CORSO

DI

MATEMATICA SUBLIME

TOMO III.

CALCOLO INTEGRALE E SUE APPLICAZIONI

DEL DOTT. VINCENZIO BRUNACCI

CAV. DELL' ORDINE DELLA CORONA FERREA

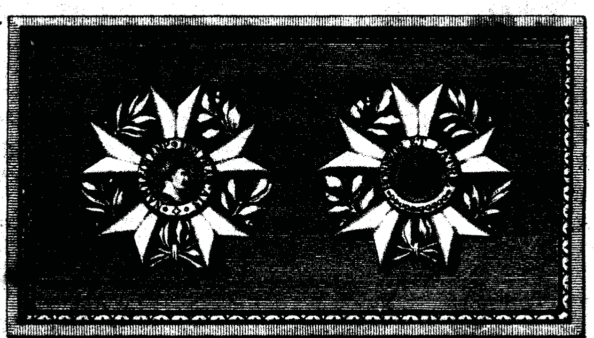
M. DELLA LEGIONE D' ONORE DI FRANCIA

DELL' IST. NAZ. C. DELL' ACCAD. DI TURINO EC.

ISPETTORE GEN. D' ACQUE STRADE E PORTI DEL REGNO

P. P. DI MAT. SUB. NELLA R. UNIVERSITA'

DI PAVIA.



FIRENZE 1807.

PRESSO PIETRO ALLEGRINI

CON APPROVAZIONE.

AVVERTIMENTO

DELL' AUTORE

Siccome il terzo ed insieme ultimo Tomo che terminar doveva il mio Corso, era di una soverchia mole, così ho giudicato miglior partito dividerlo in due.

Il Tomo terzo dunque, che or viene alla luce, è il penultimo e con un quarto, il quale già trovasi sotto il Torchio, finirà il Trattato.

In questo Tomo si contengono più ampie Teorie sopra l' integrazione delle funzioni differenziali, e differenziali parziali, e la dottrina degl' integrali delle equazioni di qualunque classe, estesa quanto permette lo stato attuale dell' Analisi.

Sono nell' ultimo le dottrine sopra le soluzioni particolari; sopra i contatti delle curve a doppia curvatura e delle superficie sopra le superficie generate dal movimento di altre: sonovi egualmente ulteriori applicazioni alla Geometria ed alla Meccanica, e la general Teoria dei Massimi e dei Minimi delle formule differenziali ed integrali, conosciuta sotto il nome di CALCOLO DELLE VARIAZIONI; con due Appendici poi, una sopra le differenze-differenziali, e l' altra sopra gl' infinitesimi, termina il Tomo.

Alla fine poi di quel Tomo porremo la nota degli Errori tipografici occorsi in tutta l' Opera.

I N D I C E

DELLE COSE CONTENUTE IN QUESTO TOMO III.

CAP. V.

CONTINUAZIONE DELLE DOTTRINE ESPOSTE NEL CAP. I.

Sopra l' Integrazione delle Funzioni.

§. 148. Quanto abbiamo detto nel Cap. I. sopra l'Integrazione delle funzioni, non formando una Teorìa che possa dirsi in certo modo completa per lo stato attuale della Scienza, ho creduto prezzo d'opera aggiungere le cose che seguono.

Sia $\frac{d\varphi(f+g\cos\varphi)}{(a+b\cos\varphi)^{n+1}}$ la formula differenziale della quale si voglia l'integrale. Supponiamo per questo

$\int\frac{d\varphi(f+g\cos\varphi)}{(a+b\cos\varphi)^{n+1}} = \frac{A\,sen\,\varphi}{(a+b\cos\varphi)^{n}} + \int\frac{d\varphi(B+C\cos\varphi)}{(a+b\cos\varphi)^{n}}$, indicando per A, B, C quantità costanti da determinarsi: ora ad oggetto di ottenerne i respettivi valori, prendiamo i differenziali dell'uno e dell'altro membro di questa supposta equazione, ed avremo, togliendo i denominatori comuni,

$f+g\cos\varphi = A\cos\varphi(a+b\cos\varphi)+nAb\,sen\,\varphi^2+(B+C\cos\varphi)(a+b\cos\varphi)$,

la quale a causa di $sen\,\varphi^2 = 1-\cos\varphi^2$ prende questa forma

$\{-f+nAb+Ba\}+\{Ca+Bb+Aa-g\}\cos\varphi+\{Ab-nAb+Cb\}\cos\varphi^2 = 0$, da cui si ricavano l'equazioni $Ba+nAb-f=0$, $Ca+Bb+Aa-g=0$, $Ab-nAb+Cb=0$, e quindi

$$A = \frac{ag-bf}{n(aa-bb)},\quad B=\frac{af+bg}{aa-bb},\quad C=\frac{(n-1)(ag-bf)}{n(aa-bb)}.$$

Avremo in questa guisa ridotto l'integrale della proposta formula a quella di una formula ad essa simile, nella quale però il denominatore è elevato ad una potenza minore di una unità. Così supponendo indicato per n un numero intiero e positivo, ed andando di riduzione in riduzione, giungeremo infine alla formula integrale di questa forma $\int\frac{d\varphi(h+k\cos\varphi)}{a+b\cos\varphi}$, dall'integrazione della quale dipenderà quella della proposta medesima.

§. 149. Per averne l'integrale osservo, che

$\frac{d\varphi.\cos\varphi}{a+b\cos\varphi} = \frac{d\varphi}{b} - \frac{ad\varphi}{b(a+b\cos\varphi)}$; dunque

$\int\frac{d\varphi(h+k\cos\varphi)}{a+b\cos\varphi} = \int\frac{hd\varphi}{a+b\cos\varphi} + \frac{\varphi k}{b} - \int\frac{akd\varphi}{b(a+b\cos\varphi)} = \frac{k\varphi}{b} + \frac{hb-ak}{b}\int\frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi}$, e così l'integrazione è ridotta ancora a quella d'una formula più semplice $\int\frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi}$.

Facciamo $tang\,\frac{1}{2}\varphi = t$, ed avremo $d\varphi = \frac{2dt}{1+t^2}$; ma questa sostituzione ci dà $sen\,\frac{1}{2}\varphi = \frac{t}{\sqrt{(1+tt)}}$ e $\cos\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{\sqrt{(1+tt)}}$, da cui si ricava $\cos\varphi = \frac{1-tt}{1+tt}$; dunque $a+b\cos\varphi = \frac{a+b+(a-b)tt}{1+tt}$, e quindi $\int\frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi} = \int\frac{2dt}{a+b+(a-b)tt}$.

L'integrale di questa formula (101) è un angolo o un logaritmo, secondo che il coefficiente di t^2 è positivo o negativo.

Nel primo caso si ha

$\int\frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi} = \frac{2}{\sqrt{(aa-bb)}}\,Arc.\,tang.\,t\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$, essendo $t = tang\,\frac{1}{2}\varphi$.

Quest'integrale svanisce quando $\varphi = 0$. Volendo poi quest'integrale esteso dal termine $\varphi = 0$ sino a $\varphi = 180^\circ$, ovvero $t = \infty$, si avrà

$\int \frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi} = \frac{2}{\sqrt{(aa-bb)}} \cdot \frac{\pi}{2}$, essendo π la semiperiferia per il raggio 1.

§. 150. Si può ancora ottenere l' integrale di $\frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi}$ espresso in serie ordinata per i coseni degli angoli multipli; infatti essendo

$$\frac{1}{1+n\cos\varphi} = 1 - n\cos\varphi + n^2\cos\varphi^2 - n^3\cos\varphi^3 + n^4\cos\varphi^4 - \text{ec.}$$

Si cangino le potenze del coseno in coseni degli angoli multipli per mezzo delle formule di trasformazione, date per questo oggetto nell' introduzione al Calcolo Sublime, ed avremo per le potenze impari

$$\cos\varphi = \cos\varphi$$

$$\cos\varphi^3 = \frac{3}{4}\cos\varphi + \frac{1}{4}\cos 3\varphi$$

$$\cos\varphi^5 = \frac{10}{16}\cos\varphi + \frac{5}{16}\cos 3\varphi + \frac{1}{16}\cos 5\varphi$$

$$\cos\varphi^7 = \frac{35}{64}\cos\varphi + \frac{21}{64}\cos 3\varphi + \frac{7}{64}\cos 5\varphi + \frac{1}{64}\cos 7\varphi$$

$$\cos\varphi^9 = \frac{126}{256}\cos\varphi + \frac{84}{256}\cos 3\varphi + \frac{36}{256}\cos 5\varphi + \frac{9}{256}\cos 7\varphi + \ldots \frac{1}{256}\cos 9\varphi,$$

ove bisogna avvertire che facendo generalmente

$$\cos\varphi^{2m-1} = A\cos\varphi + B\cos 3\varphi + C\cos 5\varphi + D\cos 7\varphi + E\cos 9\varphi + \text{ec.}, \text{ si ha}$$

$$A = 2\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots\ldots(2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots\ldots 2m} = \frac{2}{2^{2m-1}}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{14}{4}\cdot\ldots\ldots\frac{4m-2}{m}$$

$$B = \frac{m-1}{m+1}A;\ C = \frac{m-2}{m+2}B;\ D = \frac{m-3}{m+3}C;\ E = \frac{m-4}{m+4}D \text{ ec.};$$

e per le potenze pari,

$$\cos\varphi^0 = 1$$

$$\cos\varphi^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi$$

$$\cos\varphi^4 = \frac{3}{8} + \frac{4}{8}\cos 2\varphi + \frac{1}{8}\cos 4\varphi$$

$$\cos\varphi^6 = \frac{10}{32} + \frac{15}{32}\cos 2\varphi + \frac{6}{32}\cos 4\varphi + \frac{1}{32}\cos 6\varphi$$

$$\cos\varphi^8 = \frac{35}{128} + \frac{56}{128}\cos 2\varphi + \frac{28}{128}\cos 4\varphi + \frac{4}{128}\cos 6\varphi + \frac{1}{128}\cos 8\varphi;$$

in generale ponendo

$$\cos\varphi^{2m} = A' + B'\cos 2\varphi + C'\cos 4\varphi + D'\cos 6\varphi + E'\cos 8\varphi + \text{ec.}$$

si ha

$$A' = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots\ldots(2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots\ldots 2m} = \frac{1}{2^{2m-1}}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{14}{4}\ldots\ldots\frac{4m-2}{m}$$

$$B' = \frac{2m}{m+1}A';\ C' = \frac{m-1}{m+2}B';\ D' = \frac{m-2}{m+3}C';\ E' = \frac{m-3}{m+4}D' \text{ ec.}:$$

se ora si sostituiscono questi valori nella serie che rappresenta lo sviluppo di $\frac{1}{1+n\cos\varphi}$, s' avrà

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+n\cos\varphi} = {} & 1 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{3}{8}n^4 + \tfrac{10}{32}n^6 + \tfrac{35}{128}n^8 + \text{ec.}\\ & - \left\{ n + \tfrac{3}{4}n^3 + \tfrac{10}{16}n^5 + \tfrac{35}{64}n^7 + \text{ec.} \right\}\cos\varphi\\ & + \left\{ \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{4}{8}n^4 + \tfrac{15}{32}n^6 + \tfrac{56}{128}n^8 + \text{ec.} \right\}\cos 2\varphi\\ & - \left\{ \tfrac{1}{4}n^3 + \tfrac{5}{16}n^5 + \tfrac{21}{64}n^7 + \tfrac{84}{256}n^9 + \text{ec.} \right\}\cos 3\varphi\\ & + \left\{ \tfrac{1}{8}n^4 + \tfrac{6}{32}n^6 + \tfrac{28}{128}n^8 + \text{ec.} \right\}\cos 4\varphi\\ & - \left\{ \tfrac{1}{16}n^5 + \tfrac{7}{64}n^7 + \tfrac{36}{296}n^9 + \text{ec.} \right\}\cos 5\varphi\\ & + \left\{ \tfrac{1}{32}n^6 + \tfrac{8}{128}n^8 + \text{ec.} \right\}\cos 6\varphi\\ & - \text{ec.}\end{aligned}$$

Se pertanto si fa

$$\frac{1}{1+n\cos\varphi} = A'' - B''\cos\varphi + C''\cos 2\varphi - D''\cos 3\varphi + \text{ec.}$$

avremo,

$$A'' = 1 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{8}n^4 + \frac{10}{32}n^6 + \frac{35}{128}n^8 + \text{ec., ovvero}$$

$$A'' = 1 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1.3}{2.4}n^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}n^6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}n^8 + \text{ec.}$$

$$A'' = \frac{1}{\sqrt{(1-nn)}}.$$

Si ridurranno così ad espressioni finite anche gli altri coefficienti: ma per vedere più facilmente la legge che seguono tra di loro, e come dato il primo A'', si possano trovare tutti gli altri, moltiplichiamo l'equazione

$$\frac{1}{1+n\cos\varphi} = A'' - B''\cos\varphi + C''\cos 2\varphi - D''\cos 3\varphi + E''\cos 4\varphi - \text{ec.}$$

per $1 + n\cos\varphi$, e poichè

$\cos\varphi\cos m\varphi = \frac{1}{2}\cos(m-1)\varphi + \frac{1}{2}\cos(m+1)\varphi$, avremo

$$\begin{aligned} 1 = {} & A'' - B''\cos\varphi + C''\cos 2\varphi - D''\cos 3\varphi + \text{ec.} \\ & - \tfrac{1}{2}B''n + A''n\cos\varphi - \tfrac{1}{2}B''n\cos 2\varphi + \tfrac{1}{2}C''n\cos 3\varphi + \text{ec.} \\ & + \tfrac{1}{2}C''n\cos\varphi - \tfrac{1}{2}D''n\cos 2\varphi + \tfrac{1}{2}E''n\cos 3\varphi + \text{ec.} \end{aligned}$$

ed in conseguenza

$$B'' = \frac{2}{n}(A''-1), \quad C'' = \frac{2B''-2A''n}{n}, \quad D'' = \frac{2C''-B''n}{n},$$

$$E'' = \frac{2D''-C''n}{n}, \quad F'' = \frac{2E''-D''n}{n}, \text{ ec.}$$

Trovati questi coefficienti, avremo facilmente l'integrale $\int\frac{d\varphi}{1+n\cos\varphi}$; imperocchè essendo $\int d\varphi.\cos m\varphi = \frac{1}{m}\,sen\,m\varphi$, s'avrà

$\int\frac{d\varphi}{1+n\cos\varphi} = A''\varphi - B''\,sen\,\varphi + \frac{1}{2}C''\,sen\,2\varphi - \frac{1}{3}D''\,sen\,3\varphi + \frac{1}{4}E''\,sen\,4\varphi$ — ec., serie che progredisce secondo i seni degli angoli φ, 2φ, 3φ ec. Osserviamo che se $n > 1$, tutti i coefficienti A'', B'', C'' ec., divengono immaginarj, e quindi non può in questo caso aver luogo la nostra risoluzione. Se $n = 1$, essendo allora $1 + \cos\varphi = 2\cos\frac{1}{2}\varphi^2$, si avrà

$$\int\frac{d\varphi}{1+n\cos\varphi} = \int\frac{\frac{1}{2}d\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi^2} = tang\,\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Si vede da quanto abbiam detto, come potrebbero aversi gl'integrali delle differenziali trascendenti trattate alla fine del Cap. I., espressi in serie ordinate per i seni e coseni degli angoli multipli.

§. 151. Vogliasi ora esprimere per una serie secondo i seni degli angoli multipli, l'integrale di $d\varphi(1+n\cos\varphi)^m$, qualunque sia m.

Facciamo per questo

$(1+n\cos\varphi)^m = A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi + D\cos 3\varphi + E\cos 4\varphi$ + ec., ed essendo

$(1+n\cos\varphi)^m = 1 + \frac{m}{1}n\cos\varphi + \frac{m(m-1)}{1.2}n^2\cos\varphi^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}n^3\cos\varphi^3$ + ec., se vi sostituiamo invece delle potenze del coseno le espressioni riportate al §. antecedente, avremo

$$A = 1 + \frac{m(m-1)}{2.2}n^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.2.4.4}n^4 + \ldots\ldots \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{2.2.4.4.6.6}n^6 + \text{ec.}$$

Trovato questo valore di A, si potranno facilmente trovare i valori degli altri coefficienti in questa guisa:

Essendo A, B, C ec. tante funzioni di m, si prenda la differenza finita rapporto ad m, facendo aumentar la m di una unità della supposta equazione

$(1+n\cos\varphi)^m = A + B\cos\varphi$ + ec, ed avremo

$$(1+n\cos\varphi)^{m+1} - (1+n\cos\varphi)^m = (1+n\cos\varphi)^m.n\cos\varphi = \Delta A + \Delta B\cos\varphi + \Delta C\cos 2\varphi + \Delta D\cos 3\varphi + \text{ec.; quindi}$$

$$nA\cos\varphi + nB\cos\varphi.\cos\varphi + nC\cos\varphi.\cos 2\varphi + nD\cos\varphi\times\cos 3\varphi + \text{ec.} = \Delta A + \Delta B\cos\varphi + \Delta C\cos 2\varphi + \Delta D\times\cos 3\varphi + \Delta E\cos 4\varphi + \text{ec., ovvero}$$

$$nA\cos\varphi + nB\left\{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi\right\} + nC\left\{\tfrac{1}{2}\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\cos 3\varphi\right\}$$

$+ nD\left\{\frac{1}{2}\cos 2\phi + \frac{1}{2}\cos 4\phi\right\} +$ ec. $= \Delta A + \Delta B\cos\phi +$
$\Delta C\cos 2\phi + \Delta D\cos 3\phi +$ ec.,

dalla quale equazione si ricava

$B = \frac{2}{n}\Delta A$, $C = \frac{2}{n}\Delta B - 2A$, $D = \frac{2}{n}\Delta C - B$,
$E = \frac{2}{n}\Delta D - C$, $F = \frac{2}{n}\Delta E - D$ ec., ed in conseguenza

$$B = \frac{2}{n}\Delta A$$

$$C = \frac{2^2}{n^2}\Delta^2 A - 2A$$

$$D = \frac{2^3}{n^3}\Delta^3 A - 3.\frac{2}{n}\Delta A$$

$$E = \frac{2^4}{n^4}\Delta^4 A - 4.\frac{2^2}{n^2}\Delta^2 A + 2A$$

$$F = \frac{2^5}{n^5}\Delta^5 A - 5\,\frac{2^3}{n^3}\Delta^3 A + 5.\frac{2}{n}\Delta A$$

$$H = \frac{2^6}{n^6}\Delta^6 A - 6.\frac{2^4}{n^4}\Delta^4 A + 9.\frac{2^2}{n^2}\Delta^2 A - 2A$$

$$L = \frac{2^7}{n^7}\Delta^7 A - 7.\frac{2^5}{n^5}\Delta^5 A + 14.\frac{2^3}{n^3}\Delta^3 A - 7.\frac{2}{n}\Delta A \text{ ec.}$$

La legge con la quale progrediscono quest'espressioni è manifesta: imperocchè se indichiamo per P, Q, R tre coefficienti consecutivi, e se avrem trovato

$$P = \frac{2^l}{n^l}\Delta^l A - a\frac{2^{l-2}}{n^{l-2}}\Delta^{l-2}A + b\frac{2^{l-4}}{n^{l-4}}\Delta^{l-4}A - c \text{ ec.},$$

$$Q = \frac{2^{l+1}}{n^{l+1}}\Delta^{l+1}A - a'\frac{2^{l-1}}{n^{l-1}}\Delta^{l-1}A + b'\frac{2^{l-3}}{n^{l-3}}\Delta^{l-3}A - c' \text{ ec.},$$

sarà

$$R = \frac{2^{l+2}}{n^{l+2}}\Delta^{l+2}A - (a' + 1)\frac{2^l}{n^l}\Delta^l A + (b' + a)\times$$
$$\frac{2^{l-2}}{n^{l-2}}\Delta^{l-2}A - (c' + b) \text{ ec.}:$$

anzi se noi indichiamo per $M_{\nu,\mu}$, funzione delle due variabili ν,μ un coefficiente qualunque nell'espressione di R, essendo μ l'indice che determina la situazione di M; e ν l'indice che determina quella di R, sarà $M_{\nu,\mu} = M_{\nu-1,\mu} + M_{\nu-2,\mu-1}$, equazione a differenze finite e parziali, dall'integrazione della quale si ricava l'espressione generale di $M_{\nu,\mu}$. Non seguiteremo quest'indagine, perchè essa diviene oltre modo complicata.

Per aver poi effettivamente le serie che esprimono i coefficienti A, B, C ec., osserviamo che si ha generalmente (Tom. I. § 14)

$\Delta\{x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-\omega)\} = x(x-1)\times$
$(x-2)\ldots(x-\omega+1)(\omega+1)$; dunque essendo

$$A = 1 + \frac{m(m-1)}{2.2}n^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.2.4.4}n^4 + \ldots\ldots$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{2.2.4.4.6.6}n^6 + \text{ec., avremo}$$

$$B = \frac{2}{n}\Delta A = 2n\left\{\frac{m}{2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.2.4}n^2 + \ldots\ldots\right.$$
$$\left.\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.2.4.4.6}n^4 + \text{ec.}\right\}$$

$$C = \frac{2}{n}\Delta B - 2A = 4nn\left\{\frac{m(m-1)}{2.2.4} + \frac{2m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.2.4.4.6}n^2 +\right.$$
$$\left.\frac{3m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{2.2.4.4.6.6.8}n^4 + \text{ec.}\right\}$$

$$D = \frac{2}{n}\Delta C - B = 8n^3\left\{\frac{2m(m-1)(m-2)}{2.2.4.4.6} + \ldots\ldots\right.$$
$$\left.\frac{2.3.m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.2.4.4.6.6.8}n^2 + \text{ec.}\right\}$$

$$E = \frac{2}{n}\Delta D - C = 16n^4\left\{\frac{2.3.m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.2.4.4.6.6.8} + \ldots\right.$$
$$\left.\frac{2.3.4m(m-1)\ldots(m-5)}{2.2.4.4.6.6.8.8.10}n^2 + \text{ec.}\right\},$$ delle quali serie è chiara la legge, onde poter senza pena trovar quelle per gli altri coefficienti.

Trovati pertanto i valori di A, B, C ec., otterremo subito

$\int d\phi\,(1 + n\cos\phi)^m = A\phi + B\,sen\,\phi + \frac{1}{2} C\,sen\,2\phi + \frac{1}{3} D\,sen\,3\phi +$ ec.

Per ulteriori dettagli sopra siffatte integrazioni rimettiamo i nostri Lettori al Calcolo Integrale del Sig. Euler, Tom. I. Cap. VI.

§. 152. Le Formule Differenziali da noi finora trattate, o erano integrabili algebraicamente, o dipendevano dalla rettificazione del circolo, e dai logaritmi. Consideriamo ora quelle, le quali dipendono dalla rettificazione delle curve di secondo ordine, Ellisse ed Iperbola. Non mettiamo in campo la Parabola, imperocchè la di lei rettificazione (106) dipende dai logaritmi.

Supponiamo che s rappresenti l'arco qualunque di una curva, e noi sappiamo (81) che $s = \int (1 + (\frac{dy}{dx})^2)^{\frac{1}{2}} dx$, essendo x l'ascissa, y l'ordinata della curva.

Per l' Ellisse.

Essendo rappresentato da $2a$ l'asse maggiore di una Ellisse, da $2b$ l'asse minore, da x e da y le coordinate, presa l'origine nel centro, si sa che $y^2 = \frac{bb}{aa}(a^2 - x^2)$ è l'equazione di questa curva; dunque l'arco corrispondente a queste coordinate sarà

$$s = \int \frac{\sqrt{(a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2)}}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} dx.$$

Facciamo $a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 = u^2$, ed avremo allora

$$s = -\int \frac{u^2 du}{\sqrt{\{(a^2 + b^2)u^2 - u^4 - a^2b^2\}}} \dots\dots\dots\dots$$

$$= -\int \frac{u^2 du}{\sqrt{\{(a^2 - u^2)(u^2 - b^2)\}}} \dots\dots\dots\dots (1)$$

Facciamo $a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 = \frac{a^2b^2}{u^2}$, ed avremo per un' altra trasformata

$$s = \int \frac{a^2b^2 du}{u^2\sqrt{\{(a^2 + b^2)u^2 - u^4 - a^2b^2\}}} \dots\dots\dots\dots$$

$$= \int \frac{a^2b^2 du}{u^2\sqrt{\{(a^2 - u^2)(u^2 - b^2)\}}} \dots\dots\dots\dots (2)$$

Queste due formule (1), (2) servono a riconoscere le differenziali che si riportano alla rettificazione dell'ellisse. Si avverta che noi supponiamo che esse appartengano ad una vera ellisse, e che perciò a e b siano sempre diseguali.

Dunque ogni espressione differenziale riducibile alla forma $\frac{\pm Mu^2 du}{\sqrt{(Nu^2 - Pu^4 - Q)}}$, quando M, N, P, Q sono quantità positive date, ha per integrale una quantità dipendente dalla rettificazione dell'ellisse. Infatti se noi facciamo $\frac{\pm M}{\sqrt{P}} = -A$, $\frac{N}{P} = B$, $\frac{Q}{P} = C$, quest' espressione diverrà $A.\frac{-u^2 du}{\sqrt{(Bu^2 - u^4 - C)}}$, la quale paragonata con la formula (1) ci mostra che essa è il prodotto del fattore costante A per la differanziale di un arco d'ellisse, di cui gli assi $2a$ e $2b$, si trovano facendo $a^2 + b^2 = B$, $a^2b^2 = C$, per il che si ha

$$2a = \sqrt{\{B + 2\sqrt{C}\}} + \sqrt{(B - 2\sqrt{C})}$$

$$2b = \sqrt{(B + 2\sqrt{C})} - \sqrt{(B - 2\sqrt{C})}.$$

Se $B < 2\sqrt{C}$ questi due assi divengono immaginarj, ciò che ci assicura non avere la formula alcun integrale; essa infatti è in tal caso immaginaria, e facilmente si vede, dando a quel radicale questa forma $\sqrt{\{(\frac{B^2}{4} - C) - (u^2 - \frac{B}{2})^2\}}$.

Egualmente di ogni espressione differenziale riducibile alla forma $\frac{\pm M du}{u^2\sqrt{\{Nu^2 - Pu^4 - Q\}}}$, essendo M, P, Q, N sempre quantità positive, si riporta l'integrale alla rettificazione dell'ellisse; infatti è sempre facile ridurla a quest' altra forma

$\frac{A}{C}\cdot\frac{Cdu}{u^2\sqrt{(Bu^2-u^4-C)}}$, l' integrale della quale si ha dalla formula (2).

Per l' Iperbola.

Rappresentando per $2a$ e $2b$ gli assi di un' Iperbola, e per x, y le sue coordinate prese dal centro, si sa che la di lei equazione è $y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$. Noi supponiamo a e b diseguali.

Rappresentiamo per s l' arco della curva che corrisponde a queste coordinate, e si avrà

$$s=\int\frac{\sqrt{(\frac{a^2+b^2}{a^2}x^2-a^2)}}{\sqrt{(x^2-a^2)}}dx.$$

Facciamo ora $\frac{a^2+b^2}{a^2}x^2-a^2=u^2$, e sarà $x=\frac{a\sqrt{(u^2+a^2)}}{\sqrt{(b^2+a^2)}}$, quindi

$$s=\int\frac{u^2du}{\sqrt{(u^2+a^2)}.\sqrt{(u^2-b^2)}}$$
$$=\int\frac{u^2du}{\sqrt{\{(a^2-b^2)u^2+u^4-a^2b^2\}}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3);$$

e se poniamo $\frac{a^2+b^2}{a^2}x^2-a^2=\frac{a^2b^2}{u^2}$, si ha $x=\frac{a^2\sqrt{(u^2+b^2)}}{u\sqrt{(a^2+b^2)}}$ e quindi

$$s=\int\frac{-a^2b^2du}{u^2\sqrt{\{(a^2-b^2)u^2-u^4+a^2b^2\}}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (4).$$

La quantità che è sotto al radicale è composta dei due fattori u^2+b^2, a^2-u^2. Si osservi che il coefficiente di u^2 nelle due formule (3), (4) è positivo o negativo secondo che $a>b$, ovvero $b>a$.

Dunque ogni espressione differenziale della forma $\frac{Mu^2du}{\sqrt{(Nu^2+Pu^4-Q)}}$, nella quale M ed N possono avere qualunque segno, essendo P e Q positivi, ha un integrale dipendente dalla rettificazione dell' iperbola; infatti facendo $\frac{M}{\sqrt{P}}=A$, $\frac{N}{P}=B$, $\frac{Q}{P}=C$, si avrà $A.\frac{u^2du}{\sqrt{(Bu^2+u^4-Q)}}$ che è il prodotto del fattore costante A per il differenziale di un arco d' iperbola, i cui assi sono dati da quest' e-

quazione $a^2-b^2=B$, $a^2b^2=C$, ed abbiamo $2a=\sqrt{\{2B\pm2\sqrt{(B^2+4C)}\}}$, $2b=\sqrt{\{\pm2\sqrt{(B^2+4C)}-2B\}}$.

Nei termini di doppio segno prenderemo il superiore per non incorrere negli immaginarj.

Egualmente l' espressione $\frac{Mdu}{u^2\sqrt{(Nu^2-Pu^4+Q)}}$, ove M, N, P, Q hanno le stesse condizioni dette sopra, è integrabile per mezzo di un arco d' iperbola, potendosi sempre ridurre alla formula (4).

§ 153. Consideriamo ora la differenziale $\frac{Pdx}{\sqrt{(a+bx+cx^2+ex^3+x^4)}}$ nella quale P è una funzione qualunque razionale di x. Se in questa facciamo $x=\frac{p+qy}{1+y}$, essendo p e q quantità costanti indeterminate, potremo sempre determinarle in maniera che spariscano dal denominatore le potenze impari della variabile; infatti sostituendo nel radicale (il quale d'ora in poi rappresenteremo per R) per x il suo valore, avremo un' espressione di questa forma $R=\sqrt{(a'+b'y+c'y^2+e'y^3+h'y^4)}:(1+y)^2$. Se pertanto facciamo $b'=0$, $e'=0$, avremo $R=\sqrt{(a'+c'y^2+h'y^4)}:(1+y)^2$, e le quantità p e q saran date dalle due equazioni $b'=0$, $e'=0$: troviamo quest' equazioni. Supponendo decomposta in fattori reali del secondo ordine la quantità $a+bx+cx^2+ex^3+x^4$, siano x^2-fx+g, $x^2-f'x+g'$ questi fattori, e basterà sostituire in ciascuno di essi il valore di x, ed eguagliare a zero i respettivi coefficienti della prima potenza della variabile x che comporrà quei fattori medesimi: infatti si avranno così due equazioni $2pq-(p+q)f+2g=0$, $2pq-(p+q)f'+2g'=0$, dalle quali potrem ricavare i valori di pq e di $p+q$.

Questi valori saranno sempre reali, imperocchè f, g, f', g' sono quantità reali, quand' anche si trovassero dei fattori immaginarj nel quadrinomio. Ora anche i valori di p e di q saranno sempre reali, ed in conseguenza potrem sempre fare la riduzione sopra indicata; infatti acciò p, q siano quantità reali, bisognerà che $\frac{1}{4}(p+q)^2 > pq$, ovvero che $\frac{1}{4}(p+q)^2 - pq$ cioè $\frac{1}{4}(p-q)^2$ sia una quantità positiva. Rappresentiamo per α, β, γ, δ le quattro radici dell' equazione $a + bx + cx^2 + ex^3 + x^4 = 0$ disposte per ordine di grandezza se sono reali, e sarà $f = \alpha + \beta$, $g = \alpha\beta$, $f' = \gamma + \delta$, $g' = \gamma\delta$. Sostituiti questi valori nelle equazioni sopra trovate, avremo $p + q = \frac{2(\alpha\beta - \gamma\delta)}{\alpha+\beta-\gamma-\delta}$, $pq = \frac{\alpha\beta(\gamma+\delta)-\gamma\delta(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta-\gamma-\delta}$, e quindi $\frac{1}{4}(p-q)^2 = \frac{1}{4}(p+q)^2 - pq = \frac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}{(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2}$, che è una quantità positiva, quando le quattro radici sono reali.

Se α, β fossero immaginarie, saranno necessariamente di questa forma $\alpha = m + n\sqrt{(-1)}$, $\beta = m - n\sqrt{(-1)}$, e perciò $(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma) = (m - \gamma + n\sqrt{(-1)})(m - \gamma - n\sqrt{(-1)})$ darà un prodotto reale e positivo: egualmente $(\alpha - \delta)(\beta - \delta)$ darà anche un prodotto reale e positivo; dunque ancora in questo caso $\frac{1}{4}(p-q)^2$ sarà una quantità positiva, ed i valori di p e q saran reali.

Se tutte e quattro le radici fossero immaginarie, facciamo allora $\alpha = m + n\sqrt{(-1)}$, $\beta = m - n\sqrt{(-1)}$, $\gamma = l + h\sqrt{(-1)}$, $\delta = l - h\sqrt{(-1)}$, e si avrà il prodotto

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\delta) = \{m - l - (h-n)\sqrt{(-1)}\}\{m - l + (h-n)\sqrt{(-1)}\}$$

quantità reale e positiva; lo stesso essendo per il prodotto $(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)$, ne concluderemo che ancora nel caso delle quattro radici immaginarie, possiamo avere per p e q dei valori reali.

Se due delle quattro radici α, β, γ, δ saranno eguali, il polinomio sotto il radicale risulterà dal prodotto di un quadrato in un fattore trinomio, e si potrà portare fuori del segno radicale quel fattore quadrato; allora non trovandosi sotto questo segno potenze della variabile al disopra della seconda, la formula apparterrà a quelle che abbiamo considerate al Cap. I.

Quando tutte e quattro le radici fossero eguali, svanirebbe allora il radicale, divenendo razionale la formula da se stessa.

Se poi la somma di due radici $\alpha + \delta$ fosse eguale alla somma delle due altre $\gamma + \beta$, si potrebbe in quel caso decomporre il polinomio in due trinomj $x^2 - \lambda x + \alpha\delta$, $x^2 - \lambda x + \beta\gamma$, nei quali $\lambda = \alpha + \delta = \beta + \gamma$. In questo caso si eliminerebbero le potenze impari facendo $x = y + \frac{\lambda}{2}$.

Abbiamo considerati questi casi particolari delle radici, poichè in essi i valori di $p + q$, e di $p - q$ trovati superiormente, divengono indeterminati, infiniti, o nulli.

Risulta da quanto abbiamo detto, che facendo $x = \frac{p+qy}{1+y}$, e determinando opportunamente p, q come è stato fatto quì sopra, si ha $\sqrt{(a + bx + cx^2 + ex^3 + hx^4)} = \frac{\sqrt{(a' + c'y^2 + h'y^4)}}{(1+y)^2}$, e $dx = \frac{(q-p)dy}{(1+y)^2}$, e che in conseguenza possiam sempre trasformare la formula $\frac{Pdx}{\sqrt{(a+bx+cx^2+ex^3+hx^4)}}$, ove P è una funzione razionale di x, in un' altra $\frac{Qdy}{\sqrt{(a'+c'y^2+h'y^4)}}$ nella quale Q è una funzione razionale di y; così noi ci occuperemo dell' integrazione della seconda; anzi potremo ancora ridurla più semplice facendo che il suo integrale dipenda da quello di una formula $\frac{Ldy}{\sqrt{(a'+c'y^2+h'y^4)}}$ in cui la funzione L non contenga che le potenze pari della y.

Per questo osservo che qualunque sia la funzione Q, essa non può avere se non la forma $\frac{A+By}{C+Dy}$, essendo rappresentate da A, B, C, D tante funzioni di y^2: ora $\frac{A+By}{C+Dy} = \frac{(A+By)(C-Dy)}{C^2-D^2y^2} = \frac{AC-BDy^2}{C^2-D^2y^2} + \frac{BC-AD}{C^2-D^2y^2}y$; dunque indicando per L il primo termine di questo secondo membro, e per Hy l' altro termine, si avrà

$$\int\frac{Qdy}{\sqrt{(a'+c'y^2+h'y^4)}} = \int\frac{Ldy}{\sqrt{(a'+c'y^2+h'y^4)}} + \int\frac{Hydy}{\sqrt{(a'+c'y^2+h'y^4)}}.$$

Di queste due ultime formule integrali, la seconda si riduce più semplice se si fa $y^2 = u$, ed allora divenendo essa della forma $\int \frac{U du}{\sqrt{(a' + c'u + b'u^2)}}$, (nella quale U è una funzione razionale di u) appartiene alla classe di quelle integrate al Cap. I.

L' integrale dunque della nostra formula dipendera da quello di $\frac{L dy}{\sqrt{(a' + c'y^2 + h'y^4)}}$, ove L è una funzione razionale di y^2.

§. 154. Sia pertanto proposta la differenziale $\frac{P dx}{\sqrt{(a' + b'x^2 + c'x^4)}}$, nella quale P è una funzione razionale di x^2, e di questa cerchiamo l' integrale.

Supponiamo primieramente che P sia una funzione intiera che rappresenteremo per $A + Bx^2 + Cx^4 + \ldots\ldots\ldots + Mx^{2m}$, e si tratterà d' integrare $\frac{x^{2m} dx}{\sqrt{(a' + b'x^2 + c'x^4)}}$, qualunque numero intiero e positivo sia m. Ora prendendo il differenziale della quantità $x^{2m-3}\sqrt{(a' + b'x^2 + c'x^4)}$, si avrà

$$dx\left\{(2m-3)x^{2m-4}\sqrt{(a' + b'x^2 + c'x^4)} + \ldots\ldots\ldots \frac{x^{2m-3}(b'x + 2c'x^3)}{\sqrt{(a' + b'x^2 + c'x^4)}}\right\},$$

e perciò riducendo allo stesso denominatore ed integrando termine per termine, avremo, fatta $R = \sqrt{(a' + b'x^2 + c'x^4)}$,

$$x^{2m-3}R = (2m-3)a'\int\frac{x^{2m-4}dx}{R} + (2m-2)b'\int\frac{x^{2m-2}dx}{R} + (2m-1)c'\int\frac{x^{2m}dx}{R}.$$

Da quest' equazione si ricava

$$\int\frac{x^{2m}dx}{R} = \frac{1}{(2m-1)c'}x^{2m-3}R - \frac{(2m-2)b'}{(2m-1)c'}\int\frac{x^{2m-2}dx}{R} - \frac{(2m-3)a'}{(2m-1)c'} \times \int\frac{x^{2m-4}dx}{R},$$

e quindi

per $m = 2$, $\int\frac{x^4 dx}{R} = \frac{1}{3c'}xR - \frac{2b'}{3c'}\int\frac{x^2 dx}{R} - \frac{a'}{3c'}\int\frac{dx}{R}$,

per $m = 3$, $\int\frac{x^6 dx}{R} = \frac{1}{5c'}x^3R - \frac{4b'}{5c'}\int\frac{x^4 dx}{R} - \frac{3a'}{5c'}\int\frac{x^2 dx}{R}$

per $m = 4$, $\int\frac{x^8 dx}{R} = \frac{1}{7c'}x^5R - \frac{6b'}{7c'}\int\frac{x^6 dx}{R} - \frac{5a'}{7c'}\int\frac{x^4 dx}{R}$,

ec. ec.

si vede di qui che tutta la difficoltà si riduce ad integrare le formule $\int\frac{dx}{R}$, $\int\frac{x^2 dx}{R}$, giacchè da queste dipende il valore di qualunque altra $\int\frac{x^{2m}dx}{R}$.

Supponiamo in secondo luogo che P sia una funzione razionale qualunque di x^2. Comincieremo allora dal separare in P la parte intiera che può esservi contenuta, e questa moltiplicata per dx e divisa per R sarà trattata come abbiamo insegnato qui sopra. La parte fratta che resterà, si decomporrà nelle sue frazioni parziali secondo il numero dei fattori contenuti nel denominatore, ed avremo allora tanti termini della forma $\frac{N}{(x^2+n)^m}$, ove N ed n possono essere reali o immaginarj, per il che tutta la difficoltà dell' integrazione sarà ridotta a quella delle formule simili ad $N\int\frac{dx}{(x^2+n)^m R}$, m essendo un numero intiero positivo qualunque.

Per aver l' integrale $\int\frac{dx}{(x^2+n)^m R}$, o almeno per farlo dipendere da una formula ove l' esponente m sia minore, differenziamo la quantità $\frac{xR}{(x^2+n)^{m-1}}$, ed avremo

$$\left\{(x^2+n)\left\{R dx + \frac{x(2b'x + 4c'x^3)dx}{2R}\right\} - 2(m-1)x^2 R dx\right\} : (x^2+n)^m =$$

$$\frac{(x^2+n)\left\{a' + b'x^2 + c'x^4 + b'x^2 + 2c'x^3\right\}dx - 2(m-1)(a'x^2 + b'x^4 + c'x^6)dx}{R.(x^2+n)^m}:$$

ora diamo al numeratore di questa frazione la forma

$$\left\{A(x^2+n)^3 + B(x^2+n)^2 + C(x^2+n) + D\right\}dx,$$

ciò che sarà sempre possibile, ed avremo

$$\frac{\left\{A(x^2+n)^3 + B(x^2+n)^2 + C(x^2+n) + D\right\}dx}{(x^2+n)^m R} = \frac{A dx}{(x^2+n)^{m-3}R} + \frac{B dx}{(x^2+n)^{m-2}R} + \frac{C dx}{(x^2+n)^{m-1}R} + \frac{D dx}{(x^2+n)^m R},$$

e quindi

$$\int\frac{A\,dx}{(x^2+n)^{m-3}R}+\int\frac{B\,dx}{(x^2+n)^{m-2}R}+\int\frac{C\,dx}{(x^2+n)^{m-1}R}+\int\frac{D\,dx}{(x^2+n)^{m}R}=\frac{xR}{(x^2+n)^{m-1}}.$$

Da quest' ultima equazione si ricava l' integrale $\int\frac{dx}{(x^2+n)^m R}$ dato per mezzo degli integrali delle formule $\int\frac{dx}{(x^2+n)^{m-1}R}$, $\int\frac{dx}{(x^2+n)^{m-2}R}$, $\int\frac{dx}{(x^2+n)^{m-3}R}$, dal che si vede che l' integrale di $\int\frac{dx}{(x^2+n)^2R}$ sarà dato per mezzo degl' integrali $\int\frac{dx}{(x^2+n)R}$, $\int\frac{dx}{(x^2+n)^0R}$, $\int\frac{dx}{(x^2+n)^{-1}R}$, ovvero $\int\frac{dx}{(x^2+n)R}$, $\int\frac{dx}{R}$, $\int\frac{(x^2+n)dx}{R}$; così l' integrale $\int\frac{dx}{(x^2+n)^3R}$ essendo dato per gl' integrali $\int\frac{dx}{(x^2+n)^2R}$ ec., sarà in conseguenza dato per i tre integrali $\int\frac{dx}{(x^2+n)R}$, $\int\frac{dx}{R}$, $\int\frac{(x^2+n)\,dx}{R}$; in generale si concluderà che da queste tre formule dipenderà l' integrale di qualunque altra $\int\frac{dx}{(x^2+n)^mR}$:

Dunque qualunque sia la funzione P, purchè sia razionale in x^2, l' integrale di questa formula $\frac{P\,dx}{\sqrt{(a'+b'x^2+c'x^4)}}$ dipende da queste tre

$$\text{(I)}\ldots\int\frac{dx}{(x^2+n)\sqrt{(a'+b'x^2+c'x^4)}},\quad \text{(II)}\ldots\int\frac{dx}{\sqrt{(a'+b'x^2+c'x^4)}},$$

$$\text{(III)}\ldots\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(a'+b'x^2+c'x^4)}}.$$

I tre integrali (I), (II), (III) sono chiamati da Legendre Trascendenti Ellittiche, e volendo vedere una completa teorìa riguardo ad essi, si legga una di lui Memoria sopra tal soggetto, pubblicata nel secondo anno Repubblicano. Noi ne parleremo quanto ci possono permettere i limiti di quest' Opera.

§. 155. Incominciamo dalla formula (II) che è la più semplice di tutte; e consideriamone i diversi casi che presentano i diversi segni dei coefficienti a', b', c'. Indicando per a', b', c'

tante quantità positive, ecco gli otto casi che ci danno le diverse combinazioni dei segni sotto il radicale

$1^\circ \ldots \frac{dx}{\sqrt{(a'+b'x^2+c'x^4)}}$, $2^\circ \ldots \frac{dx}{\sqrt{(a'+b'x^2-c'x^4)}}$

$3^\circ \ldots \frac{dx}{\sqrt{(a'-b'x^2-c'x^4)}}$, $4^\circ \ldots \frac{dx}{\sqrt{(-a'-b'x^2-c'x^4)}}$

$5^\circ \ldots \frac{dx}{\sqrt{(-a'-b'x^2+c'x^4)}}$, $6^\circ \ldots \frac{dx}{\sqrt{(-a'+b'x^2+c'x^4)}}$

$7^\circ \ldots \frac{dx}{\sqrt{(a'-b'x^2+c'x^4)}}$, $8^\circ \ldots \frac{dx}{\sqrt{(-a'+b'x^2-c'x^4)}}$

Tralascieremo il quarto, poichè esso è immaginario, e gli altri sette sono compresi in queste quattro formule

I.ª $\ldots \frac{dx}{\sqrt{(kx^2-x^4-m)}}$, k, m essendo positivi.

II.ª $\ldots \frac{dx}{\sqrt{(kx^2-x^4+m)}}$, m essendo positivo, k positivo o negativo.

III.ª $\ldots \frac{dx}{\sqrt{(kx^2+x^4-m)}}$, m positivo, k qualunque.

IV.ª $\ldots \frac{dx}{\sqrt{(kx^2+x^4+m)}}$, m positivo, k qualunque.

Per la prima formula, diamo al nostro radicale questa forma $\sqrt{\{\frac{k^2}{4}-m-(x^2-\frac{k}{2})^2\}}$, e concluderemo che non solo dev' essere k positivo, ma di più $\frac{k^2}{4}>m$, e ciò perchè non abbian luogo gl' immaginarj.

Questo posto, sarà

$\sqrt{(kx^2-x^4-m)}=\sqrt{\{(\frac{k+\sqrt{(kk-4m)}}{2}-x^2)(x^2-\frac{k-\sqrt{(kk-4m)}}{2})\}}$, e facendo $\frac{k+\sqrt{(kk-4m)}}{2}=aa$, $\frac{k-\sqrt{(kk-4m)}}{2}=bb$, si avrà $\frac{dx}{\sqrt{(kx^2-x^4-m)}}=\frac{dx}{\sqrt{(aa-xx)}.\sqrt{(xx-bb)}}$, ove aa, bb, saranno quantità positive, e di più sarà $a>b$.

Onde integrare la differenziale $\frac{dx}{\sqrt{(aa-xx)}.\sqrt{(xx-bb)}}$, facciamo

$\frac{dx}{\sqrt{(aa-xx)}.\sqrt{(xx-bb)}} = \frac{Ax^2dx}{\sqrt{(aa-xx)}.\sqrt{(xx-bb)}} + \frac{Bdx.\sqrt{(x^2-bb)}}{\sqrt{(aa-xx)}}$ e determiniamo i coefficienti A, B in modo che quest' equazione sia soddisfatta. Per questo, riducendo tutti i termini allo stesso denominatore, quindi togliendo i denominatori comuni, si avrà tra A, B quest' equazione

$1 = Ax^2 + Bx^2 - Bb^2$ che ci da $B = -\frac{1}{bb}$, $A = -B = \frac{1}{bb}$, ed in conseguenza

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(aa-xx)}.\sqrt{(xx-bb)}} = \frac{1}{bb}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(aa-xx)}.\sqrt{(xx-bb)}} - \ldots$$
$$\frac{1}{bb}\int\frac{dx\sqrt{(xx-bb)}}{\sqrt{(aa-xx)}}.$$

Il primo di questi due termini è il *prodotto* (152, for. (1)) del fattore costante $-\frac{1}{bb}$ per un arco di Ellisse di cui a, b sono i semiassi, e l' ascissa contata dal centro, è $\frac{a\sqrt{(aa-xx)}}{\sqrt{(aa-bb)}}$.

Rapporto al secondo, poniamo $xx - bb = zz$, e fatto per abbreviare $aa - bb = cc$, si trova $\frac{dx\sqrt{(xx-bb)}}{\sqrt{(aa-xx)}} = \ldots$ $\frac{zzdz}{\sqrt{(zz+bb)}.\sqrt{(cc-zz)}}$. Ora facciamo anche $\frac{\sqrt{(zz+bb)}.\sqrt{(cc-zz)}}{z} = t$, ed avremo $dt = \frac{-zzdz}{\sqrt{(zz+bb)}.\sqrt{(cc-zz)}} - \frac{b^2c^2dz}{z^2\sqrt{(z^2+b^2)}.\sqrt{(cc-zz)}}$; quindi integrando

$$\int\frac{zzdz}{\sqrt{(zz+bb)}.\sqrt{(cc-zz)}} = \int\frac{dx\sqrt{(x^2-b^2)}}{\sqrt{(aa-xx)}} = -t - \ldots$$
$$\int\frac{b^2c^2dz}{z^2\sqrt{(zz+bb)}.\sqrt{(cc-zz)}} = -\frac{\sqrt{(zz+bb)}.\sqrt{(cc-zz)}}{z} + \ldots$$
$$\int\frac{-b^2c^2dz}{z\sqrt{(zz+bb)}.\sqrt{(cc-zz)}}$$
: la prima parte di quest' espressione è algebraica, e la seconda si riporta alla rettificazione dell' iperbola (152, for. (4)).

La formula II^a. $\frac{dx}{\sqrt{(kx^2-x^4+m)}}$ si riduce facilmente alla I^a.

Infatti osservando che la quantità $kx^2 - x^4 + m$ si decompone in questi due fattori $\frac{k+\sqrt{(k^2+4m)}}{2} - x^2$, $x^2 + \frac{\sqrt{(k^2+4m)}-k}{2}$, cui possiamo dare questa forma $a^2 - x^2$, $x^2 + b^2$, avremo $\frac{dx}{\sqrt{(kx^2-x^4+m)}} = \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}\cdot\sqrt{(x^2+b^2)}}$: le quantità a^2, b^2 sono sempre positive; e poi $a^2 > b^2$ se k è positivo, $a^2 < b^2$ se k è negativo.

Ora si faccia $x^2 + b^2 = y^2$, e ponendo per comodo di calcolo, $a^2 + b^2 = c^2$, si avrà $\int\frac{dx}{\sqrt{(kx^2-x^4+m)}} = \ldots$ $\frac{dy}{\sqrt{\{(c^2+b^2)y^2-y^4-b^2c^2\}}}$, espressione della stessa forma della formula I^a.

Per la formula III^a. $\frac{dx}{\sqrt{(kx^2+x^4-m)}}$ facciamo $x = \frac{\sqrt{m}}{s}$, ed avremo $\frac{dx}{\sqrt{(kx^2+x^4-m)}} = -\frac{ds}{\sqrt{(ks^2-s^4+m)}}$, che è la formula II^a.

Infine prendiamo ad integrare la formula IV^a. $\frac{dx}{\sqrt{(kx^2+x^4+m)}}$.

Se $\frac{k^2}{4} = m$, la formula si riduce razionale; così a noi appartengono i casi nei quali $\frac{k^2}{4} > m$, ovvero $< m$.

Quando $\frac{k^2}{4} > m$, il polinomio si decompone in questi due fattori binomj reali, $x^2 + \frac{k+\sqrt{(k^2-4m)}}{2}$, $x^2 + \frac{k-\sqrt{(k^2-4m)}}{2}$, che possiamo rappresentare per $x^2 + f$, $x^2 + g$, le quantità f, g essendo simultaneamente positive o negative, secondo che k è positivo o negativo: avremo dunque ad integrare $\ldots$ $\frac{dx}{\sqrt{(x^2+f)}\cdot\sqrt{(x^2+g)}}$.

Supponiamo primieramente che le due quantità f e g siano positive; allora si ha $f > g$. Facciamo $x^2 + g = s^2$, e quindi $x = \sqrt{(s^2-g)}$, $dx = \frac{sds}{\sqrt{(s^2-g)}}$, $\sqrt{(x^2+f)} = \sqrt{(s^2 +}$

... $= \sqrt{(s^2 + h)}$, fatta $h = f - g$; avremo allora
$f - g$ ... $\frac{dx}{\sqrt{(x^2+f)} \cdot \sqrt{(x^2+g)}} = \frac{ds}{\sqrt{(s^2-g)} \cdot \sqrt{(s^2+h)}}$; e facendo anche $s = \frac{\sqrt{gh}}{y}$, troveremo $\frac{dx}{\sqrt{(x^2+f)} \cdot \sqrt{(x^2+g)}} = - \frac{dy}{\sqrt{\left\{(h-g)y^2 - y^4 + gh\right\}}}$, che si integra come la formula II^a.

Se le quantità f e g sono negative, allora $g > f$ e la formula da integrarsi diviene $\frac{dx}{\sqrt{(x^2-f)} \cdot \sqrt{(x^2-g)}}$. Poniamo in questo caso $x^2 - f = s^2$, $g - f = h$, e si avrà subito la trasformata $\frac{ds}{\sqrt{(s^2+f)} \cdot \sqrt{(s^2-h)}}$, la quale si riduce a $\frac{-dy}{\sqrt{\left\{(f-h)y^2 - y^4 + fh\right\}}}$, facendo $s = \frac{\sqrt{fh}}{y}$, e si integra egualmente come la formula II^a.

Quando poi $\frac{k^2}{4} < m$, il polinomio non è decomponibile in due fattori reali binomj della forma $x^2 + M$: ecco allora come potremo avere l'integrazione della formula $\frac{dx}{\sqrt{(kx^2 + x^4 + m)}}$.

Facciamo $\frac{kx^2 + x^4 + m}{x^2} = y^2$, ed avremo $x^2 = -\frac{(k-y^2)}{2} \pm \frac{\sqrt{\left\{(k-y^2)^2 - 4m\right\}}}{2}$; quindi $xdx = \frac{ydy}{2} \mp \frac{ydy(k-y^2)}{2\sqrt{\left\{(k-y^2)^2-4m\right\}}}$, ed in conseguenza $\frac{dx}{\sqrt{(kx^2+x^4+m)}} = \frac{dx}{xy} = \frac{xdx}{x^2 y} = \ldots\ldots\ldots \frac{\pm dy}{\sqrt{\left\{(k-y^2)^2 - 4m\right\}}}$, ovvero $= \frac{\pm dy}{\sqrt{(k^2 - 2ky^2 + y^4 - 4m)}}$: poniamo ora $y = \frac{1}{s}$, e si avrà $\frac{dx}{\sqrt{(kx^2+x^4+m)}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\mp ds}{\sqrt{(4m-k^2)} \cdot \sqrt{\left(\frac{-2ks^2}{4m-k^2} - s^4 + \frac{1}{4m-k^2}\right)}}$, che si riferisce alla formula II^a. (a).

(a) Queste riduzioni, ed alcune altre che seguono le abbiamo tratte dal

§. 156. La formula (III) del §. 15, $\int \frac{dx}{\sqrt{(a' + b'x^2 + c'x^4)}}$ presenta ancora essa diversi casi secondo le diverse combinazioni dei segni che hanno i termini del polinomio sotto del radicale, ed è facile vedere che tutti questi casi si riducono alle quattro formule seguenti

I^a. . . . . . $\frac{x^2 dx}{\sqrt{(kx^2 - x^4 - m)}}$, k, m essendo positivi:

II^a. . . . . $\frac{x^2 dx}{\sqrt{(kx^2 - x^4 + m)}}$, m positivo, k qualunque:

III^a. . . . . $\frac{x^2 dx}{\sqrt{(kx^2 + x^4 - m)}}$, m positivo, k qualunque:

IV^a. . . . . $\frac{x^2 dx}{\sqrt{(kx^2 + x^4 + m)}}$, m positivo, k qualunque:

La formula I^a si integra per mezzo di un arco di ellisse (152), e la III^a per mezzo di un arco d'iperbola; restano a trattarsi la II^a, e la IV^a.

Per integrare la differenziale $\frac{x^2 dx}{\sqrt{(kx^2 - x^4 + m)}}$ io differenzio la quantità $\frac{\sqrt{(kx^2 - x^4 + m)}}{x}$, e trovo

$$d\left\{\frac{\sqrt{(kx^2 - x^4 + m)}}{x}\right\} = - \frac{x^2 dx}{\sqrt{(kx^2 - x^4 + m)}} - \frac{mdx}{x^2\sqrt{(kx^2 - x^4 + m)}};$$

quindi avrò

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(kx^2 - x^4 + m)}} = - \frac{\sqrt{(kx^2 - x^4 + m)}}{x} + \int \frac{-mdx}{x^2\sqrt{(kx^2 - x^4 + m)}}.$$

Il primo termine di questo secondo membro è una quantità algebraica, e l'altro (152) è un arco d'iperbola, i di cui assi a, b sono dati per l'equazioni $aa - bb = k$, $a^2 b^2 = m$.

Calcolo Integrale del Geometra Bossut. Rendiamo omaggio a questo Autore, l'Opera del quale è la sola che possa rivalizzare in ordine e chiarezza con quella di Euler; sarebbe stato desiderabile che essa si fosse estesa di più sopra le scoperte moderne.

Veniamo alla formula IV^a., $\frac{x^2dx}{\sqrt{(kx^2+x^4+m)}}$, per la quale dovrem fare delle considerazioni simili a quelle fatte nel §. antecedente per il caso analogo.

Se $m=\frac{k^2}{4}$, la formula diviene razionale e non la consideriamo qui. Se $k^2>4m$, allora la differenziale da integrarsi prende la forma $\frac{x^2dx}{\sqrt{(x^2+f)}.\sqrt{(x^2+g)}}$, essendo positive le quantità f e g se è positiva k, e negative se questa è negativa.

Quando f e g sono positive, allora $f>g$, e facendo $x^2+g=s^2$, $f-g=h$, quantità positiva, si avrà la trasformata

$$\frac{s^2ds}{\sqrt{(s^2-g)}.\sqrt{(s^2+h)}}-\frac{gds}{\sqrt{(s^2-g)}.\sqrt{(s^2+h)}},$$

di cui il primo termine rappresenta la differenziale (152) di un arco d'iperbola, ed il secondo, facendovi $s=\frac{\sqrt{gh}}{y}$, diviene $\frac{gdy}{\sqrt{\{(h-g)y^2-y^4+gh\}}}$, e combina con la formula II^a. del §. antecedente.

Quando f e g fossero negative, allora $g>f$, e facendo $x^2-f=s^2$, $g-f=h$; quantità positiva, $s=\frac{\sqrt{fh}}{y}$, si avranno dei risultati simili ai precedenti.

Sia ora $k^2<4m$, e poniamo $\frac{\sqrt{(kx^2+x^4+m)}}{x}=y$: avremo

$$\frac{dx}{\sqrt{(kx^2+x^4+m)}}=\frac{dy}{\sqrt{\{(k-y^2)^2-4m\}}}.$$

Ora quella supposizione ci dà $x^2=-\frac{(k-y^2)}{2}\pm\ldots\sqrt{\left\{\frac{(k-y^2)^2-4m}{2}\right\}}$, e perciò fatte le opportune riduzioni, si avrà

$$\frac{x^2dx}{\sqrt{(kx^2+x^4+m)}}=\frac{dy}{2}+\frac{y^2dy}{2\sqrt{(k^2-2ky^2+y^4-4m)}}-\ldots\ldots\frac{kdy}{2\sqrt{(k^2-2ky^2+y^4-4m)}}.$$

In questo secondo membro, l' integrale del primo termine è una quantità algebraica, quello del secondo, per essere k^2-4m quantità negativa, dipende dalla rettificazione dell'iperbola, e quello del terzo è dato dalla formula III^a. del §. antecedente.

§. 157. La formula (I^a.) del §. 15. $\frac{dx}{(x^2+n)\sqrt{(a'+b'x^2+c'x^4)}}$ è la più difficoltosa a trattarsi in generale per qualunque valore abbia n reale o immaginario; nel caso però che n sia nullo, o sia una quantità reale, l' integrale di essa dipende dalla rettificazione delle Sezioni Coniche.

Infatti facciamo $n=0$, e considerando tutte le formule che possono dare le diverse combinazioni dei segni della quantità sotto il radicale, si hanno come ai §§. antecedenti, queste quattro formule

I^a. . . . . . . $\frac{dx}{x^2\sqrt{(kx^2-x^4-m)}}$, m, k sono positivi

II^a. . . . . . . $\frac{dx}{x^2\sqrt{(kx^2-x^4+m)}}$, m positivo, k qualunque

III^a. . . . . . $\frac{dx}{x^2\sqrt{(kx^2+x^4-m)}}$, m positivo, k qualunque

IV^a. . . . . . $\frac{dx}{x^2\sqrt{(kx^2+x^4+m)}}$, m positivo, k qualunque.

La prima di queste formule dipende (106) nel suo integrale dalla rettificazione della parabola, e la seconda da quella dell' iperbola.

Per la terza, prendiamo il differenziale di $\frac{\sqrt{(kx^2+x^4-m)}}{x}$, e si avrà

$$d\left(\frac{\sqrt{(kx^2+x^4-m)}}{x}\right)=\frac{x^2dx}{\sqrt{(kx^2+x^4-m)}}+\frac{mdx}{x^2\sqrt{(kx^2+x^4-m)}};$$

quindi

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{(kx^2+x^4-m)}}=\frac{1}{m}.\frac{\sqrt{(kx^2+x^4-m)}}{x}-\frac{1}{m}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(kx^2+x^4-m)}}:$$

il primo termine di questo secondo membro è una quantità algebraica, e l' altro è la formula III^a. del §. antecedente.

Per la quarta facciamo $x=\frac{\sqrt{m}}{s}$, ed avremo

$\frac{dx}{x^2\sqrt{(kx^2+x^4+m)}} = -\frac{s^2ds}{\sqrt{(ks^2+s^4+m)}}$ che è la quarta formula del §. antecedente.

Se poi n fosse una quantità reale, allora facendo $x^2 + n = \frac{1}{z}$, la formula $\frac{dx}{(x^2+n)\sqrt{(a'+b'x^2+c'x^4)}}$ si trasforma in un'altra, la quale si riferisce a quelle già considerate. Resta dunque il solo caso in cui n sia immaginario, e questo eccettuato, gli integrali delle tre formule

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(a'+b'x^2+c'x^4)}},\ \int\frac{x^2dx}{\sqrt{(a'+b'x^2+c'x^4)}},\ \int\frac{dx}{(x^2+n)\sqrt{(a'+b'x^2+c'x^4)}}$$

dipendono dalla rettificazione delle Curve Coniche, Ellisse ed Iperbola.

§. 158. A queste tre formule integrali siamo giunti ricercando l'integrale di $\frac{Pdx}{\sqrt{(a+bx+cx^2+ex^3+fx^4)}}$, nella quale P è una funzione qualunque razionale di x; ora vi sono delle formule, le quali quantunque in apparenza più complicate, pure per adattate sostituzioni, possono ridursi alla superiore: ne indicheremo alcune.

La differenziale Xdx nella quale X sia una funzione di x e di quel radicale che indicheremo per R, si riporta sempre all'integrazione di $\frac{Pdx}{R}$. Infatti X dovendo avere necessariamente la forma $\frac{M+LR}{K+QR}$, M, L, K, Q essendo tante funzioni razionali di x, si vedrà chiaramente questa riduzione

$$\frac{M+LR}{K+QR} = \frac{(M+LR)(K-QR)}{(K+QR)(K-QR)} = \frac{MK-LQR^2}{K^2-Q^2R^2} - \frac{(QM-KL)R}{K^2-Q^2R^2} = \ldots$$

$$\frac{MK-LQR^2}{K^2-Q^2R^2} - \frac{(QM-KL)R^2}{K^2-Q^2R^2}\cdot\frac{1}{R}.$$

Rappresentiamo per N il primo termine di questo secondo membro, e per P il coefficiente di $\frac{1}{R}$, ed avremo $\frac{M+LR}{K+QR} = N + \frac{P}{R}$: quindi X$dx$ = Ndx + $\frac{Pdx}{R}$.

La differenziale $\frac{Pdx}{\sqrt{(a'+b'x^2+c'x^4+e'x^6)}}$ nella quale P è una funzione razionale di x, si riduce anche alla forma $\frac{Tdx}{\sqrt{(a+bx+cx^2+ex^3+fx^4)}}$. Infatti facendovi $x^2 = z$, e supponendo che P si cangi in $M + N\sqrt{z}$, si avrà

$$\int\frac{Pdx}{\sqrt{(a'+b'x^2+c'x^4+e'x^6)}} = \frac{(M+N\sqrt{z})dz}{2\sqrt{z}.\sqrt{(a'+b'z+c'z^2+e'z^3)}} = \ldots\ldots$$

$$\frac{M\,dz}{2\sqrt{(a'z+b'z^2+c'z^3+e'z^4)}} + \frac{Ndz}{2\sqrt{(a'+b'z+c'z^2+e'z^3)}}.$$

Queste due quantità si riducono alla formula $\frac{Tdx}{\sqrt{(a+bx+cx^2+ex^3+fx^4)}}$, facendo per la prima $a = 0$, e per la seconda $f = 0$.

§. 159. Nei §§. antecedenti abbiamo parlato degli integrali di quelle formule, i quali dipendono dalla rettificazione dell'ellisse e dell'iperbola: molto guadagneremo nella semplicità, se riducendo la rettificazione stessa dell'iperbola a quella dell'ellisse, potremo infine asserire che tutte le integrazioni superiori si riferiscono alla rettificazione dell'ellisse.

Da quanto abbiamo detto al §. 152. si sa che un arco di ellisse (prese le coordinate nel centro) corrispondente all'ascissa $= \frac{a\sqrt{(aa-uu)}}{\sqrt{(aa-bb)}}$, essendo a il semiasse maggiore, b il semiasse minore, è eguale a $-\int\frac{u^2du}{\sqrt{\{(a^2+b^2)u^2-u^4-a^2b^2\}}}$; indichiamo per E questo arco, ed avremo E $= - \ldots\ldots$

$$\int\frac{u^2du}{\sqrt{\{(a^2+b^2)u^2-u^4-a^2b^2\}}}.$$

Ora supponendo $\frac{\sqrt{\{(a^2+b^2)u^2-u^4-a^2b^2\}}}{u} = y$, si ha $dE = \frac{dy}{2} + \frac{(a^2+b^2-y^2)dy}{2\sqrt{\{(a^2+b^2-y^2)^2-4a^2b^2\}}}$, ovvero

$$dE = \frac{dy}{2} + \frac{(a^2+b^2-y^2)\,dy}{2\sqrt{(a^2+b^2+2ab-y^2)}.\sqrt{(a^2+b^2-2ab-y^2)}},$$ e facendo $a^2+b^2=c^2$, $a+b=e$, $a-b=f$, si trova

$$dE = \frac{dy}{2} + \frac{(c^2-y^2)\,dy}{2\sqrt{(e^2-y^2)}.\sqrt{(f^2-y^2)}}.$$

Facciamo ora

$$\frac{c^2-y^2}{\sqrt{(e^2-y^2)(f^2-y^2)}} = \frac{A\sqrt{(e^2-y^2)}}{\sqrt{(f^2-y^2)}} + \frac{B\sqrt{(f^2-y^2)}}{\sqrt{(e^2-y^2)}},$$ e determinando A, B in modo che quest' equazione sia soddisfatta, avremo $A+B=1$, $Ae^2+Bf^2=c^2$; quindi

$A = \frac{c^2-f^2}{e^2-f^2}$, $B = \frac{e^2-c^2}{e^2-f^2}$: sarà dunque

$$dE = \frac{dy}{2} + \frac{A\sqrt{(e^2-y^2)}\,dy}{2\sqrt{(f^2-y^2)}} + \frac{B\sqrt{(f^2-y^2)}\,dy}{2\sqrt{(e^2-y^2)}},$$ ed integrando

$$E = \frac{y}{2} + \frac{A}{2}\int\frac{dy\sqrt{(e^2-y^2)}}{\sqrt{(f^2-y^2)}} + \frac{B}{2}\int\frac{dy\sqrt{(f^2-y^2)}}{\sqrt{(e^2-y^2)}}.$$

Ciò premesso, poniamo $e^2-y^2=z^2$, ed avremo

$$\int\frac{dy\sqrt{(e^2-y^2)}}{\sqrt{(f^2-y^2)}} = \int\frac{-z^2dz}{\sqrt{(e^2-z^2)}.\sqrt{(z^2-(e^2-f^2))}},$$ che rappresenta un arco di ellisse E′ di cui il semiasse maggiore $= e$, ed il minore $= \sqrt{(e^2-f^2)}$, e l'ascissa $= \frac{e\sqrt{(e^2-z^2)}}{\sqrt{(e^2-f^2)}}$. Facciamo anche $f^2-y^2=t^2$, e si avrà

$$\int\frac{dy\sqrt{(f^2-y^2)}}{\sqrt{(e^2-y^2)}} = -\int\frac{t^2dt}{\sqrt{(f^2-t^2)}.\sqrt{(t^2+e^2-f^2)}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\sqrt{(f^2-t^2)}.\sqrt{(t^2+e^2-f^2)}}{t} + \int\frac{f^2(e^2-f^2)\,dt}{t^2\sqrt{(f^2-t^2)}.\sqrt{(t^2+e^2-f^2)}}:$$ di quest' espressione la prima parte è algebraica, la seconda rappresenta un arco di iperbola preso negativamente (152), i cui semiassi sono f, $\sqrt{(e^2-f^2)}$, e l' ascissa corrispondente contata dal centro, è

$\frac{f^2\sqrt{(t^2+e^2-f^2)}}{et}$. Se dunque noi indichiamo per H quest' arco, si ha

$$\int\frac{dy\sqrt{(f^2-y^2)}}{\sqrt{(e^2-y^2)}} = \frac{\sqrt{(f^2-t^2)}.\sqrt{(t^2+e^2-f^2)}}{t} - H.$$

In questa guisa troveremo

$$E = \frac{y}{2} + \frac{A}{2}E' + \frac{B}{2}.\frac{\sqrt{(f^2-t^2)}.\sqrt{(t^2+e^2-f^2)}}{t} - \frac{B}{2}.H$$

da cui si ricaverà

$$H = \frac{2}{B}\left\{\frac{y}{2} + \frac{A}{2}E' - E + \frac{B}{2}.\frac{\sqrt{(f^2-t^2)}.\sqrt{(t^2+e^2-f^2)}}{t}\right\} =$$

$$\frac{y}{B} + \frac{A}{B}E' - \frac{2E}{B} + \frac{\sqrt{(f^2-t^2)}.\sqrt{(t^2+e^2-f^2)}}{t},$$ equazione che ci dà l' arco dell' iperbola espresso per due archi d' ellissi. Si rammenti, che le coordinate avendo l' origine nel centro, gli archi dell' ellissi incominciamo dal centro, e sono nulli quando l' ascissa è nulla; di più, al secondo membro di quest' equazione converrà aggiungere una costante, e determinarla in modo, che i due membri si annullino nello stesso tempo.

§. 160. La riduzione degli integrali alla rettificazione dell' ellisse che abbiamo insegnata nei §§. antecedenti, sarebbe di nessuna utilità, quando non si conoscesse un metodo, onde avere almeno approssimatamente gli archi degl' ellissi che rappresentano i suddetti integrali, tanto per il caso di una piccola, che di una grande escentricità; noi in conseguenza ci impiegheremo ora nell' investigazione di serie convergenti che soddisfacciano al nostro bisogno.

Sia BAC un quarto d' ellisse, di cui C sia il centro,
Fig. 1. CA il semiasse maggiore $= 1$, CB la metà dell' asse minore $= b$, l' escentricità $= c$, e quindi $b = \sqrt{(1 - cc)}$. Fatto centro in C, con il raggio CA si descriva il quadrante AD, e prendasi un arco qualunque DZ $= \varphi$. Sia CP $= x$, PM $= y$, PZ $= z$, ed avremo $x = sen\,\varphi$, $z = cos\,\varphi$, $y : z :: b : 1$, $y = bz = b\cos\varphi$. Ciò premesso, si avrà (81) ....

$$BM = \int\left\{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}d\varphi,$$

$$BM = \int d\varphi\sqrt{(\cos\varphi^2 + b^2 sen\,\varphi^2)} = \int d\varphi\sqrt{(1 - sen\,\varphi^2 + sen\,\varphi^2 - cc\,sen\,\varphi^2)} = \int d\varphi\sqrt{(1 - cc\,sen\,\varphi^2)};$$ quest' integrale dee prendersi in modo che egli svanisca quando $\varphi = 0$.

Rappresentiamolo per $E(c, \varphi)$ o semplicemente per E, essendo $E(c, \varphi)$ una funzione dei due elementi c, φ, ed avremo allora Fig. 1.

$$BM = E(c, \varphi) = \int d\varphi \sqrt{(1 - c^2 sen\, \varphi^2)}.$$

Potremo avere addirittura l' arco BM, facendo nell' equazione (152), $s = \int \frac{\sqrt{(1 - \frac{1-b^2}{1} x^2)}}{\sqrt{(1-x^2)}} dx$, $x = sen\, \varphi$; poichè allora verrebbe $s = \int \frac{\sqrt{(1 - c^2 sen\, \varphi)}}{cos\, \varphi} cos\, \varphi d\varphi = \int \sqrt{(1 - c^2 sen\, \varphi)} . d\varphi$.

Se ci piacesse avere l' arco AM, che ha il suo principio all' estremità del grande asse, facendo $AZ = \varphi$, si troverebbe, indicandolo per $F(c, \varphi)$,

$$AM = F(c, \varphi) = \int d\varphi \sqrt{(1 - c^2 cos^2 \varphi)}.$$

Anche quest' integrale dee annullarsi quando $\varphi = 0$.

Occupiamoci dell' integrazione della formula

$$E(c, \varphi) = \int d\varphi \sqrt{(1 - c^2 sen\, \varphi^2)}.$$

Se noi sviluppiamo in serie il radicale, si trova

$$E(c, \varphi) = \int d\varphi \left\{ 1 - \frac{1}{2} c^2 sen\, \varphi^2 - \frac{1}{2.4} c^4 sen\, \varphi^4 - \frac{1.3}{2.4 6} c^6 sen\, \varphi^6 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} c^8 sen\, \varphi^8 - ec. \right\}$$

: ora le formule per la conversione delle potenze dei seni in espressioni ordinate per i seni degli angoli multipli, ci danno

$$sen\, \varphi^2 = \frac{1}{2} - \frac{cos\, 2\varphi}{2}$$

$$sen\, \varphi^4 = \frac{1.3}{2.4} - \frac{4\, cos\, 2\varphi}{2^3} + \frac{cos\, 4\varphi}{2^3}$$

$$sen\, \varphi^6 = \frac{1.3.5}{2.4.6} - \frac{15\, cos\, 2\varphi}{2^5} + \frac{6\, cos\, 4\varphi}{2^5} - \frac{cos\, 6\varphi}{2^5}$$

$$sen\, \varphi^8 = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} - \frac{56\, cos\, 2\varphi}{2^7} + \frac{28\, cos\, 4\varphi}{2^7} - \frac{8\, cos\, 6\varphi}{2^7} + \frac{cos\, 8\varphi}{2^7}$$

ec.

dunque sostituendo ed integrando, avremo questa serie

$$\begin{aligned} E(c, \varphi) = \varphi &- \frac{1}{2} c^2 \left(\frac{1}{2} \varphi - \frac{sen\, 2\varphi}{2^2} \right) \\ &- \frac{1}{2.4} c^4 \left(\frac{1.3}{2.4} \varphi - \frac{4\, sen\, 2\varphi}{2^4} + \frac{sen\, 4\varphi}{2^4.2} \right) \\ &- \frac{1.3}{2.4.6} c^6 \left(\frac{1.3.5}{2.4.6} \varphi - \frac{15\, sen\, 2\varphi}{2^6} + \frac{6\, sen\, 4\varphi}{2^6.2} - \frac{sen\, 6\varphi}{2^6.3} \right) \\ &- \frac{1.3.5}{2.4.6.8} c^8 \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \varphi - \frac{56\, sen\, 2\varphi}{2^8} + \frac{28\, sen\, 4\varphi}{2^8.2} - \frac{8\, sen\, 6\varphi}{2^8.3} + \frac{sen\, 8\varphi}{2^8.4} \right) \\ &- ec. \end{aligned}$$

Nella stessa maniera potrebbe trovarsi il valore di $F(c, \varphi)$, e si avrebbe

$$\begin{aligned} F(c, \varphi) = \varphi &- \frac{1}{2} c^2 \left(\frac{1}{2} \varphi + \frac{sen\, 2\varphi}{2^2} \right) \\ &- \frac{1}{2.4} c^4 \left(\frac{1.3}{2.4} \varphi + \frac{4\, sen\, 2\varphi}{2^4} + \frac{sen\, 4\varphi}{2^4.2} \right) \\ &- \frac{1.3}{2.4.6} c^6 \left(\frac{1.3.5}{2.4.6} \varphi + \frac{15\, sen\, 2\varphi}{2^6} + \frac{6\, sen\, 4\varphi}{2^6.2} + \frac{sen\, 6\varphi}{2^6.3} \right) \\ &- ec. \end{aligned}$$

Fig. 1. Per ottenere la quarta parte dell' ellisse, dobbiam fare $\varphi = 90° = DA$, ed avremo allora $sen\, 2\varphi = sen\, 4\varphi = sen\, 8\varphi = ec. = 0$; quindi indicando π la semicirconferenza di un circolo che ha per raggio l' unità, e rappresentando per $E1$ questa quarta parte d' ellisse, sarà

$$E1 = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2} . \frac{1}{2} c^2 - \frac{1}{2.4} . \frac{1.3}{2.4} c^4 - \frac{1.3}{2.4.6} . \frac{1.3.5}{2.4.6} c^6 - ec. \right\}, (a)$$

(a) Si ricava di quì una regola sufficientemente esatta in pratica per avere la lunghezza degli archi dei ponti ec, che sono semi-ellissi „ *Al triplo del quadrato del semiasse maggiore aggiungete il quadrato del semiasse minore, prendete il quoziente di questa somma, divisa per lo stesso semiasse maggiore, e moltiplicatelo per il numero fisso* 0,7854, *ed avrete la lunghezza cercata* „.

la quale serie combina con quella trovata nel Cap I. Essa tanto più converge, quanto l' escentricità è minore, o quanto meno l' ellisse è allungata.

Queste due formule ci danno la lunghezza di un arco, o dell' intiera ellisse, quando il semiasse maggiore $= 1$: se però si avesse un' ellisse, il cui semiasse maggiore fosse $= a$, per adattarvi le serie trovate, converrebbe porvi $\frac{c}{a}$, invece di c, ed in seguito moltiplicare per a tutta l' intiera serie. Infatti data un' ellisse, il cui semiasse maggiore sia $= a$, la sua escentricità $= c$, supponiamo che se ne formi una simile ad essa col semiasse maggiore $= 1$; l' escentricità di questa seconda ellisse, sarà $\frac{c}{a}$, e gli archi di essa moltiplicati per a, eguaglieranno quei della prima ellisse in virtù delle proporzionalità, che hanno luogo nelle ellissi simili.

§. 161. Quando l' ellisse è molto allungata, ovvero quando l' escentricità c si avvicina all' unità, le formule del §. antecedente non sono più convergenti, almeno rapidamente, e bisogna in conseguenza cercare altra strada, onde avere approssimatamente la lunghezza di un arco d' ellisse.

Al fine bramato ci condurrà un teorema del Conte Fagnani (a), il quale riguarda gli archi d' ellisse, la cui differenza

(a) Il Conte Giulio Fagnani, Patrizio di Sinigaglia, fiorì in Italia al principio del passato secolo, e vi sostenne l' Onor Nazionale nella arena, che era stata aperta ai Geometri con la scoperta dei nuovi Calcoli. Egli proposè, secondo il sistema di quei tempi, ai Geometri tutti d' Europa la soluzione di questo Problema „ *Sia data una Parabola biquadratica primaria, che ha per equazione costitutiva* $x^4 = y$, *e sia data ancora una porzione di essa: dimando, che si assegni un' altra porzione della medesima curva tale, che la differenza delle porzioni suddette sia rettificabile* „ Questo Problema che allora era un Problema di prima difficoltà, non essendo stato sciolto da alcuno, determinò Fagnani a pubblicarne la soluzione nel Tomo XX. del Giornale dei Letterati d' Italia, inserendovi uno scritto, il cui titolo è „ *Nuovo metodo per rettificare le differenze di due archi (uno dei quali è dato) in infinite specie di parabole irrettificabili* „: si vedano le sue Opere Tom. II. pag. 317. Nel medesimo Tomo „ *Nella sua nuova misura degli Archi Ellittici ed Iperbolici* „ si trova alla pag. 336. il quì sopra citato Teorema.

è assignabile in linea retta. Troviamo dunque questo teorema.

Differenziando la quantità

$V = \frac{sen\,\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 sen\,\varphi^2)}}$, si ha

$$c^2 dV = d\varphi\sqrt{(1 - c^2 sen\,\varphi^2)} - \frac{(1-c^2)d\varphi}{(1 - c^2 sen\,\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ora supponiamo $tang\,\Psi = b\,tang\,\varphi$, e si avrà

$d\varphi = \frac{1}{b}\cos\varphi^2 . \frac{d\Psi}{\cos\Psi^2}$: ma la relazione posta tra Ψ e φ, ci da le due equazioni

$\frac{sen\,\Psi}{\cos\Psi} = b\frac{sen\,\varphi}{\sqrt{(1 - sen\,\varphi^2)}}$, $\frac{sen\,\Psi}{\cos\Psi} = b\frac{\sqrt{(1-\cos\varphi^2)}}{\cos\varphi}$, quindi ricavando da esse il valore di $sen\,\varphi$, e di $\cos\varphi$, e fattene le debite sostituzioni, avremo

$\frac{(1-c^2)d\varphi}{(1 - c^2 sen\,\varphi^2)^{\frac{3}{2}}} = d\Psi . \sqrt{(1 - c^2\cos\Psi^2)}$; sarà dunque

$c^2 dV = d\varphi\sqrt{(1 - c^2 sen\,\varphi^2)} - d\Psi\sqrt{(1 - c^2\cos\Psi^2)}$, ed integrando

$$E(c, \varphi) - F(c, \Psi) = c^2 V = \frac{c^2 sen\,\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 sen\,\varphi^2)}}.$$

Ecco l' artifizio analitico del quale fa uso questo Geometra nella soluzione dei suoi Problemi.

„ Un polinomio si dice trasformato in un altro negativamente simile, „ quando moltiplicando il primo col segno positivo, e l' altro col segno „ negativo, si trova che uno è dato per la sua variabile, come l' altro „ per la propria, verbigrazia, se il binomio $\frac{x^{tm}dx}{\sqrt{(x^m + 1)}}$ è cangiato in que- „ st' altro $- \frac{z^{tm}dz}{\sqrt{(z^m + 1)}}$ egli si dice trasformato in un altro binomio ne- „ gativamente simile „.

Ciò premesso le sue soluzioni, sono sempre ridotte a questa ricerca „ Dato un polinomio in x, trovare per x una tal funzione di un' altra „ variabile z, tale che sostituita invece di x in quel polinomio lo cangi in un altro negativamente simile „.

Se pertanto prenderemo un arco qualunque DZ $= \varphi$, ed un arco AR $= \Psi$, tale che $tang\,\Psi = b\, tang\,\varphi$, la differenza dei due archi ellittici BM, AN sarà eguale alla linea retta Fig. 1.

$$\frac{c^2\, sen\,\varphi \cos\varphi}{\sqrt{(1 - c^2\, sen\,\varphi^2)}}.$$

Questa retta è la differenza delle tangenti MT, NS, di modo che si ha questa singolarissima proprietà BM $-$ AN $=$ MT $-$ NS.

Affine di dimostrarla, prolunghiamo la tangente TM fino in T′. Facendo CP $= x$, e rappresentando per $y^2 = (1 - c^2)(1 - x^2)$ l'equazione dell'ellisse, si trova (79) la suttangente

$PT' = \frac{1 - xx}{x}$, e di quì

$$MT' = \frac{\sqrt{(1 - xx)}\sqrt{(1 - c^2 x^2)}}{x},\quad MT = \frac{x\sqrt{(1 - c^2 x^2)}}{\sqrt{(1 - xx)}}.$$

Se nell'espressione di MT′ facciamo $x = CQ = \cos\Psi$, si avrà il valore di NS, che diverrà

$$NS = \frac{\sqrt{(1 - \cos\Psi^2)}\sqrt{(1 - c^2\cos\Psi^2)}}{\cos\Psi} = \frac{b^2\, sen\,\varphi}{\cos\varphi . \sqrt{(1 - c^2\, sen\,\varphi^2)}}:$$ nella stessa guisa ponendo in MT, $\cos\varphi$ invece di x, sarà

$MT = \frac{sen\,\varphi . \sqrt{(1 - c^2\, sen\,\varphi^2)}}{\sqrt{(1 - sen\,\varphi^2)}}$, ed in conseguenza

$$MT - NS = \frac{sen\,\varphi}{\cos\varphi}\left\{\sqrt{(1 - c^2\, sen\,\varphi^2)} - \frac{b^2\, sen\,\varphi}{\sqrt{(1 - c^2\, sen\,\varphi^2)}}\right\} =$$

$$\frac{sen\,\varphi . c^2 (1 - sen\,\varphi^2)}{\cos\varphi . \sqrt{(1 - c^2\, sen\,\varphi^2)}} = \frac{c^2\, sen\,\varphi \cos\varphi}{\sqrt{(1 - c^2\, sen\,\varphi^2)}};$$ sarà dunque

$$BM - AN = \frac{c^2\, sen\,\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(1 - c^2\, sen\,\varphi^2)}} = MT - NS \ \ldots\ldots\ (1).$$

Da quest' equazione si ricava quest' altra

$$(2)\ \ldots\ldots\ BM + BN = BA + \frac{c^2\, sen\,\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(1 - c^2\, sen\,\varphi^2)}}.$$

Ora se facciamo $\Psi = 90° - \omega$, avremo

$$(3)\ \ldots\ldots,\ E(c, \varphi) + E(c, \omega) = E1 + \frac{c^2\, sen\,\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(1 - c^2\, sen\,\varphi^2)}}$$

Fig. 1. regnando tra φ ed ω questa relazione

$$1 = b\, tang\,\varphi . tang\,\omega.$$

E questo è il celebre Teorema del Conte Fagnani.

Sia $\Psi + \varphi = 90°$, ed avremo in questo caso l'equazione $tang\,\Psi = b\, tang\,\varphi$, che si ridurrà a quest' altra

$\frac{1}{\cot\varphi} = b\, tang\,\varphi$, e quindi $tang\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{b}}$, $tang\,\Psi = \sqrt{b}$.

Prendendo dunque $tang$ DI $= \frac{1}{\sqrt{b}}$, ovvero $tang$ AI $= \sqrt{b}$, il punto I ci determinerà sopra il perimetro dell' ellisse un altro punto K, per il quale la differenza dei due archi RK e KA, sarà $= 1 - b$, cioè alla differenza dei due semiassi CA, CB, perilchè si avrà dall' equazione (1), BK $-$ AK $=$ CA $-$ CB; infatti essendo $tang\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{b}}$, si ha $sen\,\varphi^2 = \frac{1}{b+1}$, $\cos\varphi^2 = \frac{b}{b+1}$, ed in conseguenza $\frac{c^2\, sen\,\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(1 - c^2\, sen\,\varphi^2)}} = \frac{c^2\sqrt{b}}{(b+1)\sqrt{b}} = 1 - b$, perchè $c^2 = 1 - b^2$.

Questa differenza è nel tempo stesso il massimo della quantità $\frac{c^2\, sen\,\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(1 - c^2\, sen\,\varphi^2)}}$, come ce ne potremo assicurare cercando il valore di φ, che rende massima la funzione stessa $\frac{c^2\, sen\,\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(1 - c^2\, sen\,\varphi^2)}}$; imperocchè si troverebbe $sen\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{(b+1)}}$.

Osserviamo anche rapporto a questo punto K, che condotta la tangente bKa, terminata ai due assi, la parte bK sarà eguale al semiasse maggiore, e la parte aK al semiasse minore.

Nelle ellissi poco escentriche, il punto K è quasi al mezzo dell' arco BKA, ed in quelle molto allungate l'ordinata KL è vicinissima alla sommità A.

L' equazione poi (3), quando facciamo $\omega = \varphi$, ci dà $2E(c, \varphi) = E1 + 1 - b$.

§. 162. Tutto questo premesso, riprendiamo la formula $\int d\varphi \sqrt{(1 - c^2\, sen\,\varphi^2)}$, la quale si trasforma come segue

$\int d\varphi \surd (1 - c^2 sen\, \varphi^2) = \int d\varphi \surd (1 - sen\, \varphi^2 + b^2 sen\, \varphi^2) =$ Fig. 1.
$\int d\varphi \cos\varphi \surd (1 + b^2 tang\, \varphi^2)$; dovremo dunque integrare
$\int d\varphi \cos\varphi \surd (1 + b^2 tang\, \varphi^2) = \mathrm{E}(c, \varphi)$.

Se noi supponiamo che l' arco d' ellisse non vada al di là del punto K, cioè che sia sempre minore di BK, il termine $b^2 tang\, \varphi^2$, il quale diviene $= b$ nel punto K, sarà sempre una quantità piccolissima riguardo al primo termine 1, e si avrà questa serie convergentissima

$$\mathrm{BM} = \int d\varphi \cos\varphi . (1 + \tfrac{1}{2} b^2 tang . \varphi^2 - \tfrac{1}{2.4} b^4 tang\, \varphi^4 + \tfrac{1.3}{2.4.6} b^6 tang\, \varphi^6 - \text{ec.}) = \int d\varphi \cos\varphi + \tfrac{1}{2} b^2 \int \tfrac{sen\, \varphi^2}{\cos\varphi} d\varphi - \tfrac{1}{2.4} b^4 \int \tfrac{d\varphi\, sen\, \varphi^4}{\cos\varphi^3} + \tfrac{1.3}{2.4.6} b^6 \int \tfrac{d\varphi\, sen\, \varphi^6}{\cos\varphi^5} - \tfrac{1.3.5}{2.4.6.8} b^8 \int \tfrac{d\varphi\, sen\, \varphi^8}{\cos\varphi^7} + \text{ec.}$$

Ora $\int d\varphi \cos\varphi = sen\, \varphi$, e dal Cap. I. si ricava

$$\int \tfrac{d\varphi\, sen\, \varphi^2}{\cos\varphi} = - sen\, \varphi + l\, tang (45^\circ + \tfrac{1}{2} \varphi) = - sen\, \varphi + l \tfrac{1 + sen\, \varphi}{\cos\varphi};$$

$$\int \tfrac{d\varphi\, sen\, \varphi^4}{\cos\varphi^3} = \tfrac{1}{2} . \tfrac{sen\, \varphi^5}{\cos\varphi^2} - \tfrac{3}{2} \int \tfrac{d\varphi\, sen\, \varphi^4}{\cos\varphi} = \tfrac{1}{2} . \tfrac{sen\, \varphi^5}{\cos\varphi^2} - \tfrac{3}{2} \{ - \tfrac{1}{3} sen\, \varphi^3 - sen\, \varphi + l \tfrac{1 + \cos\varphi}{\cos\varphi} \} = \tfrac{1}{2} . \tfrac{sen\, \varphi^5}{\cos\varphi^2} + \tfrac{1.3}{2.3} sen\, \varphi^3 + \tfrac{3}{2} sen\, \varphi - \tfrac{3}{2} l \tfrac{1 + sen\, \varphi}{\cos\varphi};$$

$$\int \tfrac{d\varphi\, sen\, \varphi^6}{\cos\varphi^5} = \tfrac{1}{4} . \tfrac{sen\, \varphi^7}{\cos\varphi^4} - \tfrac{3}{4} \int \tfrac{d\varphi\, sen\, \varphi^6}{\cos\varphi^3} = \tfrac{1}{4} . \tfrac{sen\, \varphi^7}{\cos\varphi^4} - \tfrac{3}{4} \{ \tfrac{1}{2} \tfrac{sen\, \varphi^7}{\cos\varphi^2} - \tfrac{5}{2} \int \tfrac{d\varphi\, sen\, \varphi^6}{\cos\varphi} \} = \tfrac{1}{4} \tfrac{sen\, \varphi^7}{\cos\varphi^4} - \tfrac{1.3}{2.4} . \tfrac{sen\, \varphi^7}{\cos\varphi^2} + \tfrac{3\ 5}{2.4} \{ - \tfrac{1}{5} sen\, \varphi^5 - \tfrac{1}{3} sen\, \varphi^3 - sen\, \varphi + l \tfrac{1 + sen\, \varphi}{\cos\varphi} \} = \tfrac{1}{4} \tfrac{sen\, \varphi^7}{\cos\varphi^4} - \tfrac{1.3}{2.4} \tfrac{sen\, \varphi^7}{\cos\varphi^2} - \tfrac{3}{2.4} sen\, \varphi^5 - \tfrac{5}{2.4} sen\, \varphi^3 - \tfrac{3.5}{2.4} sen\, \varphi + \tfrac{3.5}{2.4} l \tfrac{1 + sen\, \varphi}{\cos\varphi} \text{ ec.};$$

dunque

$$(a) \ldots \mathrm{BM} = sen\, \varphi + \{ \tfrac{1}{2} b^2 + \tfrac{1.3}{2.4} . \tfrac{1}{2} b^4 + \tfrac{1.3.5}{2.4.6} . \tfrac{1.3}{2.4} b^6 + \text{ec.} \} (- sen\, \varphi + l \tfrac{1 + sen\, \varphi}{\cos\varphi}) - \tfrac{1}{2.4} b^4 . \tfrac{1}{2} sen\, \varphi^3 \{ tang\, \varphi^2 + 1 \} + \tfrac{1.3}{2.4.6} b^6 . \{ \tfrac{sen\, \varphi^3\, tang\, \varphi^4}{4} - \tfrac{1.3}{2.4} sen\, \varphi^5\, tang\, \varphi^2 - \tfrac{3}{2.4} sen\, \varphi^5 - \tfrac{5}{2.4} sen\, \varphi^3 \} - \text{ec.}$$

Fig. 1.

Per avere l' arco BK si farà $tang\, \varphi = \frac{1}{\surd b}$, $sen\, \varphi = \frac{1}{\surd (b+1)}$, e si avrà

$$\mathrm{BK} = \tfrac{1}{\surd (b+1)} + \{ \tfrac{1}{2} b^2 + \tfrac{1.3}{2.4} . \tfrac{1}{2} b^4 + \tfrac{1.3.5}{2.4.6} . \tfrac{1.3}{2.4} b^6 + \text{ec.} \} (- \tfrac{1}{\surd (1+b)} + l \tfrac{1 + \surd (1+b)}{\surd b}) - \tfrac{1}{2.4} b^4 (\tfrac{1}{2 (b+1)^{\frac{3}{2}} b} + \tfrac{1}{2 (b+1)^{\frac{3}{2}}}) + \tfrac{1.3}{2.4.6} b^6 \{ \tfrac{1}{4 (b+1)^{\frac{3}{2}} b^2} - \tfrac{1.3}{2.4} . \tfrac{1}{(b+1)^{\frac{5}{2}} b} - \tfrac{1.3}{2.4} . \tfrac{1}{(b+1)^{\frac{5}{2}}} - \tfrac{5}{2.4} . \tfrac{1}{(b+1)^{\frac{3}{2}}} \} + \text{ec.}$$

Ora il coefficiente di $- \frac{1}{2.4} b^4$ è $= \frac{1}{b \surd (b+1)} . \frac{1}{2}$, e quello di $\frac{1.3}{2.4.6} b^6$ è $= \frac{1}{b^2 (b+1)^{\frac{1}{2}}} \{ \frac{1}{4} - \frac{5b}{2.4} \}$ ec.; dunque sarà, facendo per abbreviare

$$\mathrm{H} = \tfrac{1}{2} b^2 + \tfrac{1.3}{2.4} . \tfrac{1}{2} b^4 + \tfrac{1.3.5}{2.4.6} . \tfrac{1.3}{2.4} b^6 + \text{ec.}$$

$$\mathrm{G} = 1 - \tfrac{1}{2.4} b^3 . \tfrac{1}{2} + \tfrac{1.3}{2.4.6} b^4 (\tfrac{1}{4} - \tfrac{5}{4} . \tfrac{b}{2}) - \tfrac{1.3.5}{2.4.6.8} b^5 (\tfrac{1}{6} - \tfrac{7}{6} . \tfrac{b}{4} + \tfrac{7.5}{6.4} . \tfrac{b^2}{2}) + \text{ec.},$$

$$\mathrm{BK} = \tfrac{\mathrm{G}}{\surd (1+b)} + \mathrm{H} (- \tfrac{1}{\surd (1+b)} + l \tfrac{1 + \surd (1+b)}{\surd b}).$$

In quest' ultima espressione possiam mettere invece di —

$\frac{1}{\sqrt{(1+b)}} + l\,\frac{1+\sqrt{(1+b)}}{\sqrt{b}}$, la serie regolare Fig. 1.

$$l\left(\frac{2}{\sqrt{b}}\right) - 1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{b}{2} - \frac{3.5}{2.4}\cdot\frac{b^2}{4} + \frac{3.5.7}{2.4.6}\cdot\frac{b^3}{6} - \text{ec.}$$

La quarta parte dunque dell' ellisse, cioè $E1$ sarà $= 2BK - 1 + b$, giacchè la differenza tra i due archi BK, AK è $1 - b$, e si avrà

$$E1 = \frac{2G}{\sqrt{(1+b)}} - 1 + b + 2H\left(-\frac{1}{\sqrt{(1+b)}} + l\,\frac{1+\sqrt{(1+b)}}{\sqrt{b}}\right).$$

Siccome l' ellisse si suppone allungatissima, così le potenze di b, saranno quantità assai piccole, perilchè sviluppando in serie il valore di $E1$, e trascurando le potenze ottave di b, e le superiori ad esse, avremo

$$E1 = 1 - \frac{1}{4}b^2 - \frac{13}{64}.b^4 - \frac{9}{64}b^6$$

$$+ \left(\frac{1}{2}b^2 + \frac{1.3}{2.4}.\frac{b^4}{4} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1.3}{2.4}b^6 + \text{ec.}\right) l\,\frac{4}{b},$$

ove è osservabile che nelle due serie s' incontrano solo le potenze pari di b.

Dopo tutto questo ci resterà facilissimo calcolare la lunghezza di un arco qualunque $E(c,\varphi)$ per tutti i valori di φ; imperocchè se $tang\,\varphi < \frac{1}{\sqrt{b}}$, la formula ($a$) dà subito il valore di $E(c,\varphi)$; e se $tang\,\varphi > \frac{1}{\sqrt{b}}$, bisognerà calcolare l' arco BN per mezzo del suo complemento AN, che resta a compire il quarto dell' ellisse, e questo stesso complemento si calcolerà per mezzo dell' arco BM, il quale differisce da esso di una quantità conosciuta; così facendo $DR = \varphi$, sarà $RA = 90° - \varphi$, e se si prende un arco DZ, tale che $tang\,RA = b\,tang\,DZ$, ovvero $tang\,(90° - \varphi) = cot\,\varphi = b\,tang\,DZ$, si avrà per il teorema del §. antecedente, indicando DZ per φ', $E(c,\varphi') =$

$AN + \frac{c^2\,sen\,\varphi'\,cos\,\varphi'}{\sqrt{(1-c^2\,sen\,\varphi'^2)}}$; quindi $AN = E(c,\varphi') - \ldots\ldots$

$\frac{c^2\,sen\,\varphi'\,cos\,\varphi'}{\sqrt{(1-c^2\,sen\,\varphi'^2)}}$; avremo infine

$$E(c,\varphi) = E1 - E(c,\varphi') + \frac{c^2\,sen\,\varphi'\,cos\,\varphi'}{\sqrt{(1-c^2\,sen\,\varphi'^2)}}.$$

Pertanto potremo sempre avere, qualunque sia l' escentricità dell' ellisse, la lunghezza approssimata di una qualunque di lei porzione. Non ci fermeremo a parlare della rettificazione dell' iperbola, e perchè questa ricerca è meno importante di quella dell' ellisse, e perchè, come si è veduto (159), la di lei rettificazione dipende da quella dell' ellisse medesima. Sopra questi oggetti si posson leggere due eccellenti Memorie del Sig. Le-Gendre inserite nel Tomo dell' Accademia Reale delle Scienze di Parigi dell' Anno 1786.

§. 163. Se rappresentiamo per Δ la quantità $\sqrt{(1 - c^2\,sen\,\varphi^2)}$, per mezzo della rettificazione dell' ellisse potremo avere gl' integrali delle due formule

$$\int \Delta^{2m+1}\,d\varphi,\ \int \frac{d\varphi}{\Delta^{2m+1}}:$$

essi dipenderanno da questi

$$\int \Delta\,d\varphi,\ \int \frac{d\varphi'}{\Delta}$$

che sono le formule più semplici di questo genere.

Per cominciare dalla seconda, io osservo che considerando c come una variabile, si ha

$\left(\frac{d\Delta}{dc}\right) = \frac{-c\,sen\,\varphi^2}{\sqrt{(1-c^2\,sen\,\varphi^2)}} = \frac{\Delta^2-1}{c\Delta}$; ora essendo $\int \Delta\,d\varphi = E$, se differenziamo questa equazione per rapporto alla variabile c, avremo (164)

$\int \left(\frac{d\Delta}{dc}\right) d\varphi = \int \frac{\Delta d\varphi}{c} - \int \frac{d\varphi}{c\Delta} = \left(\frac{dE}{dc}\right)$, e quindi

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta} = E - c\left(\frac{dE}{dc}\right).$$

Differenziando quest' ultima equazione rapporto alla c, otterremo

$$-\int \frac{\left(\frac{d\Delta}{dc}\right) d\varphi}{\Delta^2} = -\int \frac{d\varphi}{c\Delta} + \int \frac{d\varphi}{c\Delta^3} = \left(\frac{dE}{dc}\right) - \left(\frac{dE}{dc}\right) c\left(\frac{d^2E}{dc^2}\right),$$

e quindi

$\int\frac{d\varphi}{\Delta^3} = E - c\left(\frac{dE}{dc}\right) - c^2\left(\frac{d^2E}{dc^2}\right)$; egualmente si troverebbe

$\int\frac{d\varphi}{\Delta^5} = E - c\left(\frac{dE}{dc}\right) - 2c^2\left(\frac{d^2E}{dc^2}\right) - \frac{1}{3}c^3\left(\frac{d^3E}{dc^3}\right)$ ec.;

così gli integrali delle formule

$\int\frac{d\varphi}{\Delta}$, $\int\frac{d\varphi}{\Delta^3}$, $\int\frac{d\varphi}{\Delta^5}$ ec., sono dati per mezzo di un arco d' ellisse e delle sue differenze parziali rapporto all' escentricità.

Ma qualunque sia m positiva o negativa, purchè sia un numero intiero, facciamo

$A\int d\varphi\,\Delta^{2m+1} = B\int d\varphi\,\Delta^{2m-1} + C\int d\varphi\,\Delta^{2m-3} + \Delta^{2m-1}\,sen\,\varphi \times cos\,\varphi$, e determiniamo A, B, C in modo che questa equazione sia identica.

Differenziamo per questo la supposta equazione, e dividendola tutta per Δ^{2m-3}, avremo

$A\Delta^4 = B\Delta^2 + C + \Delta^2 cos\,\varphi^2 - \Delta^2 sen\,\varphi^2 - (2m-1)\,c^2 sen\,\varphi^2 cos\,\varphi^2$, ove ponendo $1 - sen\,\varphi^2$ per $cos\,\varphi^2$, $1 - c^2 sen\,\varphi^2$ per Δ^2, quindi eguagliando i coefficienti delle respettive potenze di $sen\,\varphi$, troveremo

$A = \frac{2m+1}{c^2}$, $B = \frac{2m(2-c^2)}{c^2}$, $C = -\frac{(2m-1)(1-c^2)}{c^2}$,

ed in conseguenza

$$(a)\ldots(2m+1)\int d\varphi\,\Delta^{2m+1} = 2m(2-c^2)\int d\varphi\,\Delta^{2m-1} - (2m-1)(1-c^2)\int d\varphi\,\Delta^{2m-3} + c^2\Delta^{2m-1} sen\,\varphi\,cos\,\varphi;$$

così

per $m = 1$, si avrà $3\int d\varphi\,\Delta^3 = 2(2-c^2)\int d\varphi\,\Delta - (1-c^2)\int\frac{d\varphi}{\Delta} + c^2\,\Delta\,sen\,\varphi\,cos\,\varphi$

per $m = 2$, ... $5\int d\varphi\,\Delta^5 = 4(2-c^2)\int d\varphi\,\Delta^3 - 3(1-c^2)\int\Delta\,d\varphi + c^2\Delta^3\,sen\,\varphi\,cos\,\varphi$

per $m = 3$, ... $7\int d\varphi\,\Delta^7 = 6(2-c^2)\int d\varphi\,\Delta^5 - 5(1-c^2)\int\Delta^3 d\varphi + c^2\Delta^5 sen\,\varphi\,cos\,\varphi$;

ec. ec.

Concluderemo di quì che l' integrale della formula $\int\Delta^{2m+1}d\varphi$ sarà dato per mezzo degli integrali $\int\Delta\,d\varphi$, $\int\frac{d\varphi}{\Delta}$.

Anzi per mezzo dell' equazione (a) si potranno sempre eliminare dagli integrali le differenze parziali di E al di là del primo ordine; infatti facendo in essa $m = 0$, otteniamo l' equazione

$\int\Delta\,d\varphi = (1-c^2)\int\frac{d\varphi}{\Delta^3} + \frac{c^2 sen\,\varphi\,cos\,\varphi}{\Delta}$, nella quale ponendo i ritrovati valori degli integrali, ne nascerà la seguente

$$(b)\ldots\ldots(1-c^2)\left(\frac{d^2E}{dc^2}\right) + \frac{1-c^2}{c}\cdot\left(\frac{dE}{dc}\right) + E - \frac{sen\,\varphi\,cos\,\varphi}{\Delta} = 0,$$

per mezzo di cui potremo sempre eliminare le differenziali parziali di E al di là del primo ordine.

L' equazione (b) è degna di tutta l' attenzione dei Geometri: essa esprime con la più gran semplicità ed eleganza la relazione che passa tra un arco d' ellisse E, l' escentricità c, e l' angolo φ del circolo che corrisponde al suddetto arco: è dovuta al Geometra quì sopra citato.

§. 164. In tutti gli integrali da noi ottenuti per mezzo delle serie, abbiam cercato che quelle fossero convergenti, onde ci potessimo sempre più avvicinare al vero valore degli integrali stessi, col prendere un maggior numero dei loro termini. Senza di ciò il metodo d' integrare per serie, sarebbe di niun vantaggio, mentre d' altr' onde, data la convergenza alle serie, egli è uno dei più fecondi ripieghi d' integrazione. Noi pensiamo che non sarà in conseguenza opera perduta il trattenervisi anche un poco.

Il metodo d' integrazione per parti ci dà una formula generalissima per avere in serie gl' integrali; sia infatti $dy = Xdx$, essendo X una funzione di x, ed avremo (108)

$$y = \mathrm{X}x - \int x\left(\frac{d\mathrm{X}}{dx}\right)dx;$$

$$y = \mathrm{X}x - \frac{x^2}{2}\left(\frac{d\mathrm{X}}{dx}\right) + \int \frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2\mathrm{X}}{dx^2}\right)dx;$$

$$y = \mathrm{X}x - \frac{x^2}{2}\left(\frac{d\mathrm{X}}{dx}\right) + \frac{x^3}{2.3}\left(\frac{d^2\mathrm{X}}{dx^2}\right) - \int \frac{x^3}{2.3}\left(\frac{d^3\mathrm{X}}{dx^3}\right)dx;$$

$$y = \mathrm{X}x - \frac{x^2}{2}\left(\frac{d\mathrm{X}}{dx}\right) + \frac{x^3}{2.3}\left(\frac{d^2\mathrm{X}}{dx^2}\right) - \frac{x^4}{2.3.4}\left(\frac{d^3\mathrm{X}}{dx^3}\right) + \int \frac{x^4}{2.3.4}\left(\frac{d^4\mathrm{X}}{dx^4}\right)dx;$$

. . . .

$$y = \mathrm{X}x - \frac{x^2}{2}\left(\frac{d\mathrm{X}}{dx}\right) + \frac{x^3}{2.3}\left(\frac{d^2\mathrm{X}}{dx^2}\right) - \frac{x^4}{2.3.4}\left(\frac{d^3\mathrm{X}}{dx^3}\right) + \frac{x^5}{2.3.4.5}\left(\frac{d^4\mathrm{X}}{dx^4}\right) - \text{ec.} + \mathrm{C} \text{ costante}.$$

La qual serie, se nei casi particolari sarà convergente, ci darà speditamente il valore di y. Essa è stata data la prima volta da Giovanni Bernulli.

Si giunge alla medesima serie in quest' altra maniera. Dal Teorema di Tajlor si ha (5)

$$\varphi(x - x) = \mathrm{C} = \varphi(x) - x\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) - \frac{x^3}{2.3}\left(\frac{d^3\varphi}{dx^3}\right) + \text{ec.},$$

onde facendo $\varphi(x) = y$, $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right) = \mathrm{X}$, troveremo

$$y = \mathrm{C} + \mathrm{X}x - \frac{x^2}{2}\left(\frac{d\mathrm{X}}{dx}\right) + \frac{x^3}{2.3}\left(\frac{d^2\mathrm{X}}{dx^2}\right) - \text{ec., come quì sopra.}$$

Per esempio, facciamo $dy = \frac{dx}{a + x}$, e verrà ponendo $\mathrm{X} = \frac{1}{a + x}$, $\left(\frac{d\mathrm{X}}{dx}\right) = -\frac{1}{(a + x)^2}$ ec.,

$$y = \mathrm{C} + \frac{x}{a + x} + \frac{x^2}{2(a + x)^2} + \frac{x^3}{3(a + x)^3} + \frac{x^4}{4(a + x)^4} + \text{ec.}$$

la qual serie sarà sempre convergente, finchè a ed x saranno dello stesso grado.

Serviamoci ora di quella serie generale per dimostrare un interessantissimo teorema di un uso esteso nelle applicazioni del Calcolo Differenziale ed Integrale, chiamato da Leibniz, che ne fu l' Autore, *Differentiatio de Curva in Curvam*.

Supponendo che P rappresenti una funzione di due variabili x, y, e che non possa assegnarsi l' integrale $\int \mathrm{P}dx$, si dimandi la differenziale di questo integrale rapporto ad y, e dico che sarà

$\left(\frac{d\int \mathrm{P}dx}{dy}\right) = \int\left(\frac{d\mathrm{P}}{dy}\right)dx$. Se $\mathrm{P}dx$ fosse integrabile a riguardo di x, la ricerca non avria difficoltà.

Sia $z = \int \mathrm{P}dx$, e la formula superiore ci darà

$$z = x\mathrm{P} - \frac{x^2}{2}\left(\frac{d\mathrm{P}}{dx}\right) + \frac{x^3}{2.3}\left(\frac{d^2\mathrm{P}}{dx^2}\right) - \text{ec.};$$

Dunque

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)dy = dy\left\{x\left(\frac{d\mathrm{P}}{dy}\right) - \frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2\mathrm{P}}{dxdy}\right) + \frac{x^3}{2.3}\left(\frac{d^3\mathrm{P}}{dx^2dy}\right) - \text{ec.}\right\}.$$

Ma la stessa formula ci dà

$$\int\left(\frac{d\mathrm{P}}{dy}\right)dx = x\left(\frac{d\mathrm{P}}{dy}\right) - \frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2\mathrm{P}}{dydx}\right) + \frac{x^3}{2.3}\left(\frac{d^3\mathrm{P}}{dydx^2}\right) - \text{ec.};$$

Dunque

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)dy = \left(\frac{d\int \mathrm{P}dx}{dy}\right)dy = dy\int\left(\frac{d\mathrm{P}}{dy}\right)dy, \text{ e quindi}$$

$$\left(\frac{d\int \mathrm{P}dx}{dy}\right) = \int\left(\frac{d\mathrm{P}}{dy}\right)dx.$$

§. 165. Il Sig. Euler nel Cap. VII. Tom. I. del suo Calcolo Integrale ha dato un metodo generale per avere approssimatamente gli integrali delle funzioni differenziali, il quale per quanto si complichi nelle applicazioni pure, talvolta può esser di sommo vantaggio, quando specialmente ci manchino altri artifizi. Eccomi ad esporlo.

Vogliasi l' integrale della formula $\mathrm{F}(x)dx$, indicando per $\mathrm{F}(x)$ o per F qualunque funzione di x. Supponiamo che quest' integrale deva cominciare da $x = a$, e continuare in avanti per qualunque valore di x maggiore di a: (il discorso è lo stesso per $x < a$), e che di più in quel punto il valore dell' integrale sia dato. Sia quest' integrale $\int \mathrm{F}(x)dx = \varphi(x) = \varphi$, e $\varphi(a)$ sarà una quantità data.

Ora supponiamo che la differenza $x - a$ sia divisa in tante piccole porzioni (e quanto saran minori, tanto più esatto sarà il computo) che indicheremo per Δa, di modo che abbiasi $m\Delta a = x - a$ qualunque numero sia m, ed i valori di x, da a sino ad x, i quali rappresenteremo per a, a', a'', a''' ec., seguiranno questa legge

$$a = a$$
$$a' = a + \Delta a$$
$$a'' = a' + \Delta a = a + 2\Delta a$$
$$a''' = a'' + \Delta a = a + 3\Delta a$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a^{(m-1)} = a^{(m-2)} + \Delta a = a + (m-1)\Delta a$$
$$a^{(m)} = a^{(m-1)} + \Delta a = a + m\Delta a = x .$$

Di più, essendo $F(x) = (\frac{d\varphi}{dx})$, facciamo

$$(\tfrac{d^2\varphi}{dx^2}) = (\tfrac{dF}{dx}) = F'(x),$$
$$(\tfrac{d^3\varphi}{dx^3}) = (\tfrac{d^2F}{dx^2}) = F''(x),$$

ec. ec.

ed il Teorema di Tajlor ci darà le seguenti serie

$$\varphi(a') = \varphi(a + \Delta a) = \varphi(a) + F(a).\Delta a + F'(a)\times \tfrac{\Delta a^2}{2} + F''(a).\tfrac{\Delta a^3}{2.3} + F'''(a).\tfrac{\Delta a^4}{2.3.4} + \text{ec.}$$
$$\varphi(a'') = \varphi(a' + \Delta a) = \varphi(a') + F(a').\Delta a + F'(a')\times \tfrac{\Delta a^2}{2} + F''(a').\tfrac{\Delta a^3}{2.3} + F'''(a').\tfrac{\Delta a^4}{2.3.4} + \text{ec.}$$
$$\varphi(a''') = \varphi(a'' + \Delta a) = \varphi(a'') + F(a'').\Delta a + F'(a'')\times \tfrac{\Delta a^2}{2} + F''(a'').\tfrac{\Delta a^3}{2.3} + \text{ec.}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi(x) = \varphi(a^{(m)}) = \varphi(a^{(m-1)} + \Delta a) = \varphi(a^{(m-1)}) + F(a^{(m-1)}).\Delta a + F'(a^{(m-1)}).\tfrac{\Delta a^2}{2} + F''(a^{(m-1)}).\tfrac{\Delta a^3}{2.3} + \text{ec.}$$

le quali sommate, ci somministrano una serie per esprimere il valore di $\varphi(x)$, cioè

$$\begin{aligned}\varphi(x) = \varphi(a) &+ \Delta a \;\{F(a) + F(a') + F(a'') + \cdots\cdots + F(a^{(m-1)})\}\\ &+ \tfrac{\Delta a^2}{2} \{F'(a) + F'(a') + F'(a'') + \cdots\cdots + F'(a^{(m-1)})\}\\ &+ \tfrac{\Delta a^3}{2.3} \{F''(a) + F''(a') + F''(a'') + \cdots\cdots + F''(a^{(m-1)})\}\\ &+ \tfrac{\Delta a^4}{2.3.4} \{F'''(a) + F'''(a') + F'''(a'') + \cdots\cdots + F'''(a^{(m-1)})\}\\ &+ \text{ec.}\end{aligned} \qquad (A)$$

Questa serie sarà tanto più convergente, quanto più piccola sarà la differenza Δa.

Si può trovare un' altra serie per esprimere lo stesso integrale; imperocchè il medesimo Teorema di Tajlor dà

$$\varphi(a) = \varphi(a' - \Delta a) = \varphi(a') - \Delta a.F(a') + F'(a').\tfrac{\Delta a^2}{2} - F''(a')\times \tfrac{\Delta a^3}{2.3} + \text{ec.}$$

e perciò

$$\varphi(a') = \varphi(a) + F(a').\Delta a - F'(a').\tfrac{\Delta a^2}{2} + F''(a')\times \tfrac{\Delta a^3}{2.3} - \text{ec.},$$

e nella stessa maniera

$$\varphi(a'') = \varphi(a') + F(a'').\Delta a - F'(a'').\tfrac{\Delta a^2}{2} + F''(a'')\times \tfrac{\Delta a^3}{2.3} - \text{ec.}$$

$$\varphi(a''') = \varphi(a'') + F(a''').\Delta a - F'(a''').\frac{\Delta a^2}{2} + F''(a''') \times \frac{\Delta a^3}{2 \cdot 3} - \text{ec.}$$

$$\varphi(a'''') = \varphi(a''') + F(a'''').\Delta a - F'(a'''').\frac{\Delta a^2}{2} + F''(a'''') \times \frac{\Delta a^3}{2 \cdot 3} - \text{ec.}$$

. . . .

$$\varphi(a^{(m)}) = \varphi(x) = \varphi(a^{(m-1)}) + F(x).\Delta a - F'(x) \times \frac{\Delta a^2}{2} + F''(x).\frac{\Delta a^3}{2 \cdot 3} - \text{ec.}$$

Sommiamo tutte queste equazioni, ed avremo

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \varphi(a) + {} & \Delta a \left\{ F(a') + F(a'') + F(a''') + \ldots\ldots + F(x) \right\} \\ & - \frac{\Delta a^2}{2} \left\{ F'(a') + F'(a'') + F'(a''') + \ldots\ldots + F'(x) \right\} \\ & + \frac{\Delta a^3}{2 \cdot 3} \left\{ F''(a') + F''(a'') + F''(a''') + \ldots\ldots + F''(x) \right\} \\ & - \frac{\Delta a^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \left\{ F'''(a') + F'''(a'') + F'''(a''') + \ldots\ldots + F'''(x) \right\} \\ & + \text{ec.} \end{aligned} \quad (B)$$

serie che ci dà ancora il valore di $\varphi(x)$.

Di queste due serie (A), (B) potrem prendere quel numero di termini che ci fa bisogno, secondo l'approssimazione che si vuole nell'integrale, e secondo la grandezza data alla differenza Δa.

Anzi da queste due se ne può ricavare una terza molto più semplice; infatti si sommino, e dividendo per due questa

somma, otterremo

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \int F(x)\,dx = \varphi(a) + {} & \Delta a \left\{ \frac{F(a)}{2} + F(a') + F(a'') + \ldots\ldots + F(a^{(m-1)}) + \frac{F(x)}{2} \right\} \\ & + \frac{\Delta a^2}{2} \left\{ \frac{F'(a)}{2} - \frac{F'(x)}{2} \right\} \\ & + \frac{\Delta a^3}{2 \cdot 3} \left\{ \frac{F''(a)}{2} + F''(a') + F''(a'') + \ldots\ldots + F''(a^{(m-1)}) + \frac{F''(x)}{2} \right\} \\ & + \frac{\Delta a^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \left\{ \frac{F'''(a)}{2} - \frac{F'''(x)}{2} \right\} \\ & + \frac{\Delta a^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \left\{ \frac{F''''(a)}{2} + F''''(a') + F''''(a'') + \ldots\ldots + F''''(a^{(m-1)}) + \frac{F''''(x)}{2} \right\} \\ & + \frac{\Delta a^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \left\{ \frac{F^{v}(a)}{2} - \frac{F^{v}(x)}{2} \right\} \\ & + \text{ec.} \end{aligned}$$

Facciamone qualche esempio.

Si dimanda l'integrale di $\int \frac{e^x dx}{x}$ nella supposizione che sia nullo quando $x = 1$, e che si estenda sino ad $x = 2$. Sarà in questo caso $a = 1$, $x = 2$, $F(x) = \frac{e^x}{x}$, $\varphi(x) = \int \frac{e^x dx}{x}$, $\varphi(a) = 0$. Ora essendo

$$F(x) = \frac{e^x}{x}.(1)$$

$$F'(x) = \frac{e^x}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

$$F''(x) = \frac{e^x}{x}\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)$$

$$F'''(x) = \frac{e^x}{x}\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{6}{x^3}\right)$$

$$F''''(x) = \frac{e^x}{x}\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{12}{x^2} - \frac{24}{x^3} + \frac{24}{x^4}\right)$$

ec.

Se facciamo $\Delta a = \frac{1}{10}$, avremo $a = 1$, $a' = 1,1$, $a'' = 1,2$, ec., e quindi

$$\varphi(x) = -\frac{1}{10}\left\{\frac{e}{2} + \frac{e^{1,1}}{1,1} + \frac{e^{1,2}}{1,2} + \frac{e^{1,3}}{1,3} + \frac{e^{1,4}}{1,4} + \ldots + \frac{e^{1,9}}{1,9} + \frac{e^2}{2.2}\right\}$$
$$+ \frac{1}{2.100}\left\{\frac{e}{2}(1-1) - \frac{e^2}{2.2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)\right\}$$
$$+ \frac{1}{2.3.1000}\left\{\frac{e}{2}(1 - 2 + 2) + \frac{e^{1,1}}{1,1}\left(1 - \frac{2}{1,1} + \frac{2}{(1,1)^2}\right) + \ldots\ldots\ldots + \frac{e^{1,9}}{1,9}\left(1 - \frac{2}{1,9} + \frac{2}{(1,9)^2}\right) + \frac{e^2}{4}\left(1 - \frac{2}{2} + \frac{2}{4}\right)\right\}$$
$$+ \frac{1}{2.3.4.10000}\left\{\frac{e}{2}(1 - 3 + 6 - 6) - \frac{e^2}{4}\left(1 - \frac{3}{2} + \frac{6}{4} - \frac{6}{8}\right)\right\}$$
$$+ \text{ec.}$$

La qual serie rapidamente converge, di modo che anche i primi due termini ci danno una sufficiente approssimazione.

Se mai nel fare le sostituzioni dei valori a, a', a'', a''' ec., nelle funzioni $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$ ec., alcune di queste quantità divenissero infinite, senza che l'integrale dovesse in quel caso divenire infinito, allora la serie non sarebbe di alcun uso: ecco però il rimedio. Supponiamo per esempio che la funzione $F'''(x)$ contenga un termine come $\frac{P}{b-x}$, e che per il valore assegnato da noi alla differenza Δa, quando invece di x si pone $a + 5\Delta a$, il denominatore di quel termine $b - a - 5\Delta a$ divenga nullo; allora comparirà l'infinito; diamo però alla Δa un valore diverso (del che siam sempre padroni) e quel denominatore non si annullerà più, e l'infinito non avrà più luogo.

Questo ripiego non varrebbe se fosse lo stesso valore a che facesse comparire l'infinito, ed allora converrebbe ricorrere ad

una trasformazione della formula differenziale in un'altra, ove questo inconveniente non sussistesse. Per esempio la formula $\frac{Xdx}{(a-x)^{\frac{m}{n}}}$, essendo $m < n$ diviene infinita, quando $x = a$; si faccia perciò $a - x = z^n$, e sarà $x = a - z^n$, $dx = -nz^{n-1}dz$, e quindi $\frac{Xdx}{(a-x)^{\frac{m}{n}}} = -nXz^{n-m-1}dz$, che non è più infinita, quando $x = a$, ovvero $z = 0$.

§. 166. Quando l'integrale di una differenziale Xdx è una funzione determinata di x, nella quale la x può ricevere tutti i valori possibili, secondo l'estensione che a noi piace di dare all'integrale, chiamasi allora *integrale indefinito*. Se poi in quell'espressione, determinata l'origine dell'integrale per mezzo della costante arbitraria, si assegna un certo valore alla x, allora l'espressione che ne risulta chiamasi l'*integrale definito* della formula Xdx; così l'integrale indefinito è una quantità variabile, mentre il definito è una costante determinata. Siccome accade sovente nella pratica dover ricercare gli integrali definiti delle funzioni, e di più questi presentano delle singolarità interessanti, che non appartengono agli integrali indefiniti, così ho fissato di parlarne qualche poco.

Già nel Cap. I. ed in questo abbiamo esposte per incidenza delle dottrine di questo genere, e perciò non mi estenderò soverchiamente sopra tale articolo.

Al §. 106, cercando l'integrale delle due formule $\int\frac{x^{2i}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, $\int\frac{x^{2i+1}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ esteso da $x = 0$ sino ad $x = 1$, abbiam trovato

$$\int\frac{x^{2i}dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1.3.5\ldots\ldots(2i-1)}{2.4\ldots\ldots\ldots\ldots 2i}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\int\frac{x^{2i+1}dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2.4.6\ldots\ldots\ldots 2i}{1.3.5\ldots\ldots(2i+1)}:$$

ora facciamo in queste due formule generali $i = 1, 2, 3, 4$ ec., ed osservando che gli integrali definiti da $x = 0$, $x = 1$, delle due semplicissime espressioni $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, $\int\frac{xdx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, sono $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = Arc.\ sen\ 1 = \frac{\pi}{2}$, $\int\frac{xdx}{\sqrt{(1-x^2)}} = 1$, avremo

Integrali definiti

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{\pi}{2} \qquad \int\frac{xdx}{\sqrt{(1-x^2)}} = 1$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \qquad \int\frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2}{3}$$

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\pi}{2} \qquad \int\frac{x^5dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$$

$$\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\pi}{2} \qquad \int\frac{x^7dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}$$

ec. ec.

Gl' integrali definiti della formula $\int\frac{x^m dx}{\sqrt{(x-x^2)}}$, ponno facilmente dedursi dai ritrovati quì sopra: facciamo $x = z^2$, e la nostra formula diverrà $\int\frac{x^m dx}{\sqrt{(x-x^2)}} = 2\int\frac{z^{2m}dz}{\sqrt{(1-z^2)}}$; e siccome i limiti $x = 0$, $x = 1$ danno egualmente $z = 0$, $z = 1$, così avremo l' integrale definito di $\int\frac{x^m dx}{\sqrt{(x-xx)}}$, raddoppiando l' integrale definito $\int\frac{z^{2m}dz}{\sqrt{(1-zz)}}$, ed in conseguenza

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x-x^2)}} = \pi, \qquad \int\frac{xdx}{\sqrt{(x-x^2)}} = \frac{1}{2}\pi,$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(x-x^2)}} = \frac{1.3}{2.4}\cdot\pi, \qquad \text{ec.}$$

Proponiamoci adesso di trovare l' integrale definito dai limiti $x = 0$, $x = 1$ della formula $x^{m-1}dx(1-x^2)^{n'-\frac{1}{2}}$.

Al §. 105. abbiam trovato

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1} = \frac{qx^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}}{mq+(p+q)n} + \frac{n(p+q)a}{mq+n(p+q)}\times$$

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}:$$

paragonando questa formula generale con quella che ci proponiamo, si avrà $a = 1$, $b = -1$, $n = 2$, $p = 2n' - 3$, $q = 2$, e quindi

$$\int x^{m-1}dx(1-xx)^{n'-\frac{1}{2}} = \frac{x^m(1-xx)^{n'-\frac{1}{2}}}{m+2n'-1} + \frac{2n'-1}{m+2n'-1}\times$$

$$\int x^{m-1}dx(1-xx)^{n'-\frac{3}{2}}.$$

Ora il primo termine di questo secondo membro va a zero, quando $x = 1$; dunque per la ricerca dell' integrale definito si ha

$$\int x^{m-1}dx(1-xx)^{n'-\frac{1}{2}} = \frac{2n'-1}{m+2n'-1}\int x^{m-1}dx(1-xx)^{n'-\frac{3}{2}}.$$

Se dunque facciamo $\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-xx)}} = M$, quantità che abbiamo trovata sopra, si avrà

per $n' = 1$ ..... $\int x^{m-1}dx(1-xx)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{m+1}M$

per $n' = 2$ ..... $\int x^{m-1}dx(1-xx)^{\frac{3}{2}} = \frac{1.3}{(m+1)(m+3)}M$

per $n' = 3$ ..... $\int x^{m-1}dx(1-xx)^{\frac{5}{2}} = \frac{1.3.5}{(m+1)(m+3)(m+5)}M$

ec. ec.

Così troveremo gl' integrali definiti per qualunque valore di m e di n'. Per esempio

$$\int x^4dx(1-xx)^{\frac{3}{2}} = \frac{1.3}{6.8}\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1.3}{6.8}\cdot\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

§. 167. Rapporto agli integrali definiti meritano di essere esposti alcuni Teoremi, i quali riguardano l' integrale della formula

$\frac{d\varphi \cos i\varphi}{(a+b\cos\varphi)^n}$ esteso da $\varphi = 0$ sino a $\varphi = 180^\circ$. Questi Teoremi sono di Eulero; egli se ne compiaceva al segno di chiamarli *grandemente memorabili*. Si trovano nel quarto Tomo del suo Calcolo Integrale, il qual Tomo è una preziosissima Raccolta di tutte l' aggiunte fatte da quel Geometra ai tre primi Volumi.

Cominciando dal caso semplicissimo $i = 0$, abbiam trovato al §. 149, che l' integrale della formula $\frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi}$, definito tra i limiti $\varphi = 0$ e $\varphi = 180^\circ$, è $= \frac{2}{\sqrt{(a^2-b^2)}} \cdot \frac{\pi}{2}$, che cioè in questa ipotesi, si ha $\int \frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi} = \frac{2}{\sqrt{(a^2-b^2)}} \cdot \frac{\pi}{2}$.

Ora ricerchiamo l' integrale definito di $\frac{d\varphi \cos i\varphi}{(a+b\cos\varphi)^n}$:

Ma per iscansare il radicale $\sqrt{(a^2-b^2)}$, facciamo $a = 1+\alpha\alpha$, $b = -2\alpha$, ed allora $\sqrt{(a^2-b^2)}$ diverrà $1-\alpha\alpha$, mentre la nostra formula prenderà questa forma

$\frac{d\varphi \cos i\varphi}{(1+\alpha\alpha-2\alpha\cos\varphi)^n}$.

Teniamo invece di α la lettera a, ben intendendo che essa è diversa da quella adoprata quì sopra, e dovrem prendere l' integrale definito di $\frac{d\varphi \cos i\varphi}{(1+aa-2a\cos\varphi)^n}$, ovvero, facendo per brevità $1+aa-2a\cos\varphi = \Delta$, di $\frac{d\varphi\cos i\varphi}{\Delta^n}$ contenuto tra i termini $\varphi = 0$, $\varphi = 180^\circ$. La lettera i poi vogliam che significhi numeri intieri e positivi. Per i numeri negativi basta la stessa formula dei positivi, poichè $\cos - i\varphi = \cos + i\varphi$.

I. *Integrazione della Formula*

$\int\frac{d\varphi\cos i\varphi}{\Delta}$ da $\varphi = 0$ sino a $\varphi = 180^\circ$.

Questo è il caso più semplice della nostra formula, poichè

quello nel quale $n = 0$, non ha alcuna difficoltà essendo $\int d\varphi \cos i\varphi = \frac{1}{i} \operatorname{sen} i\varphi$; e siccome $\operatorname{sen} 0^\circ = 0$, $\operatorname{sen} i\, 180^\circ = 0$, così l' integrale $\int d\varphi\cos i\varphi$ definito tra i suddetti limiti, si annulla. Se però quando $n = 0$ anche $i = 0$, allora $\int d\varphi = \varphi$, e quindi preso $\varphi = 180^\circ$, si avrà $\int d\varphi = \pi$.

Per avere l' integrale $\int\frac{d\varphi\cos i\varphi}{\Delta}$, io incomincierò da $i = 1$, $i = 2$ ec., e così passando dai casi più semplici ai più composti, potremo avere quanto si cerca.

Siccome

$d\varphi = \frac{\Delta d\varphi}{\Delta} = \frac{(1+aa)d\varphi}{\Delta} - \frac{2ad\varphi.\cos\varphi}{\Delta}$,

così integrando tra i prescritti limiti, sarà

$\pi = (1+aa)\int\frac{d\varphi}{\Delta} - 2a\int\frac{d\varphi\cos\varphi}{\Delta}$:

ma abbiam trovato quì sopra $\int\frac{d\varphi}{\Delta} = \frac{\pi}{1-aa}$; dunque

$\pi = \frac{(1+aa)}{1-aa}\pi - 2a\int\frac{d\varphi\cos\varphi}{\Delta}$, e perciò avremo l' integrale della nostra formula per $i = 1$, e sarà

$\int\frac{d\varphi\cos\varphi}{\Delta} = \frac{a\pi}{1-aa}$; così abbiamo gli integrali dei due primi casi

$\int\frac{d\varphi}{\Delta} = \frac{\pi}{1-aa}$, e $\int\frac{d\varphi\cos\varphi}{\Delta} = \frac{a\pi}{1-aa}$.

Da questi due casi $i = 0$, $i = 1$ potranno con l' ajuto del seguente lemma ricavarsi tutti gli altri, nei quali i è un numero intiero qualunque: infatti essendo tra i limiti fissati $\int d\varphi\cos i\varphi = 0$, si avrà

$0 = (1+aa)\int\frac{d\varphi\cos i\varphi}{\Delta} - 2a\int\frac{d\varphi\cos\varphi\cos i\varphi}{\Delta}$;

ma è $2\cos\varphi\cos i\varphi = \cos(i-1)\varphi + \cos(i+1)\varphi$; avremo dunque

$\frac{1+aa}{a}\int\frac{d\varphi\cos i\varphi}{\Delta} = \int\frac{d\varphi\cos(i-1)\varphi}{\Delta} + \int\frac{d\varphi\cos(i+1)\varphi}{\Delta}$, da cui si ricava questo lemma

$$\int \frac{d\phi \cos(i+1)\phi}{\Delta} = \frac{1+aa}{a}\int\frac{d\phi\cos i\phi}{\Delta} - \int\frac{d\phi\cos(i-1)\phi}{\Delta};$$

preso ora $i=1$, si avrà per il detto lemma

$$\int\frac{d\phi\cos 2\phi}{\Delta} = \frac{1+aa}{a}\int\frac{d\phi\cos\phi}{\Delta} - \int\frac{d\phi}{\Delta},$$ ed in conseguenza

$$\int\frac{d\phi\cos 2\phi}{\Delta} = \frac{\pi aa}{1-aa}.$$

Prendiamo $i=2$, e lo stesso lemma ci darà

$$\int\frac{d\phi\cos 3\phi}{\Delta} = \frac{1+aa}{a}\int\frac{d\phi\cos 2\phi}{\Delta} - \int\frac{d\phi\cos\phi}{\Delta},$$ ovvero

$$\int\frac{d\phi\cos 3\phi}{\Delta} = \frac{\pi a^3}{1-aa}:$$ nella stessa guisa preso $i=3$, si ha

$$\int\frac{d\phi\cos 4\phi}{\Delta} = \frac{\pi a^4}{1-aa};$$ preso $i=4$, si ha

$$\int\frac{d\phi\cos 5\phi}{\Delta} = \frac{\pi a^5}{1-aa};$$ ed in generale

$$\int\frac{d\phi\cos i\phi}{\Delta} = \frac{\pi a^i}{1-aa}.$$

II. *Integrazione della Formula*

$\int\frac{d\phi\cos i\phi}{\Delta^2}$ da $\phi=0$ sino a $\phi=180°$.

§. 168. Il caso più semplice è quello nel quale $i=0$, dobbiamo allora integrare $\int\frac{d\phi}{\Delta^2}$. Per questo, osservo che la formula finita $\frac{sen\,\phi}{\Delta}=V$ svanisce quando $\phi=0$ e $\phi=180°$, onde facendo

$$dV = \frac{d\phi\cos\phi}{\Delta} - \frac{2ad\phi\,sen\,\phi^2}{\Delta^2},$$ ovvero

$$dV = \frac{(1+aa)d\phi\cos\phi - 2ad\phi}{\Delta^2},$$ s' avrà integrando tra quei limiti

$$0 = (1+aa)\int\frac{d\phi\cos\phi}{\Delta^2} - 2a\int\frac{d\phi}{\Delta^2}.$$

Ma abbiam trovato superiormente $\int\frac{d\phi}{\Delta} = \frac{\pi}{1-aa}$; dunque moltiplicando sopra e sotto per Δ, sarà ancora

$$\frac{\pi}{1-aa} = (1+aa)\int\frac{d\phi}{\Delta^2} - 2a\int\frac{d\phi\cos\phi}{\Delta^2};$$ ora dall' ultima equazione si ricava

$$\int\frac{d\phi\cos\phi}{\Delta^2} = \frac{2a}{1+aa}\int\frac{d\phi}{\Delta^2};$$ sostituendo per tanto questo valore, si avrà

$$\frac{\pi}{1-aa} = (1+aa)\int\frac{d\phi}{\Delta^2} - \frac{4aa}{1+aa}\int\frac{d\phi}{\Delta^2} = \frac{(1-aa)^2}{1+aa}\int\frac{d\phi}{\Delta^2};$$ per il che si trova

$$\int\frac{d\phi}{\Delta^2} = \frac{\pi(1+aa)}{(1-aa)^3}.$$

Di quì si ottien subito $\int\frac{d\phi\cos\phi}{\Delta^2} = \frac{2\pi a}{(1-aa)^3}$.

Per gli altri casi, consideriamo l' integrale ottenuto al § antec.

$\int\frac{d\phi\cos i\phi}{\Delta} = \frac{\pi a^i}{1-aa}$, il quale moltiplicato superiormente ed inferiormente per Δ, ci darà quest' equazione

$$\frac{\pi a^i}{1-aa} = (1+aa)\int\frac{d\phi\cos i\phi}{\Delta^2} - 2a\int\frac{d\phi\cos\phi.\cos i\phi}{\Delta^2},$$ che prende questa forma

$$\frac{\pi a^i}{1-aa} = (1+aa)\int\frac{d\phi\cos i\phi}{\Delta^2} - a\int\frac{d\phi\cos(i-1)\phi}{\Delta^2} - \ldots\ldots;$$
$$a\int\frac{d\phi\cos(i+1)\phi}{\Delta^2}.$$

Da una tale equazione si deduce questo lemma

$$\int\frac{d\phi\cos(i+1)\phi}{\Delta^2} = \frac{1+aa}{a}\int\frac{d\phi\cos i\phi}{\Delta^2} - \int\frac{d\phi\cos(i-1)\phi}{\Delta^2} - \frac{\pi a^{i-1}}{1-aa}.$$

Facciamo $i=1$, e questo lemma ci darà

$$\int\frac{d\phi\cos 2\phi}{\Delta^2} = \frac{1+aa}{a}\int\frac{d\phi\cos\phi}{\Delta^2} - \int\frac{d\phi}{\Delta^2} - \frac{\pi}{1-aa},$$ ove sostituendo i valori ritrovati per i due integrali del secondo membro, avremo

$$\int\frac{d\phi.\cos 2\phi}{\Delta^2} = \frac{\pi(1+aa)-\pi(1-aa)^2}{(1-aa)^3} = \frac{\pi aa(3-aa)}{(1-aa)^3}.$$

Facciamo $i=2$, e dal premesso lemma ricaveremo

$\int \frac{d\varphi \,.\, \cos 3\varphi}{\Delta^2} = \frac{1 + aa}{a} \int \frac{d\varphi \cos 2\varphi}{\Delta^2} - \int \frac{d\varphi \cos \varphi}{\Delta^2} - \frac{\pi a}{1 - aa}$, ovvero

$\int \frac{d\varphi \cos 3\varphi}{\Delta^2} = \frac{(1 + aa)\pi a(3 - aa) - 2\pi a - \pi a(1 - aa)^2}{(1 - aa)^3}$, che si riduce a

$\int \frac{d\varphi \,.\, \cos 3\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi a^3 (4 - 2aa)}{(1 - aa)^3}$.

Sia $i = 3$, ed avremo per lo stesso lemma

$\int \frac{d\varphi \,.\, \cos 4\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi a^4 (5 - 3aa)}{(1 - aa)^3}$; così

$\int \frac{d\varphi \,.\, \cos 5\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi a^5 (6 - 4aa)}{(1 - aa)^3}$; ed in generale

$\int \frac{d\varphi \,.\, \cos i\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi a^i \{ i + 1 - (i - 1)aa \}}{(1 - aa)^3}$.

III. *Integrazione della Formula*

$\int \frac{d\varphi \cos i\varphi}{\Delta^3}$ da $\varphi = 0$ sino a $\varphi = 180°$.

§. 169. Per il caso più semplice di tutti $\int \frac{d\varphi}{\Delta^3}$ serviamoci della formula

$V = \frac{sen\, \varphi}{\Delta^2}$, e sarà

$dV = \frac{d\varphi \cos \varphi}{\Delta^2} - \frac{4a d\varphi\, sen\, \varphi^2}{\Delta^3}$, ovvero

$dV = \frac{(1 + aa)\, d\varphi \cos \varphi - 2ad\varphi \cos \varphi^2 - 4ad\varphi\, sen\, \varphi^2}{\Delta^3}$, e scrivendo $1 - \cos \varphi^2$ invece di $sen\, \varphi^2$, quindi integrado, avremo

$\int dV = 0 = (1 + aa) \int \frac{d\varphi \cos \varphi}{\Delta^3} - 4a \int \frac{d\varphi}{\Delta^3} + 2a \int \frac{d\varphi \cos \varphi^2}{\Delta^3}$.

Aggiungiamoci ora questa forma indefinita

$s = A \int \frac{d\varphi}{\Delta} + B \int \frac{d\varphi}{\Delta^2}$, e si avrà, differenziando e riducendo al denominatore Δ^3

$dV + ds = \{ (1 + aa) \cos \varphi - 4a + 2a \cos \varphi^2 + A\Delta^2 + B\Delta \} \frac{d\varphi}{\Delta^3}$

$\frac{\Delta^3 (dV + ds)}{d\varphi} = -4a + A(1 + aa)^2 + B(1 + aa) + \{ 1 + aa - 4Aa(1 + aa) - 2Ba \} \cos \varphi + \{ 2a + 4Aaa \} \cos \varphi^2$.

Si determinino le quantità A, B in guisa che svaniscano i termini ove si trovano $\cos \varphi$, $(\cos \varphi)^2$, e s' avrà $2a + 4Aaa = 0$, $1 + aa - 4A(1 + aa)a - 2Ba = 0$, da cui $A = -\frac{1}{2a}$, $B = \frac{3(1 + aa)}{2a}$; quindi

$\frac{\Delta^3 (dV + ds)}{d\varphi} = \frac{(1 - aa)^2}{a}$, ovvero

$\int (dV + ds) = \frac{(1 - aa)^2}{a} \int \frac{d\varphi}{\Delta^3}$; ed essendo tra i dati limiti $V = 0$, si avrà

$s = \frac{(1 - aa)^2}{a} \int \frac{d\varphi}{\Delta^3}$.

Dai casi quì sopra trattati, abbiamo

$s = -\frac{1}{2a} \cdot \frac{\pi}{1 - aa} + \frac{3(1 + aa)}{2a} \cdot \frac{\pi(1 + aa)}{(1 - aa)^3}$, e perciò

$\frac{(1 - aa)^2}{a} \int \frac{d\varphi}{\Delta^3} = \frac{3\pi(1 + aa)^2 - \pi(1 - aa)^2}{2a(1 - aa)^3}$; sarà dunque

$\int \frac{d\varphi}{\Delta^3} = \frac{\pi(1 + 4aa + a^4)}{(1 - aa)^5}$.

Per passare ai casi più complicati, si osservi che essendo $\int \frac{d\varphi}{\Delta^2} = \frac{\pi(1 + aa)}{(1 - aa)^3}$, si avrà per mezzo della riduzione adoprata sin ora

$\frac{\pi(1 + aa)}{(1 - aa)^3} = (1 + aa) \int \frac{d\varphi}{\Delta^3} - 2a \int \frac{d\varphi \cos \varphi}{\Delta^3}$, d' onde si ricava

$$\int\frac{d\phi\cos\phi}{\Delta^3}=\frac{1+aa}{2a}\int\frac{d\phi}{\Delta^3}-\frac{\pi(1+aa)}{2a(1-aa)^3},$$ e perciò

$$\int\frac{d\phi\cos\phi}{\Delta^3}=\frac{1+aa}{2a}\cdot\frac{\pi(1+4aa+a^4)}{(1-aa)^5}-\frac{\pi(1+aa)}{2a(1-aa)^3}=\frac{3\pi a(1+aa)}{(1-aa)^5}=$$

$\frac{\pi a(3+3aa)}{(1-aa)^5}$; ma nell' articolo precedente abbiam trovato

$$\int\frac{d\phi\cos i\phi}{\Delta^2}=\frac{\pi a^i(i+1-(i-1)aa)}{(1-aa)^3};$$ dunque moltiplicando questa formula integrale superiormente ed inferiormente per Δ, avremo

$$\frac{\pi a^i\left\{i+1-(i-1)aa\right\}}{(1-aa)^3}=(1+aa)\int\frac{d\phi\cos i\phi}{\Delta^2}-2a\int\frac{d\phi\cos i\phi.\cos\phi}{\Delta^3},$$

ovvero

$$\frac{\pi a^i\left\{i+1-(i-1)aa\right\}}{(1-aa)^3}=(1+aa)\int\frac{d\phi\cos i\phi}{\Delta^3}-a\int\frac{d\phi\cos(i-1)\phi}{\Delta^3}-$$

$a\int\frac{d\phi\cos(i+1)\phi}{\Delta^3}$, d' onde si deduce questo lemma

$$\int\frac{d\phi\cos(i+1)\phi}{\Delta^3}=\frac{1+aa}{a}\int\frac{d\phi\cos i\phi}{\Delta^3}-\int\frac{d\phi\cos(i-1)\phi}{\Delta^3}-\ldots\ldots$$

$$\frac{\pi a^{i-1}\left\{i+1-(i-1)aa\right\}}{(1-aa)^3}.$$

Facciamo pertanto $i=1$, ed avremo

$$\int\frac{d\phi\cos 2\phi}{\Delta^3}=\frac{1+aa}{a}\int\frac{d\phi\cos\phi}{\Delta^3}-\int\frac{d\phi}{\Delta^3}-\frac{2\pi}{(1-aa)^3},$$ ove sostituiti i valori degl' integrali del secondo membro, avremo

$$\int\frac{d\phi\cos 2\phi}{\Delta^3}=\frac{1+aa}{a}\cdot\frac{\pi a(3+3aa)}{(1-aa)^5}-\frac{\pi(1+4aa+a^4)}{(1-aa)^5}-\frac{2\pi(1-aa)^2}{(1-aa)^5}=$$

$\frac{6\pi aa}{(1-aa)^5}$.

Prendendo $i=2$, si ha

$$\int\frac{d\phi\cos 3\phi}{\Delta^3}=\frac{\pi a^3(10-5aa+a^4)}{(1-aa)^5};$$ $i=3$ ci dà

$$\int\frac{d\phi\cos 4\phi}{\Delta^3}=\frac{\pi a^4(15-12aa+3a^4)}{(1-aa)^5};$$ fatto $i=4$, si ha

$$\int\frac{d\phi\cos 5\phi}{\Delta^3}=\frac{\pi a^5(21-21aa+6a^4)}{(1-aa)^5};$$ prendendo $i=5$, si trova

$$\int\frac{d\phi\cos 6\phi}{\Delta^3}=\frac{\pi a^6(28-32aa+10a^4)}{(1-aa)^5};$$ ed in generale

$$\int\frac{d\phi\cos i\phi}{\Delta^3}=\frac{\pi a^i\left\{\frac{i(i+3)+2}{2}-(ii-4)aa+\left(\frac{i(i-3)+2}{2}\right)a^4\right\}}{(1-aa)^5},$$

formula che si trasforma in questa

$$\int\frac{d\phi\cos i\phi}{\Delta^3}=\frac{\pi a^i}{(1-aa)^5}\left\{\frac{(i+1)(i+2)}{2}-(i+2)(i-2)aa+\right.$$

$$\left.\frac{(i-1)(i-2)}{2}a^4\right\}.$$

Scolio.

§. 170. Nella stessa guisa potrebbero trattarsi le formule nelle quali i denominatori fossero Δ^4, Δ^5, Δ^6 ec., ma sarebbe difficile con questo metodo scoprire la legge generale che esse seguono.

Leonardo Eulero giunge per altre vie a dimostrare questo Teorema generale.

„ L' integrale della formula $\int\frac{d\phi\cos i\phi}{(1+aa-2a\cos\phi)^{n+1}}$, preso tra i limiti $\varphi=0$, $\varphi=180^\circ=\pi$, è sempre espresso da questa formula $\frac{\pi a}{(1-aa)^{2n+1}}.V$, essendo

$$V=\left(\frac{n-i}{0}\right)\left(\frac{n+i}{i}\right)+\left(\frac{n-i}{1}\right)\left(\frac{n+i}{i+1}\right)aa+\left(\frac{n-i}{2}\right)\left(\frac{n+i}{i+2}\right)a^4+$$

$$\left(\frac{n-i}{3}\right)\left(\frac{n+i}{i+3}\right)a^6+\left(\frac{n-i}{4}\right)\left(\frac{n+i}{i+4}\right)a^8+\left(\frac{n-i}{5}\right)\left(\frac{n+i}{i+5}\right)a^{10}+\text{ec.},$$

nella quale le formule chiuse tra le parentesi non indicano frazioni, ma i coefficienti delle potenze del binomio, di modo che secondo questa convenzione, si ha

$$(1+x)^m = 1 + (\tfrac{m}{1})x + (\tfrac{m}{2})x^2 + (\tfrac{m}{3})x^3 + (\tfrac{m}{4})x^4 + \text{ec}.;$$

onde è sempre

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\alpha-1}{2}\cdot\frac{\alpha-2}{3}\,\ldots\ldots\ldots\,\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}\text{,,}$$

Quest' espressione, essendo per noi β un numero intiero, rappresenta un valore determinato per qualunque caso; e quì si avverta che tutte le volte che sarà $\beta = 0$, si avrà $(\frac{\alpha}{0}) = 1$; se poi β avrà un valor negativo, questo simbolo indicherà una quantità nulla o sarà zero; quando $\beta = \alpha$, sarà $(\frac{\alpha}{\alpha}) = 1$, e se $\beta > \alpha$ parimente il simbolo $(\frac{\alpha}{\beta})$ sarà $= 0$, poichè sempre è $(\frac{\alpha}{\beta}) = (\frac{\alpha}{\alpha-\beta})$.

La dimostrazione di questo elegantissimo Teorema, che l' Autore stesso chiama *Maxime memorabile*, ci tratterrebbe di troppo, e per questo noi ci contenteremo di mostrarne la verità ricavando da esso le medesime formule integrali trovate ai §§. antecedenti. Il suo immortale Autore non ebbe in principio altro mezzo che questo per dimostrarlo, mentre lo avea ritrovato per la semplice congettura.

Facciamo $n = 0$, ed osservando che i primi fattori della quantità V sono $(\frac{0-i}{0}) = 1$; $(\frac{0-i}{1}) = -1$; $(\frac{0-i}{2}) = \frac{i}{1} \times \frac{i+1}{2}$; $(\frac{0-i}{3}) = -\frac{i}{1}\cdot\frac{i+1}{2}\cdot\frac{i+2}{3}$; $(\frac{0-i}{4}) = \frac{i}{1}\cdot\frac{i+1}{2}\cdot\frac{i+2}{3} \times \frac{i+3}{4}$ ec., ed i secondi $(\frac{0+i}{i}) = 1$; $(\frac{0+i}{i+1}) = 0$; $(\frac{0+i}{i+2}) = 0$ ec., si avrà $V = 1$, e perciò

$$\int \frac{d\varphi \cos i\varphi}{1+aa-2a\cos\varphi} = \frac{\pi a^i}{1-aa}.$$

Sia $n = 1$, e sarà

$(\frac{1-i}{0}) = 1$; $(\frac{1-i}{1}) = -(i-1)$; $(\frac{1-i}{2}) = \frac{i(i-1)}{1.2}$;

$(\frac{1+i}{i}) = i+1$; $(\frac{1+i}{i+1}) = 1$; le altre formule svaniscono.

Sarà dunque

$V = i + 1 - (i-1)aa$, e perciò

$$\int \frac{d\varphi \cos i\varphi}{(1+aa-2a\cos\varphi)^2} = \frac{\pi a^i}{(1-aa)^3}\{(i+1)-(i-1)aa\},$$

e così degli altri casi.

Del resto chi ama le eleganti verità analitiche per se medesime, anche quando siano prive d' applicazione, non tralasci di leggere tuttociò che ha rapporto a questo Teorema, e che si ritrova nel citato quarto Volume del Calcolo Integrale d' Euler.

§. 171. Gl' integrali definiti si ponno talvolta esprimere per mezzo di un prodotto d' infiniti fattori. Ci basterà farne qualche esempio. Se per i noi indichiamo un numero infinito, è da tutti i Geometri ricevuto questo principio, che $\beta + i = i + \alpha$ essendo α, β due quantità finite qualunque; di quì segue che gl' integrali delle due formule $\int x^{2i}dx(1-x^n)^m$, $\int x^{2i+\alpha}dx(1-x^n)^m$, definiti dai limiti $x = 0$, $x = 1$, sono eguali tra loro, imperocchè x^{2i} è la stessa cosa che $x^{2i+\alpha}$; e se non si vuole ammettere quest' eguaglianza a rigore, i risultati cui giungeremo saranno approssimazioni.

Questo premesso, proponiamoci di trovare il rapporto che passa tra i due integrali definiti

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}},\ \int x^{\mu-1}dx(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}$$ espresso per un prodotto d' infiniti fattori.

Essendo (lasciata la parte algebraica che si annulla quando $x = 1$)

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}} = \frac{m+k}{m}\int x^{m+n-1}dx(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}},$$

se si fa $m+n$ invece di m in quest' equazione, si avrà

$$\int x^{m+n-1}dx(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}} = \frac{m+n+k}{m+n}\int x^{m+2n-1}dx(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}},$$ e quindi

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}} = \frac{(m+k)(m+n+k)}{m(m+n)}\int x^{m+2n-1}dx(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}.$$

Continuando lo stesso artifizio di sostituzione in sostituzione, giungeremo a questo risultato

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}} = \frac{(m+k)(m+k+n)(m+k+2n)\ldots(m+k+in)}{m.(m+n)(m+2n)\ldots\ldots(m+in)}\times$$

$$\int x^{m+in+n-1}dx(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}},$$ ove i può essere qualunque, e noi lo supponiamo infinito.

Egualmente troveremo

$$\int x^{\mu-1}dx(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}} = \frac{(\mu+k)(\mu+k+n)\ldots\ldots\ldots(\mu+k+in)}{\mu(\mu+n)(\mu+2n)\ldots\ldots(\mu+in)}\times$$

$$\int x^{\mu+in+n-1}dx(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}.$$

Ora le due formule integrali dei secondi membri sono eguali tra loro, perchè gli esponenti $\mu+in+n-1$, $m+in+n-1$ sono infiniti; dunque

$$\frac{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}}{\int x^{\mu-1}dx(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}} = \frac{\mu(m+k)}{m(\mu+k)}\cdot\frac{(\mu+n)(m+k+n)}{(m+n)(\mu+k+n)}\times\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{(\mu+2n)(m+k+2n)}{(m+2n)(\mu+k+2n)} \text{ ec.}$$

Le lettere m, n, μ, k indicano numeri qualunque positivi.

Facciamo $k=3$, $n=2$, e sarà

$$\frac{\int x^{m-1}dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\int x^{\mu-1}dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\mu(m+3)}{m(\mu+3)}\cdot\frac{(\mu+2)(m+5)}{(m+2)(\mu+5)}\cdot\frac{(\mu+4)(m+7)}{(m+4)(\mu+7)} \text{ ec.}$$

e fatto $m=2$, $\mu=1$, avremo

$$\frac{\int xdx\sqrt{(1-x^2)}}{\int dx\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1.5}{2.4}\cdot\frac{3.7}{4.6}\cdot\frac{5.9}{6.8} \text{ ec.}$$

Cerchiamo adesso l' integrale definito della prima formula

$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}$ tra i limiti $x=0$, $x=1$.

Avendo ritrovata quì sopra la ragione dell' integrale

$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}$ all' altro $\int x^{\mu-1}dx(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}$, qualunque sia μ, determiniamolo ora in modo che questa seconda formula possa integrarsi. Sia per questo $\mu=n$, ed avremo

$$\int x^{n-1}dx(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}} = C - \frac{1}{k}(1-x^n)^{\frac{k}{n}} = \ldots\ldots$$

$\frac{1-(1-x^n)^{\frac{k}{n}}}{k}$, determinata la costante C per annullare l' integrale quando $x=0$. Facciamovi ora $x=1$, ed otterremo

$\int x^{n-1}dx(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}} = \frac{1}{k}$; dunque

$$\int x^{m-1}dx(-x^n)^{\frac{k-n}{n}} = \frac{1}{k}\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{2n(m+k)}{(m+n)(k+n)}\times\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{3n(m+k+n)}{(m+2n)(k+2n)} \text{ ec.}$$

Per esempio facciasi $k = n = 1$, e sarà

$$\int x^{m-1} dx = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{2(m+1)}{(m+1).2} \cdot \frac{3(m+2)}{(m+2).3} \text{ ec.} = \frac{1}{m},$$ come già si sa d' altr' onde.

Siccome poi nell' espressione generale le lettere m, k sono permutabili, cioè ponendo una invece dell' altra, quella espressione rimane la stessa, così per il caso di $x = 1$, avremo quest' equazione

$$\int x^{m-1} dx (1 - x^n)^{\frac{k-n}{n}} = \int x^{k-1} dx (1 - x^n)^{\frac{m-n}{n}}.$$

Ci siamo trattenuti sopra queste ricerche per addestrare i nostri Lettori negli artifizj d' Analisi.

C A P. VI.

Integrazioni degli Ordini Superiori, ed Integrali raddoppiati.

§. 172. AL §. 99. abbiamo spiegato ciò che significa questa espressione $\int^n P dx^n$: essa è l' integrale n^{esimo} di $P dx^n$: essa esprime quella quantità Q, che differenziata n volte di seguito ci dà per risultato di queste n differenziazioni la quantità $P dx^n$, di modo che si debbe avere $\left(\frac{d^n Q}{dx^n}\right) dx^n = P dx^n$, ovvero $\left(\frac{d^n Q}{dx^n}\right) = P$.

Il dx^n nell' espressione $\int^n P dx^n$ è un indice destinato a mostrarci quale è la variabile rapporto a cui dessi integrare, e ad operazione eseguita, svanisce affatto dal calcolo; per questo dee considerarsi l' espressione $\int^n P dx^n$ come una funzione di x, non contenente in modo alcuno dx.

Essendo, giusta le convenzioni stabilite per l' algoritmo del Calcolo Differenziale ed Integrale

$$\int^n P dx^n = \int dx \int^{n-1} P dx^{n-1} = \int dx \int dx \int^{n-2} P dx^{n-2} =$$
$$\int dx \int dx \int dx \int^{n-3} P dx^{n-3} = \ldots\ldots\ldots\ldots =$$
$$\int dx \int dx \int dx \ldots\ldots \int P dx$$

quando si prenda un numero n di segni sommatorj, perchè ciascuno di questi membri significa una quantità Q il cui differenziale n^{esimo} deve essere $P dx^n$, concluderemo che per avere l' effettiva espressione Q dell' integrale $\int^n P dx^n$, bisognerà cominciare dal fare con le regole ordinarie le seguenti integrazioni

$$\int Pdx \;= M + C$$
$$\int^2 Pdx^2 = \int dx \int Pdx = \int (M + C)\, dx = N + C'x + C''$$
$$\int^3 Pdx^3 = \int dx \int dx \int Pdx = L + C'x^2 + C''x + C'''$$
$$\int^4 Pdx^4 = \int dx \int dx \int dx \int Pdx = H + C'x^3 + C''x^2 + C'''x + C''''$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\int^n Pdx^n = \int dx \int dx \dots\dots \int Pdx = T + C'x^{n-1} + C''x^{n-2} + \dots\dots + C^{(n-1)}x + C^{(n)}$$

nelle quali M, N, L ec., T sono funzioni di x, e C', C'' ec., costanti arbitrarie, ed allora l' ultima di queste integrazioni ci darà l' integrale cercato: esso sarà completo, perchè contiene un numero n di costanti arbitrarie.

Io credo che non abbisognino esempj; pure se vuolsene taluno, proponiamoci la formula $\int^4 \frac{dx^4}{x^4}$, ed avremo

$$\int \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3x^3} + C'$$
$$\int^2 \frac{dx^2}{x^4} = \int dx \int \frac{dx}{x^4} = \frac{1}{2.3.x^2} + C'x + C''$$
$$\int^3 \frac{dx^3}{x^4} = \int dx \int dx \int \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{2.3.x} + C'x^2 + C''x + C'''$$
$$\int^4 \frac{dx^4}{x^4} = \int dx \int dx \int dx \int \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{2.3} \log x + C'x^3 + C''x^2 + C'''x + C''''.$$

Il Teorema di Tajlor ci somministra anche un metodo generale per ottenere l' integrale espresso per serie di una qualunque formula differenziale Pdx^n dell' ordine n^{esimo}. Infatti facendo $Q = \int^n Pdx^n$, si ha $\left(\frac{d^nQ}{dx^n}\right) = P$, $\left(\frac{d^{n+1}Q}{dx^{n+1}}\right) = \left(\frac{dP}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^{n+2}Q}{dx^{n+2}}\right) = \left(\frac{d^2P}{dx^2}\right)$ ec.;

ora qualunque sia Q, il Teorema di Tajlor ci dà questa serie per rappresentarlo

$$Q = C' + x\left(\frac{dQ}{dx}\right) + \frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2Q}{dx^2}\right) + \dots\dots + \frac{x^{n-1}}{2.3\dots(n-1)}\left(\frac{d^{n-1}Q}{dx^{n-1}}\right) + \frac{x^n}{2.3\dots n}\left(\frac{d^nQ}{dx^n}\right) + \dots\dots + \frac{x^{n+1}}{2.3\dots(n+1)}\left(\frac{d^{n+1}Q}{dx^{n+1}}\right) + \text{ec.}$$

purchè si faccia $x = 0$ nei termini $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2Q}{dx^2}\right)$ ec., a differenziazione eseguita; C' rappresenta il valore di Q in questa stessa ipotesi. Se dunque nel secondo membro di questa equazione, invece di $\left(\frac{d^nQ}{dx^n}\right)$, $\left(\frac{d^{n+1}Q}{dx^{n+1}}\right)$ ec., poniamo i loro valori P, $\left(\frac{dP}{dx}\right)$ ec., facendo in questi $x = 0$, si avrà la serie che rappresenta il valore della funzione incognita Q. Siccome poi i valori di C', $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$, $\dots\dots$ $\left(\frac{d^{n-1}Q}{dx^{n-1}}\right)$ non sono dati nè dall' equazione $Q = \int^n Pdx^n$, nè dalle sue differenziali, essi rappresenteranno perciò tante costanti arbitrarie, ed avremo, indicandole per C', C'', C''' $\dots\dots$ $C^{(n)}$,

$$Q = \int^n Pdx^n = C' + C''x + C'''x^2 + \dots\dots + C^{(n)}x^{n-1} + \frac{x^n}{2.3\dots n}P + \frac{x^{n+1}}{2.3\dots(n+1)}\left(\frac{dP}{dx}\right) + \frac{x^{n+2}}{2.3\dots(n+2)} \times \left(\frac{d^2P}{dx^2}\right) + \text{ec.}$$

Per far qualche applicazione di queste integrazioni, proponiamoci la serie $\frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \frac{1}{(m+2)(m+3)} + \text{ec.}$ della quale se ne voglia la somma, m rappresentando qualunque numero.

Per questo si moltiplichi il primo termine per x^{m+1}, il secondo per x^{m+2}, il terzo per x^{m+3} ec., si eguagli allora quella serie ad y, e si avrà

$$y = \frac{x^{m+1}}{m(m+1)} + \frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + \frac{x^{m+3}}{(m+2)(m+3)} + \text{ec.}$$

Questa serie diviene la proposta facendovi $x = 1$; così y rappresenta la somma della nostra serie, ponendo $x = 1$.

Differenziamo due volte quell' equazione, ed avremo

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = x^{m-1} + x^m + x^{m+1} + x^{m+2} + \text{ec.} = \frac{x^{m-1}}{1-x}; \text{ dunque}$$

$$y = \int^2 \frac{x^{m-1}}{1-x}\, dx^2 = \int dx \int \frac{x^{m-1}}{1-x}\, dx.$$

Per avere in conseguenza la somma cercata nel valore di y, dovrem fare $x = 1$ ad integrazioni eseguite.

Integrando per parti, si avrà $y = x\int\frac{x^{m-1}dx}{1-x} - \int\frac{x^m dx}{1-x}$; e facendo $x = 1$ fuori del segno sommatorio, verrà

$$y = \int\frac{x^{m-1}dx - x^m dx}{1-x} = \int x^{m-1}dx = \frac{x^m}{m};$$ onde nel nostro caso sarà

$$y = \frac{1}{m} = \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \frac{1}{(m+2)(m+3)} + \text{ec.}$$

Sia $m = 1$, ed avremo $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \text{ec.} = 1$.

Sia da sommarsi quest' altra serie

$$\frac{1}{m(m+1)(m+2)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \dots\dots\dots$$
$$\frac{1}{(m+2)(m+3)(m+4)} + \text{ec.},$$

Poniamo $y = \frac{x^{m+2}}{m(m+1)(m+2)} + \frac{x^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)} +$ ec., e differenziando otterremo

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = x^{m-1} + x^m + x^{m+1} + x^{m+2} + \text{ec.} = \frac{x^{m-1}}{1-x},$$ e quindi

$$y = \int^3 \frac{x^{m-1}}{1-x}\, dx^3 = \int dx \int dx \int \frac{x^{m-1}}{1-x}\, dx;$$

e se ad integrazioni eseguite faremo $x = 1$, il valore di y ci darà la somma della serie proposta: ora integrando per parti si trova

$$y = \frac{x^2}{2}\int\frac{x^{m-1}dx}{1-x} - \frac{1}{2}\int\frac{x^{m+1}dx}{1-x} - x\int\frac{x^m dx}{1-x} + \int\frac{x^{m+1}dx}{1-x},$$

e facendo $x = 1$ fuori del segno sommatorio, si otterrà

$$y = \frac{1}{2}\int\frac{x^{m-1}(1-x^2)dx}{1-x} - \int\frac{x^m(1-x)dx}{1-x},$$

$$y = \frac{1}{2}\int x^{m-1}dx + \frac{1}{2}\int x^m dx - \int x^m dx,$$

$$y = \frac{1}{2}\left\{\int x^{m-1}dx - \int x^m dx\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^m}{m} - \frac{x^{m+1}}{m+1}\right);$$

questo valore di y diventa $= \frac{1}{2m(m+1)}$, quando $x = 1$; dunque

$$\frac{1}{2m(m+1)} = \frac{1}{m(m+1)(m+2)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \dots\dots$$
$$\frac{1}{(m+2)(m+3)(m+4)} + \text{ec.}$$

Nella stessa maniera potrebbero trovarsi le somme delle serie

$$\frac{1}{m(m+1)(m+2)(m+3)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)} + \text{ec.}$$

$$\frac{1}{m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)} + \text{ec.}$$

ec.

e sarebbe $\frac{1}{3m(m+1)(m+2)}$ la somma della prima, $\frac{1}{4m(m+1)(m+2)(m+3)}$ la somma della seconda, e così delle altre.

§. 173. Nei Capitoli I e V, ove abbiam parlato dell' integrazione della formula $\int P dx$, abbiam supposto che P fosse una funzione qualunque determinata e conosciuta di x: ora può la medesima P contenere delle formule integrali, come $\int R dx$, $\int S dx$ ec., può esser cioè una funzionr $\varphi(x, \int R dx, \int S dx$ ec.,) di x, $\int R dx$ ec.: in questo caso si dimanda come potrebbe aversi l' integrale effettivo della formula $\int \varphi(x, \int R dx, \int S dx$, ec.) dx.

Già si suppone che le formule $\int R dx$, $\int S dx$ non siano integrabili, imperocchè se lo fossero, si effettuerebbero l' integrazioni, ed allora P diverrebbe una sola funzione di x.

Per soddisfare in generale a questa ricerca, altro non si può prescrivere che determinare per approssimazione i valori degli integrali $\int R dx$, $\int S dx$ ec., e quindi sostituiti in φ, integrare la formula $\int \varphi dx$ con i metodi ordinarj; si avrà così un valore approssimato di ciò che si cerca. La sagacità del Geometra nei diversi casi particolari dirigerà la scelta degli integrali approssimati di $\int R dx$, $\int S dx$ ec., onde giungere ad un più esatto risultato.

Non ostante che gl' integrali $\int R dx$, $\int S dx$ non siano assegnabili, pure vi sono delle formule $\int \varphi dx$, le quali ponno integrarsi, o almeno ridursi alla forma di quelle trattate superiormente.

Per esempio, vogliasi il valore di $\int P dx \int R dx$, e supponiamo che $\int P dx$ sia integrabile ed $= X$; avremo secondo la regola d' integrazione per parti, chiamando z il ricercato integrale,

$$z = \int P dx \int R dx = X \int R dx - \int X R dx.$$

Così l' integrazione della formula $\int P dx \int Q dx$, la quale conteneva due segni sommatorj, è ridotta ad integrazioni di formule che ne contengono un solo.

Egualmente proposta la formula differenziale $\int P dx (\int R dx)^n$ nella supposizione che $\int P dx = X$, ne cercheremo l' integrale in questa guisa:

$\int P dx (\int R dx)^n = X (\int R dx)^n - n \int X R dx (\int R dx)^{n-1}$, e l' esponente n sarà scemato di un' unità. Se $X R dx$ sarà una quantità

integrabile, si potrà con lo stesso mezzo far dipendere l' integrale $\int X R dx (\int R dx)^{n-1}$ da un altro in cui l' esponente sia anche scemato di un' altra unità, e così di seguito, finchè si giunga ad un esponente $= 1$, ed allora ci troveremo nel caso sopra considerato.

Lo stesso artifizio è applicabile alle formule $\int P dx (\int R dx)^r (\int T dx)^m$ ec. Basti averlo accennato.

Supponendo che $P dx$ non sia integrabile, si ha

$$z = \int P dx \int R dx = \int P dx \times \int R dx - \int R dx \int P dx$$

così per avere in quel caso il valore di $\int P dx \int R dx$, possiamo prendere l' integrale approssimato di $\int R dx$, e moltiplicato per $P dx$, integrarlo di nuovo, ovvero, se ciò sia più comodo, servendosi di quest' ultima formula, prendere l' integrale approssimato di $\int P dx$, e moltiplicato per $R dx$, integrarlo di nuovo.

Per esempio, cerchiamo l' integrale di $\frac{dx}{\sqrt{(1-(a+x)^2)}} \int \frac{dx}{a+x}$.

L' integrale approssimato di $\frac{dx}{a+x}$ è (164)

$$\int \frac{dx}{a+x} = \frac{x}{a+x} + \frac{x^2}{2(a+x)^2} + \frac{x^3}{3(a+x)^3} + \text{ec., e quindi}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-(a+x)^2)}} \int \frac{dx}{a+x} = \int \frac{x dx}{(a+x)\sqrt{(1-(a+x)^2)}} + \ldots\ldots$$

$$\int \frac{x^2 dx}{2(a+x)^2 \sqrt{(1-(a+x)^2)}} + \text{ec.}$$

Gl' integrali di questi termini si ottengono per le regole date al Capitolo I.

Ma sarà miglior partito prendere la serie che esprime l' integrale $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-(a+x)^2)}}$. Infatti

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-(a+x)^2)}} = \int dx \left\{ 1 + \frac{(a+x)^2}{2} + \frac{3(a+x)^4}{8} + \text{ec.} \right\} =$$

$$(x+a) + \frac{(x+a)^3}{2\cdot 3} + \frac{3(x+a)^5}{8\cdot 5} + \text{ec}, \text{ e perciò}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-(a+x)^2)}} \int \frac{dx}{a+x} = Ar.\,sen\,(a+x) \times log\,(a+x) -$$

$$\int dx \left\{ 1 + \frac{(x+a)^2}{2.3} + \frac{3(x+a)^4}{8.5} + \text{ec.} \right\}$$

$$= Ar.\,sen\,(a+x) \times log\,(a+x) -$$

$$(x+a) - \frac{(x+a)^3}{2.3.3} - \frac{3(x+a)^5}{8.5.5} - \text{ec.} + C$$

essendo C la costante, che porta l' integrazione.

§. 174. Se per z noi indichiamo una funzione di due variabili x, y abbiamo detto al §. 25. che $\left(\frac{d^{m+n}z}{dx^m\, dy^n}\right) dx^m dy^n$ esprime la differenza parziale $(m+n)^{esima}$ della stessa z presa m volte rapporto ad x, ed n volte rapporto ad y. Ora data un' espressione differenziale $Pdx^m dy^n$ si può ricercare quella funzione z, il cui differenziale parziale $(m+n)^{esimo}$ sia appunto $Pdx^m dy^n$, di modo che debba aversi $\left(\frac{d^{m+n}z}{dx^m\, dy^n}\right) dx^m dy^n = Pdx^m dy^n$, ovvero $\left(\frac{d^{m+n}z}{dx^m\, dy^n}\right) = P$. Questa funzione z si chiama l' integrale $(m+n)^{esimo}$ di $Pdx^m dy^n$ preso m volte rapporto ad x, ed n volte rapporto ad y, e si indica così

$z = \int^{m+n} Pdx^m dy^n$; di modo che queste due equazioni

$\left(\frac{d^{m+n}z}{dx^m\, dy^n}\right) = P$, $z = \int^{m+n} Pdx^m dy^n$

dicono in sostanza la medesima cosa; sono due equazioni simboliche, delle quali data una, ne segue subito l' altra. Il dx^m, dy^n in $\int^{m+n} Pdx^m dy^n$ sono due indici destinati a svanire dal calcolo ad integrazioni eseguite; essi servono ad indicarci quante sono le integrazioni che debbono farsi riguardo ad x, e quante riguardo ad y. Nel nostro caso dobbiamo integrare m volte rapporto alla variabile x, ed n volte rapporto alla y.

Le formule, come $\int^{m+n} Pdx^m dy^n$ si chiamano *Integrali raddoppiati*, perchè dobbiamo integrare relativamente a due variabili; egualmente le formule, come $\int^{m+n+l} Pdx^m dy^n du^l$, sopra le quali potrebbero farsi delle riflessioni simili a quelle fatte per le prime, si chiamano *Integrali triplicati*, perchè debbono eseguirsi le integrazioni relativamente a tre variabili, e così di seguito. Si avverta che gl' indici ed esponenti insieme m, n, l debbono essere intieri: senza questo, quell' espressioni sarebbero simboli di quantità immaginarie, secondo ciò che abbiamo dimostrato al §. 114. Se quelle quantità fossero negative, allora i segni integrali appartenenti alle variabili, cui competono gli esponenti negativi, si cangerebbero in differenziali.

§. 175. Supponiamo ora che le variabili x, y, u ec., siano indipendenti tra loro, di modo che una non senta la variazione dell' altra; in seguito considereremo il caso in cui tra queste variabili regnino delle relazioni determinate.

Incominciando dagli Integrali raddoppiati più semplici, proponiamoci la formula $\int^2 Pdxdy = \int\int Pdxdy$, essendo P una funzione qualunque di x e di y.

Per ritrovare l' effettivo valore di $\int\int Pdxdy$ conviene integrare due volte una per rapporto ad x, l' altra per rapporto ad y, ed è indifferente l' ordine da seguirsi nel fare queste integrazioni: si può incominciare prima dalla variabile x, ed in seguito integrare rapporto ad y, e viceversa; essendo poi queste due variabili indipendenti tra loro, considereremo costante la y quando si integrerà rapporto ad x; ed in seguito costante la x quando si prenderà l' integrale rapporto ad y; il tutto è conforme alle regole di differenziazione. Incominciando dall' integrazione rapporto ad x, e rappresentando per $M + C$ l' integrale $\int Pdx$ in questa ipotesi, avremo

$$\int\int Pdxdy = \int dy \int Pdx = \int dy\,(M + C) = \int Mdy + \int Cdy.$$

Ora sia $N + C'$ l' integrale di Mdy rapporto ad y, e si otterrà

$$\int\int Pdxdy = \int dy \int Pdx = N + Cy + C'.$$

In questa guisa avrem trovato l' integrale completo che si cercava. Le quantità C, C' sono le due costanti arbitrarie che portano l' integrazioni. La C, che è l' arbitraria, allorchè si integra rapporto ad x, sarà una funzione arbitraria di tutte le quantità costanti ed indipendenti da x; essa potrà dunque essere una funzione arbitraria di y, e perciò $\int C dy$ potrà rappresentarsi per una funzione arbitraria $\varphi(y)$ di y.

Egualmente la C', potrà essere una funzione arbitraria $\Psi(x)$ di x, e perciò faremo generalmente $\int\int P dx dy = N + \varphi(y) + \Psi(x)$.

Saremmo giunti allo stesso risultato, incominciando l' integrazioni dalla variabile y.

Facciamo qualche esempio.

Vogliasi il valore dell' integrale $\int\int \frac{dxdy}{xx+yy}$.

Incominciando ad integrare rapporto ad y, avremo

$$\int\int\frac{dxdy}{xx+yy} = \int dx\int\frac{dy}{xx+yy}.$$

Ma $\int\frac{dy}{xx+yy} = \frac{1}{x}\,\text{Arc. tang}\,\frac{y}{x} + \varphi(x)$; dunque

$$\int\int \frac{dxdy}{xx+yy} = \int\frac{dx}{x}\,\text{Arc. tang}\,\frac{y}{x}+\varphi(x)+\Psi(y).$$

Incominciando dalla variabile x, avremmo trovato

$$\int\int\frac{dxdy}{xx+yy} = \int dy\int\frac{dx}{xx+yy} = \int\frac{dy}{y}\,\text{Arc. tang}\,\frac{x}{y}+\varphi(x)+\Psi(y).$$

Ecco come potrem riconoscere l' identità di questi due integrali.

Essendo $\text{Arc. tang}\,\frac{x}{y} = \frac{\pi}{2} - \text{Arc tang}\,\frac{y}{x}$, indicando $\frac{\pi}{2}$ un angolo retto, ed avendosi

$\text{Arc. tang}\,\frac{y}{x} = \frac{y}{x} - \frac{y^3}{3x^3} + \frac{y^5}{5x^5} - \frac{y^7}{7x^7} + \text{ec.}$, sarà

$$\int\frac{dx}{x}\,\text{Arc. tang}\,\frac{y}{x} = -\frac{y}{x} + \frac{y^3}{9x^3} - \frac{y^5}{25x^5} + \frac{y^7}{49x^7} - \text{ec.}$$

$$\int\frac{dy}{y}\,\text{Arc. tang}\,\frac{x}{y} = \frac{\pi}{2}\,ly - \frac{y}{x} + \frac{y^3}{9x^3} - \frac{y^5}{25x^5} + \frac{y^7}{49x^7} - \text{ec.};$$

ed il primo termine di questo secondo membro essendo una funzione di y soltanto, potrà considerarsi come contenuto entro la funzione arbitraria, ed allora i due risultati sono identicamente gli stessi.

Quando le integrazioni ponno effettuarsi senza ricorso ad artifizio di trasformazione, l' identità si manifesta da se medesima: per esempio:

$$\int\int ax^m y^n dxdy = a\int dx\int x^m y^n dy = a\int dx\left\{\frac{x^m y^{n+1}}{n+1}+C\right\} = \frac{ax^{m+1}y^{n+1}}{(m+1)(n+1)}+\varphi(x)+\Psi(y).$$

$$\int\int ax^m y^n dxdy = a\int dy\int x^m y^n dx = a\int dy\left\{\frac{x^{m+1}y^n}{m+1}+C\right\} = \frac{ax^{m+1}y^{n+1}}{(m+1)(n+1)}+\varphi(x)+\Psi(y).$$

In generale, per avere l' integrale di una differenziale parziale $P dx^m dy^n$, dovrem fare m integrazioni rapporto ad x, ed n rapporto ad y: è poi indifferente l' ordine da seguirsi in queste operazioni. Ogni volta però che si fa un' integrazione rapporto ad x, aggiungeremo un' arbitraria funzione di y, ed ogni volta che integreremo rapporto ad y, aggiungeremo un' arbitraria funzione di x; onde terminate tutte le integrazioni, si dovranno trovare un numero $m+n$ di arbitrarie, tra le quali vi saranno m funzioni di x, ed n funzioni di y.

Quantunque sia facilissimo estendere queste dottrine agli integrali triplicati, non ostante consideriamo la formula

$\int^3 P dxdydu$.

Per questa conviene fare tre integrazioni, ed è indifferente cominciare da x, da y, o da u. Quando s' integrerà rapporto ad x dovrem considerare costanti y, ed u; quando integreremo rapporto ad y, saranno costanti x ed u; ed infine quando si prenderà l' integrale rapporto ad u, saranno costanti la x e la y. In ogni integrazione aggiungeremo un' arbitraria che potrà esser funzione delle quantità che sono considerate costanti in quell' integrazione; così terminate tutte le integrazioni si troveranno nel risultato tre arbitrarie $\varphi(y,u)$, $\Psi(x,u)$, $F(x,y)$ che saranno respettivamente funzioni delle quantità contenute tra le parentesi.

Gli andamenti che possiamo seguire nel fare questa triplicata integrazione sono indicati da queste sei formule

$$\int^3 Pdxdydu \left\{ \begin{array}{l} =\int dx \int dy \int Pdu \\ =\int dx \int du \int Pdy \\ =\int du \int dy \int Pdx \\ =\int du \int dx \int Pdy \\ =\int dy \int du \int Pdx \\ =\int dy \int dx \int Pdu \end{array} \right\} + \varphi(y,u) + \Psi(x,u) + F(y,x).$$

le quali danno tutte lo stesso risultato.

§. 176. Nell' integrazioni della differenziale parziale $Pdxdy$ abbiam supposte le variabili x, y indipendenti. In virtù di questa ipotesi abbiam potuto riguardare una di queste variabili come costante, allorchè s' integrava relativamente all' altra, e stabilire che le due arbitrarie portate dall' integrazioni, esser poteano respettivamente funzioni di x, y.

Questa istessa indipendenza dà luogo ad una importantissima considerazione sopra l' integrale duplicato $\int\int Pdxdy$. Ottenuta la funzione $F(x,y)$, la quale esprime quest' integrale, supponiamo che esso debba essere esteso a riguardo di x sino ad $x=b$, ed a riguardo di y sino ad $y=\beta$ senza che d' altr' onde vi sia alcuna dipendenza tra b e β; basterà per questo porre $x=b$ in $F(x,y)$, ed avremo allora $\int\int Pdxdy = F(b,\beta)$.

Ora si può giungere al medesimo risultato ancora in quest' altra maniera: cangiata la formula $\int\int Pdxdy$ in $\int dx \int Pdy$, si cominci al solito a cercare l' integrale di Pdy nella supposizione di x costante, e sia questo integrale $f(x,y)$; ci resterà dunque ad integrare $\int f(x,y)\,dx$ nella supposizione di y costante. Estendiamo l' integrale $f(x,y)$ fino al suo termine cioè sino ad $y=\beta$; sarà $\int Pdy = f(x,\beta)$, e resterà a cercarsi il valore di $\int f(x,\beta)\,dx$, che ci darà l' integrale richiesto, di già esteso sino al suo termine a riguardo di y. Essendo β una quantità

costante ed indipendente da x, come era $\int f(x,y)\,dx = F(x,y)$ integrando nella supposizione di y costante, così sarà $\int f(x,\beta)\,dx = F(x,\beta)$; facciamovi $x=b$, ed avremo $F(b,\beta)$ per rappresentare l' integrale della formula esteso sino al limite di $x=b$, $y=\beta$.

Quindi concluderemo, che essendo le due variabili indipendenti, è lo stesso sostituire $x=b$, $y=\beta$ nell' integrale duplicato $\int\int Pdxdy$, dopo avere eseguite le due integrazioni, ovvero sostituire $y=\beta$ dopo aver integrato rapporto ad y ed $x=b$, dopo l' integrazione rapporto ad x.

Ma se le due variabili x, y hanno tra loro una tal relazione per la quale nel fine e nel principio dell' integrale i valori di y debbono essere determinati per quegli di x, essendo ivi una di queste variabili funzione dell' altra, per esempio y funzione di x, allora la cosa passa assai diversamente. Integrata la formula $Pdxdy$ prima per rapporto ad y, come se le variabili fossero indipendenti, ed ottenuta una funzione $F(x,y)+C=\int Pdy$, conviene, prima di fare la seconda integrazione, estendere quest' integrale sino ai punti ove la y abbia quello stabilito rapporto con la x; imperocchè l' estensione dell' integrale rapporto ad y dipendendo da x, dee considerarsi come una funzione di x, e per conseguenza debbe influire nella seconda integrazione riguardo ad x. Per questo, supponiamo che al principio dell' integrale debba essere $y=\varphi(x)$, ed alla fine $y=\varphi'(x)$: essendo C un' arbitraria funzione di x, determiniamola in modo che l' integrale abbia il principio voluto, e sarà $C = -F(x,\varphi(x))$, onde data la conveniente estensione all' integrale riguardo ad y, si avrà $\int Pdy = F(x,\varphi'(x)) - F(x,\varphi(x))$.

Indichiamo questa funzione di x per $\Psi(x)$, ed avremo $\int\int Pdxdy = \int \Psi x dx$, che si integrerà con le regole ordinarie.

Rendiamo per mezzo di esempj più chiara la dottrina da noi stabilita per gl' integrali doppj, quando le variabili sono dipendenti tra loro.

Abbiasi la differenziale parziale $dxdy\sqrt{(a^2-x^2-y^2)}$ e se ne voglia l' integrale doppio $\int\int dxdy\sqrt{(a^2-x^2-y^2)}$

nella supposizione che rapporto ad y l' integrale debba estendersi a dei confini, nei quali sia tra x ed y questa relazione $y^2 + x^2 = a^2$.

Le regole ordinarie d' integrazione ci danno (supponendo in questa prima integrazione x costante)

$$\int dy\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)} = \tfrac{1}{2}y\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)} + \tfrac{1}{2}(a^2 - x^2)\, Ar.\, sen \frac{y}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$: avremo dunque

$$\int dx\int dy\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)} = \int dx \left\{\tfrac{1}{2}y\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)} + \tfrac{1}{2}(a^2 - x^2)\, Ar.\, sen \frac{y}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}\right\}.$$

Nell' eseguire questa seconda integrazione riguardo ad y, conviene prima estendere il primo integrale sino ad $y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$: facendo dunque, prima d' integrare, $y = \sqrt{(aa - xx)}$ sotto il segno sommatorio, troveremo

$$\int dx\int dy\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)} = \int dx \left\{0 + \tfrac{1}{2}(a^2 - x^2)\,.\,\tfrac{\pi}{2}\right\} = \tfrac{\pi}{4}\int (a^2 - x^2)\,dx$$, e quindi

$$\int dx\int dy\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)} = \tfrac{\pi}{4}\left(aax - \tfrac{x^3}{3}\right) + C$$, essendo C una costante arbitraria che porta l' integrazione.

Per farne un altro esempio, io osservo che l' area compresa tra l' ascissa, l' ordinata, e l' arco di una curva, ha generalmente per differenziale ydx; di modo che se rappresenteremo per z una funzione delle due coordinate x, y, eguale allo spazio suddetto, si ha sempre $\left(\frac{dz}{dx}\right) dx = ydx$.

Ora prendiamo la differenziale di quest' equazione rapporto ad y, ed avremo $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) dxdy = dxdy$: dunque concluderemo che lo spazio compreso tra l' ascissa, l' ordinata, e l' arco di una curva, è una tale funzione delle due coordinate x, y, che la sua differenza parziale presa per rapporto ad x e ad y, è eguale a $dxdy$; risulta di quì che lo stesso spazio sarà eguale all' integrale duplicato $\int\int dxdy$, ed avremo $z = \int\int dxdy$.

L' integrale poi rapporto ad y dovrà estendersi sino ai punti nei quali y ha con la variabile x la relazione data dall' equazione della curva.

Fig. 2. Ciò premesso, proponiamoci di trovare la superficie del circolo ERHQ, riferito ai due assi CA, CB. Sia il raggio c; $CF = f$, $FG = g$ coordinate del centro, $CP = x$, $PY = y$, ed estendendo l' integrale rapporto ad y sino alla periferia, o trasportando il punto Y nella periferia del circolo, ivi avremo $cc = (f - x)^2 + (g - y)^2$.

Ora $\int\int dxdy = \int dx\int dy = \int dx\,(y + C)$. Se dunque si estende quest' integrale rapporto ad y dal punto Q al punto R, siccome si ha $y = g \pm \sqrt{(cc - (f - x)^2)}$, e si suppone che questo integrale sia nullo quando y ha il minore dei due valori, si avrà $\int dy = y - g + \sqrt{(c^2 - (f - x)^2)}$, ove facendo $y =$ al maggior valore $g + \sqrt{(c^2 - (f - x)^2)}$, otterremo $\int dy = 2\sqrt{(c^2 - (f - x)^2)}$, che sarà l' integrale rapporto ad y esteso da un limite all' altro. Avrem dunque

$$\int\int dxdy = 2\int dx\sqrt{(cc - (f - x)^2)} = C' - (f - x)\sqrt{(cc - (f - x)^2)} - cc\, Arc.\, sen \frac{f - x}{c}.$$

Determiniamo C′ in modo che l' integrale svanisca, quando $x = f - c$, ed avremo allora la superficie del segmento

$$QER = \tfrac{\pi}{2}cc - (f - x)\sqrt{(cc - (f - x)^2)} - cc\, Arc.\, sen \frac{f - x}{c}.$$

Estendiamo quest' integrale sino ad $x = f + c$, e si avrà, $cc\, Arc.\, sen \frac{f - x}{c} = - cc\, Arc.\, sen\, 1 = -\frac{\pi}{2}cc$, e però la superficie $ERHQ = \frac{\pi}{2}cc + \frac{\pi}{2}cc = \pi cc$, come si sà.

In questo §. abbiam supposto che s' incomincino le integrazioni da y; potriano invero incominciare da x, e tutto sarebbe lo stesso. Fatta la prima integrazione rapporto ad x come se y fosse costante, dovrebbe in questo primo integrale sostituirsi invece di x il suo valore dato per y, avanti di incominciarsi la seconda integrazione rapporto ad y. Basti aver fatta questa avvertenza una volta.

§. 177. La ricerca degli integrali raddoppiati $\int\int P dx dy$ talune volte si rende molto più semplice per mezzo della trasformazione delle variabili.

Prendendo in vece di x una certa funzione di due nuove variabili t ed u, e parimente prendendo per y un' altra funzione delle stesse t ed u, si può sempre trasformare l' integrale doppio $\int\int P dx dy$, in quest' altro $\int\int P' dt du$, nel quale P' è una funzione di t e di u, e l' integrazioni debbono farsi relativamente a queste nuove variabili. Non si ponno dare regole generali sopra la scelta delle funzioni da sostituirsi invece di x e di y; talvolta giova rilasciare una di queste variabili, facendo la trasformazione a riguardo dell' altra, considerata allora come funzione di una nuova variabile t, e della variabile che è restata; insomma tutto dipende dalla sagacità del Geometra; e però importantissimo dar la regola generale di questa trasformazione, la quale non ben seguita da taluni Geometri, li ha fatti cadere in gravissimi errori.

Sia dunque da trasformarsi l' integale duplicato $\int\int P dx dy$; essendo P una funzione di x e di y: incominciamo a trasformarlo soltanto a riguardo di y supponendo che debba restare la x. Per questo indicando per u un'altra variabile, riguardiamo y come una funzione di x e di u, di modo che sia $dy = P dx + Q du$: ora data all' integrale duplicato $\int\int P dx dy$ la forma $\int dx \int P dy$, nel prendere l' integrale $\int P dy$ conviene considerare x come costante, e perciò avremo in questa ipotesi $dy = Q du$; dunque $\int\int P dx dy = \int dx \int PQ du = \int\int PQ du dx$, e così il nostro integrale duplicato dipenderà da un altro in cui le integrazioni debbono farsi rapporto ad x e ad u. Si avverta che in questo secondo integrale il P è una funzione di x e di u, giacchè abbiamo tacitamente supposto di aver da esso eliminato y per mezzo della funzione di x e di u, che gli è eguale.

Trattiamo adesso l' integrale duplicato $\int\int PQ du dx$ come abbiam trattato $\int\int P dx dy$, e supponendo x eguale ad una funzione di u e di t, per cui si abbia $dx = R dt + S du$, avremo

$\int du \int PQ dx = \int du \int PQR dt$, poichè la supposizione di u costante nell' integrazione $\int PQ dx$, ci dà $dx = R dt$, ed in conseguenza $\int\int P dx dy = \int\int PQ du dx = \int\int PQR du dt$, ove si vede che nell' ultimo integrale duplicato le integrazioni dovran farsi rapporto ad u ed a t. Il P è una funzione di t e di u, poichè dopo aver da esso eliminato y, vi si elimina la x ponendo il valore di questa variabile dato in t ed u.

Introduciamo subito invece di x e di y due nuove variabili t ed u, tali che sia $dx = R dt + S du$, $dy = T dt + V du$: se nell' equazione supposta quì sopra $dy = P dx + Q du$ poniamo per dx il suo valore, avremo $dy = PR dt + (PS + Q) du$, e perciò sarà $PR = T$, $PS + Q = V$, d' onde si ricava $P = \frac{T}{R}$, $\frac{ST}{R} + Q = V$, e quindi $QR = VR - ST$: l' integrale duplicato $\int\int P dx dy$ sarà adunque ridotto a questo $\int\int P \left\{ VR - ST \right\} dt du$, essendo $dx = R dt + S du$, $dy = T dt + V du$.

Le integrazioni dovranno farsi rapporto ad u e a t. Eseguita l' integrazione rapporto ad una variabile u per esempio, converrà porre invece di u il suo valore dato per t, ed in seguito far la seconda integrazione rapporto a t. La relazione tra u e t si avrà ponendo nell' equazione tra x, y, invece di x e di y, i respettivi valori in t ed u.

Saremmo anche giunti allo stesso risultato in questa guisa.

Posto $\int\int P dx dy = \int dy \int P dx$, e fatto $dx = R dt + S du$, $dy = T dt + V du$, nell' ipotesi che y sia costante quando si prende l' integrale $\int P dx$, sarà $0 = T dt + V du$, e perciò in questa istessa ipotesi $du = -\frac{T}{V} dt$, $dx = R dt - \frac{ST}{V} dt = dt \left\{ \frac{RV - ST}{V} \right\}$, e quindi $\int P dx = \int \frac{RV - ST}{V} dt$: sarà dunque $\int\int P dx dy = \int\int \frac{RV - ST}{V} P dt dy$.

Ora $\int\int \frac{RV - ST}{V} P dt dy = \int dt \int \frac{RV - ST}{V} P dy$, e siccome nell'integrale $\int \frac{RV - ST}{V} P dy$ debbe considerarsi t costante, così si avrà $dy = V du$, ed in conseguenza

$$\int\int \frac{RV - ST}{V} P dt dy = \int dt \int (RV - ST) P du = \int\int (RV - ST) P dt du$$ come sopra.

Se nella trasformazione dell' integrale duplicato $\int\int P dx dy$, avessimo tenuto l' ordine inverso cominciando quest' operazione prima da y e poi da x, saremmo giunti a questo risultato

$\int\int P \{ ST - RV \} dt du$, dal che si dedurrà che la differenza $RV - ST$ debbe sempre prendersi positivamente.

Da quanto abbiam quì sopra veduto, resta dimostrato che l' integrale doppio $\int\int P dx dy$, ove le integrazioni debbono farsi relativamente ad x e ad y, si trasforma in altro, ove le integrazioni sono referite a due altre variabili t, u (essendo tra x, y, t, u queste equazioni $dx = R dt + S du$, $dy = T dt + V du$) se invece di $dx dy$ poniamo $\pm (RV - ST) dt du$, e prendiamo quel segno che rende questa quantità positiva, quindi sostituiamo in P invece di x e di y i respettivi valori dati per u e t.

Non sia inutile osservare quanto ci saremmo allontanati dal vero, pretendendo di sostituire per $dx dy$ il prodotto $(R dt + S du)(T dt + V du) = RT dt^2 + (RV + ST) du dt + SV du^2$, che è ben diverso dalla vera quantità $\pm (RV - ST) dt du$.

§. 178. Facciamo qualche esempio.

Sia $P = 1$, abbiasi cioè l' integrale doppio $\int\int dx dy$, tra le cui variabili sussista quest' equazione $c^2 = (f - x)^2 + (g - y)^2$.

Per farne la trasformazione, poniamo $f - x = \frac{t}{\sqrt{(1 + uu)}}$, $g - y = \frac{tu}{\sqrt{(1 + uu)}}$, ed avremo primieramente $t = c$, quindi differenziando

$$dx = - \frac{1}{\sqrt{(1 + uu)}} dt + \frac{tu}{(1 + uu)^{\frac{3}{2}}} du$$

$$dy = - \frac{u}{\sqrt{(1 + uu)}} dt - \frac{t}{(1 + uu)^{\frac{3}{2}}} du$$: sarà dunque

$\pm (RV - ST) dt du = \left(\frac{t}{(1 + uu)^2} + \frac{tuu}{(1 + uu)^2} \right) = \frac{t dt du}{1 + uu}$, ed in conseguenza

$$\int\int dx dy = \int\int \frac{t dt du}{1 + uu} = \int du \int \frac{t}{1 + uu} dt.$$

Ora nell' ipotesi di u costante, si ha

$\int \frac{t}{1 + uu} dt = \frac{1}{1 + uu} \cdot \frac{1}{2} tt$; dunque facendo $t = c$, si avrà

$$\int\int \frac{t dt du}{1 + uu} = \frac{1}{2} c^2 \int \frac{du}{1 + uu} = \frac{1}{2} c^2 \, Arc. tang\, u.$$

Riprendiamo l' integrale doppio trattato al §. 176, $\int\int dx dy (a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$, tra le variabili del quale regna l' equazione $a^2 = x^2 + y^2$. Se facciamo $x = \frac{t}{\sqrt{(1 + uu)}}$, $y = \frac{tu}{\sqrt{(1 + uu)}}$, si avrà $x^2 + y^2 = t^2$, $\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)} = \sqrt{(a^2 - t^2)}$, ed invece di $dy dx$, la quantità $\frac{t dt du}{1 + uu}$; dunque

$$\int\int dx dy (a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} = \int\int \frac{t dt du \sqrt{(a^2 - t^2)}}{1 + uu}.$$

Faremo ulteriori considerazioni sopra l' integrazioni di questi esempj in altro luogo.

Abbiamo detto che talvolta si può cangiare soltanto una delle due variabili x, y.

Sia proposta la differenziale parziale

$\frac{P}{Q}dxdy\sqrt{\left(\frac{ax^2+bxy+cy^2+fx+gy+h}{a'x^2+b'xy+c'y^2+f'x+g'y+h'}\right)}$, nella quale P e Q sono funzioni razionali ed intiere di x e di y. Questa formula, non facendovi alcuna trasformazione, si ricusa a qualunque integrazione, sia rapporto ad x o rapporto ad y. Per poterla integrare almeno relativamente ad una variabile, facciamo

$\sqrt{\left(\frac{ax^2+bxy+cy^2+fx+gy+h}{a'x^2+b'xy+c'y^2+f'x+g'y+h'}\right)} = t$, ed il valore di y ricavato da quest' equazione sarà della forma $A + Bx + \sqrt{(C + Dx + Ex^2)}$, essendo A, B, C, D, E tante funzioni di t.

Preso il valore di dy a dovere, supponendo x costante, non si conterrà in esso altro radicale che $\sqrt{(C + Dx + Ex^2)}$: introducendo dunque la variabile t invece di y nella differenziale proposta, la trasformata conterrà soltanto il radicale $\sqrt{(C + Dx + Ex^2)}$, per il che l' integrazione a riguardo di x potrà effettuarsi per mezzo degli archi di cerchio e dei logaritmi.

§. 179. Si ponno estendere queste dottrine agli integrali *triplicati* ec. Infatti consideriamo l' integrale triplicato $\int\int\int Zdxdydz$, e supponiamo che nei limiti dell' integrale a riguardo di z, debba esservi una relazione tra x, y, z che rappresenteremo per $z = F(x, y)$, e che in quelli a riguardo di y debba sussistere tra x ed y un' equazione determinata $y = f(x)$. Di più sia Z funzione qualunque di x, y, z.

Diamo al nostro integrale triplicato questa forma $\int dx \int dy \times \int Zdz$; quindi incominciando a prendere secondo le ordinarie regole d' integrazione l' integrale di Zdz, considerando x, y costanti, poniamo che sia $\int Zdz = \Psi(x, y, z)$. Sostituiscasi in questa funzione invece di z, $F(x, y)$, e si avrà

$\int\int\int dxdydz \,.\, Z = \int dx \int dy \int Zdz = \int dx \int \Psi(x, y, F(x, y))dy$.

Prendiamo l' integrale di $\Psi(x, y, F(x, y))dy$ nella supposizione di x costante e questo sia $\Psi'(x, y)$; ed avremo ponendo nell' integrale trovato $f(x)$ per y, $\int\int\int Zdxdydz = \int \Psi'(x, f(x))dx$: in fine integrando quest' ultima formula, sia

$\Psi'(x), \Psi''(x)$ quest' integrale, ed avrem trovato il dimandato valore dell' integrale triplicato proposto.

Volendo poi per l' integrale triplicato fare una trasformazione simile a quella fatta nei duplicati: ecco come ci regoleremo.

Se si volesse cangiare una o due variabili soltanto, si avrebbero le medesime formule del §. antecedente: supponiamo dunque che vogliano cangiarsi tutte e tre. Siano per questo tre nuove variabili t, u, ω, e si abbiano le tre equazioni

$$dx = Pdt + Qdu + Rd\omega, \quad dy = P'dt + Q'du + R'd\omega$$
$$dz = P''dt + Q''du + R''d\omega.$$

per determinare x, y, z in t, u, ω.

Essendo $\int\int\int Zdxdydz = \int dx \int dy \int Zdz$, osservo che nel prendere l' integrale $\int Zdz$ debbo considerare x, y costanti, ovvero $dx = 0$, $dy = 0$, e che questa supposizione mi dà $0 = Pdt + Qdu + Rd\omega$, $0 = P'dt + Q'du + R'd\omega$, da cui ricavo

$d\omega = \frac{P'Q - Q'P}{RQ' - R'Q}dt$, $du = \frac{P'R - R'P}{QR' - Q'R}dt$, ed in conseguenza

$$dz = \left(P'' + \frac{P'Q - Q'P}{RQ' - R'Q}R'' + \frac{P'R - R'P}{QR' - Q'R}Q''\right)dt$$

$$dz = dt\left\{P''(RQ' - R'Q) + Q''(R'P - P'R) + R''(P'Q - Q'P)\right\} : (RQ' - R'Q);$$ dunque indicando il coefficiente di dt per T, si avrà

$\int Zdz = \int ZTdt$; e quindi $\int\int\int Zdxdydz = \int\int\int ZTdxdydt$.

Abbiamo così cangiata la variabile z. Per cangiare y, faremo $\int\int\int ZTdxdydt = \int dx \int dt \int ZTdy$: ora dovendo essere nell' integrazione $\int ZTdy$, x, t costanti, ovvero $dx = dt = 0$, si avrà in quest' ipotesi $0 = Qdu + Rd\omega$, $dy = Q'du + R'd\omega$, ed in conseguenza $dy = \frac{Q'R - QR'}{R}du$; dunque $\int ZTdy = \int \frac{ZT(Q'R - QR')}{R}du$, ed ecco ridotto il nostro integrale triplicato a questo $\iiint \frac{ZT(Q'R-QR')}{R} dtdudx$, ove sono due nuove variabili invece di y e di z.

Per cambiare in fine anche la x, faccio

$\iiint \frac{ZT(Q'R-QR')}{R} dtdudx = \int dt \int du \int \frac{ZT(Q'R-QR')}{R} dx$; e siccome nell' integrazione $\int \frac{ZT(Q'R-QR')}{R} dx$ debbono considerarsi costanti u e t, cioè $du = o$, $dt = o$, avrò $dx = R d\omega$, ed in conseguenza

$\int \frac{ZT(Q'R-QR')}{R} dx = \int \frac{ZT(Q'R-QR')}{R} . R d\omega = \int ZT(Q'R - QR') d\omega$; dunque

$\iiint Z dxdydz = \iiint Z \{ P''(RQ' - R'Q) + Q''(R'P - P'R) + R''(P'Q - Q'P) \} dtdud\omega$: così per trasformare un integrale triplicato $\iiint Z dxdydz$ in un altro simile, nel quale però le integrazioni debban farsi relativamente a tre nuove variabili t, u, ω, che abbiano con le prime questi rapporti

$dx = P dt + Q du + R d\omega$, $dy = P' dt + Q' du + R' d\omega$
$dz = P'' dt + Q'' du + R'' d\omega$,

conviene invece di x, y, z porre nella funzione Z i respettivi valori di quelle variabili date in t, u, ω, quindi invece di $dydxdz$ porre la quantità

$\{ P'(RQ' - R'Q) + Q''(R'P - P'R) + R''(P'Q - Q'P) \} dtdud\omega$, ed in seguito far le integrazioni, come abbiamo quì sopra insegnato. Ne vedremo le applicazioni allorchè parleremo delle superficie curve.

CAP. VII.

Integrazione dell' Equazioni Differenziali.

§. 180. Nei due Capitoli III e IV abbiamo trattate quelle equazioni nelle quali la funzione incognita e le di lei differenziali non erano elevate al di là della prima potestà. Questa condizione le ha rese meno difficili ad essere integrate di quello che siano l' equazioni, nelle quali essa non ha luogo, e di cui incominciamo a parlare nel presente Capitolo.

Un' equazione differenziale del primo ordine è generalmente rappresentata da $F(x, y, (\frac{dy}{dx})) = o$, ovvero ammessa sempre possibile la risoluzione dell' equazioni, da $(\frac{dy}{dx}) = \Psi(x, y)$, essendo il secondo membro una funzione di x e di y.

Si presentano subito due casi nei quali essa è completamente integrabile, o almeno il di lei integrale dipende dall' integrazione di funzioni differenziali.

Questi sono quando il secondo membro è una funzione della sola x, o quando esso è funzione della sola y. Nel primo caso infatti si ha

$(\frac{dy}{dx}) dx = \Psi(x) dx$, e quindi $y = \int \Psi(x) dx + C$; e nel secondo $\frac{1}{\Psi(y)} (\frac{dy}{dx}) dx = dx$, ovvero $\frac{dy}{\Psi(y)} = dx$, e quindi $\int \frac{1}{\Psi(y)} dy = x + C$, rappresentando C la costante arbitraria. Nel primo caso si trova y eguale ad una funzione di x, e nel secondo, x eguale ad una funzione di y.

Egualmente la formula generale che rappresenta l' equazioni di secondo ordine

$(\frac{d^2y}{dx^2}) = \Psi(x, y, (\frac{dy}{dx}))$ è completamente integrabile in tre casi, cioè quando il secondo membro è funzione di x solamente, quando lo è di y, e quando lo è di $(\frac{dy}{dx})$.

Nel primo caso si ha

$(\frac{d^2y}{dx^2})dx^2 = \Psi(x)dx^2$, e quindi $d^2y = \Psi(x)dx^2$,

$dy = (\frac{dy}{dx})dx = \int\Psi(x)dx^2 + C$

$y = \int^2\Psi(x)dx^2 + \frac{Cx}{2} + C'$

essendo C, C' due costanti arbitrarie; e considerando il divisore 2 contenuto entro la costante C, si ha

$y = \int^2\Psi(x)dx^2 + Cx + C'$.

Nel secondo caso si ha

$(\frac{dy}{dx})(\frac{d^2y}{dx^2})dx = \Psi(y)\cdot(\frac{dy}{dx})dx$, e facendo $(\frac{dy}{dx}) = p$, e sostituendo, avremo

$p(\frac{dp}{dx})dx = pdp = \Psi(y)dy$, e quindi

$p^2 = 2\int\Psi(y)\cdot dy + C$.

Ora quest' ultima equazione ci darà il valore di

$p = \sqrt{(C + 2\int\Psi(y)\cdot dy)}$, e perciò

$(\frac{dy}{dx})dx = dx\sqrt{(C + 2\int\Psi(y)\cdot dy)}$, e quindi

$y = \int dx\sqrt{(C + 2\int\Psi(y)dy)} + C'$, essendo C, C' due costanti arbitrarie.

Nel terzo caso, facendo come sopra $p = (\frac{dy}{dx})$, si ha $(\frac{dp}{dx}) = \Psi(p)$, perciò $(\frac{dp}{dx})dx = dp = \Psi(p)\cdot dx$, e quindi

$\frac{1}{\Psi(p)}\cdot dp = dx$, $\int\frac{1}{\Psi(p)}dp = x + C$.

Supponghiamo che, dopo avere eseguita l' integrazione indicata in quest' ultima equazione, si trovi $p = \varphi(x + C)$, essendo $\varphi(x + C)$ una funzione cognita di $x + C$, che ha portata la prima integrazione; s' avrà allora $pdx = (\frac{dy}{dx})dx = dy = \varphi(x + C)\cdot dx$, ed in conseguenza $y = \int\varphi(x + C)\cdot dx + C'$, essendo al solito C, C' due costanti arbitrarie.

Ma ancora senza trovare il valore di p espresso per x, ne potremo aver l' integrale. Ottenuto infatti $dx = \frac{1}{\Psi(p)}dp$, se moltiplichiamo questa equazione per p, avremo $pdx = dy = \frac{pdp}{\Psi(p)}$, ed in conseguenza $x = \int\frac{1}{\Psi(p)}dp$, $y = \int\frac{pdp}{\Psi(p)}$: così le due variabili x, y saranno espresse per una terza p, e l' integrale completo risulterà dall' eliminazione di p.

Per esempio, sia da integrarsi l' equazione

$\frac{(1 + (\frac{dy}{dx})^2)^{\frac{3}{2}}}{(\frac{d^2y}{dx^2})} = a$, la quale determina la curva, il cui raggio di curvatura è costante; se vi facciamo $p = (\frac{dy}{dx})$, avremo $\frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{dp}dx = a$, e quindi $dx = \frac{adp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}$, $dy = \frac{apdp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Integrando queste due equazioni, si trova $x = A + \frac{ap}{\sqrt{(1 + pp)}}$, $y = B + \frac{a}{\sqrt{(1 + pp)}}$, dalle quali eliminando p, si ottiene $(x - A)^2 + (y - B)^2 = aa$, che è l' equazione del circolo.

Avremmo trovato lo stesso risultato, ricavando il valore di p dall' equazione $x = A + \frac{ap}{\sqrt{(1 + pp)}}$, ed integrando in seguito pdx, onde avere il valore di y.

L' equazione generale del terzo ordine

$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = \Psi\left(x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\right)$ è ancora essa integrabile completamente in tre casi, cioè quando il secondo membro è una funzione della sola x, della sola $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, e della sola $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$; ed in generale l' equazione dell' ordine n^{esimo},

$\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right) = \Psi\left(x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), \ldots\ldots \left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right), \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)\right)$ è ancora integrabile completamente in questi tre casi

$$\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right) = \Psi(x), \quad \left(\frac{d^ny}{dx^n}\right) = \Psi\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right), \quad \left(\frac{d^ny}{dx^n}\right) = \Psi\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right).$$

Nel primo caso, abbiamo completamente integrata l' equazione nel Cap. III; ed il di lei integrale è $y = \int^n \Psi(x)\, dx^n$. Le costanti arbitrarie sono introdotte dalle n integrazioni indicate da $\int^n$.

Nel secondo, facciamo $p = \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$, ed avremo

$\left(\frac{dp}{dx}\right) dx = dp = \Psi(p)\, dx$; dunque $\frac{1}{\Psi(p)}\, dp = dx$, e quindi

$\int \frac{1}{\Psi(p)}\, dp = x + C$.

Eseguita l' integrazione, troveremo da quest' ultima equazione il valore di p, dato in funzione di $x + C$; sia questo valore $p = \varphi(x + C)$, ed avremo da integrare

$\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \varphi(x + C)$, equazione che rientra nel primo caso.

Nel terzo caso facciamo $\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right) = p$, ed avremo

$\left(\frac{d^2p}{dx^2}\right) = \Psi(p)$: moltiplichiamo quest' equazione per $\left(\frac{dp}{dx}\right) dx$; sarà allora

$\left(\frac{dp}{dx}\right)\left(\frac{d^2p}{dx^2}\right) dx = \Psi(p)\,.\,dp$, e quindi

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 = 2\int \Psi(p)\,.\,dp + C$$

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = \sqrt{\left(C + 2\int \Psi(p)\,.\,dp\right)}.$$

Esegnita l' integrazione, il secondo membro sarà una funzione $\varphi(p)$ di p, ed in conseguenza avremo allora da integrare l' equazione

$\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \varphi\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)$, la quale rientra nel secondo caso quì sopra considerato.

Rendiamo tutto questo più chiaro per mezzo d' alcuni esempj.

Sia $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = a$, e facendo $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = p$, si ha

$p.\left(\frac{dp}{dx}\right) dx = pdp = adx$, e quindi

$p^2 = 2\int adx + C = 2ax + C$. Sarà dunque

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \sqrt{(C + 2ax)}$, ed integrando

$y = \int dx \int dx (C + 2ax)^{\frac{1}{2}} = \int^2 (C + 2ax)^{\frac{1}{2}} dx^2$.

Sia $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, e facendo $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = p$, si ha

$\left(\frac{d^2p}{dx^2}\right) = p$: di quì

$\left(\frac{dp}{dx}\right)\left(\frac{d^2p}{dx^2}\right) dx = p\left(\frac{dp}{dx}\right) dx$; ed integrando

$\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 = p^2 + C$; ovvero estraendo la radice,

$\frac{1}{(p^2 + C)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{dp}{dx}\right) = 1$; e moltiplicando per dx, $\frac{dp}{(p^2 + C)^{\frac{1}{2}}} = dx$.

Quest' ultima equazione integrata ci dà

$l\left(p + \sqrt{(C + p^2)}\right) = x + C'$, ovvero passando dai logaritmi ai numeri,

$p + \sqrt{(C + p^2)} = e^{C'}.e^x = Be^x$, (facendo $e^{C'} = B$); sarà dunque $\sqrt{(C + p^2)} = Be^x - p$, e perciò

$C = B^2 e^{2x} - 2Be^x p$, ed in conseguenza

$(\frac{d^2y}{dx^2}) = \frac{B^2 e^{2x} - C}{2Be^x} = \frac{Be^x}{2} - \frac{C}{2B} e^{-x}$.

Integrando ora quest' equazione s' avrà

$y = \frac{B}{2} e^x - \frac{C}{2B} e^{-x} + C'x + C''$; ovvero mutando la forma delle costanti arbitrarie,

$y = Ae^x + Be^{-x} + Cx + E$; e questo sarà l' integrale completo della **proposta equazione**, che conterrà quattro arbitrarie A, B, C, E.

§. 181. Riprendiamo la formula dell' equazioni differenziali del primo ordine $(\frac{dy}{dx}) = \Psi(x, y)$, e diamo a quest' equazione la forma $P(\frac{dy}{dx}) - Q = 0$, ciò che sarà sempre possibile.

Se P e Q sono ambedue funzioni di x, o ambedue funzioni di y, abbiamo veduto al principio del §. antecedente, come quest' equazione si integra completamente. Ora io osservo che quest' equazione sarà anche integrabile, quando uno di quei due coefficienti sia funzione di x, l' altro essendo funzione di y; almeno il di lei integrale dipenderà sempre dall' integrazione delle funzioni ad una sola variabile.

Sia dunque $P = Y$ funzione di y; $Q = X$ funzione di x, e moltiplicando tutta l' equazione per dx, avremo

$Y(\frac{dy}{dx})dx - Xdx = 0$, ovvero $Ydy = Xdx$, e quindi $\int Ydy = \int Xdx + C$, essendo C la costante arbitraria, che porta l' integrazione, e che rende quell' integrale completo.

Per esempio, se facciamo $Y = y$, $X = \frac{x}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}$, l' equazione da integrarsi sarà

$y(\frac{dy}{dx}) - \frac{x}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} = 0$, la quale si riduce a $ydy = \ldots \frac{x}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} dx$, e quindi $\int ydy = \int \frac{x}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} + C$: effettuando ora le indicate integrazioni, avremo

$\frac{y^2}{2} = \sqrt{(x^2 - a^2)} + C$; e quest' ultima equazione sarà l' integrale completo dimandato.

Un' equazione della forma $Ydy - Xdx = 0$ si chiama *un' equazione nella quale le variabili sono separate*; e si considera come integrata l' equazione $Pdy + Qdx = 0$, ove P e Q sono funzioni nello stesso tempo di x e di y, quando con qualche artifizio può ricondursi alla forma suddetta, cioè ad avere le variabili separate; imperocchè tutto dipende dall' integrazione di funzioni di una sola variabile. Questa maniera d' integrare l' equazioni è chiamata *il metodo della separazione delle variabili*.

Suole anche dirsi che l' integrazione di un' equazione dipende *dalle quadrature*, quando avendovi separate le variabili, è ridotta all' integrazione delle funzioni; giacchè un integrale $\int Xdx$ può sempre rappresentare lo spazio compreso tra l' ascissa, l' ordinata, e l' arco di una curva.

Non si può dare una regola generale per questa separazione di variabili, nè è sempre possibile ottenerla per qualunque siasi equazione; ma dipende dalla sagacità dell' Analista a scegliere quegli artifizi che possono più facilmente condurlo all' integrazione dell' equazioni di cui abbisogna.

Noi esporremo i principali di questi artifizi, applicandoli a quelle classi d' equazioni differenziali, nelle quali essi hanno luogo.

In una equazione di questa forma

$PYdx = QXdy$, nella quale P, X sono funzioni di x, e Q, Y funzioni di y, si separano le variabili dividendola tutta per XY, e si ottiene allora $\frac{P}{X}dx = \frac{Q}{Y}dy$, ove le variabili sono separate.

Quando P, Q sono funzioni omogenee di x e di y dello stesso numero di dimensioni, si può per una adattata sostituzione separar sempre le variabili nell' equazione differenziale $Pdx = Qdy$; infatti essendo P e Q funzioni omogenee delle stesse x ed y, e dello stesso numero di dimensioni, sarà $\frac{P}{Q}$ funzione omogenea di nessuna dimensione, la quale, fatto $y = ux$, diverrà funzione della sola u. Supponiamo dunque che questa sostituzione cangi $\frac{P}{Q}$ in U funzione di u, di modo che sia $dy = Udx$: ma essendo $y = ux$, si ha $dy = udx + xdu$; dunque $udx + xdu = Udx$: così la nostra equazione $Pdx = Qdy$ si è trasformata in un' altra $udx + xdu = Udx$ tra le variabili u ed x, nella quale possono facilmente separarsi, e si ha $\frac{dx}{x} = \frac{du}{U - u}$, il cui integrale è $\log x = \int \frac{du}{U - u} + C$.

Quest' ultima equazione ci darà il valore di u dato per x, per il che conosceremo il valore di y, che è ux.

In questa guisa l' equazioni omogenee potranno sempre integrarsi, o almeno ricondursi all' integrazione delle semplici funzioni; e di questo vantaggio goderanno ancora quelle equazioni, le quali per mezzo di un' adattata sostituzione ponno rendersi omogenee, come sarebbe l' equazione

$dz + zzdx = \frac{adx}{xx}$, che diviene omogenea facendo $z = \frac{1}{y}$, giacchè si cangia in $-\frac{dy}{yy} + \frac{dx}{yy} = \frac{adx}{xx}$, ovvero $xxdy = (xx - ayy)\,dx$.

Facciamo qualche esempio:

I. Vogliasi integrare l' equazione omogenea

$xdx + ydy = xdy - ydx$, ovvero $(x - y)\,dy = (x + y)\,dx$.

Poniamo $y = ux$, ed avremo $udx + xdu = \frac{1+u}{1-u}dx$, e quindi $\frac{dx}{x} = \frac{du - udu}{1 + uu}$, il cui integrale è $lx = Ang.\,tang\,u - l\sqrt{(1 + uu)} + C$, ovvero

$lx\sqrt{(1 + uu)} = C + Ang.\,tang\,u$; e facendo $u = \frac{y}{x}$, si avrà $l\sqrt{(x^2 + y^2)} = C + Ang.\,tang\,\frac{y}{x}$, che sarà il dimandato integrale.

II. Si dimandi l' integrale dell' equazione differenziale omogenea $xdy - ydx = dx\sqrt{(xx + yy)}$.

Quest' equazione ci dà $dy = \frac{y + \sqrt{(xx+yy)}}{x}dx$: ponendo dunque $y = ux$, si avrà

$xdu + udx = (u + \sqrt{(1 + uu)})\,dx$, ovvero $xdu = dx\sqrt{(1 + uu)}$: sarà dunque $\frac{dx}{x} = \frac{du}{\sqrt{(1+uu)}}$, di cui l' integrale è $lx = la + l(u + \sqrt{(1 + uu)}) = la + \ldots$ $l(\frac{y+\sqrt{(xx+yy)}}{x})$, ovvero $lx = la + l\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)} - y}$; quest' equazione, passando dai logaritmi ai numeri, si riduce a quest' altra $x = \frac{ax}{\sqrt{(xx+yy)} - y}$, ovvero $\sqrt{(xx + yy)} = a + y$, ed infine $xx = a^2 + 2ay$.

La quantità a è l' arbitraria, che completa l' integrale.

Se nei coefficienti P, Q dell' equazione omogenea $Pdx + Qdy = 0$ si contenessero dei trascendenti, potrebbe anche farsi la riduzione superiore; purchè questi affettino funzioni di x, y di nessuna dimensione, onde possano diventare funzioni soltanto di u per mezzo della sostituzione $y = ux$. I trascendenti come $l\frac{\sqrt{(xx+yy)}}{x}$, $e^{\frac{y}{x}}$, $Ang\ sen\frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}}$, $\cos\frac{nx}{y}$ ec., ponno ritrovarsi in P e Q, senza che impediscano l' applicazione del metodo quì sopra spiegato.

§. 182 Per ridurre ad aver le variabili separate l' equazione del primo ordine $(a + bx + cy)\,dx = (e + fx + gy)\,dy$, facciasi $a + bx + cy = t$, e $+ fx + gy = u$, ed avremo

$$x = \frac{gt - cu + ag - ce}{bg - cf}, \quad y = \frac{bu - ft + af - be}{bg - cf},$$

$$dx = \frac{gdt - cdu}{bg - cf}, \quad dy = \frac{bdu - fdt}{bg - cf}:$$

fatte le opportune sostituzioni nella proposta, essa diverrà

$gtdt - ctdu = budu - fudt$, ovvero

$dt\,(gt + fu) = du\,(bu + ct)$, la quale essendo omogenea, è della classe considerata al § antecedente.

Quando $bg = cf$, questa riduzione non ha luogo; allora data alla nostra equazione questa forma

$adx + (bx + cy)dx = edy + (fx + gy)dy$, pongasi $bx + cy = z$, ed avremo $dy = \frac{dz - bdx}{c}$, onde fatte le opportune sostituzioni, troveremo $(a + z)dx = \frac{dz - bdx}{c}(e + fx + gy)$; ora essendo $bx + cy = z$, si avrà $bgx + cgy = gz$, ovvero $cfx + cgy = gz$; dunque

$(a + z)dx = \frac{dz - bdx}{c}(e + \frac{gz}{c})$ sarà l' equazione in cui si trasforma la proposta. In quest' ultima le variabili si separano addirittura senza alcuno artifizio. E si potrebbe ancora rendere omogenea l' equazione

$(a + bx + cy)dx = (e + fx + gy)dy$ in quest' altra guisa.

Facciasi $x = t + A$, $y = u + B$, ed avremo $(a + bt + bA + cu + cB)dt = (e + ft + fA + gu + gB)du$, la quale diverrà $(bt + cu)dt = (ft + gu)du$, se determineremo le costanti A, B per mezzo delle due equazioni $a + bA + cB = 0$, $e + fA + gB = 0$.

Consideriamo ora l' equazione $dy + Pydx = Qdy$, nella quale P, Q sono funzioni della x: per questo noi abbiamo assegnato l' integrale di essa al §. 125., pure lo ricercheremo di nuovo per mezzo della separazione delle variabili.

Per separar le variabili nell' equazione $dy + Pydy = Qdx$ cerchiamo quella funzione X di x che facendo $y = Xu$ nell' equazione, le variabili possano separarsi. Fatta una tal sostituzione, si ottiene $Xdu + udX = Qdx$, equazione, la quale
$+ PXudx$
ammette la separazione se sarà $dX + PXdx = 0$, ovvero $\frac{dX}{X} = -Pdx$, e quindi

$lX = -\int Pdx$, $X = e^{-\int Pdx}$: prendendo dunque per x questa funzione, l' equazione proposta si trasformerà in $Xdu = Qdx$, la quale ci darà

$u = \int\frac{Qdx}{X} = \int e^{\int Pdx} Qdx$, ed in fine

$y = Xu = e^{-\int Pdx}\int e^{\int Pdx} Qdx$, ovvero

$y = e^{-\int Pdx}\{C + \int e^{\int Pdx} Qdx\}$, essendo C la costante arbitraria che completa l' integrale. Facciamo qualche esempio.

Sia l' equazione da integrarsi

$(1 - xx)dy + xydx = adx$. Paragonata questa con l' equazione generale quì sopra trattata, abbiamo

$P = \frac{x}{1 - xx}$, $Q = \frac{a}{1 - xx}$, e perciò

$\int Pdx = -l\sqrt{(1 - xx)}$, $e^{\int Pdx} = \frac{1}{\sqrt{(1 - xx)}}$; dunque

$y = \sqrt{(1 - xx)}.\{C + \int\frac{adx}{(1 - xx)^{\frac{3}{2}}}\} = \sqrt{(1 - xx)}\{C + \frac{ax}{\sqrt{(1 - xx)}}\}$, ovvero $y = ax + C\sqrt{(1 - xx)}$.

Sia ancora l' equazione $dy - \frac{2ydx}{(2n - 1)x} = \frac{n - 1}{2n - 1}xdx$, ed avremo

$P = -\frac{2}{2n - 1}\cdot\frac{1}{x}$, $Q = \frac{n - 1}{2n - 1}x$, quindi

$e^{-\int Pdx} = x^{\frac{2}{2n - 1}}$, $\int e^{\int Pdx} Qdx = \frac{1}{4}x^{\frac{4n - 4}{2n - 1}}$, ed in conseguenza

$y = x^{\frac{2}{2n - 1}}\{C + \frac{1}{4}x^{\frac{4n - 4}{2n - 1}}\}$, ovvero $y = cx^{\frac{2}{2n - 1}} + \frac{1}{4}x^2$.

Anche l' equazione differenziale

$dy + Pydx = Qy^{n + 1}dx$, essendo P, Q, come sopra, ammette la separazione delle variabili per mezzo di una semplice trasformazione; infatti facendo $\frac{1}{y^n} = z$, si ha $\frac{dy}{y} = -\frac{dz}{nz}$, e quindi ridotta l'equazione a $\frac{dy}{y} + Pdx = Qy^n dx$, e fatte in essa le opportune sostituzioni, si trova

$-\frac{dz}{nz} + Pdx = \frac{Qdx}{z}$, ovvero $dz - nPzdx = -nQdx$; e quest' ultima equazione è della forma di quella da noi integrata; si ha quindi

$$z = -e^{n\int Pdx}\left\{C + e^{-n\int Pdx}Qdx\right\} = \frac{1}{y^n}.$$

I casi che noi abbiamo trattati, sono i soli dotati di qualche generalità, i quali ammettano la separazione delle variabili. Noi daremo quì la riduzione di alcune altre equazioni, onde addestrare in qualche modo i nostri Lettori a questo metodo d' integrazione.

Per separare le variabili nell' equazione differenziale

$$aydx + bxdy + x^m y^n(gydx + hxdy) = 0,$$

incomincio a dividere tutta l' equazione per xy, ed ottengo

$$\frac{adx}{x} + \frac{bdy}{y} + x^m y^n\left(\frac{gdx}{x} + \frac{hdy}{y}\right) = 0.$$

Facciasi ora $x^a y^b = t$, $x^g y^h = u$, e si avrà, prendendo i logaritmi e differenziando,

$$\frac{adx}{x} + \frac{bdy}{y} = \frac{dt}{t},\ \frac{gdx}{x} + \frac{hdy}{y} = \frac{du}{u},$$

per il che la nostra equazione diverrà

$\frac{dt}{t} + x^m y^n . \frac{du}{u} = 0$. Le due supposizioni ci danno

$x^{ah} y^{bh} = t^h$, $x^{gb} y^{hb} = u^b$, d' onde $x^{ah-gb} = t^h . u^{-b}$; e nella stessa guisa $y^{bg-ah} = t^g . u^{-a}$: in conseguenza

$x = t^{\frac{h}{ah-gb}} . u^{\frac{-b}{ah-gb}}$, $y = u^{\frac{a}{ah-gb}} . t^{\frac{-g}{ah-gb}}$, e quindi

$x^m y^n = t^{\frac{mh-gn}{ah-gb}} . u^{\frac{an-bm}{ah-bg}}$: fatte dunque le opportune sostituzioni nell' equazione $\frac{dt}{t} + x^m y^n . \frac{du}{u} = 0$, si avrà

$\frac{dt}{t} + t^{\frac{mh-gn}{ah-gb}} . u^{\frac{an-bm}{ah-gb}} . \frac{du}{u} = 0$, che si riduce a

$t^{\frac{gn-mh}{ah-gb}-1} dt + u^{\frac{an-bm}{ah-gb}-1} du = 0$, di cui l' integrale completo è

$$\frac{t^{\frac{gn-mh}{ah-gb}}}{gn-hm} + \frac{u^{\frac{an-bm}{ah-gb}}}{an-bm} = C.$$

Quest' integrale è effettivamente quello della proposta se vi facciamo $t = x^a y^b$, $u = x^g y^h$.

Proponiamoci l' equazione

$ydy + dy(a + bx + nxx) = ydx(c + nx)$ per separarne le variabili.

Quest' equazione si riduce a quest' altra

$dy = \frac{y(c+nx)}{y+a+bx+nxx}dx$. Eulero tenta questa sostituzione,

$\frac{y(c+nx)}{y+a+bx+nxx} = u$, ovvero $y = \frac{u(a+bx+nxx)}{c+nx-u}$, la quale felicemente riesce; imperocchè si ha:

$dy = udx$, ovvero $\frac{dy}{y} = \frac{udx}{y} = \frac{dx(c+nx-u)}{a+bx+nxx}$: ora differenziando logaritmicamente il valore di y, si trova

$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dx(b+2nx)}{a+bx+nxx} - \frac{ndx-du}{c+nx-u}$; dunque la nostra equazione diverrà

$\frac{du}{u} + \frac{dx(b+2nx)}{a+bx+nxx} - \frac{ndx-du}{c+nx-u} = \frac{dx(c+nx-u)}{a+bx+nxx}$, la quale si riduce a quest' altra

$\frac{du(c+nx)-nudx}{u(c+nx-u)} = \frac{dx(c-b-nx-u)}{a+bx+nxx}$, ovvero

$\frac{du(c+nx)}{u(c+nx-u)} = \frac{dx\{na+cc-bc+(b-2c)u+uu\}}{(c+nx-u)(a+bx+nxx)}$, equazione che moltiplicata per $c+nx-u$, ammette subito la separazione delle variabili, e diviene

$\frac{dx}{(a+bx+nxx)(c+nx)} = \frac{du}{u(na+cc-bc+(b-2c)u+uu)}$, l' integrale della quale si ottiene per mezzo dei logaritmi e degli archi di circolo.

Prendiamo a separare le variabili anche da quest' equazione $(y-x)dy = \frac{ndx(1+yy)\sqrt{(1+yy)}}{\sqrt{(1+xx)}}$, la quale contiene una doppia irrazionalità.

Facciamo $y = \frac{x-u}{1+xu}$, e sarà $y-x = \frac{-u(1+xx)}{1+xu}$, $1+yy = \frac{(1+xx)(1+uu)}{(1+ux)^2}$, $dy = \frac{dx(1+uu)-du(1+xx)}{(1+ux)^2}$: sostituiti questi valori nell' equazione, diverrà

$-udx(1+uu)+udu(1+xx) = ndx(1+uu)\sqrt{(1+uu)}$, nella quale si vede a colpo d' occhio che le variabili ponno separarsi, e si ottiene

$\frac{dx}{1+xx} = \frac{udu}{(1+uu)(n\sqrt{(1+uu)}+u)}$.

§. 183. Andiamo adesso a parlare della separazione delle variabili nella celebre equazione

$dy + yydx = ax^m dx$.

Questa è conosciuta sotto il nome di equazione Riccatiana, perchè il Conte Iacopo Riccati è stato il primo che ne abbia cercata la separazione delle variabili, ed abbia assegnati i casi, nei quali questa separazione succede.

In primo luogo la separazione delle variabili succede quando $m = 0$: allora infatti l' equazione diviene

$dy + yydx = adx$, ovvero $\frac{dy}{a-yy} = dx$. Tutto dunque si riduce a ricondurre per mezzo di sostituzioni l' equazione del Riccati a questo primo caso.

Poniamo $y = \frac{b}{z}$, e si avrà $-bdz + bbdx = ax^m zzdx$, che diverrà della medesima forma della proposta, se faremo $x^{m+1} = t$, onde sia $x^m dx = \frac{dt}{m+1}$, e

$dx = \frac{t^{-\frac{m}{m+1}}dt}{m+1}$, e sarà $bdz + \frac{azzdt}{m+1} = \frac{bb}{m+1} t^{-\frac{m}{m+1}} dt$.

Essendo b una costante indeterminata, supponiamo $b = \frac{a}{m+1}$, e quest' ultima trasformata diverrà

$dz + zzdt = \frac{a}{(m+1)^2} t^{-\frac{m}{m+1}} dt$; dal che si ricava, che se l' equazione proposta ammette la separazione delle variabili nel caso di $m = n$, l' ammetterà anche nel caso di $m = \frac{-n}{n+1}$.

Poniamo $y = \frac{1}{x} - \frac{z}{xx}$, e si avrà

$dy = -\frac{dx}{xx} - \frac{dz}{xx} + \frac{2zdx}{x^3}$,

$yydx = \frac{dx}{xx} - \frac{2zdx}{x^3} + \frac{zzdx}{x^4}$, e quindi sostituendo

$-\frac{dz}{xx} + \frac{zzdx}{x^4} = ax^m dx$, ovvero

$dz - \frac{zzdx}{xx} = -ax^{m+2}dx$. Facciasi ora $x = \frac{1}{t}$, e si otterrà $dz + zzdt = at^{-m-4}dt$, la quale essendo simile alla proposta, ci dice che se la separazione succede quando $m = n$, succederà anche quando $m = -n-4$. Dunque da un caso $m = n$ ne ricaviamo due, $m = -\frac{n}{n+1}$, e $m = -n-4$.

Ora la separazione delle variabili si può fare quando $m = 0$; dunque quelle due formule impiegate alternativamente ci daranno quest' altri casi di separazione

$m = -4$; $m = -\frac{4}{3}$; $m = -\frac{8}{3}$; $m = -\frac{8}{5}$; $m = -\frac{12}{5}$; $m = -\frac{12}{7}$; ec.

Tutti questi casi son compresi nella formula $m = \frac{-4i}{2i \pm 1}$, in cui i rappresenta un numero intiero e positivo.

Se dunque sarà $m = \frac{-4i}{2i+1}$, ovvero $m = \frac{-4i}{2i-1}$, l'equazione $dy + yydx = ax^m dx$ si ridurrà per mezzo delle successive sostituzioni finalmente alla forma $du + uudv = cdv$, la di cui separazione è manifesta; infatti se sarà $m = \frac{-4i}{2i+1}$, l' equazione $dy + yydx = ax^m dx$, per mezzo delle sostituzioni

$x = t^{\frac{1}{m+1}}$, $y = \frac{a}{(m+1)z}$ si riduce a questa

$dz + zzdt = \frac{a}{(m+1)^2} t^n dt$, essendo $n = \frac{-m}{m+1}$, ed in conseguenza $n = \frac{-4i}{2i-1}$, il qual caso deve considerarsi di un grado inferiore del primo.

Se poi sarà $m = \frac{-4i}{2i-1}$, allora si faranno queste due sostituzioni $x = \frac{1}{t}$ ed $y = \frac{1}{x} - \frac{z}{xx}$, ovvero $y = t - ttz$, e l' equazione proposta si ridurrà a quest' altra $dz + zzdt = at^n dt$, nella quale

$n = \frac{-4(i-1)}{2i-1} = \frac{-4(i-1)}{2(i-1)+1}$, il qual caso è anche inferiore di un grado.

Tutti questi casi dunque, nei quali l' equazione del Riccati è separabile, danno per m dei numeri negativi contenuti tra i limiti 0, e -4; e se i diviene infinito, si ha il caso $m = -2$, nel quale l' equazione è separabile: infatti l' equazione $dy + yydx = \frac{adx}{xx}$ diviene omogenea, facendo $y = \frac{1}{z}$.

Anche l' equazione più generale

$dy + Ayyt^\mu dt = Bt^\lambda dt$, si riduce alla forma di quella quì sopra considerata; imperocchè se si fà

$At^\mu dt = dx$, si avrà $At^{\mu+1} = (\mu+1)x$, e quindi

$t = \left(\frac{\mu+1}{A}\right)^{\frac{1}{\mu+1}} \cdot x^{\frac{1}{\mu+1}}$, onde sostituendo, l' equazione diverrà

$dy + yydx = B\left(\frac{\mu+1}{A}\right)^{\frac{\lambda+1}{\mu+1}} \cdot \frac{1}{\mu+1} x^{\frac{\lambda-\mu}{\mu+1}} dx$, che è della forma di quella del Riccati.

Questa riduzione non ha luogo quando $\mu = -1$; così l' equazione

$dy + \frac{Ayydt}{t} = Bt^\lambda dt$ non può ridursi all' equazione Riccatiana.

Terminiamo di parlare della separazione delle variabili col dare un esempio, nel quale essa si ottiene riportando le variabili alle quantità angolari. Sia proposta l' equazione

$(1+yy)\sqrt{(1+yy)}dx = n(y-x)dy\sqrt{(1+xx)}$. Facciamo $y = tang\,\varphi$, $x = tang\,\omega$, ed avremo $dy = \frac{d\varphi}{\cos\varphi^2}$,

$dx = \frac{d\omega}{\cos\omega^2}$, $\sqrt{(1+yy)} = \frac{1}{\cos\varphi}$, $\sqrt{(1+xx)} = \frac{1}{\cos\omega}$, e

$y - x = \frac{sen\,(\varphi-\omega)}{\cos\varphi\cos\omega}$: sarà dunque

$\frac{1}{\cos\varphi^3} \cdot \frac{d\omega}{\cos\omega^2} = \frac{n\,sen\,(\varphi-\omega)}{\cos\varphi\cos\omega} \cdot \frac{1}{\cos\omega} \cdot \frac{d\varphi}{\cos\varphi^2}$, ovvero

$d\omega = nd\varphi\,sen\,(\varphi-\omega) = d\varphi - (d\varphi - d\omega)$, e quindi

$$d\phi\,(1 - n\,sen\,(\phi - \omega)) = d\phi - d\omega\,,\quad d\phi = \frac{d\phi - d\omega}{1 - n\,sen\,(\phi - \omega)}.$$

Poniamo $\phi - \omega = \Psi$, e sarà $\phi = \int\frac{d\Psi}{1 - n\,sen\,\Psi}$, ed $\omega = \int\frac{d\Psi}{1 - n\,sen\,(\Psi - \omega)} - \Psi$; si avranno dunque le variabili x, y espresse per una terza Ψ, e l' eliminazione di questa ci darà l' integrale completo della proposta.

§. 184. Lasciato il metodo della separazione delle variabili, il quale non ha d' altronde maggiore estensione di quella, che gli abbiamo dato quì sopra, andiamo ad esporre altre dottrine d' integrazione.

Abbiamo detto che la forma generale d' un' equazione differenziale del primo ordine è $\Psi(x, y, p) = 0$, nella quale il primo membro rappresenta una funzione qualunque di x, y e p, essendo $p = (\frac{dy}{dx})$. Proposta dunque quest' equazione da integrarsi, si comincerà dal ritrovare il valore di p in x ed y per mezzo delle regole che l' Algebra Elementare ci somministra onde risolvere l' equazioni, e supponiamo che questo sia $p = (\frac{dy}{dx}) = \frac{P}{Q}$, indicando per P, Q due funzioni cognite di x e di y: si avrà dunque da integrare l' equazione $(\frac{dy}{dx}) = \frac{P}{Q}$, ovvero

$Q(\frac{dy}{dx}) = P$, ovvero, $Q(\frac{dy}{dx})dx = Pdx$, ovvero

$Qdy = Pdx$, ovvero $Qdy - Pdx = 0$.

Vuolsi pertanto trovare un' equazione tra x, y, ed una costante arbitraria tale, che differenziata ed eliminata la costante arbitraria (§. 86.) si ottenga l' equazione

$Qdy - Pdx = 0$.

Ora supponiamo per semplicità di calcolo, che ambedue i termini del primo membro dell' equazione differenziale siano positivi, e si avrà $Qdy + Pdx = 0$.

Incominciamo dall' esaminare se $Qdy + Pdx$ può essere la differenziale esatta di una funzione $\phi(x, y)$ di x e di y, ciò che si farà osservando (27) se quest' equazione $(\frac{dQ}{dx}) = (\frac{dP}{dy})$ è identica. Quando ciò non succeda, è questo un contrassegno che la quantità differenziale $Qdy + Pdx$ non può nascere dalla differenziazione di una funzione di x e di y; nè per questo l' equazione può dirsi non integrabile assolutamente; poichè talvolta potremo per mezzo di alcune riduzioni delle quali parleremo in seguito, ottenerne l' integrazione.

Sia $(\frac{dQ}{dx}) = (\frac{dP}{dy})$ un' equazione identica; esisterà dunque una funzione $F(x, y)$, il cui differenziale, sarà $Pdx + Qdy$, e perciò $F(x, y) = C$ costante arbitraria, sarà l' integrale completo della proposta equazione.

Tutta la difficoltà è ridotta dunque a trovare effettivamente il valore di $F(x, y)$.

Per questo supponiamo in generale che sia $F(x, y) = \Phi + X + Y$, essendo Φ una funzione di x e di y, nella quale non sia alcun termine che non contenga nel tempo stesso x ed y; X una funzione della sola x, ed Y della sola y. L' integrale allora della proposta. sarà $\Phi + X + Y = C$. Differenziamo quest' equazione, ed avremo

$$\left\{(\frac{d\Phi}{dx}) + (\frac{dX}{dx})\right\}dx + \left\{(\frac{d\Phi}{dy}) + (\frac{dY}{dy})\right\}dy = 0,$$

e paragonata con la proposta ci darà

$(\frac{d\Phi}{dx}) + (\frac{dX}{dx}) = P$, $(\frac{d\Phi}{dy}) + (\frac{dY}{dy}) = Q$, e quindi

$\Phi + X = \int Pdx$, $\Phi + Y = \int Qdy$; sarà dunque

$F(x, y) = \int Pdx + Y$, ovvero $F(x, y) = \int Qdy + X$.

Se sottragghiamo tra loro queste due equazioni, avremo $\int Qdy - \int Pdx = Y - X$; e quando l' equazione sarà integrabile la quantità $\int Qdy - \int Pdx$, si distinguerà in due parti di cui una è soltanto funzione di x, l' altra di y: queste due parti ci daranno i valori di X e di Y. Ma senza ricercare tutti e due i valori di X ed Y, basta averne uno. Per trovare per esempio X, osserveremo che dovendo essere

$(\frac{dF}{dx}) = \int(\frac{dQ}{dx})\,dy + (\frac{dX}{dx}) = \mathrm{P}$, si avrà

$(\frac{dX}{dx}) = \mathrm{P} - \int(\frac{dQ}{dx})\,dy$, e quindi

$\mathrm{X} = \int dx \left\{ \mathrm{P} - \int(\frac{dQ}{dx})\,dy \right\}$;

e se avessimo voluto trovare Y, avremmo avuto

$\mathrm{Y} = \int dy \left\{ \mathrm{Q} - \int(\frac{dP}{dy})\,dx \right\}$: mentre l' equazione è integrabile senza nessuna riduzione; le quantità

$\mathrm{P} - \int(\frac{dQ}{dx})\,dy, \quad \mathrm{Q} - \int(\frac{dP}{dy})\,dx$

sono funzioni, la prima di x e la seconda di y soltanto.

§. 185. Ecco dunque la regola per integrare l' equazione $\mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy = 0$ integrabile per se medesima.

„ Si cerchi l' integrale $\int \mathrm{P}dx$ presa per costante y, in se-
„ guito si differenzi questo integrale preso per variabile soltan-
„ to y, affinchè si abbia il valore di $\int(\frac{dP}{dy})\,dx$; allora $\mathrm{Q} -$
„ $\int(\frac{dP}{dy})\,dx$ sarà una funzione della sola y, e facendo
„ $\mathrm{Y} = \int dy \left\{ \mathrm{Q} - \int(\frac{dP}{dy})\,dx \right\}$, sarà $\int \mathrm{P}dx + \mathrm{Y} = \mathrm{C}$ costan-
„ te, l' integrale richiesto „.

Si avrebbe una regola simile se si volesse incominciare l' integrazione dalla y: rendiamo più chiara questa Teorìa con qualche esempio.

I. Sia proposta l' equazione

$dx\,(\alpha x + \beta y + \gamma) + dy\,(\beta x + \delta y + \varepsilon) = 0$:

in questa equazione essendo $\mathrm{P} = \alpha x + \beta y + \gamma$, $\mathrm{Q} = \beta x + \delta y + \varepsilon$, si ha

$(\frac{dP}{dy}) = \beta$, $(\frac{dQ}{dx}) = \beta$, e perciò $(\frac{dP}{dy}) = (\frac{dQ}{dx})$ è un' equazione identica, e quindi la proposta è integrabile da se medesima.

L' integrale secondo la regola precedente è

$\int \mathrm{P}dx + \mathrm{Y} = \mathrm{C}$. Ora $\int \mathrm{P}dx = \frac{\alpha xx}{2} + \beta yx + \gamma x$, ed

$\mathrm{Y} = \int dy\,(\beta x + \delta y + \varepsilon - \int \beta dx) = \int dy\,(\delta y + \varepsilon)$,

$\mathrm{Y} = \frac{\delta y^2}{2} + \varepsilon y$; dunque si avrà

$\frac{\alpha xx}{2} + \beta yx + \gamma x + \frac{\delta yy}{2} + \varepsilon y = \mathrm{C}$

per esprimere l' integrale cercato.

Saremmo giunti precisamente allo stesso risultato incominciando l' integrazioni dalla y.

II. Anche l' equazione

$\frac{dy}{y} = \frac{xdy - ydx}{y\sqrt{(xx + yy)}}$, ovvero

$\frac{dx}{\sqrt{(xx + yy)}} + \frac{dy}{y}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{(xx + yy)}}\right) = 0$

è integrabile da se medesima: infatti essendo $\mathrm{P} = \frac{1}{\sqrt{(xx + yy)}}$,

$\mathrm{Q} = \frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{(xx - yy)}}$, si ha $(\frac{dP}{dy}) = \frac{-y}{(xx + yy)^{\frac{3}{2}}}$, e $(\frac{dQ}{dx}) = \ldots$

$\frac{-y}{(xx + yy)^{\frac{3}{2}}}$, e perciò $(\frac{dP}{dy}) = (\frac{dQ}{dx})$.

Per averne l' integrale, io osservo che

$\int \mathrm{P}dx = l\,(x + \sqrt{(xx + yy)})$; dunque

$\int(\frac{dP}{dy})\,dx = \frac{\sqrt{(xx + yy)} - x}{y\sqrt{(xx + yy)}} = \frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{(xx + yy)}}$, e perciò

$\mathrm{Y} = \int \left\{ \mathrm{Q} - \int(\frac{dP}{dy})\,dx \right\} dy = 0$; si avrà infine

$l\,(x + \sqrt{(xx + yy)}) = \mathrm{C}$ per il cercato integrale.

III. Prendiamo per un altro esempio l' equazione

$(x^2 + y^2 - a^2)dy + (a^2 + 2xy + x^2)dx = 0$:
in questa $\left(\frac{dP}{dy}\right) = 2x$, $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = 2x$: essa è dunque integrabile da se medesima.

Nel caso presente si ha $\int Pdx = a^2x + x^2y + \frac{1}{3}x^3$, e $\int\left(\frac{dP}{dy}\right)dx = xx$, $Y = \int dy(y^2 - a^2) = \frac{1}{3}y^3 - aay$; dunque l' integrale sarà
$a^2x + x^2y + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - aay = C$.

§. 186. Quando l' equazione $Pdx + Qdy = 0$ non è integrabile da se medesima, taluna volta lo diviene per mezzo di un moltiplicatore, col quale si moltiplichino i due suoi membri. Così per esempio l' equazione semplicissima $ydx - xdy = 0$, la quale non è per se medesima integrabile, perchè $\left(\frac{dP}{dy}\right) = 1$, $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = -1$, lo diventa moltiplicandola tutta per $\frac{1}{y^2}$: allora infatti essa si cangia in $\frac{ydx - xdy}{y^2} = 0$, il cui integrale completo è $\frac{x}{y} = C$.

Egualmente che per la separazione delle variabili, non si ha un metodo diretto, onde trovare l' idoneo fattore che renda integrabile una data equazione: così le dottrine che riguardano tutta questa indagine, sono assai limitate, ed i Geometri in questa ricerca non han fatto quasi un sol passo al di là del termine cui giunse Eulero.

Intanto si può dimostrare quest' interessantissimo Teorema:
„ Per ogni equazione $Pdx + Qdy = 0$ o più semplicemente
„ $dy + Rdx = 0$ non integrabile da se medesima, esiste sem-
„ pre una quantità, per cui moltiplicata l' equazione diviene
„ essa integrabile „.

Infatti sia $f(x, y) = C$ l' integrale dell' equazione $dy + Rdx = 0$, e si avrà $\left(\frac{df}{dx}\right)dx + \left(\frac{df}{dy}\right)dy = 0$, ovvero

$$dy + \frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{\left(\frac{df}{dy}\right)}dx = 0.$$

Siccome la costante C è svanita, così quest' equazione dovrà essere identica con la proposta, ed avremo l' equazione identica

$$dy + Rdx = dy + \frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{\left(\frac{df}{dy}\right)}dx, \text{ e perciò}$$

$\left(\frac{df}{dy}\right)(dy + Rdx) = \left(\frac{df}{dy}\right)dy + \left(\frac{df}{dx}\right)dx = df(x, y)$; dunque la proposta $dy + Rdx = 0$ moltiplicata per $\left(\frac{df}{dy}\right)$ è una differenziale esatta.

Per trovare direttamente questo moltiplicatore converrebbe integrare, se non completamente, almeno particolarmente un' equazione a differenze parziali del primo ordine, ciò che ordinariamente sarebbe di una difficoltà eguale e forse maggiore di quella che porta l' integrazione della proposta per altre vie.

Sia z il moltiplicatore che si ricerca, e l' equazione $zdy + Rzdx = 0$ dovrà essere integrabile da se medesima; dunque $\left(\frac{dz}{dx}\right) = R\left(\frac{dz}{dy}\right) + z\left(\frac{dR}{dy}\right)$ dovrà essere un' equazione identica: sarà pertanto il moltiplicatore z dato da un' equazione a differenze parziali come abbiam detto quì sopra.

Siccome l' integrale completo di un' equazione a differenze parziali del primo ordine contiene una funzione arbitraria, così se si potesse integrare l' equazione che ci dà il valore di z, si ritroverebbe in esso una funzione arbitraria, e col dare diverse forme ad essa, si avrebbero un' infinità di moltiplicatori, ciascun dei quali renderebbe integrabile l' equazione differenziale.

Ma senza passare per l' integrazione dell' equazione a differenze parziali, è facile vedere che conosciuto con qualche artifizio analitico, un moltiplicatore, se ne potranno da esso dedurre altri infiniti; infatti essendo $\left(\frac{df}{dy}\right)$ quel moltiplicatore, ancora la quantità $\Psi(f).(\frac{df}{dy})$, nella quale $\Psi(f)$ rappresenta una qualunque funzione di f, sarà un fattore, per il quale moltiplicata la proposta, diviene integrabile; imperocchè si avrà $\Psi(f).(\frac{df}{dy})\{dy + Rdx\} = \Psi(f).df$, il secondo membro della quale equazione è sempre una differenziale esatta. Questa formula $\Psi(f).(\frac{df}{dy})$ rappresenta la serie di tutti i moltiplicatori della proposta; e si ha ciascuno di essi, dando un valore particolare alla funzione $\Psi(f)$.

Per esempio cerchiamo tutti i moltiplicatori, i quali rendono la formula $aydx + bxdy$, ovvero l' equazione $aydx + bxdy = 0$ integrabile.

Il primo moltiplicatore, il quale si manifesta subito, è $\frac{1}{xy}$, e per esso moltiplicata l' equazione proposta, si ha $\frac{adx}{x} + \frac{bdy}{y} = 0$, e quindi $alx + bly = C$, ovvero $lx^a y^b = C$ è l' integrale completo. Dunque una funzione qualunque $f(x^a y^b)$ moltiplicata per l' idoneo fattore $\frac{1}{xy}$, ci darà la formula $\frac{1}{xy} f(x^a y^b)$, la quale rappresenta tutti i moltiplicatori possibili di quella equazione.

Il moltiplicatore che rende integrabile da se medesima l' equazione

$$aydx + bxdy = x^m y^n . (gydx + hxdy),$$

si ottiene per mezzo della considerazione dei moltiplicatori, i quali separatamente rendono integrabili le formule che compongono i di lei due membri in questa guisa.

Tutti i moltiplicatori, i quali rendono integrabile il primo membro, sono contenuti nella formula $\frac{1}{xy} f(x^a y^b)$. Il primo moltiplicatore che rende integrabile il secondo membro è

$\frac{1}{x^{m+1} y^{n+1}}$, e ci dà $\frac{gdx}{x} + \frac{hdy}{y}$ il cui integrale è $l(x^g y^h)$: questo moltiplicatore ci somministra la formula $\frac{1}{x^{m+1} y^{n+1}} f(x^g y^h)$ per rappresentare tutti i moltiplicatori di quel secondo membro: ora vediamo di rendere eguali quei due moltiplicatori. Per questo prendiamo le potenze invece delle funzioni, facciamo

$$f(x^a y^b) = x^{\mu a} y^{\mu b},$$

$f(x^g y^h) = x^{\nu g} y^{\nu h}$, e determineremo μ, ν in modo che sia

$\frac{1}{xy} x^{\mu a} y^{\mu b} = \frac{1}{x^{m+1} y^{n+1}} x^{\nu g} y^{\nu h}$, ovvero

$x^{\mu a - 1} y^{\mu b - 1} = x^{\nu g - m - 1} y^{\nu h - n - 1}$, e si avrà

$\mu a = \nu g - m$, $\mu b = \nu h - n$, e quindi

$\mu = \frac{gn - hm}{ah - bg}$, $\nu = \frac{an - bm}{ah - bg}$: l' idoneo moltiplicatore sarà allora

$x^{\mu a - 1} y^{\mu b - 1} = x^{\nu g - m - 1} y^{\nu h - n - 1}$, per il quale moltiplicando la proposta, otterremo

$$x^{\mu a - 1} y^{\mu b - 1}(aydx + bxdy) = x^{\nu g - 1} y^{\nu h - 1}(gydx + hxdy),$$

ove ciascun membro è integrabile da se medesimo.
L' integrale della proposta è dunque

$$\frac{1}{\mu} x^{\mu a} y^{\mu b} = \frac{1}{\nu} x^{\nu g} y^{\nu h} + C.$$

Quest' integrale combina con quello trovato sopra (182).

§. 187. Dell' equazioni, per le quali si può ottenere la separazione delle variabili, facilmente si trova il moltiplicatore: infatti sia $Pdx + Qdy = 0$ un' equazione differenziale, la quale per una certa tal qual sostituzione di due altre variabili t ed u invece di x ed y, divenga separabile: supponiamo che fatta questa sostituzione, si abbia $Pdx + Qdy = Rdt + Sdu$, e che in questa formula $Rdt + Sdu$ per mezzo della divisione per V, il che ci dà $\frac{Rdt + Sdu}{V}$, si ritrovino le variabili separate, sarà allora $\frac{R}{V}$ una funzione della sola t, ed $\frac{S}{V}$ una funzione della sola u. Essendo dunque la formula $\frac{Rdt + Sdu}{V}$ integrabile da se medesima, sarà ancora integrabile $\frac{Pdx + Qdy}{V}$ ad essa eguale, purchè in V si ripongano le variabili x, y. Potremo pertanto per mezzo della separazione delle variabili nell' equazione $Pdx + Qdy = 0$, venire in cognizione del fattore $\frac{1}{V}$, per il quale moltiplicata, diviene essa integrabile da se medesima.

L' equazioni omogenee si possono sempre ridurre tali, che le variabili vi siano separate (181): di questa classe dunque d' equazioni facilmente se ne potrà trovare il moltiplicatore; infatti sia $Pdx + Qdy = 0$ un' equazione proposta nella quale P e Q siano funzioni omogenee di n dimensioni delle variabili x, y: facciamo $y = ux$, e supponiamo che questa sostituzione ci dia $P = x^n U$, $Q = x^n V$, essendo U e V due funzioni soltanto di u. Ora quella supposizione ci dà $dy = udx + xdu$; dunque

$$Pdx + Qdy = x^n Udx + x^n Vudx + x^n Vxdu, \text{ ovvero}$$

$$Pdx + Qdy = x^n (U + Vu) dx + x^{n+1} Vdu:$$

ma questa formula divisa per $x^{n+1}(U + Vu)$ diviene integrabile; dunque anche l' altra $Pdx + Qdy$ lo diverrà, se la divideremo per $x^{n+1}.(U + Vu) = Px + Qy$: sarà dunque $\frac{1}{Px + Qy}$ il moltiplicatore idoneo dell' equazione omogenea $Pdx + Qdy = 0$, e la formula $\frac{Pdx + Qdy}{Px + Qy} = 0$ sarà sempre integrabile da se medesima. Il di lei integrale poi si troverà con la regola del §. 185.

Sarebbe desiderabile che si potesse avere un metodo diretto per trovare i moltiplicatori i quali rendono integrabili l' equazioni differenziali: ma per adesso alcun Geometra non ha potuto riuscire in una sì importante ricerca. Tutto si riduce a tentare alcune moltiplicazioni, che possono essere giudicate le più adattate.

Ci tratterremo a trovare in alcuni esempj il moltiplicatore deducendolo dalla separazione delle variabili, e ciò ad unico oggetto d' addestrare i nostri Lettori in questi calcoli; del resto quando di una data equazione se ne è ottenuta la separazione delle variabili, è allora ridotta all' integrazione delle semplici funzioni, e quindi è inutile il ricercarne il moltiplicatore.

Esempio I. Assegnare l' idoneo moltiplicatore per l' equazione

$$dx(\alpha x + \beta y + \gamma) + dy(\delta x + \epsilon y + \xi) = 0.$$

Facciamo primieramente

$\alpha x + \beta y + \gamma = r$, $\delta x + \epsilon y + \xi = s$, ed in conseguenza $\alpha dx + \beta dy = dr$, $\delta dx + \epsilon dy = ds$. Sarà allora $dx = \frac{\epsilon dr - \beta ds}{\alpha\epsilon - \beta\delta}$, $dy = \frac{\alpha ds - \delta dr}{\alpha\epsilon - \beta\delta}$, e la nostra equazione, tralasciando il denominatore perchè costante, si cangerà in quest' altra $\epsilon rdr - \beta rds + \alpha sds - \delta sdr = 0$, la quale essendo omogenea diviene integrabile dividendola per $\epsilon rr + (\beta + \delta) rs + \alpha ss$: il moltiplicatore dunque della nostra proposta equazione sarà $\frac{1}{\epsilon rr - (\beta + \delta) rs + \alpha ss} = \dots\dots$ $\frac{1}{r(\epsilon r - \beta s) + s(\alpha s - \delta r)}$, nel quale converrebbe porre per r e per s i respettivi valori in x ed y.

Esempio II. Cerchiamo il moltiplicatore dell' equazione

$$dy + yydx - \frac{adx}{x^4} = 0.$$

Facciasi $x = \frac{1}{t}$, ed a causa di $dx = -\frac{dt}{tt}$, la nostra formula diverrà

$dy - \frac{yydt}{tt} - attdt = 0$. Poniamo in quest' ultima equazione $y = t - ttz$, e diverrà $-tt(dz + zzdt - adt) = 0$, la quale divisa per $tt(zz - a)$, resta separata: la nostra equazione dunque divisa per $tt(zz - a) = \frac{(t-y)^2 - at^4}{tt} = (1 - xy)^2 - \frac{a}{xx}$ diviene integrabile; sarà pertanto il ricercato moltiplicatore $\frac{xx}{xx(1-xy)^2 - a}$, e l' equazione in conseguenza $\frac{x^4dy + x^4yydx - adx}{x^4(1-xy)^2 - axx} = 0$ sarà integrabile da se medesima. Per avere quest' integrale si riguardi, secondo la regola del §. 185, x come costante, e si otterrà integrando riguardo ad y

$\frac{1}{2\sqrt{a}}\, l\, \frac{x(1-xy) + \sqrt{a}}{\sqrt{a} - x(1-xy)} + X$, essendo X una funzione di x.

Per trovare il valore di questa funzione si differenzi di nuovo, e si avrà

$$\frac{2xydx - dx}{xx(1-xy)^2 - a} + dX = \frac{x^4yydx - adx}{x^4(1-xy)^2 - axx}, \text{ onde}$$

$$dX = \frac{x^4yydx - adx - 2x^3ydx + xxdx}{x^4(1-xy)^2 - axx} = \frac{dx}{xx}, \text{ ed } X = -\frac{1}{x} + C:$$

l' equazione integrale sarà dunque

$$l\, \frac{\sqrt{a} + x(1-xy)}{\sqrt{a} - x(1-xy)} = \frac{2\sqrt{a}}{x} + C.$$

§. 188. Può essere ancora di qualche utilità, assegnata la forma di un moltiplicatore, il ricercare quali sono quell' equazioni, che in virtù di esso divengono integrabili per se medesime: per quanto nello stato attuale dell' Analisi quest' indagine non sia di grande importanza, pure ce ne occuperemo alcun poco perchè lo può forse divenire. Quante dottrine giudicate sterili, hanno in seguito somministrato ad altri Geometri dei metodi fecondissimi di Scoperte Analitiche!

Abbiamo detto al §. 186, che se z rappresenta uno dei fattori, che rende integrabile per se medesima l' equazione

$\alpha dx + \beta dy = 0$ (scrivo così l' equazione del primo ordine, piuttosto che $dy + Rdx = 0$, perchè mi servirò in altro significato della lettera R), egli sarà un' integrale dell' equazione ai differenziali parziali

$$(A) \ldots\ldots \alpha\left(\frac{dz}{dy}\right) - \beta\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left\{\left(\frac{d\alpha}{dy}\right) - \left(\frac{d\beta}{dx}\right)\right\} z = 0.$$

Ora io suppongo che sia dato il fattore z, e che si ricerchi quali debbono essere le due funzioni α, β, onde $z\alpha dx + z\beta dy = 0$ sia una differenziale esatta.

E siccome non possiamo venire a capo di questa ricerca, quando si prenda in tutta la generalità, così assegneremo alcune forme indeterminate al fattore ed all' equazione, e le determineremo in maniera che la moltiplicazione per quel fattore renda integrabile da se medesima l' equazione supposta.

Sia per esempio $z = \frac{1}{\alpha x + \beta y}$; ed a cagione di

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = -\left\{\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)x + \left(\frac{d\beta}{dy}\right)y + \beta\right\} : (\alpha x + \beta y)^2,$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\left\{\alpha + \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)x + \left(\frac{d\beta}{dx}\right)y\right\} : (\alpha x + \beta y)^2,$$

l' equazione (A) diviene

$\alpha\left\{y\left(\frac{d\beta}{dy}\right) + x\left(\frac{d\beta}{dx}\right)\right\} = \beta\left\{y\left(\frac{d\alpha}{dy}\right) + \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)x\right\}$, la quale è identica se α, β sono funzioni omogenee della medesima dimensione n, giacchè si ha (§. 19.) in questo caso $\left(\frac{d\beta}{dy}\right)y + \left(\frac{d\beta}{dx}\right)x = n\beta$, e $\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)y + \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)x = n\alpha$, il che riduce l' equazione precedente a questa quì $n\alpha\beta = n\alpha\beta$.

Mettiamo la medesima equazione sotto la forma

$y\, \frac{\alpha\left(\frac{d\beta}{dy}\right) - \beta\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)}{\alpha^2} + x\, \frac{\alpha\left(\frac{d\beta}{dx}\right) - \beta\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)}{\alpha^2} = 0$; e facendo $\frac{\beta}{\alpha} = m$, si cambia in questa

$y\left(\frac{dm}{dy}\right) + x\left(\frac{dm}{dx}\right) = 0$, dall' integrazione della quale dipende il valore di m, ovvero di $\frac{\beta}{\alpha}$.

L'integrale di quest' equazione a differenze parziali del primo ordine lo abbiamo trovato alla fine del Capitolo IV., ed è $m = f(\frac{x}{y})$ rappresentando per $f(\frac{x}{y})$ una qualunque funzione di $\frac{x}{y}$: sarà dunque $\frac{dx + dy . f(\frac{x}{y})}{x + yf(\frac{x}{y})}$, ovvero $\frac{\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} f(\frac{x}{y})}{1 + f(\frac{x}{y})}$, ovvero anche $\frac{\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} f(\int\frac{dx}{x} - \int\frac{dy}{y})}{1 + f(\int\frac{dx}{x} - \int\frac{dy}{y})}$, una differenziale esatta.

Supponiamo che il fattore z debba essere funzione di x soltanto e di costanti, e cerchiamo quali debbono essere α, β perchè $\alpha dx + \beta dy$ divenga una differenziale esatta moltiplicata essendo per z. In questo caso si ha $(\frac{dz}{dy}) = 0$, e l' equazione (A) diviene $(\frac{d\alpha}{dy}) - (\frac{d\beta}{dx}) = \frac{\beta}{z} \cdot (\frac{dz}{dx})$. Una delle due α e β rimarrà in nostro arbitrio: potremo dunque prendere per β qualunque funzione di y e di x, ed α sarà allora determinata dall' equazione

$$\alpha = \int \left\{ (\frac{d\beta}{dx}) + \frac{\beta}{z} (\frac{dz}{dx}) \right\} dy + f(x).$$

Se $\beta = F(x)$, α sarà necessariamente della forma $y\varphi(x) + f(x)$, e potrà rendersi esatta l' equazione differenziale

$$dy . F(x) + ydx . \varphi(x) + dxf(x) = 0,$$

moltiplicandola per una sola funzione di x. Le quantità $F(x)$, $\varphi(x)$, $f(x)$ rappresentano tre funzioni cognite di x.

§. 189. Prendiamo ora l' equazione

$ydy + Mydx + Ndx = 0$, nella quale M ed N sono funzioni di x.

Quest' equazione per quanto sembri in apparenza molto semplice, pure non sappiamo per anche integrarla generalmente.

In questo esempio $\beta = y$, $\alpha = My + N$, e quindi $(\frac{d\beta}{dx}) = 0$, $(\frac{d\alpha}{dy}) = M$.

Supponiamo primieramente z di questa forma $\frac{1}{(y + P)^n}$ essendo P una funzione di x. Posto ciò si avrà

$$(\frac{dz}{dy}) = \frac{-n}{(y + P)^{n+1}}, \quad (\frac{dz}{dx}) = \frac{-nP'}{(y + P)^{n+1}}$$

facendo $dP = P'dx$. Mettiamo questi valori nell' equazione (A) del § antecedente, ed otterremo

$(n - 1) My - nP'y - MX + nN = 0$, la quale non può essere identica senza che sia

$$(n - 1) M - nP' = 0, \quad nN - MX = 0.$$

Queste due ultime equazioni ci danno $M = \frac{n}{n-1} P'$, $N = \frac{1}{n-1} PP'$, ed in conseguenza abbiamo l' equazione $ydy + \frac{n}{n-1} yP'dx + \frac{1}{n-1} PP'dx = 0$, che si può integrare moltiplicandola per $\frac{1}{(y + P)^n}$, qualunque d' altr' onde sia P.

L' equazione trovata, cui si può dare la forma

$$ydy + \frac{n}{n-1} ydP + \frac{1}{n-1} PdP = 0,$$

è un' equazione differenziale omogenea tra le variabili y e P: essa dunque (187) ha per moltiplicatore

$$\frac{1}{y^2 + \frac{n}{n-1} yP + \frac{1}{n-1} P^2} = \frac{1}{(y + P)(y + \frac{1}{n-1} P)}$$: dunque l' equazione

$$\frac{ydy + \frac{n}{n-1} ydP + \frac{1}{n-1} PdP}{(y + P)(y + \frac{1}{n-1} P)} = 0$$ è integrabile per se medesima.

Onde integrarla effettivamente osservo, che

$$\int \frac{ydy}{(y+P)(y+\frac{1}{n-1}P)} = \frac{n-1}{n-2}\int\left\{\frac{dy}{y+P} - \frac{dy}{(n-1)y+P}\right\} = \ldots$$

$\frac{n-1}{n-2}\, log.\frac{y+P}{((n-1)y+P)^{\frac{1}{n-1}}} + F(P)$: l' integrale dunque

dell' equazione sarà (184)

$\frac{n-1}{n-2}\, log\, \frac{y+P}{((n-1)y+P)^{\frac{1}{n-1}}} + F(P) = 0$, prendendo per $F(P)$

una tal funzione di P, che la differenziale dell' ottenuto integrale sia identicamente l' istessa equazione differenziale proposta, e ridotta integrabile con la moltiplicazione del fattore idoneo.

Per avere questa funzione, differenziamo quell' integrale facendo variare P ed y, e si avrà

$\frac{n-1}{n-2}.\left\{\frac{dy+dP}{y+P} - \frac{(n-1)dy+dP}{(n-1)\{(n-1)y+P\}}\right\} + dF(P) = 0$, ovvero

$\frac{n-1}{n-2}.\frac{n-2}{n-1}.\frac{(n-1)ydy+nydP+PdP}{(y+P)\{(n-1)y+P\}} + dF(P) = 0$,

la quale equazione paragonata con

$\frac{(n-1)ydy+nydP+PdP}{(y+P)\{(n-1)y+P\}} = 0$, ci dà subito $dF(P) = 0$, $F(P) =$ C costante; l' integrale dimandato sarà dunque

$$\frac{(y+P)^{n-1}}{(n-1)y+P} = C.$$

Trovato l' integrale ed un moltiplicatore, si ha immediatamente la formula di tutti gli infiniti moltiplicatori (186), i quali rendono integrabile la stessa equazione: sarà dunque nel nostro caso

$\frac{1}{(y+P)\{(n-1)y+P\}}\,\varphi\left\{\frac{(y+P)^{n-1}}{(n-1)y+P}\right\}$ la formula generale di tutti i fattori, e questa comprende anche il fattore $\frac{1}{(y+P)^n}$ trovato sopra.

Quando $n = 2$, la trasformazione fatta per giungere all' integrale precedente non ha luogo; poichè in questo caso dobbiamo integrare $\frac{ydy}{(y+P)^2}$, di cui l' integrale è $log(y+P) - \frac{y}{y+P}$, che bisogna eguagliare ad una costante arbitraria. Vi è ancora il caso di $n = 1$, nel quale le due equazioni identiche danno $\frac{N}{M} = P$, $P' = 0$, $P =$ costante: se fosse cioè proposta l' equazione $ydy + Mydx + aMdx = 0$, si potrebbe rendere integrabile dividendola per $y + a$, ed il suo integrale completo sarebbe

$y - al(y+a) + \int Mdx = c$.

Supponiamo ora che il fattore, il quale rende integrabile l' equazione

$ydy + Mydx + Ndx = 0$, sia

$z = \frac{1}{(y^2+Py+Q)^n}$, essendo sempre P e Q funzioni di x, delle quali le differenziali siano rappresentate da $P'dx$, $Q'dx$. In questa supposizione abbiamo

$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{-n(2y+P)}{(y^2+Py+Q)^{n+1}}$, $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{-n(yP'+Q')}{(y^2+Py+Q)^{n+1}}$; e mettendo questi valori nell' equazione (A), la cangeremo in questa quì

$\{(2n-1)M - nP'\}y^2 + \{(n-1)MP + 2nN - nQ'\}y +$
$nNP - MQ = 0$, la quale dovendo essere identica, dà necessariamente

$(2n-1)Mdx = ndP$, $(n-1)MPdx + 2nNdx = ndQ$,
$nNP = MQ$.

Dalla prima e dalla terza si ricava

$Mdx = \frac{ndP}{2n-1}$, $nNdx = \frac{MQdx}{P} = \frac{nQdP}{(2n-1)P}$: sostituendo questi valori nella seconda, si avrà

$$dQ - \frac{2QdP}{(2n-1)P} = \frac{n-1}{2n-1}PdP.$$

L' integrale di quest' ultima equazione si ha dal §. 182; in uno degli esempj che vi sono riportati, si trova questa equazione, con la sola differenza che là le variabili sono y ed x, e quì Q e P. Quest' integrale è

$Q = \frac{1}{4}P + cP^{\frac{2}{2n-1}}$ rappresentando c una costante arbitraria. Dunque l' equazione

$$ydy + \frac{n}{2n-1}ydP + \frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{4}P + cP^{\frac{3-2n}{2n-1}}\right)dP = 0$$

diverrà integrabile moltiplicandola per

$\frac{1}{\left(y^2 + Py + \frac{1}{4}P^2 + cP^{\frac{2}{2n-1}}\right)^n}$, qualunque funzione di x sia P.

Allorchè $n = \frac{1}{2}$, la prima di quelle tre equazioni tra P, Q, M, N, ci dà $dP = 0$, quindi $P = b$ costante arbitraria: le altre equazioni divengono allora $-\frac{b}{2}Mdx + Ndx = \frac{1}{2}dQ$, $\frac{1}{2}bN = MQ$, e danno $Mdx = \frac{2Ndx - dQ}{b} = \frac{bNdx}{2Q}$, da cui si ricava $Ndx = \frac{2QdQ}{4Q - b^2}$, $Mdx = \frac{bdQ}{4Q - b^2}$; così l' equazione $ydy + \frac{(by + 2Q)dQ}{4Q - b^2} = 0$ diverrà integrabile essendo moltiplicata per $\frac{1}{\sqrt{(y^2 + by + Q)}}$. Ora $\frac{ydy}{\sqrt{(y^2 + by + Q)}}$ integrato per rapporto ad y dà

$$\sqrt{(y^2 + by + Q)} + \frac{b}{2}\,l\left(\frac{b}{2} + y - \sqrt{(y^2 + by + Q)}\right);$$

dunque il primo membro della proposta avrà per integrale la quantità precedente più una funzione di Q solo, di cui la

differenziale è $\frac{bdQ}{b^2 - 4Q}$. Questa differenziale ha per integrale $-\frac{b}{4}\,l\left(\frac{b^2}{4} - Q\right)$; dunque infine l' integrale completo della proposta sarà

$$\sqrt{(y^2 + by + Q)} + \frac{b}{2}\log\left\{\frac{\frac{b}{2} + y - \sqrt{(y^2 + by + Q)}}{\sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - Q\right)}}\right\} = C$$

costante.

Nel caso in cui $n = 1$, l' equazione da integrarsi è $ydy + ydP + \left(c + \frac{1}{4}\right)PdP = 0$, la quale è omogenea. Il fattore che la rende integrabile, dato dalla formula superiore, è $\frac{1}{y^2 + Py + \left(c + \frac{1}{4}\right)P^2}$, che combina con ciò che abbiam detto al §. 187.

Continuando quest' indagine, si potrebbe supporre $z = \frac{1}{(y^3 + Py^2 + Qy + R)^n}$, $z = \frac{1}{(y^4 + Py^3 + Qy^2 + Ry + S)^n}$ ec., ed allora troveremmo altre classi d' equazioni integrabili. Non ci tratterremo sopra di ciò, poichè la determinazione di Q, R ec., non solo è della massima difficoltà, ma non puossi ottenere che nel caso limitatissimo di $n = 1$, ciò che rende anche più particolari le equazioni che si ridurrebbero integrabili con la moltiplicazione di quei fattori. Si veda il Calcolo Integrale del Sig. Cousin.

§. 190. Prendiamo adesso un' altra equazione $(y + N)dy + Mydx = 0$, e supponiamo che essa debba divenire integrabile con la moltiplicazione di un fattore di questa forma $z = \frac{y^{n-1}}{y^2 + Py + Q}$, essendo M, N, P, Q funzioni di x.

Paragonando quest' equazione con la formula $\alpha dx + \beta dy = 0$, si ha $\alpha = My$, $\beta = y + N$, quindi (facendo $dN = N'dx$)

$(\frac{d\beta}{dx}) = N'$, $(\frac{d\alpha}{dy}) = M'$;

$(\frac{dz}{dy}) = \frac{(n-1)y^{n-2}}{y^2+Py+Q} - \frac{(2y+P)y^{n-1}}{(y^2+Py+Q)^2}$,

$(\frac{dz}{dx}) = -\frac{(yP'+Q')y^{n-1}}{(y^2+Py+Q)^2}$; poniamo ora questi valori nell' equazione (A) del §. 188, e si avrà questa trasformata

$$\left.\begin{array}{l}((n-2)M - N' + P')y^{n+1} \\ ((n-1)MP - N'P + NP' + Q')y^{n} \\ (nMQ - N'Q + NQ')y^{n-1}\end{array}\right\} = 0,$$

dalla quale si ricavano l' equazioni seguenti

$(n-2)Mdx = dN - dP$,

$(n-1)MPdx = PdN - NdP - dQ$,

$nMQdx = QdN - NdQ$.

Sia $n = 0$, e si avrà subito $\frac{dQ}{Q} = \frac{dN}{N}$, e per conseguenza $Q = aN$, quindi quest' altre due equazioni

$2Mdx + dN - dP = 0$,

$MPdx + PdN - NdP - adN = 0$; togliendo la seconda equazione moltiplicata per 2 dalla prima moltiplicata per P, si ricava $-PdN - PdP + 2NdP + 2adN = 0$, ovvero

$dN + \frac{2NdP}{2a-P} = \frac{PdP}{2a-P}$, equazione lineare in N del primo ordine.

L' integrale di quest' equazione è $N = P - a + b(2a-P)^2$. Ma $2Mdx = dP - dN = 2b(2a-P)dP$; dunque l' equazione $(y + P - a + b(2a-P)^2)dy + b(2a-P)ydP = 0$ essendo proposta la renderemo integrabile, dividendola per

$y^3 + Py^2 + \{a(P-a) + ab(2a-P)^2\}y$.

Consideriamo in fine l' equazione $dy + yydx + Xdx = 0$, e supponiamo che debba divenire integrabile da se medesima moltiplicandola per $\frac{P}{y^2+2Qy+R}$. Determiniamo P, Q, R, X in modo che questo succeda. Se facciamo $\alpha = X + yy$, $\beta = 1$, $z = \frac{P}{y^2+2Py+R}$, l' equazione del § 188 diverrà

$(2PQdx - dP)yy + (2PRdx - 2PXdx - 2QdP + 2QdQ)y + (PdR - RdP - 2PQXdx) = 0$, la quale si decomporrà in queste tre

$2PQdx - dP = 0$;

$2PRdx - 2PXdx - 2QdP + 2QdQ = 0$;

$PdR - RdP - 2PQXdx = 0$. Da ciascuna di queste si ricava comodamente il valore di $\frac{dP}{P}$, cioè

$\frac{dP}{P} = 2Qdx = \frac{Rdx - Xdx + dQ}{Q} = \frac{dR - 2QXdx}{R}$.

Di quì si ricava $2Q(R+X)dx = dR$,

$2Q^2dx = \frac{QdR}{R+X}$, $Rdx = \frac{RdR}{2Q(R+X)}$, $Xdx = \frac{XdR}{2Q(R+X)}$, e facendo le opportune sostituzioni nell' equazione

$2Q^2dx = Rdx - Xdx + dQ$, si avrà

$\frac{QdR}{R+X} = \frac{(R-X)dR}{2Q(R+X)} + dQ$; ovvero

$2Q^2dR = RdR - XdR + 2QRdQ + 2QXdQ$,

dalla quale si ha

$X = \frac{2Q^2dR - 2QRdQ - RdR}{2QdQ - dR}$, ed

$R + X = \frac{2(Q^2 - R)dR}{2QdQ - dR}$; sarà pertanto

$2Qdx = \frac{dR}{R + X} = \frac{2QdQ - dR}{2(Q^2 - R)}$, ed in conseguenza

$\frac{dP}{P} = \frac{2QdQ - dR}{2(Q^2 - R)}$, $P = A\sqrt{(Q^2 - R)}$.

Facciamo $Q^2 - R = S$, e troveremo

$4QSdx = dS$; $X = \frac{4QSdQ}{dS} - Q^2 - S$; $R = Q^2 - S$; $P = A\sqrt{(S)}$; avremo dunque quest' equazione

$dy + \frac{yydS}{4QS} + dQ - \frac{(Q^2 + S)dS}{4QS} = 0$, che diviene integrabile moltiplicandola per $\frac{\sqrt{(S)}}{y^2 + 2Qy + Q^2 - S} = \frac{\sqrt{(S)}}{(y + Q)^2 - S}$, qualunque funzione di x sia una delle due Q ed S, tra le quali è l' equazione $Qdx = \frac{1}{4} \cdot \frac{dS}{S}$.

Non ci fermeremo di più sopra queste considerazioni, e rimanderemo i nostri Lettori al Calcolo Integrale del Sig. Euler.

§. 191. Quando un' equazione differenziale non può integrarsi con alcuno degli artifizi spiegati nei §§. antecedenti, allora si cerca di trovarne l' integrale per approssimazione. Al §. 95 abbiam detto come il Teorema di Tajlor ci somministri un metodo, onde integrare l' equazioni per serie, onde trovare cioè il valore di y dato per una serie infinita ordinata per le potenze di x, così sopra di quello non faremo parola. Il metodo dei coefficienti indeterminati può talvolta darci speditamente l' integrale di un' equazione, espresso per serie in questa guisa.

Supponiamo per esempio che vogliasi integrare l' equazione $dy + ydx = mx^n dx$. Supponiamo

$y = Ax^\mu + Bx^{\mu+1} + Cx^{\mu+2} +$ ec., e sarà

$dy = \mu Ax^{\mu-1}dx + (\mu + 1)Bx^\mu dx + (\mu + 2)Cx^{\mu+1}dx +$ ec.

Fatte ora le opportune sostituzioni nella proposta, avremo

$$\left.\begin{array}{l} \mu Ax^{\mu-1} + (\mu + 1)Bx^\mu + (\mu + 2)Cx^{\mu+1} + (\mu + 3)Dx^{\mu+2} + \text{ec.} \\ -mx^n \quad + \quad Ax^\mu + \quad Bx^{\mu+1} + \quad Cx^{\mu+2} + \text{ec.} \end{array}\right\} = 0,$$

che dovrà essere vera per qualunque valore di x; dunque dovrà essere $n = \mu - 1$, ovvero $\mu = n + 1$, $A = \frac{m}{\mu}$, $B = \frac{-m}{\mu(\mu + 1)}$, $C = \frac{-m}{\mu(\mu + 1)(\mu + 2)}$ ec., e perciò

$$y = m\left\{\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{x^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \text{ec.}\right\}.$$

Questo valore di y non può però prendersi per l' integrale completo della proposta, poichè non contiene una costante arbitraria: onde introdurla rappresentiamo per X quella serie, e facciamo $y = X + z$; avremo allora per determinare z questa equazione $dz + zdx = 0$, e perciò $z = Ce^{-x}$, essendo C una costante arbitraria; dunque l' integrale completo sarà

$$y = m\left\{\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{x^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \text{ec.}\right\} + Ce^{-x}.$$

Ma si può ottenere un' espressione per y dotata di tutta la generalità che possiede un integrale completo, in quest' altro modo.

Sia $f(x, y, c) = 0$ l' integrale di una qualunque equazione differenziale: l' uso cui è destinata la costante c, si è di fare in maniera, che quando x riceve un dato valore $x = a$, y ne riceva un altro parimente dato $y = b$. Con questa condizione si determina l' idoneo valore della costante c, risolvendo l' equazione $f(a, b, c) = 0$.

Ora se potremo preparare l' espressione di y in tal guisa che facendovi $x = a$, venga $y = b$, avremo per y un valore che potrà prendersi per il completo integrale della proposta, almeno ne farà intieramente le veci.

Per questo poniamo $x = a + t$, $y = b + u$, e prendiamo per rappresentare u una serie, della quale tutti i termini svaniscano quando $t = 0$: sia

$u = At^{\mu} + Bt^{\mu+1} + Ct^{\mu+2} + \text{ec.},$

$du = \mu At^{\mu-1} + (\mu + 1)\, Bt^{\mu} + (\mu + 2)\, Ct^{\mu+1} + \text{ec.},$

e sostituendo questi valori in $du + (b + u)\, dt = m\, (a + t)^{n} dt$, si avrà

$$\left.\begin{array}{llll} \mu At^{\mu-1} + (\mu+1)\, Bt^{\mu} & + (\mu+2)\, Ct^{\mu+1} & + \text{ec.} \\ + \; b \quad + & At^{\mu} + & Bt^{\mu+1} & + \text{ec.} \\ - \; ma^{n} \quad - m\, \frac{n}{1}\, a^{n-1}\, t & - m\, \frac{n(n-1)}{1.2}\, a^{n-2}\, t^{2} & & - \text{ec.} \end{array}\right\} = 0$$

equazione, che dovendo esser vera per qualunque valore di t, ci darà

$\mu = 1$, $A = ma^{n} - b$, $B = \frac{mna^{n-1} - ma^{n} + b}{2}$,

$C = \frac{mn(n-1)a^{n-2} - mna^{n-1} + ma^{n} - b}{2.3}$, ec. Dunque

$y = b + (ma^{n} - b)(x - a) + \left\{\frac{mna^{n-1} - ma^{n} + b}{2}\right\}(x - a)^{2} + \text{ec.}$

Quest' espressione per y soddisfà alla proposta ed è tale, che fatto $x = a$, si ha $y = b$.

Si può avere ora una serie convergente del valore di y in questa guisa.

Supponiamo che a crescendo continuamente per eguali intervalli Δa divenga infine x, e che i valori corrispondenti di y siano come segue

b corrispondente ad . . . . a

b' . . . . $a + \Delta a = a'$

b'' . . . . $a + 2\Delta a = a''$

b''' . . . . $a + 3\Delta a = a'''$

. . . .

$y = b^{(\lambda)}$ . . . . $a + \lambda\Delta a = a^{(\lambda)} = x$

e si avrà dalla serie quì sopra ottenuta

$$b' = b + \{ma^{n} - b\}\Delta a + \left\{\frac{mna^{n-1} - ma^{n} + b}{2}\right\}(\Delta a)^{2} + \text{ec.}$$

$$b'' = b' + \{ma'^{n} + b'\}\Delta a + \left\{\frac{mna'^{n-1} - ma'^{n} + b}{2}\right\}(\Delta a)^{2} + \text{ec.}$$

. . . .

$$y = b^{(\lambda-1)} + \{ma^{(\lambda-1)n} - b^{(\lambda-1)}\}\Delta a + \text{ec.}$$

Si sommino tutte queste equazioni e ne ricaveremo

$y = b + M\Delta a + N(\Delta a)^{2} + L(\Delta a)^{3} + \text{ec.}$

La qual serie tanto più convergerà, quanto minore sarà Δa.

In generale se avremo un' equazione differenziale $Pdx + Qdy = 0$, nella quale P e Q siano funzioni di x e di y, e vorremo trovare il valore di y dato per una serie ordinata secondo le potenze di x, cominceremo dal fare anche semplicemente $y = A + Bx + Cx^{2} + Ex^{3} + \text{ec.}$, per il che avremo

$\left(\frac{dy}{dx}\right) = B + 2Cx + 3Ex^{2} + \text{ec.}$ Sostituendo allora questi valori in

$\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{P}{Q}$, avremo

$-\frac{P}{Q} = B + 2Cx + 3Ex^{2} + \text{ec.}$, da cui $P + Q(B + 2Cx + 3Ex^{2} + \text{ec.}) = 0$. Quivi se sostituiremo in P e Q invece di y il valore supposto, ed ordineremo l' equazione risultante secondo le potenze di x, avremo le equazioni particolari per determinare quei coefficienti A, B, ec.

Facciamo un qualche esempio: sia l' equazione $ady + (y - x)\, dx = 0$, e fatto $y = A + Bx + Cx^{2} + Dx^{3} + \text{ec.}$, avremo

$$\{A + (B - 1)\, x + Cx^{2} + Dx^{3} + \text{ec.}\} + Ba + 2Cax + 3Dax^{2} + \text{ec.} = 0,$$

che ci darà $B = -\frac{A}{a}$, $C = \frac{A+a}{2a^2}$, $D = -\frac{A+a}{2.3.a^3}$, $E = \frac{A+a}{2.3.4a^4}$ ec., ed in conseguenza

$$y = A - \frac{A}{a}x + \frac{A+a}{2a^2}x^2 - \frac{A+a}{2.3.a^3}x^3 + \text{ec.}$$

Quest' integrale sarà completo, perchè contiene la costante arbitraria A.

Per un secondo esempio prendiamo l' equazione

$dy = dx - 3xdx + ydx + xxdx + xydx$, della quale Newton ne dette il primo l' integrale espresso per serie. Sarà in questo caso

$P = 1 - 3x + y + xx + xy$, $Q = -1$, e facendo

$y = A + Bx + Cx^2 + \text{ec.}$, si avrà

$$1 - 3x + y + xx + xy - (B + 2Cx + 3Dx^2 + \text{ec.}) = 0,$$

quindi sostituendovi il valore dell' y, ordinando secondo le potenze di x, ed eguagliandone i respettivi coefficienti a zero, otterremo

$B = A + 1$, $C = A - 1$, $D = \frac{2A+1}{3}$, $E = \frac{5A-2}{12}$, $F = \frac{13A+2}{60}$ ec.; sarà dunque

$y = A + (A+1)x + (A-1)x^2 + \frac{2A+1}{3}x^3 + \frac{5A-2}{12}x^4 + \text{ec.}$, e questo sarà l' intagrale completo, poichè contiene l' arbitraria A.

Quando le variabili che entrano in P e Q, sono elevate a potenze frazionarie, la strada più spedita per applicarvi il metodo dei coefficienti indeterminati è di toglierle per mezzo di qualche adattata sostituzione: così se fosse proposta l' equazione

$dx(axy^{\frac{1}{2}} + bx^2y^{\frac{1}{3}}) + hdy = 0$, cominciando a ridurre gli esponenti allo stesso denominatore, si avrà

$dx(axy^{\frac{3}{6}} + bx^2y^{\frac{2}{6}}) + hdy = 0$, la quale si riduce a

$dx(axz + bx^2) + 6hz^3dz = 0$, col farvi $y^{\frac{1}{6}} = z$.

Taluna volta giova cercare piuttosto il valore di x espresso per y: il metodo però è lo stesso. Si finge una serie $A + By + Cy^2 + \text{ec.}$ per rappresentare x, e quindi si determinano i coefficienti indeterminati A, B, ec.

§. 192. Andiamo ad esporre un altro metodo d' integrazione per mezzo delle serie.

Supponiamo che l' integrale completo di un' equazione differenziale del primo ordine, cioè in x, y e $(\frac{dy}{dx})$, sia $y = f(x, a)$, essendo a la costante arbitraria. Dando ad a un valore particolare h, la quantità $f(x, h)$ sarà un valore particolare di y, che noi rappresenteremo per p, e che supporremo conosciuto in una maniera qualunque. Facciamo frattanto $a = h + i$, e sviluppiamo la funzione $f(x, h + i)$ in serie ascendente secondo le potenze di i: il primo termine sarà $f(x, h) = p$, e gli altri termini saranno della forma $qi + ri^2 +$ ec, q, r essendo delle funzioni di x. Se si sostituisce quest' espressione di y nell' equazione data del primo ordine, converrà che essa si verifichi indipendentemente dalla costante i che dee dimorare arbitraria.

Sia dunque $(\frac{dy}{dx}) = F(x, y)$ l' equazione del primo ordine alla quale soddisfà il valore particolare $y = p$; si avrà dopo questa condizione $(\frac{dp}{dx}) = F(x, p)$.

Sostituiamo per y la serie $p + qi + ri^2 +$ ec., e per $(\frac{dy}{dx})$ la serie $(\frac{dp}{dx}) + (\frac{dq}{dx})i + (\frac{dr}{dx})i^2 +$ ec., e si avrà primieramente

$$(\tfrac{dp}{dx}) + (\tfrac{dq}{dx})i + (\tfrac{dr}{dx})i^2 + \text{ec.} = F(x, p + qi + ri^2 + \text{ec.}).$$

Poniamo $qi + ri^2 + \text{ec.} = \omega$, e scrivendo F per $F(x, p)$, si avrà

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) + \left(\frac{dq}{dx}\right) i + \left(\frac{dr}{dx}\right) i^2 + \text{ec.} = F(x,p) + \left(\frac{dF}{dp}\right)\omega + \left(\frac{d^2F}{dp^2}\right)\frac{\omega^2}{2} + \text{ec.}, \text{ ovvero}$$

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) + \left(\frac{dq}{dx}\right) i + \left(\frac{dr}{dx}\right) i^2 + \text{ec.} = F(x,p) + \left(\frac{dF}{dp}\right)(qi + ri^2 + \text{ec.}) + \left(\frac{d^2F}{dp^2}\right)\frac{1}{2}(q^2i^2 + 2qri^3 + \text{ec.}) + \text{ec.} =$$

$$F(x,p) + \left(\frac{dF}{dp}\right) qi + \left\{ r\left(\frac{dF}{dp}\right) + \frac{1}{2} q^2 \left(\frac{d^2F}{dp^2}\right)\right\} i^2 + \text{ec.}$$

Ora $\left(\frac{dp}{dx}\right) = F(x,p)$; dunque $\left(\frac{dq}{dx}\right) = q\left(\frac{dF}{dp}\right)$, $\left(\frac{dr}{dx}\right) = r\left(\frac{dF}{dp}\right) + \frac{q^2}{2}\left(\frac{d^2F}{dp^2}\right)$ ec., equazioni che serviranno a determinare successivamente le incognite q, r ec. Esse sono lineari del primo ordine; possono in conseguenza sempre integrarsi completamente; ma per noi basteranno anche degli integrali particolari. In questa guisa avendo determinati i valori di q, r ec., si avrà questo valore completo di y

$y = p + qi + ri^2 +$ ec., nel quale i sarà la costante arbitraria che mancava al valore particolare $y = p$. Questo valore è invero espresso per una serie, ma la convergenza di questa serie dipenderà dal valore della costante i.

Per farne un esempio, sia proposta l'equazione differenziale

$$4ydy - 3xdx - dx\sqrt{(4y^2 - 3x^2)} = 0.$$

A questa soddisfà l'integrale particolare $y = x$. Per averne il completo, diamogli questa forma

$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{3x + \sqrt{(4y^2 - 3x^2)}}{4y}$, e si avrà

$F(x,y) = \frac{3x + \sqrt{(4y^2 - 3x^2)}}{4y}$, $p = x$,

$F(x,p) = \frac{3x + \sqrt{(4p^2 - 3x^2)}}{4p}$,

$$\left(\frac{dF}{dp}\right) = \frac{1}{\sqrt{(4p^2 - 3x^2)}} - \frac{3x + \sqrt{(4p^2 - 3x^2)}}{4p^2},$$

$$\left(\frac{d^2F}{dp^2}\right) = \frac{-4p}{(4p^2 - 3x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{p\sqrt{(4p^2 - 3x^2)}} + 2 \cdot \frac{3x + \sqrt{(4p^2 - 3x^2)}}{4p^3},$$

ec. ec.

Facciamo ora $p = x$, ed avremo

$$\left(\frac{dF}{dp}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0,$$

$$\left(\frac{d^2F}{dp^2}\right) = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2} = -\frac{3}{x^2},$$

ec.

L'equazioni per determinare q, r ec., saranno dunque $\left(\frac{dq}{dx}\right) = 0$, $\left(\frac{dr}{dx}\right) = -\frac{q^2}{2}\cdot\frac{3}{x^2}$ ec.; quindi $q = c$, $r = \frac{3c^2}{2} \times \frac{1}{x} + c'$ ec., essendo c, c' costanti arbitrarie.

Siccome ci bastano dei valori particolari di q, r ec., così facciamo $c = \frac{1}{2}$, $c' = 0$, ed avremo $q = \frac{1}{2}$, $r = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{x}$ ec.: sarà pertanto il valore completo dell'y, il seguente

$y = x + \frac{i}{2} + \frac{3i^2}{8x} +$ ec., essendo i la costante arbitraria.

Che questa appunto sia la serie che esprime il completo valore dell'y, si rileverà dall'osservare che l'integrale completo di quell'equazione è $y^2 = x^2 + ax + a^2$, il quale diventa $y = x$, quando $a = 0$; e per qualunque valore della costante a, si trova

$$y = x\left(1 + \frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = x\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2}\right)^2 + \text{ec.}\right\}$$

$$= x\left\{1 + \frac{a}{2x} + \frac{3a^2}{8x^2} + \text{ec.}\right\} = x + \frac{a}{2} + \frac{3a^2}{8x} + \text{ec.},$$

la qual serie combina con quella trovata con l'altro metodo.

Un tal metodo è il fondamento delle soluzioni dei principali Problemi della Teoria dei Pianeti: siccome le escentricità, e le inclinazioni che debbonsi riguardare come costanti arbitrarie, sono piccolissime, e l' effetto delle attrazioni è anche piccolissimo, il circolo dà subito dei valori particolari, i quali si completano in seguito per mezzo di serie ordinate secondo le potenze di queste costanti piccolissime.

§. 193. Si può taluna volta trovare l' integrale approssimato di un' equazione per mezzo delle frazioni continue.

Non sono invero di grande utilità simili integrazioni, pure ne faremo un cenno. Abbiasi l' equazione

(o) . . . . . $P + Qy + Ry^2 + S\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$, nella quale P, Q, R, S siano funzioni di x.

Se noi poniamo $y = \frac{X}{1+y'}$, essendo X una funzione indeterminata di x, ed y' un' altra variabile, si avrà facendo le opportune sostituzioni

(1) . . . . . $P' + Q'y' + R'y'^2 + S'\left(\frac{dy'}{dx}\right) = 0$, nella quale

$$P' = P + QX + RX^2 + S\left(\frac{dX}{dx}\right),$$

$$Q' = 2P + QX + S\left(\frac{dX}{dx}\right),$$

$$R' = P, \quad S' = -SX.$$

Trattando l' equazione (1) come abbiam trattato l' equazione (o), cioè facendo $y' = \frac{X'}{1+y''}$, si avrà per determinare y'', l' equazione

(2) . . . . . $P'' + Q''y'' + R''y''^2 + S''\left(\frac{dy''}{dx}\right) = 0$, nella quale

$$P'' = P' + Q'X' + R'X'^2 + S'\left(\frac{dX'}{dx}\right),$$

$$Q'' = 2P' + Q'X' + S'\left(\frac{dX'}{dx}\right),$$

$R'' = P'$, $S'' = -S'X'$, e così di seguito: in questa guisa troveremo

$$y = \cfrac{X}{1 + \cfrac{X'}{1 + \cfrac{X''}{1 + \cfrac{X'''}{1 + \cfrac{X''''}{1 + \text{ec.}}}}}}$$

Per determinare X, X', X'' ec., supponiamo $X = Ax^\alpha$, $X' = Bx^\beta$, $X'' = Cx^\gamma$ ec., ed avremo in principio $y = \frac{Ax^\alpha}{1+y'}$. Se noi trascuriamo y', sarà $y = Ax^\alpha$, $dy = A\alpha x^{\alpha-1}$, e la proposta equazione si cangerà in questa

$P + QAx^\alpha + RA^2x^{2\alpha} + SA\alpha x^{\alpha-1} = 0$; dovremo dunque determinare A ed α in modo che una tale equazione sia soddisfatta: ora supponendo x piccolissimo (e quando questa supposizione non potesse aver luogo, non è di alcun uso il metodo) si ritengano le sole potenze inferiori della x, lasciando solo nell' equazione due termini, per i quali possano rendersi eguali gli esponenti con una adattata determinazione di α: si avrà così il valore di α, e quindi quello di A sarà determinato col rendere eguali i coefficienti di quelle due potenze di x.

Trovato il valore di X, si conosceranno i coefficienti della trasformata in y'; così se facciamo $y'' = 0$, si avrà $y' = X' = Bx^\beta$: sostituiremo dunque questo valore di y' nell' equazione che a lui si conviene, e determineremo B e β in modo che con questa sostituzione l' equazione trasformata (1) sia soddisfatta: continuando in questa guisa, si troveranno tutti i valori dei denominatori X, X', X'' ec.

Quest' operazione terminerà quando una delle quantità P', P'', P''' ec., che formano i primi termini delle trasformate, si annullerà da se medesima. Imperocchè sia

$Hu + Tu^2 + V\left(\frac{du}{dx}\right) = 0$ l' ultima trasformata, o quella nella quale il primo termine è nullo: per H, T, V, u noi indichiamo i valori di Q, R, S, y che ad essa convengono. Ad una tale equazione soddisfà $u = 0$, e così la frazione continua si termina.

In questa guisa si ha un' integrale particolare della proposta in y: per avere il completo, facciamo in quest' ultima trasformata $u = \frac{1}{z}$, ed otterremo

$Hz + T - V\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$, che è un' equazione lineare del primo ordine, sempre integrabile completamente: si avrà così il valore di u, o l' ultimo valore di y esattamente espresso.

Rendiamo più chiara questa Teoria con un esempio. Sia l' equazione differenziale

$my + (1 + x)\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$, e supponiamo che x sia una quantità molto piccola. Sostituiamo primieramente Ax^{α} per y, e si avrà $(mA + \alpha A)x^{\alpha} + \alpha Ax^{\alpha - 1} = 0$, e trascurando la potenza superiore di x, avremo $\alpha Ax^{\alpha - 1} = 0$, e quindi $\alpha = 0$: il coefficiente A resterà indeterminato, e si avrà per una prima approssimazione $y = X = A$. Trovato questo valore di x, ed avendo dalla proposta $P = 0$, $Q = m$, $R = 0$, $S = 1 + x$, otterremo per la prima trasformata

$-m - my' + (1 + x)\left(\frac{dy'}{dx}\right) = 0$. Se in quest' equazione facciamo

$y' = Bx^{\beta}$, $dy' = B\beta x^{\beta - 1}$, avremo

$-m - mBx^{\beta} + B\beta x^{\beta - 1} + B\beta x^{\beta} = 0$, ovvero trascurando le potenze superiori dell' x, $-m + B\beta x^{\beta - 1} = 0$, cui si soddisfarà facendo $\beta = 1$, $B = m$: sarà dunque $X' = y' = mx$. La seconda trasformata sarà poi

$(m - 1)x + \{1 + (m - 1)x\}y'' + y''^{2} + (1 + x)x\left(\frac{dy''}{dx}\right) = 0$, in cui ponendo Cx^{γ}, $C\gamma x^{\gamma - 1}dx$ per y'',

e per dy'', si avrà

$(m - 1)x + \{1 + (m - 1)x\}Cx^{\gamma} + C^{2}x^{2\gamma} + (1 + x)xC\gamma x^{\gamma - 1} = 0$, che è soddisfatta da $\gamma = 1$, $C = -\frac{m - 1}{2}$, avendovi però trascurate le potenze superiori della x. Avrebbe soddisfatto però a quest' equazione $\gamma = 0$, ma noi escludiamo un tal valore, perchè l' esponente di x nel numeratore di ciascuna frazione integrante che segue la prima, dee sorpassare zero, giacchè tutte queste frazioni debbono svanire quando $x = 0$. Il valore di X'' sarà dunque $-\frac{m - 1}{1 \cdot 2}x$. Continuando questa indagine, si troverebbe $X''' = \frac{m + 1}{3 \cdot 2}x$, $X' = -\frac{m - 2}{3 \cdot 2}x$, $X^{v} = \frac{m + 2}{5 \cdot 2}x$ ec., e quindi

$$y = \cfrac{A}{1 + \cfrac{mx}{1 - \cfrac{\frac{m-1}{1} \cdot \frac{x}{2}}{1 + \cfrac{\frac{m+1}{3} \cdot \frac{x}{2}}{1 - \cfrac{\frac{m-2}{3} \cdot \frac{x}{2}}{1 + \cfrac{\frac{m+2}{5} \cdot \frac{x}{2}}{1 - \text{ec.}}}}}}}$$

Quest' espressione sarà l' integrale completo della proposta, perchè contiene la costante arbitraria A.

Per un altro verso l' equazione $my + (1 + x)\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$, si integra completamente e si ha $y = A(1 + x)^{-m}$; dunque

$$\frac{A}{(1+x)^m} = \cfrac{A}{1+\cfrac{mx}{1-\cfrac{\frac{m-1}{1}\cdot\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{m+1}{3}\cdot\frac{x}{2}}{1-\cfrac{\frac{m-2}{3}\cdot\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{m+2}{5}\cdot\frac{x}{2}}{1-\text{ec.}}}}}}}$$

e quindi

$$(1+x)^m = 1+\cfrac{mx}{1-\cfrac{\frac{m-1}{1}\cdot\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{m+1}{3}\cdot\frac{x}{2}}{1-\cfrac{\frac{m-2}{3}\cdot\frac{x}{2}}{1+\text{ec.}}}}}\,.$$

E se noi rammentiamo che nell' introduzione si dimostra $(1+x)^m = 1 + \frac{ml(1+x)}{1} + \frac{m^2(l(1+x))^2}{1.2} + \text{ec.}$, avremo dividendo l' equazione per m,

$$l(1+x) + m(l(1+x))^2 + \text{ec.} = \cfrac{x}{1-\cfrac{\frac{m-1}{1}\cdot\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{m+1}{3}\cdot\frac{x}{2}}{1-\text{ec.}}}}\,;$$

facciamo in quest' ultima equazione $m=0$, e troveremo questa elegantissima formula per esprimere il valore di $l(1+x)$,

$$l(1+x) = \cfrac{x}{1+\cfrac{\frac{1}{1}\cdot\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{2}{5}\cdot\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{3}{5}\cdot\frac{x}{2}}{1+\text{ec.}}}}}}}\,.$$

L' espressione del binomio $(1+x)^m$ in una frazione continua può anche ottenersi senza il Calcolo Integrale, e per mezzo dell' Algebra Elementare: si veda per questo una Memoria del C. Geometra Pietro Ferroni inserita negli Atti della Società Italiana Tom. IX. Ivi si troveranno altre interessanti ricerche sopra le frazioni continue.

§ 194. Abbiamo detto al §. 181, che un' equazione differenziale si riguarda come integrata, quando essa dipende dall' integrazione di semplici funzioni differenziali: ora nella maggior parte dei casi non possono neppure aversi gli integrali delle funzioni differenziali, ed in conseguenza, rigorosamente parlando, dobbiam dire che neppure in questi casi possono integrarsi l' equazioni; così ottenuta la separazione delle variabili in un' equazione $Pdx + Qdy = 0$, e trasformata in $Xdx + Ydy = 0$, se non sia in nostro potere con alcun artifizio integrare le funzioni differenziali Xdx, Ydy, bisogna dire che l' equazione $Pdx + Qdy = 0$, generalmente parlando, non sa integrarsi; dico generalmente parlando, imperocchè può darsi il caso che, mentre in un' equazione separata $Xdx = Ydy$ non sono i due membri per se medesimi integrabili, o lo sono soltanto per archi di circolo e logaritmi, non ostante siavi una relazione algebraica contenente una costante arbitraria, la quale soddisfaccia a quell' equazione, e ne sia in conseguenza l' integrale completo.

Mi tratterrò alcun poco ad esaminare questa specie di paradosso analitico, indicatoci la prima volta da Giovanni Bernoulli (Comm. Epist. Tom. I pag. 60).

Sia $dy \cdot \varphi(y)$ una funzione differenziale, la quale non possa integrarsi algebraicamente, e prendiamo per y una funzione algebraica di x, facciamo cioè $y = fx$: la nostra differenziale diverrà allora $dx \cdot (\frac{df}{dx}) \cdot \varphi(fx)$: ora se la funzione fx sarà tale che $(\frac{df}{dx}) \cdot \varphi(fx) = \varphi(x)$, si avrà $dy \cdot \varphi(y) = dx \times \varphi(x)$; in quest' equazione nessun membro sarà integrabile da se medesimo algebraicamente, pure ad essa soddisfarà la relazione algebraica tra x ed y data dall' equazione $y = fx$. Serva per esempio la differenziale

$\frac{dy}{a + 2by + cy^2}$: se noi facciamo $y = \frac{mx - bx - a}{m + b + cx}$, si avrà

$dy = \frac{m^2 + ac - b^2}{(m + b + cx)^2}$, ed

$a + 2by + cy^2 = a + 2b\frac{mx - bx - a}{m + b + cx} + c(\frac{mx - bx - a}{m + b + cx})^2$, e riducendo allo stesso denominatore

$a + 2by + cy^2 = \frac{(m^2 + ac - b^2)(a + 2bx + cx^2)}{(m + b + cx)^2}$, per il che vien subito

$\frac{dy}{a + 2by + cy^2} = \frac{dx}{a + 2bx + cx^2}$, ed è manifesto che a quest' equazione differenziale soddisfà $y = \frac{mx - bx - a}{m + b + cx}$, poichè la sostituzione di questo valore la rende identica. A questo riguardo potrebbe proporsi il Problema: data la funzione fx trovare l' altra $\varphi(x)$, che avesse la suddetta proprietà: la di lui soluzione generale però è di un' alta indagine, dipendendo dal Calcolo Sommatorio, quando le differenze finite sono quantità variabili.

Prendiamo l' equazione semplicissima $\frac{dx}{\sqrt{(aa + xx)}} = \frac{dy}{\sqrt{(aa + yy)}}$ composta di membri, dipendenti ciascuno dalla quadratura delle coniche, e per conseguenza non integrabili algebraicamente: se noi la moltiplichiamo per xy, avremo

$\frac{y \cdot xdx}{\sqrt{(aa + xx)}} = \frac{x \cdot ydy}{\sqrt{(aa + yy)}}$, ed integrando per parti, si otterrà

$y\sqrt{(aa + xx)} - \int dy\sqrt{(aa + xx)} = x\sqrt{(aa + yy)} - \int dx\sqrt{(aa + yy)} + C$.

Ora l' equazione proposta ci dà

$dx\sqrt{(aa + yy)} = dy\sqrt{(aa + xx)}$, e quindi

$\int dx\sqrt{(aa + yy)} = \int dy\sqrt{(aa + xx)}$; dunque

$y\sqrt{(aa + xx)} = x\sqrt{(aa + yy)} + C$ sarà l' integrale algebraico completo di quell' equazione.

Con lo stesso artifizio potrebbesi ottenere l' integrale algebraico dell' equazione

$\frac{dx}{\sqrt{(A + Bx + Cx^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(A + By + Cy^2)}}$: ma si può anco ridurre questa alla già trattata: basta fare $x = z - \frac{B}{2C}$, $y = u - \frac{B}{2C}$, e si ottiene subito una trasformata della forma

$\frac{dz}{\sqrt{(m + zz)}} = \frac{du}{\sqrt{(m + uu)}}$.

In questi casi ci ha potuto condurre all' integrale algebraico la regola dell' integrazione per parti. Prendiamo in esame altri casi più complicati, per i quali adopreremo un metodo da La-Grange immaginato e reso più semplice da Euler, Atti di Pietroburgo Tom. II. Part. I. Abbiasi l' equazione

$\frac{dx}{a + 2bx + cx^2} = \frac{\pm dy}{a + 2by + cy^2}$, della quale si voglia l' integrale completo indipendentemente dalla parziale integrazione dei suoi due membri.

A quest' equazione si può sempre dare una forma più semplice, facendo sparire le potenze impari del denominatore: senza dunque alterare la generalità della ricerca, supporremo che l' equazione da integrarsi sia

$\frac{dx}{a + cx^2} = \frac{\pm dy}{a + cy^2}$. Poniamo per semplicità di Calcolo

$X = a + cx^2$, $Y = a + cy^2$, e l' equazione diverrà, prendendo il segno superiore, $\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$.

Consideriamo le variabili x ed y come funzioni di una terza t, ed allora scrivendo $(\frac{dx}{dt})\,dt$, $(\frac{dy}{dt})\,dt$ per dx e dy, avremo $\frac{1}{X}(\frac{dx}{dt}) = \frac{1}{Y}(\frac{dy}{dt})$: stabiliamo tra x e t tal relazione che sia $\frac{1}{X}(\frac{dx}{dt}) = 1$, e ne seguirà immediatamente $\frac{1}{Y}(\frac{dy}{dt}) = 1$, quindi $X = (\frac{dx}{dt})$, $Y = (\frac{dy}{dt})$, $X - Y = (\frac{dx}{dt}) - (\frac{dy}{dt})$. Sostituiamo i valori di X, Y, e si avrà.

$c(x^2 - y^2) = (\frac{dx}{dt}) - (\frac{dy}{dt})$. Differenziamo le equazioni

$X = (\frac{dx}{dt})$, $Y = (\frac{dy}{dt})$, e troveremo

$(\frac{dX}{dx})(\frac{dx}{dt}) = 2cx(\frac{dx}{dt}) = (\frac{d^2x}{dt^2})$,

$(\frac{dY}{dy})(\frac{dy}{dt}) = 2cy(\frac{dy}{dt}) = (\frac{d^2y}{dt^2})$; quindi

$2cx = \frac{(\frac{d^2x}{dt^2})}{(\frac{dx}{dt})}$, $2cy = \frac{(\frac{d^2y}{dt^2})}{(\frac{dy}{dt})}$, e sommando

$2c(x + y) = (\frac{d^2x}{dt^2}):(\frac{dx}{dt}) + (\frac{d^2y}{dt^2}):(\frac{dy}{dt})$.

Sia $x - y = q$, e per conseguenza

$(\frac{dx}{dt}) - (\frac{dy}{dt}) = (\frac{dq}{dt})$; avremo allora

$c(x^2 - y^2) = (\frac{dx}{dt}) - (\frac{dy}{dt}) = (\frac{dq}{dt})$, ovvero

$c(x + y)(x - y) = cq(x + y) = (\frac{dq}{dt})$, e quindi

$2c(x + y) = \frac{2}{q}(\frac{dq}{dt})$. Ma abbiam trovato

$2c(x + y) = (\frac{d^2x}{dt^2}):(\frac{dx}{dt}) + (\frac{d^2y}{dt^2}):(\frac{dy}{dt})$; dunque

$$\frac{2}{q}(\frac{dq}{dt})\,dt = \frac{1}{(\frac{dx}{dt})}\cdot\left(\frac{d(\frac{dx}{dt})}{dt}\right)dt + \frac{1}{(\frac{dy}{dt})}\cdot\left(\frac{d(\frac{dy}{dt})}{dt}\right)dt,$$

il cui integrale è

$\log.q^2 = \log.(\frac{dx}{dt}) + \log.(\frac{dy}{dt}) + C$: ovvero passando dai logaritmi ai numeri e cangiando la costante,

$Cq^2 = (\frac{dx}{dt}).(\frac{dy}{dt})$, e quindi $C = \frac{1}{q^2}.(\frac{dx}{dt}).(\frac{dy}{dt})$: ma

$(\frac{dx}{dt}) = X = a + cx^2$, $(\frac{dy}{dt}) = Y = a + cy^2$; dunque

$C = \frac{(a+cx^2)(a+cy^2)}{(x-y)^2}$.

E quest' ultima relazione algebraica, sarà l' integrale completo dell' equazione

$\frac{dx}{a+cx^2} = \frac{dy}{a+cy^2}$.

Se da una banda e dall' altra del ritrovato integrale, aggiungiamo $-ac$, e cangiamo di nuovo la forma della costante arbitraria, avremo questa relazione più semplice

$C' = \frac{a+cxy}{x-y}$.

Prendendo ora a considerare il caso del segno negativo, si avrà l' equazione

$\frac{dx}{a+cx^2} = \frac{-dy}{a+cy^2}$. Poniamo come sopra

$\frac{1}{X}(\frac{dx}{dt}) = 1$, $-\frac{1}{Y}(\frac{dy}{dt}) = 1$, e si avrà

$X = (\frac{dx}{dt})$, $Y = -(\frac{dy}{dt})$.

Facciamo $x + y = p$, $x - y = q$, $xy = u$, e troveremo

$(\frac{dp}{dt}) = X - Y = cpq$, ovvero

$\frac{1}{cp}.(\frac{dp}{dt}) = q$. Per un altro verso

$yX - xY = y\left(\frac{dx}{dt}\right) + x\left(\frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{du}{dt}\right)$; dunque sostituendo per X e per Y i respettivi valori $a + cx^2$, $a + cy^2$, si avrà $a(y - x) + cxy(x - y) = \left(\frac{du}{dt}\right)$, che diviene $-aq + cuq = \left(\frac{du}{dt}\right)$, $q = \frac{1}{cu - a} \cdot \left(\frac{du}{dt}\right)$.

Eguagliamo adesso tra loro i due valori di q, ed avremo $\frac{1}{cp} \cdot \left(\frac{dp}{dt}\right) = \frac{1}{cu - a} \cdot \left(\frac{du}{dt}\right)$, l' integrale della quale sarà $cp = C(cu - a)$, essendo C una costante arbitraria: in quest' ultima equazione sostituendo i valori di p e di u, si avrà $C = \frac{c(x + y)}{cxy - a}$.

§. 195. Continuando l' indagine del §. antecedente proponiamoci l' equazione

$$\frac{dy}{\sqrt{(A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4)}} = \frac{dx}{\sqrt{(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4)}}$$

della quale alcun membro non è integrabile algebraicamente. Rammentiamoci che la differenziale $\frac{dx}{\sqrt{(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4)}}$, si può sempre trasformare in un' altra (153), ove manchino le potenze impari della variabile x; noi dunque potremo supporre che la superiore equazione sia ridotta a non aver le potenze impari di quella variabile, ed abbia in conseguenza la forma

$$\frac{dx}{\sqrt{(A + Cx^2 + Ex^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(A + Cy^2 + Ey^4)}}.$$

Onde avere un integrale algebraico che soddisfaccia a quest' equazione, adoperando il metodo del §. antecedente, supporremo x, y funzioni di una terza variabile t, e tali che

$\left(\frac{dx}{dt}\right) = \sqrt{(A + Cx^2 + Ex^4)}$,

$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \sqrt{(A + Cy^2 + Ey^4)}$: se facciamo sparire i radicali, e quindi differenziamo, dividendo di poi la prima equazione per $\left(\frac{dx}{dt}\right) dt$, e la seconda per $\left(\frac{dy}{dt}\right) dt$, si avranno in questa maniera due equazioni

$2\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 2Cx + 4Ex^3$, $2\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = 2Cy + 4Ey^3$.

Ponendo ora $x + y = p$, $x - y = q$, il che ci dà $x = \frac{p+q}{2}$, $y = \frac{p-q}{2}$, le due precedenti equazioni aggiunte e sottratte, daranno

$\left(\frac{d^2p}{dt^2}\right) = Cp + \frac{E}{2}(p^3 + 3pq^2)$,

$\left(\frac{d^2q}{dt^2}\right) = Cq + \frac{E}{2}(3p^2q + q^3)$: di più essendo $\left(\frac{dp}{dt}\right)\left(\frac{dq}{dt}\right) = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$, se sostituiamo per $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$, i respettivi valori, si avrà

$\left(\frac{dp}{dt}\right)\left(\frac{dq}{dt}\right) = Cpq + \frac{E}{2}(p^3q + pq^3)$.

Se dall' equazione che ci dà il valore di $\left(\frac{d^2p}{dt^2}\right)$ moltiplicata per q, sottragghiamo quest' ultima equazione, si ha $q\left(\frac{d^2p}{dt^2}\right) - \left(\frac{dp}{dt}\right)\left(\frac{dq}{dt}\right) = Epq^3$, la quale moltiplicata per $\frac{2}{q^3}\left(\frac{dp}{dt}\right)$, diviene

$$\frac{2\left(\frac{dp}{dt}\right)\left(\frac{d^2p}{dt^2}\right)}{q^2} - \frac{2\left(\frac{dp}{dt}\right)^2\left(\frac{dq}{dt}\right)}{q^3} = 2Ep\left(\frac{dp}{dt}\right).$$

Di quest' ultima equazione l' integrale è

$\frac{1}{q^2}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 = Ep^2 + \alpha$, essendo α una costante arbitraria.

Per determinarla, sia m il valore di y quando $x = 0$; si avrà in questo caso per mezzo delle superiori equazioni

$(\frac{dx}{dt}) = \sqrt{A}$, $(\frac{dy}{dt}) = \sqrt{(A + Cm^2 + Em^4)}$: facciamo questa quantità $= n$.

Egualmente essendo $p = x + y$, $q = x - y$, $(\frac{dp}{dt}) = (\frac{dx}{dt}) + (\frac{dy}{dt})$, $(\frac{dq}{dt}) = (\frac{dx}{dt}) - (\frac{dy}{dt})$, si avrà (quando $x = 0$) $p = m$, $q = - m$, $(\frac{dp}{dt}) = n + \sqrt{A}$, $(\frac{dq}{dt}) = \sqrt{A} - n$.

Se ora facciamo queste sostituzioni nell' equazione quì sopra trovata, avremo

$\alpha = \frac{(\sqrt{A} + n)^2}{m^2} - Em^2$, da cui si vede che essendo m una quantità indeterminata, anche α resta indeterminata.

Noi abbiam dunque l' equazione

$(\frac{dp}{dt}) = q\sqrt{(\alpha + Ep^2)}$. Quantunque quest' equazione sia un' equazione differenziale del primo ordine, si può non ostante da essa ricavare subito l' integrale completo dell' equazione proposta: infatti essendo

$(\frac{dp}{dt}) = (\frac{dx}{dt}) + (\frac{dy}{dt}) = \sqrt{(A + Cx^2 + Ex^4)} + \sqrt{(A + Cy^2 + Ey^4)}$, si avrà tra x ed y questa relazione

$\sqrt{(A + Cx^2 + Ex^4)} + \sqrt{(A + Cy^2 + Ey^4)} = (x - y)\sqrt{\{\alpha + E(x + y)^2\}}$, la quale rappresenterà l' integrale completo, perchè contiene la costante arbitraria α.

Quest' equazione tra x ed y non è la sola che possa ottenersi per mezzo delle formule sopra trovate. Infatti sostituendo nella ritrovata equazione

$(\frac{dp}{dt})(\frac{dq}{dt}) = Cpq + \frac{E}{2}(p^3q + pq^3)$, invece di $(\frac{dp}{dt})$ il suo valore $q\sqrt{(\alpha + Ep^2)}$, si avrà

$(\frac{dq}{dt}) = \frac{Cp + \frac{E}{2}(p^3 + pq^2)}{\sqrt{(\alpha + Ep^2)}}$, nella quale rimettendo per p e q i

valori $x + y$, $x - y$, e per $(\frac{dq}{dt})$ il suo valore $(\frac{dx}{dt}) - (\frac{dy}{dt})$, cioè $\sqrt{(A + Cx^2 + Ex^4)} - \sqrt{(A + Cy^2 + Ey^4)}$, si avrà una nuova equazione in x, y con la costante arbitraria α, che sarà ancora essa l' integrale completo della proposta. Tale equazione sarà

$$\sqrt{(A + Cx^2 + Ex^4)} - \sqrt{(A + Cy^2 + Ey^4)} =$$

$\frac{C(x + y) + E(x^3 + x^2y + y^2x + y^3)}{\sqrt{\{\alpha + E(x + y)^2\}}}$. Aggiungiamo quest' integrale con l' altro trovato quì sopra, ed avremo

$$2\sqrt{(A + Cx^2 + Ex^4)} = \frac{C(x + y) + E(x^3 + x^2y + y^2x + y^3)}{\sqrt{\{\alpha + E(x + y)^2\}}} +$$

$(x - y)\sqrt{\{\alpha + E(x + y)^2\}}$: e riducendo allo stesso denominatore, si avrà

$$\sqrt{(A + Cx^2 + Ex^4)} = \frac{\alpha(x - y) + C(x + y) + E(2x^3 + 2x^2y)}{2\sqrt{\{\alpha + E(x + y)^2\}}}.$$

Quadrando quest' ultima equazione, si ha in fine

$$(1) \ldots\ldots A + Cx^2 + Ex^4 = \frac{\{\alpha(x - y) + C(x + y) + E(2x^3 + 2x^2y)\}^2}{4\{\alpha + E(x + y)^2\}};$$

quest' integrale è ora razionale.

Se invece di aggiungere quei due integrali, gli avessimo sottratti uno dall' altro, avremmo trovato quest' altra equazione

$$(2) \ldots\ldots A + Cy^2 + Ey^4 = \frac{\{\alpha(x - y) - C(x + y) - E(2y^3 + 2xy^2)\}^2}{4\{\alpha + E(x + y)^2\}},$$

la quale egualmente dato ci avrebbe l' integrale completo razionale della proposta.

Togliendo il denominatore dall' equazione (1) e facendo le opportune riduzioni, si trova quest' elegante e semplice equazione tra x ed y

$$4A\alpha + (8AE - 2C^2 + 2\alpha^2)xy + (4AE + 2C\alpha - C^2 - \alpha^2)(x^2 + y^2) + 4E\alpha . x^2y^2 = 0,$$

cui si può dare la forma

(A) . . . . . $A' + B'xy + C'(x^2 + y^2) + D'x^2y^2 = 0$; la quale esprimerà l' integrale algebraico completo della proposta $\frac{dx}{\sqrt{(A + Cx^2 + Ex^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(A + Cy^2 + Ey^4)}}$. La costante arbitraria che si contiene nell' integrale, è indicata da α; questa costante è

$$\alpha = \frac{\{\sqrt{A} + \sqrt{(A + Cm^2 + Em^4)}\}^2}{m^2} - Em^2,$$

rappresentando per m il valore di y quando $x = 0$; così l' equazione (A) si potrà riguardare come una relazione tra le quantità x, y, m, due delle quali essendo date, potrem subito ritrovare la terza.

§. 196. Riprendiamo l' equazione

$\frac{dy}{\sqrt{(A + Cy^2 + Ey^4)}} = \frac{dx}{\sqrt{(A + Cx^2 + Ex^4)}}$: se noi supponiamo rappresentata per fy quella funzione di y, il cui differenziale è $\frac{dy}{\sqrt{(A + Cy^2 + Ey^4)}}$, funzione che in generale chiameremo *Funzione Trascendente*, si avrà $fy = fx + a$ per esprimere l' integrale completo della proposta, ove a sarà la costante arbitraria.

Quest' equazione dovrà combinare con quella (A) del §. antecedente, ove m è la costante arbitraria; dunque la costante a dovrà essere una funzione della m. Sia pertanto $a = Fm$, ed avremo $fy = fx + Fm$: ma m è il valore di y, quando $x = 0$; dunque supponendo per maggior semplicità, che fx debba annullarsi quando $x = 0$, si avrà $Fm = fm$: l' integrale pertanto sarà $fy = fx + fm$, cui soddisfarà la relazione algebraica $(A) = 0$.

Così quantunque non si possa trovare la forma algebraica delle funzioni fy, fx, fm, si può sempre avere una relazione algebraica tra le quantità y, x, m che renda $fy = fx + fm$.

Facciamo $m = u$, ed avremo $fy = fx + fu$, ed i valori di queste trascendenti saranno

$$fy = \int \frac{dy}{\sqrt{(A + Cy^2 + Ey^4)}}, \quad fx = \int \frac{dx}{\sqrt{(A + Cx^2 + Ex^4)}},$$

$$fu = \int \frac{du}{\sqrt{(A + Cu^2 + Eu^4)}}.$$

Se ora si cercasse il valore della quantità y tale che la trascendente fy fosse eguale alla somma delle due trascendenti fx, fu, essendo x, u quantità conosciute, il valore di y sarebbe dato dall' equazione $(A) = 0$. In generale se noi avessimo una serie di quantità trascendenti $fx, fu, f\omega, f\varpi$ ec., e si volesse trovare una trascendente fy eguale alla loro somma $fx + fu + f\omega + f\varpi +$ ec., si incomincierebbe dal ritrovare una trascendente $fz = fx + fu$, quindi una trascendente $f\beta = fz + f\omega$ ec., e si avrebbe in fine $fy = fx + fu + f\omega + f\varpi +$ ec.

Il valore di z sarebbe dato da un' equazione in z, x, u, simile alla $(A) = 0$ in y, x, u: quello di β da un' altra equazione in β, z, ω simile alla $(A) = 0$ in y, x, u ec.

Nella medesima guisa se volessimo il valore di una quantità u, tale che la trascendente fu fosse eguale alla differenza delle due trascendenti fy e fx, cioè fosse $fu = fy - fx$, si troverebbe il valore di u dato per y e per x dall' equazione $(A) = 0$; così le funzioni trascendenti, le quali rappresentano gli integrali simili alla formula

$\int \frac{d\omega}{\sqrt{(A + C\omega^2 + E\omega^4)}}$, ponno sommarsi e sottrarsi tra loro, come qualunque altra quantità, e ponno aversene le somme e le differenze espresse da trascendenti simili.

Di queste trascendenti ponno egualmente aversi i multipli, e le porzioni espresse per trascendenti della stessa specie; così data una trascendente $f\beta$ se ne può sempre trovare un' altra che sia il doppio, il triplo ec. di lei; come pure un' altra che ne sia la metà, il terzo, il quarto ec.

Infatti se noi facciamo $x = u$, avremo $fy = 2fx$, ed y sarà dato dall' equazione $(A) = 0$, quando vi si ponga x per u, ovvero per m.

Trovato questo valore di y, se noi faremo $f\omega = fy + fx$, avremo $f\omega = 3fx$, ed ω sarà dato dall' equazione (A) $= 0$ quando vi si faccia x invece di m, ed y invece di x; e così di seguito.

L' equazioni $fy = 2fx$, $f\omega = 3fx$ ec., ci danno $fx = \frac{1}{2}fy$, $fx = \frac{1}{3}f\omega$ ec.; così se nell' equazioni che esprimono le relazioni tra x ed y, tra x, ω ec., si prendessero per cognite le quantità y ed ω ec., si potrebbero trovare i valori di x tali che rendessero la trascendente fx eguale alla metà, al terzo ec. di una simil trascendente fy, $f\omega$ ec.

Possono pertanto le funzioni fy, fx, fu, $f\omega$ ec. non solo sommarsi e sottrarsi tra loro, ed avere le somme e differenze espresse da simili trascendenti, ma ancora moltiplicarsi per qualunque numero intiero o fratto, ed aversene i prodotti espressi per funzioni trascendenti della stessa natura.

§. 197 Quanto abbiamo detto sopra le funzioni integrali dei due membri dell' equazione

$\frac{dy}{\sqrt{(A + Cy^2 + Ey^4)}} = \frac{dx}{\sqrt{(A + Cx^2 + Ex^4)}}$, può generalizzarsi per qualunque equazione. Siano indicate da $\Psi(y)$, $\Psi(x)$ due simili funzioni in x ed y: abbiasi l' equazione $\Psi(y)dy = \Psi(x)dx$, della quale non siano algebraicamente integrabili i due membri presi separatamente: supponiamo che con qualche artifizio si giunga ad una equazione algebraica tra x ed y, ed una costante arbitraria, la quale soddisfaccia alla proposta, e sia quest' equazione espressa da $F(x, y, m) = 0$, m essendo la costante arbitraria che rappresenti il valore di y quando $x = 0$.

Se noi indicheremo allora per fy, fx, le quantità i cui differenziali sono $\Psi(x)dx$, $\Psi(y)dy$, avremo quest' altra equazione $fy = fx + a$, che simbolicamente rappresenterà l' integrale completo della proposta. Ora supponendo che l' integrale debba determinarsi in modo, che quando $x = 0$ sia $fx = 0$ e $y = m$, si avrà $a = fm$, e quindi l' equazione $fy = fx + fm$.

Per quanto non possano aversi i valori algebraici delle quantità fy, fx, fm, pure queste potranno sommarsi, sottrarsi tra loro ed anche moltiplicarsi o dividersi per qualunque numero, ed esprimersi i risultati per altre simili trascendenti:

così conosciute x, m, potrà sempre trovarsi per mezzo dell' equazione $F(x, y, m) = 0$ un tal valore di y, che la trascendente fy eguagli la somma delle due trascendenti simili $fx + fm$; quì può ripetersi parola a parola tutto ciò che abbiam spiegato al §. antecedente.

Supponiamo che si abbia l' equazione $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$, nella quale nessun membro è integrabile algebraicamente. A quest' equazione però soddisfà la relazione algebraica $y = mx$, la quale ne è l' integrale completo, perchè contiene la costante arbitraria m: ora se indichiamo per fy, fx le funzioni trascendenti, i cui differenziali sono $\frac{dx}{x}$, $\frac{dy}{y}$, avremo $fy = fx + fm$, e per quanto non sappiamo cosa sono le trascendenti di questa forma $\int \frac{dy}{y}$, conosciamo però che una trascendente fy è eguale alla somma delle due fx, fm, se tra y, x, m siavi quest' equazione $y = xm$, cioè se la variabile di cui si compone la trascendente fy, sia eguale al prodotto delle variabili delle quali sono composte le altre due trascendenti. Queste trascendenti sono conosciute sotto il nome particolare di logaritmi, e dalla proprietà quì sopra enunciata, tutte le altre dipendono, che già sono esposte nei Libri Elementari di Analisi.

Fig. 3 Per riferire le cose dette alla Geometria, sia (Fig. 3) costruita sopra l' asse oz una curva OZ, tale che un qualunque suo arco OZ corrispondente all' ascissa $oz = z$ sia rappresentato da

$\int \frac{dz}{\sqrt{(A + Cz^2 + Ez^4)}} = F(z)$: questa curva godrà della seguente ragguardevolissima proprietà „ Preso a piacere un qualunque „ arco FG, da un punto ad arbitrio X si potrà sempre taglia„ re un altro arco XY, che esattamente sia eguale al primo „ infatti abbassate dai punti dati F, G le perpendicolari Ff, Gg, e rappresentate le ascisse corrispondenti per $of = f$, $og = g$; quindi abbassate le altre perpendicolari Xx, Yy e fatte $ox = x$, $oy = y$, dovrà essere

$(\alpha) \ldots \mathrm{F}(y) - \mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(g) - \mathrm{F}(f)$: preso dunque ad arbitrio un valore per x, dovrem per y trovar quello che soddisfaccia all' equazione (α). Ora differenziando una tale equazione ed osservando che il secondo membro è una quantità costante data, si avrà $d.\mathrm{F}y - d.\mathrm{F}x = 0$, ed in conseguenza

$\frac{dy}{\sqrt{(A + Cy^2 + Ey^4)}} = \frac{dx}{\sqrt{(A + Cx^2 + Ex^4)}}$: dunque il valore di y in x ci sarà dato dall' equazione (A) del §. 195, cioè da

$4A\alpha + (8AE - 2C^2 + 2\alpha^2)xy + (4AE + 2C\alpha - C^2 - \alpha^2)(x^2 + y^2) + 4E\alpha x^2 y^2 = 0$, ove α debbe determinarsi in maniera, che quando $x = f$ sia $y = g$: essa dunque sarà data dall' equazione

$$(8AE - 2C^2) fg + (4AE - C^2)(f^2 + g^2) + \{4A + 2C(f^2 + g^2) + 4Ef^2g^2\}\alpha + (2fg - f^2 - g^2)\alpha^2 = 0.$$

Determinando la costante col metodo del citato §, avremmo trovato addirittura

$$\alpha = \frac{\{\sqrt{(A + Cf + Ef^4)} + \sqrt{(A + Cg + Eg^4)}\}^2}{(f-g)^2} - E(f-g)^2.$$

Se pertanto daremo a piacere un certo valore ad x, si troverà subito il valore di y, e l' arco XY sarà eguale all' arco FG. Fig. 3

Essendo l' equazione del secondo grado, avrem due valori dell' y: uno che sarà al di là del punto x, e l' altro al di quà.

Rimando i miei Lettori al Capitolo Sesto della Sezione II., Tom. I. Calcolo Integrale d' Euler; ed al quarto Tomo della stessa Opera.

§. 198. All' equazione

$\frac{dy}{\sqrt{(A + By^2 + Cy^4)}} = \frac{dx}{\sqrt{(A + Bx^2 + Cx^4)}}$, si può dare anche la forma semplicissima

$\frac{d\phi}{\sqrt{(1 - c^2\, sen\, \phi^2)}} = \frac{d\Psi}{\sqrt{(1 - c^2\, sen\, \Psi^2)}}$, c essendo minore dell' unità.

Quest' ultima equazione è suscettibile di una elegantissima formula d' integrale completo, la quale credo prezzo d' opera assegnare.

Incominciamo primieramente da mostrare come si possa fare una tal trasformazione, e per questo ci basterà prendere in esame un solo membro dell' equazione proposta: abbiasi dunque l' espressione differenziale $\frac{dx}{\sqrt{(A + Bx^2 + Cx^4)}}$, e consideriamo i varj casi che nascono dai diversi fattori della quantità radicale.

I Caso. Supponiamo che i fattori di $A + Bx^2 + Cx^4$, siano immaginarj: potremo allora rappresentare quella quantità per $\alpha^2 + 2\alpha\beta x^2 \cos\theta + \beta^2 x^4$, α e β essendo positivi, e $\cos\theta$ potendo esser positivo o negativo. Siccome nella formula $\frac{dx}{\sqrt{(\alpha^2 + 2\alpha\beta x^2 \cos\theta + \beta^2 x^4)}}$ la x può ricevere tutti i valori possibili positivi o negativi, perciò poniamo $x = m\, tang\, \omega$: questa posizione ci darà $dx = m \frac{d\omega}{\cos\omega^2}$,

$$\frac{dx}{\sqrt{(\alpha^2 + 2\alpha\beta x^2 \cos\theta + \beta^2 x^4)}} = \frac{m\,d\omega}{\cos\omega^2 . \sqrt{(\alpha^2 + 2\alpha\beta m^2\, tang\, \omega^2 . \cos\theta + \beta^2 m^4\, tang\, \omega^4)}}$$

$$= \frac{m\,d\omega}{\sqrt{(\alpha^2 \cos\omega^4 + 2\alpha\beta m^2\, sen\, \omega^2 \cos\omega^2 . \cos\theta + \beta^2 m^4 . sen\, \omega^4)}}.$$

Facciamo ora $m = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$, ed avremo

$$\frac{dx}{\sqrt{(\alpha^2 + 2\alpha\beta x^2 \cos\theta + \beta^2 x^4)}} = \frac{1}{\sqrt{\beta\alpha}} . \frac{d\omega}{\sqrt{(\cos\omega^4 + 2\, sen\, \omega^2 \cos\omega^2 . \cos\theta + sen\, \omega^4)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\beta\alpha}} . \frac{d\omega}{\sqrt{\left\{1 - \frac{1 - \cos\theta}{2} . (2\, sen\, \omega \cos\omega)^2\right\}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\beta\alpha}} . \frac{d\omega}{\sqrt{\left\{1 - \frac{1 - \cos\theta}{2} . (sen\, 2\omega)^2\right\}}}.$$

Si ponga $2\omega = \varphi$, e si avrà

$$\frac{dx}{\sqrt{(\alpha^2 + 2\alpha\beta x^2 \cos\theta + \beta^2 x^4)}} = \frac{1}{2\sqrt{\beta\alpha}} . \frac{d\omega}{\sqrt{(1 - \frac{1 - \cos\theta}{2} . sen\, \varphi^2)}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\beta\alpha}} . \frac{d\omega}{\sqrt{(1 - c^2\, sen\, \varphi^2)}}.$$

avendo fatto $\frac{1-\cos\theta}{2} = sen\,\frac{1}{2}\theta^2 = c^2$.

Avremmo dunque potuto supporre in principio

$x = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\,.\,tang.\,\frac{1}{2}\varphi$, ma non si sarebbe veduta la ragione di una tale supposizione.

II. Caso. Sia $A + Bx^2 + Cx^4 = m^2(1 + p^2x^2)(1 - q^2x^2)$; e siccome x non può crescere al di là $\frac{1}{q}$, porremo perciò $x = \frac{1}{q}\cos\varphi$, e $\frac{p^2}{p^2+q^2} = c^2$: avremo allora, fatte le opportune sostituzioni, $dx = -\frac{1}{q}\,sen\,\varphi\, d\varphi$

$$m\sqrt{((1+p^2x^2)(1-q^2x^2))} = m\,sen\,\varphi\sqrt{(1+\frac{p^2}{q^2}\cos\varphi^2)}$$
$$= \frac{m\,sen\,\varphi}{q}\sqrt{(q^2+p^2-p^2\,sen\,\varphi^2)}$$
$$= \frac{m\,sen\,\varphi}{q}\,.\,\frac{p}{c}\sqrt{(1-c^2\,sen\,\varphi^2)},$$

ed indicando quel radicale per R,

$$\frac{dx}{R} = \frac{c}{mp}\,.\,\frac{-d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\,sen\,\varphi^2)}}.$$

Se si volesse che la trasformata fosse positiva, converrebbe fare $\cot\varphi = \sqrt{(1-c^2)}\,.\,tang.\,\Psi$, ciò che dà subito

$x^2 = \frac{sen\,\Psi^2}{p^2+q^2\cos\Psi^2}$, e si avrebbe

$$\frac{dx}{R} = \frac{c}{mp}\,.\,\frac{d\Psi}{\sqrt{(1-c^2\,sen\,\Psi^2)}}.$$

III. Caso. Sia $A + Bx^2 + Cx^4 = m^2(1+p^2x^2)(1+qqx^2)$; se supponiamo $p > q$, e facciamo $x = \frac{tang\,\varphi}{p}$, $\frac{p^2-q^2}{p^2} = c^2$, si avrà

$$\frac{dx}{R} = \frac{1}{mp}\,.\,\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\,sen\,\varphi^2)}}.$$

IV. Caso. Sia $A + Bx^2 + Cx^4 = m^2(1+p^2x^2)(x^2-q^2)$,

e facendo $x = \frac{q}{\cos\varphi}$, $\frac{1}{1+p^2q^2} = c^2$, si otterrà

$$\frac{dx}{R} = \frac{c}{m}\,.\,\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\,sen\,\varphi^2)}}.$$

V. Caso. Sia $A + Bx^2 + Cx^4 = m^2(1-p^2x^2)(1-q^2x^2)$, e supponendo $p > q$, $px = sen\,\varphi$, $\frac{p}{q} = c$, si avrà

$$\frac{dx}{R} = \frac{1}{mp}\,.\,\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\,sen\,\varphi^2)}}.$$

Questa formula servirà da $x = 0$ sino ad $x = \frac{1}{p}$; il radicale R sarà immaginario da $\frac{1}{p}$ sino ad $\frac{1}{q}$, ma tornerà reale da $\frac{1}{q}$ sino all' ∞.

In quest' ultimo caso, bisogna scrivere $R^2 = m^2(p^2x^2 - 1)(q^2x^2 - 1)$, e facendo $qx = \frac{1}{sen\,\varphi}$, $\frac{q}{p} = c$, la trasformata sarà $\frac{-d\varphi}{mp\sqrt{(1-c^2\,sen\,\varphi^2)}}$. Se si vuole che ella sia positiva bisognerà fare, come quì sopra,

$\cot\varphi = \sqrt{(1-c^2)}\,.\,tang\,\Psi$, il che dà subito

$x^2 = \frac{1-c^2\,sen\,\Psi^2}{q^2\cos\Psi^2}$, e la trasformata diviene

$\frac{dx}{R} = \frac{1}{mp}\,.\,\frac{d\Psi}{\sqrt{(1-c^2\,sen\,\Psi^2)}}$, formula assolutamente simile alla prima; d' onde segue che l' integrale di $\frac{dx}{R}$ quando $x = \frac{1}{q}$, si dedurrà sempre dal medesimo integrale, preso supponendo $x < \frac{1}{p}$.

VI. Caso. Infine sia $A + Bx^2 + Cx^4 = m^2(x^2 - q^2)\times(p^2 - x^2)$; allora x debb' essere compreso tra p e q. Sia $p > q$, e si faccia $x^2 = \frac{q^2}{1-c^2\,sen\,\varphi^2}$, $c^2 = \frac{p^2-q^2}{p^2}$, la trasformata sarà

$$\frac{dx}{R} = \frac{1}{mp}\,.\,\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\,sen\,\varphi^2)}}.$$

Dunque si potrà sempre con alcuna delle sostituzioni quì sopra praticate ridurre la differenziale

$\frac{dx}{\sqrt{(A+Bx^2+Cx^4)}}$ ad avere questa forma

$\frac{Md\varphi}{\sqrt{(1-c^2 sen\,\varphi^2)}}$, nella quale M indica un coefficiente costante conosciuto, e c^2 una quantità minore dell'unità. Osserviamo frattanto, che eccettuato il primo caso, i valori di x^2, i quali danno la riduzione cercata, sono sempre della forma $\frac{\alpha+\beta\, sen\,\varphi^2}{\gamma+\delta\, sen\,\varphi^2}$, ove i coefficienti sono costanti. Noi eccettuiamo il primo caso, perchè la forma del valore di x è un poco diversa, e per un'altra parte si può questo caso scansare, poichè secondo ciò che si è detto al §. 153, possiam sempre avere due fattori reali, il cui prodotto eguagli la quantità sotto del radicale. Se pertanto avremo l'equazione

$\frac{dx}{\sqrt{(A+Bx^2+Cx^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(A+By^2+Cy^4)}}$, la potremo sempre trasformare in un'altra di questa forma

$\frac{Md\varphi}{\sqrt{(1-c^2 sen\,\varphi^2)}} = \frac{Md\Psi}{\sqrt{(1-c^2 sen\,\Psi^2)}}$, ovvero

$\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2 sen\,\varphi^2)}} = \frac{d\Psi}{\sqrt{(1-c^2 sen\,\Psi^2)}}$.

Ora osserviamo che $sen\,\varphi^2 = \frac{1}{2} - \frac{cos\,2\varphi}{2}$; dunque sostituendo, si avrà

$\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\frac{c^2}{2}+\frac{c^2 cos\,2\varphi}{2})}} = \frac{d\Psi}{\sqrt{(1-\frac{c^2}{2}+\frac{c^2 cos\,2\Psi}{2})}}$; e ponendo A invece di $1-\frac{c^2}{2}$, B invece di $\frac{c^2}{2}$, u per 2Ψ, z per 2φ, avremo

(E) . . . . . $\frac{dz}{\sqrt{(A+B\,cos\,z)}} = \frac{du}{\sqrt{(A+B\,cos\,u)}}$.

§. 199. L'equazione del §. 195

$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$ si riduce dunque all'equazione (E). Per integrare quest'ultima equazione, supponiamo che z ed u siano funzioni di una terza variabile t, e tali che sia

$\frac{(\frac{dz}{dt})}{\sqrt{(A+B\,cos\,z)}} = \frac{(\frac{du}{dt})}{\sqrt{(A+B\,cos\,u)}} = 1$, ed avremo subito

$(\frac{dz}{dt}) = \sqrt{(A+B\,cos\,z)}$, $(\frac{du}{dt}) = \sqrt{(A+B\,cos\,u)}$.

Quadriamo queste due equazioni, e prendendo i differenziali primi e dividendoli per $(\frac{du}{dt}), (\frac{dz}{dt})$, avremo

$(\frac{d^2z}{dt^2}) = -B\,sen\,z$, $(\frac{d^2u}{dt^2}) = -B\,sen\,u$.

Poniamo frattanto $z+u = 2p$, $z-u = 2q$, e sarà $z = p+q$, $u = p-q$; quindi sommando e sottraendo le due precedenti equazioni, avremo

$2(\frac{d^2p}{dt^2}) = -B\,sen\,(p+q) - B\,sen\,(p-q)$,

$2(\frac{d^2q}{dt^2}) = -B\,sen\,(p+q) + B\,sen\,(p-q)$,

dalle quali si ricaverà

$2(\frac{d^2p}{dt^2}) = -B\,sen\,p\,cos\,q$, $2(\frac{d^2q}{dt^2}) = -B\,cos\,p\,sen\,q$.

Si vede subito che se moltiplichiamo la prima equazione per $(\frac{dq}{dt})\,dt$, la seconda per $(\frac{dp}{dt})\,dt$ e le sommiamo insieme, avremo una equazione differenziale esatta, il cui integrale sarà

$2(\frac{dp}{dt})(\frac{dq}{dt}) = -B\,sen\,p\,sen\,q + a$, essendo a una costante arbitraria.

Per determinarla, supponiamo che $u = o$ dia $z = m$; avremo in questo caso

$(\frac{du}{dt}) = \sqrt{(A+B)}$,

$(\frac{dz}{dt}) = \surd(\mathrm{A} + \mathrm{B}\cos m)$, $p = q = \frac{m}{2}$,

$(\frac{dp}{dt}) = \frac{1}{2}\{(\frac{dz}{dt}) + (\frac{du}{dt})\}$,

$(\frac{dq}{dt}) = \frac{1}{2}\{(\frac{dz}{dt}) - (\frac{du}{dt})\}$; dunque

$2(\frac{dp}{dt})(\frac{dq}{dt}) = \frac{1}{2}\{(\frac{dz}{dt})^2 - (\frac{du}{dt})^2\} = \frac{\mathrm{B}}{2}(\cos m - 1)$,

$sen\, p\, sen\, q = (sen\, \frac{m}{2})^2 = \frac{1 - \cos m}{2}$; di modo che avremo

$a = 2(\frac{dp}{dt})(\frac{dq}{dt}) + \mathrm{B}\, sen\, p\, sen\, q = 0$: si avrà dunque semplicemente l' equazione

$2(\frac{dp}{dt})(\frac{dq}{dt}) = -\mathrm{B}\, sen\, p\, sen\, q$.

Quest' ultima equazione non contenendo costante arbitraria, dovrà coincidere o esser compresa nell' equazioni

$(\frac{du}{dt}) = \surd(\mathrm{A} + \mathrm{B}\cos u)$, $(\frac{dz}{dt}) = \surd(\mathrm{A} + \mathrm{B}\cos z)$, da cui siamo partiti; infatti avendosi

$2(\frac{dp}{dt})(\frac{dq}{dt}) = \frac{1}{2}\{(\frac{dz}{dt})^2 - (\frac{du}{dt})^2\}$, se sostituiamo per $(\frac{dz}{dt})$ e $(\frac{du}{dt})$ i respettivi valori, avremo

$2(\frac{dp}{dt})(\frac{dq}{dt}) = \frac{\mathrm{B}}{2}(\cos z - \cos u)$, e questo secondo membro si riduce a $-\mathrm{B}\, sen\, p\, sen\, q$, sostituendovi per z e per u i loro valori in p e q.

Dividiamo frattanto per questa equazione differenziale del primo ordine, le due del secondo, che abbiam trovate superiormente, e si avrà

$(\frac{d^2p}{dt^2}) : (\frac{dp}{dt})(\frac{dq}{dt}) = \frac{\cos q}{sen\, q}$, $(\frac{d^2q}{dt^2}) : (\frac{dp}{dt})(\frac{dq}{dt}) = \frac{\cos p}{sen\, p}$.

Ora di queste due ultime equazioni, moltiplicando la prima per $(\frac{dq}{dt})dt$, e la seconda per $(\frac{dp}{dt})dt$, ed integrando si avrà

$l(\frac{dp}{dt}) = l\, sen\, q + la$, $l(\frac{dq}{dt}) = l\, sen\, p + lb$, ovvero passando dai logaritmi ai numeri,

$(\frac{dp}{dt}) = a\, sen\, q$, $(\frac{dq}{dt}) = b\, sen\, p$, a, b essendo due costanti arbitrarie, che si determineranno per le condizioni superiori, ed otterremo

$a = \frac{\surd(\mathrm{A} + \mathrm{B}\cos m) + \surd(\mathrm{A} + \mathrm{B})}{2\, sen\, \frac{m}{2}}$, $b = \frac{\surd(\mathrm{A} + \mathrm{B}\cos m) - \surd(\mathrm{A} + \mathrm{B})}{2\, sen\, \frac{m}{2}}$.

Se in quelle due ultime equazioni integrali ottenute facciamo

$2(\frac{dp}{dt}) = (\frac{dz}{dt}) + (\frac{du}{dt}) = \surd(\mathrm{A} + \mathrm{B}\cos z) + \surd(\mathrm{A} + \mathrm{B}\cos u)$,

$2(\frac{dq}{dt}) = (\frac{dz}{dt}) - (\frac{du}{dt}) = \surd(\mathrm{A} + \mathrm{B}\cos z) - \surd(\mathrm{A} + \mathrm{B}\cos u)$,

avremo

$\surd(\mathrm{A} + \mathrm{B}\cos z) + \surd(\mathrm{A} + \mathrm{B}\cos u) = 2a\, sen\, \frac{z - u}{2}$,

$\surd(\mathrm{A} + \mathrm{B}\cos z) - \surd(\mathrm{A} + \mathrm{B}\cos u) = 2b\, sen\, \frac{z + u}{2}$,

ciascuna delle quali rappresenterà l' integrale completo della proposta.

Siccome i valori di a e b, contengono l' indeterminata m, ciascun di questi valori potrà esser riguardato anche come un' indeterminata in particolare: così considerando separatamente ciascuna di queste equazioni, potrà riguardarsi a ovvero b come costante arbitraria; ma se volesse farsi una combinazione qualunque di quest' equazioni, converrebbe adoprare i valori di a e di b, trovati quì sopra, e vi sarebbe allora la sola costante m. Si può anche trovare l' integrale dell' equazione proposta, scevro dai radicali, per mezzo delle due equazioni ottenute

$(\frac{dp}{dt}) = a\, sen\, q$, $(\frac{dq}{dt}) = b\, sen\, p$: infatti dividendole l' una per l' altra, avremo

$(\frac{dp}{dt}) : (\frac{dq}{dt}) = \frac{a\, sen\, q}{b\, sen\, p}$, da cui

$b\, sen\, p\,(\frac{dp}{dt})\, dt = a\, sen\, q\,(\frac{dq}{dt})\, dt$: l' integrale di quest' ultima equazione è $b \cos p = a \cos q + c$, essendo c la nuova costante arbitraria che dovrà determinarsi, come abbiam sopra insegnato. Così facendo $u = 0$, $z = m$, $p = q = \frac{m}{2}$, si avrà

$$c = (b - a) \cos \frac{m}{2} = - \frac{\sqrt{(A+B)} \cos \frac{m}{2}}{sen \frac{m}{2}}.$$

Sostituendo ora i valori di a, b, c, e quei di p e q nell'equazione $b \cos p = a \cos q + c$, e facendo le opportune riduzioni, essa prenderà questa forma semplicissima

$\cos \frac{z}{2} \cdot \cos \frac{u}{2} + sen \frac{z}{2} \cdot sen \frac{u}{2} \cdot \frac{\sqrt{(A + B \cos m)}}{\sqrt{(A+B)}} = \cos \frac{m}{2}$, che sarà l' integrale completo dell' equazione

$\frac{dz}{\sqrt{(A + B \cos z)}} = \frac{du}{\sqrt{(A + B \cos u)}}$, contenendo la costante arbitraria $\frac{m}{2}$.

L' integrale che abbiam trovato, possiam considerarlo appartenere ad un triangolo sferico, i cui lati siano $\frac{z}{2}, \frac{u}{2}, \frac{m}{2}$; imperocchè la trigonometria sferica ci insegna, che se per P, Q, R indichiamo i tre lati di un triangolo sferico, e per p, q, r i tre angoli opposti, è sempre

$sen\, P \cdot sen\, Q \cdot \cos r + \cos P \cdot \cos Q = \cos R$; così prendendo $\frac{z}{2}, \frac{u}{2}, \frac{m}{2}$ per quei tre lati, sarà $\frac{\sqrt{(A + B \cos m)}}{\sqrt{(A+B)}}$ il coseno dell' angolo opposto al lato $\frac{m}{2}$.

Questo coseno è il valore di $(\frac{dz}{du})$, quando si fa $u = 0$, $z = m$; così quest' angolo sarà costante quando lo è il lato $\frac{m}{2}$, mentre che i due altri variano.

§ 200. Riprendiamo l' equazione

$\frac{dz}{\sqrt{(A + B \cos z)}} = \frac{du}{\sqrt{(A + B \cos u)}}$, e supponiamo che fu sia l' integrale di $\frac{du}{\sqrt{(A + B \cos u)}}$, e fz quello di $\frac{dz}{\sqrt{(A + B \cos z)}}$; avremo allora quest' equazione integrale $fz = fu + a$, essendo a la costante arbitraria.

Questa equazione dovrà combinare con quella da noi trovata al §. antecedente, ove m è la costante arbitraria: per conseguenza la sua costante arbitraria a dovrà essere una funzione della m. Sia dunque $a = Fm$, ed avremo $fz = fu + Fm$: ma m è il valore di z quando $u = 0$; dunque, supponendo per maggior semplicità che la fu debba annullarsi quando $u = 0$, si avrà $Fm = fm$; l' integrale dunque sarà $fz = fu + fm$ cui soddisfà la relazione seguente algebraica

$sen \frac{z}{2} \cdot sen \frac{u}{2} \cdot \sqrt{(\frac{A + B \cos m}{A+B})} + \cos \frac{z}{2} \cos \frac{u}{2} = \cos \frac{m}{2}$: così quantunque non si possa trovare la forma algebraica delle funzioni fz, fu, fm, si può sempre avere una relazione algebraica tra le tre quantità u, z, m, che renda $fz = fu + fm$.

Si potea giungere a questo risultato ancora con la semplice considerazione dell' integrale algebraico.

Contenendo esso una general proprietà di qualunque triangolo sferico tra i tre suoi lati e l' angolo opposto ad uno di essi, le tre quantità z, u, m saran tra loro permutabili; nell'equazione dunque $fz = fu + Fm$, dovrà Fm esser tale che quelle variabili possano tra loro permutarsi, ciò che non accaderà se non è $Fm = fm$.

Rapporto alle funzioni fz, fu, fm hanno luogo le stesse considerazioni da noi fatte quì sopra (196, 197).

Osserviamo ora che se l' equazione proposta stata fosse

$\frac{dz}{\sqrt{(A + B \cos z)}} = - \frac{du}{\sqrt{(A + B \cos u)}}$, avremmo trovato quest' integrale completo

$\cos \frac{z}{2} \cos \frac{u}{2} - sen \frac{z}{2}\, sen \frac{u}{2} \sqrt{(\frac{A + B \cos m}{A+B})} = \cos \frac{m}{2}$, e l' equazione simbolica esprimente l' integrale completo, sarebbe stata $fz = - fu + fm$.

Così proposta l' equazione

$\frac{dz}{\sqrt{(A+B\,cos\,z)}} \mp \frac{du}{\sqrt{(A+B\,cos\,u)}} = 0$, il suo integrale sarà

$cos\,\frac{z}{2}\,cos\,\frac{u}{2} \pm sen\,\frac{z}{2}\,sen\,\frac{u}{2}\sqrt{\left(\frac{A+B\,cos\,m}{A+B}\right)} = cos\,\frac{m}{2}$, ove m esprime la costante cui è eguale z, quando $u=0$.

L' equazione differenziale

$\frac{dz}{\sqrt{(A+B\,cos\,z)}} + \frac{du}{\sqrt{(A+B\,cos\,u)}} = 0$, ci veniva dall' equazione (§. 198)

$\frac{d\phi}{\sqrt{(1-c^2\,sen\,\phi^2)}} + \frac{d\Psi}{\sqrt{(1-c^2\,sen\,\Psi^2)}} = 0$, allorchè dopo avere posto in quest' ultima $\frac{1}{2}-\frac{cos\,2\phi}{2}$ e $\frac{1}{2}-\frac{cos\,2\Psi}{2}$ invece di $sen\,\phi^2$, $sen\,\Psi^2$, si faceva $A = 1-\frac{c^2}{2}$, $B=\frac{c^2}{2}$, e sostituivansi u a 2Ψ, e z a 2ϕ.

Se dunque nell' integrale quì sopra trovato per la prima equazione, faremo inversamente queste sostituzioni, otterremo l' integrale dell' altra equazione

$\frac{d\phi}{\sqrt{(1-c^2\,sen\,\phi^2)}} \mp \frac{d\Psi}{\sqrt{(1-c^2\,sen\,\Psi^2)}} = 0$ così espresso

$cos\,\phi\,.\,cos\,\Psi \pm sen\,\phi\,.\,sen\,\Psi\,.\sqrt{\left(1-\frac{c^2}{2}+\frac{c^2\,cos\,m}{2}\right)} = cos\,\frac{m}{2}$:

ora supponendo che $\phi=\mu$ quando $\Psi=0$, si ha $2\mu=m$, e perciò l' integrale prenderà questa semplicissima ed elegantissima forma

(E) . . . . $cos\,\phi\,cos\,\Psi \pm sen\,\phi\,sen\,\Psi\,.\sqrt{(1-c^2\,sen\,\mu^2)} = cos\,\mu$.

Consideriamo i segni inferiori, e l' equazione (E), quando siano cognite le quantità ϕ, Ψ, ci darà sempre il valore di μ, che renda $f\mu = f\phi + f\Psi$, cioè la trascendente $f\mu$ eguale alla somma di due simili trascendenti $f\phi$, $f\Psi$.

Se noi facciamo $\phi=\Psi$, avremo

(e) . . . . $cos\,\phi^2 - sen\,\phi^2\sqrt{(1-c^2\,sen\,\mu^2)} = cos\,\mu$, ovvero

$sen\,\phi^2\left\{1+\sqrt{(1-c^2\,sen\,\mu^2)}\right\} = 1-cos\,\mu$, la quale, conosciuto ϕ, ci darà per μ un tal valore da rendere $f\mu = 2f\phi$, e viceversa conosciuto μ, ci darà quel valore di ϕ, che fa $f\phi = \frac{1}{2}f\mu$.

Io non entro in dettagli particolari sopra la maniera di trovare i valori di ϕ, Ψ, μ.

§. 201. Al §. 153. trattando dell' integazione della formula differenziale

$\frac{P\,dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)}}$, nella quale P è una funzione razionale di x, veduto abbiamo che essa si può sempre far dipendere da queste tre formule

(1) . . . . . $\int\frac{dx}{\sqrt{(A+Bx^2+Cx^4)}}$, (2) . . . . . $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(A+Bx^2+Cx^4)}}$,

(3) . . . . . $\int\frac{dx}{(x^2+n)\sqrt{(A+Bx^2+Cx^4)}}$, ed abbiamo anche assegnati i casi nei quali quest' integrali dipendono dalla rettificazione delle due curve di secondo ordine Ellisse ed Iperbola.

Facciamo ulteriori considerazioni sopra i trascendenti, i quali rappresentano simili integrali.

La formula $\int\frac{dx}{\sqrt{(A+Bx^2+Cx^4)}}$ si riduce sempre (198) a quest' altra $\int\frac{M\,d\phi}{\sqrt{(1-c^2\,sen\,\phi^2)}}$, nella quale M è un coefficiente costante, facendo $x^2 = \frac{\alpha'+\beta'\,sen\,\phi^2}{\delta'+\gamma'\,sen\,\phi^2}$, e determinando opportunamente α', β', δ', γ'.

Usiamo di questa medesima sostituzione nelle altre due formule per vedere a cosa esse si riducono.

La seconda diviene $\int\frac{\alpha+\beta\,sen\,\phi^2}{\delta+\gamma\,sen\,\phi^2}\cdot\frac{M\,d\phi}{\sqrt{(1-c^2\,sen\,\phi^2)}}$, e la terza $\int\frac{M\,d\phi}{\left(\frac{\alpha+\beta\,sen\,\phi^2}{\delta+\gamma\,sen\,\phi^2}+n\right)\sqrt{(1-c^2\,sen\,\phi^2)}}$; quindi queste due prendono in generale la forma

$\int \frac{a+b\,sen\,\varphi^2}{c+e\,sen\,\varphi^2}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\,sen\,\varphi^2)}}$. Ora se in questa formula fosse $e=0$, essa prenderebbe allora la forma

$\int (L+N\,sen\,\varphi^2)\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\,sen\,\varphi^2)}}$: così le tre formule integrali (1), (2), (3) si ponno sempre trasformare in alcuna di queste altre tre

(I) ...... $\int\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\,sen\,\varphi^2)}}$,

(II) ...... $\int(L+N\,sen\,\varphi^2)\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\,sen\,\varphi^2)}}$,

(III) ...... $\int\frac{L+N\,sen\,\varphi^2}{1+n\,sen\,\varphi^2}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\,sen\,\varphi^2)}}$; a tutte o ad alcune di queste tre integrazioni è dunque sempre riducibile l'integrazione della differenziale $\frac{P\,dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\epsilon x^4)}}$.

Agli integrali di queste tre formule il Sig. Adriano Le-Gendre ha dato il nome di *Trascendenti Ellittiche*, e si è occupato, più di qualunque altro, nell' esaminar la natura, ed assegnare la proprietà di queste funzioni (a). Trascendenti della prima specie sono le espresse dalla formula (I), della seconda quelle espresse dalla (II), ed in fine della terza specie quelle della formula (III).

Indichiamo per $F(\varphi)$ le trascendenti della seconda specie, di modo che sia

$$F(\varphi)=\int\frac{L+N\,sen\,\varphi^2}{\sqrt{(1-c^2\,sen\,\varphi^2)}}d\varphi,\quad F(\Psi)=\int\frac{L+N\,sen\,\Psi^2}{\sqrt{(1-c^2\,sen\,\Psi^2)}}d\Psi.$$

Supponiamo che gli archi φ, Ψ abbiano tra loro la relazione

(a) *Memoire sur les Trascendentes Elliptiques par Adrien Le-Gendre „ An. II. de la Republique „.*

(E) .... $\cos\varphi\cos\Psi - sen\,\varphi\,.\,sen\,\Psi\sqrt{(1-c^2\,sen\,\mu^2)} = \cos\mu$,

la quale conduce a quest' equazione differenziale

(e) .... $\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\,sen\,\varphi^2)}}+\frac{d\Psi}{\sqrt{(1-c^2\,sen\,\Psi^2)}}=0$: noi avremo allora

$F(\varphi)+F(\Psi)=\int\frac{N(sen\,\varphi^2 - sen\,\Psi^2)}{\sqrt{(1-c^2\,sen\,\varphi^2)}}d\varphi + Cost.$ Onde ottenere l' integrale di questo secondo membro, differenziamo l' equazione (E), e si avrà

$$-d\varphi\,sen\,\varphi\cos\Psi - d\Psi\cos\varphi\,sen\,\Psi = d(sen\,\varphi\,sen\,\Psi)\,.\sqrt{(1-c^2\,sen\,\mu^2)},$$ che quadrando e riducendo, diviene

$$\{d(sen\,\varphi\,sen\,\Psi)\}^2 - \{d\varphi\,.\,sen\,\varphi\cos\Psi + d\Psi\,.\cos\varphi\,sen\,\Psi\}^2 = c^2\,sen\,\mu^2\{d(sen\,\varphi\,sen\,\Psi)\}^2,$$

$$(\cos\varphi^2\,sen\,\Psi^2 - sen\,\varphi^2\cos\Psi^2)d\varphi^2 + (sen\,\varphi^2\cos\Psi^2-\cos\varphi^2\times sen\,\Psi^2)d\Psi^2 = c^2\,sen\,\mu^2\{d(sen\,\varphi\,sen\,\Psi)\}^2.$$

Se ora poniamo $1-sen\,\Psi^2$ per $\cos\Psi^2$ nel coefficiente di $d\varphi^2$, ed $1-sen\,\varphi^2$ per $\cos\varphi^2$ in quello di $d\Psi^2$, e moltiplichiamo tutta l' equazione per c^2, avremo

$$c^2(sen\,\Psi^2 - sen\,\varphi^2)d\varphi^2 + c^2(sen\,\varphi^2 - sen\,\Psi^2)d\Psi^2 = c^4\,sen\,\mu^2\{d(sen\,\varphi\,sen\,\Psi)\}^2,$$ l' equazione (e), toltine i denominatori e quadrata, ci dà

$$(1-c^2\,sen\,\Psi^2)d\varphi^2 + 2d\varphi\,.\,d\Psi\,.\sqrt{(1-c^2\,sen\,\Psi^2)}\sqrt{(1-c^2\,sen\,\varphi^2)} + (1-c^2\,sen\,\varphi^2)d\Psi^2 = 0$$ che aggiunta all' ultima, quì sopra ottenuta, ci conduce ad un' altra equazione, dalla quale estraendo la radice, si trova

(b) .... $d\varphi\,.\sqrt{(1-c^2\,sen\,\varphi^2)} + d\Psi\,.\sqrt{(1-c^2\,sen\,\Psi^2)} = c^2\,sen\,\mu\,.\,d(sen\,\varphi\,sen\,\Psi)$.

Se il valore di $d\Psi$ ricavato dall' equazione (e) si sostituisce nella (b), si avrà

$\frac{(sen\,\varphi^2 - sen\,\Psi^2)\,d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2\,sen\,\varphi^2)}} = -\,sen\,\mu\,.\,d\,(sen\,\varphi\,.\,sen\,\Psi)$; ma abbiam trovato sopra

$$F(\varphi) + F(\Psi) = \int \frac{N\,(sen\,\varphi^2 - sen\,\Psi^2)}{\sqrt{(1 - c^2\,sen\,\varphi^2)}}\,d\varphi + Cost.;\ \text{dunque}$$

$$F(\varphi) + F(\Psi) = -\,N\,sen\,\mu\,sen\,\varphi\,.\,sen\,\Psi + Cost.$$

Per determinare la costante, rammentiamoci che Ψ dee divenire $= \mu$ quando $\varphi = 0$; dunque $Cost. = F(\mu)$; si avrà pertanto

$$F(\varphi) + F(\Psi) = F(\mu) - N\,sen\,\mu\,sen\,\varphi\,sen\,\Psi\,.$$

La somma dunque di due trascendenti di secondo ordine è sempre eguale ad una simile trascendente $F(\mu)$ diminuita della quantità algebraica $N\,sen\,\mu\,sen\,\varphi\,sen\,\Psi$.

Dati dunque due archi φ, Ψ, se ne potrà, per mezzo dell'equazione (E), trovare uno μ tale che la somma delle due trascendenti $F(\varphi)$, $F(\Psi)$ differisca dalla trascendente $F(\mu)$ di una quantità algebraica.

E' inutile a trattenersi nell' esaminare le conseguenze risultanti dal fare le due quantità φ, Ψ eguali tra loro, poichè ciò è facilissimo, se avrassi ben presente quanto è stato detto quì sopra.

§. 202. Veniamo alle trascendenti della terza specie: sia dunque

$$H(\varphi) = \int \frac{L + N\,sen\,\varphi^2}{1 + n\,sen\,\varphi^2}\,.\,\frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2\,sen\,\varphi^2)}},$$

$$H(\Psi) = \int \frac{L + N\,sen\,\Psi^2}{1 + n\,sen\,\Psi^2}\,.\,\frac{d\Psi}{\sqrt{(1 - c^2\,sen\,\Psi^2)}},\ \text{ed avremo}$$

$$H(\varphi) + H(\Psi) = \int \frac{L + N\,sen\,\varphi^2}{1 + n\,sen\,\varphi^2}\,.\,\frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2\,sen\,\varphi^2)}} + \int \frac{L + N\,sen\,\Psi^2}{1 + n\,sen\,\Psi^2}\,.\,\frac{d\Psi}{\sqrt{(1 - c^2\,sen\,\Psi^2)}} =$$

$$\int \frac{(L + N\,sen\,\varphi^2)(1 + n\,sen\,\Psi^2)\frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2\,sen\,\varphi^2)}} + (L + N\,sen\,\Psi^2)(1 + n\,sen\,\varphi^2)\frac{d\Psi}{\sqrt{(1 - c^2\,sen\,\Psi^2)}}}{(1 + n\,sen\,\varphi^2)(1 + n\,sen\,\Psi^2)}$$

che si riduce a

$$H(\varphi) + H(\Psi) = \int \frac{(N - Ln)(sen\,\varphi^2 - sen\,\Psi^2)\,d\varphi}{(1 + n\,sen\,\varphi^2)(1 + n\,sen\,\Psi^2)\sqrt{(1 - c^2\,sen\,\varphi^2)}},\ \text{allorchè si}$$

faccia

$$\frac{d\Psi}{\sqrt{(1 - c^2\,sen\,\Psi^2)}} = -\,\frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2\,sen\,\varphi^2)}},\ \text{ovvero allorchè si supponga}$$

tra φ e Ψ la relazione contenuta (201) nell' equazione (E). Ora in questa stessa ipotesi abbiam trovato

$$\frac{(sen\,\varphi^2 - sen\,\Psi^2)\,d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2\,sen\,\varphi^2)}} = -\,sen\,\mu\,.\,d\,(sen\,\varphi\,sen\,\Psi);\ \text{dunque}$$

$$H(\varphi) + H(\Psi) = \int \frac{(N - Ln)(sen\,\varphi^2 - sen\,\Psi^2)\,d\varphi}{(1 + n\,sen\,\Psi^2)\sqrt{(1 - c^2\,sen\,\varphi^2)}\,.\,(1 + n\,sen\,\varphi^2)} =$$

$\int \frac{-(N - Ln)\,dq\,.\,sen\,\mu}{1 + np + n^2 q^2}$, facendo per abbreviare $p = sen\,\varphi^2 + sen\,\Psi^2$, $q = sen\,\varphi\,sen\,\Psi$.

Per ottenere quest' ultimo integrale, cerchiamo il valore di p dato per q. L' equazione (E) ci dà

$cos\,\varphi\,cos\,\Psi = cos\,\mu + sen\,\varphi\,sen\,\Psi\,.\sqrt{(1 - c^2\,sen\,\mu^2)}$, il cui quadrato è

$$cos\,\varphi^2\,cos\,\Psi^2 = cos\,\mu^2 + 2\,cos\,\mu\,sen\,\varphi\,sen\,\Psi\,.\sqrt{(1 - c^2\,sen\,\mu^2)} + sen\,\varphi^2\,.\,sen\,\Psi^2(1 - c^2\,sen\,\mu^2):\ \text{ma}$$

$$cos\,\varphi^2\,cos\,\Psi^2 = 1 - (sen\,\varphi^2 + sen\,\Psi^2) + sen\,\varphi^2\,.\,sen\,\Psi^2 = 1 - p + q^2;\ \text{dunque}$$

$$1 - p = cos\,\mu^2 + 2q\,cos\,\mu\sqrt{(1 - c^2\,sen\,\mu^2)} - q^2 c^2\,sen\,\mu^2,$$

e quindi

$$p = 1 - cos\,\mu^2 - 2q\,cos\,\mu\sqrt{(1 - c^2\,sen\,\mu^2)} + q^2 c^2\,sen\,\mu^2;$$

sostituendo questo valore di p si avrà per tanto

$$H(\varphi) + H(\Psi) = \int \frac{(Ln - N)\,dq\,.\,sen\,\mu}{1 + n\,sen\,\mu^2 - 2n\,q\,cos\,\mu\sqrt{(1 - c^2\,sen\,\mu^2)} + (n^2 + nc^2\,sen\,\mu^2)\,q^2} + Cost.$$

Al denominatore di quest' ultima frazione diamo la forma $a + bq + cq^2$, ed avremo

$H(\varphi) + H(\Psi) = \int \frac{sen\,\mu\,(Ln - N)\,dq}{a + bq + cq^2} + Cost.$ Ora determinando la costante in maniera che quando $\varphi = 0$, sia $\Psi = \mu$, e supponendo che l' integrale cominci quando $\varphi = 0$, avremo

$$H(\varphi) + H(\Psi) = H(\mu) + \int \frac{sen\,\mu\,(Ln - N)\,dq}{a + bq + cq^2}.$$

Quest' ultimo integrale dipende da archi di circolo e logaritmi: concluderemo dunque che date due trascendenti della terza specie $H(\varphi)$, $H(\Psi)$, si potrà sempre trovare un' altra simile trascendente $H(\mu)$, che differisca dalla somma di quelle di una quantità dipendente dai logaritmi o dal circolo.

Il valore di μ ci sarà dato dall' equazione (E).

L' equazione (b) trovata quì sopra (201) ci dà

$$\int d\varphi \sqrt{(1 - c^2 sen\,\varphi^2)} + \int d\Psi \sqrt{(1 - c^2 sen\,\Psi^2)} = c^2 sen\,\mu \times sen\,\varphi\, sen\,\Psi + Cost.$$ Ora questi due integrali rappresentano (§. 160) due archi di Ellisse contati dall' estremità dell' asse minore e corrispondenti a due archi di un circolo fatto sopra l' asse maggiore; se dunque indichiamo per $F(\varphi)$, $F(\Psi)$ questi due archi ellittici, avremo per le cose dette di sopra,

$$F(\varphi) + F(\Psi) = F(\mu) + c^2 sen\,\mu\, sen\,\varphi\, sen\,\Psi,$$ e la relazione tra i tre archi φ, Ψ, μ corrispondenti ai tre archi Ellittici $F(\varphi)$, $F(\Psi)$, $F(\mu)$, ci è data al solito dall' equazione (E).

Se noi facciamo $\Psi = \varphi$, avremo

$$F(\varphi) - \tfrac{1}{2} F(\mu) = \tfrac{1}{2} c^2 sen\,\mu\, sen\,\varphi^2,$$ e la relazione tra φ e μ sarà

$$\cos\varphi^2 - sen\,\varphi^2 \sqrt{(1 - c^2 sen\,\mu^2)} = \cos\mu;$$ concluderemo dunque che presi due archi di circolo φ, μ, i quali abbiano la quì assegnata relazione, corrisponderanno essi a due archi Ellittici $F(\varphi)$, $\tfrac{1}{2} F(\mu)$, che differiranno tra loro di una quantità algebraica determinata.

In generale se si volessero trovare due archi Ellittici che avessero la differenza espressa per una quantità algebraica o assegnabile in linea retta, presi a piacere due archi circolari DZ, DI eguali a φ, Ψ, si determirebbe l' arco $DR = \mu$ per mezzo dell' equazione (E), e la differenza tra i due archi Ellittici BM, KN, sarebbe assegnabile in linea retta: infatti es- Fig. 1.

Fig. 1. sendo $BM = F(\varphi)$, $BK = F(\Psi)$, $BN = F(\mu)$, si ha

$$F(\varphi) + F(\Psi) - F(\mu) = c^2 sen\,\mu\, sen\,\varphi\, sen\,\Psi,$$ e quindi

$$BM - (BN - BK) = c^2 sen\,\mu^2\, sen\,\varphi\, sen\,\Psi.$$

Se si facesse μ eguale al quarto della circonferenza del circolo $=$ DIA, avremmo tra φ e Ψ questa relazione

$$\cos\varphi \cos\Psi - sen\,\varphi \,.\, sen\,\Psi \sqrt{(1 - c^2)} = 0,$$ da cui si avrà

$$\cot\varphi = tang\,\Psi \,.\, \sqrt{(1 - c^2)},$$

$$c^2 sen\,\mu\, sen\,\varphi\, sen\,\Psi = \frac{c^2 sen\,\varphi \cos\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 sen\,\varphi^2)}},$$ e però

$$BM - (BA - BK) = \frac{c^2 sen\,\varphi \cos\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 sen\,\varphi^2)}}:$$ quest' equazione, la quale contiene il Teorema del Conte Fagnani, ricade in quella del §. 161.

Per più estese Teorìe in questo genere, si legga la sopra citata Memoria di Le-Gendre, e la terza Sezione dell' Opera del Geometra Ferroni „ *De Calculo Integralium exercitatio Mathematica* „ pubblicata in Firenze presso Pietro Allegrini nel 1792.

C A P. VIII.

Continuazione delle Teorie spiegate nel Capitolo precedente.

§. 203. Prendiamo a considerare quelle equazioni differenziali, nelle quali, indicando $(\frac{dy}{dx})$ per p, si trova p elevato a potenze maggiori dell' unità.

Sia proposta l' equazione differenziale

$(\frac{dy}{dx})^3 + \alpha(\frac{dy}{dx})^2 + \beta(\frac{dy}{dx}) + \delta = 0$ nella quale α, β, δ rappresentano delle funzioni date di x ed y.

Risoluta quest' equazione per rapporto a $(\frac{dy}{dx})$, siano le sue tre radici $(\frac{dy}{dx}) = q, = r, = s$; di modo che la nostra equazione possa anche rappresentarsi per

$\{(\frac{dy}{dx}) - q\}\{(\frac{dy}{dx}) - r\}\{(\frac{dy}{dx}) - s\} = 0$: ciascuna delle tre equazioni

$(\frac{dy}{dx}) - q = 0$, $(\frac{dy}{dx}) - r = 0$, $(\frac{dy}{dx}) - s = 0$, integrata ci darà per y un valore, o in generale una relazione tra x ed y, che soddisfarà all' equazione differenziale proposta: si avranno in questa guisa tre integrali, ciascuno dei quali conterrà una costante arbitraria, introdotta dall' integrazione dell' equazione, da cui esso deriva.

Se noi indichiamo per $f(x, y, a) = 0$, $f'(x, y, b) = 0$, $f''(x, y, c) = 0$ questi tre integrali completi, a, b, c essendo le costanti arbitrarie, anche il loro prodotto

(A) .... $f(x, y, a) . f'(x, y, b) . f''(x, y, c) = 0$ soddisfarà all' equazione differenziale proposta, e rappresenterà anche il di lei integrale completo; infatti differenziando quest' ultima equazione, ed indicando per f, f', f'' quelle funzioni, si avrà

$$f'.f''\{(\frac{df}{dx}) + (\frac{dy}{dx})(\frac{df}{dy})\} + f.f''\{(\frac{df'}{dx}) + (\frac{dy}{dx})(\frac{df'}{dy})\} +$$
$$f.f'\{(\frac{df''}{dx}) + (\frac{dy}{dx})(\frac{df''}{dy})\} = 0,$$ che conterrà le tre costanti a, b, c. Ricavando di quì il valore di $(\frac{dy}{dx})$, si trova

$$(\frac{dy}{dx}) = -\frac{f'.f''(\frac{df}{dx}) + f.f''(\frac{df'}{dx}) + f.f'(\frac{df''}{dx})}{f'.f''(\frac{df}{dy}) + f.f''(\frac{df'}{dy}) + f.f'(\frac{df''}{dy})}$$: se ora sostituiamo in quest' espressione uno qualunque dei tre valori di y dati dall' equazione (A), per esempio quello che ci è dato da $f(x, y, a) = 0$, si ha subito

$$(\frac{dy}{dx}) = -\frac{f'.f''(\frac{df}{dx})}{f'.f''(\frac{df}{dy})} = -\frac{(\frac{df}{dx})}{(\frac{df}{dy})};$$ e questo valore di $(\frac{dy}{dx})$, combinato con l' equazione $f(x, y, a) = 0$, soddisfà all' equazione proposta.

Per farne un esempio, prendiamo ad integrare l' equazione $dy^2 - 5gxdxdy + 6g^2x^2dx^2 = 0$.

Se poniamo $(\frac{dy}{dx})dx$ invece di dy, e quindi dividiamo l' equazione per dx^2, avremo

$(\frac{dy}{dx})^2 - 5gx(\frac{dy}{dx}) + 6g^2x^2 = 0$. Le due radici di quest' equazione sono $(\frac{dy}{dx}) = 2gx$, $(\frac{dy}{dx}) = 3gx$, le quali danno $y = gx^2 + a$, $y = \frac{3gx^2}{2} + b$, essendo a e b due costanti arbitrarie: l' integrali dunque della proposta saranno

$y - gx^2 - a = 0$, $y - \frac{3gx^2}{2} - b = 0$,

$(y - gx^2 - a)(y - \frac{3gx^2}{2} - b) = 0$.

Nella stessa guisa essendo proposta l' equazione $dy^2 - g^2 dx^2 = 0$, si comincerebbe a ridurla a $(\frac{dy}{dx})^2 - g^2 = 0$, e troveremmo questi integrali

$y - gx + a = 0$, $y + gx + b = 0$,

$(y - gx + a)(y + gx + b) = 0$, nei quali a, b sono due costanti arbitrarie.

La più semplice riflessione sopra ciò che detto abbiamo di un' equazione differenziale del primo ordine e di terzo grado, ci basterà per vedere che può estendersi all' equazioni di grado qualunque; così data l' equazione di qualunque grado n,

$$(\frac{dy}{dx})^n + a(\frac{dy}{dx})^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \pi(\frac{dy}{dx}) + \theta = 0.$$

Se per mezzo della risoluzione dell' equazioni potremo trovare le sue radici, e queste siano

$(\frac{dy}{dx}) = q$, $(\frac{dy}{dx}) = r$, $(\frac{dy}{dx}) = s$, $(\frac{dy}{dx}) = t$ ec., rappresentando gli integrali di esse per

$f(x, y, a) = 0$, $f'(x, y, b) = 0$, $f''(x, y, c) = 0$, $f'''(x, y, e) = 0$ ec., saranno quest' ultime equazioni altrettanti integrali della proposta, cui soddisfarà anche il prodotto

$f(x, y, a) . f'(x, y, b) . f''(x, y, c) . f'''(x, y, e) .$ ec. $= 0$.

§. 204. Spesso senza ricorrere alla risoluzione dell' equazioni, che il più delle volte non può eseguirsi, si ottiene in certi casi particolari l' integrazione.

Rappresentando per p la quantità $(\frac{dy}{dx})$, supponiamo che si

abbia un' equazione tra x e p. Nel caso che sia più facile determinare x per p che p per x, si avrà la relazione tra x ed y in questa maniera. Sia $x = P$, indicando per P una funzione data di p, e differenziando si avrà

$dx = dx(\frac{dp}{dx})(\frac{dP}{dp})$, ovvero $dx = dP$: ma

$dy = (\frac{dy}{dx}) dx = pdx$; dunque $dy = pdP$, e di quì si ricava

$y = \int pdP = pP - \int Pdp$: avremo pertanto $x = P$, $y = pP - \int Pdp$; onde le due variabili x, y essendo date per una terza p, si conoscerà la relazione che hanno tra loro per mezzo dell' eliminazione della medesima p. Questa relazione sarà l' integrale completo della proposta, perchè conterrà una costante arbitraria portata dal segno d' integrazione che ritrovasi nel valore di y.

Talvolta giova esprimere le due variabili x e p per una terza u; onde più facilmente ottenere il cercato integrale. Così se noi supponiamo d' aver trovato $x = U$, $p = V$, essendo U, V due funzioni della stessa variabile u, avremo, differenziando rapporto ad u, $(\frac{dx}{du}) du = dx = dU$, e $dy = pdx = VdU$; quindi $y = \int VdU$: allora le due variabili x, y saranno espresse per una terza U, dall' eliminazione della quale si avrà la relazione voluta.

Per esempio, ridotta l' equazione

$xdx + ady = b\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ alla forma

$x + ap = b\sqrt{(1 + p^2)}$, si ha subito

$x = -ap + b\sqrt{(1 + p^2)} = P$; dunque

$y = p\{b\sqrt{(1 + p^2)} - ap\} - \frac{1}{2}ap^2 + b\int dp\sqrt{(1 + p^2)}$;

e l' integrale sarà il risultato dell' eliminazione di p.

Nell' equazione $x^3 + p^3 = apx$, faccio $p = ux$, ed ho $x + u^3 x = au$, e quindi

$x = \frac{au}{1 + u^3}$, e $p = \frac{au^2}{1 + u^3}$. Ora $dx = \frac{adu(1 - 2u^3)}{(1 + u^3)^2}$, onde

$dy = pdx = \frac{a^2 u^2 du(1 - 2u^3)}{(1 + u^3)^3}$, ed integrando

$y = a^2 \int \frac{u^2 du(1 - 2u^3)}{(1 + u^3)^3} = \frac{1}{6} a^2 \cdot \frac{2u^3 - 1}{(1 + u^3)^2} - a^2 \int \frac{u^2 du}{(1 + u^3)^2}$, ovvero

$y = \frac{1}{6} a^2 \cdot \frac{2u^3 - 1}{(1 + u^3)^2} + \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{1}{1 + u^3} + Cost.$

Quando in un' equazione differenziale tra x, y, e $p = (\frac{dy}{dx})$, le due variabili x, y compongono lo stesso numero di dimensioni, o quando le equazioni rapporto a queste variabili sono omogenee, allora possiamo anche aver l' integrale in questa guisa.

Facciamo $y = ux$; si manderà via la quantità x per mezzo della divisione, e si avrà un' equazione tra le due quantità u e p, dalla quale potremo determinare l' una per l' altra. Ora essendo $y = ux$ si ha $dy = udx + xdu$, e quindi essendo $dy = pdx$, sarà $pdx - udx = xdu$. Quest' ultima equazione ci dà $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p - u}$, ed integrando $lx = \int \frac{du}{p - u}$; si avrà in questa maniera x dato per u, giacchè supponiamo d' aver sostituito invece di p il suo valore in u, per cui $\frac{du}{p - u}$ diviene una sola funzione di u. Trovato il valore di x, si avrà subito quello di y dato ancor esso in u, e saranno in questa guisa le due variabili determinate per una terza, dall' eliminazione della quale ne risulterà l' integrale completo.

Quando fosse più facilmente determinabile u per p che p per u, allora invece della formula $\int \frac{du}{p - u}$, potrebbe adoprarsi la formula

$- l(p - u) + \int \frac{dp}{p - u}$, che è ad essa eguale. Sia l' equazione omogenea

$ydx - xdy = nx \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, ovvero

$y - xp = nx \sqrt{(1 + pp)}$. Facendo $y = ux$ e dividendo per x, si ha

$u - p = n\sqrt{(1 + pp)}$: ora essendo

$lx = - l(p - u) + \int \frac{dp}{p - u}$, avremo

$lx = - ln\sqrt{(1 + pp)} - \int \frac{dp}{n\sqrt{(1 + pp)}}$, quindi

$lx = Cost. - ln\sqrt{(1 + pp)} - \frac{1}{n} l\{p + \sqrt{(1 + pp)}\}$:

e passando dai logaritmi ai numeri e mutando la forma della costante, sarà

$x = \frac{C}{\sqrt{(1 + pp)} \cdot (p + \sqrt{(1 + pp)})^{\frac{1}{n}}}$, ovvero

$x = \frac{C\{\sqrt{(1 + pp)} - p\}^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{(1 + pp)}}$, ed in conseguenza

$y = \frac{C\{p + n\sqrt{(1 + pp)}\}}{\sqrt{(1 + pp)}} \{\sqrt{(1 + pp)} - p\}^{\frac{1}{n}}$; così le due variabili x, y saranno date per la terza p. Se supponiamo $n = 1$, avremo

$x = \frac{C\{\sqrt{(1 + pp)} - p\}}{\sqrt{(1 + pp)}}$, $y = \frac{C}{\sqrt{(1 + pp)}}$, quindi

$x = y\{\sqrt{(1 + pp)} - p\} = y\{\frac{C}{y} - p\}$,

$p = \frac{C - x}{y}$, $pp = \frac{(C - x)^2}{y^2}$, $pp + 1 = 1 + \frac{(C - x)^2}{y^2}$, $\frac{C^2}{y^2} = 1 + \frac{(C - x)^2}{y^2}$, ed infine $y^2 + x^2 = 2Cx$.

§. 205. Se noi rappresentiamo per s la quantità $\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, e sia proposta un' equazione omogenea in x, y, s, ne otterremo l' integrale in questa guisa. Facciasi $y = ux$, $s = vx$, e per mezzo di una tal sostituzione potremo mandar via la x dall' equazione data, e resteranno solo le due variabili u, e v, delle quali una potrà sempre determinarsi per mezzo dell' altra. Ora essendo

$dy = pdx$, $ds = dx\sqrt{(1 + pp)}$, avremo

$pdx = udx + xdu$, $dx\sqrt{(1 + pp)} = vdx + xdv$, e perciò

$\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u}$, $\frac{dx}{x} = \frac{dv}{\sqrt{(1+pp)}-v}$, quindi

$\frac{du}{p-u} = \frac{dv}{\sqrt{(1+pp)}-v}$. La quantità v è data per u; dunque se poniamo $dv = qdu$, si avrà

$\sqrt{(1 + pp)} = v + pq - qu$, e presi i quadrati

$1 + pp = (v - qu)^2 + 2pq(v - qu) + p^2q^2$, d' onde si ricava

$$p = \frac{q(v-qu) + \sqrt{\left\{(v-qu)^2 - 1 + q^2\right\}}}{1-q^2},\ \text{e}$$

$$p - u = \frac{qv - u + \sqrt{\left\{(v-qu)^2 - 1 + q^2\right\}}}{1-q^2}$$: sarà in conseguenza

$$\frac{dx}{x} = \frac{du(1-qq)}{qv - u + \sqrt{\left\{(v-qu)^2 - 1 + q^2\right\}}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{du\left\{qv - u - \sqrt{\left\{(v-qu)^2 - 1 + q^2\right\}}\right\}}{1 + uu - vv}$$; e siccome v e q sono date per u, potremo perciò trovare anche x dato per la stessa variabile u, ed in seguito esprimere la $y = ux$ per la medesima u.

Ora $qdu = dv$; dunque avremo

$$lx = la - l\sqrt{(1 + u^2 - v^2)} - \int \frac{du\sqrt{\left\{(v-qu)^2 - 1 + qq\right\}}}{1 + u^2 - v^2}.$$

Essendo poi $y = ux$, e quindi $u = \frac{y}{x}$, se invece di u poniamo questo valore, avremo la cercata relazione tra x ed y.

La quantità $\int\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = s$ rappresenta (81) un arco di curva corrispondente alle coordinate rettangole x, y: questa curva sarà in conseguenza algebraica, se potrà esprimersi l' integrale

$\int \frac{du\sqrt{\left\{(v-qu)^2 - 1 + qq\right\}}}{1 + u^2 - v^2}$ per mezzo dei logaritmi.

Prendiamo come esempio, l' equazione

$s = \alpha x + \beta y$, e facendo $y = ux$, $s = vx$, sarà

$v = \alpha + \beta u$, e $q = \left(\frac{dv}{du}\right) = \beta$, quindi $v - qu = \alpha$. Dunque

$lx = la - l\sqrt{\left\{1 + uu - (\alpha + \beta u)^2\right\}} - \int \frac{du\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 - 1)}}{1 + u^2 - (\alpha + \beta u)^2}$;

ora quest' ultimo termine integrale comporta le riduzioni seguenti

$$-\int \frac{du\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 - 1)}}{1 + u^2 - (\alpha + \beta u)^2} = -\int \frac{du\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 - 1)}}{1 - \alpha^2 - 2\alpha\beta u + (1 - \beta^2)u^2} = (\alpha^2 + \beta^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \int \frac{du}{\alpha^2 - 1 + 2\alpha\beta u + (\beta^2 - 1)u^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int \frac{(\beta^2 - 1)du\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 - 1)}}{\left\{u(\beta^2 - 1) + \alpha\beta - \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 - 1)}\right\}\left\{u(\beta^2 - 1) + \alpha\beta + \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 - 1)}\right\}} =$$

$\frac{1}{2}\, l\, \frac{(\beta^2 - 1)u + \alpha\beta - \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 - 1)}}{(\beta^2 - 1)u + \alpha\beta + \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 - 1)}}$: avremo dunque

$l\, \frac{x\sqrt{(1 + u^2 - (\alpha + \beta u)^2)}}{a} = \frac{1}{2}\, l\, \frac{(\beta^2 - 1)u + \alpha\beta - \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 - 1)}}{(\beta^2 - 1)u + \alpha\beta + \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 - 1)}}$: se ora facciamo $u = \frac{y}{x}$, passiamo dai logaritmi ai numeri, e quadriamo, avremo la ricercata equazione

$$\frac{x^2 + y^2 - (\alpha x + \beta y)^2}{aa} = \frac{(\beta^2 - 1)y + \alpha\beta x - x\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 - 1)}}{(\beta^2 - 1)y + \alpha\beta x + x\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 - 1)}}.$$

Indichiamo per P e Q il numeratore e denominatore del secondo membro, ed avremo

$\frac{x^2 + y^2 - (\alpha x + \beta y)^2}{aa} = \frac{PQ}{Q^2}$; ma

$PQ = (\beta^2 - 1)^2 y^2 + 2\alpha\beta(\beta^2 - 1)xy + (\alpha^2 - 1)(\beta^2 - 1)x^2 = (\beta^2 - 1)\left\{(\alpha x + \beta y)^2 - x^2 - y^2\right\}$; dunque

$\frac{x^2+y^2-(\alpha x+\beta y)^2}{aa} = \frac{(\beta^2-1)\{(\alpha x+\beta y)^2-x^2-y^2\}}{Q^2}$, ed in fine

$Q^2 = a^2(1-\beta^2) = Cost.$, ovvero

$(\beta^2 - 1)y + \alpha\beta x + x\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 - 1)} = Cost.$

Quest' equazione appartiene alla linea retta.

Per un secondo esempio sia $s = \frac{ny^2}{x}$, e si avrà $v = nu^2$, e $q = 2nu$, quindi $1 + u^2 - v^2 = 1 + u^2 - n^2u^4$, $v - qu = -nu^2$: sarà dunque

$lx = la - l\sqrt{(1 + u^2 - n^2u^4)} - \int \frac{du\sqrt{(n^2u^4 - 1 + 4n^2u^2)}}{1 + u^2 - n^2u^4}$, e quest' ultimo integrale non può aversi per mezzo dei logaritmi.

Infine se abbiasi $s^2 = y^2 + nx^2$, ovvero $v = \sqrt{(u^2 + n)}$, e $q = \frac{u}{\sqrt{(u^2+n)}}$, sarà $1 + u^2 - v^2 = 1 - n$; $v - qu = \frac{n}{\sqrt{(u^2+n)}}$, e $q^2 - 1 = \frac{-n}{u^2+n}$: avremo dunque

$lx = la - l\sqrt{(1-n)} - \frac{1}{1-n}\int\frac{du\sqrt{(n^2-n)}}{\sqrt{(u^2-n)}} = lb + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n-1)}}\,l(u + \sqrt{(u^2+n)})$, ed in conseguenza

$\frac{x}{b} = \left\{\frac{y + \sqrt{(yy + nxx)}}{x}\right\}^{\sqrt{\frac{n}{n-1}}}$: tutte le volte che $\frac{n}{n-1}$ è un numero quadrato, l' equazione tra x ed y sarà algebraica (*a*). Sia $\sqrt{\frac{n}{n-1}} = m$, ed avremo $n = \frac{m^2}{m^2-1}$; sarà allora $s^2 = y^2 + \frac{m^2x^2}{m^2-1}$, cui soddisfarà l' equazione algebraica

(*a*) Le quantità che hanno un esponente irrazionale, come per esempio $a^{\sqrt{2}}$ chiamansi *intertrascendenti*.

$x^{m+1} = b\left\{y + \sqrt{(y^2 + \frac{m^2x^2}{m^2-1})}\right\}^m$.

§. 206. Talvolta si giunge all' integrale completo di un' equazione differenziale del primo ordine per mezzo di un artifizio che dipende dalla medesima differenziazione.

Se proposta una equazione tra x, y, e $(\frac{dy}{dx})$ si dedurrà da essa in una maniera qualunque un' equazione differenziale del secondo ordine, quindi se con qualche artifizio potrem trovare un' equazione del primo ordine, che a quella del secondo soddisfaccia, e che nel tempo stesso contenga una costante arbitraria a, allora per mezzo della proposta e della ritrovata in x, y, $(\frac{dy}{dx})$, a, eliminando $(\frac{dy}{dx})$, si avrà una relazione tra x, y e la costante arbitraria a, la quale sarà l' integrale completo della proposta medesima; infatti tutte queste equazioni dovendo sussistere nel tempo stesso, appartengono tutte alla medesima relazione di variabili. Alcuni esempj renderan più chiara questa Teoria.

Sia l' equazione differenziale

$ydx - xdy = a\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$: se in questa facciamo $(\frac{dy}{dx}) = p$; si ha $y - px = a\sqrt{(1 + p^2)}$; ora differenziamo quest' equazione, ed avremo

$dy - pdx - xdp = \frac{apdp}{\sqrt{(1+p^2)}}$: ma $dy = pdx$; dunque

$-xdp = \frac{apdp}{\sqrt{(1+pp)}}$, ovvero $\left\{\frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}} - x\right\}dp = 0$. Quest' ultima equazione ci dà $dp = 0$,

$(1) \ldots\ldots p = Cost. = C$, $(2) \ldots\ldots \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}} - x = 0$.

Se pertanto eliminiamo p con la proposta equazione e con la (1), avremmo $y = Cx + a\sqrt{(1 + CC)}$ per rappresentarne l' integrale completo. Se con la proposta avessimo combinata l' equazione (2), avremmo trovata tra x e y la relazione $x^2 + y^2 = a^2$, la quale non può tener luogo d' integrale completo, perchè non vi si trova una costante arbitraria di nuovo. Per secondo esempio sia l' equazione da integrarsi

$(y + (n - x)p)(m - x) + (y + (m - x)p)(n - x) = 0$: se noi moltiplichiamo quest' equazione per dp, si avrà

$(y + (n - x)p)(m - x)dp + (y + (m - x)p)(n - x)dp = 0$, il cui integrale è

$(y + (m - x)p)(y + (n - x)p) = Cost. = C$.

Se ora per mezzo di quest' ultima equazione e della proposta, eliminiamo p, ne avremo l' integrale completo in x, y e C. Quest' integrale sarà

$y^2 = -\frac{4C(m-x)(n-x)}{(m-n)^2}$. In fine sia l' equazione

$(A + Bx + Cx^2)dy^2 = (A + By + Cy^2)dx^2$, ovvero

$(A + Bx + Cx^2)p^2 = (A + By + Cy^2)$.

Se noi differenziamo quest' equazione, si avrà

$(A + Bx + Cx^2).2pdp + (B + 2Cx)p^2dx = (B + 2Cy)dy$, ovvero

$(A + Bx + Cx^2).2dp + (B + 2Cx)pdx = (B + 2Cy)dx$.

Facciamo ora $dp = qdx$, ed avremo

$(A + Bx + Cx^2)2q + (B + 2Cx)p = B + 2Cy$.

Differenziamo un' altra volta quest' equazione, e sarà

$(A + Bx + Cx^2).2dq + 3(B + 2Cx)qdx + 2Cpdx = 2Cpdx$, e riducendo

$(A + Bx + Cx^2).2dq + 3(B + 2Cx)qdx = 0$.

Quest' ultima equazione ci dà, integrando e passando dai logaritmi ai numeri,

$q^2(A + Bx + Cx^2)^3 = \alpha^2$, essendo α una costante arbitraria.

Sostituiamo il valore che dà quest' equazione per q, in $(A + Bx + Cx^2).2q + (B + 2Cx)p = (B + 2Cy)$, ed avremo

$p = \frac{(B + 2Cy)\sqrt{(A + Bx + Cx^2)} - 2\alpha}{(B + 2Cx)\sqrt{(A + Bx + Cx^2)}}$. Se ora eguagliamo questo valore di p con quello che ci dà l' equazione proposta, avremo

$(B + 2Cy)\sqrt{(A + Bx + Cx^2)} \pm (B + 2Cx)\sqrt{(A + By + Cy^2)} = 2\alpha$. Questa relazione sarà l' integrale completo dell' equazione

$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \mp \frac{\sqrt{(A + By + Cy^2)}}{\sqrt{(A + Bx + Cx^2)}}$, il cui quadrato è la proposta medesima.

In generale, per dirigersi in qualche modo in questa ricerca, data un' equazione tra x, y e $p = \left(\frac{dy}{dx}\right)$, si ricaverà da lei il valore di y, e si avrà per esso una funzione in x e p, cioè $y = \varphi(x, p)$: in seguito differenziando, e ponendo pdx invece di dp, troveremo

$pdx = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)dx + \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)dp$, ovvero

$\left(p - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\right)dx = \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)dp$, ovvero

$\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right) = p - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$: tutte le volte dunque che potremo integrare quest' ultima equazione (che è del primo ordine e del primo grado), o trovare una relazione tra x e p, che ad essa soddisfaccia e contenga una costante arbitraria, allora per mezzo di quest' equazione e della proposta, eliminando p, troveremo la dimandata relazione tra x ed y.

Non mi trattengo ad esaminare in quali casi particolari ciò possa accadere.

Per farne un esempio, sia l' equazione

$ydx - xdy = a\sqrt[3]{(dx^3 + dy^3)}$, ovvero

$y - px = a\sqrt[3]{(1 + p^3)}$, e quindi

$y = px + a\sqrt[3]{(1 + p^3)}$. Differenziando, si avrà

$\left\{x + \frac{app}{\sqrt[3]{(1+p^3)^2}}\right\}dp = 0$, alla quale soddisfà

$dp = 0$, $p = Cost. = C$, ovvero $x + \frac{app}{\sqrt[3]{(1+p^3)^2}} = 0$.

L' equazione $p = C$ combinata con la proposta, ci dà l' integrale completo $y = Cx + a\sqrt[3]{(1 + C^3)}$.

§. 207. Un' equazione differenziale del primo ordine considerata rapporto alla Geometria, contiene sempre la relazione tra una tangente e le coordinate di una curva. Infatti la quantità $p = (\frac{dy}{dx})$ esprime (79) sempre la tangente dell' angolo, che la tangente condotta al punto della curva, cui corrispondono le coordinate x, y, fa con l' asse, ed un' equazione del primo ordine contien sempre le quantità x, y e p.

Una tale equazione pertanto dà il valore della suddetta tangente espresso per mezzo delle coordinate della curva.

E siccome la tangente, la suttangente, la normale e la sunnormale appartenenti ad un punto in una curva, sono conosciute quando è conosciuto il valore di $(\frac{dy}{dx})$, quindi è che data un' equazione differenziale del primo ordine, si potranno avere i valori di queste linee espressi in x ed y, col sostituire nelle formule che le rappresentano, invece di $(\frac{dy}{dx})$ il valore che si ricava dall' equazione differenziale: bisognerebbe poi sapere la relazione che passa tra x ed y, onde avere le espressioni della tangente ec., solo date per x.

Quando la curva è conosciuta per mezzo di un' equazione tra x, y ed un parametro costante a, per esempio $\varphi(x, y, a) = 0$, per mezzo del Calcolo Differenziale si passa da questa cognizione a quella delle quantità tangente, suttangente, normale e sunnormale appartenenti ad un qualunque punto della curva: e viceversa quando si conoscerà l' espressione di una di queste linee, cioè quando sarà data una funzione $f(x, y)$ di x e di y che eguagli la detta linea, ed in generale quando ricercheremo una curva per mezzo di qualche proprietà che appartenga a quantità espresse per x, y e $p = (\frac{dy}{dx})$, per trovare l' equazione di quella curva adoprar converrà il Calcolo Integrale; l' equazion data infatti sarà una differenziale del primo ordine, dalla quale si dee ricavare la relazione tra le coordinate x, y, che rappresenti la curva, cui conveniva la data tangente, o suttangente ec. Per questo motivo i primi Coltivatori del Calcolo Differenziale ed Integrale, han chiamato *Metodo diretto delle Tangenti* il Differenziale, e *Metodo inverso delle Tangenti* l' Integrale.

Data un' equazione tra le due coordinate x, y ed un parametro costante a, per esempio $\varphi(x, y, a) = 0$ possiam sempre da essa dedurne un' altra tra le stesse x, y e la quantità $p = (\frac{dy}{dx})$, senza che vi si ritrovi alcuna traccia di quella costante: concluderemo pertanto che la proprietà geometrica contenuta in una tale equazione differenziale, è affatto indipendente da quel parametro a, o è la stessa, qualunque valore egli abbia: dunque quella proprietà geometrica appartiene a tutta la famiglia di curve espressa dall' equazione $\varphi(x, y, a) = 0$.

Io chiamo *Famiglia di Curve* quell' immenso numero di curve che si ponno avere dall' equazione $\varphi(x, y, a) = 0$, dando ad a tutti i valori che a noi piace.

In generale trovato per $(\frac{dy}{dx})$ un valore che appartenga a tutte le curve contenute in una data famiglia, potremo egualmente avere dei rapporti tra le linee tangente, suttangente, normale e sunnormale, e le coordinate x, y, i quali non solo convengano alla curva particolare dalla quale si sono dedotti, ma nel tempo stesso a tutte le altre infinite curve della stessa famiglia. Così l' equazione differenziale che contiene uno di questi rapporti, non rappresenta all' occhio del Geometra una sola curva individuale, ma una famiglia di infinite curve, per ciascuna delle quali quell' equazione ha luogo; ed ecco spiegato ciò che ho promesso (Cap. II.) di mostrare cioè, come le equazioni differenziali sono infinitamente più generali di quelle da cui sono state dedotte.

Per esempio l' equazione $y^2 = 2ax - x^2$ ci rappresenta un circolo, ed individualmente quello che ha per raggio a. Se per mezzo della differenziazione eliminiamo questo raggio, avremo l' equazione differenziale $y^2 - x^2 = 2yx\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Di quì si ricava $y\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{(y+x)(y-x)}{2x}$: il primo membro rappresenta la sunnormale; dunque concluderemo che qualunque sia il raggio di un circolo, la sunnormale è sempre la quarta proporzionale dopo i tre termini $2x : y + x :: y - x :$ sunnormale.

Questa proprietà che si può ritrovare anche per mezzo della semplice Geometria, appartiene alla famiglia dei circoli; così mentre l' equazione $y^2 = 2ax - x^2$, solo dipinge alla nostra mente un circolo che ha per raggio a, quella $y\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{(y+x)(y-x)}{2x}$, ce ne rappresenta uno qualunque.

Prendiamo a risolvere un Problema, i dati del quale conducono ad una equazione differenziale che bisogna integrare per avere la curva che in quello si ricerca.

Supponiamo che un corpo grave liberamente cadendo per una data altezza $AL = a$, (Fig. 4) debba in A incontrare una curva tale, che scorrendo nella sua concavità ABC, il tempo impiegato nel descrivere qualunque arco AB, stia alla lunghezza della corda corrispondente AB nella ragion costante del tempo per AL alla medesima altezza AL. Fig. 4.

Chiamando $AP = x$, $PB = y$, sarà corda $AB = \sqrt{(x^2 + y^2)}$. La velocità del corpo in B è proporzionale alla radice dell' altezza $a + y$; così indicando per v questa velocità, sarà $v = \sqrt{(a + y)}$. Secondo ciò che noi abbiamo detto (92), si ha $v = \left(\frac{ds}{dt}\right)$, rappresentando per s l' arco AB, e per t il tempo impiegato per l' arco stesso AB: ora se noi consideriamo s e t come funzioni di x, avremo la velocità $v = \left(\frac{ds}{dx}\right) : \left(\frac{dt}{dx}\right)$, da cui si ricava

$\left(\frac{dt}{dx}\right) = \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{ds}{dx}\right) = \frac{1}{\sqrt{(a+y)}} \cdot \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}$, e quindi

$t = \int \frac{dx}{\sqrt{(a+y)}} \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}$.

Siccome nel moto uniformemente accelerato le velocità sono proporzionali ai tempi, avremo perciò espresso da $\sqrt{a}$ il tempo impiegato a descrivere AL, ed il rapporto tra questo tempo e lo stesso spazio, sarà $\frac{\sqrt{a}}{a} = \frac{1}{\sqrt{a}}$. Fig. 4.

L' equazione dunque da cui dipende il Problema, sarà $\frac{t}{\text{Cor. AB}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$, ovvero $\sqrt{a} \cdot t = \sqrt{(x^2 + y^2)}$.

Differenziamo quest' equazione, ed avremo

$\frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}}{\sqrt{(a+y)}} = \frac{x + y\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$, che è un' equazione differenziale del primo ordine del secondo grado. Se noi facciamo $\left(\frac{dy}{dx}\right) = p$ e quadriamo, togliendo in seguito i denominatori e riducendo, otterremo l' equazione

$a(x^2p^2 - 2xyp + y^2) = y(y^2p^2 + 2xyp + x^2)$,

la radice della quale è

$(xp - y)\sqrt{a} = (x + yp)\sqrt{y}$, che diviene

$(xdy - ydx)\sqrt{a} = (xdx + ydy)\sqrt{y}$, avendovi riposto $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ per p, e tutta in seguito moltiplicata per dx.

Per integrare quest' ultima equazione, si faccia

$y = \frac{uz}{a}$, $x = \frac{z\sqrt{(a^2 - u^2)}}{a}$, e si trasforma in $\frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{adu}{\sqrt{u} \cdot \sqrt{(a^2 - u^2)}}$, nella quale le variabili sono separate, ed il di lei integrale dipende perciò dalle quadrature.

Questo Problema è quello della curva isocrona paracentrica, proposto da Leibniz ai Cartesiani nel 1689.

§. 208. Fin ora abbiam parlato d' equazioni differenziali del primo ordine, passiamo a quelle degli ordini superiori: e primieramente osserveremo che un' equazione differenziale del secondo ordine è in generale una relazione tra x, y, $(\frac{dy}{dx})$, $(\frac{d^2y}{dx^2})$; quindi potrem rappresentare una tale equazione per la formula

$\Psi(x, y, (\frac{dy}{dx}), (\frac{d^2y}{dx^2})) = 0$.

Quest' equazione avrà due integrali completi del primo ordine, ciascuno dei quali conterrà una costante arbitraria; l' integrale finito completo debbe contenerne due.

Incominciando dai casi più semplici per andare ai più composti, supponiamo che l' equazione differenziale non contenga la variabile y, sia cioè

$\Psi(x, (\frac{dy}{dx}), (\frac{d^2y}{dx^2})) = 0$; se da questa ricaviamo il valore di $(\frac{d^2y}{dx^2})$, avremo

$(\frac{d^2y}{dx^2}) = f(x, (\frac{dy}{dx}))$. Ora facendo $(\frac{dy}{dx}) = p$, si trova

$(\frac{dp}{dx}) = f(x, p)$, ovvero $(\frac{dp}{dx})dx = dxf(x, p) = dp$; dunque rappresentando per $\frac{P}{Q}$ la funzione $f(x, p)$, si avrà $Qdp = Pdx$, essendo P, Q funzioni conosciute di x e di p: l' integrazione pertanto dell' equazione di secondo ordine

$(\frac{d^2y}{dx^2}) = f(x, (\frac{dy}{dx}))$, sarà ridotta a quella di un' equazione differenziale del primo ordine e del primo grado $Qdp = Pdx$ tra le due variabili x, p. L' integrale di quest' ultima dipende dalle cose dette di sopra: quest' integrale sarà un' equazione in x, p ed una costante arbitraria; egli dunque sarà un' equazione differenziale del primo ordine, la cui integrazione introdurrà una nuova costante arbitraria, ed in questa guisa avremo l' integrale della proposta completato con due costanti arbitrarie.

Per esempio. Sia l' equazione

$\frac{\{1+(\frac{dy}{dx})^2\}^{\frac{3}{2}}}{(\frac{d^2y}{dx^2})} = X$, essendo X funzione di x. Si ricava subito

$(\frac{d^2y}{dx^2}) = \frac{\{1+(\frac{dy}{dx})^2\}^{\frac{3}{2}}}{X}$, e perciò $dp = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{X}dx$, ovvero

$\frac{dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}} = \frac{dx}{X}$; ed integrando si troverà

$\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}} = \int\frac{dx}{X} + Cost.$

Sia $V = \int\frac{dx}{X} + C$, e si avrà $p = \frac{V}{\sqrt{(1-VV)}}$; quindi

$pdx = dy = \frac{Vdx}{\sqrt{(1-VV)}}$, $y = \int\frac{Vdx}{\sqrt{(1-VV)}} + Cost.$

Quest' ultima equazione tra x ed y, sarà l' integrale finito completo della proposta. Supponendo $X = \frac{aa}{2x}$, si ha

$V = \int\frac{2xdx}{aa} = \frac{x^2+C}{aa}$, ed in seguito

$y = \int\frac{(x^2+C)dx}{\sqrt{\{a^4-(x^2+C)^2\}}} + c.$

Da una tale equazione è rappresentata la curva, nella quale i raggi di curvatura seguono la ragione inversa delle ascisse.

Per un altro esempio sia l' equazione

$adxdy^2 + x^2dxd^2y = nxdy\sqrt{(dx^4 + a^2ddy^2)}$; se poniamo $(\frac{dy}{dx})dx$, $(\frac{d^2y}{dx^2})dx^2$ per dy, ddy, e la dividiamo per dx^3, avremo

$a(\frac{dy}{dx})^2 + x^2(\frac{d^2y}{dx^2}) = nx(\frac{dy}{dx})\sqrt{\{1 + a^2(\frac{d^2y}{dx^2})\}}$, ovvero

$ap^2 + x^2(\frac{dp}{dx}) = nxp\sqrt{\{1 + a^2(\frac{dp}{dx})\}}$: questa è un' equazione differenziale del primo ordine tra le due variabili x, p, e di un grado superiore al primo. Essa dunque appartiene alle Teorie sopra spiegate.

Consideriamo adesso il caso in cui non si trovi nell' equazione differenziale la variabile x, ma la y, e sia l' equazione

$$\Psi(y, (\tfrac{dy}{dx}), (\tfrac{d^2y}{dx^2})) = 0.$$

In quest' equazione i differenziali sono presi relativamente alla variabile x: permutiamola dunque in un' altra, nella quale le differenziali siano relative alla variabile y; per questo (73) noi faremo nella proposta $\frac{1}{(\frac{dx}{dy})}$ invece di $(\frac{dy}{dx})$, e $-(\frac{d^2x}{dy^2}):(\frac{dx}{dy})^3$ invece di $(\frac{d^2y}{dx^2})$: essa diverrà allora un' equazione in y, $(\frac{dx}{dy})$, $(\frac{d^2x}{dy^2})$, la quale rientrerà nel caso quì sopra trattato, giacchè se faremo $p = (\frac{dx}{dy})$, avremo un' equazione in y, p e $(\frac{dp}{dy})$, come superiormente l' avevamo per x, p e $(\frac{dp}{dx})$.

§. 209. Se in un' equazione differenziale del secondo ordine in x, y, dy, dx e ddy le variabili x, y entrano in tal maniera, che considerando come quantità di una dimensione sola le ddy, dx, dy, ed attribuendo a ciascuna delle variabili x, y una dimensione, i termini dell' equazione abbiano lo stesso numero di dimensioni, suole a quest' equazione darsi il nome di *omogenea*; così l' equazione

$x^2ddy + ydy^2 + xdx^2 = 0$ è un' equazione omogenea, ed ogni suo termine ha tre dimensioni.

E' facile vedere che ridotta l' equazione differenziale ad esser formata delle quantità x, y, $(\frac{dy}{dx})$, $(\frac{d^2y}{dx^2})$, la nostra definizione ricade in questa:

„ Dicesi omogenea un' equazione differenziale del secondo ordine, quando attribuendo a $(\frac{dy}{dx}) = p$ nessuna dimensione,

a $(\frac{d^2y}{dx^2}) = q$ una dimensione negativa, ed alle variabili x, y una dimensione per ciascuna, tutti i di lei termini han lo stesso numero di dimensioni „.

L' equazioni che godono di siffatta proprietà, ponno sempre ridursi a dipendere dall' integrazione d' equazioni differenziali del primo ordine.

In queste equazioni omogenee facendo $y = ux$, $q = \frac{v}{x}$ per mezzo della divisione si eliminerà la variabile x, di modo che il criterio di tali equazioni sarà il seguente „ Ridotta un' equazione differenziale del secondo ordine a non contenere, che le quantità x, y, p, q, se da essa sparirà la x facendovi $y = ux$, $q = \frac{v}{x}$, e si otterrà un' equazione in u, p e v solamente, la proposta sarà allora omogenea „.

Data dunque un' equazione di tal sorte, incominceremo dal toglierle l' aspetto differenziale, introducendo in essa p e q; quindi fatto $y = ux$, $q = \frac{v}{x}$, ne scacceremo la x per mezzo della divisione, ed avremo allora un' equazione tra u, v e p, dalla quale si determinerà una di queste quantità per mezzo delle altre due; in seguito osservando che $dy = pdx$, si avrà $udx + xdu = pdx$, dalla quale ricaveremo $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u}$: per un altro verso essendo $dp = qdx$, avremo $dp = \frac{vdx}{x}$, da cui $\frac{dx}{x} = \frac{dp}{v}$. Eguagliamo i due valori di $\frac{dx}{x}$, ed otterremo $\frac{du}{p-u} = \frac{dp}{v}$, ovvero

(E) . . . . $vdu = pdp - udp$. Se ora invece di v poniamo in (E) il suo valore dato per p e per u, avremo un' equazione differenziale del primo ordine tra le due variabili u, e p, l' integrale della quale ci darà p espresso in u. Ciò ottenuto, porremo il valore di p nell' equazione $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u}$, ed avremo per mezzo dell' integrazione x dato per u; se infine in quest' equazione porremo $\frac{y}{x}$ invece di u, si avrà l' integrale completo della proposta, il quale conterrà due costanti arbitrarie, introdotte dalle due integrazioni che avrem fatte. Tutte le volte dunque che l' equazione (E) del primo ordine potrà integrarsi, sarà anche integrabile l' equazione del secondo ordine proposta. Un esempio schiarirà la Teorìa.

Sia l' equazione

$x^2 ddy = xdxdy + nydx^2$. Questa si trasforma in

$x^2 q = xp + ny$, nella quale porremo $y = ux$, $q = \frac{v}{x}$, ed avremo $v = p + nu$. L' equazione (E) pertanto sarà

$(p + nu)\,du = pdp - udp$, ovvero

$nudu + pdu + udp = pdp$, il cui integrale è

$\frac{nu^2}{2} + pu = \frac{p^2}{2} + \frac{C}{2}$. Quest' equazione ci dà

$p = u + \sqrt{\{C + (n+1)u^2\}}$: avremo dunque

$\frac{dx}{x} = \frac{du}{\sqrt{\{C + (n+1)u^2\}}}$, ed in conseguenza

$lx = \frac{1}{\sqrt{(n+1)}}\, l\, \frac{u\sqrt{(n+1)} + \sqrt{\{C + (n+1)u^2\}}}{D}$, ovvero

$Dx^{\sqrt{(n+1)}} = u\sqrt{(n+1)} + \sqrt{\{C + (n+1)u^2\}}$, essendo D e C due costanti arbitrarie.

Quest' integrale si riduce anche più semplice, e diviene $D^2 x^{2\sqrt{(n+1)}} - 2Dx^{\sqrt{(n+1)}} . u\sqrt{(n+1)} = C$, e mutando la forma delle costanti arbitrarie, cioè facendo $D = A\sqrt{(n+1)}$, $C = B(n+1)$,

$AAx^{2\sqrt{(n+1)}} - 2Ax^{\sqrt{(n+1)}} . u = B$. Infine sostituendo il valore di $u = \frac{y}{x}$ in quest' equazione si ha l' integrale completo della proposta

$AAx^{2\sqrt{(n+1)}} - 2Ax^{\sqrt{(n+1)}-1}\, y = B$, ovvero

$y = -\frac{B}{2A} x^{1-\sqrt{(n+1)}} - \frac{A}{2} x^{1+\sqrt{(n+1)}}$, ovvero

$y = Ex^{1-\sqrt{(n+1)}} + Fx^{1+\sqrt{(n+1)}}$, indicando E, F due costanti arbitrarie.

§. 210. Taluna volta l' integrazione di una equazione differenziale di secondo ordine si riduce a quella di una di primo, facendo $y = x^n u$, $p = x^{n-1} t$, $q = x^{n-2} v$, essendo v, t, u quantità variabili, ed n un esponente costante indeterminato: ciò succede quando una idonea determinazione di n, fa sì che la x si trovi elevata in ciascun termine alla medesima potenza, e quindi possa per mezzo della divisione farsi sparire dal calcolo. Infatti essendo $dy = pdx$, $dp = qdx$, quelle supposizioni ci daranno $xdu + nudx = tdx$, $xdt + (n - 1)\,tdx = vdx$, dalle quali si ricaverà

$\frac{dx}{x} = \frac{du}{t - nu} = \frac{dt}{v - (n-1)t}$, e quindi

(A) . . . . $\{v - (n-1)t\}\,du = (t - nu)\,dt$: ora facendo le dette sostituzioni nella equazione proposta in x, y, p, e q, ed andandosene la variabile x, resterà un' equazione in u, t e v, dalla quale ritroveremo v dato per t e per u, che sostituito nella (A), ci condurrà ad integrare un' equazione differenziale del primo ordine tra due variabili u, t. Fatta una tale integrazione, avremo t dato per u e quindi dall' equazione $\frac{dx}{x} = \frac{du}{t - nu}$, anche x dato per u, ed anche per y quando invece di u vi si ponga il suo valore $\frac{y}{x^n}$.

Qualche esempio schiarirà la Teorìa. Sia proposta l' equazione

$x^2 ddy = aydx^2 + bxdxdy$: poniamo q, p invece di $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, ed avremo

$x^2 q = ay + bxp$. Se ora facciamo $y = x^n u$, $p = x^{n-1} t$,

$q = x^{n-2} v$, troveremo

$x^n v = a x^n u + b x^n t$, e dividendo per x^n, $v = au + bt$. L' equazione (A), si ridurrà allora alla seguente

$\{ au + (b - n + 1) t \} du = (t - nu) dt$, che è un' equazione del primo ordine tra due variabili, e che si può integrare.

L' equazione del secondo ordine

$x^m \left(\frac{ddy}{dx^2}\right) + a y^\mu \left(\frac{dy}{dx}\right)^\nu = 0$ per mezzo delle sostituzioni quì sopra usate, diviene

$x^{m+n-2} v + a x^{n\mu} u^\mu . x^{\nu n - \nu} t^\nu = 0$, dalla quale svanirà la x, se sarà $m + n - 2 = n\mu + \nu n - \nu$, ovvero $n = \frac{m + \nu - 2}{\mu + \nu - 1}$.

Dato questo valore ad n, si avrà $v = - a u^\mu t^\nu$, ed in conseguenza per questo esempio l' equazione (A) diverrà

$(t - nu) dt + (a u^\mu t^\nu + (n - 1) t) du = 0$, dall' integrazione della quale dipenderà quella della proposta.

Quando un' equazione differenziale del secondo ordine ridotta ad esser funzione di x, y, p e q, è tale che le quantità y, p, q compongono in ciascun termine lo stesso numero di dimensioni, essa può sempre ridursi all' integrazione di un' equazione del primo. Se infatti faremo $p = uy$, $q = vy$, si troverà in ciascun termine dell' equazione la medesima potenza di y, e per mezzo della divisione togliendo questa variabile, si otterrà un' equazione tra x, v ed u, dalla quale si potrà determinare v per mezzo delle altre due x, u; ora si ha $dy = pdx$; dunque $dy = uydx$: così a cagione di $dp = qdx$, sarà $dp = vydx = udy + ydu$, ed in conseguenza

$\frac{dy}{y} = udx$, $\frac{dy}{y} = \frac{vdx - du}{u}$: eguagliamo questi due valori di $\frac{dy}{y}$, e si troverà l' equazione del primo ordine $du + u^2 dx = vdx$, la quale conterrà solo le due variabili u ed x, allorchè vi avrem sostituito invece di v il suo valore in x, u dato dalla proposta. Integrata quest' ultima equazione, avremo il valore di u

dato per x, e quindi $ly = \int udx$.

Per esempio. Sia da integrarsi l' equazione

$xyddy = ydxdy + xdy^2 + \frac{bxdy^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$: a questa dando la forma

$xyq = yp + xp^2 + \frac{bxp^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, si vede che in ciascun termine le variabili y, p, q compongono due dimensioni, così essa può trattarsi per la regola sopra spiegata.

Facciasi dunque $p = uy$, $q = vy$, e si avrà, dividendo per y^2

$vx = u + xu^2 + \frac{bxu^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, che ci darà

$du + u^2 dx = \frac{udx}{x} + u^2 dx + \frac{bu^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} dx$, ovvero

$\frac{xdu - udx}{u^2} = \frac{bxdx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, il cui integrale è

$C - \frac{x}{u} = - b \sqrt{(a^2 - x^2)}$, ovvero

$u = \frac{x}{C + b\sqrt{(a^2 - x^2)}}$. Sostituiamo questo valore di u, e si avrà

$ly = \int \frac{xdx}{C + b\sqrt{(a^2 - x^2)}}$.

Per ottenere quest' ultimo integrale, poniamo

$\sqrt{(a^2 - x^2)} = t$, e sarà $xdx = - tdt$, quindi

$ly = - \int \frac{tdt}{C + bt} = - \int \frac{dt}{b} + \int \frac{Cdt}{b(C + bt)}$,

$ly = - \frac{t}{b} + \frac{C}{b^2} l(C + bt) + lC'$, essendo C' un' altra costante arbitraria.

§. 211. Il metodo del moltiplicatore ha luogo ancora nell' integrazioni delle equazioni del secondo ordine: eccoci a parlarne.

Rappresentiamo per $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + f(x, y, p) = 0$, essendo $p = \left(\frac{dy}{dx}\right)$ una equazione differenziale qualunque del secondo ordine, e dimostreremo che per mezzo di un moltiplicatore potrem sempre renderla una differenziale esatta. Sia infatti l' integrale di quest' equazione $F(x, y, p) = a$, indicando per a la costante arbitraria, e si avrà

$$\left(\frac{dF}{dp}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \left\{\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\} = 0, \text{ ovvero}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \frac{\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right)p}{\left(\frac{dF}{dp}\right)} = 0.$$

Essendo svanita la costante a, quest' ultimo risultato deve essere identico con la proposta, ed avremo l' equazione identica

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + f(x, y, p) = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \frac{\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right)p}{\left(\frac{dF}{dp}\right)}, \text{ ovvero}$$

$$\left(\frac{dF}{dp}\right)\left\{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + f(x,y,p)\right\} = \left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right)p + \left(\frac{dF}{dp}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = dF$$

Ma il secondo membro di quest' equazione è una differenziale esatta; dunque anche il primo sarà tale; dunque la proposta moltiplicata per $\left(\frac{dF}{dp}\right)$, sarà una differenziale esatta. Questa quantità $\left(\frac{dF}{dp}\right)$ è il moltiplicatore di cui si parla.

Siccome poi la proposta moltiplicata per $\left(\frac{dF}{dp}\right)$ è eguale alla differenziale esatta dF, è chiaro che anche moltiplicata per $\Psi(F).\left(\frac{dF}{dp}\right)$, diverrà la differenziale esatta di una funzione di F; così la formula $\Psi(F).\left(\frac{dF}{dp}\right)$, nella quale $\Psi(F)$ rappresenta una funzione qualunque di F esprimerà tutti gli infiniti moltiplicatori, che rendono integrabile la proposta.

Trovato dunque con qualche artifizio un fattore N che renda la quantità $N\left\{f + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\right\}$ una differenziale esatta $= du$, la formula che rappresenta tutti i fattori, sarà $N\Psi(u)$;

Questo ragionamento si estende anche all' equazioni differenziali di qualunque ordine. Indicando per $\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right) + f = 0$, nella quale f è funzione di $x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right) = p, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = q, \ldots \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = t$, la differenziale di un ordine n^{esimo}, e rappresentando il suo integrale primo per

$F = F(x, y, p, \ldots\ldots t) = Cost.$, si avrà

$$\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right) + \frac{\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right)p + \ldots\ldots + \left(\frac{dF}{ds}\right)t}{\left(\frac{dF}{dt}\right)} = 0, \text{ e quindi l' equazione identica}$$

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)\left\{\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right) + f\right\} = \left(\frac{dF}{dt}\right)\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right) + \left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right)p + \ldots\ldots + \left(\frac{dF}{ds}\right)t = dF;$$

dunque la proposta $\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right) + f = 0$ moltiplicata per $\left(\frac{dF}{dt}\right)$ è una differenziale esatta; essa lo sarà anche moltiplicata per $\Psi(F).\left(\frac{dF}{dt}\right)$, ed in conseguenza quest' ultima espressione rappresenterà la formula di tutti i moltiplicatori, che rendono integrabile la proposta. In somma quanto abbiam detto per le equazioni del primo ordine a questo proposito, ha luogo per quelle del secondo e dei superiori.

Ma come potremo effettivamente trovare l' idoneo moltiplicatore che renda integrabile un' equazione del secondo ordine? Instituiamo con qualche generalità questa ricerca.

L' equazione $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + f = 0$ diviene $(q + f)\,dx = 0$, facendo $q = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$: ora sia N funzione di x, y, p il fattore per cui moltiplicata la proposta, si renda essa integrabile, ed allora $N(q + f)\,dx$, dovrà essere una differenziale esatta. Al §. 17. abbiamo assegnato il criterio perchè βdx sia una differenziale esatta, essendo β una funzione di x, y, p, q; secondo dunque ciò che è stato là dimostrato, avremo per determinare N quest' equazione

$$\left(\frac{d(q+f)N}{dy}\right) - \frac{1}{dx}\,d\left(\frac{d(q+f)N}{dp}\right) + \frac{1}{dx^2}\,d^2\left(\frac{d(q+f)N}{dq}\right) = 0.$$

Eseguiamo le differenziazioni, e troveremo

$$q\left\{2\left(\frac{dN}{dy}\right) + \left(\frac{d^2N}{dxdp}\right) + p\left(\frac{d^2N}{dydp}\right) - f\left(\frac{d^2N}{dp^2}\right) - 2\left(\frac{df}{dp}\right)\left(\frac{dN}{dp}\right) - N\left(\frac{d^2f}{dp^2}\right)\right\} + \left(\frac{d^2N}{dx^2}\right) + 2p\left(\frac{d^2N}{dxdy}\right) + p^2\left(\frac{d^2N}{dy^2}\right) - f\left(\frac{d^2N}{dxdp}\right) - fp\left(\frac{d^2N}{dydp}\right) - \left(\frac{df}{dp}\right)\left(\frac{dN}{dx}\right) + \left\{f - p\left(\frac{df}{dp}\right)\right\}\left(\frac{dN}{dy}\right) - \left\{\left(\frac{df}{dx}\right) + p\left(\frac{df}{dy}\right)\right\}\left(\frac{dN}{dp}\right) - \left\{\left(\frac{d^2f}{dxdp}\right) + p\left(\frac{d^2f}{dydp}\right) - \left(\frac{df}{dy}\right)\right\}N = 0:$$

siccome poi le funzioni N ed f non contengono q, dovrà dunque annullarsi da se medesima la parte moltiplicata per q, e l' equazione superiore si spezzerà in queste due

$$(1)\ldots 2\left(\frac{dN}{dy}\right) + \left(\frac{d^2N}{dxdp}\right) + p\left(\frac{d^2N}{dydp}\right) - f\left(\frac{d^2N}{dp^2}\right) - 2\left(\frac{df}{dp}\right)\left(\frac{dN}{dp}\right) - N\left(\frac{d^2f}{dp^2}\right) = 0,$$

$$(2)\ldots\left(\frac{d^2N}{dx^2}\right) + 2p\left(\frac{d^2N}{dxdy}\right) + p^2\left(\frac{d^2N}{dy^2}\right) - f\left(\frac{d^2N}{dxdp}\right) - fp\left(\frac{d^2N}{dydp}\right) - \left(\frac{df}{dp}\right)\left(\frac{dN}{dx}\right) + \left\{f - p\left(\frac{df}{dp}\right)\right\}\cdot\left(\frac{dN}{dy}\right) - \left\{\left(\frac{df}{dx}\right) + p\left(\frac{df}{dx}\right)\right\}\times\left(\frac{dN}{dp}\right) - \left\{\left(\frac{d^2f}{dxdp}\right) + p\left(\frac{d^2f}{dydp}\right) - \left(\frac{df}{dy}\right)\right\}N = 0:$$

l' equazioni (1), (2) sono del secondo ordine alle differenze parziali, e dovrebbe trovarsi per N una tal funzione di x, y, p che nello stesso tempo soddisfacesse a queste due equazioni: infelicemente però lo stato attuale dell' Analisi è ben lontano dal poter generalmente soddisfare a questa ricerca, per la quale basterebbe anche un valore particolare di N.

Per esempio. Sia l' equazione semplicissima $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + p\,\frac{2x+1}{x^2} = 0$. Avremo in questo caso

$$f = p\,\frac{2x+1}{x^2},\ \left(\frac{df}{dp}\right) = \frac{2x+1}{x^2},\ \left(\frac{df}{dy}\right) = 0,\ \left(\frac{df}{dx}\right) = -p\,\frac{2x+2}{x^3},$$

che dovranno sostituirsi nell' equazioni (1), (2). Ora osservo che se si suppone N solo funzione di x, l' equazione (1) è identicamente nulla, e ci resta per determinare N l' equazione $\left(\frac{d^2N}{dx^2}\right) - \frac{2x+1}{x^2}\left(\frac{dN}{dx}\right) + \frac{2x+2}{x^3}N = 0$, cui soddisfà $N = x^2$: dunque x^2 sarà il cercato moltiplicatore, ed in conseguenza l' equazione

$x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + 2x\left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ è integrabile da se medesima.

Quest' integrale è $x^2\left(\frac{dy}{dx}\right) + y = Cost.$, e la formula che contiene tutti i moltiplicatori è $x^2\Psi\left\{x^2\left(\frac{dy}{dx}\right) + y\right\}$.

§. 212. Trovato dunque un idoneo moltiplicatore, sia $Nd^2y + Mdx^2 = 0$ una differenziale esatta, e facendo $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \left(\frac{dp}{dx}\right)$, avremo $Ndp + Mdx = 0$; ora il primo termine Ndp dee necessariamente risultare dalla differenziazione dell' integrale per rapporto a p; dunque l' integrale della proposta sarà eguale a $\int Ndp$ più una funzione di x e di y, dalla quale dee dipendere l' altro termine Mdx. Se indichiamo quest' integrale per u, avremo

$u = \int Ndp + V$, essendo $V = \varphi(x, y)$.

Per determinare la funzione V, opereremo in una maniera analoga a quella usata (182). In questa guisa troveremo

$$du = Ndp + dx\int\left(\frac{dN}{dx}\right)dp + dy\int\left(\frac{dN}{dy}\right)dp + \left(\frac{dV}{dx}\right)dx + \left(\frac{dV}{dy}\right)dy$$

che dovendo essere eguale ad $Ndp + Mdx$, ci darà

$M = \int\left(\frac{dN}{dx}\right)dp + p\int\left(\frac{dN}{dy}\right)dp + \left(\frac{dV}{dx}\right) + \left(\frac{dV}{dy}\right)p$, la quale equazione debb' essere identica. Differenziamola per rapporto a p, ed avremo

$(\frac{dM}{dp}) = (\frac{dN}{dx}) + \int(\frac{dN}{dy}) dp + (\frac{dN}{dy}) p + (\frac{dV}{dy})$, da cui si ricaverà

$(\frac{dV}{dy}) = (\frac{dM}{dp}) - (\frac{dN}{dx}) - (\frac{dN}{dy}) p - \int(\frac{dN}{dy}) dp$; sostituiamo questo valore di $(\frac{dV}{dy})$ nell' equazione identica, e si troverà

$(\frac{dV}{dx}) = M - (\frac{dM}{dp}) p + (\frac{dN}{dx}) p + (\frac{dN}{dy}) p^2 - \int(\frac{dN}{dx}) dp$.

Ottenuti i due valori di $(\frac{dV}{dx}), (\frac{dV}{dy})$, si avrà il valore di V prendendo l' integrale di

$dV = (\frac{dV}{dx}) dx + (\frac{dV}{dy}) dy = \{ M - (\frac{dM}{dp}) p + (\frac{dN}{dx}) p + (\frac{dN}{dy}) p^2 - \int(\frac{dN}{dx}) dp \} dx + \{ (\frac{dM}{dp}) - (\frac{dN}{dx}) - (\frac{dN}{dy}) p - \int(\frac{dN}{dy}) dp \} dy$. Facciamo un esempio:

Per mezzo dell' opportuno moltiplicatore siasi ridotta una differenziale esatta quest' equazione

$\{ x^2 + 2y(\frac{dy}{dx}) \} d^2y + \{ 3x(\frac{dy}{dx}) + (\frac{dy}{dx})^3 + y \} dx^2 = 0$, e vogliasene l' integrale.

Data questa forma all' equazione

$(x^2 + 2yp) dp + (3xp + p^3 + y) dx = 0$, si avrà $N = x^2 + 2yp$, $M = 3xp + p^3 + y$: sarà pertanto

$u = \int N dp + V = x^2 p + yp^2 + V$. Per determinare V si avrà

$(\frac{dV}{dx}) = 3xp + p^3 + y - 3xp - 3p^3 + 2xp + 2p^3 - 2xp = y$,

$(\frac{dV}{dy}) = 3x - 3p^2 - 2x - 2p^2 - p^2 = x$, e perciò

$dV = ydx + xdy$, $V = xy + Cost.$

L' integrale cercato sarà dunque

$x^2 p + yp^2 + xy + Cost. = 0$.

Un' equazione differenziale del secondo ordine ha due integrali completi di primo; così se noi indichiamo per $z = Cost.$, e per $u = cost.$ questi integrali, e per N, N' i moltiplicatori pei quali si ha $N(d^2y + fdx^2) = dz$, $N'(d^2y + fdx^2) = du$, avremo le due formule $N\varphi(z)$, $N'\varphi'(u)$ la prima delle quali esprimerà la serie dei fattori che rendono la proposta una differenziale esatta di una funzione di z; e la seconda la serie di quei che rendono la proposta stessa una differenziale esatta di una funzione di u; sarà quindi

$N\varphi(z).(d^2y + fdx^2) = F(z)$

$N'\varphi'(u).(d^2y + fdx^2) = F'(u)$.

Sommando queste due equazioni, si avrà

$\{ N\varphi(z) + N'\varphi'(u) \} (d^2y + fdx^2) = F(z) + F'(u)$, d' onde si deduce, che $N\varphi(z) + N'\varphi(u)$, sarà una formula più generale dei fattori che rendono integrabile l' equazione.

Supponiamo ora, che indicando per Ψ una funzione di z, u, si abbia l' equazione $\Psi = Cost.$, e differenziandola, avremo

$(\frac{d\Psi}{dz}) dz + (\frac{d\Psi}{du}) du = 0$, e ponendo per dz e per du i loro valori

$N(d^2y + fdx^2)$, $N'(d^2y + fdx^2)$, sarà

$\{ N(\frac{d\Psi}{dz}) + N'(\frac{d\Psi}{du}) \} (d^2y + fdx^2) = 0$: dunque si avrà un' altra formula più generale della precedente, e che le comprende tutte entro di se, per esprimere i fattori, i quali rendono integrabile la proposta, e questa sarà

$N(\frac{d\Psi}{dz}) + N'(\frac{d\Psi}{du})$.

§. 213. Supponiamo che il fattore N non debba contenere p, e che la proposta del §. 211 sia

$(\frac{d^2y}{dx^2}) + \alpha(\frac{dy}{dx})^2 + \beta(\frac{dy}{dx}) + \gamma = 0$, ove α, β, γ contengono solo x, y senza p. In questo caso si ha

$f = \alpha p^2 + \beta p + \gamma$, e quindi $\left(\frac{df}{dp}\right) = 2\alpha p + \beta$, $\left(\frac{d^2 f}{dp^2}\right) = 2\alpha$;

$$\left(\frac{df}{dx}\right) = p^2\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + p\left(\frac{d\beta}{dx}\right) + \left(\frac{d\gamma}{dx}\right),$$

$$\left(\frac{df}{dy}\right) = p^2\left(\frac{d\alpha}{dy}\right) + p\left(\frac{d\beta}{dy}\right) + \left(\frac{d\gamma}{dy}\right),$$

$$\left(\frac{d^2 f}{dx\,dp}\right) = 2p\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + \left(\frac{d\beta}{dx}\right),$$

$$\left(\frac{d^2 f}{dy\,dp}\right) = 2p\left(\frac{d\alpha}{dy}\right) + \left(\frac{d\beta}{dy}\right);$$

sarà poi $\left(\frac{dN}{dp}\right) = 0$: le equazioni (1), (2) del §. 211 pertanto diverranno $\left(\frac{dN}{dy}\right) - \alpha N = 0$,

$$\left(\frac{d^2N}{dx^2}\right) - \beta\left(\frac{dN}{dx}\right) + \gamma\left(\frac{dN}{dy}\right) - \left\{\left(\frac{d\beta}{dx}\right) - \left(\frac{d\gamma}{dx}\right)\right\}N + 2p\left\{\left(\frac{d^2N}{dx\,dy}\right) - \alpha\left(\frac{dN}{dx}\right) - \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)N\right\} + p^2\left\{\left(\frac{d^2N}{dy^2}\right) - \alpha\left(\frac{dN}{dy}\right) - \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)N\right\} = 0,$$

la seconda delle quali si riduce a quest' altra più semplice

$$(3) \ldots \left(\frac{d^2N}{dx^2}\right) - \beta\left(\frac{dN}{dx}\right) + \gamma\left(\frac{dN}{dy}\right) - \left\{\left(\frac{d\beta}{dx}\right) - \left(\frac{d\gamma}{dy}\right)\right\}N = 0$$

per causa di $\left(\frac{dN}{dy}\right) - \alpha N = 0$, che ci dà

$$\left(\frac{d^2N}{dx\,dy}\right) - \alpha\left(\frac{dN}{dx}\right) - \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)N = 0;$$

$$\left(\frac{d^2N}{dy^2}\right) - \alpha\left(\frac{dN}{dy}\right) - \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)N = 0.$$

Dall' equazione $\left(\frac{dN}{dy}\right) - \alpha N = 0$ si ricava

$N = e^{\int \alpha dy} . F(x)$, e per conseguenza

$$\left(\frac{dN}{dy}\right) = e^{\int \alpha dy}\alpha . F(x),$$

$$\left(\frac{dN}{dx}\right) = e^{\int \alpha dy}\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right) + \int\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)dy . F(x)\right\},$$

$$\left(\frac{d^2N}{dx^2}\right) = e^{\int \alpha dy}\left\{\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) + 2\int\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)dy\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left\{\int\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)dy\right\}^2 \times F(x) + \int\left(\frac{d^2\alpha}{dx^2}\right)dy . F(x)\right\}$$

: sostituendo questi valori nell' equazione (3), si avrà

$$(4) \ldots \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) + \left\{2\int\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)dy - \beta\right\}\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left\{\int\left(\frac{d^2\alpha}{dx^2}\right)dy + \left[\int\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)dy\right]^2 - \beta\int\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)dy + \alpha\gamma - \left(\frac{d\beta}{dx}\right) + \left(\frac{d\gamma}{dy}\right)\right\}F(x) = 0.$$

Si procurerà che in quest' equazione le y dispariscano, per il che avremo molte equazioni, le quali dovranno ridursi ad una sola, poichè non vi è che una sola indeterminata, altrimenti non sarà vero che la proposta possa divenire integrabile, essendo moltiplicata per un fattore funzione di x e di y solamente.

Per esempio, propongasi l' equazione

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \frac{2}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{2+3y}{xy}\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{2}{x^2} = 0$ per sapere se essa può divenire integrabile, moltiplicandola per un fattore funzione soltanto di x e di y. In questo caso si ha $\alpha = \frac{2}{y}$, $\beta = \frac{2+3y}{xy}$, $\gamma = \frac{2}{x^2}$, ed $e^{\int \alpha dy} = y^2$. L' equazione (4) diverrà in conseguenza

$\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) - \frac{2+3y}{xy}\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{4}{x^2y} + \frac{2+3y}{x^2y}\right)F(x) = 0$, ovvero

$$y\left\{x^2\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) - 3x\left(\frac{dF}{dx}\right) + 3F(x)\right\} - 2x\left(\frac{dF}{dx}\right) + 6F(x) = 0;$$

e siccome y dee disparire da quest' equazione, si farà

$x\left(\frac{dF}{dx}\right) = 3F(x)$; $x^2\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) - 3x\left(\frac{dF}{dx}\right) + 3F(x) = 0$, ed avremo dalla prima $F(x) = x^3$, $\left(\frac{dF}{dx}\right) = 3x^2$, $\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) = 6x$, valori che sostituiti nella seconda vi soddisfanno; dunque si potrà rendere integrabile la proposta, moltiplicandola per un fattore N funzione soltanto di x e di y. Questo fattore poi sarà

$N = e^{\int a\,dy} F(x) = x^3y^2$: così la quantità

$$x^3y^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) dx + \left\{2x^3y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (2x^2y + 3x^2y^2)\left(\frac{dy}{dx}\right) + 2xy^2\right\} dx$$

sarà la differenziale esatta di una funzione differenziale del primo ordine.

Per ciò che abbiam detto al §. antecedente si trova l' integrale di questa differenziale esatta, e si ha per l' integrale della proposta equazione

$$x^3y^2\left(\frac{dy}{dx}\right) + x^2y^2 + Cost. = 0.$$

§. 214. Più per esercizio di calcolo che per vantaggio che si ritragga nello stato attuale dell' Analisi da queste dottrine, io mi tratterrò anche un poco.

Sia proposta l' equazione

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{ax}{y^2} = 0$, e supponiamo che il moltiplicatore, per cui essa diviene integrabile, sia $Mp^2 + M'p + M''$ indicando per M, M', M'' delle funzioni di x, y senza p da determinarsi.

Ciò posto, facciamo le opportune sostituzioni nell' equazione (1) del § 211, e si avrà

$$2\left(\frac{dM''}{dy}\right) - \frac{2M''}{y} + \left(\frac{dM'}{dx}\right) - \frac{2aMx}{y^2} + \left\{3\left(\frac{dM'}{dy}\right) - \frac{6M'}{y} + 2\left(\frac{dM}{dx}\right)\right\} p +$$
$$\left\{4\left(\frac{dM}{dy}\right) - \frac{12M}{y}\right\} p^2 = 0$$: ma M, M', M'' non contengono p, si avrà dunque

$\left(\frac{dM}{dy}\right) - \frac{3M}{y} = 0$, $3\left(\frac{dM'}{dy}\right) - \frac{6M'}{y} + 2\left(\frac{dM}{dx}\right) = 0$,

$2\left(\frac{dM''}{dy}\right) - \frac{2M''}{y} + \left(\frac{dM'}{dx}\right) - \frac{2aMx}{y^2} = 0$, dalle quali equazioni dovrem trovare i valori di M, M', M''. Integrandole nella supposizione di x costante, si ha dalla prima $M = y^3F(x)$, dalla seconda $M' = y^2f(x) - \frac{y^4}{3}\left(\frac{dF}{dx}\right)$, e dalla terza $M'' = y\varphi(x) - \frac{y^3}{4}\left(\frac{df}{dx}\right) + \frac{y^5}{24}\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) + axy^2F(x)$, indicando per $F(x), f(x)$,

$\varphi(x)$ tre funzioni arbitrarie di x.

Sarà dunque il moltiplicatore

$$N = y^3p^2F(x) + y^2pf(x) - \frac{y^4p}{3}\left(\frac{dF}{dx}\right) + y\varphi(x) - \frac{y^3}{4}\left(\frac{df}{dx}\right) +$$
$$\frac{y^5}{24}\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) + axy^2F(x).$$

Le tre funzioni arbitrarie debbono determinarsi in maniera, che sia soddisfatta l' altra equazione (2) del citato paragrafo; per questo basterà fare $F(x) = 1$, $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$: sarà dunque $N = y^3p^2 + axy^2$ l' idoneo moltiplicatore, e l' equazione

$$\left\{y^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + axy^2\right\} \cdot \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 2axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + a^2x^2 = 0,$$

sarà integrabile esattamente.

Rappresentiamo l' integrale di quest' equazione per

$\frac{1}{3}y^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + axy^2\left(\frac{dy}{dx}\right) + V$ essendo V una funzione di x, y e costanti.

Differenziando e paragonando, avremo

$dV = -ay^2dy + a^2x^2dx$, e quindi

$$V = -\frac{ay^3}{3} + \frac{a^2x^3}{3} + Cost.$$

Sarà dunque l' integrale completo della nostra equazione del secondo ordine

$$y^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3axy^2\left(\frac{dy}{dx}\right) - ay^3 + a^2x^3 + 3C = 0.$$

E quì termino di parlare del metodo del moltiplicatore, reputando inutile ogni ulteriore sminuzzamento, e rimandando per questo al Calcolo del Sig. Euler.

§. 215. Per poco che si rifletta sopra i metodi d' integrazione adoprati nelle equazioni differenziali del secondo ordine, concluderemo quanto a questo riguardo è grande la povertà dell' Analisi, di modo che rare sono quelle equazioni differenziali, le quali prese all' azzardo, o condotte dalla soluzione di alcun

Problema, possono con simili artifizi integrarsi; in mancanza pertanto d' integrali esatti, noi ci rivolgeremo alle approssimazioni, molto più che pensiamo esser questo il metodo più utile in pratica, ed in conseguenza maggiormente meritevole d' occupare i Geometri.

E primieramente faccio osservare che il metodo dei *Coefficienti Indeterminati* può con vantaggio adoprarsi nell' integrazione per serie delle equazioni del secondo ordine; quando poi queste serie si termineranno, ne daranno integrali esatti; e ciò non succedendo, se le stesse serie saranno convergenti o in altre convergenti potran trasformarsi, allora gli integrali saranno soltanto approssimati.

Sia l' equazione

$(a) \ldots\ldots \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + ax^n y = 0$, e se ne dimandi l' integrale finito completo, espresso in serie ordinaria per le potenze di x: supponiamo per questo

$$y = Ax^{\lambda} + Bx^{\lambda+n+2} + Cx^{\lambda+2n+4} + Ex^{\lambda+3n+6} + \text{ec.}$$

e si avrà

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \lambda(\lambda-1)Ax^{\lambda-2} + (\lambda+n+2)(\lambda+n+1)\times$$
$$Bx^{\lambda+n} + (\lambda+2n+4)(\lambda+2n+3)Cx^{\lambda+2n+2} + \text{ec.}:$$

facendo ora le opportune sostituzioni nella proposta, e paragonando tra loro i termini affetti dalle stesse potenze di x, avremo

$$\lambda(\lambda-1) = 0,$$
$$(\lambda+n+2)(\lambda+n+1)B + aA = 0,$$
$$(\lambda+2n+4)(\lambda+2n+3)C + aB = 0,$$
$$(\lambda+3n+6)(\lambda+3n+5)E + aC = 0,$$
ec.

Dalla prima equazione si trovano due valori per λ cioè $\lambda = 0$, $\lambda = 1$; prendendo il primo $\lambda = 0$, le altre equazioni divengono

$$(n+2)(n+1)B + aA = 0,$$
$$(2n+4)(2n+3)C + aB = 0,$$
$$(3n+6)(3n+5)E + aC = 0,$$
ec.

e prendendo il secondo, esse divengono

$$(n+3)(n+2)B + aA = 0,$$
$$(2n+5)(2n+4)C + aB = 0,$$
$$(3n+6)(3n+7)E + aC = 0,$$
ec.

Si avrà dunque nel primo caso

$\lambda = 0$, A indet., $B = -\frac{aA}{(n+2)(n+1)}$, $C = -\frac{aB}{2(n+2)(2n+3)}$,

$E = -\frac{aC}{3(n+2)(2n+5)}$ ec., e nel secondo

$\lambda = 1$, A indet., $B = -\frac{aA}{(n+2)(n+3)}$, $C = -\frac{aB}{2(n+2)(2n+5)}$,

$E = -\frac{aC}{3(n+2)(3n+7)}$ ec., ed in conseguenza due serie per esprimere il valore di y.

Se indichiamo poi per A e per A′ i due coefficienti primi indeterminati, che a ciascuna di esse appartengono, e prendiamo la somma di dette serie, avremo

$$y = A\left\{1 - \frac{ax^{n+2}}{1.(n+1)(n+2)} + \frac{a^2x^{2n+4}}{1.2.(n+1)(2n+3)(n+2)^2} - \frac{a^3x^{3n+6}}{1.2.3.(n+1)(2n+3)(3n+5)(n+2)^3} + \text{ec.}\right\}$$
$$+ A'\left\{x - \frac{ax^{n+3}}{1.(n+3)(n+2)} + \frac{a^2x^{2n+5}}{1.2.(n+3)(2n+5)(n+2)^2} - \frac{a^3x^{3n+7}}{1.2.3.(n+3)(2n+5)(3n+7)(n+2)^3} + \text{ec.}\right\}$$

espressione, la quale sarà l' integrale finito completo della proposta, poichè conterrà le due costanti arbitrarie A, A′.

Si danno alcuni casi nei quali queste serie non sono di alcun uso, e questo succede quando qualche denominatore diviene zero, per il che il termine corrispondente si fa infinito. Primieramente essendo $n = -2$, i termini dell' una e dell' altra serie divengono infiniti, e l' integrale trovato, illusorio; in tal caso però l' equazione proposta si cangia in $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) + \frac{ay}{x^2} = 0$, di cui può facilmente aversi l' integrale. Infatti pongasi $y = Ax^\lambda$, essendo A una costante indeterminata, e λ un esponente da determinarsi, e si avrà $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \lambda(\lambda - 1)Ax^{\lambda-2}$; quindi sostituendo e dividendo per $Ax^{\lambda-2}$, otterremo l' equazione $\lambda(\lambda - 1) + a = 0$, che ci darà per λ due valori, e la costante resterà al nostro arbitrio. Siano λ, λ' questi valori, e rappresentando per A, A' due costanti arbitrarie, l' integrale completo sarà $y = Ax^\lambda + A'x^{\lambda'}$.

Gli altri casi nei quali incontrasi l' inconveniente, di cui parliamo, sono compresi in queste formule $n + 2 = \frac{1}{\mu}$, $n + 2 = -\frac{1}{\mu}$, indicando per μ un qualunque numero intiero.

La prima formula rende falsa la prima serie, e la seconda l' altra serie; così si avrà y dato per una di quelle due serie; ma in questo caso l' integrale non sarà che particolare, perchè contiene una sola costante arbitraria.

Onde ottenere allora l' integrale completo, indicando per P quella serie reale, supponiamo $y = Pz$, essendo z una funzione di x da determinarsi, ed avremo, facendo le debite sostituzioni,

$P\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{dP}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) + z\left(\frac{d^2P}{dx^2}\right) + ax^n Pz = 0$: ma per ipotesi è $\left(\frac{d^2P}{dx^2}\right) + ax^n P = 0$; dunque si avrà per determinare z, l' equazione

$P\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{dP}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$, che ci dà $z = C\int\frac{dx}{PP}$, essendo C una costante arbitraria.

§. 216. L' equazione $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) + ax^n y = 0$, può trasformarsi anche in un' altra, alla quale è applicabile con successo il metodo d' integrazione per serie; pongasi infatti

$y = e^{\int pdx} z$, essendo p, z due funzioni di x da determinarsi, e si avrà

$\left(\frac{dy}{dx}\right) = e^{\int pdx}\left\{\left(\frac{dz}{dx}\right) + pz\right\}$,

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = e^{\int pdx}\left\{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2p\left(\frac{dz}{dx}\right) + z\left(\frac{dp}{dx}\right) + p^2 z\right\}$;

quindi l' equazione diverrà

$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + 2p\left(\frac{dz}{dx}\right) + z\left(\frac{dp}{dx}\right) + p^2 z + ax^n z = 0$.

Avendosi una sola equazione e due indeterminate, una di esse dipenderà dal nostro arbitrio; facciamo per questo, onde determinar p, $p^2 + ax^n = 0$, e sarà $p = x^{\frac{n}{2}}\sqrt{-a}$, ovvero $p = x^m c$, avendo supposto per semplicità di calcolo $n = 2m$, $a = -c^2$.

L' integrale dunque dell' equazione

$\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) - c^2x^{2m}y = 0$, sarà

$y = e^{\int pdx} z = e^{\frac{c}{m+1}x^{m+1}} z$, essendo dato z da quest' equazione $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2p\left(\frac{dz}{dx}\right) + z\left(\frac{dp}{dx}\right) = 0$, ovvero, mettendo per p e $\left(\frac{dp}{dx}\right)$ i respettivi valori, da

$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2cx^m\left(\frac{dz}{dx}\right) + mcx^{m-1}z = 0$.

Fingiamo ora

$z = Ax^\lambda + Bx^{\lambda+m+1} + Cx^{\lambda+2m+2} + \text{ec.}$,

e sostituendo, avremo

$$\begin{array}{l} \lambda(\lambda-1)Ax^{\lambda-2} + (\lambda+m+1)(\lambda+m)Bx^{\lambda+m-1} + \text{ec.} = 0 \\ \qquad + \qquad\qquad 2\lambda Ac \\ \qquad + \qquad\qquad mAc \end{array}$$

d' onde concluderemo primieramente $\lambda = 0$, ovvero $\lambda = 1$.

Si avranno pertanto due serie per esprimere il valore di z in questa guisa.

$$z = A + Bx^{m+1} + Cx^{2m+2} + Ex^{3m+3} + \text{ec.}$$

$$A'x + B'x^{m+2} + C'x^{2m+3} + E'x^{3m+4} + \text{ec.},$$

ed i valori dei coefficienti saranno

$$\begin{array}{l|l} B = -\dfrac{mAc}{m(m+1)}, & B' = -\dfrac{(m+2)A'c}{(m+2)(m+1)} \\ C = -\dfrac{(3m+2)Bc}{2(2m+1)(m+1)}, & C' = -\dfrac{(3m+4)B'c}{2(2m+3)(m+1)} \\ E = -\dfrac{(5m+4)Cc}{3(3m+2)(m+1)}, & E' = -\dfrac{(7m+8)C'c}{4(4m+5)(m+1)}, \\ \text{ec.} \qquad \text{ec.} & \text{ec.} \qquad \text{ec.} \end{array}$$

restando indeterminati i due A, A', i quali per questo rappresenteranno le due costanti arbitrarie.

La prima di queste serie si termina quando (rappresentando per i un numero intiero qualunque)

$(2i+1)m + 2i = 0$, ovvero $m = -\frac{2i}{2i+1}$; e la seconda quando $(2i-1)m + 2i = 0$, ovvero $m = -\frac{2i}{2i-1}$: dunque in uno qualunque dei casi $m = -\frac{2i}{2i \pm 1}$, ovvero $2m = -\frac{4i}{2i \pm 1}$, si avrà almeno un intagrale particolare della proposta, espresso per un numero finito di termini.

E quì osservo che trovato un integrale particolare, facilmente potrà aversene il completo in questa guisa: incontrandosi nell' integrale particolare la lettera c, mentre nell' equazione differenziale è cc, si potrà in quell' integrale tanto scrivere $+c$, che $-c$, di modo che se l' integrale particolare è $y = P + cQ$, possiamo anche prendere per esso $y = P - cQ$; ora l' equazione è lineare; prenderemo dunque la somma di due integrali particolari per esprimere l' integrale completo, e faremo $y = \alpha(P + Qc) + \beta(P - Qc)$, α, β indicando due costanti arbitrarie.

L' equazione del secondo ordine

$\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) - c^2x^ny = 0$, si riduce al primo per mezzo di questa semplice sostituzione $y = e^{\int u dx}$, e si trova $du + u^2dx = c^2x^ndx$, che (183) è la celebre equazione del Riccati.

Di queste due equazioni dunque le integrazioni saranno dipendenti l' una dall' altra: ciò è dato dal calcolo; imperocchè anche l' equazione Riccaziana è sempre integrabile, quando $n = -\frac{4i}{2i \pm 1}$, prendendo per i un numero intiero qualunque.

Per farne un esempio, sia proposta l' equazione

$ddy - c^2x^{-\frac{4}{3}}ydx^2 = 0$: si avrà in questo caso

$n = -\frac{4}{3}$, $m = -\frac{2}{3}$, $3m + 2 = 0$, e quindi

$y = e^{3c\sqrt[3]{x}}z$, $z = A + B\sqrt[3]{x}$, $B = -3Ac$, ed in conseguenza

$$y = A\left\{e^{3c\sqrt[3]{x}} - 3ce^{3c\sqrt[3]{x}}.\sqrt[3]{x}\right\} + A'\left\{e^{-3c\sqrt[3]{x}} + 3ce^{-3c\sqrt[3]{x}}.\sqrt[3]{x}\right\},$$

sarà l'integrale completo, indicando per A, A' due cosstanti arbitrarie.

Se c fosse una quantità immaginaria, si renderebbe allora l' aspetto reale al valore di y, sostituendo invece degli esponenziali, le trascendenti circolari, come abbiam fatto altrove (107), cioè ponendo

$\cos bt + \sqrt{-1} \cdot \operatorname{sen} bt$ invece di $e^{bt\sqrt{-1}}$, e

$\cos bt - \sqrt{-1} \cdot \operatorname{sen} bt$ invece di $e^{-bt\sqrt{-1}}$, essendo t una qualunque quantità variabile, e b un qualunque coefficiente costante.

§. 217. Prendiamo anche l' equazione

$$x^2(a + bx^n)d^2y + x(c + ex^n)dxdy + (f + gx^n)ydx^2 = 0,$$

e fingiamo

$$y = Ax^{\lambda} + Bx^{\lambda+n} + Cx^{\lambda+2n} + Ex^{\lambda+3n} + \text{ec.},$$

e fatte le opportune sostituzioni, avremo

$$\begin{array}{llllll}
\lambda(\lambda-1)Aax^{\lambda} & + & (\lambda+n)(\lambda+n-1)Bax^{\lambda+n} & + & (\lambda+2n)(\lambda+2n-1)Cax^{\lambda+2n} & + \text{ec.} = 0: \\
+ \quad \lambda Ac & + & \lambda(\lambda-1)Ab & + & (\lambda+n)(\lambda+n-1)Bb & + \text{ec.} \\
+ \quad Af & + & (\lambda+n)Bc & + & (\lambda+2n)Cc & + \text{ec.} \\
 & + & \lambda Ae & + & (\lambda+n)Be & + \text{ec.} \\
 & + & Bf & + & Cf & + \text{ec.} \\
 & + & Ag & + & Bg & + \text{ec.}
\end{array}$$

Ora mandando a zero i coefficienti delle respettive potenze di x, si avrà primieramente $\lambda(\lambda-1)a + \lambda c + f = 0$ per determinare λ, e per i coefficienti (ad eccezione di A che resta arbitrario) quest' altre equazioni

$$\{(\lambda+n)(\lambda+n-1)a + (\lambda+n)c + f\}B = -\{\lambda(\lambda-1)b + \lambda e + g\}A,$$

$$\{(\lambda+2n)(\lambda+2n-1)a + (\lambda+2n)c + f\}C = -\{(\lambda+n)(\lambda+n-1)b + (\lambda+n)e + g\}B,$$

$$\{(\lambda+3n)(\lambda+3n-1)a + (\lambda+3n)c + f\}E = -\{(\lambda+2n)(\lambda+2n-1)b + (\lambda+2n)e + g\}C$$

$$\text{ec.} \qquad\qquad \text{ec.}$$

E siccome si troveranno due valori per λ, si avranno così due serie, la somma delle quali ci rappresenterà l' integrale completo della proposta.

Indichiamo ora per $\varphi(\lambda)$ la quantità

$$\frac{\lambda(\lambda-1)b + \lambda e + g}{(\lambda+n)(\lambda+n-1)a + (\lambda+2n)c + f}, \text{ e sarà}$$

$$\begin{aligned}
B &= -\varphi(\lambda) \cdot A \\
C &= +\varphi(\lambda) \cdot \varphi(\lambda+n) \cdot A \\
E &= -\varphi(\lambda) \cdot \varphi(\lambda+n) \cdot \varphi(\lambda+2n) \cdot A \\
&\quad \text{ec.} \qquad\qquad \text{ec.}
\end{aligned}$$

onde rappresentando per λ, λ' i due valori di λ, otterremo

$$\begin{aligned}
y = A\,\{&x^{\lambda} - \varphi(\lambda) \cdot x^{\lambda+n} + \varphi(\lambda) \cdot \varphi(\lambda+n) \cdot x^{\lambda+2n} - \\
&\varphi(\lambda) \cdot \varphi(\lambda+n) \cdot \varphi(\lambda+2n) \cdot x^{\lambda+3n} + \text{ec.}\} \\
+ A'\,\{&x^{\lambda'} - \varphi(\lambda') \cdot x^{\lambda'+n} + \varphi(\lambda') \cdot \varphi(\lambda'+n) \cdot x^{\lambda'+2n} - \\
&\varphi(\lambda') \cdot \varphi(\lambda'+n) \cdot \varphi(\lambda'+2n) \cdot x^{\lambda'+3n} + \text{ec.}\}:
\end{aligned}$$

di queste serie alcuna si termina quando, indicato per i un numero intero, si trovi

$(\lambda + in)(\lambda + in - 1)b + (\lambda + in)e + g = 0$, ed in tali casi si ottiene un integrale particolare della proposta espresso per un numero finito di termini.

§. 218. L' equazione

$(a) \ldots\ldots ddy(1 - mx^2) - hxdxdy - lydx^2 = 0$ è un caso particolare di quella del §. antecedente, poichè per ottenerla basta fare $n = -2$, $b = 1$, $a = -m$, $e = 0$, $c = -h$, $f = -l$, $g = 0$; si avrà dunque un integrale particolare esatto tutte le volte che sarà $(\lambda - 2i)(\lambda - 2i - 1) = 0$, ovvero $\lambda = 2i$, $\lambda = 2i + 1$, indicando per i un numero intero, ed essendo λ dato da quest' equazione $\lambda(\lambda - 1)m + \lambda h + l = 0$: oppure tutte le volte che sarà $l = -2i(2i-1)m -$

$2ih$, o $l = -2i(2i+1)m - (2i+1)h$, potremo avere un integrale della proposta espresso in termini finiti.

Ora per quanto in questa maniera si abbiamo infiniti casi nei quali l' equazione (a) è integrabile esattamente, pure moltissimi altri sfuggono a questo metodo, per trovare i quali bisogna tenere altra via. La ricerca non è invero di moltissima utilità, ma l' eleganza con la quale da Eulero è instituita, mi è sembrata degna di essere quì riferita, molto più che essa non si trova negli Atti di alcuna Accademia, essendo soltanto comparsa al Pubblico in un Tomo di aggiunte al Calcolo Integrale di quel Geometra, stampato a Pietroburgo nel 1794, e che è essai raro.

Proposta dunque l' equazione

$ddy(1 - mx^2) - hxdxdy - lydx^2 = 0$, si presentano subito due semplicissimi casi, nei quali l' integrazione succede: il primo è quando $l = 0$, ed il secondo quando $h = m$.

PRIMO CASO $l = 0$.

In questo caso la nostra equazione diverrà

$ddy(1 - mx^2) = hxdxdy$, la quale, fatto $dy = pdx$, si trasforma in questa, $dp(1 - mx^2) = hpxdx$, ovvero

$\frac{dp}{p} = \frac{hxdx}{1 - mxx}$, il cui integrale è

$\log p = -\frac{h}{2m}\log(1 - mx^2) + \log C$: avremo in questa guisa

$p = C(1 - mx^2)^{-\frac{h}{2m}} = \left(\frac{dy}{dx}\right)$, d' onde ricaveremo

$y = C\int dx(1 - mx^2)^{-\frac{h}{2m}}$; e quì gioverà avvertire che questo valore diverrà algebraico tutte le volte che $-\frac{h}{2m}$ sarà un numero intero positivo, ovvero (indicando per i questo numero)

$h = -2mi$: egualmente si avrà un integrale algebraico, quando si abbia $-\frac{h}{2m} = -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}$ ec., e quindi $\frac{h}{m} = 2i + 1$.

SECONDO CASO $h = m$.

In questo caso la nostra equazione moltiplicata per $2dy$, diviene $2dy \cdot ddy(1 - mx^2) - 2mxdxdy^2 - 2lydydx^2 = 0$, che è integrabile da se medesima, e si ha

$dy^2(1 - mx^2) - ly^2dx^2 = Cdx^2$. Di quì si ricava

$dy\sqrt{(1 - mx^2)} = dx\sqrt{(C + ly^2)}$, e fatta la separazione delle variabili, $\frac{dx}{\sqrt{(1 - mx^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(C + ly^2)}}$.

Anche in questa forma sonovi dei casi in cui l' integrale è algebraico, ed altri in cui ciò non accade. Per scoprirli facciamo $m = -\alpha^2$, $l = \gamma^2$, $C = \beta^2$, onde avere $\frac{dx}{\sqrt{(1 + \alpha^2x^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(\beta^2 + \gamma^2y^2)}}$, di cui l' integrale è

$\frac{1}{\alpha}\log\{\alpha x + \sqrt{(1 + \alpha^2x^2)}\} = \frac{1}{\gamma}\log\{\gamma y + \sqrt{(\beta^2 + \gamma^2y^2)}\}$
$-\frac{1}{\gamma}\log\Delta$, e ripassando dai logaritmi ai numeri

$\gamma y + \sqrt{(\beta^2 + \gamma^2y^2)} = \Delta\{\alpha x + \sqrt{(1 + \alpha^2x^2)}\}^{\frac{\gamma}{\alpha}}$.

Facciamo questo secondo membro $= V$, e si avrà $V - \gamma y = \sqrt{(\beta^2 + \gamma^2y^2)}$, e prendendo i quadrati

$y = \frac{VV - \beta\beta}{2\gamma V}$: ora essendo $V = \Delta\{\alpha x + \sqrt{(1 + \alpha^2x^2)}\}^{\frac{\gamma}{\alpha}}$, si avrà

$2\gamma y = \Delta\{\alpha x + \sqrt{(1 + \alpha^2x^2)}\}^{\frac{\gamma}{\alpha}} - \frac{\beta^2}{\Delta}\{\alpha x + \sqrt{(1 +$
$\alpha^2x^2)}\}^{-\frac{\gamma}{\alpha}}$, ove $\beta^2 = C$, $\frac{\gamma}{\alpha} = \sqrt{\frac{-l}{m}}$, ed in conseguenza

tutte le volte che per $\sqrt{\frac{-l}{m}}$ avremo un numero razionale, l' integrale sarà algebraico.

Spiegato come si integri l' equazione proposta nei due principali casi quì sopra considerati, insegna Eulero due strade per le quali si può giungere a trasformare la proposta in un' altra dello stesso genere, di modo che sempre abbiasi ad integrare un' equazione di questa forma

$ddY.(1-mx^2) - BxdxdY - CYdx^2 = 0$, la quale ammettendo risoluzione nei casi $B = m$, $C = 0$, nei medesimi casi la proposta equazione sarà risolubile. Eccoci ad esporre questi due metodi di trasformazione.

Trasformazione del primo Ordine.

Ripresa l' equazione

$ddy(1-mx^2) - hxdxdy - lydx^2 = 0$, supponiamo $y = \left(\frac{dv}{dx}\right)$, e sarà $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^3v}{dx^3}\right)$;

la nostra equazione dunque prenderà questa forma

$\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right)(1-mx^2) - hxdx\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) - ly\left(\frac{dv}{dx}\right) = 0$, ovvero

$d^3v.(1-mx^2) - hxdxd^2v - ldx^2dv = 0$.

Ciascun termine di quest' ultima equazione ammette integrazione; si ha infatti

$\int dx^2dv = vdx^2$, $\int xdxddv = xdxdv - vdx^2$

$\int d^3v(1-mx^2) = ddv(1-mx^2) + 2mxdxdv - 2mvdx^2$.

Sommando insieme tutti questi integrali, la nostra equazione sarà

$ddv(1-mx^2) - (h-2m)xdxdv - (l-h+2m)vdx^2 = 0$,

la quale essendo esattamente simile alla proposta, diverrà integrabile ne' due casi $l - h + 2m = 0$, $h = 3m$, ovvero tutte

le volte che sarà $l = h - 2m$, o $h = 3m$.

Fatta in questi casi l' integrazione, si avrà v dato per x, e quindi la posizione $y = \left(\frac{dv}{dx}\right)$ ci somministrerà il valore di y espresso in x, il quale soddisfarà all' equazione proposta.

Continuando lo stesso andamento, poniamo $v = \left(\frac{dv'}{dx}\right)$, e giacchè per l' operazione precedente le lettere h, l sonosi cangiate in $h - 2m$, $l - h + 2m$, così l' equazione trasformata si cangerà in

$ddv'(1-mx^2) - (h-4m)xdxdv' - (l-2h+4m)\times$
$v'dx^2 = 0$, che sarà integrabile se $h = 5m$, ovvero $l = 2h - 6m$.

Trovati i valori per v', si avrà $y = \left(\frac{ddv'}{dx^2}\right)$, cioè i differenziali secondi dello stesso v' ci daranno y. Così se v' avrà un valore algebraico, tale lo avrà ancora y.

Ripetendo la medesima sostituzione col porre $v' = \left(\frac{dv''}{dx}\right)$, si avrà

$ddv''(1-mx^2) - (h-6m)xdxdv'' - (l-3h+12m)\times$
$v''dx^2 = 0$, equazione integrabile quando $h = 7m$, $l = 3h - 12m$, e quindi $y = \left(\frac{d^3v''}{dx^3}\right)$.

Se dunque continueremo queste operazioni, giungeremo sempre ad equazioni trasformate della medesima forma; e tenendo soltanto conto dei valori che in ciascuna trasformazione ricevono le lettere h, l, si avrà la Tabella seguente

OPERAZIONI	h	l	y
I.	$h - 2m$	$l - h + 2m$	$(\frac{dv}{dx})$
II.	$h - 4m$	$l - 2h + 6m$	$(\frac{ddv'}{dx^2})$
III.	$h - 6m$	$l - 3h + 12m$	$(\frac{d^3v''}{dx^3})$
IV.	$h - 8m$	$l - 4h + 20m$	$(\frac{d^4v'''}{dx^4})$
. . . .	. . . . . .	. . . .	. . . . . .
i	$h - 2im$	$l - ih + i(i+1)m$	$(\frac{d^i v^{(i-1)}}{dx^i})$

Dalla quale si ricava che la proposta equazione ammetterà la risoluzione tutte le volte che sarà $h = (2i + 1)m$, $l = ih - i(i+1)m$ ove per i converrà prendere tutti i numeri interi positivi.

TRASFORMAZIONE DELL' ALTRO ORDINE.

Il metodo seguito procedeva per mezzo dei differenziali, l' attuale procede per mezzo degli integrali. Sia $y = \int zdx$, e la proposta equazione diverrà

$dz(1 - mx^2) - hxzdx - ldx\int zdx = 0$, che differenziata, si riduce alla forma proposta

$ddz(1 - mx^2) - (h + 2m)xdxdz - (l + h)zdx^2 = 0$,

la quale secondo i due casi principali è integrabile, quando $l + h = 0$, $h + 2m = m$, ovvero $l = -h$, $h = -m$. Fatte poi le integrazioni si avrà $y = \int zdx$.

Facendo nella stessa guisa $z = \int z'dx$, perverremo a quest' altra equazione

$ddz'(1 - mx^2) - (h + 4m)xdxdz' - (l + 2h + 2m)z'dx^2 = 0$, che ammette integrazione quando $h + 4m = m$, $l + 2h + 2m = 0$, ovvero $h = -3m$, $l = -2h - 2m$. Trovati poi gli integrali, si avrà

$y = \int dx \int z'dx$, che si riduce integrando per parti, a

$y = x\int z'dx - \int z'xdx$.

Nella stessa guisa ponendo $z' = \int z''dx$, perverremo all' equazione

$ddz''(1 - mx^2) - (h + 6m)xdxdz'' - (l + 3h + 6m)z''dx^2 = 0$, della quale ne avremo l' integrale quando $l + 3h + 6m = 0$, e quando $h + 6m = m$, cioè $l = -3h - 6m$, $h = -5m$, e da questi integrali si ricaverà

$y = \int dx \int dx \int z''dx$, che può ridursi a questo

$y = \frac{1}{2}x^2\int z''dx - x\int xz''dx + \frac{1}{2}\int x^2z''dx$.

Continuando queste operazioni giungeremo sempre ad equazioni della stessa forma della proposta, le quali avranno per h e per l i valori che presenta la Tavola seguente

Operazioni	h	l	y
I.	$h + 2m$	$l + h$	$\int zdx$
II.	$h + 4m$	$l + 2h + 2m$	$\int dx \int z' dx$
III.	$h + 6m$	$l + 3h + 6m$	$\int dx \int dx \int z'' dx$
IV.	$h + 8m$	$l + 4h + 12m$	$\int dx \int dx \int dx \int z''' dx$
. . . .	. . . . . .	. . . .	. . . .
i	$h + 2im$	$l + ih + i(i-1)m$	$\int dx \int dx \ldots \int z^{(i-1)} dx$

Da questa Tabella si ricava che la proposta equazione ammette integrazione quando $l = -ih - i(i-1)m$; $h = -(2i-1)m$, indicando per i un numero intero e positivo. Queste formule ci sono date da quelle trovate sopra col fare in esse $-i$ invece di i.

Concluderemo dunque che l' equazione differenziale del secondo ordine

$ddy(1 - mx^2) - hxdxdy - lydx^2 = 0$, è integrabile tutte le volte che

$(1^a.) \ldots\ldots l = ih - i(i+1)m$, ovvero

$(2^a.) \ldots\ldots h = (2i+1)m$, indicando per i tutti i numeri interi positivi o negativi che siano.

In queste due formule sono contenuti tutti i casi d' integrabilità: quei che ci sono dati al (§. 218) si ritrovano compresi nella formula 1^a.

§. 219. Andiamo adesso a parlare delle approssimazioni nell' integrazione delle equazioni, il Moto esprimenti dei Corpi Celesti; e per spiegarci con maggior facilità incominceremo dall' applicare il metodo che siamo per esporre, ad un' equazione di primo ordine.

Sia proposta l' equazione

$\left(\frac{dy}{dx}\right) = (1 + \alpha x)y$ essendo α una quantità molto piccola. Supponiamo

$y = Y + \alpha Y' + \alpha^2 Y'' + \alpha^3 Y''' + \text{ec.}$, ed avremo l' equazione

$$\left(\frac{dY}{dx}\right) + \alpha\left(\frac{dY'}{dx}\right) + \alpha^2\left(\frac{dY''}{dx}\right) + \text{ec.} = Y + \alpha Y' + \alpha^2 Y'' + \text{ec.}$$
$$+ \alpha x Y + \alpha^2 x Y' + \text{ec.}$$

dalla quale eguagliando a zero i coefficienti delle respettive potenze di α, avremo l' equazioni

$(1) \ldots\ldots \left(\frac{dY}{dx}\right) = Y$

$(2) \ldots\ldots \left(\frac{dY'}{dx}\right) = Y' + xY$

$(3) \ldots\ldots \left(\frac{dY''}{dx}\right) = Y'' + xY'$

ec. ec.

che ci serviranno alla determinazione di Y, Y', Y'' ec. Basterà poi integrare completamente la prima, ed avere in seguito delle funzioni qualunque, che soddisfacciano alle altre, giacchè dovendo il valore di y contenere una sola costante arbitraria, sarà sufficiente quella che si ritroverà in Y.

L' equazione (1) integrata, ci dà $Y = Ae^x$, A essendo una costante arbitraria; e l' equazione (2) diviene allora

$\left(\frac{dY'}{dx}\right) = Y + Axe^x$.

Al §. 97 abbiamo assegnato l' integrale dell' equazione

$A'y - \left(\frac{dy}{dx}\right) = X$, ed è

$y = -e^{\int A'dx} \int e^{-\int A'dx} X dx$: se dunque paragoniamo la nostra equazione con questa, avremo

$Y' = e^x \int Axdx = \frac{A}{2} e^x x^2$, e l' equazione (3) diventerà

$\left(\frac{dY''}{dx}\right) = Y'' + \frac{A}{2} e^x x^3$, il cui integrale sarà

$Y'' = \frac{A}{2.4} e^x x^4$, e così di seguito.

Sarà pertanto

$y = Ae^x \left\{ 1 + \frac{1}{2} x^2 a + \frac{1}{2.4} x^4 a^2 + \frac{1}{2.4.6} x^6 a^3 + \text{ec.} \right\}$; e se facciamo $x^2 = -t^2$, si avrà.

$y = A(\cos t - \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,t) \left\{ 1 - \frac{1}{2} at^2 + \frac{1}{2.4} t^4 a^2 - \frac{1}{2.4.6} a^3 t^6 + \text{ec.} \right\}$, che è una funzione dell' arco t, e del seno e coseno dello stesso arco.

Veniamo ora all' equazione del secondo ordine

$\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) + y + amy\cos 2x = 0$, essendo a una quantità piccolissima, e cerchiamone l' integrale sino alla potenza a^2. Supponendo

$y = Y + aY' + a^2 Y''$ e sostituendo, avremo le tre equazioni

(1) . . . . . $\left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right) + Y = 0$

(2) . . . . . $\left(\frac{d^2Y'}{dx^2}\right) + Y' + mY\cos 2x = 0$

(3) . . . . . $\left(\frac{d^2Y''}{dx^2}\right) + Y'' + mY'\cos 2x = 0$,

le quali basteranno per la determinazione di Y, Y', Y''.

L' integrale dell' equazione (1) è

$y = p\,\mathrm{sen}\,x + q\cos x$, nel quale p e q rappresentano due costanti arbitrarie; sostituendo dunque questo valore nell' equazione (2), si cangerà in quest' altra

$\left(\frac{ddY'}{dx^2}\right) + Y' + mp\,\mathrm{sen}\,x\cos 2x + mq\cos x\cos 2x = 0$.

Ora svolgendo i prodotti di seni e coseni in seni e coseni semplici, per mezzo delle formule

$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\cos(a+b)x + \frac{1}{2}\cos(a-b)x$,

$\mathrm{sen}\,ax \cos bx = \frac{1}{2}\mathrm{sen}(a+b)x + \frac{1}{2}\mathrm{sen}(a-b)x$,

$\cos ax\,\mathrm{sen}\,bx = \frac{1}{2}\mathrm{sen}(a+b)x - \frac{1}{2}\mathrm{sen}(a-b)x$,

$\mathrm{sen}\,ax\,\mathrm{sen}\,bx = -\frac{1}{2}\cos(a+b)x + \frac{1}{2}\cos(a-b)x$,

avremo

$\left(\frac{ddY'}{dx^2}\right) + Y' - \frac{mp}{2}\mathrm{sen}\,x + \frac{mq}{2}\cos x + \frac{mp}{2}\mathrm{sen}\,3x + \frac{mq}{2}\cos 3x = 0$.

Ora cercando l' integrale dell' equazione

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + a^2 y = X$, abbiam trovato (noi tralasciamo le costanti arbitrarie, poichè sono sufficienti quelle contenute in Y),

$y = \frac{\mathrm{sen}\,ax}{a}\int \cos ax\,.\,Xdx - \frac{\cos.ax}{a}\int \mathrm{sen}\,ax\,.\,Xdx$;

dunque, facendo $a = 1$,

$X = \frac{mp}{2}\mathrm{sen}\,x - \frac{mq}{2}\cos x - \frac{mp}{2}\mathrm{sen}\,3x - \frac{mq}{2}\cos 3x$, si avrà

$$Y' = \frac{mp}{2}\mathrm{sen}\,x \int \{\cos x\,\mathrm{sen}\,x - \cos x\,\mathrm{sen}\,3x\}\,dx$$
$$- \frac{mq}{2}\mathrm{sen}\,x \int \{\cos x^2 + \cos x \cos 3x\}\,dx$$
$$+ \frac{mp}{2}\cos x \int \{\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sen}\,3x - \mathrm{sen}\,x^2\}\,dx$$
$$+ \frac{mq}{2}\cos x \int \{\mathrm{sen}\,x\cos x + \mathrm{sen}\,x\cos 3x\}\,dx.$$

L' integrazioni che richiede Y', ponno ottenersi o per mezzo delle regole date al Capitolo IV, onde avere gli integrali dei prodotti dei seni e coseni, oppure con lo sviluppare questi stessi prodotti in seni e coseni semplici, e farne in seguito le integrazioni: nell' uno e nell' altro caso troveremo per Y' un' espressione, la quale conterrà dei termini, ove si troveranno i prodotti dei seni e coseni, ma che potremo, quando ci piaccia, ridurre a sol contenere i seni e coseni degli archi multipli, non mai moltiplicati tra loro, e ciò per mezzo delle formule che ho quì sopra riferite.

Per quanto non vi sia alcuna difficoltà per avere l' integrale o valore di Y' sotto quest' ultima forma, pure il calcolo, benchè facile, è però sì lungo e tedioso, che preferisco un artifizio di Analisi impiegato dal Sig. La-Place, onde giungere allo stesso risultato.

§. 220. Riprendiamo per questo l' equazione

$$\left(\frac{d^2Y'}{dx^2}\right) + Y' - \frac{mp}{2} sen\, x + \frac{mq}{2} cos\, x + \frac{mp}{2} sen\, 3x + \frac{mq}{2} cos\, 3x = 0,$$

e rappresentiamo per $Ax\, sen\, x + Bx\, cos\, x$ la parte di Y' che corrisponde ai termini $-\frac{mp}{2} sen\, x + \frac{mq}{2} cos\, x$; A, B essendo dei coefficienti costanti, che bisogna determinare. Noi avremo in questa supposizione l' equazione

$$2A\, cos\, x - Ax\, sen\, x - 2B\, sen\, x - Bx\, cos\, x + Ax\, sen\, x +$$
$$Bx\, cos\, x - \frac{mp}{2} sen\, x + \frac{mq}{2} cos\, x = 0,$$ che ci dà $A = -\frac{mq}{2.2}$, $B = -\frac{mp}{2.2}$. Quanto ai termini $\frac{mp}{2} sen\, 3x$, $\frac{mq}{2} cos\, 3x$, osservo che generalmente parlando se si incontra nell' equazione differenziale in Y' il termine

$K\, sen\,(\mu x + e)$, ovvero $K\, cos\,(\mu x + e)$, e se si rappresenta per $M\, sen\,(\mu x + e)$, ovvero $M\, cos\,(\mu x + e)$ la parte di Y' che vi corrisponde, si avrà $M = \frac{K}{\mu^2 - 1}$; dalchè se ne ricava che i termini $\frac{mp}{2} sen\, 3x$, $\frac{mq}{2} cos\, 3x$ producono nell' espressione di Y' la quantità

$\frac{mp}{16} sen\, 3x + \frac{mq}{16} cos\, 3x$: il valore pertanto di Y' sarà

$$Y' = -\frac{mq}{4} x\, sen\, x - \frac{mp}{4} x\, cos\, x$$
$$+ \frac{mp}{16} sen\, 3x + \frac{mq}{16} cos\, 3x.$$

L' equazione (3), sostituendovi questo valore, diventa

$$\left(\frac{d^2Y''}{dx^2}\right) + Y'' + \left(\frac{m^2q}{8} x + \frac{m^2p}{32}\right) sen\, x - \left(\frac{m^2p}{8} x - \frac{m^2q}{32}\right) cos\, x -$$
$$\frac{m^2q}{8} x\,.\, sen\, 3x - \frac{m^2p}{8} x\, cos\, 3x + \frac{m^2p}{32} sen\, 5x + \frac{m^2q}{32} cos\, 5x.$$

Rappresentiamo per

$(Ax^2 + Bx)\, sen\, x + (Cx^2 + Dx)\, cos\, x$

la parte dell' espressione di Y'' che corrisponde ai due termini

$\left(\frac{m^2q}{8} x + \frac{m^2p}{32}\right) sen\, x$, $-\left(\frac{m^2p}{8} x - \frac{m^2q}{32}\right) cos\, x$,

e fatta l' opportuna sostituzione nell' equazione differenziale, il paragone dei termini simili ci darà

$$A = \frac{m^2p}{32};\ B = -\frac{3m^2q}{64};\ C = \frac{m^2q}{32};\ D = \frac{3m^2p}{64}:$$

se si rappresenta in seguito per

$(Mx + N)\, sen\, 3x + (Px + Q)\, cos\, 3x$

la parte di Y'' che corrisponde ai termini

$-\frac{m^2q}{8} x\, sen\, 3x$, e $-\frac{m^2p}{8} x\, cos\, 3x$, si troverà

$$M = -\frac{m^2q}{64},\ N = \frac{3m^2p}{256},\ P = -\frac{m^2p}{64},\ Q = -\frac{3m^2q}{256}.$$

Finalmente la parte di Y'' corrispondente ai termini $\frac{m^2p}{32} sen\, 5x$ e $\frac{m^2q}{32} cos\, 5x$, sarà $\frac{m^2p}{768} sen\, 5x + \frac{m^2q}{768} cos\, 5x$; di modo che il valore intero di Y'', sarà

$$Y'' = \frac{m^2}{32}\left\{px^2 - \frac{3}{2}qx\right\} sen\, x + \frac{m^2}{32}\left\{qx^2 + \frac{3}{2}px\right\} cos\, x$$
$$- \frac{m^2}{64}\left\{qx - \frac{3}{4}p\right\} sen\, 3x - \frac{m^2}{64}\left\{px + \frac{3}{4}q\right\} cos\, 3x$$
$$+ \frac{m^2p}{768} sen\, 5x \qquad + \frac{m^2q}{768} cos\, 5x.$$

Riunendo dunque i valori di Y, Y', Y'', avremo

$$y = p \operatorname{sen} x + q \cos x + \left\{ \frac{mp}{16} \operatorname{sen} 3x + \frac{mq}{16} \cos 3x - \frac{mq}{4} x \operatorname{sen} x - \frac{mp}{4} x \cos x \right\} \alpha + \left\{ \frac{m^2}{32} (px^2 - \tfrac{3}{2} qx) \operatorname{sen} x + \frac{m^2}{32} (qx^2 + \tfrac{3}{2} px) \cos x - \frac{m^2}{64} (qx - \tfrac{3}{4} p) \operatorname{sen} 3x - \frac{m^2}{64} (px + \tfrac{3}{4} q) \cos 3x + \frac{m^2 p}{768} \operatorname{sen} 5x + \frac{m^2 q}{768} \cos 5x \right\} \alpha^2,$$

che sarà il valore approssimato di y spingendo l' approssimazione sino alle potenze seconde inclusive di α.

Ordinando questa stessa espressione secondo i seni e coseni, si ha

$$\begin{aligned} y = {} & \left\{ p - \frac{\alpha mq}{4} \left(1 + \frac{3\alpha m}{16}\right) x + \frac{\alpha^2 m^2 p}{32} x^2 \right\} \operatorname{sen} x \\ & + \left\{ q - \frac{\alpha mp}{4} \left(1 - \frac{3\alpha m}{16}\right) x + \frac{\alpha^2 m^2 q}{32} x^2 \right\} \cos x \\ & + \frac{\alpha m}{16} \left\{ p \left(1 + \frac{3\alpha m}{16}\right) - \frac{\alpha mq}{4} x \right\} \operatorname{sen} 3x \\ & + \frac{\alpha m}{16} \left\{ q \left(1 - \frac{3\alpha m}{16}\right) - \frac{\alpha mp}{4} x \right\} \cos 3x \\ & + \frac{\alpha^2 m^2 p}{768} \operatorname{sen} 5x + \frac{\alpha^2 m^2 q}{768} \cos 5x. \end{aligned}$$

Si vede come dovremmo regolarci per spingere l' approssimazione alle potenze superiori.

§. 221. L' equazione molto più generale

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) - a^2 y = X + \alpha\varphi(x, y)$$

può integrarsi con lo stesso metodo.

Facciamo infatti

$y = Y + \alpha Y' + \alpha^2 Y'' + \alpha^3 Y''' + \text{ec.}$, ed avremo

$$\left.\begin{matrix} \left(\frac{d^2 Y}{dx^2}\right) + \alpha \left(\frac{d^2 Y'}{dx^2}\right) + \alpha^2 \left(\frac{d^2 Y''}{dx^2}\right) + \alpha^3 \left(\frac{d^2 Y'''}{dx^2}\right) + \text{ec.} \\ - a^2 Y - \alpha a^2 Y' - \alpha^2 a^2 Y'' - \alpha^3 a^2 Y''' - \text{ec.} \end{matrix}\right\} = X + \alpha\varphi(x, Y) +$$

$$\alpha^2 (Y' + \alpha Y'' + \text{ec.}) \left(\frac{d\varphi}{dY}\right) + \frac{\alpha^3}{2} (Y' + \alpha Y'' + \text{ec.})^2 \left(\frac{d^2\varphi}{dY^2}\right) + \text{ec.}$$

Se ora eguagliamo tra loro i coefficienti delle respettive potenze di α si troveranno l' equazioni

$$(1) \ldots\ldots \left(\frac{d^2 Y}{dx^2}\right) - a^2 Y = X,$$

$$(2) \ldots\ldots \left(\frac{d^2 Y'}{dx^2}\right) - a^2 Y' = \varphi(x, Y),$$

$$(3) \ldots\ldots \left(\frac{d^2 Y''}{dx^2}\right) - a^2 Y'' = Y' \left(\frac{d\varphi}{dY}\right),$$

$$(4) \ldots\ldots \left(\frac{d^2 Y'''}{dx^2}\right) - a^2 Y''' = Y'' \left(\frac{d\varphi}{dY}\right) + \frac{1}{2} Y'^2 \left(\frac{d^2\varphi}{dY^2}\right),$$

ec. ec.

Il secondo membro dell' equazione (2) è una funzione di x, da che sarà Y dato dall' equazione (1): il secondo membro dell' equazione (3) è una funzione di x, da che le equazioni (1), (2) ci avranno dato Y, Y', e così di seguito.

Il metodo generale da noi spiegato si applica ancora all' integrazione per approssimazione dell' equazione lineare di un ordine qualunque n^{esimo}

$$ay + b(p + qx)\left(\frac{dy}{dx}\right) + c(p + qx)^2 \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) + \ldots\ldots + m(p + qx)^n \left(\frac{d^n y}{dx^n}\right) = X + \alpha\varphi(x, y)$$ essendo a, b, c ec., m, p, q quantità costanti: X funzione di x, e $\varphi(x, y)$ funzione di x e di y.

Facendo $y = Y + \alpha Y' + \alpha^2 Y'' + \text{ec.}$, si hanno per determinare Y, Y' ec., altrettante equazioni della forma della proposta, ma mutilata nel secondo membro del termine $\alpha\varphi(x, y)$. Ponno dunque aversi i valori di quei coefficienti indeterminati per mezzo dell' integrazioni spiegate al §. 105.

§. 222. Se noi poniamo mente a quanto abbiamo detto ai §§. 219, 220, concluderemo che nella formula generale

$y = Y + \alpha Y' + \alpha^2 Y'' + \text{ec.}$, la quale serve d' integrale all' equazione

$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) - a^2 y = X + \alpha\varphi(x, y)$, i coefficienti Y, Y', Y'' ec., sono tante funzioni dell' arco x, dei seni e coseni dello stesso arco, e dei seni e coseni dei suoi multipli $2x$, $3x$ ec. Supponiamo che questo valore di y si ordini secondo le potenze di x: è manifesto che ei prenderà la forma seguente

$y = P + P'x + P''x^2 + P'''x^3 +$ ec.; P, P', P'' ec. essendo funzioni di seni, coseni di x e dei suoi multipli. Ora accade talvolta in Astronomia che ci abbisogni eliminare dal valore di y l' arco x, e ridurre questo valore ad esser solo funzione di seni e coseni. Per esempio nell' espressione del raggio vettore dell' Orbita dei Pianeti, che l' integrazione dell' equazione da cui dipende ci somministra, si trovano dei termini, i quali non racchiudono solamente dei seni e coseni dell' angolo percorso, o dell' angolo proporzionale al tempo, ma ancora l' angolo stesso: ora se questi termini dovessero entrare nel valore del raggio vettore, ne seguirebbe che questo raggio potrebbe aumentare all' infinito, ciò che sarebbe contrario all' osservazioni; bisogna dunque che le potenze dell' arco vi entrino in maniera, che esse nel loro insieme siano eguali a dei seni e coseni, e quindi l' espressione del raggio possa barattarsi in un' altra che non contenga in modo alcuno lo stesso arco: allora col crescere dell' angolo aumenterà sino ad un certo limite il raggio; quindi scemerà per aumentare di nuovo ec. Onde ottenere simili trasformazioni, seguirò l' elegantissimo metodo del Sig. La-Grange, da lui dato negli Atti di Berlino del 1783.

Sia proposta un' equazione differenziale di un ordine qualunque n tra le variabili y, x, mentre x non vi entri sotto una forma algebraica: supponiamo che l' integrale completo sia

$y = P + P'x + P''x^2 +$ ec., essendo P, P', P'' ec., funzioni di x in seni, coseni ed esponenziali, e di un numero n di costanti arbitrarie a, b, c ec., in modo che le differenze di queste funzioni relativamente ad x non contengano già mai questa variabile sotto una forma algebraica. Quest' integrale può essere o rigoroso o semplicemente approssimato, purchè in quest' ultimo caso egli soddisfaccia all' equazione differenziale senza che sia necessario sviluppare in serie le sue funzioni trascendenti.

Differenziando successivamente n volte quest' integrale, si avrà

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{dP}{dx}\right) + P' + \left\{\left(\frac{dP'}{dx}\right) + 2P''\right\} x + \left\{\left(\frac{dP''}{dx}\right) + 3P'''\right\} x^2 + \text{ec.}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2P}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{dP'}{dx}\right) + 2P'' + \left\{\left(\frac{d^2P'}{dx^2}\right) + 4\left(\frac{dP''}{dx}\right) + 6P'''\right\} x + \text{ec.}$$

ec. ec.

e questi valori di y, $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ ec., $\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)$ soddisfaranno all' equazione differenziale, qualunque siano d' altr' onde i valori delle costanti a, b, c ec.

Ora siccome la stessa equazione non contiene x sotto una forma algebraica, coverrà che nella sostituzione dei valori precedenti, i termini i quali si troveranno moltiplicati per le diverse potenze di x, spariscano da se medesimi; dunque anche i primi termini di questi valori, i quali non sono moltiplicati per x, e non contengono x sotto una forma algebraica, dovranno soddisfare soli alla medesima equazione: dunque essa sarà soddisfatta da questi valori

$y = P$

$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{dP}{dx}\right) + P'$

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2P}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{dP'}{dx}\right) + 2P''$

ec. ec.

Siccome poi le quantità a, b, c ec., che entrano in questi valori, restano indeterminate, esse potranno esservi supposte costanti o variabili a piacere. Supponendole costanti, i valori di cui si tratta, non ponno sussistere insieme, poichè quello di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ non è la differenziale di quello di y, e lo stesso si dica degli altri; ma rendendo le medesime quantità a, b, c ec., variabili possiam soddisfare a queste condizioni. Per questo basterà fare in modo che la differenziale di y, facendovi tutto variare, sia eguale al valore di $\left(\frac{dy}{dx}\right) dx$ quì sopra trovato; che la differenziale del valore di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, facendovi tutto variare, sia eguale al valore di $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) dx$, e così di seguito sino alla differenziale di $\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$, che dovrà eguagliare il valore di $\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right) dx$. Ricaveremo di quì un numero n d'equazioni di condizione, che basteranno in conseguenza a determinare le n arbitrarie a, b, c ec. divenute variabili: sarà allora $y = \mathrm{P}$ l'integrale dell'equazione differenziale proposta. L'equazioni di condizione saranno dunque

$$dy = \left(\frac{d\mathrm{P}}{dx}\right) dx + \left(\frac{d\mathrm{P}}{da}\right)\left(\frac{da}{dx}\right) dx + \left(\frac{d\mathrm{P}}{db}\right)\left(\frac{db}{dx}\right) dx + \text{ec.} = \left\{\left(\frac{d\mathrm{P}}{dx}\right) + \mathrm{P}'\right\} dx,$$

$$\left.\begin{array}{l} d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{d^2\mathrm{P}}{dx^2}\right) dx + \left(\frac{d^2\mathrm{P}}{dxda}\right)\left(\frac{da}{dx}\right) dx + \left(\frac{d^2\mathrm{P}}{dxdb}\right)\left(\frac{db}{dx}\right) dx + \text{ec.} \\ \qquad + \left(\frac{d\mathrm{P}'}{dx}\right) dx + \left(\frac{d\mathrm{P}'}{da}\right)\left(\frac{da}{dx}\right) dx + \left(\frac{d\mathrm{P}'}{db}\right)\left(\frac{db}{dx}\right) dx + \text{ec.} \end{array}\right\} =$$

$$\left\{\left(\frac{d^2\mathrm{P}}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{d\mathrm{P}'}{dx}\right) + 2\mathrm{P}''\right\} dx,$$

ec. ec.

e così di seguito. Scancellando ora i termini che si distruggono in queste equazioni, esse divengono

$$\left(\frac{d\mathrm{P}}{da}\right)\left(\frac{da}{dx}\right) dx + \left(\frac{d\mathrm{P}}{db}\right)\left(\frac{db}{dx}\right) dx + \text{ec.} = \mathrm{P}' dx$$

$$\left\{\left(\frac{d^2\mathrm{P}}{dxda}\right) + \left(\frac{d\mathrm{P}'}{da}\right)\right\}\left(\frac{da}{dx}\right) dx + \left\{\left(\frac{d^2\mathrm{P}}{dxdb}\right) + \left(\frac{d\mathrm{P}'}{db}\right)\right\}\left(\frac{db}{dx}\right) dx + \text{ec.}$$

$$= \left\{\left(\frac{d\mathrm{P}'}{dx}\right) + 2\mathrm{P}''\right\} dx, \text{ e così di seguito.}$$

§. 223. Considerando la forma delle precedenti equazioni, e come esse derivano dall' integrale

$$y = \mathrm{P} + x\mathrm{P}' + x^2\mathrm{P}'' + x^3\mathrm{P}''' + \text{ec.},$$

vedremo che per trovarle basta 1°. Eguagliare la differenziale dell' integrale, presa facendo variare soltanto le costanti a, b, c ec., alla differenziale della stessa integrale, presa facendo solo variare l' arco del cerchio x: 2°. Differenziare successivamente quest' equazione $n - 1$ volte, facendo variare x per tutto e riguardando a, b, c ec., come costanti: 3°. Scancellare per tutto i termini moltiplicati per l' arco del cerchio x e le sue potenze; così avrem subito

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\left(\frac{d\mathrm{P}}{da}\right) + \left(\frac{d\mathrm{P}'}{da}\right) x + \left(\frac{d\mathrm{P}''}{da}\right) x^2 + \text{ec.}\right\}\left(\frac{da}{dx}\right) dx \\ + \left\{\left(\frac{d\mathrm{P}}{db}\right) + \left(\frac{d\mathrm{P}'}{db}\right) x + \left(\frac{d\mathrm{P}''}{db}\right) x^2 + \text{ec.}\right\}\left(\frac{db}{dx}\right) dx \end{array}\right\} = (\mathrm{P}' + 2\mathrm{P}''x +$$

$$3\mathrm{P}'''x^2 + \text{ec.}) \, dx :$$

+ ec.

In seguito

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\left(\frac{d^2\mathrm{P}}{dxda}\right) + \left(\frac{d\mathrm{P}'}{da}\right) + \left[\left(\frac{d^2\mathrm{P}'}{dxda}\right) + 2\left(\frac{d\mathrm{P}''}{da}\right)\right] x + \text{ec.}\right\}\left(\frac{da}{dx}\right) dx \\ + \left\{\left(\frac{d^2\mathrm{P}}{dxdb}\right) + \left(\frac{d\mathrm{P}'}{db}\right) + \left[\left(\frac{d^2\mathrm{P}'}{dxdb}\right) + 2\left(\frac{d\mathrm{P}''}{db}\right)\right] x + \text{ec.}\right\}\left(\frac{db}{dx}\right) dx \end{array}\right\} =$$

$$\left\{\left(\frac{d\mathrm{P}'}{dx}\right) + 2\mathrm{P}'' + \left[2\left(\frac{d\mathrm{P}''}{dx}\right) + 6\mathrm{P}'''\right] x + \text{ec.}\right\} dx :$$

+ ec.

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\left(\frac{d^3\mathrm{P}}{dx^2da}\right) + 2\left(\frac{d^2\mathrm{P}'}{dxda}\right) + 2\left(\frac{d\mathrm{P}''}{da}\right) + \text{ec.}\right\}\left(\frac{da}{dx}\right) dx \\ + \left\{\left(\frac{d^3\mathrm{P}}{dx^2db}\right) + 2\left(\frac{d^2\mathrm{P}'}{dxdb}\right) + 2\left(\frac{d\mathrm{P}''}{db}\right) + \text{ec.}\right\}\left(\frac{db}{dx}\right) dx \end{array}\right\} = \left\{\left(\frac{d^2\mathrm{P}}{dx^2}\right) +\right.$$

$$\left. 4\left(\frac{d\mathrm{P}'}{dx}\right) + 6\mathrm{P}'' + \text{ec.}\right\} dx :$$

+ ec.

e così di seguito sino all' $n - 1^{\text{esima}}$ differenziale.

Scancellando ora i termini moltiplicati per x, l' integrale si ridurrà a $y = \mathrm{P}$, e si avranno per la determinazione delle quantità a, b, c ec. l' equazioni

$$\left(\frac{d\mathrm{P}}{da}\right)\left(\frac{da}{dx}\right)dx + \left(\frac{d\mathrm{P}}{db}\right)\left(\frac{db}{dx}\right)dx + \text{ec.} = \mathrm{P}'dx\,,$$

$$\left\{\left(\frac{d^2\mathrm{P}}{dxda}\right) + \left(\frac{d\mathrm{P}'}{da}\right)\right\}\left(\frac{da}{dx}\right)dx + \left\{\left(\frac{d^2\mathrm{P}}{dxdb}\right) + \left(\frac{d\mathrm{P}'}{db}\right)\right\}\left(\frac{db}{dx}\right)dx + \text{ec.}$$
$$= \left\{\left(\frac{d\mathrm{P}'}{dx}\right) + 2\mathrm{P}''\right\}dx\,,$$

$$\left\{\left(\frac{d^3\mathrm{P}}{dx^2da}\right) + 2\left(\frac{d^2\mathrm{P}'}{dxda}\right) + 2\left(\frac{d\mathrm{P}''}{da}\right)\right\}\left(\frac{da}{dx}\right)dx + \left\{\left(\frac{d^3\mathrm{P}}{dx^2db}\right) + 2\left(\frac{d^2\mathrm{P}'}{dxdb}\right) +\right.$$
$$\left. 2\left(\frac{d\mathrm{P}''}{db}\right)\right\}\left(\frac{db}{dx}\right)dx + \text{ec.} = \left\{\left(\frac{d^2\mathrm{P}'}{dx^2}\right) + 4\left(\frac{d\mathrm{P}''}{dx}\right) + 6\mathrm{P}'''\right\}dx\,,$$

e così di seguito, il numero dell' equazioni essendo eguale all' indice dell' ordine dell' equazione differenziale.

Allorchè quest' equazione non è che del primo ordine, basterà nell' integrale aver riguardo al termine che contiene la prima potenza dell' arco x, poichè la prima equazione di condizione non dipende che dalle quantità P, P'; allorchè l' equazione differenziale sarà del secondo ordine, bisognerà aver anche riguardo al termine dell' integrale moltiplicato per x^2, poichè la seconda equazione di condizione dipende ancora dalla quantità P'', e così di seguito.

Rendiamo più chiare queste Teorie con un' esempio.

L' integrale dell' equazione

$\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) + y + \alpha my \cos 2x = 0$ da noi assegnato al (220), è

$$y = p \operatorname{sen} x + q \cos x + \frac{\alpha m}{16} p \operatorname{sen} 3x + \frac{\alpha m}{16} q \cos 3x -$$
$$\left(\frac{\alpha m}{4} q \operatorname{sen} x + \frac{\alpha m}{4} p \cos x\right) x\,,$$ quando non si spinga l' approssimazione al di là della prima potenza di α. Quest' integrale contiene, come si vede, l' arco di circolo x, mentre quest' arco non si ritrova nell' equazione differenziale. Per eliminarlo faremo uso del metodo quì sopra spiegato: sarà in conseguenza

$$\mathrm{P} = p \operatorname{sen} x + q \cos x + \frac{\alpha m}{16} p \operatorname{sen} 3x + \frac{\alpha m}{16} q \cos 3x$$

$$\mathrm{P}' = -\frac{\alpha m}{4}\left\{q \operatorname{sen} x + p \cos x\right\},$$

$$\left(\frac{d\mathrm{P}}{dp}\right) = \operatorname{sen} x + \frac{\alpha m}{16} \operatorname{sen} 3x\,,$$

$$\left(\frac{d\mathrm{P}}{dq}\right) = \cos x + \frac{\alpha m}{16} \cos 3x\,,$$

$$\left(\frac{d^2\mathrm{P}}{dxdp}\right) = \cos x + \frac{3\alpha m}{16} \cos 3x\,,$$

$$\left(\frac{d^2\mathrm{P}}{dxdq}\right) = -\left\{\operatorname{sen} x + \frac{3\alpha m}{16} \operatorname{sen} 3x\right\},$$

$$\left(\frac{d\mathrm{P}'}{dq}\right) = -\frac{\alpha m}{4} \operatorname{sen} x\,,$$

$$\left(\frac{d\mathrm{P}'}{dp}\right) = -\frac{\alpha m}{4} \cos x\,,$$

$$\left(\frac{d\mathrm{P}'}{dx}\right) = -\frac{\alpha m}{4} q \cos x + \frac{\alpha m}{4} p \operatorname{sen} x\,,$$

e le equazioni per determinare p e q, saranno

$$dp \operatorname{sen} x + dq \cos x + \alpha\left\{\frac{m}{16} dp \operatorname{sen} 3x + \frac{m}{16} dq \cos 3x\right\} =$$
$$-\alpha\left\{\frac{m}{4} q \operatorname{sen} x + \frac{m}{4} p \cos x\right\} dx\,,$$

$$dp \cos x - dq \operatorname{sen} x + \alpha\left\{\frac{3m}{16} dp \cos 3x - \frac{m}{4} dp \cos x -\right.$$
$$\left.\frac{3m}{16} dq \operatorname{sen} 3x - \frac{m}{4} p \operatorname{sen} x\right\} dx = -\alpha\left\{\frac{m}{4} q \cos x -\right.$$
$$\left.\frac{m}{4} p \operatorname{sen} x\right\} dx\,.$$

Se noi supponiamo $p = e^{\alpha hx}$, $q = \mathrm{A}e^{\alpha hx}$ essendo A, h due costanti arbitrarie da determinarsi, e trascuriamo in quelle equazioni i termini che risulterebbero moltiplicati per α^2, diverranno esse

$$dp \operatorname{sen} x + dq \cos x = -\frac{\alpha m}{4}\left\{q \operatorname{sen} x + p \cos x\right\} dx$$

$$dp \cos x - dq \operatorname{sen} x = -\frac{\alpha m}{4}\left\{q \cos x - p \operatorname{sen} x\right\} dx$$

che si riducono a quest' altre

$dp = -\frac{am}{4} q dx$, $dq = -\frac{am}{4} p dx$.

Sostituiamo per p e q i supposti valori, e troveremo $h = \pm \frac{m}{4}$, $A = \mp 1$, quindi

$p = e^{\frac{am}{4}x}$, $q = -e^{\frac{am}{4}x}$, ovvero

$p = e^{-\frac{am}{4}x}$, $q = e^{-\frac{am}{4}x}$. Se moltiplichiamo i primi valori di p e di q per una costante arbitraria B; ed i secondi per un' altra B', soddisfaranno a quelle due equazioni anche $p = Be^{\frac{am}{4}x}$, $q = -Be^{\frac{am}{4}x}$, ovvero $p = B'e^{-\frac{am}{4}x}$, $q = B'e^{-\frac{am}{4}x}$; ed essendo le dette equazioni lineari, soddisfaranno anche ad esse queste due espressioni

$$p = Be^{\frac{am}{4}x} + B'e^{-\frac{am}{4}x},$$

$$q = -Be^{\frac{am}{4}x} + B'e^{-\frac{am}{4}x}.$$ Per questo avremo introdotte due nuove costanti arbitrarie B, B', e sarà

$$y = p \, sen \, x + q \cos x + \frac{am}{16} p \, sen \, 3x + \frac{am}{16} q \cos 3x$$

purchè per p e q pongansi i ritrovati valori; quest' integrale non conterrà più l' arco x sotto forma algebraica.

§. 224. Il metodo spiegato quì sopra tanto per integrare una equazione differenziale del secondo ordine, quanto per eliminare dall' integrale gli archi di cerchio, può estendersi alla ricerca dei valori di un numero qualunque di quantità funzioni di una variabile, tra le quali sussistano un numero eguale di equazioni differenziali del secondo ordine.

Siano x, y, z tre funzioni incognite di una quarta variabile t, ed abbiansi queste tre equazioni

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + a^2x = M + \alpha N$$

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) + b^2y = M' + \alpha N'$$

$$\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) + c^2z = M'' + \alpha N''$$

nelle quali M, M', M'' sono funzioni razionali ed intere dei seni e coseni dell' arco t; ed N, N', N'' funzioni degli stessi seni e coseni e delle variabili x, y, z combinate in qualunque modo tra loro. Supponiamo

$$x = P + \alpha P' + \alpha^2 P'' + \text{ec.}$$

$$y = Q + \alpha Q' + \alpha^2 Q'' + \text{ec.}$$

$$z = R + \alpha R' + \alpha^2 R'' + \text{ec.}$$

Se noi indichiamo ora per

$\alpha S + \alpha^2 S' + \text{ec.}$, $\alpha T + \alpha^2 T' + \text{ec.}$, $\alpha V + \alpha^2 V' + \text{ec.}$

ciò che divengono le quantità αN, $\alpha N'$, $\alpha N''$, allorchè vi sostituiamo i supposti valori di x, y, z, otterremo questa equazione

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{d^2P}{dt^2}\right) + \alpha\left(\frac{d^2P'}{dt^2}\right) + \text{ec.} \\ + a^2P + \alpha a^2P' + \text{ec.}\end{array}\right\} = M + \alpha S + \alpha^2 S' + \text{ec.},$$

la quale ci dà

$$\left(\frac{d^2P}{dt^2}\right) + a^2P = M,$$

$$\left(\frac{d^2P'}{dt^2}\right) + a^2P' = S,$$

ec.

Nella stessa guisa troveremo

$$\left(\frac{d^2Q}{dt^2}\right) + a^2Q = M',$$

$$\left(\frac{d^2Q'}{dt^2}\right) + a^2Q' = T,$$

ec.

$\left(\frac{d^2R}{dt^2}\right) + a^2R = M''$,

$\left(\frac{d^2R'}{dt^2}\right) + a^2R' = V$,

ec.

Così si avranno i coefficienti P, P' ec., Q, Q' ec., R, R' ec., che entrano nei termini componenti i valori approssimati di x, y, z.

Per esempio. Proposte le due equazioni

$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + a^2x = e\ sen\ t + \alpha y$

$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) + b^2y = e\ cos\ t + \alpha x$

si potrebbero avere i valori di x e di y espressi in una serie ordinata per le potenze della quantità α: facendo infatti

$x = P + \alpha P' + \alpha^2 P'' +$ ec.

$y = Q + \alpha Q' + \alpha^2 Q'' +$ ec.

si troverebbero per la determinazione dei coefficienti P, P', P'' ec., Q, Q', Q'' ec., le seguenti equazioni

$\left(\frac{d^2P}{dt^2}\right) + a^2P = c\ sen\ t$,

$\left(\frac{d^2Q}{dt^2}\right) + b^2Q = e\ cos\ t$,

$\left(\frac{d^2P'}{dt^2}\right) + a^2P' = Q$,

$\left(\frac{d^2Q'}{dt^2}\right) + b^2Q' = P$,

ec. ec.

le quali si potrebbero integrare per mezzo delle dottrine spiegate nel Cap. IV.

Quando poi nelle espressioni trovate si incontrassero archi di circolo, questi si eliminerebbero come abbiamo insegnato ai §§. antecedenti.

§. 225. Quando una delle costanti arbitrarie fosse unita alla

variabile rappresentante l' arco di cerchio, si avesse cioè

$y = P + P'(x + A) + P''(x + A)^2 +$ ec.

allora per il successo dell' eliminazione degli archi di circolo converrebbe procurare di trasformare questa serie in un' altra, la quale non avesse la costante A in questa situazione; senza una tale avvertenza, il calcolo fatto per l' eliminazione degli archi ci porterebbe alla stessa serie

$y = P + P'(x + A) +$ ec., come è facile verificare.

Allorchè poi l' equazione differenziale contiene essa medesima degli archi di circolo, sembra che l' integrale dovrebbe contenerne necessariamente. Vi sono frattanto dei casi nei quali questa conclusione sarebbe falsa, e perciò molto interessa avere il metodo di farli sparire dagli integrali di questa sorte d' equazioni differenziali.

Data un' equazione differenziale di un ordine qualunque n tra y ed x, nella quale x entra sotto la forma algebraica, potrem sempre dedurne un' altra dell' ordine $n + 1$ che non contenga alcuna funzione algebraica di x: basterà per questo eliminare la x da queste funzioni per mezzo della proposta e della sua differenziale. Il risultato di quest' eliminazione sarà un' equazione differenziale dell' ordine $n + 1$, che noi potremo considerare come l' equazione data e quindi applicarvi il metodo esposto.

Ma senza cercare questa nuova equazione, basterà riflettere che nell' equazione differenziale della proposta le funzioni algebraiche di x non ponno avere origine che da quelle della medesima specie, le quali si trovano nella proposta stessa (a). Così eliminando la x dalle funzioni algebraiche con l' ajuto dell' equazione proposta e della sua differenziale, otterremo lo stesso risultato come se in queste funzioni fosse $x + h$ in luogo

(a) Imperocchè noi supponiamo sempre che l' integrale non contenga funzioni trascendenti di x, le quali possano darne delle algebraiche per la differenziazione; dalchè ne segue, che neppure nell' equazione differenziale proposta ponno trovarsi funzioni di tal fatta, giacchè queste non sarebbero originate che da quelle dell' integrale suddetto.

di x, h essendo una costante qualunque; d' onde ne segue che cangiando nell' equazione differenziale la x delle funzioni algebraiche in $x + h$, si avrà un' equazione, che sarà l' integrale completo di quella dell' ordine $n + 1$ senza funzioni algebraiche, h essendo la costante arbitraria. Il valore di y, il quale soddisfarà alla proposta, dopo la sostituzione di cui si tratta, sarà anche l' integrale finito e completo di quella che non avrebbe contenuto alcuna funzione algebraica di x, essendo h, a, b, c ec., le costanti arbitrarie.

Mentre dunque l' arco x entrerà nell' equazione differenziale di x e di y, e vorrà eliminarsi quest' arco dall' espressione completa di y, bisognerà cominciare a sostituire nelle funzioni algebraiche di x dell' equazione differenziale $x + h$ per x; ne cercheremo in seguito l' integrale con i metodi ordinarj, procurando che la costante h entri anche nelle funzioni trascendenti, le quali moltiplicano le potenze di x: infine faremo sopra questo integrale quanto prescrive la regola del §. 223 facendo variare le costanti arbitrarie h, a, b, c ec., e supponendo che l' equazione differenziale che vi corrisponde sia di un ordine maggiore di un' unità di quello della proposta.

Per esempio. Sia proposta l' equazione

$\left(\frac{dy}{dx}\right) = (1 + 2\alpha x)\sqrt{(1 - y^2)}$, il cui integrale completo esatto è $y = sen(x + \alpha x^2 + C)$, C essendo la costante arbitraria.

Supponendo al solito rappresentata da α una frazione piccolissima, cerchiamone l' integrale approssimato, spingendo l' approssimazione sino alle potenze seconde di α esclusive. Sia pertanto $y = P + \alpha P'$, ed avremo

$\left(\frac{dP}{dx}\right) + \alpha\left(\frac{dP'}{dx}\right) = (1 + 2\alpha x)\sqrt{(1 - P^2 - 2PP'\alpha)} = (1 +$

$2\alpha x)\left\{(1 - P^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{PP'}{\sqrt{(1-P^2)}}\alpha\right\} = \sqrt{(1 - P^2)} -$

$\frac{P}{\sqrt{(1-P^2)}}P'\alpha + 2x\sqrt{(1 - P^2)}.\alpha$, quindi

$\left(\frac{dP}{dx}\right) = \sqrt{(1 - P^2)}$,

$\left(\frac{dP'}{dx}\right) = 2x\sqrt{(1 - P^2)} - \frac{P}{\sqrt{(1-P^2)}}P'$.

Integrando queste due equazioni, si trova

$P = sen(x + a)$, $P' = x^2 cos(x + a)$

essendo a la costante arbitraria; sarà dunque

$y = sen(x + a) + \alpha x^2 cos(x + a)$

l' integrale approssimato.

Ora quest' integrale contiene l' arco di cerchio x sotto forma algebraica; converrà dunque eliminarlo, onde non vi si trovino che trascendenti.

Secondo ciò che abbiam detto quì sopra, poniamo $x + h$ invece di x nell' equazione proposta: essa diverrà allora

$\left(\frac{dy}{dx}\right) = (1 + 2\alpha h + 2\alpha x)\sqrt{(1 - y^2)}$, la quale si trasforma in

$\left(\frac{dy}{dx}\right) = (m + 2\alpha x)\sqrt{(1 - y^2)}$, facendo $1 + 2\alpha h = m$.

L' integrale poi approssimato di quest' equazione sarà, operando come quì sopra

$y = sen(mx + a) + \alpha x^2 cos(mx + a) +$ ec. in cui si trovano due costanti arbitrarie m, a.

Questo valore di y possiamo considerarlo come l' integrale completo approssimato di un' equazione differenziale del secondo ordine, la quale non contiene funzioni algebraiche dell' arco x, mentre d' altr' onde contiene esso questo arco medesimo. Determiniamo le due costanti m ed a, secondo la regola del §. 223, ed otterremo allora l' eliminazione di quell' arco dall' integrale.

Secondo la stessa regola, paragonando il nostro valore di y con quello che è ivi supposto, avremo

$P = sen(mx + a)$, $P' = 0$, $P'' = \alpha cos(mx + a)$,

$b = m$, $db = dm$, e quindi l' equazioni

$cos(mx + a).da + cos(mx + a).xdm = 0$

$- sen(mx + a).m.da - sen(mx + a).mx.dm + cos(mx + a)dm = 2\alpha cos(mx + a).dx$, che si riducono alle due più semplici

$$da + xdm = 0, \quad - 2\alpha dx + dm = 0;$$

Avremo dunque $m = 2\alpha x + A'$, $a = - \alpha x^2 + A$, essendo A', A due nuove costanti arbitrarie, e quindi $y = sen(A'x + \alpha x^2 + A)$ sarà l' integrale approssimato, da cui sonosi eliminati gli archi di circolo. Delle due indeterminate A', A una sola A è arbitraria, e l' altra dee prendersi eguale all' unità, come si ricava dalla sostituzione del valore di y nella proposta.

Nè faccia sorpresa che un integrale semplicemente approssimato abbia dato l' integrale esatto, poichè se avessimo continuato l' approssimazione, non avremmo trovato che dei termini moltiplicati per x^4, x^6 ec., e per conseguenza niente questi avrebbero aggiunto ai valori di quelle due costanti m, a.

Chi brama una maggiore estensione in queste dottrine, consulti la sopra citata Memoria del Sig. La-Grange, ed un' altra del Sig. La-Place del 1777.

§. 226. Alle equazioni differenziali di secondo ordine può estendersi il metodo d' integrazione dato per quelle del primo al §. 192. Rappresentiamo infatti per

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = F\left(x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)\right)$ un' equazione qualunque del secondo ordine, e supponiamo che l' integrale completo di essa sia $y = f(x, a, b)$ essendo a, b le due costanti arbitrarie. Dando ad a un valore particolare $= h$, ed alla b un valore particolare $= l$, sarà $f(x, h, l)$ un valore particolare di y, che rappresenteremo per p, e che supporremo conosciuto in una maniera qualunque.

Facciamo frattanto $a = h + i$, $b = l + e$, e sviluppiamo la funzione $f(x, h + i, l + e)$ in serie ascendente secondo le potenze ed i prodotti di i, e di e; il primo termine sarà $f(x, h, l) = p$, e gli altri termini avranno la forma

$$\begin{aligned} &qi + ri^2 + \text{ec.} \\ &q'e + r'ei + \text{ec.} \\ &\quad + r''e^2 + \text{ec.} \end{aligned}$$

q, r, q', r' ec., essendo altrettante funzioni di x.

Se quest' espressione di y si sostituisce nell' equazione del secondo ordine, converrà che essa si verifichi indipendentemente dalle costanti i, e, le quali debbono dimorare arbitrarie; dunque nell' equazione

$$\left.\begin{matrix} \left(\frac{d^2p}{dx^2}\right) + i\left(\frac{d^2q}{dx^2}\right) + \text{ec.} \\ + e\left(\frac{d^2q'}{dx^2}\right) + \text{ec.} \end{matrix}\right\} = F\left\{\begin{matrix} x, p + iq + \text{ec.}, & \left(\frac{dp}{dx}\right) + i\left(\frac{dq}{dx}\right) + \text{ec.} \\ + eq' + \text{ec.} & + e\left(\frac{dq'}{dx}\right) + \text{ec.} \end{matrix}\right\}$$

sviluppando il secondo membro per le potenze ed i prodotti delle costanti arbitrarie i, e, ed osservando che

$\left(\frac{d^2p}{dx^2}\right) = F\left\{x, p, \left(\frac{dp}{dx}\right)\right\}$, il paragone dei termini, i quali contengono le stesse dimensioni di quelle costanti, ci darà le equazioni differenziali necessarie per la determinazione dei coefficienti q, q' ec., r, r', r'' ec. Infatti facendo

$$\begin{aligned} \omega &= iq + \text{ec.} \\ &\quad + eq' + \text{ec.}, \\ \theta &= i\left(\frac{dq}{dx}\right) + \text{ec.} \\ &\quad + e\left(\frac{dq'}{dx}\right) + \text{ec.}, \end{aligned}$$

quel secondo membro diverrà

$$= F\left(x, p + \omega, \left(\frac{dp}{dx}\right) + \theta\right) = F\left(x, p, \left(\frac{dp}{dx}\right)\right) + \omega\left(\frac{dF}{dp}\right) + \text{ec.}$$
$$+ \theta\left(\frac{dF}{dp'}\right) + \text{ec.}$$

$\left\{\text{fatto avendo } p' = \left(\frac{dp}{dx}\right)\right\}$; quindi

$$\left(\frac{d^2q}{dx^2}\right) = q\left(\frac{dF}{dp}\right) + \left(\frac{dF}{dp'}\right) \cdot \left(\frac{dq}{dx}\right);$$

$\left(\frac{d^2q'}{dx^2}\right) = q'\left(\frac{dF}{dp}\right) + \left(\frac{dF}{dp'}\right) \cdot \left(\frac{dq'}{dx}\right)$; per soddisfare alle quali equazioni basterà trovare degli integrali particolari.

§. 227. Riguardo alle equazioni differenziali degli ordini superiori, non si hanno regole d' integrazione che per certi casi particolari, e di questi abbiamo parlato nel Cap. IV, e nel principio del Cap. VII. Perciò io non mi trattengo a discorrerne (*a*). Soggiungo soltanto relativamente alle equazioni differenziali del secondo ordine, che considerate Geometricamente esse ci rappresentano una proprietà del raggio di curvatura. Infatti contenendosi nella formula esprimente questo raggio, la quantità $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, potrà essa eliminarsi per mezzo di una equazione proposta, e trovarsi il raggio R dato per $x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)$: avremo in questa maniera il rapporto tra il raggio di curvatura, l' ascissa, l' ordinata e la tangente del punto cui quello conviene: anzi generalmente parlando, una data equazione differenziale del secondo ordine ci somministrerà la relazione che una quantità appartenente ad una proprietà di contatto del secondo ordine, o una proprietà qualunque Geometrica o Meccanica espressa per mezzo dei differenziali secondi, ha con l' ascissa, l' ordinata e la tangente corrispondenti allo stesso punto.

Verrà occasione in seguito di tornare sopra queste considerazioni.

(*a*) A questo proposito ponno i Lettori consultare l' ultima Sezione della seconda parte del Calcolo Integrale d' Euler.

CAP. IX.

Integrazione delle Equazioni a più Variabili.

§. 228. Indicando per x, y, z tre variabili, e per P una funzione F (x, y, z) di esse, se noi supponiamo che y, z dipendano in una maniera qualunque da x, che equivale a dire siano funzioni di x, per quanto nulla sia stabilito sopra la loro natura, abbiamo veduto al §. 10 che la differenziale di P è

$$dP = \left(\frac{dP}{dx}\right)dx + \left(\frac{dP}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)dx + \left(\frac{dP}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)dx = \left(\frac{dP}{dx}\right)dx + \left(\frac{dP}{dy}\right)dy + \left(\frac{dP}{dz}\right)dz,$$

e quindi abbiamo concluso (15) che una quantità differenziale

$$Mdx + Ndy + Hdz$$

non può prendersi per una differenziale esatta dP di P, se non hanno luogo queste tre equazioni di condizione

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right), \quad \left(\frac{dM}{dz}\right) = \left(\frac{dH}{dx}\right), \quad \left(\frac{dN}{dz}\right) = \left(\frac{dH}{dy}\right).$$

Data dunque una tale espressione da integrarsi, bisognerà prima esaminare se han luogo quelle condizioni, e quando ciò non succeda, è inutile accingersi all' integrazione.

Se le variabili fossero quattro, e fosse proposta la quantità differenziale

$$Mdx + Ndy + Hdz + Rdu$$

non potremo averne la funzione P, che ne sia l' integrale, senza che abbiansi soddisfatte queste equazioni di condizione

$$\left(\frac{dM}{dy}\right)=\left(\frac{dN}{dx}\right),\ \left(\frac{dM}{dz}\right)=\left(\frac{dH}{dx}\right),\ \left(\frac{dN}{dz}\right)=\left(\frac{dH}{dy}\right),$$

$$\left(\frac{dM}{du}\right)=\left(\frac{dR}{dx}\right),\ \left(\frac{dN}{du}\right)=\left(\frac{dR}{dy}\right),\ \left(\frac{dH}{du}\right)=\left(\frac{dR}{dz}\right);$$

e così di seguito per un maggior numero di variabili.

Allorchè non sono soddisfatti questi criterj o condizioni, possiamo assicurarci che la quantità differenziale proposta non è il risultato di una differenziale eseguita sopra di una funzione contenente le variabili, i cui differenziali si trovano nella proposta medesima; si può dunque asserire che una tal differenziale non ha, nè può considerarsi avere integrale.

Per esempio, la quantità differenziale

$$(y+yz)\,dx+(x+xz)\,dy+(xy-2az)\,dz$$

è una differenziale esatta, poichè sono soddisfatti i criterj d' integrabilità, essendo

$$\left(\frac{dM}{dy}\right)=1+z,\ \left(\frac{dN}{dx}\right)=1+z,\ \left(\frac{dM}{dz}\right)=y,\ \left(\frac{dH}{dx}\right)=y,$$

$$\left(\frac{dN}{dz}\right)=x,\ \left(\frac{dH}{dy}\right)=x.$$ Si ha poi

$$\int\{(y+yz)\,dx+(x+xz)\,dy+(xy-2az)\,dz\}=$$
$$xy-az^2+zxy.$$

Quest' altra espressione differenziale

$$(2y+yz)\,dx+(x+xz)\,dy+(xy-2az)\,dz$$

non ammette integrazione, poichè non sono adempite le condizioni d' integrabilità.

Quando nella funzione $F(x,y,z)$ le due variabili y, z si considerano come funzioni della terza x, per quanto non si sappia quali esse siano, il Calcolo Differenziale ci dà subito

$$dF=\left(\frac{dF}{dx}\right)dx+\left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)dx+\left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)dx=\left(\frac{dF}{dx}\right)dx+$$
$$\left(\frac{dF}{dy}\right)dy+\left(\frac{dF}{dz}\right)dz;$$

ma se delle tre variabili x, y, z noi consideriamo x ed y indipendenti tra di loro, e z come funzione delle due medesime x, y, il Calcolo Differenziale ci dà allora due differenze parziali della F, una riguardo ad x, l'altra riguardo ad y, le quali (25) sono

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)dx+\left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)dx,$$

$$\left(\frac{dF}{dy}\right)dy+\left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)dy:$$

la somma di queste due differenze parziali (§. 26) ci dà la differenza totale della F in questa ipotesi, e si ha

$$dF=\left(\frac{dF}{dx}\right)dx+\left(\frac{dF}{dy}\right)dy+\left\{\left(\frac{dz}{dx}\right)dx+\left(\frac{dz}{dy}\right)dy\right\}\left(\frac{dF}{dz}\right),$$ la

quale (essendo $dz=\left(\frac{dz}{dx}\right)dx+\left(\frac{dz}{dy}\right)dy$), diviene

$$dF=\left(\frac{dF}{dx}\right)dx+\left(\frac{dF}{dy}\right)dy+\left(\frac{dF}{dz}\right)dz.$$

Proposta dunque una quantità differenziale

$$Mdx+Ndy+Hdz,$$

sia che le variabili y, z si considerino come funzioni di x, sia che la variabile z si riguardi come funzione delle altre due, essendo queste indipendenti tra loro, le condizioni le quali debbono essere soddisfatte affinchè nel primo caso la data quantità sia la differenziale esatta di una funzione $F(x,y,z)$, e quelle acciò nel secondo caso la stessa quantità differenziale sia l' aggregato delle due differenziali parziali esatte di $F(x,y,z)$, o la sua differenziale totale esatta, sono le medesime. Lo stesso ha luogo per le differenziali di un qualunque numero di variabili.

§. 229. Data un' equazione $V=0$ fra le variabili x, y, z, delle quali una, per esempio la z, si riguarda come funzione delle altre due, non solo ponno (§. 28) dedursi da essa due altre equazioni a differenze parziali che abbiano luogo insieme con lei, ma ancora un' equazione differenziale totale della forma $Pdx+Qdy+Rdz=0$; e come quell' equazione $V=0$ si considera l' integrale delle equazioni a differenze parziali, che da essa si deducono, così si riguarda anche $V = o$ come l' integrale dell' equazione differenziale totale

$$Pdx + Qdy + Rdz = o.$$

Dunque proposta un' equazione differenziale

$$Pdx + Qdy + Rdz = o$$

si dirà essa integrabile quando il suo primo membro possa prendersi per una differenziale totale di una funzione V di tre variabili x, y, z; e si dirà non integrabile quando tal condizione non sussista. Ma abbiamo detto al §. antecedente che

$Pdx + Qdy + Rdz$ è una differenziale totale, se le equazioni

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right), \left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right), \left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right),$$

sono identiche, e non è quando non lo sono; dunque i criteri per i quali si conclude l' integrabilità dell' equazione

$Pdx + Qdy + Rdz = o$, sono dati dalle suddette equazioni.

Di quì concluderemo che non tutte l' equazioni della forma $Pdx + Qdy + Rdz = o$ sono integrabili, ma soltanto quelle per le quali hanno luogo quei criteri d' integrabilità.

Accade talvolta che un' equazione

$Pdx + Qdy + Rdz = o$, non integrabile per se medesima, lo diviene in forza di un idoneo moltiplicatore: vediamo quando succeda.

Sia M funzione delle variabili x, y, z quel moltiplicatore, e l' equazione

$MPdx + MQdy + MRdz = o$, dovrà allora essere integrabile:

Dovranno dunque in questo esser soddisfatte le tre equazioni

$$\left(\frac{d.MP}{dy}\right) = \left(\frac{d.MQ}{dx}\right), \left(\frac{d.MP}{dz}\right) = \left(\frac{d.MR}{dx}\right), \left(\frac{d.MQ}{dz}\right) = \left(\frac{d.MR}{dy}\right)$$

le quali, eseguendo le differenziazioni, diverranno

$$(H) \ldots \begin{cases} P\left(\frac{dM}{dy}\right) + M\left(\frac{dP}{dy}\right) = Q\left(\frac{dM}{dx}\right) + M\left(\frac{dQ}{dx}\right), \\ P\left(\frac{dM}{dz}\right) + M\left(\frac{dP}{dz}\right) = R\left(\frac{dM}{dx}\right) + M\left(\frac{dR}{dx}\right), \\ Q\left(\frac{dM}{dz}\right) + M\left(\frac{dQ}{dz}\right) = R\left(\frac{dM}{dy}\right) + M\left(\frac{dR}{dy}\right). \end{cases}$$

Moltiplicando ora la prima di queste equazioni per R, la seconda per $-Q$, la terza per P, ed aggiungendole tutte insieme, dopo avere scancellato ciò che si distrugge, avremo

$$(E) \ldots R\left(\frac{dP}{dy}\right) - P\left(\frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx}\right) - R\left(\frac{dQ}{dx}\right) + P\left(\frac{dQ}{dz}\right) - Q\left(\frac{dP}{dz}\right) = o,$$

che sarà l' equazione di condizione fra P, Q, R, la quale debbe sussistere, acciò la proposta sia capace di divenire integrabile in virtù di un fattore M.

L' equazione (E) è stata data da Giovanni Bernoulli.

Facendo ora $R = o$, e supponendo che P e Q non contengano z, l' equazione (E) sarà soddisfatta da se medesima; dal che concluderemo che un' equazione differenziale tra due variabili $Pdx + Qdy = o$, può divenire sempre integrabile, moltiplicandola con un idoneo fattore. Abbiamo dimostrato questo Teorema al § 186

§. 230. Assicurati per mezzo del criterio quì sopra assegnato, che un' equazione può divenire integrabile, vediamo come effettivamente possa farsene l' integrazione. Sia proposta l' equazione

$Pdx + Qdy + Rdz = o$, che divenga integrabile per la moltiplicazione del fattore M: sarà allora

$MPdx + MQdy + MRdz = o$, una differenziale totale esatta di un' equazione $V = o$, che dee ritrovarsi. Poniamo ora in vece di dz il suo valore

$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy$, ed avremo

$$\left.\begin{array}{l} M\left\{Pdx + R\left(\frac{dz}{dx}\right)dx\right\} \\ + M\left\{Qdy + R\left(\frac{dz}{dy}\right)dy\right\} \end{array}\right\} = o.$$

Dei due termini che formano il primo membro di quest'equazione, il primo $M\left\{Pdx + R\left(\frac{dz}{dx}\right)dx\right\}$ debbe essere la differenza parziale di V riguardo ad x, ed il secondo la differenza parziale della stessa funzione incognita V relativamente ad y; per aver dunque la stessa V, basterà prendere l'integrale dell'equazione

$MPdx + MR\left(\frac{dz}{dx}\right)dx = o$, ovvero $MPdx + MRdz = o$ nella supposizione di y costante, aggiungendo per costante arbitraria una funzione di y, la quale dovrà determinarsi in maniera che la differenziale totale dell'ottenuto integrale, sia eguale alla proposta: oppure prendere l'integrale dell'altra differenziale parziale

$MQdy + MRdz = o$, nella supposizione di x costante, aggiungendo in seguito per costante arbitraria una funzione di x, che si determinerà, come abbiam detto.

Si vede dunque che il fattore M nel primo caso è quello che rende integrabile l'equazione di due variabili $Pdx + Rdz = o$, e nel secondo l'equazione $Qdy + Rdz = o$: così la difficoltà della presente ricerca si riporta a quella dell'integrazione ordinaria dell'equazioni tra due variabili.

Noi abbiamo considerato z come funzione delle altre due variabili x, y; avremmo anche potuto considerare x come funzione di y e di z, ed anche y come funzione di x e di z; nel primo caso, l'integrazione della proposta l'avremmo dedotta dall'integrazione di $Pdx + Qdy = o$ nella supposizione di z costante, o dall'integrazione di $Pdx + Rdz = o$ nella supposizione di y costante; nel secondo dall'integrazione di $Rdz + Qdy = o$ nella supposizione di x costante, ovvero da quella di $Pdx + Qdy = o$ nel supposto di z costante. In somma l'integrazione della proposta si riduce sempre all'integrazione di una di queste tre equazioni

$Pdx + Qdy = o$, $Pdx + Rdz = o$, $Qdy + Rdz = o$

nella prima supponendo z costante, nella seconda y, e nella terza x; e qualunque di queste equazioni si prescelga, sempre si giugnerà alla stessa equazione integrale.

Si ricava di quì la seguente regola per l'integrazione di un'equazione

$Pdx + Qdy + Rdz = o$:

„ Delle tre variabili x, y, z se ne consideri una, per e-
„ sempio z, come costante, onde abbiasi l'equazione
„ $Pdx + Qdy = o$ a due sole variabili x, y: se ne cerchi
„ allora l'integrale completato con una costante arbitraria C:
„ in seguito si consideri la costante C come una funzione del-
„ la medesima z, e presa anche questa lettera per variabile, si
„ trovi la differenziale totale dell'equazione integrale, che ne-
„ cessariamente avrà questa forma
„ $Pdx + Qdy + Sdz = o$. Paragonando poi la differenziale
„ ottenuta con la proposta $Pdx + Qdy + Rdz = o$, si avrà
„ l'equazione $S = R$ la quale ci mostrerà come z entra nel-
„ la composizione della costante C, ed in questa guisa otter-
„ remo il dimandato integrale, il quale sarà completo perchè
„ in C resterà sempre una certa parte veramente costante ed
„ arbitraria, che nella di lui differenziazione svanisce „.

Se poi questa stessa regola si applicasse ad un'equazione non integrabile, la faccenda non riuscirebbe, e saremmo avvertiti dell'impossibilità dell'integrazione dal trovare C funzione di z e di altre variabili, il che è contro l'ipotesi, giacchè egli debbe essere funzione della z soltanto.

Per intendere anche meglio questa operazione, esperimentiamo l'equazione inintegrabile

$zdx + xdy + ydz = o$.

Prendiamo z per costante, ed avremo da integrare

$zdx + xdy = 0$, ovvero $\frac{zdx}{x} + dy = 0$,

il cui integrale è $zlx + y = C$, essendo C una funzione della medesima z. Prendiamo ora la differenziale totale di quest'equazione, ed avremo

$\frac{zdx}{x} + dy + dzlx = (\frac{dC}{dz})\, dz$, ovvero

$zdx + xdy + dz\,(xlx - x\,(\frac{dC}{dz})) = 0$: dovrebbe dunque essere

$xlx - x\,(\frac{dC}{dz}) = y$, ovvero

$(\frac{dC}{dz}) = lx - \frac{y}{x}$, che è assurdo.

Proposta poi l' equazione integrabile

$2dx\,(y + z) + dy\,(x + 3y + 2z) + dz\,(x + y) = 0$

supponendovi y costante, ci viene da integrare

$2dx\,(y + z) + dz\,(x + y) = 0$, che diventa differenziale esatta moltiplicandola per $\frac{1}{(y+z)(x+y)}$, e si ha

$\frac{2dx}{x+y} + \frac{dz}{y+z} = 0$, il cui integrale è

$2l\,(x + y) + l\,(y + z) = C$, essendo C funzione di y.

Inoltre la differenziale totale di questo integrale è

$\frac{2dx + 2dy}{x+y} + \frac{dy + dz}{y+z} = (\frac{dC}{dy})\, dy$, ovvero

$2dx\,(y + z) + 2dy\,(y + z) + dy\,(x + y) + dz\,(x + y) = (\frac{dC}{dy})\, dy\,.\,(x + y)(y + z)$, che paragonata con la proposta ci dà

$(\frac{dC}{dy})\, dy = dC = 0$, e quindi $C = A$, essendo A una vera costante.

Sarà dunque l' integrale completo

$(x + y)^2 (y + z) = A$.

§. 231. Facciamo alcuni altri esempj.

I. Quale è l' integrale completo dell' equazione

$dx\,(y + z) + dy\,(x + z) + dz\,(x + y) = 0$?

Esaminando primieramente se è suscettibile d' integrazione, il paragone di essa con la formula

$Pdx + Qdy + Rdz = 0$, ci dà

$P = y + z$, $Q = x + z$, $R = x + y$, $(\frac{dP}{dy}) = 1 = (\frac{dQ}{dx})$, $(\frac{dP}{dz}) = 1 = (\frac{dR}{dx})$, $(\frac{dQ}{dz}) = 1 = (\frac{dR}{dy})$, il criterio d' integrabilità

$R(\frac{dP}{dy}) - P(\frac{dR}{dx}) + Q(\frac{dR}{dx}) - R(\frac{dQ}{dx}) + P(\frac{dQ}{dz}) - Q(\frac{dP}{dz}) = 0$, diviene

$x + y - y - z + x + z - x - y + y + z - x - z = 0$, ed è soddisfatto.

L' equazione dunque ammette integrazione. Assicurati di questo, supponiamo z costante, ed allora avremo

$dx\,(y + z) + dy\,(x + z) = 0$, ovvero

$\frac{dx}{x+z} + \frac{dy}{y+z} = 0$, di cui l' integrale è

$l\,(x + z) + l\,(y + z) = f\,(z)$, ed anche

$(x + z)\,(y + z) = Z$ indicando per Z una funzione di z da determinarsi, e che dovremo determinare in maniera, che il differenziale totale di quest' equazione combini con la proposta.

Questo differenziale totale è

$dx(y + z) + dy(x + z) + dz\,(x + y + 2z) = (\frac{dZ}{dz})\, dz$, ovvero

$dx\,(y + z) + dy\,(x + z) + dz\,(x + y) + dz\,(2z - (\frac{dZ}{dz})) = 0$, il quale paragonato con la proposta ci dà

$2z - (\frac{dZ}{dz}) = 0$, ed in conseguenza $Z = z^2 + Cost.$ Sarà dunque

$(x + z)(y + z) = z^2 + Cost.$, ovvero

$xy + yz + xz = Cost.$ il ricercato integrale completo.

II. Paragonando l' equazione differenziale

$dx(yy + yz + zz) + dy(zz + xz + xx) + dz(xx + xy + yy) = 0$ con la formula

$Pdx + Qdy + Rdz = 0$, si ha

$P = yy + yz + zz$, $Q = zz + xz + xx$, $R = xx + xy + yy$, $(\frac{dP}{dy}) = 2y + z$, $(\frac{dP}{dz}) = y + 2z$, $(\frac{dQ}{dx}) = z + 2x$, $(\frac{dQ}{dz}) = 2z + x$, $(\frac{dR}{dx}) = 2x + y$, $(\frac{dR}{dy}) = 2y + x$, e perciò il criterio

$$R\left\{(\tfrac{dP}{dy}) - (\tfrac{dQ}{dx})\right\} + P\left\{(\tfrac{dQ}{dz}) - (\tfrac{dR}{dy})\right\} + Q\left\{(\tfrac{dR}{dx}) - (\tfrac{dP}{dz})\right\} = 0$$

diventa

$2(yy + xy + xx)(y - x) + 2(yy + yz + zz)(z - y) + 2(zz + xz + xx)(x - z) = 0$, che eseguendo le moltiplicazioni, trovasi formare un' equazione identica; dunque la proposta è integrabile.

Per trovarne l' integrale, suppongasi z costante e sarà

$\frac{dx}{xx + xz + zz} + \frac{dy}{yy + yz + zz} = 0$, il cui integrale è

$$\frac{2}{z\sqrt{3}}\,Ang.\,tang.\,\frac{x\sqrt{3}}{2z + x} + \frac{2}{z\sqrt{3}}\,Ang.\,tang.\,\frac{y\sqrt{3}}{2z + y} = f(z),$$

il quale per la riunione dei due angoli si riduce a

$\frac{2}{z\sqrt{3}}\,Ang.\,tang.\,\frac{(xz + yz + xy)\sqrt{3}}{2zz + xz + yz - xy} = f(z)$. Poniamo dunque

$\frac{xz + yz + xy}{2zz + xz + yz - xy} = Z$, e siccome è

$\frac{1}{Z} = \frac{2zz + xz + yz - xy}{xy + xz + yz}$, si avrà

$1 + \frac{1}{Z} = \frac{2z(x + y + z)}{xy + xz + yz}$, e perciò

$\frac{xy + xz + yz}{x + y + z} = \frac{2Zz}{1 + Z} = Fz$. Abbandonata ora la funzione Z, poniamo subito per l' integrale della proposta

$\frac{xy + xz + yz}{x + y + z} = \Sigma = Fz$, e presane la differenziale totale troveremo $(\frac{d\Sigma}{dz}) = 0$, e quindi $\Sigma = Cost.$ Sarà pertanto

$\frac{xy + xz + yz}{x + y + z} = Cost.$, ovvero

$xy + xz + yz = C(x + y + z)$ il ricercato integrale completo.

E qui osservo che talvolta l' equazione può essere integrabile senza che sia soddisfatto il criterio d' integrabilità: ciò succede quando la relazione tra le variabili dataci dall' equazione di condizione non adempita, soddisfà essa medesima alla proposta differenziale. Tal relazione è allora un integrale particolare, perchè in lei non ponno ritrovarsi altre costanti, che quelle contenute nella differenziale data.

Per esempio l' equazione

$(z - y)dx + xdy + (y - z)dz = 0$, comparisce non integrabile perchè il criterio d' integrabilità $z - x - y = 0$ non è un' equazione identica: pure essa ha per integrale particolare la stessa $z - x - y = 0$, giacchè facendo $z = x + y$ rimane soddisfatta la differenziale medesima

$(z - y)dx + xdy + (y - z)dz = 0$.

§. 232. Negli addotti esempj le variabili x, y, z componevano in ciascun termine lo stesso numero di dimensioni: ponendo mente a questa condizione si può avere un metodo generale per trattare simili equazioni: eccolo.

Supponendo dunque che i coefficienti P, Q, R dell' equazione differenziale

$Pdx + Qdy + Rdz = 0$ siano funzioni omogenee di x, y, z di un numero qualunque n di dimensioni, poniamo $x = pz$, $y = qz$, e si avrà $P = z^n S$; $Q = z^n T$, e $R = z^n V$, ove S, T, V saranno funzioni delle due variabili p, q. Essendo poi $dx = pdz + zdp$, $dy = qdz + zdq$, la nostra equazione prenderà questa forma

$dz(pS + qT + V) + Szdp + Tzdq = 0$, ovvero

$\frac{dz}{z} + \frac{Sdp + Tdq}{pS + qT + V} = 0$, della quale non potrà aversene l'integrale se la formula differenziale a due variabili

$\frac{Sdp + Tdq}{pS + qT + V}$ non è integrabile da se medesima, il che avrà luogo se l'equazione

$$(qT + V)\left(\frac{dS}{dq}\right) + pT\left(\frac{dS}{dp}\right) - (pS + V)\left(\frac{dT}{dp}\right) - qS\left(\frac{dT}{dq}\right) - S\left(\frac{dV}{dq}\right) + T\left(\frac{dV}{dp}\right) = 0$$

sarà identica: l'integrale allora sarà

$lz + \int \frac{Sdp + Tdq}{pS + qT + V} = Cost.$, ove converrà porre $\frac{x}{z}$ per p, ed $\frac{y}{z}$ per q.

Nell'esempio I. del §. antecedente si ha

$P = y + z$, $Q = x + z$, $R = x + y$; sarà dunque $S = q + 1$, $T = p + 1$; $V = p + q$, e quindi

$\frac{dz}{z} + \frac{(q+1)dp + (p+1)dq}{2pq + 2p + 2q} = 0$; il qui esposto criterio ci dà

$(pq + q + p + q).1 - (pq + p + p + q).1 - (q + 1).1 + (p + 1).1 = 0$, che essendo un'equazione identica, ci assicura essere integrabile la proposta differenziale.

L'integrale è

$lz + \frac{1}{2} l(pq + p + q) = \frac{1}{2} l(xy + xz + yz) = Cost.$, ovvero

$xy + xz + yz = C$.

§. 233. Abbiamo fin qui considerate le equazioni del primo ordine nel quale i differenziali non sono elevati al di là della prima potenza: se ciò non fosse, bisognerebbe incominciare dal ridurre le equazioni differenziali a questo stato, quando è possibile, e cercarne in seguito l'integrale. Se questa riduzione non ha luogo, possiamo assicurare che l'equazione proposta non è la differenziale totale di alcuna equazione fra tre variabili x, y, z.

Data l'equazione

$$Pdx^2 + Qdy^2 + Rdz^2 = 2Sdxdy + 2Tdxdz + 2Vdydz$$

si trova subito

$$dz = \frac{Tdx + Vdy \pm \sqrt{\{(T^2 - PR)dx^2 + 2(TV + RS)dxdy + (V^2 - QR)dy^2\}}}{R}$$

Ora sparirà l'irrazionalità dal valore di dz, quando $(T^2 - PR)(V^2 - QR) = (TV + RS)^2$, cioè quando $R = \frac{PV^2 + 2STV + QT^2}{PQ - S^2}$; dunque proposta una simile equazione di secondo grado, converrà prima di tutto che abbia luogo questa condizione tra i di lei coefficienti, onde possa ridursi al primo, ed esser suscettibile dell'applicazione delle regole date qui sopra. In generale qualunque sia il grado dell'equazione differenziale del primo ordine, bisogna che essa sia decomponibile in fattori di primo grado di questa forma

$Mdx + Ldy + Ndz = 0$, onde possa tentarsene l'integrazione.

§. 234. Passando a considerare l'equazione differenziale a quattro variabili

$Pdx + Qdy + Sdu + Rdz = 0$, nella quale si riguarda z

come funzione delle tre variabili x, y, u; se questa diviene integrabile per la moltiplicazione di un fattore M, è necessario che

$MPdx + MQdy + MSdu + MRdz = 0$, sia una differenziale totale (25) vale a dire che sia la somma di queste tre differenze parziali

$$MPdx + MR\left(\frac{dz}{dx}\right)dx = 0,\quad MQdy + MR\left(\frac{dz}{dy}\right)dy = 0,$$

$MSdu + MR\left(\frac{dz}{du}\right)du = 0$, poichè dz vi tiene il luogo di

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)dx + \left(\frac{dz}{dy}\right)dy + \left(\frac{dz}{du}\right)du.$$

Ora se quell' equazione è una differenziale totale rapporto alle variabili x, y, u; le tre seguenti saranno anche tre differenziali totali.

$MPdx + MQdy + MRdz = 0$, rapporto ad x, y;

$MQdy + MSdu + MRdz = 0$, rapporto ad u, y;

$MPdx + MSdu + MRdz = 0$, rapporto ad x, u;

dunque quando la proposta moltiplicata per M, potrà divenire una differenziale totale, ed essere in conseguenza integrabile, avranno luogo queste tre equazioni di condizione

$$R\left\{\left(\frac{dP}{dy}\right)-\left(\frac{dQ}{dx}\right)\right\}+P\left\{\left(\frac{dQ}{dz}\right)-\left(\frac{dR}{dy}\right)\right\}+Q\left\{\left(\frac{dR}{dx}\right)-\left(\frac{dP}{dz}\right)\right\}=0,$$

$$R\left\{\left(\frac{dS}{dy}\right)-\left(\frac{dQ}{du}\right)\right\}+S\left\{\left(\frac{dQ}{dz}\right)-\left(\frac{dR}{dy}\right)\right\}+Q\left\{\left(\frac{dR}{du}\right)-\left(\frac{dS}{dz}\right)\right\}=0,$$

$$R\left\{\left(\frac{dP}{du}\right)-\left(\frac{dS}{dx}\right)\right\}+P\left\{\left(\frac{dS}{dz}\right)-\left(\frac{dR}{du}\right)\right\}+S\left\{\left(\frac{dR}{dx}\right)-\left(\frac{dP}{dz}\right)\right\}=0;$$

quando poi non saranno soddisfatti questi tre criterj, potremo asserire che non esiste in natura un' equazione $V = 0$, la cui differenziale totale eguagli la proposta moltiplicata per un fattore.

Avremmo potuto giugnere alle medesime condizioni riflettendo che se la differenziale

$MPdx + MQdy + MSdu + MRdz = 0$ è una differenziale totale di un' equazione $V = 0$, debb' essere

$$\left(\frac{dMP}{dy}\right)=\left(\frac{dMQ}{dx}\right),\ \left(\frac{dMP}{du}\right)=\left(\frac{dMS}{dx}\right),\ \left(\frac{dMP}{dz}\right)=\left(\frac{dMR}{dx}\right),$$

$$\left(\frac{dMQ}{du}\right)=\left(\frac{dMS}{dy}\right),\ \left(\frac{dMQ}{dz}\right)=\left(\frac{dMR}{dy}\right),\ \left(\frac{dMS}{dz}\right)=\left(\frac{dMR}{du}\right);$$

eseguite le differenziazioni indicate in queste equazioni, ed eliminato il fattore M e le sue differenze parziali, avremmo trovati appunto i medesimi tre criterj d' integrabilità.

Si vede come trovar si potrebbero le condizioni per l' integrabilità di un' equazione a qualunque numero m di variabili: il di loro numero è $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$: se ne troverà facilmente la ragione.

§ 235. Riguardo alle equazioni degli ordini superiori ci bisogna distinguere due casi: o le variabili sono tutte indipendenti tra loro, per il che una si considera come funzione di tutte le altre, quando si ha tra esse un' equazione; o sono tutte considerate funzioni di una sola variabile x, per quanto nulla sia stabilito sopra la natura di esse, e l' equazione che esiste tra loro altro non ci dica se non che una è data per mezzo di tutte le altre. Per esempio data l' equazione $V = F(x, y, z) = 0$, se x ed y sono indipendenti tra loro, l' equazione differenziale totale del secondo ordine (31) è

$$d^2V = \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)dx^2 + \left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)dy^2 + 2\left(\frac{d^2V}{dxdz}\right)dxdz + 2\left(\frac{d^2V}{dydx}\right)dydx +$$
$$2\left(\frac{d^2V}{dydz}\right)dydz + \left(\frac{d^2V}{dz^2}\right)dz^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)d^2z = 0, \text{ essendo}$$

$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right)dx + \left(\frac{dz}{dy}\right)dy$, e

$d^2z = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)dx^2 + 2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)dxdy + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)dy^2$: se poi le variabili y, z si considerassero come funzioni di x, allora la differenziale totale del secondo ordine avrebbe di più il termine $\left(\frac{dV}{dy}\right)d^2y$: in questo caso però d^2y, d^2z terrebbero luogo di $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)dx^2$, $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)dx^2$; e dy, dz di $\left(\frac{dy}{dx}\right)dx$, $\left(\frac{dz}{dx}\right)dx$.

Noi cercheremo i criterj d' integrabilità per il caso che tutte le variabili si considerino funzioni di una, giacchè coll' eguagliare a zero i coefficienti dei termini, che vi sono allora di più, si avranno i criterj per l'altro caso.

Sia dunque $V = 0$ un' equazione differenziale dell' ordine n^{esimo} tra le variabili x, y, z, u, ec. Se noi supponiamo che $V = 0$ risulti immediatamente dalla differenziazione di un' equazione dell' ordine inferiore di una unità $P = 0$, sarà $V = dP = 0$, ovvero $MV = dP = 0$, essendo M un fattore comune a tutti i termini di dP, e che la divisione può aver fatto svanire, onde abbiasi $V = 0$.

La funzione differenziale MV dell' ordine n^{esimo} sarà dunque una differenziale esatta della funzione P di un ordine immediatamente inferiore: ora l' equazioni di condizione che debbono sussistere, acciò MV sia una differenziale esatta, o ammetta un integrale dell' ordine inferiore, le abbiamo trovate al §. 16: queste supponendo

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right) dx = p dx,\ dp = \left(\frac{dp}{dx}\right) dx = q dx,\ dq = r dx \text{ ec.},$$

$$dz = p' dx,\ dp' = q' dx \text{ ec.},\ du = p'' dx,\ dp'' = q'' dx \text{ ec.}$$

sono

$$\left(\frac{dMV}{dy}\right) - \frac{1}{dx} d.\left(\frac{dMV}{dp}\right) + \frac{1}{dx^2} d^2\left(\frac{dMV}{dq}\right) - \frac{1}{dx^3} d^3\left(\frac{dMV}{dr}\right) + \text{ec.} = 0,$$

$$\left(\frac{dMV}{dz}\right) - \frac{1}{dx} d.\left(\frac{dMV}{dp'}\right) + \frac{1}{dx^2} d^2\left(\frac{dMV}{dq'}\right) - \text{ec.} = 0,$$

$$\left(\frac{dMV}{du}\right) - \frac{1}{dx} d.\left(\frac{dMV}{dp''}\right) + \frac{1}{dx^2} d^2\left(\frac{dMV}{dq''}\right) - \text{ec.} = 0,$$

ec. ec.

ed il loro numero è eguale a quello delle variabili x, y, z, u ec., meno una.

Se noi facciamo

$$\begin{aligned} dV = L dx &+ N dy + P dp + Q dq + \text{ec.} \\ &+ N' dz + P' dp' + Q' dq' + \text{ec.} \\ &+ N'' du + P'' dp'' + Q'' dq'' + \text{ec.} \\ &\quad \text{ec.} \qquad \text{ec.} \end{aligned}$$

potranno quell' equazioni mettersi sotto la forma seguente

$$\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{ec.}\right) M - \left(P - 2\frac{dQ}{dx} + 3\frac{d^2R}{dx^2} - \text{ec.}\right) \times \frac{dM}{dx} + \left(Q - 3\frac{dR}{dx} + \text{ec.}\right)\frac{d^2M}{dx^2} - (R - \text{ec.})\frac{d^3M}{dx^3} + \text{ec.} = - aV + b\frac{dV}{dx} - c\frac{d^2V}{dx^2} + \text{ec.},$$

$$\left(N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} - \text{ec.}\right) M - \left(P' - 2\frac{dQ'}{dx} + \text{ec.}\right)\frac{dM}{dx} + \left(Q' - 3\frac{dR'}{dx} + \text{ec.}\right)\frac{d^2M}{dx^2} - (R' - \text{ec.})\frac{d^3M}{dx^3} + \text{ec.} = - a'V + b'\frac{dV}{dx} - c'\frac{d^2V}{dx^2} + \text{ec.},$$

$$\left(N'' - \frac{dP''}{dx} + \frac{d^2Q''}{dx^2} - \text{ec.}\right) M - \left(P'' - 2\frac{dQ''}{dx} + \text{ec.}\right)\frac{dM}{dx} + \left(Q'' - 3\frac{dR''}{dx} + \text{ec.}\right)\frac{d^2M}{dx^2} - (R'' - \text{ec.})\frac{d^3M}{dx^3} + \text{ec.} = - a''V + b''\frac{dV}{dx} - c''\frac{d^2V}{dx^2} + \text{ec.}$$

ec. ec.

ove

$$a = \left(\frac{dM}{dy}\right) - \frac{1}{dx} d\left(\frac{dM}{dp}\right) + \frac{1}{dx^2} d^2\left(\frac{dM}{dq}\right) - \text{ec.},$$

$$b = \left(\frac{dM}{dp}\right) - \frac{2}{dx} d\left(\frac{dM}{dq}\right) + \frac{3}{dx^2} d^2\left(\frac{dM}{dr}\right) - \text{ec.},$$

$$c = \left(\frac{dM}{dq}\right) - \frac{3}{dx} d\left(\frac{dM}{dr}\right) + \text{ec.};$$

i valori poi di a', b', c' ec. si ottengono ponendo in queste espressioni z, p', q' ec., in vece di y, p, q ec, e nelle stesse espressioni ponendo u, p'', q'', in vece di y, p, q ec., si avranno i valori di a'', b'', c'' ec.

E quest' equazioni debbono essere identiche se la proposta ammette un integrale immediatamente inferiore: ora avendosi in virtù della proposta medesima $V = 0$, $\frac{dV}{dx} = 0$, $\frac{d^2V}{dx^2} = 0$ ec., quell' equazioni diverranno

$$\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \text{ec.}\right)M - \left(P - 2\frac{dQ}{dx} + \text{ec.}\right)\frac{dM}{dx} + \left(Q - 3\frac{dR}{dx} + \text{ec.}\right)\frac{d^2M}{dx^2} - \text{ec.} = 0,$$

$$\left(N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} - \text{ec.}\right)M - \left(P' - 2\frac{dQ'}{dx} + \text{ec.}\right)\frac{dM}{dx} + \left(Q' - 3\frac{dR'}{dx} + \text{ec.}\right)\frac{d^2M}{dx^2} + \text{ec.} = 0,$$

ec. ec.

e dovranno essere identiche se vi faremo $V = 0$, $\frac{dV}{dx} = 0$, $\frac{d^2V}{dx^2} = 0$ ec., cioè se sostituiremo in esse il valore di uno dei più alti differenziali dedotto dall' equazione $V = 0$, il valore del differenziale susseguente dedotto dall' equazione $\frac{dV}{dx} = 0$ ec.

Eliminando dunque M, avremo delle equazioni di condizione tra quantità tutte cognite, le quali bisognerà che siano identiche, acciò la proposta ammetta integrazione: il loro numero è eguale a quello delle variabili meno due.

Può accadere che questi criterj d' integrabilità richiedano per essere soddisfatti la sussistenza di un' altra equazione differenziale di un ordine inferiore di una unità della proposta: allora o questa stessa equazione soddisfà alla proposta, e ne sarà un integrale particolare; o non vi soddisfà, e la proposta non sarà integrabile.

Riguardo alla eliminazione di M, si rammenti quanto abbiamo detto ai §§. 106 e 107.

§. 236. Per far qualche esempio, prendiamo l' equazione

$$(xdx + zdz)\,d^2y - zdyd^2z - dy(dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0,$$

ed avremo

$V = xq + zp'q - zpq' - p - p^3 - pp'^2$, e perciò

$N = 0$, $P = -zq' - 1 - 3p^2 - p'^2$, $Q = x + zp'$, $N' = p'q - pq'$, $P' = zq - 2pp'$, $Q' = -zp$: sostituendo questi valori nelle equazioni di condizione sopra trovate, si avrà

$$(6p'q' + 6pq + 2zr')M + (3 + 3p^2 + 3p'^2 + 3zq')\frac{dM}{dx} + (x + zp')\frac{d^2M}{dx^2} = 0,\quad 2rM + 3q\frac{dM}{dx} + p\frac{d^2M}{dx^2} = 0.$$

Se noi eliminiamo $\frac{d^2M}{dx^2}$ con queste due equazioni, avremo

$$\left.\begin{array}{l}\{6pp'q' + 6p^2q + 2zpr' - 2xr - 2zp'r\}M \\ + \{3p + 3p^3 + 3pp'^2 + 3zpq' - 3xq - 3zp'q\}\frac{dM}{dx}\end{array}\right\} = 0.$$

Senza proseguire l' eliminazione, è facile vedere, che sostituendo in quest' ultima equazione i valori di q' e di r', ricavati dall' equazioni

$V = xq + zp'q - zpq' - p - p^3 - pp'^2 = 0$,

$\frac{dV}{dx} = zp'r - 3p^2q - 3pp'q' - zpr' + xr = 0$,

diviene essa identica; dunque la proposta è completamente integrabile.

Per un altro esempio prendiamo l' equazione

$$(x + xy)\,dx^2 + y^2dxdy + yzdxdz + xdy^2 + xdz^2 + xyd^2y + xzd^2z = 0,$$ e si avrà

$V = x + xy + y^2p + yzp' + xp^2 + xp'^2 + xyq + xzq'$,

e quindi

$N = x + 2yp + zp' + xq$, $P = y^2 + 2xp$, $Q = xy$, $N' = yp' + xq'$, $P' = yz + 2xp'$, $Q' = xz$, e le equazioni di condizione saranno

$$(x + zp')\mathrm{M} - (y^2 - zy)\frac{d\mathrm{M}}{dx} + xy\frac{d^2\mathrm{M}}{dx^2} = 0$$

$$p\mathrm{M} + (y - z)\frac{d\mathrm{M}}{dx} - x\frac{d^2\mathrm{M}}{dx^2} = 0.$$

L' eliminazione poi di $\frac{d^2\mathrm{M}}{dx^2}$ ci dà $(x + zp' + yp)\mathrm{M} = 0$, la quale equazione non essendo identica, ei dice che la proposta non è completamente integrabile; siccome poi $x + zp' + yp = 0$ vi soddisfa, perciò ne sarà un integrale particolare.

§. 237. Potrebbero estendersi queste dottrine alla ricerca dei criterj che debbono sussistere, affinchè una proposta equazione differenziale ammetta un integrale di più ordini inferiore: noi però non ce ne occuperemo inviando per questo i nostri Lettori al Calcolo Integrale del Marchese di Condorcet.

Per ciò che riguarda poi le equazioni per le quali non sono soddisfatti i criterj d' integrabilità, noi vedremo in un Capitolo a parte cosa esse significhino.

C A P. X.

Integrazione dell' Equazioni a Differenze Parziali.

§. 238. Nel Capitolo II. del Calcolo Integrale abbiamo esposti i principj generali per l' integrazione delle equazioni a Differenze Parziali, e nel Capitolo IV. abbiamo trattate equazioni di tal fatta, supponendo però che esse fossero lineari, e i lor coefficienti o costanti o funzioni di una sola variabile: in questo Capitolo considereremo gli altri casi.

Onde presentare con ordine queste dottrine, incominceremo dalle Equazioni a Differenze Parziali del primo ordine per procedere in seguito a quelle degli ordini superiori.

Rapporto a queste equazioni, noi abbiamo dimostrato (118) che l' integrale completo di una Equazione a Differenze Parziali del primo ordine fra tre variabili x, y, z dee contenere due costanti arbitrarie a, b, ovvero una funzione arbitraria $f(\omega)$ di una quantità ω funzione determinata di quelle variabili, che ottenuto l' integrale con due costanti arbitrarie si può sempre da esso dedurre l' integrale completato con la funzione arbitraria: ora l' equazione del primo ordine sia anche lineare, ed abbiasi da integrare

$\left(\frac{dz}{dx}\right) + \mathrm{M}\left(\frac{dz}{dy}\right) - \mathrm{N} = 0$, essendo M, N funzioni date di x, y, z. Supponiamo che

$\mathrm{F} = \mathrm{F}(x, y, z) = 0$ sia l' integrale di quest' equazione. Sussistendo l' equazione $\mathrm{F} = 0$, sussisteranno anche insiem con essa l' equazioni

$$(1) \ldots\ldots \left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{d\mathrm{F}}{dz}\right) = 0$$

$$(2) \ldots\ldots \left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dF}{dz}\right) = 0$$

che sono le differenze parziali della stessa equazione. Sostituiamo i valori di $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ ricavati dalle equazioni (1), (2) nella proposta, e si avrà

$$(a) \ldots\ldots \left(\frac{dF}{dx}\right) + M\left(\frac{dF}{dy}\right) + N\left(\frac{dF}{dz}\right) = 0,$$

che sarà soddisfatta se $F(x, y, z) = 0$ è l' integrale cercato.

D' altr' onde supponendo le variabili y e z come dipendenti da x, la stessa equazione $F(x, y, z) = 0$ ci dà anche

$$dF = \left(\frac{dF}{dx}\right)dx + \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)dx + \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)dx = 0,$$

e dovrà essa divenire identica se per $\left(\frac{dF}{dx}\right)$ poniamo il suo valore datoci dall' equazione (a): dovrà cioè

$$dF = \left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)dx - Mdx\right\}\left(\frac{dF}{dy}\right) + \left\{\left(\frac{dz}{dx}\right)dx - Ndx\right\}\left(\frac{dF}{dz}\right) = 0$$

avere il primo membro effettivamente nullo: ora questa differenziale dF si annullerà indipendentemente dalla forma della funzione F, se stabiliremo tra le tre variabili x, y, z tali relazioni che avverino queste equazioni

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)dx - Mdx = 0, \quad \left(\frac{dz}{dx}\right)dx - Ndx = 0, \text{ ovvero}$$

$$dy - Mdx = 0, \quad dz - Ndx = 0.$$

Queste equazioni essendo fra tre variabili serviranno a determinare i valori di queste variabili in funzioni della terza, di maniera che la sostituzione di questi valori nella funzione $F(x, y, z)$ renderà ancora essa una funzione di quella terza variabile: dunque, dovendo allora la sua differenziale divenire nulla, bisognerà che quella variabile sparisca da se medesima dalla funzione $F(x, y, z)$, ed essa non potrà contenere allora che quantità costanti. Ora le due equazioni

$$dy - Mdx = 0, \quad dz - Ndx = 0,$$

essendo del primo ordine, i loro integrali conterranno due costanti arbitrarie a, b: considerando infatti y, z come funzioni della terza x, se noi eliminiamo per mezzo di queste due equazioni la variabile z, si perverrà ad un' equazione del secondo ordine in x ed y, e ne sarà l' integrale completo un' equazione contenente due costanti arbitrarie a, b: avremo di poi z in funzione di x e di y per mezzo di una di quelle due equazioni.

Frattanto se noi sostituiamo in $F(x, y, z)$ i valori di y e di z in x ricavati dalle due equazioni del primo ordine, questa funzione $F(x, y, z)$ conterrà soltanto le costanti a, b, e quelle che sono contenute in M ed N; di modo che essa diverrà semplicemente funzione di a e b, che rappresenteremo per $\varphi(a, b)$.

Per conseguenza l' integrale $F(x, y, z) = 0$ si ridurrà a $\varphi(a, b) = 0$, la quale equazione ci dice, che di quelle due costanti una sarà sempre funzione dell' altra. Ma in vece delle costanti a, b possiamo sostituirne i valori espressi in x, y, z, e dati da quelle due equazioni, ove esse entrano come arbitrarie: dunque se supponiamo essere P e Q questi valori, l' integrale della proposta diverrà $\varphi(P, Q) = 0$, indicando per φ una funzione arbitraria.

§. 239. Di qui si ricava un metodo generale per trovare l' integrale completo di un' equazione qualunque a differenze parziali del primo ordine a tre variabili x, y, z, e lineare nel tempo stesso. Proposta l' equazione

$\left(\frac{dz}{dx}\right) + M\left(\frac{dz}{dy}\right) = N$, ove M, N sono funzioni di x, y, z, si facciano le due equazioni

$dy - Mdx = 0$, $dz - Ndx = 0$: in seguito si trovino, se è possibile, i due integrali di queste equazioni, o di due altre equazioni, le quali dipendendo da esse, ne possano tenere il luogo, e siano P, Q i valori delle due costanti arbitrarie che essi debbono contenere, e si avrà $\varphi(P, Q) = 0$ per esprimere il dimandato integrale completo.

All' equazione $\varphi(P, Q) = 0$ puossi anche dare la forma $Q = \Psi(P)$ indicando anche per Ψ una funzione arbitraria.

§. 240. Siccome per giungere a questo risultato noi abbiamo supposte certe relazioni tra le variabili x, y, z, per cui z ed x consideravansi funzione della x, e siccome nell' equazione $Q = \Psi(P)$ debbono essere indipendenti queste variabili, se vuolsi che ella sia l' integrale della proposta, così non sarà fuor di proposito il dimostrare che anche in quest' ultima ipotesi, $Q = \Psi(P)$ soddisfà all' equazione a differenze parziali

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) + M\left(\frac{dz}{dy}\right) - N = 0.$$

Si vedrà allora che le considerazioni da noi fatte per ottenere quell' equazione finale, non erano che ausiliarj artifizj di Analisi.

Supponendo le variabili x, y indipendenti tra loro, dall' equazione $Q + \Psi(P) = 0$ noi deduciamo queste due differenziali parziali.

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) + \left(\frac{dQ}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left\{\left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{dP}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)\right\}\left(\frac{d\Psi}{dP}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dQ}{dy}\right) + \left(\frac{dQ}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) + \left\{\left(\frac{dP}{dy}\right) + \left(\frac{dP}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\right\}\left(\frac{d\Psi}{dP}\right) = 0,$$

Ora ricavando da queste due equazioni i valori di $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ e sostituendoli nella proposta, dovrà questa divenire identica se $Q = \Psi(P)$ ne è l' integrale: dovrà dunque essere identica l' equazione

$$(a) \ldots\ldots \left(\frac{dQ}{dx}\right) + M\left(\frac{dQ}{dy}\right) + \left(\frac{dQ}{dz}\right)N + \left\{\left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{dP}{dy}\right)M + \left(\frac{dP}{dz}\right)N\right\}\left(\frac{d\Psi}{dP}\right) = 0,$$ che si ottiene con quelle sostituzioni.

Supponendo adesso che le variabili y, z dipendano da x, avendo con esso le relazioni espresse da quelle due equazioni differenziali $dy - Mdx = 0$, $dz - Ndx = 0$, dall' equazione $Q + \Psi(P) = 0$ ricaveremo

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) + \left(\frac{dQ}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dQ}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left\{\left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{dP}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dP}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)\right\}\left(\frac{d\Psi}{dP}\right) = 0,$$ la quale sarà in conseguenza identica mettendovi per $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ i respettivi valori M, N ricavati da quelle due equazioni differenziali

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)dx - Mdx = 0, \quad \left(\frac{dz}{dx}\right)dx - Ndx = 0,$$

che contengono le relazioni tra le variabili x, y, z.

L' equazione identica sarà dunque

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) + M\left(\frac{dQ}{dy}\right) + N\left(\frac{dQ}{dz}\right) + \left\{\left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{dP}{dy}\right)M + \left(\frac{dP}{dz}\right)N\right\}\left(\frac{d\Psi}{dP}\right) = 0,$$ che è la stessa equazione (a).

§. 241. Facciamo qualche esempio:

Sia proposta l' equazione

$$(z^2 - y)\left(\frac{dz}{dx}\right) + 2x(z^2 - y)\left(\frac{dz}{dy}\right) + 2xz = 0;$$ paragonata con la formula generale del § 238, si ha

$M = 2x$, $N = -\frac{2xz}{z^2 - y}$: le due equazioni differenziali dunque saranno

$dy - 2xdx = 0$, $dz + \frac{2xzdx}{z^2 - y} = 0$: sostituendo il valore di dy nella seconda equazione, si ha

$dz + \frac{zdy}{z^2 - y} = 0$, la quale si riduce integrabile moltiplicata per il fattore $\frac{z^2 - y}{z^2}$: si ha infatti

$dz + \frac{zdy - ydz}{z^2} = 0$, il cui integrale completo è $z + \frac{y}{z} = b$; ed essendo l' integrale della prima equazione $y - x^2 = a$, avremo $z + \frac{y}{z} = \Psi(y - x^2)$ per rappresentare l' integrale dell' equazione a differenze parziali proposta.

Per un altro esempio, sia l' equazione

$x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right) + z = 0$, e si avrà

$M = \frac{y}{x}$, $N = -\frac{z}{x}$, e quindi
$dy - Mdx = 0$, $dz - Ndx = 0$ divengono
$dy - \frac{y}{x}\,dx = 0$, $dz + \frac{zdx}{x} = 0$, i cui integrali sono $\frac{y}{x} = a$, $zx = b$, e perciò $zx = \Psi\left(\frac{y}{x}\right)$ sarà l' integrale cercato.

§. 242. Veniamo alle equazioni a quattro variabili. Siano esse x, y, z, u, e consideriamo z come funzione delle altre tre x, y, u, essendo queste indipendenti tra loro.

Abbiamo veduto che l' integrale completo (118 e segg.) di un' equazione a differenze parziali del primo ordine tra le variabili x, y, z, u, e le differenze parziali $\left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dy}\right), \left(\frac{dz}{du}\right)$, dee contenere tre costanti arbitrarie a, b, c, ovvero una funzione arbitraria di due determinate funzioni P, Q delle stesse variabili, cioè $\varphi(P, Q)$. Data dunque un' equazione a differenze parziali, applichiamoci alla ricerca del suo integrale completo. Sia l' equazione proposta lineare

$\left(\frac{dz}{dx}\right) + L\left(\frac{dz}{dy}\right) + M\left(\frac{dz}{du}\right) = N$, nella quale i coefficienti siano tante funzioni date di x, y, z, u. Supponiamo che il di lei integrale sia $F(x, y, z, u) = 0$.

Essendo le variabili x, y, u indipendenti tra loro, da questa equazione si dedurranno queste altre tre

$\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dF}{dz}\right) = 0$, $\left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dF}{dz}\right) = 0$,

$\left(\frac{dF}{du}\right) + \left(\frac{dz}{du}\right)\left(\frac{dF}{dz}\right) = 0$, dalle quali noi ricaviamo

$\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\left(\frac{dF}{dx}\right) : \left(\frac{dF}{dz}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right) = -\left(\frac{dF}{dy}\right) : \left(\frac{dF}{dz}\right)$,

$\left(\frac{dz}{du}\right) = -\left(\frac{dF}{du}\right) : \left(\frac{dF}{dz}\right)$, che sostituite nella proposta, la cangeranno in

$$(a) \;\ldots\; \left(\frac{dF}{dx}\right) + L\left(\frac{dF}{dy}\right) + M\left(\frac{dF}{du}\right) + N\left(\frac{dF}{dz}\right) = 0.$$

E quest' equazione dovrà essere soddisfatta se $F(x, y, z, u) = 0$ è l' integrale completo della proposta.

Per un altro verso se consideriamo le variabili y, u, z come funzioni della quarta x, l' equazione $F(x, y, z, u) = 0$ ci dà anche

$$dF = \left\{\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dF}{dz}\right) + \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dF}{du}\right)\right\} dx = 0$$

e quest' equazione avrà luogo insieme all' equazione (a).

Sostituendo dunque il valore di $\left(\frac{dF}{dx}\right)$ ricavato dalla stessa (a) in quest' ultima equazione, si avrà quest' altra

$$dF = \left\{\left(\frac{dy}{dx}\right) dx - Ldx\right\}\left(\frac{dF}{dy}\right) + \left\{\left(\frac{du}{dx}\right) dx - Mdx\right\}\left(\frac{dF}{du}\right) + \left\{\left(\frac{dz}{dx}\right) dx - Ndx\right\}\left(\frac{dF}{dz}\right) = 0,$$ il cui primo membro dovrà essere effettivamente nullo: ora se noi introduciamo tra le quattro variabili x, y, z, u le relazioni determinate dalle tre equazioni

$\left(\frac{dy}{dx}\right) dx - Ldx = 0$, $\left(\frac{dz}{dx}\right) dx - Ndx = 0$,

$\left(\frac{du}{dx}\right) dx - Mdx = 0$, cioè dalle equazioni $dy - Ldx = 0$, $dz - Ndx = 0$, $du - Mdx = 0$, la differenziale dF sarà nulla; dunque la funzione $F(x, y, z, u)$ non potrà contenere che quantità costanti.

Ora le due equazioni di cui si tratta essendo del primo ordine, avranno tre integrali che conterranno tre costanti arbitrarie a, b, c, per mezzo dei quali potremo determinare tre delle variabili x, y, z, u in funzione della quarta: dunque se nella funzione $F(x, y, u, z)$ si sostituiscono i valori di queste variabili, bisognerà che la variabile residua sparisca da se medesima, e la funzione F non conterrà altre quantità che le costanti a, b, c, e quelle costanti contenute nei coefficienti; dimodochè dopo questa sostituzione la funzione $F(x, y, z, u)$ diverrà necessariamente della forma $\varphi(a, b, c)$.

Ora i tre integrali di cui si tratta, determinano i valori di a, b, c in funzioni delle variabili x, y, u, z; che se siano questi valori P, Q, R, quegli integrali prenderanno la forma $a = P$, $b = Q$, $c = R$.

Dunque la funzione $F(x, y, u, z)$ diverrà $\varphi(P, Q, R)$, poichè questa è la sola forma che può divenire funzione di a, b, c in virtù dei tre integrali $P = a$, $Q = b$, $R = c$: dunque l' equazione $F(x, y, u, z) = 0$ diverrà $\varphi(P, Q, R) = 0$, dalla quale dedurremo $R = \Psi(P, Q)$ indicando per Ψ una funzione qualunque delle due P e Q.

§. 243. Riepilogando quanto abbiamo detto sin ora concluderemo

1°. Che l' integrazione di una equazione fra tre variabili $\left(\frac{dz}{dx}\right) + M\left(\frac{dz}{dy}\right) = N$ dipende da quella di queste due equazioni differenziali ordinarie

$dy - Mdx = 0$, $dz - Ndx = 0$: e se $P = a$, $Q = b$ sono gli integrali completi di queste due equazioni, o di due altre qualunque che da esse si deducano, l' equazione $Q = \Psi(P)$ rappresenta l' intregale completo dell' equazione a differenze parziali.

2°. Che l' integrazione di una equazione fra quattro variabili $\left(\frac{dz}{dx}\right) + L\left(\frac{dz}{dy}\right) + M\left(\frac{dz}{du}\right) = N$ dipende dall' integrazione di queste tre equazioni differenziali ordinarie

$dy - Ldx = 0$, $du - Mdx = 0$, $dz - Ndx = 0$;

di modo che se $P = a$, $Q = b$, $R = c$ rappresentano i tre integrali di queste equazioni, o di altre che da esse si deducano, sarà $R = \Psi(P, Q)$ l' integrale completo di quell' equazione a differenze parziali.

3°. In generale l' integrale completo di un' equazione $\left(\frac{dz}{dx}\right) + L\left(\frac{dz}{dy}\right) + M\left(\frac{dz}{du}\right) + H\left(\frac{dz}{dt}\right) +$ ec. $= N$ è $V = \Psi(P, Q, R$ ec.$)$, essendo $P = a$, $Q = b$, $R = c$ ec., $V = e$ gli integrali completi di queste equazioni

$dy - Ldx = 0$, $du - Mdx = 0$,
$dt - Hdx = 0$, ec. ec.
$dz - Ndx = 0$, o di altrettante da esse dedotte.

L' integrazione così delle equazioni a differenze parziali è ricondotta a quella delle differenziali ordinarie.

Osserviamo che l' equazioni $P = a$, $Q = b$, $R = c$ ec., ove a, b, c ec. sono costanti arbitrarie, danno ciascuna un integrale particolare della proposta: infatti l' integrale completo $\varphi(P, Q, R$ ec., $V) = 0$, a causa dell' essere la funzione indicata per φ arbitraria, può sempre ridursi ad una di queste equazioni $P - a = 0$, ovvero $Q - b = 0$, ovvero $R - c = 0$ ec.

Per fare qualche esempio di queste dottrine, prendiamo l' equazione

$$(2z - 2y)\left(\frac{dz}{dx}\right) - \left(\frac{dz}{dy}\right) - (x + 2z^2 - 2zy)\left(\frac{dz}{du}\right) - 1 = 0.$$

Questa ci dà

$L = -\frac{1}{2z - 2y}$, $M = -\frac{x + 2z^2 - 2zy}{2z - 2y}$, $N = \frac{1}{2z - 2y}$, e le tre equazioni differenziali saranno

$$(1) \ldots\ldots dy + \frac{dx}{2z - 2y} = 0,$$

$$(2) \ldots\ldots du + \frac{x + 2z^2 - 2zy}{2z - 2y}dx = 0,$$

$$(3) \ldots\ldots dz - \frac{dx}{2z - 2y} = 0.$$

Dall' equazioni (1), (3) si ricava

$$(4) \ldots\ldots dz + dy = 0:$$

Dall' equazioni (1) e (4) si ricava

$$(5) \ldots\ldots 2zdz + 2ydy - dx = 0:$$

Dall' equazioni infine (3), (2) si ricava

$$(6) \ldots\ldots du + xdz + zdx = 0:$$

ora gl' integrali completi dell' equazioni (4), (5), (6), sono $z + y = a$, $z^2 + y^2 - x = b$, $u + xz = c$; dunque $z^2 + y^2 - x = \Psi(z + y, u + xz)$ sarà l' integrale completo cercato: se ne potrebbe facilmente far la riprova.

§. 244. Consideriamo ora l' equazioni del primo ordine a differenze parziali che non sono lineari.

Se noi rappresentiamo $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ per p, q, la formula $F(x, y, z, p, q) = 0$, nella quale F significa una funzione qualunque delle quantità che si trovano tra le parentesi, sarà quella di una qualunque equazione a differenziali parziali del primo ordine.

Si tratta dunque di trovare l'integrale completo di quest'equazione $F(x, y, z, p, q) = 0$.

Essendo z una funzione delle variabili x, y, sia che queste si considerino indipendenti tra loro, o che y dipenda da x (nota al Cap. II. Calcolo Differenziale), sarà sempre $dz = pdx + qdy$, equazione che dovrà essere soddisfatta per mezzo di una delle due indeterminate p, q, l' altra essendo data dall' equazione

$F(x, y, z, p, q) = 0$.

Ora p, q non potendo esser funzioni di altre quantità che delle variabili x, y, z, se noi consideriamo l' equazione $dz - pdx - qdy = 0$ come una equazione differenziale a tre variabili, si sa (229) che debbe sussistere quest' equazione di condizione

$$(e) \ldots\ldots \left(\frac{dq}{dx}\right) - \left(\frac{dp}{dy}\right) + p\left(\frac{dq}{dz}\right) - q\left(\frac{dp}{dz}\right) = 0.$$

L' equazione data somministra poi queste tre differenziali parziali relativamente ad x, y, z

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dq}\right)\left(\frac{dq}{dx}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{dF}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dy}\right) + \left(\frac{dF}{dq}\right)\left(\frac{dq}{dy}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dF}{dz}\right) + \left(\frac{dF}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dz}\right) + \left(\frac{dF}{dq}\right)\left(\frac{dq}{dz}\right) = 0,$$ e per loro mezzo potremo eliminare le differenziali parziali di p o di q.

Eliminiamo quelle di q, e la prima e la terza di queste equazioni ci daranno

$$\left(\frac{dq}{dx}\right) = -\frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)}{\left(\frac{dF}{dq}\right)} - \frac{\left(\frac{dF}{dp}\right)}{\left(\frac{dF}{dq}\right)} \cdot \left(\frac{dp}{dx}\right),$$

$$\left(\frac{dq}{dz}\right) = -\frac{\left(\frac{dF}{dz}\right)}{\left(\frac{dF}{dq}\right)} - \frac{\left(\frac{dF}{dp}\right)}{\left(\frac{dF}{dq}\right)} \cdot \left(\frac{dp}{dz}\right),$$ i quali valori sostituiti nell' equazione (e) la cangeranno in quest' altra

$$(f) \ldots \left(\frac{dF}{dx}\right) + p\left(\frac{dF}{dz}\right) + \left(\frac{dF}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dq}\right)\left(\frac{dp}{dy}\right) + \left\{p\left(\frac{dF}{dp}\right) + q\left(\frac{dF}{dq}\right)\right\}\left(\frac{dp}{dz}\right) = 0;$$ nella quale le differenze parziali dell' incognita p sono elevate alla prima potenza, ed i coefficienti sono funzioni di x, y, z, p: non vi consideriamo il q, poichè lo elimineremo per mezzo della proposta.

Quest' equazione ci darà, essendo integrata, il valore di p; quello di q ci sarà dato dall' equazione $F(x, y, p, q, z) = 0$; e questi due valori di p e di q, che saranno allora funzioni cognite di x, y, z, sostituiti in $dz - pdx - qdy = 0$, la renderanno integrabile, ed il di lei integrale sarà nel tempo stesso l' integrale dell' equazione proposta

$$F\left(x, y, z, \left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dy}\right)\right) = 0.$$

Se noi ora paragoniamo l' equazione (f) con l' equazione $\left(\frac{dz}{dx}\right) + L\left(\frac{dz}{dy}\right) + M\left(\frac{dz}{du}\right) = N$ del §. 242, si vedrà che le nostre variabili x, y, z, p corrispondono ivi alle x, y, u, z, che in conseguenza nel nostro caso è

$$L = \left(\frac{dF}{dq}\right) : \left(\frac{dF}{dp}\right),$$

$$M = \left\{p\left(\frac{dF}{dp}\right) + q\left(\frac{dF}{dq}\right)\right\} : \left(\frac{dF}{dp}\right),$$

$$N = -\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right) + p\left(\frac{dF}{dz}\right)\right\} : \left(\frac{dF}{dp}\right);$$ e che le tre equazioni differenziali ordinarie, dall' integrazione delle quali dipende quella dell' equazione (f), sono

$$\left(\frac{dF}{dp}\right) dy - \left(\frac{dF}{dq}\right) dx = 0,$$

$$\left(\frac{dF}{dp}\right) dz - \left\{p\left(\frac{dF}{dp}\right) + q\left(\frac{dF}{dq}\right)\right\} dx = 0,$$

$$\left(\frac{dF}{dp}\right) dp + \left\{\left(\frac{dF}{dx}\right) + p\left(\frac{dF}{dz}\right)\right\} dx = 0.$$

Siccome queste tre equazioni non contengono che quattro variabili x, y, z, p, potremo da esse ricavare un' equazione a due variabili sole, e così tutta la difficoltà sarà ridotta all' integrazione delle equazioni a due variabili.

Supponiamo ora che gli integrali di quelle tre equazioni, o di altre da esse dedotte, siano $P = a$; $Q = b$, $R = c$, essendo P, Q, R tre funzioni determinate di x, y, z e p, ed a, b, c tre costanti arbitrarie; ed avremo $R = \phi(P, Q)$ per rappresentare (§. 242) l' integrale completo della equazione (f).

Questa equazione $R = \phi(P, Q)$ combinata con l' equazione data $F(x, y, z, p, q) = 0$, darà i valori di p e q espressi per x, y, z, che sostituiti in $dz - pdx - qdy = 0$ la renderanno integrabile, e l' integrale di essa sarà l' integrale completo della equazione proposta, perchè conterrà la funzione arbitraria $\phi(P, Q)$.

§. 245. L' integrale dunque ricercato è una quantità composta di x, y, z e della funzione arbitraria $\phi(P, Q)$, essendo P, Q due funzioni determinate in x, y, z.

Ora secondo i principj spiegati (121) l' integrale completo di una equazione a differenze parziali del primo ordine fra tre variabili x, y, z, non può contenere una funzione composta di due quantità, imperocchè una simil funzione non si potrebbe mai fare svanire per mezzo delle differenze parziali del primo ordine; dunque il risultato ottenuto mostra di essere in opposizione con questo principio: non sarà però difficile far vedere, come di natura sua quel risultato debba modificarsi in tal modo da convenire pienamente con quanto è stabilito al citato §.

Infatti osservando che le tre equazioni $P = a$, $Q = b$, $R = c$ soddisfanno per ipotesi alle tre equazioni del primo ordine

$$(1) \ldots\ldots \left(\frac{dF}{dp}\right) dy - \left(\frac{dF}{dq}\right) dx = 0,$$

$$(2) \ldots\ldots \left(\frac{dF}{dp}\right) dz - \left\{\left(\frac{dF}{dp}\right) p + \left(\frac{dF}{dq}\right) q\right\} dx = 0,$$

$$(3) \ldots\ldots \left(\frac{dF}{dp}\right) dp + \left\{\left(\frac{dF}{dx}\right) + p\left(\frac{dF}{dz}\right)\right\} dx = 0,$$

con le costanti arbitrarie a, b, c, se da queste medesime tre equazioni $P = a$, $Q = b$, $R = c$ noi ricaviamo i valori di x, y, z in funzione di p e di quelle costanti, e gli sostituiamo in quelle tre equazioni differenziali, diverranno esse necessariamente identiche, di modo che queste sostituzioni renderanno i primi membri identicamente nulli, qualunque siano i valori di p, a, b, c.

Ora il primo membro dell' equazione (1) moltiplicato per q, e sottratto dal primo membro dell' equazione (2), ci dà

$\left(\frac{dF}{dp}\right) \{dz - pdx - qdy\} = 0$; dunque se nella formula $dz - pdx - qdy$ facciamo le medesime sostituzioni dei valori di x, y, z dati per p, a, b, c, il risultato sarà ancora identicamente nullo.

Se ora noi supponiamo a, b, c quantità variabili, nel sostituire in $dz - pdx - qdy$ i valori di x, y, z e dei loro differenziali, tutti i termini si distruggeranno tra loro come prima, eccettuati quei che introduce la variabilità di quelle costanti: resteranno dunque dei termini di questa forma $Ada + Bdb + Cdc$, ove A, B, C sono funzioni di p, a, b, c.

Dunque l' equazione $dz - pdx - qdy = 0$, diverrà $Ada + Bdb + Cdc = 0$; e la condizione che debbe renderla suscettibile di un integrale, sarà, secondo ciò che si è trovato, $c = \phi(a, b)$, poichè la sostituzione dei valori di x, y, z in p, a, b, c, dà $P = a$, $Q = b$, $R = c$, d' onde questi valori suppongonsi dedotti.

Ora prendendo i differenziali, si ha

$dc = \left(\frac{d\phi}{da}\right) da + \left(\frac{d\phi}{db}\right) db$; dunque facendo queste sostituzioni, l' equazione

$\left\{A + C\left(\frac{d\phi}{da}\right)\right\} da + \left\{B + C\left(\frac{d\phi}{db}\right)\right\} db = 0$, avrà necessariamente un integrale; e non potendo ciò avvenire senza che la variabile p svanisca da se stessa da questa equazione (giacchè la differenziale sua dp è sparita) ne segue che quell' ultima equazione sarà un' equazione differenziale tra due variabili, ed in conseguenza sempre integrabile, e quindi sarà b una funzione di a: sarà di più funzione arbitraria a causa della arbitraria $\varphi(a, b)$ che nella suddetta equazione differenziale si contiene.

Così le due quantità b, c saranno necessariamente l' una e l' altra funzione di a soltanto, ma bisognerà che soddisfacciano all' equazione $Ada + Bdb + Cdc = 0$.

Sia dunque $b = \Psi a$, $c = \varphi a$; sostituendole in questa equazione, si avrà

$A + B\left(\frac{d\Psi}{da}\right) + C\left(\frac{d\varphi}{da}\right) = 0$, la quale contiene una relazione tra le due funzioni Ψa, φa, una restandone arbitraria.

Frattanto se per a, b, c si rimettono i loro valori P, Q, R, si avrà per esprimere l' integrale cercato, il sistema di due equazioni $Q = \Psi P$, $R = \varphi P$, d' onde eliminando p, si avrà un' equazione in x, y, z con una funzione arbitraria.

Questa è la soluzione diretta e completa del problema, ma vedremo che in molti casi puossi rendere più semplice.

§. 246. Per un primo esempio prendiamo l' equazione

$z = \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)$: paragonando questa equazione con la formula generale, si avrà

$F(x, y, z, p, q) = z - pq = 0$: dunque

$\left(\frac{dF}{dx}\right) = 0$, $\left(\frac{dF}{dy}\right) = 0$, $\left(\frac{dF}{dz}\right) = 1$, $\left(\frac{dF}{dp}\right) = -q$, $\left(\frac{dF}{dq}\right) = -p$;

le tre equazioni del primo ordine diverranno dunque

$-qdy + pdx = 0$, $-qdz + 2pqdx = 0$,

$-qdp + pdx = 0$: ma l' equazione $z = pq$ dà $q = \frac{z}{p}$; dunque le tre equazioni di cui si tratta, diverranno

$zdy - p^2dx = 0$, $dz - 2pdx = 0$, $zdp - p^2dx = 0$.

La prima e l' ultima danno $dy = dp$, e quindi $y = p + a$,

essendo a una costante arbitraria. La seconda poi e la terza ci danno $pdz = 2zdp$, cioè $\frac{dz}{z} = \frac{2dp}{p}$, il cui integrale è $z = bp^2$ essendo b un' altra costante arbitraria.

Finalmente se nella prima equazione sostituiamo dp per dy, e bp^2 per z, e dividiamo per p^2, avremo $bdp - dx = 0$, il cui integrale è $x = bp + c$, essendo c la terza costante arbitraria.

Per mezzo di questi tre integrali troviamo i valori delle tre costanti a, b, c, ed avremo

$a = y - p = P$; $b = \frac{z}{p^2} = Q$; $c = x - \frac{z}{p} = R$.

Frattanto se nell' equazione

$dz - pdx - qdy = 0$ si sostituisce per q il valore $\frac{z}{p}$, ella diviene

$dz - pdx - \frac{zdy}{p} = 0$; e se in luogo di x, y, z si pongono le espressioni trovate quì sopra in p, a, b, c, riguardando le quantità a, b, c come variabili, si ha la trasformata

$p^2db + 2bpdp - p^2db - bpdp - pdc - bpdp - bpda = 0$,

la quale, scancellando ciò che si distrugge, e dividendo in seguito per p, diviene semplicemente $dc - bda = 0$.

Dunque facendo $b = \Psi a$, $c = \varphi a$, si avrà

$\left(\frac{d\varphi}{da}\right) + \Psi a = 0$, che ci dà $\Psi a = -\left(\frac{d\varphi}{da}\right)$: in questa guisa avremo il sistema di queste due equazioni $R = \varphi(P)$,

$Q = -\left(\frac{d\varphi(P)}{dP}\right)$ per rappresentare l' integrale completo della proposta.

Se ora noi indichiamo per $\varphi'(P)$ la differenziale parziale $\left(\frac{d\varphi(P)}{dP}\right)$, e poniamo invece di P, Q, R i respettivi valori, avremo

$x - \frac{z}{p} = \varphi(y - p)$, $\frac{z}{p^2} = -\varphi'(y - p)$, d' onde bisognerà eliminare p, e la funzione $\varphi(y - p)$ resterà arbitraria.

Un' importantissima osservazione è la seguente: allorchè si sono trovati due integrali contenendo due costanti arbitrarie, come $z = p + a$, e $z = p^2 b$, sembrerebbe che l'eliminazione di p potesse dare un integrale con due costanti arbitrarie, che sarebbe per conseguenza l'integrale completo della proposta, e potrebbe sempre cangiarsi in un altro che contenesse la funzione arbitraria: avremmo in questa guisa $z = b(y - a)^2$: è facile però vedere che quest' equazione non soddisfà alla proposta

$z = \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)$ perchè essa dà $\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$.

Lo stesso avverrebbe se si volesse eliminare p dalla seconda e la terza equazione: si avrebbe allora

$c = x - \sqrt{(bz)}$, cioè $z = \frac{(x-c)^2}{b}$, ciò che darebbe $\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$.

Ma se si adoprasse la prima e l'ultima, l'eliminazione di p ci darebbe $c = x - \frac{z}{y-a}$, d'onde si ricava

$z = (x - c)(y - a)$: quest' equazione dà

$\left(\frac{dz}{dy}\right) = x - c$, $\left(\frac{dz}{dx}\right) = y - a$, e tai valori soddisfanno alla proposta.

La ragione di queste anomalie si legge nell' equazione $dc + bda = 0$ quì sopra trovata.

Ella fa vedere che le due quantità a, c ponno esser costanti insieme, che perciò le due equazioni $P = a$, $R = c$ sussistono insieme, di modo che eliminando p si ha un' equazione in x, y, z e le due costanti arbitrarie a, c, che sarà per conseguenza l'integrale completo della proposta; ma l'equazione non sarebbe adempita per la semplice supposizione di a e b, ovvero di b ed a costanti insieme: e di quì segue che le due equazioni $P = a$, $Q = b$, ovvero $Q = b$, $R = c$ prese insieme non soddisfanno alla proposta.

§. 247. E si può per altro trovare l'integrale completo per mezzo di una sola di queste equazioni $P = a$, $Q = b$, $R = c$:

essa infatti ci dà un valore di p espresso in x, y, z ed una costante arbitraria; e siccome questo valore soddisfà all' equazione del primo ordine in x, y, z e p, esso renderà l'equazione $dz - pdx - qdy = 0$ capace d' integrazione: così basterà cercare quest' integrale aggiungendovi una costante arbitraria, e si avrà l'integrale completo della proposta con due costanti arbitrarie.

Si potrà anche ricavare dall' equazione trovata il valore di p in x, y, z; e siccome $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$, se ne cercherà l'integrale riguardando variabili soltanto z ed x: quest' equazione potrà allora contenere una funzione arbitraria di y, che si determinerà facilmente per mezzo dell' equazione proposta: e siccome questa è del primo ordine, la funzione conterrà almeno una costante arbitraria, di modo che si avrà nuovamente un integrale completo con due costanti arbitrarie.

Nell' esempio precedente prendiamo la prima equazione $P = a$, cioè $y - p = a$; ella ci dà $p = y - a$; e siccome si ha $q = \frac{z}{p}$, sarà $q = \frac{z}{y-a}$.

Sostituiti questi due valori nell' equazione $dz - pdx - qdy = 0$, danno

$dz - (y - a)\,dx - \frac{zdy}{y-a} = 0$, e quest' equazione divisa per $y - a$, ha per integrale

$\frac{z}{y-a} - x + c = 0$, ove c è una nuova costante arbitraria; tale equazione è quella trovata quì sopra per mezzo dell' eliminazione di p.

La medesima equazione $p = y - a$ diviene $\left(\frac{dz}{dx}\right) = y - a$, quando in vece di p vi si pone il suo valore $\left(\frac{dz}{dx}\right)$. L'integrale poi di $dz = (y - a)\,dx$ è $z = (y - a)(x - Y)$ indicando per Y una funzione arbitraria di y.

Se ora prendiamo le differenziali parziali di z per rapporto ad x e per rapporto ad y, avremo

$\left(\frac{dz}{dx}\right) = y - a$, $\left(\frac{dz}{dy}\right) = x - Y - (y - a)\left(\frac{dY}{dy}\right)$: e sostituendo queste espressioni nella proposta

$z = \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)$, si ha

$(y - a)(x - Y) = (y - a)(x - Y) - (y - a)^2 Y'$,

essendo $Y' = \left(\frac{dY}{dy}\right)$: da quest' ultima equazione si ricava $Y' = 0$, e per conseguenza $Y = c$ prendendo per c una costante arbitraria: l' integrale dunque diviene

$z = (y - a)(x - c)$, come sopra.

Per ricavare da quest' equazione l' integrale completato con una funzione arbitraria, basterà fare $c = \varphi(a)$, e prendere la differenziale solo relativamente ad a: si avrà allora il sistema di queste due equazioni

$z = (y - a)(x - \varphi a)$, $x - \varphi(a) + (y - a)\varphi' a = 0$

d' onde si dovrà eliminare a.

Per confrontare queste equazioni con quelle trovate superiormente col metodo generale, serve metterle sotto questa forma

$x - \frac{z}{y - a} = \varphi a$, $\frac{z}{(y - a)^2} = \varphi' a$; giacchè potendo noi mettere invece della quantità a, che debbe essere eliminata, qualunque quantità, se vi si pone $y - p$ invece di a, si hanno le stesse equazioni di già trovate, tra le quali conviene eliminare p.

Le dottrine da noi esposte riguardo all' integrazione delle equazioni a differenziali parziali del primo ordine, debbonsi all' immortale La-Grange: questo Geometra dopo averle date con minor perfezione in diverse sue Opere, le ha di nuovo trattate nel *Tomo quinto del Giornale della Scuola Politecnica*.

§ 248. La Teorìa dell' equazioni a differenziali parziali degli ordini superiori è quasi bambina, e da quel che diremo sopra di essa, rileveranno i nostri Lettori, quanto ristretti sono i limiti che circoscrivono ciò che ne sappiamo.

Primieramente osservo che se in una equazione a differenze parziali (noi adopriamo indistintamente il nome di *Differenziali Parziali*, e di *Differenze Parziali*, per quanto sa-

rebbe più rigoroso fare uso soltanto del primo nome; è però ricevuto presso i Geometri più generalmente il secondo) di qualunque ordine a tre variabili x, y, z non si troveranno che le differenziali parziali di z relativamente ad una sola variabile, x per esempio, se ne potrà ottenere addirittura l' integrale: supporremo infatti y costante, ed integrata come una equazione a differenze ordinarie, porremo invece delle costanti arbitrarie tante funzioni arbitrarie di y.

Se poi l' equazione fosse tra un maggior numero di variabili, x, y, u ec., z, e non vi si trovassero che i differenziali parziali di z relativamente ad x, allora operando come abbiam detto, dovremmo invece delle costanti arbitrarie sostituire tante funzioni arbitrarie delle altre variabili y, u ec., le quali nell' integrazione vogliono esser considerate come costanti.

A questi due casi ponno ridursi le integrazioni delle equazioni

$$\varphi\left\{x, y, \left(\frac{d^n z}{dy^n}\right), \left(\frac{d^{n+1} z}{dx\,dy^n}\right), \left(\frac{d^{n+2} z}{dx^2 dy^n}\right), \ldots\ldots \left(\frac{d^{n+m} z}{dx^m dy^n}\right)\right\} = 0$$

$$\varphi\left\{x, y, u, \left(\frac{d^{m+n} z}{dy^m du^n}\right), \left(\frac{d^{m+n+1} z}{dx\,dy^m du^n}\right), \ldots\ldots \left(\frac{d^{m+n+p} z}{dx^p dy^m du^n}\right)\right\} = 0$$

ec. ec.

nelle quali i primi membri sono funzioni delle quantità poste tra le parentesi: infatti per la prima faccio

$\left(\frac{d^n z}{dy^n}\right) = \omega$, ed essa diverrà

$\varphi\left\{x, y, \omega, \left(\frac{d\omega}{dx}\right), \left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right), \ldots\ldots \left(\frac{d^m\omega}{dx^m}\right)\right\} = 0$, la quale s' integrerà nella supposizione di y costante, ed invece delle m costanti arbitrarie, vi porremo un numero m di funzioni arbitrarie di y.

Trovato questo integrale, ne ricaveremo da esso il valore di ω, ovvero $\left(\frac{d^n z}{dy^n}\right)$ dato per x, y e per quelle m funzioni.

Per ottenere poi z, integreremo quest' ultima equazione nella supposizione di x costante, e ne completeremo l' integrale con un numero n di funzioni arbitrarie di x; il valore di

z conterrebbe allora un numero $m + n$ di funzioni arbitrarie.

Per esempio l' equazione

$y^2 + x^2 - (\frac{d^3 z}{dx^2 dy}) = 0$ può integrarsi nel modo indicato. Facciasi $(\frac{dz}{dy}) = \omega$, ed avremo

$y^2 + x^2 - (\frac{d^2\omega}{dx^2}) = 0$, il cui integrale nella supposizione di y costante, è

$\omega = (\frac{dz}{dy}) = \frac{y^2 x^2}{2} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + f(y) \cdot x + f'(y)$, essendo fy, $f'y$ due diverse funzioni arbitrarie di y. In seguito si avrà

$z = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{y^3}{3} + \frac{x^4 y}{3 \cdot 4} + x \int dy f(y) + \int dy f'(y) + f''(x)$, ovvero

$z = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{y^3}{3} + \frac{x^4 y}{3 \cdot 4} + x\mathrm{F}y + \mathrm{F}'y + \mathrm{F}''x$: indicando per F, F′, F″ tre funzioni arbitrarie delle variabili che vi sono unite.

Riguardo all' altra equazione, poniamo

$(\frac{d^{m+n} z}{dy^m du^n}) = \omega$, e diverrà

$\varphi \{x, y, u, \omega, (\frac{d\omega}{dx}), \ldots\ldots (\frac{d^p \omega}{dx^p})\} = 0$, la quale s' integrerà riguardando y ed u come costanti, e nell' integrale completo invece delle p costanti arbitrarie, porremo un egual numero di funzioni arbitrarie di y, u: otterremo in questa guisa il valore di ω dato per x, y, u e per quelle p funzioni arbitrarie.

Sia pertanto

$\omega = (\frac{d^{m+n} z}{dy^m du^n}) = \mathrm{F}(x, y, u)$ questo valore: se noi facciamo

$(\frac{d^n z}{du^n}) = \theta$ si avrà l' equazione

$(\frac{d^m \theta}{dy^m}) = \mathrm{F}(x, y, u)$, la quale integrata nella supposizione di x ed u costanti, ci darà per θ un valore espresso in x, y, u ed un numero m di costanti arbitrarie, le quali saranno funzioni di x e di u. Così il valore di θ conterrà un numero $n + p$ di funzioni arbitrarie.

Sia $\theta = (\frac{d^n z}{du^n}) = \Psi(x, y, u)$, ed integrando quest' equazione nella supposizione di x, y costanti, si avrà per z un' espressione la quale conterrà, oltre le funzioni che già si trovano in quell' equazione, un numero n di costanti arbitrarie, ciascuna delle quali dovrà essere una funzione di x, y: così l' espressione di z conterrà un numero $m + n + p$ di funzioni arbitrarie.

Per esempio sia l' equazione

$xyu - (\frac{d^3 z}{dx dy du}) = 0$: ponendo $(\frac{d^2 z}{dy du}) = \omega$ si ha

$xyu - (\frac{d\omega}{dx}) = 0$, e quindi $\omega = \frac{x^2 yu}{2} + f(y, u)$: dunque

$(\frac{d^2 z}{dy du}) = \frac{x^2 yu}{2} + f(y, u)$. Ponendo $(\frac{dz}{dy}) = \theta$, si ha

$(\frac{d\theta}{du}) = \frac{x^2 yu}{2} + f(y, u)$, e quindi

$\theta = \frac{x^2 yu^2}{2 . 2} + \int du . f(y, u) + f'(x, y)$; dunque

$(\frac{dz}{dy}) = \frac{x^2 yu^2}{2 . 2} + \int du . f(y, u) + f'(x, y)$.

L' integrale infine di quest' ultima equazione ci dà

$z = \frac{x^2 y^2 u^2}{2 . 2 . 2} + \int dy \int du . f(y, u) + \int dy . f'(x, y) + f''(x, u)$: ovvero

$z = \frac{x^2 y^2 u^2}{2 . 2 . 2} + \mathrm{F}(y, u) + \mathrm{F}'(x, y) + \mathrm{F}''(x, u)$ indicando per F, F′, F″ tre funzioni arbitrarie delle variabili poste tra le parentesi. Si avverta che qui le variabili x, y, z sono indipendenti tra loro.

§. 249. Veniamo adesso all' integrazione delle equazioni a differenze parziali dell' ordine secondo fra tre variabili x, y, z. Facciamo

$p = (\frac{dz}{dx})$, $q = (\frac{dz}{dy})$, $r = (\frac{d^2 z}{dx^2})$, $s = (\frac{d^2 z}{dx dy})$, $t = (\frac{d^2 z}{dy^2})$, e supponiamo di più che nell' equazione da integrarsi le quantità r, s, t non vi siano elevate al di là della potestà lineare: sia dunque proposta l' equazione

$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + M\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + N\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) + L = 0$, nella quale M, N, L siano funzioni date di x, y, z, p, q.

Essendo p, q due funzioni ancora esse di x, y, e supponendo che y sia funzione di x, senza però che nulla si stabilisca sopra la di loro relazione, si avrà

$\left(\frac{dp}{dx}\right) = r + s\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{dq}{dx}\right) = s + t\left(\frac{dy}{dx}\right)$, e da queste equazioni ricaveremo

$r = \left(\frac{dp}{dx}\right) - s\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $t = \left\{\left(\frac{dq}{dx}\right) - s\right\} : \left(\frac{dy}{dx}\right)$.

(Si osservi che essendo p funzione di x, y, noi abbiamo indicato per $\left(\frac{dp}{dx}\right)$ la differenziale totale di p presa per rapporto ad x quando y è riguardato come funzione di x: questo segno $\left(\frac{dp}{dx}\right)$ avria potuto accentarsi per distinguersi dal caso in cui esso dee significare la differenziale parziale relativamente ad x solo: si dica lo stesso per q) sostituiamo questi valori nella proposta, ed essa diverrà

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) + N\left(\frac{dq}{dx}\right) + L\left(\frac{dy}{dx}\right) - s\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - M\left(\frac{dy}{dx}\right) + N\right\} = 0.$$

Se ora moltiplichiamo tutta questa equazione per dx^2, e poniamo dp, dq, dy invece di $\left(\frac{dp}{dx}\right)dx$, $\left(\frac{dq}{dx}\right)dx$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)dx$, avremo

$$(A) \ldots\ldots dpdy + Ndqdx + Ldxdy - s\left\{dy^2 - Mdxdy + Ndx^2\right\} = 0.$$

A questa equazione soddisfaremo se avremo

$$(E) \ldots\ldots \begin{cases} dpdy + Ndqdx + Ldxdy = 0 \\ dy^2 - Mdxdy + Ndx^2 = 0 \end{cases}$$

Ora la seconda di queste due equazioni si decompone in queste due

$dy - \alpha dx = 0$, $dy - \beta dx = 0$ essendo α, β le radici di questa equazione di secondo grado

$\alpha^2 - M\alpha + N = 0$: avremo dunque questi due sistemi di equazioni

$$\begin{cases} dpdy + Ndqdx + Ldxdy = 0, \\ dy - \alpha dx = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} dpdy + Ndqdx + Ldxdy = 0, \\ dy - \beta dx = 0, \end{cases}$$

ovvero ponendo nelle prime equazioni il valore di y ricavato dalle seconde,

$$(1) \ldots\ldots \begin{cases} \alpha dp + Ndq + L\alpha dx = 0 \\ dy - \alpha dx = 0 \end{cases}$$

$$(2) \ldots\ldots \begin{cases} \beta dp + Ndq + L\beta dx = 0 \\ dy - \beta dx = 0 \end{cases}$$

ciascuno dei quali soddisfà all' equazione (A).

Sipponiamo che in qualche modo si ricavino dal sistema (1) due equazioni $V = a$, $U = b$, le quali ne siano gl' integrali completi per essere a, b costanti arbitrarie, o possano tenere il loro luogo per esserne dipendenti, e sarà allora $U = \varphi(V)$ un integrale primo completo dell' equazione proposta: infatti la proposta è soddisfatta quando lo è l' equazione (A) cui essa conduce: l' equazione (A) è soddisfatta quando lo sono l' equazioni (1): queste sono soddisfatte da $V = a$, $U = b$, ovvero $dV = 0$, $dU = 0$: dunque la proposta sarà soddisfatta da queste medesime equazioni.

Ora l' equazione $U = \varphi(V)$ dandoci $dU - \left(\frac{d\varphi}{dV}\right)dV = 0$, e dovendo essere vera indipendentemente dalla forma della funzione, ci somministra appunto $dU = 0$, $dV = 0$: essa dunque soddisfarà alla proposta, e ne sarà in conseguenza l' integrale primo completo.

Chiamasi integrale primo di un' equazione a differenze parziali del secondo ordine, un' equazione di primo ordine da cui quella dipenda: completo se contiene una funzione arbitraria.

Nella medesima maniera se l' altro sistema (2) ci darà $U' = b'$, $V' = a'$, sarà $U' = \Psi(V')$ un altro integrale primo completo.

Renderemo con esempj più chiara questa Teorìa.

§. 250. Per un primo esempio supponiamo che i coefficienti M, N, L siano quantità costanti: l' integrale allora dell' equazione

$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + M\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + N\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) + L = 0$ dipenderà da uno dei sopra trovati sistemi

$$(1) \ldots\ldots \begin{cases} \alpha dp + Ndq + L\alpha dx = 0 \\ dy - \alpha dx = 0 \end{cases}$$

$$(2) \ldots\ldots \begin{cases} \beta dp + Ndq + L\beta dx = 0 \\ dy - \beta dx = 0 \end{cases}$$

i quali, in questo caso, sono facilissimi a trattarsi mercè dei coefficienti costanti. Le due quantità α, β sono le radici dell' equazione

$\alpha^2 + M\alpha + N = 0$.

Integrando le equazioni, le quali compongono il primo sistema, si trova

$\alpha p + Nq + L\alpha x = b$, $y - \alpha x = a$, essendo b, a due costanti arbitrarie: sarà dunque

$\alpha p + Nq + L\alpha x = \varphi(y - \alpha x)$ uno degli integrali primi completi.

Dal secondo sistema poi si ottiene

$\beta p + Nq + L\beta x = \Psi(y - \beta x)$, che sarà l' altro integrale primo completo.

Essendo ciascuno di questi integrali primi un' equazione a differenze parziali del primo ordine, potrà integrarsi per ciò che abbiamo detto (§. 240) e si avrà allora l' integrale finito completo della proposta, qualunque sia quello degli integra-

li primi, che s' integra di nuovo, giacchè ambedue daranno lo stesso risultato. In questa guisa per integrare l' equazione

$\alpha\left(\frac{dz}{dx}\right) + N\left(\frac{dz}{dy}\right) + L\alpha x - \varphi(y - \alpha x) = 0$ dovremo integrare le due equazioni a differenze ordinarie

$dy - \frac{N}{\alpha}\, dx = 0$

$dz + Lxdx = \frac{1}{\alpha}\, dx\varphi(y - \alpha x) = dx\varphi(y - \alpha x)$ considerando la costante α come contenuta entro la funzione arbitraria φ.

La prima di queste equazioni ci dà

$y - \frac{N}{\alpha} x = a'$, e la seconda

$z + \frac{Lx^2}{2} - \int dx\varphi(y - \alpha x) = b'$; ma essendo $N = \alpha\beta$ la prima equazione si riduce a

$y - \beta x = a'$, e ponendo nella seconda invece di y il suo valore $a' + \beta x$, ella diverrà

$z + \frac{Lx^2}{2} - \int dx\varphi\{a' + (\beta + \alpha)x\} = b'$, ovvero

$z + \frac{Lx^2}{2} - F\{a' + (\beta + \alpha)x\} = b'$, ovvero

$z + \frac{Lx^2}{2} - F(y - \alpha x) = b'$.

L' integrale dunque finito completo della proposta sarà

$z + \frac{Lx^2}{2} - F(y - \alpha x) = f(y - \beta x)$, ove F, f indicano due funzioni arbitrarie delle quantità che sono tra le parentesi.

Trattando egualmente l' altro integrale primo, si giungerebbe allo stesso risultato.

Avrebbe potuto trovarsi lo stesso integrale finito sostituendo nell' equazione

$dz = pdx + qdy$, i valori di p e di q, e facendone in seguito l' integrazione: infatti i due ottenuti integrali primi ci danno per p e per q questi valori

$p = -Lx + \frac{\varphi(y-\alpha x) - \Psi(y-\beta x)}{\alpha-\beta}$

$q = \frac{\alpha\Psi(y-\beta x) - \beta\varphi(y-\alpha x)}{N(\alpha-\beta)}$, e quindi

$dz = -Lxdx + \frac{1}{\alpha(\alpha-\beta)}(\alpha dx - dy)\varphi(y-\alpha x) - \frac{1}{\beta(\alpha-\beta)}(\beta dx - dy)\Psi(y-\beta x)$, che integrata ci dà

$z = -\frac{Lx^2}{2} - \frac{1}{\alpha(\alpha-\beta)}F(y-\alpha x) + \frac{1}{\beta(\alpha-\beta)}f(y-\beta x)$,

ovvero, considerando i coefficienti costanti contenuti entro le funzioni arbitrarie,

$z = -\frac{Lx^2}{2} + F(y-\alpha x) + f(y-\beta x)$, come sopra.

Possiamo dare anche altre forme a questo integrale finito: se noi poniamo infatti

$F(y-\alpha x) + f(y-\beta x) = F'(y-\alpha x) + f'(y-\beta x) + n(y-\alpha x)^2 + m(y-\beta x)^2$, e determiniamo m ed n in maniera che

$n\alpha^2 + m\beta^2 = \frac{L}{2}$, $n\alpha + m\beta = 0$, si avrà l' integrale finito così espresso

$z = -\frac{Ly^2}{2N} + F'(y-\alpha x) + f'(y-\beta x)$; e determinandole in modo che

$n\alpha^2 + m\beta^2 = \frac{L}{2}$, $m + n = 0$, si ha ancora quest' altra espressione per l' integrale finito

$z = -\frac{Lxy}{M} + F'(y-\alpha x) + f'(y-\beta x)$.

Tutte queste espressioni dell' integrale finito, per quanto diverse in apparenza, sono in sostanza la stessa cosa: si potrebbero verificare con la differenziazione

§. 251. Se nell' esempio precedente la quantità L fosse una funzione di x e di y, ecco allora come si tratterebbe..

Giunti al solito al sistema delle due equazioni

$\alpha dp + Ndq + L\alpha dx = 0$, $dy - \alpha dx = 0$, avremmo subito dalla seconda

$y - \alpha x = a$, quindi $y = a + \alpha x$: la prima poi ci darà

$\alpha p + Nq + \alpha\int Ldx = b$, ove L sarà solo una funzione di x, da che per y avrem posto il respettivo valore. Sarà dunque $\alpha p + Nq + \alpha\int Ldx = \varphi(y-\alpha x)$ un integrale primo completo della proposta: egualmente potrebbe trovarsi l' altro integrale primo.

Supponiamo che eseguita l' integrazione sia $\int Ldx = V$, e riponendo in V per a il suo valore, tornerà V ad essere una funzione di x, y, e l' integrale primo sarà

$\alpha p + Nq + \alpha V = \varphi(y-\alpha x)$; l' integrale completo poi di quest' equazione a differenze parziali del primo ordine, sarà l' integrale finito completo della proposta.

Per ottenerlo, si perverrà come nel caso considerato quì sopra; al sistema di queste due equazioni differenziali ordinarie.

$dy - \frac{N}{\alpha}dx = 0$, $dz + Vdx = \frac{1}{\alpha}dx\,\varphi(y-\alpha x)$.

La prima ci dà

$y - \frac{N}{\alpha}x = a'$, e quindi $y = a' + \frac{N}{\alpha}x$, e questo valore di y sostituito in V, rende V soltanto funzione di x. Ragionando ora come al §. antecedente, avremo per l' integrale completo della proposta

$z + \int Vdx - F(y-\alpha x) = f(y-\beta x)$: l' unica differenza consiste nel secondo termine: ivi è $\frac{Lx^2}{2}$, quivi $\int Vdx$.

Supponiamo che eseguita che sia l' integrazione, abbiasi $\int Vdx = V'$, sarà V' una sola funzione di x: se però riponiamo in esso invece di a' il suo valore $y - \frac{N}{\alpha}x$, tornerà allora ad essere una funzione di x e di y.

Sia per esempio $L = x^2 + xy$, si avrà

$\int Ldx = \{x^2 + x(a + \alpha x)\}dx = \frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} + \frac{\alpha x^3}{3}$, quindi

$V = \frac{x^3}{3} + \frac{\alpha x^3}{3} + \frac{x^2}{2}(y - \alpha x) = \frac{x^3}{3}(1 - \frac{\alpha}{2}) + \frac{x^2 y}{2}$.

$\int V dx = \{\frac{x^3}{3}(1 - \frac{\alpha}{2}) + \frac{x^2}{2}(a' + \beta x)\} dx = \frac{x^4}{3 \cdot 4}(1 - \frac{\alpha}{2}) +$

$\frac{x^3 a'}{2 \cdot 3} + \frac{\beta x^4}{2 \cdot 4}$, e quindi fatto $a' = y - \beta x$

$V = \frac{x^4}{3 \cdot 4}(1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}) + \frac{x^3 y}{2 \cdot 3}$: sarà pertanto

$z + \frac{x^4}{3 \cdot 4}(1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}) + \frac{x^3 y}{2 \cdot 3} - F(y - \alpha x) = f(y - \beta x)$

l' integrale completo dell' equazione

$(\frac{d^2 z}{dx^2}) + M(\frac{d^2 z}{dx dy}) + N(\frac{d^2 z}{dy^2}) + x^2 + xy = 0$, ove M, N sono quantità costanti.

§. 252. Per integrare l' equazione $q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0$ ne faremo il paragone con la formula generale del §. 249. Avremo allora

$M = -\frac{2p}{q}$, $N = \frac{p^2}{q^2}$, $L = 0$, e le due equazioni (E) di quel §. sono nel nostro caso

$dp dy + \frac{p^2}{q^2} dq dx = 0$, $dy^2 + \frac{2p}{q} dx dy + \frac{p^2}{q^2} dx^2 = 0$.

Il primo membro della seconda è un quadrato perfetto, e perciò le due equazioni in cui essa si decomporrà, saranno eguali, e quei due sistemi (1), (2) si ridurranno ad un solo

$dp dy + \frac{p^2}{q^2} dq dx = 0$, $q dy + p dx = 0$, ovvero ponendo nella prima il valore di y ricavato dalla seconda

$q dp - p dq = 0$, $p dx + q dy = 0$: la prima di queste equazioni ci dà $\frac{p}{q} = b$, e la seconda, essendo

$p dy + q dx = dz$, ci dà $z = a$, quindi un integrale primo sarà $p = qF(z)$.

Per avere l' altro integrale primo all' equazione $q dp - p dq = 0$ moltiplicata per $\frac{x}{q^2}$, aggiungiamo la seconda

$p dx + q dy = 0$ moltiplicata per $\frac{1}{q}$, ed avremo

$\frac{x(q dp - p dq)}{q^2} + \frac{p dx}{q} + dy = 0$, il cui integrale è

$\frac{xp}{q} + y = b$: avremo in consegnenza

$\frac{xp}{q} + y = f(z)$ per esprimere l' altro integrale primo della proposta.

L' integrale finito poi si può subito ottenere eliminando $\frac{p}{q}$ per mezzo dei due integrali primi, e si ha

$xF(z) + y = f(z)$, che è il cercato integrale completo, perchè $F(z)$, $f(z)$ rappresentano due diverse funzioni arbitrarie di z.

Sia proposta l' equazione

$(\frac{d^2 z}{dx^2}) - (\frac{d^2 z}{dy^2}) + \frac{y}{x + y}(\frac{dz}{dx}) = 0$, ed il di lei integrale dipenderà da questi due sistemi d' equazioni

$$(1) \ldots\ldots \begin{cases} dp - dq + \frac{4p}{x + y} dx = 0, \\ dy - dx = 0: \end{cases}$$

$$(2) \ldots\ldots \begin{cases} dp + dq - \frac{4p}{x + y} dx = 0, \\ dy + dx = 0, \end{cases}$$

da ciascuno dei quali dovrebbesi ricavare un integrale primo.

La seconda equazione del sistema (1) ci dà $y - x = a$, quindi $y = a + x$, e perciò la prima diverrà

$dp - dq + \frac{4p}{2x + a} dx = 0$, ed a causa di $dy - dx = 0$, ella si potrà così trasformare

$dp - dq + \frac{2}{2x + a}\{p dx + p dx + q(dy - dx)\} = 0$, ovvero

$dp - dq + \frac{2}{2x + a}(p dx - q dx + dz) = 0$, il cui integrale è

$(p-q)(2x+a)+2z=b$, e l' integrale primo completo $(p-q)(2x+a)+2z=F(a)$, e riponendo per a il suo valore

$(p-q)(x+y)+2z=F(y-x)$.

La seconda equazione dell' altro sistema ci dà $y+x=a'$, la quale cangia la prima in

$dp+dq-\frac{4p}{a'}dx=0$, che non potendo integrarsi, ci dice non essere ottenibile un altro integrale primo.

Per avere l' integrale completo cercato, trovisi l' integrale dell' equazione del primo ordine

$$p-q+\frac{[illegible]}{x+y}-\frac{F(x-y)}{x+y}=0.$$

Applicandovi la regola data al §. 240, si avrà il sistema di queste due equazioni

$dy+dx=0$, $dz-\left\{\frac{F(x-y)-2z}{x+y}\right\}dx=0$, dagl' integrali delle quali dipende l' integrale cercato.

La prima ha per integrale $y+x=a$, e questo cangia la seconda in

$dz+\frac{2z}{a}dx=\frac{F(2x-a)}{a}dx$, il cui integrale si ricava da ciò che è detto al §. 125, ed è

$z=e^{-\frac{2x}{a}}\left\{C+\int e^{\frac{2x}{a}}.\frac{F(2x-a)}{a}dx\right\}$ essendo C una costante arbitraria.

L' integrale dunque completo della nostra equazione sarà

$z=e^{-\frac{2x}{y+x}}\left\{\varphi(x+y)+\int e^{\frac{2x}{a}}.\frac{F(2x-a)}{a}dx\right\}$, facendovi $a=x+y$ ad integrazione eseguita.

§. 253. Prendiamo ora a considerare l' equazione generale lineare del secondo ordine

(A) .... $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+M\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)+N\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)+L\left(\frac{dz}{dx}\right)+P\left(\frac{dz}{dy}\right)+$
$Qz+T=0$, nella quale M, N, L, P, Q, T sono funzioni di x, y.

Noi potremo ridurre quest' equazione più semplice introducendo opportunamente due altre variabili ω, θ invece di x, y. Supponiamo dunque che z sia funzione di due variabili ω, θ, essendo ciascuna di queste funzione da determinarsi di x, y: avremo allora

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)=\left(\frac{dz}{d\omega}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right)+\left(\frac{dz}{d\theta}\right)\left(\frac{d\theta}{dx}\right),$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)=\left(\frac{dz}{d\omega}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right)+\left(\frac{dz}{d\theta}\right)\left(\frac{d\theta}{dy}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)=\left(\frac{d^2z}{d\omega^2}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2+2\left(\frac{d^2z}{d\omega d\theta}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d\theta}{dx}\right)+\left(\frac{d^2z}{d\theta^2}\right)\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2+$$
$$\left(\frac{dz}{d\omega}\right)\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)+\left(\frac{dz}{d\theta}\right)\left(\frac{d^2\theta}{dx^2}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)=\left(\frac{d^2z}{d\omega^2}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right)+\left(\frac{d^2z}{d\omega d\theta}\right)\left\{\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d\theta}{dy}\right)+\left(\frac{d\omega}{dy}\right)\left(\frac{d\theta}{dx}\right)\right\}+$$
$$\left(\frac{d^2z}{d\theta^2}\right)\left(\frac{d\theta}{dy}\right)\left(\frac{d\theta}{dx}\right)+\left(\frac{dz}{d\omega}\right)\left(\frac{d^2\omega}{dxdy}\right)+\left(\frac{dz}{d\theta}\right)\left(\frac{d^2\theta}{dxdy}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)=\left(\frac{d^2z}{d\omega^2}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right)^2+2\left(\frac{d^2z}{d\omega d\theta}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right)\left(\frac{d\theta}{dy}\right)+\left(\frac{d^2z}{d\theta^2}\right)\left(\frac{d\theta}{dy}\right)^2+$$
$$\left(\frac{dz}{d\omega}\right)\left(\frac{d^2\omega}{dy^2}\right)+\left(\frac{dz}{d\theta}\right)\left(\frac{d^2\theta}{dy^2}\right).$$

Facciamo le respettive sostituzioni nella proposta, ed essa prenderà la forma

$R\left(\frac{d^2z}{d\omega^2}\right)+M'\left(\frac{d^2z}{d\omega d\theta}\right)+N'\left(\frac{d^2z}{d\theta^2}\right)+L'\left(\frac{dz}{d\omega}\right)+P'\left(\frac{dz}{d\theta}\right)+Qz+$
$T=0$, essendo

$$R=\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2+M\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right)+N\left(\frac{d\omega}{dy}\right)^2,$$

$$M'=2\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d\theta}{dx}\right)+M\left\{\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d\theta}{dy}\right)+\left(\frac{d\theta}{dx}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right)\right\}+2N\left(\frac{d\omega}{dy}\right)\left(\frac{d\theta}{dy}\right),$$

$$N' = \left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 + M\left(\frac{d\theta}{dx}\right)\left(\frac{d\theta}{dy}\right) + N\left(\frac{d\theta}{dy}\right)^2,$$

$$L' = \left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) + M\left(\frac{d^2\omega}{dxdy}\right) + N\left(\frac{d^2\omega}{dy^2}\right) + L\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + P\left(\frac{d\omega}{dy}\right),$$

$$P' = \left(\frac{d^2\theta}{dx^2}\right) + M\left(\frac{d^2\theta}{dxdy}\right) + N\left(\frac{d^2\theta}{dy^2}\right) + L\left(\frac{d\theta}{dx}\right) + P\left(\frac{d\theta}{dy}\right).$$

Ora essendo ω, θ due funzioni indeterminate di x, y facciamole tali che annullino i coefficienti R, N', ed allora l' equazione si ridurrà di questa forma più semplice assai della proposta (A).

(E) . . . . $\left(\frac{d^2z}{d\omega d\theta}\right) + A\left(\frac{dz}{d\omega}\right) + B\left(\frac{dz}{d\theta}\right) + Cz + V = 0$, nella quale le variabili sono ω, θ, z; ed i coefficienti A, B, C sono funzioni delle ω, θ; infatti le condizioni che abbiamo apposte alla determinazione di ω e θ, ci danno

$$\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 + M\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right) + N\left(\frac{d\omega}{dy}\right)^2 = 0,$$

$$\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 + M\left(\frac{d\theta}{dx}\right)\left(\frac{d\theta}{dy}\right) + N\left(\frac{d\theta}{dy}\right)^2 = 0,$$

dalle quali si ricava

$$\left(\frac{d\omega}{dx}\right) = \left(\frac{d\omega}{dy}\right)\left\{-\tfrac{1}{2}M + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}M^2 - N\right)}\right\},$$

$$\left(\frac{d\theta}{dx}\right) = \left(\frac{d\theta}{dy}\right)\left\{-\tfrac{1}{2}M - \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}M^2 - N\right)}\right\}:$$

queste sono due equazioni a differenze parziali del primo ordine: integrandole dunque (240), troveremo per ω e θ una infinità di valori, tra i quali scieglier potremo i più semplici; per mezzo di essi poi troveremo i valori di x, y espressi in ω e θ, che sostituiti nei coefficienti della proposta, li cangeranno in altrettante funzioni di ω, θ.

La trasformazione per mezzo della quale l' equazione (A) è ridotta ad una forma assai più semplice (E), non può seguire in due casi, che io mi accingo a decifrare.

Riprendiamo l' equazione

(A) . . . . $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + M\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + N\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) + L\left(\frac{dz}{dx}\right) + P\left(\frac{dz}{dy}\right) + Qz + T = 0$.

Se fosse $M = 0$, $N = 0$, essa ridurrebbesi $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + L\left(\frac{dz}{dx}\right) + P\left(\frac{dz}{dy}\right) + Qz + T = 0$, e si avrebbe $\left(\frac{d\omega}{dx}\right) = 0$, $\left(\frac{d\theta}{dx}\right) = 0$, per il che ω, θ debbono essere funzioni della sola y, e quindi non possiamo determinare x in funzione di ω e di θ.

Il secondo caso ha luogo quando $N = \frac{1}{4}M^2$; poichè allora abbiamo

$\left(\frac{d\omega}{dx}\right) = -\frac{1}{2}M\left(\frac{d\omega}{dy}\right)$, e $\left(\frac{d\theta}{dx}\right) = -\frac{1}{2}M\left(\frac{d\theta}{dy}\right)$, ed ω viene ad essere funzione di θ.

Le due variabili ω, θ non sono più indipendenti l' una dall' altra, e siccome x, y lo sono, non ponno perciò esser date ciascuna in funzione di ω, θ.

In questo caso ci regoleremo così: lasciando stare y, supponiamo che z sia una funzione di y e di ω, essendo anche ω una funzione di x, y dato da quest' equazione

$\left(\frac{d\omega}{dx}\right) = -\frac{1}{2}M\left(\frac{d\omega}{dy}\right)$: si avrà allora x in funzione di ω e di y, e quindi

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{d\omega}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right),\quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{dz}{d\omega}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)':$$

la quantità $\left(\frac{dz}{dy}\right)'$ ci indica il coefficiente di dy nella differenza di z considerata come funzione di ω e di y: avremo in seguito

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{d\omega^2}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\omega}\right)\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) = \left(\frac{d^2z}{d\omega^2}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right) + \left(\frac{d^2z}{d\omega dy}\right)'\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{d\omega}\right)\left(\frac{d^2\omega}{dxdy}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{d\omega^2}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)' + \left(\frac{dz}{d\omega}\right)\left(\frac{d^2\omega}{dy^2}\right) + 2\left(\frac{d^2z}{d\omega dy}\right)'\left(\frac{d\omega}{dy}\right);$$

ora se noi sostituiamo questi valori nell' equazione (A), e vi facciamo

$N = \frac{1}{2}M^2$, $\left(\frac{d\omega}{dx}\right) = -\frac{1}{2}M\left(\frac{d\omega}{dy}\right)$, si vedrà che ella si può ridurre a quest' altra forma più semplice

$$(E') \ldots \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)' + A'\left(\frac{dz}{dy}\right)' + B'\left(\frac{dz}{d\omega}\right) + C'z + V' = 0;$$

di maniera che l' equazione (A) sarà sempre riducibile ad una di queste due forme

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + A\left(\frac{dz}{dx}\right) + B\left(\frac{dz}{dy}\right) + Cz + V = 0,$$

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + a\left(\frac{dz}{dx}\right) + b\left(\frac{dz}{dy}\right) + cz + V = 0.$$

§. 254. Consideriamo pertanto l' equazione

$$(E) \ldots \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + A\left(\frac{dz}{dx}\right) + B\left(\frac{dz}{dy}\right) + Cz + V = 0.$$

Per integrarla io faccio $z = e^{\alpha}\beta$, indicando per α, β due funzioni di x, y da determinarsi. Ciò posto, la suddetta equazione (E) si cangerà nella

$$(F) \ldots \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d^2\beta}{dxdy}\right) + \left\{\left(\frac{d\alpha}{dy}\right) + A\right\}\left(\frac{d\beta}{dx}\right) + \left\{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + B\right\}\left(\frac{d\beta}{dy}\right) \\ \left\{\left(\frac{d^2\alpha}{dxdy}\right) + \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)\left(\frac{d\alpha}{dy}\right) + A\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + B\left(\frac{d\alpha}{dy}\right) + C\right\}\beta \end{array} \right\} = -Ve^{-\alpha};$$

poniamo per determinare α

$(1) \ldots \left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + B = 0$, e per determinare β,

$(2) \ldots \left(\frac{d^2\beta}{dxdy}\right) + \left\{\left(\frac{d\alpha}{dy}\right) + A\right\}\left(\frac{d\beta}{dx}\right) = -Ve^{-\alpha}$; bisognerà allora che queste due equazioni soddisfacciano alla terza

$$(3) \ldots \left(\frac{d^2\alpha}{dxdy}\right) + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + A\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + B\left(\frac{d\alpha}{dy}\right) + C = 0.$$

L' equazione (1) ci dà subito

$\alpha = -\int Bdx + \varphi(y)$; e sostituendo questo valore di α nell' equazione (3), debbe questa esser soddisfatta, per il che si ha

$C = AB + \left(\frac{dB}{dy}\right)$.

In quest' ultima equazione è contenuta la relazione che regnar dee tra i coefficienti della proposta, onde abbiasi per integrale

$z = e^{\alpha}\beta$.

Per soddisfare all' equazione (F) potremmo porre anche

$(1)' \ldots \left(\frac{d\alpha}{dy}\right) + A = 0$,

$(2)' \ldots \left(\frac{d^2\beta}{dxdy}\right) + \left\{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + B\right\}\left(\frac{d\beta}{dy}\right) = -Ve^{-\alpha}$,

ed allora il valore di α, dalla prima ottenuto, avria dovuto rendere identica l' equazione

$(3)' \ldots \left(\frac{d^2\alpha}{dxdy}\right) + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + A\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + B\left(\frac{d\alpha}{dy}\right) + C = 0$,

ciò che succede se

$C = AB + \left(\frac{dA}{dx}\right)$: l' equazione dunque (E) è integrabile in questi due casi

$C = AB + \left(\frac{dB}{dy}\right)$, $C = AB + \left(\frac{dA}{dx}\right)$; e l' integrale ne è $z = e^{\alpha}\beta$, essendo α, β date dalle equazioni (1), (2) nel primo caso, e dalle (1)', (2)' nell' altro.

Sono dunque integrabili queste due equazioni

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + A\left(\frac{dz}{dx}\right) + B\left(\frac{dz}{dy}\right) + \left\{AB + \left(\frac{dB}{dy}\right)\right\}z + V = 0,$$

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + A\left(\frac{dz}{dx}\right) + B\left(\frac{dz}{dy}\right) + \left\{AB + \left(\frac{dA}{dx}\right)\right\}z + V = 0.$$

L' equazioni poi (2), (2)' sono facili ad integrarsi: infatti per la (2) facendo $\left(\frac{d\beta}{dx}\right) = u$, si ha

$\left(\frac{du}{dy}\right) + \left\{\left(\frac{d\alpha}{dy}\right) + A\right\}u = -Ve^{-\alpha}$, equazione del primo ordine di cui l' integrale si è dato al §. 125., e trovato u, si ha subito $\beta = \int u dx + \phi(y)$.

Il simile si dica dell' equazione (2)'.

Per farne un esempio, sia proposta l' equazione

$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) - \frac{1}{x-y}\left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{1}{x-y}\left(\frac{dz}{dy}\right) + \frac{2}{(x-y)^2}\, z = 0$: facendo

$C = \frac{2}{(x-y)^2}$, $A = -\frac{1}{x-y} = B$, si ha appunto

$C = AB + \left(\frac{dA}{dx}\right)$; dunque essa è integrabile, ed il suo integrale è $z = e^\alpha \beta$, quando α, β si determinino per mezzo di queste equazioni

$\left(\frac{d\alpha}{dy}\right) - \frac{1}{x-y} = 0$,

$\left(\frac{d^2\beta}{dxdy}\right) + \left\{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) - \frac{1}{x-y}\right\}\left(\frac{d\beta}{dy}\right) = 0$.

La prima dà

$\alpha = -l(x-y) + l\,Cost$; e siccome la costante può essere una funzione di x, perciò si avrà

$\alpha = l\,\frac{fx}{x-y}$, e quindi $e^\alpha = \frac{fx}{x-y}$ essendo fx funzione arbitraria di x.

Per integrare l' altra, facciamo $\left(\frac{d\beta}{dy}\right) = u$, e si avrà

$\left(\frac{du}{dx}\right) + \left\{\frac{f'x}{fx} - \frac{2}{x-y}\right\} u = 0$, ove $f'x = \left(\frac{d.fx}{dx}\right)$; e quindi

$u = \frac{(x-y)^2\Psi(y)}{fx}$ essendo $\Psi(y)$ una funzione arbitraria di y.

Trovato u, si avrà β e sarà

$\beta = \int u dy = \int \frac{(x-y)^2\Psi(y)}{fx}\,dy = \frac{1}{fx}\int(x-y)^2\Psi(y)\,dy$;

avremo pertanto

$\beta = \frac{1}{fx}\left\{\int(x-y)^2\Psi(y)\,dy + F(x)\right\}$, e quindi

$z = e^\alpha\beta = \frac{1}{x-y}\int(x-y)^2\Psi(y)\,dy + \frac{1}{x-y}F(x)$, essendo $F(x)$ una funzione arbitraria di x, e $\Psi(y)$ di y. Se si facesse $\Psi(y) = 0$, si avrebbe per z il valore particolare $\frac{1}{x-y}.F(x)$.

§. 255. Sopponiamo ora che nell' equazione

$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + A\left(\frac{dz}{dx}\right) + B\left(\frac{dz}{dy}\right) + Cz + V = 0$, non sia $C = AB + \left(\frac{dB}{dy}\right)$, nè $= AB + \left(\frac{dA}{dx}\right)$: la più piccola riflessione ci farà vedere che possiamo dare all' equazione la forma

$$d\left(\frac{\left(\frac{dz}{dy}\right) + Az}{dx}\right) + B\left\{\left(\frac{dz}{dy}\right) + Az\right\} + \left\{C - \left(\frac{dA}{dx}\right) - AB\right\} z + V = 0.$$

Ora facciasi $z' = \left(\frac{dz}{dy}\right) + Az$, e si avrà

$\left(\frac{dz'}{dx}\right) + Bz' + \left\{C - \left(\frac{dA}{dx}\right) - AB\right\} z + V = 0$.

Facciamo $M = C - \left(\frac{dA}{dx}\right) - AB$, e ci verrà

$\frac{1}{M}\left(\frac{dz'}{dx}\right) + \frac{B}{M}z' + z + \frac{V}{M} = 0$.

Se noi differenziamo questa ultima equazione per rapporto ad y, otteniamo l' equazione

$\frac{1}{M}\left(\frac{d^2z'}{dxdy}\right) - \frac{1}{M^2}\left(\frac{dM}{dy}\right)\left(\frac{dz'}{dx}\right) + \frac{B}{M}\left(\frac{dz'}{dy}\right) + z'\left(\frac{d\frac{B}{M}}{dy}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right) + \left(\frac{d\frac{V}{M}}{dy}\right) = 0$, che aggiunta alla precedente moltiplicata per A, e facendovi z' invece di $\left(\frac{dz}{dy}\right) + Az$, diverrà

$$\frac{1}{M}\left(\frac{d^2z'}{dxdy}\right) - \frac{1}{M}\left\{\frac{1}{M}\left(\frac{dM}{dy}\right) - A\right\}\left(\frac{dz'}{dx}\right) + \frac{B}{M}\left(\frac{dz'}{dy}\right) + \left\{\left(\frac{d\frac{B}{M}}{dy}\right) + \right.$$

$$\left.\frac{AB}{M}\right\} z' + z' + \left(\frac{d\frac{V}{M}}{dy}\right) + A\frac{V}{M} = 0,$$ ovvero moltiplicando tutto per M

$$\left(\frac{d^2z'}{dxdy}\right) + \left\{A - \frac{1}{M}\left(\frac{dM}{dy}\right)\right\}\left(\frac{dz'}{dx}\right) + B\left(\frac{dz'}{dy}\right) + \left\{M\left(\frac{d\frac{B}{M}}{dy}\right) + \right.$$

$$\left. AB + M\right\} z' + M\left(\frac{d\frac{V}{M}}{dy}\right) + AV = 0,$$ nella quale indicando per A' il coefficiente di $\left(\frac{dz'}{dx}\right)$, per C' quello di z', e per V' la quantità indipendente da z', si otterrà

$$(E') \;\ldots\; \left(\frac{d^2z'}{dxdy}\right) + A'\left(\frac{dz'}{dx}\right) + B\left(\frac{dz'}{dy}\right) + C'z' + V' = 0;$$

così l' integrale dell' equazione (E) dipende da quello della (E′), giacchè trovata z', si ricava z dall' integrazione dell' equazione

$z' = \left(\frac{dz}{dy}\right) + Az$: il valore di z si può anche avere dall' equazione quì sopra trovata

$\left(\frac{dz'}{dx}\right) + Bz' + Mz + V = 0$, che ci dà

$$z = -\frac{1}{M}\left\{V + Bz' + \left(\frac{dz'}{dx}\right)\right\}.$$

Quando dunque, non essendo integrabile l' equazione (E), lo fosse la (E′), dall' integrale di questa seconda si ricaverebbe quello della prima.

L' equazione (E′) è integrabile in questi due casi

$C' = A'B + \left(\frac{dB}{dy}\right)$, $C' = A'B + \left(\frac{dA'}{dx}\right)$: in questi casi anche sarà dunque integrabile la proposta.

Facendo $z' = \left(\frac{dz}{dx}\right) + Bz$, avrebbe potuto dedursi dall' equazione (E) l' equazione

$$\left(\frac{d^2z'}{dxdy}\right) + A\left(\frac{dz'}{dx}\right) + \left\{B - \frac{1}{M}\left(\frac{dM}{dx}\right)\right\}\left(\frac{dz'}{dy}\right) + \left\{M\left(\frac{d\frac{A}{M}}{dx}\right) + \right.$$

$$\left. AB + M\right\} z' + M\left(\frac{d\frac{V}{M}}{dx}\right) + BV = 0,$$ ovvero

$$(F') \;\ldots\; \left(\frac{d^2z'}{dxdy}\right) + A\left(\frac{dz'}{dx}\right) + B'\left(\frac{dz'}{dy}\right) + C'z' + V' = 0,$$

essendo

$$M = C - \left(\frac{dB}{dy}\right) - AB.$$

Dall' integrale dell' equazione (F′) dipende quello della (E), e perciò questa sarà ancora integrabile nei due casi

$C' = AB' + \left(\frac{dB'}{dy}\right)$, $C = AB' + \left(\frac{dA}{dx}\right)$.

Se neppure i criterj d' integrabilità dell' equazione

$$(E') \;\ldots\; \left(\frac{d^2z'}{dxdy}\right) + A'\left(\frac{dz'}{dx}\right) + B\left(\frac{dz'}{dy}\right) + C'z' + V' = 0$$

sono soddisfatti, noi la trasformeremo in un' altra

$$(E'') \;\ldots\; \left(\frac{d^2z''}{dxdy}\right) + A''\left(\frac{dz''}{dx}\right) + B\left(\frac{dz''}{dy}\right) + C''z'' + V'' = 0,$$

nella quale z'', A'', C'', V'' sono formati di z', A', C', V' come questi quì di z, A, C, V.

Se poi l' equazione (E″) sarà integrabile, lo sarà anche la (E′), ed in conseguenza la (E); e così di seguito.

Si veda una Memoria del Sig. La-Place negli Atti dell' Accademia delle Scienze 1773.

§. 256. Per farne un esempio, sia l' equazione

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - \frac{2}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0.$$

Fattone il paragone con l' equazione (A) del §. 263., si ha

$M = 0$, $N = -1$, $L = -\frac{2}{x}$, $Q = 0$, $T = 0$, $P = 0$;

e volendone la trasformazione in un'altra tra le variabili ω, θ, si hanno queste due equazioni per la determinazione delle due nuove variabili

$\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 = \left(\frac{d\omega}{dy}\right)^2$, $\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 = \left(\frac{d\theta}{dy}\right)^2$, dalle quali si ricava

$\left(\frac{d\omega}{dx}\right) - \left(\frac{d\omega}{dy}\right) = 0$, $\left(\frac{d\theta}{dx}\right) + \left(\frac{d\theta}{dy}\right) = 0$, cui si soddisfà con $\omega = y + x$, $\theta = y - x$.

L' integrale dunque della proposta si riduce a quello di una equazione di questa forma

$\left(\frac{d^2 z}{d\omega d\theta}\right) + A\left(\frac{dz}{d\omega}\right) + B\left(\frac{dz}{d\theta}\right) + Cz + V = 0$ tra due nuove variabili ω, θ, le quali sono date in x, y.

Abbiansi sott' occhio le denominazioni del citato §., e vedremo che

$A = \frac{L'}{M'}$, $B = \frac{P'}{M'}$, $C = \frac{Q}{M'}$, $V = \frac{T}{M'}$; $M' = -2 + 0 - 2 = -4$, $L' = -\frac{2}{x}$, $P' = \frac{2}{x}$, e quindi

$A = \frac{1}{2x}$, $B = -\frac{1}{2x}$, $C = 0$, $V = 0$: la trasformata sarà dunque

$(e) \ldots\ldots \left(\frac{d^2 z}{d\omega d\theta}\right) + \frac{1}{\omega - \theta}\left(\frac{dz}{d\omega}\right) - \frac{1}{\omega - \theta}\left(\frac{dz}{d\theta}\right) = 0$, nella quale z è funzione delle variabili ω, θ.

Paragoniamo ora quest' ultima equazione (e) con la (E) del §. 254, ed avremo

$\omega = x$, $\theta = y$, $A = \frac{1}{\omega - \theta}$, $B = -\frac{1}{\omega - \theta}$, $C = 0$, $V = 0$; sarà poi quell' equazione integrabile se avrà luogo una di queste due condizioni

$C = AB + \left(\frac{dB}{d\theta}\right)$, $C = AB + \left(\frac{dA}{d\omega}\right)$: ora non avendo luogo alcuna di esse, come potremmo vedere con la sostituzione dei respettivi valori di A, B, C, concluderemo che l' equazione

$(e) \ldots \left(\frac{d^2 z}{d\omega d\theta}\right) + \frac{1}{\omega - \theta}\left(\frac{dz}{d\omega}\right) - \frac{1}{\omega - \theta}\left(\frac{dz}{d\theta}\right) = 0$, non è integrabile facendo $z = e^{\alpha}\beta$.

Per questo incominciamo le trasformazioni di cui si parla al §. 255., e seguendo quanto vi si dice, quest' equazione si trasformerà in un' altra

$(e') \ldots \left(\frac{d^2 z'}{d\omega d\theta}\right) + A'\left(\frac{dz'}{d\omega}\right) + B\left(\frac{dz'}{d\theta}\right) + C'z' + V' = 0$, ove sarà

$z' = \left(\frac{dz}{d\theta}\right) + \frac{1}{\omega - \theta} z$; $A' = A - \frac{1}{M}\left(\frac{dM}{d\theta}\right)$; $C' = M\left(\frac{d\frac{B}{M}}{d\theta}\right) + AB + M$; $M = C - \left(\frac{dA}{d\omega}\right) - AB$, e quindi sostituendo i valori di C, A, B, e facendo le indicate differenziazioni, avremo

$M = \frac{2}{(\omega - \theta)^2}$, $A' = -\frac{1}{\omega - \theta}$, $B = -\frac{1}{\omega - \theta}$, $C' = \frac{2}{(\omega - \theta)^2}$, $V' = 0$: l' equazione dunque cui viene in questa guisa ridotta la (e), sarà

$(e') \ldots\ldots \left(\frac{d^2 z'}{d\omega d\theta}\right) - \frac{1}{\omega - \theta} \cdot \left(\frac{dz'}{d\omega}\right) - \frac{1}{\omega - \theta} \cdot \left(\frac{dz'}{d\theta}\right) + \frac{2}{(\omega - \theta)^2} \cdot z' = 0.$

Quest' equazione è quella stessa che presa abbiamo per esempio al §. 254., e per la quale abbiamo ottenuto (le variabili x, y cangiansi in ω, θ)

$z' = \frac{1}{\omega - \theta}\int(\omega - \theta)^2 \Psi(\theta)\, d\theta + \frac{1}{\omega - \theta} \cdot F(\omega)$, facendosi l' integrazione nella supposizione di ω costante.

Trovato z' si ha z dalla formula dello stesso §. 255.,

$z = -\frac{1}{M}\left\{V + Bz' + \left(\frac{dz'}{dx}\right)\right\}$, e per noi $= -\frac{1}{M}\left\{V + Bz' + \left(\frac{dz'}{d\omega}\right)\right\}$: sarà dunque

$$z = -\frac{(\omega-\theta)^2}{2}\left\{-\frac{1}{(\omega-\theta)^2}\int(\omega-\theta)^2\Psi(\theta)\,d\theta - \frac{1}{(\omega-\theta)^2}\cdot F(\omega) - \frac{1}{(\omega-\theta)^2}\int(\omega-\theta)^2\Psi(\theta)\,d\theta + \frac{2}{\omega-\theta}\int(\omega-\theta)\Psi(\theta)\,d\theta - \frac{1}{(\omega-\theta)^2}\cdot F(\omega) + \frac{1}{\omega-\theta}\cdot\left(\frac{dF}{d\omega}\right)\right\}$$

$$z = \int(\omega-\theta)^2\Psi(\theta)\,d\theta + F(\omega) - (\omega-\theta)\int(\omega-\theta)\Psi(\theta)\,d\theta - \frac{(\omega-\theta)}{2}\cdot\left(\frac{dF}{d\omega}\right).$$

Questo valore di z è l' integrale completo dell' equazione (e), ed in conseguenza della proposta

$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - \frac{2}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$, quando in esso, ad integrazioni compite, si faccia

$\omega = x + y$, $\theta = y - x$.

Se noi facciamo $\Psi_{,}(\theta) = \int d\theta\,\Psi(\theta)$, $\Psi_{,,}(\theta) = \int d\theta\,\Psi_{,}(\theta)$, $\Psi_{,,,}(\theta) = \int d\theta\,\Psi_{,,}(\theta)$, l' espressione della z si ridurrà anche a questa più semplice

$z = (\omega-\theta)\Psi_{,,}(\theta) + 2\Psi_{,,,}(\theta) + F(\omega) - \frac{\omega-\theta}{2}\cdot\left(\frac{dF}{d\omega}\right)$, ovvero

fatto $\left(\frac{dF}{d\omega}\right) = F'(\omega)$,

$$z = 2x\Psi_{,,}(y-x) + 2\Psi_{,,,}(y-x) + F(y+x) - xF'(y+x).$$

§. 257. Esponiamo ora un metodo datoci dal Sig. Le-Gendre per l' integrazione dell' equazione

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + M\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + N\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) + P\left(\frac{dz}{dx}\right) + Q\left(\frac{dz}{dy}\right) + Lz + T = 0.$$

Supponiamo che quest' equazione sia il risultato dell' eli-

minazione di z' tra le due equazioni a differenziali parziali del primo ordine

$$(E)\ \ldots\ldots \begin{cases} \left(\frac{dz}{dx}\right) + m\left(\frac{dz}{dy}\right) + lz = z' \\ \left(\frac{dz'}{dx}\right) + m'\left(\frac{dz'}{dy}\right) + l'z' = nz + v \end{cases}$$

ed i valori di m, n, l, l', m', v si troveranno così:

Differenziamo la prima di queste due equazioni rapporto ad x, e quindi rapporto ad y, ed avremo

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + m\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + \left(\frac{dm}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) + l\left(\frac{dz}{dx}\right) + z\left(\frac{dl}{dx}\right) = \left(\frac{dz'}{dx}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + m\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) + \left(\frac{dm}{dy}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) + l\left(\frac{dz}{dy}\right) + z\left(\frac{dl}{dy}\right) = \left(\frac{dz'}{dy}\right);$$

fatto ora le debite sostituzioni nella seconda equazione, diverrà

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + m\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + \left(\frac{dm}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) + l\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dl}{dx}\right)z + mm'\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) \\ &+ m'\left(\frac{d^2z'}{dxdy}\right) + m'\left(\frac{dm}{dy}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) + l'\left(\frac{dz}{dx}\right) + m'\left(\frac{dl}{dy}\right)z \\ &+ m'l\left(\frac{dz}{dy}\right) + l'lz \\ &+ l'm\left(\frac{dz}{dy}\right) - nz \end{aligned}\right\} = v,$$

e quindi fattone il paragone con la proposta, otterremo

$m + m' = M$, $mm' = N$,

$\left(\frac{dm}{dx}\right) + m'\left(\frac{dm}{dy}\right) + m'l + l'm = Q$, $l + l' = P$,

$\left(\frac{dl}{dx}\right) + m'\left(\frac{dl}{dy}\right) + l'l - n = L$, $v = -T$.

Queste equazioni ci daranno facilmente i valori dei coefficienti m, n, l, l', m', v, ed in conseguenza conosceremo le due equazioni, tra le quali eliminando z', si ricava la proposta.
L' integrazione dunque di quell' equazione dipende dall' integrazione delle due equazioni (E).

Se ora i coefficienti della proposta saranno tali da rendere nullo il valore di n, se faranno cioè $n = 0$, allora la seconda di quelle due equazioni (E) diverrà

$(\frac{dz'}{dx}) + m(\frac{dz'}{dy}) + l'z' = v$, che essendo una equazione del primo ordine, se ne riguarderà come sempre possibile l' integrazione. Potremo dunque considerare l' equazione del secondo ordine come integrata, perchè dipenderà da equazioni del primo ordine.

Se poi i coefficienti della proposta non avranno una tal proprietà, allora cominceremo ad eliminare dalle due equazioni (E) la quantità z, ed il risultato della eliminazione sarà una nuova equazione lineare a differenziali parziali del secondo ordine di questa forma

$(\frac{d^2z'}{dx^2}) + M'(\frac{d^2z'}{dxdy}) + N'(\frac{d^2z'}{dy^2}) + P'(\frac{dz'}{dx}) + Q'(\frac{dz'}{dy}) + L'z' + T = 0$; facendo ora dipendere questa equazione dalla eliminazione di z'' per mezzo di due equazioni del primo ordine

$$(E') \ldots \left\{ \begin{array}{l} (\frac{dz'}{dx}) + m(\frac{dz'}{dy}) + lz' = z'' \\ (\frac{dz''}{dx}) + m'(\frac{dz''}{dy}) + l'z'' = n'z' + v' \end{array} \right.$$

si avranno per determinare m, n, l, l', n', v' delle equazioni in M', N', P', Q', L', T', simili a quelle trovate sopra in M, N, P, Q, L, T per determinare le lettere dello stesso nome.

Se pertanto i coefficienti M', N' ec. saranno tali che rendano $n' = 0$, si potrà ottenere il valore di z'', quindi quello di z', e da questo avremo quello di z. Continuando lo stesso andamento, si troveranno continui casi d' integrabilità dell' equazione proposta.

Tutti questi metodi non sono però che particolari, e ci lasciano sempre desiderare, come abbiam detto qui sopra, una Teoria completa per l' integrazione dell' equazioni a differenze parziali.

§. 258. Per l' integrazione dell' equazione

$(\frac{d^2z}{dx^2}) + M(\frac{d^2z}{dxdy}) + N(\frac{d^2z}{dy^2}) = 0$ non ponno adoprarsi i metodi precedenti quando M ed N, sono funzioni di p, q. Ecco però come il Sig. Le-Gendre ne fa la trasformazione.

Nell' equazione $dz = pdx + qdy$, p e q sono due funzioni di x e di y, ed in conseguenza potranno viceversa riguardarsi le stesse x, y come funzioni di p e di q. Fatta questa considerazione, la regola dell' integrazione per parti ci darà

$z = px + qy - \int(xdp + ydq)$, e ponendo

$xdp + ydq = dv$, sarà

$z = px + qy - v$, $x = (\frac{dv}{dp})$, $y = (\frac{dv}{dq})$: si vede dunque che se conosceremo in qualche modo il valore di v, che dee essere una funzione di p e di q, allora eliminando per mezzo di quelle tre equazioni p e q, avremo un' equazione fra le tre variabili z, x, y, che ci darà una di esse espressa in funzione delle altre due.

Procuriamo ora di trovare un' equazione tra v, p, q. Il coefficiente differenziale $(\frac{d^2z}{dx^2}) = (\frac{dp}{dx})$ suppone y costante, ed in conseguenza nulla la differenziale di $(\frac{dv}{dq})$; dunque

$(\frac{d^2v}{dpdq})dp + (\frac{d^2v}{dq^2})dq = 0$.

Ora $x = (\frac{dv}{dp})$ ci dà

$dx = (\frac{d^2v}{dp^2})dp + (\frac{d^2v}{dpdq})dq$, e ponendo invece di dq il suo valore

$dq = -(\frac{d^2v}{dpdq})dp : (\frac{d^2v}{dq^2})$, si avrà

$dx = \frac{(\frac{d^2v}{dp^2})(\frac{d^2v}{dq^2}) - (\frac{d^2v}{dpdq})^2}{(\frac{d^2v}{dq^2})}dp$; considerando pertanto x come funzione di p, sarà

$\left(\frac{dx}{dp}\right) = \alpha : \left(\frac{d^2v}{dq^2}\right)$ rappresentando per α quel numeratore; e se riguardiamo p come funzione di x, sarà

$\left(\frac{dp}{dx}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{d^2v}{dq^2}\right)$.

Nella stessa guisa troveremo

$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) = -\frac{1}{\alpha}\left(\frac{d^2v}{dpdq}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{d^2v}{dp^2}\right)$.

Sostituiscansi questi valori nella proposta, ed avremo

$\left(\frac{d^2v}{dq^2}\right) - M\left(\frac{d^2v}{dpdq}\right) + N\left(\frac{d^2v}{dp^2}\right) = 0$, la quale ci dee dare il valore della funzione incognita v. In quest' equazione le variabili di cui è composta la funzione, sono p e q, ed i coefficienti M, N sono funzioni di quelle variabili stesse.

L' equazione

$(1 + q^2)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) - 2pq\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + (1 + p^2)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = 0$, cui non potrebbe applicarsi il metodo spiegato nei §§. precedenti, si riduce subito a quest' altra

$(1 + q^2)\left(\frac{d^2v}{dq^2}\right) + 2pq\left(\frac{d^2v}{dpdq}\right) + (1 + p^2)\left(\frac{d^2v}{dp^2}\right) = 0$, tra le tre variabili p, q, v, la quale è suscettibile di quel metodo.

§. 259. Ma a proposito di una siffatta integrazione possiamo anche adoprare l' artifizio seguente.

Ripresa l' equazione

$(1 + p^2)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - 2pq\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + (1 + q^2)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = 0$, riguardiamo le tre variabili x, y, z come funzioni ciascuna di due altre variabili ω, θ, ed è chiaro che se potremo avere tre equazioni di questa forma

$x = F(\omega, \theta)$; $y = \varphi(\omega, \theta)$; $z = \Psi(\omega, \theta)$ l' eliminazione di ω e di θ ci darà un' equazione tra x, y, z.

Posto questo, avremo

$dx = \left(\frac{dx}{d\omega}\right) d\omega + \left(\frac{dx}{d\theta}\right) d\theta$,

$dy = \left(\frac{dy}{d\omega}\right) d\omega + \left(\frac{dy}{d\theta}\right) d\theta$,

$dz = \left(\frac{dz}{d\omega}\right) d\omega + \left(\frac{dz}{d\theta}\right) d\theta$:

ma essendo z funzione di x, y, sarà

$\left(\frac{dz}{d\omega}\right) = \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dx}{d\omega}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dy}{d\omega}\right)$,

$\left(\frac{dz}{d\theta}\right) = \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dx}{d\theta}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dy}{d\theta}\right)$, ovvero

$\left(\frac{dz}{d\omega}\right) = p\left(\frac{dx}{d\omega}\right) + q\left(\frac{dy}{d\omega}\right)$

$\left(\frac{dz}{d\theta}\right) = p\left(\frac{dx}{d\theta}\right) + q\left(\frac{dy}{d\theta}\right)$.

Da queste due equazioni troveremo i valori di p e di q, e facendo

$\left(\frac{dx}{d\omega}\right)\left(\frac{dy}{d\theta}\right) - \left(\frac{dx}{d\theta}\right)\left(\frac{dy}{d\omega}\right) = L$

$\left(\frac{dz}{d\omega}\right)\left(\frac{dx}{d\theta}\right) - \left(\frac{dz}{d\theta}\right)\left(\frac{dx}{d\omega}\right) = N$

$\left(\frac{dy}{d\omega}\right)\left(\frac{dz}{d\theta}\right) - \left(\frac{dy}{d\theta}\right)\left(\frac{dz}{d\omega}\right) = M$, avremo

$p = -M : L$, $q = -N : L$.

Saranno poi identiche le due equazioni

$$(E) \ldots\ldots \begin{cases} L\left(\frac{dz}{d\omega}\right) + N\left(\frac{dy}{d\omega}\right) + M\left(\frac{dx}{d\omega}\right) = 0, \\ L\left(\frac{dz}{d\theta}\right) + N\left(\frac{dy}{d\theta}\right) + M\left(\frac{dx}{d\theta}\right) = 0. \end{cases}$$

Trovati i valori di p, q, conviene trovare quei di r, s, t espressi per le nuove variabili. Avremo per questo

$$\left(\frac{d^2z}{d\omega^2}\right) = r\left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2 + 2s\left(\frac{dx}{d\omega}\right)\left(\frac{dy}{d\omega}\right) + t\left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2 + p\left(\frac{d^2x}{d\omega^2}\right) + q\left(\frac{d^2y}{d\omega^2}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z}{d\omega d\theta}\right) = r\left(\frac{dx}{d\omega}\right)\left(\frac{dx}{d\theta}\right) + s\left(\frac{dx}{d\theta}\right)\left(\frac{dy}{d\omega}\right) + s\left(\frac{dx}{d\omega}\right)\left(\frac{dy}{d\theta}\right) + t\left(\frac{dy}{d\omega}\right)\left(\frac{dy}{d\theta}\right) + p\left(\frac{d^2x}{d\omega d\theta}\right) + q\left(\frac{d^2y}{d\omega d\theta}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z}{d\theta^2}\right) = r\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + 2s\left(\frac{dx}{d\theta}\right)\left(\frac{dy}{d\theta}\right) + t\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 + p\left(\frac{d^2x}{d\theta^2}\right) + q\left(\frac{d^2y}{d\theta^2}\right),$$

e sostituendo in queste equazioni i valori di p e di q, si avrà

$$L\left(\frac{d^2z}{d\omega^2}\right) + N\left(\frac{d^2y}{d\omega^2}\right) + M\left(\frac{d^2x}{d\omega^2}\right) = L\left\{r\left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2 + 2s\left(\frac{dx}{d\omega}\right)\left(\frac{dy}{d\omega}\right) + t\left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2\right\},$$

$$L\left(\frac{d^2z}{d\omega d\theta}\right) + N\left(\frac{d^2y}{d\omega d\theta}\right) + M\left(\frac{d^2x}{d\omega d\theta}\right) = L\left\{r\left(\frac{dx}{d\omega}\right)\left(\frac{dy}{d\theta}\right) + s\left(\frac{dx}{d\omega}\right)\left(\frac{dy}{d\theta}\right) + s\left(\frac{dx}{d\theta}\right)\left(\frac{dy}{d\omega}\right) + t\left(\frac{dx}{d\theta}\right)\left(\frac{dy}{d\omega}\right)\right\},$$

$$L\left(\frac{d^2z}{d\theta^2}\right) + N\left(\frac{d^2y}{d\theta^2}\right) + M\left(\frac{d^2x}{d\theta^2}\right) = L\left\{r\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + 2s\left(\frac{dx}{d\theta}\right)\left(\frac{dy}{d\omega}\right) + t\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2\right\},$$

dalle quali ricaveremo i valori di r, s, t; e facendo avvertenza alle riduzioni che nascono dalle equazioni identiche (E), avremo

$$L^3 r = \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 \left\{L\left(\frac{d^2z}{d\omega^2}\right) + N\left(\frac{d^2y}{d\omega^2}\right) + M\left(\frac{d^2x}{d\omega^2}\right)\right\} - 2\left(\frac{dy}{d\theta}\right)\left(\frac{dy}{d\omega}\right) \times \left\{L\left(\frac{d^2z}{d\omega d\theta}\right) + N\left(\frac{d^2y}{d\omega d\theta}\right) + M\left(\frac{d^2x}{d\omega d\theta}\right)\right\} + \left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2 \left\{L\left(\frac{d^2z}{d\theta^2}\right) + N\left(\frac{d^2y}{d\theta^2}\right) + M\left(\frac{d^2x}{d\theta^2}\right)\right\},$$

$$L^3 s = -\left(\frac{dx}{d\theta}\right)\left(\frac{dy}{d\theta}\right) \left\{L\left(\frac{d^2z}{d\omega^2}\right) + N\left(\frac{d^2y}{d\omega^2}\right) + M\left(\frac{d^2x}{d\omega^2}\right)\right\} + \left\{\left(\frac{dx}{d\omega}\right)\left(\frac{dy}{d\theta}\right) + \left(\frac{dx}{d\theta}\right)\left(\frac{dy}{d\omega}\right)\right\} \left\{L\left(\frac{d^2z}{d\omega d\theta}\right) + N\left(\frac{d^2y}{d\omega d\theta}\right) + M\left(\frac{d^2x}{d\omega d\theta}\right)\right\} - \left(\frac{dx}{d\omega}\right)\left(\frac{dy}{d\omega}\right) \times \left\{L\left(\frac{d^2z}{d\theta^2}\right) + N\left(\frac{d^2y}{d\theta^2}\right) + M\left(\frac{d^2x}{d\theta^2}\right)\right\},$$

$$L^3 t = \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 \left\{L\left(\frac{d^2x}{d\omega^2}\right) + N\left(\frac{d^2y}{d\omega^2}\right) + M\left(\frac{d^2x}{d\omega^2}\right)\right\} - 2\left(\frac{dx}{d\omega}\right)\left(\frac{dx}{d\theta}\right) \times \left\{L\left(\frac{d^2z}{d\omega d\theta}\right) + N\left(\frac{d^2y}{d\omega d\theta}\right) + M\left(\frac{d^2x}{d\omega d\theta}\right)\right\} + \left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2 \left\{L\left(\frac{d^2z}{d\theta^2}\right) + N\left(\frac{d^2y}{d\theta^2}\right) + M\left(\frac{d^2x}{d\theta^2}\right)\right\}:$$

ora sostituendo nell' equazione proposta per p, q, r, s, t i respettivi valori, avremo questa trasformata

$$\left\{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2\right\} \left\{L\left(\frac{d^2z}{d\omega^2}\right) + N\left(\frac{d^2y}{d\omega^2}\right) + M\left(\frac{d^2x}{d\omega^2}\right)\right\} - 2\left\{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)\left(\frac{dx}{d\omega}\right) + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)\left(\frac{dy}{d\omega}\right) + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)\left(\frac{dz}{d\omega}\right)\right\} \left\{L\left(\frac{d^2z}{d\omega d\theta}\right) + N\left(\frac{d^2y}{d\omega d\theta}\right) + M\left(\frac{d^2x}{d\omega d\theta}\right)\right\} + \left\{\left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\omega}\right)^2\right\} \times \left\{L\left(\frac{d^2z}{d\theta^2}\right) + N\left(\frac{d^2y}{d\theta^2}\right) + M\left(\frac{d^2x}{d\theta^2}\right)\right\} = 0.$$

Quest' equazione sarà soddisfatta se noi poniamo

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = 0, \quad \left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\omega}\right)^2 = 0,$$

$$\left(\frac{d^2z}{d\omega d\theta}\right) = 0, \quad \left(\frac{d^2y}{d\omega d\theta}\right) = 0, \quad \left(\frac{d^2x}{d\omega d\theta}\right) = 0.$$

Le ultime tre di queste cinque equazioni ci danno

$z = F(\omega) + f(\theta)$,

$y = F'(\omega) + f'(\theta)$,

$x = F''(\omega) + f''(\theta)$, indicando per $F(\omega)$, $F'(\omega)$, $F''(\omega)$ tre diverse funzioni di ω, ed egualmente per $f(\theta)$, $f'(\theta)$, $f''(\theta)$ tre diverse funzioni di θ.

Questi tre valori poi di x, y, z dovendo soddisfare alle due prime di quelle cinque equazioni, avremo tra le sei funzioni queste due equazioni (si scrive F, f ec., per $F(\omega)$, $f(\theta)$ ec.),

$$\left(\frac{df}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{df'}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{df''}{d\theta}\right)^2 = 0,$$

$(\frac{dF}{d\omega})^2 + (\frac{dF'}{d\omega})^2 + (\frac{dF''}{d\omega})^2 = 0$, ed in conseguenza

$x = F(\omega) + f(\theta)$

$y = F'(\omega) + f'(\theta)$

$z = \int d\omega \sqrt{(-(\frac{dF}{d\omega})^2 - (\frac{dF'}{d\omega})^2)} + \int d\theta \sqrt{(-(\frac{df}{d\theta})^2 - (\frac{df'}{d\theta})^2)}$.

Questo sistema di tre equazioni sarà l' integrale completo della proposta: anzi bastando due sole funzioni arbitrarie, possiamo fare $F'(\omega) = \omega$, $f'(\theta) = \theta$, ed avremo

$y = \omega + \theta$

$x = F(\omega) + f(\theta)$

$z = \int d\omega \sqrt{(-1 - (\frac{dF}{d\omega})^2)} + \int d\theta \sqrt{(-1 - (\frac{df}{d\theta})^2)}$: l' equazione poi tra x, y, z sarà il risultato dell' eliminazione delle due quantità ω, θ.

Io non mi trattengo a parlare di più sopra l' integrazione delle equazioni differenziali parziali, giacchè quel poco che se ne sa al di là di ciò che ho spiegato, non riguarda che dei casi particolarissimi pe' quali sono stati anche immaginati degli artifizj particolari: ne farò discorso ogni qual volta mi verrà in acconcio trattando delle affezioni delle superficie curve, e delle curve a doppia curvatura.

Per ciò che riguarda poi l' applicazione dei metodi spiegati alle equazioni degli ordini superiori, essa è così limitata, e le difficoltà vi si complicano in maniera, che nessuno avanzamento in sostanza può dirsi che abbia fatto l' analisi in questo ramo.

§. 260. Gl' integrali completi delle equazioni differenziali parziali contengono delle funzioni arbitrarie, la cui determinazione debbe attingersi nelle condizioni dei Problemi dipendenti da tali equazioni. Ecco come ci dirigeremo per ottenerla.

Sia $P = \varphi(Q)$ l' integrale di una equazione differenziale parziale del primo ordine, nel quale $\varphi(Q)$ rappresenti la funzione arbitraria, P, Q due funzioni date in x, y, z. Supponiamo ora che le condizioni del Problema ci dicano, che quan-

do $y = \alpha_x$ funzione data di x, debba anche essere $z = \beta_x$ altra funzione data di x, si tratta di determinare φ in modo che questa condizione abbia luogo.

Per questo nelle quantità P e Q sostituiscansi i valori da-
ti di y e di z, ed esse diverranno allora due funzioni cogni-
te di x; rappresentiamole per X', X; bisognerà che l' equazio-
ne $X' = \varphi(X)$ sia identica, ciò che dovrà ottenersi con una
opportuna determinazione della forma della funzione φ.

Per questo poniamo $X = t$, e cavando da quest' equazio-
ne il valore di x dato per t, e sostituendolo in X' divenga
questo T; avremo allora
$T = \varphi(t)$, e così T sarà la forma che aver debbe la funzio-
ne incognita $\varphi(t)$ di t. Dee dunque $\varphi(Q)$ esser fatto di Q,
come $\varphi(t)$ lo è fatto di t, cioè come T è fatto di t.

Per esempio, avendo trovato al §. 241. che l' integrale dell' equazione

$x(\frac{dz}{dx}) + y(\frac{dz}{dy}) + z = 0$, è

$zx = \Psi(\frac{y}{x})$, determiniamo la forma della funzione in tal guisa, che fatto $y = ax^2$ abbiasi $z = bx$: avremo allora quest' equazione,

$bx^2 = \Psi(ax)$, la quale dee essere identica. Fatto $ax = t$, si ha

$bx^2 = \frac{bt^2}{a^2}$; dunque

$\frac{bt^2}{a^2} = \Psi(t)$, ed in conseguenza

$\Psi(\frac{y}{x}) = \frac{b}{a^2}(\frac{y}{x})^2$: sarà in fine

$zx = \frac{b}{a^2}(\frac{y}{x})^2$.

§. 261. Sia ora $P = \varphi(Q) + S\Psi(R)$ l' integrale com-
pleto di una equazione a differenze parziali del secondo ordi-
ne: P, Q, R, S sono tante funzioni conosciute delle variabili
x, y, z; e $\varphi(Q)$, $\Psi(R)$ sono le due funzioni arbitrarie.

Cerchiamo di determinarle in tal modo che fatto $y = \alpha_x$, abbiasi $z = \beta_x$, e fatto $y = \alpha'_x$, abbiasi $z = \beta'_x$, essendo α_x, β_x, α'_x, β'_x quattro funzioni date di x.

Supponiamo che le sostituzioni di queste funzioni in P, Q, S, R ci diano queste due equazioni

$u_x = \varphi(m_x) + n_x \Psi(r_x)$,

$u'_x = \varphi(m'_x) + n'_x \Psi(r'_x)$, e dovremo determinare le due funzioni φ, Ψ in maniera che tali equazioni riescano identiche.

Facciamo $m'_x = m_{x+\omega}$, ω potrà sempre determinarsi; supponendo ora che nella prima equazione x cresca della quantità ω, si avrà

$u_{x+\omega} = \varphi(m_{x+\omega}) + n_{x+\omega} \Psi(r_{x+\omega})$, la quale sottratta dalla seconda equazione ci dà

$u'_x - u_{x+\omega} = n'_x \Psi(r'_x) - n_{x+\omega} \Psi(r_{x+\omega})$.

Ora se si fa $r'_x = t$, si avrà x dato in *funzione* di t, e supponendo che sia $r_{x+\omega} = t + \Delta t$, avremo, chiamando $-q_t$, q'_t i coefficienti in funzione di t, ed indicando per T il primo membro in funzione di t, avremo dissi

$T = -q_t \Psi(t) + q'_t \Psi(t + \Delta t)$.

Questa equazione è una equazione del primo ordine a differenze finite variabili, poichè Δt è una funzione di t: il di lei integrale, sarà dunque

$\Psi(t) = e^{\Sigma L \frac{q_t}{q'_t}} \left\{ C + \Sigma e^{-\Sigma L \frac{q_t}{q'_t}} : \frac{T_t}{q'_t} \right\}$, eseguendo le integrazioni secondo il sistema di differenza variabile che regna in quell' equazione.

Trovato come $\Psi(t)$ è fatta di t, si avrà subito come $\Psi(R)$ è fatta di R; ed in seguito come $\varphi(Q)$ è fatta di Q; onde l' integrale soddisfaccia a quelle due condizioni.

Si vede dunque che tutta la difficoltà di questa ricerca si riduce all' integrazione di un' equazione del primo ordine a differenze finite variabili, delle quali si è abbastanza parlato (Tom. I. Cap. III.).

Fine del Tomo Terzo.

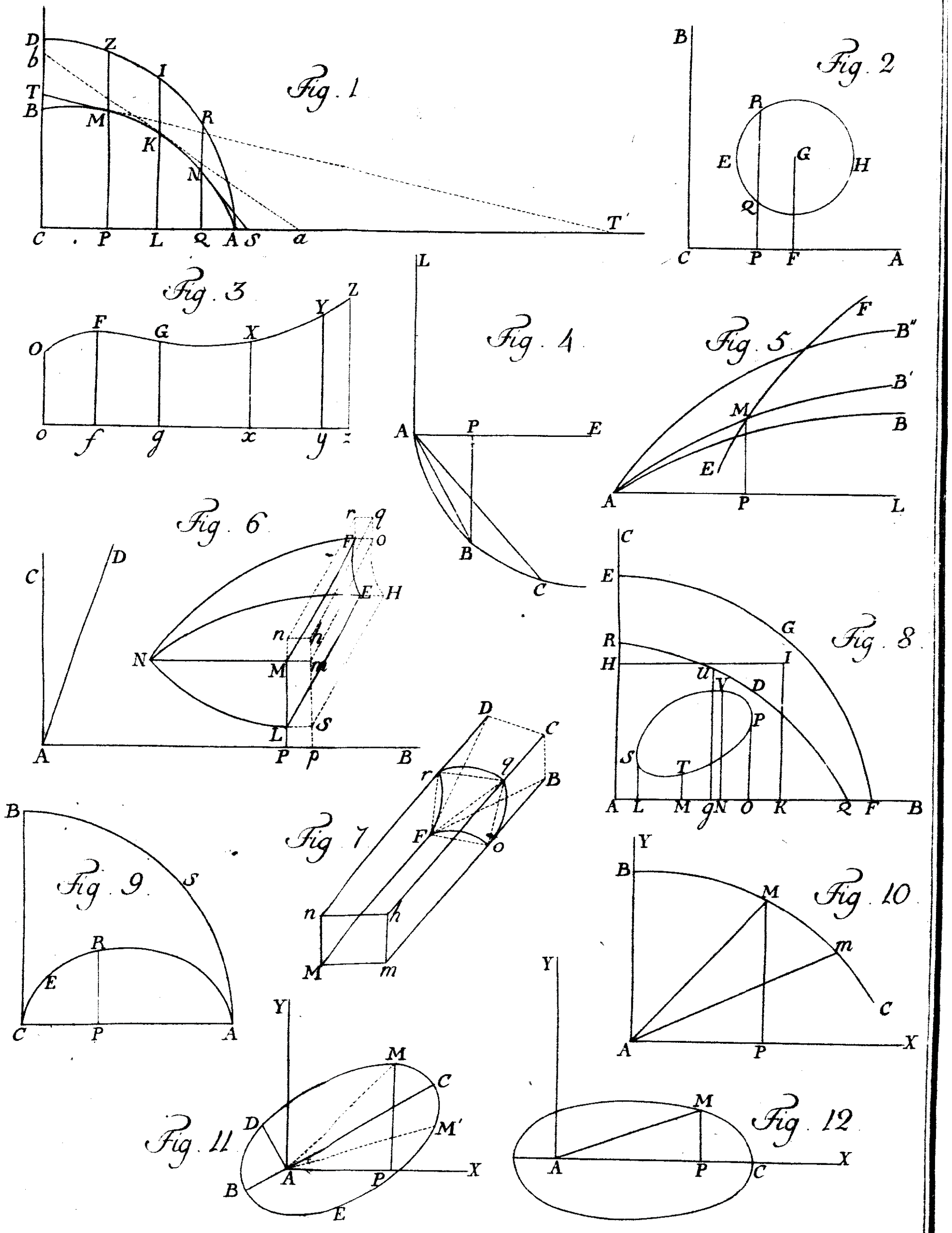


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 12