac{p'}{\sqrt{(1 + p^2 + p'^2)}\sqrt{(m + x - \alpha)}}\, dp'.$$

Ora mancando i termini ove si trovi dy, le due equazioni che risolvono il Problema, diverranno

$-\frac{dP}{dx} = 0$, $-\frac{dP'}{dx} = 0$, le quali integrate, ci danno $P = C$, $P' = D$, ovvero, ponendo per P, P' i loro valori

$$\frac{p}{\sqrt{(1+p^2+p'^2)}\sqrt{(m+x-\alpha)}} = C$$

$$\frac{p'}{\sqrt{(1+p^2+p'^2)}\sqrt{(m+x-\alpha)}} = D.$$

Dividendo queste due equazioni una per l' altra, s' avrà l' equazione $\frac{p}{p'} = \frac{C}{D}$, cioè $p' = \frac{D}{C}p$, il cui integrale è $z = \frac{D}{C}y + E$, essendo C, D, E costanti arbitrarie.

Quest' equazione essendo quella di un piano verticale, poichè l' ascissa x non vi si trova, ci dice che la curva cercata è tutta in un piano; così questa supposizione che noi avevamo fatta al §. 345, nulla toglie alla generalità del Problema.

§. 351. Determinata la relazione tra le coordinate x, y, la quale conviene alla curva del massimo o minimo, restano a stabilirsi i criterj necessarj, onde distinguere tali quantità una dall' altra; ma per questo ci bisogna premettere il seguente *Lemma*.

Indicando per $f(x)$ una qualunqua funzione di x, e per $f'(x)$ il suo differenziale $\left(\frac{df}{dx}\right)$, di modo che $f(x) = \int f'(x)\, dx$ se la quantità $f'(x)$ è sempre positiva per tutti i valori di x da $x = a$ sino ad $x = b$, essendo $a < b$, la differenza degli integrali che corrispondono a questi due valori di z, cioè $f(b) - f(a)$, sarà necessariamente una quantità positiva.

Sviluppando in serie secondo le potenze di ω la funzione $f(x + \omega)$, si sa essere (posto $f'(x) = \left(\frac{df}{dx}\right)$, $f''(x) = \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)$ ec.)

$f(x + \omega) = f(x) + \omega f'(x) + \frac{\omega^2}{2} f''(x) +$ ec. Dunque

$f(x + \omega) - f(x) = \omega f'(x) + \frac{\omega^2}{2} f''(x) +$ ec.: ora noi abbiam veduto che possiam sempre impiccolire ω finchè renda il primo termine $\omega f'(x)$ maggiore della somma di tutti quei che lo seguono; dunque se $f'(x)$ è una quantità positiva, si potrà prendere ω positivo, e tale che tutta la serie $\omega f'(x) + \frac{\omega^2}{2} f''(x) +$ ec. abbia necessariamente un valor positivo; dunque se $f'(x)$ è una quantità positiva, si potrà prendere ω positivo e così piccolo da render necessariamente la differenza $f(x + \omega) - f(x)$ positiva.

Poniamo successivamente in luogo di x le quantità a, $a + \omega$, $a + 2\omega$, $a + 3\omega$ ec., $a + n\omega$, e ne seguirà che noi potremo coll' impiccolire continuamente ω trovare in fine quel valore che rende le quantità

$f(x + \omega) - f(x)$

$f(x + 2\omega) - f(x + \omega)$

$f(x+3\omega)-f(x+2\omega)$

$f(x+4\omega)-f(x+3\omega)$

. . . .

. . . .

$f(x+(n+1)\omega)-f(x+n\omega)$

tutte necessariamente positive; dunque anche in questo caso la di loro somma $=f(x+(n+1)\omega)-f(x)$ sarà una quantità positiva. Facciamo $a+(n+1)\omega=b$, s' avrà $\omega=\frac{b-a}{n+1}$, e si concluderà che la quantità $f(b)-f(a)$ sarà necessariamente positiva se tutte le quantità

$f'(a), f'(a+\frac{b-a}{n+1}), f'(a+\frac{2(b-a)}{n+1}), f'(a+\frac{3(b-a)}{n+1})$ ec.,

sino a $f'(a+\frac{n(b-a)}{n+1})$ sono positive.

Dunque a maggior ragione la quantità $f(b)-f(a)$ sarà positiva, dando ad x tutti i valori possibili da $x=a$ sino ad $x=b$, poichè tra questi valori si troveranno necessariamente i valori

$a, a+\frac{b-a}{n+1}, a+\frac{2(b-a)}{n+1}, a+\frac{3(b-a)}{n+1}$ ec., $a+\frac{n(b-a)}{n+1}$,

prendendo per n quel numero che a noi piace.

Questo Teorema è appoggiato allo sviluppo delle funzioni in serie secondo le potenze intiere e crescenti di x, quando si danno ad x dei valori particolari: ora vi sono, come abbiam veduto (§. 39) dei casi nei quali questo sviluppo non può di natura sua aver luogo; dunque in essi non sarà neppur vero il Teorema dimostrato; e siccome dal divenire infinite alcune delle funzioni $f'(x)$, $f''(x)$ ec., siamo assicurati che lo sviluppo non è legittimo; così, affinchè possa dirsi che $f(b)-f(a)$ è una quantità positiva, bisognerà ancora esser certi che non solo $f'(x)$ è una quantità positiva per tutti i valori possibili da $x=a$ ad $x=b$, ma che ancora nessuna delle funzioni $f''(x)$, $f'''(x)$ ec, diviene infinita per alcuno di quei valori della variabile x medesima.

Necessariamente poi la funzione $f'(x)$ o alcuna delle sue successive, è infinita per un qualche valore di x, quando la funzione $f(x)=\int dx f'(x)$ lo è per quello stesso valore; imperocchè lo sviluppo, cui si eguaglia $f(x)$, dovendo in questo caso divenire infinito, necessariamente lo diverranno alcuni dei suoi termini. Questo succede allorchè $f(x)$ contiene qualche denominatore, il quale annullandosi per un certo valore di x, rende allora $f(x)$ infinito.

Che poi la differenza $f(b)-f(a)$ possa non esser positiva quando alcuno dei valori da $x=a$ ad $x=b$, rende infinita $f'(x)$, si può verificare con un semplicissimo esempio.

Sia $f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$, ed allora sarà $f(x)=\frac{x}{1-x}$. La $f'(x)$ si conserva sempre positiva per tutti i valori reali di x, ma tra questi vi è $x=1$, che la rende infinita, e la $f(x)$ è positiva per tutti i valori al di sotto di $x=1$, e negativa per quegli al di sopra, di modo che se facciamo $a=\frac{1}{2}$, $b=2$, si ha $f(b)-f(a)=-2-1=-3$, quantità negativa.

§. 352. Questo premesso, incominciamo dal caso più semplice, quello cioè del §. 336 nel quale la funzione Ψ dell' integrale $\int \Psi dx$ contiene solo x ed y.

L' integrale $\int \omega^2(\frac{d^2\Psi}{dy^2})dx$ debb' essere una quantità negativa nel massimo e positiva nel minimo, prendendo quest' integrale tra i limiti $x=a$, $x=b$; il minimo dunque avrà luogo se la quantità $\int \omega^2(\frac{d^2\Psi}{dy^2})dx$ sarà positiva tra quei limiti. Ora il Lemma precedente ci dice che questo succederà se appunto la quantità $\omega^2(\frac{d^2\Psi}{dy^2})$ sarà positiva per tutti i valori da $x=a$ ad $x=b$, ovvero se sarà semplicemente una quantità positiva la funzione $(\frac{d^2\Psi}{dy^2})$, giacchè ω^2 è sempre positivo; dunque ciò che si ricerca, sarà un minimo, quando $(\frac{d^2\Psi}{dy^2})$ (che puossi considerare come una funzione di x, da che vi avremo sostituito il valore di y dato per x) sarà positivo dando ad x tutti i valori possibili da $x = a$ ad $x = b$, ed un massimo, quando quei valori saranno tutti negativi.

E quì coerentemente a quanto abbiamo avvertito alla fine del § antecedente aggiungeremo, che rappresentando $\left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right)$ per $F(x)$, è necessario che non solo siano tutti positivi o tutti negativi i valori di $F(x)$ da $x = a$ sino ad $x = b$, ma che ancora le funzioni differenziali $\left(\frac{dF}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)$ ec. non siano infinite per alcuno di quei valori.

Supponiamo adesso che nella funzione Ψ dell' integrale $\int \Psi dx$, il quale dee divenir massimo o minimo, si contenga oltre x, y anche $\left(\frac{dy}{dx}\right) = p$. In questo caso l' integrale

$$\int \left\{ \omega^2 \left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right) + 2\omega \left(\frac{d\omega}{dx}\right) \left(\frac{d^2\Psi}{dydp}\right) + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 \left(\frac{d^2\Psi}{dp^2}\right) \right\} dx,$$ preso tra i limiti $x = a$, $x = b$, debb' esser negativo nel massimo, positivo nel minimo. Rappresentiamo questa quantità così,

$$\int \left\{ \omega^2 P + 2\omega \left(\frac{d\omega}{dx}\right) Q + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 R \right\} dx,$$ ed osservando che la parte sbarazzata dal segno integrale non può aver altro che questa forma $\alpha\omega^2$, la di cui differenziale è

$\omega^2 \left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + 2\alpha\omega \left(\frac{d\omega}{dx}\right)$, avremo l' equazione

$$\int \left\{ \omega^2 P + 2\omega \left(\frac{d\omega}{dx}\right) Q + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 R \right\} dx = \alpha\omega^2 + \int \left\{ \left(P - \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)\right) \omega^2 + 2(Q - \alpha)\, \omega \left(\frac{d\omega}{dx}\right) + R \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 \right\} dx,$$ nella quale possiam prendere per α quel valore che ci piace.

Prendiamolo in modo che la quantità sotto il segno integrale abbia due fattori eguali: s' avrà allora per determinare α, quest' equazione

$$\left(P - \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)\right) R = (Q - \alpha)^2 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (b)$$

e quindi

$$\int dx \left\{ P\omega^2 + 2\omega \left(\frac{d\omega}{dx}\right) Q + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 R \right\} = \alpha\omega^2 + \int R dx \left(\omega \frac{Q - \alpha}{R} + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right)^2.$$

Ora la quantità sotto il segno integrale sarà positiva o negativa per tutti i valori di x da $x = a$ sino ad $x = b$, se lo è la quantità R; dunque in virtù del Lemma del §. antecedente concluderemo che l' integrale

$\int R dx \left\{ \omega \frac{Q - \alpha}{R} + \left(\frac{d\omega}{dx}\right) \right\}^2$, preso tra i limiti $x = a$, $x = b$, sarà positivo se $\left(\frac{d^2\Psi}{dp^2}\right)$ lo sarà per tutti i valori di x da $x = a$ sino ad $x = b$, e negativo se $\left(\frac{d^2\Psi}{dp^2}\right)$ lo sarà per quei medesimi valori di x. Dunque il criterio per distinguere il massimo dal minimo ci sarà dato dalla quantità $\left(\frac{d^2\Psi}{dp^2}\right)$; se essa sarà positiva per quei valori di x, avremo il minimo; e se negativa, il massimo.

A riguardo della quantità $\alpha\omega^2$, se noi la indichiamo per (A) al principio dell' integrale, cioè quando $x = a$, e per (B) alla fine del medesimo, cioè quando $x = b$, bisognerà che sia (B) — (A) una quantità negativa per il massimo, e positiva per il minimo, ovvero nulla per i due casi, indipendentemente dal valore di ω, che dee restare indeterminato; così se il valore di y fosse dato per mezzo dei valori a, b di x, il valore corrispondente di ω essendo allora nullo, s' avrà (A) = o, (B) = o, e la condizione precedente sarà adempita tanto per il massimo che per il minimo; e se i valori di y non sono dati, bisognerà soddisfare all' equazione (B) — (A) = o.

La costante arbitraria che l' integrazione dell' equazione (b) introduce nel valore di α, ci faciliterà l' adempire a queste condizioni.

E' quì avvertiamo che tutti questi criterj suppongono che nessuna delle quantità P, Q, R ed α divengano infinite per alcuno di quei valori di x compresi da $x = a$ sino ad $x = b$; così a quei criterj conviene aggiungere questa condizione, senza la quale non potremmo esser assicurati dell' esistenza del massimo o del minimo.

La quantità α è la più difficile a riconoscersi se diviene infinita, poichè essa dipende dall' integrazione dell' equazione (b), che il più delle volte non sarà integrabile; ma questa difficoltà non appartiene alle presenti Teorìe, e si farà tanto meno sentire, quanto più sarà perfezionata la Teorìa dell' integrazione dell' equazioni.

Nel Problema del §. 343 la quantità che divenir dovea massima o minima, era $\int dx \sqrt{(1 + pp)}$; dunque

$\left(\frac{d^2\Psi}{dp^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{(1+p^2)^3}}$, ovvero

$\left(\frac{d^2\Psi}{dp^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{(1+n^2)^3}}$, poichè si è trovato $p = n$, essendo n costante arbitraria: ora questa quantità è sempre positiva, nè diviene infinita per alcun valore dell' ascissa x; dunque vi avrà il minimo.

Nell' altro Problema del §. 345 la quantità che per un' adattata relazione tra x ed y divenir dovea massima o minima, era

$\int \frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{(m+x-\alpha)}}\, dx$; dunque

$\left(\frac{d^2\Psi}{dp^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{(m+x-\alpha)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+p^2)^3}}$, e questa quantità essendo sempre positiva per tutti i valori da $x = \alpha$ sino ad $x = \beta$, avrà necessariamente luogo il minimo.

§. 353. Se nella formula differenziale Ψdx si contiene anche $q = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, la quantità che dovrà divenir positiva o negativa secondo che vi è il minimo o il massimo, è l' integrale

$$\int dx \left\{ \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right) + \omega\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d^2\Psi}{dpdy}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2\left(\frac{d^2\Psi}{dp^2}\right) + \omega\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2\Psi}{dydq}\right) + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2\Psi}{dpdq}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)^2\left(\frac{d^2\Psi}{dq^2}\right) \right\},$$ tra i limiti $x = a$, $x = b$.

Diamo alla quantità sotto il segno integrale questa forma

$$dx \left\{ M\omega^2 + 2N\omega\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + Q\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 + 2P\omega\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) + 2R\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) + S\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) \right\};$$ e siccome la differenziale di

$\alpha\omega^2 + 2\beta\omega\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + \gamma\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2$ è

$$dx \left\{ \omega^2\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + 2\omega\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d\beta}{dx}\right) + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2\left(\frac{d\gamma}{dx}\right) + 2\alpha\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\omega + 2\beta\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 + 2\beta\omega\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) + 2\gamma\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) \right\},$$ s' avrà così

$$\int dx \left\{ M\omega^2 + \ldots\ldots\ldots + S\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) \right\} = \alpha\omega^2 + 2\beta\omega\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + \gamma\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 + \int dx \left\{ \left(M - \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)\right)\omega^2 + 2\left(N - \alpha - \left(\frac{d\beta}{dx}\right)\right)\omega\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + 2(P - \beta)\,\omega\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) + \left(Q - 2\beta - \left(\frac{d\gamma}{dx}\right)\right) \times \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 + 2(R - \gamma)\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) + S\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)^2 \right\},$$ nella quale saranno rilasciate al nostro arbitrio le quantità α, β, γ.

Determiniamole in maniera che la quantità sotto il segno integrale possa prendere questa forma

$\int S \left\{ \left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) + \mu\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + \lambda\omega \right\}^2 dx$, ed avremo queste cinque equazioni

$S\mu = R - \gamma$,

$S\lambda = P - \beta$,

$S\mu^2 = Q - 2\beta - \left(\frac{d\gamma}{dx}\right)$,

$S\lambda\mu = N - \alpha - (\frac{d\beta}{dx})$,

$S\lambda^2 = M - (\frac{d\alpha}{dx})$, per mezzo delle quali potrem determinare i valori delle cinque incognite $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \lambda$.

L' equazione poi che determinerà ciascuna di queste quantità sarà differenziale del terzo ordine, ma trovatane una, se ne avranno subito le altre.

L' integrale dunque

$\int S dx \{\lambda\omega + \mu(\frac{d\omega}{dx}) + (\frac{d^2\omega}{dx^2})\}^2$, sarà positivo o negativo tra i limiti $x = a$, $x = b$, se il coefficiente S si conserverà positivo o negativo per tutti i valori da $x = a$ ad $x = b$; dunque avremo il massimo quando la quantità $(\frac{d^2\Psi}{dq^2})$, ridotta ad essere una funzione di x per mezzo della trovata relazione tra x ed y, sarà negativa, ed avremo il minimo quando sarà positiva per tutti i valori possibili da $x = a$ sino ad $x = b$.

Per esempio. Nel Problema sopra le curve elastiche del §. 348 si ha $\Psi = \frac{qq}{(1+p^2)^{\frac{5}{2}}}$: sarà dunque $(\frac{d^2\Psi}{dq^2}) = \frac{2}{(1+p^2)^{\frac{5}{2}}}$, quantità che essendo sempre positiva, ci dà a divedere che vi è il minimo.

Rapporto alla quantità

$\alpha\omega^2 + 2\beta\omega(\frac{d\omega}{dx}) + \gamma(\frac{d\omega}{dx})^2$, che è fuori del segno, se noi la rappresenteremo per (A) al principio dell' integrale, e per (B) alla fine, dovremo avere $(B) - (A) = 0$, ovvero dello stesso segno che S, ed a queste condizioni potrà soddisfarsi e per mezzo dei dati del Problema all' estremità dell' integrale, e delle costanti arbitrarie, che introduce l' equazione determinante una di quelle cinque quantità α, β ec.

Secondo ciò che è detto sopra (§. 351) a tutte queste condizioni debbe aggiungersi che nessuna delle quantità M, N, P, Q, R, S, $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \lambda$ divenga infinita per qualche valore di x compreso tra i limiti $x = a$, $x = b$.

E quì potremo generalizzare il risultato e concluderne che se u è l' ultima delle quantità p, q, r ec., avremo il massimo se $(\frac{d^2\Psi}{du^2})$ è negativo, ed il minimo se è positivo, per tutti i valori però da $x = a$ ad $x = b$; infatti se m è il numero delle quantità $p, q, r \ldots u$ o il grado dei differenziali contenuti in Ψ, seguitando come abbiam fatto nei due precedenti casi, vedremo che il numero dei coefficienti indeterminati fuori del segno $\int$ è $\frac{m(m+1)}{2}$; che il numero dei coefficienti indeterminati compresi nel quadrato sotto il segno è m; e che la serie degli aumenti del secondo ordine che riceve la Ψ, contiene un numero di termini $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$; s' avranno dunque tante equazioni quante incognite, poichè $\frac{m(m+1)}{2} + m = \frac{(m+1)(m+2)}{2} - 1$; non vi è poi da temere che qualcheduna di quest' equazioni sia contenuta nelle altre, poichè ciascuna contiene una lettera che non si trova in quell' altre medesime.

Se la quantità $(\frac{d^2\Psi}{du^2})$ non avesse lo stesso segno in tutta l' estensione della curva, vi sarebbe allora il massimo ed il minimo insieme.

Queste regole per distinguere i massimi dai minimi debbonsi al Geometra Le Gendre.

§. 354. Noi abbiamo sin' ora considerati i casi, nei quali la funzione Ψ della formula $\int \Psi dx$, era composta delle variabili x, y e dei coefficienti differenziali p, q, r ec.: ora l' ordine richiederebbe che si prendessero in esame quei casi nei quali, oltre le suddette quantità variabili, entrassero a compor Ψ ancora gl' integrali $\int V dx$, $\int V' dx$ ec.; come pure gl' integrali degli ordini superiori al primo, essendo V, V' tante funzioni di x, y, p, q ec.: anzi per considerare la cosa nel più esteso punto di vista, si potrebbe proporre questo Problema: „ Trovare la relazione tra x, y, che rende la formula $\int \Psi dx$ „ massima o minima, supponendo Ψ composto delle quantità

„ variabili x, y, p, q ec., V, V', V'' ec., ed essendo le „ quantità V, V', V'' ec., date da altrettante equazioni diffe- „ renziali di qualunque ordine tra di esse e le quantità x, y, „ p, q ec. „.

Ma per non perdersi in delle generalità superflue, io limiterò molto questo Problema, e ne sminuzzerò la soluzione più che sarà possibile, onde i miei Lettori si rendano padroni del metodo, a segno di applicarlo a casi più estesi; per il che fare son certo che non incontreranno gran difficoltà.

Supponiamo dunque che si cerchi la relazione tra x ed y, la quale renda l' integrale $\int \Psi dx$ preso tra i limiti $x = a$, $x = b$, massimo o minimo, essendo Ψ composto delle variabili x, y, p e di un' altra quantità variabile V, mentre questa variabile V è data dall' equazione differenziale del primo ordine $(\frac{dV}{dx}) = \varphi$, ed il secondo membro φ è composto anch' esso delle quantità x, y, p, V.

Se indichiamo per $+ i\theta$ e per $- i\theta'$ gli aumenti che riceve V, mentre y diviene $y \pm i\omega$ e rappresentiamo quella funzione Ψ per $\Psi(x, y, p, V)$, avremo le due differenze

$$\int \Psi(x, y + i\omega, p + i(\tfrac{d\omega}{dx}), V + i\theta)\, dx - \int \Psi(x, y, p, V)\, dx,$$

$$\int \Psi(x, y - i\omega, p - i(\tfrac{d\omega}{dx}), V - i\theta')\, dx - \int \Psi(x, y, p, V)\, dx,$$

che debbono essere due quantità positive nel minimo e negativo nel massimo.

Sviluppandole in serie per mezzo del Teorema di Tajlor, e ponendo A per $(\frac{d\Psi}{dV})$, B per $(\frac{d\Psi}{dy})$ ec., si avranno

$$+ i\int dx \left\{ A\theta + B\omega + C(\tfrac{d\omega}{dx}) \right\} + \tfrac{i^2}{2}\int dx \left\{ F\theta^2 + 2G\theta\omega + \right.$$
$$\left. 2H\theta(\tfrac{d\omega}{dx}) + I\omega^2 + 2K\omega(\tfrac{d\omega}{dx}) + L(\tfrac{d\omega}{dx})^2 \right\} + \text{ec.},$$

$$- i\int dx \left\{ A\theta' + B\omega + C(\tfrac{d\omega}{dx}) \right\} + \tfrac{i^2}{2}\int dx \left\{ F\theta'^2 + 2G\theta'\omega + \right.$$
$$\left. 2H\theta'(\tfrac{d\omega}{dx}) + I\omega^2 + 2K\omega(\tfrac{d\omega}{dx}) + L(\tfrac{d\omega}{dx^2})^2 \right\} - \text{ec.},$$

nelle quali due serie debbono prendersi gli integrali tra i limiti $x = a$, $y = b$.

Facciamo

$$i\int dx \left\{ A\theta + B\omega + C(\tfrac{d\omega}{dx}) \right\} = i \left\{ \alpha\theta + \beta\omega + \delta \right\}$$

e differenziando, avremo

$$A\theta + B\omega + C(\tfrac{d\omega}{dx}) = \alpha \cdot \tfrac{d\theta}{dx} + \theta \cdot \tfrac{d\alpha}{dx} + \omega \cdot \tfrac{d\beta}{dx} + \beta(\tfrac{d\omega}{dx}) + \tfrac{d\delta}{dx}.$$

Ora osservo che se nell' equazione $(\frac{dV}{dx}) = \varphi$ poniamo $y + i\omega$ per y, si avrà

$$i(\tfrac{d\theta}{dx}) = i\left\{ A'\theta + B'\omega + C'(\tfrac{d\omega}{dx}) \right\} + \tfrac{i^2}{2}\left\{ F'\theta^2 + 2G'\theta\omega + \right.$$
$$\left. 2H'\theta(\tfrac{d\omega}{dx}) + I'\omega^2 + 2K'\omega(\tfrac{d\omega}{dx}) + L'(\tfrac{d\omega}{dx})^2 \right\} + \text{ec.},$$

essendo $A' = (\frac{d\varphi}{dV})$, $B' = (\frac{d\varphi}{dy})$ ec.; dunque sostituendo, troveremo

$$i\left\{ A\theta + B\omega + C(\tfrac{d\omega}{dx}) \right\} = i\left\{ \alpha A'\theta + \alpha B'\omega + \alpha C'(\tfrac{d\omega}{dx}) + \right.$$
$$\left. \theta\tfrac{d\alpha}{dx} + \beta(\tfrac{d\omega}{dx}) + \omega\tfrac{d\beta}{dx} \right\} + i\tfrac{d\delta}{dx} + \tfrac{i^2}{2}\left\{ \alpha F'\theta^2 + 2\alpha G'\theta\omega + \right.$$
$$\left. 2\alpha H'\theta(\tfrac{d\omega}{dx}) + \alpha I'\omega^2 + 2\alpha K'\omega(\tfrac{d\omega}{dx}) + \alpha L'(\tfrac{d\omega}{dx})^2 \right\} + \tfrac{i^3}{2.3}\ \text{ec.}$$

Quest' equazione si può spezzare nelle quattro seguenti

$$\left.\begin{aligned} A - \alpha A' - \tfrac{d\alpha}{dx} &= 0 \\ B - \alpha B' - \tfrac{d\beta}{dx} &= 0 \\ C - \alpha C' - \beta &= 0 \end{aligned}\right\} (E)$$

$$\tfrac{d\delta}{dx} = -\tfrac{i}{2}\left\{ \alpha F'\theta^2 + 2\alpha G'\theta\omega + 2\alpha H'\theta(\tfrac{d\omega}{dx}) + \text{ec.} \right\}.$$

Sostituito il valore di β preso dalla terza equazione nella seconda, si hanno le due equazioni

$$A - \alpha A' - \frac{d\alpha}{dx} = 0,$$

$B - \alpha B' - \frac{d(\alpha C' - C)}{dx} = 0$, dalle quali eliminando α, si ricaverà una relazione tra x ed y, la quale ci dà la ricercata curva del massimo o del minimo. Trovata questa relazione si ponno avere in seguito i valori per α e per β.

La stessa relazione tra x ed y, della quale quì parliamo, ci è data ancora, come vedremo, dalla seconda di quelle due serie rappresentanti le differenze che debbono essere positive nel minimo, negative nel massimo.

§. 355. Da quanto abbiam detto quì sopra si ricava che la prima di dette due serie sarà

$$+ i(\alpha\theta + \beta\omega) + \frac{i^2}{2}\int dx \left\{(F - \alpha F')\theta^2 + 2\omega\theta(G - \alpha G') + 2\theta\left(\frac{d\omega}{dx}\right)(H - \alpha H') + \omega^2(I - \alpha I') + 2\omega\left(\frac{d\omega}{dx}\right)(K - \alpha K') + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2(L - \alpha L')\right\} + \frac{i^3}{2.3}\int dx\,\{\text{ec.}\} + \text{ec.}$$

Per ridurre la seconda, facciamo

$$- i\int dx\left\{A\theta' + B\omega + C\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right\} = - i(\alpha\theta' + \beta\omega) + i\delta',$$

ed avremo

$$- A\theta' - B\omega - C\left(\frac{d\omega}{dx}\right) = - \alpha\frac{d\theta'}{dx} - \theta'\frac{d\alpha}{dx} - \beta\left(\frac{d\omega}{dx}\right) - \omega\frac{d\beta}{dx} + \frac{d\delta'}{dx}.$$

L' equazione poi $\left(\frac{dV}{dx}\right) = \varphi$, ci dà

$$- i\frac{d\theta'}{dx} = - i\left\{A'\theta' + B'\omega + C'\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right\} + \frac{i^2}{2}\left\{F'\theta'^2 + 2G'\theta'\omega + 2H'\theta'\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + I'\omega^2 + 2K'\omega\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + L'\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2\right\} + \text{ec.},$$

e sostituendo troveremo

$$- i\left\{A\theta' + B\omega + C\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right\} = - i\left\{\alpha A'\theta' + \alpha B'\omega + \alpha C'\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + \theta'\frac{d\alpha}{dx} + \beta\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + \omega\frac{d\beta}{dx}\right\} + i\frac{d\delta'}{dx} + \frac{i^2}{2}\left\{\alpha F'\theta'^2 + 2\alpha G'\theta'\omega + \text{ec.}\right\} + \text{ec.}$$

Quest' equazione ci dà egualmente quattro equazioni, di cui le prime tre sono le stesse (E) del §. antecedente, e da esse si ricavano in conseguenza gli stessi valori, quindi la stessa relazione tra le variabili x, y; la quarta poi è

$$\frac{d\delta'}{dx} = - \frac{i^2}{2}\left\{\alpha F'\theta'^2 + 2\alpha G'\theta'\omega + 2\alpha H\theta'\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + \text{ec.}\right\} + \text{ec.}$$

Dunque la seconda di quelle due serie diverrà

$$- i(\alpha\theta' + \beta\omega) + \frac{i^2}{2}\int dx\left\{(F - \alpha F')\theta'^2 + 2\omega\theta'(G - \alpha G') + 2\theta'\left(\frac{d\omega}{dx}\right)(H - \alpha H') + \omega^2(I - \alpha I') + 2\omega\left(\frac{d\omega}{dx}\right)(K - \alpha K') + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2.(L - \alpha L')\right\} - \frac{i^3}{2.3}\int dx\,\{\text{ec.}\} + \text{ec.}$$

Scriviamo per semplicità M per $F - \alpha F'$; N per $G - \alpha G'$ ec., e le nostre quantità prenderanno questa forma

$$+ i(\alpha\theta + \beta\omega) + \frac{i^2}{2}\int dx\left\{M\theta^2 + 2\omega\theta N + 2O\theta\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + P\omega^2 + 2Q\omega\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + R\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2\right\} + \frac{i^3}{2.3}\int dx\,\{\text{ec.}\} + \text{ec.},$$

$$- i(\alpha\theta' + \beta\omega) + \frac{i^2}{2}\int dx\left\{M\theta'^2 + 2N\omega\theta' + 2O\theta'\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + \omega^2 P + 2Q\omega\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + R\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2\right\} - \frac{i^3}{2.3}\int dx\,\{\text{ec.}\} + \text{ec.}:$$

esse debbono essere negative nel massimo, positive nel minimo, presi gli integrali tra i limiti $x = a$, $x = b$.

Per trovare i criterj onde distinguere i massimi dai minimi, converrà dunque cercare le condizioni, le quali debbono aver luogo, acciò quelle due quantità siano nello stesso tempo positive o negative.

Facciamo per questo

$$\int dx\,\{M\theta^2 + 2N\omega\theta + \text{ec.}\} = g\omega^2 + 2m\theta\omega + n\theta^2 + \int dx\left\{\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + l\omega + h\theta\right\}^2 R,$$ e differenziando, sostituendo

il valore di $\frac{d\theta}{dx}$ trovato al §. antecedente, ed eguagliando i termini simili nei due membri, avremo le equazioni seguenti

$$M = \frac{dn}{dx} + Rh^2 + 2A'n;$$

$$N = \frac{dm}{dx} + Rlh + A'm + B'n;$$

$$O = m + Rh + C'n;$$

$$P = \frac{dg}{dx} + Rl^2 + 2B'm;$$

$$Q = g + Rl + C'm;$$

fatta una stessa riduzione per l' altro integrale, quelle due quantità diverranno

$$+ i(\alpha\theta + \beta\omega) + \frac{i^2}{2}\{g\omega^2 + 2m\theta\omega + n\theta^2\} + \frac{i^2}{2}\int R\left\{(\frac{d\omega}{dx}) + l\omega + h\theta\right\}^2 dx + \text{ec.}$$

$$- i(\alpha\theta' + \beta\omega) + \frac{i^2}{2}\{g\omega^2 + 2m\theta'\omega + n\theta'^2\} + \frac{i^2}{2}\int R\left\{(\frac{d\omega}{dx}) + l\omega + h\theta\right\}^2 dx + \text{ec.}$$

le quali esser debbono negative nel massimo, positive nel minimo estese tra i limiti $x = a$, $x = b$.

Ora osserviamo che θ e θ' sono generalmente parlando funzioni di i di questa forma

$\theta = \theta 1 + i\theta 2 + i^2\theta 3 + \text{ec.}$, $\theta' = \theta 1 - i\theta 2 + i^2\theta 2 - \text{ec.}$;

se dunque facciamo le opportune sostituzioni nei termini fuori del segno integrale, quelle quantità diverranno

$$+ i(\alpha\theta 1 + \beta\omega) + \frac{i^2}{2}\{2\alpha\theta 2 + g\omega^2 + 2m\theta 1 . \omega + n\theta 1^2\} + \frac{i^2}{2}\int R\{\text{ ec. }\}^2 dx + \text{ec.}$$

$$- i(\alpha\theta 1 + \beta\omega) + \frac{i^2}{2}\{2\alpha\theta 2 + g\omega^2 + 2m\theta 1 . \omega + n\theta 1^2\} + \frac{i^2}{2}\int R\{\text{ ec. }\}^2 dx - \text{ec.}$$

Se dunque indichiamo per $(\alpha\theta 1 + \beta\omega)'$ e per $(\alpha\theta 1 + \beta\omega)^{\circ}$ i valori di $(\alpha\theta + \beta\omega)$ al principio ed alla fine dell' integrale, dovrà esser nel massimo e minimo

$(\alpha\theta 1 + \beta\omega)' - (\alpha\theta 1 + \beta\omega)^{\circ} = 0$, alla quale equazione si soddisfarà per mezzo delle costanti arbitrarie contenute in α e β, avendo riguardo alle condizioni del Problema.

Riguardo poi alla quantità $2\alpha\theta 2 + g\omega^2 + 2m\theta\omega + n\theta^2$, per mezzo delle costanti arbitrarie che si troveranno nei valori delle incognite m, n, g, potremo fare in modo che essa si annulli o abbia lo stesso segno che ha l' integrale; così l' esserci il massimo od il minimo dipenderà dall' esser negativo o positivo quell' integrale.

Ora tale integrale è positivo o negativo tra i limiti $x = a$, $x = b$, se R, ovvero

$(\frac{d^2\Psi}{dp^2}) - \alpha(\frac{d^2\varphi}{dp^2})$ è una quantità positiva o negativa da $x = a$ ad $x = b$; dunque il criterio per distinguere il massimo dal minimo consiste nell' esaminare se la quantità

$(\frac{d^2\Psi}{dp^2}) - \alpha(\frac{d^2\varphi}{dp^2})$ è negativa o positiva per tutti i valori possibili da $x = a$ sino ad $x = b$: nel primo caso si ha il massimo e nel secondo il minimo.

Il Sig. Legendre stabilisce per criterio che soltanto $(\frac{d^2\Psi}{dp^2})$ sia positivo o negativo; questa differenza tra il mio risultato e quello di questo Geometra dipende dall' aver egli trascurati quei termini del secondo grado che introduce la sostituzione di $\frac{d\theta}{dx}$.

Alla sopra ritrovata condizione del massimo o del minimo conviene aggiungere che nessuna delle quantità M, N ec., m, n ec. divenga infinita per qualcuno dei valori di x compresi tra a e b.

Tutta questa Teorìa è stata da me esposta in una Memoria inserita nel primo Tomo dell' Istituto Nazionale Italiano. Quì l' ho trattata di nuovo, ed ancora in miglior forma.

§. 356. Rendiamo più chiare queste dottrine con qualche esempio.

Si dimanda la curva nella quale $\int \Psi dx$ è massimo o minimo, indicando per Ψ una funzione qualunque $\Psi(V)$ di V, ed essendo $V = \int dx\sqrt{(1+pp)}$, ovvero $\frac{dV}{dx} = \sqrt{(1+pp)}$.

Paragonando queste quantità con le formule del §. 354, si avrà

$A = (\frac{d\Psi}{dV})$, $B = 0$, $C = 0$, $F = (\frac{d^2\Psi}{dV^2})$, $G = 0$, $H = 0$ ec.:

egualmente

$A' = 0$, $B' = 0$, $C' = \frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}$, $F' = 0$, $G' = 0$ ec.,

$L' = \frac{1}{\sqrt{(1+pp)^3}}$.

L' equazioni (E) diverranno allora

$(\frac{d\Psi}{dV}) - \frac{d\alpha}{dx} = 0$

$\frac{d\beta}{dx} = 0$

$-\alpha \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} - \beta = 0$, le quali ci daranno

$\alpha = c + \int(\frac{d\Psi}{dV})dx$

$\beta = c'$, essendo c, c' due costanti arbitrarie; in seguito sostituendo i valori di α e di β nella terza equazione, si troverà la ricercata relazione tra x ed y data dall' equazione

(a) ..... $\left\{c + \int(\frac{d\Psi}{dV})dx\right\} \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} + c' = 0$.

A quest' equazione si può dare anche la forma

$c + \int(\frac{d\Psi}{dV})dx = \frac{c'\sqrt{(1+pp)}}{p}$, la quale differenziata, diviene

$(\frac{d\Psi}{dV})dx = \frac{c'qdx}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{c'qdx\sqrt{(1+pp)}}{p^2}$,

$(\frac{d\Psi}{dV}) = \frac{c'q}{\sqrt{(1+p^2)}} - \frac{c'q\sqrt{(1+pp)}}{p^2}$,

$(\frac{d\Psi}{dV}) = -\frac{c'q}{p^2\sqrt{(1+pp)}}$.

Quest' è un' equazione differenziale del secondo ordine; e siccome il primo membro è una funzione di V, cioè di $\int dx\sqrt{(1+pp)}$, così trovato da quest' equazione il valore di V, dato per p, q e c', ne prenderemo il differenziale, onde avere un' equazione sbarazzata affatto dai segni sommatorj. Sia $F = 0$ quest' equazione differenziale: essa sarà del terzo ordine, ed integrata ci darà per y un valore che conterrà tre nuove costanti arbitrarie: così, trovandosi già c', se queste costanti sono rappresentate da c'', c''', c'''', si avrà

$y = f(x, c', c'', c''', c'''')$, sarà cioè y eguale ad una funzione di x e delle quattro costanti arbitrarie c', c'', c''', c''''.

Osserviamo che nel differenziare l' equazione (a) avremmo potuto eliminare la costante c', lasciandovi la c.

Disponiamo di due di queste costanti arbitrarie che si trovano nel valore di y. Supponendo che i termini della curva debbano essere in due punti fissi corrispondenti alle ascisse $x = a$, $x = b$, ed all' ordinate $y = a'$, $y = b'$, determiniamo c''', c'''' in modo che siano soddisfatte queste due equazioni

$a' = f(a, c', c'', c''', c'''')$

$b' = f(b, c', c'', c''', c'''')$, e ci resteranno sempre nel valore di y due costanti arbitrarie c', c''.

Queste due costanti arbitrarie residue, le determineremo in maniera che i due valori di α al principio ed alla fine dell' integrale siano nulli, ed allora riflettendo che i termini della curva sono in due punti fissi, la quantità ω, aumento della y, è in conseguenza nullo in quegli stessi due punti: resteranno dunque perfettamente soddisfatte queste due equazioni

$(\alpha\theta + \beta\omega)' - (\alpha\theta + \beta\omega)^{\circ} = 0$,

$(\alpha\theta' + \beta\omega)' - (\alpha\theta' + \beta\omega)^{\circ} = 0$, ed il Problema sarà risoluto, supposta però l' integrazione completa dell' equazione $F = 0$.

§. 357. Ma senza passare per l' integrazione dell' equazione $F = 0$ si può addirittura determinare la natura della curva cercata per mezzo della considerazione dell' equazione (a).

Rapporto ad una tale equazione

$\{c + \int(\frac{d\Psi}{dV})dx\} \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} + c' = 0$, osservo, che determinando subito la costante c in modo che il valore di a, cioè $c + \int(\frac{d\Psi}{dV})dx$ sia nullo quando $x = b$, si ha $c' = 0$, ed in conseguenza l' equazione diviene

$(-H + \int(\frac{d\Psi}{dV})dx) \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} = 0$, indicando per $-H$ il valore di c determinato per quell' ipotesi.

Quest' ultima equazione ci somministra due nuove equazioni

$\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$

$\int(\frac{d\Psi}{dV})dx = H \ldots\ldots\ldots (2)$: l'equazione (2) non conduce a cosa alcuna, imperocchè differenziandola si ha $(\frac{d\Psi}{dV}) = 0$; ed essendo il primo membro una funzione di V, da essa si ricava V eguale ad una qualche costante K, $V = \int dx\sqrt{(1+pp)} = K$, il cui differenziale è $dx\sqrt{(1+pp)} = 0$, e quindi $\sqrt{(1+pp)} = 0$, e per p si ha un valore immaginario.

L' equazione (1) poi si riduce a $p = 0$, ovvero $(\frac{dy}{dx}) = 0$, il cui integrale è $y = c'''$ essendo c''' una costante arbitraria. Quest' integrale è l' equazione di una linea retta parallela all' asse, e distante da esso di una quantità c''': così acciocchè il Problema sia solubile, converrà che i due punti siano posti ad egual distanza dall' asse, ed una tal distanza ci determinerà il valore di c'''.

Questa soluzione per altro non si può riguardare che come un caso particolare della soluzione generale.

Per avere il criterio, onde distinguere se ha luogo il massimo od il minimo, conviene (§ 355) vedere se la quantità $(\frac{d^2\Psi}{dp^2}) - a(\frac{d^2\varphi}{dp^2})$ è positiva o negativa: ora essendo Ψ una sola funzione di V, si avrà

$(\frac{d^2\Psi}{dp^2}) = 0$; essendo poi

$(\frac{d^2\varphi}{dp^2}) = \frac{1}{\sqrt{(1+pp)^3}}$, ed

$a = -H + \int(\frac{d\Psi}{dV})dx$, ove H rappresenta il valore di $\int(\frac{d\Psi}{dV})dx$ quando $x = b$, si avrà il massimo se $\{H - \int(\frac{d\Psi}{dV})dx\} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+pp)^3}}$ sarà negativa, ed il minimo se positiva; ma essendo $p = 0$, si ha $\sqrt{(1+pp)^3} = 1$; dunque il massimo sarà dato dall' essere $H - \int(\frac{d\Psi}{dV})dx$ negativa, ed il minimo dall' esser positiva. Dunque nel minimo dovrà essere $\int(\frac{d\Psi}{dV})dx < H$, e nel massimo $\int(\frac{d\Psi}{dV})dx > H$.

Sia $\Psi = MV^2$ essendo M una costante determinata, ed avremo $\int(\frac{d\Psi}{dV})dx = 2M\int V dx$. Ora $V = \int dx\sqrt{(1+pp)} = x$ quando $y = c'''$; dunque

$\int(\frac{d\Psi}{dV})dx = 2M\int x dx = Mx^2$.

Si avrà dunque il massimo quando $Mx^2 > Mb^2$, ed il minimo nel caso opposto.

Se supponiamo pertanto che le ascisse vadano crescendo da $x = a$ sino ad $x = b$, e che ivi si termini la curva, avremo nel nostro caso un minimo, poichè sarà sempre x minore di b.

§ 358. Fin ora ci siamo occupati della ricerca di una curva, la quale godesse di una certa proprietà di massimo o di minimo sopra tutte le infinite curve che poteano descriversi in qualunque modo, corrispondenti però alla stessa ascissa: al presente poi ci tratterremo a parlare della ricerca di una curva, la quale appartenendo ad una classe d' infinite curve dotate tutte di una proprietà comune, debbe godere di una certa proprietà di massimo e di minimo; come se, per esempio, tra tutte le curve della stessa lunghezza, si cercasse quella che gode di una certa proprietà di massimo o di minimo.

Le dottrine spiegate superiormente si applicano facilmente al caso presente: infatti supponiamo che tra le serie infinite di curve, nelle quali le quantità espresse dagl' integrali indefiniti $\int \Psi' dx$, $\int \Psi'' dx$ ec., hanno tutte lo stesso valore, si cerchi quella curva in cui la quantità $\int \Psi dx$ sia massima o minima. Se rappresentiamo per α, β, γ ec. tante costanti arbitrarie, e cerchiamo con i metodi sopra spiegati quella curva (E) per la quale la quantità

$\int \Psi dx + \alpha \int \Psi' dx + \beta \int \Psi'' dx +$ ec. è massima o minima, questa stessa curva sarà la ricercata.

Tutto questo è di una facil dimostrazione; imperocchè supponendo trovata questa curva (E), e facendo allora

$\int \Psi dx = A$, $\alpha \int \Psi' dx = B$, $\beta \int \Psi'' dx = C$ ec., si avrà la quantità $A + B + C +$ ec. che sarà maggiore o minore di tutte le simili quantità nelle infinite curve possibili che possono corrispondere alla stessa ascissa. Tra tutte queste infinite curve possibili ve ne sarà un numero parimente infinito, per le quali stando fisse le quantità B, C ec., la quantità A sarà in esse minore di quella corrispondente nella curva (E), per esempio tra tutte le curve possibili ve ne sarà una cui corrisponderà la quantità

$''A + B + C +$ ec., una cui
$'A + B + C +$ ec., una cui
$A + B + C +$ ec., e questa è la curva (E); una cui
$A' + B + C +$ ec., una cui
$A'' + B + C +$ ec., una cui
ec. ec.

essendo ec., $''A < 'A < A$; $A > A' > A''$ ec.: dunque questa curva medesima (E) sarà quella per la quale $\int \Psi dx$ è un massimo o minimo, essendo nel tempo stesso costanti le quantità $\int \Psi' dx$, $\int \Psi'' dx$ ec.

I coefficienti α, β, γ ec. si determineranno in maniera che gl' integrali $\int \Psi' dx$, $\int \Psi'' dx$ ec., abbiano appunto quei valori costanti che gli assegna il Problema.

I criterj poi onde distinguere il massimo dal minimo, saranno gli stessi di quei della sola formula $\int \Psi dx$, le altre essendo costanti.

§. 359. Facciamone un primo esempio.

Tra tutte le curve, nelle quali la formula $\int yxdx$ ha lo stesso valore, si ricerca quella in cui il valore della formula $\int yydx$ è massimo o minimo: supponendo che i termini delle medesime debbano corrispondere all' ascisse $x = a$, $x = b$, o che quelle formule integrali debbano estendersi tra i limiti $x = a$, $x = b$.

Secondo ciò che abbiamo detto quì sopra, il Problema si riduce a cercare la relazione che debbe aver luogo tra x ed y, acciò la quantità $\int yydx + \alpha\int yxdx$, ovvero

$\int \{yy + \alpha yx\} dx$ sia massima o minima, prendendo l' integrale tra i limiti $x = a$, $x = b$. Se indichiamo per Ψ la quantità $yy + \alpha yx$ questa relazione ci è data (§ 335) dall' equazione $\left(\frac{d\Psi}{dy}\right) = 2y + \alpha x = 0$: soddisfà dunque al quesito $y = -\frac{\alpha x}{2}$, che è un' equazione alla linea retta. Il minimo poi è quello che ha luogo, imperocchè $\left(\frac{d^2\Psi}{dy^2}\right)$ eguaglia una quantità positiva.

Supponiamo ora che il valore della formula $\int yxdx$, che debbe essere lo stesso in tutte le curve, sia $= m$ quando si prende l' integrale tra i limiti $x = a$, $x = b$, e potremo facilmente determinare α; infatti essendo

$\int (-\frac{\alpha x}{2}) xdx = \frac{\alpha}{6}(a^3 - b^3)$ preso tra i limiti $x = a$, $x = b$, avremo

$\frac{\alpha}{6}(a^3 - b^3) = m$, e quindi $\alpha = \frac{6m}{a^3 - b^3}$, e la cercata relazione diverrà

Fig.

$y = \frac{3m}{b^3 - a^3} x$.

La linea retta rappresentata da questa ultima equazione, passa per l' origine delle ascisse, e fa con l' asse un angolo, la cui tangente è $\frac{3m}{b^3 - a^3}$.

Una tal retta gode di questa proprietà, che tra tutte le linee o rette o curve, i cui termini corrispondono alle ascisse $x = a$, $x = b$, ed in conseguenza delle quali il valore di $\int yxdx$ preso tra quei limiti, è eguale ad m, essa ha il più piccol valore per la formula $\int yydx$.

Tra tutte le curve della stessa lunghezza, le quali uniscono i punti a, z, si cerca quella che racchiude la massima 17
superficie $aAZz$.

La proprietà comune a tutte le curve tra le quali si cerca quella del massimo, è l' essere costante il valore della loro lunghezza $\int dx\sqrt{(1 + pp)}$; e la quantità che dee diventar massima è $\int ydx$; dunque cercheremo la relazione tra x ed y perchè $\int ydx + a\int dx\sqrt{(1 + pp)}$, ovvero $\int dx\left\{y + a\sqrt{(1 + pp)}\right\}$ sia massimo o minimo, essendo a una costante indeterminata.

Secondo la regola insegnata al §. 341 per trovare il massimo o minimo della formula $\int \Psi dx$, si ha la cercata relazione data da quest' equazione

$\left(\frac{d\Psi}{dy}\right) - \frac{1}{dx} . d\left(\frac{d\Psi}{dp}\right) = 0$, che nel nostro caso diviene

$1 - \frac{a}{dx} . d\left(\frac{p}{\sqrt{(1 + pp)}}\right) = 0$, ovvero

$a d\left(\frac{p}{\sqrt{(1 + pp)}}\right) = dx$, il cui integrale è

$\frac{ap}{\sqrt{(1 + pp)}} = x + C$, essendo C una costante arbitraria. Da quest' ultima equzione si ricava

$p = \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{x + C}{\sqrt{(a^2 - (x + C)^2)}}$, che egualmente si integra, e si ha

Fig. 17 $y = C' \pm \sqrt{(a^2 - (x + C)^2)}$, ovvero

$a^2 = (y - C')^2 + (x + C)^2$, che è l' equazione generale del circolo; concluderemo dunque che un qualunque arco di circolo condotto per i punti a, z fra tutte le curve della medesima lunghezza, rinchiude la massima o la minima superficie; è la massima se l' arco volta la concavità all' asse, e la minima se volta la convessità. Le tre costanti a, C, C′ saranno determinate dalla posizione dei punti fissi a, z, e dalla data lunghezza dell' arco.

E quì osserviamo che l' arco circolare az condotto per i termini a, z non solo racchiude il massimo spazio $aAZz$, ma ancora una qualunque altra linea $aCEDz$ condotta da un termine a all' altro z, racchiude insieme con l' arco la massima superficie; infatti se l' area $aAZz$ è massima, sarà ancora $aAZz - aAC - zZD + CED$ una quantità massima per essere di una grandezza costante le quantità aAC, zZD, CED, qualunque linea prendasi per az.

§. 360. Consideriamo adesso il caso nel quale la formula che dee divenir massima o minima sia composta di varie formule integrali.

Sia questa formula $\int \Psi dx \times \int \varphi dx$, il prodotto cioè delle due formule integrali $\int \Psi dx, \int \varphi dx$, e supponiamo che Ψ, φ siano funzioni di x, y, p, di modo che sia

$d\Psi = Mdx + Ndy + Pdp$,

$d\varphi = M'dx + N'dy + P'dp$.

Facendo $y \pm \omega$ invece di y, si avranno le differenze

$\int \Psi\left\{x, y + \omega, p + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right\} dx \times \int \varphi\left\{x, y + \omega, p + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right\} dx -$

$\int \Psi dx \times \int \varphi dx$,

$\int \Psi\left\{x, y - \omega, p - \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right\} dx \times \int \varphi\left\{x, y - \omega, p - \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right\} dx -$

$\int \Psi dx \times \int \varphi dx$, che debbono essere ambedue negative nel massimo e positive nel minimo.

Sviluppiamole in serie per mezzo del Teorema di Tajlor, e diverranno

$\int\varphi dx \times \int dx \left\{ \omega\left(\frac{d\Psi}{dy}\right) + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d\Psi}{dp}\right) \right\} + \int\Psi dx \times \int dx \left\{ \omega\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) + \left(\frac{d\omega}{dy}\right)\left(\frac{d\varphi}{dp}\right) \right\} + Z + Y +$ ec.,

$- \int\varphi dx \times \int dx \left\{ \omega\left(\frac{d\Psi}{dy}\right) + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d\Psi}{dp}\right) \right\} - \int\Psi dx \times \int dx \left\{ \omega\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) + \left(\frac{d\omega}{dy}\right)\left(\frac{d\varphi}{dp}\right) \right\} + Z - Y +$ ec., ove Z rappresenta la totalità dei termini nei quali ω, $\left(\frac{d\omega}{dx}\right)$ formano due dimensioni; Y la totalità di quei nei quali dette quantità formano tre dimensioni ec.

La relazione dunque del massimo e del minimo ci sarà data dall' equazione

$\int\varphi dx . \int dx \left\{ \omega N + P\left(\frac{d\omega}{dx}\right) \right\} + \int\Psi dx . \int dx \left\{ \omega N' + P'\left(\frac{d\omega}{dx}\right) \right\} = 0$,

ed il criterio per distinguerlo dall' essere Z una quantità negativa nel massimo, positiva nel minimo.

Ora la regola d' integrazione per parti ci dà

$\int dx \left\{ N\omega + P\left(\frac{d\omega}{dx}\right) \right\} = P\omega + \int\omega \left\{ N - \frac{dP}{dx} \right\} dx$,

$\int dx \left\{ N'\omega + P'\left(\frac{d\omega}{dx}\right) \right\} = P'\omega + \int\omega \left\{ N' - \frac{dP'}{dx} \right\} dx$; dunque la relazione del massimo e minimo sarà contenuta nell' equazione

$P\omega + \frac{\int\Psi dx}{\int\varphi dx} P'\omega + \int\omega \left\{ N - \frac{dP}{dx} \right\} dx + \frac{\int\Psi dx}{\int\varphi dx} \int\omega \left\{ N' - \frac{dP'}{dx} \right\} dx = 0$,

estendendo le integrazioni da $x = a$ sino ad $x = b$.

Spezziamo quest' equazione nelle due

$P\omega + \frac{\int\Psi dx}{\int\varphi dx} P'\omega = 0$,

$\int\omega \left\{ N - \frac{dP}{dx} \right\} dx + \frac{\int\Psi dx}{\int\varphi dx} \int\omega \left\{ N' - \frac{dP'}{dx} \right\} dx = 0$, e la prima di queste equazioni sarà soddisfatta da se medesima, poichè la

curva dovendo passare per due punti fissi, il valore di ω in quei punti è nullo da se stesso. Riguardo all' altra, se noi indichiamo per una costante c il rapporto dei due integrali $\int\Psi dx$, $\int\varphi dx$ estesi tra i limiti $x = a$, $x = b$, avremo

$\int\omega \left\{ N - \frac{dP}{dx} \right\} dx + c\int\omega \left\{ N' - \frac{dP'}{dx} \right\} dx = 0$, che differenziata e divisa per ωdx, diviene

$N + N' - \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dP'}{dx}\right) c = 0$, che somministra la ricercata relazione tra x ed y per soddisfare alla ricerca del massimo o minimo.

Si troverà da questa il valore di y, il quale conterrà la costante c: sostituito in seguito questo valore di y nelle formule $\int\Psi dx$, $\int\varphi dx$, e fatte le effettive integrazioni tra i limiti $x = a$, $x = b$, si avrà per esprimere il quoziente $\frac{\int\Psi dx}{\int\varphi dx}$ una funzione di a, b, c, la quale eguagliata alla stessa c, ci darà un' equazione che servirà per la determinazione di c.

Per una più grande estensione, ed un maggiore sminuzzamento di queste dottrine, si veda la citata Opera di Euler *Methodus inveniendi lineas curvas etc.*

Facciamo un esempio. Si dimanda la relazione tra x ed y, affinchè l' espressione $\int y dx . \int dx \sqrt{(1 + pp)}$ sia un minimo.

Avremo in questo caso $N = 1$, $P = 0$, $N' = 0$, $P' = \frac{p}{\sqrt{(1 + pp)}}$: sarà dunque

$1 - \frac{1}{dx} d\left(\frac{pc}{\sqrt{(1 + pp)}}\right) = 0$, che integrata una volta, diviene

$x + g = c \frac{p}{\sqrt{(1 + pp)}}$, essendo g una costante arbitraria aggiunta nell' integrazione.

Ricavando il valore di p da quest' ultima equazione, si ha

$p = \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{x + g}{\sqrt{(cc - (x + g)^2)}}$, di cui l' integrale è

$y = f \pm \sqrt{(cc - (x + g)^2)}$, ovvero

$(y-f)^2 + (x+g)^2 = c^2$, essendo f un' altra costante arbitraria.

L' equazione $(y-f)^2 + (x+g)^2 = c^2$, è l' equazione di un circolo, il cui raggio è c; per determinare c, bisognerà porre il valore di y e di p nei due integrali $\int y\,dx$, $\int dx\sqrt{(1+pp)}$, quindi effettuate l' integrazioni ed estese da $x=a$ sino ad $x=b$, eguagliarne il quoziente alla stessa c: si avrà allora determinato in a e b il raggio di quel circolo. Le due arbitrarie f, g basteranno per determinare il passaggio della curva per due punti fissi.

L' arco poi del circolo che soddisfarà al quesito, dovrà voltare la convessità all' asse: allora l' area compresa essendo la minima, il prodotto dell' area nella lunghezza dell' arco sarà anche un minimo.

§. 361. Dalla ricerca delle curve dovrebbe andarsi alla ricerca delle superficie, le quali godono di una certa proprietà di massimo o di minimo; ma a questo riguardo le dottrine sono nel suo nascimento, e molto ci vorrà prima che possa aversi una Teorìa completa per quest' indagine: non ostante noi ne parleremmo qualche poco.

Sia z una funzione qualunque delle variabili x, y, e facciamo

$$\begin{array}{llll} \left(\frac{dz}{dx}\right) = p, & \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = q, & \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) = r, & \\ \left(\frac{dz}{dy}\right) = p', & \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) = q', & \left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right) = r', & \text{ec.} \\ & \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = q'', & \left(\frac{d^3z}{dxdy^2}\right) = r'', & \\ & & \left(\frac{d^3z}{dy^3}\right) = r''', & \end{array}$$

Supponiamo che si dimandi la superficie, nella quale una certa quantità $\iint V\,dxdy$ è massima o minima.

La quantità V può essere una funzione soltanto di x e di y: può anche esser formata dei coefficienti differenziali parziali p, p', q ec.: potrebbe infine contenere altre formule integrali simili alla proposta. Consideriamo il secondo caso, e supponiamo in conseguenza che sia

$$\left.\begin{array}{r} dV = L dx + M dy + N dz + P dp + Q dq + R dr \\ + P' dp' + Q' dq' + R' dr' \\ + Q'' dq'' + R'' dr'' \\ + R''' dr''' \end{array}\right\}$$

Si cerca dunque la relazione tra x, y, z che rappresenti analiticamente quella superficie.

Per trovarla, supponiamo che z divenga $z \pm i\omega$ essendo i una quantità costante, cui potrem dare che grandezza ci piace, ed ω una funzione qualunque delle due variabili x, y.

Sostituendo $z \pm i\omega$ nella formula $\iint V\,dxdy$, sottraendo in seguito l' istessa formula, prima che abbia sofferta la sostituzione, si avranno due differenze, le quali debbono essere simultaneamente negative nel massimo, positive nel minimo. Queste differenze ordinate, per mezzo del Teorema di Tajlor, secondo le potenze di i, diverranno

$$+ i\iint dxdy \left\{ \begin{array}{r} N\omega + P\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + Q\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) + R\left(\frac{d^3\omega}{dx^3}\right), \\ + P'\left(\frac{d\omega}{dy}\right) + Q'\left(\frac{d^2\omega}{dxdy}\right) + R'\left(\frac{d^3\omega}{dx^2dy}\right), \\ + Q''\left(\frac{d^2\omega}{dy^2}\right) + R''\left(\frac{d^3\omega}{dxdy^2}\right), \\ + R'''\left(\frac{d^3\omega}{dy^3}\right), \end{array} \text{ec.} \right\} + i^2 Z + i^3 Y + \text{ec.}$$

$$- i\iint dxdy \left\{ \begin{array}{r} N\omega + P\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + Q\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) + R\left(\frac{d^3\omega}{dx^3}\right), \\ + P'\left(\frac{d\omega}{dy}\right) + Q'\left(\frac{d^2\omega}{dxdy}\right) + R'\left(\frac{d^3\omega}{dx^2dy}\right), \\ + Q''\left(\frac{d^2\omega}{dy^2}\right) + R''\left(\frac{d^3\omega}{dxdy^2}\right), \\ + R'''\left(\frac{d^3\omega}{dy^3}\right), \end{array} \text{ec.} \right\} + i^2 Z - i^3 Y + \text{ec.}$$

che debbono essere negative pel massimo, e positive pel minimo, qualunque valore d' altr' onde si dia ad i; e siccome affinchè questo succeda, bisogna che si annullino i termini ove si trova la i alla prima potenza, per questo avremo

$$\iint dxdy \left\{ \begin{aligned} & N\omega + P\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + Q\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right), \text{ ec.} \\ & \quad + P'\left(\frac{d\omega}{dy}\right) + Q'\left(\frac{d^2\omega}{dxdy}\right), \text{ ec.} \\ & \qquad\qquad + Q''\left(\frac{d^2\omega}{dy^2}\right), \text{ ec.} \end{aligned} \right\} = 0$$

qualunque espressione si prenda per ω; da una tale equazione dobbiamo ricavare la relazione tra le variabili x, y, z che conviene alla ricercata superficie.

§. 362. Per ridurre il primo membro della ritrovata equazione, osservo che la regola d' integrazione per parti ci dà

$\int P\left(\frac{d\omega}{dx}\right) dx = P\omega - \int \omega \frac{dP}{dx} dx$, che moltiplicata per dy ed integrata, diviene

$$\iint P\left(\frac{d\omega}{dx}\right) dxdy = \int P\omega dy - \iint \omega \frac{dP}{dx} dxdy.$$

Così

$$\iint P'\left(\frac{d\omega}{dy}\right) dxdy = \int P'\omega dx - \iint \omega \frac{dP'}{dy} dxdy.$$

Egualmente per gli altri termini si avranno le seguenti riduzioni

$$\iint Q\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) dxdy = \int Q\left(\frac{d\omega}{dx}\right) dy - \iint \left(\frac{d\omega}{dx}\right) \frac{dQ}{dx} dxdy = \int Q\left(\frac{d\omega}{dx}\right) dy$$
$$- \int \omega \frac{dQ}{dx} dy + \iint \omega \frac{d^2Q}{dx^2} dxdy;$$

$$\iint Q'\left(\frac{d^2\omega}{dxdy}\right) dxdy = \int Q'\left(\frac{d\omega}{dy}\right) dy - \int \omega \frac{dQ'}{dx} dx + \iint \omega \frac{d^2Q'}{dxdy} dxdy;$$

$$\iint Q''\left(\frac{d^2\omega}{dy^2}\right) dxdy = \int Q''\left(\frac{d\omega}{dy}\right) dx - \int \omega \frac{dQ''}{dy} dx + \iint \omega \frac{d^2Q''}{dxdy} dxdy;$$

$$\iint R\left(\frac{d^3\omega}{dx^3}\right) dxdy = \int R\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) dy - \int \left(\frac{d\omega}{dx}\right) \frac{dR}{dx} dy + \int \omega \frac{d^2R}{dx^2} dy -$$
$$\iint \omega \frac{d^3R}{dx^3} dxdy;$$

$$\iint R'\left(\frac{d^3\omega}{dx^2dy}\right) dxdy = \int R'\left(\frac{d^2\omega}{dxdy}\right) dy - \int \left(\frac{d\omega}{dx}\right) \frac{dR'}{dx} dy + \int \omega \frac{d^2R'}{dxdy} dy$$
$$- \iint \omega \frac{d^3R'}{dx^2dy} dxdy;$$

$$\iint R''\left(\frac{d^3\omega}{dxdy^2}\right) dxdy = \int R''\left(\frac{d^2\omega}{dxdy}\right) dx - \int \left(\frac{d\omega}{dy}\right) \frac{dR''}{dy} dx + \int \omega \frac{d^2R''}{dxdy} dx$$
$$- \iint \omega \frac{d^3R''}{dxdy^2} dxdy;$$

$$\iint R'''\left(\frac{d^3\omega}{dy^3}\right) dxdy = \int R'''\left(\frac{d^2\omega}{dy^2}\right) dx - \int \left(\frac{d\omega}{dy}\right) \frac{dR'''}{dy} dx + \int \frac{d^2R'''}{dy^2} \omega dx$$
$$- \iint \omega \frac{d^3R'''}{dy^3} dxdy.$$

ec. ec.

Facendo ora le opportune sostituzioni nell' equazione trovata al §. antecedente, si avrà

$$\iint \omega \left\{ \begin{aligned} & N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{ec.} \\ & \quad - \frac{dP'}{dy} + \frac{d^2Q'}{dxdy} - \frac{d^3R'}{dx^2dy} + \text{ec.} \\ & \qquad\qquad + \frac{d^2Q''}{dy^2} - \frac{d^3R''}{dxdy^2} + \text{ec.} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{d^3R'''}{dy^3} + \text{ec.} \end{aligned} \right\} dxdy$$

$$+ \left\{ \begin{aligned} & \int \omega P dy + \int \left(\frac{d\omega}{dx}\right) Q dy - \int \omega \frac{dQ}{dx} dy + \int \left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) R dy \\ & \int \omega P' dx + \int \left(\frac{d\omega}{dy}\right) Q' dy - \int \omega \frac{dQ'}{dx} dx + \int \left(\frac{d^2\omega}{dxdy}\right) R' dy \\ & \qquad\qquad + \int \left(\frac{d\omega}{dy}\right) Q'' dx - \int \omega \frac{dQ''}{dy} dx + \int \left(\frac{d^2\omega}{dxdy}\right) R'' dx \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \int \left(\frac{d^2\omega}{dy^2}\right) R''' dx \end{aligned} \right.$$

$$\left. \begin{aligned} & - \int \left(\frac{d\omega}{dx}\right) \frac{dR}{dx} dy + \int \omega \frac{d^2R}{dx^2} dy \\ & - \int \left(\frac{d\omega}{dx}\right) \frac{dR'}{dx} dy + \int \omega \frac{d^2R'}{dxdy} dy \\ & - \int \left(\frac{d\omega}{dy}\right) \frac{dR''}{dy} dx + \int \omega \frac{d^2R''}{dxdy} dx \\ & - \int \left(\frac{d\omega}{dy}\right) \frac{dR'''}{dy} dx + \int \omega \frac{d^2R'''}{dy^2} dx \end{aligned} \quad \text{ec.} \right\} = 0$$

Potrebbe anche darsi alla seconda parte del primo membro della superiore equazione una forma più simmetrica, onde poterla prolungare quando in V si avessero dei differenziali di un ordine più alto; ma questa riduzione oltre esser facile per se medesima, è anche superflua da che siamo così indietro rapporto al maneggio dei termini dell' equazione sopra trovata, che non possiamo neppur condurre alla fine la ricerca di una superficie nella quale la formula $\int\int V dx dy$ che debbe divenir massima o minima, contenga i differenziali parziali del primo ordine solo. Fig.

La prima parte del primo membro dell' equazione, eguagliata a zero, ci dà l' equazione a differenze parziali

$$\left.\begin{array}{l} N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \text{ec.} \\ \quad - \frac{dP'}{dy} + \frac{d^2Q'}{dxdy} - \text{ec.} \\ \qquad\qquad + \frac{d^2Q''}{dy^2} - \text{ec.} \end{array}\right\} = 0$$

il cui integrale contiene la cercata relazione; l' altra parte dee annullarsi per le condizioni del Problema nei limiti dell' integrale.

Come poi debbano stabilirsi queste condizioni non è facile a determinarsi. Ecco in che modo si esprime il grande Eulero a questo riguardo „ Verum quid haec singula membra „ (cioè i termini della equazione trovata sopra) proprie significent, et ad quemnam usum adhiberi queant, neutiquam „ adhuc perspicere licet, unde hoc argumentum, cuius prima „ fundamenta etiam nunc vix jacta sunt censenda, omnem Geometrarum attentionem atque multo accuratiorem investigationem postulare videtur, quod negotium vix ante suscipere licet, quam casus non nulli particulares omni studio, et diligentia fuerint evoluti „.

§. 363. Siano AX, AY, AZ tre assi ortogonali in A, i due primi dei quali siano nel piano YAX orizzontale, ed il terzo sia verticale AX: sia quello delle coordinate x; AY quello delle y; ed AZ quello delle z. 17

Sia descritta nel piano orizzontale una figura qualunque terminata da una linea qualunque siasi RCC'C'' ec., intiera-

Fig. mente curva se ci piace, o composta di rette e di curve in qualunque modo: certo è che affine di potere assoggettarla a calcolo, converrà che essa sia esprimibile analiticamente per una relazione tra le coordinate x, y.

Supponiamo che questa figura sia data, ed immaginiamo una superficie curva qualunque descritta nello spazio al di sopra di lei. Se in tutti i punti C, C', C'' ec. del perimetro
17 inalziamo tante perpendicolari CE, C'E', C''E'' ec. sino all' incontro di quella superficie, queste taglieranno in essa una callotta o segmento, che noi chiameremo superficie corrispondente alla figura RR; e se nello spazio vi fossero altre superficie curve, quelle perpendicolari prolungate, taglierebbero altrettante superficie corrispondenti alla stessa base.

Ora la dottrina esposta nei due paragrafi antecedenti riguarda la soluzione di questo Problema.

„ Presa per base una data figura qualunque, di tutte le „ superficie corrispondenti ad una tal base, si ricerca quella „ che gode di una certa proprietà di massimo o di minimo „.

Anzi può così esporsi il Problema.

Descritta nello spazio una curva a doppia curvatura qualunque rientrante in se stessa, e conosciute le quantità che ad essa appartengono, perchè date da espressioni analitiche cognite: si ricerca di tutte le superficie curve, le quali ponno passare per essa, quale è quella che gode di una certa proprietà di massimo o di minimo.

Si vede subito che la projezione di questa curva a doppia curvatura, è quella figura descritta nel piano orizzontale, di cui abbiam qui sopra parlato.

Prendiamo in esame alcuni casi semplicissimi.

Si ricerchi la superficie, la quale terminando ad una curva a doppia curvatura rientrante in se stessa, gode di questa proprietà „ L' integrale doppio $\int\int(xyz - z^3)dxdy$ ha in es„ sa il massimo o minimo valore, relativamente ai valori che e„ gli riceve nelle altre superficie curve terminanti allo stesso „ contorno „.

Paragonando quest' integrale con la formula del §. antecedente, si ha

$V = xyz - z^3$, e perciò $N = (\frac{dV}{dz}) = xy - 3z^2$, $P = (\frac{dV}{dp}) = 0$ ec.

L' equazione dunque del detto §. che ci dà la cercata relazione, sarà
$N = xy - 3z^2 = 0$, e la superficie voluta sarà quella nella quale il quadrato dell' ordinata verticale eguaglia la terza parte del rettangolo fatto dalle due corrispondenti ascisse orizzontali.

Siccome in questa equazione della superficie non entra alcuna arbitraria che possa servire a determinarne il passaggio per la data curva a doppia curvatura, che costituire dovea il contorno di quella superficie, così questa proprietà di massimo o di minimo sarà goduta dalla superficie trovata per qualunque di lei porzione; riguardo poi al dover passare precisamente per la curva a doppia curvatura, non potrà questo succedere, se le ordinate verticali della curva a doppia curvatura non sono eguali al terzo del rettangolo delle corrispondenti ascisse orizzontali.

Per un secondo esempio cerchiamo la relazione, dalla quale è rappresentata la superficie curva, per cui la formula
$\int\int\{(\frac{dz}{dy})^2 - a^2(\frac{dz}{dx})^2\}dxdy$ è massima o minima, supponendo che questa superficie debba terminare ad una curva a doppia curvatura data nello spazio.

Se paragoniamo questa formula con la generale del §. 362 si avrà
$V = (\frac{dz}{dy})^2 - a^2(\frac{dz}{dx})^2 = p'^2 - a^2p^2$, e quindi $N = 0$, $P = -2a^2p$, $P' = 2p'$, $Q = 0$ ec.: avremo dunque per determinare il massimo o minimo queste due equazioni

$$(1) \ldots\ldots (\frac{d^2z}{dy^2}) = a^2(\frac{d^2z}{dx^2})$$

$$(2) \ldots\ldots \int\omega(2p' - 2a^2p)dy = 0.$$

La prima ci darà la relazione cercata, e la seconda debbe essere soddisfatta per le condizioni ove si termina la superficie; e siccome questa si termina in una data curva a doppia curvatura fissa nello spazio, così nei punti di questa curva le z sono invariabili, ed ω è nullo da se medesimo; la seconda equazione dunque è soddisfatta.

Dall' equazione (1) integrata, poi si ricava
$z = \varphi(x + ay) + \Psi(x - ay)$ essendo φ, Ψ due funzioni arbitrarie delle quantità poste respettivamente tra le parentesi.

La cercata superficie curva sarà dunque rappresentata dall' equazione
$z = \varphi(x + ay) + \Psi(x - ay)$.

Queste due funzioni arbitrarie serviranno a determinare il passaggio della superficie curva per la data curva a doppia curvatura. Infatti siano $z = u_x$, $y = p_x$ (indico per u_x, p_x due date funzioni di x) le due equazioni, le quali determinano la curva a doppia curvatura, e sostituendo questi valori di z e di y nell' equazione della superficie, avremo
$u_x = \varphi(x + ap_x) + \Psi(x - ap_x)$, che dovrà essere un' equazione identica; dunque dovrem determinare una di quelle funzioni arbitrarie, acciò quest' identità abbia luogo.

Rimanendo una funzione indeterminata, potremo assoggettare la superficie curva ad un' altra condizione; per esempio a passare per un' altra curva a doppia curvatura; ed allora supponendo rappresentata da $z = u'_x$, $y = p'_x$ questa seconda curva, le due funzioni arbitrarie dovrebbero determinarsi per mezzo di queste due equazioni

$$u_x = \varphi(x + ap_x) + \Psi(x - ap_x)$$
$$u'_x = \varphi(x + ap'_x) + \Psi(x - ap'_x).$$

La curva a doppia curvatura ove dee terminare la superficie, potrebbe esser formata di due porzioni, ciascuna delle quali fosse rappresentata da diverse equazioni; si avrebbero egualmente in questo caso due equazioni per determinare le due funzioni arbitrarie.

Rapporto a questa determinazione abbiam parlato di sopra.

§. 364. Proponiamoci ora la ricerca di quella superficie, la quale è la minima tra tutte coloro che rinchiudono la stessa solidità.

Essendo in generale rappresentata la solidità di un qualunque solido da $\iint z\,dx\,dy$, e la superficie da

$\iint\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}\,dx\,dy$, ovvero

$\iint\sqrt{(1 + p^2 + p'^2)}\,dx\,dy$, la quantità che divenir debbe minima, sarà

$\iint dx\,dy\left\{z + a\sqrt{(1 + pp + p'p')}\right\}$ nella quale a significa una quantità indeterminata (§. 359).

Paragonata questa formula con quella del §. 362, si ha

$V = z + a\sqrt{(1 + pp + p'p')}$, e quindi

$L = 0$, $M = 0$, $N = 1$, $P = \frac{ap}{\sqrt{(1 + pp + p'p')}}$, $P' = \frac{ap'}{\sqrt{(1 + pp + p'p')}}$:

sarà dunque

$N - \left(\frac{dP}{dx}\right) - \left(\frac{dP'}{dy}\right) = 0$ l'equazione della dimandata superficie:

ora $\left(\frac{dP}{dx}\right) = \frac{a}{(1 + pp + p'p')^{\frac{3}{2}}} \cdot \left\{(1 + p'p')\left(\frac{dp}{dx}\right) - pp'\left(\frac{dp'}{dx}\right)\right\}$,

$\left(\frac{dP'}{dy}\right) = \frac{a}{(1 + pp + p'p')^{\frac{3}{2}}} \cdot \left\{(1 + pp)\left(\frac{dp'}{dy}\right) - pp'\left(\frac{dp}{dy}\right)\right\}$, ove avvertasi che $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{ddz}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{dp'}{dx}\right)$. Quest'equazione dunque si ridurrà alla seguente

$\frac{(1 + pp + p'p')^{\frac{3}{2}}}{a} = (1 + p'p')\left(\frac{dp}{dx}\right) - 2pp'\left(\frac{dp}{dy}\right) + (1 + pp)\left(\frac{dp'}{dy}\right)$,

che è un' equazione a differenze parziali del secondo ordine, la quale non si sa integrare: ad essa però soddisfà l' equazione per la superficie sferica $zz = cc - xx - yy$, ed anche quella di una superficie cilindrica $zz = cc - yy$. La soluzione di questo Problema si trova condotta a questo punto, nel Tomo terzo Calcolo Integrale d' Euler pag. 596.

Osservazione.

Se la curva a doppia curvatura, la quale, come abbiam detto al §. antecedente, formar debbe il contorno o il termine della superficie del massimo o del minimo, fosse composta di varie porzioni rappresentate tutte da diverse equazioni, il Problema non sarebbe solubile quando nella trovata relazione per esprimere quella superficie, non vi fossero tante funzioni arbitrarie, quante sono le parti diverse, di cui è formata la curva a doppia curvatura.

Potrebbe anche la superficie del massimo o del minimo assoggettarsi a terminare ad altre superficie curve descritte nello spazio e rappresentate da relazioni conosciute; così questa dottrina dei massimi e dei minimi è, per dir così, senza limite, mentre nello stato attuale dell' analisi sia per la difficoltà d' integrare le equazioni a differenze parziali, sia per quella che vi è nella determinazione delle funzioni arbitrarie, sia per molte altre che nascono dalla natura dei Problemi, appena ci è permesso trattarne i quesiti più semplici: siamo sopra una spiaggia da cui si scopre un mar senza fine, e non ci è dato per anche d' inoltrarvisi, onde fare delle scoperte.

Scolio.

Forse i miei Lettori dopo avere studiato quanto ho detto quì sopra, avranno delle difficoltà in queste dottrine: sappiano però che ancora io non ne sono privo, e che per un' altra banda in qualunque trattato pubblicato prima di questo, avriano trovato assai meno di questa materia, per il che se anche fossero giunti a tutta da lungi vederne l' estensione, son certo, che le loro difficoltà sarebbero state in un numero moltissimo più grande.

AGGIUNTA *al Capitolo delle Variazioni*.

365. La data funzione Y, di cui l' integrale esser debbe massimo o minimo, appartiene ad un punto della curva corrispondente all' ascissa x. Facendo variare la relazione tra x ed y, quella funzione appartiene anche al punto corrispondente

alla medesima ascissa x, ma questo trovasi allora nella nuova curva dataci dalla relazione variata.

Ora il secondo di questi due punti non è già nel luogo ove è andato il primo punto nel passaggio totale che ha fatto la curva da una posizione all' altra; dunque rigorosamente parlando quella funzione Ψ considerata nei due diversi stati, non appartiene al medesimo punto identico preso in quelle due diverse posizioni.

Supponiamo che si voglia considerare sotto questo aspetto il cangiamento della funzione Ψ, supponiamo cioè che essa debba sempre appartenere al medesimo identico punto; è chiaro allora che non solo dovrà variare la relazione tra y ed x, ma ancora la stessa x.

Sia dunque $\int \Psi dx$ la funzione che divenir debbe massima o minima, essendo $\Psi = \Psi(x, y, p)$. La dottrina che esporremo si potrà estendere ai casi superiori.

Poniamo $x + iK$ invece di x; la y per la sola variazione della relazione diveniva $y + i\omega$, e quindi p diveniva $p + i(\frac{d\omega}{dx})$. Se ora vi poniamo $x + iK$ invece di x, la y diverrà

$$y + iKp + \frac{i^2K^2}{2} q + \text{ec.} + i\omega + i^2K(\frac{d\omega}{dx}) + \text{ec.};$$

ovvero

$$y + i\{Kp + \omega\} + \frac{i^2}{2}\{K^2q + 2K(\frac{d\omega}{dx})\} + \text{ec.};$$

la p diverrà

$$p + iKq + \frac{i^2K^2}{2} r + \text{ec.} + i(\frac{d\omega}{dx}) + i^2K(\frac{d^2\omega}{dx^2}) + \text{ec.};$$

ovvero

$$p + i\{Kq + (\frac{d\omega}{dx})\} + \frac{i^2}{2}\{K^2r + 2K(\frac{d^2\omega}{dx^2})\} + \text{ec.};$$

si avrà dunque

$$\int \Psi \{x + iK,\ y + i\{Kp + \omega\} + \frac{i^2}{2}\{K^2q + 2K(\frac{d\omega}{dx})\} + \text{ec.},$$
$$p + i\{Kq + (\frac{d\omega}{dx})\} + \frac{i^2}{2}\{K^2r + 2K(\frac{d^2\omega}{dx^2})\} + \text{ec.}\}dx.$$

Sviluppiamo la quantità che è sotto il segno integrale, ed avremo allora

$$\int \Psi(x, y, p)dx + i\int\{K(\frac{d\Psi}{dx}) + (Kp + \omega)(\frac{d\Psi}{dy}) + (Kq +$$
$$(\frac{d\omega}{dx}))(\frac{d\Psi}{dp})\}dx + \frac{i^2}{2}\int\{K^2(\frac{d^2\Psi}{dx^2}) + 2K(Kp + \omega)(\frac{d^2\Psi}{dxdy}) +$$
$$2K(Kq + (\frac{d\omega}{dx}))(\frac{d^2\Psi}{dpdx}) + (Kp + \omega)^2(\frac{d^2\Psi}{dy^2}) + 2(Kp + \omega)\times$$
$$(Kq + (\frac{d\omega}{dx}))(\frac{d^2\Psi}{dydp}) + (Kq + (\frac{d\omega}{dx}))^2(\frac{d^2\Psi}{dp^2})\}dx + \text{ec.},$$

che scriveremo così

$$\int \Psi(x, y, p)dx + iE + \frac{i^2}{2}F + \text{ec.}$$

Se ora invece di sostituire nella data formula integrale quei valori per x, y e p, vi avessimo posto $x - iK$, $p - i\omega$, invece di x, p, avremmo avuto lo stesso sviluppo con questa sola differenza che le quantità moltiplicate per le potenze dispari di i sarebbero state negative.

Acciò dunque abbiasi il massimo o il minimo converrà che la quantità

$$(E) \ldots\ldots \int\{K(\frac{d\Psi}{dx}) + (Kp + \omega)(\frac{d\Psi}{dy}) + (Kq + (\frac{d\omega}{dx}))\times$$
$$(\frac{d\Psi}{dp})\}dx$$ tra i proposti limiti sia nulla, indipendentemente dai valori di K ed ω; l' integrale poi il quale moltiplica $\frac{i^2}{2}$ che abbiamo rappresentato per F, dovrà essere una quantità negativa nel massimo, e positiva nel minimo.

L' integrale (E), se poniamo $d\Psi = Mdx + Ndy + Pdp$, può mettersi sotto questa forma

$$P\omega + \int \omega\{N - \frac{dP}{dx}\}dx + \int K\{M + Np + Pp\}dx,$$

ovvero

$P\omega + \int \omega\{N - \frac{dP}{dx}\}dx + \int Kd\Psi$; ora dovendo questa quantità esser nulla, si avrà

$P\omega + \int\omega\left\{N - \frac{dP}{dx}\right\}dx + \int K d\Psi = 0.$

Di qui si ricaverà $N - \frac{dP}{dx} = 0$, e questa sarà l'equazione, la quale ci darà la relazione tra le coordinate della curva che si cerca.

La quantità poi $P\omega + \int K d\Psi$, allorchè vi avremo posto per y il suo valore trovato in x, estesa tra i limiti $x = a$, $x = b$, dovrà annullarsi.

Si vede che supponendo anche che varj l'ascissa x, l'equazione che dà il massimo ed il minimo è la medesima, l'unico cangiamento accade nei limiti dell'integrale; quando la x non variava, la quantità che tra quei limiti si doveva annullare, era $P\omega$, e se la x varia, la quantità che tra quegli stessi limiti debbe andare a zero, è $P\omega + \int K d\Psi$; così indicando per $\{P\omega + \int K d\Psi\}^{\circ}$ il valore di $P\omega + \int K d\Psi$ quando $x = a$; e per $\{P\omega + \int K d\Psi\}^{\text{I}}$ lo stesso valore quando $x = b$, si avrà

$\{P\omega + \int K d\Psi\}^{\text{I}} - \{P\omega + \int K d\Psi\}^{\circ} = 0.$

Se si facessero delle simili considerazioni sopra i massimi e minimi delle formule integrali doppie, si otterrebbero dei simili risultati.

Relativamente poi ai criterj per distinguere il massimo dal minimo, i quali sono dati dalla quantità F, si troverebbe che questi sono i medesimi che quegli ottenuti pel caso nel quale x non varia; l'unica differenza consiste nelle quantità che debbono annullarsi ai limiti dell'integrale.

Essendo $p' = \left(\frac{dz}{dx}\right)$, cerchiamo le relazioni che esser debbono tra x, y, e tra x, z; onde la formula integrale $\int\Psi(x, y, z, p, p')dx$ estesa tra i limiti $x = a$, $x = b$ sia massima o minima.

Se considerando x invariabile, supponiamo che y divenga $y \pm i\omega$ essendo ω una qualunque funzione di x, la z che è una funzione (per quanto incognita) di y, diverrà

$z \pm i\omega\left(\frac{dz}{dy}\right) + \frac{i^2\omega^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) +$ ec.; quindi quell' integrale proposto ci darà la serie

$$\int\Psi(x, y, z, p, p')dx \pm i\int\left\{\omega\left(\frac{d\Psi}{dy}\right) + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d\Psi}{dp}\right) + \omega\left(\frac{dz}{dy}\right)\times\right.$$
$$\left.\left(\frac{d\Psi}{dz}\right) + \left(\frac{d\left(\omega\left(\frac{dz}{dy}\right)\right)}{dx}\right)\left(\frac{d\Psi}{dp'}\right)\right\}dx + \frac{i^2}{2}\text{ ec.}$$

Ora poniamo $\omega\left(\frac{dz}{dy}\right) = \theta$, $d\Psi = M dx + N dy + P dp + N' dz + P' dp'$, e l'integrale che moltiplica $\pm i$, prenderà questa forma

$\int\Psi\left\{\omega N + P\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + N'\theta + P'\left(\frac{d\theta}{dx}\right)\right\}dx.$

Il massimo o 'l minimo ci sarà dunque dato dall' equazione

$\int\left\{\omega N + P\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + N'\theta + P\left(\frac{d\theta}{dx}\right)\right\}dx = 0,$

ovvero

$$(\text{E}) \ldots\ldots \left.\begin{array}{l} P\omega + \int\omega\left\{N - \frac{dP}{dx}\right\}dx \\ P'\theta + \int\theta\left\{N' - \frac{dP'}{dx}\right\}dx \end{array}\right\} = 0.$$

Per soddisfare a quest' equazione, quando non sia data alcuna relazione tra y e z, basta porre

$(1) \ldots\ldots\ N - \frac{dP}{dx} = 0$, $\quad (2) \ldots\ldots\ N' - \frac{dP'}{dx} = 0$,

ed avremo allora due equazioni differenziali del secondo ordine, tra le variabili x, y, z; troveremo quindi le dimandate relazioni tra x ed y, e tra x e z.

Riguardo poi alla quantità $P\omega + P'\theta$, ovvero $\omega\left\{P + P'\left(\frac{dz}{dy}\right)\right\}$, la quale resta ad annullarsi nell' equazione (E), siano

$\omega^{\circ}\left\{P + P'\left(\frac{dz}{dy}\right)\right\}^{\circ}$, $\omega^{\text{I}}\left\{P + P'\left(\frac{dz}{dy}\right)\right\}^{\text{I}}$ i due valori di essa per $x = a$ ed $x = b$, ed avremo

$\omega^{\text{I}}\left\{P + P'\left(\frac{dz}{dy}\right)\right\}^{\text{I}} - \omega^{\circ}\left\{P + P'\left(\frac{dz}{dy}\right)\right\}^{\circ} = 0$, cui bisognerà soddisfare indipendentemente dalla quantità ω, il che conseguiremo per mezzo delle costanti arbitrarie, avuto riguardo alle condizioni date dal Problema nei limiti dell' integrale.

Noi abbiamo supposto che per le condizioni del Problema non fosse data alcuna relazione tra quelle variabili x, y, z.

Consideriamo adesso il caso in cui per i dati del Problema abbiasi una relazione tra quelle variabili. Sia $F(x, y, z) = 0$, ovvero $F = 0$ la data relazione tra x, y, z.

Si potrebbe cominciare dal ricavare da questa equazione il valore di z dato per x, y e sostituirlo nella formula integrale che divenir debbe massima o minima; allora questa non conterrebbe che due sole variabili x, y, e si tratterebbe con le regole ordinarie.

Trovata la relazione tra x, y, si avrebbe quella tra x, z per mezzo dell' equazione $F = 0$.

Ma possiamo anche regolarci in altra guisa.

Se noi consideriamo z come funzione di y e di x, e supponiamo x costante, l' equazione $F = 0$ ci darà

$$(e) \;\ldots\ldots\; \left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dF}{dz}\right) = 0.$$

Ora dall' equazione (E) si ricava

$N - \frac{dP}{dx} + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left\{N' - \frac{dP'}{dx}\right\} = 0$; dunque sostituendovi il valore di $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ ricavato dall' equazione (e), avremo

$(H) \ldots\ldots \left\{N - \frac{dP}{dx}\right\}\left(\frac{dF}{dz}\right) - \left(\frac{dF}{dy}\right)\left\{N' - \frac{dP'}{dx}\right\} = 0$, la quale essendo combinata con l' equazione $F = 0$, servirà per la determinazione di y e di z per x.

Se si volesse che ancora la x variasse, operando come abbiamo fatto di sopra, giungeremmo alla medesima equazione (H), e concluderemmo che la variazione di x nulla influisce sull' equazione generale del massimo o del minimo, risentendosi soltanto nell' equazione dei limiti.

Supponiamo ora che l' equazione tra x, y, z di condizione contenga anche le quantità differenziali $\left(\frac{dy}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dx}\right)$, sia cioè $F(x, y, z, p, p') = 0$.

Ora x restando costante, y divenga $y + i\omega$, per il che z si cangi in $z + i\theta +$ ec. (per θ rappresentiamo la stessa quantità che sopra). L' equazione $F = 0$ ci darà

$\omega\left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{dF}{dp}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + \theta\left(\frac{dF}{dz}\right) + \left(\frac{d\theta}{dx}\right)\left(\frac{dF}{dp'}\right) = 0$, dalla quale dovremmo trovare il valore di θ per sostituirsi nell' equazione (E); ma senza seguir questa strada, che il più delle volte sarà lunga e complicata, noi otterremo in altra guisa l' intento.

Moltiplichiamo quest' ultima equazione per un coefficiente variabile indeterminato λ, ed aggiungendo allora il primo membro di tale equazione alla quantità

$\omega N + P\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + N'\theta + P'\left(\frac{d\theta}{dx}\right)$, il cui integrale esser debbe nullo, avremo

$$0 = \int\left\{\omega\left(N + \lambda\left(\frac{dF}{dy}\right)\right) + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(P + \lambda\left(\frac{dF}{dp}\right)\right) + \theta\left(N' + \lambda\left(\frac{dF}{dz}\right)\right) + \left(\frac{d\theta}{dx}\right)\left(P' + \lambda\left(\frac{dF}{dp'}\right)\right)\right\} dx,$$

ovvero

$$\left.\begin{array}{l} \left\{P + \lambda\left(\frac{dF}{dp}\right)\right\}\omega + \int\omega\left\{N + \lambda\left(\frac{dF}{dy}\right) - \frac{dP}{dx} - \frac{d.\lambda\left(\frac{dF}{dp}\right)}{dx}\right\}dx \\ \left\{P' + \lambda\left(\frac{dF}{dp'}\right)\right\}\theta + \int\theta\left\{N' + \lambda\left(\frac{dF}{dz}\right) - \frac{dP'}{dx} - \frac{d.\lambda\left(\frac{dF}{dp'}\right)}{dx}\right\}dx \end{array}\right\} = 0.$$

Per soddisfare a quest' ultima equazione, faccio

$$(a) \;\ldots\ldots\; N + \lambda\left(\frac{dF}{dy}\right) - \frac{dP}{dx} - \frac{d.\lambda\left(\frac{dF}{dp}\right)}{dx} = 0,$$

$(b) \;\ldots\ldots\; N' + \lambda\left(\frac{dF}{dy}\right) - \frac{dP'}{dx} - \frac{d.\lambda\left(\frac{dF}{dp'}\right)}{dx} = 0$, ed ottengo due equazioni, le quali combinate con la data equazione di condizione, serviranno alla determinazione di λ, ed alla determinazione delle ricercate relazioni tra x ed y, tra x e z.

Gli altri termini fuori del segno integrale debbono annullarsi nei limiti, come abbiamo spiegato tante volte.

Io amerei di estendermi a casi più complicati, ed a dettagli maggiori, ma l' Opera mi è anche troppo riuscita più lunga di quello che pensavo. La Teorìa dei massimi e dei minimi presa in tutta la sua vastità vuole un trattato a parte, e sarebbe questo un soggetto degno d' occupare le cure dei Geometri più celebrati.

APPENDICE I.

Sopra il Calcolo Delle Differenze - Differenziali.

§. 366. Indicata al solito per y o per y_x una funzione qualunque di x, operiamo primieramente sopra di essa per averne la sua differenza finita, e troveremo, come si sa, $\Delta y = y_{x+\omega} - y_x$. Questa differenza finita è una nuova funzione di x.

Ora se noi consideriamo ω come costante, e prendiamo il differenziale di quella differenza, si avrà

$(\frac{d\Delta y}{dx})dx$, ovvero $\left(\frac{d(y_{x+\omega}-y_x)}{dx}\right)dx$; facciamo

$P = \frac{d(y_{x+\omega}-y_x)}{dx}$.

La quantità P è dedotta da y_x per mezzo di due operazioni che sonosi fatte sopra di questa: se ne è presa prima la differenza, quindi la differenziale; per questo Pdx chiamasi differenza - differenziale. Avremmo potuto ottenere una differenza - differenziale operando inversamente.

In generale indicando per $\Delta^n y$ una differenza finita n^{esima} di y, se di questa prendiamo il differenziale m^{esimo}, si avrà $(\frac{d^m(\Delta^n y)}{dx^m})dx^m$; egualmente se di una differenziale $(\frac{d^m y_x}{dx^m})dx^m$ prendiamo la differenza finita n^{esima}, avremo $\Delta^n(\frac{d^m y_x}{dx^m})dx^m$, e sarà anche questa una differenza - differenziale.

Si avverta che nel prendere la differenza finita di un differenziale Pdx, non debbesi operare che sopra P, cioè sopra il coefficiente di dx, che è una funzione di x indipendente da dx.

L' ordine poi di una differenza-differenziale si desume dalla somma dei due ordini appartenenti alle caratteristiche Δ, d; così quell' ultime due formule rappresentano differenze-differenziali dell' ordine $(m + n)^{esimo}$.

E quì osserviamo che la riunione delle due operazioni di prendere le differenze finite e di prendere i differenziali, è conforme a quanto si pratica anche nell' algebra ordinaria. Di un arco per esempio si può prendere il seno, e quindi farne il quadrato, il cubo ec. Sono ancor queste due operazioni che nulla hanno di commune tra loro, e perciò indipendenti l' una dall' altra. In generale sopra una quantità ponno farsi quante e quali si vogliono operazioni, indicandole anche con simboli (se ne siano stati stabiliti per questo), purchè quelle operazioni nulla abbiamo di contradittorio tra di esse.

Il Calcolo che riguarda le quantità ottenute con quelle due operazioni, chiamasi *Calcolo delle Differenze-Differenziali*. Le regole e le proprietà di questo calcolo sono una combinazione delle regole e delle proprietà dei due calcoli, per il che non molto ci tratterremo a svilupparle.

Il Calcolo delle differenze-differenziali ha due rami, quello cioè propriamente detto *delle Differenze-Differenziali*, e quello delle *Somme-Integrali*. Nel primo, date le funzioni, se ne ricavano le differenze-differenziali; e nel secondo, conosciute quest' ultime quantità, se ne ricercano le funzioni. Non è difficile il primo ramo, ma oltremodo difficoltoso ne è l' altro, perchè risente tutte le difficoltà del Calcolo Sommatorio, tutte quelle dell' integrale, e tutte le altre che gli sono proprie, o che nascono dalla combinazione delle prime.

Questo Calcolo è nuovo, ed invano se ne cercherebbero altrove i rudimenti.

Nel prendere le differenze-differenziali tralasceremo il dx: avremo in questa guisa una maggiore simmetria nelle operazioni; e d' altr' onde essendo esso una quantità indeterminata, so-

pra la quale non dee farsi alcuna operazione, potremo rimettercelo quando a noi piacerà.

§. 367. Per quanto non possa esservi alcuna difficoltà a prendere le differenze-differenziali di una funzione qualunque y_x di x, pure daremo quì le differenze-differenziali del secondo ordine delle funzioni semplici

$$\Delta d . x^m = m \left\{ (m-1) x^{m-2} \omega + \frac{(m-1)(m-2)}{2} x^{m-3} \omega^2 + \text{ec.} \right\};$$

$$\Delta d . a^x = (a^\omega - 1) a^x \log. a;$$

$$\Delta d . \log. x = - \frac{1}{(x+\omega)x};$$

$$\Delta d . \operatorname{sen} x = - (1 - \cos \omega) \cos x - \operatorname{sen} \omega . \operatorname{sen} x;$$

$$\Delta d . \cos x = (1 - \cos \omega) \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} \omega . \cos x.$$

Non vi è poi alcuna difficoltà nel prendere le differenze-differenziali delle funzioni composte, tanto del secondo che degli ordini superiori.

Questi risultati sono i medesimi, sia che nel prendere le differenze-differenziali si cominci dal prendere i differenziali, e quindi si prendano le differenze finite, sia che si batta la strada contraria. Il calcolo ce ne persuaderà facilmente; anzi a questo riguardo noi potremo dimostrare un generale ed interessantissimo Teorema.

Infatti essendo come si sa (§. 5.)

$$y_{x+\omega} = y_x + \left(\frac{dy}{dx}\right)\omega + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) . \frac{\omega^2}{2} + \text{ec.}$$

e perciò

$$y_{x+\omega} - y_x = \Delta y_x = \left(\frac{dy}{dx}\right)\omega + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) . \frac{\omega^2}{2} +$$

avremo

$$d\Delta y_x = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\omega dx + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)\frac{\omega^2 dx}{2} + \text{ec.}$$

Ora differenziando la prima equazione, si ha

$$dy_{x+\omega} = dy_x + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\omega dx + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)\frac{\omega^2 dx}{2} + \text{ec.},$$

dalla quale

$$dy_{x+\omega} - dy_x = \Delta dy_x = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\omega dx + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)\frac{\omega^2 dx}{2} + \text{ec.},$$

dunque

$$d\Delta y_x = \Delta dy_x .$$

„ La differenziale cioè della differenza finita è eguale al- „ la differenza finita della differenziale „.

Da questo Teorema è facile dedurne quest' altro più generale

$$d^m\Delta^n y_x = \Delta^n d^m y_x .$$

Nel prendere dunque le differenze-differenziali è indifferente l' ordine da seguirsi. Si può cominciare a prendere i differenziali, e poi le differenze finite, o viceversa: si giugne sempre al medesimo risultato.

Stimo inutile trattenermi a farne delle riprove.

Nel prendere le differenze-differenziali delle funzioni ponno svanire delle costanti che vi si ritrovino sole o moltiplicate per x, x^2, x^3 ec. Il loro numero è sempre eguale all' ordine della differenza-differenziale: così se la differenza-differenziale è dell' ordine $m + n$, svanisce o può svanire un polinomio di questa forma

$$A + Bx + Cx^2 + Ex^3 + \ldots\ldots\ldots + Mx^{m+n-1}.$$

Sarà facile persuadersi di questa verità.

§. 368. Veniamo alle differenze-differenziali delle equazioni. Sia $V = 0$ una equazione tra x, y e quante si vogliono costanti.

Non vi è alcuna difficoltà nel prendere le differenze-differenziali di quest' equazione $V = 0$; si differenzia l' equazione con le regole del calcolo differenziale quante volte si debbe, quindi scrivendovi invece di

x, y_x, $\left(\frac{dy_x}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y_x}{dx^2}\right)$ ec., le quantità

$x+\omega$, $y_{x+\omega}$, $\left(\frac{dy_{x+\omega}}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y_{x+\omega}}{dx^2}\right)$ ec., ovvero le equivalenti

$y + \Delta y$; $\left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{d\Delta y}{dx}\right)$; $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \left(\frac{d\Delta^2 y}{dx^2}\right)$ ec.; si ha una nuova equazione, da cui sottraendo l' equazione differenziale, se ne ottiene una prima differenza di quella differenziale, sopra la quale faremo una seconda operazione per avere una seconda differenza e così di seguito; si avrà in questa guisa la differenza-differenziale dell' ordine che sarà stato proposto.

Per esempio. Vogliasi la differenza-differenziale del secondo ordine dell' equazione $y^2 + x^2 = a^2$.

Incominciando dal differenziarla, avremo

$y\left(\frac{dy}{dx}\right) + x = 0$, della quale la differenza finita sarà

$$y_{x+\omega}\left(\frac{dy_{x+\omega}}{dx}\right) + x + \omega - y_x\left(\frac{dy}{dx}\right) - x = 0, \text{ ovvero}$$

$$(y + \Delta y)\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{d\Delta y}{dx}\right)\right\} - y\left(\frac{dy}{dx}\right) + \omega = 0, \text{ ovvero}$$

$$y\left(\frac{d\Delta y}{dx}\right) + \Delta y.\left(\frac{dy}{dx}\right) + \Delta y.\left(\frac{d\Delta y}{dx}\right) + \omega = 0.$$

Quest' ultima equazione sarà la differenza-differenziale del secondo ordine di $y^2 + x^2 = a^2$.

Data un' equazione $V = 0$ tra le variabili x, y, e quante si vogliono costanti, il calcolo differenziale ci fa ricavare da essa quest' altra equazione $dV = 0$, ed il calcolo delle differenze finite l' equazione $\Delta V = 0$: ora una combinazione qualunque delle tre equazioni $V = 0$, $dV = 0$, $\Delta V = 0$ chiamasi una equazione alle differenze-differenziali del primo ordine. Un' equazione qualunque nata dalla combinazione di queste sei equazioni

$$V = 0,\ dV = 0,\ \Delta V = 0,\ d^2V = 0,\ \Delta^2 V = 0,\ \Delta dV = 0,$$

ha il nome di equazione alle differenze-differenziali e così di seguito.

Potremo dunque avere un' equazione alle differenze-differenziali del primo ordine, la quale contenga due costanti di meno dell' equazione da cui è dedotta; un' equazione alle differenze-differenziali del secondo ordine, la quale contenga cinque costanti di meno dell' equazione da cui è dedotta, e così via discorrendo.

In generale chiamasi equazione alle differenze-differenziali un' equazione in cui si trovino i differenziali e le differenze finite insieme, oppure le differenze-differenziali: l' ordine poi dell' equazione si desume dal maggior indice di alcuna delle caratteristiche d, Δ o dalla somma degli indici di esse, se trovansi riunite in un medesimo termine.

Dall' equazione $y^2 = ax + b$ se ne deducono queste due $2y(\frac{dy}{dx}) = a$, $2y\Delta y + (\Delta y)^2 = a\omega$, dalle quali si ha $2y\Delta y + (\Delta y)^2 = 2y(\frac{dy}{dx})\omega$, equazione alle differenze-differenziali del primo ordine.

§. 369. Ponno prendersi le differenze-differenziali anche delle funzioni a più variabili; anzi rapporto a queste ponno le differenze riferirsi ad una variabile, e le differenziali riferirsi ad un' altra.

Così essendo $z_{x,y}$ una funzione di due variabili x, y indipendenti tra loro, il calcolo differenziale ci dà $(\frac{dz_{x,y}}{dx})$, $(\frac{dz_{x,y}}{dy})$, delle quali possono prendersene queste differenze finite

$$(\frac{dz_{x+\omega,y}}{dx}) - (\frac{dz_{x,y}}{dx}),$$

$$(\frac{dz_{x,y+\theta}}{dx}) - (\frac{dz_{x,y}}{dx}),$$

$$(\frac{dz_{x+\omega,y+\theta}}{dx}) - (\frac{dz_{x,y}}{dx}),$$

$$(\frac{dz_{x,y+\theta}}{dy}) - (\frac{dz_{x,y}}{dy}),$$

$$(\frac{dz_{x+\omega,y}}{dy}) - (\frac{dz_{x,y}}{dy}),$$

$$(\frac{dz_{x+\omega,y+\theta}}{dy}) - (\frac{dz_{x,y}}{dy}).$$

Queste espressioni sono le differenze-differenziali parziali del secondo ordine della funzione $z_{x,y}$. Si potrebbero notare con la caratteristica Δ, ma converrebbe contrassegnarla per significare quando si riferisce ad una variabile, quando ad un' altra, e quando ad ambedue; ma questo algoritmo è impraticabile.

Le differenze-differenziali e parziali degli ordini superiori si deducono da quelle degli inferiori, come queste dalla funzione. E' inutile occuparsene.

Nella medesima maniera è facile concepire come potranno aversi le differenze-differenziali parziali delle equazioni a tre o più variabili z, x, y ec., nelle quali si considera z come funzione di tutte le altre. Se ne prendono prima l' equazioni differenziali, ed in seguito le differenze finite. Egualmente s' intende facilmente come da equazioni siffatte ponno eliminarsi delle costanti e delle funzioni, pervenendo ad equazioni alle differenze-differenziali parziali.

E qui, se non fossimo obbligati a ristringere più che possiamo questa Appendice, ci tratterremmo nello sviluppo di queste Teorie, facendone degli esempj: ma supplirà a tutto questo la sagacità, che nello studio del Corso di Matematica Sublime, avranno acquistata i nostri Lettori. Ne parleremo se avverrà che ci abbisognino nel fare qualche applicazione.

§. 370. Veniamo ora a parlare delle Somme Integrali.

Si chiama Somma Integrale di una funzione z_x di x quella funzione u_x la cui differenza-differenziale dell' ordine medesimo della Somma Integrale eguaglia z_x. Così se l' ordine è il secondo, i rapporti tra queste due funzioni z_x, u_x sono espressi da queste equazioni

$z_x = \Delta d u_x$, $u_x = \Sigma\int z_x$, delle quali una è l' inversa dell' altra. Il dx che scriversi dovrebbe accanto al segno $\int$, si tralascia per semplicità.

Nel prendere le Somme Integrali aggiunger si debbono le costanti arbitrarie secondo quanto abbiam detto al §. 367: allora le Somme Integrali diconsi *complete*: quando poi o quelle costanti non vi sono aggiunte o ricevono dei valori particolari e determinati, le Somme Integrali diconsi *particolari*.

La formula

$$\Delta d . x^m = m\left\{(m-1)x^{m-2}\omega + \frac{(m-1)(m-2)}{2}x^{m-3}\omega^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3}x^{m-4}\omega^3 + \text{ec.}\right\}$$

del §. 367, ci dà (facendovi $m = 0$, $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$, $m = 4$, ec.)

$$\Delta d . 1 = 0$$
$$\Delta d . x = 0$$
$$\Delta d . x^2 = 2$$
$$\Delta d . x^3 = 3(2x + 1)$$
$$\Delta d . x^4 = 4(3x^2 + 3x + 1)$$
$$\Delta d . x^5 = 5(4x^3 + 6x^2 + 4x + 1)$$

ec. ec.

da cui si ricavano queste Somme Integrali

$$\Sigma\int 1 = \frac{x^2}{2}$$
$$\Sigma\int x = \frac{x^3}{2.3} - \frac{1}{2}\Sigma\int 1$$
$$\Sigma\int x^2 = \frac{x^4}{3.4} - \frac{3\Sigma\int x}{3} - \frac{1}{3}\Sigma\int 1$$
$$\Sigma\int x^3 = \frac{x^5}{4.5} - \frac{6\Sigma\int x^2}{4} - \frac{4\Sigma\int x}{4} - \frac{1}{4}\Sigma\int 1,$$

ec. ec.

Così per mezzo di queste formule potrà aversi la Somma Integrale del secondo ordine di una funzione razionale intiera di x di questa forma

$$a + bx + cx^2 + ex^3 + \ldots\ldots + px^m.$$

Se noi ricompletiamo queste Somme Integrali aggiungendovi il binomio $Ax + B$, ove A, B significano due costanti arbitrarie, si trova

$$\Sigma\int . 0 = Ax + B,$$
$$\Sigma\int . 1 = \frac{x^2}{2} + Ax + B,$$
$$\Sigma\int . x = \frac{x^3}{2.3} - \frac{x^2}{4} + Ax + B$$

ec. ec.

Nella stessa guisa la formula

$$\Delta d . a^x = (a^\omega - 1)a^x \log. a$$

ci dà

$$\Sigma\int a^x = \frac{a^x}{(a^\omega - 1)\log. a} + Ax + B.$$

Le due ultime formule poi dello stesso paragrafo ci danno

$$\cos x = \frac{(1-\cos\omega).\Delta d \,\text{sen}\, x + \text{sen}\,\omega.\Delta d\cos x}{-(1-\cos\omega)^2 - (\text{sen}\,\omega)^2},$$

$$\text{sen}\, x = \frac{(1-\cos\omega).\Delta d\cos x - \text{sen}\,\omega.\Delta d\,\text{sen}\, x}{(1-\cos\omega)^2 + (\text{sen}\,\omega)^2},$$

le quali si riducono a queste più semplici

$$\cos x = \Delta d . \frac{\text{sen}(x-\omega) - \text{sen}\, x}{2 - 2\cos\omega},$$

$$\text{sen}\, x = -\Delta d . \frac{\cos(x-\omega) - \cos x}{2 - 2\cos\omega};$$

da cui ricaviamo

$$\Sigma\int\cos x = \frac{\text{sen}(x-\omega) - \text{sen}\, x}{2 - 2\cos\omega} + Ax + B,$$

$$\Sigma\int\text{sen}\, x = \frac{\cos(x-\omega) - \cos x}{2 - 2\cos\omega} + Ax + B.$$

Così dall' esame delle formule differenziali ponno ricavarsi delle regole particolari d' integrazione.

In generale però la Somma Integrale non si può avere che espressa per serie, ed anche questo metodo non è di molta utilità se la funzione è complicata. Occupiamocene per un momento. Fig.

Si dimandi per esempio il valore di $\Sigma\int z\,dx$, cioè la Somma Integrale del secondo ordine di $z dx$. Se facciamo $\int z dx = u$, si avrà (§. 124)

$$u = A + zx + \left(\frac{dz}{dx}\right)\cdot\frac{x^2}{2} + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\cdot\frac{x^3}{2.3} + \text{ec.}$$

purchè si faccia $x = 0$ nei coefficienti z, $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$ ec.

Avremo dunque

$$\Sigma\int z\,dx = C + A\Sigma 1 + z\Sigma x + \left(\frac{dz}{dx}\right)\frac{\Sigma x^2}{2} + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\frac{\Sigma x^3}{2.3} + \text{ec.},$$

e quindi se poniamo per $\Sigma 1$, Σx ec., i respettivi valori (§. 13. Cal. delle Diff. finite), avremo la serie che ci esprime la Somma Integrale di $z dx$: sarà questa completa perchè contiene le due costanti arbitrarie C, A.

Per fare fin di quì qualche applicazione delle spiegate Teorìe, si proponga questo Problema.

Trovare una curva tale AS, che prese due ascisse qualunque $AP = x$, $AP' = x + 1$, e tirate ai punti T, T', ove le ordinate corrispondenti segano la curva, le due tangenti TM, T'M', e le due Tn, $T'n'$ parallele all' asse, le tangenti dei due angoli nTM, n'T'M' differiscano fra loro di una quantità costante $= 2a$. 19

AP essendo x, PT sarà $= y_x$, e $P'T' = y_{x+1}$: ora

$$\text{tang. } n\text{TM} = \left(\frac{dy_x}{dx}\right), \text{ e tang. } n'\text{T'M'} = \left(\frac{dy_{x+1}}{dx}\right);$$ dunque per la condizione del Problema

$$\left(\frac{dy_{x+1}}{dx}\right) - \left(\frac{dy_x}{dx}\right) = 2a, \text{ e perciò}$$

$$\Delta\left(\frac{dy_x}{dx}\right) = 2a, \text{ quindi}$$

$$y_x = 2a\Sigma\int 1 = \frac{x^2}{2}\cdot 2a + Ax + B,$$ e l'equazione della curva sarà

Fig. $y = ax^2 + Ax + B$, essendo A, B due costanti arbitrarie. Se $a = 0$, la curva cercata diviene una linea retta, poichè $y = Ax + B$.

L' equazione $y = ax^2 + Ax + B$ è alla Parabola Apolloniana: si faccia per semplicità $A = 0$, $B = 0$, s' avrà $y = ax^2$. Sia $a = \frac{1}{m}$, ed avremo $my = x^2$. Si conduca nell' o-

19. rigine dell' ascisse l' asse dell' y, e sia AR: si descriva la parabola AS, prese le y per ascisse, e le x per ordinate: s' avrà la tangente dell' angolo

$$m\text{TM} = \left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{m}{2x};\text{ dunque}$$

$$\text{tang. } n\text{TM} = \text{tang.}(90^\circ - m\text{TM}) = \frac{2x}{m}:$$ sarà in conseguenza

$$\text{tang } n'\text{T'M'} = \frac{2(x+1)}{m},\text{ quindi}$$

$$\frac{2(x+1)}{m} - \frac{2x}{m} = \frac{2}{m},$$ come si ricercava.

La Parabola Apolloniana dunque gode della proprietà che formava la condizione del Problema.

§. 371. Il Teorema dimostrato sopra (§. 367) pel quale $\Delta d\,.\,z_x = d\Delta\,.\,z_x$ ce ne dà un altro: consiste questo nell' essere la somma finita dell' integrale eguale all' integrale della somma cioè $\Sigma\int.\,u = \int\Sigma\,.\,u$.

Infatti sia $\Delta d\,.\,z = u$; avremo prima $dz = \Sigma u$, poi $z = \int\Sigma u$; ma $u = d\Delta\,.\,z$, e quindi $z = \Sigma\int u$; dunque $\int\Sigma u = \Sigma\int u$.

Egualmente si troverà

$\int^m\Sigma^n\,.\,u = \Sigma^n\int^m\,.\,u$; cioè la somma n^{esima} dell' integrale m^{esimo} eguaglia l' integrale m^{esimo} della somma n^{esima}.

E quì bisogna osservare che nell' eguaglianza delle due formule $\Sigma\int u$, $\int\Sigma u$ non deesi aver riguardo ai termini ove la x è alla prima potenza, e ciò perchè nelle differenze-differenziali del secondo ordine svaniscono i termini come $Ax + B$.

Nè preme per le Somme Integrali del secondo ordine avere riguardo ai termini, ove la x è alla potenza 1, ovvero 0, i quali ponno essere introdotti dall' integrazione; poichè questi abbiam dritto di considerarli contenuti entro il binomio $Ax + B$, che dee aggiungersi, onde l' integrale sia completo.

Spieghiamoci con un esempio.

$$\Sigma \int x = \Sigma \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12},$$

$$\int \Sigma x = \int \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4}.$$

Ora sembra che $\Sigma \int x$ non sia lo stesso che $\int \Sigma x$, differendo le due espressioni della quantità $\frac{x}{12}$; se però si osserva che bisogna aggiungere a ciascuna di queste Somme Integrali il binomio $Ax + B$, essendo A, B due costanti arbitrarie, si avrà

$$\Sigma \int x = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \left(A + \frac{1}{12} \right) x + B,$$

$$\int \Sigma x = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + Ax + B,$$

le quali sono la medesima cosa, potendo $\frac{1}{12}$ considerarsi contenuto entro la costante arbitraria A. Nella stessa maniera da

$$\Sigma \int^3 . 1 = \Sigma \frac{x^3}{6} = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{24},$$

$$\int^3 \Sigma 1 = \int^3 x = \frac{x^4}{24},$$

pare che non possa aversi $\Sigma \int^3 1 = \int^3 \Sigma 1$; pure se si completano queste espressioni con l' aggiunta dei termini $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, essendo A, B, C, D quattro costanti arbitrarie, avremo

$$\Sigma \int^3 1 = \frac{x^4}{24} + \left(A - \frac{1}{12} \right) x^3 + \left(B + \frac{1}{24} \right) x^2 + Cx + D,$$

$$\int^3 \Sigma 1 = \frac{x^4}{24} + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

e perciò cangiando la forma delle costanti arbitrarie, avremo

$$\Sigma \int^3 1 = \int^3 \Sigma 1.$$

In generale avremo sempre

$\Sigma^m \int^n u = \int^n \Sigma^m u$, purchè queste Somme Integrali siano completate col necessario numero di costanti arbitrarie, cioè con l' aggiunta del polinomio

$A + Bx + Cx^2 + \ldots\ldots + Qx^{m+n-1}$, A, B, C ec., essendo quelle costanti.

§. 372. Veniamo a discorrere degli integrali dell' equazioni. Quì, più che altrove conosceremo esser questo ramo d' Analisi Sublime sempre bambino, e che quindi presenta un vasto campo ai Geometri da coltivarsi, giacchè non sappiamo neppure integrare la più semplice di tutte l' equazioni del primo ordine

$$a \Delta y = \left(\frac{dy}{dx} \right).$$

Supponendo che a rappresenti una quantità costante, facciamo $y = Ac^x$, essendo A, c quantità anche costanti da determinarsi: se facciamo le opportune sostituzioni in quell' equazione, avremo

$Aac^x (c - 1) = Ac^x \log c$, dalla quale si ricava $a(c - 1) = \log c$; dunque la costante A rimane indeterminata e la c è data per l' equazione trascendentale

$$lc = (c - 1) a.$$

A questa equazione soddisfa $c = 1$; dunque $y = A$ costante arbitraria sarà un integrale particolare della proposta, come poteva vedersi a priori.

Ora $lc = c - 1 - \frac{1}{2}(c - 1)^2 +$ ec.; dunque se supponiamo che $c - 1$ sia una frazione così piccola da potersene trascurare le potenze superiori alla seconda, avremo

$lc = c - 1 - \frac{1}{2}(c - 1)^2$, e perciò

$c - 1 + \frac{1}{2}(c - 1)^2 = a(c - 1)$, da cui si ricava

$$c = 3 - 2a.$$

Se dunque il valore di a renderà $2 - 2a$ eguale ad una frazione tanto piccola che permetta che se ne trascurino le potenze superiori alla seconda, avremo per integrale approssimato della proposta

$y = B(3 - 2a)^x$; ma la proposta è lineare; soddisfarà dunque ad essa

$y = B(3 - 2a)^x + A$.

Anche l' equazione semplicissima $ay_{x+1} + (\frac{dy}{dx}) = 0$ conduce ad un' equazione trasceudentale, se supponiamo

$y = A\alpha^x$, e ci dà $a\alpha + l\alpha = 0$ per determinare α.

In generale un' equazione qualunque alle differenze-differenziali, lineare a coefficienti costanti, conduce ad una equazione trascendentale, se tentisi d' integrarla con la supposizione mentovata.

Per esempio, l' equazione

$ay_x + by_{x+1} + c(\frac{dy}{dx}) + e(\frac{dy_{x+1}}{dx}) = 0$, facendo

$y_x = A\alpha^x$, ci dà

$a + b\alpha + c\log.\alpha + e\alpha\log\alpha = 0$, dalla quale converrebbe trovare il valore di α; ma non si hanno regole generali per siffatte equazioni; anzi *la risoluzione dell' equazioni trascendentali, di quelle cioè nelle quali l' incognita è sotto aspetto algebraico, e trascendente nel tempo stesso* (*a*), è un ramo degno di occupare i primi Geometri.

(*a*) A questo proposito esporrò la risoluzione di alcune equazioni trascendentali, che mi è occorso di fare in altre occasioni; onde vedasi l' artifizio analitico che ho seguito.

1°. Sia da risolversi l' equazione

$2^x = \frac{(x+3)(x+5)}{12}$, ovvero siano da trovarsi tutti i valori di x che soddisfanno a quest' equazione.

Trasformata la superiore equazione in quest' altra

$3.2^{x+2} = (x+3)(x+5)$, si faccia $x + 2 = y$, ed avremo l' equazione

§. 373. Taluna volta la forma particolare di un' equazione

(A) . . . . . . $3.2^y = (y+1)(y+3)$.

Per poco che si rifletta sopra l' equazione (A) si vede che y debb' essere un numero intiero e positivo: infatti se non fosse numero intiero l' irrazionale sarebbe eguale al razionale, il che è assurdo; e se non fosse positivo, il numero 3 sarebbe decomponibile in fattori intieri, ciò che parimente è assurdo.

Ciò premesso, si osservi che al primo membro di quell' equazione si può dare questa forma

$$3.2^y = 3(1+1)^y = 3 + 3y + \frac{3y(y-1)}{2} + \frac{3y(y-1)(y-2)}{2.3} + \text{ec.}$$

Ora la proposta diverrà

$3 + 3y + \frac{3y(y-1)}{2} + \frac{3y(y-1)(y-2)}{2.3} + \text{ec.} = (y+1)(y+3)$, la quale, tutto trasportando da una banda, si riduce a quest' altra

$$\frac{y(y+1)(y-3)}{2} + \frac{y(y-1)(y-2)(y-3)}{2.4} + \frac{y(y-1)(y-2)(y-3)(y-4)}{2.4.5} + \text{ec.} = 0,$$

ovvero

$$(B) \ldots y(y-3).\left\{\frac{y+1}{2} + \frac{(y-1)(y-2)}{2.4} + \frac{(y-1)(y-2)(y-4)}{2.4.5} + \text{ec.}\right\} = 0,$$

Così la risoluzione dell' equazione (A) sarà ridotta a quella dell' equazione (B).

Nell' equazione (B) la serie che è contenuta tra le parentesi, è tutta composta di termini positivi, per essere y positivo ed intiero; dunque non si può soddisfare a quell' equazione, che col fare $y(y-3) = 0$.

Quest' eguaglianza ci dà due valori intieri e positivi di y, cioè $y = 0$, $y = 3$; e queste sono le due sole radici, le quali abbia l' equazione (B), ovvero

$3.2^y = (y+1)(y+3)$.

Ma abbiam fatto $x + 2 = y$; dunque avremo per x questi due valori; $x = 1$, $x = -2$; che saranno le sole radici dell' equazione

$2^x = \frac{(x+3)(x+5)}{12}$.

Pervenne a quest' equazione il mio Rispettabile Collega e Matem. insigne Mariano Fontana risolvendo il Problema, ove si cerca quali siano i Sistemi d' Attrazione, in cui è lecito considerare tutta la massa di una sfera, come riunita nel di lei centro, onde determinare l' attrazione di essa sopra un punto fisso posto fuori di lei (Corso di Dinamica Tom. I. pag. 129; Tom. II. pag. 310), ed avendone ottenute con metodo indiretto le radici suddetalle differenze-differenziali conduce facilmente all' integrazione.

te mi ricercò una diretta determinazione delle medesime, cui soddisfeci, come ho quì sopra riferito.

2ª. Sia l' equazione

(A) ..... $\frac{1+n}{1-n} = \left(\frac{2+n}{1+n}\right)^{2n}$, della quale si vogliono le radici, o i valori di n.

Pongasi $n = -x$, ed avremo

$\frac{1-x}{1+x} = \left(\frac{2-x}{1-x}\right)^{-2x}$, ovvero

$\frac{1-x}{1+x} = \left(\frac{1-x}{2-x}\right)^{2x}$, $\frac{1-x}{1+x} - 1 = \left(\frac{1-x}{2-x}\right)^{2x} - 1$.

E' facile intanto concludere che x non può essere eguale nè al -1, nè al 2; ma soddisfà $x = 1$, ed avvi una sola radice eguale all' unità, poichè l' equazione divisa per $x - 1$, non è più soddisfatta da $x = 1$. Ecco intanto trovata una radice della proposta. Per le altre radici, si osservi che l' ultima ottenuta riduzione ci dà successivamente le seguenti:

$$-\frac{2x}{1+x} = -2x\left(\frac{1}{2-x}\right) + \frac{2x(2x-1)}{2}\left(\frac{1}{2-x}\right)^2 + \text{ec.},$$

$$2x\left\{\frac{1}{2-x} - \frac{1}{1+x}\right\} = \frac{2x(2x-1)}{2}\left(\frac{1}{2-x}\right)^2 - \text{ec.},$$

$$\frac{2x(2x-1)}{(1+x)(2-x)} = \frac{2x(2x-1)}{2}\left(\frac{1}{2-x}\right)^2 - \text{ec.},$$

$$\frac{2x(2x-1)}{1+x} = \frac{2x(2x-1)}{2}\cdot\frac{1}{2-x} - \frac{2x(2x-1)(2x-2)}{2.3}\left(\frac{1}{2-x}\right)^2 + \text{ec.},$$

$$2x(2x-1)\left\{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{4-2x}\right\} = -\frac{2x(2x-1)(2x-2)}{2.3}\left(\frac{1}{2-x}\right)^2 + \text{ec.},$$

$$\frac{2x(2x-1)(3-3x)}{(1+x)(2-x).2} = -\frac{2x(2x-1)(2x-2)}{2.3}\left(\frac{1}{2-x}\right)^2 + \text{ec.},$$

$$2x(2x-1)(x-1)\left\{\frac{3}{2(1+x)} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2-x}\right) + \frac{2x-3}{3.4}\left(\frac{1}{2-x}\right)^2 - \text{ec.}\right\} = 0,$$

$2x(2x-1)(x-1) = 0$, e quindi $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$.

Abbiamo dunque sin quì tre radici della proposta, e vedremo che non ve ne sono altre. Infatti quel fattore dell' equazione da noi trascurato, ci dà

(B) ..... $\frac{3}{2(1+x)} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2-x}\right) + \frac{2x-3}{3.4}\left(\frac{1}{2-x}\right)^2 - \text{ec.} = 0$,

che successivamente si riduce come segue

Vogliasi per esempio risolvere questo Problema:

$$\frac{1}{1+x} = -\left\{2-x-3\right\}^{-1} = -\left\{(2-x)^{-1} + 3(2-x)^{-2} + 3^2(2-x)^{-3} + \text{ec.}\right\},$$

$$\frac{3}{2(1+x)} = -\left\{\frac{3}{2(2-x)} + \frac{3^2}{2}\left(\frac{1}{2-x}\right)^2 + \frac{3^3}{2}\left(\frac{1}{2-x}\right)^3 + \text{ec.}\right\},$$

$$(C) \ldots \left\{\begin{array}{l} \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{1-x}\right) + \frac{3^2}{2}\left(\frac{1}{2-x}\right)^2 + \frac{3^3}{2}\left(\frac{1}{2-x}\right)^3 + \text{ec.} \\ + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2-x}\right) - \frac{2x-3}{3.4}\left(\frac{1}{2-x}\right)^2 + \frac{(2x-3)(2x-4)}{3.4.5}\left(\frac{1}{2-x}\right)^3 + \text{ec.} \end{array}\right\} = 0,$$

E se la proposta ha dell' altre radici, queste debbono esser date dall' equazione (C).

Qualunque valore intiero o fratto che diasi ad x, ma negativo, rende necessariamente positivo il primo membro di quest' equazione; essa dunque non può darci alcuna nuova radice negativa, sia intiera come fratta.

Egualmente facendo x eguale all' unità o minore di lei, il primo membro è necessariamente positivo, nè può mai divenire nullo; dunque l' equazione (C) non ha nessuna radice eguale o minore dell' unità, e quindi essa non ci darà nessuna nuova radice eguale o minore dell' unità.

Per dimostrare che non ponno esservi altre radici maggiori dell' unità, sia intiere come fratte e positive, si riprenda l' equazione

$\frac{1-x}{1+x} = \left(\frac{2-x}{1-x}\right)^{-2x}$, e da questa si ha

$$\frac{1-x}{1+x} - 1 = \left(\frac{2-x}{1-x}\right)^{-2x} - 1,$$

$$-\frac{2x}{1+x} = -2x\left(\frac{1}{1-x}\right) + \frac{2x(2x+1)}{2}\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 - \frac{2x(2x+1)(2x+2)}{2.3}\left(\frac{1}{1-x}\right)^3 + \text{ec.},$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-x} - \frac{2x+1}{2}\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 + \frac{(2x+1)(2x+2)}{2.3}\left(\frac{1}{1-x}\right)^3 - \text{ec.}$$

Ora quest' ultima equazione non può esser mai soddisfatta per qualunque valore positivo e maggiore dell' unità che si dia ad x; dunque le sole radici dell' equazione saranno $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$: avremo quindi $n = 0$, $n = -\frac{1}{2}$; $n = -1$.

Se si facesse uso di questo artifizio per risolvere l' equazione $2^x = x$, egli ce la dimostrerebbe assurda ed esprimente una specie d' immaginario.

„ Travare una curva tale che le suttangenti corrisponden„ ti a due ascisse qualunque x, $x+1$, differiscano tra di lo„ ro di una quantità $= 2$ „.

Se si rappresenta per y_x l' ordinata che corrisponde all' ascissa x, l' espressione della suttangente che a quell' ascissa conviensi, è

$y_x : (\frac{dy_x}{dx})$, e quella che si conviene all' ascissa $x+1$, è

$y_{x+1} : (\frac{dy_{x+1}}{dx})$; ora le condizioni del Problema ci danno quest' equazione

$y_{x+1} : (\frac{dy_{x+1}}{dx}) - y_x : (\frac{dy_x}{dx}) = 2$, che è un' equazione alle differenze differenziali.

Per integrarla si osservi che essa si pone sotto questa forma

$\Delta \{ y_x : (\frac{dy_x}{dx}) \} = 2$, e quindi

$y : (\frac{dy}{dx}) = 2\Sigma 1 = 2x + A$. Si ha dunque

$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x + A}$,

$log.\, y = \frac{1}{2}\, log.\, (2x + A) + log.\, C$, ed infine

$y^2 = 2Bx + C$, sarà l' equazione della curva cercata: sarà pertanto la curva una Parabola Apolloniana.

Se la differenza delle due tangenti avesse dovuto eguagliare una frazione $\frac{m}{n}$ dell' ascissa x, cioè $\frac{m}{n}x$, noi avremmo ottenuta quest' equazione

$\Delta \{ y : (\frac{dy}{dx}) \} = \frac{m}{n}x$, e quindi

$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{\frac{m}{n}\Sigma x + A}$, essendo A una costante arbitraria. Se integriamo quest' ultima equazione, si ha

$ly = \int \frac{dx}{\frac{m}{n}\Sigma x + A} + B$, ovvero

$ly = \int \frac{2n dx}{mx^2 - mx + 2nA} + B$: essendo B un' altra costante arbitraria.

§. 374. Sia proposta l' equazione

$y_x + ay_{x+1} + b(\frac{dy}{dx}) = X$, ove a, b, X sono funzioni di x.

„ L' Integrale di una tale equazione dipende da quello di „ una equazione più semplice, nella quale manca il primo ter„ mine y_x, da una equazione cioè di questa forma

„ $(\frac{dz}{dx}) + pz_{x+1} = X'$, essendo p, X funzioni di x „.

Per dimostrare questo Teorema si procederà come segue: supponiamo che integrata la proposta nella supposizione che manchi il termine ay_{x+1} (ed essa allora è una equazione differenziale), sia il suo integrale $y = cu + \omega$, essendo u, ω due funzioni di x determinate, e c la costante arbitraria. (Noi scriviamo egualmente y, u, ω, che y_x, u_x, ω_x).

Supponiamo c variabile, e determiniamolo in modo che quell' integrale soddisfaccia a tutta l' equazione proposta, nessun termine eccettuato, avremo

$(\frac{dy}{dx}) = c(\frac{du}{dx}) + u(\frac{dc}{dx}) + (\frac{d\omega}{dx})$,

$y_{x+1} = c_{x+1} . u_{x+1} + \omega_{x+1}$.

Facendo ora le opportune sostituzioni nella proposta, otterremo

$cu + \omega + a \{ c_{x+1} . u_{x+1} + \omega_{x+1} \} + b \{ c(\frac{du}{dx}) + (\frac{d\omega}{dx}) \} +$

$bu(\frac{dc}{dx}) = X$: ma i valori di u e di ω son tali che

$cu + \omega + b \{ c(\frac{du}{dx}) + (\frac{d\omega}{dx}) \} = X$ è un' equazione identica; dunque per determinar c rimarrà l' equazione

$au_{x+1} \cdot c_{x+1} + bu(\frac{dc}{dx}) = - a\omega_{x+1}$, cui si potrà dare questa forma

$(\frac{dc}{dx}) + pc_{x+1} = X'$.

Questa stessa riduzione estender si potrebbe alle equazioni degli ordini superiori; ma non mette il conto, giacchè nello stato attuale dell' Analisi non sappiamo integrare neppure le equazioni del primo ordine così ridotte.

§. 375. Sonovi alcune Classi di equazioni alle differenze-differenziali che ammettono facilmente l' integrazione, o almeno esse dipendono dalle regole conosciute dei due Calcoli, Sommatorio, e Integrale. Sarà utile occuparsene.

Sia $\varphi(x, y, \Delta y)$ una funzione qualunque delle quantità che sono tra le parentesi: una equazione a differenze-differenziali che potesse ridursi a questa forma

$\frac{d\varphi(x, y, \Delta y)}{dx} = Fx$ è sempre integrabile.

Infatti le ordinarie regole d' integrazione ci danno

$\varphi(x, y, \Delta y) = \int Fx \,.\, dx + Cost.$, che è un' equazione a differenze finite soltanto, l' integrazione della quale appartiene al Calcolo Sommatorio.

Se per esempio fosse proposta l' equazione alle differenze-differenziali

$\Delta(\frac{dy}{dx}) + B(\frac{dy}{dx}) = X$, essendo B quantità costante, ed X una funzione di x, è facile vedere che essa si trasforma in quest' altra

$\frac{d(\Delta y + By)}{dx} = X$, dalla quale si ha subito

$\Delta y + By = \int X dx + C$, il cui integrale finito non ha più alcuna difficoltà.

Nella stessa maniera un' equazione alle differenze-differenziali che potesse ridursi a questa forma

$\Delta\varphi \left\{x, y, (\frac{dy}{dx})\right\} = Fx$, facilmente s' integrerebbe o almeno

la difficoltà sarebbe ridotta a quella delle ordinarie equazioni differenziali.

S' intende facilmente come potrebbero trovarsi due simili classi di equazioni integrabili negli ordini superiori.

Da questi principj dipende la soluzione del Problema seguente.

„ Trovare una curva tale che prese le ascisse in progres-
„ sione aritmetica x, $x + 1$, $x + 2$ ec., i raggi osculatori
„ R, R', R'' ec. che vi corrispondono, siano anche in questa
„ progressione, di modo che abbiasi
„ $R' = R + a$, $R'' = R' + a$ ec. „.

L' equazione che risolve il Problema è $R' - R = a$, ovvero

$R_{x+1} - R_x = a$.

Se facciamo $(\frac{dy}{dx}) = p$, la Teoria delle curve ci dà

$R_x = - \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{(\frac{dp}{dx})}$, e quindi

$R' = R_{x+1} = - \frac{(1 + p'^2)^{\frac{3}{2}}}{(\frac{dp'}{dx})}$: l' equazione dunque della curva sarà

$- \frac{(1 + p'^2)^{\frac{3}{2}}}{(\frac{dp'}{dx})} + \frac{(1 - p^2)^{\frac{3}{2}}}{(\frac{dp}{dx})} = a$, che integrata rapporto alle differenze finite, ci dà

$\frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{(\frac{dp}{dx})} = - ax + Cost.$, e perciò

$\frac{dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} = - \frac{dx}{ax - c}$.

Facciamo una prima integrazione, ed avremo

$\frac{p}{\sqrt{(1 + p^2)}} = - \frac{1}{a} l(ax - c) \,.\, c'$, essendo c' un' altra costante arbitraria, e questa è l' equazione differenziale della curva che risolve il Problema. Ne lasciamo ai nostri Lettori lo sviluppo per cercarne una seconda integrazione, onde ottenere l' equazione finita della curva.

§. 376. Indichiamo per φ_x una funzione conosciuta di $x, y, (\frac{dy}{dx})$, $(\frac{d^2y}{dx^2})$ ec.: è chiaro che φ_{x+1} indicherà quella funzione se x diviene $x+1$; ed $y_x, (\frac{dy_x}{dx})$ ec., divengono $y_{x+1}, (\frac{dy_{x+1}}{dx})$ ec., egualmente φ_x diverrà φ_{x+2}, quando x diviene $x+2$; y_x, y_{x+2} ec., e così di seguito; se dunque un' equazione a differenze-differenziali potrà ridursi a questa forma

$$\varphi\left\{x, y, (\tfrac{dy}{dx}) \text{ ec.}\right\} + A\varphi\left\{x+1, y_{x+1}, (\tfrac{dy_{x+1}}{dx}) \text{ ec.}\right\} + B\varphi\left\{x+2, y_{x+2}, (\tfrac{dy_{x+2}}{dx}) \text{ ec.}\right\} + \text{ec.} = X,$$

è manifesto che potrà considerarsi come un' equazione lineare a differenze finite dell' ordine n^{esimo}, cioè

$$\varphi_x + A\varphi_{x+1} + B\varphi_{x+2} + \ldots + P\varphi_{x+n} = X,$$

l' integrazione della quale ci darà o potrem supporre che ci dia $\varphi_x = Fx$, essendo Fx una funzione conosciuta e determinata di x, e di n costanti arbitrarie.

L' equazione poi $\varphi = Fx$ sarà un' equazione differenziale $\varphi\left\{x, y, (\frac{dy}{dx}), (\frac{d^2y}{dx^2}) \text{ ec.}\right\} = Fx$, di cui l' integrale sarà nel tempo stesso la somma integrale della proposta.

Tutte le volte pertanto che una proposta equazione a differenze-differenziali ridur potrassi alla forma superiore, la di lei Somma Integrale dipenderà da una integrazione d' equazione a differenze finite, e da una d' equazione ai differenziali.

Per esempio, l' equazione

$$y_x + ay_{x+1} + b(\tfrac{dy_x}{dx}) + c(\tfrac{dy_{x+1}}{dx}) = X,$$

in cui a, b, c sono costanti, ed X funzione di x, potrà sempre integrarsi

se $c = ab$, poichè allora l' equazione suddetta si può mettere sotto questa forma

$\varphi_x + a\varphi_{x+1} = X$, facendo $\varphi_x = y + b(\frac{dy}{dx})$.

Per esempio, l' equazione a coefficienti costanti

$(a) \ldots\ldots (\frac{dy_{x+1}}{dx}) + a(\frac{dy_x}{dx}) + by_{x+1} + cy_x = X$, potrà sempre integrarsi se $c = ba$, poichè allora potrà mettersi sotto questa forma

$a\varphi_x + \varphi_{x+1} = X$, essendo $\varphi_x = by_x + (\frac{dy_x}{dx})$.

La prima di queste due equazioni ci dà

$\varphi_x = (-a)^{x-1}\left\{C + \Sigma \frac{X}{(-a)^x}\right\}$, e la seconda

$y_x = \frac{1}{e^{bx}}\left\{C' + \int e^{bx}(-a)^{x-1}\left[C + \Sigma \frac{X}{(-a)^x}\right]dx\right\}$, essendo integrate con le formule del §. 46 *del Cal. Differenz. finite;* e del § 125 *del Cal. Differenziale.*

Facciamo $X = 0$, ed avremo

$y_x = \frac{1}{e^{bx}}\left\{C' + C\int e^{bx}(-a)^{x-1}dx\right\}$, ovvero cangiando la forma della seconda costante,

$$y_x = \frac{1}{e^{bx}}\left\{C' + C\int(-a.e^b)^x dx\right\} = \frac{C'}{e^{bx}} + \frac{C(-a.e^b)^x}{e^{bx}.\log.(-a.e^b)},$$

ed in fine

$y_x = C'e^{-bx} + C''(-a)^x$, essendo C'' una costante arbitraria, come è C'.

E questa è la Somma Integrale dell' equazione

$$(\tfrac{dy_{x+1}}{dx}) + a(\tfrac{dy_x}{dx}) + by_{x+1} + aby_x = 0.$$

A questo risultato possiam anche pervenire per mezzo del metodo del §. 372.

Facciasi $y_x = Ce^{\alpha x}$, ed avremo per determinare α quest' equazione

$e^{\alpha}\alpha + a\alpha + be^{\alpha} + ba = 0$, la quale si decompone nelle due $e^{\alpha} + a = 0$, $\alpha + b = 0$, che ci danno

$y = C(-a)^x$, ovvero $y = C'e^{-bx}$; ora la proposta essendo lineare, avremo

$y = C(-a)^x + Ce^{-bx}$ come sopra.

Supponiamo che i coefficienti dell'equazione (a) siano funzioni di x, e si abbia

$$(a) \ldots \left(\frac{dy_{x+1}}{dx}\right) + a_x\left(\frac{dy_x}{dx}\right) + b_x y_{x+1} + c_x y_x = X.$$

Facciamo $\varphi_x = b_{x-1} y_x + \left(\frac{dy_x}{dx}\right) \ldots (b)$, ed avremo

$(c) \ldots \varphi_{x+1} + a_x \varphi_x = X + (b_{x-1} a_x - c_x) y_x$, quindi semplicemente $\varphi_{x+1} + a_x \varphi_x = X$ se $c_x = a_x b_{x-1}$: quando dunque tra i coefficienti a_x, b_x, c_x avrà luogo questa condizione, la proposta (a) sarà integrabile.

Supponiamo che tal condizione non sussista, e facciamo $b_{x-1} a_x - c_x = m_x$, sarà allora

$(c) \ldots \varphi_{x+1} + a_x \varphi_x = X + m_x y_x$. Differenziamo questa equazione, ed avremo

$$\left(\frac{d\varphi_{x+1}}{dx}\right) + a_x\left(\frac{d\varphi_x}{dx}\right) + \varphi_x\left(\frac{da_x}{dx}\right) = \left(\frac{dX}{dx}\right) + m_x\left(\frac{dy_x}{dx}\right) + y_x\left(\frac{dm_x}{dx}\right),$$

ove ponendo il valore di $\left(\frac{dy_x}{dx}\right)$ dato dall' equazione (b), si avrà

$$\left(\frac{d\varphi_{x+1}}{dx}\right) + a_x\left(\frac{d\varphi_x}{dx}\right) + \varphi_x\left(\frac{da_x}{dx}\right) = \left(\frac{dX}{dx}\right) + m_x\varphi_x + \left\{\left(\frac{dm_x}{dx}\right) - m_x b_{x-1}\right\} y_x.$$

Per mezzo di quest' ultima equazione e della (c) eliminiamo y_x, e si troverà

$$\left(\frac{d\varphi_{x+1}}{dx}\right) + a_x\left(\frac{d\varphi_x}{dx}\right) + \varphi_x\left(\frac{da_x}{dx}\right) - m_x\varphi_x = \left(\frac{dX}{dx}\right) + \left\{\left(\frac{dm_x}{dx}\right) - m_x b_{x-1}\right\}\left\{\varphi_{x+1} + a_x\varphi_x - X\right\} : m_x,$$

la quale prende questa forma

$$(d) \ldots \left(\frac{d\varphi_{x+1}}{dx}\right) + a_x\left(\frac{d\varphi_x}{dx}\right) + b'_{x-1}\varphi_{x+1} + c'_x\varphi_x = X',$$

L'equazione (d) ha la medesima forma della proposta (a): ella dunque sarà integrabile tutte le volte che $c' = a'_x b'_{x-1}$. Se ciò non succederà, si potrà trasformare l' equazione (d) in un' altra ad essa simile, e così via discorrendo. Integrata l' equazione (d) si conoscerà il valore di φ_x, e da questo quello di y_x; l' integrale dunque dell' equazione (a) dipenderà da quello dell' equazione (d).

Se nelle continue trasformate non giungeremo ad alcuna equazione integrabile, si concluderà che la proposta (a) non può integrarsi con questo metodo.

§. 377. Egualmente se per φ_x si rappresenta una funzione di y_x, y_{x+1}, y_{x+2} ec., e se un' equazione alle differenze-differenziali potrà mettersi sotto la forma

$\varphi + A\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + B\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) + \text{ec.} = X$, ne avremo la Somma Integrale, integrando subito quest' equazione differenziale, e trovato il valore di φ, cioè trovato

$\varphi(y_x, y_{x+1}, y_{x+2} \text{ ec.}) = \Psi x$ essendo il secondo membro una funzione conosciuta di x, prendendo l' integrale finito di quest' ultima equazione a differenze finite.

Per esempio, prendiamo la stessa equazione del paragrafo antecedente

$$(a) \ldots \left(\frac{dy_{x+1}}{dx}\right) + a_x\left(\frac{dy_x}{dx}\right) + b_x y_{x+1} + c_x y_x = X,$$ e facciamo

$\varphi_x = y_{x+1} + a_x y_x$; avremo allora

$$\left(\frac{d\varphi_x}{dx}\right) + b_x \varphi_x + \left\{c_x - b_x a_x - \left(\frac{da_x}{dx}\right)\right\} y_x = X,$$ ovvero semplicemente

$$\left(\frac{d\varphi_x}{dx}\right) + b_x \varphi_x = X,$$ se $c_x = b_x a_x + \left(\frac{da_x}{dx}\right)$: quando dunque tra i coefficienti della proposta regnerà questa equazione, sarà quella integrabile.

Supponiamo che non sia nulla la quantità

$c_x - b_x a_x - \left(\frac{da_x}{dx}\right)$, allora rappresentandola per m_x, la proposta diverrà

$$(b) \; \ldots\ldots \; \left(\frac{d\varphi_x}{dx}\right) + b_x \varphi_x + m_x y_x = X.$$

In quest' equazione (b) aumentiamo la x di un' unità ed indicando per X' ciò che allora diviene X, avremo

$$(c) \; \ldots\ldots \; \left(\frac{d\varphi_{x+1}}{dx}\right) + b_{x+1} \varphi_{x+1} + m_{x+1} y_{x+1} = X'.$$

Ora se per mezzo delle due equazioni (b), (c) e della supposizione $\varphi_x = y_{x+1} + a_x y_x$ eliminiamo y_x ed y_{x+1}, avremo un' equazione alle differenze-differenziali simile alla proposta (a): sarà essa dunque di questa forma

$$\left(\frac{d\varphi_{x+1}}{dx}\right) + a'_x \left(\frac{d\varphi_x}{dx}\right) + b'_x \varphi_{x+1} + c'_x \varphi_x = \Psi x,$$ la quale sarà anche integrabila se

$c'_x = b'_x a'_x + \left(\frac{da'_x}{dx}\right)$: se questo non fosse, la trasmuteremmo di nuovo in un' altra, e così di seguito.

Non sviluppo di più queste integrazioni, perchè non mi sembrano di grande importanza.

§. 378. Nell' equazioni a differenze finite, la differenza della variabile x non solo può essere una qualunque quantità costante, ed una funzione della stessa x, come si è veduto nel Calcolo delle differenze finite, ma ancora una funzione determinata di y,

Fig $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ ec., e degli integrali $\int y dx$, $\int^2 y dx^2$ ec.

Per vedere come tutto questo possa avvenire, e come lungi dall' essere una semplice combinazione analitica, possa aver luogo nella Teoria delle curve, noi anderemo a considerare il seguente Problema.

„ Trovare una curva ZS tale che prese due ascisse AP, AP′
20 „ in modo di avere $AP' - AP = PP' = a$, queste corrispondano a due ordinate PM, P′M′, tali che $P'M' - PM = NM' = b$ „.

La soluzione del Problema è contenuta in quest' equazione $y_{x+a} = y_x + b$.

Ora MN, NM′ ponno essere dipendenti dal punto M, e perciò funzioni dell' x e dell' y che è incognito: essendo quelle linee dipendenti dal punto M, può questa dipendenza obbligare la tangente al punto M, il raggio di curvatura ec., la superficie ZMP ec., e per questo le due MN, NM′ esser funzioni di y, $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ ec., $\int y dx$ ec.

Può infine una certa proprietà che si richieda in un qualunque punto M, determinare un altro punto M′, ove debba sussistere un' altra proprietà, ed allora le due MN, NM′ saranno funzioni dipendenti da quei medesimi punti, e perciò funzioni delle ordinate di essi; ma tutto questo si renderà chiaro per mezzo di alcuni esempj.

Se si dimandasse per esempio, una curva che prese due ascisse AP, P′A differenti tra loro di una quantità PP′ eguale all' ordinata PM, le due ordinate P′M′, PM differissero tra loro di una quantità eguale all' ascissa x, l' equazione che risolve il Problema sarebbe $y_{x+y_x} = y_x + x$.

E da questa equazione si tratta di ricavare l' integrale dato per x.

Onde riuscire in questa ricerca, facciasi $x + y_x = z$, ed avremo $y_z = z$. Differenziamo per rapporto ad x, e sarà

$\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dz}\right) = \left(\frac{dz}{dx}\right)$, ovvero $\left(\frac{dz}{dx}\right)\left\{\left(\frac{dy}{dz}\right) - 1\right\} = 0$, equazione che si decompone in queste due

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0, \; \left(\frac{dy}{dz}\right) - 1 = 0.$$

La prima di queste equazioni dà $z = Cost.$, e quindi $y_x = C - x$.

La seconda ci riconduce a quella d'onde siamo partiti, e si ha $y_z = z + C'$, dalla quale si ricava subito $y_x = x + C'$ ponendovi x per z. In questa maniera troviamo queste due equazioni, le quali soddisfanno al Problema, cioè

$y_x = -x + C$, $y_x = x + C'$.

Queste due costanti C, C' non sono già arbitrarie, ma debbono determinarsi in maniera che quell' equazione del Problema sia soddisfatta.

Sostituiamo nell' equazione $y_{x+y_x} - y_x = x$ il valore di $y_x = -x + C$, ed avremo $y_C - C + x = x$, $y_C = C$; ma facendo $x = C$ nell' equazione $y_x = -x + C$, si ha $y_C = 0$; dunque $C = 0$, ed una delle due soluzioni del Problema è $y_x = -x$.

L' altro valore $y_x = x + C'$ ci dà

$y_{x+y_x} = y_{x+x+C'} = y_{2x+C'}$; dunque

$y_{2x+C'} - y_x = y_{2x+C'} - x - C' = x$, quindi

$y_{2x+C'} = 2x + C'$. Ora ponendo $2x + C'$ invece di x in $y_x = x + C'$, si ha $y_{2x+C'} = 2x + 2C'$; dunque sarà

$2x + 2C' = 2x + C'$, ed in conseguenza $C' = 0$.

Il Problema dunque avrà due soluzioni dateci dalle equazioni $y_x = \pm x$.

L' una e l' altra equazione ci esprime una linea retta che fa con l' asse un angolo di 45°. e che passa per l' origine delle ascisse.

§. 379. Se indichiamo per u una funzione qualunque data di $x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)$ ec., con lo stesso metodo del §. antecedente si integra l' equazione $y_u = u + b$: infatti differenziandola, si ha

$\left(\frac{du}{dx}\right)\left\{\left(\frac{dy}{du}\right) - 1\right\} = 0$, quindi $\left(\frac{du}{dx}\right) = 0$, ovvero $\left(\frac{dy}{du}\right) - 1 = 0$.

La seconda di queste equazioni ci rende la proposta $y_u = u + b$, nella quale la variabile u viene riguardata come in-

dipendente; se in quest' equazione si fa $u = x$, essa diviene $y_x = x + b$ che è l' equazione di una linea retta, e ci dà una soluzione del Problema.

L' altra equazione ci dà $u = c$ costante arbitraria.

Ora $u = F\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right) \text{ ec.}\right\}$; dunque

$F\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right) \text{ ec.}\right\} = C$, e l' integrale di quest' equazione ci darà il valore di y in x che soddisfarà ancora esso alla ricerca. Quest' ultima equazione ci rappresenterà in generale una curva.

Un tal valore di y conterrà un numero di costanti eguale al più alto differenziale contenuto in u, di modo che se questo più alto differenziale è $\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)$, l' integrale conterrà n costanti arbitrarie. Se anche vi computiamo la costante C, allora esse saranno $n + 1$ di numero, delle quali ne determineremo una in tal guisa che soddisfaccia all' equazione proposta, come abbiam veduto al §. antecedente.

L' equazione più generale

$y_u + ay_{2u} + by_{3u} + \ldots\ldots + py_{nu} = u + b'$, nella quale a, b ec., p, b' sono quantità costanti, si integra col metodo stesso, e si ha $u = Cost.$, ovvero

$F\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right) \text{ ec.}\right\} = Cost.$, da cui l' ordinario calcolo integrale dar ci debbe il valore di y.

La costante C poi sarà determinata per mezzo dell' equazione $y_C + ay_{2C} + \ldots\ldots + py_{nC} = C + b'$, ponendo invece di y_C, y_{2C} ec., i valori ricavati dall' integrale dell' equazione

$F\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right) \text{ ec.}\right\} = C$, col fare $x = C, = 2C, = 3C$ ec.

Non mi trattengo di più sopra questa classe d' equazioni.

Per farne tutta via un esempio proponiamoci questo Problema.

„ Trovare una curva tale che al punto, cui corrispondono „ le coordinate x, y, condotta una normale, ed al piede di essa „ alzata l' ordinata, questa eguagli sempre l' ascissa x aumentata „ della subnormale $y\left(\frac{dy}{dx}\right)$ „.

E' facile vedere che l'equazione, dalla quale dipende la soluzione del Problema, è

$$y_{x+y\left(\frac{dy}{dx}\right)} = x + y\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Avremo dunque da ciò che si è detto sopra, una prima soluzione dataci dall'equazione $y_x = x$.

L'altra soluzione ci sarà data dall'integrale di quest'equazione $x + y\left(\frac{dy}{dx}\right) = C$: essa dunque sarà $y^2 = a + 2Cx - x^2$ essendo C, a due costanti, delle quali una sola è arbitraria.

Per determinarla abbiamo l'equazione $\sqrt{(a + C^2)} = C$, dalla quale si ricava $a = 0$; dunque $y^2 = 2Cx - x^2$.

In due maniere dunque potremo soddisfare al Problema, o due saranno le curve che lo scioglieranno, cioè una linea retta che fa un angolo di 45° con l'asse delle ascisse, ed un circolo il cui raggio è C.

§. 380. Passiamo adesso a considerare le equazioni alle differenze-differenziali parziali, cioè quelle nelle quali la differenza finita si referisce ad una variabile, e la differenziale ad un'altra.

La formula generale di una siffatta equazione del primo ordine è di questa forma

$\left(\frac{dz_{x,y}}{dy}\right) = F(x, y, z_{x,y}, z_{x+1,y})$, nella quale il secondo membro è una funzione delle quantità poste tra le parentesi.

Per integrarla io osservo che (§. 34) si ha generalmente

$z_{x,y} = z_{x,0} + y\left(\frac{dz}{dy}\right) + \frac{y^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) + \frac{y^3}{2.3}\left(\frac{d^3z}{dy^3}\right) +$ ec. facendo nei coefficienti differenziali $y = 0$ a differenziazioni eseguite. Si tratta di trovare il valore di questi coefficienti nel detto caso.

Il valore di $z_{x,0}$ rimane indeterminato; dunque rappresentandolo per φx, l'equazione proposta ci darà quando $y = 0$,

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = F\left\{x, \varphi x, \varphi(x+1)\right\}.$$

Se ora differenziamo la proposta medesima per rapporto ad y, avremo $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$ datoci in funzione delle quantità

$x, y, z_{x,y}, z_{x+1,y}, \left(\frac{dz}{dy}\right), \left(\frac{dz_{x+1,y}}{dy}\right)$. In questa funzione sostituiscasi il valore di $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, e quello di $\left(\frac{dz_{x+1,y}}{dy}\right)$ ricavato dalla proposta coll'aumentare la x di un'unità, ed allora il valore di $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$ sarà espresso per $x, y, z_{x,y}, z_{x+1,y}$, e $z_{x+2,y}$; ove faremo $y = 0$, e lo avremo espresso per x, φx, $\varphi(x+1)$, $\varphi(x+2)$.

Nella guisa stessa troveremo $\left(\frac{d^3z}{dy^3}\right)$ dato per x, φx, $\varphi(x+1)$, $\varphi(x+2)$, $\varphi(x+3)$, quando $y = 0$, e così di seguito per gli altri coefficienti differenziali.

Sostituiti i valori di quei coefficienti nella serie, ci darà essa il valore di $z_{x,y}$ espresso per un numero infinito di termini.

Si vede dunque che l'integrale completo della proposta equazione è sempre ottenibile per mezzo delle serie: contiene esso di natura sua una funzione arbitraria $\varphi(x)$.

L'equazione più generale

$\left(\frac{dz}{dy}\right) = F\left\{x, y, z_{x,y}, z_{x+\alpha,y}\right\}$ si può trattare col medesimo metodo.

Il Calcolo Differenziale ci ha somministrata la serie generale per l'integrazione di quelle equazioni: un'altra serie pel medesimo oggetto si ha dal Calcolo delle differenze finite.

Infatti dal §. 23 di quel Calcolo si ricava questa serie

$z_{x,y} = z_{0,y} + x\Delta z_{x,y} + \frac{x(x-1)}{2}\Delta^2 z_{x,y} + \frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}\Delta^3 z_{x,y} +$ ec, nella quale le differenze finite si referiscono alla variabile x, e debbe farsi $x = 0$, dopo che si sono prese le differenze finite.

Ora ponendo nell'equazione proposta $z_{x,y} + \Delta z_{x,y}$ invece di $z_{x+1,y}$, e ricavando da essa il valore della differenza finita $\Delta z_{x,y}$, avremo

(a) . . . . . $\Delta z_{x,y} = f\left\{x, y, z, \left(\frac{dz}{dy}\right)\right\}$, ove il secondo membro rappresenta una funzione delle quantità contenute tra le parentesi. Questa equazione non determina il valore di $z_{x,y}$ quando

$x = 0$, e perciò sarà esso rappresentato da una quantità arbitraria φy, funzione di y; avremo dunque per tal caso

$$\Delta z_{x,y} = f\left\{y, \varphi y, \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\right\}.$$

Prendiamo la differenza finita dell' equazione (a) per rapporto ad x, e si avrà

$\Delta^2 z_{x,y} = f'\left\{x, y, z_{x,y}, \Delta z_{x,y}, \Delta\left(\frac{dz}{dy}\right)\right\}$, indicando per f' la nuova funzione che formar debbe il secondo membro nel prendere quella differenza: sostituendo in quest' ultima equazione il valore di $\Delta z_{x,y}$, che ci è dato dalla (a), e quello di $\Delta\left(\frac{dz}{dy}\right)$, ovvero $\left(\frac{d\Delta z}{dy}\right)$ somministratoci dal differenziale della medesima (a), per rapporto ad y, avremo

$\Delta^2 z_{x,y} = f'\left\{x, y, z, \left(\frac{dz}{dy}\right), \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right)\right\}$, ove facendo $x = 0$, si troverà il valore della differenza finita seconda

$\Delta^2 z_{x,y} = f\left\{y, \varphi y, \left(\frac{d\varphi}{dy}\right), \left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)\right\}$ per quello stesso caso $x = 0$.

Nella medesima guisa potremo trovare i valori delle differenze finite degli ordini superiori pel caso di $x = 0$, e si avranno allora i coefficienti di quella serie qui sopra riferita, la quale rappresentar ci può l' integrale completo della proposta.

Per farne un semplicissimo esempio propongasi l' equazione

$$z_{x+1,y} = \left(\frac{dz}{dy}\right).$$

L' integrale di questa equazione può trovarsi in due modi, o per mezzo della serie dataci dal Calcolo Differenziale, o di quella dataci dal Calcolo delle Differenze finite. Queste due diverse espressioni dell' integrale sono le seguenti

$$z_{x,y} = \varphi x + y\varphi(x+1) + \frac{y^2}{2}\varphi(x+2) + \frac{y^3}{2\cdot 3}\varphi(x+3) + \text{ec.}$$

$$z_{x,y} = Fy + x\left\{\left(\frac{dF}{dy}\right) - F\right\} + \frac{x(x+1)}{2}\left\{\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right) - 2\left(\frac{dF}{dy}\right) + F\right\} + \text{ec.}$$

d' ambe le quali è manifesta la legge: φx, Fy rappresentano due funzioni arbitrarie, l' una di x, l' altra di y.

Se facciamo $\varphi x = x$, la prima serie diviene

$z_{x,y} = x + y(x+1) + \frac{y^2}{2}(x+2) + \text{ec.} = xe^y + ye^y$, e sarà questo un integrale particolare della proposta. Da questo integrale si vede che fatto $x = 0$, si ha

$z_{0,y} = Fy = ye^y$. Ora ponendo nella seconda serie ye^y invece di Fy, si trova lo stesso integrale particolare $xe^y + ye^y$.

Il metodo spiegato può estendersi anche alle equazioni degli ordini superiori, ma egli si complica a tal segno, che non ci è di alcuna utilità.

§. 381. Le equazioni a differenze-differenziali parziali presentano qualche facilità per essere integrate, quando siano lineari. Allora la combinazione dei metodi che si adoprano nel Calcolo Sommatorio e nel Calcolo Integrale, conduce alla bramata integrazione. Io ne dirò qualche cosa, incominciando dalle più semplici equazioni per andare alle più composte.

Essendo z, ovvero $z_{x,y}$ una funzione delle due variabili x, y, propongasi l' equazione

$$z_{x+1,y} = Az_{x,y} + B\left(\frac{dz}{dy}\right).$$

Facciamo $z_{x,y} = C\alpha^x e^{\beta y}$, essendo C, α, β tre costanti indeterminate, ed e il numero il cui logaritmo iperbolico è l' unità.

Fatte le opportune sostituzioni nella proposta, e dividendo tutta l' equazione per ciò che vi è di comune nei due membri, la costante C svanisce, e tra α e β otteniamo quest' equazione $\alpha = A + B\beta$, con la quale determineremo una di quelle costanti per l' altra.

Determinando β per α, avremo $\beta = \frac{\alpha - A}{B}$, ovvero facendo $a = \frac{1}{B}$, $-\frac{A}{B} = b$, sarà $\beta = a\alpha + b$: dunque

$z_{x,y} = C\alpha^x e^{(a\alpha+b)y} = Ce^{by}.\alpha^x e^{a\alpha y}$, ove C è una costante arbitraria, ed α è un' indeterminata cui possiam dare che valore ci piace.

Sviluppiamo in sèrie ordinata per le potenze di α la quantità $e^{a\alpha y}$, ed avremo

$$z_{x,y} = Ce^{by}\left\{\alpha^x + ay\alpha^{x+1} + \frac{a^2y^2}{2}\alpha^{x+2} + \frac{a^3y^3}{2\cdot 3}.\alpha^{x+3} + \text{ec.}\right\},$$

ovvero (§ 87. Cal. diff. finite) sostituendo in vece della potenza dell'indeterminata α^x, una funzione arbitraria,

$$z_{x,y} = e^{by}\left\{\varphi x + ay\varphi(x+1) + \frac{a^2y^2}{2}\varphi(x+2) + \frac{a^3y^3}{2.3}\times \varphi(x+3) + \text{ec.}\right\}.$$

Questa serie va all'infinito.

Si può ancora ottenere l'integrale sotto una forma finita nella guisa seguente:

Essendo $z_{x,y} = \frac{e^{by}}{a^x}.Ca^x\alpha^x.e^{\alpha a y}$, se poniamo invece della quantità esponenziale $Ce^{\alpha a y}$ una funzione arbitraria fy di y, come ci insegna il §. citato, avremo da sostituire $\left(\frac{d^xfy}{dy^x}\right)$ invece di $Ca^x\alpha^x.e^{\alpha a y}$, e perciò sarà $z_{x,y} = e^{by}.a^{-x}.\left(\frac{d^xfy}{dy^x}\right)$, l'integrale completo della proposta, fy essendone la funzione arbitraria.

Abbiamo determinato β per α; se noi avessimo determinato α per β, avremmo avuto $z_{x,y} = C(A + B\beta)^x.e^{\beta y}$, e facendo lo sviluppo della potenza x^{esima} di quel binomio,

$$z_{x,y} = C\left\{A^x + xA^{x-1}B\beta + \frac{x(x-1)}{2}A^{x-2}B^2\beta^2 + \ldots + B^x\beta^x\right\}e^{\beta y}.$$

Se noi poniamo φy invece di $Ce^{\beta y}$, avremo

$$z_{x,y} = A^x\varphi y + xA^{x-1}B.\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) + \frac{x(x-1)}{2}A^{x-2}B^2.\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right) + \ldots + B^x\left(\frac{d^x\varphi}{dy^x}\right),$$

e questo sarà anche l'integrale completo della proposta.

Si avverta a proposito di questi integrali, che la variabile x debbe essere un numero intiero, giacchè se così non fosse, le dif-

ferenziali, cui quella variabile serve d'indice, sarebbero allora quantità immaginarie.

§. 382. Se i coefficienti A, B sono funzioni di x, noi supporremo $z_{x,y} = C\alpha_x.e^{\beta y}$, essendo α_x una funzione di x, e fatte le opportune sostituzioni e riduzioni si avrà $\alpha_{x+1} = A\alpha_x + B\alpha_x.\beta$, ovvero $\alpha_{x+1} = (A + B\beta)\alpha_x$ che è un'equazione a differenze finite del primo ordine, nei coefficienti della quale si contiene una costante indeterminata β.

Per l'integrazione di consimili equazioni si è parlato al §. 101 del Calcolo delle Diff. Finite, Tom. I. Si cercherà il valore della funzione α_x ordinato in serie secondo le potenze di β; e se $P\beta^r$ ne rappresenta un termine, avremo nell'integrale il termine corrispondente $CP\beta^re^{\beta y}$ che si trasformerà in $P\left(\frac{d^r\varphi y}{dy^r}\right)$, essendo φy una funzione arbitraria.

Quando i coefficienti fossero stati funzioni di y, avremmo supposto $z_{x,y} = C\alpha^x.u$, essendo u una funzione di y: fatte allora le debite sostituzioni e riduzioni, otterremo

$\alpha.u = Au + B\left(\frac{du}{dy}\right)$, ovvero $\left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{\alpha - A}{B}.u$, equazione differenziale del primo ordine, nei coefficienti della quale trovasi una costante indeterminata α. Al §. 143 del Cal. Int. Tom. II. abbiamo parlato di tali equazioni, così non mi vi trattengo ulteriormente.

Nei tre casi qui sopra considerati, ove cioè 1°. i coefficienti erano costanti; 2°. funzioni di x; 3°. funzioni di y, se l'equazione avesse di più contenuto una quantità $X + Y$, indicando per X una funzione data di x; e per Y un'altra funzione di y, ne avremmo facilmente ottenuto l'integrale. Per questo alle supposizioni nel valore di $z_{x,y}$, fatte qui sopra, bastava aggiungere $u_x + \omega_y$, essendo u_x, ω_y due funzioni incognite respettivamente di x e di y, e determinarle in modo che l'equazione proposta fosse soddisfatta: ci sarà dato allora u_x da un'equazione a differenze finite del primo ordine, ed ω_y da un'equazione differenziale parimente del primo ordine.

Se i coefficienti A, B fossero nel tempo stesso funzioni di x e di y, non sapremmo come integrare l' equazione. Potrebbero invero assegnarsi certe forme particolari ad essi, le quali ne permettessero l' integrazione, ma tutto ciò non facendo molto progredire la Scienza, è da noi interamente abbandonato.

§. 383. Prendiamo a considerare l' equazione

$$z_{x+1,y} = A z_{x,y} + B\left(\frac{dz_{x,y}}{dy}\right) + C\left(\frac{dz_{x+1,y}}{dy}\right)$$ essendo A, B, C quantità costanti.

Se poniamo come nel §. antecedente $z_{x,y} = \alpha^x . e^{\beta y}$, e facciamo le opportune sostituzioni e riduzioni, avremo tra α e β quest' equazione $\alpha = A + B\beta + C\alpha\beta$, la quale servirà a determinarci un' indeterminata per l' altra.

Determinando α per β per aver maggior semplicità nell' esponenziale indeterminato, avremo

$\alpha = \frac{A + B\beta}{1 - C\beta}$, quindi $\alpha^x = \left(\frac{A + B\beta}{1 - C\beta}\right)^x$, e perciò

$$z_{x,y} = \left(\frac{A + B\beta}{1 - C\beta}\right)^x e^{\beta y}.$$

Se il coefficiente di $e^{\beta y}$ lo sviluppiamo in una serie ordinata per le potenze di β, sarà essa composta di un numero finito di termini; sia uno di questi termini $R\beta^r$, e ad esso corrisponderà il termine $R\beta^r e^{\beta y}$, il quale si cangierà in $R\left(\frac{d^r\varphi}{dy^r}\right)$, ovvero $R\int^r dy^r . \varphi$ quando r sia negativo, indicando per φ una funzione arbitraria di y. Si avrà in questa guisa l' integrale della proposta espresso in serie infinita.

Onde averlo in termini finiti, facciamo $C\beta - 1 = C\gamma$, essendo γ un' altra indeterminata, e si avrà $\beta = \gamma + \frac{1}{C}$ ed

$$\alpha = \frac{A + B\gamma + \frac{B}{C}}{-C\gamma}.$$

Per maggior semplicità di scrittura mettiamo a invece di $\frac{A + \frac{B}{C}}{-C}$, e b invece di $\frac{B}{-C}$; avremo allora

$\alpha = \frac{a}{\gamma} + b$, e quindi

$z_{x,y} = \alpha^x e^{\beta y} = \left(\frac{a}{\gamma} + b\right)^x . e^{(\gamma + c)y}$, posto c per $\frac{1}{C}$.

Ora il canone Neutoniano ci dà

$$z_{x,y} = \left\{\frac{a^x}{\gamma^x} + x\,\frac{a^{x-1}}{\gamma^{x-1}} . b + \frac{x(x-1)}{2} . \frac{a^{x-2}}{\gamma^{x-2}} . b^2 + \ldots\ldots + b^x\right\} e^{\gamma y} . e^{cy},$$ e ponendo una funzione arbitraria φy ovvero φ di y invece di $e^{\gamma y}$, avremo

$$z_{x,y} = e^{cy}\left\{a^x \int^x dy^x . \varphi + x a^{x-1} . b \int^{x-1} dy^{x-1} . \varphi + \frac{x(x-1)}{2} \times a^{x-2} . b^2 \int^{x-2} dy^{x-2} . \varphi + \ldots\ldots + b^x \varphi\right\},$$ che sarà l' integrale della proposta, composto di un numero finito di termini.

Quando l' equazione $\alpha = A + B\beta + C\alpha\beta$ fosse decomponibile in due fattori del primo grado, potremmo aver l' integrale sotto una forma assai più semplice. Infatti siano i due fattori $\alpha - m$, $\beta - n$, di modo che $(\alpha - m)(\beta - n) = \alpha - A - B\beta - C\alpha\beta = 0$; allora avremo $\alpha = m$, ovvero $\beta = n$ per soddisfare a quell' equazione: sarà in questo caso

$z_{x,y} = m^x e^{\beta y}$, ovvero $z_{x,y} = \alpha^x . e^{ny}$. Se poniamo φy invece di $e^{\beta y}$, e Fx invece di α^x, otterremo questi due valori per $z_{x,y}$, $z_{x,y} = m^x \varphi y$, $z_{x,y} = e^{ny} . Fx$, e la somma di essi soddisfarà anche alla suddetta equazione, giacchè questa è lineare; sarà pertanto

$$z_{x,y} = m^x \varphi y + e^{ny} Fx.$$

Se i coefficienti fossero funzioni di una delle variabili, se ne cercherebbe l' integrale come abbiamo indicato al §. antecedente.

In generale senza inoltrarsi nelle equazioni degli ordini superiori, faremo osservare, che per essere integrate richiedono i medesimi artifizj delle equazioni a differenziali parziali, e di quelle alle differenze finite e parziali.

Imperocchè siavi per esempio in un' equazione lineare a coefficienti costanti il termine

$M\left(\frac{d^m z_{x+n,y}}{dy^m}\right)$. Supponendo al solito $z_{x,y} = \alpha^x e^{\beta y}$, avremo un'equazione tra α e β, nella quale vi sarà il termine corrispondente $M\alpha^n \beta^m$. Se quest'equazione algebraica sarà decomponibile in fattori di primo grado, ognuno di essi ci darà un valore di α espresso per β, quindi un valore per $z_{x,y}$. Sia uno di tali fattori $\alpha - b\beta - a = 0$, ed avremo $\alpha = a + b\beta$, ed in conseguenza

$$z_{x,y} = (a + b\beta)^x e^{\beta y}, \text{ ovvero}$$

$$z_{x,y} = (a^x + xa^{x-1} b\beta + \ldots\ldots + b^x \beta^x) e^{\beta y}, \text{ ed in conseguenza}$$

$$z_{x,y} = a^x \varphi y + xa^{x-1} b\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) + \ldots\ldots + b^x \left(\frac{d^x \varphi}{dy^x}\right).$$

Ogni fattore ci darà una di queste espressioni per $z_{x,y}$ contenente una funzione arbitraria, e la somma di tutte sarà l'integrale completo.

Quando l'equazione algebraica non sarà decomponibile in fattori di primo ordine, l'integrale in generale non potrà aversi espresso che in serie infinite; hanno qui luogo tutti gli artifizj da noi adoprati per integrare le equazioni a differenze finite e parziali, e a differenziali parziali.

APPENDICE II.

Sopra gl' Infinitesimi.

§. 384. Il Calcolo Differenziale si è chiamato altra volta Calcolo degli Infinitesimi, perchè i differenziali delle quantità avevano il nome di quantità infinitesime.

Con tal nome si voleva indicare una quantità minore di ogni assegnabile, vale a dire così piccola, che non poteva immaginarsene una minore di lei. Si stabiliva poi che una quantità infinitesima potea impunemente trascurarsi in confronto di una quantità finita e determinata. Viceversa si chiamava quantità infinita o infinitamente grande quella della quale immaginarsene non poteva una maggiore, ed a riguardo di una quantità infinita si trascurava qualunque quantità finita e determinata quantunque grandissima, di modo che delle tre quantità infinitesima, finita, ed infinita se ne faceva una proporzione continua.

Stabilita l'esistenza delle quantità infinitesime, ed infinite, si è facilmente veduto che l'immaginazione poteva spingersi a creare diverse classi in queste grandezze infinitamente grandi ed infinitamente piccole; si sono fatti quindi gl'infinitesimi ed infiniti di diversi ordini; chiamando infinitesimo di secondo ordine una quantità tanto minore di un infinitesimo di primo, quanto questo di una quantità finita; e quantità infinita di secondo ordine una quantità tanto al di sopra della quantità infinita di primo, quanto questa lo era di una quantità finita; perciò gl'infinitesimi di secondo ordine si trascuravano in confronto di quei di primo, come gl'infiniti di primo si sprezzavano a riguardo di quei di secondo. Egualmente s'immaginavano gl'infinitesimi e gl'infiniti degli ordini superiori, e loro si attribuivano le stesse proprietà. Per questo simbolo ∞ si rappresentava l'infinito, e per $\frac{1}{\infty}$ l'infinitesimo: ciò stabilito, indicando per l'unità una quantità finita, si ha

1 quantità finita	1 quantità finita
∞ quantità infinita di 1°. ordine	$\frac{1}{\infty}$ quantità infinitesima di 1°. ordine
∞^2 quantità infinita di 2°. ordine	$\frac{1}{\infty^2}$ quantità infinitesima di 2°. ordine
∞^3 quantità infinita di 3°. ordine	$\frac{1}{\infty^3}$ quantità infinitesima di 3°. ordine
ec.	ec.

§. 385. Ora se rappresentiamo per $\varphi(x)$ una funzione y di x, si ha (§. 1, 2)
$y + \Delta y = \varphi(x + \omega) = \varphi(x) + p\omega + q\omega^2 + r\omega^3 +$ ec., quindi $\Delta y = p\omega + q\omega^2 + r\omega^3 +$ ec., indicando per ω un aumento indeterminato della x: supponiamo dunque che questo aumento sia una quantità infinitesima, allora i termini ove si trovano le potenze superiori alla prima dovranno svanire in confronto di essa, ed avremo $\Delta y = p\omega$. Questa differenza finita sarà in tal supposizione una quantità infinitesima.

Indichiamo per dx l' aumento infinitesimo ω, che si chiama il differenziale di x, e cangiamo il Δ in d, onde significare il cambiamento che ha sofferto quella differenza finita in virtù di tale supposizione; sarà allora $dy = pdx$.

A siffatta quantità infinitesima pdx si dà il nome di differenziale primo della $\varphi(x)$; la quantità p che è il coefficiente della prima potenza nello sviluppo di $\varphi(x + \omega)$, è $= \frac{dy}{dx}$, cioè eguale al differenziale di y diviso pel differenziale di x. Questo coefficiente p si rappresenta simbolicamente per $(\frac{dy}{dx})$, ovvero $(\frac{d\varphi}{dx})$ ponendovi le parentesi per indicare al solito che si differenzia relativamente ad x: si ha in questa guisa $dy = (\frac{d\varphi}{dx})dx$.

Dunque in sostanza si fa la stessa operazione per avere il differenziale di una funzione di x sia che si riguardi il dx come un aumento indeterminato e finito della x, sia come un aumento infinitesimo: nelle due ipotesi si prende egualmente il coefficiente p, e si moltiplica per dx.

Il differenziale del secondo ordine si ottiene prendendo il differenziale del differenziale del primo ordine pdx e moltiplicandolo per dx, avvertendo però di non fare alcuna operazione sopra

il dx, perchè si considera come costante, ma sopra del p soltanto: è allora
$(\frac{dp}{dx})dx \,.\, dx = (\frac{d^2\varphi}{dx^2})dx^2$ questo differenziale secondo.

Lo stesso si dica dei differenziali degli ordini superiori.

Per ciò che riguarda i differenziali delle funzioni a più variabili, siano totali, siano parziali, considerando gli aumenti delle variabili come quantità infinitesime, e facendo svanire i termini ove queste quantità compongono una certa dimensione, a riguardo di quei, ove esse compongono una dimensione minore, si ottengono per esprimere i differenziali parziali e totali, le stesse forme trovate nel Cap. I, e si seguono le stesse pratiche per fare i calcoli.

Per gli integrali delle funzioni non importa far parola, poichè di una formula differenziale Pdx, comunque si riguardi quel dx, conviene nella stessa guisa cercare l' integrale, vale a dire trovare quella funzione $\varphi(x)$ di x, tale che sviluppando in serie ordinata per le potenze di dx la funzione $\varphi(x + dx)$, abbiansi per primi due termini $\varphi x + Pdx$.

Da tutto questo concluderemo che quanto abbiamo detto per differenziare ed integrare le funzioni, ha luogo sotto qualunque aspetto si riguardino i differenziali, vale a dire, o come quantità finite, o come quantità infinitesime.

§. 386. Facilmente si vede che può farsi lo stesso discorso per la differenziazione ed integrazione delle equazioni.

In una equazione $F(x, y) = 0$ facendo aumentare la x della quantità ω, come si è detto (§. 20), e sviluppando il primo membro in una serie ordinata per le potenze di ω, si ha questa serie $F(x, y) + P\omega + Q\omega^2 +$ ec. $= 0$.

Ora abbiamo osservato al luogo citato che debbe aversi necessariamente $P = 0$, $Q = 0$ ec., e $P = 0$ l' abbiamo chiamata la differenziale prima di $F(x, y) = 0$.

Trascurando le potenze di ω superiori alla prima, si giunge egualmente all' equazione $P\omega = 0$, ovvero $P = 0$; così otteniamo lo stesso risultato in un modo e nell' altro. Mentre però nel secondo caso non resta contento il nostro spirito nello sprezzare alcuni termini dell' equazione senza che questa cessi di sussistere; non vi è alcuno scrupolo nel primo, ove si dimostra che quegli stessi termini appunto debbono annullarsi da se medesimi per natura dei loro coefficienti.

Lo stesso si dica per le equazioni ai differenziali parziali e totali; come pure per quelle degli ordini superiori.

Quindi è che il Calcolo Differenziale considerato in se medesimo, come artifizio di analisi, nessuna modificazione risente dallo stabilirne i principj in un modo o nell'altro.

Per ciò poi che riguarda le applicazioni io osservo che tutte quelle applicazioni del Calcolo Differenziale, le quali si ottengono per mezzo della semplice differenziazione o integrazione delle equazioni, vale a dire per mezzo delle equazioni sussidiarie, che la differenziazione o integrazione ci somministra, nulla risentono della diversa maniera con la quale sono stabiliti i principj di questo calcolo, e sono tutte rigorose e legittime in ogni caso.

Esse si appoggiano al Teorema „ Che sussistendo un' equazione tra più variabili, sussistono anche le di lei equazioni differenziali „ il quale è vero, per quanto il ragionamento, che si fa con gl' infinitesimi, non ci dia dritto di concluderlo.

Le applicazioni alle cose di pura analisi sono generalmente parlando applicazioni di tal fatta.

§. 387. Veniamo a parlare delle applicazioni del Calcolo Differenziale alla Geometria, alla Meccanica, ed a qualunque altro oggetto di Filosofia Naturale.

Sia x una variabile, della quale siano composte le funzioni Ψ, ϕ; una di queste funzioni per esempio Ψ, essendo data, si cerchi la ϕ. Supponiamo che x aumenti di ω, e le due porzioni di quelle funzioni le quali si riferiscono all' aumento ω, saranno

$$\Delta\Psi = \left(\frac{d\Psi}{dx}\right)\omega + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2\Psi}{dx^2}\right) + \text{ec.}$$

$$\Delta\phi = \left(\frac{d\phi}{dx}\right)\omega + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right) + \text{ec.}$$

Supponiamo che le condizioni del Problema stabiliscano certa relazione tra $\Delta\phi$ e $\Delta\Psi$, onde abbiasi tra esse un' equazione per esempio $F(\Delta\phi, \Delta\Psi) = 0$, nella quale il primo membro sia una funzione intiera delle quantità sotto le parentesi.

E' manifesto che sostituendo in quest' equazione i valori di $\Delta\phi$, $\Delta\Psi$, ed ordinandone il primo membro per le potenze di ω,

avremo un' altra equazione di questa forma

$P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + \text{ec.} = 0$, la quale secondo i principj d' Algebra Cartesiana ci darà

$P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ ec.

Ora il termine $P\omega$ non può venire che dai primi termini $\left(\frac{d\phi}{dx}\right)\omega$, $\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)\omega$ delle serie che compongono i valori di $\Delta\phi$, e $\Delta\Psi$; il termine $Q\omega^2$ non può venire che dai primi e dai secondi termini di quelle serie, e così di seguito; dunque se considerando ω come un aumento infinitamente piccolo, si trascurano le potenze superiori di esso relativamente all' inferiori, si fa cioè $\Delta\phi = \left(\frac{d\phi}{dx}\right)\omega$,

$$\Delta\Psi = \left(\frac{d\Psi}{dx}\right)\omega$$

si giugne anche con questa inesatta supposizione all' equazione $P\omega = 0$, giacchè essa si ricaverà dall' altra

$F\left\{\left(\frac{d\phi}{dx}\right)\omega, \left(\frac{d\Psi}{dx}\right)\omega\right\} = 0$, trascurando nello sviluppo di F le potenze di ω superiori alla prima.

Se la quantità P fosse identicamente nulla, allora converrebbe tener conto delle potenze seconde di ω, e si avrebbe l' equazione $Q\omega^2 = 0$, la quale ci verrebbe dall' altra

$F\left\{\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)\omega + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2\Psi}{dx^2}\right), \left(\frac{d\phi}{dx}\right)\omega + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)\right\} = 0$ trascurando nello sviluppo le potenze di ω superiori alla seconda. L' equazione $P\omega = 0$ è un' equazione differenziale del primo ordine; e la $Q\omega^2 = 0$ lo è del secondo: l' aumento infinitesimo ω tiene il luogo di dx.

Quando ω è una quantità infinitesima, anche le porzioni $\Delta\phi$, $\Delta\Psi$, sono quantità infinitesime, e come abbiamo detto sopra, si chiamano differenziali, scrivendole per $d\phi$, $d\Psi$.

Si vede pertanto che la supposizione delle porzioni $\Delta\phi$, $\Delta\Psi$ come quantità infinitamente piccole, per cui esse si eguagliano ai soli primi termini $\left(\frac{d\phi}{dx}\right)dx$, $\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)dx$, se in tutto rigore di analisi è falsa, conduce però ad un' equazione vera $Pdx = 0$, imperocchè quei termini che in virtù di essa trascuriamo, non entrano nè ponno entrare in quella equazione, anche che trascurati non fossero, essendo essa da loro indipendente.

Così un tal supposto nella grandezza di ω, per quanto inesatto, ci è però di vantaggio, diminuendo infinitamente la pena del calcolo; vuole però essere adoprato con cautela, onde non indurci in errore nel trascurare alcuni termini, il che più volte è accaduto a valenti Geometri.

§. 388. Nè questo è il solo vantaggio che si ricava dall' artifizio degli infinitesimi. Supponendo infinitesimo l' aumento della x, e quindi infinitesimo anche il differenziale $d\phi$, le circostanze particolari di un Problema permettono talvolta eguagliare $d\phi$ alla differenziale di una funzione, di cui si conosce la natura, o a darli taluna proprietà che ei non avrebbe se esso si considerasse una quantità finita. Si ha allora un mezzo di conoscere il primo termine della serie del valore di $\Delta\phi$, quindi per mezzo del Calcolo Integrale il valore di ϕ. In sostanza altro non si fa in questo caso che paragonando la serie

$(\frac{d\phi}{dx})\omega + (\frac{d^2\phi}{dx^2})\frac{\omega^2}{2} +$ ec. con un' altra quantità $M\omega$, eguagliare

$(\frac{d\phi}{dx})$ alla quantità M. Conviene perciò che in tal caso la supposizione di annullare ω^2 ec. in confronto di ω, o di supporre ω infinitesimo, coincida con un' altra supposizione di far cioè che allora si eguaglino le quantità $M\omega$ e $\Delta\phi$.

Ma ripetiamo questo ragionamento sopra un esempio. Se indichiamo per $\phi(x) = y$ l' ordinata di una curva corrispondente all' ascissa x, quella corrispondente all' ascissa $x + \omega$ sarà

$y + (\frac{dy}{dx})\omega + (\frac{d^2y}{dx^2})\frac{\omega^2}{2} +$ ec.

Ora supponiamo che ω sia una quantità infinitesima, e quell' ordinata sarà $y + (\frac{dy}{dx})\omega$. In questa supposizione non avvi alcun dubbio che noi abbiam commesso un errore supponendo che la seconda ordinata comunque vicinissima alla prima, sia $y + \omega(\frac{dy}{dx})$; facciamo un' altra supposizione, che cioè l' arco di curva corris-

pondente ad ω, si confonda con la tangente di essa, vale a dire che la seconda ordinata termini alla tangente, ed allora questa seconda supposizione viene a correggere la prima, e non avvi più errore alcuno nel calcolo.

Coerentemente a queste due simultanee supposizioni, la suttangente sta ad $y :: \omega : \omega(\frac{dy}{dx}) :: dx : dy$; dunque avremo

$suttang. = y : (\frac{dy}{dx})$.

Che la seconda supposizione rimedi all' errore cagionato dalla prima, si dimostra facilmente.

L' equazione della tangente (§. 78) ad una curva nel punto corrispondente all' ascissa x, è

$q = y - x(\frac{dy}{dx}) + p(\frac{dy}{dx})$, ove p, q sono le coordinate della tangente.

Eguagliamo l' ascissa p ad $x + \omega$, ed avremo allora

$q = y - x(\frac{dy}{dx}) + x(\frac{dy}{dx}) + \omega(\frac{dy}{dx})$, quindi

$q = y + \omega(\frac{dy}{dx})$; ma nel punto del contatto $q = y$; dunque indicando per (Δy) la differenza delle due ordinate successive nella tangente, corrispondenti alle due ascisse x, $x + \omega$, sarà

$(\Delta y) = \omega(\frac{dy}{dx})$.

Questa stessa differenza considerata nella curva, è

$\Delta y = \omega(\frac{dy}{dx}) + \frac{\omega^2}{2}(\frac{d^2y}{dx^2}) +$ ec.

Ove si vede che il primo termine della differenza nell' ordinata della curva, è effettivamente eguale alla differenza nell' ordinata della tangente; e perciò indicando con dx l' aumento ω e con dy il differenziale di y, si avrà $suttang : y :: dx : dy$, risultato a cui eramo pervenuti con le due false supposizioni: la prima di trascurare le potenze ω^2, ω^3 ec. in confronto di ω, e la seconda di supporre che l' arco di curva si confonda con la tangente.

Nella stessa maniera, supponiamo che $\phi(x)$ indichi l' arco di curva corrispondente all' ascissa x: se x cresce della quantità dx, avremo la porzione dell'arco $\Delta\phi$ corrispondente all'aumento dx, così espressa

$$\Delta\phi = \left(\frac{d\phi}{dx}\right) dx + \left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)\frac{dx^2}{2} + \text{ec.}$$

Facciamo una prima supposizione: posto dx infinitesimo spreziamone le potenze superiori alla prima, ed avremo l'archetto infinitesimo

$$\Delta\phi = \left(\frac{d\phi}{dx}\right) dx.$$

Con questa supposizione in vero commesso abbiamo un errore, trascurando quel numero infinito dei termini che vengono dopo il primo.

Facciamo una seconda supposizione che cioè l'archetto infinitesimo si combaci e confonda con la tangente, ed allora questa correggerà l'errore prodotto dalla prima.

Questa seconda supposizione ci dà

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right) dx = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{\left(dx^2 + dx^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}, \text{ quindi}$$

$$\phi = \int dx \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}.$$

Che queste due supposizioni correggano reciprocamente gli errori che producono, si vede chiaramente, giacchè congiuntamente adoprate, esse ci danno lo stesso risultato, il quale con metodo rigoroso trovato abbiamo (§. 81.): ivi infatti abbiam detto che la differenziale di un arco ϕ è eguale a $dx\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$.

Ma quella compensazione degli errori sarebbe difficile a dimostrarsi *a priori*, e quindi ci siamo contentati di fare osservare che il risultato dipendente da quelle supposizioni, combina esattamente con quello trovato al citato §.

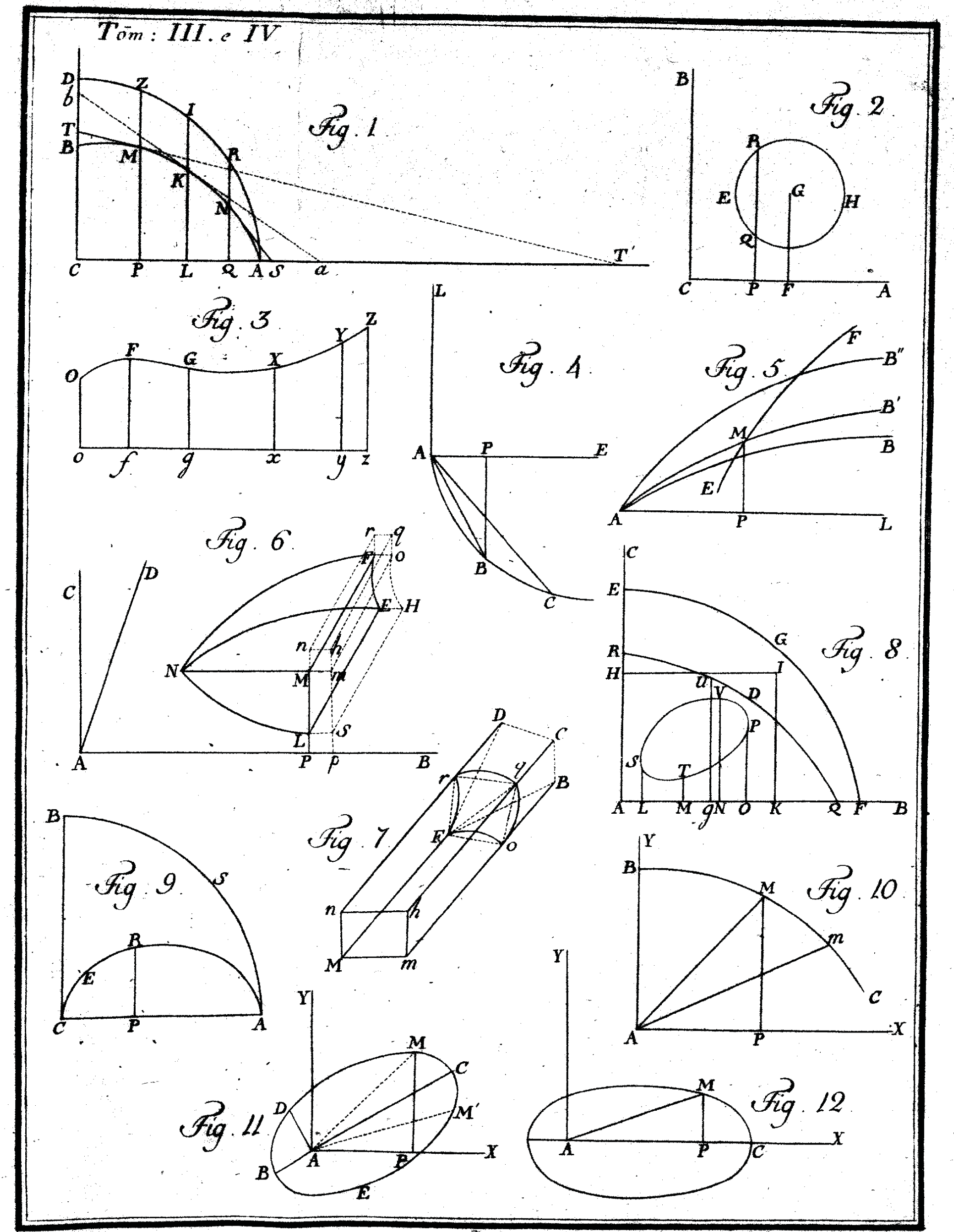
Generalmente parlando con la supposizione di ω, ovvero dx infinitesimo, ne va sempre unita un'altra, la quale secondo la natura del Problema, dando certe proprietà alla porzione della quantità $d\phi$, corregge l'errore prodotto dalla prima.

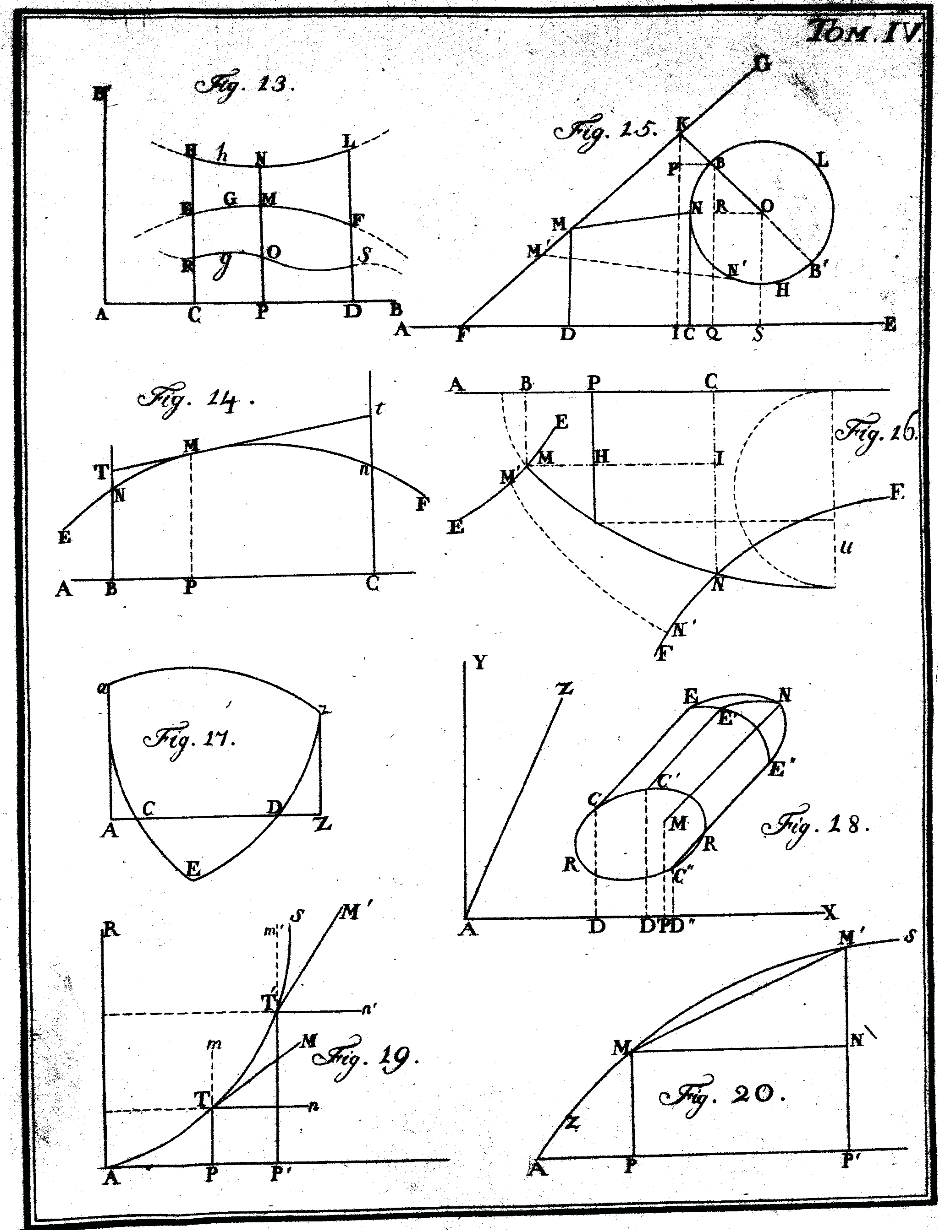
Non sarebbe facile la dimostrazione generale di questo Teorema; e nei diversi casi particolari per instituirla, onde si accontenti il nostro spirito, non avvi altro ripiego che il fare uso dei

ragionamenti e principj rigorosi adoprati nel corso di quest'Opera; quindi è che per rendere rigoroso il metodo degli infinitesimi converrebbe chiamare in sussidio quegli stessi principj che bastano da se soli alla soluzione dei Problemi.

E di qui concluderemo che il maneggio degli infinitesimi nella soluzione dei Problemi, porta a risultati esatti non perchè non si faccia un errore supponendo annullarsi le potenze superiori del dx in confronto delle inferiori, ma perchè insieme con quella supposizione se ne fa sempre un'altra che distrugge l'errore fatto dalla prima.

Fine del Tomo Quarto.


Tom: III. e IV
Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 12


Tom. IV.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.