CORSO

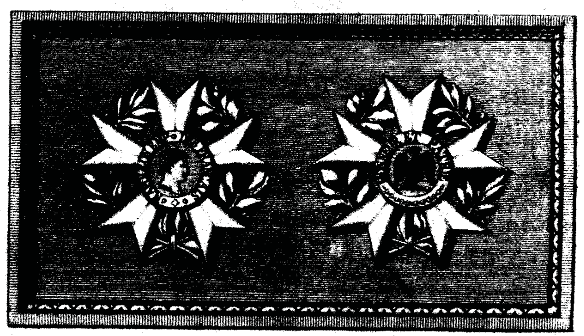
DI

MATEMATICA SUBLIME

TOMO II.

CALCOLO DIFFERENZIALE, INTEGRALE
E SUE APPLICAZIONI

DEL DOTT. VINCENZIO BRUNACCI
M. DELLA LEGIONE D' ONORE DI FRANCIA
DELL' IST. NAZ. C. DELL' ACCAD. DI TURINO EC,
P. P. DI MAT. SUB. NELLA R. UNIVERSITA'
DI PAVIA.



FIRENZE 1806.

PRESSO PIETRO ALLEGRINI
CON APPROVAZIONE.

AVVERTIMENTO

DELL' AUTORE.

ECco alla luce il secondo Tomo del mio Corso di Matematica Sublime. Si contengono in esso il Calcolo Differenziale, le Applicazioni alla Geometria, alla Meccanica, ed una porzione dell' Integrale.

Calcando le orme di La-Grange Principe dei Geometri del Nostro tempo, ne ho sbarazzati i principj da ogni idea d' infinitesimi, d' evanescenti, di limiti e di flussioni. Non altre che verità di definizione e di convenzione servono ad essi di fondamento. Alla fine di questo Tomo ho posta un' appendice sopra le curve a doppia curvatura, e sopra le superficie, onde non obbligare i miei Lettori a cercare altrove alcune nozioni Geometriche, delle quali ponno abbisognare.

Seguendo poi quanto ho praticato nel Calcolo delle Differenze finite, ho contrassegnati con l' asterisco (*) quei Paragrafi i quali non debbon leggersi da chi brama soltanto un Corso elementare di Calcolo Differenziale ed Integrale.

INDICE

DELLE COSE CONTENUTE IN QUESTO TOMO II.

CAP. II. *Principj generali per l' integrazione delle Equazioni.*

CAP. III. *Integrazione dell' Equazioni Lineari tra due Variabili.*

CAP. IV. *Integrazione dell' Equazioni Lineari ai Differenziali Parziali.*

APPENDICE. *Sulle Curve a doppia Curvatura e sulle superficie Curve.*

PRINCIPJ DELL'ANALISI DERIVATA

NECESSARJ PER STABILIRE I FONDAMENTI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE ED INTEGRALE.

§. 1. Il Calcolo cui ho dato (*a*) il nome d' *Analisi Derivata*, comprende tutti quei rami di Analisi, per i quali fu stabilito un simbolo d' operazione, e fissato un algoritmo per calcolarli. Questi trovano in essa la sorgente comune ed il loro punto, per dir così, di contatto; di modo che il calcolo differenziale ed il calcolo degli Esponenti, non sono che branche di Scienza diramate dallo stesso principio.

Il principio fondamentale di una tale Analisi, e che si chiama *Principio di derivazione* (*b*), consiste nel considerare una quantità qualunque semplice o composta in diversi stati dipendenti uno dall'altro per una medesima legge; e il suo principale oggetto è di rintracciare le proprietà di questa medesima quantità relativamente ai suoi stati, per quindi fare uso delle stesse proprietà nella soluzione dei problemi.

Rappresentiamo per y una quantità qualunque, e facendo sopra di essa una determinata operazione, supponghiamo d' ot-

(*a*) Analisi derivata: Pavia 1802.

(*b*) Il contesto spiega assai chiaramente l' idea che vuolsi esprimere con la parola *principio*. Mi è necessaria questa avvertenza per scansare le questioni grammaticali che taluno ha fatte sopra quella parola medesima.

tenerne per risultato un' altra quantità Y. E' manifesto che Y dipende da y, e che ogni rapporto tra y e Y consiste nell' operazione, per cui abbiamo derivato una di quelle quantità dall'altra.

La y si chiama *Quantità* o *Funzione Derivatrice*. Dicesi *derivare* il fare la prescritta operazione; e con la lettera d messa avanti alla Derivatrice, si indica il risultato Y di questa operazione medesima, che è dunque rappresentato per dy. Chiamasi infine *Quantità* o *Funzione derivata* questo stesso risultato dy.

Se ora trattando dy come y, si deriva da dy con la medesima operazione un' altra quantità $d(dy)$, che possiamo indicare per d^2y, si avrà una seconda quantità derivata da dy come questa da y; e così se ne avrà una terza, una quarta, ec., di modo che secondo questo principio, la seguente serie $y, dy, d^2y, d^3y, \ldots\ldots d^my$ ci rappresenta col suo primo termine la quantità, dalla quale si deducono tutte le altre, e che abbiamo chiamata funzione *derivatrice*: col suo secondo termine, la *derivata prima* o di *primo ordine*; col suo terzo la *derivata seconda* o di *secondo ordine* ec. ec. e col suo $(m+1)^{esimo}$ la derivata m^{esima} di y.

§. 2. La legge di derivazione, la quale ci prescrive l' operazione, che deve farsi per dedurre o derivare una quantità da un' altra, potendo essere qualunque, non è possibile in conseguenza trattare delle proprietà di quella serie di quantità derivate che nelle sue applicazioni, nelle quali sia individuata questa legge medesima; pure sarà utilissima cosa considerare nella legge di derivazione due casi.

1°. Può la legge di derivazione essere tale, che ogni derivata ottenuta, diventi la derivatrice per la derivata successiva, senza avere alcun riguardo alla prima quantità, dalla quale tutte le altre si deducono, e che si può considerare come la base del sistema.

2°. Può la legge di derivazione essere tale, che nel passare da una derivata all'altra, richieda che abbiamo riguardo alla derivatrice, base del sistema, perchè obbligata nella stessa operazione di derivazione.

Di qui nasceranno due rami generali di sistemi di derivazione, i quali avranno proprietà distinte uno dall'altro. Ma ritornando a considerare il principio generale delle derivazioni, è facile concepire, che preso questo in tutta la sua estensione, l'Analisi cui dà origine, è per dir così infinita, poichè essa ha tante branche particolari, quante sono le operazioni che possono immaginarsi indicate da d, le quali sono all'arbitrio del Geometra, e però infinite di numero.

L'Analisi derivata adunque abbraccia in generale qualunque ramo d'analisi, che si raggiri sopra la maniera di dedurre una quantità da un'altra, e sul determinarne le proprietà. Così tutti quei rami di calcolo per i quali fu stabilito un algoritmo, cioè la Teoria degli Esponenti; il calcolo delle differenze finite; quello delle funzioni analitiche, sul quale è basato il calcolo differenziale, e il calcolo delle variazioni; la Teoria delle facoltà numeriche, formano tante parti d'analisi derivata, e dipendono dallo stesso principio: di modo che tali rami si possono considerare come compresi tutti in questo Calcolo generale.

§. 3. L'Analisi derivata ha due parti. Tutto ciò che si è detto fin'ora appartiene alla prima parte, che si chiama *Analisi derivata diretta*, perchè c'insegna a passare dalla Derivatrice alle sue derivate: l'altra parte si chiama *Analisi derivata inversa*, e a questa appartiene tutto ciò, che ha rapporto a

ritornare da una proposta derivata alla sua Derivatrice. Trovare la Derivatrice di una quantità z considerata come una derivata dell'ordine n, vuol dire trovare quella quantità x, sopra la quale eseguita n volte l'operazione di derivazione, torni per risultato z.

L'operazione che deve farsi sopra una funzione derivata per ottenerne la Derivatrice, s'indica per D. A questa lettera si dà un indice eguale al numero delle volte, che deve ripetersi la detta operazione, ed il risultato è rappresentato simbolicamente per la quantità stessa, su cui dobbiamo operare, preceduta dalla caratteristica D affetta dal detto indice.

Se dunque riguardiamo z come una derivata prima della quantità incognita x, l'operazione da farsi sopra z per ottenerne la Derivatrice x, ci darà il risultato simbolico $\mathrm{D}z$, che ci rappresenterà la medesima incognita; avremo perciò $x = \mathrm{D}z$.

Egualmente se consideriamo z come una derivata seconda di una funzione Derivatrice incognita x, sarà $x = \mathrm{D}^2 z$; indicando per D^2 l'operazione ripetuta due volte primieramente sopra z per averne $\mathrm{D}z$; e poi sopra questo stesso risultato $\mathrm{D}z$ per averne $\mathrm{DD}z$ ovvero $\mathrm{D}^2 z$. Infatti sia u la derivata prima di x, z sarà allora la derivata prima di u, e delle tre quantità x, u, z sarà x la Derivatrice di u, ed u la Derivatrice di z: Dunque avremo $x = \mathrm{D}u$, $u = \mathrm{D}z$, dalle quali si ricava $x = \mathrm{DD}z = \mathrm{D}^2 z$. Nella stessa guisa rappresentando per z una derivata terza, la sua derivatrice sarà rappresentata simbolicamente per $\mathrm{D}^3 z$; ed in generale se z è una derivata n^{esima} la Derivatrice x sarà $= \mathrm{D}^n z$.

Siccome una stessa quantità z può essere riguardata come una derivata prima, seconda, ec.; così la Derivatrice x di una quantità z, chiamasi la *Derivatrice prima*, *seconda*, *terza*, ec. secondo che z è una derivata prima, seconda, ec. Quando poi si dice che $D^n z$ rappresenta la Derivatrice n^{esima} di x, vogliamo significare che $D^n z$ rappresenta quella quantità x, dalla quale per mezzo di n operazioni di derivazione si ottiene z.

§. 4. L' operazione indicata per D è precisamente l' inversa di quella indicata per d, in quanto che essa disfa ciò che ha fatto la prima. Nella serie y, dy, d^2y, d^3y, ec. si passa da un termine A al suo successivo B per mezzo dell' operazione indicata per d fatta sopra il primo A; e si passa da un termine B a quello che lo precede A, o si torna indietro per mezzo dell' operazione indicata da D fatta sopra lo stesso B.

Delle due quantità x, z essendo z la derivata n^{esima} di x, sarà viceversa x la Derivatrice n^{esima} di z. Considerando il primo rapporto abbiamo fra di esse questa equazione (1) . . . . $z = d^n x$.

E considerandone il secondo, abbiamo quest' altra equazione (2) . . . . $x = D^n z$. Così le due equazioni (1) e (2) sono una l' inversa dell' altra; sussistono nello stesso tempo, e non dicono in sostanza che la stessa cosa.

Prendiamo ora la derivata n^{esima} dell' equazione $x = D^n z$, ed avremo $d^n x = d^n D^n z$; ma $d^n x = z$, dunque $d^n D^n z = z$; cioè, *la derivata* n^{esima} *della Derivatrice* n^{esima} *di z è eguale alla stessa z.*

Se facciamo $u = d^n z$, avremo $z = D^n u = D^n d^n z$: dunque $d^n D^n z = D^n d^n z$, cioè

,, La Derivatrice della derivata dello stesso ordine di una
,, quantità, è sempre eguale alla derivata della Derivatrice del-
,, lo stesso ordine, appartenente alla medesima quantità.

§. 5. Nella derivata qualunque $d^n y$ dell' ordine n, l' indice n ci dice quante volte si è ripetuta l' operazione di derivazione sopra la derivatrice y. Se si aggiunge una unità ad n avremo $d^{n+1}y$, che sarà una derivata d' un ordine maggiore di una unità, o una quantità la quale avrà subìta una operazione di derivazione di più di $d^n y$. Egualmente $d^{n-1}y$ ci indicherà una quantità, che ha subita una operazione di derivazione di meno di $d^n y$, o che dopo aver subite n operazioni di derivazione, ha subita un' operazione contraria, la quale distruggendo ciò che aveva fatto l' ultima, l' ha ridotta a non essere il risultato che di $n - 1$ operazioni fatte sopra la derivatrice y.

Nella serie y, dy, d^2y, d^3y, ec. . . . . . $d^n y$ si passa da un termine all' altro verso la destra, facendo sull' uno l' operazione di derivazione, che si rappresenta con l' aumento dell' unità nell' indice; e si torna da un termine all' altro verso la sinistra, facendo un' operazione opposta alla prima, o che distrugga ciò che quest' ultima ha fatto, il che si rappresenta col diminuire di una unità l' indice.

L' indice o ci mostra nessuna operazione fatta sopra la derivatrice, per il che restando essa inalterata, si ha

$$d^0 y = d^{m-m} y = y.$$

Infatti nella citata serie da una derivata qualunque si giunge al primo termine, quando sopra di essa si fanno tante operazioni inverse, quante essa ne conteneva delle dirette, ciò che si rappresenta col diminuire l' indice di una quantità eguale ad esso medesimo.

§. 6. Ma cosa indicheranno le derivate ad indici negativi?

La derivata dell' indice -1 di una quantità y, cioè $d^{-1}y$, deve essere a riguardo di y ovvero $d^{0}y$, ciò che è questa a riguardo di y: esprimerà dunque $d^{-1}y$ quella quantità, sopra la quale eseguendo l' operazione di derivazione, che faceva passare y a divenire dy, faccia passare $d^{-1}y$ ad essere y.

La derivata $d^{-2}y$ sarà riguardo a $d^{-1}y$, ciò che è questa riguardo ad y, ovvero ciò che è y riguardo a dy, e così di seguito: le derivate adunque ad indice negativo s' otterranno per una operazione inversa a quella, per la quale si ottengono le derivate ad indice positivo: così per ottenere $d^{-1}y$ dovremo fare sopra y una operazione inversa a quella che facevasi per ottenere dy: intendendo per *operazione inversa* un' operazione che porti per $d^{-1}y$ un tal risultato, sopra cui eseguita l' operazione diretta di derivazione, se ne ottenga la stessa y di nuovo.

In alcuni sistemi le derivate ad indice negativo sono la stessa cosa che le Derivatrici, cioè $d^{-m}y = \mathrm{D}^{m}y$.

Accade ciò in quei sistemi, nei quali la legge di derivazione appartiene al caso espresso §. 2. N°. 1. Al contrario le Derivatrici sono ben diverse dalle derivate ad indice negativo in quei sistemi, la cui legge di derivazione è contenuta nel caso §. 2. N°. 2.

Le derivate adunque ad indice negativo sono i termini della serie formata dalle derivate ad indice positivo prolungata indietro, di modo che in generale la serie sarà

$$\ldots\ldots\; d^{-4}y,\, d^{-3}y,\, d^{-2}y,\, d^{-1}y,\, d^{0}y,\, d^{1}y,\, d^{2}y,\, d^{3}y \;\ldots\ldots$$

§. 7. Una unità dell' indice ci mostra una operazione di derivazione da eseguirsi; conserveremo l' analogia se per un indice che sia una frazione della unità, noi indicheremo una corrispondente porzione d' operazione di derivazione da eseguirsi; così $d^{\frac{1}{2}}y$ ci indicherà che sopra y dobbiamo fare un mezzo d' operazione, cioè fare una tale operazione sopra y per avere $d^{\frac{1}{2}}y$, che ripetuta la stessa sopra $d^{\frac{1}{2}}y$, abbiasi il medesimo risultato che nel fare una intera operazione di derivazione sopra y, di modo che sia $d^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}}y = dy$.

Egualmente $d^{\frac{m}{n}}y$ essendo $n > m$, c' indicherà che sopra y dobbiamo fare una porzione $\frac{m}{n}$ d' operazione di derivazione; ciò che otterremo facendo prima sopra y una porzione $\frac{1}{n}$ d' operazione e ripetendola m volte. Questo n^{esimo} d' operazione deve essere tale che se fosse ripetuto n volte, dovrebbe dare lo stesso risultato dy, che ci dà una intera operazione di derivazione.

Nella stessa maniera $d^{m+\frac{p}{n}}y$ essendo $p < n$ sarà eguale a $d^{m}d^{\frac{p}{n}}y$, e ci indicherà che sopra y bisogna eseguire m volte l' intera operazione di derivazione, e sopra il risultato di essa bisogna eseguire la porzione $(\frac{p}{n})_{esima}$ d' operazione di derivazione.

§. 8. Le derivate ad indice frazionario ci indicano adunque delle quantità derivate dalla funzione Derivatrice per un certo numero d' operazioni di derivazione intere, e per una porzione della detta operazione indicata dalla frazione, che si contiene nell'indice: saranno adunque da esse rappresentati i termini intermedj fra quelli della serie del §. 6 : così se fra dy e d^2y si volessero tre termini intermedj, questi sarebbero indicati come segue

$$dy\,,\ d^{\frac{5}{4}}y\,,\ d^{\frac{6}{4}}y\,,\ d^{\frac{7}{4}}y\,,\ d^{\frac{8}{4}}y = d^2y:$$

Così gl' indici essendo in progressione aritmetica, i termini sono legati fra loro per la legge di derivazione del sistema.

Si ricava da tutto questo un Teorema importante:

„ Quando la legge di derivazione è tale, che l'operazio- „ ne per mezzo della quale si deriva una quantità dall'altra, „ può essere fatta a porzioni in più volte, allora le derivate a „ indice fratto sono quantità reali, perchè esistenti in natura; „ se al contrario quella operazione non può essere, per dir co- „ sì, divisa o concepirsi divisibile in porzioni, l'aggregato del- „ le quali renda la stessa operazione intiera, allora di natura „ sua non possono esistere termini o derivate a indice frazio- „ nario, ed un problema che in un tal sistema di derivazione „ conducesse ad una derivata ad indice fratto, dovrebbe aver- „ si per impossibile, e converrebbe riguardare quella derivata „ come una quantità immaginaria, che non può esistere in na- „ tura.

L' enunciato teorema ha un uso immediato nella teoria delle interpolazioni per decidere a *priori* se l' interpolazione può aver luogo fra i termini di una serie, della quale si conosce la natura o la legge che lega i termini stessi.

„ §. 9. Proposta una qualunque quantità o una funzione „ composta di più quantità, se essa è di tal natura, che non „ abbia delle proprietà contrarie a quelle portate necessaria- „ mente dall'operazione di derivazione nelle derivate, questa

„ quantità potrà sempre considerarsi come capace di formare „ parte di quel dato sistema di derivazione, essendo essa una „ derivata se non ad indice intero, almeno ad indice fratto; „ e perciò se di una tal quantità fosse ricercata la Deriva- „ trice, si può concepire esistere in natura una quantità che „ questa stessa Derivatrice rappresenti e che soddisfaccia alla „ nostra ricerca. Al contrario se la proprietà di una data quan- „ tità saranno incompatibili con quelle che necessariamente de- „ vono avere le derivate in un dato sistema, allora questa quan- „ tità non potrà mai considerarsi come una derivata del me- „ desimo sistema, e perciò l'indice che segnerebbe l' ordine „ della derivata, non potrà esistere in natura: non si potrà „ dunque immaginare una quantità che rappresenti la Deri- „ vatrice di quella quantità proposta, e sarà in conseguenza „ la ricerca di una tale Derivatrice, una ricerca impossibile; „ e quella Derivatrice una quantità immaginaria.

In questo e nell' antecedente paragrafo è contenuta la sorgente generale degli immaginarj. Ciò che s' intende comunemente per quantità immaginarie non è che una classe particolare di quantità appartenenti ad un sistema particolare d' analisi derivata.

CALCOLO DIFFERENZIALE ED INTEGRALE

C A P. I.

PRINCIPJ FONDAMENTALI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

Differenziali delle funzioni di una sola Variabile.

§. 1. RAppresentando per $\varphi(x)$ una qualunque funzione di x e di altre quantità indipendenti da essa, pongasi la seguente legge di derivazione.

„ Presa $\varphi(x)$ per funzione Derivatrice, la variabile x vi „ aumenti di una qualunque (a) quantità indeterminata ω, di- „ modochè si abbia una simil funzione di $x+\omega$, $\varphi(x+\omega)$: „ si trasformi questa funzione in una serie ordinata per le po- „ tenze della stessa ω, ed ottenendo

„ $\varphi(x+\omega)=\varphi(x)+p\omega+q\omega^2+r\omega^3+s\omega^4+$ ec.,

„ si prenda di tutta questa serie il solo coefficiente di ω; „ questo coefficiente p sarà evidentemente una quantità derivata da $\varphi(x)$ per mezzo di tale operazione; e se rappresentiamo per d questa operazione di derivazione, e per $d\varphi(x)$ il risultato simbolico o indicato di questa operazione medesima, avremo $p=d\varphi(x)$.

„ Sopra questa prima derivata $d\varphi(x)$, considerata come

(a) Noi supponiamo che la natura della funzione $\varphi(x)$ sia tale che la variabilità di x non sia soggetta ad alcuna legge, o che la detta variabile possa prendere tutti gli aumenti possibili.

„ una nuova funzione $\varphi'(x)$ di x, si faccia la stessa operazio- „ ne di derivazione che è stata fatta sopra $\varphi(x)$, ed avremo „ una quantità $d\varphi'(x)$ derivata da $\varphi'(x)$, come questa $\varphi'(x)$, „ ovvero $d\varphi(x)$, era derivata da $\varphi(x)$ „: chiameremo adunque $d\varphi'(x)$, ovvero $dd\varphi(x)$, ovvero $d^2\varphi(x)$ la derivata seconda o di secondo ordine di $\varphi(x)$.

„ Sopra questa derivata seconda $d^2\varphi(x)$, considerata co- „ me una nuova funzione $\varphi''(x)$ di x, si ripeta la stessa ope- „ razione di derivazione che abbiam fatta sopra $\varphi(x)$ e sopra „ $d\varphi(x)$, ed avremo un simile risultato $d\varphi''(x)$, ovvero „ $d^3\varphi(x)$ che sarà la derivata terza o di terzo ordine di $\varphi(x)$, „ e così di seguito „.

Avremo in questa guisa una serie di quantità ottenute tutte per la ripetizione della medesima operazione, e simbolicamente rappresentate da

$\varphi(x)$, $d\varphi(x)$, $d^2\varphi(x)$, $d^3\varphi(x)$, $d^4\varphi(x)$ ec.:

in questa serie di quantità, $\varphi(x)$ è la funzione derivatrice; le altre sono successivamente la derivata prima, seconda, terza ec., e tutti i di lei termini dipendono in conseguenza uno dall' altro per quella operazione di derivazione che li lega per dir così insieme.

„ Ciascuno è il coefficiente che avrebbe la prima potenza „ di una quantità indeterminata nello sviluppo del suo termine „ antecedente, quando la variabile che questo stesso anteceden- „ te contiene, aumenta di quella indeterminata medesima. Co- „ sì $d^m\varphi(x)$ è eguale al coefficiente che avrebbe la prima po- „ tenza di ω nello sviluppo di $d^{m-1}\varphi(x)$, quando x vi divie- „ ne $x+\omega$.

Dando poi a $\varphi(x)$ diversi valori particolari si hanno diverse espressioni per esprimere le derivate che vi corrispondono: così se facciamo $\varphi(x)=x^m$, abbiamo

$(x+\omega)^m=x^m+mx^{m-1}\omega+\frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}\omega^2+$ ec., e perciò

secondo la legge qui sopra prescritta, sarà

$d\varphi(x)=d(x^m)=mx^{m-1}$, cioè eguale al coefficiente di ω

nello sviluppo di $(x+\omega)^m$.

Per avere la derivata seconda, convien trattare mx^{m-1} come abbiamo trattato x^m, cioè prendere il coefficiente di ω dello sviluppo di $m(x+\omega)^{m-1}$, cioè della serie

$mx^{m-1}+m(m-1)x^{m-2}\omega+$ ec.; avremo allora

$d(mx^{m-1})=dd(x^m)=d^2(x^m)=m(m-1)x^{m-2}$; egualmente troveremo

$d^3(x^m)=m(m-1)(m-2)x^{m-3}$, e così di seguito: dunque ponendo per

Derivatrice x^m, avremo per la

Derivata prima mx^{m-1}, per la

Derivata seconda $m(m-1)x^{m-2}$, per la

Derivata terza $m(m-1)(m-2)x^{m-3}$,

ec. ec.

Poniamo ora $\varphi(x)=a^x$; per avere la derivata prima di a^x, cioè il valore di da^x, facciamovi $x+\omega$ invece di x, ed avremo $a^{x+\omega}=a^x a^\omega$: ora la Teoria dello sviluppo delle funzioni in serie ci dà i due primi termini della serie che esprime a^ω, e questi sono $1+\omega \log a$; dunque i due primi termini dello sviluppo di $a^{x+\omega}$ saranno $a^x+a^x \log a\omega$; dunque $da^x= a^x \log a$.

Di quì si ricaveranno le derivate degli ordini superiori

$da^x=a^x \log a$; $d^2a^x=a^x(\log a)^2$; $d^3a^x=a^x(\log a)^3$ ec.

Sia $\varphi(x)=\log x$, e si avrà

$\varphi(x+\omega)=\log(x+\omega)=\log x+\log(1+\frac{\omega}{x})$: ma $\log(1+\frac{\omega}{x})=\frac{\omega}{x}-\frac{\omega^2}{2x^2}+$ ec.; dunque

$\log(x+\omega)=\log x+\frac{1}{x}\omega+$ ec.: dunque

$d\log x=\frac{1}{x}$; e quindi

$d^2\log x=d(\frac{1}{x})=-\frac{1}{x^2}$; $d^3\log x=d(-\frac{1}{x^2})=\frac{2}{x^3}$ ec.

Facendo $\varphi(x)=sen\,x$, abbiamo $\varphi(x+\omega)=sen(x+\omega)=sen\,x\cos\omega+sen\,\omega\cos x$: la Teoria delle serie dandoci, $\cos\omega=1-\frac{\omega^2}{2}+$ ec., $sen\,\omega=\omega-\frac{\omega^3}{2.3}+$ ec., sarà $sen(x+\omega)=(1-\frac{\omega^2}{2}+\text{ec.})\,sen\,x+(\omega-\frac{\omega^3}{2.3}+\text{ec.})\cos x=sen\,x+\omega\cos x+$ ec.; dunque

$d\,sen\,x=\cos x$.

Egualmente se $\varphi(x)=\cos x$, si ha $\varphi(x+\omega)=\cos(x+\omega)=\cos x\cos\omega-sen\,x\,sen\,\omega=(1-\frac{\omega^2}{2}+\text{ec.})\cos x-(\omega-\frac{\omega^3}{2.3}+\text{ec.})\,sen\,x=\cos x-\omega\,sen\,x+$ ec., dunque

$d\cos x=-sen\,x$.

Conoscendo le derivate prime di $sen\,x$, $\cos x$, avremo le derivate degli ordini superiori

$d^2sen\,x=d\cos x=-sen\,x$; $d^2\cos x=-\cos x$

$d^3sen\,x=-\cos x$; $d^3\cos x=sen\,x$

ec. ec.

Le funzioni di una sola variabile x^m, a^x, $\log x$, $sen\,x$, $\cos x$, si chiamano funzioni semplici, perchè di queste si considerano composte tutte le altre; gioverà rimettere sotto occhio le derivate prime quì sopra trovate

$dx^m=mx^{m-1}$

$da^x=a^x\log a$

$d \log x = \frac{1}{x}$

$d\, sen\, x = \cos x$

$d \cos x = -\, sen\, x$.

§. 2. Riprendiamo la considerazione generale del sistema di derivate rappresentato dalla nostra serie

$$(1) \ldots\ldots \varphi(x),\ d\varphi(x),\ d^2\varphi(x),\ d^3\varphi(x), \ldots\ldots d^n\varphi(x)$$

e dimostriamo un Teorema che è il fondamento di tutte le proprietà appartenenti a questo sistema:

TEOREMA

„ Rappresentando per $\varphi(x) + p\omega + q\omega^2 + r\omega^3 + s\omega^4 +$
„ ec. lo sviluppo in serie di una qualunque funzione $\varphi(x +$
„ $\omega)$ di $x + \omega$, è sempre

„ $p = d\varphi(x)$

„ $q = \frac{d^2\varphi(x)}{2}$

„ $r = \frac{d^3\varphi(x)}{2.3}$

„ $s = \frac{d^4\varphi(x)}{2.3.4}$

ec. ec. ec.

„ di modo che abbiamo

„ $\varphi(x+\omega) = \varphi(x) + d\varphi(x).\omega + \frac{d^2\varphi(x)}{2}\omega^2 + \frac{d^3\varphi(x)}{2.3}\omega^3 +$
„ $\frac{d^4\varphi(x)}{2.3.4}\omega^4 +$ ec., qualunque sia d' altr' onde $\varphi(x)$.

„ Cioè le diverse derivate della funzione $\varphi(x)$ ottenute
„ con la legge di derivazione quì sopra stabilita, e divise per
„ i prodotti dei numeri naturali 1, 2, 3, 4 ec. fino all' ordine
„ della derivata, sono i coefficienti delle diverse potenze di ω
„ nello sviluppo di $\varphi(x+\omega)$, di modo che in questo svilup-
„ po il coefficiente di ω^n è sempre $\frac{d^n\varphi(x)}{1.2.3\ldots\ldots n}$.

Dalla legge stessa di derivazione si ha $p = d\varphi(x)$: Per

dimostrare che $q = \frac{d^2\varphi(x)}{2}$ rappresentiamo q per $\varphi''(x)$, ed avremo

$$\varphi(x+\omega) = \varphi(x) + d\varphi(x).\omega + \varphi''(x)\,\omega^2 + \text{ec.}$$

Ora se in questa equazione si sostituisce $x+\omega$ invece di x, potrà nel secondo membro farsi questa sostituzione in due maniere, o ponendovi 2ω invece di ω, ovvero sostituendo effettivamente $x+\omega$ per x nelle quantità $\varphi(x)$, $d\varphi(x)$, $\varphi''(x)$ ec.: i risultati di queste due sostituzioni dovranno essere identici, e perciò i coefficienti delle potenze dell' indeterminata ω in un risultato, dovranno essere eguali ai coefficienti delle simili potenze nell' altro.

Facendo la sostituzione nella prima maniera, avremo

$$\varphi(x+2\omega) = \varphi(x) + 2d\varphi(x).\omega + 4\varphi''(x).\omega^2 + \text{ec.}$$

e facendola nella seconda

$$\varphi(x+2\omega) = \varphi(x+\omega) + d\varphi(x+\omega).\omega + \varphi''(x+\omega).\omega^2 + \text{ec.}$$

ma $\varphi(x+\omega) = \varphi(x) + d\varphi(x).\omega + \varphi''(x).\omega^2 +$ ec.

$d\varphi(x+\omega) = d\varphi(x) + d^2\varphi(x).\omega +$ ec.

$\varphi''(x+\omega) = \varphi''(x) +$ ec.;

dunque questo secondo sviluppo diverrà

$$\varphi(x+2\omega) = \varphi(x) + 2d\varphi(x).\omega + \{2\varphi''(x) + d^2\varphi(x)\}\,\omega^2 + \text{ec.},$$

il quale paragonato con il primo

$$\varphi(x+2\omega) = \varphi(x) + 2d\varphi(x)\ \omega + 4\varphi''(x).\omega^2 + \text{ec.},$$

ci dà $4\varphi''(x) = 2\varphi''(x) + d^2\varphi(x)$; dunque

$$\varphi''(x) = \frac{d^2\varphi(x)}{2} = q.$$

Per dimostrare che $r = \frac{d^3\varphi(x)}{2.3}$ rappresentiamo r per $\varphi'''(x)$, ed avremo

$$\varphi(x+\omega) = \varphi(x) + d\varphi(x).\omega + \frac{d^2\varphi(x)}{2}\omega^2 + \varphi'''(x).\omega^3 + \text{ec.}$$

Ora ponendo in quest' ultima equazione $x+\omega$ per x, e facendo la sostituzione nelle due maniere sopra indicate, avremo

$$\varphi(x+2\omega)=\varphi(x)+2d\varphi(x).\omega+4\frac{d^2\varphi(x)}{2}\omega^2+8\varphi'''(x).\omega^3+\text{ec.}$$

$$\varphi(x+2\omega)=\varphi(x+\omega)+d\varphi(x+\omega).\omega+\frac{d^2\varphi(x+\omega)}{2}\omega^2+\varphi'''(x+\omega).\omega^3+\text{ec.}$$

ma $\varphi(x+\omega)=\varphi(x)+d\varphi(x).\omega+\frac{d^2\varphi(x)}{2}\omega^2+\varphi'''(x).\omega^3+\text{ec.}$

$$d\varphi(x+\omega)=d\varphi(x)+d^2\varphi(x).\omega+\frac{d^3\varphi(x)}{2}.\omega^2+\text{ec.}$$

$$d^2\varphi(x+\omega)=d^2\varphi(x)+d^3\varphi(x).\omega+\text{ec.}$$

$$\varphi'''(x+\omega)=\varphi'''(x)+\text{ec.}$$

dunque il secondo sviluppo diviene, facendovi le opportune sostituzioni

$$\varphi(x+2\omega)=\varphi(x)+2d\varphi(x).\omega+2d^2\varphi(x).\omega^2+\left\{2\varphi'''(x)+d^3\varphi(x)\right\}\omega^3+\text{ec.},$$

che paragonato col primo ci dà

$6\varphi'''(x)=d^3\varphi(x)$; dunque $\varphi'''(x)=r=\frac{d^3\varphi(x)}{2.3}$;

nella medesima maniera si dimostrerebbe che

$s=\frac{d^4\varphi(x)}{2.3.4}$, ed in generale che il coefficiente di ω^n nello sviluppo di $\varphi(x+\omega)$, è $=\frac{d^n\varphi(x)}{2.3.4\ldots n}$, come richiedeva il Teorema.

§. 3 Noi abbiamo indicato per dz la derivata prima della funzione z, vale a dire il coefficiente che ha la prima potenza di una indeterminata ω, nello sviluppo della stessa quantità z secondo le potenze di ω, quando x vi diviene $x+\omega$: ora siccome la funzione z può contenere oltre la x, altre quantità variabili y, u ec., rapporto alle quali potrebbe farsi la stessa operazione di derivazione che abbiamo fatta rapporto ad x, perciò è necessario che nell' indicare le derivate, abbiasi la traccia di quella quantità rapporto alla quale è stato operato. Noi otterremo l' intento se dovendo prendere la derivata prima della funzione z rapporto ad x, invece di scrivere dz, scriveremo $d\overset{z}{\underset{x}{\smile}}$, ponendo la variabile x in luogo di divisore, ma per non confonderla con esso, separandola con una lineetta recurva che rivolti la sua convessità in basso: egualmente per la derivata n^{esima} invece di scrivere d^nz, scriveremo $d^n\overset{z}{\underset{x^n}{\smile}}$ dando alla x un esponente eguale all' indice della derivata.

Rappresentando adunque per z', ciò che diviene z quando x vi diventa $x+\omega$, avremo

$$z'=z+d\overset{z}{\underset{x}{\smile}}.\omega+\frac{\omega^2}{2}d^2\overset{z}{\underset{x^2}{\smile}}+\frac{\omega^3}{2.3}d^3\overset{z}{\underset{x^3}{\smile}}+\text{ec.}$$

egualmente se u fosse una funzione di y e di altre quantità indipendenti da essa e s' indicasse per u' ciò che diviene u quando y diventa $y+\omega$, avremmo

$$u'=u+\omega d\overset{u}{\underset{y}{\smile}}+\frac{\omega^2}{2}d^2\overset{u}{\underset{y^2}{\smile}}+\frac{\omega^3}{2.3}d^3\overset{u}{\underset{y^3}{\smile}}+\text{ec.}$$

queste funzioni derivatrice e derivate

z, $d\overset{z}{\underset{x}{\smile}}$, $d^2\overset{z}{\underset{x^2}{\smile}}$, $d^3\overset{z}{\underset{x^3}{\smile}}$ ec., sono chiamate da La-Grange funzioni Analitiche: z è chiamata funzione primitiva; $d\overset{z}{\underset{x}{\smile}}$ funzione prima di z; $d^2\overset{z}{\underset{x^2}{\smile}}$ funzione seconda, e così delle altre.

Tali coefficienti di ω nello sviluppo di $\varphi(x+\omega)$ sono quantità finite e determinate funzioni di x dipendenti da $\varphi(x)$ per mezzo dell' operazione che abbiam fatta per ottenerli.

§. 4 Riprendiamo la formula

$$\varphi(x+\omega)=\varphi(x)+d\overset{\varphi(x)}{\underset{x}{\smile}}.\omega+d^2\overset{\varphi(x)}{\underset{x^2}{\smile}}.\frac{\omega^2}{2}+d^3\overset{\varphi(x)}{\underset{x^3}{\smile}}.\frac{\omega^3}{2.3}+\text{ec.}$$

mentre ω è l' aumento della variabile x, sarà (scrivendo φ per $\varphi(x)$)

$$d\overset{\varphi}{\underset{x}{\smile}}\,\omega+d^2\overset{\varphi}{\underset{x^2}{\smile}}\,\frac{\omega^2}{2}+d^3\overset{\varphi}{\underset{x^3}{\smile}}.\frac{\omega^3}{2.3}+\text{ec.}$$

l' aumento che riceve la funzione φ in conseguenza dell' aumento della x: si dia a questi aumenti il nome di differenze, si chiami cioè ω *differenza* della variabile x, e si chiami

$d\overset{\varphi}{\underset{x}{\smile}}.\omega+d^2\overset{\varphi}{\underset{x^2}{\smile}}.\frac{\omega^2}{2}+$ ec. differenza della funzione φ. Ai diversi termini che compongono questa differenza, astraendo dai divisori numerici che essi hanno, si dà il nome particolare di *differenziali* di φ: il primo termine $d\frac{\varphi}{x}\cdot\omega$ si chiama differenziale primo. Il secondo $d^2\frac{\varphi}{x^2}\cdot\omega^2$ *differenziale secondo*, ed in generale il termine n^{esimo} $d^n\frac{\varphi}{x^n}\cdot\omega^n$ si chiama il differenziale n^{esimo} di φ.

„ Dunque il differenziale n^{esimo} di una funzione qualunque φ „ è eguale alla sua derivata dello stesso ordine moltiplicata per „ una simil potenza dell'aumento indeterminato di x, cioè per ω^n „.

Oltre a dare un nome particolare ai termini che compongono la differenza di una funzione $\varphi(x)$, quando x aumenta di ω, è stato ancora fissato un algoritmo particolare per scriverli. S' indica per il semplice d, posto avanti alla funzione φ, il di lei differenziale primo, e i differenziali degli ordini superiori s' indicano con lo stesso d dotato d' un indice eguale all' ordine del differenziale: così scrivendo con questo nuovo algoritmo, avremo

$d\frac{\varphi}{x}\;\omega = d\varphi =$ Differenziale primo

$d^2\frac{\varphi}{x^2}\cdot\omega^2 = d^2\varphi =$ Differenziale secondo

$d^3\frac{\varphi}{x^3}\cdot\omega^3 = d^3\varphi =$ Differenziale terzo

ec. ec.

$d^n\frac{\varphi}{x^n}\,\omega^n = d^n\varphi =$ Differenziale n^{esimo}; e lo sviluppo di $\varphi(x+\omega)$ prenderà la forma

$$\varphi(x+\omega) = \varphi + d\varphi + \frac{d^2\varphi}{2} + \frac{d^3\varphi}{2\cdot 3} + \text{ec.}$$

La differenza adunque di una qualunque funzione φ sarà $=$

$$d\varphi + \frac{d^2\varphi}{2} + \frac{d^3\varphi}{2\cdot 3} + \text{ec.}$$

Cioè „ la differenza di una qualunque funzione φ della variabile x, ovvero l'aumento che questa funzione riceve quando „ x diviene $x+\omega$, è eguale al differenziale primo di φ, più la „ metà del di lei differenziale secondo, più la sesta parte del di

„ lei differenziale terzo; più la 24^{esima} del differenziale quarto, e „ così di seguito secondo i prodotti 1, 1.2, 1.2.3, 1.2.3 4 ec. „

§. 5. Quando $\varphi(x)$ è eguale alla sua stessa variabile x, si ha $\varphi(x+\omega) = x+\omega$, ed in questo caso si ha $d\varphi = dx = \omega$: l' aumento adunque indeterminato della x è il differenziale primo medesimo di x; per questo motivo rappresenteremo d' ora in avanti per dx l' aumento indeterminato della variabile x: sarà pertanto

$d^n\frac{\varphi}{x^n}\cdot\omega^n = d^n\frac{\varphi}{x^n}\cdot dx^n = d^n\varphi$; e di quì si deduce

$d^n\frac{\varphi}{x^n} = \frac{d^n\varphi}{dx^n}$:

Cioè „ la derivata n^{esima} di φ per rapporto ad x è eguale alla „ sua differenziale n^{esima} presa parimente per rapporto ad x, o „ considerando solo x variabile, e divisa per dx^n „.

Avremo adunque (φ è lo stesso che $\varphi(x)$)

$$\varphi(x+dx) = \varphi + \frac{d\varphi}{dx}\,dx + \frac{d^2\varphi}{dx^2}\cdot\frac{dx^2}{2} + \frac{d^3\varphi}{dx^3}\cdot\frac{dx^3}{2\cdot 3} + \text{ec.}:$$

ora avvertendo che i coefficienti delle diverse potenze dell' aumento indeterminato dx, cioè $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$ ec., sono espressioni simboliche, nelle quali eseguendo l' operazioni per ottenere i differenziali, e dividendo quindi per dx, dx^2 ec., svanisce affatto l' aumento dx, si comprenderà facilmente che quei coefficienti sono funzioni di x totalmente indipendenti da dx; essi rimangono adunque i medesimi qualunque sia dx, e perciò potranno questi essere rappresentati dalle medesime espressioni $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$ ec., ancora che si prenda per dx un' altra quantità qualunque θ: dunque se nello sviluppo superiore si fa $dx = \theta$, avremo

$$\varphi(x+\theta) = \varphi + \frac{d\varphi}{dx}\,\theta + \frac{d^2\varphi}{dx^2}\cdot\frac{\theta^2}{2} + \frac{d^3\varphi}{dx^3}\cdot\frac{\theta^3}{2\cdot 3} + \text{ec.}$$

Questa formula contiene il Celebre Teorema di Tajlor che è nell' Analisi Sublime di un uso così esteso, come nell' Algebra Elementare il Binomio di Neuton.

§. 6. Noi abbiamo detto che $d\varphi$ il quale esprime la differenziale prima di φ, è eguale a $d\frac{\varphi}{x}.dx$, vale a dire, alla derivata prima di φ presa per rapporto ad x, e moltiplicata per dx: abbiamo anche veduto al §. antecedente che $d\frac{\varphi}{x}=\frac{d\varphi}{dx}$; sarà dunque $d\varphi=\frac{d\varphi}{dx}.dx$: sarà cioè la stessa cosa scrivere $d\varphi$, ovvero $\frac{d\varphi}{dx}.dx$.

Il differenziale adunque del primo ordine di una funzione φ sarà espresso da $\frac{d\varphi}{dx}.dx$. Scrivendo un tal differenziale in questa guisa, abbiamo il vantaggio di vedere rapporto a qual variabile deve farsi l'operazione di differenziazione; così $\frac{dz}{dy}.dy$, considerando z come una funzione di y, ci indica il differenziale del primo ordine preso per rapporto ad y, cioè il primo termine della serie datoci dallo sviluppo della funzione z, quando y vi diviene $y+dy$, indicando per dy un aumento indeterminato ed indipendente da y, come era dx rapporto ad x; anzi per non confondere $\frac{d\varphi}{dx}$ che è puramente una espressione simbolica, col rapporto di $d\varphi:dx$, abbiam fissato di scrivere $(\frac{d\varphi}{dx})$ ponendolo fra due parentesi; così $(\frac{dy}{du})$ significa che y, riguardato come funzione di u, e differenziato rapporto a questa variabile, è stato diviso per du, onde averne il coefficiente di du nello sviluppo di y, il quale coefficiente è lo stesso $(\frac{dy}{du})$.

Nella stessa maniera invece di scrivere $d^n\varphi$, (il quale ci indica in vero il differenziale n^{esimo} di φ, ma non si conosce rapporto a qual variabile si deve fare la differenziazione), scriveremo $(\frac{d^n\varphi}{dx^n})dx^n$, se la differenziazione dee farsi rapporto ad x.

Questa maniera di scrivere i differenziali non è necessaria quando le funzioni contengono una sola variabile.

§. 7. L'espressione $(\frac{d^n\varphi}{dx^n})$ significa, come abbiam detto, la

differenziale n^{esima} di φ presa per rapporto ad x, e divisa per la potenza n^{esima} di dx; in una tale espressione il denominatore fa due veci: prima ci indica quale è la variabile rapporto a cui deve differenziarsi, e il numero delle volte che l'operazione deve essere ripetuta: poi egli è divisore del risultato ottenuto per mezzo della differenziazione: egli adunque è destinato a svanire dal calcolo ad operazione eseguita. Così l'effettiva espressione $(\frac{d^n\varphi}{dx^n})$ non contiene e deve riguardarsi come non contenente il dx.

„ Dunque le quantità $(\frac{d\varphi}{dx})$, $(\frac{d^2\varphi}{dx^2})$ ec. sono tante funzioni
„ della variabile x indipendenti affatto da dx, e non lo con-
„ tengono in modo alcuno; qualunque operazione adunque do-
„ vesse farsi sopra di esse, non può riguardare il dx „.

Ma in che consiste questa operazione di differenziazione? Essendo $(\frac{d^n\varphi}{dx^n})dx^n=d^n\frac{\varphi}{x^n}.dx^n$ si vede che „ per avere il differen-
„ ziale n^{esimo} di una funzione φ bisogna prendere la derivata
„ n^{esima} della detta funzione, e moltiplicarla per una potenza
„ n^{esima} dell'aumento della x, da noi indicato per dx „.

Trovate in conseguenza le derivate prime e moltiplicate per dx ottengonsi i differenziali primi: le derivate seconde moltiplicate per dx^2 ci daranno i differenziali secondi, e così di seguito.

Questa regola per avere i differenziali di una funzione, si riduce anche alla seguente che ci sarà più utile nella pratica di differenziare.

„ Per avere il differenziale primo $d\varphi$ di φ funzione di x
„ poniamovi $x+dx$ invece di x, quindi sviluppata la quanti-
„ tà φ secondo le potenze di dx, se ne prenda il termine ove
„ dx è alla prima potenza, il quale avrà la forma Pdx, e sa-
„ rà $d\varphi=Pdx$.

„ Per avere il differenziale secondo, non facendo alcuna
„ operazione sopra dx che noi supponiamo aumento indetermi-
„ nato indipendente da x, si prenda il differenziale primo del
„ coefficiente P, cioè sostituendo $x+dx$ per x nella funzio-
„ ne P, e sviluppando secondo le potenze di dx, si prenda il

„ termine Qdx ove dx è alla prima potenza, ed avremo $dP =$ „ Qdx, e perciò $d^2\phi = dP . dx = Qdx^2$, e così di seguito „.

Osserviamo che essendo $\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)$ il risultato, il quale otteniamo differenziando ϕ due volte, e dividendo successivamente per dx, esso sarà $= \left(\frac{d\left(\frac{d\phi}{dx}\right)}{dx}\right)$: dunque dovendo differenziare $\left(\frac{d\phi}{dx}\right)$ non faremo alcuna operazione sopra dx, e solo prenderemo il differenziale di $d\phi$. Non deve farsi alcuna operazione sopra il dx che è in $\left(\frac{d\phi}{dx}\right)$, poichè effettivamente questo risultato $\left(\frac{d\phi}{dx}\right)$ deve riguardarsi come non contenente il dx. Vale lo stesso per i differenziali degli ordini superiori.

§. 8. Da ciò che è detto nell' antecedente §., e nel §. 1. si vede che le differenziali delle cinque funzioni semplici x^m, a^x, $\log x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, saranno le seguenti

$$d(x^m) = \left(\frac{d(x^m)}{dx}\right) dx = mx^{m-1} dx$$

$$d^2(x^m) = \left(\frac{d^2(x^m)}{dx^2}\right) dx^2 = m(m-1)x^{m-2} dx^2$$

$$d^3(x^m) = \left(\frac{d^3(x^m)}{dx^3}\right) dx^3 = m(m-1)(m-2)x^{m-3} dx^3$$

ec. ec. ec.

$$d(a^x) = \left(\frac{d(a^x)}{dx}\right) dx = a^x \log a\, dx$$

$$d^2(a^x) = \left(\frac{d^2(a^x)}{dx^2}\right) dx^2 = a^x (\log a)^2 dx^2$$

ec. ec. ec.

$$d \log x = \left(\frac{d \log x}{dx}\right) dx = \frac{dx}{x}$$

$$d \operatorname{sen} x = \left(\frac{d \operatorname{sen} x}{dx}\right) dx = \cos x\, dx$$

$$d \cos x = \left(\frac{d \cos x}{dx}\right) dx = -\operatorname{sen} x\, dx$$

$$d^2 \operatorname{sen} x = \left(\frac{d^2 \operatorname{sen} x}{dx^2}\right) dx^2 = d \cos x\, dx = -\operatorname{sen} x\, dx^2$$

$$d^3 \operatorname{sen} x = \left(\frac{d^3 \operatorname{sen} x}{dx^3}\right) dx^3 = -d \operatorname{sen} x\, dx^2 = -\cos x\, dx^3$$

ec. ec. ec.

$$d^2 \cos x = \left(\frac{d^2 \cos x}{dx^2}\right) dx^2 = -d \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x\, dx^2$$

$$d^3 \cos x = \left(\frac{d^3 \cos x}{dx^3}\right) dx^3 = -d \cos x\, dx^2 = \operatorname{sen} x\, dx^3$$

ec. ec. ec.

Queste cinque funzioni semplici possono considerarsi come componenti qualunque data funzione per complicata che sia, e le loro differenziali ci serviranno per ritrovar quelle delle funzioni composte.

§. 9. Rappresentiamo per p, q, r ec., delle funzioni semplici di x: le differenziali prime di esse saranno $\left(\frac{dp}{dx}\right)dx$, $\left(\frac{dq}{dx}\right)dx$, $\left(\frac{dr}{dx}\right)dx$ ec.

Indichiamo ora per y una funzione qualunque composta di p, q, r ec., e vogliasi il differenziale primo di y, cioè $\left(\frac{dy}{dx}\right)dx$.

Quando x diviene $x + dx$, la funzione y diviene (5)

$$y + \left(\frac{dy}{dx}\right) dx + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \frac{dx^2}{2} + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) \frac{dx^3}{2.3} + \text{ec.},$$

e le funzioni p, q, r ec., divengono nello stesso tempo

$$p + \left(\frac{dp}{dx}\right) dx + \left(\frac{d^2p}{dx^2}\right) \frac{dx^2}{2} + \left(\frac{d^3p}{dx^3}\right) \frac{dx^3}{2.3} + \text{ec.}$$

$$q + \left(\frac{dq}{dx}\right) dx + \left(\frac{d^2q}{dx^2}\right) \frac{dx^2}{2} + \left(\frac{d^3q}{dx^3}\right) \frac{dx^3}{2.3} + \text{ec.}$$

$$r + \left(\frac{dr}{dx}\right) dx + \left(\frac{d^2r}{dx^2}\right) \frac{dx^2}{2} + \left(\frac{d^3r}{dx^3}\right) \frac{dx^3}{2.3} + \text{ec.}$$

ec. ec. ec.

Dunque basterà sostituire queste espressioni di p, q, r ec. nella funzione y, sviluppata secondo le potenze di dx, ed allora il termine di quello sviluppo ove il dx si trova alla prima potenza, sarà il valore di $\left(\frac{dy}{dx}\right)dx$: così se $y = ap + bq + cr +$ ec., a, b, c ec., essendo dei coefficienti costanti, avremo subito

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = a\left(\frac{dp}{dx}\right) dx + b\left(\frac{dq}{dx}\right) dx + c\left(\frac{dr}{dx}\right) dx + \text{ec.}$$

Se $y = apq$, a essendo una quantità costante, la quantità pq diventa

$$(p + (\tfrac{dp}{dx}) dx + \text{ec.})(q + (\tfrac{dq}{dx}) dx + \text{ec.}) = pq + \{q(\tfrac{dp}{dx}) + p(\tfrac{dq}{dx})\} dx + \text{ec.},$$ e quindi

$$(\tfrac{dy}{dx}) dx = aq(\tfrac{dp}{dx}) dx + ap(\tfrac{dq}{dx}) dx.$$

Se $y = apqr$ troveremo egualmente

$(\tfrac{dy}{dx}) dx = aqr(\tfrac{dp}{dx}) dx + apr(\tfrac{dq}{dx}) dx + apq(\tfrac{dr}{dx}) dx$, e così di seguito.

Se $y = \frac{ap}{q}$, la quantità $\frac{p}{q}$, quando x diventa $x + dx$, si cangia in

$$\frac{p + (\frac{dp}{dx}) dx + \text{ec.}}{q + (\frac{dq}{dx}) dx + \text{ec.}}:$$

ora sviluppando il denominatore in serie per le regole conosciute, abbiamo

$$\frac{p + (\frac{dp}{dx}) dx + \text{ec.}}{q + (\frac{dq}{dx}) dx + \text{ec.}} = \{p + (\tfrac{dp}{dx}) dx + \text{ec.}\}\{\tfrac{1}{q} - (\tfrac{dq}{dx}) . \tfrac{dx}{q^2} + \text{ec.}\} = \frac{p}{q} + \{\tfrac{1}{q} . (\tfrac{dp}{dx}) - \tfrac{p}{q^2} . (\tfrac{dq}{dx})\} dx + \text{ec.},$$ dunque

$$(\tfrac{dy}{dx}) dx = \frac{aq(\frac{dp}{dx}) dx - ap(\frac{dq}{dx}) dx}{q^2}.$$

Facciamo un qualche esempio. Si ricerchi

1°. Quale è il differenziale di $ax^{\frac{m}{n}} + cb^x + e\,sen\,x + h\,log\,x$?

Chiamando y questa espressione, avremo

$$dy = (\tfrac{dy}{dx}) dx = d(ax^{\frac{m}{n}} + cb^x + e\,sen\,x + h\,log\,x).$$

Ora facendo $p = x^{\frac{m}{n}}$, $q = b^x$, $r = sen\,x$, $s = log\,x$, sarà

$y = ap + cq + er + hs$, e siccome (§. 8) è

$(\tfrac{dp}{dx}) dx = \tfrac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} dx$; $(\tfrac{dq}{dx}) dx = b^x\,dx\,log\,b$;

$(\tfrac{dr}{dx}) dx = dx\,cos\,x$; $(\tfrac{ds}{dx}) dx = \tfrac{dx}{x}$; dunque

$$(\tfrac{dy}{dx}) dx = \tfrac{m}{n} ax^{\frac{m-n}{n}} dx + c\,log\,b . b^x dx + e\,cos\,x\,dx + \tfrac{h\,dx}{x}.$$

2°. Quale è il differenziale di $y = sen\,2x$? siccome $sen\,2x = 2\,sen\,x\,cos\,x$, facendo

$p = sen\,x$, $q = cos\,x$, sarà

$y = 2pq$: ora dal citato §. si ha

$(\tfrac{dp}{dx}) dx = dx\,cos\,x$; $(\tfrac{dq}{dx}) dx = -sen\,x\,dx$; dunque

$$(\tfrac{dy}{dx}) dx = 2\,cos\,x\,dx\,cos\,x - 2\,sen\,x\,sen\,x\,dx = 2\,cos\,x^2\,dx - 2\,sen\,x^2\,dx,$$ che può ridursi a $2\,cos\,2x\,dx$.

3°. Quale è il differenziale di $y = tang\,x$:

siccome $tang\,x = \frac{sen\,x}{cos\,x}$, però facendo

$p = sen\,x$, $q = cos\,x$, s' avrà

$y = \frac{p}{q}$, e quindi

$$(\tfrac{dy}{dx}) dx = \frac{q(\frac{dq}{dx}) dx - p(\frac{dp}{dx}) dx}{q^2} = \frac{cos\,x^2\,dx + sen\,x^2\,dx}{cos\,x^2} = \frac{dx}{cos\,x^2}.$$

4°. Quale è il differenziale di $y = sec\,x$?

Dalla Trigonometria $sec\,x = \frac{1}{cos\,x}$; dunque

$$(\tfrac{dy}{dx}) dx = \frac{sen\,x\,dx}{cos\,x^2} = \frac{tang\,x\,dx}{cos\,x}.$$

§. 10. Sia ora $y = \varphi(p)$, indicando per $\varphi(p)$ una funzione qualunque di p, essendo la stessa p una funzione di x, e si voglia il valore di $(\frac{d\varphi}{dx}) dx$, cioè del differenziale primo di $\varphi(p)$ preso per rapporto ad x. (Si scrive indistintamente φ per $\varphi(p)$).

Essendo p come abbiam detto, una funzione di x, quando x diviene $x+dx$, p diverrà

$p+(\frac{dp}{dx})dx+(\frac{d^2p}{dx^2})\cdot\frac{dx^2}{2}+(\frac{d^3p}{dx^3})\cdot\frac{dx^3}{2\cdot3}+$ ec., e la funzione $\varphi(p)$ si cangierà in

$\varphi(p+(\frac{dp}{dx})dx+(\frac{d^2p}{dx^2})\cdot\frac{dx^2}{2}+$ ec.): tralasciamo in questa ultima espressione i termini, nei quali il dx è ad una potenza maggiore dell' unità, poichè non avendo noi bisogno nello sviluppo che del termine ove il dx è elevato alla prima potenza, si rendono inutili i termini $(\frac{d^2p}{dx^2})\frac{dx^2}{2}$ ec., ed avremo

$\varphi(p+(\frac{dp}{dx})dx)$.

Ora considerando la quantità $(\frac{dp}{dx})dx$ come l' aumento che riceve la p, e che noi possiamo indicare per dp, avremo

$\varphi(p+(\frac{dp}{dx})dx)=\varphi(p)+(\frac{d\varphi}{dp})dp+(\frac{d^2\varphi}{dp^2})\frac{dp^2}{2}+$ ec.

ove $(\frac{d\varphi}{dp})$, $(\frac{d^2\varphi}{dp^2})$ ec., sono le differenziali prima, seconda ec., di φ prendendo per variabile p, ovvero differenziando rapporto ad essa, divise per dp, dp^2 ec.; esse sono funzioni di p che non contengono dp.

Poniamo nel secondo membro di quest' ultima equazione $(\frac{dp}{dx})dx$ invece dell' aumento dp, ed avremo

$\varphi(p+(\frac{dp}{dx})dx)=\varphi(p)+(\frac{d\varphi}{dp})\cdot(\frac{dp}{dx})dx+(\frac{d^2\varphi}{dp^2})\cdot(\frac{dp}{dx})^2\frac{dx^2}{2}+$ ec.: sarà dunque il differenziale primo di $\varphi(p)$, cioè

$(\frac{dy}{dx})dx=(\frac{d\varphi}{dp})(\frac{dp}{dx})dx$.

„ Dunque per avere la differenziale prima di una funzio-
„ ne qualunque $\varphi(p)$ di p, essendo anche p una funzione di
„ x, bisogna prendere la differenziale prima di $\varphi(p)$ rapporto
„ a p, e dividerla per dp per avere $(\frac{d\varphi}{dp})$, quindi moltiplicare

„ questa trovata espressione per il differenziale primo di p, cioè
„ $(\frac{dp}{dx})dx$ „.

Sia $y=\varphi(p,q)$ essendo $\varphi(p,q)$ una funzione qualunque delle due quantità p, q che sono considerate funzioni di x, e vogliasi il differenziale primo $(\frac{dy}{dx})dx$.

Siccome le due quantità p, q sono riguardate indipendenti fra loro, giacchè per quanto siano ambedue funzioni della stessa x, pure non è stabilita alcuna relazione fra esse, così è chiaro che deve aversi lo stesso risultato, sia che si sostituisca $x+dx$ invece di x nello stesso tempo in p e q, sia che queste sostituzioni si facciano successivamente. Sostituendo prima $x+dx$ per x nella funzione p, poi $x+dx$ per x nella funzione q, la funzione $\varphi(p,q)$ considerata come sola funzione di p, diverrà

$\varphi(p,q)+(\frac{d\varphi}{dp})(\frac{dp}{dx})dx+$ ec.

Poniamo adesso in questa serie $x+dx$ per x nella funzione q; il termine $\varphi(p,q)$, diverrà

$\varphi(p,q)+(\frac{d\varphi}{dq})(\frac{dq}{dx})dx+$ ec.:

quanto al termine $(\frac{d\varphi}{dp})(\frac{dp}{dx})dx$ è chiaro che se noi lo rappresentiamo per Pdx, diverrà in virtù di quella sostituzione

$(P+(\frac{dP}{dp})(\frac{dp}{dx})dx+$ ec. $)dx$, ovvero

$Pdx+(\frac{dP}{dp})(\frac{dp}{dx})dx^2+$ ec.: dunque la proposta funzione $\varphi(p,q)$ quando x vi diviene $x+dx$, diventerà

$\varphi(p,q)+\{(\frac{d\varphi}{dp})(\frac{dp}{dx})+(\frac{d\varphi}{dq})(\frac{dq}{dx})\}dx+$ ec.:

dunque $(\frac{dy}{dx})dx=(\frac{d\varphi}{dp})(\frac{dp}{dx})dx+(\frac{d\varphi}{dq})(\frac{dq}{dx})dx$.

Nella stessa maniera se fosse $y=\varphi(p,q,r)$, rappresentando per $\varphi(p,q,r)$ una qualunque funzione di p,q,r, ed essendo p,q,r tante funzioni di x, avremo

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)dx = \left(\frac{d\phi}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right)dx + \left(\frac{d\phi}{dq}\right)\left(\frac{dq}{dx}\right)dx + \left(\frac{d\phi}{dr}\right)\left(\frac{dr}{dx}\right)dx = \ldots.$$

$$\left\{\left(\frac{d\phi}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right) + \left(\frac{d\phi}{dq}\right)\left(\frac{dq}{dx}\right) + \left(\frac{d\phi}{dr}\right)\left(\frac{dr}{dx}\right)\right\} dx,$$

e così di seguito.

E di quì si deduce un importantissimo Teorema Generale.

„ Il differenziale primo di una funzione composta di diffe-
„ renti funzioni particolari, è la somma dei differenziali primi
„ relativi a ciascuna di queste funzioni medesime considerate se-
„ paratamente ed indipendentemente l' una dall' altra „.

Questo principio combinato con i precedenti serve a trovare le differenziali prime di qualunque funzione, egualmente che le differenziali degli ordini superiori.

Le espressioni formate da p, q ec., $\left(\frac{dp}{dx}\right)$, $\left(\frac{dq}{dx}\right)$ ec., si sogliono chiamare *Funzioni Differenziali del primo Ordine*; se di più si trova in esse $\left(\frac{d^2p}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2q}{dx^2}\right)$ ec., *Funzioni Differenziali del secondo*, e così di seguito.

§. 11. La regola generale, quì sopra dimostrata, per differenziare una funzione comunque composta di altre funzioni, ci dà le seguenti regole particolari che appartengono a certe funzioni di natura determinata.

Indicando per p, q, r ec. tante funzioni composte di x, e facendo $y = \phi(p, q, r \text{ ec.}) = Ap + Bq - Cr +$ ec., essendo A, B, C ec. quantità costanti, avremo (§. 10.) il differenziale di y, così espresso

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)dx = A\left(\frac{dp}{dx}\right)dx + B\left(\frac{dq}{dx}\right)dx - C\left(\frac{dr}{dx}\right)dx + \text{ec.}$$

1°. „ Dunque per differenziare una somma composta di ter-
„ mini positivi e negativi, prendete la differenza di ciascun ter-
„ mine conservandovi i medesimi segni, e formatane così un' altra
„ espressione, essa sarà la differenziale cercata „.

Facendo $y = \phi(p) = Ap^m$ si ha (§. 10)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)dx = mAp^{m-1}\left(\frac{dp}{dx}\right)dx:$$

2°. „ Dunque qualunque sia l' espouente m intero o rotto,

„ positivo o negativo, la differenziale di una potenza p^m di una
„ qualunque funzione p della variabile x, si ha moltiplicando la
„ potenza di p inferiore di una unità della proposta, cioè p^{m-1},
„ per l' esponente m e per il differenziale medesimo di p, cioè
„ $\left(\frac{dp}{dx}\right)dx$ „.

Facendo $y = \phi(p, q, r) = pqr$, si ha (§. 10)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)dx = qr\left(\frac{dp}{dx}\right)dx + rp\left(\frac{dq}{dx}\right)dx + pq\left(\frac{dr}{dx}\right)dx.$$

3°. „ Dunque la differenziale di un prodotto di molte fun-
„ zioni p, q ec. comunque composte della variabile x, è la som-
„ ma dei prodotti della differenziale di ciascun fattore moltipli-
„ cata per il prodotto degli altri fattori „.

Da queste due ultime regole se ne ricava una quarta: se si fa $y = \frac{p}{q}$, abbiamo $y = pq^{-1}$, e quindi

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)dx = \frac{q\left(\frac{dp}{dx}\right)dx - p\left(\frac{dq}{dx}\right)dx}{q^2}.$$

4°. „ Dunque per differenziare una qualunque frazione $\frac{p}{q}$ con-
„ viene prendere il differenziale del numeratore e moltiplicarlo
„ per il denominatore: sottrarne la differenziale del denominato-
„ re moltiplicata per il numeratore, e dividere per il quadrato
„ del denominatore „.

Facendo $y = \phi(p) = \log p$, si ha (§ 10)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)dx = \frac{1}{p}\left(\frac{dp}{dx}\right)dx.$$

5°. „ Dunque il differenziale di una qualunque quantità lo-
„ garitmica è eguale al differenziale della funzione posta sotto
„ il segno logaritmico diviso per la quantità medesima „.

Noi tralasciamo di dare altre regole particolari di differenziare, poichè quella data al §. antecedente, da cui queste dipendono, serve per la differenziazione in tutti i casi possibili.

Sarà utile esercitarsi adesso sopra alcuni esempj.

Quale è il differenziale di $y = (a + bx^m + c(\log x)^n + e^x)^\mu$?

Facendosi $p = a + bx^m + c(\log x)^n + e^x$, s'avrà $y = p^\mu$; e perciò per la regola 2ª.,

$(\frac{dy}{dx})dx = \mu p^{\mu-1}.(\frac{dp}{dx})dx$.

Ora la regola 1ª. ci dà $(\frac{dp}{dx})dx = mbx^{m-1}dx + \ldots\ldots$

$cn(\log x)^{n-1}.\frac{dx}{x} + e^x dx$; dunque

$(\frac{dy}{dx})dx = \mu(a + bx^m + c(\log x)^n + e^x)^{\mu-1}.(mbx^{m-1}dx +$

$\frac{cn(\log x)^{n-1}dx}{x} + e^x dx)$.

Quale è il differenziale di $y = \log(a + bx + cx^2 + ex^3 +$ ec.) ?

Facendo $a + bx + cx^2 + ex^3 +$ ec. $= p$ si ha $y = \log p$, e quindi per la regola 5ª. $(\frac{dy}{dx})dx = \frac{1}{p}.(\frac{dp}{dx})dx$. Ma $(\frac{dp}{dx})dx =$ $(b + 2cx + 3ex^2 +$ ec. $)\,dx$, dunque

$(\frac{dy}{dx})dx = \frac{b + 2cx + 3ex^2 + \text{ec.}}{a + bx + cx^2 + ex^3 + \text{ec.}}dx$.

Quale è il differenziale di $y = \sqrt[m]{(a + bx + cx^2 + ex^3 + \text{ec.})^n}$.

Facendo $a + bx + cx^2 + ex^3 +$ ec. $= p$, s'avrà $y = p^{\frac{n}{m}}$;

Quindi $(\frac{dy}{dx})dx = \frac{n}{m}p^{\frac{n}{m}-1}(\frac{dp}{dx})dx$, ed infine

$(\frac{dy}{dx})dx = \frac{n}{m}\sqrt[m]{(a + bx + cx^2 + ex^3 + \text{ec.})^{n-m}}.(b + 2cx +$ $3ex^2 +$ ec. $)\,dx$.

§. 12. I differenziali delle funzioni esponenziali e circolari, si ottengono con la medesima facilità. Rappresentando per p, q due funzioni complesse in x, quale sarà il differenziale di $y = p^q$?

Alla fine del §. 10. abbiamo dimostrato che essendo

$y = \varphi(p,q)$, è $(\frac{dy}{dx})dx = (\frac{d\varphi}{dp})(\frac{dp}{dx})dx + (\frac{d\varphi}{dq})(\frac{dq}{dx})dx$; dunque, facendo $\varphi = p^q$, avremo

$(\frac{d\varphi}{dp}) = qp^{q-1}$,

$(\frac{d\varphi}{dq}) = p^q \log p$, e fatte le opportune sostituzioni

$(\frac{dy}{dx})dx = qp^{q-1}(\frac{dp}{dx})dx + p^q \log p(\frac{dq}{dx})dx$.

Per avere il differenziale di $y = p^{q^r}$, essendo anche r una funzione complessa in x, facciasi $q^r = z$, ed avremo $y = p^z$: dunque

$(\frac{dy}{dx})dx = zp^{z-1}(\frac{dp}{dx})dx + p^z \log p(\frac{dz}{dx})dx$.

Ora $(\frac{dz}{dx})dx = rq^{r-1}(\frac{dq}{dx})dx + q^r \log q(\frac{dr}{dx})dx$; dunque

$(\frac{dy}{dx})dx = \frac{q^r p^{q^r}.(\frac{dp}{dx})dx}{p} + p^{q^r}.\log p.rq^{r-1}(\frac{dq}{dx})dx + p^{q^r}.\log p \times$ $q^r \log q(\frac{dr}{dx})dx$: ovvero

$(\frac{dy}{dx})dx = p^{q^r}q^r\{\log p.\log q.(\frac{dr}{dx})dx + \frac{r\log p.(\frac{dq}{dx})dx}{q} + \ldots$ $\frac{(\frac{dp}{dx})dx}{p}\}$.

Facciamo $y = e^{e^x}$, (essendo e il numero il cui logaritmo iperbolico è l' unità); allora $p = e$, $q = e$, $r = x$, $\log p = 1$ $\log q = 1$,

$(\frac{dp}{dx})dx = 0$, $(\frac{dq}{dx})dx = 0$, e perciò

$(\frac{dy}{dx})dx = e^{e^x}e^x dx$.

Rapporto alle funzioni circolari abbiamo (§. 8, 9) trovato

$$(\frac{d\,sen\,x}{dx})\,dx = dx\cos x$$

$$(\frac{d\cos x}{dx})\,dx = -\,dx\,sen\,x$$

$$(\frac{d\,tang\,x}{dx})\,dx = \frac{dx}{\cos x^2}$$

$$(\frac{d\sec x}{dx})\,dx = \frac{tang\,x\,dx}{\cos x} = \frac{sen\,x\,dx}{\cos x^2} = dx\,tang\,x\,sen\,x.$$

Cerchiamo ora i differenziali di altre funzioni circolari.

Sia $y = \cot x$. Per avere il suo differenziale, io osservo che $\cot x = \frac{\cos x}{sen\,x}$, e perciò $y = \frac{\cos x}{sen\,x}$: sarà pertanto

$$(\frac{dy}{dx})\,dx = (\frac{d\cot x}{dx})\,dx = \frac{-(sen\,x^2 + \cos x^2)\,dx}{sen\,x^2} = -\,\frac{dx}{sen\,x^2}.$$

Sia $y = cosec\,x$. Siccome $cosec\,x = \frac{1}{sen\,x}$, avremo

$$(\frac{dy}{dx})\,dx = (\frac{d\,cosec\,x}{dx})\,dx = -\,\frac{\cos x}{sen\,x^2}\,dx = dx\cot x\,cosec\,x.$$

Sia $y = sen\,vx$. Siccome $sen\,vx = 1 - \cos x$, avremo

$$(\frac{dy}{dx})\,dx = (\frac{d\,sen\,vx}{dx})\,dx = dx\,sen\,x.$$

§. 13 Passiamo a cercare i differenziali delle funzioni che sono le inverse di quelle già differenziate.

Sia $y = A\,sen\,x$. Siccome si sà dall' introduzione all' Analisi sublime che supposto il raggio $= 1$,

$A\,sen\,x = \frac{1}{\sqrt{(-1)}}\,l(\sqrt{(1 - x^2)} + x\sqrt{(-1)})$, così il differenziale di $A\,sen\,x$, sarà eguale al differenziale di

$\frac{1}{\sqrt{(-1)}}\,l(\sqrt{(1 - x^2)} + x\sqrt{(-1)})$; poniamo dunque

$y = \frac{1}{\sqrt{(-1)}}.\,l((1 - x^2)^{\frac{1}{2}} + x\sqrt{(-1)})$, ed avremo per ciò che è detto al §. 11

$$(\frac{dy}{dx})\,dx = \frac{\frac{1}{\sqrt{(-1)}}(\frac{-x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} + dx\sqrt{(-1)})}{\sqrt{(1-x^2)} + x\sqrt{(-1)}} = \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dx\,(x\sqrt{(-1)} + \sqrt{(1-x^2)})}{(\sqrt{(1-x^2)} + x\sqrt{(-1)})\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}\text{: dunque}$$

$$(\frac{d\,A\,sen\,x}{dx})\,dx = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

Egualmente se fosse $y = A\,sen\,p$, essendo p una funzione di x, ricaveremo e da ciò che è detto quì sopra, e dalla regola generale del §. 10,

$$(\frac{dy}{dx})\,dx = \frac{1}{\sqrt{(1-p^2)}}.(\frac{dp}{dx})\,dx.$$

Sia $y = A\cos x$: essendo x il coseno dell' arco y, sarà $\sqrt{(1 - x^2)}$ il suo seno, dunque y sarà ancora eguale all' arco che ha per seno $\sqrt{(1 - x^2)}$, cioè

$y = A\,sen\sqrt{(1 - x^2)}$. Facendo ora $p = \sqrt{(1 - x^2)}$, avremo

$$(\frac{dy}{dx})\,dx = \frac{1}{\sqrt{(1-p^2)}}.(\frac{dp}{dx})\,dx = \frac{1}{x}.\frac{-x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}},\ \text{dunque}$$

$$(\frac{dy}{dx})\,dx = (\frac{d\,A\cos x}{dx})\,dx = \frac{-dx}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

Sia $y = A\,tang\,x$. Essendo x la tangente dell' arco y, il suo seno sarà $\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$; dunque

$y = A\,sen\,\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$, e quindi

$$(\frac{dy}{dx})\,dx = (\frac{d\,A\,tang\,x}{dx})\,dx = \frac{dx}{1+x^2}.$$

Nella stessa maniera vedremo che essendo

$y = A\cot x$, si ha $(\frac{dy}{dx})\,dx = (\frac{d\,A\cot x}{dx})\,dx = \frac{-dx}{1+x^2}$;

$y = A\sec x$, ... $(\frac{dy}{dx})\,dx = (\frac{d\,A\sec x}{dx})\,dx = \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-1)}}$;

$y = A\,cosec\,x$, . . . $(\frac{dy}{dx})\,dx = (\frac{d\,A\,cosec\,x}{dx})\,dx = \frac{-dx}{x\sqrt{(x^2-1)}}$;

$y = A\,sen\,vx$, . . . $(\frac{dy}{dx})\,dx = (\frac{d\,A\,sen\,vx}{dx})\,dx = \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}}$;

se questi trascendenti invece di contenere x, contenessero una quantità φ funzione di x, allora nei differenziali dovremmo porre φ per x, e $(\frac{d\varphi}{dx})\,dx$ per dx; e se poi vogliamo i differenziali dei medesimi trascendenti quando il raggio è $= a$, allora considerando che

A $sen\, x$ per il raggio $= a$, è eguale ad a. A $sen \frac{x}{a}$ per il raggio $= 1$, moltiplicheremo per a i differenziali trovati, quindi invece di x e di dx porremo in essi $\frac{x}{a}$, e $\frac{dx}{a}$. E' inutile farne qualche esempio.

§. 14. Abbiamo detto (§. 7, 8) che per mezzo della differenziazione dei differenziali primi ottengonsi i differenziali secondi: che i terzi s' ottengono per la differenziazione dei secondi, e così di seguito. Per quanto tutto questo non abbia difficoltà, pure non sarà inutile farne alcuni esempj che serviranno a renderci familiare l' operazione di differenziare.

Sia $y = \frac{aa}{aa + xx}$ e si dimandino i di lui differenziali primo, secondo ec.

Avremo $\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = \frac{-2aax}{(aa + xx)^2} dx$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) dx^2 = \frac{-2a^4 + 6aaxx}{(aa + xx)^3} dx^2$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) dx^3 = \frac{24a^4x - 24aax^3}{(aa + xx)^4} dx^3$$

ec. ec.

Sia $y = \frac{1}{\sqrt{(1 - xx)}}$, ed avremo

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = \frac{xdx}{(1 - xx)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) dx^2 = \frac{1 + 2xx}{(1 - xx)^{\frac{5}{2}}} dx^2$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) dx^3 = \frac{9x + 6x^3}{(1 - xx)^{\frac{7}{2}}} dx^3$$

ec. ec.

Sia $y = log\, x$, ed avremo

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = \frac{dx}{x}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) dx^2 = -\frac{dx^2}{x^2}$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) dx^3 = \frac{2dx^3}{x^3}$$

ec. ec.

Sia $y = e^{nx}$, ed avremo

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = e^{nx}\, ndx;$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) dx^2 = e^{nx}\, n^2 dx^2;$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) dx^3 = e^{nx}\, n^3 dx^3;$$

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) dx^4 = e^{nx}\, n^4 dx^4;$$

ec. ec.

Sia $y = A\, sen\, x$, ed avremo

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{(1 - xx)}} dx;$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) dx^2 = \frac{xdx^2}{(1 - xx)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) dx^3 = \frac{1 + 2x^2}{(1 - xx)^{\frac{5}{2}}} dx^3;$$

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) dx^4 = \frac{9x + 6x^3}{(1 - xx)^{\frac{7}{2}}} dx^4;$$

$$\left(\frac{d^5y}{dx^5}\right) dx^5 = \frac{9 + 72x^2 + 24x^4}{(1 - xx)^{\frac{9}{2}}} dx^5;$$

$$\left(\frac{d^6y}{dx^6}\right) dx^6 = \frac{225x + 600x^3 + 120x^5}{(1 - xx)^{\frac{11}{2}}} dx^6;$$

ec. ec.

Sia infine $y = tang\, x = \frac{sen\, x}{cos\, x}$, ed avremo

$(\frac{dy}{dx})dx = \frac{1}{\cos x^2}dx$;

$(\frac{d^2y}{dx^2})dx^2 = \frac{2\cdot sen\, x}{\cos x^3}dx^2$;

$(\frac{d^3y}{dx^3})dx^3 = (\frac{6}{\cos x^4} - \frac{4}{\cos x^2})dx^3$;

ec. ec.

Non aggiungiamo altri esempj, ma racoomandiamo ai nostri Leggitori d' esercitarsi nella differenziazione delle funzioni che essi medesimi avranno la cura di proporsi.

Un' osservazione importante nella differenziazione delle funzioni è la seguente.

Il differenziale primo di una funzione può fare svanire una quantità costante dalla funzione medesima; il differenziale secondo può farne svanire due; il terzo tre, e così di seguito.

Sia infatti da differenziarsi

$y = \varphi(x) + a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 +$ ec.

essendo $\varphi(x)$ una funzione di x; a, b, c ec., quantità costanti.

Avremo allora

$(\frac{dy}{dx})dx = (\frac{d\varphi}{dx})dx + b + 2cx + 3ex^2 + 4fx^3 +$ ec., differenziale primo che non contien più la costante a;

$(\frac{d^2y}{dx^2})dx^2 = (\frac{d^2\varphi}{dx^2})dx^2 + 2c + 6ex + 12fx^2 +$ ec., differenziale secondo che non contien più le costanti a, b, e così di seguito.

§. 15. Siano ora y, u, ω ec, tante quantità variabili, funzioni determinate o indeterminate di x, e dipendenti in conseguenza dalla stessa x, per quanto non sia stabilita cosa alcuna sopra questa dipendenza.

Il differenziale primo di una funzione qualunque $\varphi(x, y, u$ ec.$)$, delle variabili x, y, u ec., è (§. 10).

$d\varphi = (\frac{d\varphi}{dx})dx + (\frac{d\varphi}{dy})(\frac{dy}{dx})dx + (\frac{d\varphi}{du})(\frac{du}{dx})dx +$ ec.:

ovvero facendo $\beta = (\frac{d\varphi}{dx}) + (\frac{d\varphi}{dy})(\frac{dy}{dx}) + (\frac{d\varphi}{du})(\frac{du}{dx}) +$ ec.,

$d\varphi = \beta dx$: questo differenziale primo esatto βdx ha, come si vede, per β una forma determinata.

Proponiamoci dunque il Problema.

„ Essendo la quantità β di questa forma

„ $m + n(\frac{dy}{dx}) + l(\frac{du}{dx}) +$ ec., quali sono le condizioni cui deb-
„ bono soddisfare le quantità m, n, l ec., acciocchè βdx sia il dif-
„ ferenziale esatto di una funzione $\varphi(x, y, u$ ec.$)$ delle varia-
„ bili x, y, u ec., ovvero acciocchè m possa esser preso per $(\frac{d\varphi}{dx})$;
„ n per $(\frac{d\varphi}{dy})$; l per $(\frac{d\varphi}{du})$ ec. „

Siano due sole le variabili, x cioè ed y, e si dimandino le condizioni che debbono avere i coefficienti m, n, acciocchè $mdx + n(\frac{dy}{dx})dx$ sia un differenziale esatto, ovvero acciocchè m possa esser preso per $(\frac{d\varphi}{dx})$; n per $(\frac{d\varphi}{dy})$.

Supponiamo per un momento che x ed y siano due variabili indipendenti: è allora manifesto che $\varphi(x + dx, y) - \varphi(x, y)$, trascurando nello sviluppo le potenze di dx superiori alla prima, è il differenziale di φ, quando si considera x variabile, cioè è $= (\frac{d\varphi}{dx})dx$. Egualmente, ponendo in quest' ultima espressione $y + dy$ per y, la quantità $\varphi(x + dx, y + dy) - \varphi(x, y + dy) - \varphi(x + dx, y) + \varphi(x, y)$, (se si trascurano nello sviluppo le potenze di dy superiori alle prime), è il differenziale di $(\frac{d\varphi}{dx})dx$ considerando y variabile.

Dunque $\varphi(x + dx, y + dy) - \varphi(x, y + dy) - \varphi(y, x + dx) + \varphi(x, y)$, trascurandovi le potenze di dx e di dy superiori alle prime, è il differenziale secondo di φ, preso prima per rapporto ad x, poi per rapporto ad y. Indichiamo questo differenziale secondo per $(\frac{d^2\varphi}{dxdy})dxdy$.

Nella medesima guisa se prendiamo prima il differenziale rapporto ad y, poi rapporto ad x, avremo la stessa funzione per esprimere il differenziale secondo di φ preso prima rapporto ad y, poi rapporto ad x, che noi indichiamo per $(\frac{d^2\varphi}{dydx})dydx$; sarà dunque

$(\frac{d^2\phi}{dxdy})dxdy = (\frac{d^2\phi}{dydx})dydx$; e perciò $(\frac{d^2\phi}{dxdy}) = (\frac{d^2\phi}{dydx})$.

Ora $(\frac{d^2\phi}{dxdy})$ è la differenziale rapporto ad x di $(\frac{d\phi}{dy})$ divisa per dx; e $(\frac{d^2\phi}{dydx})$ è la differenziale rapporto ad y di $(\frac{d\phi}{dx})$ divisa per dy; dunque dovendo essere $m = (\frac{d\phi}{dx})$, $n = (\frac{d\phi}{dy})$, sarà $(\frac{d^2\phi}{dxdy})$ la differenziale di n rapporto ad x divisa per dx, cioè sarà

$(\frac{d^2\phi}{dxdy}) = (\frac{dn}{dx})$; e $(\frac{d^2\phi}{dydx})$ la differenziale di m rapporto ed y e divisa per dy, cioè sarà

$(\frac{d^2\phi}{dydx}) = (\frac{dm}{dy})$; dunque acciocchè m ed n possano essere presi, il primo per $(\frac{d\phi}{dx})$ ed il secondo per $(\frac{d\phi}{dy})$, dovrà essere

$(\frac{dm}{dy}) = (\frac{dn}{dx})$: cioè sarà sempre $mdx + n(\frac{dy}{dx})dx$ una differenziale esatta, se la differenziale di m preso per rapporto ad y e diviso per dy, sarà eguale alla differenziale di n preso per rapporto ad x e diviso per dx.

Se le variabili sono tre, se si dimandano cioè le condizioni, perchè $mdx + n(\frac{dy}{dx})dx + l(\frac{dz}{dx})dx$ rappresenti la differenziale esatta di una funzione $\phi(x,y,z)$, è facile vedere che le dette condizioni saranno espresse da queste tre equazioni

$(\frac{dm}{dy}) = (\frac{dn}{dx})$, $(\frac{dm}{dz}) = (\frac{dl}{dx})$, $(\frac{dn}{dz}) = (\frac{dl}{dy})$:

infatti la proposta espressione sarà una differenziale esatta, quando ciascuna delle tre combinazioni binarie

$$mdx + n(\frac{dy}{dx})dx,$$

$$mdx + l(\frac{dz}{dx})dx$$

$$n(\frac{dy}{dx})dx + l(\frac{dz}{dx})dx$$

che possono farsi con i tre termini di essa, è anche una differenziale esatta, ed in conseguenza quando hanno luogo le tre equazioni suddette.

§. 16. Ma generalizziamo il problema, e proponiamoci di trovare le condizioni che debbono aver luogo, perchè una funzione d' un ordine qualunque comprendendo un numero qualunque di variabili, sia una differenziale esatta.

Siano queste variabili x, y, u ec., e sia

$$(\frac{dy}{dx}) = p, \ (\frac{dp}{dx}) = q, \ \ldots\ldots \ (\frac{ds}{dx}) = t;$$

$$(\frac{du}{dx}) = p', \ (\frac{dp'}{dx}) = q', \ \ldots\ldots \ (\frac{ds'}{dx}) = t';$$

ec. ec.

Indicando per β una funzione di x, y, u ec., $p, q, \ldots\ldots t, p', q', \ldots\ldots t'$ supponiamo che βdx sia la differenziale di una funzione z dell' ordine immediatamente inferiore, ed avremo $\beta dx = dz$ (per dz noi vogliamo intendere la differenziale della z presa rapporto a tutte le quantità che essa contiene; così in generale se M è una funzione delle quantità x, y, u ec., per dM indichiamo la differenziale

$(\frac{dM}{dx})dx + (\frac{dM}{dy})(\frac{dy}{dx})dx +$ ec.); e perchè z non contiene t, t' ec., sarà

$$\beta dx = (\frac{dz}{dx})dx + (\frac{dz}{dy})(\frac{dy}{dx})dx + (\frac{dz}{dp})(\frac{dp}{dx})dx + \ldots + (\frac{dz}{ds})(\frac{ds}{dx})dx$$
$$+ (\frac{dz}{du})(\frac{du}{dx})dx + (\frac{dz}{dp'})(\frac{dp'}{dx})dx + \ldots + (\frac{dz}{ds'})(\frac{ds'}{dx})dx$$
$$+ \text{ec.}$$

e quindi

$$\beta = (\frac{dz}{dx}) + (\frac{dz}{dy})p + (\frac{dz}{dp})q + \ldots\ldots + (\frac{dz}{ds})t$$
$$+ (\frac{dz}{du})p' + (\frac{dz}{dp'})q' + \ldots\ldots + (\frac{dz}{ds'})t'$$
$$+ \text{ec.}$$

Io faccio

$$d\beta = \mathrm{M}dx + \mathrm{N}\left(\tfrac{dy}{dx}\right)dx + \mathrm{P}\left(\tfrac{dp}{dx}\right)dx + \ldots\ldots + \mathrm{T}\left(\tfrac{dt}{dx}\right)dx$$
$$+ \mathrm{N}'\left(\tfrac{du}{dx}\right)dx + \mathrm{P}'\left(\tfrac{dp'}{dx}\right)dx + \ldots\ldots + \mathrm{T}'\left(\tfrac{ds'}{dx}\right)dx$$
$$+ \text{ ec.}$$

ed è chiaro che sarà (avvertendo che $\left(\frac{d^2z}{dmdn}\right) = \left(\frac{d^2z}{dndm}\right)$)

$$\mathrm{N} = \left(\tfrac{d\beta}{dy}\right) = \left(\tfrac{d^2z}{dxdy}\right) + \left(\tfrac{d^2z}{dy^2}\right)p + \left(\tfrac{d^2z}{dpdy}\right)q + \ldots + \left(\tfrac{d^2z}{dsdy}\right)t$$
$$+ \left(\tfrac{d^2z}{dudy}\right)p' + \left(\tfrac{d^2z}{dp'dy}\right)q' + \ldots + \left(\tfrac{d^2z}{ds'dy}\right)t'$$
$$+ \text{ ec.} = \tfrac{1}{dx}\cdot d\left(\tfrac{dz}{dy}\right);$$

$$\mathrm{P} = \left(\tfrac{d\beta}{dp}\right) = \left(\tfrac{dz}{dy}\right) + \left(\tfrac{d^2z}{dxdp}\right) + \left(\tfrac{d^2z}{dydp}\right)p + \left(\tfrac{d^2z}{dp^2}\right)q \ldots + \left(\tfrac{d^2z}{dsdp}\right)t$$
$$+ \left(\tfrac{d^2z}{dudp}\right)p' + \left(\tfrac{d^2z}{dp'dp}\right)q' \ldots + \left(\tfrac{d^2z}{ds'dp}\right)t'$$
$$+ \text{ ec.} = \left(\tfrac{dz}{dy}\right) + \tfrac{1}{dx}d\left(\tfrac{dz}{dp}\right);$$

$$\mathrm{Q} = \left(\tfrac{d\beta}{dq}\right) = \left(\tfrac{dz}{dp}\right) + \left(\tfrac{d^2z}{dqdx}\right) + \left(\tfrac{d^2z}{dydq}\right)p + \left(\tfrac{d^2z}{dpdq}\right)q \ldots + \left(\tfrac{d^2z}{dsdq}\right)t$$
$$+ \left(\tfrac{d^2z}{dudq}\right)p' + \left(\tfrac{d^2z}{dp'dq}\right)q' \ldots + \left(\tfrac{d^2z}{ds'dq}\right)t'$$
$$+ \text{ ec.} = \left(\tfrac{dz}{dp}\right) + \tfrac{1}{dx}d\left(\tfrac{dz}{dq}\right)$$

. . . .

$$\mathrm{T} = \left(\tfrac{d\beta}{dt}\right) = \left(\tfrac{dz}{ds}\right).$$

Si troverà nella medesima maniera

$$\mathrm{N}' = \tfrac{1}{dx}d\left(\tfrac{dz}{du}\right),\ \mathrm{P}' = \left(\tfrac{dz}{du}\right) + \tfrac{1}{dx}d\left(\tfrac{dz}{dp'}\right),\ \mathrm{Q}' = \left(\tfrac{dz}{dp'}\right) + \tfrac{1}{dx}d\left(\tfrac{dz}{dq'}\right)\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ \mathrm{T}' = \left(\tfrac{dz}{ds'}\right) \text{ ec.};$$

se β non è funzione che di y, x, p, p' non entrerà in z, ed a

cagione di

$$\mathrm{N} = \tfrac{1}{dx}d\left(\tfrac{dz}{dy}\right),\ \tfrac{1}{dx}d\mathrm{P} = \tfrac{1}{dx}d\left(\tfrac{dz}{dy}\right);\ \text{s' avrà}$$
$$\mathrm{N} - \tfrac{1}{dx}d\mathrm{P} = 0.$$

Supponiamo β funzione di y, x, p, q; q non entrerà allora in z, ed a cagione di

$$\mathrm{N} = \tfrac{1}{dx}d\left(\tfrac{dz}{dy}\right),$$
$$\tfrac{1}{dx}d\mathrm{P} = \tfrac{1}{dx}d\left(\tfrac{dz}{dy}\right) + \tfrac{1}{dx^2}d^2\left(\tfrac{dz}{dp}\right),$$
$$\tfrac{1}{dx^2}d^2\mathrm{Q} = \tfrac{1}{dx^2}d^2\left(\tfrac{dz}{dp}\right),\ \text{s' avrà}$$
$$\mathrm{N} - \tfrac{1}{dx}d\mathrm{P} + \tfrac{1}{dx^2}d^2\mathrm{Q} = 0.$$

In generale β essendo una funzione di un ordine qualunque e comprendendo un numero qualunque di variabili, come abbiamo supposto in principio, avremo

$$\mathrm{N} - \tfrac{1}{dx}d\mathrm{P} + \tfrac{1}{dx^2}d^2\mathrm{Q} - \tfrac{1}{dx^3}d^3\mathrm{R} + \tfrac{1}{dx^4}d^4\mathrm{S} - \text{ec.} = 0$$
$$\mathrm{N}' - \tfrac{1}{dx}d\mathrm{P}' + \tfrac{1}{dx^2}d^2\mathrm{Q}' - \tfrac{1}{dx^3}d^3\mathrm{R}' + \tfrac{1}{dx^4}d^4\mathrm{S}' - \text{ec.} = 0;$$
$$\text{ec.} \qquad \text{ec.}$$

E vi saranno tante di queste equazioni di condizione quante sono le variabili meno una, che è quella della quale si considerano funzioni tutte le altre, e rapporto alla quale si fanno le differenziazioni.

Questo bel Teorema è d' Eulero. Condorcet ne ha dato il primo la dimostrazione diretta nel suo Calcolo Integrale, e ne tira le conseguenze seguenti.

§ 17. Se βdx^2 è la differenziale d' una funzione z' d' un ordine inferiore di due unità, a cagione di $zdx = dz'$, s' avrà

$$\left(\tfrac{dz}{dy}\right) - \tfrac{1}{dx}d\left(\tfrac{dz}{dp}\right) + \tfrac{1}{dx^2}d^2\left(\tfrac{dz}{dq}\right) - \text{ec.} = 0:$$

ora è facile vedere che

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \mathrm{P} - \frac{1}{dx} d\mathrm{Q} + \frac{1}{dx^2} d^2\mathrm{R} - \frac{1}{dx^3} d^3\mathrm{S} + \text{ec.}$$

$$\left(\frac{dz}{dp}\right) = \qquad \mathrm{Q} - \frac{1}{dx} d\mathrm{R} + \frac{1}{dx^2} d^2\mathrm{S} + \text{ec.}$$

$$\left(\frac{dz}{dq}\right) = \qquad\qquad \mathrm{R} - \frac{1}{dx} d\mathrm{S} + \text{ec.}$$

ec. ec.

Dunque sostituendo questi valori nell' equazione precedente, otterremo

$$\mathrm{P} - \frac{2}{dx} d\mathrm{Q} + \frac{3}{dx^2} d^2\mathrm{R} - \frac{4}{dx^3} d^3\mathrm{S} + \text{ec.} = 0.$$

Sia βdx^3 la differenziale d' un ordine inferiore di tre unità; sarà allora $z dx^2$ la differenziale d' un ordine inferiore di due unità, e perciò

$$\left(\frac{dz}{dp}\right) - \frac{2}{dx} d\left(\frac{dz}{dq}\right) + \frac{3}{dx^2} d^2\left(\frac{dz}{dr}\right) - \text{ec.} = 0;$$

sostituendo per $\left(\frac{dz}{dp}\right)$, $\left(\frac{dz}{dq}\right)$ ec. i loro valori, s' ottiene l' equazione di condizione

$$\mathrm{Q} - \frac{3}{dx} d\mathrm{R} + \frac{6}{dx^2} d^2\mathrm{S} - \text{ec.} = 0.$$

ec. ec.

Continuando lo stesso andamento, vedremo che se βdx^n è la differenziale di una funzione d' un ordine inferiore di un numero n d' unità, s' avrà per la variabile y (è lo stesso per le variabili u ec.), questo numero d' equazioni di condizione

$$(\mathrm{A}) \ldots \mathrm{N} - \frac{1}{dx} d\mathrm{P} + \frac{1}{dx^2} d^2\mathrm{Q} - \frac{1}{dx^3} d^3\mathrm{R} + \frac{1}{dx^4} d^4\mathrm{S} - \text{ec.} = 0$$

$$(\mathrm{B}) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{P} - \frac{2}{dx} d\mathrm{Q} + \frac{3}{dx^2} d^2\mathrm{R} - \frac{4}{dx^3} d^3\mathrm{S} + \text{ec.} = 0 \\ \qquad\quad \mathrm{Q} - \frac{3}{dx} d\mathrm{R} + \frac{6}{dx^2} d^2\mathrm{S} - \text{ec.} = 0 \\ \qquad\qquad\quad \mathrm{R} - \frac{4}{dx} d\mathrm{S} + \text{ec.} = 0 \end{array} \right.$$

I coefficienti delle equazioni (B) sono; nella prima i numeri naturali; nella seconda i numeri triangolari; nella terza i

numeri piramidali; e così di seguito. Ci sarà utilissimo schiarire tutta questa Teoria per mezzo d' alcuni esempj.

§. 18. Sia primieramente la funzione del primo ordine $n\left(\frac{dy}{dx}\right)dx + m dx$, ed avremo $\beta = np + m$, e per conseguenza $\mathrm{N} = \left(\frac{d\beta}{dy}\right) = \left(\frac{dn}{dy}\right)p + \left(\frac{dm}{dy}\right)$, $\mathrm{P} = \left(\frac{d\beta}{dp}\right) = n$; sostituendo questi valori in $\mathrm{N} - \frac{1}{dx} d\mathrm{P} = 0$, si otterrà

$\left(\frac{dn}{dy}\right)p + \left(\frac{dm}{dy}\right) = \left(\frac{dn}{dx}\right) + \left(\frac{dn}{dy}\right)p$, ovvero $\left(\frac{dm}{dy}\right) = \left(\frac{dn}{dx}\right)$ come abbiam trovato al §. (15).

Io prendo per secondo esempio la funzione del secondo $(nq + m)dx^2$. Si ha $\mathrm{N} = \left(\frac{dn}{dy}\right)q + \left(\frac{dm}{dy}\right)$, $\mathrm{P} = \left(\frac{dn}{dp}\right)q + \left(\frac{dm}{dp}\right)$, $\mathrm{Q} = n$; ed in conseguenza

$$\begin{aligned} \frac{1}{dx} d\mathrm{P} = \frac{1}{dx}\Big\{ & \left(\frac{d^2n}{dpdx}\right) q dx + \left(\frac{d^2n}{dpdy}\right) q \left(\frac{dy}{dx}\right) dx + \left(\frac{d^2n}{dp^2}\right) q \left(\frac{dp}{dx}\right) dx \\ & + \left(\frac{dn}{dp}\right)\left(\frac{dq}{dx}\right) q + \left(\frac{d^2m}{dpdx}\right) dx + \left(\frac{d^2m}{dpdy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) dx \\ & + \left(\frac{d^2m}{dp^2}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right) dx \Big\} = \left(\frac{d^2n}{dpdx}\right) q + \left(\frac{d^2n}{dpdy}\right) qp + \left(\frac{d^2n}{dp^2}\right) q^2 \\ & + \left(\frac{dn}{dp}\right)\left(\frac{dq}{dx}\right) + \left(\frac{d^2m}{dpdx}\right) + \left(\frac{d^2m}{dpdy}\right) p + \left(\frac{d^2m}{dp^2}\right) q \end{aligned}$$

$$\frac{1}{dx} d\mathrm{Q} = \left(\frac{dn}{dx}\right) + p\left(\frac{dn}{dy}\right) + q\left(\frac{dn}{dp}\right),$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{dx^2} d^2\mathrm{Q} = & \left(\frac{d^2n}{dx^2}\right) + 2p\left(\frac{d^2n}{dxdy}\right) + 2q\left(\frac{d^2n}{dxdp}\right) + p^2\left(\frac{d^2n}{dy^2}\right) + 2pq\left(\frac{d^2n}{dydp}\right) \\ & + q\left(\frac{dn}{dy}\right) + q^2\left(\frac{d^2n}{dp^2}\right) + \left(\frac{dq}{dx}\right)\left(\frac{dn}{dp}\right); \end{aligned}$$

ora sostituendo questi valori nell' equazione $\mathrm{N} - \frac{1}{dx} d\mathrm{P} + \frac{1}{dx^2} d^2\mathrm{Q} = 0$, troviamo

$$\left(\frac{dn}{dy}\right) q + \left(\frac{dm}{dy}\right) - \left(\frac{dn}{dp}\right) \cdot \left(\frac{dq}{dx}\right) - q \frac{1}{dx} d\left(\frac{dn}{dp}\right) - \frac{1}{dx} d\left(\frac{dm}{dp}\right) + \frac{1}{dx^2} \times d^2 n = 0.$$

Eseguendo le differenziazioni indicate, e riducendo quest' equazione, diviene

$$q\left\{2\left(\frac{dn}{dy}\right)-\left(\frac{d^2m}{dp^2}\right)+\left(\frac{d^2n}{dpdx}\right)+p\left(\frac{d^2n}{dpdy}\right)\right\}+\left(\frac{dm}{dy}\right)-\left(\frac{d^2m}{dpdx}\right)-$$
$$p\left(\frac{d^2m}{dpdy}\right)+\left(\frac{d^2n}{dx^2}\right)+2p\left(\frac{d^2n}{dxdy}\right)+p^2\left(\frac{d^2n}{dy^2}\right)=0.$$

Ma le funzioni m ed n non dovendo contenere q, questa equazione non può essere identica, senza che il coefficiente di q vada a zero da se medesimo: questa equazione dovrà dunque necessariamente dividersi in due altre, le quali saranno

$$(a) \ldots\ 2\left(\frac{dn}{dy}\right)-\left(\frac{d^2m}{dp^2}\right)+\left(\frac{d^2n}{dpdx}\right)+p\left(\frac{d^2n}{dpdy}\right)=0$$

$$(b) \ldots\ \left(\frac{dm}{dy}\right)-\left(\frac{d^2m}{dpdx}\right)-p\left(\frac{d^2m}{dpdy}\right)+\left(\frac{d^2n}{dx^2}\right)+2p\left(\frac{d^2n}{dxdy}\right)+$$
$$p^2\left(\frac{d^2n}{dy^2}\right)=0.$$

Se la funzione del secondo ordine è la differenziale di una funzione di y e di x, allora a cagione di $P-\frac{2}{dx}dq=0$, sarà di più

$$(c) \ldots\ \left(\frac{dm}{dp}\right)-q\left(\frac{dn}{dp}\right)-2\left(\frac{dn}{dx}\right)-2p\left(\frac{dn}{dy}\right)=0.$$

§. 19. Nei differenziali esatti di una funzione omogenea, ha luogo una proprietà che è ad esse propria e particolare.

Si chiama funzione omogenea quella, nella quale la somma delle dimensioni delle quantità variabili è la medesima in tutti i termini. La funzione intera $x^3+ax^2y+bxy^2$, (y è una funzione indeterminata di x; egualmente lo sono le altre variabili che abbiamo in questo §.) è omogenea, ed il numero delle dimensioni essendo 3, essa è della terza dimensione. La funzione $\frac{x^3+ax^2y+by^2\sqrt{(x^2+y^2)}}{\sqrt{(xy+y^2)}}$ è ancora omogenea, ed il numero delle dimensioni è 2, il quale si ottiene togliendo il numero delle dimensioni del denominatore dal numero delle dimensioni del numeratore. Allorchè il numero delle dimensioni del numeratore, è eguale al numero delle dimensioni del denominatore, la funzione, si dice, essere di una dimensione nulla, come per es.

$\frac{gx^2+hxy}{xy+6y^2}$. Se il numero delle dimensioni del numeratore è minore del numero delle dimensioni del denominatore, la dimensione della funzione è allora negativa: $\frac{\sqrt{(x+y)}}{x^3y^3}$ è una funzione omogenea la cui dimensione è $-\frac{11}{2}$.

Una proposizione, la cui sola esposizione basta per farla comprendere, è la seguente: se in una funzione omogenea di due variabili y ed x, di una dimensione qualunque n, facciamo $\frac{y}{x}=q$, essa cangierassi in una funzione di questa forma Qx^n, Q essendo una funzione di q e di costanti, le quali entrano nella proposta. Per mezzo di questa sostituzione, le quattro funzioni omogenee che abbiam prese per esempj, si cangieranno in queste quì,

$$(1+aq+bq^2)x^3,\ \frac{1+aq+bq^2(1+q^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(q+q^2)}}x^2,\ \frac{g+hq}{q+bq^2},\ \frac{\sqrt{(1+q)}}{q^3}x^{-\frac{11}{2}}.$$

Ciò posto la differenziale $M\left(\frac{dy}{dx}\right)dx+Ndx$ essendo quella di una funzione omogenea z di due variabili y ed x di cui la dimensione è n, immaginiamo che la sostituzione di qx per y cangi M ed N in M', N'; per questa stessa sostituzione z si cangierà in Qx^n; e

$\left(\frac{dy}{dx}\right)dx$ in $qdx+x\left(\frac{dq}{dx}\right)dx$: dunque

$M'\left(qdx+x\left(\frac{dq}{dx}\right)dx\right)+N'dx=d(Qx^n)$, ovvero

$(M'q+N')dx+M'x\left(\frac{dq}{dx}\right)dx=d(Qx^n)$: ora è chiaro che

$(M'q+N')dx$ è il differenziale di Qx^n per rapporto ad x solamente; dunque

$M'q+N'=nQx^{n-1}$; poniamo ora in quest' ultima equazione $\frac{y}{x}$ per q, ed avremo

$My+Nx=nz$, ovvero (ponendo per M ed N i loro valori

$(\frac{dz}{dy}), (\frac{dz}{dx})) y (\frac{dz}{dy}) + x (\frac{dz}{dx}) = nz$.

Questa proprietà delle funzioni omogenee è generale; imperocchè supponendo che z contenga y, x, u ec., e che il numero delle dimensioni sia sempre n, facendo $\frac{y}{x} = q$, $\frac{u}{x} = r$ ec., z diverrà di questa forma Vx^n, per V io intendo una funzione di q, r ec.: se dunque noi chiamiamo M', N', P' ec., ciò che divengono $(\frac{dz}{dy}), (\frac{dz}{dx}), (\frac{dz}{du})$ ec. per causa delle stesse sostituzioni, avremo

$M'(q dx + x (\frac{dq}{dx}) dx) + N' dx + P'(r dx + x (\frac{dr}{dx}) dx) +$ ec. $=$

$d(Vx^n)$, e perciò $M'q + N' + P'r +$ ec. $= nVx^{n-1}$. Rimettendo in quest' ultima equazione $\frac{y}{x}$ per q; $\frac{u}{x}$ per r ec., sarà

$y (\frac{dz}{dy}) + x (\frac{dz}{dx}) + u (\frac{dz}{du}) +$ ec. $= nz$.

Se z fosse stata di dimensione nulla, avremmo avuto

$y (\frac{dz}{dy}) + x (\frac{dz}{dx}) + u (\frac{dz}{du}) +$ ec. $= 0$.

La funzione omogenea $\frac{\sqrt{(x+y)}}{x^3 y^3}$, di cui la dimensione è $-\frac{11}{2}$, ha per differenziale

$\frac{-(5xy + 6y^2)}{2x^4 y^4 \sqrt{(x+y)}} dx - \frac{(5xy + 6x^2)}{2x^4 y^4 \sqrt{(x+y)}} . (\frac{dy}{dx}) dx$: deve dunque essere $-\frac{(5xy + 6y^2) x + (5xy + 6x^2) y}{2x^4 y^4 \sqrt{(x+y)}} = -\frac{11}{2} . \frac{\sqrt{(x+y)}}{x^3 y^3}$. Riducendo infatti si trova $11x^2 y + 11xy^2 = 11xy . (x + y)$.

Quest' altra funzione omogenea $\frac{gx^2 + hxy}{xy + by^2}$ che è di dimensione nulla, ha per differenziale

$\frac{(gx^2 y + 2bgxy^2 + bhy^3) dx - (gx^3 + 2bgx^2 y + bhxy^2)(\frac{dy}{dx}) dx}{(xy + by^2)^2}$: deve dunque essere

$(gx^2 y + 2bgxy^2 + bhy^3) x - (gx^3 + 2bgx^2 y + bhxy^2) y = 0$,

come è effettivamente.

CALCOLO DIFFERENZIALE ED INTEGRALE.

C A P. II.

Differenziali delle Equazioni, e delle funzioni a più variabili.

§. 20. SIA y una funzione implicita di x, abbiasi cioè fra x ed y un' equazione $F(x, y) = 0$ dalla risoluzione della quale dipenda il valore di y dato per x, e si dimandi quale sarà il differenziale $(\frac{dy}{dx}) dx$ della funzione y.

La dipendenza che regna fra x ed y è determinata dall' equazione $F(x, y) = 0$; e considerando y funzione di x, questa equazione deve aver luogo qualunque sia x: la variabile x è dunque arbitraria, e per ogni valore dato ad x ne corrisponde uno per y.

Se noi avessimo soltanto $F(x, y)$, le due variabili x, y sarebbero indipendenti, e considerando y come una funzione di x, sarebbe questa una funzione indeterminata di x. Ora se x diviene $x + dx$, la funzione diverrà

$F(x, y) + P dx + Q dx^2 +$ ec.; e siccome $P dx$ è il differenziale di $F(x, y)$ rapporto ad x, sarà (§. 10)

$P dx = (\frac{dF}{dx}) dx + (\frac{dF}{dy})(\frac{dy}{dx}) dx$, onde quella serie diverrà

$F(x, y) + \{(\frac{dF}{dx}) + (\frac{dF}{dy})(\frac{dy}{dx})\} dx +$ ec.

Ma per la dipendenza che regna fra x, y, la funzione $F(x, y)$ deve sempre essere $= 0$, qualunque sia x; dunque il valore di $F(x, y)$, quando x diviene $x + dx$, sarà nullo; dunque

$F(x, y) + \{(\frac{dF}{dx}) + (\frac{dF}{dy}) . (\frac{dy}{dx})\} dx +$ ec. $= 0$.

Acciocchè quest'ultima equazione sussista qualunque sia dx, conviene che i termini, i quali contengono le diverse potenze di dx, siano zero da se medesimi; dunque

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) dx + \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = 0, \text{ da cui si ricava}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = -\frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)} dx;$$

prendendo il differenziale primo dell' espressione trovata per $\left(\frac{dy}{dx}\right) dx$, ne avremo il differenziale secondo

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) dx^2$; e così se ne avrà il differenziale terzo, quarto ec.

§. 21. L' equazione $F(x,y) = 0$ ci conduce ad un' altra equazione

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) dx + \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = 0, \text{ ovvero}$$

$\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$, che sussiste insieme con essa; ed indicando per più semplicità per $F = 0$, $dF = 0$ quelle due equazioni, sussistendo l'equazione $F = 0$, ha luogo anche la di lei equazione differenziale prima $dF = 0$.

„ Dunque l' operazione della differenziazione non altera „ l' equazione sopra la quale si eseguisce, in modo che non „ abbia più luogo l'eguaglianza fra i suoi membri „.

Prendendo adesso il differenziale dell' equazione $dF = 0$, s' avrà un' equazione $d^2F = 0$, che per la stessa ragione sussisterà nel medesimo tempo che $dF = 0$: così da d^2F si dedurrà un' altra equazione $d^3F = 0$, che sussisterà insieme con lei, e così di seguito.

Dunque sussistendo l'equazione $F = 0$, sussisteranno anche ed avranno luogo insieme con essa l' equazioni

$dF = 0$ differenziale del primo ordine

$d^2F = 0$ . . . . del secondo . . .

$d^3F = 0$ . . . . del terzo . . .

$d^4F = 0$ . . . . del quarto . . .

ec. ec.

dal che si ricava questo Teorema importantissimo:

„ Allorchè sussiste fra due variabili una qualunque equa- „ zione $F = 0$, sussistono ancora ed hanno luogo insieme con „ lei tutte l' equazioni differenziali di qualunque ordine che da „ essa possono dedursi; e queste equazioni appartengono in con- „ seguenza alla stessa relazione di variabili „.

Si travede fino di qui il gran vantaggio che potrà ricavarsi dal Calcolo Differenziale nella soluzione dei Problemi. Se infatti la soluzione di un Problema dipenda da un' equazione fra due variabili x, y si possono avere per mezzo di questo Teorema infinite altre equazioni sussidiarie derivate da quella, e che abbiano luogo insieme con essa, e delle quali ciascuna contiene la soluzione del Problema.

Per incominciare a far sentire di quanta risorsa sia il Calcolo Differenziale nelle ricerche d' analisi proponiamoci di svolgere in serie la quantità $(1 + x)^n$ qualunque sia l' esponente n intero o fratto, positivo o negativo.

Facciamo per questo

$$(1 + x)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Ex^3 + Fx^4 + \text{ec.}$$

essendo A, B, E ec., quantità costanti da determinarsi. Se si prendano i logaritmi da ambe le parti avremo

$$nl(1 + x) = l(1 + Ax + Bx^2 + Ex^3 + Fx^4 + \text{ec.});$$

questa equazione differenziata diviene

$$\frac{n}{1 + x} = \frac{A + 2Bx + 3Ex^2 + 4Fx^3 + \text{ec.}}{1 + Ax + Bx^2 + Ex^3 + Fx^4 + \text{ec.}},$$

la quale ordinata secondo le potenze della x, ed eguagliando a zero i coefficienti delle medesime secondo il *Metodo dei Coefficienti Indeterminati*, ci dà queste equazioni fra A, B, E ec.

$A = n$

$2B + A = nA$; da cui $B = \frac{n(n-1)}{2}$

$$3E + 2B = nB; \text{ da cui } E = \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$$

$$4F + 3E = nE; \text{ da cui } F = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

ec. ec.

Dunque

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} x^3 + \text{ec.}$$

che è la conosciuta formula del Binomio di Neuton.

Se poi l' equazione $F = 0$ fosse un' equazione identica in x soltanto, come per esempio

$x^2 - (x - a)(x + a) + a^2 = 0$, allora essendo quest' equazione vera per qualunque valore di x, giacchè gli x si distruggono da se medesimi, sussisterà anche quando si pone $x + \omega$ invece di x: sarà dunque ancora

$F + (\frac{dF}{dx}) \omega + (\frac{d^2F}{dx^2}) \frac{\omega^2}{2} + \text{ec.} = 0$, e perciò

$(\frac{dF}{dx}) = 0$, $(\frac{d^2F}{dx^2}) = 0$ ec., e queste equazioni differenziali saranno altrettante equazioni identiche.

§. 22. Abbiasi ora una equazione $F = 0$ fra due variabili x, y, e quante si vogliono costanti a, b, c ec.

Noi abbiamo dimostrato al §. antecedente che sussistono ed hanno luogo insieme con questa equazione tutte le di lei equazioni differenziali di qualunque ordine esse siano, che, cioè, nel medesimo tempo abbiamo

$dF = 0$, $d^2F = 0$, $d^3F = 0$ ec. Ora è chiaro che qualunque combinazione di queste equazioni

$F = 0$, $dF = 0$, $d^2F = 0$ ec., darà una nuova equazione che sussisterà nello stesso tempo che l' equazione $F = 0$; apparterrà in conseguenza alla stessa relazione di variabili, ed allo stesso Problema cui apparteneva $F = 0$: a tutte le equazioni che risultano da queste combinazioni si dà anche il nome d' *Equazioni Differenziali del primo Ordine* quando contengono i differenziali primi, o risultano da una combinazione di $F = 0$, e

di $dF = 0$; *del secondo*, quando contengono i differenziali secondi, o risultano da $F = 0$, $dF = 0$, $d^2F = 0$; e così di seguito. L' equazioni differenziali poi $dF = 0$, $d^2F = 0$ ec., si chiamano anche *Differenziali Esatte*, perchè risultano da una semplice operazione di differenziazione.

Tutte queste combinazioni possono essere infinite di numero, ma noi non considereremo che quelle le quali hanno rapporto all' eliminazione delle costanti.

L' equazione $dF = 0$, ovvero $(\frac{dF}{dx}) dx + (\frac{dF}{dy})(\frac{dy}{dx}) dx = 0$ sussiste nello stesso tempo che l' equazione $F = 0$; dunque se per mezzo di esse eliminiamo una delle costanti a, b, c ec., a per esempio, avremo con questa combinazione una nuova equazione fra $x, y, (\frac{dy}{dx})$, e le costanti b, c ec., la quale avrà luogo insieme con $F = 0$, e conterrà una costante di meno di essa.

„ Dunque un' equazione $F = 0$ può sempre contenere u-
„ na costante di più d' un' equazione differenziale del primo or-
„ dine che da essa dipenda „.

Nella stessa guisa eliminando due costanti a, b per mezzo delle tre equazioni simultanee $F = 0$, $dF = 0$, $d^2F = 0$, otterremo un' equazione in $x, y, (\frac{dy}{dx}), (\frac{d^2y}{dx^2})$ e le costanti c ec., la quale avrà luogo insieme con $F = 0$, e conterrà due costanti di meno di essa.

„ Dunque un' equazione $F = 0$ può sempre contenere due
„ costanti di più d' un' equazione differenziale del secondo ordi-
„ ne, la quale da essa dipenda „.

Continuando lo stesso ragionamento vedremo che da una equazione fra due variabili e quante si vogliono costanti $F = 0$, può sempre dedursi un' equazione differenziale dell' ordine n^{esimo}, che abbia luogo insieme con essa, e che contenga un numero n di costanti di meno.

„ Dunque una equazione $F = 0$ può sempre contenere un
„ numero n di costanti di più di un' equazione differenziale
„ dell' ordine n^{esimo}, che da essa dipenda „.

Le equazioni differenziali ottenute per mezzo d' eliminazione delle costanti, sono molto più generali delle equazioni, da cui sono dedotte: esse infatti esprimono le stesse relazioni di quelle, e non contenendo le costanti sono indipendenti dai loro valori.

L' equazione per esempio $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, è quella di un circolo, le cui coordinate del centro sono a, b, ed il cui raggio è r, e non soddisfà ad altri circoli che non abbiano raggio e centro comune con quello.

La di lei equazione differenziale del primo ordine

$2(x-a)dx+2(y-b)\left(\frac{dy}{dx}\right)dx=0$, non contenendo il raggio r, soddisfà a tutti i circoli di qualunque raggio essi siano, purchè abbiano il centro nel punto corrispondente alle coordinate a, b.

La di lei equazione differenziale del secondo ordine

$dx^2+(y-b)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)dx^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx^2=0$ soddisfà a tutti i circoli di qualunque raggio essi siano, purchè abbiano il centro in una linea parallela all' asse degli x, e distante da esso della quantità b.

Divisa questa ultima equazione per dx^2, diviene

$1+(y-b)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$, la quale differenziata, e divisa per dx, ci dà

$(y-b)\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)+3\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0$:

eliminando per mezzo di queste due equazioni la costante b, s' avrà l' equazione differenziale del terzo ordine

$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\cdot\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)-3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$

la quale soddisfarà a qualunque circolo posto nel piano degli x, e degli y.

Vedremo poi nelle applicazioni del Calcolo Differenziale alla Geometria, quali proprietà siano espresse dalle suddette equazioni differenziali. E quì non sarà inutile osservare che non solo per mezzo dell' equazioni differenziali possono eliminarsi le costanti, ma ancora le quantità variabili: per esempio sia l' equazione

$ax+y\,sen\,x=0$ e vogliasi ottenere un' equazione che la rappresenti, ma che non contenga $sen\,x$; differenziando avremo

$a+\left(\frac{dy}{dx}\right)sen\,x+y\cos x=0$, ovvero

$a+\left(\frac{dy}{dx}\right)sen\,x+y\sqrt{(1-sen\,x^2)}=0$, la quale facendo $sen\,x=\frac{ax}{y}$, diverrà

$a+\frac{ax}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)+y\sqrt{\left(1-\frac{a^2x^2}{y^2}\right)}=0$, equazione priva del trascendente $sen\,x$.

Sia l' equazione $(b+ax)^{\frac{m}{n}}+xy^2=a^x$, e vogliasi eliminare l' irrazionale, ed il trascendente: differenziando, avremo

$\frac{m}{n}\cdot\frac{a(b+ax)^{\frac{m}{n}}}{b+ax}+y^2+2xy\left(\frac{dy}{dx}\right)=a^x la$, e ponendovi $(b+ax)^{\frac{m}{n}}=a^x-xy^2$, s' avrà

$\frac{ma(a^x-xy^2)}{n(b+ax)}+y^2+2xy\left(\frac{dy}{dx}\right)=a^x la$.

Differenziando quest' ultima equazione, s' avrà un' equazione del secondo ordine la quale conterrà a^x; ed allora per mezzo di quelle due equazioni che contengono a^x, lo elimineremo, ed avremo un' equazione del secondo ordine senza trascendenti e irrazionali.

Così volendo eliminare x dall' equazione $x^2+y^2=a^2$; se ne prenderebbe la differenziale $2x+2y\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$, dalla quale trovato $x=-y\left(\frac{dy}{dx}\right)$, si sostituirebbe nella proposta, e s' avrebbe $y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2=a^2$.

Nella stessa guisa potremo eliminare da una equazione i trascendenti delle stesse quantità differenziali; abbiasi per esempio l' equazione

$$e^{\left(\frac{dy}{dx}\right)} + xy = a + b\,sen\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Facciamo in questo caso $p = \left(\frac{dy}{dx}\right)$, ed avremo

$e^p + xy = a + b\,sen\,p$.

Differenziamo quest' equazione, ed avremo

$e^p\left(\frac{dp}{dx}\right) + x\left(\frac{dy}{dx}\right) + y = b\cos p.\left(\frac{dp}{dx}\right)$, ovvero

$e^p\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + x\left(\frac{dy}{dx}\right) + y = b\cos p.\left(\frac{d^2p}{dx^2}\right)$; e siccome $e^p = a + b\,sen\,p - xy$, dunque

$(a + b\,sen\,p - xy)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + y + x\left(\frac{dy}{dx}\right) = b\cos p.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$:

quest' ultima equazione non contiene più la trascendente $e^{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$: per mezzo di una nuova differenziazione si potrà eliminare l'altra trascendente $sen\left(\frac{dy}{dx}\right)$, ed ottenere un' equazione libera affatto dai trascendenti.

In generale si devono fare tante differenziazioni, quante sono le quantità da eliminarsi.

§. 23. Rappresentiamo ora per $F(x, y, a, b$ ec.$) = 0$ un'equazione fra le variabili x, y e quante si vogliono costanti a, b ec. Rappresentiamo per $F'(x, y, a, b$ ec.$) = 0$, $F''(x, y, a, b$ ec.$) = 0$, le equazioni differenziali esatte del primo e secondo ordine, e indichiamo per più semplicità queste tre equazioni per $F = 0$, $F' = 0$, $F'' = 0$.

Per mezzo delle due equazioni $F = 0$, $F' = 0$ possiamo eliminare la costante a, ovvero la costante b, ed otterremo in questa guisa due equazioni in x, y e $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, che rappresenteremo per $\varphi\left(x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), b\right.$ ec.$) = 0$, ovvero per $\varphi = 0$, e per $\Psi\left(x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), a\right.$ ec.$) = 0$, ovvero per $\Psi = 0$, la prima delle quali non conterrà la costante a, la seconda non conterrà la costante b.

Queste due equazioni $\varphi = 0$, $\Psi = 0$ avranno luogo insieme con l' equazione $F = 0$; se si prendono adesso i differenziali primi di quelle due equazioni, e s'indicano per $\varphi'\left(x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), b\right) = 0$, $\Psi'\left(x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), a\right) = 0$, ovvero semplicemente per $\varphi' = 0$, $\Psi' = 0$, è evidente che per mezzo delle due equazioni $\varphi = 0$, $\varphi' = 0$ si potrà eliminare la costante b, e s' avrà un' equazione differenziale $P = 0$ del secondo ordine in $x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, la quale avrà luogo insieme con la proposta $F = 0$ e con la $\varphi = 0$. Questa equazione del secondo ordine $P = 0$ conterrà due costanti di meno di $F = 0$.

Se egualmente per mezzo delle due equazioni $\Psi = 0$, $\Psi' = 0$ eliminiamo la costante a, avremo un' altra equazione $Q = 0$ differenziale del secondo ordine, cioè un' equazione fra x, y, $\left(\frac{dy}{dx}\right), \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, la quale avrà luogo insieme con la proposta $F = 0$, e con la $\Psi = 0$, e conterrà due costanti di meno di $F = 0$, ed una costante di meno di $\Psi = 0$.

Ora è facile vedere che le due equazioni differenziali del secondo ordine $P = 0$, $Q = 0$ debbono coincidere tra loro, e con l' equazione differenziale del secondo ordine che potrebbe ottenersi dall' eliminazione simultanea delle due costanti a, b per mezzo delle tre equazioni $F = 0$, $F' = 0$, $F'' = 0$: il valore infatti di $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ che ci danno quelle equazioni del secondo ordine $P = 0$, $Q = 0$ espresso in x, y, e $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ senza a e senza b, non può essere che il medesimo in qualunque maniera sia dedotto dall' equazione $F = 0$.

„ Dunque un' equazione differenziale del secondo ordine può „ essere dedotta da due equazioni differenti del primo, ciascuna „ delle quali contenga una costante di più di essa „.

Lo stesso ragionamento ci proverà che un' equazione differenziale del terzo ordine potrà essere dedotta da tre diverse equazioni differenziali del secondo ordine, contenendo ciascuna di queste una costante di più di essa; ed in generale

„ Un' equazione differenziale dell' ordine n^{esimo} può essere „ dedotta da un numero n di diverse equazioni differenziali

„ dell' ordine $(n-1)^{esimo}$, contenendo ciascuna una costante „ indeterminata di più „.

Per farne un esempio, sia $F = o = y - ax - bx^2$, ed avremo $F' = o = (\frac{dy}{dx}) - a - 2bx$, $F'' = o = (\frac{d^2y}{dx^2}) - 2b$: egualmente sarà $\varphi = o = y - (\frac{dy}{dx})x + bx^2$;

$\Psi = o = 2y - (\frac{dy}{dx})x - ax$; $\varphi' = o = -(\frac{d^2y}{dx^2})x + 2bx$;

$\Psi' = o = (\frac{dy}{dx}) - (\frac{d^2y}{dx^2})x - a$; $P = o = 2y - 2(\frac{dy}{dx})x + (\frac{d^2y}{dx^2})x^2$;

$Q = o = 2y - (\frac{dy}{dx})x - (\frac{dy}{dx})x + (\frac{d^2y}{dx^2})x^2$, e le due equazioni P e Q, sono la stessa cosa.

Potrebbesi trovare la stessa equazione del secondo ordine eliminando subito le due costanti a, b per mezzo delle tre equazioni $F = o$, $F' = o$, $F'' = o$.

§. 24. Passiamo adesso a trattare dei differenziali delle funzioni a più variabili.

Sia $F(x, y)$ una funzione qualunque di due variabili x, ed y indipendenti fra di loro, o tali che il cangiamento di una non conduca il cangiamento dell' altra: egli è chiaro che da questa funzione si potranno derivare altre funzioni secondo la legge prescritta al § 1, sia rapporto ad x, sia rapporto ad y, sia rapporto ad x ed y. Se rappresentiamo per z quella funzione di x e di y, le derivate rapporto ad x s' indicheranno, secondo ciò che è detto di sopra, per

$$d\overset{z}{\underset{x}{\smile}},\ d^2\overset{z}{\underset{x^2}{\smile}},\ d^3\overset{z}{\underset{x^3}{\smile}},\ \ldots\ldots\ d^n\overset{z}{\underset{x^n}{\smile}}.$$

L' intervento della y non altera i risultati che si ottengono per esprimere queste derivate, poichè essa vi è considerata come costante in tutte quelle operazioni di derivazione. Le derivate rapporto ad y saranno indicate egualmente per

$$d\overset{z}{\underset{y}{\smile}},\ d^2\overset{z}{\underset{y^2}{\smile}},\ d^3\overset{z}{\underset{y^3}{\smile}},\ \ldots\ldots\ d^n\overset{z}{\underset{y^n}{\smile}}.$$

Ora la derivata del primo ordine $d\overset{z}{\underset{x}{\smile}}$ rapporto ad x, è una funzione di x e di y: indichiamola per u. Se di questa funzione u considerata come derivatrice, si prende la derivata pri-

ma rapporto ad y, avremo $d\overset{u}{\underset{y}{\smile}} = d\overset{d\overset{z}{\underset{x}{\smile}}}{\underset{y}{\smile}} = d^2\overset{z}{\underset{xy}{\smile}}$ indicando per d^2 la doppia operazione che si fa sopra z, prima per rapporto ad x, poi per rapporto ad y: questa derivata chiamasi ancora essa *Derivata Seconda* o *del Secondo Ordine* della funzione z.

Nella medesima guisa indicheremo per $d^{n+1}\overset{z}{\underset{x^ny}{\smile}}$ la derivata prima rapporto ad y della derivata n^{esima} rapporto ad x, cioè $d\overset{d^n\overset{z}{\underset{x^n}{\smile}}}{\underset{y}{\smile}}$, vale a dire il risultato di $n+1$ derivazioni, delle quali le prime n sono rapporto ad x, e l' altra rapporto ad y.

In generale la derivata m^{esima} rapporto ad y della derivata $d^n\overset{z}{\underset{x^n}{\smile}}$, n^{esima} rapporto ad x, cioè $d^m\overset{d^n\overset{z}{\underset{x^n}{\smile}}}{\underset{y^m}{\smile}}$, sarà indicata per $d^{m+n}\overset{z}{\underset{x^ny^m}{\smile}}$.

Questa ultima espressione che si chiama derivata $(m+n)^{esima}$, rappresenta il risultato di $m+n$ operazioni, delle quali n riguardano x, ed m riguardano y.

Se la derivata prima $d\overset{z}{\underset{y}{\smile}}$, presa per rapporto ad y, si considera come una nuova derivatrice, e se ne prende la derivata prima rapporto ad x, questa derivata di $d\overset{z}{\underset{y}{\smile}}$ sarà indicata per $d^2\overset{z}{\underset{yx}{\smile}}$, la quale espressione ci dice che dobbiamo fare sopra z prima un' operazione di derivazione rapporto ad y, poi rapporto ad x.

Ora è facile dimostrare che si ha lo stesso risultato prendendo la derivata seconda di una funzione col fare sopra di essa l' operazione di derivazione prima rapporto ad x, poi rapporto ad y, o viceversa.

Siano infatti ω, θ le due indeterminate delle quali si suppone che aumentino le variabili x, y in $F(x, y)$, ed avremo secondo il Teorema dimostrato al §. 2.

$$F(x+\omega,y)=F(x,y)+d\underbrace{F}_{x}.\omega+d^2\underbrace{F}_{x^2}.\frac{\omega^2}{2}+d^3\underbrace{F}_{x^3}.\frac{\omega^3}{2.3}+\text{ec.}$$

Facendo ora nei due membri di questa equazione aumentare la y di θ, s' avrà

$$F(x+\omega,y+\theta)=F(x,y)+d\underbrace{F}_{x}.\omega+d^2\underbrace{F}_{x^2}.\frac{\omega^2}{2}+d^3\underbrace{F}_{x^3}.\frac{\omega^3}{2.3}+\text{ec.}$$
$$+d\underbrace{F}_{x}.\theta+d^2\underbrace{F}_{xy}.\omega\theta+d^3\underbrace{F}_{x^2y}.\frac{\omega^2.\theta}{2}+\text{ec.}$$
$$+d^2\underbrace{F}_{y^2}.\frac{\theta^2}{2}+d^3\underbrace{F}_{xy^2}.\frac{\omega.\theta^2}{2}+\text{ec.}$$
$$+d^3\underbrace{F}_{y^3}.\frac{\theta^3}{2.3}+\text{ec.}$$

Lo stesso Teorema ci dà

$$F(x,y+\theta)=F(x,y)+d\underbrace{F}_{y}.\theta+d^2\underbrace{F}_{y^2}.\frac{\theta^2}{2}+d^3\underbrace{F}_{y^3}.\frac{\theta^3}{2.3}+\text{ec.}$$

e quindi

$$F(x+\omega,y+\theta)=F(x,y)+d\underbrace{F}_{y}.\theta+d^2\underbrace{F}_{y^2}.\frac{\theta^2}{2}+d^3\underbrace{F}_{y^3}.\frac{\theta^3}{2.3}+\text{ec.}$$
$$+d\underbrace{F}_{x}.\omega+d^2\underbrace{F}_{yx}.\theta\omega+d^3\underbrace{F}_{y^2x}.\frac{\theta^2.\omega}{2}+\text{ec.}$$
$$+d^2\underbrace{F}_{x^2}.\frac{\omega^2}{2}+d^3\underbrace{F}_{yx^2}.\frac{\theta.\omega^2}{2}+\text{ec.}$$
$$+d^3\underbrace{F}_{x^3}.\frac{\omega^3}{2.3}+\text{ec.}$$

S' avverta che F tiene luogo di $F(x,y)$.

Ma questi due sviluppi debbono essere identici; dunque

$d^2\underbrace{F}_{xy}=d^2\underbrace{F}_{yx}$. Si ricava di quì

$$d^3\underbrace{F}_{x^2y}=d^3\underbrace{F}_{yx^2}=d^3\underbrace{F}_{xyx},$$

$d^4\underbrace{F}_{x^2y^2}=d^4\underbrace{F}_{y^2x^2}=d^4\underbrace{F}_{yx^2y}=d^4\underbrace{F}_{yxyx}=$ ec., ed in generale

$$d^{m+n}\underbrace{F}_{x^my^n}=d^{m+n}\underbrace{F}_{y^nx^m}=d^{m+n}\underbrace{F}_{y^{n-1}x^my}=\text{ec.}$$

Se cioè si deve fare un certo numero di volte un' operazione di derivazione rapporto a più variabili, è indifferente l' ordine che deve tenersi nel fare queste operazioni: si può incominciare dal fare le derivazioni rapporto ad una variabile per un certo numero di volte, poi passare alle derivazioni rapporto all' altra variabile, quindi tornare a derivare rapporto alla prima, e viceversa in quell' ordine che più ci piace.

Per esempio, sia $z=3x^2y-y^3+4x^3$, ed avremo $d^3\underbrace{z}_{x^2y}$ derivando rapporto ad y il valore di $d^2\underbrace{z}_{x^2}$. Ora $d^2\underbrace{z}_{x^2}=6y+24x$; dunque $d^3\underbrace{z}_{x^2y}=6$.

Nella stessa guisa dovendo essere $d^3\underbrace{z}_{x^2y}=d^3\underbrace{z}_{yx^2}$, prendiamo la seconda derivata rapporto ad x di $d\underbrace{z}_{y}=3x^2-3y^2$, ed avremo $d^3\underbrace{z}_{yx^2}=6$, ciò che verifica quanto il Teorema stabilisce.

Per poco che si ponga mente ai due sviluppi superiori, vedremo che essendo z una funzione di due variabili, essa ha due derivate del primo ordine, cioè $d\underbrace{z}_{x}$, $d\underbrace{z}_{y}$; tre del secondo, cioè $d^2\underbrace{z}_{x^2}$, $d^2\underbrace{z}_{xy}$, $d^2\underbrace{z}_{y^2}$; quattro del terzo, $d^3\underbrace{z}_{x^3}$, $d^3\underbrace{z}_{x^2y}$, $d^3\underbrace{z}_{xy^2}$, $d^3\underbrace{z}_{y^3}$; e così di seguito.

§. 25. Secondo gli stessi principj adoprati al §. 4, tutta la serie superiore che ci dà il valore di $F(x+\omega,y+\theta)$, eccettuatone il primo termine, è l' aumento che riceve la funzione $F(x,y)$ in virtù dei due aumenti ω e θ indipendenti fra di loro, ed appartenenti alle due variabili x, y.

Questo aumento si chiama *la Differenza di* $F(x,y)$, ed i termini che compongono questa differenza, astraendo dai divisori numerici, chiamansi *Differenziali Parziali* di quell' ordine, indicato dal rango che occupano nella differenza medesima: così $d\underbrace{F}_{x}\omega$, $d\underbrace{F}_{y}\theta$ sono due differenziali parziali del primo ordine: $d^2\underbrace{F}_{x^2}\omega^2$, $d^2\underbrace{F}_{xy}.\omega\theta$, $d^2\underbrace{F}_{y^2}.\theta^2$ sono tre differenziali parziali del secondo ordine, e così di seguito.

Scrivendo ora questi termini con l' algoritmo differenziale, cioè ponendo dx per ω, e dy per ϑ, e cangiando la caratteristica delle derivate nella caratteristica dei differenziali, avremo rappresentati da $(\frac{dz}{dx})dx$, $(\frac{dz}{dy})dy$
i due differenziali parziali del primo ordine:
da $(\frac{d^2z}{dx^2})dx^2$, $(\frac{d^2z}{dxdy})dxdy$, $(\frac{d^2z}{dy^2})dy^2$
i tre differenziali parziali del secondo ordine, e così di seguito.

Sia per esempio $z=\sqrt{(a^2-x^2-y^2)}$; ed avremo i due differenziali parziali del primo ordine

$$(\frac{dz}{dx})dx=-\frac{xdx}{\sqrt{(a^2-x^2-y^2)}},$$

$$(\frac{dz}{dy})dy=-\frac{ydy}{\sqrt{(a^2-x^2-y^2)}};$$

i tre differenziali parziali del secondo

$$(\frac{d^2z}{dx^2})dx^2=\frac{(y^2-a^2)dx^2}{\sqrt{(a^2-y^2-x^2)^3}},$$

$$(\frac{d^2z}{dy^2})dy^2=\frac{(x^2-a^2)dy^2}{\sqrt{(a^2-y^2-x^2)^3}},$$

$$(\frac{d^2z}{dxdy})dxdy=\frac{-xydxdy}{\sqrt{(a^2-y^2-x^2)^3}};$$

e così di seguito.

Avvertiamo anche una volta che nelle espressioni come $(\frac{d^2z}{dxdy})$, il divisore $dxdy$ non solo ci indica che il differenziale secondo di z deve esser diviso per il prodotto $dxdy$; ma ancora che questo stesso differenziale secondo deve esser preso differenziando una volta rapporto ad x, ed una rapporto ad y.

Data adunque una funzione z delle due variabili x, y indipendenti fra di loro, facendo aumentare x della quantità dx, ed y della quantità dy, avremo

$$z+(\frac{dz}{dx})dx+(\frac{d^2z}{dx^2})\frac{dx^2}{2}+(\frac{d^3z}{dx^3})\frac{dx^3}{2.3}+(\frac{d^4z}{dx^4})\frac{dx^4}{2.3.4}+\text{ec.}$$
$$+(\frac{dz}{dy})dy+(\frac{d^2z}{dxdy})dxdy+(\frac{d^3z}{dx^2dy})\frac{dx^2dy}{2}+(\frac{d^4z}{dx^3dy})\frac{dx^3dy}{2.3}+\text{ec.}$$
$$+(\frac{d^2z}{dy^2})\frac{dy^2}{2}+(\frac{d^3z}{dxdy^2})\frac{dxdy^2}{2}+(\frac{d^4z}{dx^2dy^2})\frac{dx^2dy^2}{2.3}+\text{ec.}$$
$$+(\frac{d^3z}{dy^3})\frac{dy^3}{2.3}+(\frac{d^4z}{dxdy^3})\frac{dxdy^3}{2.3}+\text{ec.}$$
$$+(\frac{d^4z}{dy^4})\frac{dy^4}{2.3.4}+\text{ec.}$$
$$+\text{ec.}$$

§. 26. Noi abbiamo detto che i termini $(\frac{dz}{dx})dx$, $(\frac{dz}{dy})dy$ si chiamano i differenziali parziali di z del primo ordine, il primo rapporto ad x, ed il secondo rapporto ad y: alla somma dei due differenziali parziali del primo ordine si dà il nome di *Differenziale totale* del primo ordine, e s' indica semplicemente per dz; di modo che si ha $dz=(\frac{dz}{dx})dx+(\frac{dz}{dy})dy$.

„ Dunque per avere il differenziale totale del primo ordi-
„ ne di una quantità z, funzione di due variabili indipendenti,
„ converrà prendere i differenziali parziali del primo ordine del-
„ la stessa z, e sommarli „.

Se la differenziale totale del primo ordine della quantità z si differenzia prima per rapporto ad x, poi per rapporto ad y, e se si sommano i due differenziali parziali della stessa dz, s' avrà la differenziale totale del primo ordine di dz che s' indicherà per ddz, ovvero per d^2z; e questa sarà la differenziale totale del secondo ordine della quantità z.

La differenziale totale del secondo ordine sarà dunque così espressa

$$d^2z=(\frac{d^2z}{dx^2})dx^2+2(\frac{d^2z}{dxdy})dxdy+(\frac{d^2z}{dy^2})dy^2.$$

Egualmente troveremo il differenziale totale del terzo ordine:

$$d^3z=(\frac{d^3z}{dx^3})dx^3+3(\frac{d^3z}{dx^2dy})dx^2dy+3(\frac{d^3z}{dxdy^2})dxdy^2+(\frac{d^3z}{dy^3})dy^3;$$

ed in generale il differenziale totale dell' ordine m^{esimo} sarà

$$d^m z = \left(\frac{d^m z}{dx^m}\right) dx^m + m\left(\frac{d^m z}{dx^{m-1}dy}\right) dx^{m-1}.dy + \frac{m(m-1)}{2} \times \ldots\ldots$$

$$\left(\frac{d^m z}{dx^{m-2}dy^2}\right) dx^{m-2} dy^2 + \ldots\ldots + \left(\frac{d^m z}{dy^m}\right) dy^m.$$

Dopo tutto questo è facile vedere che potremo mettere lo sviluppo superiore (§. 25) sotto questa forma più semplice

$$z + dz + \frac{d^2 z}{2} + \frac{d^3 z}{2.3} + \frac{d^4 z}{2.3.4} + \text{ec.}$$

intendendo per dz, $d^2 z$, $d^3 z$ ec., i differenziali totali del primo, secondo, terzo ec. ordine.

Si riconosce ora la necessità del simbolo $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ per indicare il differenziale di z preso solamente rapporto ad x, e diviso per dx: senza quelle due parentesi $\frac{dz}{dx}$ lo avremmo confuso col rapporto del differenziale totale di z, all' aumento indeterminato di x; di modo che essendo $dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy$, si ha

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy}{dx} = \left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right).\frac{dy}{dx},$$ ove $dy : dx$ è il rapporto dei due aumenti indeterminati delle variabili x ed y.

Le due espressioni $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\frac{dz}{dx}$ sono adunque diversissime fra loro: la seconda esprime il vero rapporto fra le due quantità dz e dx; mentre la prima è una espressione simbolica la quale non contiene in sostanza dx, poichè questi è destinato a svanire ad operazione eseguita.

Riprendendo l' esempio del §. antecedente nel quale abbiam fatto $z = \sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}$, s' avrà il differenziale totale del primo ordine

$$dz = -\frac{xdx}{\sqrt{(a^2-x^2-y^2)}} - \frac{ydy}{\sqrt{(a^2-x^2-y^2)}}:$$

quello del secondo

$$d^2 z = \frac{(y^2-a^2)dx^2}{\sqrt{(a^2-x^2-y^2)^3}} - \frac{2xydxdy}{\sqrt{(a^2-x^2-y^2)^3}} + \frac{(x^2-a^2)dy^2}{\sqrt{(a^2-x^2-y^2)^3}},$$ e così si troverebbe il differenziale totale terzo ec.

§. 27. Da ciò che abbiam dimostrato al §. 24, risulta $\left(\frac{d^2 z}{dxdy}\right) = \left(\frac{d^2 z}{dydx}\right)$; vale a dire la differenziale parziale di z presa prima per rapporto ad x, poi per rapporto ad y, è la medesima cosa che la differenziale parziale presa prima per rapporto ad y, poi per rapporto ad x; e che in generale

$$\left(\frac{d^{m+n} z}{dx^m dy^n}\right) = \left(\frac{d^{m+n} z}{dy^n dx^m}\right) = \left(\frac{d^{m+n} z}{dy^{n-1} dx^m dy}\right) = \text{ec.}$$

„ Vale a dire che per avere il differenziale parziale $(m+$
„ $n)^{esimo}$ della funzione z, preso m volte rapporto ad x, ed n
„ rapporto ad y, possiam seguire quell' ordine che più ci pia-
„ ce: possiam differenziare un certo numero di volte rapporto
„ ad x, quindi un certo numero di volte rapporto ad y; torna-
„ re poi a differenziare rapporto ad x, in quell' ordine che a
„ noi piace, purchè alla fine le differenziazioni rapporto ad x
„ siano di numero m, e quelle rapporto ad y di numero n „.

Rammentiamo che le espressioni come $\left(\frac{d^{m+n} z}{dx^m dy^n}\right)$ sono espressioni simboliche, le quali rappresentano delle funzioni di x e di y, e debbono riguardarsi come non contenenti in modo alcuno dx e dy; così qualunque operazione che debba farsi sopra di esse, non può riguardare quei due aumenti indeterminati dx e dy.

Siccome tanto $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ differenziato rapporto ad y e diviso per dy, che $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ differenziato rapporto ad x e diviso per dx portano allo stesso risultato, poichè $\left(\frac{d^2 z}{dxdy}\right) = \left(\frac{d^2 z}{dydx}\right)$, quindi è che se indicando per P e Q due funzioni di x e di y, debb' essere $P = \left(\frac{dz}{dx}\right)$, e $Q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$, fra P e Q sussisterà questa relazione

$(\frac{dP}{dy}) = (\frac{dQ}{dx})$. In generale, siccome tanto $(\frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n})$ differenziato p volte rapporto ad x, q volte rapporto ad y e diviso per $dx^p dy^q$, che $(\frac{d^{p+q}z}{dx^p dy^q})$ differenziato m volte rapporto ad x, n volte rapporto ad y e diviso per $dx^m dy^n$ portano lo stesso risultato, poichè $(\frac{d^{m+n+p+q}z}{dx^m dy^n dx^p dy^q}) = (\frac{d^{p+q+m+n}z}{dx^p dy^q dx^m dy^n})$: quindi è che indicando per P e Q due funzioni di x e di y, se debb' essere $P = (\frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n})$, e $Q = (\frac{d^{p+q}z}{dx^p dy^q})$, sussisterà fra P e Q questa relazione

$$\left(\frac{d^{p+q}P}{dx^p dy^q}\right) = \left(\frac{d^{m+n}Q}{dx^m dy^n}\right).$$

Acciò dunque una espressione $Pdx + Qdy$ possa esser presa per una differenziale totale del primo ordine di una funzione z, cioè possa esser presa per $(\frac{dz}{dx})dx + (\frac{dz}{dy})dy$, converrà che fra P e Q sia questa relazione

$$(\frac{dP}{dy}) = (\frac{dQ}{dx});$$

acciò una espressione $Pdx^2 + Qdxdy + Pdy^2$ possa essere presa per una differenziale totale del secondo ordine di una quantità z, cioè per $(\frac{d^2z}{dx^2})dx^2 + 2(\frac{d^2z}{dxdy})dxdy + (\frac{d^2z}{dy^2})dy^2$, converrà che fra P, Q, R vi siano le relazioni espresse da queste equazioni

$$(\frac{d^2R}{dx^2}) = (\frac{d^2P}{dy^2})$$

$$(\frac{dP}{dy}) = \frac{1}{2}(\frac{dQ}{dx})$$

$$(\frac{dR}{dx}) = \frac{1}{2}(\frac{dQ}{dy}).$$

Se poi volessero trovarsi le relazioni affinchè $Pdx^2 + Qdxdy + Rdy^2$ fosse una differenziale esatta di una funzione differenziale del primo ordine, ecco come faremo.

Sia $Mdx + Ndy$ la funzione differenziale del primo ordine di cui $Pdx^2 + Qdxdy + Rdy^2$ debb' essere la differenziale; il differenziale totale di $Mdx + Ndy$ è

$(\frac{dM}{dx})dx^2 + \{(\frac{dM}{dy}) + (\frac{dN}{dx})\} dxdy + (\frac{dN}{dy})dy^2$: dovrà dunque essere $P = (\frac{dM}{dx})$, $Q = (\frac{dN}{dy})$, $R = (\frac{dM}{dy}) + (\frac{dN}{dx})$; e siccome $(\frac{d^2P}{dy^2}) = (\frac{d^3M}{dxdy^2})$; $(\frac{d^2Q}{dx^2}) = (\frac{d^3N}{dydx^2})$; $(\frac{d^2R}{dxdy}) = (\frac{d^3M}{dydxdy}) + (\frac{d^3N}{dx^2dy})$: sarà dunque $(\frac{d^2P}{dy^2}) + (\frac{d^2Q}{dx^2}) = (\frac{d^2R}{dxdy})$ l' equazion di condizione, la quale deve sussistere tra i coefficienti P, Q, R.

Nella stessa maniera si potrebbero trovare le relazioni che debbono aver luogo fra P, Q, R, S, acciò la funzione differenziale $Pdx^3 + Qdx^2dy + Rdxdy^2 + Sdy^3$ sia una differenziale totale del terzo ordine di una quantità z, ovvero acciò possa quest' espressione prendersi per

$$(\frac{d^3z}{dx^3})dx^3 + 3(\frac{d^3z}{dx^2dy})dx^2dy + 3(\frac{d^3z}{dy^2dx})dy^2dx + (\frac{d^3z}{dy^3})dy^3,$$

e così di seguito.

Per esempio l' espressione

$$\frac{y^2-a^2}{\sqrt{(a^2-x^2-y^2)^3}}dx^2 + \frac{2xy}{\sqrt{(a^2-x^2-y^2)^3}}dxdy + \frac{x^2-a^2}{\sqrt{(a^2-x^2-y^2)^3}}dy^2$$

è una differenziale totale del secondo ordine, poichè ponendo $P = \frac{y^2-a^2}{\sqrt{(a^2-x^2-y^2)^3}}$, $Q = \frac{2xy}{\sqrt{(a^2-x^2-y^2)^3}}$, $R = \frac{x^2-a^2}{\sqrt{(a^2-x^2-y^2)^3}}$, restano soddisfatte le suddette equazioni di condizione, come è facile convincersi facendo il calcolo.

§ 28. Sia z una funzione delle variabili x, y indipendenti fra loro, data per una equazione $V = 0$, essendo V una funzione in x, y e z. Noi abbiamo veduto (§. 20) che sussistendo l' equazione $V = 0$, sussiste insieme con essa l' equazione differenziale del primo ordine

$$(1) \ldots \left(\frac{dV}{dx}\right)dx + \left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)dx = 0$$

la quale si ottiene differenziando la proposta nella supposizione di y costante, supposizione legittima poichè x ed y essendo indipendenti, una non risente la variazione dell' altra: questa equazione si chiama il differenziale parziale dell' equazione $V = 0$ preso riguardo ad x.

Egualmente $V = 0$ dà origine all' altra equazione differenziale parziale del primo ordine riguardo ad y, cioè

$$(2) \ldots \left(\frac{dV}{dy}\right)dy + \left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)dy = 0:$$

hanno adunque luogo o sussistono nello stesso tempo queste tre equazioni

$V = 0$

$(1) = 0$

$(2) = 0:$

sussisterà dunque ancora una combinazione qualunque delle medesime equazioni.

Sommando la seconda e la terza equazione, s' avrà

$(1) + (2) = 0$, cioè

$$\left\{\left(\frac{dV}{dx}\right) + \left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)\right\}dx + \left\{\left(\frac{dV}{dy}\right) + \left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\right\}dy = 0$$

che è l' equazione differenziale totale di $V = 0$, cioè $dV = 0$.

Di quì si ricava questo Teorema.

„ Data l' equazione $V = 0$ fra tre variabili x, y, z di cui „ una, per esempio z, è considerata funzione delle altre due, es- „ sendo queste indipendenti fra loro, se prendiamo la differen- „ ziale parziale di V facendo variare x, e l' eguagliamo a ze- „ ro, se prendiamo la differenziale facendo variare y, e l' e- „ guagliamo a zero, ed in fine sommiamo le differenziali par- „ ziali che equivale a dire, prendiamo la differenziale totale „ facendo tutto variare e l' eguagliamo a zero, avremo tre e- „ quazioni

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)dx + \left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)dx = 0$$

$$\left(\frac{dV}{dy}\right)dy + \left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)dy = 0$$

$$dV = 0$$

„ le quali sussisteranno ed avranno luogo insieme con la data „ $V = 0$ „.

Siccome poi z è una funzione di x e di y, il suo differenziale totale sarà (§. 25)

$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right)dx + \left(\frac{dz}{dy}\right)dy$, e facendo questa sostituzione nell' equazione quì sopra trovata

$(1) + (2) = 0$, s' avrà

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)dx + \left(\frac{dV}{dy}\right)dy + \left(\frac{dV}{dz}\right)dz = 0,$$

così la differenziale totale dell' equazione $V = 0$, è come si vede, la somma dei differenziali parziali di V per rapporto ad x, ad y, e a z, (considerate queste variabili come indipendenti fra loro) eguagliata a zero.

Se si dimanda il differenziale totale dell' equazione alla sfera $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2 = 0$, si farà $V = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2$, quindi

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)dx = 2(x - a)dx$$

$$\left(\frac{dV}{dy}\right)dy = 2(y - b)dy$$

$$\left(\frac{dV}{dz}\right)dz = 2(z - c)dz,$$

e la somma di queste differenziali parziali $2(x - a)dx + 2(y - b)dy + 2(z - c)dz = 0$, sarà la ricercata differenziale totale

§. 29. Tutte le equazioni che possono ottenersi combinando in qualunque maniera le tre equazioni

$V = 0$

$$(1) \ldots \left(\frac{dV}{dx}\right) + \left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$$

$$(2) \ldots \left(\frac{dV}{dy}\right) + \left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$$

si chiamano equazioni a *Differenziali Parziali del Primo Ordine;* così a qualunque equazione proposta, la quale contenga $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, si dà il nome d'equazione a differenziali parziali, poichè può considerarsi come risultante dalla combinazione di quelle tre.

Le combinazioni che possono farsi con le suddette tre equazioni sono infinite di numero; noi però, oltre quella chi ci ha dati i differenziali totali, non ne considereremo che due.

1°. Se l'equazione $V = 0$ contiene due costanti qualunque a, b potremo sempre per mezzo di essa e dell'equazioni (1), (2) da essa dedotte, eliminare le dette costanti, ed ottenere un' equazione ai differenziali parziali che non contenga alcuna traccia di quelle costanti medesime.

Per esempio l'equazione
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2 = 0$$
ci dà

$$(x-a) + (z-c)\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$$

$$(y-b) + (z-c)\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$$

ed eliminando per mezzo della seconda e della terza $z - c$, avremo $(x-a)\left(\frac{dz}{dy}\right) + (y-b)\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$ che è una equazione del primo ordine ai differenziali parziali, nella quale non si trovano più le costanti c, r.

Quest' ultima equazione è molto più generale che $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2 = 0$, poichè questa dipende dai valori di c e di r, mentre l'altra ne è indipendente.

2°. Se l'equazione $V = 0$ contiene oltre le variabili x, y, z una funzione $\varphi(p)$ determinata o indeterminata della quantità p ancora essa funzione di x, y, z, si potranno sempre per mezzo di $V = 0$, e delle equazioni

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) + \left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left\{\left(\frac{dp}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dp}{dx}\right)\right\}\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)\cdot\left(\frac{dV}{d\varphi}\right) = 0$$

$$\left(\frac{dV}{dy}\right) + \left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) + \left\{\left(\frac{dp}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) + \left(\frac{dp}{dy}\right)\right\}\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)\cdot\left(\frac{dV}{d\varphi}\right) = 0$$

(φ tiene luogo di φp), la prima delle quali è il differenziale parziale di $V = 0$ rapporto ad x e diviso per dx, e la seconda è il differenziale parziale rapporto ad y e diviso per dy, si potranno eliminare le due quantità $\varphi(p)$ e $\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)$, e si otterrà un' equazione ai differenziali parziali del primo ordine, la quale non conterrà più traccia alcuna della funzione, e sarà perciò indipendente da essa.

Per esempio, onde eliminare dall' equazione $z - y\varphi(x^2 + y^2) + xy = 0$ la funzione $\varphi(x^2 + y^2)$, se ne prendano i differenziali parziali primi, ed avremo quest' altre due equazioni (si pone p per $x^2 + y^2$)

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) - y\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)\cdot 2x + y = 0$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) - \varphi(p) - \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)\cdot 2y^2 + x = 0,$$

per mezzo delle quali e della proposta, otterremo

$$xy\left(\frac{dz}{dy}\right) - y^2\left(\frac{dz}{dx}\right) - xz - y^3 = 0$$

in cui non si trova più la funzione $\varphi(x^2 + y^2)$.

§. 30. Noi abbiamo detto al §. 28 che sussistendo fra le tre variabili x, y, z una equazione qualunque $V = 0$, hanno luogo e sussistono insieme con essa le due equazioni

$$(1) \ldots \left(\frac{dV}{dx}\right) + \left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$$

$$(2) \ldots \left(\frac{dV}{dy}\right) + \left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0.$$

Ora ciascuna di queste due equazioni può differenziarsi e rapporto ad x e rapporto ad y: così avendo luogo o sussistendo l'equazioni (1), (2), sussisteranno anche le quattro equazioni che si potrebbero da esse ottenere: queste quattro equazioni sono:

1°. Il differenziale parziale della prima equazione rapporto ad x: 2°. il differenziale parziale della medesima equazione rapporto ad y: 3°. il differenziale parziale della seconda equazione rapporto ad x: 4°. il differenziale parziale della medesima rapporto ad y. Di queste quattro equazioni la 2°. e la 3°. sono identicamente la stessa cosa, poichè ciascuna di esse è il differenziale secondo di $V = 0$ preso una volta per rapporto ad x, ed una per rapporto ad y; la 1°. è il differenziale del secondo ordine di $V = 0$ preso due volte rapporto ad x; e la 4°. è il differenziale del secondo ordine della stessa $V = 0$ preso due volte rapporto ad y.

Dunque sussistendo fra le variabili x, y, z una equazione $V = 0$, sussisteranno anche nel medesimo tempo le due equazioni che esprimono i suoi differenziali parziali del primo ordine, e le tre equazioni che esprimono i suoi differenziali parziali del secondo ordine.

Il medesimo ragionamento ci conduce a questo Teorema Generale.

„ Sussistendo fra tre variabili x, y, z una qualunque equa-
„ zione $V = 0$, sussisterà ed avrà luogo insieme con essa un
„ di lei differenziale parziale qualunque dell'ordine $(m + n)^{esimo}$
„ preso m volte rapporto ad x ed n volte rapporto ad y „.

Tutte queste equazioni a differenziali parziali, le quali sussistono insieme con l'equazione $V = 0$ da cui dipendono, appartengono in conseguenza alla medesima relazione di variabili, e possono nella soluzione dei Problemi tenere il di lei luogo.

Le combinazioni ancora che possono farsi con queste equazioni (e che si chiamano *Equazioni a Differenze Parziali del primo Ordine* se contengono $(\frac{dz}{dx})$, ovvero $(\frac{dz}{dy})$; *del Secondo* se contengono $(\frac{d^2z}{dx^2})$, ovvero $(\frac{d^2z}{dxdy})$, ovvero $(\frac{d^2z}{dy^2})$, e così di seguito) sono equazioni che sussistono ancora esse nello stesso tempo che sussiste $V = 0$.

E' facile concepire che queste combinazioni sono infinite di numero secondo l'arbitrio del Geometra: ma non se ne considerano ordinariamente che di tre sorte: cioè quelle che ci danno le equazioni differenziali totali: quelle che ci danno l'eliminazione delle costanti; e quelle che ci danno l'eliminazione delle funzioni; anzi soltanto la considerazione di queste ultime è di qualche vantaggio, l'altra essendo piuttosto una sterile combinazione analitica e niente più.

Riprenderemo questa Teoria nel Calcolo Integrale, nel quale principalmente essa ha la sua applicazione.

§. 31. Dopo ciò che noi abbiamo detto sopra le funzioni di due variabili, sarà facile trattare delle funzioni di qualunque numero di variabili.

Sia dunque z una funzione di quante si vogliono variabili x, y, u, t ec., indipendenti fra loro: è chiaro che essa potrà differenziarsi rapporto a ciascuna di queste variabili; che $(\frac{dz}{dx})dx$, $(\frac{dz}{dy})dy$, $(\frac{dz}{du})du$, $(\frac{dz}{dt})dt$ ec., saranno i differenziali parziali primi di essa; e che

$(\frac{dz}{dx})dx + (\frac{dz}{dy})dy + (\frac{dz}{du})du + (\frac{dz}{dt})dt +$ ec.,

aggregato dei differenziali primi, sarà il differenziale totale della stessa z che noi indicheremo per dz, ed avremo

$$dz = (\frac{dz}{dx})dx + (\frac{dz}{dy})dy + (\frac{dz}{du})du + (\frac{dz}{dt})dt + \text{ec.}$$

Per esempio, facendo $z = \sqrt{(x^2 + y^2 + u^2)}$, avremo

$(\frac{dz}{dx})dx = \frac{xdx}{\sqrt{(x^2 + y^2 + u^2)}}$; $(\frac{dz}{dy})dy = \frac{ydy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + u^2)}}$;

$(\frac{dz}{du})du = \frac{udu}{\sqrt{(x^2 + y^2 + u^2)}}$, e quindi

$$dz = \frac{xdx + ydy + udu}{\sqrt{(x^2 + y^2 + u^2)}}.$$

Ora siccome le variabili x, y, u, t ec., sono indipendenti, e la variazione di una non influisce sopra le altre, quindi è che si potranno considerare variabili quelle che ci piace, riguardando nello stesso tempo le altre come costanti rapporto ad esse: sarà dunque per ciò che è detto ai §§. 24, 27,

$$(\frac{d^2z}{dxdy}) = (\frac{d^2z}{dydx})$$

$$(\frac{d^2z}{dxdu}) = (\frac{d^2z}{dudx})$$

$(\frac{d^2z}{dxdt}) = (\frac{d^2z}{dtdx})$

ec. ec.

$(\frac{d^2z}{dydu}) = (\frac{d^2z}{dudy})$

$(\frac{d^2z}{dydt}) = (\frac{d^2z}{dtdy})$

ec. ec.

$(\frac{d^2z}{dudt}) = (\frac{d^2z}{dtdu})$

ec. ec.

Acciò dunque l' espressione,

$Pdx + Qdy + Rdu + Sdt +$ ec.

nella quale P, Q, R, S ec., sono funzioni di x, y, u, t ec., possa essere presa per il differenziale completo dz di una funzione z delle stesse variabili, possa esser presa cioè per

$(\frac{dz}{dx}) dx + (\frac{dz}{dy}) dy + (\frac{dz}{du}) du + (\frac{dz}{dt}) dt +$ ec.

converrà che fra P, Q, R ec., abbiansi quest' equazioni di condizione

$(\frac{dP}{dy}) = (\frac{dQ}{dx}), (\frac{dP}{du}) = (\frac{dR}{dx}), (\frac{dP}{dt}) = (\frac{dS}{dx})$ ec.,

$(\frac{dQ}{du}) = (\frac{dR}{dy}), (\frac{dQ}{dt}) = (\frac{dS}{dy})$ ec.,

$(\frac{dR}{dt}) = (\frac{dS}{du})$ ec.,

Noi abbiamo veduto al §. 28 che se $V = 0$ esprime una equazione fra x, y, z;

$(\frac{dV}{dx}) dx + (\frac{dV}{dy}) dy + (\frac{dV}{dz}) dz = 0$, (che è l' aggregato dei differenziali parziali di V eguagliato a zero) rappresenta il differenziale totale della medesima equazione $V = 0$.

Dunque acciò una equazione $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ possa essere considerata come il differenziale totale di una equazione $V = 0$, essendo V una funzione delle variabili x, y, z, converrà che fra i di lei coefficienti P, Q, R si abbiano queste tre equazioni

$(\frac{dP}{dy}) = (\frac{dQ}{dx}), (\frac{dP}{dz}) = (\frac{dR}{dx}), (\frac{dQ}{dz}) = (\frac{dR}{dy})$.

Essendo z una funzione delle variabili x, y, u, t ec., se il differenziale totale del primo ordine di z, cioè

$(\frac{dz}{dx}) dx + (\frac{dz}{dy}) dy + (\frac{dz}{du}) du + (\frac{dz}{dt}) dt +$ ec.

si differenzia prima per rapporto ad x, avremo

$(\frac{d^2z}{dx^2}) dx^2 + (\frac{d^2z}{dydx}) dydx + (\frac{d^2z}{dudx}) dudx +$ ec.:

se lo stesso differenziale totale del primo ordine si differenzia e rapporto ad y, e rapporto ad u ec., e si sommano i risultati di tutte queste differenziazioni, avremo l' espressione

$(\frac{d^2z}{dx^2}) dx^2 + 2(\frac{d^2z}{dxdy}) dxdy + 2(\frac{d^2z}{dxdu}) dxdu +$ ec. $+ (\frac{d^2z}{dy^2}) dy^2 +$

$2(\frac{d^2z}{dydu}) dydu +$ ec. $+ (\frac{d^2z}{du^2}) du^2 +$ ec. $+$ ec.

che sarà il differenziale totale del secondo ordine di z, funzione di quante si vogliono variabili x, y, u ec. Questo differenziale totale del secondo ordine differenziato rapporto a ciascuna variabile, e sommatine i risultati, ci dà il differenziale totale del terzo ordine, e così di seguito.

Noi crediamo inutile di trattenersi di più a dare le formule generali per i differenziali totali delle funzioni di qualunque numero di variabili, poichè queste possono dedursi da quanto abbiam detto quì sopra, ed ai §§. 26, 27.

§. 32. Sia ora z una funzione implicita di quante si vogliono variabili x, y, u, t ec., data cioè per l' equazione $V = 0$, essendo V una funzione qualunque di x, y, u, t ec., z.

Siccome fra tutte queste variabili si ha una sola equazione, così una di esse, la z per esempio, è determinata per mezzo di tutte le altre, i valori delle quali restano al nostro arbitrio. Dunque l' equazione $V = 0$ sussisterà per tutti i valori possibili che possono darsi alle variabili x, y, u, t ec, le quali si considerano indipendenti fra loro, o tali che una non risente la variazione dell' altra.

Segue di quì che considerando la sola x variabile, e le altre costanti, l'equazione $V=0$ ci conduce ad un' altra equazione (§. 20.)

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)dx+\left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)dx=0,$$

che è il differenziale parziale del primo ordine di essa rapporto ad x; egualmente insieme con $V=0$ sussisteranno ancora gli altri differenziali parziali del primo ordine e rapporto ad y e rapporto ad u e rapporto a t ec., cioè

$$\left(\frac{dV}{dy}\right)dy+\left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)dy=0$$

$$\left(\frac{dV}{du}\right)du+\left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{du}\right)du=0$$

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)dt+\left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right)dt=0$$

ec. ec. ec.

Differenziando questi differenziali parziali primi, s' avranno i differenziali parziali del secondo ordine che saranno altrettante equazioni che sussisteranno insieme con la proposta; e queste di nuovo differenziate, ci daranno i differenziali parziali terzi, e così di seguito.

In generale sussistendo una equazione $V=0$ fra un qualunque numero di variabili x, y, u, t ec., e z, sussiste insieme con essa un di lei differenziale parziale di qualunque ordine $(m+n+l+h+\text{ec.})^{esimo}$, preso m volte rapporto ad x, n rapporto ad y, l rapporto ad u, h rapporto a t ec.

Non solo tutte queste equazioni che sono i differenziali parziali, ma ancora tutte le combinazioni che di esse posson farsi, sono equazioni che sussistono insieme con la proposta $V=0$; così i differenziali totali di primo, di secondo, di terzo ec. ordine formano tante equazioni che sussistono ed hanno luogo insieme con la medesima.

Sommando tutti i differenziali parziali del primo ordine quì sopra trovati, si ha

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{dV}{dx}\right)dx+\left(\frac{dV}{dy}\right)dy+\left(\frac{dV}{du}\right)du+\left(\frac{dV}{dt}\right)dt+\text{ec.}\\ +\left(\frac{dV}{dz}\right)\left\{\left(\frac{dz}{dx}\right)dx+\left(\frac{dz}{dy}\right)dy+\left(\frac{dz}{du}\right)du+\left(\frac{dz}{dt}\right)dt+\text{ec.}\right\}\end{array}\right\}=0$$

che sarà il differenziale totale del primo ordine di $V=0$.

Ora io osservo che

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)dx+\left(\frac{dz}{dy}\right)dy+\left(\frac{dz}{du}\right)du+\left(\frac{dz}{dt}\right)dt+\text{ec.}=dz;$$

dunque questo differenziale totale potrà essere anche rappresentato dall' equazione

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)dx+\left(\frac{dV}{dy}\right)dy+\left(\frac{dV}{du}\right)du+\left(\frac{dV}{dt}\right)dt+\left(\frac{dV}{dz}\right)dz+\text{ec.}=0.$$

Per avere cioè „ il differenziale totale primo di una qua-
„ lunque equazione $V=0$, nella quale il primo membro è fun-
„ zione delle variabili x, y, u, t, z ec., conviene eguagliare a
„ zero la somma di tutti i differenziali parziali di esso, presi
„ relativamente a ciascuna variabile (z inclusive), come se que-
„ ste fossero indipendenti fra loro „.

Essendo adunque proposta un' equazione differenziale di questa forma

$$Pdx+Qdy+Rdu+Sdt+Tdz+\text{ec.}=0$$

acciò essa sia il differenziale totale primo esatto di una equazione $V=0$ fra le variabili x, y, u, t, z ec., converrà che fra i suoi coefficienti P, Q, R ec., si abbiano queste equazioni di condizione

$$\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dQ}{dx}\right),\left(\frac{dP}{du}\right)=\left(\frac{dR}{dx}\right),\left(\frac{dP}{dt}\right)=\left(\frac{dS}{dx}\right),\left(\frac{dP}{dz}\right)=\left(\frac{dT}{dx}\right)\text{ ec.},$$

$$\left(\frac{dQ}{du}\right)=\left(\frac{dR}{dy}\right),\left(\frac{dQ}{dt}\right)=\left(\frac{dS}{dy}\right),\left(\frac{dQ}{dz}\right)=\left(\frac{dT}{dy}\right)\text{ ec.},$$

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)=\left(\frac{dS}{du}\right),\left(\frac{dR}{dz}\right)=\left(\frac{dT}{du}\right)\text{ ec.},$$

$$\left(\frac{dS}{dz}\right)=\left(\frac{dT}{dt}\right)\text{ ec.}$$

Egualmente trovando le formule che esprimono i differenziali totali degli ordini superiori, si potrebbero avere facilmente le equazioni di condizione, perchè delle espressioni differenziali proposte, fossero differenziali totali esatte.

§. 33. Oltre le combinazioni delle equazioni a differenze parziali, le quali ci danno i differenziali totali, se ne fanno ancora delle altre e per l'eliminazione delle costanti, e per l'eliminazione delle funzioni: noi mostreremo tutto questo nei differenziali parziali del primo ordine, riserbandoci, come abbiamo detto (§. 30.) a parlarne più estesamente nel Calcolo Integrale.

Le equazioni che rappresentano i differenziali parziali del primo ordine, divise respettivamente per dx, dy, du, dt ec., insieme con la proposta formano il seguente sistema d'equazioni simultanee, o sussistenti nello stesso tempo:

$$V = o$$
$$\left(\frac{dV}{dx}\right) + \left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) = o$$
$$\left(\frac{dV}{dy}\right) + \left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) = o$$
$$\left(\frac{dV}{du}\right) + \left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{du}\right) = o$$
$$\left(\frac{dV}{dt}\right) + \left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right) = o$$

ec. ec.

Si hanno adunque tante equazioni quante sono le variabili x, y, u, t ec., z. Siano queste variabili di numero n, ed avremo n equazioni che sussistono nello stesso tempo, o che appartengono alla stessa relazione delle variabili.

Se dunque in queste equazioni si ritrova un numero $n - 1$ di quantità costanti a, b, c ec., potranno queste eliminarsi, e potrà sempre ottenersi una equazione ai differenziali parziali del primo ordine in x, y, u, t ec., z, e $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, $\left(\frac{dz}{du}\right)$, $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ ec., la quale non contenga alcuna traccia delle medesime costanti. Questa equazione apparterrà alla stessa relazione di variabili, cui apparteneva la proposta, e sarà molto più generale di lei, in quanto che è indipendente dal valore di quelle costanti. Nelle

applicazioni che faremo del Calcolo Differenziale, vedremo in che cosa consiste la maggior generalità delle equazioni differenziali.

Rapporto all'eliminazione delle funzioni, consideriamo un'equazione fra quattro variabili x, y, u, z, ed una funzione $\varphi(p, q)$ determinata, o indeterminata di p e di q, essendo anche queste quantità due funzioni date in x, y, u, z, e rappresentiamo quest'equazione per

$F(x, y, u, z, \varphi(p, q)) = o$, o semplicemente per $F = o$.

Sussistendo l'equazione $F = o$, avranno luogo insieme con essa (§. 32) i tre di lei differenziali parziali del primo ordine, e rapporto ad x e rapporto ad y e rapporto ad u; avremo adunque le quattro equazioni

$$F = o,$$
$$\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left\{\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)\left[\left(\frac{dp}{dx}\right) + \left(\frac{dp}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)\right] + \left(\frac{d\varphi}{dq}\right)\left[\left(\frac{dq}{dx}\right) + \left(\frac{dq}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)\right]\right\} = o,$$
$$\left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) + \left\{\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)\left[\left(\frac{dp}{dy}\right) + \left(\frac{dp}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\right] + \left(\frac{d\varphi}{dq}\right)\left[\left(\frac{dq}{dy}\right) + \left(\frac{dq}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\right]\right\} = o,$$
$$\left(\frac{dF}{du}\right) + \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dz}{du}\right) + \left\{\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)\left[\left(\frac{dp}{du}\right) + \left(\frac{dp}{dz}\right)\left(\frac{dz}{du}\right)\right] + \left(\frac{d\varphi}{dq}\right)\left[\left(\frac{dq}{du}\right) + \left(\frac{dq}{dz}\right)\left(\frac{dz}{du}\right)\right]\right\} = o,$$

che sussisteranno nello stesso tempo.

Se per mezzo di queste equazioni elimineremo le tre quantità φ, $\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)$, $\left(\frac{d\varphi}{dq}\right)$, avremo una equazione ai differenziali parziali del primo ordine in x, y, u, z, $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, $\left(\frac{dz}{du}\right)$, la quale non conterrà più la funzione φ, ed apparterrà alla stessa relazione di variabili, cui apparteneva la proposta.

Se l'equazione fosse fra cinque variabili x, y, u, ω, z, si potrebbe eliminare da essa una funzione $\varphi(p, q, r)$ delle quantità p, q, r, funzioni date di quelle variabili; in generale la funzione da eliminarsi può essere composta di tante quantità p, q, r ec., quante sono le variabili meno due.

Per eliminare da una equazione più di una funzione, converrebbe passare alle equazioni ai differenziali parziali degli ordini superiori; vedremo tutto questo nel Calcolo Integrale, ove stabiliremo i Teoremi che determinano il numero delle costanti e delle funzioni che deve contenere un' equazione, dalla quale per mezzo dell' eliminazione di esse, possa considerarsi come ottenuta un' altra equazione ai differenziali parziali di un certo ordine.

CALCOLO DIFFERENZIALE ED INTEGRALE.

C A P. III.

Uso del Calcolo Differenziale nelle Ricerche di Pura Analisi.

I. Sviluppo delle Funzioni in Serie.

§. 34. Noi abbiamo veduto al §. 5. che rappresentando per $\varphi(x)$ una qualunque funzione di x, è sempre

$$(E) \dots \varphi(x+\theta) = \varphi(x) + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\theta + \frac{\theta^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) + \frac{\theta^3}{2.3}\left(\frac{d^3\varphi}{dx^3}\right) + \text{ec.}$$

qualunque sia la quantità θ, di cui è aumentata la x. Questa formula serve a sviluppare qualunque funzione della quantità $x+\theta$, in serie secondo le potenze crescenti ed intiere di θ. Essa è convergente quando $\theta < 1$.

Se ora facciamo $x = 0$, avremo

$$\varphi(\theta) = \varphi(0) + \theta\left(\frac{d\varphi x}{dx}\right) + \frac{\theta^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi x}{dx^2}\right) + \text{ec.}$$

purchè nei coefficienti $\left(\frac{d\varphi x}{dx}\right), \left(\frac{d^2\varphi x}{dx^2}\right)$ ec., ad operazione eseguita pongasi zero invece di x; e siccome θ rappresenta una quantità qualunque, così potremo rimettere x invece di θ: sarà allora

$$(F) \dots \varphi(x) = \varphi(0) + x\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) + \text{ec.}$$

purchè, eseguite le differenziazioni, si faccia

$x = 0$ in $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right), \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)$ ec.

Quest' ultima formula serve a sviluppare in serie, secondo le potenze crescenti ed intiere di x, una qualunque funzione $\varphi(x)$ di x.

Per farne alcuno esempio, si cerchi la serie che esprime $A\,sen(x+\theta)$ secondo le potenze di θ.

La formula (E) ci darà

$$A\,sen(x+\theta) = A\,sen\,x + \left(\frac{dA\,sen\,x}{dx}\right)\theta + \left(\frac{d^2A\,sen\,x}{dx^2}\right)\frac{\theta^2}{2} + \left(\frac{d^3A\,sen\,x}{dx^3}\right)\frac{\theta^3}{2.3} + \text{ec.}$$

Ora i differenziali successivi dell' $A\,sen\,x$ sono stati trovati al §. 14; sostituendoli dunque in questa serie, dopo averli divisi per dx, avremo

$$A\,sen(x+\theta) = A\,sen\,x + \frac{\theta}{(1-xx)^{\frac{1}{2}}} + \frac{x\theta^2}{2(1-xx)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(1+2xx)\theta^3}{2.3(1-xx)^{\frac{5}{2}}} + \frac{(9x-6x^3)\theta^4}{2.3.4(1-xx)^{\frac{7}{2}}} + \frac{(9+72x^2+24x^4)\theta^5}{2.3.4.5(1-xx)^{\frac{9}{2}}} + \text{ec.}$$

Quando dunque sarà conosciuto l' arco il cui seno è x, si potrà trovare l' arco il cui seno è $x+\theta$, se θ sarà una quantità molto piccola per rendere la serie convergente.

La serie (F) ci darebbe $A\,sen\,x$ espresso per le potenze crescenti intiere di x in questa guisa

$$A\,sen\,x = x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{9x^5}{2.3.4.5} + \text{ec.}$$

Vogliasi, per un altro esempio, ridurre in serie ordinata secondo le potenze di x la quantità $a^{A\,sen\,x}$.

Si faccia per questo $A\,sen\,x = z$, e si prendano i differenziali di a^z.

Avremo (ponendo $log\,a = \beta$)

$$\left(\frac{da^z}{dx}\right) = a^z.\beta\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{d^2a^z}{dx^2}\right) = a^z\left\{\beta^2\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \beta\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\right\}$$

$$\left(\frac{d^3a^z}{dx^3}\right) = a^z\left\{\beta^3\left(\frac{dz}{dx}\right)^3 + 3\beta^2\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \beta\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)\right\}$$

$$\left(\frac{d^4a^z}{dx^4}\right) = a^z\left\{\beta^4\left(\frac{dz}{dx}\right)^4 + 6\beta^3\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + 4\beta^2\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) + 3\beta^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2 + \beta\left(\frac{d^4z}{dx^4}\right)\right\}$$

ec.

Ora dal §. 14. si hanno i valori dei differenziali di $z = A\,sen\,x$, i quali facendo $x=0$, divengono

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)=1,\ \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)=0,\ \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)=1,\ \left(\frac{d^4z}{dx^4}\right)=0,\ \left(\frac{d^5z}{dx^5}\right)=9,\ \text{ec.};$$

dunque quando $x=0$, avremo $a^z=1$, $\left(\frac{da^z}{dx}\right)=\beta$, $\left(\frac{d^2a^z}{dx^2}\right)=\beta^2$, $\left(\frac{d^3a^z}{dx^3}\right)=\beta(\beta^2+1)$, $\left(\frac{d^4a^z}{dx^4}\right)=\beta^2(\beta^2+4)$, $\left(\frac{d^5a^z}{dx^5}\right)=\beta(\beta^2+1)(\beta^3+9)$, ec.

E perciò la serie ricercata sarà

$$a^z = a^{A\,sen\,x} = 1 + \beta x + \frac{\beta^2x^2}{2} + \frac{\beta(\beta^2+1)}{2.3}x^3 + \frac{\beta^2(\beta^2+4)}{2.3.4}x^4 + \frac{\beta(\beta^2+1)(\beta^2+9)}{2.3.4.5}x^5 + \text{ec.}$$

Noi raccomandiamo ai nostri Lettori d' esercitarsi in questi sviluppi, al qual fine possono vedere il Cap. IV. della seconda Parte del Calcolo Differenziale del Sig. Euler.

§. 35 Le due formule (E), (F) che abbiamo date al §. antecedente, finiscono quando alcuno di quei coefficienti differenziali è nullo, e lo sono ancora i differenziali successivi: eccettuato questo caso, esse vanno all' infinito.

Ora facilmente si comprende, che commetteremo un errore nel fare uso di una serie infinita, della quale si prenderà soltanto un certo numero di termini trascurandone il restante, e che quest' errore sarà tanto maggiore, quanto è più grande il numero dei termini che si trascurano, o quanto è minore il numero di quelli che si ritengono. Accade in molte ricerche che per quanto la serie sia convergente, è necessario tener conto approssimatamente di questo resto, o prescriverli i limiti entro ai quali si ritrova, per poter fare un retto giudizio sopra l' errore che si commette nel trascurarlo.

Per questo noi ci tratterremo ad esporre un interessantissimo Teorema, il quale oltre a soddisfare al bisogno, ci somministra anche la maniera di dare alle serie una tal forma finita che i ragionamenti e le considerazioni appartenenti alle intiere loro somme, possono con tutto il rigore Geometrico applicarsi alle medesime ridotte sotto quella forma medesima.

Indichiamo per $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi'''(x)$, ... $\varphi^{(n)}(x)$ le funzioni $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^3\varphi}{dx^3}\right)$, ... $\left(\frac{d^n\varphi}{dx^n}\right)$, e la formula (E) diverrà

$$\varphi(x+\theta)=\varphi(x)+\theta\varphi'(x)+\frac{\theta^2}{2}\varphi''(x)+\frac{\theta^3}{2.3}\varphi'''(x)+\ldots\ldots+$$

$$\frac{\theta^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\varphi^{(n-1)}(x)+\frac{\theta^n}{2.3\ldots n}\left\{\varphi^{(n)}(x)+\frac{\theta}{n+1}\varphi^{(n+1)}(x)\right.$$

$$\left.+\frac{\theta^2}{(n+1)(n+2)}\varphi^{(n+2)}(x)+\text{ec.}\right\}.$$

Supponiamo che fermandosi al termine $\frac{\theta^{n-1}}{2.3\ldots.(n-1)}\varphi^{(n-1)}(x)$ vogliasi stimare il resto che si trascura, e facciamo

$$R=\varphi^{(n)}(x)+\frac{\theta}{n+1}\varphi^{(n+1)}(x)+\frac{\theta^2}{(n+1)(n+2)}\varphi^{(n+2)}(x)+\text{ec.}$$

Ora se sviluppiamo in serie secondo le potenze di p la funzione $\varphi^{(n)}(x+p)$, essendo p una quantità qualunque, avremo $\varphi^{(n)}(x+p)=\varphi^{(n)}x+p\varphi^{(n+1)}x+\frac{p^2}{2}\varphi^{(n+2)}x+$ ec. Ciò premesso, si paragonino le tre serie, quella cioè che nasce dalla supposizione di $p=0$ nello sviluppo di $\varphi^{(n)}(x+p)$, quella che rappresenta il resto R da trascurarsi, e quella che nasce dallo sviluppo di $\varphi^{(n)}(x+p)$ facendovi $p=\theta$,

$$\varphi^{(n)}(x+0)=\varphi^{(n)}(x)+\qquad 0 \quad+\qquad 0 \quad+\text{ec.}$$

$$R=\varphi^{(n)}(x)+\frac{\theta}{n+1}\varphi^{(n+1)}x+\frac{\theta^2}{(n+1)(n+2)}\varphi^{(n+2)}x+\ldots.$$

$$\varphi^{(n)}(x+\theta)=\varphi^{(n)}(x)+\frac{\theta}{1}\varphi^{(n+1)}x+\frac{\theta^2}{1.2}\varphi^{(n+2)}x+\ldots.$$

I primi termini di queste tre serie sono eguali: rapporto agli altri termini, è facile osservare che ciascuno dei termini della serie la quale rappresenta R, è maggiore del corrispondente nella serie superiore $\varphi^{(n)}(x+0)$, ed è minore del suo corrispondente nella serie inferiore $\varphi^{(n)}(x+\theta)$. La prima e la terza serie sono adunque i limiti della seconda, e le loro somme sono una maggiore l' altra minore di R; di modo che se invece di θ prendiamo nello sviluppo di $\varphi^{(n)}(x+\theta)$ una quantità p minore di essa, tutti i termini di quello sviluppo diverranno minori, e s' avvicineranno ad essere eguali ai termini componenti il valore di R: dunque R sarà eguale a $\varphi^{(n)}(x+p)$ supponendo p maggiore di zero e minore di θ, ed avremo

$$\varphi(x+\theta)=\varphi(x)+\theta\varphi'(x)+\frac{\theta^2}{2}\varphi''(x)+\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$\frac{\theta^{n-1}}{2.3\ldots.n-1}\varphi^{(n-1)}(x)+\frac{\theta^n}{2.3\ldots.n}\varphi^{(n)}(x+p)$$

essendo $p>0$, $<\theta$; per quanto adunque p sia una quantità indeterminata sono però determinati i suoi limiti.

Ecco il Teorema che si deduce da tutto questo:

TEOREMA

§. 36. „ La serie infinita nello sviluppo di $\varphi(x+\theta)$, incominciando da un termine qualunque, è sempre eguale al valore „ di quello stesso termine, ponendovi $x+p$ in luogo di x; „ p essendo una quantità contenuta fra 0 e θ. „

Questo bel Teorema potrà in molti casi servire a calcolare il resto dei termini che non si ritengono in una serie, la cui convergenza non ci permette di trascurarli senza temere d' incertezza nei risultati.

Facciamo nella formula quì trovata per lo sviluppo finito di $\varphi(x+\theta)$, $x=0$, e quindi $\theta=x$, ed avremo lo sviluppo di una funzione $\varphi(x)$ in serie secondo le potenze di x, espresso in termini finiti in questa guisa

$$\varphi(x)=\varphi(0)+x\varphi'0+\frac{x^2}{2}\varphi''0+\frac{x^3}{2.3}\varphi'''0+\ldots\ldots+$$

$$\frac{x^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)}\varphi^{(n-1)}0+\frac{x^n}{2.3\ldots n}\varphi^{(n)}(p)$$

essendo p una quantità indeterminata contenuta fra zero e x, cioè $p>0$, $p<x$.

Siccome n può essere qualunque, così potremo terminare la serie al secondo, terzo, quarto ec., termine come più ci piace; ed avremo.

Per la serie che ci dà lo sviluppo di $\varphi(x+\theta)$;

$$\varphi(x+\theta)=\varphi(x)+\theta\varphi'(x+p)$$

$$\varphi(x+\theta)=\varphi(x)+\theta\varphi'(x)+\frac{\theta^2}{2}\varphi''(x+p).$$

$$\varphi(x+\theta)=\varphi(x)+\theta\varphi'(x)+\frac{\theta^2}{2}\varphi''(x)+\frac{\theta^3}{2.3}\varphi'''(x+p)$$

$$\varphi(x+\theta)=\varphi(x)+\theta\varphi'(x)+\frac{\theta^2}{2}\varphi''(x)+\frac{\theta^3}{2.3}\varphi'''(x)+\ldots$$

$$\frac{\theta^4}{2.3.4}\varphi''''(x+p)$$

ec. ec.

Per la serie che ci dà lo sviluppo di $\varphi(x)$,

$$\varphi(x)=\varphi 0+x\varphi' p$$

$$\varphi(x)=\varphi 0+x\varphi' 0+\frac{x^2}{2}\varphi'' p$$

$$\varphi(x)=\varphi 0+x\varphi' 0+\frac{x^2}{2}\varphi'' 0+\frac{x^3}{2.3}\varphi''' p$$

$$\varphi(x)=\varphi 0+x\varphi' 0+\frac{x^2}{2}\varphi'' 0+\frac{x^3}{2.3}\varphi''' 0+\frac{x^4}{2.3.4}\varphi'''' p.$$

ec. ec.

Facciamone un esempio.

Quale è la serie che esprime lo sviluppo di $\frac{1}{x+a}$, non prendendone che due termini e tenendo conto del resto?

Facciamo $\varphi(x+\theta)=\frac{1}{x+a}$, e perciò $a=\theta$, $\varphi(x)=$

$\frac{1}{x}$ e quindi $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)=\varphi'(x)=-\frac{1}{x^2}$, $\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)=\varphi''(x)=\frac{2}{x^3}$, e

$\varphi''(x+p)=\frac{2}{(x+p)^3}$: dunque

$\frac{1}{x+a}=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}+\frac{a^2}{(x+p)^3}$ essendo p una quantità contenuta fra 0 ed a.

Per le semplici regole della divisione infatti si ottiene $\frac{1}{x+a}=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}+\frac{a^2}{x^2(a+x)}$: ora il denominatore $x^2(a+x)=ax^2+x^3$ può divenire eguale ad $(x+p)^3$ ovvero $x^3+3x^2p+3xp^2+p^3$, prendendo per p una quantità >0, e $<a$; poichè $p=0$ ci dà $(x+p)^3=x^3$, e $p=a$, ci dà $(x+p)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$, per il che si vede che il vero denominatore x^3+ax^2 è intermedio alle due quantità x^3, ed

$x^3+3x^2a+3a^2x+a^3$.

§. 37. Passiamo allo sviluppo delle funzioni a più variabili.

Rappresentando per $\varphi(x,y)$ una funzione z delle due variabili x ed y, abbiamo veduto al §. (25) che qualunque siano ω e θ, si ha sempre (si scrive φ per $\varphi(x,y)$)

$$\begin{aligned}\varphi(x+\omega,y+\theta)=\varphi(x,y)&+\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\omega+\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)\frac{\omega^2}{2}+\text{ec.}\\&+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\theta+\left(\frac{d^2\varphi}{dxdy}\right)\omega\theta+\text{ec.}\\&+\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)\frac{\theta^2}{2}+\text{ec.}\\&+\text{ec.}\end{aligned}$$

Per mezzo di questa formula possiamo sviluppare una qualunque funzione $\varphi(x+\omega,y+\theta)$ in una serie ordinata per le potenze ed i prodotti delle due quantità ω e θ.

Se in essa facciamo $x=y=0$, e se dopo questo, potendo ω e θ essere qualunque, poniamo come abbiam fatto per una sola variabile al §. 35, invece di essi x ed y, avremo

$$\varphi(x,y) = \varphi(o,o) + x\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)\frac{x^2}{2} + \text{ec.}$$
$$+ y\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) + \left(\frac{d^2\varphi}{dxdy}\right)xy + \text{ec.}$$
$$+ \left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)\frac{y^2}{2} + \text{ec.}$$
$$+ \text{ec.}$$

purchè a differenziazioni eseguite facciasi $x = o$, $y = o$ nei coefficieti $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$, $\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)$ ec.

Quest' ultima formula ci dà il mezzo di sviluppare una qualunque funzione di due variabili in serie ordinata per le potenze e per i prodotti delle medesime.

Le due ritrovate serie sono in generale composte di un numero infinito di termini; ma per mezzo di un ragionamento simile a quello del §. antecedente possono ridursi ad una forma finita.

Indicando per $\varphi'(x,y)$ la funzione $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$; per $\varphi_{\prime}(x,y)$ la funzione $\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)$; per $\varphi''(x,y)$ la funzione $\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)$; per $\varphi'_{\prime}(x,y)$ la funzione $\left(\frac{d^2\varphi}{dxdy}\right)$; per $\varphi_{\prime\prime}(x,y)$ la funzione $\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)$ ec. ec.; troveremmo secondo il citato ragionamento

$$\varphi(x+\omega, y+\theta) = \varphi(x,y) + \omega\varphi'(x+p, y+q)$$
$$+ \theta\varphi_{\prime}(x+p, y+q)$$

se vogliamo fermarci alle prime potenze degli aumenti ω, θ: ovvero

$$\varphi(x+\omega, y+\theta) = \varphi(x,y) + \omega\varphi'(x,y) + \frac{\omega^2}{2}\varphi''(x+p, y+q)$$
$$+ \theta\varphi_{\prime}(x,y) + \omega\theta\varphi'_{\prime}(x+p, y+q)$$
$$+ \frac{\theta^2}{2}\varphi_{\prime\prime}(x+p, y+q)$$

se vogliamo fermarci alle seconde potenze: ovvero

$$\varphi(x+\omega, y+\theta) = \varphi(x,y) + \omega\varphi'(x,y) + \frac{\omega^2}{2}\varphi''(x,y) + \frac{\omega^3}{2.3}\varphi'''(x+p, y+q)$$
$$+ \theta\varphi_{\prime}(x,y) + \omega\theta\varphi'_{\prime}(x,y) + \frac{\omega^2\theta}{2}\varphi''_{\prime}(x+p, y+q)$$
$$+ \frac{\theta^2}{2}\varphi_{\prime\prime}(x,y) + \frac{\omega\theta^2}{2}\varphi'_{\prime\prime}(x+p, y+q)$$
$$+ \frac{\theta^3}{2.3}\varphi_{\prime\prime\prime}(x+p, y+q)$$

se vogliamo fermarci alle terze potenze, e così di seguito.

La quantità p deve essere $> o$, e $< \omega$; la quantità $q > o$, $< \theta$.

$$\varphi(x,y) = \varphi(o,o) + x\varphi'(p,q)$$
$$+ y\varphi_{\prime}(p,q)$$

ovvero

$$\varphi(x,y) = \varphi(o,o) + x\varphi'(o,o) + \frac{x^2}{2}\varphi''(p,q)$$
$$+ y\varphi_{\prime}(o,o) + xy\varphi'_{\prime}(p,q)$$
$$+ \frac{y^2}{2}\varphi_{\prime\prime}(p,q)$$

ovvero

$$\varphi(x,y) = \varphi(o,o) + x\varphi'(o,o) + \frac{x^2}{2}\varphi''(o,o) + \frac{x^3}{2.3}\varphi'''(p,q)$$
$$+ y\varphi_{\prime}(o,o) + xy\varphi'_{\prime}(o,o) + \frac{x^2y}{2}\varphi''_{\prime}(p,q)$$
$$+ \frac{y^2}{2}\varphi_{\prime\prime}(o,o) + \frac{xy^2}{2}\varphi'_{\prime\prime}(p,q)$$
$$+ \frac{y^3}{2.3}\varphi_{\prime\prime\prime}(p,q)$$

e così di seguito.

La quantità p è $> o$, $< x$, e la $q > o$, $< y$.

Dunque „ allorquando nello sviluppo in serie di una funzione secondo le potenze ed i prodotti di certe quantità x, y, „ vogliamo fermarci ai termini di un dato ordine, nei quali cioè „ queste quantità formano delle dimensioni eguali al medesimo

„ ordine, potremo supporre il resto dello sviluppo eguale ai so-
„ li termini dell' ordine seguente, ponendo in essi p e q in-
„ vece di quelle quantità x, y poste sotto i segni delle funzio-
„ ni. Ciascuna delle quantità p e q è > 0, e $<$ della quantità
„ che essa è destinata a rimpiazzare „.

Crediamo inutile estendere queste Teorie alle funzioni di un maggior numero di variabili, poichè quanto abbiam detto basta per dirigere i nostri Lettori in simili ricerche.

§. 38. Molte volte il Calcolo Differenziale si adopera unitamente al metodo dei coefficienti indeterminati, onde rendere più facile lo sviluppo delle funzioni in serie.

Per sviluppare in serie, ordinata secondo le potenze di x crescenti ed intiere, la funzione

$\frac{(a+bx+cx^2+ex^3+\text{ec.})^m}{(a'+b'x+c'x^2+e'x^3+\text{ec.})^n}$, supponiamola eguale ad $A+Bx+Cx^2+Ex^3+\text{ec.}$, e differenziando dopo averne presi i logaritmi, s' avrà

$$\frac{m(b+2cx+3ex^2+\text{ec.})}{a+bx+cx^2+ex^3+\text{ec.}}-\frac{n(b'+2c'x+3e'x^2+\text{ec.})}{a'+b'x+c'x^2+e'x^3+\text{ec.}}= \dots\dots\dots \frac{B+2Cx+3Ex^2+\text{ec.}}{A+Bx+Cx^2+Ex^3+\text{ec.}}.$$

Tolti ora da questa ultima equazione i denominatori, eseguite le moltiplicazioni corrispondenti, ed eguagliati in seguito fra loro i coefficienti delle simili potenze della variabile x, secondo il metodo *dei Coefficienti Indeterminati*, avremo per determinare A, B, C ec. queste equazioni

$$A=\frac{a^m}{a'^n},$$

$$\left.\begin{array}{l} aa'B+nab'A \\ \quad -ma'bA \end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{r} 2aa'C+(n+1)ab'B+\quad 2nac'A \\ -(m-1)a'bB+(n-m)bb'A \\ -\quad 2ma'cA \end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{r} 3aa'E+(n+2)ab'C+\quad(2n+1)ac'B+\quad 3nae'A \\ -(m-2)a'bC+(n-m+1)bb'B+(2n-m)bc'A \\ -\quad(2m-1)a'cB+(n-2m)b'cA \\ -\quad 3ma'eA \end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{r} 4aa'F+(n+3)ab'E+\quad(2n+2)ac'C+\quad(3n+1)ae'B+\quad 4naf'A \\ -(m-3)a'bE+(n-m+2)bb'C+(2n-m+1)bc'B+(3n-m)be'A \\ -\quad(2m-2)a'cC+(n-2m+1)b'cB+(2n-2m)cc'A \\ -\quad(3m-1)a'eB+(n-3m)b'eA \\ -\quad 4ma'fA \end{array}\right\}=0,$$

ec.

La legge che regna in queste equazioni, è più facile a vedersi che a descriversi. I coefficienti discendendo diminuiscono della differenza $m+n$, ed andando orizzontalmente, aumentano continuamente della differenza $n-1$.

Nella stessa maniera si potrebbero sviluppare in serie secondo le potenze intiere e crescenti di x le quantità trascendenti polinomie

$l(a+bx+cx^2+ex^3+\text{ec.})$, $e^{a+bx+cx^2+ex^3+\text{ec.}}$,

$sen(a+bx+cx^2+ex^3+\text{ec.})$, $cos(a+bx+cx^2+ex^3+\text{ec.})$:

anzi per queste due ultime è utile passare alle seconde differenziazioni, come noi vedremo in alcuni esempi che seguono.

Vogliasi sviluppare in serie la funzione

$$\{x+\sqrt{(1+x^2)}\}^n.$$

Supponendo questa quantità eguale alla serie

$1+nx+Ax^2+Bx^3+\text{ec.}$, (s' intende facilmente perchè i due primi coefficienti debbono essere 1 ed n) prendendone i logaritmi,

$$n\,log(x+\sqrt{(1+x^2)})=l(1+nx+Ax^2+Bx^3+Cx^4+\text{ec.}),$$

e differenziando (io indico per y quella serie indeterminata), avremo

$\frac{ndx}{\sqrt{(1+x^2)}} = \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)dx$, e quindi $(1+x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - n^2y^2 = 0$.

Differenziando ora quest' ultima equazione, s' avrà

$(1+x^2)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + x\left(\frac{dy}{dx}\right) - n^2y = 0$, nella quale ponendo il valore di y, di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, e di $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, e riducendo, si ha

$$\left.\begin{matrix}+2A\\-n^2\end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix}2\cdot3B\\+n\\-n^3\end{matrix}\right\}x + \left.\begin{matrix}3\cdot4C\\+2A\\+2A\\-n^2A\end{matrix}\right\}x^2 + \left.\begin{matrix}4\cdot5D\\+2\cdot3B\\+3B\\-n^2B\end{matrix}\right\}x^3 + \text{ec.} = 0.$$

d' onde si ricava $A = \frac{n^2}{2}$, $B = \frac{n(n^2-1)}{2\cdot3}$, $C = \frac{A(n^2-4)}{3\cdot4}$, $D = \frac{B(n^2-9)}{4\cdot5}$, $E = \frac{C(n^2-16)}{5\cdot6}$ ec., ovvero $A = \frac{n^2}{2}$, $B = \frac{n}{2}\cdot\frac{n^2-1}{3}$, $C = \frac{n^2}{2}\cdot\frac{n^2-4}{3\cdot4}$, $D = \frac{n}{2}\cdot\frac{n^2-1}{3\cdot4}\cdot\frac{n^2-9}{4\cdot5}$ ec.,

sarà dunque

$$(x+\sqrt{(1+x^2)})^n = 1 + nx + \frac{n^2}{2}x^2 + \frac{n}{2}\cdot\frac{n^2-1}{3}x^3 + \frac{n^2}{2}\cdot\frac{n^2-4}{3\cdot4}x^4 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{2\cdot3\cdot4\cdot5}x^5 + \text{ec.}$$

Per avere lo sviluppo in serie di $(-x+\sqrt{(1+x^2)})^n$ basta far negativa la x nella serie ottenuta, e se noi indichiamo per z la quantità $(-x+\sqrt{(1+x^2)})^n$, è facile vedere, che avremo

$$\frac{z+y}{2} = 1 + \frac{n^2}{1.2}x^2 + \frac{n^2(n^2-4)}{1.2.3.4}x^4 + \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{1.2.3.4.5.6}x^6 + \text{ec.}$$

$$\frac{y-z}{2} = nx + \frac{n(n^2-1)}{1.2.3}x^3 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{1.2.3.4.5}x^5 + \dots\dots \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{1.2.3.4.5.6.7}x^7 + \text{ec.}$$

Ora facciamo $x = \sqrt{(-1)}.sen\,\varphi$, sarà $\sqrt{(1+x^2)} = \cos\varphi$, ed in conseguenza $y = (\cos\varphi + \sqrt{(-1)}\,sen\,\varphi)^n = \cos n\varphi + \sqrt{(-1)}.sen\,n\varphi$, $z = (\cos\varphi - \sqrt{(-1)}.sen\,\varphi)^n = \cos n\varphi - \sqrt{(-1)}.sen\,n\varphi$: avremo pertanto

$$\cos n\varphi = 1 - \frac{n^2}{1.2}sen\,\varphi^2 + \frac{n^2(n^2-4)}{1.2.3.4}sen\,\varphi^4 - \dots\dots \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{1.2.3.4.5.6}sen\,\varphi^6 + \text{ec.}$$

$$sen\,n\varphi = n\,sen\,\varphi - \frac{n(n^2-1)}{1.2.3}sen\,\varphi^3 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{1.2.3.4.5}sen\,\varphi^5 - \text{ec.}$$

Serie che appartengono alla moltiplicazione degli angoli: la prima termina quando n è pari, la seconda, quando è impari: esse adunque non possono servire per la sezione degli angoli che in questi casi; prendendone però i differenziali, potremo da queste formule dedurne delle altre che terminino appunto quando quelle divengono infinite: differenziando in fatti, si ha

$$sen\,n\varphi = \cos\varphi.\left(n\,sen\,\varphi - \frac{n(n^2-4)}{2.3}sen\,\varphi^3 + \frac{n(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5}\times sen\,\varphi^5 + \text{ec.}\right)$$

$$\cos n\varphi = \cos\varphi.\left(1 - \frac{n^2-1}{2}sen\,\varphi^2 + \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4}sen\,\varphi^4 + \text{ec.}\right).$$

Queste quattro formule sono vere qualunque valore si dia ad n.

Per un altro esempio, si voglia sviluppare il $\cos x$ per le potenze dell' arco x: sia

$$\cos x = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Hx^6 + \text{ec.}$$

e differenziando due volte, avremo

$$-sen\,x = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + 6Hx^5 + \text{ec.}$$

$$-\cos x = 2B + 2.3Cx + 3.4Ex^2 + 4.5Fx^3 + 5.6Hx^4 + \text{ec.}$$

e perciò

$$\{1+2B\} + \{A+2.3C\}x + \{B+3.4E\}x^2 + \{C + 4.5F\}x^3 + \{E+5.6H\}x^4 + \text{ec.} = 0$$

Ora dall' equazione $-sen\,x = A + 2Bx +$ ec., face $x = 0$, si ricava $A = 0$, e perciò

$\mathrm{A} = 0$, $\mathrm{B} = -\frac{1}{2}$, $\mathrm{C} = 0$, $\mathrm{E} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}$, $\mathrm{F} = 0$, $\mathrm{H} = -\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$ ec., dunque

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} -$ ec., come sappiamo d' altr' onde.

Chi vuole un maggior numero d'esempi, consulti il Cap. VIII. Parte II. del Calcolo Differenziale dell' Eulero.

§. 39. Negli sviluppi in serie di cui abbiamo parlato superiormente, gli esponenti della variabile secondo la quale progrediva la serie, erano formati dai numeri naturali 0, 1, 2, 3 ec., presi positivamente: ora possono esserci, anzi ci sono di fatto delle funzioni, il cui svolgimento in serie non può di natura sua seguire quella legge; cosa dunque in questo caso ci daranno le formule (1), (2) del Num. 35., allorchè le applicheremo a svolgere quelle funzioni?

La risposta a questa questione sarà facile dopo l'esame sopra i principj del Calcolo Differenziale che ora faremo.

La legge di derivazione (1) che dà origine a questo calcolo, è appoggiata allo sviluppo di una funzione qualunque $\varphi(x+\omega)$ in serie secondo le potenze intiere ascendenti di ω; ed è in conseguenza manifesto che se vi saranno dei casi nei quali questo sviluppo non potrà aver luogo, in questi casi medesimi non potrà aver luogo al Calcolo Differenziale; felicemente tali casi non sono che particolari, ed in conseguenza non attaccano la generalità del medesimo calcolo; imperocchè noi dimostreremo che una funzione qualunque $\varphi(x+\omega)$ è sviluppabile secondo le potenze intiere ed ascendenti di ω, senza mai contenere nè potenze fratte, nè potenze negative, nè la stessa ω sotto un aspetto trascendente, comunque d' altr' onde possano trovarsi delle quantità radicali, dei denominatori e delle trascendenti in $\varphi(x)$, finchè però x rimane indeterminata, e ricevendo la x dei valori particolari, solo per certe determinate forme di $\varphi(x)$ un tale sviluppo non può aver luogo.

Se X rappresenta un polinomio intiero in x come $a+bx+cx^2+$ ec., è chiaro che i termini come X^m (essendo m un numero intiero e positivo) i quali possono essere contenuti in $\varphi(x)$, quando vi si pone $x+\omega$ invece di x, saranno tutti sviluppabili secondo le potenze intiere di ω, e che questo sviluppo sus-

sisterà ancora per tutti i valori particolari che potranno darsi ad x. La cognizione del Binomio di Neuton ci conduce a questo risultato.

Se si suppone che $\varphi(x)$ contenga alcuni termini, come $\sqrt[m]{(\mathrm{X}^n)}$, essendo m ed n numeri intieri e positivi, questi termini, quando x vi diviene $x+\omega$, saranno sviluppabili secondo le potenze intiere di ω: infatti per questa sostituzione X diventerà $\mathrm{X}+\mathrm{X}'\omega+\mathrm{X}''\omega^2+\mathrm{X}'''\omega^3+$ ec., e perciò $\sqrt[m]{(\mathrm{X}^n)}$ si cangerà in

$$\sqrt[m]{(\mathrm{X}+\mathrm{X}'\omega+\mathrm{X}''\omega^2+\mathrm{X}'''\omega^3+\text{ec.})^n} =$$

$$\sqrt[m]{(\mathrm{X}^n)} + \frac{n}{m}(\mathrm{X}'\omega+\mathrm{X}''\omega^2+\text{ec.}) \cdot \sqrt[m]{(\mathrm{X}^{n-m})} + \frac{n}{m} \cdot \frac{n-m}{2m}(\mathrm{X}'\omega+\mathrm{X}''\omega^2+\text{ec.})^2 \cdot \sqrt[m]{(\mathrm{X}^{n-2m})} + \text{ec.},$$

ed è facile vedere che il secondo membro di questa equazione è sviluppabile secondo le potenze intiere e positive di ω: questo sviluppo però ha luogo finchè x rimane indeterminato, o finchè determinandosi prende tutti i valori possibili, eccettuati quelli che rendono nulla la quantità sotto il radicale, o che sono radici dell' equazione $\mathrm{X}=0$; in quest' ultimo caso non può sussistere un tale sviluppo, poichè facendo $x=a$, e supponendo che questo valore sia uno di quei che rendono nulla la quantità X, i diversi termini dello sviluppo, superiormente ottenuto, essendo moltiplicati per $\sqrt[m]{\mathrm{X}^n}$, $\sqrt[m]{\mathrm{X}^{n-m}}$, $\sqrt[m]{\mathrm{X}^{n-2m}}$, divengono o nulli o infiniti, e non si ha cosa alcuna di determinato: effettivamente la cosa deve essere così, poichè lo sviluppo di $\sqrt[m]{\mathrm{X}^n}$, quando x diviene $x+\omega$, ed $x=a$, deve allora di sua natura contenere delle potenze frazionarie di ω, e non può procedere secondo le potenze intiere e positive di esso; infatti

$\sqrt[m]{(\mathrm{X}+\mathrm{X}'\omega+\mathrm{X}''\omega^2+\text{ec.})^n}$ diviene (perchè $\mathrm{X}=0$)

$\sqrt[m]{(\mathrm{X}'\omega+\mathrm{X}''\omega^2+\text{ec.})^n} = \omega^{\frac{n}{m}}\sqrt[m]{(\mathrm{X}'+\mathrm{X}''\omega+\text{ec.})^n}$, e compariscono necessariamente le potenze frazionarie di ω.

Supponghiamo che $\varphi(x)$ contenesse dei termini come X^{-m}; se in questi facciamo $x+\omega$ invece di x, avremo

$(X + X'\omega + X''\omega^2 + \text{ec.})^{-m} = X^{-m} - mX^{-m-1}(X'\omega + X''\omega^2 + \text{ec.}) + \frac{m(m+1)}{2} X^{-m-2}(X'\omega + X''\omega^2 + \text{ec.})^2 + \text{ec.}$, ed il secondo membro di questa equazione è sempre sviluppabile secondo le potenze intiere e positive di ω.

Questo sviluppo però egualmente che il precedente non è legittimo per quel valore particolare di x che rende X nullo: tutti i di lui termini allora divengono infiniti.

Ciò succede perchè in questo caso debbono necessariamente aversi nello sviluppo le potenze negative di ω, e non può essere legittimo quello sviluppo che non contiene le positive.

Infatti quando $x = a$ rende X nullo, si ha

$$(X + X'\omega + X''\omega^2 + \text{ec.})^{-m} = (X'\omega + X''\omega^2 + X'''\omega^3 + \text{ec.})^{-m} =$$
$$(X' + X''\omega + X'''\omega^2 + \text{ec.})^{-m} . \omega^{-m},$$ e compariscono necessariamente le potenze negative di ω.

Supponiamo infine che $\varphi(x)$ contenga la trascendente logaritmica lX; questa quando x vi diviene $x + \omega$, si cangia in

$$l(X + X'\omega + X''\omega^2 + \text{ec.}) = lX + l\left(1 + \frac{X'\omega}{X} + \frac{X''\omega^2}{X} + \text{ec.}\right) =$$
$$lX + \frac{X'\omega + X''\omega^2 + \text{ec.}}{X} + \frac{(X'\omega + X''\omega^2 + \text{ec.})^2}{2X^2} + \text{ec.}$$

E si vede chiaramente che i termini come lX, quando x vi diviene $x + \omega$, sono sviluppabili secondo le potenze intiere ed ascendenti di ω: un tale sviluppo però ha luogo per qualunque valore di x, eccettuato quello che rende nulla la quantità X sotto il logaritmo, ed allora i termini della formula superiore divengono tutti infiniti.

Questo succede perchè lo sviluppo deve in quel caso contener necessariamente ω sotto la trascendente logaritmica, e per conseguenza non può essere giusta la formula, nella quale ω è solo elevato a potenze intiere ed ascendenti.

Che ω, nel caso di X nullo per $x = a$, debba necessariamente nello sviluppo comparire sotto la trascendente logaritmica, si dimostra facilmente: infatti si ha

$l(X + X'\omega + X''\omega^2 + \text{ec.}) = l(X'\omega + X''\omega^2 + \text{ec.}) = l(X' + X''\omega + \text{ec.}) + l\omega$, quando $x = a$; e questo sviluppo contiene la trascendente $l\omega$.

Siccome le trascendenti circolari sen X, cos X si sviluppano in serie ordinate per le potenze intiere e crescenti dell' arco X, così lo sviluppo dei termini ove queste si trovano, ordinato secondo le potenze intiere e crescenti di ω, avrà luogo per tutti i valori possibili di x niuno eccettuato.

Se poi $\varphi(x)$ contenesse dei termini come X^U essendo X, U due polinomj interi in x, siccome questa trascendente X^U si svolge in serie ordinata secondo le potenze di lX, così questo caso rientra in quello della trascendente logaritmica, e perciò lo sviluppo di $\varphi(x)$, allorchè x diviene $x + \omega$, ha luogo finchè x rimane indeterminato, o finchè prende tutti i valori possibili eccettuati quei che rendono $X = 0$ nella trascendente X^U.

Quanto abbiam detto fin ora ci dà questo Teorema „ Una „ funzione qualunque $\varphi(x + \omega)$ è sempre sviluppabile secondo „ le potenze intiere e positive di ω, nè può contenere mai ω „ con esponenti negativi, nè inviluppato in quantità trascenden„ ti, comunque $\varphi(x)$ contenga dei trascendenti, finchè x ri„ mane indeterminato; ed x ricevendo dei valori particolari, lo „ sviluppo, di cui si parla, ha luogo per tutti i valori di x, „ meno quelli 1°. che rendono nullo un radicale, mandando a „ zero la quantità che è sotto il segno; 2°. quelli che rendono „ nullo il denominatore d' alcuna frazione: 3°. quelli che ren„ dono nulla una quantità logaritmica, facendo svanire la quan„ tità che è sotto il segno; 4°. finalmente quelli che annullano „ una funzione di x elevata ad una potenza espressa da un' al„ tra funzione di x, come per esempio X^U. In questi diversi „ casi particolari debbono comparire nello sviluppo le potenze „ frazionarie, le negative, ed i trascendenti dell' indetermina„ ta ω „.

§. 40. Da quanto abbiamo detto al §. antecedente risulta che di una funzione qualunque $\varphi(x)$ possono aversi i differenziali $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)dx$, $\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)dx^2$ ec., finchè x rimane indeterminato, o finchè non essendo indeterminato ha dei valori particolari che non annullano denominatori, radicali, e quantità trascendenti logaritmiche ed esponenziali.

In questi ultimi casi non avendo luogo lo sviluppo in serie ordinata per le potenze intiere e positive di ω della funzione $\varphi(x+\omega)$, non può eseguirsi l'operazione di derivazione che dà i differenziali (a). Egualmente la formula del Teorema di Tajlor,

$$(1) \ldots\ldots \varphi(x+\omega)=\varphi(x)+\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\omega+\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)\frac{\omega^2}{2}+\text{ec.}$$

non potrà essere legittima per quei valori di x per i quali si è dimostrato sopra non potere aver luogo lo sviluppo; e l'altra formula che da quella dipende

$$(2) \ldots\ldots \varphi(x)=\varphi(o)+\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\omega+\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)\frac{\omega^2}{2}+\text{ec.}$$

non potrà egualmente essere legittima, quando $x=o$ farà svanire in $\varphi(x)$ un radicale, o un denominatore, o una quantità trascendente logaritmica, rendendo nulle le quantità sotto il segno radicale e logaritmico.

Ciò premesso è facile di rispondere alla questione propostaci al principio del §. antecedente, di sapere, cioè „ cosa „ danno le serie (1), (2) del Num. 35. in quei casi, nei qua- „ li non ha luogo lo sviluppo ordinato per le potenze intiere e „ positive di ω „.

I coefficienti dell' ω nella serie (1) sono i differenziali successivi della funzione $\varphi(x)$; così se questa funzione contiene dei termini come $\sqrt[m]{X^n}$, $\frac{1}{X^n}$, $log X$, X^U essendo X un polinomio

(a) Non si ponno avere i differenziali di quelle funzioni che Eulero chiama inesplicabili come per esempio $1.2.3.4.\ldots\ldots x$, ma ciò è per un altro motivo. In questa sorta di funzioni la variabile x non può ricevere tutti gli aumenti possibili, poichè la di lei variabilità è assoggettata ad una legge stabilita dalla natura della funzione inesplicabile: così nel nostro caso x non può crescere che dell'unità: queste funzioni adunque (§. 1) restano escluse da quelle che si considerano nel Calcolo Differenziale.

intiero in x, i coefficienti suddetti conterranno i differenziali di quelle espressioni; e perciò il polinomio X, in virtù del termine $\sqrt[m]{X^n}$, si troverà in alcuni coefficienti come numeratore, ed in seguito come denominatore, ed in virtù degli altri termini si troverà o sotto il segno logaritmico, o come denominatore: dunque questi coefficienti per quei valori particolari di x che rendono $X=o$, conterranno le espressioni $\frac{1}{o}$, lo; saranno dunque indeterminati e non significheranno cosa alcuna, o nella ordinaria maniera d'esprimersi, saranno infiniti.

Ora in questi casi appunto abbiam dimostrato nel §. antecedente che lo sviluppo non poteva aver luogo; dunque si concluderà che volendo sviluppare in una serie ordinata per le potenze intiere e positive di ω la funzione $\varphi(x+\omega)$ per il caso di $x=a$, prendendo la formula

$$\varphi(x+\omega)=\varphi(x)+\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\omega+\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)\frac{\omega^2}{2}+\text{ec.}$$

faremo $x=a$ nei coefficienti $\varphi(x)$, $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)$ ec., e se per questa sostituzione essi conterranno le espressioni $\frac{1}{o}$, lo, saremo allora assicurati che in questo caso lo sviluppo non può di natura sua aver luogo.

Possono alcuni dei coefficienti incominciare dal divenir nulli, ed in seguito gli altri divenire infiniti, ed al momento che compariscono le espressioni $\frac{1}{o}$, lo, siamo assicurati che lo sviluppo non può aver luogo.

Nè dobbiamo temere che vadano a zero tutti i coefficienti in infinito, poichè allora si avrebbe

$$\varphi(x+\omega)=o+\omega o+\frac{\omega^2}{2}o+\text{ec.}=o$$ per qualunque valore di ω, ciò che è assurdo.

Egualmente volendo sviluppare in serie ordinata per le potenze intiere e crescenti di x, la funzione $\varphi(x)$, prendendo la formula

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)x + \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)\frac{x^2}{2} + \text{ec.}$$

faremo $x = 0$ in $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)$ ec., a differenziazioni eseguite; e se questa sostituzione porterà l' espressioni $\frac{1}{0}$, $l0$, saremo assicurati che $\varphi(x)$ non può svilupparsi secondo le potenze intiere e positive di x.

Così vediamo che possono sempre, per mezzo delle formule superiori, svilupparsi in serie secondo le potenze intiere e crescenti della variabile, quelle funzioni, le quali di natura loro sono suscettibili di questo sviluppo; mentre le medesime formule coll' avere o tutti i termini infiniti, o con averne in principio alcuni eguali a zero, ed il restante infiniti, ci avvisano quali sono i casi, nei quali lo stesso sviluppo non può aver luogo.

§. 41. Per far qualche esempio, si dimandino i differenziali di $xl(1+x)$? secondo le regole della differenziazione avremo, chiamando φ quella funzione,

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)dx = \left(l(1+x) + \frac{x}{1+x}\right)dx$$

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)dx^2 = \left(\frac{2}{1+x} - \frac{x}{(1+x)^2}\right)dx^2$$

ec. ec.

Finchè x rimane indeterminato, questi differenziali sono quantità reali e determinate, e sono anche tali per tutti i valori possibili di x, eccettuati quelli che rendono $1+x=0$, ovvero $x=-1$: in questo caso i differenziali contengono le espressioni $l0$, $\frac{1}{0}$, dal che siamo assicurati, che non possono aversi i differenziali della funzione $xl(1+x)$ nel caso di $x=-1$.

Si voglia ora il differenziale di $\varphi = 2ax - x^2 + a\sqrt{(a^2-x^2)}$ per il caso di $x=a$? differenziando questa funzione, abbiamo

$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)dx = 2adx - 2xdx - \frac{axdx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, e facendovi $x=a$, si

trova $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)dx = \frac{a^2dx}{0}$, dunque non si può avere il differenziale di questa funzione per il caso di $x=a$.

Quale è lo sviluppo di $(x+\omega-a)^{\frac{3}{2}} + a\sqrt{a}$ in serie ordinata secondo le potenze intiere e crescenti di ω, per il caso di $x=a$?

Facendo $\varphi(x) = (x-a)^{\frac{3}{2}} + a\sqrt{a}$, avremo per il Teorema di Tajlor

$$\varphi(x+\omega) = (x-a)^{\frac{3}{2}} + a\sqrt{a} + \frac{3}{2}\sqrt{(x-a)}\,.\,\omega + \frac{3}{4\sqrt{(x-a)}}\,.\,\frac{\omega^2}{2} + \frac{-3}{8(x-a)\sqrt{(x-a)}}\,.\,\frac{\omega^3}{2\,.\,3} + \frac{9}{16(x-a)^2\sqrt{(x-a)}}\,.\,\frac{\omega^4}{2\,.\,3\,.\,4} + \text{ec.}$$

dalla quale, facendo $x=a$, si ricava

$$\varphi(x+\omega) = 0 + a\sqrt{a} + 0 + \frac{1}{0} + \frac{1}{0} + \text{ec.}:$$

il dimandato sviluppo adunque non può in questo caso aver luogo.

Quale è lo sviluppo di $\varphi = x^2 - \frac{1}{lx}$ secondo le potenze intiere e positive di x?

La formula che ci dà in generale gli sviluppi in serie di una funzione $\varphi(x)$ per le potenze della x, è

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\omega + \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)\,.\,\frac{\omega^2}{2} + \text{ec.}$$

facendovi dopo le differenziazioni $x=0$.

Ora nel nostro caso si ha

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = 2x + \frac{1}{x(lx)^2}$$

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) = 2 + \frac{-1}{x^2(lx)^2} - 2\frac{1}{x^2(lx)^3}$$

ec. ec.

e facendo $x=0$, si trova

$\varphi(0) = \frac{1}{l0}$, $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = \frac{1}{0\,.\,(l0)^2}$, $\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) = -\frac{1}{0^2\,.\,(l0)^4} - \frac{2}{0\,.\,(l0)^3}$, ec. I coefficienti adunque della serie saranno tutti infiniti, e perciò il richiesto sviluppo è impossibile.

Per ultimo esempio si vogliano i differenziali di $y = \frac{1}{l(1+x)}$ quando $x = -1$.

Questi differenziali per x indeterminato sono

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = -\frac{dx}{(1+x)\,l(1+x)^2};\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) dx^2 = \frac{dx^2}{(1+x)^2\,l(1+x)^2} + \ldots$$
$$\frac{2dx^2}{(1+x)^2\,l(1+x)^3};\ \text{ec.}$$

nei quali facendo $x = -1$, comparisce la quantità $l0$: siamo adunque assicurati che non esistono in natura i differenziali della quantità $\frac{1}{l(1+x)}$ per il caso di $x = -1$, poichè in questo caso essa non è suscettibile d' essere sviluppata in serie ordinata secondo le potenze intiere e crescenti di ω.

II. *Determinazione del valore delle frazioni, nelle quali il numeratore, ed il denominatore divengono nulli nello stesso tempo.*

§. 42. **V**I sono alcune frazioni le quali prendono un aspetto vago ed indeterminato, come $\frac{0}{0}$, quando si dà un certo valore alle variabili che esse contengono, mentre d' altr' onde hanno in questi medesimi casi un valore determinato: per esempio $\frac{a^2 - x^2}{a - x}$ quando si fa $x = a$ diviene $\frac{0}{0}$, mentre essendo $\frac{a^2 - x^2}{a - x} = \frac{(a+x)(a-x)}{a-x} = a + x$, si ha $\frac{a^2 - x^2}{a - x} = a + a = 2a$ per il caso di $x = a$.

Per trovare i valori di tali funzioni ci è di non piccola risorsa il Calcolo Differenziale: infatti rappresentiamo per $\frac{P}{Q}$ una frazione nella quale P e Q siano delle funzioni intiere qualunque in x (quando non fossero tali, si può sempre ridurre la frazione ad avere il numeratore ed il denominatore formati da due funzioni intiere) le quali divengano nulle per un certo valore di x. Sia questo valore $x = a$, ed abbiasi perciò $P = 0$, $Q = 0$, e quindi $\frac{P}{Q} = \frac{0}{0}$: ecco come potremo trovare allora il vero valore della frazione.

Poniamo $y = \frac{P}{Q}$, ed avremo $Qy = P$: questa equazione differenziata ci dà $y\left(\frac{dQ}{dx}\right) dx + Q\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = \left(\frac{dP}{dx}\right) dx$, ovvero $y\left(\frac{dQ}{dx}\right) + Q\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{dP}{dx}\right)$, la quale sussiste insieme (§. 20) con $Qy = P$, e dalla quale può egualmente ricavarsi il valore di y. Se ora in quest' ultima equazione facciamo $x = a$, avremo $y\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \left(\frac{dP}{dx}\right)$, e quindi $y = \left(\frac{dP}{dx}\right) : \left(\frac{dQ}{dx}\right)$: questa espressione sarà il ricercato valore di $\frac{P}{Q}$, quando $x = a$.

Nell' addotto esempio si ha $P = a^2 - x^2$, $Q = a - x$, e quindi $\left(\frac{dP}{dx}\right) = \frac{d(a^2 - x^2)}{dx} = -2x$, $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \frac{d(a-x)}{dx} = -1$; dunque $y = \frac{-2x}{-1} = 2a$, facendo $x = a$.

Se il valore di $x = a$ renderà la frazione $\left(\frac{dP}{dx}\right) : \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ eguale a $\frac{0}{0}$, converrà allora trattare questa frazione come abbiamo trattato $\frac{P}{Q}$ ed avremo,
$y = \left(\frac{d^2P}{dx^2}\right) : \left(\frac{d^2Q}{dx^2}\right)$; egualmente se quel valore annullasse ancora questa ultima frazione, si troverebbe $y = \left(\frac{d^3P}{dx^3}\right) : \left(\frac{d^3Q}{dx^3}\right)$; ed in generale il valore y di una frazione $\frac{P}{Q}$ che si riduce a $\frac{0}{0}$ quando $x = a$, sarà $y = \left(\frac{d^nP}{dx^n}\right) : \left(\frac{d^nQ}{dx^n}\right)$ essendo n l' ordine di quei differenziali che cominciano a non annullarsi per quello stesso valore.

Nè dobbiamo temere che i differenziali tutti di qualunque ordine siano, si annullino per il caso di $x = a$, poichè ne seguirebbe per P e per Q l' assurdo di cui abbiam parlato al §. 40; e quì osservo che hanno sbagliato i Commentatori del Calcolo Differenziale d' Euler, i quali lo accusano di non avere egli posto mente al caso in cui una frazione $\frac{P}{Q}$ è sempre $= \frac{o}{o}$ qualunque sia l' ordine dei differenziali di P e di Q che si prendano per averne il determinato valore. La soluzione delle loro difficoltà dipende da quanto si è detto al §. antecedente.

Può accadere che prendendo successivamente i differenziali $\left(\frac{d^nP}{dx^n}\right)$, $\left(\frac{d^nQ}{dx^n}\right)$ del numeratore e del denominatore, uno cessi di essere nullo, mentre l' altro continua ad annullarsi per il caso di $x = a$: allora la frazione è essa medesima nulla o infinita: è nulla, se cessando d' annientarsi il denominatore $\left(\frac{d^nQ}{dx^n}\right)$ sarà sempre $\left(\frac{d^nP}{dx^n}\right) = o$, ed è infinita nel caso opposto.

§. 43. Facciamone alcuni esempj

I. Quale è il valore della frazione

$$\frac{x^3 - 4ax^2 + 7a^2x - 2a^3 - 2a^2\sqrt{(2ax - aa)}}{xx - 2ax - aa + 2a\sqrt{(2ax - xx)}}$$

quando $x = a$?

In questo caso la frazione diventa $\frac{o}{o}$: prendendo adunque i differenziali del numeratore e del denominatore, avremo

$$\frac{3xx - 8ax + 7a^2 - 2a^3 : \sqrt{(2ax - aa)}}{2x - 2a + 2a(a - x) : \sqrt{(2ax - xx)}},$$

che diviene parimente $\frac{o}{o}$ quando $x = a$. Differenziando di nuovo s' otterrà

$$\frac{6x - 8a + 2a^4 : (2ax - aa)^{\frac{3}{2}}}{2 - 2a^3 : (2ax - xx)^{\frac{3}{2}}},$$

espressione che ci obbliga ad una terza differenziazione, dalla quale si ha

$$\frac{6 - 6a^5 : (2ax - aa)^{\frac{5}{2}}}{6a^3(a - x) : (2ax - xx)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1 - a^5 : (2ax - aa)^{\frac{5}{2}}}{a^3(a - x) : (2ax - xx)^{\frac{5}{2}}};$$

anche questa frazione si riduce a $\frac{o}{o}$; avremo adunque, differenziando,

$$\frac{5a^6 : (2ax - aa)^{\frac{7}{2}}}{-(5a^5 - 8a^4x + 4a^3xx) : (2ax - xx)^{\frac{7}{2}}},$$

che diviene $= \frac{5 : a}{-1 : a^2} = -\frac{5}{a}$ quando vi si fa $x = a$.

Il ricercato valore per tanto sarà $- 5 : a$.

II. La somma della serie $x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots\ldots + nx^n$ è $\frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}$, si dimanda il valore di questa somma quando $x = 1$?

Siccome in questo caso l' espressione della somma diviene $\frac{o}{o}$, così prenderemo i differenziali del numeratore e del denominatore, ed avremo

$\frac{1 - (n+1)^2x^n + n(n+2)x^{n+1}}{-2(1-x)}$; della qual frazione differenziando di nuovo il numeratore ed il denominatore, s' avrà

$\frac{-n(n+1)^2x^{n-1} + n(n+1)(n+2)x^n}{2}$, che quando $x = 1$ diviene $=$ $\frac{n(n+1)}{2}$: la somma adunque della serie

$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, come già si sa.

III. Quale è il valore della frazione $\frac{a^n - x^n}{la - lx}$ quando $x = a$?

Presi i differenziali, si ottiene subito la frazione $\frac{-nx^{n-1}}{-1 : x} =$ nx^n, la quale, facendo $x = a$, diviene na^n.

IV. Si cerca il valore della frazione $\frac{e^x - e^{-x}}{l(1+x)}$ quando $x = o$.

Presi i differenziali si ottiene questa frazione $\frac{e^x + e^{-x}}{1 : (1+x)}$ che quando vi si fa $x = o$, diviene $= 2$.

V. quale è il valore della frazione $\frac{1 - sen\,x + cos\,x}{sen\,x + cos\,x - 1}$ quando $x =$ $\frac{\pi}{2} = 90°$?

Presi i differenziali di quella frazione, si ottiene . . . . .
$\frac{-\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x - \operatorname{sen} x}$ che facendo $x = 90°$, diviene $= 1$.

Si potrebbe ottenere lo stesso risultato senza la differenziazione: infatti essendo
$\cos x = \sqrt{(1 + \operatorname{sen} x)} \cdot \sqrt{(1 - \operatorname{sen} x)}$ la frazione proposta si cangia in

$$\frac{\sqrt{(1 - \operatorname{sen} x)} + \sqrt{(1 + \operatorname{sen} x)}}{\sqrt{(1 + \operatorname{sen} x)} - \sqrt{(1 - \operatorname{sen} x)}} = 1$$

quando $x = 90°$.

VI. Sia proposta la frazione $\frac{lx}{\sqrt{(1-x)}}$ della quale se ne voglia il valore quando $x = 1$?

Presi i differenziali del numeratore e del denominatore s'avrà $\frac{1 : x}{-1 : 2\sqrt{(1-x)}} = \frac{-2\sqrt{(1-x)}}{x}$: ora facendo in quest' ultima frazione $x = 1$, il numeratore diviene zero, ed il denominatore $= 1$, dunque tutta la frazione è zero, e perciò la frazione $\frac{lx}{\sqrt{(1-x)}}$ si annulla per quel valore di x.

VII. Quale è il valore della frazione
$\frac{a^2 - x^2}{axla - axlx - xxla + xxlx}$ quando $x = a$?

Presi i differenziali del numeratore e del denominatore, si ha
$\frac{-2x}{ala - alx - a + 2xla - 2xlx + x}$,
della qual frazione il numeratore diviene $= -2a$, ed il denominatore $= 0$ quando $x = a$; dunque il ricercato valore sarà infinito.

§. 44. Se i termini della frazione $\frac{P}{Q}$ si annullano perchè $x = a$ fa svanire delle quantità che si trovano sotto segni radicali, allora il metodo delle successive differenziazioni del numeratore e del denominatore per trovare il vero valore di $\frac{P}{Q}$, non è sufficiente; infatti in quell' ipotesi i differenziali per esempio di P o sono tutti infiniti o sono in principio nulli, e

quindi infiniti, dal che (§. 42) siamo assicurati che non possono aversi i differenziali di P per il caso di $x = a$, nel che consiste il metodo sopra spiegato.

Non ostante si può in molti casi, allorquando l' espressione $\left(\frac{d^nP}{dx^n}\right) : \left(\frac{d^nQ}{dx^n}\right)$ diviene $\frac{\infty}{\infty}$ (perchè si annullano dei divisori in $\left(\frac{d^nP}{dx^n}\right)$ ed in $\left(\frac{d^nQ}{dx^n}\right)$) ottenere il vero valor ricercato, moltiplicando il numeratore ed il denominatore della frazione $\left(\frac{d^nP}{dx^n}\right) : \left(\frac{d^nQ}{dx^n}\right)$ per quei divisori, e riducendola così ad essere composta di funzioni intiere; giacchè dopo questa operazione o la frazione si ridurrà ad una quantità determinata, o diverrà di nuovo $\frac{0}{0}$, ed in quest' ultimo caso si ripeterà sopra di essa la differenziazione.

Per esempio: cerchiamo il valore di
$\frac{a + \sqrt{(2aa - 2ax)} - \sqrt{(2ax - xx)}}{a - x + \sqrt{(aa - xx)}}$ quando $x = a$.

Presi i differenziali del numeratore e del denominatore, si ottiene
$\frac{-a : \sqrt{(2aa - 2ax)} - (a - x) : \sqrt{(2ax - xx)}}{-1 - x : \sqrt{(aa - xx)}}$:
ora il numeratore ed il denominatore di questa frazione divengono infiniti quando $x = a$; dunque non possono ottenersi i differenziali dei due termini della frazione proposta nell' ipotesi di $x = a$.

Se però si moltiplicano i due termini dell' ottenuta frazione per $-\sqrt{(a - x)}$, e quindi si riduce, avremo
$\frac{a : \sqrt{2a} + (a - x)^{\frac{3}{2}} : \sqrt{(2ax - xx)}}{\sqrt{(a - x)} + x : \sqrt{(a + x)}}$, che fatto $x = a$, diviene $\frac{a : \sqrt{2a}}{a : \sqrt{2a}} = 1$:
così la frazione proposta è eguale all' unità quando $x = a$.

Per un altro esempio, si ricerchi il valore di
$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{(x - a)}}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ quando $x = a$.

Il metodo delle differenziazioni ci dà
$\frac{1 : 2\sqrt{x} + 1 : 2\sqrt{(x - a)}}{x : \sqrt{(x^2 - a^2)}}$, la quale diviene $\frac{\infty}{\infty}$ nell' ipotesi di $x = a$.

Per ottenere in questo caso il vero valore della frazione, si moltiplichi tanto il numeratore che il denominatore di quella che abbiamo ottenuta per $2\sqrt{(x-a)}$, ed avremo . . . . .

$$\frac{\frac{\sqrt{(x-a)}}{\sqrt{x}}+1}{\frac{2x}{\sqrt{(x+a)}}} = \frac{1}{\sqrt{(2a)}}.$$

Se la frazione $\frac{P}{Q}$, o l' espressione $\left(\frac{d^nP}{dx^n}\right):\left(\frac{d^nQ}{dx^n}\right)$ che ci dà il di lei valore, conterrà $log(0)$, allora noi siamo assicurati che in questo caso la natura dei termini della frazione $\frac{P}{Q}$ è tale che non possono aversi i di loro differenziali per il caso di $x=a$; e se per un' adattata riduzione non potremo eliminare da $\left(\frac{d^nP}{dx^n}\right):\left(\frac{d^nQ}{dx^n}\right)$ le quantità trascendenti, dalle quali dipende $log(0)$, converrà abbandonare il metodo delle successive differenziazioni, e ricercare il valore della frazione per altra strada.

Per esempio, si dimanda il valore della funzione

$\frac{1+x}{1:l(1+x)}$ quandò $x=-1$?

Siccome in questo caso il denominatore della funzione proposta contiene $log(0)$, così questo è tale che non se ne possono avere i differenziali nell' ipotesi di $x=-1$; e poichè le successive frazioni, le quali si ottengono differenziando il numeratore ed il denominatore della funzione proposta, contengono sempre la trascendente, così non si può adoprare il metodo sopra spiegato.

Per un altro esempio, si voglia il valore di

$\frac{l(a^2-2ax+x^2)}{l(a-x)}$, ovvero $\frac{1:l(a-x)}{1:l(a^2-2ax+x^2)}$ quando $x=a$?

Prendendo i differenziali, avremo

$\frac{1:(a-x)\,l^2(a-x)}{(2a-2x):(a^2-2ax+x^2)\,l^2(a^2-2ax+x^2)}$ che nel caso di $x=a$ contiene nel numeratore e nel denominatore la quantità $log\,0$; se

però si osserva che $l(a^2-2ax+x^2)=2l(a-x)$, e si moltiplica tutta quest' ultima frazione per $l^2(a-x)$, avremo

$\frac{1:(a-x)}{(2a-2x):(a^2-2ax+x^2).4}$, la quale si riduce a $\frac{0}{0}$ quando $x=a$.

Cercando ora il valore della stessa frazione in questa ipotesi, troveremo che il valore dimandato di $\frac{1:l(a-x)}{1:l(a^2-2ax+x^2)}$ è $=2$.

Quando poi non potrà adoprarsi il metodo che ci dà il Calcolo Differenziale, faremo uso del seguente.

Poniamo nella proposta frazione $x=a+\omega$ (essendo a quel valore che rende nulli o infiniti i numeratori ed i denominatori), e riduciamola in una serie ordinata per le potenze ascendenti di ω, ed il primo termine di questa serie, quello cioè in cui non si trova ω, sarà il ricercato valore della frazione nell' ipotesi di $x=a$:

così per esempio $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{(x-a)}}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$ diviene $\frac{0}{0}$ quando $x=a$, e i differenziali tutti primi, secondi, terzi ec., del numeratore e del denominatore divengono infiniti nella detta ipotesi: per questo ponendovi $a+\omega$ per x, s' avrà $\frac{\sqrt{(a+\omega)}-\sqrt{a}+\sqrt{\omega}}{\sqrt{\omega}.\sqrt{(2a+\omega)}}=$ . . . .

$\frac{\sqrt{\omega}+\frac{\omega}{2\sqrt{a}}+\text{ec.}}{\sqrt{\omega}.\left(\sqrt{2a}+\frac{\omega}{2\sqrt{2a}}+\text{ec.}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2a}}+\frac{\sqrt{\omega}}{2\sqrt{2a}}+$ ec., e da quest' ultima espressione facendo $\omega=0$, si ricava il ricercato valore della frazione $=\frac{1}{\sqrt{(2a)}}$.

§. 45. Data una equazione $z=0$ fra due variabili x, y, noi abbiamo dimostrato al §. (20), come può aversi il valore di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ espresso in x ed y. Rappresentiamo in generale questo valore per $\frac{P}{Q}$, di modo che sia $\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{P}{Q}$ essendo P e Q due funzioni in x ed y.

Se nell' equazione $z=0$ si fa $x=a$, avremo per y un valore determinato, e sia questo $y=b$. Sostituendo i due valori di x e di y in $\frac{P}{Q}$, s' avrà il valore di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ per questo caso particolare: ora se la sostituzione di $x=a$, $y=b$ in $\frac{P}{Q}$ rendesse questa funzione $=\frac{0}{0}$, come si potrà egli avere il valore di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$?

Io osservo primieramente che risolvendo l' equazione $z=0$ per avere il valore di y espresso per x, e sostituendo questo valore in $\frac{P}{Q}$, avremo $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ eguale ad una sola funzione di x che si ridurrà a $\frac{0}{0}$ quando $x=a$; questo caso rientrerà allora in quello del §. 42.

Ma potremo ancora ritrovare il valore di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ senza bisogno di ricorrere alla risoluzione dell' equazione $z=0$: infatti l' equazione $\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{P}{Q}$ ci dà $Q\left(\frac{dy}{dx}\right)=P$, che differenziata diviene

$$(a) \ldots\ldots \left(\frac{dQ}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)+\left(\frac{dQ}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+Q\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\left(\frac{dP}{dx}\right)+\left(\frac{dP}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right):$$

ora facendo in quest' ultima equazione $x=a$, $y=b$, avremo $Q=0$, e perciò

$$\left(\frac{dQ}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left\{\left(\frac{dQ}{dx}\right)-\left(\frac{dP}{dy}\right)\right\}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\left(\frac{dP}{dx}\right)$$

equazione di secondo grado, dalla risoluzione della quale dipenderà il valore di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Avremmo ottenuta la medesima equazione differenziando $Q\left(\frac{dy}{dx}\right)=P$ nella supposizione di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ costante.

Se gli stessi valori $x=a$, $y=b$ annulleranno ancora i coefficienti di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, come pure $\left(\frac{dP}{dx}\right)$, per il che si troverà anche $\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{0}{0}$, allora prenderemo il differenziale dell' equazione (a), nel quale facendo $x=a$, $y=b$, avremo per determinare $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ un' equazione del terzo grado di questa forma

$N\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+M\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+L\left(\frac{dy}{dx}\right)+T=0$, dalla cui risoluzione dipenderà il ricercato valore di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Anche questa equazione l' avremmo ottenuta col differenziare quella del secondo grado nella supposizione di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ costante.

Si vede come dovremmo fare se $y=b$, $x=a$ annullasse ancora i coefficienti di quest' ultima equazione, e così di seguito.

Per esempio essendo $\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{ay-2bx}{3y-ax}$, si cerca il di lui valore quando $x=y=0$. Differenziando $(3y-ax)\left(\frac{dy}{dx}\right)=ay-2bx$, si ha l' equazione

$$3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-a\left(\frac{dy}{dx}\right)+(3y-ax)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=a\left(\frac{dy}{dx}\right)-2b$$

dalla quale, facendo $x=y=0$, si ricava

$3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a\left(\frac{dy}{dx}\right)+2b=0$, e quindi

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{a\pm\sqrt{(a^2-6b)}}{3}.$$

III. *Della Somma delle Serie*.

§. 46. Conoscendo la somma S di una serie $A+B+C+D+$ ec., nella quale i termini sono funzione della variabile x, e procedono secondo una certa legge, si può dedurne per mezzo del Calcolo Differenziale un numero infinito di altre serie, le cui somme siano parimente conosciute.

Posta infatti l' equazione

$$(1) \ldots\ldots S=A+B+C+D+E+ \text{ec.}$$

prendiamone i differenziali primo, secondo, terzo ec., e facendone le divisioni per dx, dx^2, dx^3 ec., avremo

$$(2) \ldots\ldots \left(\frac{dS}{dx}\right) = \left(\frac{dA}{dx}\right) + \left(\frac{dB}{dx}\right) + \left(\frac{dC}{dx}\right) + \left(\frac{dD}{dx}\right) + \text{ec.}$$

$$(3) \ldots\ldots \left(\frac{d^2S}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2A}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2B}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2C}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2D}{dx^2}\right) + \text{ec.}$$

$$(4) \ldots\ldots \left(\frac{d^3S}{dx^3}\right) = \left(\frac{d^3A}{dx^3}\right) + \left(\frac{d^3B}{dx^3}\right) + \left(\frac{d^3C}{dx^3}\right) + \left(\frac{d^3D}{dx^3}\right) + \text{ec.}$$

ec. ec. ec.

Ora i secondi membri dell' equazioni (2), (3) ec. formano tante nuove serie, le cui somme espresse da $\left(\frac{dS}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2S}{dx^2}\right)$ ec., saranno conosciute da che è conosciuta la funzione S.

Anzi per mezzo delle suddette equazioni, moltiplicate, anche, se sia bisogno, per qualche funzione cognita di x avanti e dopo la differenziazione, e combinate fra di loro in quella maniera che ci piace, possiamo trovare moltissime altre serie, le di cui somme siano parimente conosciute.

Ma rendiamo tutto questo più chiaro per mezzo d' alcuni esempj.

I. Si sà che la somma della serie

$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots\ldots$ è $= \frac{1}{1-x}$:

se dunque prendiamo i successivi differenziali di quest' equazione, avremo

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \text{ec.}$$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \text{ec.}$$

$$\frac{1}{(1-x)^4} = 1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + \text{ec.}$$

ec. ec.

ed i secondi membri di queste equazioni sono serie, le cui somme sono espresse dai respettivi primi membri.

II. Si sa che la progressione geometrica

$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots\ldots + x^n$ ha per somma $\frac{x - x^{n+1}}{1-x}$:

dunque differenziando l' equazione

$\frac{x - x^{n+1}}{1-x} = x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots\ldots + x^n$ e dividendola per dx, avremo

$$-\frac{(n+1)x^n - nx^{n+1}}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots\ldots + nx^{n-1}.$$

Di quì si potranno ricavare le somme delle potenze dei numeri naturali: imperocchè moltiplicando quest' ultima equazione per x, differenziandola e dividendola per dx, avremo

$$\frac{1 + x - (n+1)^2 x^n + (2nn + 2n - 1)x^{n+1} - nnx^{n+2}}{(1-x)^3} = 1 + 4x + 9x^2 + \ldots\ldots + n^2x^{n-1}.$$

Quest' ultima equazione moltiplicata per x, differenziata e divisa per dx, ci darà la somma della serie

$1 + 8x + 27x^2 + 64x^3 + \ldots\ldots + n^3x^{n-1}$

e così di seguito.

Facendo ora $x = 1$ nelle equazioni sopra trovate, avremo espresse dai primi loro membri (il cui valore si trova con la regola del §. 43), le somme delle prime, delle seconde, delle terze potenze ec., dei numeri naturali $1, 2, 3, 4, \ldots\ldots n$.

§. 47. III. Supponiamo ora che si conosca la somma S di una serie qualunque di questa forma

$S = a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 + hx^5 + \text{ec.}$

e cerchiamo per mezzo degli artifizi sopra esposti la somma di un' altra serie qualunque, ma della forma

$Aa + Bbx + Ccx^2 + Eex^3 + Ffx^4 + Hhx^5 + \text{ec.}$,

nella quale A, B, C, E, F, H ec., compongano una serie che conduca alle differenze costanti (Tom. I. §. 6). Prendendo successivamente i differenziali di quell' equazione

$S = a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 + hx^5 +$ ec., avremo

$$\left(\frac{dS}{dx}\right) = b + 2cx + 3ex^2 + 4fx^3 + 5hx^4 + \text{ec.}$$

$$\left(\frac{d^2S}{dx^2}\right) = 2c + 6ex + 12fx^2 + 20hx^3 + \text{ec.}$$

$$\left(\frac{d^3S}{dx^3}\right) = 6e + 24fx + 60hx^2 + \text{ec.}$$

$$\left(\frac{d^4S}{dx^4}\right) = 24f + 120hx + \text{ec.}$$

ec. ec.

Moltiplichiamo la prima di queste equazioni per α; la seconda per βx; la terza per $\frac{\gamma x^2}{2}$; la quarta per $\frac{\delta x^3}{2.3}$; la quinta per $\frac{\varepsilon x^4}{2.3.4}$; e così di seguito; sommiamo tutte queste equazioni insieme ed avremo (s'avverta che α, β, γ ec., sono coefficienti costanti da determinarsi)

$$\alpha S + \beta x\left(\frac{dS}{dx}\right) + \frac{\gamma x^2}{2}.\left(\frac{d^2S}{dx^2}\right) + \frac{\delta x^3}{2.3}\left(\frac{d^3S}{dx^3}\right) + \frac{\varepsilon x^4}{2.3.4}\left(\frac{d^4S}{dx^4}\right) + \text{ec.} =$$
$$\alpha a + (\alpha b + \beta b)x + (\alpha c + 2\beta c + \gamma c)x^2 + (\alpha e + 3\beta e + 3\gamma e + \delta e)x^3 + \text{ec.}$$

Ora paragonando il secondo membro di quest'ultima equazione con la serie da sommarsi

$Aa + Bbx + Ccx^2 + Eex^3 + Ffx^4 +$ ec.

eguagliandoli cioè fra loro, avremo

$$\alpha = A$$
$$\beta = B - \alpha = B - A$$
$$\gamma = C - 2\beta - \alpha = C - 2B + A$$
$$\delta = D - 3\gamma - 3\beta - \alpha = D - 3C + 3B - A$$

ec. ec. ec.

Dunque indicando per Z la ricercata somma, sarà

$$Z = AS + \frac{(B-A)x}{1}\left(\frac{dS}{dx}\right) + \frac{(C-2B+A)x^2}{1.2}\left(\frac{d^2S}{dx^2}\right) + \ldots\ldots$$
$$\frac{(D-3C+3B-A)x^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3S}{dx^3}\right) + \text{ec.}$$

Ovvero indicando le differenze successive della serie A, B, C, D, E, F ec., secondo che si costuma nel Calcolo delle Differenze Finite, sarà

$$Z = AS + \frac{\Delta A}{1}\left(\frac{dS}{dx}\right) + \frac{\Delta^2 A}{1.2}\left(\frac{d^2S}{dx^2}\right) + \frac{\Delta^3 A}{1.2.3}\left(\frac{d^3S}{dx^3}\right) + \text{ec.}$$

Questa espressione di Z è composta di un numero finito di termini, quando la serie A, B, C, E ec., conduce come abbiamo supposto alle differenze costanti.

Indicando per e il numero il cui logaritmo iperbolico è l'unità, noi sappiamo essere

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{ec.}$$

$$\left(\frac{de^x}{dx}\right) = e^x;\ \left(\frac{d^2e^x}{dx^2}\right) = e^x;\ \left(\frac{d^3e^x}{dx^3}\right) = e^x \text{ ec.};$$

dunque la somma di una serie di questa forma

$A + \frac{Bx}{1} + \frac{Cx^2}{1.2} + \frac{Ex^3}{1.2.3} + \frac{Fx^4}{1.2.3.4} +$ ec., sarà

$$Z = e^x\left(A + \frac{x\Delta A}{1} + \frac{x^2\Delta^2 A}{1.2} + \frac{x^3\Delta^3 A}{1.2.3} + \text{ec.}\right).$$

Sia ora la serie da sommarsi

$$2 + \frac{5x}{1} + \frac{10x^2}{1.2} + \frac{17x^3}{1.2.3} + \frac{26x^4}{1.2.3.4} + \frac{37x^5}{1.2.3.4.5} + \text{ec.};$$

sarà dunque

$$\begin{array}{lcccccc}
 & A, & B, & C, & E, & F, & \text{ec.} \\
= & 2, & 5, & 10, & 17, & 26, & \text{ec.} \\
\Delta A = & & 3, & 5, & 7, & 9, & \text{ec.} \\
\Delta^2 A = & & & 2, & 2, & 2, & \text{ec.} \\
\Delta^3 A = & & & & 0, & 0, & \text{ec.}
\end{array}$$

e perciò

$$Z = 2 + \frac{5x}{1} + \frac{10x^2}{1.2} + \frac{17x^3}{1.2.3} + \frac{26x^4}{1.2.3.4} + \text{ec.} = e^x \left(2 + \frac{3x}{1} + \frac{2x^2}{1.2}\right) = e^x (1 + x)(2 + x).$$

Se poi la serie A, B, C, E ec., non conduce a differenze costanti, la somma Z viene allora espressa per una serie infinita, la quale può talvolta essere più convergente della proposta, ed in conseguenza più comoda a maneggiarsi. Per ulteriori dettagli rimandiamo i nostri Leggitori al Cap. II. Par. II. del Calcolo Differenziale del Sig. Euler.

§. 48. Se noi rappresentiamo gli indici di una serie

per $1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots (x-1),\ x,\ (x+1), \ldots$

e i termini corrispondenti

per $\varphi(1),\ \varphi(2),\ \varphi(3),\ \varphi(4), \ldots \varphi(x-1),\ \varphi(x),\ \varphi(x+1), \ldots$

abbiamo sempre fra due termini consecutivi $\varphi(x-1)$, $\varphi(x)$ della serie, qualunque sia d' altr' onde la legge della di lei formazione, la relazione dataci dal Teorema di Tajlor: se infatti facciamo $\theta = -1$ nella formula di questo Teorema (§. 5), avremo

$$(a) \ldots \varphi(x-1) = \varphi(x) - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) - \frac{1}{2.3} \times \ldots \left(\frac{d^3\varphi}{dx^3}\right) + \text{ec.}$$

Indichiamo per $S\varphi(x)$ la somma dei termini $\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \ldots\ldots + \varphi(x-1) + \varphi(x)$, e sarà (Tom. I. §. 22) $S\varphi(x) = \Sigma\varphi(x) + \varphi(x)$.

Ora prendiamo l' integrale finito dell' equazione (a) ed avremo (Tom. I. §. 12) quest' altra equazione,

$$\Sigma\varphi(x-1) = C + \Sigma\varphi(x) - \Sigma\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{1}{2}\cdot\Sigma\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) - \frac{1}{2.3} \times \Sigma\left(\frac{d^3\varphi}{dx^3}\right) + \text{ec.},$$

che sommata con (a), ci dà

$$\Sigma\varphi(x-1) + \varphi(x-1) = C + \Sigma\varphi(x) - \Sigma\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{1}{2}\Sigma\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) - \frac{1}{2.3}\Sigma\left(\frac{d^3\varphi}{dx^3}\right) + \text{ec.}$$
$$+ \varphi(x) - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) - \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3\varphi}{dx^3}\right) + \text{ec.}$$

che si riduce a

$$S\varphi(x-1) = C + S\varphi(x) - S\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{1}{2}S\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) - \frac{1}{2.3}S\left(\frac{d^3\varphi}{dx^3}\right) + \text{ec.}:$$

ora essendo $S\varphi(x-1) + \varphi(x) = S\varphi(x)$, s' avrà

$$S\varphi(x) - \varphi(x) = C + S\varphi(x) - S\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{1}{2}S\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) - \text{ec.}$$

dalla quale

$$S\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = C + \varphi(x) + \frac{1}{2}S\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) - \frac{1}{2.3}S\left(\frac{d^3\varphi}{dx^3}\right) + \text{ec.}$$

Se adunque saranno cognite le somme corrispondenti ai termini generali $\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^3\varphi}{dx^3}\right)$ ec., ricaveremo da questa formula la somma della serie il cui termine generale è $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$.

La costante C deve determinarsi in modo che la somma $S\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$ sia nulla quando $x = 0$.

Supponiamo per esempio $\varphi(x) = x^{n+1}$, ed avremo $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = (n+1)x^n$; $\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) = n(n+1)x^{n-1}$; $\left(\frac{d^3\varphi}{dx^3}\right) = (n-1)n(n+1)x^{n-2}$; $\left(\frac{d^4\varphi}{dx^4}\right) = (n-2)(n-1)n(n+1)x^{n-3}$ ec., quindi

$$Sx^n = \frac{C}{n+1} + \frac{1}{n+1}x^{n+1} + \frac{n}{2}Sx^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2.3}Sx^{n-2} + \ldots \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3.4}Sx^{n-3} - \text{ec.}$$

Ora determinando la costante in maniera che il termine sommatorio sia nullo quando $x = 0$, avremo $C = 0$. Per mezzo della formula

$$Sx^n = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + \frac{n}{2}Sx^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2.3}Sx^{n-2} + \text{ec.}$$

potremo trovare la somma delle potenze n^{esime}, data per le somme delle potenze inferiori.

Sia $n = 0$; $Sx^0 = x$

$$n = 1;\ Sx^1 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}Sx^0 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$n = 2;\ Sx^2 = \frac{1}{3}x^3 + Sx - \frac{1}{3}Sx^0 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$$

$$n = 3;\ Sx^3 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}Sx^2 - Sx + \frac{1}{4}Sx^0 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$$

ec. ec.

§. 49. La formula

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) + \frac{x^3}{2.3}\left(\frac{d^3\varphi}{dx^3}\right) + \text{ec.}$$

data al §. 36 per sviluppare una qualunque funzione in serie ordinata per le potenze di x, ci somministra il mezzo d'avere la somma di una serie qualunque data per le somme delle potenze della variabile x. Prendendo infatti l'integrale finito di questa formula, s'avrà

$$\Sigma\varphi(x) = C + \varphi(0)\Sigma x^0 + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\Sigma x + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)\Sigma x^2 + \text{ec.}$$

che sommato con la formula medesima, diviene

$$\begin{aligned}\Sigma\varphi(x) + \varphi(x) = C &+ \varphi(0)\Sigma x^0 + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\Sigma x + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)\Sigma x^2 + \text{ec.}\\ &+ \varphi(0)\,x^0 + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)x + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)x^2 + \text{ec.}\end{aligned}$$

ovvero

$$S\varphi(x) = C + \varphi(0)Sx^0 + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)Sx + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)Sx^2 + \text{ec.};$$

i valori poi di Sx^0, Sx^1, Sx^2 ec., gli abbiamo trovati al §. antecedente.

Avvertiamo che C deve determinarsi in modo che sia $S\varphi(x) = 0$ quando $x = 0$, e rammentiamo di più che, a differenziazioni eseguite, dobbiamo fare $x = 0$ nei coefficienti differenziali di questa formula.

IV. *Uso del Calcolo Differenziale per esprimere le differenze e le somme, o integrali finiti delle funzioni.*

§. 50. Il Calcolo delle Differenze Finite tutto considera l'aumento che riceve una funzione $\varphi(x)$ allorchè x diventa $x + \omega$, ed il Calcolo Differenziale considera i diversi termini che compongono quest' aumento sviluppato in serie ordinata per le potenze di ω; vi saranno adunque delle relazioni tra questi termini componenti e le quantità che ne sono composte, cioè tra i differenziali e le differenze, e si concepisce che potranno le differenze finite esprimersi per mezzo dei differenziali, ed aversi delle equazioni che diano i rapporti fra questi e quelle. Ci bisogna però fino di quì avvertire che per $S\varphi(x)\,dx$ si rappresenta quella funzione di x, la quale differenziata una volta ci dà $\varphi(x)\,dx$, e questa funzione chiamasi *Integrale Primo o del Primo Ordine* della funzione $\varphi(x)dx$; che per $S^2\varphi(x).dx^2$ si rappresenta quella funzione, la quale differenziata due volte ci dà $\varphi(x).dx^2$, e chiamasi *Integrale Secondo o del Secondo Ordine*, e così di seguito.

Ciò premesso sia $y = \varphi(x)$, e facendo crescere x della quantità ω, avremo $y + \Delta y = \varphi(x + \omega)$,
$\Delta y = \varphi(x + \omega) - \varphi(x)$, e quindi per mezzo del Teorema di Tajlor

$$(1) \ldots .\ \Delta y = \omega\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \frac{\omega^3}{2.3}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + \frac{\omega^4}{2.3.4}\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) + \text{ec.}:$$

questa formula ci dà la differenza prima finita di y espressa per i differenziali.

Prendiamo la differenza finita di quest' equazione, ed avremo

$$\Delta^2 y = \omega\Delta\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{\omega^2}{2}\Delta\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \frac{\omega^3}{2.3}\Delta\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + \text{ec.};$$

ora facendo nell' equazione (1) successivamente $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ ec., invece di y, si ha

$$\omega\Delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = \omega^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \frac{\omega^3}{2}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + \text{ec.}$$

$$\frac{\omega^2}{2}\Delta\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{\omega^3}{2}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)+\frac{\omega^4}{2.2}\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)+\text{ec.}$$

ec. ec.

Quindi l' espressione di $\Delta^2 y$ avrà la forma seguente

$$\Delta^2 y=\omega^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+a\omega^3\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)+a'\omega^4\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)+\text{ec.}$$

essendo a, a' coefficienti numerici.

Prendendo ora la differenza finita di quest' ultima equazione, avremo

$$\Delta^3 y=\omega^2\Delta\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+a\omega^3\Delta\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)+\text{ec.}$$

e quindi

$$\Delta^3 y=\omega^3\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)+b\omega^4\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)+\text{ec.}$$

Generalmente seguendo lo stesso metodo, troveremo

$$(2)\ \ldots\ \Delta^n y=\omega^n\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)+h\omega^{n+1}\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)+h'\omega^{n+2}\times\ldots$$

$$\left(\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}\right)+\text{ec.}$$

essendo h, h' ec., coefficienti numerici, indipendenti da y e da ω: essi adunque avranno lo stesso valore, qualunque funzione sia y di x.

Per determinarli, facciamo $y=e^x$ essendo e il numero il cui logaritmo iperbolico è l' unità: avremo allora $y=e^x$; $\left(\frac{dy}{dx}\right)=e^x=\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=$ ec.

$$\Delta y=e^{x+\omega}-e^x=e^x(e^\omega-1);\ \Delta^2 y=e^x(e^\omega-1)^2;$$

$\Delta^3 y=e^x(e^\omega-1)^3$ ec.; $\Delta^n y=e^x(e^\omega-1)^n$. Sostituiti questi valori, l' equazione (2) diventerà

$$(e^\omega-1)^n=\omega^n+h\omega^{n+1}+h'\omega^{n+2}+\text{ec.}$$

e perciò i coefficienti h, h' ec., saranno quei che nascono dal-

lo sviluppo della quantità $(e^\omega-1)^n$: avremo adunque

$$\omega^n\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)+h\omega^{n+1}\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)+h'\omega^{n+2}\left(\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}\right)+\text{ec.}=\ldots$$

$$\left(e^{\omega\left(\frac{dy}{dx}\right)}-1\right)^n,$$

purchè nello sviluppo del secondo membro si mutino le potenze $\left(\frac{dy}{dx}\right)^r$, r^{esime} in differenziali $\left(\frac{d^ry}{dx^r}\right)$ del medesimo ordine.

Sarà per tanto in questa supposizione

$$(3)\ \ldots\ \Delta^n y=\left(e^{\omega\left(\frac{dy}{dx}\right)}-1\right)^n.$$

Sviluppiamo ora in serie la quantità $(e^\omega-1)^n$.

Siccome $e^\omega=1+\omega+\frac{\omega^2}{2}+\frac{\omega^3}{2.3}+$ ec., così avremo

$$(e^\omega-1)^n=\left(\omega+\frac{\omega^2}{2}+\frac{\omega^3}{2.3}+\text{ec.}\right)^n=\omega^n\left(1+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega^2}{2.3}+\text{ec.}\right)^n.$$

Supponiamo adunque

$(e^\omega-1)^n=\omega^n(1+A\omega+B\omega^2+C\omega^3+\text{ec.})^n$; prendendo i logaritmi da una parte e dall' altra e differenziando, s' avrà

$$n\left(\frac{e^\omega}{e^\omega-1}-\frac{1}{\omega}\right)=\frac{A+2B\omega+3C\omega^2+\text{ec.}}{1+A\omega+B\omega^2+C\omega^3+\text{ec.}}:\ \text{ora}$$

$$\frac{e^\omega}{e^\omega-1}=\frac{1}{1-e^{-\omega}}=\frac{1}{\omega-\frac{\omega^2}{2}+\frac{\omega^3}{2.3}-\frac{\omega^4}{2.3.4}+\text{ec.}};$$

dunque sostituendo questo valore, moltiplicando in croce e riducendo, avremo

$$n\left(\frac{1}{2}-\frac{\omega}{2.3}+\frac{\omega^2}{2.3.4}-\text{ec.}\right)(1+A\omega+B\omega^2+C\omega^3+\text{ec.})=$$

$$\left(1-\frac{\omega}{2}+\frac{\omega^2}{2.3}-\frac{\omega^3}{2.3.4}+\text{ec.}\right)(A+2B\omega+3C\omega^2+\text{ec.})$$

cioè a dire

$$\frac{n}{2} + n\left(\frac{A}{2} - \frac{1}{2.3}\right)\omega + n\left(\frac{B}{2} - \frac{A}{2.3} + \frac{1}{2.3.4}\right)\omega^2 + n\left(\frac{C}{2} - \frac{B}{2.3} + \frac{A}{2.3.4} - \frac{1}{2.3.4.5}\right)\omega^3 + \text{ec.} = A + \left(2B - \frac{A}{2}\right)\omega + \left(3C - \frac{2B}{2} + \frac{A}{2.3}\right)\omega^2 + \left(4D - \frac{3C}{2} + \frac{2B}{2.3} - \frac{A}{2.3.4}\right)\omega^3 + \text{ec.},$$

e paragonando i termini, sarà

$$A = \frac{n}{2}$$

$$2B = \frac{(n+1)}{2}A - \frac{n}{2.3}$$

$$3C = \frac{(n+2)}{2}B - \frac{(n+1)}{2.3}A + \frac{n}{2.3.4}$$

$$4D = \frac{(n+3)}{2}C - \frac{(n+2)}{2.3}B + \frac{(n+1)}{2.3.4}A - \frac{n}{2.3.4.5}$$

$$\text{ec.} \qquad \text{ec.}$$

Questi valori di A, B, C ec., sono i valori dei coefficienti h, h', h'' ec., della equazione (2).

§. 51. Per quanto il metodo impiegato per trovare i coefficienti h, h', h'' ec., sia elegante, pure esso non è diretto, e lascia sempre desiderare una determinazione di quei coefficienti semplice ed indipendente dalla riflessione fatta al §. antecedente, la quale ci ha mostrato, che i medesimi erano quelli dello sviluppo di $(e^{\omega} - 1)^n$.

Crediamo per questo far cosa grata ai nostri Leggitori dando loro un altro metodo diretto, dedotto dal Calcolo delle Differenze finite: si vedrà sempre più come questi due Calcoli s'ajutino a vicenda.

I coefficienti h, h', h'' ec., sono altrettante funzioni di n che noi indicheremo per h_n, h'_n, h''_n ec., e che ci proponiamo di determinare. Ciò premesso scriviamo $n+1$ invece di n, nell' equazione (2), ed avremo

$$\Delta^{n+1}y = \omega^{n+1}\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right) + h_{n+1}.\omega^{n+2}\left(\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}\right) + h'_{n+1}.\omega^{n+3}\left(\frac{d^{n+3}y}{dx^{n+3}}\right) + h''_{n+1}.\omega^{n+4}\left(\frac{d^{n+4}y}{dx^{n+4}}\right) + \text{ec.}$$

Ma prendendo la differenza finita dell' equazione (2), abbiamo

$$\Delta^{n+1}y = \omega^n\Delta\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right) + h_n.\omega^{n+1}\Delta\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right) + h'_n.\omega^{n+2} \times \ldots \Delta\left(\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}\right) + h''_n.\omega^{n+3}\Delta\left(\frac{d^{n+3}y}{dx^{n+3}}\right) + \text{ec.}$$

ove facendo in virtù dell' equazione (1)

$$\Delta\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right) = \omega\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}\right) + \frac{\omega^3}{2.3}\left(\frac{d^{n+3}y}{dx^{n+3}}\right) + \frac{\omega^4}{2.3.4}\left(\frac{d^{n+4}y}{dx^{n+4}}\right) + \text{ec.}$$

$$\Delta\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right) = \omega\left(\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^{n+3}y}{dx^{n+3}}\right) + \frac{\omega^3}{2.3}\left(\frac{d^{n+4}y}{dx^{n+4}}\right) + \text{ec.}$$

$$\Delta\left(\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}\right) = \omega\left(\frac{d^{n+3}y}{dx^{n+3}}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^{n+4}y}{dx^{n+4}}\right) + \text{ec.}$$

$$\Delta\left(\frac{d^{n+3}y}{dx^{n+3}}\right) = \omega\left(\frac{d^{n+4}y}{dx^{n+4}}\right) + \text{ec.}$$

$$\text{ec.} \qquad \text{ec.}$$

avremo

$$\Delta^{n+1}y = \omega^{n+1}\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right) + \left(\frac{1}{2} + h_n\right)\omega^{n+2}\left(\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}\right) + \left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{2}h_n + h'_n\right)\omega^{n+3}\left(\frac{d^{n+3}y}{dx^{n+3}}\right) + \left(\frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3}h_n + \frac{1}{2}h'_n + h''_n\right)\omega^{n+4}\left(\frac{d^{n+4}y}{dx^{n+4}}\right) + \text{ec.}$$

Paragonando ora fra di loro le due espressioni ottenute per

$\Delta^{n+1}y$, avremo per determinare quei coefficienti

$$h_{n+1} = \frac{1}{2} + h_n$$

$$h'_{n+1} = \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2}h_n + h'_n$$

$$h''_{n+1} = \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3}h_n + \frac{1}{2}h'_n + h''_n$$

$$h'''_{n+1} = \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{2.3.4}h_n + \frac{1}{2.3}h'_n + \frac{1}{2}h''_n + h'''_n$$

ec. ec.

delle quali è chiara la legge. Integrando adunque queste equazioni, si troverà

$$h_n = \frac{1}{2}\Sigma 1 = \frac{n}{2}$$

$$h'_n = \frac{1}{2}\Sigma\left(\frac{1}{3} + h_n\right)$$

$$h''_n = \frac{1}{2}\Sigma\left(\frac{1}{3.4} + \frac{1}{3}h_n + h'_n\right)$$

$$h'''_n = \frac{1}{2}\Sigma\left(\frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{3.4}h_n + \frac{1}{3}h'_n + h''_n\right)$$

ec. ec.

Sarebbe facile vedere come queste espressioni sono le stesse che quelle trovate al §. antecedente.

§. 52. Essendo $\phi(x+\omega) = \phi(x) + \omega\left(\frac{d\phi}{dx}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right) +$ ec. avremo prendendo l'integrale finito

$$\Sigma\phi(x+\omega) = \Sigma\phi(x) + \omega\Sigma\left(\frac{d\phi}{dx}\right) + \frac{\omega^2}{2}\Sigma\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right) + \text{ec.};$$

ma $\Sigma\phi(x+\omega) = \Sigma\phi(x) + \phi(x)$ (Tom. I. §. 22.); dunque

$$\phi(x) = \omega\Sigma\left(\frac{d\phi}{dx}\right) + \frac{\omega^2}{2}\Sigma\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right) + \text{ec.}$$

Se ora facciamo $\left(\frac{d\phi}{dx}\right) = F(x) = y$, sarà $\left(\frac{d\phi}{dx}\right)dx = ydx$; $\int\left(\frac{d\phi}{dx}\right)dx = \int ydx$; $\phi(x) = \int ydx$; e quindi l'ultima equazione ci darà

$$\Sigma y = \int\frac{ydx}{\omega} - \frac{\omega}{2}\Sigma\left(\frac{dy}{dx}\right) - \frac{\omega^2}{2.3}\Sigma\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \text{ec.}$$

Adesso ricaviamo successivamente da quest' equazione i valori di $\Sigma\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\Sigma\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ ec., ed avremo per Σy un' espressione di questa forma

$$\Sigma y = \int\frac{ydx}{\omega} + ay + a'\omega\left(\frac{dy}{dx}\right) + a''\omega^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \text{ec.}$$

essendo a, a', a'' coefficienti numerici. Prendendo l' integrale finito di questa formula, si ha

$$\Sigma^2 y = \Sigma\int\frac{ydx}{\omega} + a\Sigma y + a'\omega\Sigma\left(\frac{dy}{dx}\right) + a''\omega^2\Sigma\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \text{ec.},$$

nella quale ponendo per $\Sigma\int\frac{ydx}{\omega}$ il suo valore (che ottiensi dall' equazione $\Sigma y = \int\frac{ydx}{\omega} +$ ec. col mettere $\int\frac{ydx}{\omega}$ in vece di y, e che è

$$\Sigma\frac{\int ydx}{\omega} = \frac{\int^2 ydx}{\omega^2} + \frac{a\int ydx}{\omega} + a'y + a''\omega\left(\frac{dy}{dx}\right) + \text{ec.}$$) ed egualmente

i valori di Σy, $\Sigma\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ec., avremo per $\Sigma^2 y$ un' espressione di questa forma

$$\Sigma^2 y = \frac{\int^2 ydx}{\omega^2} + b\frac{\int ydx}{\omega} + b'y + b''\omega\left(\frac{dy}{dx}\right) + b'''\omega^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \text{ec.}$$

Seguitando lo stesso metodo, vedremo che generalmente $\Sigma^n y$ sarà della forma

$$\Sigma^n y = \frac{\int^n ydx^n}{\omega^n} + h\frac{\int^{n-1} ydx^{n-1}}{\omega^{n-1}} + h'\frac{\int^{n-2} ydx^{n-2}}{\omega^{n-2}} + \text{ec.}$$

$$+ my + m'\omega\left(\frac{dy}{dx}\right) + m''\omega^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \text{ec.} \quad (4):$$

i coefficienti h, h', h'' ec., m, m' ec., sono funzioni di n indipendenti affatto da x, le quali si possono determinare direttamente per il metodo che ho dato al §. antecedente: non ostante cercheremo il valore di questi coefficienti per mezzo di quello usato al § 50, poichè se è meno diretto, è però più elegante per i risultati.

Facciamo $y = e^x$, ed avremo $e^x = y = (\frac{dy}{dx}) = (\frac{d^2y}{dx^2}) = (\frac{d^3y}{dx^3}) =$ ec. $= \int y dx = \int^2 y dx^2 =$ ec.: così troveremo

$$\Sigma y = \frac{e^x}{e^\omega - 1},\ \Sigma^2 y = \frac{1}{e^\omega - 1}\Sigma y = \frac{e^x}{(e^\omega - 1)^2},\ \text{ec. ec. } \Sigma^n y = \dots \frac{e^x}{(e^\omega - 1)^n};$$

dunque facendo le opportune sostituzioni nell' equazione (4), troveremo

$$\frac{1}{(e^\omega - 1)^n} = \frac{1}{\omega^n} + \frac{h}{\omega^{n-1}} + \frac{h'}{\omega^{n-2}} + \text{ec.} + m + m'\omega + m''\omega^2 + \text{ec.},$$

e perciò

$$\frac{\int^n y dx^n}{\omega^n} + h\frac{\int^{n-1} y dx^{n-1}}{\omega^{n-1}} + \text{ec.} + my + m'\omega(\frac{dy}{dx}) + \text{ec.} = \dots \frac{1}{\left(e^{\omega(\frac{dy}{dx})} - 1\right)^n},$$

purchè nello sviluppo del secondo membro di quest' equazione, si mutino gli esponenti delle potenze di $(\frac{dy}{dx})$ in ordini dei differenziali, si scriva cioè $(\frac{d^r y}{dx^r})$ invece di $(\frac{dy}{dx})^r$; e le differenze d' indice negativo si cangino in integrali, cioè si scriva $\int^r y dx^r$ invece di $(\frac{d^{-r} y}{dx^r})$: con queste condizioni, avremo

$$\Sigma^n y = \frac{1}{\left(e^{\omega(\frac{dy}{dx})} - 1\right)^n} \dots\dots\dots (5).$$

I coefficienti poi h, h' ec., s' avranno dalle equazioni del §. 50, facendovi $n = -n$.

§ 53. Le due equazioni (3) e (5) degli antecedenti §§. possono essere rappresentate dalla seguente soltanto

$$(\Delta y)^n = \left(e^{\omega(\frac{dy}{dx})} - 1\right)^n \dots\dots\dots (6),$$

purchè nei due membri di quest' equazione s' applichino alle caratteristiche Δ e d gli esponenti di Δy e di dy, e si mutino le differenze d' esponente negativo in integrali, cioè si scriva $\Sigma^m y$ invece di $\Delta^{-m} y$, e $\int^m y dx^m$ invece di $\frac{d^{-m} y}{dx^m}$.

Ora quest' ultima equazione (6) essendo vera per n positiva e per n negativa, è evidente che una funzione qualunque di Δy (nella quale però non entrino potenze frazionarie di Δy) sarà eguale ad una simil funzione di $e^{\omega(\frac{dy}{dx})} - 1$, purchè nello sviluppo delle due funzioni s' applichino alle caratteristiche Δ e d gli esponenti di Δy e dy, e si mutino le differenze d' esponente negativo in integrali. Per esempio ricaviamo da quell' equazione (6)

$1 + \Delta y = e^{\omega(\frac{dy}{dx})}$, e quindi prendendone i logaritmi, s' avrà $l(1 + \Delta y) = \omega(\frac{dy}{dx})$, equazione che elevata alla potenza n^{esima}, ci dà

$\{l(1 + \Delta y)\}^n = \omega^n (\frac{dy}{dx})^n$: dunque quando n è positiva, si ha

$$\omega^n (\frac{d^n y}{dx^n}) = \{l(1 + \Delta y)\}^n \dots\dots\dots (7)$$

e quando n è negativa $= -m$

$$\frac{\int^m y dx^m}{\omega^m} = \frac{1}{\{l(1 + \Delta y)\}^m} \dots\dots\dots (8)$$

queste formule (7) e (8) ci esprimono i differenziali e gli integrali delle funzioni per mezzo delle differenze e degli integrali finiti delle medesime. Infatti la formula (7) ci da

$$\omega^n (\frac{d^n y}{dx^n}) = \Delta^n y + h_n \Delta^{n+1} y + h'_n \Delta^{n+2} y + h''_n \Delta^{n+3} y + \text{ec.},$$

la quale, facendo n negativo, e cambiando le differenze negative in integrali, rappresenterà lo sviluppo di $\frac{\int^n y\,dx^n}{\omega^n}$ che è dato dalla formula (8).

Per aver poi i coefficienti h_n, h'_n, h''_n ec., potremmo fare uso del metodo dato alla fine del §. 50, ma crediamo meglio adoprare l'altro esposto al §. 51.

Per questo facciamo

$$\{l(1+\omega)\}^n = \omega^n(1+h_n\omega+h'_n\omega^2+h''_n\omega^3+h'''_n\omega^4+\text{ec.})$$

e ponendo $n+1$ invece di n, avremo

$$\{l(1+\omega)\}^{n+1} = \omega^{n+1}(1+h_{n+1}\omega+h'_{n+1}\omega^2+h''_{n+1}\times\omega^3+\text{ec.}):\ \text{ma}$$

$$\{l(1+\omega)\}^{n+1} = \{l(1+\omega)\}^n\, l(1+\omega) = \{l(1+\omega)\}^n$$

$$(\omega-\tfrac{\omega^2}{2}+\tfrac{\omega^3}{3}-\text{ec.}) = \omega^{n+1}(1+h_n\omega+h'_n\omega^2+h''_n\omega^3$$

$$+\text{ec.})(1-\tfrac{\omega}{2}+\tfrac{\omega^2}{3}-\text{ec.}) = \omega^{n+1}\{1+(h_n-\tfrac{1}{2})\omega+$$

$$(h'_n-\tfrac{1}{2}h_n+\tfrac{1}{3})\omega^2+(h''_n-\tfrac{1}{2}h'_n+\tfrac{1}{3}h_n-\tfrac{1}{4})\omega^3+$$

$$(h'''_n-\tfrac{1}{2}h''_n+\tfrac{1}{3}h'_n-\tfrac{1}{4}h_n+\tfrac{1}{5})\omega^4+\text{ec.}\};$$

dunque paragonando le due espressioni ottenute per $\{l(1+\omega)\}^{n+1}$, avremo

$$h_n = -\tfrac{1}{2}\Sigma 1$$

$$h'_n = -\tfrac{1}{2}\Sigma(h_n-\tfrac{2}{3})$$

$$h''_n = -\tfrac{1}{2}\Sigma(h'_n-\tfrac{2}{3}h_n+\tfrac{2}{4})$$

$$h'''_n = -\tfrac{1}{2}\Sigma(h''_n-\tfrac{2}{3}h'_n+\tfrac{2}{4}h_n-\tfrac{2}{5})$$

ec. ec.

Se facciamo n negativo, queste equazioni daranno allora i coefficienti dello sviluppo di $\frac{1}{\{l(1+\omega)\}^n}$.

Questo metodo servirebbe anche per sviluppare in serie ordinata per le potenze di x l' espressione . . . . $\frac{(1+ax+bx^2+cx^3+\text{ec.})^m}{(1+a'x+b'x^2+c'x^3+\text{ec.})^n}$ che noi abbiamo sviluppata con altro mezzo al §. (38).

§. 54. Le formule (3), (5), (7), (8) sono state date la prima volta dal Celebre La-Grange negli Atti di Berlino 1772. Noi abbiamo seguita l' esposizione che di queste ne ha data il Professore Paoli, avendovi aggiunto il metodo diretto per determinarne i coefficienti.

Il Geometra La-Place ha trovate (Atti di Parigi 1779) altre formule per esprimere le differenze e gl' integrali della funzione $m^x y$, ove m è costante: ma queste nuove formule sono corollarj di quelle dell' Italiano Geometra, come ora vedremo: abbiamo dimostrato al §. 50.

$$\Delta^n y = \omega^n\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)+h\omega^{n+1}\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)+h'\omega^{n+2}\left(\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}\right)+\text{ec.} =$$

$$\left(e^{\omega\left(\frac{dy}{dx}\right)}-1\right)^n.$$

Ora facendo $y = m^x z$ (scrivo z per non far confusione) avremo differenziando e dividendo per dx

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = m^x z\, lm + m^x\left(\frac{dz}{dx}\right) = m^x\left\{\left(\frac{d^0 z}{dx^0}\right)lm+\left(\frac{dz}{dx}\right)\right\}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = m^x\left(z(lm)^2+2\left(\frac{dz}{dx}\right)lm+\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\right) = m^x\left(lm+\left(\frac{dz}{dx}\right)\right)^2$$

. . . .

. . . .

$\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right) = m^x\left(lm + \left(\frac{dz}{dx}\right)\right)^n$, purchè nello sviluppo si barattino le potenze in differenze, secondo ciò che è detto sopra: sarà dunque

$$\Delta^n m^x z = m^x\left[\omega^n\left(lm + \left(\frac{dz}{dx}\right)\right)^n + h\omega^{n+1}\left(lm + \left(\frac{dz}{dx}\right)\right)^{n+1} + h'\omega^{n+2}\left(lm + \left(\frac{dz}{dx}\right)\right)^{n+2} + \ldots\ldots\ldots\right] =$$

$$m^x\left[e^{\omega\left(lm + \left(\frac{dz}{dx}\right)\right)} - 1\right]^n = m^x\left(m^\omega . e^{\omega\left(\frac{dz}{dx}\right)} - 1\right)^n$$

e questa è la formula data da La-Place.

Nella stessa guisa dalla formula

$\Sigma^n y = \frac{1}{\left(e^{\omega\left(\frac{dy}{dx}\right)} - 1\right)^n}$ si potrà dedurre l' altra formula data da quel Geometra

$\Sigma^n m^x z = \frac{m^x}{\left(m^\omega . e^{\omega\left(\frac{dz}{dx}\right)} - 1\right)^n}$; come pure dalle formule (7), (8), potranno dedursene delle altre simili per la funzione $m^x z$.

Noi rimandiamo i nostri Leggitori alla sopra citata Memoria, quando bramino di vedere estese queste formule alle funzioni a più variabili.

CALCOLO DIFFERENZIALE ED INTEGRALE.

C A P. IV.

Continuazione dello stesso Soggetto.

V. Risoluzione delle Frazioni.

§. 55. PER quanto la risoluzione delle frazioni composte nelle loro frazioni semplici, appartenga all' introduzione all' Analisi Sublime, pure ne faremo quì un cenno, giacchè il Calcolo Differenziale somministra un semplicissimo metodo per ottenerla.

Sia $\frac{P}{Q}$ una vera frazione, tale cioè che le dimensioni di x nel denominatore siano maggiori di quelle del numeratore, e proponiamoci di risolverla nelle sue frazioni componenti. Supponiamo che per mezzo della risoluzione dell' equazione $Q = 0$ già si sappiano i fattori di Q. In virtù delle radici reali e disuguali, Q avrà dei fattori di questa forma $a + bx$; in virtù delle radici reali ed eguali, Q avrà dei fattori di questa forma $(a + bx)^n$; in virtù delle radici immaginarie e diseguali, Q avrà dei fattori trinomiali di questa forma $a^2 + 2abx\cos\varphi + b^2x^2$; in virtù infine delle radici immaginarie ed eguali, Q avrà dei fattori trinomiali di questa forma $(a^2 + 2abx\cos\varphi + b^2x^2)^n$.

Considariamo questi quattro casi separatamente.

I. Sia $Q = (a + bx)S$; poniamo

$\frac{P}{Q} = \frac{P}{(a + bx)S} = \frac{A}{(a + bx)} + \frac{R}{S}$, e riducendo al medesimo denominatore avremo l' equazione $\frac{P}{(a+bx)S} = \frac{AS+R(a+bx)}{(a+bx)S}$, dalla quale ricaveremo $R = \frac{P-AS}{a+bx}$: ora R è una funzione intiera di x; dunque $P - AS$ deve essere divisibile per $a+bx$: dunque $a+bx$ deve essere un fattore di $P - AS$; dunque $P - AS$ deve divenire nullo quando $a+bx = 0$, ovvero quando $x = -\frac{a}{b}$. Sarà pertanto $A = \frac{P}{S}$, purchè si faccia nel secondo membro $x = -\frac{a}{b}$.

Ma impiegando il Calcolo Differenziale in questa ricerca, moltiplichiamo tanto il numeratore che il denominatore del valore di A per $a+bx$, ed avremo $A = \frac{P(a+bx)}{S(a+bx)} = \frac{P(a+bx)}{Q}$, purchè si faccia $x = -\frac{a}{b}$; ora in questa supposizione il valore di A diviene $\frac{0}{0}$; dunque per ciò che è detto sopra (§. 42), avremo

$$A = \left(\frac{d(P(a+bx))}{dx}\right) : \left(\frac{dQ}{dx}\right), \text{ ovvero}$$

$$A = \frac{(a+bx)\left(\frac{dP}{dx}\right)+bP}{\left(\frac{dQ}{dx}\right)} = \frac{bP}{\left(\frac{dQ}{dx}\right)},$$ purchè a differenziazione eseguita si faccia $x = -\frac{a}{b}$.

Per esempio, data la frazione $\frac{x^m}{1-4x^e+3x^n}$, cerchiamo la frazione semplice che nasce da $1-x$ fattore del denominatore. Facendo il paragone con la formula generale, avremo $a = 1$, $b = -1$, $P = x^m$, $Q = 1-4x^e+3x^n$, e $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = -4ex^{e-1} + 3nx^{n-1}$; dunque $A = \frac{-x^m}{-4ex^{e-1}+3nx^{n-1}}$, purchè si faccia

$x = 1$; dunque $A = \frac{1}{4e-3n}$. Perciò la frazione corrispondente al fattore $1-x$, sarà $\frac{A}{a+bx} = \frac{1}{(4e-3n)(1-x)}$.

Per farne un altro esempio, proponiamoci di decomporre la frazione $\frac{1+x^2}{(2+x)(1+x)(1-x)}$ nelle tre frazioni semplici $\frac{A}{2+x} + \frac{B}{1+x} + \frac{C}{1-x}$.

Per determinare A, avremo $a = 2$, $b = 1$, $P = 1+x^2$, $Q = 2+x-2x^2-x^3$, e $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = 1-4x-3x^2$; dunque $A = \frac{1+x^2}{1-4x-3x^2} = -\frac{5}{3}$, perchè $x = -2$. A riguardo di B, si ha $a = 1$, $b = 1$, $P = 1+x^2$, $Q = 2+x-2x^2-x^3$; dunque $B = \frac{1+x^2}{1-4x-3x^2} = \frac{2}{2} = 1$, poichè $x = -1$; così avremo $C = \frac{1+x^2}{1-4x-3x^2} = -\frac{1}{3}$: dunque sarà

$$\frac{1+x^2}{(2+x)(1+x)(1-x)} = -\frac{5}{3(2+x)} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{3(1-x)}.$$

II. Sia $Q = (a+bx)^2 S$, e poniamo $\frac{P}{Q} = \frac{P}{(a+bx)^2 S} = \frac{A}{(a+bx)^2} + \frac{B}{(a+bx)} + \frac{R}{S}$: riducendo al medesimo denominatore, avremo l' equazione $\frac{P}{(a+bx)^2 S} = \frac{AS+B(a+bx)S+R(a+bx)^2}{(a+bx)^2 S}$, dalla quale si ricava $P = AS + B(a+bx)S + R(a+bx)^2$, ed in conseguenza $R = \frac{P-AS-B(a+bx)S}{(a+bx)^2}$.

Ora dovendo essere R una funzione intiera, è necessario che $P - AS - B(a+bx)^2$, ovvero $\frac{P}{S} - A - B(a+bx)$, (poichè S non contiene il fattore $a+bx$) sia divisibile per $(a+bx)^2$; dunque

$\frac{P}{S} - A - B(a + bx)$, ed il suo differenziale $d(\frac{P}{S} - A - B(a + bx))$, dovranno annullarsi quando $a + bx = 0$, ovvero quando $x = -\frac{a}{b}$.

Questa riflessione ci dà le due equazioni $\frac{P}{S} - A = 0$, $\left(\frac{d.\frac{P}{S}}{dx}\right) - Bb = 0$, dalle quali si ricava $A = \frac{P}{S}$, $B = \ldots\ldots$ $\frac{1}{b}\left(\frac{d.\frac{P}{S}}{dx}\right)$ facendovi però $x = -\frac{a}{b}$.

In generale essendo $Q = (a + bx)^m S$, poniamo

$$\frac{P}{Q} = \frac{P}{(a + bx)^m S} = \frac{A}{(a + bx)^m} + \frac{A'}{(a + bx)^{m-1}} + \frac{A''}{(a + bx)^{m-2}} + \ldots\ldots + \frac{A^{(m-1)}}{(a + bx)} + \frac{R}{S}$$

e per lo stesso ragionamento troveremo quest' equazione

$$P = AS + A'S(a + bx) + A''S(a + bx)^2 + \ldots\ldots\ldots + A^{(m-1)}S(a + bx)^{m-1} + R(a + bx)^m,$$

dalla quale si ricava

$R = \frac{P - AS - A'S(a + bx) - \ldots\ldots}{(a + bx)^m}$; e dovendo essere R una funzione intiera, ed S non contenendo il fattore $(a + bx)$, la quantità

$$\frac{P}{S} - A - A'(a + bx) - A''(a + bx)^2 - \ldots\ldots\ldots - A^{(m-1)}(a + bx)^{m-1}$$

sarà divisibile per $(a + bx)^m$, ed in conseguenza essa e le sue differenziali fino all' ordine $m - 1$ inclusive, saranno nulle quando vi si fa $a + bx = 0$, ovvero $x = -\frac{a}{b}$: avremo adunque queste m equazioni

$\frac{P}{S} - A = 0$, $\left(\frac{d.\frac{P}{S}}{dx}\right) - bA' = 0$; $\left(\frac{d^2.\frac{P}{S}}{dx^2}\right) - 2b^2A'' = 0$ ec., dalle quali si ricavano i ricercati valori di A, A', A'' ec., e si ha

$$A = \frac{P}{S}$$

$$A' = \frac{1}{b}\left(\frac{d.\frac{P}{S}}{dx}\right)$$

$$A'' = \frac{1}{2b^2}\left(\frac{d^2.\frac{P}{S}}{dx^2}\right)$$

$$A''' = \frac{1}{2.3.b^3}\left(\frac{d^3.\frac{P}{S}}{dx^3}\right)$$

$$A'''' = \frac{1}{2.3.4.b^4}\left(\frac{d^4.\frac{P}{S}}{dx^4}\right)$$

ec. ec.

Per esempio, sia proposta la frazione $\frac{x^2}{(1 + x)(2 + x)^2}$, e si cerchino le frazioni corrispondenti al fattore $(2 + x)^2$.

Rappresentate queste frazioni per $\frac{A}{(2 + x)^2} + \frac{A'}{2 + x}$, avremo $a = 2$, $b = 1$, $P = x^2$, $S = 1 + x$, e $\left(\frac{d.\frac{P}{S}}{dx}\right) = \left(\frac{d.\frac{x^2}{1 + x}}{dx}\right) = \frac{2x + x^2}{(1 + x)^2}$: dunque facendo $x = -2$, $A = \frac{P}{S} = \frac{x^2}{1 + x} = \frac{-4}{1} = -4$, $A' = \frac{2x + x^2}{(1 + x)^2} = 0$, una sola sarà la frazione che corrisponde al fattore $(2 + x)^2$, cioè $-\frac{4}{(2 + x)^2}$.

Cercando poi la frazione che corrisponde al fattore semplice $1 + x$, si troverà $\frac{1}{1 + x}$, ed avremo in conseguenza . . . .

$$\frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2} = \frac{1}{1+x} - \frac{4}{(2+x)^2}.$$

§. 56. Veniamo adesso agli altri due casi nei quali Q ha dei fattori trinomiali.

III. Sia $Q = (a^2 + 2abx\cos\varphi + b^2x^2)S$, e poniamo

$$\frac{P}{Q} = \frac{P}{(a^2 + 2abx\cos\varphi + b^2x^2)S} = \frac{A + A'x}{(a^2 + 2abx\cos\varphi + b^2x^2)} + \frac{R}{S}:$$

riducendo allo stesso denominatore, e togliendo quindi il denominatore comune, avremo

$P = AS + A'Sx + R(a^2 + 2abx\cos\varphi + b^2x^2)$, e perciò

$R = \frac{P - AS - A'Sx}{a^2 + 2abx\cos\varphi + b^2x^2}$; ora R deve essere una funzione intiera; dunque $P - AS - A'Sx$ sarà divisibile per $a^2 + 2abx\cos\varphi + b^2x^2$; dunque sarà $P - AS - A'Sx = 0$, quando $a^2 + 2abx\cos\varphi + b^2x^2 = 0$. Prendendo il valore di $x = -\frac{a}{b}(\cos\varphi \pm \sqrt{(-1)}.sen\varphi)$ da quest'ultima equazione, e supponendo che P in virtù di una tal sostituzione divenga $P' \pm P''\sqrt{(-1)}$; e che S divenga $S' + S''\sqrt{(-1)}$, avremo le equazioni

$$P' + P''\sqrt{(-1)} - (S' + S''\sqrt{(-1)})(A - A'\tfrac{a}{b}\{\cos\varphi + \sqrt{(-1)}.sen\varphi\}) = 0$$

$$P' - P''\sqrt{(-1)} - (S' - S''\sqrt{(-1)})(A - A'\tfrac{a}{b}\{\cos\varphi - \sqrt{(-1)}.sen\varphi\}) = 0,$$

che serviranno a determinare A, A'.

Per mezzo del Calcolo Differenziale potremmo anche senza conoscere il valore di S determinare i due numeratori A, A': infatti essendo

$S = \frac{Q}{a^2 + 2abx\cos\varphi + b^2x^2}$, ed annullandosi il numeratore ed il denominatore di questa frazione quando si fà $a^2 + 2abx\cos\varphi + b^2x^2 = 0$, ovvero $x = \frac{-a}{b}(\cos\varphi \pm \sqrt{(-1)}.sen\varphi)$, avremo il

valore di S espresso (§. 42) in quest' altra guisa

$S = \frac{(\frac{dQ}{dx})}{2b^2x + 2ab\cos\varphi}$; dunque l'equazione

$P - AS - A'Sx = 0$, diverrà $P - (A + A'x)\frac{(\frac{dQ}{dx})}{2b^2x + 2ab\cos\varphi} = 0$,

la quale per la sostituzione di quel valore di x, ci darà queste due equazioni

$$P' + P''\sqrt{(-1)} - (Q' + Q''\sqrt{(-1)})(A - A'\tfrac{a}{b}\{\cos\varphi + \sqrt{(-1)}.sen\varphi\}) = 0$$

$$P' - P''\sqrt{(-1)} - (Q' - Q''\sqrt{(-1)})(A - A'\tfrac{a}{b}\{\cos\varphi - \sqrt{(-1)}.sen\varphi\}) = 0$$

onde determinare A ed A'.

Avvertiamo che $Q' \pm Q''\sqrt{(-1)}$ vogliamo che significhi il valore di $\frac{(\frac{dQ}{dx})}{2b^2x + 2ab\cos\varphi}$ quando vi si fa

$x = -\frac{a}{b}(\cos\varphi \pm \sqrt{(-1)}.sen\varphi)$.

IV. Sia infine $Q = (a^2 + 2abx\cos\varphi + b^2x^2)^n S$, e poniamo

$$\frac{P}{Q} = \frac{P}{(a^2 + 2abx\cos\varphi + b^2x^2)^n S} = \frac{A + A'x}{(a^2 + 2abx\cos\varphi + b^2x^2)^n} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{B + B'x}{(a^2 + 2abx\cos\varphi + b^2x^2)^{n-1}} + \frac{C + C'x}{(a^2 + 2abx\cos\varphi + b^2x^2)^{n-2}} + \ldots\ldots +$$

$$\frac{M + Nx}{a^2 + 2abx\cos\varphi + b^2x^2} + \frac{R}{S}.$$

Riducendo allo stesso denominatore, e quindi togliendolo dall'equazione, avremo

$$P = (A + A'x)S + (B + B'x)S(a^2 + 2abx\cos\varphi + b^2x^2) + (C + C'x)S(a^2 + 2abx\cos\varphi + b^2x^2)^2 + \ldots\ldots\ldots + S(M + Nx)(a^2 + 2abx\cos\varphi + b^2x^2)^{n-1} + R(a^2 + 2abx \times \cos\varphi + b^2x^2)^n,$$

e quindi

$$R = \frac{P-(A+A'x)S-(B+B'x)S(a^2+2abx\cos\phi+b^2x^2)-\text{ec.}}{(a^2+2abx\cos\phi+b^2x^2)^n}:$$

ma essendo R una funzione intiera, il numeratore del secondo membro dovrà essere esattamente divisibile per $(a^2+2abx\cos\phi+b^2x^2)^n$; dunque dovrà annullarsi quando $a^2+2abx\cos\phi+b^2x^2=0$, ovvero quando

$x=-\frac{a}{b}(\cos\phi\pm\sqrt{(-1)}.\,sen\,\phi)$; e siccome S non contiene il fattore $(a^2+2abx\cos\phi+b^2x^2)$, così anche l'espressione

$$\frac{P}{S}-(A+A'x)-(B+B'x)(a^2+2abx\cos\phi+b^2x^2)-\text{ec.}$$

dovrà essere divisibile per $(a^2+2abx\cos\phi+b^2x^2)^n$, e perciò essa ed i di lei differenziali fino all'ordine $n-1$ inclusive, s'annulleranno quando si fa

$a^2+2abx\cos\phi+b^2x^2=0$: dunque in questa supposizione, avremo le seguenti equazioni

$$\frac{P}{S}-A-A'x=0$$

$$\left(\frac{d.\frac{P}{S}}{dx}\right)-A'-(B+B'x)(2b^2x+2ab\cos\phi)=0$$

$$\left(\frac{d^2.\frac{P}{S}}{dx^2}\right)-2B'(2b^2x+2ab\cos\phi)-2(B+B'x)b^2-$$
$$2(C+C'x)(2b^2x+2ab\cos\phi)^2=0$$

ec. ec.

per mezzo delle quali, avremo i valori di A, A', B, B', C, C' ec.

Per esempio, sia proposta la frazione $\frac{m+nx^3}{(x-x^5)^2}$ per decomporsi nelle sue frazioni semplici.

Questa frazione prende anche la forma

$\frac{m+nx^3}{x^2(1+x^2)^2(1+x)^2(1-x)^2}$: le frazioni semplici corrispondenti ai fattori x^2, $(1+x)^2$, $(1-x)^2$ si trovano per il metodo del § antecedente. Cerchiamo adunque quelle che corrispondono al fattore $(1+x^2)^2$.

Avremo in questo caso $a=1$, $b=1$, $\cos\phi=0$, $P=m+nx^3$, $S=x^2(1-x^2)^2=(x-x^3)^2$, $x=\pm\sqrt{(-1)}$, ed in conseguenza $\frac{m+nx^3}{(x-x^3)^2}-A-A'x=0$

$$\left(\frac{d\frac{m+nx^3}{(x-x^3)^2}}{dx}\right)-A'-(B+B'x)(2x)=0$$

nelle quali dovremo fare prima $x=+\sqrt{(-1)}$, poi $x=-\sqrt{(-1)}$, e s'avranno così quattro equazioni, le quali ci daranno i valori di A, A', B, B'. Lasciamo ai nostri Leggitori l'esercizio di farne il calcolo.

VI. *Massimi e Minimi*.

§. 57. Rappresentando per $\phi(x)$ una qualunque funzione di x, e per A, B, C i tre valori che essa riceve quando $x=a-\omega$; $x=a$; $x=a+\omega$, cioè supponendo che quando

$x=a-\omega$ sia $\phi(x)=A$

$x=a$ $\qquad \phi(x)=B$

$x=a+\omega$ $\qquad \phi(x)=C$

comunque d'altr'onde piccolissimo sia ω, se B è maggiore di A, ed anche di C, si dice che la funzione $\phi(x)$ diviene un *Massimo* per $x=a$; e se B è minore di A e di C, si dice che la funzione $\phi(x)$ diviene un *Minimo* per $x=a$. Per esempio, facendo $\phi(x)=x(2a-x)$, quando . . . . :

$x=a-\omega$; $x(2a-x)=a^2-\omega^2$

$x=a$; $\qquad x(2a-x)=a^2$

$x=a+\omega$; $x(2a-x)=a^2-\omega^2$,

e si vede che il valore di $x(2a-x)$ è *Massimo* per $x=a$, poichè è più grande di tutti quei che corrispondono ad $x=a-\omega$, $x=a+\omega$ comunque piccolo si prenda ω.

Una quantità adunque diviene *Massima* o *Minima*, alloraquando ella cresce o scema finó ad un certo termine al di là del quale immediatamente torna a scemare nel caso del *Massimo*, ed a crescere nel caso del *Minimo*. Il Calcolo Differenziale poi ci somministra il metodo di determinare i *Massimi* e *Minimi* delle funzioni, quando queste ne siano capaci.

Sia pertanto $\varphi(x)$ quella funzione che deve divenire *Massima* o *Minima* quando $x = a$: dovrà essere adunque $\varphi(a) > {\varphi(a+\omega) \atop \varphi(a-\omega)}$ nel caso del *Massimo*, e $\varphi(a) < {\varphi(a+\omega) \atop \varphi(a-\omega)}$ nel caso del *Minimo*; e conservando x invece di a (rammentandosi sempre che quest' x è il valore che conviene al *Massimo* o al *Minimo*) dovrà essere

$$\varphi(x) > {\varphi(x+\omega) \atop \varphi(x-\omega)} \text{ per il } Massimo;\ \varphi(x) < {\varphi(x+\omega) \atop \varphi(x-\omega)} \text{ per il } Minimo.$$

Dunque le quantità $\varphi(x+\omega) - \varphi(x)$; $\varphi(x-\omega) - \varphi(x)$ dovranno essere negative nel *Massimo*, positive nel *Minimo*.

Facciamo lo sviluppo di $\varphi(x \pm \omega)$ secondo le formule del §. 36, prendendo due soli termini e tenendo conto del resto, sarà

$\varphi(x \pm \omega) = \varphi(x) \pm \omega\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{\omega^2}{2}\varphi''(x \pm p)$, essendo $\varphi''(x) = \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)$, e p una quantità contenuta fra o ed ω: dunque le quantità

$$+\omega\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{\omega^2}{2}\varphi''(x+p);$$

$$-\omega\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{\omega^2}{2}\varphi''(x-p)$$

dovranno essere simultaneamente negative nel *Massimo*, positive nel *Minimo*, comunque piccolo d' altr' onde si prenda ω.

Ma date due quantità ωP, $\omega^2 Q$ possiamo sempre trovare per ω un valore tanto piccolo che renda $\omega^2 Q$ minore di ωP, ed in conseguenza che $\omega P \pm \omega^2 Q$ sia una quantità positiva o negativa secondo che lo è ωP, mentre tutti i valori di ω ancor minori di quello, godono della medesima proprietà (infatti $\omega P : \omega^2 Q :: P : \omega Q$; dunque diminuendo ω possiam rendere $\omega Q < P$, ovvero $\omega^2 Q < \omega P$, ed è chiaro che a più forte ragione i valori di ω più piccoli goderanno di tal proprietà) dunque potremo prendere ω tanto piccolo che il valore di ciascuna di queste quantità

$$+\omega\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{\omega^2}{2}\varphi''(x+p);$$

$$-\omega\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{\omega^2}{2}\varphi''(x-p)$$

sia positivo o negativo se tale è il di lei primo termine. Ma di questi due primi termini uno è necessariamente positivo, l'altro necessariamente negativo; dunque finchè quei due primi termini sussisteranno, una di quelle quantità sarà positiva e l' altra negativa: dunque non avrà luogo nè *Massimo* nè *Minimo* per tutti quei valori di x, i quali lasciano sussistere i suddetti due primi termini, poichè allora non possono quelle due quantità essere positive insieme e negative insieme: dunque il massimo o il minimo potrà solo aver luogo per quei valori di x, i quali annullano quei due primi termini: ora questi s' annullano quando $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = 0$; dunque l' equazione $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = 0$ sarà quella la quale ci darà uno o più valori di x che sostituiti in $\varphi(x)$ renderanno questa funzione *Massima* o *Minima*.

Cerchiamo adesso il criterio per riconoscere quando il valore di x dato da quell' equazione la rende *Massima*, e quando la rende *Mnima*: per questo sviluppiamo $\varphi(x \pm \omega)$ in serie prendendo tre termini dello sviluppo e tenendo conto del resto.

Sarà in questo caso

$$\varphi(x \pm \omega) = \varphi(x) \pm \omega\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) \pm \frac{\omega^3}{2.3}\varphi'''(x \pm p);$$

dunque, a cagione di $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = 0$, bisognerà che le due quantità

$$+\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) + \frac{\omega^3}{2.3}\varphi'''(x+p);$$

$$+\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) - \frac{\omega^3}{2.3}\varphi'''(x-p)$$

siano negative per il *Massimo*, e positive per il *Minimo*.

Ora potrà sempre prendersi ω tanto piccolo che il valore di quelle quantità dipenda dai loro primi termini, in modo che esse siano negative se i primi termini $\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)$ sono negativi, e positive se positivi: dunque, essendo ω^2 sempre positivo, quel valore di x renderà la funzione $\varphi(x)$ un *Massimo* se $(\frac{d^2\varphi}{dx^2})$ sarà negativo, e la renderà un *Minimo* se $(\frac{d^2\varphi}{dx^2})$ sarà positivo.

Il *Massimo* pertanto ci è dato da queste due equazioni $(\frac{d\varphi}{dx}) = 0$, $(\frac{d^2\varphi}{dx^2}) < 0$; ed il *Minimo* da quest' altre $(\frac{d\varphi}{dx}) = 0$; $(\frac{d^2\varphi}{dx^2}) > 0$.

Per farne un esempio proponiamoci questo Problema.

Tre Giocatori hanno perduta fra tutti una somma a; il secondo ha perduto il doppio del primo, e le tre perdite sono tali che il loro prodotto è un *Massimo*: quale è la perdita di ciascuno?

Supponendo x la perdita del primo, $2x$ sarà quella del secondo, $a - 3x$ quella del terzo: dovrà dunque $x(2x)(a - 3x) = 2ax^2 - 6x^3$ essere un *Massimo*. Avremo pertanto per determinarlo

$\frac{d(2ax^2 - 6x^3)}{dx} = 0$, e quindi $2ax - 9x^2 = 0$, da cui $x = 0$; $x = \frac{2}{9}a$.

Per sapere poi se questi due valori di x ci danno il *Massimo* o il *Minimo*, si sostituiscano in

$\frac{d^2(2ax^2 - 6x^3)}{dx^2} = 4a - 36x$, e per $x = 0$, avremo quest' ultima quantità $= 4a$ e perciò positiva; e per $x = \frac{2}{9}a$, avremo la medesima $= -4a$ e perciò negativa. Il secondo valore adunque di x soddisfarà al Problema, e le tre perdite saranno

$\frac{2}{9}a$; $\frac{4}{9}a$; $\frac{1}{3}a$.

§. 58. Se il valore di x datoci dall' equazione $(\frac{d\varphi}{dx}) = 0$ annullasse ancora $(\frac{d^2\varphi}{dx^2})$, allora riprendendo lo sviluppo di $\varphi(x \pm \omega)$, ed impiegando un termine di più, si avrebbe

$$\varphi(x \pm \omega) = \varphi(x) \pm \omega(\frac{d\varphi}{dx}) + \frac{\omega^2}{2}(\frac{d^2\varphi}{dx^2}) \pm \frac{\omega^3}{2\cdot3}(\frac{d^3\varphi}{dx^3}) + \frac{\omega^4}{2\cdot3\cdot4}\varphi''''(x \pm p);$$

ed essendo $(\frac{d\varphi}{dx}) = 0$, $(\frac{d^2\varphi}{dx^2}) = 0$, le due quantità

$$+ \frac{\omega^3}{2\cdot3}(\frac{d^3\varphi}{dx^3}) + \frac{\omega^4}{2\cdot3\cdot4}\varphi''''(x + p);$$
$$- \frac{\omega^3}{2\cdot3}(\frac{d^3\varphi}{dx^3}) + \frac{\omega^4}{2\cdot3\cdot4}\varphi''''(x - p)$$

dovranno essere negative nel *Massimo*, positive nel *Minimo*. Ora si può prendere ω tanto piccolo che il valore assoluto del primo termine di una di quelle quantità, superi quello del secondo, ed allora i valori di quelle due quantità siano positivi se tali sono i lor primi termini, e negativi se egualmente lo sono i detti termini: ma quei due primi termini sono necessariamente di segno contrario; dunque sarà impossibile che abbia luogo il *Massimo* o il *Minimo*, se quei termini non si annullano, cioè se $(\frac{d^3\varphi}{dx^3})$ non è nullo. Acciò dunque la funzione $\varphi(x)$ divenga *Massima* o *Minima*, bisogna che il valore di x, il quale annulla $(\frac{d\varphi}{dx})$, $(\frac{d^2\varphi}{dx^2})$, annulli anche $(\frac{d^3\varphi}{dx^3})$.

In quest' ultimo caso impiegando ancora il termine seguente nello sviluppo di $\varphi(x \pm \omega)$, s' avrà

$$\varphi(x \pm \omega) = \varphi(x) \pm \omega(\frac{d\varphi}{dx}) + \frac{\omega^2}{2}(\frac{d^2\varphi}{dx^2}) \pm \frac{\omega^3}{2\cdot3}(\frac{d^3\varphi}{dx^3}) + \frac{\omega^4}{2\cdot3\cdot4}(\frac{d^4\varphi}{dx^4}) \pm \frac{\omega^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\varphi^{v}(x \pm p)$$

ed in conseguenza le quantità

$$\frac{\omega^4}{2\cdot3\cdot4}(\frac{d^4\varphi}{dx^4}) + \frac{\omega^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\varphi^{v}(x + p)$$
$$\frac{\omega^4}{2\cdot3\cdot4}(\frac{d^4\varphi}{dx^4}) - \frac{\omega^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\varphi^{v}(x - p)$$

dovranno essere negative nel *Massimo*, positive nel *Minimo*; dunque la funzione sarà un *Massimo* se $(\frac{d^4\varphi}{dx^4})$ sarà negativo; e sarà un *Minimo* se $(\frac{d^4\varphi}{dx^4})$ sarà positivo.

Nella stessa guisa potrebbe dimostrarsi che se il valore di

x dato dall' equazione $(\frac{d\varphi}{dx}) = 0$ rende ancora nullo $(\frac{d^4\varphi}{dx^4})$, allora acciocchè abbia luogo il *Massimo* od il *Minimo*, conviene che nello stesso tempo si annulli $(\frac{d^5\varphi}{dx^5})$: vi sarà il *Massimo* se $(\frac{d^6\varphi}{dx^6})$ sarà negativo, e vi sarà il *Minimo* nel caso opposto.

In generale se il valore di x annulla anche $(\frac{d^{2n}\varphi}{dx^{2n}})$, acciocchè abbia luogo il *Massimo* od il *Minimo*, conviene che s' annulli nello stesso tempo $\left(\frac{d^{2n+1}\varphi}{dx^{2n+1}}\right)$; ed il *Massimo* avrà luogo se $\left(\frac{d^{2n+2}\varphi}{dx^{2n+2}}\right) < 0$, ed il *Minimo* nel caso opposto.

Se la funzione $\varphi(x) = y$ che deve divenire un *Massimo* od un *Minimo*, sarà data per una equazione $F(x, y) = 0$, ne prenderemo allora l' equazione differenziale $(\frac{dF}{dx}) + (\frac{dy}{dx})(\frac{dF}{dy}) = 0$, e facendo $(\frac{dy}{dx}) = 0$, avremo $(\frac{dF}{dx}) = 0$, equazione, la quale combinata con la proposta, ci darà i due valori di x e di y che corrispondono al *Massimo* od al *Minimo*.

Prenderemo in seguito la differenziale seconda di $F(x, y) = 0$, vi faremo $(\frac{dy}{dx}) = 0$ e ne ricaveremo il valore di $(\frac{d^2y}{dx^2})$, nel quale ponendo i respettivi valori di x e di y, se avremo una quantità negativa, la funzione y diverrà *Massima*, e se quella quantità sarà positiva, la funzione sarà *Minima*.

Può accadere che il valore di x, il quale annulla $(\frac{dy}{dx})$, renda infinite le quantità $(\frac{d^2y}{dx^2})$, $(\frac{d^3y}{dx^3})$ ec.: abbiamo allora un contrassegno che per quel valore di x non può aver luogo lo sviluppo di y (§. 40) secondo le potenze intiere e crescenti di ω. In questo caso, supponendo $= a$ quel valore di x, prenderemo lo sviluppo di $\varphi(a + \omega)$ secondo le potenze crescenti di ω, siano queste intiere o fratte (§. 44), e dall' esame di quello

rileveremo se $x = a$ rende $\varphi(x)$ *Massima* o *Minima*.

Sarà però più utile, in questi casi, prendere se si può, un' altra funzione Y, la quale abbia il *Massimo* o il *Minimo*, quando lo ha la y, senza però risentire nello sviluppo l' inconveniente di quella, e cercare il valore di x che rende Y *Massima* o *Minima*; questo renderà ancor tale nello stesso tempo la y.

§. 59. Facciamo alcuni esempj.

I. Si dimanda in quali casi questa funzione

$y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ diviene un *Massimo* o un *Minimo*?

Essendo $(\frac{dy}{dx}) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$, avremo per determinare x, quest' equazione

$x^4 - 4x^3 + 3x^2 = 0$, dalla quale si ricava

$x = 0$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 3$. Di più si ha

$$(\frac{d^2y}{dx^2}) = 20x^3 - 60x^2 + 30x$$

$$(\frac{d^3y}{dx^3}) = 60x^2 - 120x + 30$$

$$(\frac{d^4y}{dx^4}) = 120x - 120:$$

dunque i due primi valori di x, i quali annullano $(\frac{d^2y}{dx^2})$ senza annullare $(\frac{d^3y}{dx^3})$ non portano nè *Massimo* nè *Minimo*; il terzo valore $x = 1$ ci dà un *Massimo*, poichè $(\frac{d^2y}{dx^2}) = -10$; ed in fine il quarto valore $x = 3$ ci dà un *Minimo*, poichè $(\frac{d^2y}{dx^2}) = 90$.

II. Di tutti i triangoli che hanno la stessa base a, e la medesima altezza b, si dimanda quale sarà quello che ha il minimo perimetro?

Chiamando x un segmento della base, cui corrisponde l' altezza b, l' altro segmento sarà $a - x$: il perimetro adunque sarà (rappresentandolo per y)

$y = a + \sqrt{(x^2 + b^2)} + \sqrt{(b^2 + (a - x)^2)}$; e quindi $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + b^2)}} - \frac{a - x}{\sqrt{(b^2 + (a - x)^2)}} = 0$, ovvero $x\sqrt{(b^2 + (a - x)^2)} = (a - x)\sqrt{(x^2 + b^2)}$, dalla quale si ricava $x = \frac{a}{2}$: dunque il ricercato triangolo è l' isoscele. Il perimetro poi di questo triangolo è veramente un minimo; poichè prendendo il valore di $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ e facendovi $x = \frac{a}{2}$, questo valore diviene una quantità positiva, come è facile assicurarsene facendo il calcolo.

III. Si dimanda per quali valori di x la funzione $y = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x$ diviene un *Massimo* o *Minimo*? In questo caso abbiamo

$\left(\frac{dy}{dx}\right) = 4x^3 - 24x^2 + 48x - 32x = 0$, da cui si ricava $x = 2$, $x = 2$, $x = 2$. Ora questo valore di x annulla $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 12x^2 - 48x + 48$, ed ancora annulla $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = 24x - 48$, e rende $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) = 24$, quantità positiva; dunque la proposta funzione diviene un *Minimo* quando $x = 2$.

§. 60. Veniamo ora a parlare dei *Massimi* e dei *Minimi* delle funzioni a più variabili.

E' primieramente osserviamo: 1°. che la natura della funzione debbe esser tale che tutte le variabili, le quali entrano nella di lei composizione, conducano nello stesso tempo al massimo o al minimo: poichè se alcune di esse conducessero al massimo ed altre al minimo, la funzione non potrebbe divenire nè massima nè minima: crescerebbe sempre in virtù di quelle che portano il minimo, e scemerebbe per quelle che portano al massimo: 2°. che essendo quelle variabili indipendenti, la funzione che è massima o minima per dei determinati valori delle variabili, si conserva ancor tale per ciascuno di quei valori in particolare, o considerando una sola variabile, e le altre costanti.

Sia $z = \varphi(x, y)$ una funzione di due variabili x ed y, e si cerchino i valori che convengono alle medesime variabili,

affinchè z sia un *Massimo* o un *Minimo*.

Supponiamo che x divenga $x \pm \omega$, ed y divenga $y \pm \theta$, e prendendo lo sviluppo di $\varphi(x \pm \omega, y \pm \theta)$ secondo le formule del §. 37, avremo (scriviamo indifferentemente φ, e $\varphi(x, y)$)

$$\varphi(x \pm \omega, y \pm \theta) = \varphi(x, y) \pm \left\{\omega\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \theta\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\right\} + \frac{1}{2}\left\{\omega^2\varphi''(x \pm p, y \pm q) + 2\omega\theta\varphi'_{,}(x \pm p, y \pm q) + \theta^2\varphi_{,,}(x \pm p, y \pm q)\right\}$$

essendo $p > 0, < \omega$; $q > 0, < \theta$; ed indicando per $\varphi''(x, y)$ la funzione $\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)$; per $\varphi'_{,}(x, y)$ la funzione $\left(\frac{d^2\varphi}{dxdy}\right)$; e per $\varphi_{,,}(x, y)$ la funzione $\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)$.

Se dunque noi rappresentiamo il secondo termine di questo sviluppo per F, ed il terzo per F', avremo

$\varphi(x \pm \omega, y \pm \theta) = \varphi(x, y) \pm F + F'$.

Ragionando ora come abbiamo fatto al (§. 57) per le funzioni ad una sola variabile, si vedrà che $\varphi(x, y)$ sarà un massimo quando le quantità $+F + F'$; $-F + F'$ saranno negative; e che sarà un minimo quando le medesime quantità saranno positive, comunque piccoli d' altr' onde possano prendersi ω e θ: vedremo di più che potremo sempre dare ad ω e θ dei valori così piccoli che le quantità $F + F'$; $-F + F'$ siano positive o negative se lo sono i loro primi termini F, $-$F: ora di questi due termini uno essendo sempre necessariamente positivo, e l' altro necessariamente negativo, finchè essi sussisteranno, le due quantità non potranno essere positive insieme e negative insieme, ma sarà una positiva e l' altra negativa: dunque acciò abbia luogo il *Massimo* o il *Minimo*, bisognerà che quei due primi termini svaniscano: dunque il *Massimo* o il *Minimo* sarà dato da quei valori di x e di y che rendono $F = 0$, ovvero $\omega\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \theta\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = 0$: questa equazione adunque servirà per determinare quei valori quando siano incogniti; e siccome le due variabili x ed y, come pure i loro aumenti, sono indipendenti fra loro, così quell' equazione si spezzerà in queste due

$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = 0$, $\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = 0$, dalle quali ricaveremo i valori che rendono quella funzione un *Massimo* o un *Minimo*.

Per conoscere poi se questi valori danno effettivamente un *Massimo* o un *Minimo*, si prenda lo sviluppo di $\varphi(x \pm \omega, y \pm \theta)$ fino alle terze potenze degli aumenti inclusive, ed avremo

$$\varphi(x \pm \omega, y \pm \theta) = \varphi(x, y) \pm \left\{\omega\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \theta\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\right\} + \frac{1}{2}\left\{\omega^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) + 2\omega\theta\left(\frac{d^2\varphi}{dxdy}\right) + \theta^2\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)\right\} \pm \frac{1}{2 \cdot 3}\left\{\omega^3\varphi'''(x \pm p, y \pm q) + \ldots\; 3\omega^2\theta\varphi''_{,}(x \pm p, y \pm q) + 3\omega\theta^2\varphi'_{,,}(x \pm p, y \pm q) + \theta^3\varphi_{,,,}(x \pm p, y \pm q)\right\},$$

che rappresenteremo per

$\varphi(x \pm \omega, y \pm \theta) = \varphi(x, y) \pm F + F' \pm F''$; ed essendo $F = 0$, sarà $\varphi(x \pm \omega, y \pm \theta) = \varphi(x, y) + F' \pm F''$: avremo adunque un *Massimo* se le quantità $F' + F''$; $F' - F''$ saranno negative, ed un *Minimo* se positive.

Ora i termini che compongono F' essendo di due dimensioni relativamente ad ω e θ, e quei che compongono F'' di tre dimensioni, possiamo sempre prendere ω e θ tanto piccoli che i valori di quelle quantità dipendano, per essere positivi o negativi, dal valore di F'; dunque avremo un *Massimo* quando $F' < 0$, ed un *Minimo* quando $F' > 0$.

Essendo $F' = \frac{1}{2}\left\{\omega^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) + 2\omega\theta\left(\frac{d^2\varphi}{dxdy}\right) + \theta^2\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)\right\}$,

se rappresentiamo per A, B, C, le funzioni $\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2\varphi}{dxdy}\right)$, $\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)$

allorchè x, y ricevono i valori che corrispondono al *Massimo* o al *Minimo*, dovrà nel caso del *Massimo* la quantità $F' = \omega^2A + 2\omega\theta B + \theta^2C$ essere negativa, e nel caso del *Minimo*, positiva: ma essendo

$$\omega^2A + 2\omega\theta B + \theta^2C = A\left(\omega + \frac{B\theta}{A}\right)^2 + \theta^2\left(C - \frac{B^2}{A}\right),$$

ed i quadrati $\left(\omega + \frac{B\theta}{A}\right)^2$, θ^2 sempre positivi, la quantità F' sarà

positiva se lo saranno le quantità A, C e $C - \frac{B^2}{A}$ (*a*), ovvero se essendo A e C positivi, sarà $AC > B^2$: al contrario la quantità F' sarà negativa quando A, C e $C - \frac{B^2}{A}$ saran negative, cioè quando $A < 0$; $C < 0$; $C - \frac{B^2}{A} < 0$; ma una quantità negativa moltiplicata per un' altra negativa, diviene positiva; dunque in quest' ultimo caso $\left(C - \frac{B^2}{A}\right)A$, ovvero $CA - B^2 > 0$, e perciò $CA > B^2$:

Dunque acciò abbia luogo il *Massimo* o il *Minimo* conviene che sia $CA > B^2$, di più per il *Massimo* dobbiamo avere $C < 0$, $A < 0$, e per il *Minimo* $C > 0$, $A > 0$. Quando poi manchi alcuna di queste condizioni, non avrà allora luogo nè *Massimo* nè *Minimo*.

Se i valori di x e di y che si trovano per il *Massimo* o per il *Minimo* annullano la quantità F', rendendo nulle le quantità A, B, C, allora per vedere se può aver luogo il *Massimo* o il *Minimo*, converrà nello sviluppo di $\varphi(x \pm \omega, y \pm \theta)$ prendere ancora i due ordini di termini

$$\pm \frac{1}{2 \cdot 3}\left\{\omega^3\left(\frac{d^3\varphi}{dx^3}\right) + 3\omega^2\theta\left(\frac{d^3\varphi}{dx^2dy}\right) + 3\omega\theta^2\left(\frac{d^3\varphi}{dxdy^2}\right) + \theta^3\left(\frac{d^3\varphi}{dy^3}\right)\right\}$$
$$+ \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}\left\{\omega^4\left(\frac{d^4\varphi}{dx^4}\right) + 4\omega^3\theta\left(\frac{d^4\varphi}{dx^3dy}\right) + 6\omega^2\theta^2\left(\frac{d^4\varphi}{dx^2dy^2}\right) + 4\omega\theta^3\left(\frac{d^4\varphi}{dxdy^3}\right) + \theta^4\left(\frac{d^4\varphi}{dy^4}\right)\right\};$$

e se tutti i termini moltiplicati per $\pm \frac{1}{2 \cdot 3}$ saranno ancora resi nulli da quei valori di x e di y, potrà esserci allora il *Massimo* o il *Minimo*: vi sarà il *Massimo* quando la quantità

(*a*) I due termini che compongono F', debbono essere insieme positivi, acciò lo sia F; imperocchè se uno fosse positivo e l' altro negativo, potrebbero prendersi ω e θ in maniera che di quei due termini o fosse maggiore il positivo, od il negativo, come a noi piace, e così F' diventerebbe positivo o negativo al nostro arbitrio.

$\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\left\{\omega^4\left(\frac{d^4\varphi}{dx^4}\right)+\text{ec.}\right\}$ sarà negativa, il *Minimo* nel caso opposto.

Indichiamo ora per G, H, L, P, Q le funzioni $\left(\frac{d^4\varphi}{dx^4}\right)$, $\left(\frac{d^4\varphi}{dx^3dy}\right)$ ec., quando invece di quelle variabili x, y si pongono i loro valori, e vediamo le condizioni che rendono la quantità $\omega^4G+4\omega^3\theta H+6\omega^2\theta^2L+4\omega\theta^3P+\theta^4Q$ positiva o negativa.

Ridotta questa quantità sotto la forma

$$G\left(\omega^2+\frac{2H\omega\theta}{G}\right)^2+Q\left(\theta^2+\frac{2P\omega\theta}{Q}\right)^2+2\omega^2\theta^2\left(3L-\frac{2H^2}{G}-\frac{2P^2}{Q}\right),$$

si vede che vi sarà il *Massimo* quando

$G<0$, $Q<0$, $3L-\frac{2H^2}{G}-\frac{2P^2}{Q}<0$; ed il *Minimo* nel caso opposto; e così di seguito.

§. 61. Ma per dare la Teorìa dei *Massimi* e dei *Minimi* in tutta la sua generalità, rappresentiamo per $\varphi(x, y, z, u \text{ ec.})$, una funzione di quante si vogliono variabili, e cerchiamo i valori che queste debbono avere, affinchè la funzione divenga *Massima* o *Minima*.

Prendendo lo sviluppo di $\varphi(x\pm\omega, y\pm\theta, z\pm\pi, u\pm\xi \text{ ec.})$, secondo le formule del §. 37, e supponendo che sia terminato a quell' ordine di termini che ci abbisogna, acciò abbiano luogo i ragionamenti fatti ai §§. antecedenti, avremo

$$\begin{aligned}\varphi(x\pm\omega, y\pm\theta \text{ ec.}) = \varphi(x, y \text{ ec.}) &\pm \left\{\omega\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)+\theta\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)+\pi\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)+\xi\left(\frac{d\varphi}{du}\right)+\text{ec.}\right\}\\ &+\frac{1}{2}\left\{\omega^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)+2\omega\theta\left(\frac{d^2\varphi}{dxdy}\right)+2\omega\pi\left(\frac{d^2\varphi}{dxdz}\right)+2\omega\xi\left(\frac{d^2\varphi}{dxdu}\right)+\text{ec.}\right.\\ &+\theta^2\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)+2\theta\pi\left(\frac{d^2\varphi}{dydz}\right)+2\theta\xi\left(\frac{d^2\varphi}{dydu}\right)+\text{ec.}\\ &+\pi^2\left(\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)+2\pi\xi\left(\frac{d^2\varphi}{dzdu}\right)+\text{ec.}\\ &\left.+\xi^2\left(\frac{d^2\varphi}{du^2}\right)+\text{ec.}\right\}\pm\text{ec.}\end{aligned}$$

Indicando ora il secondo termine per F, ed il terzo per F',

le due quantità $F+F'$, $-F+F'$ debbono essere negative nel *Massimo*, e positive nel *Minimo*, ciò che potrà accadere se $F=0$; avremo adunque per determinare le variabili x, y, z ec., l'equazioni $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)=0$, $\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)=0$, $\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)=0$ ec., le quali sono tante di numero, quante le variabili stesse; e la funzione sarà *Massima* quando $F'<0$, e *Minima* nel caso opposto.

Facciamo
$$\begin{aligned}F'=\frac{1}{2}\{&\omega^2A+2\omega\theta A'+2\omega\pi A''+2\omega\xi A'''+\text{ec.}\\ &+\theta^2B+2\theta\pi B'+2\theta\xi B''+\text{ec.}\\ &+\pi^2C+2\pi\xi C'+\text{ec.}\\ &+\xi^2D+\text{ec.}\}:\end{aligned}$$

la quantità posta adunque fra le parentesi dovrà divenire positiva o negativa.

Questa quantità soffre le riduzioni seguenti

$$\begin{aligned}2F'=A\left(\omega+\frac{A'\theta+A''\pi+A'''\xi+\text{ec.}}{A}\right)^2-\frac{1}{A}(A'\theta+A''\pi+A'''\xi+\\ \text{ec.})^2+\theta^2B+2\theta\pi B'+2\theta\xi B''+\text{ec.}+\pi^2C+2\pi\xi C'+\\ \text{ec.}+\xi^2D+\text{ec.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2F'=A\left(\omega+\frac{A'\theta+A''\pi+A'''\xi+\text{ec.}}{A}\right)^2+L\theta^2+2L'\theta\pi+2L''\pi\xi+\\ \text{ec.}+M\pi^2+2M'\pi\xi+\text{ec.}+N\xi^2+\text{ec.}\end{aligned}$$

essendo L, L' ec. quantità che si trovano facilmente, eseguendo il quadrato di ciò che moltiplica $-\frac{1}{A}$, e riunendo i termini simili:

$$\begin{aligned}2F'=A\left(\omega+\frac{A'\theta+\text{ec.}}{A}\right)^2+L\left(\theta+\frac{L'\pi+L''\xi+\text{ec.}}{L}\right)^2-\frac{1}{L}(L'\pi+\\ L''\xi+\text{ec.})^2+M\pi^2+2M'\pi\xi+\text{ec.}+N\xi^2+\text{ec.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2F'=A\left(\omega+\frac{A'\theta+\text{ec.}}{A}\right)^2+L\left(\theta+\frac{L'\pi+L''\xi+\text{ec.}}{L}\right)^2+P\pi^2+\\ 2P'\pi\xi+\text{ec.}+Q\xi^2+\text{ec.}\end{aligned}$$

$$2F' = A\left(\omega + \frac{A'\theta + \text{ec.}}{A}\right)^2 + L\left(\theta + \frac{L'\pi + \text{ec.}}{L}\right)^2 + P\left(\pi + \frac{P'\xi + \text{ec.}}{P}\right)^2 - \frac{1}{P}(P'\xi + \text{ec.})^2 + Q\xi^2 + \text{ec.}$$

$$2F' = A\left(\omega + \frac{A'\theta + \text{ec.}}{A}\right)^2 + L\left(\theta + \frac{L'\pi + \text{ec.}}{L}\right)^2 + P\left(\pi + \ldots \frac{P'\xi + \text{ec.}}{P}\right)^2 + R(\pi + \text{ec.})^2 + \text{ec.};$$

sarà dunque F' positiva, ovvero la funzione proposta diverrà un *Minimo* se $A > o$, $L > o$, $P > o$, $R > o$, ec., ed un *Massimo* nel caso opposto.

Alcune delle quantità A, L, P ec., potrebbero esser nulle; allora il *Massimo* si avrebbe quando tutte le quantità residue sono negative, ed il *Minimo* nel caso opposto.

Le quantità A, L, P, R ec., sono date per mezzo delle quantità A, B, C ec., A', B', C' ec. ec.

Applichiamo tutta questa Teoria alle funzioni di tre variabili.

Sia $\varphi = \varphi(x, y, z)$, ed avremo per determinare i valori che corrispondono al *Massimo* ed al *Minimo* le tre equazioni $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = o$, $\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = o$, $\left(\frac{d\varphi}{dz}\right) = o$.

Sarà poi
$$\begin{aligned} 2F' = {} & A\omega^2 + 2\omega\theta A' + 2\omega\pi A'' \\ & + B\theta^2 + 2\theta\pi B' \\ & + C\pi^2. \end{aligned}$$

e quindi

$$2F' = A\left(\omega + \frac{A'\theta + A''\pi}{A}\right)^2 - \frac{1}{A}(A'\theta + A''\pi)^2 + B\theta^2 + 2\theta\pi B' + C\pi^2:$$

$$2F' = A\left(\omega + \frac{A'\theta + A''\pi}{A}\right)^2 + \left(B - \frac{A'^2}{A}\right)\theta^2 + \left(B' - \frac{A'A''}{A}\right)2\theta\pi + \left(C - \frac{A''^2}{A}\right)\pi^2;$$

e facendo $B - \frac{A'^2}{A} = L$, $B' - \frac{A'A''}{A} = L'$, $C - \frac{A''^2}{A} = M$, s'avrà

$$2F' = A\left(\omega + \frac{A'\theta + A''\pi}{A}\right)^2 + L\theta^2 + 2L'\theta\pi + M\pi^2:$$

$$2F' = A\left(\omega + \frac{A'\theta + A''\pi}{A}\right)^2 + L\left(\theta + \frac{L'\pi}{L}\right)^2 + \left(M - \frac{L'^2}{L}\right)\pi^2:$$

Dunque avrà luogo il *Massimo* quando $A < o$, $L < o$, $M - \frac{L'^2}{L} < o$; ed il *Minimo* nel caso opposto.

Da quanto abbiamo detto risulta questa conclusione generale: se in una funzione qualunque delle variabili x, y, z ec., poniamo in luogo di esse le quantità $x + \omega$, $y + \theta$, $z + \pi$ ec., e sviluppiamo la funzione secondo le potenze ed i prodotti di quegli aumenti, i termini ove questi sono alla prima dimensione, eguagliati separatamente a zero, daranno le equazioni necessarie perchè la proposta divenga un *Massimo* o un *Minimo*. In seguito considereremo la quantità composta di tutti i termini ove ω, θ, π formeranno due dimensioni, e bisognerà che questa quantità sia positiva per il *Minimo*, negativa per il *Massimo*, qualunque d'altr'onde possano essere i valori di ω, θ ec.

Se tutti questi termini svanissero insieme, bisognerebbe ancora per l'esistenza del *Massimo* o del *Minimo* che tutti i termini ove ω e θ ec., formano tre dimensioni, s'annullassero insieme e che la quantità composta dei termini ove ω e θ ec., formano quattro dimensioni fosse sempre positiva per il *Minimo*, negativa per il *Massimo*, e così di seguito.

Sin ora noi abbiam supposto essere le variabili indipendenti tra loro; ma se alcune condizioni del Problema stabilissero delle relazioni tra quelle variabili, allora il metodo da seguirsi si presenta da se medesimo: conviene eliminare dalla funzione che divenir deve *Massima* o *Minima*, tante variabili, quante sono le equazioni, le quali esprimono le suddette relazioni, mentre le variabili che rimarranno, saranno allora assolutamente indipendenti tra loro.

Per esempio, se dimandasi quale di tutti i parallelepipedi rettangoli che hanno la stessa superficie $2a^2$, è quello che ha la maggior solidità, chiamando u questa solidità, ed indicando per x, y, z le tre dimensioni del parallelepipedo, avremo $u = xyz = $ *Massimo*: ma tra le tre variabili abbiamo quest'equazione $xy + yz + xz = a^2$, dalla quale si ricava $x = \frac{a^2 - yz}{y + z}$, dunque la funzione da diventare un *Massimo* sarà $\frac{yz(a^2-yz)}{y+z}=u$, e questo *Massimo* avrà luogo per quei valori di y e z che rendono $(\frac{du}{dy})=0$, $(\frac{du}{dz})=0$, cioè quando

$y=\frac{a}{\sqrt{3}}$, $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$, $z=\frac{a}{\sqrt{3}}$. Il ricercato parallelepipedo sarà in conseguenza un cubo il cui lato è $a:\sqrt{(3)}$.

§. 62. Facciamo alcune applicazioni delle sopra spiegate Teorie.

1°. Quale è il *Massimo Cilindro* tra tutti quei che possono iscriversi in un cono retto?

Indicando per a l'altezza del cono, per b il diametro della sua base, e per x l'altezza del cilindro da inscriversi, sarà la di lui solidità $\frac{\pi b(a-x)^2 x}{a}$, (dalla lettera π è rappresentata la semiperiferia per il raggio 1), la quale dovendo essere un *Massimo*, ci darà per determinare x quest'equazione $a^2-4ax+3x^2=0$, d'onde si ricaverà $x=\frac{1}{3}a$: il ricercato cilindro debbe adunque avere per altezza la terza parte di quella del cono.

2°. Date nello spazio due curve a doppia curvatura, si dimanda la loro più corta distanza?

Siano $z=\varphi(x)$, $y=F(x)$ l'equazioni delle projezioni della prima curva sopra i piani degli x, z, e degli x, y: sieno $z=\varphi'(x)$, $y=F'(x)$ l'equazioni delle projezioni della seconda curva sopra i suddetti piani. Sieno x, y, z le coordinate di un punto della prima curva; u, y', z' le coordinate di un punto della seconda, ed il quadrato della distanza di questi due punti sarà espressa da

$(x-u)^2+(z-z')^2+(y-y')^2=(x-u)^2+(\varphi x-\varphi' u)^2+(Fx-F'u)^2$: ora dovendo questa distanza esser *Minima*, sarà anche tale il doppio del di lei quadrato, e perciò facendo

$2\Delta=(x-u)^2+(\varphi x-\varphi' u)^2+(Fx-F'u)^2$, dovrà 2Δ essere un *Minimo*.

Applichiamo a questa funzione 2Δ le regole date al §. 60, ed avremo

$$(\tfrac{d\Delta}{dx})=(x-u)+(\varphi x-\varphi' u).(\tfrac{d\varphi}{dx})+(Fx-F'u).(\tfrac{dF}{dx})=0$$

$$(\tfrac{d\Delta}{du})=-\{(x-u)+(\varphi(x)-\varphi' u).(\tfrac{d\varphi'}{du})+(Fx+F'u).(\tfrac{dF'}{du})\}=0,$$

le quali due equazioni serviranno a determinare i due valori di x e di u, e per mezzo di essi avremo ancora i valori di y, z, y', z'.

Poniamo $\varphi(x)=a+bx$, $F(x)=c+ex$, $\varphi'(u)=A+Bu$, $F'(u)=C+Eu$, sieno cioè due linee rette le curve date, ed avremo allora queste due equazioni per la determinazione di u e di x

$$(\tfrac{d\Delta}{dx})=0=x-u+b(a-A+bx-Bu)+e(c-C+ex-Eu)$$

$$(\tfrac{d\Delta}{du})=0=-\{x-u+B(a-A+bx-Bu)+E(c-C+ex-Eu)\}.$$

Differenziamo queste equazioni, e si avrà

$$(\tfrac{d^2\Delta}{dx^2})=1+b^2+e^2$$

$$(\tfrac{d^2\Delta}{dxdu})=-1-bB-eE$$

$$(\tfrac{d^2\Delta}{du^2})=1+B^2+E^2.$$

Siccome i valori di $(\frac{d^2\Delta}{dx^2})$, $(\frac{d^2\Delta}{du^2})$ son positivi, così la ricercata distanza sarà veramente *Minima*, se però avrà luogo la condizione $(\frac{d^2\Delta}{dx^2})(\frac{d^2\Delta}{du^2})>(\frac{d^2\Delta}{dxdu})^2$, ovvero $(\frac{d^2\Delta}{dx^2})(\frac{d^2\Delta}{du^2})-(\frac{d^2\Delta}{dxdu})^2>0$, cioè

$(1+b^2+e^2)(1+B^2+E^2)-(1+bB+eE)^2>0$. Questo ultimo rapporto sempre sussiste, poichè può mettersi sotto la forma

$(b-B)^2+(e-E)^2+(bE-eB)^2>0$; dunque possiam sempre soddisfare alla proposta dimanda.

Ma lasciando le cose Geometriche, sopra le quali avremo occasione di tornare, trattiamo alcune questioni relative ai *Massimi* e *Minimi* delle Scienze Fisiche.

3°. Data (Fig. 15) la linea EF di posizione relativamente al piano PQ, e dato egualmente di posizione il punto fisico C, si dimanda il punto I della retta EF, in cui va collocato un lume, acciò l'illuminazione in C sia la *Massima*?

E' una legge d'Ottica dimostrata dalla Teorìa (a) e confermata dall'esperienza, che l'intensità della luce in un punto fisico, o l'illuminazione che questo riceve da un punto illuminante, è in ragion composta della diretta del seno dell'angolo d'incidenza fatto dalla linea, condotta da quel punto raggiante al punto fisico, con la superficie di questo punto fisico medesimo, e dell'inversa del quadrato della distanza dei due punti illuminante ed illuminato. Questo premesso, dal punto I si abbassi la perpendicolare sopra il piano PQ, e questa sia IH: si uniscano i punti E, H; C, H, e dal punto C abbassata la perpendicolare CD sopra EH, si uniscano C, I con la linea CI.

L'illuminazione che il punto C riceve dal lume situato in I sarà $\frac{IH}{CI}\cdot\frac{1}{CI^2}=\frac{IH}{CI^3}$.

Poniamo EI $=x$, *sen* IEH $=m$, *cos* IEH $=n$, CD $=b$, ED $=a$, e sarà EH $=xn$, IH $=xm$, CH $=\sqrt{(b^2+a^2-2nax+n^2x^2)}$,

IC $=\sqrt{(m^2x^2+b^2+a^2-2nax+n^2x^2)}=\sqrt{(x^2-2nax+b^2+a^2)}$; avremo adunque l'illuminazione in C espressa dalla formula $\frac{xm}{(x^2-2nax+b^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$; e questa funzione differenziata ed

(a) Si veda l'Opera del Geometra Fossombroni „ *Saggio di Ricerche sull' Intensità del Lume* „ da questa abbiamo presi i Problemi d'Ottica quì riportati.

eguagliata a zero, ci dà $x=\frac{na}{4}\pm\sqrt{(\frac{n^2a^2}{16}+\frac{b^2+a^2}{2})}$.

Il doppio segno ci dice che il Problema ha due soluzioni, potendosi ritrovare al disotto del piano nel prolungamento della linea EF, un punto che goda della medesima proprietà.

Ci potremmo assicurare che il ritrovato valore di x corrisponde precisamente ad un *Massimo*, facendo uso della regola data al §. 58.

Quando la linea EF è perpendicolare al piano PQ, si ha $n=0$, $a=0$, e quindi $x=b\sqrt{\frac{1}{2}}$; sarà dunque in questo caso $x:b::1:\sqrt{2}$, e questa proporzione ci dà una regola la quale può esser utile quando vogliasi in una torre collocare un fanale per illuminare l'imboccatura di un Porto, o altro ec.

4°. Data una superficie qualunque, si dimanda il luogo, in cui va posto un lume, acciò un punto preso in un piano qualunque, riceva la massima illuminazione?

Per facilitare la soluzione di questo Problema, supponiamo d'aver permutate le coordinate della data superficie curva in modo che l'origine sia nel punto da illuminarsi, ed il piano degli x e degli y sia quello stesso del punto fisico. Siano x, y, z le coordinate del luogo ove dee porsi il lume, e sarà $\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$ la distanza di questo lume dall'origine, cioè dal punto illuminato: l'intensità dell'illuminazione sarà dunque $z:\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}$, e quest'espressione deve diventare un *Massimo*.

Le tre variabili x, y, z sono legate tra di loro per la natura della curva, la quale possiamo supporre espressa da quest'equazione $z=\varphi(x,y)$, o semplicemente $z=\varphi$, essendo φ funzione delle due variabili x, y. Ora indicando per u la quantità che deve divenire un *Massimo*, avremo (61)

$$\left(\frac{du}{dx}\right)=\left(\frac{d\varphi}{dx}\right):(x^2+y^2+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}-3\varphi^2\cdot\left(\frac{d\varphi}{dx}\right):(x^2+y^2+\varphi^2)^{\frac{5}{2}}$$
$$-3\varphi\cdot x:(x^2+y^2+\varphi^2)^{\frac{5}{2}}=0$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right)=\left(\frac{d\varphi}{dy}\right):(x^2+y^2+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}-3\varphi^2\cdot\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\cdot(x^2+y^2+\varphi^2)^{\frac{5}{2}}$$
$$-3\varphi\cdot y:(x^2+y^2+\varphi^2)^{\frac{5}{2}}=0$$

ovvero $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)(x^2+y^2-2\varphi^2)-3\varphi\cdot x=0$

$$\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)(x^2+y^2-2\varphi^2)-3\varphi\cdot y=0,$$

dalle quali dovrà ricavarsi il valore di x e quello di y.

Sia la superficie curva quella di una sfera, e l' origine dell' ascisse sia nel centro: avremo allora $\varphi^2=a^2-x^2-y^2$, $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)=-\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2-y^2)}}$, $\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)=-\frac{y}{\sqrt{(a^2-x^2-y^2)}}$, e perciò

$$x\left\{(2a^2+x^2+y^2)-3\sqrt{(a^2-x^2-y^2)}\right\}=0$$

$$y\left\{(2a^2+y^2+x^2)-3\sqrt{(a^2-x^2-y^2)}\right\}=0$$

dalle quali si avrà $x=0$, $y=0$, $z=a$. Per aver dunque la *Massima* illuminazione in questo caso, conviene porre il lume nell' asse degli z, ove esso sega la superficie sferica; l' illuminazione poi è veramente *Massima*, poichè rimangono soddisfatti i criteri dati al §. 60.

SCOLIO. La ricerca dei *Massimi* e dei *Minimi*, ha luogo tanto nelle Matematiche pure che nelle miste, ed il Calcolo Differenziale mirabilmente risolve tutte le questioni di questo genere. Gli Antichi non han fatto invero gran passi in una tal carriera, se abbiasi riguardo al punto, cui noi siam giunti; ma quei passi son giganteschi, allorchè si considera che essi non aveano altro metodo che la sintesi, e che in conseguenza la forza di ingegno necessaria per immaginare le loro dimostrazioni, è di gran lunga superiore a quella che a noi abbisogna per la soluzione di siffatti Problemi. Per convincersi di questa verità, basta leggere alcune dimostrazioni di questo genere, dedotte dalla semplice Geometria, come sono quelle date da Apollonio, da Pappo, e nei tempi a noi più moderni da Torricelli, da Viviani, e da Cavalieri, e dopo la metà dell' ultimo secolo, dal Tommasini (a). Noi affidiamo un Problema al calcolo, il quale per una specie di meccanismo, ci conduce alla soluzione, senza che si veda alcuno di quegli anelli intermedj che uniscono i dati del quesito al risultato. Rimaniamo convinti, ma non persuasi.

(a) „ *De Maximis et Minimis ad Institutiones Geometricas accommodatis* „ Quest' Opera sarà sempre stimata dagli Amatori della Sintesi.

VII. *Uso del Calcolo Differenziale nella Teoria delle Equazioni.*

§. 64. RAppresentiamo per

$$Fx=x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots\ldots+Vx+U=0$$

una equazione qualunque dell' ordine m^{esimo}.

Siano α, β, γ ec., le radici reali dell' equazione $Fx=0$, disposte secondo l' ordine di grandezza, cominciando per le più grandi positive, e finendo per le più grandi negative, di modo che $\alpha>\beta$, $\beta>\gamma$ ec., e s' avrà questa equazione identica

$$Fx=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots\ldots\times fx, \ldots\ldots (a)$$

fx essendo una simil funzione di x, ma di un grado minore di m, la quale è composta delle radici immaginarie dell' equazione. Questa funzione

$fx=ax^n+bx^{n-1}+\ldots\ldots+p$ non può divenire nè nulla, nè negativa per qualunque valore reale che si dia ad x; imperocchè se divenisse nulla, quel valore di x sarebbe una radice reale di $fx=0$, ciò che è contro l' ipotesi; e se divenisse negativa, dando allora ad x un altro valore così grande che rendesse il primo termine ax^n maggiore della somma di tutti gli altri che lo seguono, s' avrebbero per questi due valori di x sostituiti in fx, due risultati di segno contrario: vi sarebbe un valore intermedio h che renderebbe $fx=0$: avrebbe allora quest' equazione una radice reale, ciò che è contro l' ipotesi.

Facciamo $\varphi x=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ ec., e l' equazione (a) prenderà la forma $Fx=\varphi x.fx$: ora differenziando quest' ultima equazione e dividendola per dx, avremo (F, φ, f tengono luogo di Fx, φx, fx)

$\left(\frac{dF}{dx}\right)=fx.\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)+\varphi x.\left(\frac{df}{dx}\right)$, e sarà

$\left(\frac{d\phi}{dx}\right) = (x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$ ec. $+ (x-\alpha)(x-\gamma)(x-\delta)$ ec. $+ (x-\alpha)(x-\beta)(x-\delta)$ ec. $+ (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ ec. $+$ ec.

Se pertanto facciamo in $\left(\frac{d\phi}{dx}\right)$, $x=\alpha$, s'avrà $\left(\frac{d\phi}{dx}\right) > 0$; se facciamo $x=\beta$, s'avrà $\left(\frac{d\phi}{dx}\right) < 0$; se facciamo $x=\gamma$, s'avrà $\left(\frac{d\phi}{dx}\right) > 0$, e così di seguito; e siccome facendo $x=\alpha, \beta, \gamma$ ec., abbiamo sempre $\phi(x)=0$, e $fx>0$; dunque

$x=\alpha$, darà $\left(\frac{dF}{dx}\right) > 0$

$x=\beta, \ldots\ldots \left(\frac{dF}{dx}\right) < 0$

$x=\gamma, \ldots\ldots \left(\frac{dF}{dx}\right) > 0$

ec. ec.

Ma prendendo il differenziale del polinomio Fx, e dividendolo per dx, si ha

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) = mx^{m-1} + (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} + \ldots\ldots + U;$$

dunque l'equazione $\left(\frac{dF}{dx}\right)=0$, avrà necessariamente delle radici reali, le quali caderanno fra i valori delle radici α, β, γ ec., o avranno per limiti queste radici medesime; poichè è dimostrato nella Teoria delle equazioni che se due numeri m ed n sostituiti in luogo dell'incognita in una equazione, la rendono di segni contrarj, tale equazione ha una radice reale contenuta fra quei due numeri. Indichiamo ora per $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ec., le radici reali dell'equazione $\left(\frac{dF}{dx}\right)=0$, ed egualmente dimostreremo che

$x=\alpha_1$ darà $\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) > 0$

$x=\beta_1 \ldots\ldots \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) < 0$

$x=\gamma_1 \ldots\ldots \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) > 0$

ec. ec.

d'onde segue che l'equazione $\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)=0$, nella quale

$$\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) = m(m-1)x^{m-2} + (m-1)(m-2)Ax^{m-3} + (m-2)(m-3)Bx^{m-4} + \ldots\ldots + 2T,$$

avrà anche delle radici reali, le quali caderanno fra i valori delle radici $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ec., o avranno queste quantità per limiti.

Risulta di qui che se l'equazione $Fx=0$ ha un numero n di radici eguali ad α, l'equazione $\left(\frac{dF}{dx}\right)$ ne ha un numero $n-1$ parimente eguali ad α; l'equazione $\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)$ ne ha un numero $n-2$; l'equazione $\left(\frac{d^3F}{dx^3}\right)$ ne ha un numero $n-3$, ed infine l'equazione $\left(\frac{d^{n-1}F}{dx^{n-1}}\right)$ ha una sola radice eguale ad α; ciò è d'altr'onde evidente, poichè il polinomio Fx contenendo il fattore $(x-\alpha)^n$, $\left(\frac{dF}{dx}\right)$ conterrà il fattore $(x-\alpha)^{n-1}$; $\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)$ conterrà il fattore $(x-\alpha)^{n-2}$; ed infine $\left(\frac{d^{n-1}F}{dx^{n-1}}\right)$ conterrà il fattore $x-\alpha$.

§. 65. Consideriamo adesso le radici dell'equazione $Fx=0$ per rapporto all'essere positive o negative, e supponiamo che le positive siano di numero p, e le negative di numero q.

Dovendo $\left(\frac{dF}{dx}\right)=0$ avere una radice di meno di $Fx=0$, essa conterrà necessariamente $p-1$ radici positive, e $q-1$ radici negative, e di più un'altra radice reale che potrà essere positiva o negativa; imperocchè una radice dell'equazione $\left(\frac{dF}{dx}\right)$ cadendo necessariamente fra due radici consecutive dell'equazione $Fx=0$, un numero $p-1$ di positive, caderanno fra le p positive, e $q-1$ negative fra le q negative, ed una fra la più piccola positiva, e la prima negativa, la quale potrà essere positiva o negativa.

Dunque se l' equazione Fx ha più radici positive che l' equazione $\left(\frac{dF}{dx}\right)=0$, essa non potrà averne che una di più, e lo stesso è delle negative.

Ora siccome ogni equazione ha un numero pari di radici positive se l' ultimo termine è positivo, ed un numero impari delle medesime radici se l' ultimo termine è negativo; così se gli ultimi termini senza x delle equazioni $Fx=0$, $\left(\frac{dF}{dx}\right)=0$ sono del medesimo segno, l' equazione $Fx=0$ non potrà avere una radice positiva di più che l' equazione $\left(\frac{dF}{dx}\right)=0$; dunque in questo caso ella non potrà avere che una radice negativa di più che quest' ultima equazione, ed egualmente essa non potrà avere una radice positiva di più che quando gli ultimi termini di $Fx=0$, $\left(\frac{dF}{dx}\right)=0$ hanno segni contrarj. Dunque in generale l' equazione $Fx=0$ non potrà avere che una radice positiva o negativa di più dell' equazione $\left(\frac{dF}{dx}\right)=0$ secondo che i loro ultimi termini sono di segno contrario o del medesimo segno. Per la stessa ragione l' equazione $\left(\frac{dF}{dx}\right)=0$ non potrà avere che una radice positiva o negativa di più dell' equazione $\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)=0$, secondo che i loro ultimi termini saranno di segno differente o del medesimo segno.

Ora osservando nella seguente Tavola, dopo ciò che abbiamo quì dimostrato,

$$Fx = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots\ldots + Tx^2 + Vx + U = 0$$

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) = mx^{m-1} + (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} + \ldots\ldots + 2Tx + V = 0$$

$$\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) = m(m-1)x^{m-2} + (m-1)(m-2)Ax^{m-3} + (m-2)(m-3)Bx^{m-4} + \ldots\ldots + 2T = 0$$

ec. ec.

$$\left(\frac{d^{m-3}F}{dx^{m-3}}\right) = 4\cdot5\ldots mx^3 + 3\cdot4\ldots(m-1)Ax^2 + 2\cdot3\ldots(m-2)Bx + 1\cdot2\ldots(m-3)C = 0$$

$$\left(\frac{d^{m-2}F}{dx^{m-2}}\right) = 3\cdot4\ldots mx^2 + 2\cdot3\ldots(m-1)Ax + 1\cdot2\cdot3\ldots(m-2)B = 0$$

$$\left(\frac{d^{m-1}F}{dx^{m-1}}\right) = 2\cdot3\ldots mx + 1\cdot2\cdot3\ldots(m-1)A = 0$$

vedremo che l' equazione $\left(\frac{d^{m-1}F}{dx^{m-1}}\right)=0$ ha la radice positiva o negativa $-\frac{A}{m}$ secondo che A è negativo o positivo; l' equazione $\left(\frac{d^{m-2}F}{dx^{m-2}}\right)=0$ non potrà avere una radice positiva o negativa di più della $\left(\frac{d^{m-1}F}{dx^{m-1}}\right)=0$ se B non è di segno contrario o dello stesso segno di A; l' equazione $\left(\frac{d^{m-3}F}{dx^{m-3}}\right)=0$ non potrà avere una radice positiva o negativa di più della $\left(\frac{d^{m-2}F}{dx^{m-2}}\right)=0$ se C non è di segno contrario o dello stesso segno di B, e così di seguito.

Da tutto ciò possiamo concludere che l' equazione

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots\ldots + Vx + U = 0$$

non può avere più radici positive o negative, delle variazioni o successioni di segni che si ritrovano in essa. Per conseguenza se l' equazione ha tutte le radici reali, ve ne saranno tante delle positive quante sono le variazioni dei segni, e tante delle negative quante sono le successioni; e questo è il famoso Teorema di Cartesio che gl' Inglesi attribuiscono ad Harriot.

§. 65. Consideriamo ora le radici dell' equazione $Fx = 0$ come reali o immaginarie.

Siano come sopra α, β, γ ec., le radici reali dell' equazione $Fx = 0$, ed $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ec., le radici reali dell' equazione $(\frac{dF}{dx}) = 0$, essendo queste radici per ordine di grandezza. Io dico che delle radici α, β, γ ec., non ve ne può essere che una sola maggiore di α_1; che una sola la quale cada fra α_1 e β_1; che una sola la quale cada fra β_1 e γ_1; e così di seguito; ed infine che una sola può essere minore della più piccola delle quantità $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ec.: imperocchè se α e β, per esempio, fossero nello stesso tempo maggiori della quantità α_1, siccome fra le due radici α e β deve necessariamente cadere una radice dell' equazione $(\frac{dF}{dx}) = 0$, questa radice sarebbe allora maggiore di α_1; dunque α_1 non sarebbe la maggiore delle radici dell' equazione $(\frac{dF}{dx}) = 0$ come si supponeva: egualmente se due radici β e γ cadessero nello stesso tempo fra le due α_1 e β_1, siccome fra β e γ deve necessariamente cadere una radice dell' equazione $(\frac{dF}{dx}) = 0$, questa radice caderebbe anche fra α_1 e β_1 contro l' ipotesi, poichè si suppone che queste si seguano in ordine di grandezza, e così di seguito. Infine se molte delle radici α, β, γ ec., fossero minori della più piccola delle radici $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ec., siccome fra di esse dovrebbero cadere alcune delle radici di

$(\frac{dF}{dx}) = 0$, sarebbero quest' ultime radici minori della più piccola delle medesime, ciò che è assurdo.

E quì osserviamo che questa dimostrazione solo conclude, una sola tra le radici α, β, γ ec., essere maggiore della più grande delle radici α_1, β_1 ec., una sola minore della più piccola; ed una sola cadere fra due consecutive α_1, β_1, ovvero β_1, γ_1 ec.; ma più radici delle α_1, β_1 ec., possono essere maggiori della più grande α; più radici essere minori della più piccola delle radici α, β, γ ec.; ed infine più radici delle α_1, β_1 ec., possono cadere tra due consecutive α, β; ovvero β, γ ec.

Questo premesso, scriviamo le funzioni $(\frac{dF}{dx}), (\frac{d^2F}{dx^2}), (\frac{d^3F}{dx^3})$ ec., per $F'x, F''x, F'''x$ ec., e ciò per comodo dei calcoli che siamo per fare.

Poichè abbiamo in generale

$Fx = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \ldots\ldots \times fx,$

è evidente che sostituendo α_1 in luogo di x, se nessuna delle radici α, β, γ ec. è maggiore di α_1, il valore di Fx sarà positivo; e se la sola radice α è più grande che α_1, il valore di Fx diverrà negativo; poichè nel primo caso, tutti i fattori semplici saranno positivi, e nel secondo, un solo sarà negativo, mentre nei due casi sarà sempre fx positivo.

Supponiamo in seguito che si sostituisca β_1 in luogo di x, e se nessuna delle radici α, β, γ ec., cade fra α_1 e β_1, questa sostituzione darà per Fx un valore del medesimo segno di quello che ha dato la sostituzione di α_1. Ma essa darà un valore di segno contrario, se una delle radici cade tra α_1 e β_1. Imperocchè è manifesto che ogni prodotto come $(\alpha_1 - \alpha)(\beta_1 - \alpha)$ è necessariamente sempre positivo, finchè la quantità α è nello stesso tempo maggiore o minore delle quantità α_1, β_1; e che al contrario, è necessariamente negativo se la quantità α cade fra le quantità α_1 e β_1, cioè a dire se è maggiore di β_1 e minore di α_1: ora la sostituzione di α_1 in Fx, in luogo di x, ci dà

$$(\alpha_1-\alpha)(\alpha_1-\beta)(\alpha-\gamma)\ldots\ldots\times f\alpha_1,$$

e la sostituzione di β_1 in luogo di x nella stessa funzione dà

$(\beta_1-\alpha)(\beta_1-\beta)(\beta_1-\gamma)\ldots\ldots\times f\beta_1$; dunque il prodotto di queste due quantità, cioè il valore di $F\alpha_1\times F\beta_1$, sarà della forma

$$(\alpha_1-\alpha)(\beta_1-\alpha)(\alpha_1-\beta)(\beta_1-\beta)(\alpha_1-\gamma)(\beta_1-\gamma)\ldots\ldots;$$
$$f\alpha_1\times f\beta_1.$$

Dunque questo prodotto sarà positivo, se nessuna delle quantità α,β,γ ec., cade tra le quantità α_1,β_1; e sarà negativo, se una sola delle quantità α,β,γ ec., cade tra le quantità α_1 e β_1, poichè $f\alpha_1$ e $f\beta_1$ sono sempre positive; per conseguenza i valori di $F\alpha_1$ e di $F\beta_1$ saranno del medesimo segno nel primo caso, e di segno differente nel secondo.

Si dimostrerà egualmente che la sostituzione di γ_1 per x in Fx, darà un risultato del medesimo segno o di segno contrario a quello della sostituzione di β_1, se nessuna delle radici α,β,γ ec., caderà tra β_1 e γ_1, o se ve ne caderà una, e così di seguito.

In fine se rappresentiamo per ν_1 l' ultima in grandezza delle radici $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ ec., si troverà per mezzo dell' espressione di Fx nei suoi fattori che il risultato della sostituzione di ν_1 invece di x in Fx sarà positivo, se nessuna delle radici α,β,γ ec., sarà minore che ν_1, ovvero negativo, se una di queste radici sarà minore di ν_1, essendo esse di numero pari; egualmente il risultato di quella sostituzione sarà negativo, se nessuna delle radici α,β,γ ec., sarà minore di ν_1, ovvero positivo, se una di esse sarà più piccola di ν_1, essendo queste di numero impari. Ora siccome il numero delle radici immaginarie è sempre pari, così il numero delle radici reali dell' equazione $Fx=0$, sarà necessariamente pari o impari, se pari o impari sarà il grado m dell' equazione.

Potremo adunque giudicare della natura delle radici di una equazione qualunque del grado m, $Fx=0$, per mezzo di quelle dell' equazione $F'x=0$ che è sempre di un grado minore di un' unità; imperocchè avendo essa le radici reali $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ ec., ν_1, basterà sostituirle successivamente per x nell' equazione proposta, e concluderemo.

1°. Che essa avrà o non avrà una radice maggiore di α_1 secondo che $F\alpha_1$ sarà <0, ovvero >0.

2°. Che essa avrà o non avrà una radice compresa fra α_1 e β_1 secondo che $F\beta_1$ sarà di segno differente o del medesimo segno di $F\alpha_1$.

3°. Che essa avrà o non avrà una radice compresa tra β_1 e γ_1, secondo che $F\gamma_1$, sarà di segno contrario o del medesimo segno di $F\beta_1$, e così di seguito.

E che infine essa avrà o non avrà una radice minore di ν_1, secondo che $F\nu_1$, sarà positivo o negativo, nel caso di m impari; e negativo o positivo per m pari.

Conosceremo adunque con queste regole non solo il numero delle radici reali della proposta, ma ancora i loro limiti.

§. 66. Noi abbiamo fin ora supposto che l' equazione proposta potesse avere delle radici immaginarie e reali mescolate insieme: esaminiamo ciò che deve risultare dalla supposizione che tutte queste radici siano reali.

E' primieramente manifesto che l' equazione $Fx=0$ del grado m, avrà m radici reali, e che l' equazione derivata $F'x=0$

del grado $m - 1$ avrà necessariamente $m - 1$ radici reali, poichè fra due radici reali consecutive dell' equazione $Fx = 0$, cade necessariamente una radice reale della $F'x = 0$: per la stessa ragione la seconda equazione $F''x = 0$ avrà necessariamente tutte le sue radici reali, e così di seguito.

Così la prima condizione perchè una equazione abbia tutte le sue radici reali, è che le sue equazioni derivate per la successiva differenziazione, abbiano ancora esse tutte le lor radici reali; ma tutte queste equazioni potrebbero aver le lor radici reali, senza che la $Fx = 0$ ne avesse alcuna.

Supponiamo adunque che le $m - 1$ radici $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ec., dell' equazione $F'x = 0$ siano tutte reali, e vediamo quali sono le condizioni necessarie, perchè le m radici α, β, γ ec., dell' equazione $Fx = 0$, siano ancora necessariamente reali. Avendo noi dimostrato in generale che delle radici reali dell' equazione $Fx = 0$ non ne può cadere che una sola nell' intervallo fra due radici consecutive dell' equazione $F'x = 0$, e che una soltanto può essere maggiore, ed un' altra soltanto minore della più grande e della più piccola delle radici di questa medesima equazione, è ancora evidente che se tutte le radici di numero m dell' equazione $Fx = 0$ sono reali, esse debbono necessariamente esser tali che α sia maggiore di α_1 e che β cada fra α_1 e β_1; che γ cada fra β_1 e γ_1, e così di seguito; al contrario se esse non sono tutte reali, siccome in questo caso il numero delle reali non può superare $m - 2$, esso sarà in conseguenza minore del numero delle radici $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ec., ed è chiaro che la stessa disposizione non avrà più luogo, e vi sarà necessariamente qualche intervallo tra queste ultime radici, nel quale non caderà alcuna radice di $Fx = 0$, a meno che nessuna di queste radici sia maggiore o minore della più grande o della più piccola delle radici $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ec.

Dunque, secondo quanto abbiam sopra dimostrato, se sostituiamo successivamente per x in Fx, tutte le radici $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ec., avremo necessariamente nel primo caso

$F\alpha_1 < 0$, $F\beta_1 > 0$, $F\gamma_1 < 0$ ec.,

e nel secondo caso vi sarà una o molte di queste condizioni, le quali non avranno luogo.

Per un' altra parte sostituendo successivamente le medesime radici $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ec. nella seconda funzione $F''x$, s' avrà sempre, come abbiam visto sopra,

$F''\alpha_1 > 0$, $F''\beta_1 < 0$, $F''\gamma_1 > 0$ ec.

Dunque combinando queste condizioni con le precedenti, si concluderà che quando le radici dell' equazione data $Fx = 0$ sono tutte reali, le quantità

$F\alpha_1 \times F''\alpha_1$, $F\beta_1 \times F''\beta_1$, $F\gamma_1 \times F''\gamma_1$ ec., saranno tutte negative, e che al contrario ve ne saranno delle positive se l' equazione data ha delle radici immaginarie.

Ora se si fa $M(\frac{d^2F}{dx^2})(Fx) = y$, M essendo un coefficiente positivo o una funzione qualunque essenzialmente positiva, e in seguito si elimina x per mezzo dell' equazione $(\frac{dF}{dx}) = 0$, della quale $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ec., sono le radici, s' avrà un' equazione in y dello stesso grado che $(\frac{dF}{dx}) = 0$, e le radici di una tale equazione saranno i valori dell' y che risulterebbero dalla sostituzione successiva delle radici α_1, β_1 ec. in luogo di x. Dunque se questi valori sono tutti negativi, l' equazione in y non avrà che delle radici negative, e per conseguenza tutti i di lei termini avranno il segno più; e reciprocamente, se tutti i termini di questa equazione avranno il segno più, essa avrà tutte le radici negative, e i valori di y saranno tutti negativi.

Possiamo adunque dedurre di quì che i caratteri della realtà delle radici dell' equazione $Fx = 0$, sono che l' equazione $(\frac{dF}{dx})$ abbia tutte le sue radici reali, e che l' equazione in y risultante dall' eliminazione di x, per mezzo di quest' ultima equazione e dell' equazione $(\frac{d^2F}{dx^2}) \cdot Fx = y$, abbia tutti i suoi termini positivi.

Applicando i medesimi ragionamenti all' aquazione $(\frac{dF}{dx}) = 0$, si concluderà egualmente che i caratteri della realtà di tutte le sue radici, sono che l' equazione $(\frac{d^2F}{dx^2}) = 0$ abbia tutte le sue radici reali, e che l' equazione risultante dall' eliminazione di x per mezzo di essa e dell' equazione $(\frac{dF}{dx})(\frac{d^3F}{dx^3}) = y$, abbia tutti i suoi termini positivi, e così di seguito. Dunque infine per avere tutti i caratteri della realtà delle radici dell' equazione $Fx = 0$, si farà.

1°. $y = Fx(\frac{d^2F}{dx^2})$, si eliminerà x per mezzo dell' equazione $(\frac{dF}{dx}) = 0$, e s' avrà la prima equazione in y.

2°. Si farà $y = (\frac{dF}{dx})(\frac{d^3F}{dx^3})$, e si eliminerà x per mezzo dell' equazione $(\frac{d^2F}{dx^2}) = 0$, e s' avrà la seconda equazione in y.

3°. Si farà $y = (\frac{d^2F}{dx^2})(\frac{d^4F}{dx^4})$, e si eliminerà x per mezzo dell' equazione $(\frac{d^3F}{dx^3}) = 0$, e s' avrà la terza equazione in y, e così di seguito.

Queste equazioni in y saranno $m - 1$ di numero, se l' equazione $Fx = 0$ è del grado m.

Ciò posto i caratteri della realtà delle radici dell' equazione $Fx = 0$ saranno, che tutti i termini di queste differenti equazioni in y siano positivi, cioè a dire dello stesso segno che il primo termine in ciascuna equazione.

Ora è facile vedere che l' equazione $Fx = 0$ essendo del grado m, l' equazioni differenziali $(\frac{dF}{dx}) = 0$, $(\frac{d^2F}{dx^2}) = 0$ ec., sono successivamente dei gradi $m - 1$, $m - 2$ ec., e che l' equazioni in y sono egualmente di questi stessi gradi; ciascuna di esse darà in conseguenza altrettante condizioni; di modo che il numero totale delle condizioni sarà

$$m - 1 + m - 2 + m - 3 + \ldots + 3 + 2 + 1 = \frac{m(m-1)}{2}.$$

Nelle equazioni però del terzo e del quarto grado le condizioni si riducono ad un minor numero (*a*).

§. 67. Le condizioni trovate per la realtà delle radici di un ordine qualunque, possono servire per tutti gli ordini superiori; così potrebbero facilmente costruirsi delle Tavole che contenessero successivamente i caratteri della realtà di tutte le radici, cominciando dall' equazione del secondo grado, e rimontando successivamente all' equazioni dei gradi più alti.

Per dare un abbozzo di queste Tavole

Sia $Fx = x^2 + 2Ax + B$, ed avremo $(\frac{dF}{dx}) = 2x + 2A$, $(\frac{d^2F}{dx^2}) = 1$, onde $y = Fx.(\frac{d^2F}{dx^2}) = (x^2 + 2Ax + B).1$, ed $x + A = 0$: eliminando adunque x per mezzo di queste due equazioni $x^2 + 2Ax + B = y$, $x + A = 0$, s' avrà $y + A^2 - B = 0$; dunque $A^2 - B > 0$, sarà la condizione della realtà delle radici della proposta.

Sia $Fx = x^3 + 3Ax^2 + 3Bx + C = 0$, ed avremo $(\frac{dF}{dx}) = 3x^2 + 3.2.Ax + 3B$; $(\frac{d^2F}{dx^2}) = 6x + 6A$;
dunque $y = (x^3 + 3Ax^2 + 3Bx + C)(x + A)$, ovvero
$y = x^4 + 4Ax^3 + 3(A^2 + B)x^2 + (3AB + C)x + AC$, e si dovrà eliminare x per mezzo dell' equazione
$x^2 + 2Ax + B = 0$. Per questo prenderemo dall' ultima equazione i valori di x^3, x^4, ed avremo
$x^3 = -(B + 2Ax)x = -Bx - 2Ax^2$;
$x^4 = -Bx^2 - 2Ax^3 = -Bx^2 + 2ABx + 4A^2x^2 = (4A^2 - B)x^2 + 2ABx$; e sostituendo questi valori nell' equazione in y, avremo un' altr' equazione della forma seguente
$y = ax^2 + bx + c$.

(*a*) La Grange „ *De la Resolution des Equations Numeriques N°. 37.* „

Sottraendo ora dall' equazione quì trovata, l' equazione $ax^2 + 2aAx + aB = 0$, s' avrà $y = (b - 2aA)x + c - aB$: moltiplicando l' equazione $y = ax^2 + bx + c$ per $ax + 2aA$, avremo $(ax + 2aA)y = a^2x^3 + abx^2 + cax + 2Aac$
$$+ 2a^2Ax^2 + 2abAx$$
e moltiplicando parimente $ax^2 + 2aAx + aB = 0$ per $ax + b$, s' avrà

$$0 = a^2x^3 + 2a^2Ax^2 + a^2Bx + abB$$
$$+ abx^2 + 2abAx:$$

sottraendo una dall' altra le ottenute equazioni, avremo $(ax + 2aA)y = (ca - a^2B)x + 2Aac$: se ora per mezzo di quest' ultima equazione e di $y = (b - 2aA)x + c - aB$, eliminiamo x, è facile vedere che avremo per y un' equazione della forma $y^2 + My + N = 0$ che ci darà le due condizioni $M > 0$, $N > 0$ di più.

Sia $Fx = x^4 + 4Ax^3 + 6Bx^2 + 4Cx + D = 0$; avremo

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) = 4x^3 + 4.3Ax^2 + 6.2Bx + 4C;$$

$$\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) = 4.3.x^2 + 4.3.2Ax + 6.2.B: \text{ dunque}$$

$y = (x^4 + 4Ax^3 + 6Bx^2 + 4Cx + D)(x^2 + 2Ax + B)$, ed $x^3 + 3Ax^2 + 3Bx + C = 0$.

Sostituendo nella prima equazione (eseguita che sia la moltiplicazione) per x^4, x^5, x^6; i valori ricavati dalla seconda, avremo un' altra equazione di questa forma $y = ax^3 + bx^2 + cx + e$, ed eliminando x, avremo per y un' equazione del terzo grado della forma $y^3 + Py^2 + Qy + R = 0$, la quale ci dà di più le condizioni $P > 0$, $Q > 0$, $R > 0$.

Potrebbero facilmente continuarsi queste ricerche per le equazioni dei gradi superiori.

Le condizioni adunque per il secondo grado sono

$$A^2 - B > 0$$

Per il terzo sono

$$A^2 - B > 0$$
$$M > 0,\ N > 0$$

Per il quarto sono

$$A^2 - B > 0$$
$$M > 0,\ N > 0$$
$$P > 0,\ Q > 0,\ R > 0,$$

e così di seguito.

E' quì riportiamo una bellissima conseguenza di quanto abbiamo detto sopra, la quale De-Gua ha dedotta da altri principj.

Se nell' equazione $Fx = 0$, sostituiamo $a + z$ in luogo di x, si ha per mezzo della formula dello sviluppo delle funzioni in serie,

$Fa + \left(\frac{dF}{dx}\right).z + \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right).\frac{z^2}{2} + \ldots\ldots + z^m = 0$, purchè dopo le differenziazioni si faccia $x = a$. Facciamo sparire un termine qualunque di questa equazione, quello cioè nel quale si trova la potenza z^n determinando a per mezzo dell' equazione $\left(\frac{d^nF}{dx^n}\right) = 0$, ovvero $F^{(n)}(a) = 0$. Ora noi abbiamo veduto che se tutte le radici dell' equazione $Fx = 0$ sono reali, i valori di $F^{(n-1)}x$ ed $F^{(n+1)}x$ sono necessariamente di segno contrario per tutti i valori di x che risultano dall' equazione $F^{(n)}x = 0$; dunque anche i valori di $F^{(n-1)}a$, $F^{(n+1)}a$ saranno di segni contrarj per tutti i valori di a dati da $F^{(n)}a = 0$.

D' onde segue che se facciamo svanire un termine qualunque della trasformata in z; i due termini vicini avranno necessariamente segni contrarj, se la proposta ha tutte le sue radici reali; per conseguenza ella avrà delle radici immaginarie, se i termini vicini a quello che sparisce, hanno gli stessi segni.

„ Questo eccellente pezzo d' Analisi per l' applicazione del
„ Calcolo Differenziale alle equazioni, è del Geometra La-Grange,

„ e forma la Nota VIII. della sua Teorìa sopra la risoluzione „ delle equazioni numeriche „.

§. 68. Quando non si possono avere le radici esatte di una equazione, l'unico compenso è quello di cercarle approssimatamente, e per tale approssimazione di una grandissima risorsa sono le serie; per questo noi ci occuperemo ora della soluzione di un Problema, dal quale dipende la ricerca delle radici dell'equazioni espresse per serie.

Nel Tomo IV. della Società Italiana, il Geometra Professore Pietro Paoli si propone e dà una completa soluzione di questo Problema „ Dato un numero qualunque d'equazioni $z=0$, „ $z'=0$, $z''=0$ ec., tra le variabili x, y, t, u ec., esprime„ re una funzione qualunque ϕ delle medesime variabili per tan„ te di esse, quanto è il loro numero diminuito del numero dell'e„ quazioni $z=0$, $z'=0$, $z''=0$ ec. „

Non potendo, per la natura di questo Trattato, aver quì luogo la soluzione generale di tal Problema, noi ci limiteremo a risolverlo nel caso che sia data una sola equazione $z=0$ tra le due variabili x, y, e si cerchi di esprimere una funzione qualunque F delle medesime variabili per y senza x.

Prendiamo $x' + x - x'$ in luogo di x, e supponiamo che sia z' il valore di z quando x si cangia in x', avremo allora per il Teorema di Tajlor (y in questa operazione resta costante)

$$z=0=z'+(x-x')\left(\frac{dz'}{dx'}\right)+\frac{(x-x')^2}{2}\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}\right)+\frac{(x-x')^3}{2.3}\left(\frac{d^3z'}{dx'^3}\right)+\frac{(x-x')^4}{2.3.4}\left(\frac{d^4z'}{dx'^4}\right)+\text{ec.}$$

Per determinare la quantità $x-x'$ mediante quest'equazione, facciamo

$$x-x'=Az'+Bz'^2+Cz'^3+Dz'^4+Ez'^5+\text{ec.},$$

e sostituendo questo valore, avremo

$$\begin{aligned}0=z' \quad &+z'^2.B\left(\frac{dz'}{dx'}\right)+z'^3.C\left(\frac{dz'}{dx'}\right)+z'^4D\left(\frac{dz'}{dx'}\right)+\text{ec.}\\ +z'A\left(\frac{dz'}{dx'}\right)&+\frac{z'^2.A^2}{2}\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}\right)+\frac{z'^3.2AB}{2}\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}\right)+\frac{z'^4.2AC}{2}\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}\right)+\text{ec.}\\ &+\frac{z'^3.A^3}{2.3.}\left(\frac{d^3z'}{dx'^3}\right)+\frac{z'^4.B^2}{2}\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}\right)+\text{ec.}\\ &+\frac{z'^4.3A^2B}{2.3.}\left(\frac{d^3z'}{dx'^3}\right)+\text{ec.}\\ &+\frac{z'^4.A^4}{2.3.4}\left(\frac{d^4z'}{dx'^4}\right)+\text{ec.}\end{aligned}$$

Paragonando i termini affetti dalle medesime potenze di z', avremo

$$(1)\ldots A=-\frac{1}{\left(\frac{dz'}{dx'}\right)},$$

$$(2)\ldots B=-\frac{\frac{A^2}{2}.\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}\right)}{\left(\frac{dz'}{dx'}\right)},$$

$$(3)\ldots C=-\frac{\frac{2AB}{2}.\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}\right)+\frac{A^3}{2.3}.\left(\frac{d^3z'}{dx'^3}\right)}{\left(\frac{dz'}{dx'}\right)},$$

$$(4)\ldots D=-\frac{\frac{2AC}{2}.\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}\right)+\frac{B^2}{2}\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}\right)+\frac{3A^2B}{2.3}\left(\frac{d^3z'}{dx'^3}\right)+\frac{A^4}{2.3.4}\left(\frac{d^4z'}{dx'^4}\right)}{\left(\frac{dz'}{dx'}\right)}$$

ec.

L' equazione (1) ci dà $\frac{1}{2}\left(\frac{dA}{dx}\right)=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}\right)}{\left(\frac{dz'}{dx'}\right)^2}$, ovvero

$\frac{1}{2}\left(\frac{dA}{dx}\right)=\frac{A^2}{2}\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}\right)$, e quindi $B=\frac{A}{2}\left(\frac{dA}{dx'}\right)$. Dall' equazione (2) si ricava

$$\frac{1}{3}\left(\frac{dB}{dx'}\right)=\frac{-\frac{2A}{3}\left(\frac{dA}{dx'}\right).\frac{1}{2}\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}\right)-\frac{A^2}{2.3}\left(\frac{d^3z'}{dx'^3}\right)}{\left(\frac{dz'}{dx'}\right)}+\frac{\frac{A^2}{2.3}\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}\right)\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}\right)}{\left(\frac{dz'}{dx'}\right)^2},\text{ cioè}$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{dB}{dx'}\right)=\frac{2AB}{3}\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}\right)+\frac{A^3}{2.3}\left(\frac{d^3z'}{dx'^3}\right)+\frac{1}{3}AB\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}\right)=AB\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}\right)+\frac{A^3}{2.3}\left(\frac{d^3z'}{dx'^3}\right);$$

e perciò $C=\frac{A}{3}\left(\frac{dB}{dx'}\right)=\frac{A}{2.3}\left(\frac{d(AdA)}{dx'^2}\right)$. Così pure l' equazione (3) ci darà

$$\frac{1}{4}\left(\frac{dC}{dx'}\right)=\frac{-\frac{A}{2}\left(\frac{dB}{dx'}\right).\frac{1}{2}\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}\right)-\frac{B}{2}\left(\frac{dA}{dx'}\right).\frac{1}{2}\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}\right)-\frac{AB}{4}\left(\frac{d^3z'}{dx'^3}\right)-}{\left(\frac{dz'}{dx'}\right)}$$

$$\frac{\frac{3A^2}{4}\left(\frac{dA}{dx'}\right).\frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3z'}{dx'^3}\right)-\frac{A^3}{2.3.4}\left(\frac{d^4z'}{dx'^4}\right)}{\left(\frac{dz'}{dx'}\right)}+\frac{\frac{AB}{4}\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}\right)^2+\frac{A^3}{4}\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}\right).\frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3z'}{dx'^3}\right)}{\left(\frac{dz'}{dx'}\right)^2},$$

cioè

$$\frac{1}{4}\left(\frac{dC}{dx'}\right)=\frac{3}{4}AC\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}\right)+\frac{B^2}{2}\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}\right)+\frac{3}{2}A^2B.\frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3z'}{dx'^3}\right)+\frac{3}{2}A^2B\times$$
$$\frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3z'}{dx'^3}\right)+\frac{A^4}{2.3.4}\left(\frac{d^4z'}{dx'^4}\right)+\frac{1}{4}AC\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}\right)=AC\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}\right)+\frac{B^2}{2}\times$$
$$\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}\right)+\frac{A^2B}{2}\left(\frac{d^3z'}{dx'^3}\right)+\frac{A^4}{2.3.4}\left(\frac{d^4z'}{dx'^4}\right),\text{ e quindi}$$

$$D=\frac{A}{4}\left(\frac{dC}{dx'}\right)=\frac{A}{2.3.4}\left\{\frac{d[Ad(AdA)]}{dx'^3}\right\},\text{ e così troveremmo}$$

$$E=\frac{A}{5}\left(\frac{dD}{dx'}\right)=\frac{A}{2.3.4.5}\left[\frac{d\langle Ad[Ad(AdA)]\rangle}{dx'^4}\right],$$

ec. ec.

Avremo pertanto

$$x-x'=Az'+\frac{A}{2}\left(\frac{dA}{dx'}\right)z'^2+\frac{A}{2.3}\left\{\frac{d(AdA)}{dx'^2}\right\}z'^3+\frac{A}{2.3.4}\times\ldots\ldots$$
$$\left\{\frac{d[Ad(AdA)]}{dx'^3}\right\}z'^4+\frac{A}{2.3.4.5}\left[\frac{d\langle Ad[Ad(AdA)]\rangle}{dx'^4}\right]z'^5+\text{ec.}$$

essendo $A=-\frac{1}{\left(\frac{dz'}{dx'}\right)}$.

§. 69. Determinati così i coefficienti A, B, C ec., s' avrà $x-x'$ dato per una serie che sarà funzione di x' e di y, e se facciamo $x'=f$, essendo f una funzione qualunque di y, avremo $x-x'$ dato per una funzione soltanto di y; e siccome z, z' sono funzioni simili di x e di x', potremo usare z ed x in luogo di z' e di x', purchè ad operazioni eseguite, si ponga da per tutto $x=f$: avremo adunque con questa condizione

$$A=-\frac{1}{\left(\frac{dz}{dx}\right)},$$

$$x-x'=zA+z^2.\frac{A}{2}\left(\frac{dA}{dx}\right)+z^3.\frac{A}{2.3}.\left(\frac{d(AdA)}{dx^2}\right)+z^4.\frac{A}{2.3.4}\times\ldots$$
$$\left\{\frac{d[Ad(AdA)]}{dx^3}\right\}+\text{ec.}$$

facendo dopo le differenziazioni $x=f$.

Indichiamo ora per F quella funzione di x e di y che ci proponiamo di sviluppare in una serie data per y soltanto, eliminando la x in virtù dell' equazione $z=0$. Se poniamo $x'+x-x'$ invece di x, avremo per il Teorema di Tajlor

$$F=F+(x-x')\left(\frac{dF}{dx}\right)+\frac{(x-x')^2}{2}\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)+\frac{(x-x')^3}{2.3}\left(\frac{d^3F}{dx^3}\right)+\text{ec.},$$

facendo nel secondo membro in F, $\left(\frac{dF}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)$ ec., $x=f$. Sostituiamo ora in questa formula il valore di $x-x'$ dato dall' equazione $z=0$, e che abbiamo quì sopra trovato, ed avremo

$$F=F+zA\left[\frac{dF}{dx}\right]+z^2\left\{\frac{A}{2}\left(\frac{dA}{dx}\right)\left[\frac{dF}{dx}\right]+\frac{A^2}{2}.\left[\frac{d^2F}{dx^2}\right]\right\}+z^3\left\{\frac{A}{2.3}\times\right.$$
$$\left.\left(\frac{d(AdA)}{dx^2}\right)\left[\frac{dF}{dx}\right]+\frac{A^2}{2}\left(\frac{dA}{dx}\right)\left[\frac{d^2F}{dx^2}\right]+\frac{A^3}{2.3}\left[\frac{d^3F}{dx^3}\right]\right\}+z^4\left\{\frac{A}{2.3.4}\times\ldots\right.$$
$$\left(\frac{d[Ad(AdA)]}{dx^3}\right)\left[\frac{dF}{dx}\right]+\frac{A^2}{2.3}\left(\frac{d(AdA)}{dx^2}\right)\left[\frac{d^2F}{dx^2}\right]+\frac{A^2}{4.2}\left(\frac{dA}{dx}\right)^2\left[\frac{d^2F}{dx^2}\right]+$$
$$\left.\frac{A^3}{4}\left(\frac{dA}{dx}\right)\left[\frac{d^3F}{dx^3}\right]+\frac{A^4}{2.3.4}\left[\frac{d^4F}{dx^4}\right]\right\}+\text{ec.}$$

cioè

$$F = F + zA\left[\frac{dF}{dx}\right] + \frac{z^2A}{2}\left(\frac{d\left(\frac{AdF}{dx}\right)}{dx}\right) + \frac{z^3A}{2.3}\left(\frac{d\left(Ad\left(A\left[\frac{dF}{dx}\right]\right)\right)}{dx^2}\right) +$$

$$\frac{z^4A}{2.3.4}\left(\frac{d\left(Ad\left(Ad\left(A\left[\frac{dF}{dx}\right]\right)\right)\right)}{dx^3}\right) + \text{ec.}$$

facendo nel secondo membro dopo le differenziazioni $x = f =$ *funz.* y.

Ma si può giungere ai medesimi risultati per un altro metodo infinitamente più semplice di quello seguito dal sopra lodato Autore: infatti riprendiamo l' equazione

$x - x' = Az' + Bz'^2 + Cz'^3 + Dz'^4 +$ ec.: questa differenziata rapporto ad x' diviene

$$-1 = A\left(\frac{dz'}{dx'}\right) + z'\left\{\left(\frac{dA}{dx'}\right) + 2B\left(\frac{dz'}{dx'}\right)\right\} + z'^2\left\{\left(\frac{dB}{dx'}\right) + 3C \times \right.$$

$$\left.\left(\frac{dz'}{dx'}\right)\right\} + z'^3\left\{\left(\frac{dC}{dx}\right) + 4D\left(\frac{dz'}{dx'}\right)\right\} + \text{ec.}$$

che ci dà immediatamente queste equazioni

$$A\left(\frac{dz'}{dx'}\right) + 1 = 0;\ 2B\left(\frac{dz'}{dx'}\right) + \left(\frac{dA}{dx'}\right) = 0;\ 3C\left(\frac{dz'}{dx'}\right) + \left(\frac{dB}{dx'}\right) = 0;$$

$$4D\left(\frac{dz'}{dx'}\right) + \left(\frac{dC}{dx'}\right) = 0 \text{ ec.},$$

dalla quale si ricava

$$A = -\frac{1}{\left(\frac{dz'}{dx'}\right)};$$

$$B = \frac{\left(\frac{dA}{dx'}\right)}{2\left(\frac{dz'}{dx'}\right)} = \frac{A}{2}\left(\frac{dA}{dx'}\right);$$

$$C = -\frac{\left(\frac{dB}{dx'}\right)}{3\left(\frac{dz'}{dx'}\right)} = \frac{A}{2.3}\left(\frac{d(AdA)}{dx'^2}\right);$$

$$D = \frac{\left(\frac{dC}{dx'}\right)}{4\left(\frac{dz'}{dx'}\right)} = \frac{A}{2.3.4}\left(\frac{d\langle Ad(AdA)\rangle}{dx'^3}\right);\ \text{ec.}$$

come sopra

Per avere ora la serie che ci dia il valore di Fx, osserviamo che essendo

$x = x' + Az' + Bz'^2 + Cz'^3 + Dz'^4 +$ ec.

Se facciamo

$Fx = a + bz' + cz'^2 + ez'^3 +$ ec., sarà $a = Fx'$, e perciò

$Fx = Fx' + bz' + cz'^2 + ez'^3 +$ ec.

Differenziamo quest' ultima equazione rapporto ad x', ed avremo

$$0 = \left(\frac{dF}{dx'}\right) + b\left(\frac{dz'}{dx'}\right) + z'\left\{\left(\frac{db}{dx'}\right) + 2c\left(\frac{dz'}{dx'}\right)\right\} + z'^2\left\{\left(\frac{dc}{dx'}\right) + \right.$$

$$\left.3e\left(\frac{dz'}{dx'}\right)\right\} + z'^3\left\{\left(\frac{de}{dx'}\right) + 4f\left(\frac{dz'}{dx'}\right)\right\} + \text{ec.}$$

la quale subito ci dà

$$b = -\frac{\left(\frac{dF}{dx'}\right)}{\left(\frac{dz'}{dx'}\right)} = A\left(\frac{dF}{dx'}\right);$$

$$c = -\frac{\left(\frac{db}{dx'}\right)}{2\left(\frac{dz'}{dx'}\right)} = \frac{A}{2}\left(\frac{dA\left(\frac{dF}{dx'}\right)}{dx'}\right);$$

$$e = -\frac{\left(\frac{dc}{dx'}\right)}{\left(\frac{dz'}{dx'}\right)} = \frac{A}{2.3}\left(\frac{d\left(Ad\left[A\left(\frac{dF}{dx'}\right)\right]\right)}{dx'}\right);\ \text{ec.}$$

e quindi per F la stessa serie che abbiamo trovata sopra.

§. 70. Poniamo l' equazione $z = 0$ sotto questa forma $x - f - \varphi = 0$, essendo f quella funzione di y che sopra sostituivamo in luogo di x dopo le differenziazioni, e φ una funzione qualunque di x e di y: avremo allora

$(\frac{dz}{dx}) = 1 - (\frac{d\phi}{dx})$, ed $A = -\frac{1}{1-(\frac{d\phi}{dx})}$, ovvero

$$A = -1 - (\frac{d\phi}{dx}) - (\frac{d\phi}{dx})^2 - (\frac{d\phi}{dx})^3 - \text{ec.}$$

e quindi

$$\frac{A}{2}\left(\frac{dA[\frac{dF}{dx}]}{dx}\right) = \frac{1}{2}(\frac{d^2F}{dx^2}) + \frac{1}{2}(\frac{d^2\phi}{dx^2})(\frac{dF}{dx}) + \frac{3}{2}(\frac{d\phi}{dx})(\frac{d^2\phi}{dx^2})(\frac{dF}{dx}) + \text{ec.}$$
$$+ (\frac{d\phi}{dx})(\frac{d^2F}{dx^2}) + \frac{3}{2}(\frac{d\phi}{dx})^2(\frac{d^2F}{dx^2}) + \text{ec.}$$

$$\frac{A}{2.3}\left(\frac{d(Ad(A[\frac{dF}{dx}]))}{dx^2}\right) = -\frac{1}{2.3}(\frac{d^3F}{dx^3}) - \frac{1}{2.3}(\frac{d^3\phi}{dx^3})(\frac{dF}{dx}) + \text{ec.}$$
$$- \frac{1}{2}(\frac{d^2\phi}{dx^2})(\frac{d^2F}{dx^2}) + \text{ec.}$$
$$- \frac{1}{2}(\frac{d\phi}{dx})(\frac{d^3F}{dx^3}) + \text{ec.}$$

$$\frac{A}{2.3.4}\left(\frac{d(Ad[Ad(A[\frac{dF}{dx}])])}{dx^3}\right) = \frac{1}{2.3.4}(\frac{d^4F}{dx^4}) + \text{ec.}$$

Sostituendo questi valori in quello di F, ed osservando che $z = -\phi$ quando $x = f$, avremo

$$F = F + \phi(\frac{dF}{dx}) + \phi(\frac{d\phi}{dx})(\frac{dF}{dx}) + \phi(\frac{d\phi}{dx})^2(\frac{dF}{dx}) + \phi(\frac{d\phi}{dx})^3(\frac{dF}{dx})$$
$$+ \frac{\phi^2}{2}(\frac{d^2F}{dx^2}) + \frac{\phi^2}{2}(\frac{d^2\phi}{dx^2})(\frac{dF}{dx}) + \frac{3}{2}\phi^2(\frac{d\phi}{dx})(\frac{d^2\phi}{dx^2})(\frac{dF}{dx})$$
$$+ \phi^2(\frac{d\phi}{dx})(\frac{d^2F}{dx^2}) + \frac{3}{2}\phi^2(\frac{d\phi}{dx})^2(\frac{d^2F}{dx^2})$$
$$+ \frac{\phi^3}{2.3}(\frac{d^3F}{dx^3}) + \frac{\phi^3}{2.3}(\frac{d^3\phi}{dx^3})(\frac{dF}{dx})$$
$$+ \frac{\phi^3}{2}(\frac{d^2\phi}{dx^2})(\frac{d^2F}{dx^2})$$
$$+ \frac{\phi^3}{2}(\frac{d\phi}{dx})(\frac{d^3F}{dx^3})$$
$$+ \frac{\phi^4}{2.3.4}(\frac{d^4F}{dx^4})$$

la qual formula si riduce alla seguente

$$F = F + \phi[\frac{dF}{dx}] + \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi^2[\frac{dF}{dx}]}{dx}\right) + \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^2\phi^3[\frac{dF}{dx}]}{dx^2}\right) + \frac{1}{2.3.4}\times\left(\frac{d^3\phi^4[\frac{dF}{dx}]}{dx^3}\right) + \text{ec.}$$

nella quale dobbiamo fare dopo le differenziazioni $x = f$.

Se ϕ ed F sono funzioni solamente di x, e poniamo $f = y$, di modo che l'equazione sia $x = y + \phi x$, avremo

$$Fx = Fy + \phi y.[\frac{dF}{dx}] + \frac{1}{2}\left(\frac{d(\phi y)^2[\frac{dF}{dy}]}{dy}\right) + \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^2(\phi y)^3[\frac{dF}{dy}]}{dy^2}\right) + \frac{1}{2.3.4}\left(\frac{d^3(\phi y)^4[\frac{dF}{dy}]}{dy^3}\right) + \text{ec.}$$

La qual formula è stata data la prima volta dal Celebre La-Grange nelle Memorie dell' Accademia di Berlino del 1768, ed in seguito nella sua Teoria delle Funzioni Analitiche p. 104; e nella Nota XI. della Risoluzione delle Equazioni Numeriche.

Cerchiamo adesso il valore di x dato dall' Equazione Algebraica del grado m.

$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots\ldots + px + q = 0$, ed avremo primieramente

$$x + \frac{q}{p} + \frac{nx^2 + \ldots\ldots + ax^{m-1} + x^m}{p} = 0:$$

ora facendo $Fx = x$, $\phi x = -\frac{nx^2 + \ldots\ldots + ax^{m-1} + x^m}{p}$,

s'avrà per il valore della cercata radice

$$x = y + \phi(y) + (\frac{d(\phi y)^2}{dy}).\frac{1}{2} + (\frac{d^2(\phi y)^3}{dy^2}).\frac{1}{2.3} + \text{ec.}$$

purchè si faccia $y = -\frac{q}{p}$ dopo le differenziazioni.

Sia ora $m = 2$, cioè abbiasi l'equazione $x^2 + ax + b = 0$, ed avremo $x + \frac{b}{a} + \frac{x^2}{a} = 0$, e quindi $\phi y = -\frac{y^2}{a}$: dunque $x =$

$$-\frac{b}{a}-\frac{b^2}{a^3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4b^3}{a^5}-\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{5.6.b^4}{a^7}-\text{ec.}$$

Per avere l' altra radice, diamo alla equazione proposta la forma $x+a+\frac{b}{x}=0$, ed in questo caso sarà $\varphi y=-\frac{b}{y}$, $y=-a$, e perciò

$$x=-a+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^3}+\frac{4b^3}{2a^5}+\text{ec.}$$

e questa sarà la seconda radice dell' equazione del secondo grado.

Si vede di quì come potranno trovarsi tutte le m radici dell' equazione $x^m+ax^{m-1}+\ldots\ldots+px+q=0$.

Chi brama vedere una più estesa applicazione del Calcolo Differenziale all' Equazioni Algebraiche, legga le Note IX, X, XI, della citata Opera sopra la Risoluzione dell' Equazioni Numeriche, ed il Calcolo Differenziale del Sig. Euler ai Capitoli XII e XIII.

CALCOLO DIFFERENZIALE ED INTEGRALE.

C A P. V.

Della Trasformazione delle Equazioni Differenziali.

§. 71. SE tra x ed y si ha un' equazione qualunque $F(x, y)=0$, è noto che possiamo sempre trasformarla in un' altra fra due nuove variabili t ed u, la quale tenga il suo luogo. Supponendo infatti ad arbitrio $x=\varphi(u, t)$, $y=\Psi(u, t)$, ovvero $x=\varphi$, $y=\Psi$, e rappresentando per φ e per Ψ due funzioni di u e t, s' avrà $F(\varphi, \Psi)=0$, che sarà un' equazione fra le variabili u e t.

Ora può dimandarsi, se data un' equazione differenziale tra due variabili x ed y, potrà egualmente trasformarsi questa in un' altra equazione differenziale tra due nuove variabili u e t, e come ciò potrà conseguirsi.

Per rispondere a questa questione, premettiamo che se si ha un' equazione $F(x, y)=0$ tra due variabili x, y, è in nostro arbitrio considerare la y funzione di x, ovvero la x funzione dell' y; ma allorchè dobbiamo prenderne i differenziali, conviene stabilire quale delle due si considera funzione dell' altra, per sapere rapporto a qual variabile dobbiamo differenziare. Se poi è data un' equazione differenziale, allora non è più nulla al nostro arbitrio, e l' equazione differenziale dice da se medesima quale è la variabile rapporto a cui sono presi i differenziali, ovvero quale delle variabili è considerata funzione dell' altra.

Infatti se essa contiene $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ ec., allora le differenziali sono prese rapporto ad x, ed y è considerata funzione della x: se essa contiene $\left(\frac{dx}{dy}\right)$, $\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)$ ec., le differenziali sono allora prese rapporto ad y, ovvero x vi è considerata funzione di y: non possono però mai sussistere equazioni che nello stesso tempo contengano $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{dx}{dy}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)$ ec., poichè la supposizione per ottenere le differenziali della y rapporto ad x, non è compatibile nello stesso tempo con quella che porterebbe le differenziali della x rapporto ad y.

Ciò premesso, sia data un' equazione tra x ed y e $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, e si voglia trasformare in un' altra tra due variabili u e t, ed il differenziale di una di queste variabili rapporto all' altra. Supponiamo $x = \phi(u, t) = \phi$, $y = \Psi(u, t) = \Psi$, e consideriamo u come funzione di t, di modo che l' equazione trasformata debba essere tra u, t e $\left(\frac{du}{dt}\right)$. Ora essendo u funzione di t, sarà necessariamente x funzione di t, ed y parimente funzione di t, poichè ambedue sono funzioni di u e di t, e di più y era funzione di x; dunque differenziando, come abbiamo insegnato sopra (§. 10.), avremo

$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)$, e perciò in questa supposizione

$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{dy}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)$; ma da un altro lato

$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{d\Psi}{dt}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{d\Psi}{du}\right)$, $\left(\frac{dx}{dt}\right) = \left(\frac{d\phi}{dt}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{d\phi}{du}\right)$; dunque

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\left(\frac{d\Psi}{dt}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{d\Psi}{du}\right)}{\left(\frac{d\phi}{dt}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{d\phi}{du}\right)}.$$

Se adesso sostituiamo nella proposta $\phi(u, t)$ invece di x, $\Psi(u, t)$ invece di y, ed il ritrovato valore per $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, avremo un' equazione trasformata in u, t e $\left(\frac{du}{dt}\right)$, la quale terrà il luogo della proposta.

Così avendo l' equazione $\left(\frac{dy}{dx}\right) = F(x, y)$ cominceremo dal trasformarla in $\left(\frac{dy}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right) = F(x, y)$, e quindi invece di x, y, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ vi sostituiremo i loro valori dati dall' equazioni $y = \Psi$, $x = \phi$, e dai loro differenziali.

Per farne un esempio, sia data l' equazione

$x^2 + ay\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$,

e poniamo $x = u + t$, $y = ut$; avremo allora $\left(\frac{dx}{dt}\right) = \left(\frac{du}{dt}\right) + 1$, $\left(\frac{dy}{dt}\right) = u + t\left(\frac{du}{dt}\right)$, e quindi sostituendo in $x^2 + ay\left(\frac{dy}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right) = 0$ le nuove variabili, s'avrà $(u + t)^2 + aut\left\{u + t\left(\frac{du}{dt}\right)\right\} : \left\{1 + \left(\frac{du}{dt}\right)\right\} = 0$, ovvero $(u + t)^2 + (u + t)^2\left(\frac{du}{dt}\right) + au^2t + aut^2\left(\frac{du}{dt}\right) = 0$, ovvero $(u + t)^2 + au^2t + \left\{(u + t)^2 + aut^2\right\}\left(\frac{du}{dt}\right) = 0$, equazione che tiene luogo dell'altra in x ed y.

Sia l' equazione da trasformarsi del secondo ordine, contenga cioè ancora $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$: se facciamo $\left(\frac{dy}{dx}\right) = z$, avremo $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \left(\frac{dz}{dx}\right)$; ora nel caso della trasformazione, cioè considerando z come funzione di x, ed x come funzione di t, si ha $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)$, e perciò $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \left(\frac{dz}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)$; ma in questo stesso caso $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{dy}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right) = z$; dunque

$\left(\frac{dz}{dt}\right) = \left(\frac{d\left\{\left(\frac{dy}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)\right\}}{dt}\right)$, e quindi

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \left(\frac{d\left\{\left(\frac{dy}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)\right\}}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)$

ed eseguendo la differenziazione, s' avrà

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\left\{\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)-\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right\}:\left(\frac{dx}{dt}\right),\text{ ovvero}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)^3.$$

Sostituendo allora nella proposta per $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ e per $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ le ritrovate espressioni, essa conterrà x, y, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$, e per ciò ponendovi in seguito per x, y, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ ec., i valori dati da $x=\varphi(u,t)$, $y=\Psi(u,t)$, e dai differenziali di queste, s' avrà un' equazione trasformata in u, t, $\left(\frac{du}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)$, che terrà il luogo della proposta.

Sia l' equazione da trasformarsi del terzo ordine, contenga cioè ancora $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$. facciamo $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=z$, e sarà $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=\left(\frac{dz}{dx}\right)$; ma $\left(\frac{dz}{dx}\right)=\left(\frac{dz}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)$; dunque $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=\left(\frac{dz}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)$. Ora in questo caso si ha

$$z=\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\left(\frac{d\left\{\left(\frac{dy}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)\right\}}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right);\text{ dunque}$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=\left(\frac{d\left\{\frac{d\left\{\left(\frac{dy}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)\right\}:\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt}\right\}}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

ove non altro si deve fare che eseguire le differenziazioni per avere $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ espresso in $\left(\frac{d^3y}{dt^3}\right)$, $\left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$ ec., e s' avrà

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=\frac{\left(\frac{d^3y}{dt^3}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^5}-\frac{3\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^4}+\frac{3\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^5}-\frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^5}.$$

Lo stesso metodo ci insegna come trasformare l' equazioni degli ordini superiori.

§. 72. Risulta dunque da ciò che si è detto al §. antecedente che considerando in una equazione x ed y, funzioni di un' altra variabile t, dovremo in essa fare le seguenti sostituzioni

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)=\left(\frac{dy}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)=\mathrm{A}$$
$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\left(\frac{d\mathrm{A}}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)=\mathrm{B}$$
$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=\left(\frac{d\mathrm{B}}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)=\mathrm{C}$$
$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)=\left(\frac{d\mathrm{C}}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)=\mathrm{D}$$
$$\left(\frac{d^5y}{dx^5}\right)=\left(\frac{d\mathrm{D}}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)=\mathrm{E}$$

ec. ec.

Se ora un' equazione differenziale nella quale è considerato y funzione di x, si vorrà trasformarla in un' altra, nella quale sia viceversa x funzione di y, allora supponendo che t, rapporto a cui si hanno i differenziali nelle formule superiori, divenga la stessa y, sostituendo y per t in quelle formule, ed osservando di più che la differenziale $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ è in questo caso l' unità, avremo da sostituire

$1:\left(\frac{dx}{dy}\right)$ per $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, e $-\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right):\left(\frac{dx}{dy}\right)^3$, per $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, e così di seguito.

Così nell' equazione $\mathrm{P}+\mathrm{Q}\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$, y è considerato come funzione di x, e le differenziali sono fatte rapporto ad x: vi si ponga $1:\left(\frac{dx}{dy}\right)$ invece di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, e s' avrà $\mathrm{P}\left(\frac{dx}{dy}\right)+\mathrm{Q}=0$, equazione trasformata che tiene il luogo della proposta, e vi è considerato x come funzione di y, o la differenziazione vi è fatta rapporto alla variabile y.

L' equazione del secondo ordine

$$\mathrm{P}+\mathrm{Q}\left(\frac{dy}{dx}\right)+\mathrm{R}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0,$$

nella quale y è considerato come funzione di x, si trasforma (ponendo $1:(\frac{dx}{dy})$ per $(\frac{dy}{dx})$, e $-(\frac{d^2x}{dy^2}):(\frac{dx}{dy})^3$ per $(\frac{d^2y}{dx^2})$) in

$$P+Q:(\tfrac{dx}{dy})-R(\tfrac{d^2x}{dy^2}):(\tfrac{dx}{dy})^3=0,\ \text{ovvero}$$

$$P(\tfrac{dx}{dy})^3+Q(\tfrac{dx}{dy})^2-R(\tfrac{d^2x}{dy^2})=0$$

ove i differenziali sono presi rapporto ad y, ovvero x è considerato come funzione di y.

Facciamo qualche esempio.

Abbiasi l'equazione $y(\frac{dy}{dx})+x(\frac{d^2y}{dx^2})=xy$ e si voglia trasformare in un' altra nella quale i differenziali siano presi rapporto ad y.

Fatte le opportune sostituzioni, la nostra equazione diverrà

$$y(\tfrac{dx}{dy})^2-x(\tfrac{d^2x}{dy^2})=xy(\tfrac{dx}{dy})^3$$

ove è considerato x funzione dell'y.

La stessa equazione $y(\frac{dy}{dx})+x(\frac{d^2y}{dx^2})=xy$ vogliasi trasformare in un'altra tra le variabili u, t, e $(\frac{du}{dt})$, $(\frac{d^2u}{dt^2})$ essendo $y=u+t$, $x=ut$. S' avrà primieramente

$$y\{(\tfrac{dy}{dt}):(\tfrac{dx}{dt})\}+x\{(\tfrac{d^2y}{dt^2}):(\tfrac{dx}{dt})^2-(\tfrac{dy}{dt})\cdot(\tfrac{d^2x}{dt^2}):(\tfrac{dx}{dt})^3\}=xy.$$

Ora $(\frac{dy}{dt})=(\frac{du}{dt})+1$; $(\frac{d^2y}{dt^2})=(\frac{d^2u}{dt^2})$; $(\frac{dx}{dt})=u+t(\frac{du}{dt})$; $(\frac{d^2x}{dt^2})=2(\frac{du}{dt})+t(\frac{d^2u}{dt^2})$; dunque sostituendo, avremo

$$(u+t)\frac{1+(\frac{du}{dt})}{u+t(\frac{du}{dt})}+ut\left\{\frac{(\frac{d^2u}{dt^2})}{(u+t(\frac{du}{dt}))^2}-\dots\dots\dots\right.$$

$$\left.\frac{[1+(\frac{du}{dt})]\cdot[2(\frac{du}{dt})+t(\frac{d^2u}{dt^2})]}{[u+t(\frac{du}{dt})]^3}\right\}=u^2t+ut^2$$

ovvero riducendo

$$(u+t)[1+(\tfrac{du}{dt})][u+t(\tfrac{du}{dt})]^2+ut(\tfrac{d^2u}{dt^2})[u+t(\tfrac{du}{dt})]-$$

$$[1+(\tfrac{du}{dt})][2(\tfrac{du}{dt})+t(\tfrac{d^2u}{dt^2})]=(u^2t+ut^2)[u+t(\tfrac{du}{dt})]^3$$

equazione del secondo ordine fra le due nuove variabili u, t, ed i loro differenziali.

§. 73. Riguardando y come funzione di x, se x aumenta di una quantità indeterminata ω, una equazione $\varphi(x,y)=0$ tra x ed y, ci dà l' equazione differenziale del primo ordine $P+Q(\frac{dy}{dx})=0$; e se x è la variabile che noi riguardiamo come funzione di y, ovvero y è la variabile che aumenta della quantità ω per darci l' equazione differenziale, allora dall' equazione $\varphi(x,y)=0$ otteniamo $P(\frac{dx}{dy})+Q=0$. Ma se nell' equazione $\varphi=0$ non è già la x o la y che aumenti di ω, ma è una data funzione $F(x,y)$ delle variabili x, y la quale aumenta di ω, quale sarà allora l' equazione differenziale?

Facciamo $F(x,y)=t$, ed eliminando x ovvero y, per mezzo delle due equazioni $\varphi=0$, $F=0$, s' avrà un' equazione fra y e t, ovvero fra x e t, della quale sarà facile prendere la differenziale rapporto a t. Data però l' equazione differenziale $P+Q(\frac{dy}{dx})=0$, come potrà trasformarsi in un' altra che abbia i differenziali rapporto a t?

Essendo t una funzione di x e di y, ed y una funzione di x, saranno in conseguenza le variabili x ed y funzioni di t; dunque l' equazione $P+Q(\frac{dy}{dx})=0$, si trasformerà (§. 71) in

$$(1)\ \dots\ P(\tfrac{dx}{dt})+Q(\tfrac{dy}{dt})=0.$$

Ora eliminando da questa equazione x e $(\frac{dx}{dt})$ per mezzo di $F(x,y)=t$, e della di lei differenziale

$$(2)\ \dots\ (\tfrac{dF}{dx})(\tfrac{dx}{dt})+(\tfrac{dF}{dy})(\tfrac{dy}{dt})=0,$$ avremo un' equazione di questa forma

$R + S\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$; e questa sarà la ricercata equazione differenziale. Noi avremmo potuto egualmente trovare un'equazione tra x, t, e $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ eliminando y e $\left(\frac{dy}{dt}\right)$.

Nella stessa maniera se fosse data un'equazione differenziale di qualunque ordine in x, y, $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ ec., e si volesse trasformare in un'altra nella quale i differenziali fossero presi rapporto a t, essendo $t = F(x, y)$, si comincierebbe dal ridurre l'equazione proposta a contenere soltanto x, y, $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$ ec., e quindi s'eliminerebbe x, $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$ ec., per mezzo dell'equazione $t = F(x, y)$, e delle sue differenziali rapporto a t, ed in questa guisa s'otterrebbe una trasformata in y, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$ ec.

Se poi invece di essere data fra x, y, e t l'equazione $F(x, y) = t$, fosse data un'equazione differenziale del primo ordine

$$\Psi\left\{x, y, \left(\frac{dx}{dt}\right), \left(\frac{dy}{dt}\right)\right\} = 1$$

questa terrebbe luogo dell'equazione (2). Si potrebbe per mezzo di essa eliminare dall'equazione (1) la differenziale $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, ma resterebbero sempre le due variabili x ed y, e l'equazione, cui condurrebbe quest'eliminazione, $P' + Q'\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$ conterrebbe x, y, e $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, essendo le variabili x ed y considerate come funzioni di t. Per eliminare anche x, converrebbe avere l'equazione, dalla quale dipende la data $\Psi = 1$.

Se l'equazione da trasformarsi fosse di un ordine più elevato del primo, allora prendendo le differenziali dell'equazione $\Psi = 1$, s'avrebbero le equazioni necessarie per eliminare

$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ ec., e si troverebbe una trasformata in x, y, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$ ec.

§. 74. **Rendiamo più chiara questa Teoria per mezzo d'alcuni esempj.**

Sia l'equazione $x + y\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$, e proponiamoci di trasformarla in un'altra che abbia i differenziali rapporto a t, essendo $xy = t$.

S'avrà primieramente (§ 70)

$x\left(\frac{dx}{dt}\right) + y\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$: ora differenziando $xy = t$, sarà

$x\left(\frac{dy}{dt}\right) + y\left(\frac{dx}{dt}\right) = 1$; dunque sostituendo $x = \frac{t}{y}$;

$\left(\frac{dx}{dt}\right) = \left\{1 - \frac{t}{y}\left(\frac{dy}{dt}\right)\right\} : y$, avremo

$\frac{t}{y^2}\left\{1 - \frac{t}{y}\left(\frac{dy}{dt}\right)\right\} + y\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$, ovvero

$\frac{t}{y^2} + \left(y - \frac{t^2}{y^3}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$, la quale sarà la trasformata che si voleva.

Data la stessa equazione $x + y\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$, si voglia trasformare in un'altra con i differenziali rapporto a t, essendo data fra x, y e t quest'equazione $y\left(\frac{dx}{dt}\right) = 1$.

Essendo x, y funzione di t, avremo primieramente $x\left(\frac{dx}{dt}\right) + y\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$, nella quale facendo $\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{y}$, si troverà la trasformata richiesta $\frac{x}{y} + y\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$. Per eliminare x converrebbe avere l'equazione, dalla quale, per mezzo della differenziazione dipende $y\left(\frac{dx}{dt}\right) = 1$.

Sia ora l'equazione $x + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$, e fra x, y, t

si abbia $(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 = 1$: avremo primieramente

$$x + \frac{(\frac{dy}{dt})^2}{(\frac{dx}{dt})^2} + y\frac{(\frac{d^2y}{dt^2})}{(\frac{dx}{dt})^2} - y\frac{(\frac{dy}{dt})(\frac{d^2x}{dt^2})}{(\frac{dx}{dt})^3} = 0,$$

e quindi ponendovi per $(\frac{dx}{dt})$, $\sqrt{(1 - (\frac{dy}{dt})^2)}$, e per $(\frac{d^2x}{dt^2})$, $-(\frac{dy}{dt})(\frac{d^2y}{dt^2}) : \sqrt{(1 - (\frac{dy}{dt})^2)}$, si avrà

$$x\left\{1 - (\frac{dy}{dt})^2\right\}^{\frac{3}{2}} + (\frac{dy}{dt})^2\sqrt{(1 - (\frac{dy}{dt})^2)} + y(\frac{d^2y}{dt^2})\sqrt{(1 - (\frac{dy}{dt})^2)} +$$
$$y(\frac{dy}{dt})^2(\frac{d^2y}{dt^2}) : \sqrt{(1 - (\frac{dy}{dt})^2)} = 0,$$

la quale equazione contiene i differenziali rapporto a t.

§ 75. Le formule differenziali le quali contengono $(\frac{dy}{dx})$, $(\frac{d^2y}{dx^2})$ ec, si possono egualmente che l'equazioni, trasformare in altre ove si trovino i differenziali di x e d^2y rapporto ad una nuova variabile t; per questo basterà sostituire in esse le espressioni di $(\frac{dy}{dx})$, $(\frac{d^2y}{dx^2})$ ec., trovate per tale oggetto al § 71.

Ridotta così una formula a contenere le differenziali $(\frac{dx}{dt})$, $(\frac{d^2x}{dt^2})$ ec., $(\frac{dy}{dt})$, $(\frac{d^2y}{dt^2})$ ec., potranno da essa eliminarsi i differenziali rapporto ad una variabile x, ovvero y, per mezzo dell'equazione che stabilisce la relazione tra x, y e la nuova variabile, e delle di lei equazioni differenziali.

Quando per stabilire la suddetta relazione è data un'equazione differenziale (§. antecedente). $\Psi(x, y, (\frac{dx}{dt}), (\frac{dy}{dt})) = 1$, ovvero $\Psi = 1$, allora essendo $(\frac{d\Psi}{dt}) = 0$, $(\frac{d^2\Psi}{dt^2}) = 0$ ec., suole anche dirsi che la trasformazione è fatta o deve farsi nella supposizione che $\Psi(x, y, (\frac{dx}{dt}), (\frac{dy}{dt}))$ sia

una quantità costante, o che abbia i differenziali nulli; così nell'ultimo caso del §. antecedente, la trasformazione di $x + (\frac{dy}{dx})^2 + y(\frac{d^2y}{dx^2}) = 0$ (equazione in cui dx è supposto costante) si dice che deve farsi nella supposizione che sia costante $(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2$, ovvero $\sqrt{((\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2)}$.

Egualmente se un'equazione nella quale le differenziali sono prese relativamente ad x, vuole trasformarsi in un'altra nella quale le differenziali siano relative ad y, suole dirsi „ che „ quell'equazione nella quale è costante dx, deve trasformarsi „ in un'altra nella quale è costante dy „.

Infatti trasformata quell'equazione in $(\frac{dx}{dt})$, $(\frac{dy}{dt})$, $(\frac{d^2x}{dt^2})$ ec., vi faremo $y = t$, ed in conseguenza $(\frac{dy}{dt}) = 1$, $(\frac{d^2y}{dt^2}) = 0$ ec., per il che la trasformata non conterrà che $(\frac{dx}{dy})$, $(\frac{d^2x}{dy^2})$ ec.

Proponiamo per esempio di trasformare la formula $(\frac{dy}{dx}) : \sqrt{(1 + (\frac{dy}{dx})^2)}$ in un'altra nella quale i differenziali siano presi rapporto a t, essendo $\sqrt{((\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2)} = 1$. Ponendo in questa formula $(\frac{dy}{dt}) : (\frac{dx}{dt})$ per $(\frac{dy}{dx})$, avremo $(\frac{dy}{dt}) : \sqrt{((\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2)}$, espressione che si riduce a $(\frac{dy}{dt})$ per essere $\sqrt{((\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2)} = 1$.

Noi non ci estendiamo di più sopra queste trasformazioni, poichè quanto abbiamo detto ne contiene l'intiera Teoria, e ci riserbiamo a darne ulteriore spiegazione, allorchè ci verrà il bisogno di farne uso.

CALCOLO DIFFERENZIALE ED INTEGRALE.

C A P. VI.

Prime Applicazioni del Calcolo Differenziale alla Geometria ed alla Meccanica.

§. 76. Noi avevamo determinato di dar con tutta la possibile estensione le applicazioni alla Geometria ed alla Meccanica nel fine del Calcolo Integrale; ma siccome, seguendo un tal metodo, non avremmo potuto tramezzare le sterili Teorie dell' integrazioni, con Problemi interessanti e celebri per avere esercitati i primi inventori dei Calcoli Differenziale ed Integrale; così abbiam cangiato consiglio, e destinato abbiamo questo Capitolo ad alcune di siffatte applicazioni: le chiamiamo *prime* per distinguerle da quelle più sublimi interessanti ricerche Geometriche e Meccaniche, delle quali parleremo nel seguente Volume.

Prime Applicazioni alla Geometria.

(Fig. 1) Si abbiano due curve qualunque EF, E'F' riferite a due assi ortogonali AB, AC. Siano le coordinate della prima curva $AP=\omega$, $PM=\pi$, fra le quali si abbia l' equazione $\pi=f\omega$, indicando per $f\omega$ una qualunque funzione di ω: le coordinate della seconda curva siano $AP'=p$, $P'M'=q$, fra le quali abbiasi la relazione $q=Fp$, essendo Fp una funzione di p. L' equazione adunque $\pi=f\omega$ rappresenta la curva EF, e l' equazione $q=Fp$ la curva E'F'.

Affinchè le due curve abbiano un punto comune, è neces-

sario che ad una certa ascissa comune corrisponda nelle due curve una stessa ordinata. Sia $AN=x$ quest' ascissa comune, e sia $NH=y$ l' ordinata che vi corrisponde: converrà per l' esistenza del punto comune alle due curve, che mentre ω ascissa della prima curva, diviene x, l' ordinata π divenga y; e quando p ascissa della seconda curva, diviene x, l' ordinata q divenga parimente y; ovvero che si abbia $y=fx$, $y=Fx$, d' onde $fx=Fx$. Quest' ultima equazione in x, ci darà il valore dell' ascissa x che corrisponde al punto comune N. Se la risoluzione di quest' ultima equazione ci dà per x un valore immaginario, le due curve non possono allora segarsi.

Fig. 1.

Abbiano le due curve un punto H comune, sia cioè $fx=Fx$, ed esaminiamo il corso di queste curve al di là di quel punto.

Facciamo nelle due equazioni $\pi=f\omega$, $q=Fp$, $\omega=x+\theta$, $p=x+\theta$, ed avremo $\pi=f(x+\theta)$, $q=F(x+\theta)$. Sarà dunque $OQ=f(x+\theta)$ l' ordinata della prima curva EF, e $OR=F(x+\theta)$ l' ordinata della seconda E'F', corrispondenti ambedue alla stessa ascissa $AO=x+\theta$. Queste due ordinate, le quali cadono evidentemente una sopra l' altra, sono distanti dall' ordinata $NH=y$ della quantità $NO=\theta$.

La differenza $RQ=F(x+\theta)-f(x+\theta)$ di queste due ordinate, sarà la distanza dei due punti R, Q delle curve, corrispondenti all' ascissa AO, misurata questa distanza sopra la direzione dell' ordinata.

Sviluppando in serie le due funzioni $F(x+\theta)$, $f(x+\theta)$ per mezzo del Teorema di Tajlor, avremo (rammentiamo che $Fx=fx$, e quindi $Fx-fx=0$)

$$RQ=\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right)-\left(\frac{df}{dx}\right)\right\}\theta+\left\{\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)-\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)\right\}\frac{\theta^2}{2}+\left\{\left(\frac{d^3F}{dx^3}\right)-\left(\frac{d^3f}{dx^3}\right)\right\}\frac{\theta^3}{2\cdot3}+\text{ec.}$$

Si vede primieramente che questa distanza RQ sarà tanto minore, e per conseguenza le curve tanto più si avvicineranno, quanto maggiore sarà il numero dei termini che svaniranno al principio di questa serie; se dunque oltre essere $Fx=fx$, fosse ancora $\left(\frac{df}{dx}\right)=\left(\frac{dF}{dx}\right)$, la differenza RQ sarebbe minore, e le due curve s' avvicinerebbero di più, che se questa condizione non avesse luogo; se fosse anche $\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)$, l'avvicinamento crescerebbe di più, e così di seguito.

Ma per vedere più chiaramente in che consistono questi differenti gradi di ravvicinamento, noi considereremo una terza curva E″F″ riferita ai medesimi assi. Siano r ed s le coordinate di questa curva, la quale sia espressa dall' equazione $s = \varphi r$. Supponiamo che anche essa passi per H; quando dunque $r = x$, sarà $s = y$, e perciò $\varphi x = fx = Fx$. Fig. 2.

Sia ora $RQ = D$, $RR'' = \Delta$, ed avremo

$$D = F(x+\theta) - f(x+\theta),\ \Delta = F(x+\theta) - \varphi(x+\theta)$$

sempre che D sarà minore di Δ, la terza curva non passerà fra le due prime; e se per qualunque valore di θ, comunque si voglia piccolo o grande, sarà sempre $D < \Delta$, la terza curva E″F″ per tutto il suo corso al di là del punto N, non potrà mai passare tra le due prime curve EF, E′F′.

Acciocchè la terza curva potesse, dopo il punto comune, continuare il suo corso, almeno per un certo tratto, tra le altre due curve, bisognerebbe che per il valore di θ corrispondente a quel tratto, non avesse luogo la condizione suddetta; non fosse cioè $D < \Delta$. Finchè però le funzioni sono tali che sussiste questa condizione, la terza curva non passerà fra di esse.

Sviluppiamo le funzioni $f(x+\theta)$, $F(x+\theta)$, $\varphi(x+\theta)$ in serie per mezzo delle formule del (§. 36.), prendendo i due soli primi termini dello sviluppo non trascurando però il resto, ed avremo

$$f(x+\theta) = fx + \theta\left(\frac{df}{dx}\right) + \frac{\theta^2}{2} f''(x+j)$$

$$F(x+\theta) = Fx + \theta\left(\frac{dF}{dx}\right) + \frac{\theta^2}{2} F''(x+j)$$

$$\varphi(x+\theta) = \varphi x + \theta\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{\theta^2}{2} \varphi''(x+j)$$

essendo j una quantità maggiore di zero e minore di θ; questa quantità j potrà essere diversa nei tre sviluppi, ma dovrà essere sempre contenuta tra gli stessi limiti. Sarà dunque

$$D = Fx - fx + \theta\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right) - \left(\frac{df}{dx}\right)\right\} + \frac{\theta^2}{2}\left\{F''(x+j) - f''(x+j)\right\}.$$

$$\Delta = Fx - \varphi x + \theta\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right) - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\right\} + \frac{\theta^2}{2}\left\{F''(x+j) - \varphi''(x+j)\right\}.$$

Ma avendo le tre curve un punto comune corrispondente all' ascissa x, è $Fx = fx = \varphi x$; dunque

$$D = \theta\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right) - \left(\frac{df}{dx}\right)\right\} + \frac{\theta^2}{2}\left\{F''(x+j) - f''(x+j)\right\}$$

$$\Delta = \theta\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right) - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\right\} + \frac{\theta^2}{2}\left\{F''(x+j) - \varphi''(x+j)\right\}.$$

Supponiamo frattanto che nelle due prime curve si abbia $\left(\frac{df}{dx}\right) = \left(\frac{dF}{dx}\right)$, ed allora s' avrà per D quest' espressione

$$D = \frac{\theta^2}{2}\left\{F''(x+j) - f''(x+j)\right\}.$$

Ora finchè nell' espressione di Δ sussisterà il termine moltiplicato da θ, potremo dare a θ un così piccolo valore, che la quantità Δ divenga maggiore della D, astrazione fatta dai segni: infatti se rappresentiamo per P la quantità che è moltiplicata per θ^2 nell' espressione di D, e per Q la simil quantità nell' espressione di Δ, si avrà $D < \Delta$, quando

$\frac{\theta^2}{2} P < \theta\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right) - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\right\} + \frac{\theta^2}{2} Q$, ovvero quando

$\frac{\theta^2}{2}(P - Q) < \theta\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right) - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\right\}$, ovvero quando

$\frac{\theta}{2}(P - Q) < \left(\frac{dF}{dx}\right) - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$: ora il primo termine di quest' ultimo rapporto diminuendo continuamente col diminuire di θ, ne segue che potrà prendersi θ così piccolo, che non solo il primo termine di quest' ultimo rapporto eguagli il secondo, ma ancora che sia minore di lui, per il che ancora D sarà minore di Δ, e tutti i valori di θ minori di questo, goderanno a più forte ragione della stessa proprietà (a).

Dunque per questo valore di θ e dei suoi minori, non potrà mai essere la differenza Δ minore della D, cioè non potrà mai il punto R″ cadere fra i punti R, Q; non potrà perciò la terza curva continuare il suo tratto fra le due prime curve al di là del punto comune, o passare per mezzo ad esse, se la quantità $\left(\frac{dF}{dx}\right) - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$ non si annulla, ovvero se non è $\left(\frac{dF}{dx}\right) = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$; e se quest' ultima equazione è vera, allora non ha luogo la conclusione precedente.

§. 77. Supponiamo che il ravvicinamento delle due prime curve sia tale che si abbia nel punto comune alle due curve non solo $Fx = fx$, $\left(\frac{dF}{dx}\right) = \left(\frac{df}{dx}\right)$, ma ancora $\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)$.

Sviluppiamo in serie le ordinate corrispondenti all' ascissa $x + \theta$, e fermiamoci al terzo termine tenendo conto del resto: avremo

$$F(x+\theta) = Fx + \theta\left(\frac{dF}{dx}\right) + \frac{\theta^2}{2}\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) + \frac{\theta^3}{2.3}F'''(x+j)$$

$$f(x+\theta) = fx + \theta\left(\frac{df}{dx}\right) + \frac{\theta^2}{2}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right) + \frac{\theta^3}{2.3}f'''(x+j)$$

$$\varphi(x+\theta) = \varphi x + \theta\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{\theta^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) + \frac{\theta^3}{2.3}\varphi'''(x+j)$$

ora $Fx = fx = \varphi x$, $\left(\frac{df}{dx}\right) = \left(\frac{dF}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)$; dunque

(a) Faccio osservare la differenza che passa tra l'aumento θ indeterminato, ed il dx infinitesimo. Questo debbe esser minore di ogni quantità assegnabile, di modo che non puossi concepire una grandezza più piccola di lui, e quello, cioè il θ, lo considero diminuire finchè renda $\frac{\theta}{2}(P-Q) = \left(\frac{dF}{dx}\right) - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$, e posso immaginare allora una infinità di altri valori di θ più piccoli di quello, per i quali, il primo membro divenendo minore del secondo, nascerebbe l'assurdo.

$$RQ = D = \left\{F'''(x+j) - f'''(x+j)\right\}\frac{\theta^3}{2.3}$$

$$RR'' = \Delta = \theta\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right) - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\right\} + \frac{\theta^2}{2}\left\{\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)\right\} + \ldots$$

$$\frac{\theta^3}{2.3}\left\{F'''(x+j) - \varphi'''(x+j)\right\}.$$

Con un ragionamento simile a quello fatto al §. antecedente, proveremo che se i termini moltiplicati per le potenze di θ, θ^2 nell' espressione di Δ non sono nulli, potrà prendersi θ così piccolo che la quantità Δ superi D, astraendo dai segni.

Si rappresenti infatti per P la quantità moltiplicata per $\frac{\theta^3}{2.3}$, che è nel valore di D; per Q, quella che moltiplica $\frac{\theta^2}{2}$; e per R quella che moltiplica $\frac{\theta^3}{2.3}$ nell' espressione di Δ, ed avremo

$$D = \frac{\theta^3}{2.3}P$$

$$\Delta = \theta\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right) - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\right\} + \frac{\theta^2}{2}Q + \frac{\theta^3}{2.3}R:$$

sarà dunque $D < \Delta$ se

$$\frac{\theta^3}{2.3}P < \theta\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right) - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\right\} + \frac{\theta^2}{2}Q + \frac{\theta^3}{2.3}R,$$ ovvero se

$$\frac{\theta^2}{2.3}(P - R) - \frac{\theta}{2}Q < \left(\frac{dF}{dx}\right) - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right):$$ ora il primo termine di questo rapporto diminuisce continuamente col diminuire di θ; dunque egli arriverà non solo ad essere eguale al secondo termine, ma ancora ad esser minore, nel qual caso sarà $D < \Delta$.

Se poi la seconda e la terza curva fossero tali che $\left(\frac{dF}{dx}\right) = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$, allora avremo $\Delta = \frac{\theta^2}{2}Q + \frac{\theta^3}{2.3}R$; in questo caso ancora possiamo prendere θ così piccolo da rendere $D < \Delta$: infatti sarà $D < \Delta$ quando $\frac{\theta^3}{2.3}P < \frac{\theta^2}{2}Q + \frac{\theta^3}{2.3}R$, ovvero quando $\frac{\theta}{3}(P - R) < Q$; ciò che potrà sempre accadere, se Q non è nullo da se medesimo, poichè in questo rapporto il primo termine diminuisce continuamente col diminuire ϕ, ed il secondo resta costante.

Dunque non potrà mai RR″ esser minore di RQ, ovvero la terza curva non potrà mai passare fra le due prime, se non è $(\frac{d\phi}{dx})=(\frac{dF}{dx}), (\frac{d^2\phi}{dx^2})=(\frac{d^2F}{dx^2})$.

Proveremo nella stessa maniera che avendo le due curve EF, EF′ nel punto comune non solo $Fx=fx$, ma ancora $(\frac{dF}{dx})=(\frac{df}{dx}), (\frac{d^2F}{dx^2})=(\frac{d^2f}{dx^2}), (\frac{d^3F}{dx^3})=(\frac{d^3f}{dx^3})$, la terza curva E″F″, la quale ha lo stesso punto comune con loro, non potrà (al di là di questo punto) passare tramezzo ad esse, se essa non ha $(\frac{d\phi}{dx})=(\frac{dF}{dx}), (\frac{d^2\phi}{dx^2})=(\frac{d^2F}{dx^2}), (\frac{d^3\phi}{dx^3})=(\frac{d^3F}{dx^3})$; e così di seguito.

Dunque se in due curve che hanno un punto comune, le differenziali prime dell' ordinate corrispondenti a questo punto comune sono eguali, nessuna altra curva avente lo stesso punto comune con esse, può passare fra di loro quando non abbia ancor essa la differenziale prima della corrispondente ordinata eguale alle differenziali prime dell' ordinate dell' altre curve.

Se poi in quelle due prime curve ancora s' eguagliassero fra di loro le differenziali seconde dell' ordinate del punto comune, non può allora alcuna altra curva, dotata dello stesso punto comune, passare tramezzo ad esse, se oltre la differenziale prima, anche la differenziale seconda della di lei ordinata per quel punto comune, non eguagli le altre differenziali prime e seconde, e così di seguito.

Queste curve adunque, parlando con precisione Geometrica, non coincidono che in un sol punto, ove le ordinate sono eguali, e l' eguaglianza delle differenziali prime e seconde di queste ordinate, non le rende più o meno coincidenti negli altri punti; ma essa le fa tanto avvicinarsi che nessuna altra curva per la quale non sussiste quest' eguaglianza, può passare fra di esse.

Questa Teoría dei Contatti che si deve all' immortale La-Grange, ci dà la vera idea dei diversi gradi di ravvicinamento delle curve, ai quali si dà il nome di *Contatto*, *Osculazione* ec.

§. 78. Ma limitando un poco la generalità di queste ricerche, applichiamoci a qualche esempio.

Fig. 3. Sia al solito $z=fx$ l' equazione della curva EF, e proponiamoci di paragonarla con una linea retta qualunque. Noi abbiamo rappresentata per $q=Fp$ l' equazione della curva, alla quale si voleva paragonare la proposta: ora siccome l' equazione di una linea retta qualunque E′F′ è $q=a+bp$, a e b essendo due costanti che determinano la posizione della retta, avremo dunque nel nostro caso $Fp=a+bp$.

Dovendo la linea retta E′F′ avere un punto comune H con la curva EF, dovrà essere $fx=Fx=a+bx$; e per mezzo di quest' equazione potremo determinare una delle due costanti a, b.

Supponiamo in seguito $(\frac{df}{dx})=(\frac{dF}{dx})=\frac{d(a+bx)}{dx}$, ed avremo $(\frac{df}{dx})=b$; così i valori di a e di b, saranno $b=(\frac{df}{dx})$, $a=fx-x(\frac{df}{dx})$; l' equazione adunque della linea retta E′F′, la quale ha un punto H di comune con la curva EF, ed ha in questo punto la differenziale prima della sua ordinata, eguale alla differenziale prima dell' ordinata della curva, è $q=fx-x(\frac{df}{dx})+p(\frac{df}{dx})$, ove p e q sono le due coordinate, e l' ascissa x è quella che conviene al punto H comune alla retta ed alla curva, ed è riguardata costante relativamente a tutti gli altri punti della retta medesima.

Essendo nel punto comune H non solo $fx=Fx$, ma ancora $(\frac{df}{dx})=(\frac{dF}{dx})$, nessuna altra retta (§. antecedente) potrà avere lo stesso punto H comune, e passare fra la curva e la prima linea retta; infatti sia $s=\phi r=g+hr$ l' equazione di un' altra retta qualunque; affinchè essa passi per il medesimo punto comune, bisognerà che sia $\phi x=fx$; ed affinchè essa possa passare tra la curva HF, e la retta HF′, bisogna che di più sia $(\frac{d\phi}{dx})=(\frac{dF}{dx})=(\frac{df}{dx})$. Per adempire a queste due condizioni si ha $g+hx=fx$, $h=(\frac{df}{dx})$, dalle quali si ricavano per g, e per h gli stessi valori ritrovati per a e per b; quest' ultima retta caderà adunque sopra la prima.

Dunque se noi, seguendo le idee degli antichi Geometri, chiamiamo tangente ad una curva quella retta, la quale avendo un punto comune con la curva non permette ad alcuna altra retta che abbia lo stesso punto comune, di passare tra essa e la curva, la retta che noi abbiamo determinata, e di cui l' equazione è $q = fx - x\left(\frac{df}{dx}\right) + p\left(\frac{df}{dx}\right)$, sarà la tangente della curva EF nel punto H.

Possiamo ancora prendere subito $y = fx$ per l' equazione della curva; ed allora l' equazione della tangente ad essa nel punto corrispondente all' ascissa x, sarà $q = a + bp$, essendo $a = y - x\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $b = \left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Nell' equazione alla linea retta $q = a + bp$, è facile vedere che b esprime la tangente dell' angolo FE'B, che questa retta fa con l' asse delle ascisse, e che $-\frac{a}{b}$ è l' ascissa AE' del punto, ove la retta sega l' asse; poichè in questo punto dovendo essere $q = 0$, si ha $p = -\frac{a}{b}$; dunque questa retta EF essendo tangente nel punto H corrispondente all' ascissa x, sarà $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ *la tangente* dell' angolo che essa fa con l' asse, ed $x + \frac{a}{b} = x + \left(y - x\left(\frac{dy}{dx}\right)\right) : \left(\frac{dy}{dx}\right) = y : \left(\frac{dy}{dx}\right)$, sarà la porzione NE' = NA — AE' dell' asse, alla quale si dà il nome di *Suttangente*.

Conoscendo la tangente $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, si ha il coseno dello stesso angolo $= \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}$, ed il seno $= \left(\frac{dy}{dx}\right) : \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$.

Di più, se rappresentiamo per $s = \alpha + \beta r$ l' equazione di un' altra retta OP che passi per il medesimo punto H; r ed s essendo le due coordinate di essa, s' avrà nel punto comune H, $r = p = x$, $s = q = y$; dunque $a + bx = \alpha + \beta x$; e se Fig. 4.

vogliamo che questa retta tagli la prima sotto un angolo E'HO, la cui tangente sia m, siccome b e β sono le tangenti degli angoli HE'B, HOB, avremo per le conosciute formule di trigonometria

$$tang.\,\text{HOB} = tang.\,(\text{HE'B} + \text{E'HO}) = \frac{tang.\,\text{HE'B} + tang.\,\text{E'HO}}{1 - tang.\,\text{HE'B} \times tang.\,\text{E'HO}},$$ e

perciò $\beta = \frac{b + m}{1 - bm} = \frac{\frac{1}{m}b + 1}{\frac{1}{m} - b}$; sarà dunque $\alpha = a + (b - \beta)x = a - \frac{m(1 + b^2)}{1 - bm}x = a - \frac{1 + b^2}{\frac{1}{m} - b}x$, nella quale bisognerà sostituire i ritrovati valori per a e per b.

Se questa seconda retta OP diviene MHL perpendicolare alla tangente, allora l' angolo E'HM diviene retto, e la sua cotangente $\frac{1}{m} = 0$: abbiamo allora $\beta = -\frac{1}{b}$, ed $\alpha = a + \frac{x(1 + b^2)}{b} = a + \frac{x}{b} + xb$; sostituendo per a e per b i ritrovati valori, avremo $\beta = tang.\,\text{HMB} = -1 : \left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\alpha = \text{AM} = y + x : \left(\frac{dy}{dx}\right)$; e l' equazione di questa perpendicolare sarà $s = y + x : \left(\frac{dy}{dx}\right) - r : \left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Avremo poi $-1 : \left(\frac{dy}{dx}\right)$ per la tangente dell' angolo HMB, che LM perpendicolare ad EF, fa con l' asse; ed $1 : \left(\frac{dy}{dx}\right)$ sarà la tangente del supplemento HMA. Questa perpendicolare HM chiamasi *Normale*.

La porzione poi NM intercetta fra l' ordinata e la normale, e che chiamasi *Subnormale*, sarà = AM — AN; ma AM = $-\frac{\alpha}{\beta} = \left\{-y - x : \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\} : \left\{-1 : \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\} = y\left(\frac{dy}{dx}\right) + x$; dunque

$$\text{NM} = y\left(\frac{dy}{dx}\right) + x - x = y\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Trovate le formule della suttangente E'N, e della subnormale NM, sarà facile trovare quelle della tangente stessa E'H, e della normale MH: infatti essendo $HE' = \sqrt{((E'N)^2 + (NH)^2)}$, $HM = \sqrt{((NM)^2 + (HN)^2)}$, avremo

$$HE' = \sqrt{(y^2 : (\tfrac{dy}{dx})^2 + y^2)} = \sqrt{\{1 + (\tfrac{dy}{dx})^2\}}\, y : (\tfrac{dy}{dx})$$

$$HM = \sqrt{(y^2 \cdot (\tfrac{dy}{dx})^2 + y^2)} = y\sqrt{\{1 + (\tfrac{dy}{dx})^2\}}.$$

Facciamo alcuni esempj.

Sia EHDF una mezza Ellisse, riferita ai due assi $EC = a$, $CD = b$; si cercano la tangente, la suttangente, la normale e la subnormale al punto H corrispondente ad una ascissa x. Se l'origine dell'ascisse si suppone nel punto E, sarà $EN = x$, $NH = y$, e l'equazione dell'Ellisse sarà $y^2 = \frac{bb}{aa}(2ax - x^2)$. Fig. 5.

Le formule esprimenti i valori delle suddette linee, sono date in x, y e $(\frac{dy}{dx})$: abbiamo il valore di y dato in x per mezzo dell'equazione della curva; cerchiamone dunque il valore di $(\frac{dy}{dx})$ per mezzo della differenziazione:

essendo $y = \frac{b}{a}\sqrt{(2ax - x^2)}$, differenziando s'avrà

$(\frac{dy}{dx}) = \frac{b(a-x)}{a\sqrt{(2ax - x^2)}}$: avremo pertanto

$$E'N = suttang. = y : (\tfrac{dy}{dx}) = (\tfrac{b}{a}\sqrt{(2ax - x^2)}) : \tfrac{b}{a} \cdot \tfrac{a-x}{\sqrt{(2ax - x^2)}},$$

$$E'N = \frac{2ax - x^2}{a - x} = \frac{x(2a - x)}{a - x} = \frac{EN . NF}{NC}.$$

Abbiamo adunque nell'Ellisse NC : NE' :: NF : suttangente. La sostituzione di y e di $(\frac{dy}{dx})$ nelle altre formule ci darà le espressioni della tangente, normale e subnormale. I nostri Lettori s'eserciteranno nel farla.

Se invece di prendere l'ascisse dal punto E, si fossero prese dal centro C, l'equazione allora dell'Ellisse sarebbe

stata $y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$, e differenziando avremmo

$(\frac{dy}{dx}) = \frac{-bx}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, dal che si ricava

$$suttang. = -\frac{a^2 - x^2}{x} = -\frac{(a+x)(a-x)}{x} = -\frac{EN . NF}{NC},$$ ed il segno negativo ci avverte, che essa, relativamente all'ascissa x, ha una posizione opposta a quella che aveva nel primo caso.

Se nell'equazione dell'Ellisse si fa $a = b$, essa diviene l'equazione del Circolo, e l'espressione della suttangente rimane la stessa.

Fig. 6. Per un altro esempio si cerchi la suttangente nella Logaritmica EHF, corrispondente al punto H.

Facendo $AN = x$, $NH = y$, l'equazione della Logaritmica è $x = mly$, essendo m il parametro costante (che in questa curva si chiama Modulo) il quale fa differire questa Logaritmica da un'altra.

Differenziando quell'equazione si ha:

$\frac{m}{y}(\frac{dy}{dx}) = 1$, ed in conseguenza $suttang. = EN = y : (\frac{dy}{dx}) = m$: dunque nella Logaritmica la suttangente è sempre costante $= m$, qualunque d'altr'onde sia il punto a cui corrisponde.

§. 79. Abbiamo esaminato il contatto che può avere una linea retta con una curva qualunque; esaminiamo ora quello che può avervi il Circolo.

Fig. 7. Sia EHF una curva rappresentata da $\pi = f\omega$, essendo π, ω le sue coordinate; e sia il Circolo EHF' che abbia il punto H di comune con quella curva. Siano p e q le coordinate AG, GD del Circolo; c il raggio; a, b le coordinate AP, PC del suo centro C, e la sua equazione sarà $(p - a)^2 + (q - b)^2 = c^2$.

Da quest'equazione si ricava

$$q = b + \sqrt{\{c^2 - (p - a)^2\}}:$$

rappresentando (§. 76.) adunque per $q = Fp$ l'equazione della curva da paragonarsi con EF, avremo nel nostro caso

$$Fp = b + \sqrt{\{c^2 - (p - a)^2\}},$$ e quindi

$$Fx = b + \sqrt{\{c^2 - (x-a)^2\}},\ \left(\frac{dF}{dx}\right) = -\frac{x-a}{\sqrt{(c^2-(x-a)^2)}}.$$

Se ora supponiamo che nel punto comune H, debba essere $Fx = fx = y$, $\left(\frac{dF}{dx}\right) = \left(\frac{df}{dx}\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right)$, bisognerà determinare a e b in maniera che siano sodisfatte queste condizioni.

La seconda di quell' equazioni ci dà

$\sqrt{(c^2-(x-a)^2)} = -(x-a):\left(\frac{dy}{dx}\right)$, dalla quale si ricava $x-a = c\left(\frac{dy}{dx}\right):\sqrt{(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2)}$. Dalla prima poi abbiamo $y-b = \sqrt{(c^2-(x-a)^2)} = -(x-a):\left(\frac{dy}{dx}\right) = -c:\sqrt{(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2)}$; dunque

$$a = x - c\left(\frac{dy}{dx}\right):\sqrt{(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2)},\ b = y + c:\sqrt{(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2)}.$$

Se dunque riguardiamo il raggio c come una quantità determinata, non rimangono più arbitrarie nell' equazione, e concluderemo che il circolo E'F', il cui centro C è determinato dalle coordinate AP $= a$, PC $= b$, ha non solo un punto H comune con la curva EF, ma di più in questo punto la differenziale prima dell' ordinata del circolo, eguaglia la differenziale prima dell' ordinata della curva.

Quest' ultima circostanza fa sì che nessun altro circolo dello stesso raggio può avere quel punto H comune, e nello stesso tempo passare fra il primo circolo e la curva; infatti supponendo ciò possibile, sia

$s = \varphi r = (h + \sqrt{(c^2 - (r-g)^2)})$ l' equazione del secondo circolo, il cui centro è determinato dalle coordinate h e g. Dovendo per ipotesi questo nuovo circolo avere lo stesso punto comune H, e passare fra il primo circolo e la curva, bisognerà (§. 76) che non solo sia $\varphi x = fx = y$, ma ancora $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = \left(\frac{df}{dx}\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right)$: determinando ora le coordinate h, g in modo da soddisfare a queste condizioni, ricavando cioè i valori di g e di h da queste due equazioni

$h + \sqrt{(c^2-(x-g)^2)} = y$, $\sqrt{(c^2-(x-g)^2)} = -(x-g):\left(\frac{dy}{dx}\right)$, avremo per g e per h i medesimi valori ritrovati per a e per b; il nuovo circolo avendo adunque il medesimo raggio del primo, ed il centro nello stesso punto del primo, si confonderà o coinciderà con esso.

Dunque chiamando *Tangente* in un punto H di una curva, quel circolo, il quale avendo un determinato raggio c; non permette che un altro dello stesso raggio abbia lo stesso punto comune e passi tra esso e la curva, il circolo, le coordinate del cui centro sono $a = x - c\left(\frac{dy}{dx}\right):\sqrt{(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2)}$, $b = y + c:\sqrt{(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2)}$, sarà il circolo *Tangente* della curva EF nel punto H.

Questa conclusione ha luogo qualunque sia il valore del raggio c: dunque possiamo riguardare c come indeterminato nell' espressioni di a e di b, e per ciascun valore che daremo al raggio c, avremo diversi valori per a e per b, i quali determineranno in conseguenza diversi punti, o i diversi centri C', C'' ec., dei circoli tangenziali E''HF'', E'''HF''' ec.

Queste ordinate a, b apparterranno allora ad una linea retta, l' equazione della quale risulterà dall' eliminazione di c. Eseguita questa eliminazione per mezzo dell' equazioni $a = x - c\left(\frac{dy}{dx}\right):\sqrt{(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2)}$, $b = y + c:\sqrt{(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2)}$, avremo l' equazione $b = y + (x-a):\left(\frac{dy}{dx}\right)$ per rappresentare questa retta HCC' ec. In quest' equazione x è riguardata come costante; a, b sono le coordinate dei diversi punti C, C', C'' ec.

Questa linea HCC' ec., essendo il luogo Geometrico di tutti i centri dei circoli tangenti della curva nel punto H, sarà normale alla curva; ed infatti la di lei equazione è la stessa che l' equazione della normale trovata di sopra (§. 78), avvertendo che ivi abbiamo indicato per r, s quelle coordinate che qui sono rappresentate da a, b.

Frattanto tra tutti i diversi circoli che soddisfanno alle condizioni $Fx = fx = y$, $\left(\frac{dF}{dx}\right) = \left(\frac{df}{dx}\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right)$, se ne può trovare uno, il quale soddisfaccia anche alla condizione $(\frac{d^2F}{dx^2}) = (\frac{d^2f}{dx^2}) = (\frac{d^2y}{dx^2})$, determinando opportunamente il raggio c.

Per questo, avendo ritrovato superiormente

$(\frac{dF}{dx}) = \frac{-(x-a)}{\sqrt{(c^2-(x-a)^2)}}$; sarà $(\frac{d^2F}{dx^2}) = -\frac{c^2}{(c^2-(x-a)^2)^{\frac{3}{2}}}$,

e quindi $-\frac{c^2}{(c^2-(x-a)^2)^{\frac{3}{2}}} = (\frac{d^2y}{dx^2})$: ora

$\sqrt{(c^2-(x-a)^2)} = -(x-a):(\frac{dy}{dx}) = -\frac{c}{\sqrt{(1+(\frac{dy}{dx})^2}}$; dunque

$(\frac{d^2y}{dx^2}) = -\frac{(1+(\frac{dy}{dx})^2)^{\frac{3}{2}}}{c}$, ed in conseguenza

$c = (1+(\frac{dy}{dx})^2)^{\frac{3}{2}}:(\frac{d^2y}{dx^2})$; e questo sarà il valore del raggio del circolo tangenziale che soddisfà a quella terza condizione. Sostituendo questo valore di c nei valori di a e di b, s' avranno ancora le coordinate del di lui centro, e sarà

$a = x - (\frac{dy}{dx})(1+(\frac{dy}{dx})^2):(\frac{d^2y}{dx^2})$

$b = y + (1+(\frac{dy}{dx})^2):(\frac{d^2y}{dx^2})$.

Le tre costanti a, b, c che entrano nell' equazione generale del circolo, essendo in questa guisa determinate, possiamo concludere che nessun altro circolo potrà passare tra la curva proposta, e quello che è determinato dai valori delle a, b, c; infatti acciò un' altra curva qualunque riferita alle coordinate r ed s, e rappresentata dall' equazione $s = \varphi r$, possa passare tra la curva ed il circolo, di cui si tratta, bisogna che si abbia

$\varphi x = fx = y$, $(\frac{d\varphi}{dx}) = (\frac{df}{dx}) = (\frac{dy}{dx})$, e $(\frac{d^2\varphi}{dx^2}) = (\frac{d^2f}{dx^2}) = (\frac{d^2y}{dx^2})$.

Ora se questa curva è un circolo, indicando per g, h, k le quantità omologhe alle a, b, c del primo circolo, avremo per φx, $(\frac{d\varphi}{dx})$, $(\frac{d^2\varphi}{dx^2})$ delle espressioni in g, h, k simili a quel-

le in a, b, c ottenute per Fx, $(\frac{dF}{dx})$, $(\frac{d^2F}{dx^2})$; dunque le tre equazioni che avremo per la determinazione di g, h, k saranno necessariamente le stesse che quelle trovate per a, b, c: dunque avremo per g, h, k gli stessi valori che per a, b, c, e per conseguenza il nuovo circolo sarà il medesimo che il primo, coincidendo perfettamente sopra di lui.

Questo circolo pertanto avrà relativamente ai circoli, la medesima proprietà che ha la tangente a riguardo alle linee rette. Fra la curva e quella retta tangente non può passare nessuna altra linea retta, ed egualmente fra la curva ed il circolo, da noi determinato, non può passare nessun altro circolo.

A questo circolo danno i Geometri il nome di *Circolo Osculatore* o di *Curvatura* perchè si avvicina alla curva più di qualunque altro circolo, ed in conseguenza ci dà la misura più prossima della curvatura d' una curva. Il raggio di esso si chiama *Raggio Osculatore* o di *Curvatura*, ed indicandolo per R, è

$$R = \frac{(1+(\frac{dy}{dx})^2)^{\frac{3}{2}}}{(\frac{d^2y}{dx^2})}.$$

§. 80. Le formule da noi date nei §§. antecedenti, suppongono le curve riferite alle coordinate ortogonali x, y: se però saranno esse referite a due altre qualunque coordinate t, u delle quali si conosca la relazione con x, y, bisognerà allora in quelle formule cangiare i differenziali che erano presi relativamente alla variabile x, in altri presi relativamente alla variabile t.

Così supponendo $y = \Psi(u, t)$, $x = \varphi(u, t)$, dovremo (§. 72) invece di $(\frac{dy}{dx})$ sostituire $(\frac{dy}{dt}):(\frac{dx}{dt})$, ovvero

$\{(\frac{d\Psi}{dt}) + (\frac{d\Psi}{du}).(\frac{du}{dt})\}:\{(\frac{d\varphi}{dt}) + (\frac{d\varphi}{du}).(\frac{du}{dt})\}$ ponendo per y e per x i respettivi valori; ed invece di $(\frac{d^2y}{dx^2})$ dovremo sostituire

$(\frac{d^2y}{dt^2}):(\frac{dx}{dt})^2 - (\frac{dy}{dt}).(\frac{d^2x}{dt^2}):(\frac{dx}{dt})^3$.

La formula adunque della suttangente trovata al §. 78, cioè

$y:(\frac{dy}{dx})$ diverrà $y.(\frac{dx}{dt}):(\frac{dy}{dt})$; la tangente dell' angolo fatto dalla tangente alla curva con l' asse, la quale era espressa da $(\frac{dy}{dx})$, lo sarà in questo caso da $(\frac{dy}{dt}):(\frac{dx}{dt})$; il coseno dello stesso angolo sarà $(\frac{dx}{dt}):\sqrt{((\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2)}$, ed il seno $(\frac{dy}{dt}):\sqrt{((\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2)}$; la formula della subnormale, cioè $y(\frac{dy}{dx})$, diverrà $y(\frac{dy}{dt}):(\frac{dx}{dt})$; egualmente si trasformeranno le formule della tangente e della normale, come pure quelle delle coordinate del centro del circolo osculatore.

L' espressione del raggio di curvatura $R=\left\{1+(\frac{dy}{dx})^2\right\}^{\frac{3}{2}}:(\frac{d^2y}{dx^2})$ si cangierà in

$$R=\frac{\left\{1+(\frac{dy}{dt})^2:(\frac{dx}{dt})^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{(\frac{d^2y}{dt^2}):(\frac{dx}{dt})^2-(\frac{dy}{dt}).(\frac{d^2x}{dt^2}):(\frac{dx}{dt})^3},$$ la quale si riduce a

$$R=\frac{\left\{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{(\frac{dx}{dt})(\frac{d^2y}{dt^2})-(\frac{dy}{dt})(\frac{d^2x}{dt^2})}.$$

In quest' ultima espressione x ed y sono considerati come funzioni di t; poichè per quanto essi si suppongano funzioni di u e di t, la u è una funzione di t data dall' equazione alla curva tra u e t.

§. 81. La formula ottenuta per il raggio di curvatura può ancora trasformarsi in un' altra più semplice, la quale contenga nel numeratore la differenziale dell' arco, piuttosto che quella dell' ordinata; per questo ricerchiamo la differenziale di un arco data per la differenziale della sua ordinata medesima.

E' principio d' Archimede adottato da tutti i Geometri Antichi e Moderni, che „ di due curve o di due linee composte „ di rette, le quali hanno le concavità voltate da una medesima parte, e terminano agli stessi punti estremi, è più lunga

„ quella che contiene entro di se l' altra „.

Fig. 8. Sia dunque la curva ZZ riferita all' asse AB, sia $AP=x$, $PM=y=f(x)$, $PQ=\theta$, $QN=f(x+\theta)$; si conducano le tangenti alle estremità M, N dell' arco MN finchè incontrino le due ordinate prolungate in T ed S; si conduca la MF parallela ad NS, SL perpendicolare a QN, e ripiegando la figura TSMZPQ in TmzpQ, sarà per il principio quì sopra riportato, MTm > MNm, ed MNm > MFm; ma MTm = 2MT, MNm = 2MN, MFm = 2MF; dunque sarà ancora MT > MN, od MN > MF; dunque delle due tangenti MT, NS una è maggiore della curva, l'altra è minore, ed è perciò il valore dell' arco MON intermedio ai due valori di NS e di MT. Ora essendo

tang. $TMR=(\frac{dy}{dx})$, sarà $TR=\theta(\frac{dy}{dx})$, e perciò

$MT=\theta\sqrt{(1+(\frac{dy}{dx})^2)}$. Indichiamo per $\varphi(x)$ questa quantità, ed avremo

$$MT=\theta\sqrt{(1+(\frac{dy}{dx})^2)}=\theta\varphi(x).$$

Se in $\varphi(x)$ poniamo $x+\theta$ invece di x, avremo $\theta\varphi(x+\theta)=NS$ (poichè l' angolo NSL è eguale all' angolo fatto dalla tangente NS con l' asse, ed $NL=\theta\,tang.\,NSL$, onde $NS=\sqrt{(\theta^2+\theta^2\,tang.\,NSL)}=\theta\sqrt{(1+(\frac{dy'}{dx})^2)}$, indicando per y' il valore della seconda ordinata QN). Sarà dunque l' arco MON contenuto fra i due limiti $\theta\varphi(x)$, $\theta\varphi(x+\theta)$, comunque piccolo possa prendersi θ.

Dunque se Fx è la funzione di x che esprime l' arco della curva ZM, dovrà la quantità $F(x+\theta)-Fx=NOM$ esser sempre compresa tra le due quantità $\theta\varphi(x)$, $\theta\varphi(x+\theta)$; dunque la differenza tra queste quantità dovrà esser sempre maggiore (astraendo dai segni) della differenza tra una di esse, e l' arco NOM; e però $\theta\varphi(x+\theta)-\theta\varphi(x)>NOM-\theta\varphi(x)$, ovvero $\theta\varphi(x+\theta)-\theta\varphi(x)>F(x+\theta)-Fx-\theta\varphi(x)$; ora $\varphi(x+\theta)=\varphi(x)+\theta\varphi'(x+j)$, essendo $\varphi'(x+j)$ la differenziale $(\frac{d\varphi}{dx})$ nella quale si pone $x+j$ invece di x, ed è $x>j$, <0 (§. 36); egualmente $F(x+\theta)=F(x)+\theta(\frac{dF}{dx})+$

$\frac{\theta^2}{2}F'(x+j)$; sostituendo dunque s'avrà $\theta^2\varphi(x+j) > \theta(\frac{dF}{dx}) +$
$\frac{\theta^2}{2}F''(x+j) - \theta\varphi(x)$, ovvero
$\theta\varphi'(x+j) > (\frac{dF}{dx}) - \varphi(x) + \frac{\theta}{2}F''(x+j)$, comunque d' altr'
onde piccolo possa prendersi θ.

Questa condizione non può in generale aver luogo se non si annulla la quantità $(\frac{dF}{dx}) - \varphi(x)$: infatti, supponendo che ciò non succeda, noi possiamo (§. 76) sempre immaginare per θ un tal valore finito e determinato che renda
$\theta\varphi'(x+j) = (\frac{dF}{dx}) - \varphi(x) + \frac{\theta}{2}F''(x+j)$, ovvero che sodisfaccia ad un' equazione di questa forma (per $\varphi'(x+j)$ e per $F''(x+j)$ si pongano le respettive serie (§. 35))
$a\theta + b\theta^2 + c\theta^3 +$ ec. $= (\frac{dF}{dx}) - \varphi(x) + a'\theta + b'\theta^2 +$ ec., ed allora tutti i valori minori di questo, renderebbero
$\theta\varphi'(x+j) < (\frac{dF}{dx}) - \varphi(x) + \frac{\theta}{2}F''(x+j)$, ed in conseguenza corrisponderebbero a porzioni di curva, per le quali non avrebbe luogo quella proprietà caratteristica contenuta nel principio di Archimede, ciò che è assurdo: debbe dunque essere
$(\frac{dF}{dx}) - \varphi(x) = 0$, ed in conseguenza $(\frac{dF}{dx}) = \varphi(x)$, cioè
„ La differenziale dell' arco divisa per dx, è sempre eguale al-
„ la quantità $\sqrt{(1 + (\frac{dy}{dx})^2)}$ „.

Se dunque indichiamo per s l' arco EH, sarà Fig. 7.
$(\frac{ds}{dx}) = \sqrt{(1 + (\frac{dy}{dx})^2)}$, e la formula del raggio osculatore diverrà
$R = (\frac{ds}{dx})^3 : (\frac{d^2y}{dx^2})$.

Se poi le variabili x, y sono date in funzioni di una ter-

za t, allora sarà ancora s una funzione di t, e ponendo $(\frac{ds}{dt}) : (\frac{dx}{dt})$ in luogo di $(\frac{ds}{dx})$, e $(\frac{dy}{dt}) : (\frac{dx}{dt})$ in vece di $(\frac{dy}{dx})$, avremo
$(\frac{ds}{dt}) : (\frac{dx}{dt}) = \sqrt{(((\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2)} : (\frac{dx}{dt})$, ovvero
$(\frac{ds}{dt}) = \sqrt{((\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2)}$, e quindi

$$R = \frac{(\frac{ds}{dt})^3}{(\frac{dx}{dt})(\frac{d^2y}{dt^2}) - (\frac{dy}{dt})(\frac{d^2x}{dt^2})}.$$

Poniamo $s = t$, ed otterremo

$$R = \frac{1}{(\frac{dx}{ds})(\frac{d^2y}{ds^2}) - (\frac{dy}{ds})(\frac{d^2x}{ds^2})}$$

per esprimere il raggio osculatore, quando le coordinate si considerano funzioni dell' arco. Allorchè parleremo della rettificazione delle curve, faremo uso della formula che abbiam data per esprimere la differenziale di un arco qualunque.

Fig. 9. §. 82. Noi abbiamo al §. 79. trovate le coordinate AD, DC del centro C del circolo osculatore nel punto H, cioè abbiam trovato

$$a = AD = x - (\frac{dy}{dx})(1 + (\frac{dy}{dx})^2) : (\frac{d^2y}{dx^2})$$

$$b = DC = y + (1 + (\frac{dy}{dx})^2) : (\frac{d^2y}{dx^2}),$$

sostituendo in queste espressioni il valore di y in x, dato dall' equazione della curva EF, avremo evidentemente per a e per b due funzioni di x: supponiamo adunque $a = \Psi x$, $b = \Psi' x$, e questi due valori di a e di b saranno quei che convengono al punto H corrispondente all' ascissa AN $= x$. Se ora per mezzo delle due equazioni $a = \Psi x$, $b = \Psi' x$ eliminiamo x, avremo un' equazione fra le coordinate a e b, la quale rappresenterà la curva EGCP che sarà il luogo Geometrico di tutti i centri dei circoli osculatori corrispondenti ai diversi punti della curva EF. Esaminiamo ora questa curva dei centri; e primieramente ricerchiamo la direzione della tangente a qualunque di lei punto C.

Da ciò che abbiam detto di sopra (§ 78), risulta che la tangente della curva EGCP, condotta ad un qualunque di lei punto C, fa con l'asse AB un angolo che ha per tangente Fig. 9.

$\left(\frac{db}{da}\right)$, ovvero $\left(\frac{db}{dx}\right):\left(\frac{da}{dx}\right)$, perchè b ed a sono funzioni di x, e i differenziali sono presi rapporto a questa variabile. Ora sostituendo per b e per a i loro valori, avremo

$$\left(\frac{db}{dx}\right)=\frac{3\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}$$

$$\left(\frac{da}{dx}\right)=\frac{-3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}=-\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\left(\frac{db}{dx}\right);$$

e quindi

$\left(\frac{db}{dx}\right):\left(\frac{da}{dx}\right)=-\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$: questa sarà l'espressione della tangente di quell'angolo, fatto dalla tangente della curva dei centri nel punto C, con l'asse AB.

Ma la tangente dell'angolo HMB che il raggio osculatore HC fa con l'asse AB, è appunto $-\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$; dunque il raggio osculatore HC è tangente della curva dei centri nel punto C. Dunque fra una curva EF e la sua curva dei centri, vi è questa corrispondenza; che le perpendicolari alla prima di queste curve sono tangenti della seconda.

Dimostriamo un'altra singolar proprietà di questa curva dei centri. Indicando per s il di lei arco EGC, avremo (§ antecedente) $\left(\frac{ds}{dx}\right)=\sqrt{\left(\left(\frac{da}{dx}\right)^2+\left(\frac{db}{dx}\right)^2\right)}$, e sostituendo per $\left(\frac{da}{dx}\right)$, $\left(\frac{db}{dx}\right)$ i ritrovati valori, s'avrà

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)=\frac{3\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}:$$

ora se differenziamo il valore del raggio osculatore

$R=\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}:\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, troviamo

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)=\frac{3\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)},$$

dunque $\left(\frac{ds}{dx}\right)=\left(\frac{dR}{dx}\right)$ „ cioè la differenziale dell'arco della cur-
„ va dei centri è eguale alla differenziale del raggio osculato-
„ re „. Dunque il raggio osculatore e l'arco della curva dei centri che a questo raggio corrisponde, sono due tali funzioni di x che hanno lo stesso differenziale primo; dunque „ il rag-
„ gio osculatore è eguale all'arco suddetto „ cioè $R=s$; ed infatti dalla differenziazione di quest'equazione ritorna $\left(\frac{dR}{dx}\right)=\left(\frac{ds}{dx}\right)$.

Fig. 9. Avremo pertanto $hc=$ EGc, HC $=$ EGC ec.

Segue di qui, che se data una curva EGCP, fasciata di un filo EGCP, il quale si adatti perfettamente alla di lei curvità, e se svolgendo questo filo, e tenendolo sempre teso nelle posizioni hc, HC ec., si descrive con l'estremità E la curva EhHF, saranno queste due curve quelle da noi sopra considerate; le porzioni del filo hc, HC ec., saranno sempre tangenti nei punti h, C ec., ed eguali agli archi EGc, EGC ec.: EGCP sarà la curva dei centri di curvatura della curva EhHF.

Delle due curve la EGCP si chiama la *Sviluppata* o *l'Evoluta*, e l'altra EhHF, la *Sviluppante* o *l'Evolvente*. La Sviluppata adunque è formata dai centri di curvatura della Sviluppante.

§ 83. Facciamo qualche esempio.

1°. Data l'equazione della Parabola Apolloniana $y^2=mx$, si dimanda il valore del raggio osculatore di questa curva, e l'equazione della curva dei centri.

Essendo $y = \sqrt{(mx)}$, sarà $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{x}}$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{m}{x^3}}$; dunque (§. 79)

$$R = \frac{\left(1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{m}{x}\right)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{m}{x^3}\right)}} = -\frac{4x^{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{m}{x}\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{m}} = -\frac{(4x + m)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{m}};$$

e siccome la posizione del raggio ci è data dalla posizione del centro di curvatura, perciò possiamo prendere

$R = \frac{(4x + m)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{m}}$ senza aver riguardo al segno.

Facendo in questa formula $x = 0$, avremo $R = \frac{m}{2}$, e questo sarà il raggio osculatore al vertice della parabola.

Per le coordinate a, b del centro (§. 79) si ha

$$a = x + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{x}\right)}\cdot\left(1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{m}{x}\right)\cdot 4\sqrt{\left(\frac{x^3}{m}\right)} = 3x + \frac{m}{2},$$

$b = \sqrt{(mx)} - \left(1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{m}{x}\right)\cdot 4x\sqrt{\left(\frac{x}{m}\right)} = -4x\sqrt{\left(\frac{x}{m}\right)}$, ed eliminando x da queste due equazioni, avremo

$27mb^2 = 16\left(a - \frac{m}{2}\right)^3$; tale equazione sarà quella della curva dei centri, la quale è una seconda parabola cubica.

La considerazione poi dei valori di a e di b, ci dimostra
che questa curva dei centri debbe essere al di sotto dell' asse Fig. 9.
AB, e che deve avere l' origine in G, essendo $GE = \frac{m}{2}$.

2°. Sia la curva EF la quarta parte di un' Iperbola Equilatera riferita ai suoi asintoti AB, AL; sia AES il suo asse, E Fig. 10.
la sua origine.

Facciamo $AD = DE = m$, $AN = x$, $NH = y$, e la di lei equazione sarà $xy = m^2$, ovvero $y = \frac{m^2}{x}$. Avremo dunque

$\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{m^2}{x^2}$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{2m^2}{x^3}$, e facendo le opportune sostituzioni nella formula del raggio osculatore, si avrà

$$R = \frac{\left(1 + \frac{m^4}{x^4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{2m^2}{x^3}} = \frac{(x^4 + m^4)^{\frac{3}{2}}}{2m^2x^3}.$$

Fig. 10. Se facciamo $x = m$, sarà $R = m\sqrt{2}$, per esprimere il raggio osculatore che corrisponde al vertice E dell' Iperbola.

Le coordinate a, b del centro del circolo osculatore saranno

$$a = x + \frac{m^2}{x^2}\left(1 + \frac{m^4}{x^4}\right)\frac{x^3}{2m^2} = x + \frac{x}{2}\left(1 + \frac{m^4}{x^4}\right) = \frac{3x}{2} + \frac{m^4}{2x^3},$$

$b = \frac{m^2}{x} + \left(1 + \frac{m^4}{x^4}\right)\frac{x^3}{2m^2} = \frac{3m^2}{2x} + \frac{x^3}{2m^2}$; e l'equazione della curva GCP dei centri s' otterrà eliminando x per mezzo delle due equazioni

$$a = \frac{3x}{2} + \frac{m^4}{2x^3},\quad b = \frac{3m^2}{2x} + \frac{x^3}{2m^2}.$$

Facendo $x = m$, si trova $a = b = 2m$, dal che si ricava che il raggio osculatore, appartenente al vertice della Iperbola, cade sopra l' asse ES da E verso S: dunque la curva dei centri comincierà dal punto G distante da E della quantità $EG = m\sqrt{2}$.

Fig. 11. 3°. Sia AHF una mezza Cicloide, il cui circolo genitore sia ADB, e facciamo $AN = x$, $NH = y$, $AB = 2a$. La proprietà della cicloide, per la quale $NH = ND + AGD$, ci dà l' equazione

$y = \sqrt{(2ax - x^2)} + Ar.\ sen.\ v.\ x$; dunque

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{a - x}{\sqrt{(2ax - x^2)}} + \frac{a}{\sqrt{(2ax - x^2)}} = \frac{\sqrt{(2a - x)}}{\sqrt{x}}$$

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -\frac{a}{x\sqrt{(2ax - x^2)}}$; e fatte le opportune sostituzioni, si trova

$$R = 2\sqrt{(4a^2 - 2ax)} = 2\sqrt{(2a(2a - x))} = 2\sqrt{(AB.BN)},$$

ma $AB.BN = (BD)^2$; dunque $R = 2BD$, cioè il raggio osculatore del punto H è doppio della corda BD. Fig. 11.

Le coordinate del centro di curvatura C, le quali indicheremo per t, u per non confonderle con la lettera a che rappresenta il semidiametro, saranno $t = 4a - x$,

$u = A\,sen\,v\colon x - \surd(2ax - x^2)$; ed eliminando x per mezzo di queste due equazioni, avremo

$u = A\,sen.\,v\,(4a - t) - \surd(2a(4a - t) - (4a - t)^2)$: quest' ultima equazione sarà quella della curva dei centri.

Ora è facile dimostrare che una tal curva FCO è la stessa cicloide AHF, ma posta inversamente ed in quella guisa che rappresenta la Figura 11; infatti facendo $BO = AB = 2a$, compiendo il rettangolo BFLO, e descrivendo sopra FL il semicircolo FPL, sarà $MO = QL = AO - AM = 4a - t$, e perciò

$u = A\,sen.\,v.QL - \surd(2a.QL - (QL)^2)$, ovvero $u = PL - QP$; ed in conseguenza

$QC = QM - CM = LPF - u = FP + PQ$ che è la proprietà della cicloide FCO, il cui circolo genitore è FPL.

Data una curva, noi abbiamo detto come può aversi il luogo Geometrico dei centri dei circoli osculatori che equivale a dire data una curva sviluppante, abbiamo insegnato a trovarne la sviluppata; potrebbe però proporsi il problema inverso „ Data cioè la sviluppata, trovarne la sviluppante „.

Sia per esempio $b = \varphi(a)$ l' equazione della sviluppata, ed avremo allora

$$a = x - \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) : \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

$$b = \varphi(a) = y - \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) : \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right);$$

se ora per mezzo di queste due equazioni eliminiamo a, avremo tra x, y, $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ un' equazione che sarà quella della sviluppante che appartiene alla sviluppata $b = \varphi(a)$. Quest' equazione però sarà un' equazione differenziale, dalla quale converrà ricavare il valore di y in x; ma questa ricerca appartiene al Calcolo Integrale.

§. 84. Fin ora abbiamo considerate le curve a coordinate rettangole, parliamo adesso delle curve polari.

Fig. 12. Sia EF una curva, riferita al polo C; descritto intorno al polo C il circolo ADQ, il cui raggio sia a, e posta in A l' origine dell' ascisse, l' arco AD sia l' ascissa corrispondente al punto H, e CH ne sia l' ordinata. Se facciamo $AD = t$, $CH = u$, la curva EF sarà data per un' equazione tra u e t che noi rappresenteremo per $u = \varphi t$. Ora essendo le nostre formule adattate alle curve a coordinate rettangole, permutiamo le coordinate della curva EF. Per questo, condotto l' asse TAB, facciamo $AN = x$, $NH = y$, ed avremo

$x = a - \frac{u\,cos\,t}{a}$, $y = \frac{u\,sen.\,t}{a}$: dalle quali si ricava

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{u\,sen\,t}{a} - \left(\frac{du}{dt}\right)\frac{cos\,t}{a}$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{du}{dt}\right)\frac{sen\,t}{a} + \frac{u\,cos.\,t}{a}$$

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \frac{u\,cos.\,t}{a} + 2\left(\frac{du}{dt}\right)\frac{sen.\,t}{a} - \left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)\frac{cos.\,t}{a}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)\frac{sen.\,t}{a} + 2\left(\frac{du}{dt}\right)\frac{cos.\,t}{a} - \frac{u\,sen.\,t}{a}.$$

Possiamo adunque riguardare la curva EF come determinata dalle coordinate rettangole x, y, ed adoprare per questa curva le medesime formule adoprate per le altre: solo rammenteremo ciò che abbiamo detto (§. 80), cioè che essendo x, y funzioni delle variabili u, t, dobbiamo invece di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ mettervi $\left(\frac{dy}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)$, ed invece di $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ mettere $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)^3$.

La formula della suttangente per le curve a coordinate rettangole era $y : \left(\frac{dy}{dx}\right)$; nel nostro caso adunque la suttangente NT sarà.

$$NT = y\left(\frac{dx}{dt}\right) : \left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{u\,sen\,t}{a}\left\{\frac{u\,sen.\,t}{a} - \left(\frac{du}{dt}\right)\frac{cos.\,t}{a}\right\} : \left\{\frac{u\,cos.\,t}{a} + \left(\frac{du}{dt}\right)\frac{sen.\,t}{a}\right\}.$$

Nella stessa maniera potremmo trovare la formula per il raggio osculatore.

Per farne un esempio sia FE la spirale d' Archimede, la Fig. 12. cui equazione è $u = \frac{at}{c}$, indicando per c la circonferenza ADQ, poichè in questa curva sta sempre CH : AD, ovvero ADQAD :: a = AC : c = ADQA ; e si avrà $\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{a}{c}$; dunque la suttangente

$$NT = \frac{u\,sen.\,t}{a}\left\{\frac{u\,sen.\,t}{a} - \frac{a}{c}\cdot\frac{cos.\,t}{a}\right\} : \left\{\frac{u\,cos.\,t}{a} + \frac{a}{c}\cdot\frac{sen.\,t}{a}\right\}$$

$$NT = \frac{t\,sen.\,t}{c}\left\{\frac{t\,sen\,t}{c} - \frac{cos.\,t}{c}\right\} : \left\{\frac{t\,cos.\,t}{c} + \frac{sen.\,t}{c}\right\}.$$

Conduciamo ora la perpendicolare GC sopra HC, fino all' incontro della tangente in G, e cerchiamo il valore di CG.

Essendo CG : CH :: *tang.* GHC : a, avremo $CG = \frac{u\,tang.\,GHC}{a}$. Ma *tang.* GHC = *tang.* (GHN + CHN) = $\frac{tang.\,GHN + tang.\,CHN}{1 - tang.\,GHN.\,tang.\,CHN}$, e *tang.* GHN = $\frac{t\,sen\,t - cos.\,t}{t\,cos.\,t + sen.\,t}$, *tang.* CHN = $\frac{cos.\,t}{sen.\,t}$; dunque

$$tang.\,GHC = \frac{\frac{t\,sen.\,t - cos.\,t}{t\,cos.\,t + sen.\,t} + \frac{cos.\,t}{sen.\,t}}{1 - \frac{cos\,t\,(t\,sen.\,t - cos\,t)}{sen.\,t\,(t\,cos.\,t + sen.\,t)}} = t,$$

in conseguenza $CG = \frac{at}{a}$.

Se ora col raggio CH descriviamo l' arco HR, avremo HR : DA :: $u : a$, e perciò $HR = \frac{ut}{a}$ = CG; dal che segue che prendendo CG per suttangente, essa è sempre eguale all' arco

Fig. 12. HRX: anche il Geometra di Siracusa aveva ritrovata questa singolare proprietà di quella spirale.

La natura delle curve polari è determinata dalla relazione fra l' ordinata e l' arco di un circolo cognito, intercetto tra essa e l' asse, arco che tiene luogo d' ascissa: potrebbe anche la natura di una curva essere determinata dalla relazione tra l' ordinata e l' arco di una curva qualunque cognita, intercetto tra la stessa ordinata e l' asse: per averne in questo caso la suttangente, la subnormale ec., permutando le coordinate della curva, la riporteremo alle coordinate rettangole, e vi applicheremo allora le formule ritrovate per queste curve.

§. 85. L' ordinata di una curva è una funzione dell' ascissa che varia con la variazione dell' ascissa medesima: ora aumentando l' ascissa, può accadere che l' ordinata aumenti fino ad un certo punto, al di là del quale essa scemi, non ostante che l' ascissa continui a crescere, oppure che l' ordinata scemi fino ad un certo punto, per aumentare di nuovo al di là di quel punto: nel primo caso si dice che l' ordinata diviene *Massima*, e nel secondo *Minima*.

La Figura 13, rappresenta una curva EMM'M''F che ha
Fig. 13. due *Massimi* in M, M'', ed un *Minimo* in M'. La stessa ispezione di questa curva basta per dimostrarci che nei punti del *Massimo* e del *Minimo*, cioè in M, M', M'', le tangenti della curva sono parallele all' asse; e che nel *Massimo* la concavità della curva è voltata verso l' asse, e nel *Minimo*, la convessità della curva è voltata verso di esso.

La proprietà che ha il *Massimo* o il *Minimo* di appartenere ad un punto in cui la tangente è parallela all' asse, ci dà il mezzo di determinare il punto ove si trova il *Massimo* o il *Minimo*; questo sarà in quel punto della curva nel quale $\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$, poichè $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ è la tangente dell' angolo fatto dalla tangente alla curva con l' asse, il qual angolo essendo nullo, la tangente della curva è allora parallela all' asse; dunque per vedere se una curva ha dei *Massimi* o dei *Minimi*, converrà ricavare dalla di lei equazione il valore di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, il quale eguagliato a zero, ci darà un' equazione tra x, y; eliminare per mezzo di questa equazione e di quella della curva, la variabile y, per avere un' equazione in x, della quale tutte le radici reali saranno quelle che corrispondono ai punti del *Massimo* o del *Minimo*, e le ordinate di queste ascisse saranno i *Massimi* ed i *Minimi* cercati.

Ma come distinguere il *Massimo* dal *Minimo*?

Se noi facciamo nelle espressioni delle coordinate a e b (§. 80), le quali determinano il luogo del centro del circolo osculatore $(\frac{dy}{dx}) = 0$, avremo $a = x$, $b = y + 1 : (\frac{d^2y}{dx^2})$, e di quì si ricava che se $(\frac{d^2y}{dx^2})$ è una quantità positiva, questo centro caderà al di là della curva, la quale sarà in conseguenza convessa verso l' asse, e vi sarà un *Minimo*; e se $(\frac{d^2y}{dx^2})$ è negativo, lo stesso centro caderà tra la curva e l' asse; essa volterà all' asse la concavità, e vi sarà un *Massimo*.

Ma senza far dipendere i *Massimi* ed i *Minimi* delle curve dalla Teorìa delle tangenti, noi osserveremo che essi rientrano nella classe di quelle funzioni capaci di divenire *Massime* o *Minime*, delle quali noi abbiamo diffusamente parlato ai §§. 57. e segg; giacchè qualunque funzione può considerarsi come l' ordinata di una curva, la cui ascissa è la variabile che compone la funzione; per questo non parleremo ulteriormente dei *Massimi* e *Minimi* delle curve, ed altro non faremo che darne alcuni esempj.

§. 86. 1°. Si dimanda la *Massima* o la *Minima* ordinata nell' Ellisse EDF? Fig. 5.

L' equazione dell' Ellisse, presa l' origine delle ascisse in E, è $y = \frac{b}{a}\sqrt{(2ax - x^2)}$, essendo a = al semiasse maggiore CE, e b = al semiasse minore DC, e però $(\frac{dy}{dx}) = \frac{b(a-x)}{a\sqrt{(2ax - x^2)}} = 0$ ci darà l' equazione del *Massimo* o del *Minimo*; da questa si ricava $x = a$; dunque il *Massimo* o il *Minimo* corrisponde al centro dell' Ellisse, ed è lo stesso semiasse minore; poichè facendo $x = a$ nell' equazione della curva, abbiamo $y = b$.

Differenziamo ora il valore di $(\frac{dy}{dx})$, ed avremo

$$(\frac{d^2y}{dx^2}) = -\frac{b}{a\sqrt{(2ax - x^2)}} - \frac{b(a-x)^2}{\sqrt{(2ax - x^2)^3}}$$

espressione che diviene negativa, quando facciamo $x = a$; dunque l' ordinata corrispondente al centro dell' Ellisse è un *Massimo*.

2°. Si dimandano i *Massimi* ed i *Minimi* della curva espressa dall' equazione $y = a + sen.\,x$?

Differenziando quest' equazione due volte si ha $(\frac{dy}{dx}) = cos\,x$, $(\frac{d^2y}{dx^2}) = -sen.\,x$; dalla prima di queste due equazioni si ritrova che $x = 90°$, $x = 270°$, $x = 450°$, ... $x = n\pi + 90°$ (essendo π la semiperiferia del circolo) saranno i valori delle ascisse, i quali corrisponderanno alle *Massime* o *Minime* ordinate della curva proposta; e dalla seconda si deduce che $x = 90°$ corrisponderà ad un *Massimo*; $x = 270°$ ad un *Minimo*; $x = 450°$ ad un altro *Massimo* ec.: la Figura 14 esprime una tal curva: le ascisse AP, AP ec., sono eguali agli archi Ap, Ap ec., e le ordinate PM, PM ec., sono eguali ad AB ($= a$) + $sen\ Ap$.

3°. Supponendo una sfera riferita a tre piani perpendicolari tra loro, per mezzo delle coordinate rettangole x, y, z, si cerca ove si troverà la *Massima* ordinata z.

L' equazione della sfera è $(a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2 = r^2$, essendo a, b, c le coordinate del centro, ed r il suo raggio: differenziandola adunque rapporto ad x e rapporto ad y, avremo

$$-(a - x) - (c - z)(\frac{dz}{dx}) = 0, \quad -(b - y) - (c - z)(\frac{dz}{dy}) = 0$$

dalle quali otteniamo

$(\frac{dz}{dx}) = -\frac{a-x}{c-z}$, $(\frac{dz}{dy}) = -\frac{b-y}{c-z}$: ora facendo $(\frac{dz}{dx}) = 0$, $(\frac{dz}{dy}) = 0$, come ci prescrive la regola data al §. 60, otterremo $a - x = 0$, $b - y = 0$, e quindi $x = a$, $y = b$: dunque la *Massima* o la *Minima* ordinata della sfera sarà quella che passa per il centro di essa.

Il valore di questa *Massima* o *Minima* ordinata ci è dato dall' equazione della curva, facendovi $x = a$, $y = b$; abbiamo infatti $(c - z)^2 = r^2$, ovvero $c - z = \pm r$, e quindi $z = c + r$, $z = c - r$: corrisponde dunque allo stesso punto del piano un *Massimo* ed un *Minimo*; $z = c + r$ è il *Massimo*, $z = c - r$ è il *Minimo*.

Questa medesima conseguenza si deduce dai criterj dati al §. 60: ivi abbiamo detto che z sarà *Massima* quando $(\frac{d^2z}{dx^2})$, $(\frac{d^2z}{dy^2})$ avranno un valor negativo, e *Minima* quando lo avranno positivo, purchè nei due casi sia $(\frac{d^2z}{dx^2})(\frac{d^2z}{dy^2}) > (\frac{d^2z}{dxdy})$: ora differenziando le ritrovate equazioni, si ha $(\frac{d^2z}{dx^2}) = \frac{1}{c-z}$, $(\frac{d^2z}{dy^2}) = \frac{1}{c-z}$, $(\frac{d^2z}{dxdy}) = 0$, nelle quali ponendo per z il suo primo valore, otteniamo $(\frac{d^2z}{dx^2}) = -\frac{1}{r} = (\frac{d^2z}{dy^2})$, e ponendovi il secondo, otteniamo $(\frac{d^2z}{dx^2}) = \frac{1}{r} = (\frac{d^2z}{dy^2})$; dunque $z = c + r$ è la *Massima* ordinata, e $z = c - r$ la *Minima*.

Crediamo inutile trattenerci di più sopra questa materia che abbiamo d' altr' onde abbastanza spiegata al Capitolo antecedente.

§. 87. Quando una linea curva EF riferita all' asse AB, Fig. 16.
di concava come essa è in EH, diviene convessa come in HF o viceversa, continuando il suo cammino dalla stessa parte, il punto H, ove segue quel cangiamento, chiamasi punto di *Flesso contrario*, o semplicemente di *Flesso*; e se nel passare alla convessità torna indietro ripiegandosi sopra la medesima, il punto H si chiama allora di *Regresso*. Fig. 17.

Tanto nell' uno che nell' altro caso, preso un raggio osculatore M'C' nella parte convessa HF della curva, e presone uno MC nella parte concava EH, l' ordinata del punto di contatto M' per il primo raggio, è minore dell' ordinata del di lui centro C', cioè $M'p' < C'P'$; e viceversa l' ordinata del punto di contatto M dell' altro raggio, è maggiore dell' ordinata del respettivo suo centro C, cioè $Mp > CP$.

Incominciamo dal considerare il Flesso, ed indicando per

Fig. 17. y_x l' ordinata che corrisponde al punto di flesso, essendo x l' ascissa, e facendo $FP = \omega$, $FP' = \omega'$, avremo $y_{x-\omega} = MP$, $y_{x+\omega'} = M'P'$. Facciamo $'y = y_{x-\omega}$, $y' = y_{x+\omega'}$, e s' avrà (§. 80)

$$Cp = 'y + (1 + (\frac{d'y}{dx})^2) : (\frac{d^2\,'y}{dx^2})$$

$$C'p' = y' + (1 + (\frac{dy'}{dx})^2) : (\frac{d^2y'}{dx^2})$$

acciò dunque la curva abbia un punto di flesso, converrà che le due quantità $(\frac{d^2\,'y}{dx^2})$, $(\frac{d^2y'}{dx^2})$ siano di segno contrario. Sviluppiamo in serie queste quantità, terminando la serie al terzo termine, ed avremo

$$(\frac{d^2\,'y}{dx^2}) = (\frac{d^2y}{dx^2}) - \omega(\frac{d^3y}{dx^3}) + \frac{\omega^2}{2}L$$

$$(\frac{d^2y'}{dx^2}) = (\frac{d^2y}{dx^2}) + \omega'(\frac{d^3y}{dx^3}) + \frac{\omega'^2}{2}N.$$

Ora un ragionamento simile a quello fatto per i *Massimi*, ed i *Minimi* (§. 57) ci dimostrerà che non possono quelle quantità essere di segno contrario per tutti i valori possibili di ω, se non è $(\frac{d^3y}{dx^3}) = 0$; dunque il flesso contrario d' una curva sarà in quel punto nel quale $(\frac{d^2y}{dx^2}) = 0$: dunque data l' equazione d' una curva, troveremo l' ascissa corrispondente al flesso, eguagliando a zero la differenziale seconda della di lei ordinata espressa in funzione della ascissa x, e cercando le radici reali ed i valori di x che soddisfanno ad una tale equazione.

Se la supposizione $(\frac{d^2y}{dx^2}) = 0$ annullerà anche $(\frac{d^3y}{dx^3})$, non vi sarà flesso, quando non rimanesse ancora annullato $(\frac{d^4y}{dx^4})$; e se annullata quest' ultima quantità, s' annullerà $(\frac{d^5y}{dx^5})$ senza che accada lo stesso della $(\frac{d^6y}{dx^6})$ non vi sarà flesso, e così di seguito.

In generale, per avere un punto di flesso, bisogna che nella serie

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right), \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right), \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right), \left(\frac{d^5y}{dx^5}\right), \left(\frac{d^6y}{dx^6}\right), \text{ ec.}$$

l' ultimo termine che s' annulla sia una differenziale d' ordine pari.

Combinando dunque ciò che abbiamo detto (§. 58) concluderemo che se una curva ha dei *Massimi* o dei *Minimi*, corrisponderanno essi a quei punti nei quali le differenziali degli ordini impari dell' ordinata s' annullano, e se ha punti di flesso, in questi s' annulleranno le differenziali degli ordini pari.

Siccome poi la curva EH è concava quando $\left(\frac{d^2{}'y}{dx^2}\right)$ è negativo, Fig. 17. e convessa nel caso opposto; così quando essa abbia un punto di flesso, passerà dalla concavità alla convessità se $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ sarà negativo, posto che il flesso ci sia dato dall' equazione $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$; se poi darà il flesso l' equazione $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) = 0$, allora la curva sarà prima concava o convessa secondo che $\left(\frac{d^5y}{dx^5}\right)$ sarà positivo o negativo. Questa osservazione che stabilisce il criterio, onde conoscere l' andamento della curva che ha il flesso, si deve al Matematico Paolo Frisi (*a*).

§. 88. Per determinare il regresso, riguardiamo le ascisse e le ordinate come funzioni degli archi cui corrispondono. Siano dunque y_s, x_s l' ordinata e l' ascissa del regresso, essendo s l' arco corrispondente EH. Facciamo $MH = \omega$, $HM' = \omega'$, ed avremo $'y = MP = y_{s-\omega}$, $y' = M'P' = y_{s+\omega'}$. Ora riguardando y ed x come due funzioni di s, le quantità $\left(\frac{dy}{dx}\right), \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ saranno egualmente funzioni di s: indichiamole per $\varphi(s)$, $F(s)$, e sarà

(*a*) *Dissertationum variarum:* Tom. II. pag. 180.

$$Cp = {}'y + (1 + \varphi^2(s - \omega)) : F(s - \omega)$$
$$C'p' = y' + (1 + \varphi^2(s + \omega')) : F(s + \omega).$$

Acciò dunque la curva abbia un punto di regresso, converrà che le due quantità $F(s - \omega)$, $F(s + \omega)$ siano di segni contrarj, giacchè $1 + \varphi^2(s - \omega)$, $1 + \varphi^2(s + \omega')$ sono sempre del medesimo segno: ora affinchè questo abbia luogo è necessario (§. 87) che sia $F(s) = 0$; dunque $F(s) = 0$, ovvero $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$ sarà un' equazione, la quale dovrà aver luogo nel punto di regresso, ed il valore di x che ci sarà dato da quest' equazione, sarà l' ascissa corrispondente al regresso: di quì si vede che la medesima equazione che ci dà il flesso, può darci ancora il regresso.

Affinchè in una curva si abbia un punto di flesso o regresso, abbiam dimostrato che le due quantità $\left(\frac{d^2{}'y}{dx^2}\right), \left(\frac{d^2y'}{dx^2}\right)$, debbono essere di segni contrarj. Lo stesso avremmo potuto dimostrare delle quantità $\frac{1}{\left(\frac{d^2{}'y}{dx^2}\right)}, \frac{1}{\left(\frac{d^2y'}{dx^2}\right)}$: ora rappresentando in generale per $\frac{P}{Q}$ il valore di $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, per $\frac{'P}{'Q}$ quello di $\left(\frac{d^2{}'y}{dx^2}\right)$, e per $\frac{P'}{Q'}$ quello di $\left(\frac{d^2y'}{dx^2}\right)$, acciò siavi il flesso o regresso in una curva corrispondente alle coordinate x, y, dovranno le quantità $\frac{'P}{'Q}, \frac{P'}{Q'}$, ovvero $\frac{'Q}{'P}, \frac{Q'}{P'}$ essere di segni contrarj, ed affinchè ciò succeda dovrà essere $\frac{P}{Q} = 0$, ovvero $\frac{Q}{P} = 0$.

Quest' ultima equazione ci dà $\frac{1}{\frac{Q}{P}} = \frac{P}{Q} = \frac{1}{0} = \infty$; dunque il flesso o il regresso ci è dato dall' equazione $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$, e dall' equazione $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \infty$; dimodochè si proveranno ambedue le equazioni $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \infty$, onde avere tutti i punti di flesso o di regresso che possono trovarsi in una curva.

Non vi è una regola per distinguere se un ritrovato punto sia veramente un flesso od un regresso, e ciò che ne hanno detto finora gli Autori, è a mio parere inesatto.

Il Sig. Bossut ci insegna a sostituire il valore della ascissa corrispondente ad un tal punto singolare ed aumentato d' una piccola quantità, nella espressione della ordinata, ed osservare se l' ordinata diviene immaginaria, nel qual caso ei dice, che il punto singolare sarà un regresso; ma la curva può relativamente all' asse, esser situata in modo che vi sia un regresso senza che quell' ordinata divenga immaginaria.

Sembrami che dalla seguente osservazione si potrebbe ricavare una regola sicura.

„ Presi due centri C, C′ di due raggi di curvatura MC, „ M′C′, al di quà ed al di là del punto di flesso o regres- „ so, e determinata la posizione della linea CC′ che gli unisce, „ se la curva avrà un punto di comune con la retta, e questo „ situato tra i due centri C, C′ relativamente alla retta, e tra „ i due contatti M, M′ relativamente alla curva, vi sarà il fles- „ so; e quando o non vi sarà questo punto comune, o ve „ ne saranno due, allora la curva avrà un regresso „. La traduzione però di questa osservazione in espressione analitica, sarebbe complicata non poco, e resta sempre a desiderarsi un criterio semplice e sicuro per distinguere i flessi dai regressi. Fig. 17.

Facciamo alcuni esempj delle spiegate dottrine.

1°. Si dimanda il punto di regresso nella curva rappresentata dall' equazione $y^3 = a^2x$ che è la prima parabola cubica?

Quest' equazione ci dà $y = a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}$, e quindi $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{2a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{5}{3}}}{9}$, dal che si ricava, facendo $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \infty$, $x = 0$: il punto di regresso adunque sarà nell' origine delle ascisse.

2°. Si dimanda il punto di flesso nella Concoide di Nicomede, la cui equazione è $y = \frac{b+x}{x}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$?

Differenziando due volte si trova

$-\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{a^2x^3 + 3a^2bx^2 - 2a^4b}{(a^2x^3 - x^5)\cdot(aa - xx)^{\frac{1}{2}}}$, e quindi eguagliando a zero questa espressione, abbiamo $x^3 + 3bx^2 - 2a^2b = 0$; dalla risoluzione di questa equazione si trova il valore dell' ascissa corrispondente al flesso contrario; anzi siccome un valore di x ci dà due valori per y eguali e di segni contrarj, la curva avrà due flessi ad eguali distanze da una parte e dall' altra dell' asse delle ascisse.

§. 89. Per quanto non si possa determinare la direzione d' una curva in un qualunque suo punto, poichè essa varia continuamente, pure per direzione d' una curva in un certo di lei punto, si intende comunemente la direzione che vi ha la tangente; così il Problema che dimanda la determinazione di quella direzione nel luogo corrispondente ad una ascissa $x = a$, è risoluto quando si assegni la posizione della tangente alla curva in quel luogo medesimo.

Ottenuto adunque mercè la differenziazione, il valore di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ che sarà in generale una funzione di x, y, e ridotto ad essere una sola funzione di x (col sostituirvi per y il valore in x dato dall' equazione della curva) porremo in esso $x = a$, ed avremo allora la direzione della tangente alla curva nel punto corrispondente ad $x = a$, ed in conseguenza la direzione della curva in quel punto medesimo.

Se questa supposizione $x = a$ renderà $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{0}{0}$, allora cercandone il valore, come abbiamo insegnato al §. 45, avremo $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ dato per un' equazione di secondo grado, ed in conseguenza due valori per esso. Vi saranno allora nel punto corrispondente all' ascissa $x = a$ due tangenti, e vi passeranno in conseguenza due rami di curva: nello stesso modo se la nuova espressione trovata per $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ diasi per mezzo di una equazione del terzo grado, avremo allora tre valori per $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, ed in conseguenza tre tangenti nel punto dato, per cui passeranno tre rami di curva, e così di seguito.

Viceversa, data l' equazione d' una curva, potremo facilmente determinare, se essa ha dei punti multipli, e quali. Per questo ricaveremo il valore di $(\frac{dy}{dx})$ dall' equazione della curva, e supponendolo $=\frac{P}{Q}$, faremo $P=o$, $Q=o$: queste due equazioni in x ed y ci daranno $x=a$, $y=b$, e se tali valori soddisfaranno all' equazione della curva, avrà essa un punto multiplo, e quando ciò non succeda, non vi sarà alcuno di questi punti.

Per decidere poi della moltiplicità del punto, osserveremo se $x=a$, $y=b$, i quali rendono $(\frac{dy}{dx})=\frac{o}{o}$, riducono ancora indeterminato il nuovo valore che si ritrova per $(\frac{dy}{dx})=\frac{P}{Q}$, e quando ciò non succeda, la curva avrà un punto doppio; lo avrà triplo se quei valori rendono anche $=\frac{o}{o}$ la nuova espressione trovata per $(\frac{dy}{dx})$, e così di seguito.

Per farne un esempio, si dimandi se la curva, la cui equazione è $x^4 - ax^2y + by^3 = o$ ha punti multipli?

Dalla differenziazione di quest' equazione si ha

$4x^3 - 2axy - (ax^2 - 3by^2)(\frac{dy}{dx}) = o$ che ci dà

$(\frac{dy}{dx}) = \frac{P}{Q} = \frac{4x^3-2axy}{ax^2-3by^2}$, e quindi $4x^3 - 2axy = o$, $ax^2 - 3by^2 = o$. Da queste due ultime equazioni si ricava $x=o$, $y=o$, i quali valori soddisfacendo alla proposta, ci dicono che essa ha un punto multiplo nell' origine delle coordinate.

Per trovare il grado di multiplicità del punto, differenziamo un' altra volta, ed avremo

$12x^2 - 2ay - 4ax.(\frac{dy}{dx}) - (ax^2 - 3by^2)(\frac{d^2y}{dx^2}) + b^2y(\frac{dy}{dx})^2 = o$;

facendo $x=o$, $y=o$, sarà $(\frac{dy}{dx})^2 = \frac{o}{o}$, dal che si riconosce che il punto è triplo, o che passano per l' origine delle coordinate tre rami di curva. Il punto è triplo, perchè differenziando

di nuovo il valore di $(\frac{dy}{dx})$, non diviene esso indeterminato per $x=o$, $y=o$.

§. 90. **Parliamo ora della Quadratura e della Rettificazione delle curve, come pure della cubatura dei solidi.** Sia $y = fx$ l' equazione della curva EF: lo spazio EHP sarà ancora esso una funzione della ascissa x che indicheremo per Fx, e la determinazione di questa funzione Fx chiamasi Quadratura. Fig. 18.

Per ottenerla, supponiamo che AP divenga AM, ovvero che x divenga $x+\omega$, ed avremo $MN = f(x+\omega)$; $ENM = F(x+\omega)$: sarà dunque $ENM - EHP = F(x+\omega) - F(x)$, e compiendo i rettangoli PHSM, PQNM i quali sono $PHSM = \omega fx$, $PQNM = \omega f(x+\omega)$, vedremo che lo spazio $F(x+\omega) - F(x)$ dovrà essere sempre minore del rettangolo circoscritto alla curva, e maggiore dell' iscritto; dovrà dunque essere

$\omega f(x+\omega) > F(x+\omega) - F(x) > \omega f(x)$

qualunque d' altronde sia ω ovvero PM. Ora lo stesso ragionamento che abbiamo fatto al (§. 81) per trovare la differenziale dell' arco di una curva, ci dimostrerà che questa condizione non può avverarsi se non è $(\frac{dF}{dx}) = fx$, cioè se la differenziale dello spazio EPH divisa per dx, non è eguale all' ordinata y; dunque avremo sempre

$(\frac{dF}{dx})dx = ydx$.

Se noi adesso rammentiamo ciò che è stato detto al (§. 50), che cioè $\int\varphi(x)dx$ esprime quella funzione $\Psi(x)$ di x, la cui differenziale è la stessa quantità $\varphi(x)dx$, avremo $\int(\frac{dF}{dx})dx = F(x) = \int ydx$; cioè in qualunque curva lo spazio EHP eguaglia l' integrale dell' ordinata moltiplicata per dx, aumento indeterminato dell' ascissa x.

Noi abbiamo tacitamente supposto in questa Analisi che la porzione di curva HN non contenga nè un *Massimo* nè un *Minimo*: questa supposizione è legittima, poichè se un *Massimo*, od un *Minimo* vi si trovasse, potremmo assegnare ad ω una tal grandezza che il *Massimo* o il *Minimo* cadesse al di quà o al di là dei punti di curva corrispondenti allo stesso ω.

Se la funzione $f(x)$ esprimesse l'area della sezione d'un solido fatta perpendicolarmente all'ascissa x, si dimostrerebbe nella stessa maniera che la solidità è espressa dall'integrale di $f(x)dx$; imperciocchè indicando per $F(x)$ questa solidità, la differenza $F(x+\omega)-F(x)$ esprimerebbe la porzione del solido compresa fra le due sezioni $f(x)$, $f(x+\omega)$, e questa porzione sarebbe necessariamente maggiore di uno dei solidi prismatici $\omega f(x)$, e minore dell'altro $\omega f(x+\omega)$, prendendo ω quanto si vuol piccolo; dal che ne concluderemmo che deve essere $\left(\frac{dF}{dx}\right)=fx$, e quindi $F(x)=\int y dx$.

„ Così per avere la solidità d'un solido qualunque, bisogna „ prendere l'integrale della funzione che rappresenta la di lui „ sezione perpendicolare all'asse degli x, moltiplicata per dx „ e corrispondente alla stessa ascissa x „.

Sia la curva da quadrarsi una parabola Apolloniana di parametro a. L'equazione di questa curva è $y^2=ax$, ovvero $y=\sqrt{(ax)}$: sarà dunque $Fx=\int\sqrt{(ax)}\,.\,dx=\frac{2}{3}\sqrt{(ax^3)}=\frac{2}{3}xy$; e perciò $EHP=\frac{2}{3}xy=\frac{2}{3}EP\,.\,PH$: lo spazio adunque parabolico eguaglierà due terzi del rettangolo circoscritto. Fig. 18.

Determiniamo la solidità della Paraboloide. L'Asse della Paraboloide sia l'asse degli x, ed il vertice di essa sia l'origine delle ascisse. Una qualunque sezione perpendicolare all'asse e corrispondente all'ascissa x, sarà πy^2, ovvero (ponendo per y^2 il suo valore ax), sarà πax (essendo π la semicirconferenza del circolo che ha per raggio l'unità).

La solidità adunque sarà

$\int\pi axdx=\pi a\int xdx=\pi a\frac{x^2}{2}=\pi y^2\,.\,\frac{x}{2}$, cioè la solidità cercata eguaglierà la metà del cilindro circoscritto. In generale rappresentando per y una qualunque funzione fx di x, la quantità $\pi(fx)^2$ esprimerà la sezione perpendicolare all'asse degli x in qualunque solido di rivoluzione la cui curva generatrice è $y=fx$, ed in conseguenza $\int\pi(fx)^2\,.\,dx=\pi\int(fx)^2\,.\,dx$ esprimerà la solidità dello stesso solido.

§. 91. Si chiama Rettificazione di una curva la determinazione della di lei lunghezza, o più generalmente parlando, la determinazione d'una qualunque di lei porzione in funzione dell'ascissa cui quella corrisponde; così essendo $y=fx$ l'equazione della curva ZZ, e facendo $AP=x$, $PM=y$, se indichiamo per Fx l'arco ZM, per rettificare la curva, conviene determinare la funzione Fx. Fig. 8.

Ora noi abbiamo dimostrato al § 81 che la differenziale dell'arco è sempre eguale a $\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$; dunque $\left(\frac{dF}{dx}\right)=\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$, e quindi $\int\left(\frac{dF}{dx}\right)dx=Fx=\int\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.\,dx$.

„ Dunque per avere la funzione rappresentante un arco qua„ lunque corrispondente all'ascissa, bisogna prendere l'integra„ le di $\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.\,dx$ dopo avervi sostituito per $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ il va„ lore dato dall'equazione della curva „.

Immaginiamo che la curva ZZ ravvolgendosi intorno l'asse delle ascisse, generi una Conoide; le sue ordinate $MP=y=fx$, $QN=f(x+\omega)$ descriveranno nel tempo stesso due circoli di cui queste ordinate saranno i raggi: l'arco MOL descriverà una Zona Conoidica; la tangente MT e la linea MF parallela ad NS, descriveranno delle Zone Coniche, tra le quali la Zona Conoidica sarà necessariamente contenuta: onde persuadersene, basta supporre che l'intiera figura ZMNmZ' si ravvolga intorno all'asse AB, ed allora le tre superficie descritte dalle linee spezzate MFm, MNm, MTm, avranno i medesimi termini, volteranno sempre la concavità dalla medesima parte, comprendendosi una entro l'altra: sarà dunque la superficie descritta da MTm maggiore di quella generata da MNm, e questa maggiore dell'altra fatta da MFm, e le metà di queste tre superficie avranno ancora lo stesso rapporto tra di loro.

Ora la Geometria c'insegna, che la superficie convessa d'un Cono troncato è eguale al suo lato moltiplicato per la semisomma delle circonferenze delle due basi; dunque indicando per π la circonferenza del circolo di cui il raggio è $=1$, la superficie della Zona Conica descritta dalla tangente $MT=$

$\omega\sqrt{(1+(\frac{dy}{dx})^2)} = \omega\varphi(x)$, (facendo $\varphi(x) = \sqrt{(1+(\frac{dy}{dx})^2)}$, sarà $\omega\varphi(x).\pi(fx+\frac{\omega}{2}(\frac{df}{dx}))$; poichè i raggi delle due basi sono l' uno MP $= y = fx$, l' altro QT $=$ QR $+$ RT $= y + \omega \times (\frac{dy}{dx}) = fx + \omega(\frac{df}{dx})$; la superficie dell' altra Zona descritta dalla retta MF $=$ NS $= \omega\varphi(x+\omega)$, sarà

$\omega\varphi(x+\omega).\pi\{f(x)+\frac{\omega}{2}(\frac{df(x+\omega)}{dx})\}$, imperocchè è facile vedere che i raggi delle basi di questo tronco di cono saranno $f(x) =$ PM, QF $= f(x) +$ RF $= fx + \omega(\frac{df(x+\omega)}{dx})$; se dunque rappresentiamo per Ψx la funzione dell' ascissa che esprime la superficie della Conoide, è chiaro che la Zona Conoidica sarà espressa per $\Psi(x+\omega) - \Psi x$, e che questa differenza dovrà essere contenuta tra le due quantità

$$\omega\pi\varphi(x)\{fx+\frac{\omega}{2}(\frac{df}{dx})\}$$

$$\omega\pi\varphi(x+\omega)\{fx+\frac{\omega}{2}(\frac{df(x+\omega)}{dx})\}$$

comunque piccolo si prenda ω; si dimostra con un ragionamento simile a quello fatto (§. 81), che questa condizione non può avverarsi in generale, se non è

$$(\frac{d\Psi x}{dx}) = \pi\varphi(x).fx.$$

Avremo per tanto

$$\Psi x = \pi\int y(1+(\frac{dy}{dx})^2)^{\frac{1}{2}}.dx.$$

Faremo le applicazioni di queste Teorìe quando tratteremo dell' integrazione delle funzioni.

Scolio. La normale di una curva M riferita alle coordinate ortogonali x, y, è (§. 78) eguale ad $y\sqrt{(1+(\frac{dy}{dx})^2)}$; se dunque costruiamo un' altra curva, la quale avendo per ascissa la x abbia per ordinata una quantità $z = y\sqrt{(1+(\frac{dy}{dx})^2)}$, la di

lei superficie sarà $\int z dx = \int y\sqrt{(1+(\frac{dy}{dx})^2)}.dx$; ma abbiamo trovata quì sopra la superficie della Conoide $\Psi x = \pi\int y\sqrt{(1+(\frac{dy}{dx})^2)}.dx$; dunque avremo la prima superficie alla seconda : : $1 : \pi$.

„ Generalmente la Figura fatta dalle perpendicolari ad una „ curva data, applicate come ordinate all' asse, è proporzionale „ alla superficie dello stesso solido di rivoluzione, formato dal- „ la rotazione della data curva medesima „.

Questo Teorema è il primo cui Leibnizio abbia applicato il Calcolo Differenziale.

Prime Applicazioni alla Meccanica

§. 92. Ogni movimento s' esprime analiticamante per un rapporto fra lo spazio ed il tempo: lo spazio è sempre una funzione del tempo, e parlando del moto rettilineo, se indichiamo per s e per t quelle due quantità, $s = f(t)$ sarà l' equazione che esprime analiticamente tutti i movimenti possibili in linea retta. Si avranno adunque tanti diversi movimenti, quanti sono i valori che possono darsi a $f(t)$. L' osservazione e l' esperienza ci ha dimostrato, che due soli movimenti semplici esistono nella natura, i quali sono rappresentati da $s = at$, $s = bt^2$: il primo, cui appartiene l' equazione $s = at$, si chiama *Moto Uniforme*, ed in questo gli spazj percorsi sono proporzionali ai tempi impiegati a percorrerli: il secondo dato dall' altra equazione $s = bt^2$, si chiama moto uniformemente accelerato, ed in questo gli spazj sono proporzionali ai quadrati dei tempi impiegati a percorrerli.

Si sa dalla Meccanica, che il moto uniforme è quello, col quale si moverebbe un corpo messo in moto da una causa istantanea (da una causa cioè, che dopo avere in un istante agito sopra di esso, lo abbandona) se tutti gli ostacoli, e le resistenze che incontra, non alterassero quel movimento: il coefficiente costante a, che entra nell' equazione di questo moto, è chiamato *Velocità*; questa dunque è il rapporto fra lo spazio ed il tempo, rapporto che è costante in un medesimo moto uniforme, e che varia da un moto all' altro.

Si sa parimente dalla Meccanica, che il moto accelerato uniformemente è quello col quale si muovono i Corpi liberamente cadenti in virtù della gravità, astraendo però dalla resistenza dell' aria; e che in generale esso è prodotto da una forza la quale agisce costantemente ed egualmente sopra d' un corpo mettendolo in moto, e continuando la sua azione con la medesima intensità, con la quale ha agito nel primo momento, anche nel tempo stesso in cui quel corpo si muove. A questa forza che si chiama *Forza Acceleratrice*, la quale è costante in uno stesso movimento, e che varia da un movimento all'altro, è proporzionale il coefficiente b che entra nell' equazione $s = bt^2$, e che esprime il rapporto fra gli spazj ed i quadrati dei tempi; coefficiente che è costante in un medesimo moto, e che varia da un movimento all' altro.

Si sa infine dalla suddetta Scienza che esiste in natura ancora il moto composto di questi due movimenti, rappresentato dall' equazione $s = at + bt^2$, che questo è quello con cui si muovono i corpi gettati verticalmente di alto in basso, o di basso in alto: e che in questo moto composto, i due movimenti in nulla si turbano, essendo lo spazio sempre eguale all' aggregato dei due spazj che il corpo descriverebbe animato separatamente da quei movimenti ad uno per volta.

Questo premesso, consideriamo un movimento qualunque rettilineo rappresentato dall' equazione $s = \varphi(t)$. Alla fine del tempo t il mobile avrà percorso lo spazio $\varphi(t)$, ed alla fine del tempo $t + \omega$, egli avrà percorso lo spazio $\varphi(t + \omega)$; sarà dunque $\varphi(t + \omega) - \varphi(t)$ lo spazio percorso nel tempo ω, il quale comincia quando il tempo t finisce. Sviluppiamo in serie la funzione $\varphi(t + \omega)$, ed avremo

$$\varphi(t) + \omega\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) + \frac{\omega^3}{2 \cdot 3}\left(\frac{d^3\varphi}{dt^3}\right) + \text{ec.};$$

Dunque lo spazio percorso nel tempo ω sarà rappresentato dalla formula

$$\omega\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) + \frac{\omega^3}{2 \cdot 3}\left(\frac{d^3\varphi}{dt^3}\right) + \text{ec.}$$

nella quale il tempo t trascorso avanti il principio del tempo ω, è considerato come costante a riguardo del movimento che ha

luogo in questo stesso tempo ω; così il movimento, col quale questo spazio è percorso, è composto di differenti movimenti parziali di cui gli spazj corrispondenti al tempo ω, sono

$\omega\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$, $\omega^2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)$, $\omega^3 \cdot \frac{1}{2 \cdot 3}\left(\frac{d^3\varphi}{dt^3}\right)$ ec. Di questi movimenti parziali il primo è un moto uniforme, con una velocità misurata da $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$; il secondo è un moto uniformemente accelerato, dovuto ad una forza acceleratrice proporzionale a $\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)$; rapporto agli altri movimenti, siccome essi non si rapportano ad alcun movimento semplice conosciuto, non sarà necessario di considerarli in particolare, e si vedrà che potremmo tralasciare di considerarli nella determinazione del moto al principio del tempo ω.

§. 93. Sviluppiamo la funzione $\varphi(t + \omega)$ fermandosi al quarto termine (§. 36) ed avremo

$\varphi(t + \omega) = \varphi(t) + \omega\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) + \frac{\omega^3}{2 \cdot 3}\left(\frac{d^3\varphi(t + \theta)}{dt^3}\right)$, essendo θ medio tra zero ed ω: lo spazio percorso allora nel tempo ω sarà espresso esattamente da

$\omega\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) + \frac{\omega^3}{2 \cdot 3}\left(\frac{d^3\varphi(t + \theta)}{dt^3}\right)$, ed i due primi termini rappresentano il movimento composto di un moto uniforme, e di uniformemente accelerato, ed il terzo termine rappresenta la somma degli altri movimenti che si combinano con i primi, ed impediscono al vero movimento d' essere composto d' un moto uniforme, e d' un uniformemente accelerato soltanto.

Ora è facile vedere che possiamo tanto impiccolire ω, che il movimento composto dei due termini $\omega\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) + \omega^2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)$ s'avvicini tanto al vero movimento, che nessun altro moto composto di un uniforme, ed un uniformemente accelerato possa avvicinarsi più di lui: infatti la differenza tra il movimento composto

$\omega\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) + \omega^2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)$, ed il vero movimento

$\omega\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) + \omega^2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) + \omega^3 \cdot \frac{1}{2 \cdot 3}\left(\frac{d^3\varphi(t + \theta)}{dt^3}\right)$, è $\omega^3 \cdot \frac{1}{2 \cdot 3}\left(\frac{d^3\varphi(t + \theta)}{dt^3}\right)$

che indicheremo per D: ora lo spazio descritto nel tempo ω da qualunque altro movimento composto d'un uniforme, e d'un uniformemente accelerato essendo rappresentato da $a\omega + b\omega^2$, la differenza tra questo nuovo spazio ed il vero spazio, sarà

$$\omega\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) + \omega^2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) + \omega^3 \cdot \frac{1}{2 \cdot 3}\left(\frac{d^3\varphi(t+\theta)}{dt^3}\right) - a\omega - b\omega^2 =$$

$$\left\{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) - a\right\}\omega + \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) - b\right\}\omega^2 + \omega^3 \cdot \frac{1}{2 \cdot 3}\left(\frac{d^3\varphi(t+\theta)}{dt^3}\right).$$

Indichiamo per Δ quest'ultima differenza, ed un ragionamento simile a quello fatto al § 81, ci dimostrerà che potremo prendere ω tale da rendere (qualunque siano a, b) la quantità $\Delta > D$, ed in conseguenza un movimento qualunque composto $a\omega + b\omega^2$ sempre più differente dal vero movimento, di quello che ne sia il moto composto $\omega\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) + \omega^2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)$.

Dunque possiam prendere ω in maniera che $\omega\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$ esprima ciò che può esservi di moto uniforme nel moto composto, e che $\omega^2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)$ esprima tutto ciò che può esservi di moto uniformemente accelerato; e di qui risulta che ogni moto rettilineo, rappresentato dall'equazione $s = \varphi(t)$, può in un istante qualunque alla fine del tempo t, considerarsi come un composto di diversi movimenti, cioè uniforme, uniformemente accelerato, ed altri; nell'aggregato o totalità di questi movimenti, tutto ciò che vi è di moto uniforme è dovuto alla velocità $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = \left(\frac{ds}{dt}\right)$; e tutto ciò che vi è di moto uniformemente accelerato, è dovuto ad una forza acceleratrice agente sul mobile, e proporzionale a $\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)$, e tutto ciò che appartiene ad altri movimenti si deve ad altre cause, delle quali non possiamo determinare la natura, almeno volendole dedurre da qualche fenomeno conosciuto di movimento. Ma se queste cause, le quali impediscono al movimento proposto d'essere uniforme, cessassero tutte ad un tratto, il movimento, da quell'istante in cui cessano, continuerebbe in una maniera uniforme, e con una velocità misurata da $\left(\frac{ds}{dt}\right)$; e se l'effetto di queste cause in vece di divenire nullo, divenisse costante, il movimento diverrebbe composto d'un moto uniforme, e d'un moto uniformemente accelerato, cominciando nel medesimo istante, in virtù d'una forza acceleratrice costante e proporzionale a $\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)$. Molti fenomeni della Natura, e sopra tutto i risultati di differenti esperienze che sono state immaginate sopra la caduta dei corpi, confermano pienamente questa conclusione, la quale deve essere riguardata come il principio fondamentale della Teoria del movimento.

Dunque in generale in ogni moto rettilineo nel quale lo spazio percorso è una funzione del tempo impiegato a percorrerlo, $\left(\frac{ds}{dt}\right)$ rappresenta la velocità, e $\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)$ la forza acceleratrice in un istante qualunque; così data l'equazione d'un movimento qualunque $s = \varphi(t)$, il Calcolo Differenziale ci darà subito le due funzioni $\left(\frac{ds}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)$, che rappresentano come abbiamo detto, la velocità e la forza acceleratrice in un istante qualunque.

E qui vuolsi per maggior chiarezza osservare che quando si dice che in un moto qualunque, terminando il tempo t e cominciando il tempo ω, il quale può esser piccolo quanto vogliamo, la velocità è rappresentata da $\left(\frac{ds}{dt}\right)$, e la forza acceleratrice da $\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)$, non vuol dire che in questo tempo ω altro non vi sia che un moto uniforme dovuto alla velocità $\left(\frac{ds}{dt}\right)$ ed uno uniformemente accelerato dovuto alla forza $\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)$; poichè vi è un altro aggregato di movimenti che non si dee trascurare: ma vuol dire che tutto ciò che vi è di moto uniforme, è dovuto a $\left(\frac{ds}{dt}\right)$, e tutto ciò che vi è di moto uniformemente accelerato, a $\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)$; di modo che se terminando il tempo t terminassero ancora le cause che producono tutti gli altri movimenti, il mobile incomincierebbe a muoversi nel tempo ω con un moto uniforme ed uno uniformemente accelerato, de' quali abbiamo sopra determinata la velocità e la forza.

Tutta questa maniera di considerare il moto si deve all' immortale La-Grange.

Possiamo giungere allo stesso risultato per un' altra considerazione che può forse essere anteposta ai ragionamenti fatti quì sopra.

Nel tempo ω, il quale comincia quando t finisce, lo spazio descritto è $(\frac{ds}{dt})\,\omega + (\frac{d^2s}{dt^2})\frac{\omega^2}{2} + (\frac{d^3s}{dt^3})\frac{\omega^3}{2.3} + \omega^4$ ec. Ora immaginiamo una velocità media V tale che il corpo velocitato da essa, faccia con moto equabile ed uniforme nel tempo ω lo stesso spazio che ei faceva in virtù dei movimenti variati da cui è realmente animato.

Se io suppongo che sia v la velocità con cui comincia il movimento nel tempo ω, ovvero la velocità che ha il mobile alla fine del tempo t, l' espressione di V dovrà avere questa forma $V = v + \omega z$, essendo ωz una funzione di ω e di t, che si annulla quando $\omega = 0$, giacchè allora dobbiamo avere $V = v$: sarà dunque

$$(v + \omega z)\,\omega = \omega(\frac{ds}{dt}) + \frac{\omega^2}{2}(\frac{d^2s}{dt^2}) + \frac{\omega^3}{2.3}(\frac{d^3s}{dt^3}) + \text{ec.};$$

ora quest' ultima equazione dovendo esser vera per qualunque valore dell' indeterminata ω, è dimostrato nell' Algebra Cartesiana che i coefficienti delle respettive potenze di ω debbono costituire da se medesimi dell' equazioni egualmente vere; dunque deve essere

$v - (\frac{ds}{dt}) = 0$, e quindi $v = (\frac{ds}{dt})$; dunque la velocità del mobile alla fine del tempo t, è rappresentata dalla funzione $(\frac{ds}{dt})$.

Egualmente essendo la somma degli spazj descritti nel tempo ω, escluso $(\frac{ds}{dt})\,\omega$, il quale è fatto con moto equabile ed uniforme, è

$$\frac{\omega^2}{2}(\frac{d^2s}{dt^2}) + \frac{\omega^3}{2.3}(\frac{d^3s}{dt^3}) + \text{ec.}$$

Se noi immaginiamo una forza acceleratrice media F, la quale nel suddetto tempo ω faccia percorrere al mobile con moto uniformemente accelerato uno spazio eguale a quella somma, descritta con moti variati, e se noi supponiamo $F = f + \omega y$, essendo f la forza acceleratrice alla fine del tempo t, ed ωy una funzione di ω e di t, che si annulla quando $\omega = 0$, avremo l' equazione

$$\{f + \omega y\}\,\omega^2 = (\frac{d^2s}{dt^2})\frac{\omega^2}{2} + (\frac{d^3s}{dt^3})\frac{\omega^3}{2.3} + \text{ec.}$$

La quale dovendo esser vera per tutti i valori di ω, ci darà $f = \frac{1}{2}(\frac{d^2s}{dt^2})$: dunque in qualunque movimento variato la forza acceleratrice alla fine del tempo t è espressa da $\frac{1}{2}(\frac{d^2s}{dt^2})$, e quindi è proporzionale a $(\frac{d^2s}{dt^2})$, come abbiamo detto sopra.

Nel moto uniforme rappresentato dall' equazione $s = at$ si ha $(\frac{ds}{dt}) = a$, $(\frac{d^2s}{dt^2}) = 0$, in questo moto cioè il coefficiente a rappresenta la velocità, e la forza acceleratrice vi è nulla: nell' uniformemente accelerato $s = bt^2$, si ha $(\frac{ds}{dt}) = 2bt$, $(\frac{d^2s}{dt^2}) = 2b$, e così la velocità in un istante qualunque è proporzionale al tempo trascorso dopo l' origine del moto, ed il rapporto fra la volocità ed il tempo esprime la forza acceleratrice, ed è doppio del rapporto tra lo spazio percorso ed il quadrato del tempo.

Fig. 19. §. 94. Consideriamo ora un movimento curvilineo qualunque, essendo la curva descritta EMF collocata in un piano CAB, e riferita ai due assi rettangoli AC, AB, dei quali il primo sia quello degli y, ed il secondo quello degli x. Il corpo nel muoversi si troverà sempre in alcuno dei punti della curva EF, ed il punto M, nel quale ad un certo istante il corpo è, dipenderà dal tempo per il quale è seguito il movimento. La posizione adunque del punto M sarà una funzione del tempo. Conduciamo le coordinate $MQ = x$, $MP = y$: la posizione del

punto M è determinata da queste coordinate; esse dunque sono funzioni del tempo, e per questo ciascuna di esse può rappresentare uno spazio rettilineo descritto con un movimento espresso dalla funzione del tempo, alla quale è eguale la stessa ordinata. Fig. 19.

Sia dunque $x = f(t)$, $y = F(t)$; determinato t, sono subito determinate le coordinate AP, AQ, ed in conseguenza il punto M ove trovasi il mobile: ora supponiamo che oltre il vero corpo che muovesi nella curva, vi sieno due corpi fittizj dei quali uno si muova lungo l'asse AB, l'altro lungo l'asse AC con dei movimenti rappresentati respettivamente da quelle due equazioni $x = f(t)$, $y = F(t)$: è chiaro che i due punti dei due assi, nei quali si troveranno i corpi immaginati alla fine del tempo t, determineranno il punto della curva nel quale si trova il vero corpo, essendo quei punti la projezione del punto M della curva; dunque un movimento qualunque può naturalmente ridursi a due movimenti rettilinei sopra i due assi delle coordinate, e questi movimenti possono riguardarsi come descritti dai mobili che sono le projezioni del vero mobile sopra i due assi medesimi; quindi è che gli stessi movimenti possono considerarsi come la projezione del vero movimento: così potremo riguardare come conosciuto il moto per la linea EMF, quando saranno conosciuti i movimenti rettilinei per i due assi.

Infatti conosciute le equazioni $x = f(t)$, $y = F(t)$ si ha per qualunque tempo t il luogo M del mobile, ed eliminando t per mezzo di esse, abbiamo l'equazione della curva descritta.

Consideriamo adunque i due movimenti $x = f(t)$, $y = F(t)$ rettilinei, come componenti il moto curvilineo per EM; il mobile posto in M tenderà a muoversi parallelamente all'asse AB col movimento $x = f(t)$, e parallelamente all'asse AC col movimento $y = F(t)$. Ora per ciò che si è detto sopra $(\frac{dx}{dt})$, $(\frac{d^2x}{dt^2})$ rappresentano la velocità e la forza acceleratrice che si ritrova alla fine del tempo t nel movimento $x = f(t)$, ed egualmente $(\frac{dy}{dt})$, $(\frac{d^2y}{dt^2})$ rappresentano le simili quantità per il movimento

Fig. 19. $y = F(t)$: dunque il corpo posto in M tende a muoversi, ed effettivamente nel primo istante alla fine del tempo t, si muove nel senso degli x con una velocità $(\frac{dx}{dt})$, e con una forza acceleratrice $(\frac{d^2x}{dt^2})$, e nel senso degli y con una velocità $(\frac{dy}{dt})$ e con una forza acceleratrice $(\frac{d^2y}{dt^2})$.

Sappiamo poi dalla Meccanica che un corpo animato da due movimenti uniformi, o da due movimenti uniformemente accelerato, secondo due direzioni perpendicolari tra loro, dei quali a, b siano le velocità o le forze acceleratrici, tende a muoversi, e si muove, quando tali movimenti non siano turbati, con una velocità o con una forza acceleratrice rappresentata da $\sqrt{(a^2 + b^2)}$, e con una direzione la quale fa con le due direzioni dei movimenti componenti due angoli, di cui i coseni sono $\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, $\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$: dunque le due velocità $(\frac{dx}{dt})$, $(\frac{dy}{dt})$ daranno la velocità composta $\sqrt{((\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2)}$, e le due forze acceleratrici comporranno la forza $\sqrt{((\frac{d^2x}{dt^2})^2 + (\frac{d^2y}{dt^2})^2)}$. La velocità composta che indicheremo per u, farà con gli assi degli x e degli y due angoli, i coseni dei quali saranno $(\frac{dx}{dt}) : u$; $(\frac{dy}{dt}) : u$.

Rappresentiamo ora per s l'arco EM, ed essendo esso una funzione del tempo, avremo (§ 81) $(\frac{ds}{dt}) = \sqrt{((\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2)}$, e quindi $(\frac{ds}{dt}) = u$: sarà dunque $(\frac{ds}{dt})$ la velocità del mobile alla fine del tempo t; di più la direzione di questa velocità sarà la stessa di quella della tangente MT alla curva nel punto M: imperciocchè gli angoli TMm, TMn che la tangente MT fa con gli assi (§. 80) e sono tali che

$$\cos. \text{TM}m = \frac{\text{M}m}{\text{TM}} = \frac{1}{\sqrt{(1+(\frac{dy}{dx})^2)}},$$

$cos. TMn = (\frac{dy}{dx}) : \sqrt{(1 + (\frac{dy}{dx})^2)}$, e ponendo

$(\frac{dy}{dt}) : (\frac{dx}{dt})$ per $(\frac{dy}{dx})$, avremo

$$cos. TMm = (\frac{dx}{dt}) : \sqrt{((\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2)}$$

$$cos\ TMn = (\frac{dy}{dt}) : \sqrt{((\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2)};$$

questi due coseni sono evidentemente gli stessi che quei degli angoli, i quali fa la direzione della velocità composta con l' asse; dunque la direzione della velocità coinciderà con la tangente della curva; e di quì segue che se le cause, le quali impediscono al movimento d' essere rettilineo, cessassero in un istante qualunque, il corpo continuerebbe il suo moto nella direzione della tangente e con una velocità eguale a $(\frac{ds}{dt})$.

§. 95. Passiamo ad applicare il Calcolo Differenziale alla ricerca dei Centri di Gravità.

Sia l' area APM compresa tra l' ascissa, l' ordinata e l' arco AM, della quale si dimanda il centro di gravità G. Prendiamo per assi dei momenti i medesimi due assi delle coordinate x, y, e supponiamo per maggior semplicità l' origine dell' area nell' origine delle ascisse. Sia $AP = x$, $PM = y$, e dal centro G conduciamo le due perpendicolari GO, GQ ai due assi AH, AP. Rappresentiamo ora per $\varphi(x)$ il momento dello spazio AMP relativamente all' asse AH, e facendo $PR = \omega$, si avrà $\varphi(x) = GQ . \int y dx$. Il momento dello spazio AER sarà $\varphi(x + \omega) = \varphi(x) + \omega(\frac{d\varphi}{dx}) + \omega^2 R$, e questo sarà minore del momento di AMP + PSER, e maggiore del momento dello spazio AMP + PMDR. Indicando questi tre momenti per m', m'', m, è facile vedere che (facendo $RE = y + \omega(\frac{dy}{dx}) + \omega^2 p$), sarà Fig. 20.

Fig. 20. $m'' = \varphi(x) + \omega(y + \omega(\frac{dy}{dx}) + \omega^2 p)(x + \frac{\omega}{2})$,

$m = \varphi(x) + \omega y(x + \frac{\omega}{2})$; e dovendo sempre essere

$m'' - m > m' - m$, ovvero

$$\omega^2 \{(\frac{dy}{dx}) + \omega p\}(x + \frac{\omega}{2}) > \omega\{(\frac{d\varphi}{dx}) - xy\} + \omega^2(R - \frac{y}{2})$$

comunque d' altr' onde piccolo si prenda ω, ne segue che dovrà annullarsi da se medesimo (§. 81) il coefficiente $(\frac{d\varphi}{dx}) - xy$; dunque $(\frac{d\varphi}{dx}) = xy$, e quindi $\varphi(x) = \int yx dx$: ma $\varphi(x) = GQ . \int y dx$; dunque $GQ = \frac{\int yx dx}{\int y dx}$. Per trovare GO, indichiamo per $\varphi(x)$ il momento dello spazio APM relativamente all' asse AR, ed avremo (rappresentando per m'', m', m i momenti dei tre spazj sopra considerati)

$$m'' = \varphi(x) + \omega\{y + \omega(\frac{dy}{dx}) + \omega^2 p\} \frac{y + \omega(\frac{dy}{dx}) + \omega^2 p}{2}$$

$$m' = \varphi(x + \omega) = \varphi(x) + \omega(\frac{d\varphi}{dx}) + \frac{\omega^2}{2} R$$

$m = \varphi(x) + \omega y . \frac{y}{2}$; ora dovendo sempre essere $m'' - m > m' - m$, ovvero

$$\omega^2 y \{(\frac{dy}{dx}) + \omega p\} + \frac{\omega^3}{2}\{(\frac{dy}{dx}) + p\omega\}^2 > \omega\{(\frac{d\varphi}{dx}) - \frac{y^2}{2}\} + \omega^2 R,$$

avremo $(\frac{d\varphi}{dx}) = \frac{y^2}{2}$, e quindi $\varphi(x) = \int \frac{y^2}{2} dx$: ma $\varphi(x) = GO \int y dx$; dunque

$$GO = \frac{1}{2} . \frac{\int y^2 dx}{\int y dx}.$$

Se $y = fx$ esprimesse l' area della sezione d' un solido fatta perpendicolarmente all' asse degli x, e corrispondente all' ascissa x, dimostreremo nella stessa maniera che la distanza del centro di gravità di questo solido da un piano parallelo alla sezione, e che passa per l'origine delle ascisse, è $\frac{\int xy dx}{\int y dx}$.

Trovando poi le distanze del centro da due altri piani perpendicolari al primo, sarà determinato il centro di gravità del solido medesimo.

Fig. 21. Per trovare il centro di gravità G dell'arco AM, chiamiamo $\varphi(x)$ il momento di quest'arco relativamente all'asse AB, e sarà

$\varphi(x) = \mathrm{GO} \int \sqrt{(1 + (\frac{dy}{dx})^2)}\, dx$.

Supponiamo che AP divenga AR, conduciamo l'ordinata RN, le tangenti ai punti M, N finchè incontrino le ordinate PM, RN prolungate in T, T', e la retta MD parallela alla T'N. Facciamo PR = ω, ed avremo

$\varphi(x + \omega) = \varphi(x) + \omega(\frac{d\varphi}{dx}) + \frac{\omega^2}{2}R = m'$ per esprimere il momento di AMN: ma questo momento debb' esser sempre minore del momento di AM + MT, e maggiore del momento di AM + MD, comunque piccolo si prenda ω (poichè il momento di ciascun punto della MD è minore del momento di ciascun punto corrispondente nell'arco MN, ed il momento di questo punto è minore di quello che gli corrisponde nella tangente MT); dunque indicando per m'', m questi due momenti, ed osservando che (si fa $fx = \sqrt{\{1 + (\frac{dy}{dx})\}}$)

$m'' = mom.\ (\mathrm{AM} + \mathrm{MT}) = \varphi(x) + (y + \frac{\omega}{2}(\frac{dy}{dx}))\omega fx$

$m' = mom.\ (\quad \mathrm{AMN} \quad) = \varphi(x) + \omega(\frac{d\varphi}{dx}) + \frac{\omega^2}{2}R$

$m = mom.\ (\mathrm{AM} + \mathrm{MD}) = \varphi(x) + (y + \frac{\omega}{2}(\frac{dy'}{dx}))\omega f(x+\omega)$,

essendo y' ciò che diviene y quando x si cangia in $x + \omega$, si avrà $m'' - m > m'' - m'$; ora nell'espressione di $m'' - m$ i termini sono moltiplicati o per ω^2 o per potenze superiori; dun-

que (70, 83) acciò sia sempre $m'' - m > m'' - m'$ bisogna
Fig. 21. che in $m'' - m'$ non vi siano termini moltiplicati per la prima potenza di ω, la qual condizione ci dà l'equazione

$(\frac{d\varphi}{dx}) = yfx$; dunque

$\mathrm{GO} . \int \sqrt{(1 + (\frac{dy}{dx})^2)} . dx = \varphi(x) = \int y dx \sqrt{(1 + (\frac{dy}{dx})^2)}$, e quindi

$$\mathrm{GO} = \frac{\int y \sqrt{(1 + (\frac{dy}{dx})^2)} . dx}{\int \sqrt{(1 + (\frac{dy}{dx})^2)} . dx}.$$

Per trovare la distanza GQ del centro di gravità dall'altro asse AC, dal punto N si condurrebbe ND' parallela ad MT, ed un simile ragionamento ci porterebbe a concludere che facendo

$m'' = mom.\ (\mathrm{AM} + \mathrm{ND'}) = \varphi(x) + (x + \frac{\omega}{2})\omega fx$,

$m' = mom.\ (\quad \mathrm{AMN} \quad) = \varphi(x) + \omega(\frac{d\varphi}{dx}) + \frac{\omega^2}{2}R$,

$m = mom.\ (\mathrm{AM} + \mathrm{NT'}) = \varphi(x) + (x + \frac{\omega}{2})\omega f(x + \omega)$,

debbe essere sempre $m'' - m > m'' - m'$, dal che si deduce $xfx = (\frac{d\varphi}{dx})$, e quindi

$\varphi x = \int x \sqrt{(1 + (\frac{dy}{dx})^2)} . dx$; ma $\varphi x = \mathrm{GQ} . \int \sqrt{(1 + (\frac{dy}{dx})^2)} dx$; dunque

$$\mathrm{GQ} = \frac{\int x \sqrt{(1 + (\frac{dy}{dx})^2)} . dx}{\int \sqrt{(1 + (\frac{dy}{dx})^2)} . dx}.$$

Volendo il centro di gravità della superficie conoidica formata dal ravvolgimento di AMN intorno AB, faremo un simile ragionamento: il centro di gravità è nell'asse AB, e rapporto ad un piano perpendicolare ad AB, il momento della superficie conoidica fatta da AMN, è medio tra l'aggregato dei momenti della superficie conoidica fatta da AM, e della zona conica fatta da MT, e l'aggregato dei momenti della stessa superficie conoidica, e dell'altra zona conica descritta da MD. Fig. 21.

Per l'applicazione di queste Teorie rimandiamo i nostri Lettori ai Trattati di Meccanica.

Scolio I.

Tutti i Problemi e Teoremi che noi abbiamo sciolti e dimostrati nelle superiori dottrine delle curve, sono appoggiati a questo principio „ Se delle due quantità ωB, $C + \omega D$, nelle „ quali B e D sono funzioni di ω di questa forma $a + b\omega +$ „ $c\omega^2 +$ ec.) debbe la prima esser sempre maggiore della se- „ conda, qualunque sia ω, conviene che la quantità C si an- „ nulli da se medesima, poichè senza questo, potrebbe deter- „ minarsi o concepirsi determinato ω in modo che fosse $\omega B <$ „ $C + \omega D$ „.

Noi abbiamo dimostrato questo principio (§. 81), e ci lusinghiamo che i nostri Lettori non possano avervi alcuno scrupolo: pure non sarà tempo perduto il riguardare la medesima verità sotto un altro punto di vista, che sebbene non porti maggior rigore Geometrico alle soluzioni che abbiamo date, pure le mette nel caso di essere più facilmente concepite, e taluna volta rese ancora più semplici. E' dimostrato nell' Algebra Cartesiana che se abbiamo un' equazione $A + Bx + Cx^2 + Ex^3 +$ ec. $= 0$, la quale debba essere vera per tutti i valori possibili che a noi piace dare ad x, è necessario che i coefficienti delle rispettive potenze di x si annullino da se medesimi, cioè che sia $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ ec. Ora delle due quantità ωB, $C + \omega D$ dovendo essere sempre la prima maggiore della seconda, qualunque sia ω, esse differiranno tra di loro di una differenza che varierà col variare di ω; se questa differenza avrà la forma ωL, per quanto essa sia una funzione incognita, avremo $\omega B = C + \omega D + \omega L$, ovvero $C\omega^0 + \omega D - \omega B + \omega L = 0$: quest' equazione dovendo esser vera per qualunque valore di ω, se sarà essa ordinata secondo le potenze di ω, ci darà tante equazioni quanti sono i coefficienti delle respettive potenze di quell' indeterminata: sarà dunque $C = 0$, come noi

avevamo trovato con altro ragionamento: faremo uso di questo principio nella soluzione dei due seguenti Problemi, uno di Statica, l'altro d' Idrodinamica.

Io mi lusingo che i Lettori versati nelle Teorie degli infinitesimi, sempre inesatte, che che ne dicano i loro Apologisti, saran soddisfatti, nel vedere come le più complicate questioni possano trattarsi per mezzo dei nuovi principj del Calcolo Differenziale, e come le soluzioni di esse acquistino quella precisione e quel rigore geometrico, che era presso che sbandito per l'abuso delle quantità infinitamente piccole.

PROBLEMA PRIMO

§. 96. Determinare le condizioni d' equilibrio fra tutti i Cunei d' una Volta qualunque cilindrica.

Fig. 22. I. Siano ACA' la curva interna d' una volta cilindrica, aca' la curva esterna. Supponiamo che a ciascun cuneo siano applicate delle forze assolute qualunque V, F, F' ec. f, f' ec. Siano X, X' due cunei consecutivi sottoposti respettivamente all' azione delle due forze F, F'. Le giunture mM, nN, pP ec. debbono essere perpendicolari alla curva interna ACA', tanto per la grazia della volta, che per la solidità della costruzione; perciò noi le supporremo tali.

II. Avendo preso sulla direzione della forza F la parte XE per rappresentarla, la decompongo in due altre forze Xu, Xt, perpendicolari alle due giunture mM, nN del cuneo X. Sia X' il punto, in cui la direzione della forza Xt incontra quella F'X' della forza F'. Prendo sulla F'X' la parte X'E' per rappresentare la forza F', e la decompongo in due altre forze X'q, X'l perpendicolari ai due *punti* nN, pP del cuneo X'. Allora i due cunei X, X' si faranno equilibrio, quando le due forze Xt, X'q direttamente opposte, colle quali essi agiscono l' uno contro l' altro, saranno inoltre eguali. Non si tratta adunque che di formare l' equazione *Forza* Xt = *Forza* Xq, e di sostituire invece di queste forze i loro valori.

III. Il parallelogrammo $XtEu$, dà *Forza* $Xt = $ *Forza* Fig. 22.
$XE \times \frac{sen.\,XEt}{sen.\,XtE} = F \times \frac{sen.\,XEt}{sen.\,XtE}$, ed il parallelogrammo $X'qE'l$ dà parimente *Forza* $X'q = F' \times \frac{sen.\,X'E'q}{sen.\,X'qE'}$. Quindi si avrà

$$F \times \frac{sen.\,XEt}{sen.\,XtE} = F' \times \frac{sen.\,X'E'q}{sen.\,X'qE'}, \text{ ovvero}$$

$$(A) \ldots \frac{F}{F'} = \frac{sen.\,XtE \times sen.\,X'E'q}{sen.\,XEt \times sen.\,X'qE'}.$$

IV. Siano I il punto di concorso delle giunture mM, nN prolungate; T quello del concorso delle giunture nN, pP, parimente prolungate; H ed L i punti di concorso delle giunture esterne mM, pP coll' asse verticale CO; Z e G i punti di concorso delle forze F, F' collo stesso asse. Egli è chiaro che l' angolo XtE è eguale all' angolo NIM, poichè i lati dell' uno sono perpendicolari a quelli dell' altro. Per la stessa ragione l' angolo $X'qE'$ è eguale all' angolo PTN. Di più conducendo per il punto z, in cui la retta Xu incontra la giuntura mM, la retta zz' parallela alla direzione della forza F, si vedrà che l' angolo uXE, o l' angolo $uzz' = ang^{\circ}.\,uzk - ang^{\circ}.\,kzz' = 90^{\circ} - (ang^{\circ}.\,CZE - ang^{\circ}.\,CHN)$, e per delle considerazioni simili, l' angolo $X'E'q = 90^{\circ} - (ang^{\circ}.\,CLP - ang^{\circ}.\,CGF')$. Dunque prendendo sempre il seno tutto per l' unità, si avrà dalla Trigonometria $sen.\,XEt = cos.\,CZE \times cos.\,CHM + sen.\,CZF \times sen.\,CHM$; e $sen.\,X'E'q = cos.\,CGF' \times cos.\,CLP + sen\,CGF' \times sen.\,CLP$. Quindi l' equazione (A) si cangierà in questa

$$(B) \ldots \frac{F}{F'} = \frac{sen.\,NTM\,(cos.\,CGF\,.\,cos.\,CLP + sen.\,CGF'\,.\,sen.\,CLP)}{sen.\,PTN\,(cos.\,CZF\,.\,cos.\,CHM + sen.\,CZF\,.\,sen.\,CHM)}.$$

Da questa equazione si vede, che conoscendo la figura della curva interna, gli archi MN, NP ec. ai quali corrispondono i cunei e le direzioni delle forze F, F' ec., si conosceranno i rapporti delle stesse forze e la figura della curva esterna.

Fig. 22. § 97. Supponendo che la curva della volta formi un arco continuato, prendiamo due porzioni eguali MN, NP di quest' arco, e siano F, F' le risultanti di tutte le forze che respettivamente agiscono sopra ciascuna di queste porzioni; siano FZ, F'G le direzioni di queste risultanti. Conduciamo all' asse verticale CO le ordinate MR, R'N, PR''. Sia MH la normale alla curva nel punto M. Egualmente siano NL', PL le normali nei punti N, P.

Facciamo $MC = s$, e riguardiamo tutte le linee e quantità dipendenti dal punto M, come funzioni di s. Poniamo

$$
\begin{array}{ll}
CM = s & MN = NP = \omega \\
CR = x_s & MR = y_s \\
CR' = x'_s = x_{s+\omega} & NR' = y'_s = y_{s+\omega} \\
CR'' = x''_s = x_{s+2\omega} & PR'' = y''_s = y_{s+2\omega} \\
Ang^{\circ}.\,CZF = u_s & Ang^{\circ}.\,CGF' = u'_s = u_{s+\omega} \\
F = F_s & F' = F_{s+\omega}
\end{array}
$$

Paragonando la Figura 23 con la 22, avremo

$sen.\,NTM = sen.\,(CL'N - CHM)$

$sen.\,PTN = sen.\,(CLP - CL'N)$;

ma $sen\,CHM = \left(\frac{dx}{ds}\right)$, $\quad cos.\,CHM = \left(\frac{dy}{ds}\right)$

$sen.\,CL'N = \left(\frac{dx'}{ds}\right)$, $\quad cos.\,CL'N = \left(\frac{dy'}{ds}\right)$

$sen.\,CLP = \left(\frac{dx''}{ds}\right)$, $\quad cos.\,CLP = \left(\frac{dy''}{ds}\right)$;

facendo dunque le opportune sostituzioni nella formula (B), avremo

$$\frac{F_s}{F_{s+\omega}} = \frac{\left\{\left(\frac{dy'}{ds}\right)\left(\frac{dx}{ds}\right) - \left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{dx'}{ds}\right)\right\}\left\{\left(\frac{dy''}{ds}\right)\cos.u_{s+\omega} + \left(\frac{dx''}{ds}\right)\operatorname{sen}.u_{s+\omega}\right\}}{\left\{\left(\frac{dy''}{ds}\right)\left(\frac{dx'}{ds}\right) - \left(\frac{dy'}{ds}\right)\left(\frac{dx''}{ds}\right)\right\}\left\{\left(\frac{dy}{ds}\right)\cos.u_s + \left(\frac{dx}{ds}\right)\operatorname{sen}.u_s\right\}}.$$

ovvero

$$F_s\left\{\left(\frac{dy}{ds}\right)\cos.u_s + \left(\frac{dx}{ds}\right)\operatorname{sen}.u_s\right\}\left\{\left(\frac{dy''}{ds}\right)\left(\frac{dx'}{ds}\right) - \left(\frac{dy'}{ds}\right)\left(\frac{dx''}{ds}\right)\right\} =$$

$$F_{s+\omega}\left\{\left(\frac{dy''}{ds}\right)\cos.u_{s+\omega} + \left(\frac{dx''}{ds}\right)\operatorname{sen}.u_{s+\omega}\right\}\left\{\left(\frac{dy'}{ds}\right)\left(\frac{dx}{ds}\right) - \left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{dx'}{ds}\right)\right\}.$$

Ora osserviamo che

$$x_{s+\omega} = x_s + \omega\left(\frac{dx}{ds}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right) + \omega^3 \text{ ec.}$$

$$x_{s+2\omega} = x_s + 2\omega\left(\frac{dx}{ds}\right) + 2\omega^2\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right) + \omega^3 \text{ ec.}$$

$$y_{s+\omega} = y_s + \omega\left(\frac{dy}{ds}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right) + \omega^3 \text{ ec.}$$

$$y_{s+2\omega} = y_s + 2\omega\left(\frac{dy}{ds}\right) + 2\omega^2\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right) + \omega^3 \text{ ec.}$$

$$\operatorname{sen}.u_{s+\omega} = \operatorname{sen}.u_s + \omega\left(\frac{d\,\operatorname{sen}.u}{ds}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2\operatorname{sen}.u}{ds^2}\right) + \omega^3 \text{ ec.}$$

$$\cos.u_{s+\omega} = \cos.u_s + \omega\left(\frac{d\cos.u}{ds}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2\cos.u}{ds^2}\right) + \omega^3 \text{ ec.}$$

$F_s = \varphi(s) + \omega t_s$ (essendo rappresentata da $\varphi(s)$, funzione di s, la forza che agisce nel punto M della volta, ed ωt_s essendo una funzione di ω e di s, la quale si annulla quando $\omega = 0$) Fig. 22.

$$F_{s+\omega} = \varphi(s) + \omega\left(t_s + \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)\right) + \omega^2\left(\left(\frac{dt}{ds}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{ds^2}\right)\right) + \omega^3 \text{ ec.}$$

quindi sostituendo ed ordinando secondo le potenze di ω, avremo un' equazione di questa forma

$$\alpha\omega^0 + \beta\omega + \gamma\omega^2 + \delta\omega^3 + \text{ec.} = 0$$

la quale dovendo esser vera per tutti i valori possibili di ω, ci

darà le equazioni $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ ec., ciascuna delle quali apparterrà allo stesso Problema.

Per avere effettivamente quest' equazioni, incominciamo dal fare le sostituzioni e successive riduzioni in ciascuno dei fattori della nostr' equazione, e troveremo

$$\left(\frac{dy''}{ds}\right)\left(\frac{dx'}{ds}\right) = \left\{\left(\frac{dy}{ds}\right) + 2\omega\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right) + 2\omega^2\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right) + \omega^3 \text{ ec.}\right\}\left\{\left(\frac{dx}{ds}\right) + \omega\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right) + \omega^3 \text{ ec.}\right\} = \left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{dx}{ds}\right) + \omega\left\{\left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right) + 2\left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)\right\} + \omega^2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right) + 2\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right) + 2\left(\frac{dx}{ds}\right)\times\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)\right\} + \omega^3 \text{ ec.},$$

$$\left(\frac{dx''}{ds}\right)\left(\frac{dy'}{ds}\right) = \left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{dx}{ds}\right) + \omega\left\{\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)\left(\frac{dx}{ds}\right) + 2\left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)\right\} + \omega^2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right) + 2\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right) + 2\left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)\right\} + \omega^3 \text{ ec.},$$

$$\left(\frac{dy''}{ds}\right)\left(\frac{dx'}{ds}\right) - \left(\frac{dx''}{ds}\right)\left(\frac{dy'}{ds}\right) = \omega\left\{\left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right) - \left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)\right\} + \omega^2\left\{\frac{3}{2}\left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)\right\} + \omega^3 \text{ ec.} = A\omega + B\omega^2 + \omega^3 \text{ ec.},$$

$$\left(\frac{dy''}{ds}\right)\cos.u_{s+\omega} = \left\{\left(\frac{dy}{ds}\right) + 2\omega\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right) + 2\omega^2\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right) + \omega^3 \text{ ec.}\right\}\left\{\cos.u + \omega\left(\frac{d\cos.u}{ds}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2\cos.u}{ds^2}\right) + \omega^3 \text{ ec.}\right. = \left(\frac{dy}{ds}\right)\cos.u + \omega\left\{\left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{d\cos.u}{ds}\right) + 2\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)\cos.u\right\} + \omega^2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{d^2\cos.u}{ds^2}\right) + 2\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)\left(\frac{d\cos.u}{ds}\right) + 2\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)\cos.u\right\} + \omega^3 \text{ ec.},$$

$$\left(\frac{dx''}{ds}\right)\operatorname{sen}.u_{s+\omega} = \left(\frac{dx}{ds}\right)\operatorname{sen}.u + \omega\left\{\left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{d\,\operatorname{sen}.u}{ds}\right) + 2\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)\operatorname{sen}.u\right\} + \omega^2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{d^2\operatorname{sen}.u}{ds^2}\right) + 2\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)\left(\frac{d\,\operatorname{sen}.u}{ds}\right) + 2\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)\operatorname{sen}.u\right\} + \omega^3 \text{ ec.},$$

$$\left(\frac{dy''}{ds}\right)\cos.u_{s+\omega}+\left(\frac{dx''}{ds}\right)sen.u_{s+\omega}=\left(\frac{dy}{ds}\right)\cos.u+\left(\frac{dx}{ds}\right)sen.u+$$
$$\omega\left\{\left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{d\cos.u}{ds}\right)+\left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{d\,sen.u}{d's}\right)+2\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)\cos.u+\ldots\right.$$
$$\left.2\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)sen.u\right\}+\omega^2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{d^2\cos.u}{ds^2}\right)+2\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)\left(\frac{d\cos.u}{ds}\right)+\right.$$
$$2\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)\cos.u+\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{d^2sen.u}{ds^2}\right)+2\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)\left(\frac{d\,sen.u}{ds}\right)+\ldots$$
$$\left.2\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)sen.u\right\}+\omega^3\text{ ec.}=H+C\omega+D\omega^2+\omega^3\text{ ec.},$$

$$\left(\frac{dy'}{ds}\right)\left(\frac{dx}{ds}\right)-\left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{dx'}{ds}\right)=\omega\left\{\left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)-\left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)\right\}+$$
$$\omega^2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)\right\}+\omega^3\text{ ec.}=\ldots\ldots,$$
$$A\omega+F\omega^2+\omega^3\text{ ec.}$$

Ora facciamo le opportune sostituzioni nella nostra equazione, ed avremo

$$(\varphi+\omega t)\,(A\omega+B\omega^2+\omega^3\text{ ec.})\,H=\left(\varphi+\omega\left(t+\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)\right)+\right.$$
$$\left.\omega^2\left(\left(\frac{dt}{ds}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{ds^2}\right)+\omega^3\text{ ec.}\right)\right)(H+C\omega+D\omega^2+\omega^3\text{ ec.})$$
$$(A\omega+F\omega^2+\omega^3\text{ ec.}),$$

ovvero

$$H.\varphi.(A\omega+B\omega^2+\omega^3\text{ ec.})+t\,(A\omega^2+B\omega^3+\omega^4\text{ ec.})\,H=$$
$$\varphi.(H+C\omega+D\omega^2+\omega^3\text{ ec.})\,(A\omega+F\omega^2+\omega^3\text{ ec.})+$$
$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)(H+C\omega+D\omega^2+\omega^3\text{ ec.})\,(A\omega^2+F\omega^3+\omega^4\text{ ec.})+$$
$$t\,(H+C\omega+D\omega^2+\omega^3\text{ ec.})\,(A\omega^2+F\omega^3+\omega^4\text{ ec.})+$$
$$\left\{\left(\frac{dt}{ds}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{ds^2}\right)\right\}(H+C\omega+D\omega^2+\omega^3\text{ ec.})\,(A\omega^3+$$
$$F\omega^4+\omega^5\text{ ec.})+\text{ec.}$$

Eseguendo le moltiplicazioni, si avrà

Fig. 23. $\varphi.HA\omega+\varphi.HB\omega^2+tHA\omega^2+\omega^3\text{ ec.}=\varphi.HA\omega+\varphi.HF\omega^2+$
$\varphi.CA\omega^2+\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)HA\omega^2+tHA\omega^2+\omega^3\text{ ec.}$, la quale si riduce a

$$\left\{\varphi.HB-\varphi.HF-\varphi.CA-\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)HA\right\}\omega^2+\omega^3\text{ ec.}=0:$$

avremo dunque $\varphi(HB-HF-CA)-\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)HA=0$,

ovvero

$$\varphi.C+\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)H+\varphi.H\frac{F-B}{A}=0.$$

Sostituiamo per C, H, F, B, A i respettivi valori, ed otterremo

$$\varphi\left\{\left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{d\cos.u}{ds}\right)+\left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{d\,sen.u}{ds}\right)+2\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)\cos.u+\ldots\ldots\right.$$
$$\left.2\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)sen.u\right\}+\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)\left\{\left(\frac{dy}{ds}\right)\cos.u+\left(\frac{dx}{ds}\right)sen.u\right\}+$$
$$\varphi\left\{\left(\frac{dy}{ds}\right)\cos.u+\left(\frac{dx}{ds}\right)sen.u\right\}\times\frac{\left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)-\left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)}{\left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)-\left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)}=0:$$

ora osservando che quando le coordinate sono funzioni dell' arco, l' espressione del raggio osculatore è (§. 81)

$$R=\frac{1}{\left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)-\left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)},$$

potremo dare alla nostra equazione finale questa forma

$$R.\varphi.\left\{\left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{d\cos.u}{ds}\right)+\left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{d\,sen.u}{ds}\right)+2\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)\cos.u+\ldots\right.$$
$$\left.2\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)sen.u\right\}+R\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)\left\{\left(\frac{dy}{ds}\right)\cos.u+\left(\frac{dx}{ds}\right)sen.u\right\}+$$
$$\varphi\left\{\left(\frac{dy}{ds}\right)\cos.u+\left(\frac{dx}{ds}\right)sen.u\right\}\times\left(\frac{dR}{ds}\right)=0.$$

Quest' equazione generale contiene la soluzione del Problema che ci siamo proposto: conoscendo la legge delle forze che agiscono sopra tutti i punti della volta cilindrica, essa ci dà la curva della volta; e conoscendo questa curva, ci dà la legge delle forze.

Noi abbiam voluto sminuzzar tutto il calcolo per mostrare ai nostri Lettori come regolarsi in consimili operazioni.

PROBLEMA SECONDO

§. 98. Sconvolto l' equilibrio dell' aria nel tubo cilindrico, orizzontale e rettilineo AB, e conosciute le circostanze del moto che indi ne segue in una sezione verticale RS dopo un tempo determinato, si dimanda un' equazione che esprima in generale il movimento dell' aria in un' altra sezione qualunque, alla fine di un certo tempo, relativamente al movimento conosciuto in RS. Fig. 24.

Sia A un punto fisso: SR la sezione nella quale l' aria è stata agitata nel primo istante: supponiamo che alla fine del tempo t, la porzione o strato d' aria indeterminato SRR'S' sia stato trasportato in $srr's'$, di modo che il punto S sia giunto in s, ed il punto S' in s': paragoniamo lo strato dell' aria in $srr's'$ a quello iniziale che essa aveva in SRR'S'.

Supponiamo AS $=$ S; A$s = s = \phi(S, t) = \phi$; la densità dell' aria in SR $=$ F $($S$) =$ F; la densità dell' aria in $sr = \Psi(S, t) = \Psi$: per ϕ, F, Ψ ec., noi vogliamo significare delle funzioni delle variabili poste tra le parentesi.

Sia a^2 la superficie della sezione SR del tubo, o la base dello strato indeterminato SRR'S': sia la di lui altezza SS' $= \omega$, ed avremo A$s' = \phi(S + \omega, t) = \phi(S) + \omega(\frac{d\phi}{dS}) + \omega^2$ ec., ovvero A$s' = s + \omega(\frac{ds}{dS}) + \omega^2$ ec., $ss' = \omega(\frac{ds}{dS}) + \omega^2$ ec., la densità in R'S' $=$ F$(S + \omega)$; quella in $r's' = \Psi(S + \omega, t) = \Psi + \omega(\frac{d\Psi}{dS}) + \omega^2$ ec.

Rappresentiamo per δ la densità media dello strato indeter-

Fig. 24. minato SRR'S', ed essa sarà espressa da F$(S) + \omega$N, poichè δ deve divenire F(S) quando $\omega = 0$. Egualmente indicando per δ' la densità media dello strato $srr's'$, avremo $\delta' = \Psi(S, t) + \omega N'$. La massa adunque SRR'S' sarà espressa da $a^2(F(S) + \omega N)\omega$; e la massa $srr's'$ da $a^2(\Psi(S, t) + \omega N')(\omega(\frac{ds}{dS}) + \omega^2$ ec.$)$. Ora queste due masse debbono essere eguali; dunque

$$(1) \quad \ldots \quad F(S) + \omega N = (\Psi(S, t) + \omega N')((\tfrac{ds}{dS}) + \omega \text{ ec.}),$$

e quest' equazione debbe esser vera per tutti i valori possibili di ω.

La forza acceleratrice dell' aria nella sezione rs è come si dimostra (§. 93), $(\frac{d^2s}{dt^2})$; sia rappresentata da $f(S, t)$ questa forza, ed avremo $f(S + \omega, t)$ per esprimere la forza acceleratrice in $r's'$. La forza acceleratrice media, o la risultante di tutte le forze acceleratrici che agiscono sopra lo strato $srr's'$ sia $\theta(S, t)$, ed avremo $\theta(S, t) = f(S, t) + \omega L$ poichè essa deve divenire $f(S, t)$ quando $\omega = 0$; dunque

$a^2(\Psi(S, t) + \omega N')(\omega(\frac{ds}{dS}) + \omega^2$ ec.$)(f(S, t) + \omega L)$, ovvero

$a^2(\Psi + \omega N')(\omega(\frac{ds}{dS}) + \omega^2$ ec.$)((\frac{d^2s}{dt^2}) + \omega L)$, sarà la forza acceleratrice totale della massa d' aria $srr's'$.

Questa forza è l' eccesso della pressione che l' aria fa in sr, per spingere avanti lo strato indeterminato d' aria $srr's'$, sopra la pressione che l' aria al di là di $r's'$ esercita sopra $r's'$ per spingerlo indietro; se dunque supponiamo che la pressione o l' elasticità dell' aria sia in ragione diretta della densità, e che K esprima il rapporto della densità dell' aria naturale alla sua elasticità, la forza elastica dell' aria o la forza di pressione in qualunque punto, sarà allora espressa per il prodotto della respettiva densità in K: la pressione dunque sopra rs sarà a^2K. Ψ, e quella sopra $r's'$, sarà a^2K$(\Psi + \omega(\frac{d\Psi}{dS}) + \omega^2$ ec.$)$; dunque $-a^2$K$(\omega(\frac{d\Psi}{dS}) + \omega^2$ ec.$)$, sarà la differenza di queste due pressioni, ed avremo in conseguenza

$$(2) \;\ldots\; -a^2K\left(\omega\left(\frac{d\Psi}{dS}\right)+\omega^2 \text{ ec.}\right)=a^2(\Psi+\omega N')\left(\omega\left(\frac{ds}{dS}\right)+\omega^2 \text{ ec.}\right)\left(\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)+\omega L\right).$$

Anche quest' equazione debbe esser vera per qualunque valore di ω.

Ora se le equazioni (1), (2) si sviluppano ordinandole secondo le potenze dell' indeterminata ω, ed eguagliamo a zero i coefficienti delle respettive potenze di ω, avremo tante equazioni che apparterranno tutte al nostro Problema; ma senza fare questo sviluppo, prendendo nella prima equazione i coefficienti dei termini, ove ω si trova elevato alla potenza zero, potenza più bassa cui sia innalzata ω, abbiamo

$$(a) \;\ldots\; F=\Psi.\left(\frac{ds}{dS}\right);$$

e prendendo nella seconda i coefficienti della prima potenza di ω che è la più bassa che vi si trovi, abbiamo

$$-K\left(\frac{d\Psi}{dS}\right)=\Psi.\left(\frac{ds}{dS}\right).\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right), \text{ ovvero}$$

$$(b) \;\ldots\; K\left(\frac{d\Psi}{dS}\right)+F.\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)=0.$$

Combinando le due equazioni (a), (b), potremo eliminare Ψ e $\left(\frac{d\Psi}{dS}\right)$ ed otterremo l' equazione

$$K\left(\frac{dF}{dS}\right)\left(\frac{ds}{dS}\right)-K\left(\frac{d^2s}{dS^2}\right)+\left(\frac{ds}{dS}\right)^2\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)=0$$

che contiene la soluzione del Problema, e che bisognerebbe integrare per determinare il moto dell' aria nel tubo.

Chi bene avrà comprese le soluzioni di questi due Problemi, potrà certamente accingersi a risolvere qualunque Problema di Meccanica, per il quale siasi adoprato il metodo inesatto degli infinitesimi.

Fine del Calcolo Differenziale.

CALCOLO INTEGRALE.

CAP. I.

Principj Fondamentali del Calcolo Integrale

Integrazione delle Funzioni.

§. 99. Il Calcolo Integrale è l' inverso del Differenziale, come appunto la divisione è l' operazione inversa della moltiplicazione. In questo si cercano i Differenziali delle funzioni e dell' equazioni, ed in quello dalla cognizione dei Differenziali si vuol risalire alle funzioni ed alle equazioni, cui questi appartengono.

In quel ramo d' Analisi Derivata che forma il Calcolo Differenziale ed Integrale, il Calcolo Integrale è l' Analisi Derivata inversa, mentre il Differenziale ne è la diretta. Si chiama Integrale quella funzione dalla quale per mezzo della differenziazione si deriva un differenziale; così x^2 è l' integrale di $2xdx$, e $log.x$ è l' integrale di $\frac{dx}{x}$. L' operazione che bisogna fare per dedurre da un differenziale il suo integrale, suole indicarsi per S; e si dà poi il nome d' integrale *primo*, *secondo* ec., n^{esimo} a quella funzione sopra cui devon farsi una, due ec., n differenziazioni per avere un dato differenziale. L' ordine dell' integrale s' esprime per mezzo di un indice dato alla lettera S, e posto nel luogo degli esponenti; così x^4 è l' integrale secondo di $12x^2dx^2$; e $log.\,x$ è l' integrale secondo di $-\frac{dx^2}{x^2}$, poichè convien fare due volte la differenziazione successivamente sopra x^4, per avere $12x^2dx^2$, e parimente due voltè la medesima operazione sopra $log.\,x$, onde ottenere $-\frac{dx^2}{x^2}$.

Questa dipendenza o questo rapporto che lega x^4 con $12x^2dx^2$, $log.\,x$ con $-\frac{dx^2}{x^2}$, è rappresentato dall' equazione $x^4 = \int^2 12x^2dx^2$, $log.\,x = \int^2 -\frac{dx^2}{x^2}$, la quale dice che il primo membro è l' integrale secondo dell' altro membro: in generale l' equazione $u = \int^n zdx^n$ dice che u è l' integrale n^{esimo} di zdx^n, ovvero che egli è quella funzione di x, la quale differenziata n volte di seguito, ci dà zdx^n.

Ma per riguardare la cosa sotto il suo vero punto di vista, io osservo, che considerando il sistema di derivate da noi stabilito al (§. 1), e che è il fondamento del Calcolo Differenziale, il differenziale n^{esimo} zdx^n di una qualunque funzione u, eguaglia (§. 4) la derivata del medesimo ordine moltiplicata per dx^n; data dunque un' espressione differenziale zdx^n, se la divideremo per dx^n, avremo una quantità $\frac{zdx^n}{dx^n} = z$ che rappresenterà la derivata n^{esima} della funzione u, dalla quale quel differenziale si considera dedotto; avremo dunque $z = d^n \underset{x^n}{u}$ e da questa equazione (Principj d' Analisi Derivata §. 9) ricaveremo subito $u = \mathrm{D}^n \underset{x^n}{z}$, la quale dice che u sarà la derivatrice n^{esima} di z. Per aver dunque questa funzione u che è l' integrale n^{esimo} di zdx^n, cioè $u = \int^n zdx^n$, basterà prendere la derivatrice n^{esima} di z; dunque per aver l' integrale n^{esimo} di

una qualunque differenziale data zdx^n, prenderemo la derivatrice n^{esima} di zdx^n senza avere alcun riguardo al dx^n, e divideremo per la stessa dx^n il risultato di quell' operazione: sarà così

$\int^n zdx^n = \mathrm{D}^n \underset{x^n}{zdx^n} : dx^n$, ovvero $\int^n zdx^n = \mathrm{D}^n \underset{x^n}{z}$. Di quì segue che nell' espressione $\int^n zdx^n$ bisogna riguardare il dx come un indice, il quale ci dice rapporto a qual variabile deve farsi l' integrazione, e che è destinato a sparire affatto da $\int^n zdx^n$ ad operazione finita; di modo che $\int zdx$ deve considerarsi come una funzione di x, la quale non contiene in modo alcuno dx: dunque qualunque operazione si faccia sopra $\int zdx$ questa non può mai riguardare dx.

Ma quale sarà ella l' operazione, che far dobbiamo per ottenere effettivamente gl' integrali?

Se la quantità da integrarsi e sotto i simboli della differenziazione, possiamo subito trovarne l' integrale: infatti sia la quantità $(\frac{d^nz}{dx^n})\,dx^n$, e ne avremo l' integrale primo rappresentato da $(\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}})\,dx^{n-1}$; $(\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}})\,dx^{n-2}$ ne rappresenterà l' integrale secondo, ed in fine

$(\frac{d^{n-n}z}{dx^{n-n}})\,dx^{n-n} = (\frac{d^0z}{dx^0})\,dx^0 = z$ ne sarà l' integrale n^{esimo}.

Eccettuato questo caso, nulla possiamo stabilire per determinare l' operazione che dar ci dovrebbe gl' integrali, e ci manca in conseguenza una regola generale per ritrovarli. A questo riguardo non vi hanno che artifizj analitici, e metodi particolari per l' integrazione in certi casi determinati, dei quali metodi parleremo in questo Capitolo.

Primieramente osservando che l' equazione $(\frac{du}{dx})\,dx = zdx$ conduce ad $u = \int zdx$, dalle differenziali già ottenute per alcune funzioni possono trovarsi gli integrali di altre: così l' equazione $\left(\frac{da^x}{dx}\right) = a^x \log. a$, ci dà $a^x = \log. a . \int a^x dx$, e quindi $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log. a}$; egualmente $\left(\frac{d\, sen.\, x}{dx}\right) = \cos. x$, ci dà $sen. x = \int dx . \cos. x$.

Con lo stesso metodo sonosi avuti gli integrali che si trovano disposti nella seguente tabella, e che potrebbero verificarsi per mezzo della differenziazione.

E qui avvertiamo che un' integrazione aggiugne una costante, come la differenziazione la fa svanire: siccome infatti la differenziale di u è la stessa che quella di $u + A$, essendo A una costante, così tanto u che $u + A$ sarà l' integrale di quella differenziale, sarà cioè $u + A = \int z dx$: nei due esempj qui sopra riportati, avremo allora $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log. a} + A$, $\int dx . \cos. x = sen. x + A$.

All' integrale, il quale contiene la costante arbitraria (questa costante si dice arbitraria, perchè data la quantità da integrarsi, niente è pronunziato sopra la costante, e possiamo determinarla come più ci piace) si dà il nome di *Integrale Completo*. Sono completi tutti gli integrali seguenti.

DIFFERENZIALI.	INTEGRALI COMPLETI.
$(a + x)^n dx$	$\frac{(a+x)^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{dx}{a+x}$	$\log(a + x) + C$
$\frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$	$\log[x + \sqrt{(a^2 + x^2)}] + C$
$\frac{dx}{x\sqrt{(a^2+x^2)}}$	$\frac{1}{2a} \log \frac{\sqrt{(a^2+x^2)}-a}{\sqrt{(a^2+x^2)}+a} + C$
$\frac{dx}{x\sqrt{(a^2-x^2)}}$	$\frac{1}{2a} \log \frac{a-\sqrt{(a^2-x^2)}}{a+\sqrt{(a^2-x^2)}} + C$
$\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$	$A\, sen \frac{x}{a} + C$, ovvero $- A \cos \frac{x}{a} + C$

DIFFERENZIALI.	INTEGRALI COMPLETI.
$\frac{dx}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a} A\, tang \frac{x}{a} + C$, ovv°. $- \frac{1}{a} A \cot \frac{x}{a} + C$
$\frac{dx}{x\sqrt{(a^2-x^2)}}$	$\frac{1}{a} A \sec \frac{x}{a} + C$, ovv°. $- \frac{1}{a} A\, cosec \frac{x}{a} + C$
$e^x dx$	$e^x + C$
$\frac{dx}{x \log. x}$	$\log. \log x + C$
$\frac{dx}{x \log x \log. \log x}$	$\log. \log. \log. x + C$
ec.	ec.
$\frac{dx}{x}(\log x)^n$	$\frac{(\log. x)^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{dx}{x \log x}(\log. \log x)^n$	$\frac{(\log. \log x)^{n+1}}{n+1} + C$
ec.	ec.
$dx \cos x$	$sen. x + C$
$dx\, sen\, x$	$- \cos. x + C$
$dx \cos x . (sen\, x)^m$	$\frac{(sen\, x)^{m+1}}{m+1} + C$
$dx\, sen\, x (\cos x)^m$	$- \frac{(\cos x)^{m+1}}{m+1} + C$
$\frac{dx}{\cos^2 x}$	$tang\, x + C$
$\frac{dx}{sen^2 x}$	$- cotang\, x + C$
$\frac{dx\, sen\, x}{\cos^2 x}$	$\sec. x + C$
$\frac{dx \cos x}{sen^2 x}$	$- cosec. x + C$

§. 100. Premesse queste integrazioni delle formule che più frequentemente s' incontrano nelle soluzioni dei Problemi, occupiamoci della formula generale Xdx, essendo X una funzione di x.

Questa funzione può essere algebraica o trascendente, razionale o irrazionale; e qui si vuole avvertire, che se gl' irrazionali ed i trascendenti non inviluppano la variabile x, la funzione X è sempre razionale ed algebraica: incominciamo a considerarla algebraica e razionale. E' dimostrato nell' introduzione al Calcolo Sublime che in questa ipotesi la funzione X si decompone in una serie finita di termini di questa forma ax^n, $\frac{a}{(p+qx)^n}$, $\frac{a+bx}{(p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2)^n}$ essendo a, b, p, q, β quantità costanti, ed n numero intero; dunque l' integrazione della formula Xdx dipende da quella delle formule

1°. . . . $ax^n dx$, 2°. . . . $\frac{adx}{(p+qx)^n}$, 3°. . . . $\frac{(a+bx)dx}{(p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2)^n}$.

L' integrale della prima completo è $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C$, (a):

(a) Questa formula è difettosa quando $n=-1$, poichè allora ci dà $\int\frac{adx}{x}=\frac{a}{0}+c$; ma in questo caso si sa d' altr' onde che $\int\frac{adx}{x}=a\log x+c$ Per spiegare questo paradosso primamente osservo che la formula doveva essere appunto difettosa in quel caso, poichè i differenziali delle potenze intiere . . . . x^{-1}, x^0, x^1, x^2, ... non contengono mai la potenza -1, ed in conseguenza non esiste nè può esistere nella serie delle potenze intiere della x, una potenza che sia l' integrale di $x^{-1}dx$; nè una tal potenza potrebbe esser fratta, poichè le potenze fratte differenziate non possono mai dare potenze intiere.

In secondo luogo può darsi alla nostra formula un tale aspetto che soddisfaccia anche al caso di $n=-1$, o almeno da essa possa dedursi l' integrale per quel caso medesimo: poniamo $c=-\frac{ab^{n+1}}{n+1}$ essendo b una costante arbitraria, e ciò per la riflessione che si fa più sotto in questo stesso §., ed avremo $\int ax^n dx=\frac{ax^{n+1}-ab^{n+1}}{n+1}$. Facciamo $n=-1$, e sa-

quello della seconda, quando n è maggiore di 1, è $\int\frac{adx}{(p+qx)^n}=c-\frac{a}{(n-1)q(p+qx)^{n-1}}$, e quando $n=1$, $\int\frac{adx}{p+qx}=\frac{a}{q}\log(p+qx)+c$, indicando per c una costante arbitraria. Non è così facile a ritrovarsi l' integrale della terza, ma vi si perverrà per mezzo della permutazione delle variabili.

Sia primieramente $n=1$, vogliasi cioè integrare la formula

$\int\frac{(a+bx)dx}{p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2}$: facciamo $p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2=t$, prendiamo il logaritmo di quest' equazione, e differenziando, avremo

$\frac{(2pq\cos\beta+2q^2x)dx}{p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2}=\frac{dt}{t}$, e quindi

$\frac{xdx}{p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2}=\frac{1}{2q^2}\cdot\frac{dt}{t}-\frac{p}{q}\cdot\frac{dx\cos\beta}{p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2}$: sarà dunque

$\int\frac{(a+bx)dx}{p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2}=\frac{b}{2q^2}\int\frac{dt}{t}+\frac{aq-b\cos\beta.p}{q}\int\frac{dx\cos\beta}{p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2}=$

$\frac{b}{2q^2}\log.t+\frac{aq-bp\cos\beta}{q}\int\frac{dx\cos\beta}{p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2}$: tutta la difficoltà pertanto sarà ridotta all' integrazione della formula

$\int\frac{dx}{p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2}$. Per ottener quest' integrazione, io osservo che $p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2=p^2.(sen\beta)^2+(p\cos\beta+qx)^2$; onde fatto $p\cos\beta+qx=pu\,sen\beta$, si avrà $dx=\frac{p\,sen\beta}{q}du$, e la formula

---

rà $\int ax^{-1}dx=\frac{a-a}{1-1}=\frac{0}{0}$. Il valore dunque diviene indeterminato per questo caso, e determinandolo per mezzo del metodo spiegato al §. 42, si trova $\int ax^{-1}dx=alx-alb$, ovvero $=alx+c$, come sopra.

$\int\frac{dx}{p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2}$ diverrà $\frac{1}{pq\,sen\,\beta}\int\frac{du}{1+u^2}$, il cui integrale dato dalla Tavola del §. antecedente, è

$\frac{1}{pq\,sen\,\beta}(Arc.\,tang.\,u+c)$: avremo dunque

$$\int\frac{(a+bx)dx}{p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2}=\frac{b}{2q^2}\log t+\frac{aq-bp\cos\beta}{pq^2\,sen\,\beta}(Arc.\,tang.\,u+c),$$

e sostituendo per u e per t i respettivi valori, sarà

$$\frac{(a+bx)dx}{p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2}=\frac{b}{2q^2}\log.(p^2+2pqx\cos\beta.+q^2x^2)+$$

$$\frac{aq-bp\cos\beta}{pq^2\,sen\,\beta}\left(Arc.\,tang.\frac{p\cos\beta+qx}{p\,sen\,\beta}+c\right)$$ l' integrale cercato. A questo integrale possiamo anche dare una forma diversa: infatti essendo c una costante arbitraria, potremo invece di essa porre qualunque funzione di quantità determinate, se fra di esse se ne trovi una rilasciata al nostro arbitrio, poichè comprendesi facilmente che in virtù di questa arbitraria la nuova funzione sostituita a c, potrà prendere tutti i valori possibili che a noi piacerà di dare alla medesima c, e che è in conseguenza conservata la generalità dell' integrale. Dopo questa osservazione poniamo invece di c, la quantità $\frac{pq^2\,sen\,\beta}{aq-bp\cos\beta}C$, essendo C una nuova costante arbitraria, e l' ultimo termine dell' integrale diventerà

$$\frac{aq-bp\cos\beta}{pq^2\,sen\,\beta}\,Arc.\,tang\frac{p\cos\beta+qx}{p\,sen\,\beta}+C.$$

Questo integrale non soddisfà per il caso in cui $\beta=0$, poichè il di lui secondo membro diviene infinito: allora però la formula da integrarsi è $\int\frac{(a+bx)dx}{(p+qx)^2}$; questa si risolve nelle due $\int\frac{bdx}{q(p+qx)}+\int\frac{(aq-bp)dx}{q(p+qx)^2}$, gl' integrali delle quali, secondo ciò che abbiam detto al principio di questo §., sono $\frac{b}{q^2}\log(p+qx)-\frac{aq-bp}{q^2(p+qx)}+C$.

Se noi potremo ridurre l' integrale della formula $\frac{(a+bx)dx}{(p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2)^n}$ a quello di $\frac{dx}{(p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2)^{n-1}}$, potrà considerarsi come ottenuto l' integrale $\int\frac{(a+bx)dx}{(p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2)^n}$, poichè qualunque sia n discendendo continuamente, arriveremo alla formula $\int\frac{dx}{p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2}$, la quale abbiam già integrata.

Per ottenere questa riduzione poniamo

$$\int\frac{(a+bx)dx}{(p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2)^n}=\frac{A+Bx}{(p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2)^{n-1}}+\ldots\ldots$$

$$\int\frac{Cdx}{(p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2)^{n-1}}$$

essendo A, B, C quantità costanti da determinarsi. Differenziamo ed avremo

$$\frac{a+bx}{(p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2)^n}=-\frac{(n-1)(A+Bx)(2pq\cos\beta+2q^2x)}{(p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2)^n}+\ldots$$

$$\frac{B+C}{(p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2)^{n-1}}:$$

ora riducendo allo stesso denominatore, ed eguagliando i numeratori, si avrà

$$a+bx=(B+C)p^2-2A(n-1)pq\cos\beta+[2B+2C-2B(n-1)]pqx\cos\beta-2A(n-1)q^2x+[B+C-2B(n-1)]q^2x^2$$

e quindi eguagliando a zero i coefficienti delle diverse potenze di x, otterremo

$$(B+C)p^2-2A(n-1)pq\cos\beta=a$$
$$[2(B+C)-2B(n-1)]pq\cos\beta-2A(n-1)q^2=b$$

$B + C - 2B(n-1) = 0$, dalle quali si ricava

$$A = \frac{aq\cos\beta - bp}{2(n-1)pq^2(\mathrm{sen}\,\beta)^2},$$

$$B = \frac{aq - bp\cos\beta}{2(n-1)p^2q(\mathrm{sen}\,\beta)^2},$$

$$C = \frac{(2n-3)(aq - bp\cos\beta)}{2(n-1)p^2q^2(\mathrm{sen}\,\beta)^2},$$

ed in conseguenza

$$\int\frac{(a+bx)\,dx}{(p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2)^n} = \frac{apq\cos\beta - bp^2 + (aq^2 - bpq\cos\beta)x}{2(n-1)p^2q^2(\mathrm{sen}\,\beta)^2(p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2)^{n-1}} +$$

$$\int\frac{(2n-3)(aq-bp\cos\beta)\,dx}{2(n-1)p^2q^2(\mathrm{sen}\,\beta)^2(p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2)^{n-1}}.$$

Rendiamo più chiare queste Teorìe d'integrazione con qualche esempio.

Quale è l'integrale della funzione

$\int\frac{6x^6-3x^5+3x^3+4x-2}{2x^4-x^3}\,dx$? Siccome il coefficiente di dx si decompone in queste tre parti $3x^2 + \frac{2}{x^3} - \frac{3}{1-2x}$, perciò avremo

$\int\frac{6x^6-3x^5+3x^3+4x-2}{2x^4-x^3}\,dx = \int 3x^2dx + \int 2x^{-3}dx - \int\frac{3dx}{1-2x}$, e quindi

$$\int\frac{6x^6-3x^5+3x^3+4x-2}{2x^4-x^3}\,dx = x^3 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2}l(1-2x) + c.$$

Egualmente per avere il valore di

$\int\frac{3x^4+10x^3+9x^2-3x+4}{(1-x-x^2-2x^3)^2}\,dx$, decomponendo il coefficiente di dx, troveremo

$\int\frac{3x^4+10x^3+9x^2-3x+4}{(1-x-x^2-2x^3)^2}\,dx = \int\frac{3dx}{(1-2x)^2} + \int\frac{(1+x)\,dx}{(1+x+x^2)^2}$: ora paragonando $\int\frac{3dx}{(1-2x)^2}$ con la formula $\int\frac{adx}{(p+qx)^n}$, si avrà

$a = 3$, $p = 1$, $q = -2$, $n = 2$, e quindi

$\int\frac{3dx}{(1-2x)^2} = c + \frac{3}{2(1-2x)}$. Egualmente paragonando

$\int\frac{(1+x)\,dx}{(1+x+x^2)^2}$ con $\int\frac{(a+bx)\,dx}{(p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2)^n}$, si avrà

$a = 1$, $b = 1$, $p = 1$, $q = 1$, $\cos\beta = \frac{1}{2}$, ed in conseguenza

$\int\frac{(1+x)\,dx}{(1+x+x^2)^2} = \frac{1+x}{3(1+x+x^2)} + \int\frac{dx}{3(1+x+x^2)}$; tutto adunque si riduce ad integrare $\frac{dx}{3(1+x+x^2)}$. Il paragone di quest' espressione con la formula $\frac{(a+bx)\,dx}{p^2+2pqx\cos\beta+q^2x^2}$, ci dà

$a = 1$, $b = 0$, $p = q = 1$, $\cos\beta = \frac{1}{2}$, e perciò

$\int\frac{dx}{3(1+x+x^2)} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,Arc.\ tang.\,\frac{1+2x}{\sqrt{3}} + c$; sarà per tanto

$$\int\frac{3x^4+10x^3+9x^2-3x+4}{(1-x-x^2-2x^3)^2}\,dx = \int\frac{3x^4+10x^3+9x^2-3x+4}{(1-2x)^2(1+x+x^2)^2}\,dx = \ldots$$

$$\int\frac{3dx}{(1-2x)^2} + \int\frac{(1+x)\,dx}{(1+x+x^2)^2} = \frac{3}{2(1-2x)} + \frac{1+x}{3(1+x+x^2)} + \ldots\ldots$$

$$\int\frac{dx}{3(1+x+x^2)} = \frac{3}{2(1-2x)} + \frac{1+x}{3(1+x+x^2)} + \frac{2}{\sqrt{3}}\,Arc.\ tang.\,\frac{1+2x}{\sqrt{3}} +$$

C, essendo C la costante arbitraria che rende l' integrale completo.

Vogliasi ora determinare la capacità di una Botte FOPG.

Fig. 25. Supponiamo che le doghe FAG formino nel senso della loro lunghezza una Curva Ellittica, il cui asse maggiore sia posto sull' asse DI della Botte, e che le sezioni ALBM, FEO, GHP perpendicolari all' asse, siano Ellissi simili, di modo che fatto $CA = B$, $CL = a$, $GI = FD = b$, abbiasi $HI = DE = \frac{ab}{B}$. Chiamiamo K la lunghezza DI della Botte, e π la circonferenza di un circolo, il cui diametro $D = 1$; sia $CR = x$, $RS = y$. Per ciò che abbiamo dimostrato sopra (§. 91) la capacità della Botte è eguale all' integrale della sezione SN moltiplicata per dx: cerchiamo dunque la superficie di questa se-

zione. Per questo supponiamo compita l'ellisse TFAGVPBOT, Fig. 25.
la cui metà dell' asse minore CA, abbiam posta $= B$.

Se noi indichiamo per A la metà CV dell' asse maggiore, e facciamo $IV = DT = z$, si avrà $B^2 : b^2 :: A^2 : (2A - z)z$; ma $2A = 2z + K$, quindi $z = \frac{2A - K}{2}$, $2A - z = \frac{2A + K}{2}$, e perciò $B^2 : b^2 :: A^2 : \frac{4A^2 - K^2}{4}$, d' onde ricaviamo

$A^2 = \frac{B^2K^2}{4B^2 - 4b^2}$; sarà dunque

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x^2) = \frac{4B^2 - 4b^2}{K^2}\left\{\frac{B^2K^2}{4B^2 - 4b^2} - x^2\right\}.$$

La sezione SN ha per metà dell' asse minore l' ordinata y, ed essendo essa simile alla sezione AB, la metà dell' altro di lei asse sarà $\frac{ay}{B}$. La di lei superficie sarà $\frac{a}{B}\pi y^2$, come mostreremo al §. 107; avremo pertanto per esprimere la ricercata capacità

$$\int \frac{a}{B}\pi\frac{(4B^2 - 4b^2)}{K^2}\left\{\frac{B^2K^2}{4B^2 - 4b^2} - x^2\right\}dx = \frac{a\pi}{B}.B^2x - \frac{a\pi}{B}.\frac{(4B^2 - 4b^2)}{K^2}\times \frac{x^3}{3} + C.$$

Ora supponiamo che la costante C si annulli quando $x = -\frac{K}{2}$, avremo $C = \frac{a\pi K}{3B}\left\{B^2 + \frac{b^2}{2}\right\}$; e se l' integrale deve terminare quando $x = \frac{K}{2}$, s' avrà espressa la capacità della Botte da questa semplicissima formula $\frac{a\pi K}{3B}\left\{2B^2 + b^2\right\}$.

Se le doghe della Botte FAG formando una curva Ellittica, le sezioni perpendicolari all' asse sono circolari, allora sarà $a = B$, e $\frac{\pi K}{3}\left\{2B^2 + b^2\right\}$ ne esprimerà la capacità.

Quando i due semidiametri GI, FD della testa e del fondo della Botte non sono eguali, facendo $GI = b$, $FD = b'$, allora sarà

$C = \frac{a\pi K}{3B}\left\{B^2 + \frac{b'^2}{2}\right\}$, e la capacità si esprimerà per

Fig. 25. $\frac{a}{B}\cdot\frac{\pi K}{6}\left\{4B^2 + b^2 + b'^2\right\}$, ovvero

$\frac{\pi}{4}.\frac{K}{6}\left\{4AB.ML + GP.H\omega + FO.\theta E\right\}$, da cui ricaveremo questa regola pratica „ Moltiplichiamo tra loro i respettivi diametri di ciascuna delle tre sezioni di una Botte, ed avremo tre prodotti: al quadruplo del prodotto che ci danno i diametri della maggior sezione aggiungansi gli altri due prodotti: se ne moltiplichi la somma per il sesto della lunghezza della Botte, e questo prodotto si moltiplichi anche per 0,785398, che è la quarta parte della circonferenza di un circolo che ha per diametro 1, ed avremo espressa da quest' ultimo prodotto la capacità della Botte. Una tal regola per la cubatura delle Botti è dell' Astronomo Oriani.

§. 101. Parliamo dell' integrazione delle differenziali irrazionali, e per camminare con ordine, incominceremo dalle più semplici per andare in seguito alle più complicate.

I. Sia Xdx una differenziale della quale si voglia l' integrale, mentre X è una funzione razionale di x e di $s = \sqrt{(a + bx)}$.

Vediamo se per mezzo di un' adattata sostituzione, potremo barattare questa differenziale in un' altra che sia razionale: facciasi $a + bx = z^2$, ed avremo $\sqrt{(a + bx)} = z$, $x = \frac{zz - a}{b}$, $dx = \frac{2}{b}zdz$, e sostituiti questi valori, la formula differenziale Xdx si ridurrà razionale, contenendo una nuova variabile z.

Per esempio sia $dy = \frac{xdx}{\sqrt{(a + bx)}}$, e fatta la sostuzione $\sqrt{(a + bx)} = z$, sarà $dy = \frac{2zzdz - 2adz}{bb}$, ed integrando

$$y = \frac{2}{3bb}z^3 - \frac{2a}{bb}z + C,$$ e riposto il valor di z,

$$y = \frac{2}{3bb}(a + bx)^{\frac{3}{2}} - \frac{2a}{bb}\sqrt{(a + bx)} + C = \frac{2\sqrt{(a + bx)}}{bb}\left(\frac{1}{3}bx - \frac{2}{3}a\right) + C.$$

II. Sia X funzione razionale delle due quantità x, s, essendo

$s = \sqrt[n]{(a + bx)}$, e dimandisi il valore di $\int X dx$. Facciamo $\sqrt[n]{(a + bx)} = z$, e sarà $s = z$, $x = \frac{z^n - a}{b}$, $dx = \frac{nz^{n-1}dz}{b}$; questi valori sostituiti nella formula $X dx$, la renderanno razionale, se però n sarà numero intiero.

Per esempio, sia $dy = \frac{dx}{\sqrt[n]{(a+bx)^{\lambda}}} = \frac{dx}{s^{\lambda}}$, e posto $\sqrt[n]{(a + bx)} = z$, sostituito $\frac{nz^{n-1}dz}{b}$ per dx, si ha

$$dy = \frac{nz^{n-1}dz}{bz^{\lambda}} = \frac{n}{b} z^{n-\lambda-1} dz, \text{ e quindi}$$

$$y = \frac{n}{b(n-\lambda)} \cdot \frac{a + bx}{\sqrt[n]{(a+bx)^{\lambda}}} + C.$$

III. Essendo X una funzione razionale delle due quantità x, $s = \sqrt[n]{(a + b\sqrt[m]{(f + gx)})}$, si vuole integrare la formula $X dx$, la quale comprende una doppia irrazionalità.

Facciamo per questo $\sqrt[n]{\{a + b\sqrt[m]{(f + gx)}\}} = z$, e sarà

$a + b\sqrt[m]{(f + gx)} = z^n$, $b\sqrt[m]{(f + gx)} = z^n - a$,

$b^m(f + gx) = (z^n - a)^m$, $x = \frac{(z^n - a)^m}{b^m g} - \frac{f}{g}$,

$dx = \frac{mnz^{n-1}dz(z^n - a)^{m-1}}{b^m g}$, valori che restituiti nella formula $X dx$, la renderanno razionale.

IV. Sia X funzione razionale delle due quantità x ed $s = \sqrt[n]{\frac{a + bx}{f + gx}}$, e cerchiamo il valore di $\int X dx$.

Posto $s = \sqrt[n]{\frac{a + bx}{f + gx}} = z$, sarà $\frac{a + bx}{f + gx} = z^n$, e di quì $x = \frac{fz^n - a}{b - gz^n}$, $dx = \frac{n(bf - ag)z^{n-1}dz}{(b - gz)^{2n}}$: per la sostituzione di questi valori la nostra formula si ridurrà alla razionalità.

Per esempio, sia $dy = \frac{dx}{s} = \frac{dx\sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(1+x)}}$, ed avremo

$n = 1$, $f = 1$, $g = -1$, $a = 1$, $b = 1$, e però $z = \frac{\sqrt{(1+x)}}{\sqrt{(1-x)}}$, $dx = \frac{4zdz}{(1+zz)^2}$, i quali valori sostituiti, ci danno $dy = \frac{4dz}{(1+zz)^2}$.

Per integrare quest' ultima formula, facciamo

$$\int \frac{4dz}{(1+zz)^2} = \frac{Az}{1+zz} + B\int \frac{dz}{1+zz} = y,$$

e differenziando avremo

$$\frac{4}{(1+zz)^2} = \frac{A - Azz}{(1+zz)^2} + \frac{B}{1+zz} = \frac{A + B + (B - A)zz}{(1+zz)^2}:$$

bisogna dunque che sia $A + B = 4$, $B - A = 0$, e quindi $A = B = 2$; e siccome

$\int \frac{dz}{1+z^2} = Arc.\,tang\,z$, così

$$y = \frac{2z}{1+z^2} + 2\,Arc.\,tang\,z + C;$$

ponendo ora $\frac{2}{1-x}$, invece di $1 + z^2$, si avrà

$$y = \sqrt{(1 - xx)} + 2\,Arc.\,tang\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

Si sa dalla Trigonometria, che quando la tangente di un angolo è $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, il suo seno è $= \sqrt{\frac{1+x}{2}}$, il coseno $= \sqrt{\frac{1-x}{2}}$, il seno dell' angolo doppio $= \sqrt{(1 - xx)}$, ed il coseno $= -x$: avremo dunque

$Arc.\,cos - x = \frac{\pi}{2} + Arc.\,sen\,x$, e perciò l' integrale trovato diverrà

$$y = \sqrt{(1 - xx)} + \frac{\pi}{2} + Arc.\,sen\,x + C:$$

supponiamo che l' integrale debba prendersi in modo che svanisca quando $x = 0$, e sarà $C = -1 - \frac{\pi}{2}$, e perciò

$y = \sqrt{(1 - xx)} - 1 + Arc.\,sen\,x$. Se ora si fa $x = 1$, si ha $y = \frac{\pi}{2} - 1 = 0,5707963$.

V. Posto che X sia una funzione razionale di x^n e di $s = \sqrt[m]{(a + bx^n)}$, integrare la formula $\frac{X dx}{x}$.

Facciamo al solito $\sqrt[m]{(a + bx^n)} = z$, e sarà $a + bx^n = z^m$, $x^n = \frac{z^m - a}{b}$; e siccome in X s' incontra soltanto la potenza x^n, così diverrà esso razionale sostituendovi per x^n e per $\sqrt[m]{(a + bx^n)}$ i respettivi valori in z.

Se poi si prendono i logaritmi, avremo

$nlx = l(z^m - a) - lb$, e differenziando

$\frac{dx}{x} = \frac{mz^{m-1}dz}{n(z^m - a)}$, e così tutta la formula si ridurrà razionale, ed in conseguenza integrabile.

Per esempio, sia $dy = \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt[m]{(a + bx^n)}} = \frac{dx}{x} \cdot \frac{x^n}{s}$,

e fatta l' opportuna sostituzione, avremo

$dy = \frac{mz^{m-2}dz}{nb}$, il cui integrale è

$y = \frac{mz^{m-1}}{nb(m-1)} = \frac{m}{nb(m-1)} \sqrt[m]{(a + bx^n)^{m-1}} + C$, ovvero

$y = \frac{m}{nb(m-1)} \cdot \frac{a + bx^n}{\sqrt[m]{(a + bx^n)}} + C$.

VI. Sia X funzione razionale delle due quantità x^n, ed $s = \sqrt[m]{\left(\frac{a + bx^n}{f + gx^n}\right)}$, e si voglia liberare dall' irrazionalità la formula $\frac{X dx}{x}$.

Poniamo $s = \sqrt[m]{\frac{a + bx^n}{f + gx^n}} = z$; sarà

$x^n = \frac{fz^m - a}{b - gz^m}$, e presi i logaritmi

$nlx = l(fz^m - a) - l(b - gz^m)$; quindi differenziando

$n\frac{dx}{x} = \frac{m(bf - ag)z^{m-1}dz}{(fz^m - a)(b - gz^m)}$;

se ora si sostituiscono questi valori nella formula proposta si libererà dall' irrazionalità.

VII. Essendo X una qualunque funzione razionale delle due variabili x, $s = \sqrt{(a + bx \pm x^2)}$, ridurre razionale e perciò integrabile la formula $\int X dx$.

Supponiamo per questo $\sqrt{(a + bx \pm x^2)} = \sqrt{a} + xz$, ed avremo

$a + bx \pm x^2 = a + 2\sqrt{a} \cdot xz + x^2z^2$, d' onde si ricava

$x = \frac{b - 2z\sqrt{a}}{z^2 \mp 1}$, $dx = \frac{2z^2\sqrt{a} \pm 2\sqrt{a} - 2bz}{(z^2 \mp 1)^2} dz$, $\sqrt{(a + bx \pm x^2)} = \frac{-z^2\sqrt{a} \mp \sqrt{a} + bz}{z^2 \mp 1}$; e fatte le opportune sostituzioni, sarà tolta l' irrazionalità dalla formula $\int X dx$.

Per esempio, sia $dy = \frac{dx}{\sqrt{(a + bx \pm x^2)}}$, ed avremo

$dy = -\frac{2dz}{z^2 \mp 1}$, $y = -\int \frac{2dz}{z^2 \mp 1}$.

L' integrale di $\frac{2dz}{z^2 - 1}$ è $log\frac{z - 1}{z + 1} + C$; dunque

$\int \frac{dx}{\sqrt{(a + bx + x^2)}} = -L\frac{z - 1}{z + 1} + C$.

L' integrale di $\frac{2dz}{z^2 + 1}$ è $2 Arc.\,tang\,z + C$; dunque

$\int \frac{dx}{\sqrt{(a + bx - x^2)}} = 2 Arc.\,tang\,z + C$,

ponendo nel primo caso $z = \frac{\sqrt{(a + bx + x^2)} - \sqrt{a}}{x}$,

e nel secondo $z = \frac{\sqrt{(a + bx - x^2)} - \sqrt{a}}{x}$.

VIII. Indicando per V una funzione razionale delle due quantità v^n ed $s = \sqrt{(a + bv^n \pm v^{2n})}$ si potrà egualmente togliere l' irrazionalità dalla formula $Vv^{n-1}dv$. Si faccia per questo $v^n = x$, e sarà

$s = \sqrt{(a + bx \pm x^2)}$, $v^{n-1}\, dv = \frac{dx}{n}$: dunque V sarà una funzione razionale delle due x ed s, e la nostra formula diverrà $\frac{Vdx}{n}$, che rientra nella VII.

§. 102. Per quanto le formule irrazionali, quì sopra integrate, siano dotate di una tal quale generalità, pure accade spesso d' incontrare nella soluzione dei Problemi formule irrazionali, che non si riferiscono ad alcuna di quelle. Appartiene in questi casi alla sagacità del Geometra la scelta di qualche adattata sostituzione, onde toglierne i radicali: non si possono dare sopra questo soggetto delle regole generali, e noi ci tratterremo perciò nell' integrazione di alcune formule particolari.

I. Sia proposta la formula $dP = \frac{dx(1 + xx)}{(1 - xx)\sqrt{(1 + x^4)}}$, e se ne cerchi l' integrale P.

Facciamo $\frac{x\sqrt{2}}{1 - xx} = p$, e sarà $1 + p^2 = \frac{1 + x^4}{(1 - xx)^2}$, $\sqrt{(1 + p^2)} = \frac{\sqrt{(1 + x^4)}}{1 - x^2}$, $dp = \frac{(1 + xx)\sqrt{2}.\, dx}{(1 - xx)^2}$, e quindi $\frac{dp}{\sqrt{(1 + pp)}} = \frac{(1 + xx)\sqrt{2}.\, dx}{(1 - xx)\sqrt{(1 + x^4)}}$; si ha dunque

$dP = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{dp}{\sqrt{(1 + pp)}}$, e perciò

$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot L\{\sqrt{(1 + pp)} + p\} + C$.

Se invece di p e di $\sqrt{(1 + pp)}$, poniamo i respettivi valori, s' avrà

$P = \int \frac{dx(1 + xx)}{(1 - xx)\sqrt{(1 + x^4)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} L \frac{\sqrt{(1 + x^4)} + \sqrt{2}}{1 + xx} + C$.

II. Sia da rendersi razionale la formula

$dP = \frac{dx\sqrt{(1 + x^4)}}{1 - x^4}$.

Poniamo $\sqrt{(1 + x^4)} = px$, ed avremo intanto

$dP = \frac{xpdx}{1 - x^4}$.

Essendo $1 + x^4 = p^2x^2$, s' avrà estraendo la radice $x^2 = \frac{1}{2}p^2 + \sqrt{(\frac{1}{4}p^4 - 1)}$. Facciamo $\frac{1}{2}p^2 = q$, ed avremo $x^2 = q + \sqrt{(q^2 - 1)}$, e quindi $2Lx = L\{q + \sqrt{(q^2 - 1)}\}$, $\frac{2dx}{x} = \frac{dq}{\sqrt{(q^2 - 1)}}$; e riponendo il valore di q, si ha $\frac{2dx}{x} = \frac{2pdp}{\sqrt{(p^4 - 4)}}$, $dx = \frac{xpdp}{\sqrt{(p^4 - 4)}}$, e fatta la sostituzione

$dP = \frac{p^2x^2dp}{(1 - x^4)\sqrt{(p^4 - 4)}}$.

Ora $x^2 = \frac{p^2 + \sqrt{(p^4 - 4)}}{2}$,

$x^4 = \frac{p^4 - 2 + p^2\sqrt{(p^4 - 4)}}{2}$,

$1 - x^4 = \frac{4 - p^4 - p^2\sqrt{(p^4 - 4)}}{2} = - \frac{\sqrt{\{p^4 - 4\}}\,\{p^2 + \sqrt{(p^4 - 4)}\}}{2}$;

sarà dunque $\frac{x^2}{1 - x^4} = - \frac{1}{\sqrt{(p^4 - 4)}}$, il qual valore sostituito nell' espressione di dP, ci dà

$dP = - \frac{ppdp}{p^4 - 4}$, essendo $p = \frac{\sqrt{(1 + x^4)}}{x}$.

III. Questa medesima sostituzione può servire a render razionale la formula

$S = \int \frac{dx\sqrt{(a + bx^2 + cx^4)}}{a - cx^4}$.

Infatti ponendo $\sqrt{(a + bx^2 + cx^4)} = px$, si ha

$S = \frac{pxdx}{a - cx^4}$: essendo poi $p = \frac{\sqrt{(a + bx^2 + cx^4)}}{x}$, avremo

$dp = - \frac{adx + cx^4dx}{xx\sqrt{(a + bxx + cx^4)}} = - \frac{adx + cx^4dx}{px^3}$, e quindi

$dx = - \frac{px^3dp}{a - cx^4}$; sostituendo questo valore nella formula proposta, si avrà

$dS = -\frac{ppx^4dp}{(a - cx^4)^2}$: ma $(a + cx^4)^2 = (pp - b)^2x^4$, e togliendo da ambe le parti $4acx^4$, si ha

$$(a - cx^4)^2 = \left\{(pp - b)^2 - 4ac\right\}x^4,$$

$\frac{x^4}{(a - cx^4)^2} = \frac{1}{(pp - b)^2 - 4ac}$, ed in conseguenza

$dS = \frac{ppdp}{(pp - b)^2 - 4ac}$, formula che non contiene più irrazionali.

IV. Proponiamoci di rendere razionale la formula

$$V = \int \frac{dx}{(a + bx^n)\sqrt[2n]{(a + 2bx^n)}}.$$

Facciamo per questo $\frac{x}{\sqrt[2n]{(a + 2bx^n)}} = z$, ed avremo primieramente

$dV = \frac{dx}{x} \cdot \frac{z}{a + bx^n}$. Prendendo dunque i logaritmi, sarà

$lz = lx - \frac{1}{2n} l(a + 2bx^n)$, e differenziando

$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} - \frac{bx^{n-1}dx}{a + 2bx^n} = \frac{dx(a + bx^n)}{x(a + 2bx^n)}$, e quindi

$\frac{dx}{x} = \frac{dz(a + 2bx^n)}{z(a + bx^n)}$; sostituendo questo valore nella formula, si ha

$$dV = \frac{dz(a + 2bx^n)}{(a + bx^n)^2}.$$

Essendo poi $z^{2n} = \frac{x^{2n}}{a + 2bx^n}$, sarà

$a + 2bx^n = \frac{x^{2n}}{z^{2n}}$, e perciò

$$dV = \frac{x^{2n}dz}{z^{2n}(a + bx^n)^2}.$$

Ma $a^2 + 2abx^n = \frac{ax^{2n}}{z^{2n}}$, se s' aggiunge da ambe le parti la quantità bbx^{2n}, verrà

$(a + bx^n)^2 = \frac{ax^{2n}}{z^{2n}} + bbx^{2n} = \frac{x^{2n}(a + bbz^{2n})}{z^{2n}}$, il qual valore sostituito nella nostra formula, la cangerà in

$$dV = \frac{dz}{a + bbz^{2n}},$$

che è razionale.

Con questo stesso artifizio si potrebbe ancora rendere razionale la formula

$\frac{dx}{(a + bx^n)\sqrt[3n]{(a^2 + 3abx^n + 3b^2x^{2n})}}$: non ce ne occuperemo, giacchè quanto abbiam detto, speriamo che basti per i nostri Lettori; del resto chi vorrà in questa Materia maggiore estensione, può vedere il Tomo IV. del Calcolo Integrale del Sig. Eulero.

§. 103. Ma estendendo queste ricerche, vediamo in quali casi possa rendersi razionale la formula $x^{m-1}dx(a + bx^n)^{\frac{p}{q}}$.

Poniamo $a + bx^n = u^q$, e sarà $(a + bx^n)^{\frac{p}{q}} = u^p$, $x^n = \frac{u^q - a}{b}$,

$x^m = \left(\frac{u^q - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$, e quindi

$x^{m-1}dx = \frac{q}{nb} u^{q-1} du \cdot \left(\frac{u^q - a}{b}\right)^{\frac{m-n}{n}}$: avremo dunque

$\int x^{m-1}dx(a + bx)^{\frac{p}{q}} = \int \frac{q}{nb} u^{p+q-1} du \cdot \left(\frac{u^q - a}{b}\right)^{\frac{m-n}{n}}$, ed il secondo membro di quest' equazione sarà razionale tutte le volte che $\frac{m}{n}$ sarà un numero intiero.

Facciamo nella stessa formula $a + bx^n = x^n z^q$, ed avremo

$x^n = \frac{a}{z^q - b}$, $(a + bx^n)^{\frac{p}{q}} = \frac{a^{\frac{p}{q}} z^p}{(z^q - b)^{\frac{p}{q}}}$, $x^m = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{(z^q - b)^{\frac{m}{n}}}$; quindi

$x^{m-1} dx = \frac{-qa^{\frac{m}{n}} z^{q-1} dz}{n(z^q - b)^{\frac{m}{n} - 1}}$, e la nostra formula diventerà

$\frac{-qa^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} z^{p+q-1} dz}{n(z^q - b)^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q} + 1}}$, la quale sarà razionale tutte le volte che $\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$ sarà un numero intiero.

Integriamo per esempio $x^3 dx (a + bx^2)^{\frac{1}{3}}$: avremo in questo caso
$m = 4$, $n = 2$, $p = 1$, $q = 3$, $\frac{m}{n} = 2$ numero intiero; dunque la prima trasformazione ci darà

$$\int x^3 dx (a + bx^2)^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2b} \int u^3 \left(\frac{u^3 - a}{b}\right) du = \frac{3u^7}{14b^2} - \frac{3au^4}{8b^2} + C =$$

$$\frac{3}{14b^2} (a + bx^2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3a}{8b^2} (a + bx^2)^{\frac{4}{3}} + C.$$

Per un altro esempio, sia da integrarsi la differenziale $x^3 dx (a + bx^3)^{\frac{2}{3}}$, ed avremo
$m = 4$, $n = 3$, $p = 2$, $q = 3$, $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$ numero intiero. La seconda trasformazione ci darà in questo caso

$\int x^3 dx (a + bx^3)^{\frac{2}{3}} = \int \frac{-3a^2 z^4 dz}{3(z^3 - b)^3}$, e questa differenziale trasformata essendo razionale, s' integra per ciò che è detto al §. antecedente.

Per rendere razionale la formula differenziale più complicata

$x^{m-1} dx \left(\frac{a + bx^n}{a' + b'x^n}\right)^{\frac{p}{q}}$; facciamo $\frac{a + bx^n}{a' + b'x^n} = u^q$, ed avremo

$\left(\frac{a + bx^n}{a' + b'x^n}\right)^{\frac{p}{q}} = u^p$, $x^n = \frac{a'u^q - a}{b - b'u^q}$, $x^m = \left(\frac{a'u^q - a}{b - b'u^q}\right)^{\frac{m}{n}}$, ed

$$x^{m-1} dx = \frac{q}{n} \left(\frac{a'u^q - a}{b - b'u^q}\right)^{\frac{m}{n} - 1} \cdot \left(\frac{a'u^{q-1} du}{b - b'u^q} + \frac{b'(a'u^q - a) u^{q-1} du}{(b - b'u^q)^2}\right).$$

La nostra formula diverrà dunque

$\frac{q}{n} \cdot \frac{u^{p+q-1} du}{b - b'u^q} \left(\frac{a'u^q - a}{b - b'u^q}\right)^{\frac{m}{n} - 1} \cdot \left(a' + \frac{b'(a'u^q - a)}{b - b'u^q}\right)$, e sarà razionale se $\frac{m}{n}$ è un numero intiero: quindi se $n = 1$, la formula

$x^{m-1} dx \left(\frac{a + bx}{a' + b'x}\right)^{\frac{p}{q}}$, potrà sempre ridursi alla razionalità, ciò che abbiamo anche dedotto da un altro principio.

§. 104. Noi abbiamo veduto che la formula $x^{m-1} dx (a + bx^n)^{\frac{p}{q}}$, riducesi razionale quando $\frac{m}{n}$, ovvero $\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$ sono numeri intieri; ora è facile vedere che nei medesimi casi egualmente si può rendere razionale la formula molto più generale

$x^{m + \alpha n - 1} dx (a + bx^n)^{\frac{p}{q} + \beta}$, essendo α e β numeri intieri qualunque: anzi l' integrale di questa seconda formula si potrà sempre far dipendere dall' integrale della prima, sia questa o no riduttibile alla razionalità.

Per ottener questa dipendenza differenziamo la funzione

$x^m (a + bx^n)^{\frac{p}{q} + 1}$, ed avremo

$$d(x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}) = (max^{m-1}dx + mbx^{m+n-1}dx +$$

$$\frac{n(p+q)}{q}bx^{m+n-1}dx)(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$$, d' onde ricaviamo

$$x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1} = ma\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} + \dots\dots$$

$$\frac{mq+np+nq}{q}b\int x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$$, e quindi

(A) ... $\int x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = \frac{qx^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}}{(mq+np+nq)b} - \dots$

$$\frac{mqa}{(mq+np+nq)b}\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$$; e se invece di m scriviamo $m-n$, avremo quest' altra riduzione

(B) ..... $\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}}{(m-n)a} -$

$$\frac{(mq+np)b}{(m-n)qa}\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}.$$

Dunque l' integrale di $x^{m\pm n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, o più generalmente quello di $x^{m\pm\alpha n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}$, si può far dipendere dall' integrazione di $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$.

Il differenziale di $x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}$ può mettersi anche sotto la forma

$$(ma - \frac{(mq+np+nq)a}{q})x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} + \frac{mq+np+nq}{q}\times$$

$$x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}$$, ed avremo allora

(C) ... $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1} = \frac{qx^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}}{mq+(p+q)n} + \dots$

$$\frac{n(p+q)a}{mq+n(p+q)}\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$$, e ponendo $p-q$ in luogo di p, si ha

(D) ... $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1} = -\frac{qx^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}}{npa} + \dots$

$$\frac{mq+np}{npa}\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}.$$

La formula dunque $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}\pm 1}$ può farsi dipendere da $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, e più generalmente a quest' ultima integrazione si può ridur quella della formula $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}\pm\beta}$.

L' equazione in fine

$$d(x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}) = mx^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} + \frac{np}{q}bx^{n+m-1}\times$$

$$dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}$$, ci dà

(E) ..... $\int x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1} = \frac{qx^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}}{npb} -$

$\frac{mq}{npb}\int x^{m-1}dx(a+bx^{n})^{\frac{p}{q}}$, e ponendo $m-n$, e $p+q$ in luogo di m e di p, si avrà

$$(F)\ldots\int x^{m-n-1}dx(a+bx^{n})^{\frac{p}{q}+1}=\frac{x^{m-n}(a+bx^{n})^{\frac{p}{q}+1}}{m-n}-\frac{n(p+q)b}{(m-n)q}\int x^{m-1}dx(a+bx^{n})^{\frac{p}{q}}.$$

Disponiamo in una Tabella le sei riduzioni che abbiamo ottenute, e delle quali potremo all' occorrenza servirci:

$$(A)\ldots\int x^{m+n-1}dx(a+bx^{n})^{\frac{p}{q}}=\frac{qx^{m}(a+bx^{n})^{\frac{p}{q}+1}}{(mq+np+nq)b}-\frac{mqa}{(mq+np+nq)b}\int x^{m-1}dx(a+bx^{n})^{\frac{p}{q}};$$

$$(B)\ldots\int x^{m-n-1}dx(a+bx^{n})^{\frac{p}{q}}=\frac{x^{m-n}(a+bx^{n})^{\frac{p}{q}+1}}{(m-n)a}-\frac{(mq+np)b}{(m-n)qa}\int x^{m-1}dx(a+bx^{n})^{\frac{p}{q}};$$

$$(C)\ldots\int x^{m-1}dx(a+bx^{n})^{\frac{p}{q}+1}=\frac{qx^{m}(a+bx^{n})^{\frac{p}{q}+1}}{mq+(p+q)n}+\frac{n(p+q)a}{mq+n(p+q)}\int x^{m-1}dx(a+bx^{n})^{\frac{p}{q}};$$

$$(D)\ldots\int x^{m-1}dx(a+bx^{n})^{\frac{p}{q}-1}=-\frac{qx^{m}(a+bx^{n})^{\frac{p}{q}}}{npa}+\frac{mq+np}{npa}\int x^{m-1}dx(a+bx^{n})^{\frac{p}{q}};$$

$$(E)\ldots\int x^{m+n-1}dx(a+bx^{n})^{\frac{p}{q}-1}=\frac{qx^{m}(a+bx^{n})^{\frac{p}{q}}}{npb}-\frac{mq}{npb}\int x^{m-1}dx(a+bx^{n})^{\frac{p}{q}};$$

$$(F)\ldots\int x^{m-n-1}dx(a+bx^{n})^{\frac{p}{q}+1}=\frac{x^{m-n}(a+bx^{n})^{\frac{p}{q}+1}}{m-n}-\frac{n(p+q)b}{(m-n)q}\int x^{m-1}dx(a+bx^{n})^{\frac{p}{q}};$$

quando nelle quattro formule (A), (B), (D), (E) il coefficiente della seconda formula integrale svanisce, la prima ammette un integrale algebraico: abbiamo infatti

per (A), se $m=0$, $\int x^{n-1}dx(a+bx^{n})^{\frac{p}{q}}=\frac{q(a+bx^{n})^{\frac{p}{q}+1}}{n(p+q)b}$;

per (B), se $\frac{p}{q}=-\frac{m}{n}$, $\int x^{m-n-1}dx(a+bx^{n})^{-\frac{m}{n}}=\frac{x^{m-n}(a+bx^{n})^{-\frac{m}{n}+1}}{(m-n)a}$;

per (D), se $\frac{p}{q}=-\frac{m}{n}$, $\int x^{m-1}dx(a+bx^{n})^{-\frac{m}{n}-1}=\frac{x^{m}(a+bx^{n})^{-\frac{m}{n}}}{ma}$;

per (E), se $m=0$, $\int x^{n-1}dx(a+bx^{n})^{\frac{p}{q}-1}=\frac{q(a+bx^{n})^{\frac{p}{q}}}{npb}$.

Se il coefficiente della seconda formula integrale diviene infinito, le precedenti riduzioni son di niun vantaggio: quando però ciò succede nelle riduzioni (A), (B), (C), (F) abbiam sempre $\frac{m}{n}$, ovvero $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$, eguale ad un numero intiero, ed allora quelle formule (§. antecedente) sono riducibili alla razionalità: nelle altre due formule (D), (E) abbiamo in quel caso $p=0$, e le espressioni $\int\frac{x^{m-1}dx}{a+bx^n}$, $\int\frac{x^{m+n-1}dx}{a+bx^n}$, sono da loro stesse razionali.

§. 105. Da quanto abbiam detto di sopra, deduciamo l'integrale della formula $\frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, ove m è un numero intiero positivo. La prima riduzione ci darà

$$\int\frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{x^m\sqrt{(1-x^2)}}{m+1} + \frac{m}{m+1}\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^2)}};$$

quindi i valori dispari di m ci daranno

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{1}{2}x\sqrt{(1-x^2)} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{1}{2}x\sqrt{(1-x^2)} + \frac{1}{2}\,Arc.\,sen\,x + Cost.$$

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{3.1}{4.2}x\right)\sqrt{(1-x^2)}+\frac{3.1}{4.2}\,Arc.\,sen\,x + C$$

$$\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\left(\frac{1}{6}x^5+\frac{5.1}{6.4}x^3+\frac{5.3.1}{6.4.2}x\right)\sqrt{(1-x^2)} + \frac{5.3.1}{6.4.2}\,Arc.\,sen\,x + C;$$

ed in generale

$$\int\frac{x^{2i}dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\left(\frac{1}{2i}x^{2i-1}+\frac{1(2i-1)}{2i(2i-2)}x^{2i-3} \cdots\cdots + \frac{(2i-1)(2i-3)\ldots3.1}{2i(2i-2)\ldots4.2}\right)\sqrt{(1-x^2)} + \cdots\cdots \frac{(2i-1)(2i-3)(2i-5)\ldots3.1}{2i(2i-2)(2i-4)\ldots4.2}\,Arc.\,sen\,x + C;$$

e quei pari

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{1}{3}x^2\sqrt{(1-x^2)}+\frac{2}{3}\int\frac{xdx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}\right)\sqrt{(1-x^2)}+C'$$

$$\int\frac{x^5dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\left(\frac{1}{5}x^4+\frac{4.1}{5.3}x^2+\frac{4.2}{5.3}\right)\sqrt{(1-x^2)}+C'$$

$$\int\frac{x^7dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\left(\frac{1}{7}x^6+\frac{6.1}{7.5}x^4+\frac{6.4.1}{7.5.3}x^2+\frac{6.4.2}{7.5.3}\right)\sqrt{(1-x^2)}+C'$$

e generalmente

$$\int\frac{x^{2i+1}dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\left(\frac{1}{2i+1}x^{2i}+\frac{2i}{(2i+1)(2i-1)}x^{2i-2}\cdots\cdots+\frac{2i(2i-2)\ldots4.2}{(2i+1)(2i-1)\ldots3.1}\right)\sqrt{(1-x^2)}+C'.$$

In simil guisa troveremmo

$$\int\frac{dx}{x^{2i+1}\sqrt{(1-x^2)}} = -\left(\frac{1}{2ix^{2i}}+\frac{2i-1}{2i(2i-2)x^{2i-2}}\cdots\cdots+\frac{(2i-1)(2i-3)\ldots3}{2i(2i-2)\ldots2x^2}\right)\sqrt{(1-x^2)}+\cdots\cdots\frac{(2i-1)(2i-3)\ldots3}{2i(2i-2)\ldots2}\log\frac{1-\sqrt{(1-x^2)}}{x}+C$$

$$\int\frac{dx}{x^{2i}\sqrt{(1-x^2)}} = -\left(\frac{1}{(2i-1)x^{2i-1}}+\frac{2i-2}{(2i-1)(2i-3)x^{2i-3}}\cdots+\frac{(2i-2)(2i-4)\ldots2}{(2i-1)(2i-2)\ldots3.x}\right)\sqrt{(1-x^2)}+C.$$

Determiniamo le costanti C, C' delle due formule integrali $\int\frac{x^{2i}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, $\int\frac{x^{2i+1}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ in modo, che queste si annullino quando $x=0$: si avrà $C=0$, $C'=\frac{2i(2i-2)(2i-4)\ldots4.2}{(2i+1)(2i-1)\ldots3.1}$, e perciò

$$\int \frac{x^{2i}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\left(\frac{1}{2i}x^{2i-1} + \ldots + \frac{(2i-1)(2i-3)\ldots 3.1}{2i(2i-2)\ldots 4.2}x\right)\sqrt{(1-x^2)}$$
$$+ \frac{(2i-1)(2i-3)\ldots 3.1}{2i(2i-2)\ldots 4.2}\,Arc.\,sen\,x,$$

$$\int \frac{x^{2i+1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\left(\frac{1}{2i+1}x^{2i} + \ldots + \frac{2i(2i-2)\ldots 4.2}{(2i+1)(2i-1)\ldots 3.1}\right)\sqrt{(1-x^2)}$$
$$+ \frac{2i(2i-2)(2i-4)\ldots 4.2}{(2i+1)(2i-1)\ldots 3.1}.$$

Quest' integrali cominciano quando $x = 0$: per avere il loro valore sino ad $x = 1$, basterà fare $x = 1$ in queste due formule, ed otterremo

$$(1)\ \ldots\ \int \frac{x^{2i}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{(2i-1)(2i-3)\ldots\ldots 3.1}{2i(2i-2)\ldots\ldots 4.2}\,Arc.\,sen\,1 =$$
$$\frac{(2i-1)(2i-3)\ldots 3.1}{2i(2i-2)\ldots 4.2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$(2)\ \ldots\ \int \frac{x^{2i+1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2i(2i-2)(2i-4)\ldots 4.2}{(2i+1)(2i-1)\ldots 3.1},$$ essendo 2π la circonferenza del cerchio.

Queste due ultime formule sono vere per qualunque valore che riceva la lettera i. Supponiamola dunque infinita, e riflettendo che in questo caso abbiamo prossimamente

$$\int \frac{x^{2i}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \int \frac{x^{2i+1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}},$$ sarà

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1.3.5.7\ldots}{2.4.6.8\ldots} = \frac{2.4.6.8\ldots}{1.3.5.7\ldots}$$

e quindi

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2}{1.3}\cdot\frac{4.4}{3.5}\cdot\frac{6.6}{5.7}\cdot\frac{8.8}{7.9}\cdot \text{ec.}$$

formula elegantissima per la rettificazione del circolo, la quale è stata ritrovata da Vallis.

Moltiplichiamo tra loro le formule (1), (2), ed avremo

$$\int \frac{x^{2i}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}\cdot\int \frac{x^{2i+1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1}{2i+1}\cdot\frac{\pi}{2}:$$

questa equazione è vera per tutti i valori di $2i$ positivi ed intieri, e cessa di esser tale negli altri casi; imperocchè le formule (1), (2) dalle quali essa dipende, dimandano quella condizione nel valore di i. Eulero (il cui Calcolo Integrale possono consultare i nostri Lettori, che maggiore estensione desiderano in queste dottrine) supponendo che la suddetta equazione abbia luogo anche per i valori fratti della quantità $2i$, ne deduce diversi Teoremi, che se sono veri, meritano però d' esser dimostrati per altra via. Non ci fermeremo di più sopra queste ricerche, le quali sono più curiose che utili, e si trovano sviluppate nell' Opera citata.

§. 106. Applichiamo le dottrine spiegate nei due §§. antecedenti alla quadratura dell' Ellisse e dell' Iperbola, ed alla rettificazione della Parabola.

Fig. 26. Sia AGB una semi-Ellisse, il cui semiasse maggiore AC $= a$, il minore CG $= b$. Sopra l' asse AB, come diametro, siavi il semicircolo ADB. Facciamo AE $= x$, FE $= y$, HE $= z$, ed avremo

$y = \frac{b}{a}\sqrt{(2ax - x^2)}$, $z = \sqrt{(2ax - x^2)}$: ora (§. 90) la superficie AEF $= \int y dx = \frac{b}{a}\int\sqrt{(2ax - x^2)}\,dx$, e la superficie AEH $= \int z dx = \int\sqrt{(2ax - x^2)}\,dx$; dunque AEF $=$ $\frac{b}{a}$ AEH, cioè „ l' area Ellittica AEF sta a quella corrispondente circolare AHE, come la metà dell' asse minore alla „ metà dell' asse maggiore „.

La quadratura dunque dell' Ellisse dipende da quella del circolo, ed in conseguenza dall' integrazione di $\sqrt{(2ax - x^2)}\,dx$.

Se l' origine dell' ascisse fosse stata nel centro, allora fatto EC $= x$, avremmo trovato che la quadratura di quelle due curve dipende dal valore di $\int\sqrt{(a^2 - x^2)}\,dx$.

Per ottenere questo valore, io osservo che

$\int\sqrt{(a^2 - x^2)}\,dx = \int\frac{a^2dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} - \int\frac{x^2dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, e facendo $a = 1$ per più semplicità, avremo

$\int\sqrt{(1 - x^2)}\,dx = \int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} - \int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, ed in conseguenza (§. antecedente).

$$\int\sqrt{(1-x^2)}\,dx = Arc.sen\,x + \tfrac{1}{2}x\sqrt{(1-x^2)} - \tfrac{1}{2}Arc.sen\,x +$$
$$C = \tfrac{1}{2}(Arc.\,sen\,x + x\sqrt{(1-x^2)}):$$

così la quadratura dell' Ellisse e del Circolo dipende dalla rettificazione del Circolo.

Sia $x = 1$, ed allora sarà la superficie $CAD = \frac{1}{2}.AHD = AHD.\frac{AC}{2}$.

Sia GAH un' Iperbola riferita agli assi $AB = 2AC = 2$, $EF = 2b$. Sia $CP = x$, $PM = y$; e l' equazione di questa curva sarà $y = b\sqrt{(x^2 - 1)}$. Fig. 27.

La superficie APM è espressa (§. 90) da

$\int ydx = b\int\sqrt{(x^2 - 1)}\,dx$: ma $b\int\sqrt{(x^2-1)}\,dx = b\sqrt{(-1)}\times$

$$\int\sqrt{(1-x^2)}\,dx = \frac{b\sqrt{(-1)}}{2}\{Arc.sen\,x + x\sqrt{(1-x^2)}\} +$$
C; dunque

$$APM = \tfrac{b}{2}\{\sqrt{(-1)}.Arc.\,sen\,x + x\sqrt{(x^2 - 1)}\} + C.$$

Ora abbiamo dall' Introduzione alla Matematica Sublime

$\sqrt{(-1)}.Arc.\,sen\,x = log(\sqrt{(1 - x^2)} + x\sqrt{(-1)})$; dunque

$APM = \frac{b}{2}\{log(\sqrt{(1-x^2)} + x\sqrt{(-1)}) + x\sqrt{(x^2-1)}\} +$ C; la costante deve determinarsi in modo, che l' integrale si annulli quando $x = 1$; dunque

$C = -\frac{b}{2}log\sqrt{(-1)}$, ed in conseguenza

$$APM = \tfrac{b}{2}\{x\sqrt{(x^2-1)} + l(x + \sqrt{(x^2-1)})\}.$$

Fig. 28. Sia AMZ una Parabola Apolloniana, $AP = x$, $PM = y$, e quindi $x^2 = 2by$, indicando per $2b$ il parametro della curva. Abbiamo sopra (§. 91) dimostrato che

$AM = \int dx\sqrt{(1 + (\frac{dy}{dx})^2)}$; dunque

$$AM = \int dx\sqrt{(1 + \tfrac{x^2}{b^2})}.$$

Per integrare quest' espressione, facciamo $\frac{x^2}{b^2} = -u^2$, ed avremo allora

$\int dx\sqrt{(1 + \frac{x^2}{b^2})} = b\sqrt{(-1)}\int du\sqrt{(1 - u^2)}$: ora lo stesso ragionamento che abbiam fatto per integrare la formula, da cui dipende la quadratura dell' Iperbola, ci dà

$$b\sqrt{(-1)}\int du\sqrt{(1-u^2)} = \tfrac{b}{2}\{l(\sqrt{(1-u^2)} + u\sqrt{(-1)})$$
$$+ u\sqrt{(u^2-1)}\}; \text{ dunque}$$

$AM = \frac{b}{2}\{l\frac{x+\sqrt{(b^2+x^2)}}{b} + \frac{x\sqrt{(b^2+x^2)}}{b^2}\}$; non abbiamo aggiunto costante arbitraria, perchè determinandola, l'avremmo trovata nulla.

Se poi noi facciamo $AP' = x'$, $P'M' = y'$, avremo

$$MM' = \tfrac{b}{2}\{l\frac{x'+\sqrt{(b^2+x'^2)}}{b} - l\frac{x+\sqrt{(b^2+x^2)}}{b}\} + \frac{x'\sqrt{(b^2+x'^2)}}{2b} -$$
$$\frac{x\sqrt{(b^2-x^2)}}{2b} = \frac{b}{2}l\frac{x'+\sqrt{(b^2+x'^2)}}{x+\sqrt{(b^2+x^2)}} + \frac{1}{2b}\{x'\sqrt{(b^2+x'^2)} -$$
$$x\sqrt{(b^2+x^2)}\}.$$

Trovata l' espressione di una porzion qualunque d' arco MM' di cui son date le coordinate all' estremità, noi potremo risolvere il seguente Problema Fig. 28.

„ Dato l' arco MM', trovarne un altro EE' tale che

„ MM' : EE' :: n : 1 „

Per questo supponiamo u, t le due ascisse AD, AD', incognite; indichiamo per a la parte algebraica contenuta in MM',

e per $\frac{b}{2} l\mathrm{B}$ la parte logaritmica, e s' avrà

$$a + \frac{b}{2} l\mathrm{B} : \frac{b}{2} \left\{ l \frac{t + \sqrt{(b^2 + t^2)}}{u + \sqrt{(b^2 + u^2)}} \right\} + \frac{1}{2b} \left\{ t\sqrt{(b^2 + t^2)} - u\sqrt{(b^2 + u^2)} \right\} :: n : 1,$$

ed in conseguenza

$$a + \frac{b}{2} l\mathrm{B} = \frac{nb}{2} l \frac{t + \sqrt{(b^2 + t^2)}}{u + \sqrt{(b^2 + u^2)}} + \frac{n}{2b} \left\{ t\sqrt{(b^2 + t^2)} - u\sqrt{(b^2 + u^2)} \right\},$$

la quale equazione, eguagliando respettivamente tra loro le quantità algebraiche e le trascendenti, si decomporrà in due altre equazioni, dalle quali potranno ricavarsi i valori di u e di t.

Il Problema in cui si cerca la determinazione di due archi parabolici, tali che la somma o la differenza sia rettificabile, cioè espressa da una quantità algebraica, non ha alcuna difficoltà. Imperocchè supponendo dato uno di questi archi, ed una delle estremità dell' altro, si sommeranno o sottrarranno le loro espressioni, quindi eguagliando a zero i trascendenti che vi si trovano, avremo un' equazione per determinare l' altra estremità dell' arco incognito, per il che esso diverrà conosciuto.

§. 107. Quando una differenziale non può integrarsi, o perchè da essa non possono togliersi gl' irrazionali, o perchè essa non sia effettivamente il risultato della differenziazione di una funzione composta di un numero finito di termini, allora se ne ricava l' integrale per mezzo delle serie. Esporremo ora un tal metodo, perchè essendo esso in uso non solo per l' integrazione dei differenziali irrazionali, ma ancora per quella dei differenziali trascendenti, lo dobbiamo adoprare nei seguenti §§.

Se dunque è proposta la differenziale $\mathrm{X}dx$, della quale se ne vuole l' integrale, s' incominci da sviluppare in una serie

ordinata per le potenze di x la funzione X; e qui richiamiamo quanto abbiamo detto ai §§ 35 e segg., e quanto si dimostra a questo proposito nell' Introduzione al Calcolo Sublime. Sia dunque

$\mathrm{X} = ax^m + bx^{m+n} + cx^{m+2n} + ex^{m+3n} +$ ec., ed avremo

$\int \mathrm{X}dx = \int ax^m dx + \int bx^{m+n} dx + \int cx^{m+2n} dx +$ ec., ed in conseguenza

$$\int \mathrm{X}dx = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{bx^{m+n+1}}{m+n+1} + \frac{cx^{m+2n+1}}{m+2n+1} + \frac{ex^{m+3n+1}}{m+3n+1} + \text{ec.} + \mathrm{C}$$

essendo C la costante arbitraria aggiunta integrando.

Per fare alcuni esempj di questo metodo, proponiamoci

I. D' integrare la differenziale $\frac{adx}{a^2 + x^2}$.

Essendo $\frac{a}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} - \frac{x^2}{a^3} + \frac{x^4}{a^5} - \frac{x^6}{a^7} + \frac{x^8}{a^9} -$ ec.

avremo

$$\int \frac{adx}{a^2 + x^2} = \frac{x}{a} - \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} - \frac{x^7}{7a^7} + \text{ec.} + \mathrm{C}:$$

ma $\int \frac{adx}{a^2 + x^2} = Arc.\,tang\,\frac{x}{a}$; dunque

$$Arc.\,tang\,\frac{x}{a} = \frac{x}{a} - \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} - \frac{x^7}{7a^7} + \text{ec.} + \mathrm{C}:$$

ora essendo $Arc.\,tang\,\frac{x}{a} = 0$ quando $x = 0$, s' avrà $\mathrm{C} = 0$.

Facciamo $x = a$, ed allora sarà

$Arc.\,tang\,1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} -$ ec. $= Arc.$ di $45°$;

questa formula potrebbe servire per la rettificazione del cerchio, ma la di lei convergenza è lentissima.

II. Per integrare $\frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}$ io osservo che

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8 + \text{ec.};$$

dunque

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = x + \frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{x^7}{7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{x^9}{9} + \text{ec.}$$

Ma $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = Arc.\,sen\,x$; dunque

$$Arc.\,sen\,x = x + \frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{x^7}{7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{x^9}{9} + \text{ec.},$$

facciamo $x = 1$, ed avremo

$$Arc.\,90^\circ = 1 + \frac{1}{2.3} + \frac{1.3}{2.4.5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9} + \text{ec.},$$

e se poniamo $x = \frac{1}{2}$, s' avrà

$$Arc.\,30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.2^3.3} + \frac{1.3}{2.4.2^5.5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.2^7.7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.2^9.9} + \text{ec.}$$

serie convergentissima per esprimere il rapporto della circonferenza al diametro.

III. Integriamo per serie la formula irrazionale $x^{m-1}dx(a + bx^n)^{\frac{p}{q}}$. Essendo

$$(1 + \frac{b}{a}x^n)^{\frac{p}{q}} = 1 + \frac{pb}{qa}x^n + \frac{p(p-q)b^2}{q.2q.a^2}x^{2n} + \frac{p(p-q)(p-2q)b^3}{q.2q.3q.a^3}x^{3n} + \text{ec.},$$

avremo (rappresentando per y l' integrale cercato)

$$y = a^{\frac{p}{q}}\left\{\frac{x^m}{m} + \frac{pb}{q.a}.\frac{x^{m+n}}{m+n} + \frac{p(p-q)b^2}{q.2q.a^2}.\frac{x^{m+2n}}{m+2n} + \dots\dots \right.$$

$$\left. \frac{p(p-q)(p-2q)b^3}{q.2q.3q.a^3}.\frac{x^{m+3n}}{m+3n} + \text{ec.}\right\},$$

e questa serie va all' infinito se $\frac{p}{q}$ non è un numero intiero e positivo.

Se la quantità a è negativa, e sia q un numero pari la

nostra serie conterrà l' immaginario $\sqrt{(-a)}$, onde per ottenere un integrale che ne sia privo, cangeremo la formula

$$x^{m-1}dx(bx^n - a)^{\frac{p}{q}} \text{ in } b^{\frac{p}{q}}x^{m+\frac{pn}{q}-1}dx(1 - \frac{a}{b}x^{-n})^{\frac{p}{q}}:$$

Essendo allora

$$(1 - \frac{a}{b}x^{-n})^{\frac{p}{q}} = 1 - \frac{pa}{qb}x^{-n} + \frac{p(p-q)a^2}{q.2q.b^2}x^{-2n} - \dots.$$

$$\frac{p(p-q)(p-2q)a^2}{q.2q.3q.b^2}x^{-3n} + \text{ec.},$$

s' avrà integrando

$$y = b^{\frac{p}{q}}\left\{\frac{qx^{m+\frac{pn}{q}}}{mq+np} - \frac{pa}{qb}.\frac{q.x^{m+\frac{(p-q)}{q}n}}{mq+(p-q)n} + \dots\dots\dots,\right.$$

$$\left.\frac{p(p-q)a^2}{q.2q.b^2}.\frac{qx^{m+\frac{(p-2q)}{q}n}}{mq+(p-2q)n} - \text{ec.}\right\};$$

e se a e b sono ambedue numeri positivi, possiamo fare uso di ambedue le serie.

IV. Per integrare la differenziale $dx\sqrt{\frac{1+ax^2}{1-x^2}}$, piuttosto che sviluppare in serie secondo le potenze di x, la quantità $\sqrt{\frac{1+ax^2}{1-x^2}}$, prendiamo lo sviluppo di $\sqrt{(1+ax^2)}$, e siccome questi è $\sqrt{(1+ax^2)} = 1 + \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1.1}{2.4}a^2x^4 + \frac{1.1.3}{2.4.6}a^3x^6 - \text{ec.}$, avremo perciò

$$\int dx\sqrt{\frac{1+ax^2}{1-x^2}} = \int\left\{1 + \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1.1}{2.4}a^2x^4 + \text{ec}\right\}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

Ora supponiamo che l' integrale debba prendersi da $x = 0$, sino ad $x = 1$, cioè che determinata la costante in maniera che egli svanisca quando $x = 0$, facciasi nel di lui valore $x = 1$, s' avrà allora (102)

$$\int dx \sqrt{\frac{1+ax^2}{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \frac{1.1}{2.2}a - \frac{1.1.1.3}{2.2.4.4}a^2 + \frac{1.1.1.3.3.5}{2.2.4.4.6.6}a^3 - \text{ec.}\right\}:$$

questa formula può servire per la rettificazione dell' Ellisse.

Infatti chiamando e l' eccentricità dell' Ellisse; 1 il semiasse maggiore, il quadrato del semiasse minore sarà $1 - e^2$, e quindi l' equazione della curva $y^2 = (1 - e^2)(1 - x^2)$. Ora (§. 90) indicando per s l' arco corrispondente all' ascissa x, si ha

$s = \int\sqrt{(1 + (\frac{dy}{dx})^2)}\,dx$; dunque essendo per noi $(\frac{dy}{dx})^2 = (1 - e^2)\frac{x^2}{1-x^2}$, avremo

$s = \int dx \sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}}$: Se facciamo nella formula superiore $a = -e^2$, avremo per esprimere il quarto del perimetro dell' Ellisse questa serie

$\frac{\pi}{2}\left\{1 - \frac{1.1}{2.2}e^2 - \frac{1.1.1.3}{2.2.4.4}e^4 - \frac{1.1.1.3.3.5}{2.2.4.4.6.6}e^6 - \text{ec.}\right\}$, essendo $\frac{\pi}{2}$ la quarta parte della circonferenza del circolo circoscritto all' Ellisse. Una tal serie è convergentissima per le Ellissi poco allungate.

V. Per avere l' integrale di $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$, osservo che

$$(1 - x^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1.3}{2.4}x^8 + \frac{1.3.6}{2.4.6}x^{12} + \text{ec.}$$

dunque

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = x + \frac{1}{2.5}x^5 + \frac{1.3}{2.4.9}x^9 + \frac{1.3.5}{2.4.6.13}x^{13} + \text{ec.} + C:$$

Se noi indichiamo per A quest' integrale preso da $x = 0$, sino ad $x = 1$, s' avrà

$$A = 1 + \frac{1}{2.5} + \frac{1.3}{2.4.9} + \frac{1.3.5}{2.4.6.13} + \text{ec.}$$

Per un altro verso

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}\left\{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \text{ec.}\right\},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} - \frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)}} + \frac{1.3}{2.4}\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^2)}} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^2)}} + \text{ec.}$$

Se si prendono quest' integrali in modo che svaniscano quando $x = 0$, e vi si fa $x = 1$, si avrà per le formule del §. 105.

$$A = \frac{\pi}{2}\left\{1 - \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} - \frac{1^2.2^2.3^2}{2^2.4^2.6^2} + \text{ec.}\right\},$$

sarà per tanto

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1 + \frac{1}{2.5} + \frac{1.3}{2.4.9} + \frac{1.3.5}{2.4.6.13} + \text{ec.}}{1 - \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} - \frac{1^2.2^2.3^2}{2^2.4^2.6^2} + \text{ec.}}$$

formula elegante per esprimere il rapporto del diametro alla circonferenza.

Il Teorema di Tajlor combinato con le successive differenziazioni della quantità da integrarsi, ci dà anche un metodo d' integrar per serie: infatti avendo noi ricavato da questo Teorema (§. 37)

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) + \text{ec.}$$

purchè dopo le differenziazioni si faccia $x = 0$ in $(\frac{d\varphi}{dx})$, $(\frac{d^2\varphi}{dx^2})$ ec., se poniamo $\varphi(x) = \int Xdx$, avremo $(\frac{d\varphi}{dx}) = X$, $(\frac{d^2\varphi}{dx^2}) = (\frac{dX}{dx})$ ec., e quindi

$$\int Xdx = A + xX + \frac{x^2}{2}\left(\frac{dX}{dx}\right) + \frac{x^3}{2.3}\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right) + \frac{x^4}{2.3.4}\left(\frac{d^3X}{dx^3}\right) + \text{ec.}$$

supponendo però che si faccia $x = 0$ in $\left(\frac{dX}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)$ ec., ed in X a differenziazione eseguita.

La lettera A rappresenta il valore di $\int X dx$ quando $x = 0$, il quale, non essendo dato dall'equazioni $\left(\frac{d\phi}{dx}\right) = X$, $\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right) = 0$ ec., resterà perciò arbitrario, e sarà la quantità costante che l'integrazione deve introdurre.

§. 108. Veniamo all'integrazione delle funzioni, che contengono i trascendenti esponenziali e logaritmici.

Nell'integrazione di simili funzioni suol farsi moltissimo uso di una riduzione, conosciuta nel Calcolo Integrale sotto il nome *d'Integrazione per Parti*: ecco in che consiste. Se y e z rappresentano due funzioni qualunque di x, il Calcolo Differenziale ci dà $d(yz) = z\left(\frac{dy}{dx}\right) dx + y\left(\frac{dz}{dx}\right) dx$, o semplicemente (indicando $\left(\frac{dy}{dx}\right) dx$ per dy, e $\left(\frac{dz}{dx}\right) dx$ per dz), $d(yz) = zdy + ydz$; ora integrando quest' ultima equazione, abbiamo $yz = \int zdy + \int ydz$, dalla quale ricaviamo $\int zdy = yz - \int ydz$; per mezzo di questa formula l'integrale $\int zdy$ dipende dall'altro $\int ydz$, che talune volte può essere più semplice di lui; così dovendosi integrare la formula Xdx, se potremo decomporre X in due fattori P e Q, tali che uno di essi, per esempio Q moltiplicato per dx dia una differenziale esatta dV, avremo

$\int X dx = \int PQ dx = PV - \int V\left(\frac{dP}{dx}\right) dx$. Gli artifizj da adoperarsi in questa decomposizione, affinchè la formula cui si riduce un integrale, sia più semplice di lui, non hanno delle regole generali, e dipendono dalla sagacità dell'Analista.

Sia da integrarsi la differenziale $a^x X dx$, indicando X una funzione qualunque di x.

Siccome $da^x = a^x dx \,.\, la$, si avrà $\int a^x dx = \frac{1}{la} a^x$, e quindi integrando per parti, troveremo

$\int a^x X dx = \frac{1}{la} a^x X - \int \frac{1}{la} a^x \,.\, \left(\frac{dX}{dx}\right) dx$: ora supponendo $\left(\frac{dX}{dx}\right) = P$, avremo

$\int a^x X dx = \frac{1}{la} a^x X - \frac{1}{la} \int a^x P dx$, e continuando l'integrazione per parti

$\int a^x X dx = \frac{1}{la} a^x X - \frac{1}{la^2} a^x P + \frac{1}{la^2} \int a^x \left(\frac{dP}{dx}\right) dx$,

nella quale facendo $\left(\frac{dP}{dx}\right) = Q$, e seguitando lo stesso metodo d'integrazione, s'avrà

$\int a^x X dx = \frac{1}{la} a^x X - \frac{1}{la^2} a^x P + \frac{1}{la^3} a^x Q - \frac{1}{la^3} \int a^x \left(\frac{dQ}{dx}\right) dx$,

e così di seguito.

Se dunque X è una funzione razionale ed intiera di x, noi arriveremo in fine all'integrazione della formula $a^x dx$, della quale conosciamo l'integrale. Così l'integrale di $a^x(x^2 + bx + c)dx$ sarà

$$\int a^x (x^2 + bx + c) dx = \frac{1}{la} a^x (x^2 + bx + c) - \frac{1}{la^2} a^x (2x + b) + \frac{1}{la^3} a^x \,.\, 2 + C:$$

quello di $a^x x^n dx$, essendo n un numero intiero e positivo, sarà

$$\int a^x x^n dx = a^x \left\{ \frac{x^n}{la} - \frac{nx^{n-1}}{la^2} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{la^3} - \ldots\ldots\ldots \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{la^4} + \ldots\ldots \pm \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2.1}{la^n} \right\} + C$$

il segno superiore è per n pari, e l'inferiore per n impari.

Per determinare la costante, supponiamo che l'integrale debba svanire quando $x = 0$, ed avremo

$C = \mp \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{la^n}$.

Avrebbe potuto integrarsi la formula $a^x X dx$ anche in altra guisa; infatti la stessa regola dell' integrazione per parti ci dà

$\int a^x X dx = a^x \int X dx - la \int (\int X dx)\, a^x dx$, e facendo

$P = \int X dx$, si ha $\int a^x X dx = a^x P - la \int a^x P dx$.

Poniamo $\int P dx = Q$, ed avremo

$\int a^x X dx = a^x P - la \,.\, a^x Q + la^2 \int a^x Q dx$; così

$\int Q dx = R$, ci dà

$\int a^x X dx = a^x P - la \,.\, a^x Q + la^2 \,.\, a^x R - la^3 \int a^x R dx$,

e potremo continuare questa riduzione, finchè si giunga ad una formula integrabile, e molto più semplice della proposta. Con questo metodo cerchiamo l' integrale della formula $\frac{a^x dx}{x^n}$, essendo n un numero intiero e positivo. Facendo $X = \frac{1}{x^n}$,

$$P = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}},\ Q = \frac{1}{(n-1)(n-2)x^{n-2}},\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$R = \frac{-1}{(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-3}},\ \text{ec., avremo}$$

$$\int \frac{a^x dx}{x^n} = -\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a^x la}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} - \ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{a^x la^2}{(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-3}} - \ldots\ldots\ldots - \frac{a^x la^{n-2}}{(n-1)(n-2)\ldots 2.1} +$$
$$\frac{la^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 2.1} \int \frac{a^x dx}{x}:$$

tutta la difficoltà per tanto si riduce all' integrazione della formula $\frac{a^x dx}{x}$, la quale non sappiamo integrare che col metodo delle serie.

Se n sarà un numero fratto, l' una e l' altra riduzione ci dà l' integrale per mezzo di una serie infinita, che i nostri Lettori faranno bene a trovare per esercitarsi nel Calcolo.

Per integrare $\frac{e^x dx}{x}$ (essendo e il numero il cui logaritmo iperbolico è l' unità) facciamo $x = 1 + z$, ed avremo

$\int \frac{e^x dx}{x} = e \int \frac{e^z dz}{1+z}$. Poniamo ora

$\frac{e^z}{1+z} = A + Bz + Cz^2 + Ez^3 +$ ec., ed avremo

$$1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} + \text{ec.} = \begin{array}{l} A + Bz + Cz^2 + Ez^3 + Fz^4 + \text{ec.} \\ \quad\;\; + A \;\; + B \;\; + C \;\; + E \;\; + \text{ec.} \end{array}$$

ed in conseguenza

$A = 1$

$B = 0$

$C = \frac{1}{2}$

$E = \frac{1}{2.3} - \frac{1}{2}$

$F = \frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2}$

$H = \frac{1}{2.3.4.5} - \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{2}$

$K = \frac{1}{2.3.4.5.6} - \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2}$

ec.

$$e \int \frac{e^z dz}{1+z} = e \int \Big\{ 1 + \frac{z^2}{2} - \frac{2z^3}{2.3} + \frac{9z^4}{2.3.4} - \frac{44z^5}{2.3.4.5} + \frac{265z^6}{2.3.4.5.6} -$$
$$\frac{1854z^7}{2.3.4.5.6.7} + \text{ec.} \Big\}\, dz$$

$$e \int \frac{e^z dz}{1+z} = e \Big\{ z + \frac{z^3}{2.3} - \frac{2z^4}{2.3.4} + \frac{9z^5}{2.3.4.5} - \frac{44z^6}{2.3.4.5.6} + \text{ec.} \Big\} + C.$$

Sostituiamo per z il suo valore, e sarà

$$\int \frac{e^x dx}{x} = e \left\{ x - 1 + \frac{(x-1)^2}{2\cdot 3} - \frac{2(x-1)^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{9(x-1)^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \ldots \right.$$
$$\left. \frac{44(x-1)^6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \text{ec.} \right\} + C$$

l' integrale cercato.

Se la costante deve essere determinata in modo che l' integrale si annulli quando $x = 1$, abbiamo $C = 0$, e se quell' integrale debbe annullarsi quando $x = 0$, si trova

$$C = e \left\{ 1 + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{2}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{9}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{44}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{265}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \right.$$
$$\left. \frac{1854}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \text{ec.} \right\}.$$

§. 109. Per le differenziali logaritmiche, proponiamoci d' integrare la formula $Pdx(lz)^n$ essendo P e z due funzioni di x.

Sia $\int Pdx = Q$, e la regola dell' integrazione per parti ci darà

$\int Pdxlz^n = Q \cdot lz^n - n \int \frac{Q}{z} (lz)^{n-1} \cdot \left(\frac{dz}{dx}\right) dx$: così l' integrazione richiesta è ridotta a quella di una differenziale, nella quale il logaritmo lz è elevato ad una potenza minore di un' unità; continuando questa riduzione, si comprende, che giungeremo in fine all' integrazione di una quantità algebraica, se però n sarà numero intiero e positivo.

Per esempio vogliasi integrare $x^m dx(log. x)^n$, ed avremo $P = x^m$, $z = x$, e perciò

$$\int x^m dx(log. x)^n = \frac{x^{m+1}}{m+1}(lx)^n - \frac{n}{m+1} \int x^m dx(lx)^{n-1}:$$

ora ponendo in quest' equazione $n - 1$ invece di n, si avrà

$$\int x^m dx(log. x)^{n-1} = \frac{x^{m+1}}{m+1}(lx)^{n-1} - \frac{n-1}{m+1} \int x^m dx(lx)^{n-2},$$

e parimente

$$\int x^m dx(lx)^{n-2} = \frac{x^{m+1}}{m+1}(lx)^{n-2} - \frac{n-2}{m+1} \int x^m dx(lx)^{n-3},$$

$$\int x^m dx(lx)^{n-3} = \frac{x^{m+1}}{m+1}(lx)^{n-3} - \frac{n-3}{m+1} \int x^m dx(lx)^{n-4}$$

ec.

Dunque sostituendo una formula nell' altra, troveremo

$$\int x^m dx lx^n = x^{m+1} \left\{ \frac{(lx)^n}{m+1} - n \frac{(lx)^{n-1}}{(m+1)^2} + n(n-1) \frac{(lx)^{n-2}}{(m+1)^3} - \right.$$
$$\left. n(n-1)(n-2) \frac{(lx)^{n-3}}{(m+1)^4} + \text{ec.} \right\} + C.$$

Quest' espressione non soddisfà al caso di $m = -1$, ma allora si ha l' equazione

$\int \frac{dx(lx)^n}{x} = (lx)^{n+1} - n \int \frac{dx}{x}(lx)^n$, da cui si deduce

$(n+1) \int \frac{dx}{x}(lx)^n = (lx)^{n+1}$, e perciò

$$\int \frac{dx}{x}(lx)^n = \frac{(lx)^{n+1}}{n+1} + C.$$

Per integrare la differenziale $\frac{Xdx}{(lx)^n}$, essendo X una funzione di x, faremo

$\frac{Xdx}{(lx)^n} = Xx \cdot \frac{dx}{x(lx)^n}$, ed allora l' integrazione per parti, ci darà

$$\int Xx \cdot \frac{dx}{x(lx)^n} = - \frac{Xx}{(n-1)(lx)^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{d.Xx}{(lx)^{n-1}}:$$

poniamo successivamente $d.Xx = Pdx$, $d.Px = Qdx$, $d.Qx = Rdx$ ec., e continuando la stessa riduzione si troverà

$$\int \frac{Xdx}{lx^n} = - \frac{Xx}{(n-1)(lx)^{n-1}} - \frac{Px}{(n-1)(n-2)(lx)^{n-2}} \ldots\ldots +$$
$$\frac{1}{(n-1)(n-2)\ldots 2.1} \int \frac{Vdx}{lx}.$$

Facciamo ora $X = x^m$, ed avremo $P = (m + 1)x^m$, $Q = (m + 1)^2 x^m$, $R = (m + 1)^3 x^m$ ec., e perciò

$$\int \frac{x^m dx}{(lx)^n} = - \frac{x^{m+1}}{(n-1)(lx)^{n-1}} - \frac{(m+1)x^{m+1}}{(n-1)(n-2)(lx)^{n-2}} - \ldots\ldots$$

$$\frac{(m+1)^2 x^{m+1}}{(n-1)(n-2)(n-3)(lx)^{n-3}} - \ldots\ldots\ldots +$$

$$\frac{(m+1)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots\ldots 3.2.1} \int \frac{x^m dx}{lx}.$$

§. 110. La formula $\int \frac{x^m dx}{lx}$, riducesi ancor più semplice facendo $x^{m+1} = z$; infatti essa allora diviene $\int \frac{dz}{lz}$, il cui integrale può ottenersi per mezzo delle serie, come ora vedremo.

Poniamo $z = e^u$, ed avremo

$\int \frac{dz}{lz} = \int \frac{e^u du}{u}$: quest' integrale è stato trovato al §. antecedente, e ne è stata determinata la costante in maniera che esso svanisca quando $u = 0$: abbiamo così l' integrale di $\frac{dz}{lz}$ nella supposizione che si annulli quando $z = 1$. Affinchè questi svanisca quando $z = 0$, facciamo $z = e - u$, essendo e il numero il cui logaritmo iperbolico è l' unità, e noi avremo allora $\int \frac{dz}{lz} = - \int \frac{du}{l(e-u)}$. Poniamo

$$\frac{1}{l(e-u)} = A + Bu + Cu^2 + Eu^3 + Fu^4 + \text{ec.}, \text{ e sarà}$$

$$1 = (A + Bu + Cu^2 + Eu^3 + Fu^4 + \text{ec.})\left(1 - \frac{u}{e} + \frac{u^2}{2e^2} - \frac{u^3}{3e^3} + \frac{u^4}{4e^4} - \text{ec.}\right)$$

dalla quale equazione si ricava

$A = 1$

$B = \frac{1}{e} \cdot 1$

$C = \frac{1}{e^2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)$

$E = \frac{1}{e^3}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$

$F = \frac{1}{e^4}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$

$H = \frac{1}{e^5}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)$

ec.

dunque (indicando per C' la costante arbitraria)

$$\int \frac{du}{l(e-u)} = Au + \frac{Bu^2}{2} + \frac{Cu^3}{3} + \frac{Eu^4}{4} + \frac{Fu^5}{5} + \text{ec.} + C'$$

ed in conseguenza

$$\int \frac{dz}{lz} = C' - \left\{A(e-z) + \frac{B(e-z)^2}{2} + \frac{C(e-z)^3}{3} + \frac{E(e-z)^4}{4} + \text{ec.}\right\};$$

facciamo $A = \alpha$, $B = \frac{1}{e}\beta$, $C = \frac{1}{e^2}\gamma$, $E = \frac{1}{e^3}\epsilon$, ec.

e si avrà

$$\int \frac{dz}{lz} = C' - \left\{\alpha(e-z) + \frac{\beta(e-z)^2}{2e} + \frac{\gamma(e-z)^3}{3e^2} + \frac{\epsilon(e-z)^4}{4e^3} + \text{ec.}\right\}.$$

Determiniamo la costante C' in modo che l' integrale si annulli quando $z = 0$, e sarà

$C' = e\left(\alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{3} + \frac{\epsilon}{4} + \text{ec.}\right)$ essendo, come si sa

$e = 2,718281828459\ldots\ldots\ldots,\ldots\ldots$

Dall' integrazione di $\frac{dz}{lz}$ dipende l' integrale dell' espressione $dzllz$: infatti la regola d' integrazione per parti ci dà $\int dzllz = zllz - \int \frac{dz}{lz}$, e per conseguenza

$$\int dzllz = zllz - C' + \left\{\alpha(e-z) + \frac{\beta(e-z)^2}{2e} + \frac{\gamma(e-z)^3}{3e^2} + \text{ec.}\right\}.$$

Dalla medesima formula dipende anche l' integrale di $\frac{dz}{llz}$; infatti facendo $lz = x$, si ha

$\int \frac{dz}{llz} = \int \frac{e^x dx}{lx} = \int \frac{dx}{lx} \left\{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \text{ec.}\right\}$, che abbiamo insegnato ad integrare.

Per integrare $x^{nx} dx$, noi cominceremo dallo sviluppare in serie la quantità esponenziale x^{nx}, ed avremo

$x^{nx} = 1 + nxlx + \frac{n^2x^2lx^2}{2} + \frac{n^3x^3lx^3}{2 \cdot 3} + \text{ec.}$; sarà allora

$$\int x^{nx} dx = \int \left\{1 + nxlx + \frac{n^2x^2lx^2}{2} + \frac{n^3x^3lx^3}{2 \cdot 3} + \text{ec.}\right\} dx$$

$$= \int dx + n\int xdxlx + \frac{n^2}{2}\int x^2dxlx^2 + \text{ec.};$$

l' integrazione dunque di $x^{nx} dx$ dipende da formule che abbiam sopra trattate.

Osservazione

Siccome $\frac{dx}{x} = \frac{-dx}{-x}$, così tanto lx, che $l-x$ può essere l' integrale di $\frac{dx}{x}$; e di qui segue che la forma generale dell' integrale di $\frac{dx}{x}$ è $l \pm x + C$, essendo C la costante arbitraria. Negli integrali logaritmici dunque s' incontra il doppio segno come nei radicali.

§. 111. Parliamo ora dell' integrazione delle funzioni nelle quali entrano trascendenti circolari.

Sia φ un angolo, il cui seno, tangente ec., sia una funzione di x, per il che abbiasi $d\varphi = udx$, e vogliasi integrare $Xdx \cdot \varphi^n$. Poniamo $\int Xdx = P$, di modo che sia $Xdx\varphi^n = \varphi^n dP$, ed avremo

$\int Xdx\varphi^n = \varphi^n P - n\int \varphi^{n-1} Pudx$. Nella stessa guisa sia $\int Pudx = Q$, e s' avrà $\int \varphi^{n-1} Pudx = \varphi^{n-1} Q - (n-1) \times \int \varphi^{n-2} Qudx$, così fatto

$\int Qudx = R$, sarà $\int \varphi^{n-2} Qudx = \varphi^{n-2} R - (n-2) \times \int \varphi^{n-3} Rudx$,

ed in questa guisa la potenza di φ continuamente si abbasserà, finchè arriveremo ad una formula (quando sia n intiero e positivo) nella quale non sarà più φ. Quì si suppone però che possano ottenersi gl' integrali $\int Xdx$, $\int Pudx$, $\int Qudx$ ec.

Per esempio: sia $\varphi = Ang. sen\, x$ (sarà $d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$), ed abbiasi da integrare la formula $\varphi^n dx$. In questo caso $X = 1$; $P = x$, $Q = \int \frac{Pdx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\sqrt{(1-x^2)}$, $R = \int \frac{Qdx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -x$, $S = \int \frac{Rdx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \sqrt{(1-x^2)}$, $T = x$ ec., ed in conseguenza

$$\int \varphi^n dx = \varphi^n \cdot x + n\varphi^{n-1} \cdot \sqrt{(1-x^2)} - n(n-1)\varphi^{n-2} \cdot x - n(n-1)(n-2)\varphi^{n-3} \cdot \sqrt{(1-x^2)} + \text{ec.}$$

E facendo successivamente $n = 1, 2, 3$ ec., s' avrà

$$\int \varphi dx = \varphi \cdot x + \sqrt{(1-x^2)} - 1$$

$$\int \varphi^2 dx = \varphi^2 \cdot x + 2\varphi \cdot \sqrt{(1-x^2)} - 2 \cdot 1 \cdot x$$

$$\int \varphi^3 dx = \varphi^3 \cdot x + 3\varphi^2 \cdot \sqrt{(1-x^2)} - 3 \cdot 2 \cdot \varphi \cdot x - 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{(1-x^2)} + 6$$

ec.

avendo determinate le costanti in maniera che gl' integrali si annullino, quando $x = 0$, nel qual caso anche $\varphi = 0$.

Di maggiore utilità, particolarmente nelle Teorie Astronomiche, è l' integrazione delle formule, ove entrano seni, coseni ec. di un arco variabile, e di questa tratteremo nelle seguenti dottrine.

Già si sa che $\int dx \cos x = sen\, x + C$, e che $\int dx\, sen\, x = -\cos x + C$: proponiamoci dunque d' integrare $dx(sen\, x)^m$, $dx(\cos x)^m$: per la prima, la regola d' integrazione per parti ci dà

$$\int dx(sen\, x)^m = -(sen\, x)^{m-1} \cdot \cos x + (m-1)\int dx(sen\, x)^{m-2} \times (\cos x)^2,$$

e sostituendo $1 - (sen\, x)^2$ invece di $(\cos x)^2$, s' avrà

$$\int dx(sen\, x)^m = -(sen\, x)^{m-1} \cos x + (m-1)\int dx(sen\, x)^{m-2} - (m-1)\int dx(sen\, x)^m,$$

e quindi

$$(A) \ldots\ldots \int dx(sen\, x)^m = -\tfrac{1}{m}(sen\, x)^{m-1} \cos x + \tfrac{m-1}{m} \times \int dx(sen\, x)^{m-2};$$

così l' integrazione di $dx(sen\, x)^m$ è ridotta a quella di una formula, nella quale $sen\, x$ è elevato ad una potenza inferiore di due unità.

Poniamo nell' equazione (A) $m-2$ invece di m, ed avremo

$$(B) \ldots\ldots \int dx(sen\, x)^{m-2} = -\tfrac{1}{m-2}(sen\, x)^{m-3} \cos x + \tfrac{m-3}{m-2}\int dx(sen\, x)^{m-4};$$

nella stessa guisa si troverà

$$(C) \ldots\ldots \int dx(sen\, x)^{m-4} = -\tfrac{1}{m-4}(sen\, x)^{m-5} \cos x + \tfrac{m-5}{m-4}\int dx(sen\, x)^{m-6};$$

$$\int dx(sen\, x)^{m-6} = -\tfrac{1}{m-6}(sen\, x)^{m-7} \cos x + \tfrac{m-7}{m-6}\int dx(sen\, x)^{m-8};$$

ec.

Se m è un numero intiero e positivo, giungeremo in fine alla formula $\int dx = x$, quando esso è un numero pari; ed alla formula $\int dx\, sen\, x = -\cos x$ quando m è impari.

In ambedue questi casi sostituendo l' equazioni ec. (C), (B), (A) una nell' altra, troveremo

$$\int dx(sen\, x)^m = C - \tfrac{\cos x}{m}\Big\{(sen\, x)^{m-1} + \tfrac{m-1}{m-2}(sen\, x)^{m-3} + \tfrac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)}(sen\, x)^{m-5} + \ldots\ldots\ldots + \tfrac{(m-1)(m-3)(m-5)\ldots.3}{(m-2)(m-4)(m-6)\ldots.2}\, sen\, x\Big\} + \tfrac{(m-1)(m-3)(m-5)\ldots 3}{(m-2)(m-4)(m-6)\ldots 2}\, x,$$

per il caso di m pari; e per quello di m dispari

$$\int dx(sen\, x)^m = C - \tfrac{\cos x}{m}\Big\{(sen\, x)^{m-1} + \tfrac{m-1}{m-2}(sen\, x)^{m-3} + \tfrac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)}(sen\, x)^{m-5} + \ldots + \tfrac{(m-1)(m-3)(m-5)\ldots 2}{(m-2)(m-4)(m-6)\ldots 1}\Big\}.$$

Per integrare la seconda formula $dx(\cos x)^m$, facciamo $x = 90° - y$, ed avremo

$$\int dx(\cos x)^m = -\int dy(sen\, y)^m = -C + \tfrac{\cos y}{m}\Big\{(sen\, y)^{m-1} + \tfrac{m-1}{m-2}(sen\, y)^{m-3} + \ldots + \tfrac{(m-1)(m-3)(m-5)\ldots.3}{(m-2)(m-4)(m-6)\ldots.2}\, sen\, y\Big\} - \tfrac{(m-1)(m-3)(m-5)\ldots.3}{(m-2)(m-4)(m-6)\ldots.2}\, y = -C + \tfrac{sen\, x}{m}\Big\{(\cos x)^{m-1} + \tfrac{m-1}{m-2}(\cos x)^{m-3} + \ldots\ldots + \tfrac{(m-1)(m-3)\ldots.3}{(m-2)(m-4)\ldots.2}\cos x\Big\} - \tfrac{(m-1)(m-3)\ldots..3}{(m-2)(m-4)\ldots..1}(90° - x),$$

quando m è pari. Potremo egualmente trovare l' integrale di $dx(\cos x)^m$, quando m è dispari. Osserviamo che l' ultimo termine $-\tfrac{(m-1)(m-3)\ldots.3}{(m-2)(m-4)\ldots.1}(90° - x)$, si può anche ridurre ad

$\frac{(m-1)(m-3)\ldots 3}{(m-2)(m-4)\ldots 1}x$, considerando la quantità $-$ . . . .

$\frac{(m-1)(m-3)\ldots 3}{(m-2)(m-4)\ldots 1}90°$ come contenuta entro la costante arbitraria C.

Facciamo ora $n = 0, 1, 2, 3, 4$ ec., e le formule superiori ci danno

$$\int dx\,(\operatorname{sen} x)^0 = x$$

$$\int dx\,(\operatorname{sen} x) = -\cos x$$

$$\int dx\,(\operatorname{sen} x)^2 = -\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} x \cdot \cos x + \tfrac{1}{2}x$$

$$\int dx\,(\operatorname{sen} x)^3 = -\tfrac{1}{3}(\operatorname{sen} x)^2 \cdot \cos x - \tfrac{2}{3}\cos x$$

$$\int dx\,(\operatorname{sen} x)^4 = -\tfrac{1}{4}(\operatorname{sen} x)^3 \cdot \cos x - \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\operatorname{sen} x \cdot \cos x + \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x$$

ec. ec.

$$\int dx\,(\cos x)^0 = x$$

$$\int dx\,(\cos x) = \operatorname{sen} x$$

$$\int dx\,(\cos x)^2 = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} x \cos x + \tfrac{1}{2}x$$

$$\int dx\,(\cos x)^3 = \tfrac{1}{3}\operatorname{sen} x\,(\cos x)^2 + \tfrac{2}{3}\operatorname{sen} x$$

$$\int dx\,(\cos x)^4 = \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} x\,(\cos x)^3 + \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\operatorname{sen} x \cos x + \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x$$

ec. ec. ec.

La differenziale $dx\,(\operatorname{sen} x)^m(\cos x)^n$ può ancor essa integrarsi: infatti si ha

$$\int dx\,(\operatorname{sen} x)^m(\cos x)^n = \int(\cos x)^{n-1}dx\,(\operatorname{sen} x)^m\cos x = \frac{1}{m+1}(\operatorname{sen} x)^{m+1}(\cos x)^{n-1} + \frac{n-1}{m+1}\int dx\,(\operatorname{sen} x)^{m+2}\times(\cos x)^{n-2} = \frac{1}{m+1}(\operatorname{sen} x)^{m+1}(\cos x)^{n-1} + \frac{n-1}{m+1}\times\int dx\,(\operatorname{sen} x)^m(\cos x)^{n-2}(1-(\cos x)^2),$$ e quindi

$$\int dx\,(\operatorname{sen} x)^m \cdot (\cos x)^n = \frac{1}{m+n}(\operatorname{sen} x)^{m+1}(\cos x)^{n-1} + \frac{n-1}{m+n}\int dx\,(\operatorname{sen} x)^m(\cos x)^{n-2}$$

e così l' integrazione di quella differenziale è ridotta ad un' altra, nella quale il coseno è elevato ad una potenza minore di due unità. Se continueremo pertanto questa riduzione, giungeremo ad una formula nella quale (noi supponiamo m ed n numeri intieri e positivi) $\cos x$ mancherà affatto, o vi sarà elevato alla prima potenza, giungeremo cioè a $\int dx\,(\operatorname{sen} x)^m$, ovvero $\int dx\,(\operatorname{sen} x)^m\cos x = \frac{1}{m+1}(\operatorname{sen} x)^{m+1}$.

Potremo anche avere una formula generale che esprima il ricercato integrale, e questa si vedrà senza gran difficoltà che è

$$\int dx\,(\operatorname{sen} x)^m(\cos x)^n = \frac{1}{m+n}(\operatorname{sen} x)^{m+1}(\cos x)^{n-1} + \ldots \frac{n-1}{(m+n)(m+n-2)}(\operatorname{sen} x)^{m+1}(\cos x)^{n-3} + \ldots\ldots + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 3}{(m+n)(m+n-2)\ldots(m+2)}(\operatorname{sen} x)^{m+1}\cos x + \ldots\ldots \frac{(n-1)(n-3)\ldots 3}{(m+n)(m+n-2)\ldots(m+2)}\int dx\,(\operatorname{sen} x)^m + C$$

per n pari; e

$$\int dx\,(\operatorname{sen} x)^m(\cos x)^n = \frac{1}{m+n}(\operatorname{sen} x)^{m+1}(\cos x)^{n-1} + \ldots \frac{n-1}{(m+n)(m+n-2)}(\operatorname{sen} x)^{m+1}(\cos x)^{n-3} + \ldots\ldots +$$

$$\frac{(n-1)(n-3)\ldots 4}{(m+n)(m+n-2)\ldots(m+3)}\cdot\frac{(sen\,x)^{m+1}}{m+1}+C$$

per n dispari.

Rapporto a ciò che abbiam detto, e a quel che siamo per dire, si osservi che se le formule differenziali invece di contenere dx, $sen\,x$ e $cos\,x$, contenessero $d\varphi$, $sen\,\varphi$ e $cos\,\varphi$, essendo φ una qualunque funzione di x, i loro integrali sarebbero espressi dalle stesse formule trovate, purchè ponessimo $sen\,\varphi$, $cos\,\varphi$ invece di $sen\,x$, $cos\,x$, e φ invece di x.

§. 112. Il Celebre Eulero, cui si debbono le dottrine spiegate al §. antecedente, e gli altri Geometri dopo lui, non trattarono mai l' integrazione di formule, le quali contenessero la variabile sotto forma algebraica e trascendente insieme, finchè il Geometra Mascheroni nell' Annotazioni al Calcolo Integrale di Eulero, che sono veramente degne dell' Opera, cui appartengono, ci dette l' integrazione di queste due formule

$x^n dx\,sen\,x$, $x^n dx\,cos\,x$ per tutti i valori, tanto intieri positivi, che intieri negativi di n, insieme a molte altre interessantissime ricerche sopra gl' integrali delle formule stesse.

Ci limiteremo alle semplici integrazioni nei casi considerati da Mascheroni, rimandando i nostri Lettori all' Opera citata, quando bramino estensione maggiore in queste ricerche. Supponendo primieramente n positivo ed intiero, abbiamo

$$\int x^n dx\,sen\,x = -x^n cos\,x + \int nx^{n-1}dx\,cos\,x$$

$$\int x^n dx\,cos\,x = x^n sen\,x - \int nx^{n-1}dx\,sen\,x\text{, e quindi}$$

$$\int x^n dx\,sen\,x = -x^n cos\,x + nx^{n-1}sen\,x - n(n-1)\times$$
$$\int x^{n-1}dx\,sen\,x:$$

ponendo in quest' equazione $n-1$ invece di n, facendo le successive sostituzioni, avremo

$$\int x^n dx\,sen\,x = -x^n cos\,x + nx^{n-1}sen\,x + n(n-1)x^{n-2}\times$$
$$cos\,x - n(n-1)(n-2)x^{n-3}sen\,x + \text{ec.} + C,$$

la qual serie è composta di un numero finito di termini. Nella stessa maniera troveremo

$$\int x^n dx\,cos\,x = x^n sen\,x + nx^{n-1}cos\,x - n(n-1)x^{n-2}\times$$
$$sen\,x - n(n-1)(n-2)x^{n-3}cos\,x + \text{ec.} + C':$$

la determinazione delle costanti, affinchè gli integrali svaniscano quando $x=0$, non ha difficoltà veruna.

Supponendo n negativo ed intiero, le due serie trovate vanno all' infinito: allora possiamo più speditamente aver l' integrale di $x^n dx\,sen\,x$, e di $x^n dx\,cos\,x$, ponendo invece di $sen\,x$ e di $cos\,x$ le serie respettive. Si ha così

$$(1)\ldots\int\frac{dx\,sen\,x}{x^n}=\int dx\left\{\frac{1}{x^{n-1}}-\frac{1}{2.3x^{n-3}}+\frac{1}{2.3.4.5x^{n-5}}-\text{ec.}\right\}=$$
$$C-\frac{1}{n-2}\cdot\frac{1}{x^{n-2}}+\frac{1}{2.3}\cdot\frac{1}{(n-4)x^{n-4}}-\frac{1}{2.3.4.5}\cdot\frac{1}{(n-6)x^{n-6}}+\text{ec.}$$

$$(2)\ldots\int\frac{dx\,cos\,x}{x^n}=C-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n-3)x^{n-3}}-\frac{1}{2.3.4}\times$$
$$\frac{1}{(n-5)x^{n-5}}+\text{ec.}$$

Nella formula (1) quando n è un numero pari, e nella (2) quando esso è impari, comparisce il termine infinito $\frac{1}{0}\cdot\frac{1}{2.3.4\ldots(n-1)}$; allora invece di esso, il quale nasce dall' integrazione di $\int\frac{dx}{x}\cdot\frac{1}{2.3.4\ldots(n-1)}$, sostituiremo il termine $\frac{1}{2.3.4\ldots(n-1)}lx$.

Le costanti poi si determinano facilmente nella supposizione che gli integrali debbano svanire quando $x=1$. Per la determinazione delle costanti in altre ipotesi, vedansi le annotazioni citate.

Possono ancora ottenersi gli integrali delle due differenziali $x^n(sen\,x)^m dx$, $x^n(cos\,x)^m dx$: infatti per mezzo dell' integrazione per parti si possono far questi dipendere dall' integrazione di termini di questa forma $dx\,(sen\,x)^l\,(cos\,x)^k$, i quali sappiamo integrare. Imperciocchè facendo $\int(sen\,x)^m dx = p$, $\int p dx = q$ ec., si ha

$$\int x^n (sen\,x)^m dx = x^n p - n\int x^{n-1} p dx = x^n p - n x^{n-1} q + n(n-1)\int x^{n-2} q dx = \text{ec.} = x^n p - n x^{n-1} q + \ldots + n(n-1)\ldots 2\,.\,1 \int V dx,$$

e nell' integrare pdx, qdx ec., vdx non incontransi che termini della formula $A dx\,(sen\,x)^l \times (cos\,x)^k$, essendo A un coefficiente costante. Per esempio $\int x^2 dx\,(sen\,x)^2 = x^2 p - \int 2x dx\,.\,p$, essendo $p = \int dx\,sen\,x^2$: ora $\int dx\,sen\,x^2 = \frac{x - sen\,x\,cos\,x}{2}$; dunque

$$\int x^2 dx\,sen\,x^2 = x^2 \left\{\frac{x - sen\,x\,cos\,x}{2}\right\} - \int x dx \left\{x - sen\,x\,cos\,x\right\} = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2\,sen\,x\,cos\,x}{2} + \int x dx\,cos\,x\,sen\,x:$$

ma si trova

$$\int x dx\,cos\,x\,sen\,x = \frac{x\,sen\,x^2}{2} - \int \frac{sen\,x^2\,dx}{2} = \frac{x\,sen\,x^2}{2} + \frac{sen\,x\,cos\,x}{4} - \frac{x}{4};$$

dunque il ricercato integrale sarà

$$\int x^2 dx\,sen\,x^2 = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2\,sen\,x\,cos\,x}{2} + \frac{x\,sen\,x^2}{2} + \frac{sen\,x\,cos\,x}{4} - \frac{x}{4}.$$

§. 113. Andiamo a trattare dell' integrazione di quelle formule nelle quali i seni e coseni sono elevati a potenze negative.

Le più semplici di queste formule sono

$\frac{dx}{sen\,x}$, $\frac{dx}{cos\,x}$, $\frac{dx\,cos\,x}{sen\,x}$, $\frac{dx\,sen\,x}{cos\,x}$: per la prima se noi facciamo $cos\,x = y$, ed osserviamo che

$\frac{dx}{sen\,x} = \frac{dx\,sen\,x}{(sen\,x)^2} = \frac{dx\,sen\,x}{1-(cos\,x)^2} = -\frac{dy}{1-y^2}$, avremo

$\int \frac{dx}{sen\,x} = -\int \frac{dy}{1-y^2} = -\frac{1}{2}\,l\,\frac{1+y}{1-y}$, e quindi

$$\int \frac{dx}{sen\,x} = -\frac{1}{2}\,l\,\frac{1+cos\,x}{1-cos\,x}.$$

Per la seconda, fatto $sen\,x = y$, si ha

$\int \frac{dx}{cos\,x} = \frac{1}{2}\,l\,\frac{1+y}{1-y} = \frac{1}{2}\,l\,\frac{1+sen\,x}{1-sen\,x}$: gl' integrali poi della terza e della quarta dipendono manifestamente dai logaritmi, e si ha

$$\int \frac{dx\,cos\,x}{sen\,x} = l\,sen\,x = \int \frac{dx}{tang\,x} = \int dx\,cot\,x$$

$$\int \frac{dx\,sen\,x}{cos\,x} = -l\,cos\,x = \int dx\,tang\,x.$$

Questi due ultimi integrali ci danno

$$\int \frac{dx\,cos\,x}{sen\,x} + \int \frac{dx\,sen\,x}{cos\,x} = \int \frac{dx\,(cos\,x^2 + sen\,x^2)}{sen\,x\,cos\,x} = \int \frac{dx}{cos\,x\,sen\,x} = l\,sen\,x - l\,cos\,x = l\,\frac{sen\,x}{cos\,x} = l\,tang\,x.$$

Agli integrali delle due prime formule può darsi altra forma, cioè

$$\int \frac{dx}{sen\,x} = -\frac{1}{2}\,l\,\frac{1+cos\,x}{1-cos\,x} = l\,\frac{\sqrt{(1-cos\,x)}}{\sqrt{(1+cos\,x)}} = log.\,tang\,\tfrac{1}{2}\,x$$

$$\int \frac{dx}{cos\,x} = \frac{1}{2}\,l\,\frac{1+sen\,x}{1-sen\,x} = l\,\frac{\sqrt{(1+sen\,x)}}{\sqrt{(1-sen\,x)}} = l\,tang\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\,x).$$

Per integrare $\frac{dx\,(sen\,x)^m}{cos\,x}$, osserviamo che $\frac{dx\,(sen\,x)^m}{cos\,x} = \ldots \frac{(sen\,x)^{m-1}}{cos\,x}\,dx\,sen\,x$, ed avremo, integrando per parti

$$\int \frac{dx\,(sen\,x)^m}{cos\,x} = -(sen\,x)^{m-1} + \int cos\,x\,.\,d\left(\frac{(sen\,x)^{m-1}}{cos\,x}\right) = -(sen\,x)^{m-1} + (m-1)\int \frac{dx\,(sen\,x)^{m-2}}{cos\,x} - (m-2) \times \int \frac{dx\,(sen\,x)^m}{cos\,x},$$

e quindi

$$(1) \ldots \int \frac{dx\,(sen\,x)^m}{cos\,x} = -\frac{1}{m-1}(sen\,x)^{m-1} + \int \frac{dx\,(sen\,x)^{m-2}}{cos\,x}.$$

Se in quest' ultima equazione poniamo $m-2$ invece di m, avremo

$$(2) \ldots \int \frac{dx\,(sen\,x)^{m-2}}{cos\,x} = -\frac{1}{m-3}(sen\,x)^{m-3} + \int \frac{dx\,(sen\,x)^{m-4}}{cos\,x},$$

e sostituendo l' equazione (2) nella (1), il ricercato integrale dipenderà allora dalla formula $\int \frac{dx\,(sen\,x)^{m-4}}{cos\,x}$: continuando lo stesso ragionamento è facile vedere che quando m sarà impari, si avrà

$$\int \frac{dx\,(sen\,x)^m}{cos\,x} = -\frac{1}{m-1}(sen\,x)^{m-1} - \frac{1}{m-3}(sen\,x)^{m-3} - \ldots\ldots -$$
$$\frac{1}{2}\,sen\,x^2 - l\,cos\,x;$$ e quando m è pari,

$$\int \frac{dx\,(sen\,x)^m}{cos\,x} = -\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m-3} - \ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{1}{1}\,sen\,x +$$
$$l\,tang\left(45^\circ + \frac{1}{2}x\right).$$

Se poniamo $y = 90^\circ - x$, avremo ancora il valore di $\int \frac{dx\,(cos\,x)^m}{sen\,x}$, poichè questo è $= -\int \frac{dy\,(sen\,y)^m}{cos\,y}$.

Al §. antecedente noi abbiamo fatta questa riduzione

$$\int dx\,(sen\,x)^m (cos\,x)^n = \frac{1}{m+n}(sen\,x)^{m+1}(cos\,x)^{n-1} +$$
$$\frac{n-1}{m+n}\int dx\,(sen\,x)^m (cos\,x)^{n-2}$$: poniamo in essa $-n$ invece di n, ed avremo

$$\int \frac{dx\,(sen\,x)^m}{(cos\,x)^n} = \frac{1}{m-n}\cdot\frac{(sen\,x)^{m+1}}{(cos\,x)^{n+1}} - \frac{n+1}{m-n}\int \frac{dx\,(sen\,x)^m}{(cos\,x)^{n+2}},$$ da cui può dedursi (ponendo $n-2$ invece di n)

$$\int \frac{dx\,(sen\,x)^m}{(cos\,x)^n} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{(sen\,x)^{m+1}}{(cos\,x)^{n-1}} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{dx\,(sen\,x)^m}{(cos\,x)^{n-2}}.$$

Quest' ultima equazione ci darà

$$\int \frac{dx\,(sen\,x)^m}{(cos\,x)^n} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{(sen\,x)^{m+1}}{(cos\,x)^{n-1}} + \frac{n-m-2}{(n-1)(n-3)}\cdot\frac{(sen\,x)^{m+1}}{(cos\,x)^{n-3}} + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{(n-m-2)(n-m-4)\ldots(2-m)}{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots\ldots 1}\cdot\frac{sen\,x^{m+1}}{cos\,x} +$$
$$\frac{(n-m-2)(n-m-4)\ldots(-m)}{(n-1)(n-3)\ldots 1}\int dx\,(sen\,x)^m,$$ per il caso di n pari; e quando è dispari

$$\int \frac{dx\,(sen\,x)^m}{(cos\,x)^n} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{(sen\,x)^{m+1}}{(cos\,x)^{n-1}} + \frac{n-m-2}{(n-1)(n-3)}\cdot\frac{(sen\,x)^{m+1}}{(cos\,x)^{n-3}} + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots + \frac{(n-m-2)(n-m-4)\ldots\ldots(3-m)}{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots\ldots 2}\cdot\frac{(sen\,x)^{m+1}}{(cos\,x)^2} +$$
$$\frac{(n-m-2)(n-m-4)\ldots\ldots(1-m)}{(n-1)(n-3)\ldots\ldots 2}\int \frac{dx\,sen\,x^m}{cos\,x}.$$

Facciamo in queste due equazioni $m = -1$, e s' avrà

$$\int \frac{dx}{sen\,x\,(cos\,x)^n} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(cos\,x)^{n-1}} + \frac{1}{n-3}\cdot\frac{1}{(cos\,x)^{n-3}} + \ldots\ldots +$$
$$\frac{1}{cos\,x} + \int \frac{dx}{sen\,x}$$ quando n è pari; e quando è dispari

$$\int \frac{dx}{sen\,x\,(cos\,x)^n} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(cos\,x)^{n-1}} + \frac{1}{n-3}\cdot\frac{1}{(cos\,x)^{n-3}} + \ldots\ldots +$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(cos\,x)^2} + \int \frac{dx}{sen\,x\,cos\,x}.$$

Nelle medesime equazioni poniamo $-m$ invece di m, ed avremo per n pari

$$\int \frac{dx}{(sen\,x)^m (cos\,x)^n} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(sen\,x)^{m-1}(cos\,x)^{n-1}} + \frac{n+m-2}{(n-1)(n-3)} \times \ldots$$

$$\frac{1}{(\operatorname{sen} x)^{m-1}(\cos x)^{n-3}} + \ldots\ldots + \frac{(n+m-2)(n+m-4)\ldots(2+m)}{(n-1)(n-3)\ldots 1}\times$$

$$\frac{1}{(\operatorname{sen} x)^{m-1}\cos x} + \frac{(n+m-2)(n+m-4)\ldots\ldots m}{(n-1)(n-3)\ldots\ldots 1}\int\frac{dx}{(\operatorname{sen} x)^m};$$ e per

n impari

$$\int\frac{dx}{(\operatorname{sen} x)^m(\cos x)^n} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(\operatorname{sen} x)^{m-1}(\cos x)^{n-1}} + \frac{n+m-2}{(n-1)(n-3)}\times\ldots$$

$$\frac{1}{(\operatorname{sen} x)^{m-1}(\cos x)^{n-3}} + \ldots\ldots + \frac{(n+m-2)(n+m-4)\ldots(3+m)}{(n-1)(n-3)\ldots 2}\times$$

$$\frac{1}{(\operatorname{sen} x)^{m-1}(\cos x)^2} + \frac{(n+m-2)(n+m-4)\ldots(1+m)}{(n-1)(n-3)\ldots 2}\int\frac{dx}{(\operatorname{sen} x)^m\cos x}.$$

L' integrale $\int\frac{dx}{(\operatorname{sen} x)^m\cos x}$ è conosciuto, poichè facendo $x = 90° - y$, si ha $\int\frac{dx}{(\operatorname{sen} x)^m\cos x} = -\int\frac{dy}{\operatorname{sen} y(\cos y)^m}$, della quale abbiamo quì sopra trovato il valore.

L' integrale poi di $\frac{dx}{(\operatorname{sen} x)^m}$, il quale dipende dall' integrale di $\frac{dy}{(\cos y)^m}$, si ha dalla formula data per $\int\frac{dx(\operatorname{sen} x)^m}{(\cos x)^n}$, facendovi $m = 0$, e cangiando n in m.

Daremo una più estesa Teorìa dell' integrazione delle funzioni nel Cap°. V, ed ora termineremo il presente con parlare dei differenziali d' ordine negativo o fratto.

§. 114. L' espressione $(\frac{d^ny}{dx^n})dx^n$, ovvero d^ny significa, come si sa, il differenziale n^{esimo} della funzione y. Finchè n è un numero intiero e positivo, si concepisce bene, che ripetendo n volte la differenziazione, giungeremo ad un risultato, il quale simbolicamente è rappresentato da d^ny; ma se n è un numero negativo o fratto, cosa significherà quell' espressione differenziale?

Essendo la differenziale d^ny una quantità derivata da y per mezzo di un numero n d' operazioni di derivazione (che nel

nostro caso è la differenziazione), l' espressione $d^{-1}y$ ci indicherà, secondo ciò che abbiam detto al §. 6. dei Principj d' Analisi Derivata, una tal quantità, che eseguita sopra di essa l' operazione voluta dalla legge di derivazione, si ottenga y: egualmente $d^{-2}y$ ci indicherà quella quantità sopra la quale ripetuta due volte la stessa operazione, si ottenga y, e così di seguito.

Ora queste proprietà che debbono avere le differenziali ad indici negativi, sono appunto quelle che stabiliscono il significato delle espressioni simboliche $\int ydx$, $\int^2 ydx$ ec.; dunque avremo $d^{-1}y = \int ydx$, $d^{-2}y = \int^2 ydx^2$ ec., ed in generale $d^{-n}y = \int^n ydx^n$ „ I differenziali, cioè, d' ordine negativo, „ sono la stessa cosa che gl' integrali dello stesso ordine, ma „ positivo, e viceversa „ L' espressione pertanto $d^{n-m}y$, ci rappresenta un differenziale se $n > m$; un integrale se $n < m$; e rappresenterà la medesima y se $n = m$.

Rapporto agli ordini frazionarj, io osservo che l' operazione di differenziazione per la quale si ottengono le derivate o differenziali, non può concepirsi divisibile in porzioni, e repugna alla natura di quella legge di derivazione il potersi fare una sola operazione di differenziazione in più volte: per esempio l' operazione che ci fa dedurre dy da y, non si può fare in due volte facendo una metà d' operazione per volta; le differenziali dunque ad indici fratti, le quali, come abbiam detto ai §§. 7, 8 dei Prin. ec., rappresentano risultati ottenuti facendo un numero fratto d' operazioni di differenziazione sopra y, sono quantità che non possono esistere in natura, e perciò immaginarie: dunque $d^{\frac{1}{2}}y$, ed in generale $d^{\frac{m}{n}}y$, sono quantità immaginarie; e di quì si concluderà che nella serie dei differenziali

$$\text{ec}, d^{-2}y, d^{-1}y, y, dy, d^2y, d^3y, \text{ec.}$$

non possono interpolarsi dei termini tra due consecutivi di essa.

Se le differenziali ed integrali ad indice negativo sono come abbiam dimostrato, ~~quantità immaginarie, un problema~~, il quale dipenda da un siffatto differenziale o integrale, deve considerarsi come impossibile, e ciò che vi si ricerca, come una quantità, la quale non può esistere in natura.

Si cerchi infatti la probabilità P che tra un numero m di palle estratte da un egual numero di urne (levandone una da ciascun' urna) si trovino $m - n$ palle bianche, ed n palle rosse, supponendo che in ogni urna siano x palle bianche, ed y rosse, e troveremo

$$P = \frac{y^n}{1.2\ldots n.(x+y)^m} d^n(x^m).$$

Essendo sei le urne, quattro le palle rosse, e due le bianche, le quali debbono trovarsi tra le palle estratte, avremo $P = \frac{y^4}{2.3.4(x+y)^6} d^4(x^6) = \frac{16y^4x^2}{(x+y)^6}$: e se si dimandasse la probabilità che tra le sei palle estratte se ne trovino $3\frac{1}{2}$ rosse, e $2\frac{1}{2}$ bianche, avremmo $n = 3\frac{1}{2}$, e quindi

$P = \frac{y^{3\frac{1}{2}}}{2.3\ldots 3\frac{1}{2}(x+y)^6} d^{3\frac{1}{2}}(x^6)$: quest' espressione contenendo una derivata ad indice fratto è una quantità immaginaria, e ci dice che la ricerca è impossibile a soddisfarsi: si vede anche a *priori* che la cosa debb' esser così, poichè estraendo da ciascun' urna una palla, tra il numero delle palle estratte che sono o rosse o bianche, è impossibile che se ne trovino $3\frac{1}{2}$ delle rosse, e $2\frac{1}{2}$ bianche, non potendo questi numeri esser che intieri.

CALCOLO INTEGRALE

CAP. II.

Principj Generali per l' Integrazione dell' Equazioni.

§. 115. UN' equazione tra x, y, $(\frac{dy}{dx})$, $(\frac{d^2y}{dx^2})$ . . . . $(\frac{d^ny}{dx^n})$ si dice, come abbiam veduto al (§. 22), un' equazione differenziale dell' ordine n^{esimo}, poichè essa contiene le funzioni differenziali $(\frac{d^ny}{dx^n})$ di questo ordine medesimo.

Egualmente abbiamo veduto che se è data un' equazione $F = o$ fra due variabili x, y, sussistono ed hanno luogo con essa le sue equazioni differenziali; onde rappresentando per dF, d^2F, d^3F ec., le differenziali successive del primo membro di quest' equazione, avremo questo sistema d' equazioni simultanee

$F = o$, $dF = o$, $d^2F = o$, $d^3F = o$, $d^4F = o$ ec.,

Ora l' equazione $F = o$, cui d' ora in avanti daremo il nome d' equazione primitiva, considerata rapporto alle differenziali da essa dedotte, ha dei nomi particolari. Riguardo alla $dF = o$, chiamasi *integrale primo o del primo ordine*, perchè per mezzo di una differenziazione sola, a quella si giunge: riguardo alla $d^2F = o$, chiamasi *integrale secondo o del secondo ordine*, perchè per mezzo di differenziazioni si giunge a $d^2F = o$: in generale riguardo alla $d^nF = o$, chiamasi *integrale* n^{esimo} *o dell'* n^{esimo} *ordine*, perchè convien fare un numero n di differenziazioni per ottenere $d^nF = 0$.

Egualmente l' equazione $dF = 0$ che è essa medesima differenziale del primo ordine, dicesi *l' integrale primo, secondo, terzo* ec., dell' equazione $d^2F = 0$, $d^3F = 0$, $d^4F = 0$ ec., perchè si passa da essa ad una di queste per mezzo di una, due o tre differenziazioni ec.: così l' equazione $d^2F = 0$, differenziale del secondo ordine, si dice *l' integrale primo, secondo, terzo* ec. dell' equazione $d^3F = 0$, $d^4F = 0$, $d^5F = 0$ ec., per la stessa ragione; ed in generale l' equazione $d^mF = 0$, che è essa medesima un' equazione differenziale dell' ordine m^{esimo}, si dice *l' integrale* l^{esimo} *o dell' ordine* l^{esimo} dell' equazione $d^{m+l}F = 0$, perchè convien fare l differenziazioni per giungere a quest' ultima equazione. Così per esempio l' equazione differenziale del terzo ordine

$$2\left(\frac{dy}{dx}\right) + (4x + 3ay^2)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + x^2\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + 6ay\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$$

ha per integrale del secondo ordine

$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right) + ay^3 = 0$, poichè da quest' ultima equazione per mezzo di due differenziazioni, si giunge alla prima.

Ma si dà ancora un senso più esteso a queste denominazioni, e si chiama *integrale primo* di una equazione differenziale qualunque dell' ordine n^{esimo}, cioè di un' equazione $P = 0$ tra $x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right), \ldots \ldots \left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)$, un' altra equazione differenziale $Q = 0$ dell' ordine $(n - 1)^{esimo}$, cioè tra $x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right), \ldots \ldots \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$, dalla quale, in qualunque maniera siasi, $P = 0$ possa considerarsi dedotto: si chiama *integrale secondo* della stessa equazione $P = 0$, un' altra equazione differenziale $L = 0$ dell' ordine $(n - 2)^{esimo}$, cioè tra

$x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right), \ldots \ldots \left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)$ dalla quale in qualunque maniera siasi, possa considerarsi dedotta l' equazione $P = 0$; ed in generale chiamasi *integrale* m^{esimo} di una equazione differenziale dell' ordine n, $P = 0$, un' altra equazione differenziale $N = 0$ dell' ordine $n - m$, (ovvero inferiore di un numero m d' unità a quello di $P = 0$), cioè un' altra equazione tra $x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right), \ldots \ldots \left(\frac{d^{n-m}y}{dx^{n-m}}\right)$, dalla quale possa risultare in una maniera qualunque $P = 0$.

E qui avvertiremo che un' equazione differenziale $P = 0$ dell' ordine n^{esimo} può risultare da un' equazione differenziale $Q = 0$ dell' ordine $n - m$ inferiore di m unità, combinando in una maniera qualunque le m equazioni che s' ottengono dalla $Q = 0$ per mezzo di m differenziazioni eseguite o sopra di essa ed i suoi successivi differenziali, ovvero sopra di essa e sopra combinazioni qualunque di questi differenziali medesimi; imperocchè abbiamo dimostrato (§. 22) che sussistendo un' equazione qualunque, non solo hanno luogo e sussistono i di lei differenziali esatti, ma ancora le combinazioni fatte in qualunque modo dei differenziali stessi.

§. 116. Data dunque un' equazione $P = 0$, differenziale del primo ordine, cioè in x, y e $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, per ritrovare il di lei integrale di primo ordine, che in questo caso è l' equazione primitiva, conviene cercare un' equazione $Q = 0$ in x ed y, tale che combinata essa in una maniera qualunque con la sua differenziale $dQ = 0$, possa ottenersi la proposta $P = 0$; ed in generale per ritrovare l' integrale n^{esimo} di un' equazione differenziale $P = 0$ dell' ordine $(m + n)^{esimo}$, conviene cercare un' equazione differenziale dell' ordine m^{esimo}, tale che combinata essa in qualunque modo con i suoi n differenziali successivi, conduca all' equazione $P = 0$.

Come nel Calcolo Differenziale di tutte le combinazioni che possono farsi con un numero n d' equazioni differenziali successive, non abbiam considerate che quelle le quali servono all' eliminazione di un numero n di costanti (§. 22); così nel Calcolo Integrale, le equazioni differenziali sono considerate come il risultato dell' eliminazione delle costanti dalle loro equazioni integrali, che vogliónsi trovare (a); per questo *integrare un' equazione* $P = 0$ *differenziale del primo ordine*, significa trovare un' equazione $Q = 0$ in x ed y, tale che eliminando per mezzo di essa e della sua differenziale $dQ = 0$, una costante, si giunga ad avere $P = 0$, ed in generale *trovare l' integrale* n^{esimo} *di un' equazione differenziale dell' ordine* $(m + n)^{esimo}$, *significa trovare un' equazione* $Q = 0$, *differenziale dell' ordine* m^{esimo}, tale che eliminando per mezzo di essa e dei suoi differenziali

$dQ = 0$, $d^2Q = 0$, ... $d^nQ = 0$, un numero n di costanti, s' ottenga la data $P = 0$. Così l' integrale secondo dell' equazione del secondo ordine

$y^2 = 2xy\left(\frac{dy}{dx}\right) - x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x^2y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, è

$y^2 = ax^2 + bx$, poichè eliminando a, b per mezzo di esso e dei suoi differenziali

$2y\left(\frac{dy}{dx}\right) = 2ax + b$, $2y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2a$, si giunge a quella equazione differenziale medesima.

Gli integrali dunque debbono contenere delle costanti di più delle equazioni differenziali, e siccome non essendovi alcuna traccia di queste costanti nell' equazioni differenziali, niente

(a) Confesso che in questa guisa si limita la generalità della ricerca degli integrali, poichè data un' equazione differenziale, se ne diminuisce in qualche modo la generalità, considerandola portata dalla particolare combinazione dell' eliminazione delle costanti.

è pronunziato sopra di esse, perciò posson queste ricevere tutti i valori che ci piace di dar loro, e si chiamano in conseguenza *arbitrarie*.

Un integrale dell' ordine n^{esimo} dovrà pertanto contenere un numero n di costanti arbitrarie; se poi alcune di queste costanti si fanno nulle, o si danno loro dei valori particolari, quell' equazione integrale prende allora il nome *d' Integrale Particolare*, e riceve il nome *d' Integrale Completo*, se lasciamo indeterminate ed al nostro arbitrio quelle costanti.

Quando l' ordine dell' integrale è eguale all' ordine dell' equazione differenziale proposta, allora siccome quest' integrale non contiene che x, y e le costanti, chiamasi *Integrale Finito* (nome improprio ma ricevuto) ovvero *Equazione Primitiva*. Così l' integrale terzo di un' equazione $P = 0$, differenziale del terzo ordine, è un' equazione $Q = 0$ in x, y, e tre costanti arbitrarie a, b, c; e questa è l' equazione primitiva in x ed y, ovvero l' integrale finito completo di $P = 0$.

Avendo poi dimostrato al §. 23 che un' equazione differenziale dell' ordine n^{esimo} può esser dedotta da un numero n di diverse equazioni differenziali dell' ordine $(n - 1)^{esimo}$, contenendo ciascuna una costante indeterminata di più, ne segue che un' equazione differenziale dell' ordine n^{esimo} ha un numero n di integrali primi completi o dell' ordine differenziale $n - 1$ immediatamente inferiore, da ciascuno dei quali può ottenersi la stessa equazione differenziale per mezzo dell' eliminazione della costante arbitraria, che esso contiene. Il Geometra M. Fontaine è il primo che ha fatto questa osservazione; e siccome tutti questi integrali appartengono alla stessa relazione di variabili, così eliminando per mezzo di essi (quando con alcun artifizio si giunga a ritrovarli) le quantità $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, ... $\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$, s' avrà un' equazione tra x, y ed un numero n di costanti arbitrarie, la quale sarà l' integrale finito completo della proposta equazione differenziale.

§. 117. Un' equazione $V = 0$ fra x, y e $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, ha per integrale completo un' altra equazione in x, y ed una costante arbitraria: sia la forma di questo integrale $\varphi(x, y, a) = 0$, ovvero $\varphi = 0$, indicando per φ una funzione determinata di x, y ed a. Allorchè si danno dei valori particolari ad a, si hanno come abbiam detto, altrettanti integrali particolari di quella equazione differenziale $V = 0$; così potendo dare ad a infiniti valori, s' avranno infinite relazioni particolari che soddisfaranno alla proposta. Per quanto però tutte queste relazioni possano essere diverse, pure esse dipendono da una supposizione comune, cioè che i valori particolari di a, da cui risultano, siano costanti.

Ora è facile concepire che se si facesse a variabile, o funzione di x e di y, ma nello stesso tempo questa funzione fosse tale, che nel differenziare $\varphi = 0$, i termini che la variabilità di a introduce, da se medesimi si annullassero, allora il risultato dell' eliminazione di a fra le due equazioni $\varphi = 0$, $d\varphi = 0$, sarebbe la stessa equazione $V = 0$, come se a fosse stata costante.

Sostituendo per a una tal funzione in $\varphi = 0$, s' avrà una nuova relazione fra le variabili che soddisfarà all' equazione differenziale $V = 0$, e che perciò sarà ancora essa un di lei integrale. Questa nuova relazione di variabili, o questo nuovo integrale, sarà diverso dagli altri, in quanto che quelli dipendono dal dare ad a dei valori costanti, e questo dal dare ad a un valore variabile: si chiama *Soluzione Particolare*.

La condizione dalla quale dipendono le soluzioni particolari, ci dà il mezzo di ritrovarle se esse esistono; infatti differenziando l' equazione $\varphi(x, y, a) = 0$, supponendo a variabile, avremo

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)dx + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)dx + \left(\frac{d\varphi}{da}\right)\left\{\left(\frac{da}{dx}\right)dx + \left(\frac{da}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)dx\right\} = 0,$$

ovvero più semplicemente

$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)dx + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)dy + \left(\frac{d\varphi}{da}\right)da = 0$; la quale se a è tale che $\left(\frac{d\varphi}{da}\right)da$ s' annulli da se medesima, diviene

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

che è la differenziale dell' integrale, come se a fosse stato costante. Da questa differenziale e dall' equazione $\varphi = 0$, eliminando a, s' ottiene la proposta $V = 0$.

L' equazione che abbiamo per determinare a è dunque $\left(\frac{d\varphi}{da}\right)da = 0$, la quale si decompone nelle due $\left(\frac{d\varphi}{da}\right) = 0$, $da = 0$.

Ora tutti i valori di a che soddisfanno ad alcuna di queste equazioni, ci daranno, sostituiti in $\varphi(x, y, a) = 0$ delle relazioni in x ed y che saranno tante equazioni integrali della proposta $V = 0$. All' equazione $da = 0$ soddisfà qualunque valore si prenda per a, purchè sia questo indipendente da x ed y, o costante riguardo ad esse; così essendo infiniti i valori che godono di questa condizione, si potranno avere infinite relazioni che saranno altrettante equazioni integrali della proposta. Queste sono gli integrali particolari dei quali abbiam parlato. Il primo membro dell' altra equazione $\left(\frac{d\varphi}{da}\right) = 0$ è evidentemente una funzione conosciuta di x, y e di a; s' avranno dunque da quest' equazione uno o più valori di a, espressi in x ed y; e ciascuno di questi valori sostituito in $\varphi(x, y, a) = 0$, ci darà una nuova relazione in x, y, che è un nuovo integrale della proposta; queste sono le soluzioni particolari di $V = 0$.

Per esempio l' equazione differenziale

$$y - 2x\left(\frac{dy}{dx}\right) + y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

ha per integrale completo $y^2 - 2ax + a^2 = 0$; essa risulta dall' eliminazione di a per mezzo di questo intagrale, e della differenziale $2y\left(\frac{dy}{dx}\right) - 2a = 0$.

Se ora facciamo $\varphi = y^2 - 2ax + a^2$, avremo $\left(\frac{d\varphi}{da}\right) = -2x + 2a = 0$, da cui si ricava $a = x$; e questo sarà il valore variabile da darsi ad a, il quale sostituito nell' integrale completo $y^2 - 2ax + a^2 = 0$, ci dà la soluzione particolare $y = x$ dell' equazione differenziale proposta.

Si comprende bene, che potranno farsi delle simili considerazioni per le equazioni degli ordini superiori.

Noi riserbiamo un Capitolo a parte per trattare con tutta l' estensione della ricerca delle soluzioni particolari.

§. 118. Abbiamo promessa (§. 33) una Teorìa completa dell' eliminazione delle costanti e delle funzioni per mezzo dell' equazioni differenziali: esponiamo ora questa dottrina che direttamente interessa l' integrazione dell' equazioni.

Sia dunque un' equazione qualunque $F(x, y, z) = 0$ fra tre variabili: quest' equazione differenziata per rapporto ad x, e per rapporto ad y, ci dà le due equazioni differenziali parziali

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dF}{dz}\right) = 0$$

$$\left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dF}{dz}\right) = 0$$

del primo ordine, le quali sussistono insieme con essa. Se dunque la proposta contiene due costanti a, b, potranno queste eliminarsi, ed avremo allora un' equazione a differenziali parziali del primo ordine, la quale conterrà due costanti arbitrarie di meno dell' equazione da cui dipende: „ Dunque data un' e-
„ quazione a differenziali parziali del primo ordine fra tre va-
„ riabili x, y, z, e $\left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dy}\right)$, il di lei integrale completo,
„ cioè l' equazione primitiva da cui dipende, dovrà contenere
„ due costanti arbitrarie di più di essa „.

Dall' equazione $F = 0$, prendendo non solo le differenziali parziali del primo ordine, ma ancora le sue differenziali parziali del secondo, si dedurranno altre cinque equazioni che sussisterranno con essa. Tutte queste equazioni formano il seguente sistema

$$(1) \ldots F = 0$$

$$(2) \ldots \left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$$

$$(3) \ldots \left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$$

$$(4) \ldots \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{d^2F}{dz^2}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = 0$$

$$(5) \ldots \left(\frac{d^2F}{dy^2}\right) + 2\left(\frac{d^2F}{dydz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) + \left(\frac{d^2F}{dz^2}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = 0$$

$$(6) \ldots \left(\frac{d^2F}{dxdy}\right) + \left(\frac{d^2F}{dxdz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) + \left(\frac{d^2F}{dzdy}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{d^2F}{dz^2}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) = 0.$$

Se dunque la proposta contenesse cinque costanti, allora per mezzo delle cinque equazioni differenziali, potrebbero queste eliminarsi, e s' otterrebbe un' equazione a differenziali parziali del secondo ordine, con cinque costanti di meno di quella, da cui è stata dedotta „ Dunque data un' equazione a dif-
„ ferenziali parziali del secondo ordine, fra le variabili $x, y,$
„ z, e $\left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dy}\right), \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right), \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right), \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)$, il di lei integrale com-
„ pleto dovrà contenere cinque costanti arbitrarie di più di
„ essa „.

Venendo all' equazioni differenziali del terzo ordine, potrebbero dedursi da $F = 0$ altre quattro equazioni che avrebbero luogo insieme con essa, e con le cinque differenziali del primo e del secondo ordine. S' avrebbero allora dieci equazioni che sussisterebbero nello stesso tempo, per mezzo delle quali potrebbero eliminarsi nove costanti arbitrarie; ed il risultato di questa eliminazione sarebbe un' equazione a differenziali parziali del terzo ordine „ Data dunque un' equazione di un tale
„ ordine tra x, y, z, $\left(\frac{dz}{dx}\right) \ldots\ldots\ldots \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) \ldots\ldots\ldots$ il di lei
„ integrale completo dovrà contenere nove costanti arbitrarie „.

In generale è facile vedere „ Che l' integrale completo di
„ un' equazione a differenziali parziali dell' ordine n^{esimo} fra tre

„ variabili dovrà contenere un numero $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ di co-
„ stanti arbitrarie che non si trovano nell' equazione differen-
„ ziale „.

§. 119. Se l' equazione fosse fra quattro variabili $F(x, y, z, u) = 0$, o più semplicemente $F = 0$, sussisterebbero insieme con essa tre equazioni alle differenziali parziali del primo ordine rapporto ad x, ad y, e ad u, cioè

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$$

$$\left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$$

$$\left(\frac{dF}{du}\right) + \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dz}{du}\right) = 0.$$

Eliminando per mezzo di queste tre equazioni tre costanti, avremo un' equazione a differenziali parziali del primo ordine in $x, y, u, \left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dy}\right), \left(\frac{dz}{du}\right)$, la quale conterrà tre costanti di meno dell' equazione $F = 0$: „ Dunque l' integrale completo
„ di una equazione a differenziali parziali del primo ordine fra
„ quattro variabili, deve contenere tre costanti arbitrarie; in
„ generale l' integrale completo di una equazione a differenzia-
„ li parziali dell' ordine n^{esimo} fra quattro variabili, deve con-
„ tenere un numero $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3} - 1$ di costanti arbi-
„ trarie „.

Disposti i risultati che abbiamo ottenuti nella seguente Tabella, scopriremo la legge che ci determina il numero delle costanti arbitrarie che contener deve l' integrale di una equazione a differenziali parziali di un ordine qualunque, fra un qualunque numero di variabili.

Ordine dell' Equazioni.

	2. Var.	3. Var.	4. Var.	5. Var.	ec.
1	1	2	3	4	ec.
2	2	5	9	ec.	
3	3	9	ec.		
4	4	ec.			
ec.	ec.				
ec.					
ec.					
n	n	$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$	$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3} - 1$	$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.3.4} - 1$	ec.

I numeri della prima colonna verticale indicano l' ordine dell' equazione a differenziali parziali: quelli della prima orizzontale, il numero delle variabili; e quei che sono nell' interno della Tavola, il numero delle costanti arbitrarie che contiene l' integrale completo. Così volendo sapere quante costanti arbitrarie conterrà l' integrale completo di una equazione a differenziali parziali del secondo ordine fra quattro variabili, si cercherà il numero che corrisponde verticalmente a 4 Var. ed orizzontalmente all' ordine 2, e si troverà 9; l' integrale completo dunque di una tale equazione, dovrà contenere nove costanti arbitrarie.

§. 120. Questi diversi Teoremi però suppongono che in un' equazione a differenziali parziali di un certo ordine, si trovino tutti i differenziali parziali che a quell' ordine convengono: così per il secondo ordine, essi suppongono che in un' equazione fra tre variabili si trovino i termini che contengono $(\frac{d^2z}{dx^2})$, $(\frac{d^2z}{dxdy})$, $(\frac{d^2z}{dy^2})$: senza di ciò, essi non sarebbero veri in generale.

Infatti indichiamo le sei equazioni del §. 118 per $F=0$, $\frac{dF}{dx}=0$, $\frac{d^2F}{dx^2}=0$, $\frac{dF}{dy}=0$, $\frac{d^2F}{dy^2}=0$, $\frac{d^2F}{dxdy}=0$: per mezzo di tutte queste equazioni possono eliminarsi cinque costanti arbitrarie, come si è detto, ed ottenersi un' equazione a differenziali parziali del secondo ordine con cinque costanti di meno di $F=0$; se di queste si prendessero solamente cinque, lasciando indietro $\frac{d^2F}{dy^2}=0$, è chiaro che per mezzo di esse non potrebbero eliminarsi che quattro costanti arbitrarie, ed otterrebbesi un' equazione a differenziali parziali in x, y, z, $(\frac{dz}{dx})$, $(\frac{dz}{dy})$, $(\frac{d^2z}{dx^2})$, $(\frac{d^2z}{dxdy})$, senza $(\frac{d^2z}{dy^2})$; dunque l' integrale d' un' equazione a differenziali parziali del secondo ordine, la quale non contenga che due dei tre differenziali parziali $(\frac{d^2z}{dx^2})$,

$(\frac{d^2z}{dxdy})$, $(\frac{d^2z}{dy^2})$, non può avere in generale più che quattro costanti arbitrarie; e dovrà dirsi completo, come è quello di un' equazione dello stesso ordine a cui non manchi alcun termine, quando contiene cinque delle stesse costanti.

Nella medesima maniera si può dimostrare che l' integrale completo di un' equazione a differenziali parziali del secondo ordine, nella quale si trovi soltanto una delle tre funzioni $(\frac{d^2z}{dx^2})$, $(\frac{d^2z}{dxdy})$, $(\frac{d^2z}{dy^2})$, deve contenere in generale tre costanti arbitrarie, ne può contenerne di più.

Nella stessa guisa ragionando per le equazioni degli ordini superiori, troveremmo, che quando manca alcuna delle più alte differenziali parziali, gl' integrali completi non possono contenere il numero di costanti prescritto dalla Tabella del §. antecedente.

§. 121. Si è detto al §. 29. che data un' equazione tra x, y, z, ed una funzione $\varphi(p)$ di una determinata quantità p, poteva sempre da essa dedursi un' equazione ai differenziali parziali del primo ordine che non contenesse traccia alcuna di $\varphi(p)$. Considerando dunque una data equazione a differenziali parziali come il risultato dell' eliminazione di funzioni, ne concluderemo „ Che l' integrale completo di un' equazione a „ differenziali parziali del primo ordine contener deve una „ funzione arbitraria $\varphi(p)$ di una determinata funzione p „.

Supponiamo ora che abbiasi un' equazione $F(x, y, z, u, \varphi(p, q)) = 0$ fra quattro variabili, ed una funzione indeterminata delle quantità p, q che sono esse medesime funzioni determinate di x, y, z, u; e dimostreremo come al citato §. che possiamo da questa dedurre un' equazione ai differenziali parziali del primo ordine che non contenga $\varphi(p, q)$: infatti prendendo dalla proposta le tre equazioni ai differenziali parziali rapporto ad x, y, u, avremo

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)+\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dF}{dz}\right)+\left\{\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)\left[\left(\frac{dp}{dx}\right)+\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dp}{dz}\right)\right]+\left(\frac{d\varphi}{dq}\right)\left[\left(\frac{dq}{dx}\right)+\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dq}{dz}\right)\right]\right\}\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)=0$$

$$\left(\frac{dF}{dy}\right)+\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dF}{dz}\right)+\left\{\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)\left[\left(\frac{dp}{dy}\right)+\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dp}{dz}\right)\right]+\left(\frac{d\varphi}{dq}\right)\left[\left(\frac{dq}{dy}\right)+\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dq}{dz}\right)\right]\right\}\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)=0$$

$$\left(\frac{dF}{du}\right)+\left(\frac{dz}{du}\right)\left(\frac{dF}{dz}\right)+\left\{\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)\left[\left(\frac{dp}{du}\right)+\left(\frac{dz}{du}\right)\left(\frac{dp}{dz}\right)\right]+\left(\frac{d\varphi}{dq}\right)\left[\left(\frac{dq}{du}\right)+\left(\frac{dz}{du}\right)\left(\frac{dq}{dz}\right)\right]\right\}\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)=0.$$

Se ora per mezzo della proposta e di queste equazioni differenziali, eliminiamo $\varphi,\left(\frac{d\varphi}{dp}\right),\left(\frac{d\varphi}{dq}\right)$, avremo un' equazione fra $x, y, z, u, \left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dy}\right), \left(\frac{dz}{du}\right)$, la quale non conterrà traccia alcuna della funzione φ; e di quì concluderemo „ Che l' integrale „ completo di un' equazione ai differenziali parziali del primo or- „ dine fra quattro variabili, deve contenere una funzione arbi- „ traria $\varphi(p, q)$ di due quantità determinate p, q, funzioni an- „ cora esse delle variabili che entrano nell' equazione proposta „.

Egualmente si troverebbe „ Che l' integrale completo di u- „ na equazione a differenziali parziali del primo ordine fra cin- „ que variabili x, y, z, u, ω deve contenere una funzione ar- „ bitraria $\varphi(p, q, r)$; essendo p, q, r funzioni determinate „ di quelle variabili „.

§. 122. Passiamo a considerare l' equazioni del secondo ordine: sia $F=0$ un' equazione fra le variabili $x, y, z, f(p), \varphi(q)$, essendo p e q due funzioni date in x, y, z; e $f(p)$, $\varphi(q)$ due funzioni determinate o indeterminate qualunque di p e q rispettivamente.

Se si prendono l' equazioni a differenziali parziali del primo e secondo ordine, avremo sei equazioni compresavi la pro-

posta, nelle quali si troveranno le quantità $f(p)$, $\varphi(q)$, $\left(\frac{df}{dp}\right), \left(\frac{d\varphi}{dq}\right), \left(\frac{d^2f}{dp^2}\right), \left(\frac{d^2\varphi}{dq^2}\right)$. Ora per mezzo di queste sei equazioni non potranno eliminarsi queste sei quantità appartenenti a quelle funzioni: dunque si può concludere „ Che l' integrale „ completo di una data equazione ai differenziali parziali del „ secondo ordine, non può in generale contenere due funzioni „ arbitrarie „ dico *in generale* poichè le quantità p e q, ed i coefficienti delle funzioni, possono in dei casi particolari essere tali, che abbia luogo l' eliminazione delle suddette sei quantità per mezzo delle differenziali parziali del primo e del secondo ordine.

Uno di questi casi è per esempio, quando p e q sono eguali: infatti sia l' equazione $F=0$, fra $x, y, z, \varphi(p), f(p)$: le due equazioni ai differenziali parziali del primo ordine che hanno luogo insieme con essa, sono

$$(2) \ldots\ldots \left(\frac{dF}{dx}\right)+\left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)+R\left\{\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)+\left(\frac{dF}{df}\right)\left(\frac{df}{dp}\right)\right\}=0,$$

$$(3) \ldots\ldots \left(\frac{dF}{dy}\right)+\left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)+R'\left\{\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)+\left(\frac{dF}{df}\right)\left(\frac{df}{dp}\right)\right\}=0$$

$$\text{ove } R=\left(\frac{dp}{dx}\right)+\left(\frac{dp}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right),$$

$$R'=\left(\frac{dp}{dy}\right)+\left(\frac{dp}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right):$$

per mezzo di queste due equazioni possiamo eliminare nello stesso tempo la quantità

$\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)+\left(\frac{dF}{df}\right)\left(\frac{df}{dp}\right)$, ed otterremo un' equazione tra x, y, z e le due funzioni $\varphi(p), f(p)$; per mezzo della quale e della proposta potremo eliminare una delle due funzioni $\varphi(p)$, ovvero $f(p)$, e s' avrà un' equazione ai differenziali parziali del primo ordine, la quale conterrà una sola delle due funzioni arbitrarie: questa funzione poi che è rimasta, potrà eliminarsi prendendo i differenziali parziali dell' equazione, nella quale essa si ritrova, e perverremo infine ad un' equazione del secondo ordine senza alcuna traccia delle due funzioni $\varphi(p)$, $f(p)$.

Ma tornando a considerare le due funzioni $\varphi(p)$, $f(q)$, si vede che per eliminarle intieramente, conviene prendere i differenziali parziali del terzo ordine: si hanno allora altre quattro equazioni, nelle quali si trovano le quantità $\left(\frac{d^3\varphi}{dp^3}\right)$, $\left(\frac{d^3 f}{dq^3}\right)$: con quelle dieci equazioni non solo si possono eliminare le otto quantità appartenenti a quelle funzioni $\varphi(p)$, $f(q)$; ma ancora una costante arbitraria; così un' equazione a differenziali parziali del terzo ordine, può sempre considerarsi come il risultato dell' eliminazione di due funzioni $\varphi(p)$, $f(q)$, e di una costante, da un' equazione fra queste tre quantità e le variabili x, y, z.

E qui ha luogo l' osservazione fatta al §. 120, che cioè questi Teoremi non sono veri in generale, quando mancano alcuni differenziali dell' ordine dell' equazione.

Non ci estendiamo a trattare dell' eliminazione per un maggior numero di funzioni, poichè ciò non può avere difficoltà dopo gli esposti principj. Solo avvertiremo che suole dai Geometri stabilirsi che l' integrale completo di un' equazione a differenziali parziali dell' ordine n^{esimo} deve contenere un numero n di funzioni arbitrarie, dall' eliminazione delle quali essa risulta; il fin qui detto ci prova che una tale proposizione è ben lungi da potersi riguardare come un Teorema dimostrato. La natura particolare di ogni equazione a differenziali parziali determinerà il numero delle funzioni arbitrarie che debbono entrare nell' integrale completo. Avremo luogo di rendere tutto questo più chiaro per mezzo d' esempj nei Capitoli seguenti.

§. 123. Si è veduto al §. 118, che l' integrale completo di un' equazione a differenziali parziali del primo ordine contiene due costanti arbitrarie; abbiamo ancora veduto al §. 121, che il detto integrale contiene una funzione arbitraria; di modo che egli può avere una di queste due forme $F(x, y, z, a, b) = 0$; $F(x, y, z, \varphi(p)) = 0$.

Ora è facile provare che queste due equazioni sono egual-

mente generali, in quanto che può sempre dedursi la seconda dalla prima, e perciò le due costanti a e b possono considerarsi tener luogo della funzione $\varphi(p)$. Per questo supponiamo che le due costanti a, b contenute in $F = 0$, siano variabili e funzioni di x, y, z, e di più che a sia una funzione di b, cioè $a = \varphi(b)$: è chiaro che se la loro variabilità sarà tale da divenire nulli i termini che esse introducono nelle diverse equazioni differenziali di $F = 0$ (per mezzo delle quali s' otteneva la loro eliminazione), queste differenziali saranno le medesime, come se a e b fossero state costanti, ed otterremo il medesimo risultato come nella prima ipotesi, cioè la stessa equazione a differenziali parziali del primo ordine in x, y, z, $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ senza a, b.

Ora prendendo le due differenziali parziali dell' equazione $F(x, y, z, \varphi(b), b) = 0$, s' avrà

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dF}{dz}\right) + \left\{\left(\frac{db}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{db}{dz}\right)\right\}\left\{\left(\frac{dF}{db}\right) + \left(\frac{d\varphi}{db}\right)\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\right\} = 0$$

$$\left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dF}{dz}\right) + \left\{\left(\frac{db}{dy}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{db}{dz}\right)\right\}\left\{\left(\frac{dF}{db}\right) + \left(\frac{d\varphi}{db}\right)\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\right\} = 0,$$

le quali si riducono a quelle che porta la supposizione di a e b costanti, se facciamo

$$\left(\frac{dF}{db}\right) + \left(\frac{d\varphi}{db}\right)\left(\frac{dF}{d\varphi}\right) = 0;$$

dunque se prendiamo per b tal funzione delle variabili x, y, z che soddisfaccia a quest' ultima equazione, avremo allora un' equazione $F(x, y, z, \varphi(b), b) = 0$, la quale conterrà una funzione arbitraria $\varphi(b)$, e terrà luogo di $F(x, y, z, a, b) = 0$; dunque l' integrale è egualmente generale sia che contenga due costanti arbitrarie a, b, ovvero una funzione arbitraria, dal che ne segue che se troveremo in qualunque modo un' equazione contenente due costanti arbitrarie che soddisfaccia ad una equazione a differenziali parziali del primo ordine, potremo ridurla a contenere una funzione arbitraria, facendo $a=\varphi(b)$, e determinando b per mezzo della ritrovata equazione.

Per esempio, l'equazione a differenziali parziali $z-x\left(\frac{dz}{dx}\right)-y\left(\frac{dz}{dy}\right)=0$ ha per integrale completo $z=ax+by$, poichè essa risulta dall'eliminazione di a e b. Se facciamo $a=\varphi(b)$, avremo

$z-x\varphi(b)-by=0$, e per determinare b l'equazione $\left(\frac{d\varphi}{db}\right)=-\frac{x}{y}$: quest'ultima equazione ci dice che $-\frac{x}{y}$ è eguale ad una certa funzione di b, senza d'altr'onde pronunziare nulla sopra la natura della funzione; dunque viceversa sarà b eguale ad una funzione di $\frac{x}{y}$, e quindi $b=f\left(\frac{x}{y}\right)$: sarà per tanto

$$z-x\varphi\left(f\left(\frac{x}{y}\right)\right)-f\left(\frac{x}{y}\right)\cdot y=0 : \text{ ovvero}$$

$$z-x\left\{\varphi\left(f\left(\frac{x}{y}\right)\right)-f\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{y}{x}\right\}=0, \text{ ovvero}$$

$z-x\Psi\left(\frac{x}{y}\right)=0$, rappresentando per Ψ una funzione qualunque arbitraria della quantità $\frac{x}{y}$: quest'ultima equazione è anche l'integrale completo della proposta.

Egualmente l'integrale completo di una equazione a differenziali parziali del primo ordine tra quattro variabili x, y, z, u deve contenere, secondo ciò che abbiam detto (§. 118), tre costanti arbitrarie, ovvero (§. 121) una funzione arbitraria $\varphi(p, q)$; così esso può avere la forma $F(x, y, z, u, a, b, c)=0$, ovvero la forma $F(x, y, z, u, \varphi(p, q))=0$: ora queste due forme sono egualmente generali, potendosi sempre ridurre la prima alla seconda: infatti supponiamo a, b, c quantità variabili, e di più che sia $a=\varphi(b, c)$ senza d'altr'onde nulla

pronunziare sopra la natura di quella funzione: le differenziali parziali dell'equazione $F(x, y, u, z, a, b, c)=0$ saranno le stesse se i termini che introduce la variabilità di quelle costanti, svaniscono da se medesimi; prendiamo dunque queste differenziali, ed avremo

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)+\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dF}{dz}\right)+\left\{\left(\frac{db}{dx}\right)+\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{db}{dz}\right)\right\}\left\{\left(\frac{dF}{db}\right)+\left(\frac{d\varphi}{db}\right)\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\right\}+$$
$$\left\{\left(\frac{dc}{dx}\right)+\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dc}{dz}\right)\right\}\left\{\left(\frac{dF}{dc}\right)+\left(\frac{d\varphi}{dc}\right)\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)\right\}=0,$$

le altre differenziali rapporto ad y e ad u, saranno simili a questa, e conterranno respettivamente y ed u invece di x.

Ora è evidente che se determineremo b e c in modo che siano soddisfatte queste due equazioni

$$\left(\frac{dF}{db}\right)+\left(\frac{d\varphi}{db}\right)\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)=0$$

$$\left(\frac{dF}{dc}\right)+\left(\frac{d\varphi}{dc}\right)\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)=0,$$

otterremo per b e per c due funzioni delle variabili x, y, u, z, le quali ci daranno per a una funzione arbitraria $a=\varphi(b, c)$, e questi tre valori di a, b, c sostituiti in $F(x, y, u, z, a, b, c)=0$, ci daranno un'equazione che invece delle tre costanti arbitrarie conterrà una funzione arbitraria $\varphi(p, q)$, essendo p e q date in x, y, z, u.

Osserviamo che se non stabiliremo alcuna relazione tra quelle costanti, incontreremo nell'equazioni differenziali i termini $\left(\frac{dF}{da}\right), \left(\frac{dF}{db}\right), \left(\frac{dF}{dc}\right)$, i quali eguaglieremo a zero, onde ottenere i risultati stessi che convengono all'ipotesi di a, b, c costanti. In questo caso le equazioni $\left(\frac{dF}{da}\right)=0$, $\left(\frac{dF}{db}\right)=0$, $\left(\frac{dF}{dc}\right)=0$ ci daranno i valori di a, b, c espressi in funzioni determinate di x, y, z. Queste funzioni sostituite in $F(x, y, z, a, b, c) = 0$, somministreranno una nuova relazione in x, y, z che soddisfarà alla proposta equazione ai differenziali parziali, e potremo dare in conseguenza ad essa il nome di soluzione particolare, perchè ottenuta con lo stesso ragionamento usato (§. 117) per le equazioni differenziali tra due variabili.

Si vede come dovremmo trattare l'equazioni ad un maggior numero di variabili.

§. 124. Premessi questi principj sopra l'integrazione delle equazioni, noi faremo osservare che non vi è alcun metodo generale, per il quale possa trovarsi l'integrale di una data equazione differenziale, ed a questo riguardo il Calcolo Integrale altro non contiene che metodi particolari, adattati piuttosto ad un ramo di equazioni che ad un altro.

L'equazioni lineari, cioè quelle nelle quali i differenziali di qualunque ordine, non sono elevati al di là del primo grado, sono le sole, per cui esistano dei metodi dotati di qualche generalità, onde averne i loro integrali. Di queste parleremo nei due Capitoli seguenti.

Abbiamo detto non esservi metodo generale per integrare l'equazioni, poichè di troppo limitata utilità è quello che ci è dato dal Teorema di Tajlor per avere l'integrale completo, espresso per serie di qualunque siasi equazione differenziale.

Finiremo questo Capitolo con lo spiegare un tal metodo, che applicheremo all'equazioni del secondo ordine, potendo farsi lo stesso ragionamento per l'equazioni degli ordini superiori.

Sia dunque da integrarsi $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \varphi\left(x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)\right)$.

Indichiamo per y_x quella funzione di x, la quale soddisfà alla proposta equazione. Qualunque sia y_x, si ha sempre (§. 35)

$$y_x = y_0 + x\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \frac{x^3}{2.3}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + \text{ec.}$$

facendo però $x = 0$ a differenziazioni eseguite. Conosciuta la funzione y_x si hanno subito i coefficienti della serie; viceversa

se si conosceranno questi coefficienti, sarà conosciuta la serie, la cui somma è l'espressione finita di y_x.

Questi coefficienti cominciando da $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, si conoscono appunto per mezzo della data equazione e delle di lei differenziali: infatti se facciamo $x = 0$, ed indichiamo semplicemente per y_0, y'_0, y''_0 ec., i valori di y, $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ ec., avremo $y''_0 = \varphi(y_0, y'_0)$; prendendo la differenziale prima della proposta, e facendovi $x = 0$, avremo y'''_0 dato per y''_0, y'_0, y_0, ovvero per y'_0, y_0, giacchè $y''_0 = \varphi(y_0, y'_0)$: nella stessa guisa troveremo y''''_0 dato per y'_0, y_0 e così di seguito. Le quantità y_0, y'_0 rimangono indeterminate per la natura stessa della ricerca, e potranno essere costanti arbitrarie C, C' qualunque.

Sarà dunque

$$y = C + C'x + y''_0 \cdot \frac{x^2}{2} + y'''_0 \cdot \frac{x^3}{2.3} + \text{ec.}$$

l'integrale completo di quell'equazione del secondo ordine.

Quando la serie è sommabile, l'espressione di y è composta di un numero finito di termini.

E si vede facilmente che questo metodo è generale per l'equazioni di qualunque ordine. Abbiamo l'integrale completo espresso in serie, e per ottenerlo non devono farsi che delle differenziazioni.

Per farne un esempio, sia $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = ay$, essendo a costante: avremo allora

$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = a\left(\frac{dy}{dx}\right)$; $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) = a\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ ec;

dunque $y''_0 = aC$; $y'''_0 = aC'$; $y''''_0 = a^2C$; $y^{v}_0 = a^2C'$; $y^{vi}_0 = a^3C$ ec., e perciò

$$y = C + C'x + C\frac{ax^2}{2} + C'\frac{ax^3}{2.3} + C\frac{a^2x^4}{2.3.4} + C'\frac{a^2x^5}{2.3.4.5} + \text{ec.}$$

sarà l' integrale completo di $(\frac{d^2y}{dx^2}) = ay$.

Se ora facciamo $C = A + A'$, $C' = A\sqrt{a} - A'\sqrt{a}$, essendo A, A' due costanti arbitrarie, avremo

$$y = A + A\sqrt{a}.x + A\frac{a.x^2}{2} + A\frac{a\sqrt{a}.x^3}{2.3} + \text{ec.}$$

$$+ A' - A\sqrt{a}.x + A'\frac{a.x^2}{2} - A'\frac{a\sqrt{a}.x^3}{2.3} + \text{ec.}$$

che si riduce evidentemente a

$y = Ae^{x\sqrt{a}} + A'e^{-x\sqrt{a}}$, essendo e il numero, il cui logaritmo iperbolico è l' unità.

Per l' equazioni a differenziali parziali sia da integrarsi $(\frac{dz}{dx}) = b(\frac{dz}{dy})$.

Indichiamo per $z_{x,y}$ quella funzione che soddisfà alla proposta: qualunque sia questa funzione si ha sempre

$$z_{x,y} = z_{o,y} + x(\frac{dz}{dx}) + \frac{x^2}{2}(\frac{d^2z}{dx^2}) + \text{ec.}$$

facendo dopo le differenziazioni, $x = o$.

L' equazione proposta lascia indeterminata $z_{o,y}$; sarà per tanto $z_{o,y}$ una funzione arbitraria $\varphi(y)$ di y. Differenziando successivamente la suddetta equazione rapporto ad x, si ha

$$(\frac{d^2z}{dx^2}) = (\frac{d^2z}{dxdy})b = b\left(\frac{d(\frac{dz}{dx})}{dy}\right);$$

$$(\frac{d^3z}{dx^3}) = b(\frac{d^3z}{dx^2dy}) = b\left(\frac{d(\frac{d^2z}{dx^2})}{dy}\right);$$

$$(\frac{d^4z}{dx^4}) = b(\frac{d^4z}{dx^3dy});$$

ec.,

facendo dunque in queste equazioni e nella proposta $x = o$, avremo

$$(\frac{dz}{dx}) = b(\frac{d\varphi}{dy});$$

$$(\frac{d^2z}{dx^2}) = b^2(\frac{d^2\varphi}{dy^2});$$

$$(\frac{d^3z}{dx^3}) = b^3(\frac{d^3\varphi}{dy^3});$$

ec., e perciò

$$z_{x,y} = \varphi(y) + bx(\frac{d\varphi}{dy}) + \frac{b^2x^2}{2}(\frac{d^2\varphi}{dy^2}) + \text{ec.},$$

che si riduce evidentemente a

$z_{x,y} = \varphi(y + bx)$: e tale è l' integrale completo della proposta equazione a differenziali parziali. Non ci estendiamo di più sopra a questo metodo, poichè nei casi un poco complicati, esso conduce a risultati intrattabili.

CALCOLO INTEGRALE

CAP. III.

Integrazione dell' Equazioni Lineari fra due Variabili.

§. 125. Le equazioni, nelle quali le quantità y, $(\frac{dy}{dx})$, $(\frac{d^2y}{dx^2})$ ec., non sono elevate che alla prima potenza, si chiamano *Lineari*; così la formula generale di un' equazione lineare dell' ordine n^{esimo} è

$$Ay + B(\frac{dy}{dx}) + C(\frac{d^2y}{dx^2}) + \ldots\ldots + P(\frac{d^ny}{dx^n}) = X:$$

i coefficienti A, B, C ec., X possono essere o quantità costanti, o quantità variabili funzioni di x. Noi cominceremo da quelle del primo ordine, e quindi passeremo all' altre degli ordini superiori.

Siano dunque da integrarsi le due equazioni

1.ª $Ay - (\frac{dy}{dx}) = 0$

2.ª $Ay - (\frac{dy}{dx}) = X$

essendo A, X quantità costanti o variabili. Rammentiamo che per *Integrale Finito* s' intende un' equazione in x, y e tante

costanti arbitrarie, quante unità contiene l' ordine dell' equazione differenziale; e siccome l' integrale finito sussiste nello stesso tempo che l' equazione differenziale, perciò cavando da quello il valore di y, e sostituendolo in questa, la renderà identica. Per questo chiamasi anche integrale finito di una equazione differenziale un valore di y dato in x e contenente le suddette costanti arbitrarie, il quale soddisfaccia alla stessa equazione differenziale.

La prima delle due proposte equazioni si riduce evidentemente a questa

$\frac{1}{y}(\frac{dy}{dx})dx = Adx$: ora il primo membro è (§. 11) la differenziale esatta di ly; dunque intregrando, avremo

$$\int \frac{1}{y}(\frac{dy}{dx})dx = \int Adx,$$

e quindi $ly + C = \int Adx$, essendo C la costante arbitraria che si aggiunge integrando: diamo ora a questa costante la forma $-lC$, ed avremo

$ly - lC = l\frac{y}{C} = \int Adx$; e passando dai logaritmi ai numeri, troveremo

$$y = Ce^{\int Adx}:$$

quest' espressione sarà l' integrale completo (§. 116) della proposta, perchè contiene una costante arbitraria C.

Se A è eguale ad una costante a, avremo allora

$$y = Ce^{ax}.$$

Per integrare la seconda equazione, facciamo

$y = Ce^{\int Adx} \int zdx$, essendo C una costante, e $\int zdx$ una funzione di x da determinarsi.

Da questa supposizione si ricava

$$(\frac{dy}{dx}) = Ce^{\int Adx}.z + Ce^{\int Adx}.A\int zdx;$$

e facendo le opportune sostituzioni, si avrà

$\mathrm{AC}e^{\int \mathrm{A}dx} \int zdx - \mathrm{C}e^{\int \mathrm{A}dx} . z - \mathrm{C}e^{\int \mathrm{A}dx} . \mathrm{A}\int zdx = \mathrm{X}$,

dalla quale si ricava

$z = -\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{C}e^{\int \mathrm{A}dx}}$, ed in conseguenza

$y = -e^{\int \mathrm{A}dx} \int e^{-\int \mathrm{A}dx} \mathrm{X}dx$; ed aggiungendo una costante arbitraria alla formula

$\int e^{-\int \mathrm{A}dx} \mathrm{X}dx$, sarà

$y = e^{\int \mathrm{A}dx} \left\{ \mathrm{C} - \int e^{-\int \mathrm{A}dx} \mathrm{X}dx \right\}$:

quest' espressione rappresenta l' integrale completo dell' equazione 2^a.

Sia $\mathrm{A} = a$ costante; allora avremo

$y = e^{ax} \left\{ \mathrm{C} - \int e^{-ax} . \mathrm{X}dx \right\}$.

§. 126. Passiamo all' equazioni del secondo ordine:

3^a. $\mathrm{A}y + \mathrm{B}(\frac{dy}{dx}) + \mathrm{C}(\frac{d^2y}{dx^2}) = 0$

4^a. $\mathrm{A}y + \mathrm{B}(\frac{dy}{dx}) + \mathrm{C}(\frac{d^2y}{dx^2}) = \mathrm{X}$

nelle quali A, B, C sono coefficienti costanti, ed X una data funzione di x.

Avendo quì sopra trovato che soddisfà all' equazione del primo ordine la funzione esponenziale $\mathrm{C}e^{ax}$, proviamo se una simil forma potesse soddisfare all' equazione 3^a., e poniamo $y = \mathrm{E} . e^{ax}$, essendo E, a due costanti da determinarsi. Da questa supposizione si ricava

$(\frac{dy}{dx}) = \mathrm{E}e^{ax} . a$;

$(\frac{d^2y}{dx^2}) = \mathrm{E}a^x . a^2$;

dunque sostituendo, avremo

$\mathrm{E}e^{ax} . \mathrm{A} + \mathrm{E}e^{ax} . \mathrm{B}a + \mathrm{E}e^{ax} . \mathrm{C}a^2 = 0$, e quindi

$\mathrm{A} + \mathrm{B}a + \mathrm{C}a^2 = 0$. Rimarrà pertanto la costante E indeterminata, ed a si determinerà per mezzo di un' equazione di secondo grado, e s' avranno per essa due valori a', a'', i quali saranno le due radici di quell' equazione.

Dunque l' equazione 3^a. sarà soddisfatta da

$y = \mathrm{E}'e^{a'x}$, ovvero $y = \mathrm{E}''e^{a''x}$, essendo E', E'' due costanti arbitrarie; e siccome l' equazione 3^a. è lineare, soddisfarà perciò ad essa ancora la somma delle due espressioni trovate per y, ed avremo

$y = \mathrm{E}'e^{a'x} + \mathrm{E}''e^{a''x}$ per esprimere l' integrale della proposta, il quale sarà completo, perchè contiene due costanti arbitrarie E', E''.

Per integrare l' equazione 4^a, facciamo

$y = e^{ax} \int zdx$, essendo a una costante da determinarsi, e $\int zdx$ una funzione di x parimente da determinarsi.

Da una tal posizione si ha

$(\frac{dy}{dx}) = e^{ax} . a\int zdx + e^{ax} z$

$(\frac{d^2y}{dx^2}) = e^{ax} . a^2\int zdx + 2e^{ax} . az + e^{ax}(\frac{dz}{dx})$;

e facendo le opportune sostituzioni nell' equazione 4^a., avremo

$(\mathrm{A} + \mathrm{B}a + \mathrm{C}a^2)\int zdx + (\mathrm{B} + 2\mathrm{C}a) z + \mathrm{C}(\frac{dz}{dx}) = \frac{\mathrm{X}}{e^{ax}}$.

Quest' ultima equazione che noi abbiamo ottenuta per la determinazione di a e di z, lascia una di queste quantità al

nostro arbitrio; perciò facendo
$A + B\alpha + C\alpha^2 = 0$, potremo con questa equazione determinare α, e resterà per determinare z l' equazione

$$(B + 2C\alpha)z + C\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{X}{e^{\alpha x}},$$

che ha la stessa forma dell' equazione 2ª., e perciò si può integrare completamente.

Trovati i valori di α e di z, sarà cognito il valore di y, cioè l' integrale dell' equazione 4ª.

Facciamo alcune applicazioni.

Si domanda la somma della serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{2.4.6} + \frac{1}{2.4.6.8} + \text{ec.}$$

Se noi facciamo

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.4} + \frac{x^6}{2.4.6} + \frac{x^8}{2.4.6.8} + \text{ec.},$$

sarà y la somma di quella serie, quando in essa si ponga $x = 1$.

Differenziando ora la supposta equazione, avremo

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = x\left\{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.4} + \frac{x^6}{2.4.6} + \text{ec.}\right\} = x(1 + y),$$ e perciò

$-xy + \left(\frac{dy}{dx}\right) = x$ sarà l' equazione dalla quale dipende il valore di y.

Paragonando quest' equazione con la 2ª., s' avrà $A = x$, $X = -x$, e quindi

$$y = e^{\int x dx}\left\{C + \int e^{-\int x dx} x dx\right\} = e^{\frac{x^2}{2}}\left\{C + \int e^{-\frac{x^2}{2}} x dx\right\}$$

$y = e^{\frac{x^2}{2}}\left\{C - e^{-\frac{x^2}{2}}\right\} = Ce^{\frac{x^2}{2}} - 1$: determinando ora la costante in modo che quando $x = 0$, sia $y = 0$, avremo

$0 = Ce^0 - 1$, da cui $C = 1$, e perciò $y = e^{\frac{x^2}{2}} - 1$.

Sarà dunque la somma della nostra serie $= e^{\frac{x^2}{2}} - 1$, purchè si faccia $x = 1$: dunque avremo la detta somma $= \sqrt{e} - 1$; e sarà

$\sqrt{e} - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{2.4.6} + \frac{1}{2.4.6.8} + \text{ec.}$, essendo e il numero, il cui logaritmo iperbolico è l' unità.

Si dimanda la somma della serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \text{ec.}$$

Facendo $y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \text{ec.}$,
avremo

$\left(\frac{dy}{dx}\right) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \text{ec.} = 1 + y$; dunque y sarà dato dall' equazione $-y + \left(\frac{dy}{dx}\right) = 1$: facciamo nella formula dell' integrale dell' equazione 2ª, $A = 1$, $X = -1$, ed avremo

$$y = e^x\left\{C + \int e^{-x} dx\right\} = Ce^x - 1,$$

e perciò $y = e$, sarà la somma cercata.

Si dimandi infine la somma della serie

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{a(a+b)(a+2b)} + \text{ec.}$$

facendo

$$y = \frac{x^a}{a} + \frac{x^{a+b}}{a(a+b)} + \frac{x^{a+2b}}{a(a+b)(a+2b)} + \text{ec.},$$

s' avrà

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = x^{a-1} + \frac{x^{a+b-1}}{a} + \frac{x^{a+2b-1}}{a(a+b)} + \frac{x^{a+3b-1}}{a(a+b)(a+2b)} + \text{ec.}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = x^{a-1} + x^{b-1}\left\{\frac{x^a}{a} + \frac{x^{a+b}}{a(a+b)} + \frac{x^{a+2b}}{a(a+b)(a+2b)} + \text{ec.}\right\} =$$

$x^{a-1} + x^{b-1}y$: dunque y sarà dato da quest' equazione

$-x^{b-1}y + \left(\frac{dy}{dx}\right) = x^{a-1}$: avremo per tanto

$$y = e^{\frac{x^b}{b}}\left\{C + \int e^{-\frac{x^b}{b}} . x^{a-1}dx\right\}.$$

Facciamo $b = 3$, $a = 3$, ed avremo

$y = e^{\frac{x^3}{3}}\left\{C + \int e^{-\frac{x^3}{3}} x^2dx\right\} = Ce^{\frac{x^3}{3}} - 1$: sarà dunque

$$\sqrt[3]{e} - 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3.6} + \frac{1}{3.6.9} + \frac{1}{3.6.9.12} + \text{ec.}$$

L' equazione del secondo ordine

$2y - 3\left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$ paragonata con la 3ª., ci dà

$A = 2$, $B = -3$, $C = 1$, e si ha

$2 - 3\alpha + \alpha^2 = 0$ per determinare α', α'': sarà dunque

$\alpha' = 2$, $\alpha'' = 1$, ed in conseguenza

$y = E'e^{2x} + E''e^x$ l' integrale completo di quell' equazione.

§. 127. Ma lasciando a parte queste ricerche particolari, occupiamoci dell' integrazione dell' equazione generale dell' ordine n^{esimo}

$$(A) \ldots\ldots ay + b\left(\frac{dy}{dx}\right) + c\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \ldots\ldots + p\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right) = X$$

nella quale però $a, b, c \ldots . p$ sono coefficienti costanti, e X funzione qualunque di x.

Poniamo $y = e^{\alpha x}\int zdx$, essendo al solito α una costante da determinarsi, z una funzione parimente da determinarsi, ed e il numero il cui logaritmo iperbolico è l' unità.

Questa posizione ci darà

$$y = e^{\alpha x}\int zdx$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = e^{\alpha x}\left(\alpha\int zdx + z\right)$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = e^{\alpha x}\left(\alpha^2\int zdx + 2\alpha z + \left(\frac{dz}{dx}\right)\right)$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = e^{\alpha x}\left(\alpha^3\int zdx + 3\alpha^2 z + 3\alpha\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\right)$$

. . . .

$$\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right) = e^{\alpha x}\left\{\alpha^n\int zdx + n\alpha^{n-1}z + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^{n-2}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \ldots\right.$$

$$\left.\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\alpha^{n-3}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \ldots\ldots + \left(\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\right)\right\}$$: sostituite queste espressioni nella proposta, e ordinata secondo le differenziali della z, diverrà

$$e^{\alpha x}\left\{a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots\ldots + p\alpha^n\right\}\int zdx + e^{\alpha x}\left\{b + \right.$$

$$\left.2c\alpha + 3e\alpha^2 + \ldots\ldots + np\alpha^{n-1}\right\}z + e^{\alpha x}\left\{c + 3e\alpha + \right.$$

$$\left.3.2.f\alpha^2 + \ldots\ldots + \frac{n(n-1)}{2}p\alpha^{n-2}\right\}\left(\frac{dz}{dx}\right) + e^{\alpha x}\left\{e + \right.$$

$$\left.4f\alpha + \ldots\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}p\alpha^{n-3}\right\}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) +$$

$$e^{\alpha x}\left\{f + \ldots\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}p\alpha^{n-4}\right\}\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) + \ldots$$

$$\ldots + e^{\alpha x}p\left(\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\right) = X;$$

se adesso si suppone che il coefficiente del primo termine sia zero, avremo dopo aver diviso per $e^{\alpha x}$, per determinare α, l'equazione

$$(1)\ldots a + b\alpha + c\alpha^2 + e\alpha^3 + \ldots\ldots + p\alpha^n = 0,$$ e per determinare z l' equazione

$$(\mathrm{B})\ldots b'z + c'\left(\frac{dz}{dx}\right) + e'\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \ldots\ldots + p'\left(\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\right) = \frac{X}{e^{\alpha x}},$$

nella quale

$$b' = b + 2c\alpha + 3e\alpha^2 + \ldots\ldots + np\alpha^{n-1}$$

$$c' = c + 3e\alpha + 2\cdot 3\cdot f\alpha^2 + \ldots\ldots + \frac{n(n-1)}{2}p\alpha^{n-2}$$

$$e' = e + 4f\alpha + \ldots\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}p\alpha^{n-3}$$

. . . .

. . . .

$$p' = p.$$

E' facile anche vedere, che se si rappresenta per P il primo membro dell' equazione (1), avremo

$$b' = \left(\frac{dP}{d\alpha}\right),$$

$$c' = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2P}{d\alpha^2}\right),$$

$$e' = \frac{1}{2\cdot 3}\left(\frac{d^3P}{d\alpha^3}\right),$$

. . . .

. . . .

$$p' = \frac{1}{2\cdot 3\ldots\ldots n}\left(\frac{d^nP}{d\alpha^n}\right).$$

L' equazione che determina z, ed in conseguenza quella a cui si è fin ora ridotta l' integrazione della proposta, è una

equazione lineare dell' ordine $n-1$ a coefficienti costanti.

Per avere il valore di z, si faccia

$z = e^{\alpha_1 x}\int z'dx$, essendo α_1 un' altra costante, e z' una funzione di x, ambedue da determinarsi.

Sostituendo nell' equazione (B) i valori dei differenziali della z, facendo il coefficiente di $\int z'dx$ eguale a zero, e seguendo il medesimo andamento che sopra, avremo per determinare α_1 l' equazione algebraica del grado $n-1$

$b' + c'\alpha_1 + e'\alpha_1^2 + \ldots\ldots + p'\alpha_1^{n-1} = 0$, e per determinare z', l' equazione dell' ordine $n-2$ della forma

$$(\mathrm{C})\ldots c''z' + e''\left(\frac{dz'}{dx}\right) + \ldots\ldots + p''\left(\frac{d^{n-2}z'}{dx^{n-2}}\right) = \frac{X}{e^{\alpha x}\cdot e^{\alpha_1 x}},$$

nella quale

$$c'' = c' + 2e'\alpha_1 + 3f'\alpha_1^2 + \ldots\ldots + (n-1)p'\alpha_1^{n-2}$$

$$e'' = e' + 3f'\alpha_1 + \ldots\ldots + \frac{(n-1)(n-2)}{2}p'\alpha_1^{n-3}$$

. . . .

. . . .

$$p'' = p';$$

sostituiamo il valore di z in

$y = e^{\alpha x}\int z dx$, e si avrà

$y = e^{\alpha x}\int e^{\alpha_1 x}dx\int z'dx$, essendo z' dato da una equazione lineare a coefficienti costanti dell' ordine $n-2$; così l' integrale della proposta dipenderà dall' integrazione di una equazione lineare di un ordine inferiore di due unità.

Prima d' andare oltre tratteniamoci ad esaminare l' equazione (2): se a questa moltiplicata per α_1 s' aggiunge l' equazione (1), avremo l' equazione (2)'

$$(2)' \ldots\ldots (1) + \alpha_1 (2) = a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots\ldots\ldots +$$

$$p\alpha^n + b'\alpha_1 + c'\alpha^2_1 + \ldots\ldots\ldots + p'\alpha^n_1 = 0;$$ e ponendo per b', c' ec., i loro valori, si avrà

$$(2)' \ldots\ldots a + b\alpha + c\alpha + \ldots\ldots\ldots + p\alpha^n + (b + 2c\alpha + 3e\alpha^2 + \ldots\ldots\ldots + np\alpha^{n-1})\alpha_1 + (c + 3e\alpha + \ldots\ldots + \frac{n(n-1)}{2} p\alpha^{n-2})\alpha^2_1 + \ldots\ldots + p\alpha^n_1 = 0.$$

Ora questa equazione (2)' è la trasformata dell' equazione (1), quando in essa si pone $\alpha_1 + \alpha$ invece di α; dunque l' equazione (2)' sussistendo nel medesimo tempo che l' equazione (1), dovrà $\alpha_1 + \alpha$ essere un' altra radice dell' equazione (1) medesima; la qual radice se noi rappresentiamo per α', avremo $\alpha_1 + \alpha = \alpha'$, e quindi $\alpha_1 = \alpha' - \alpha$; così se le radici dell' equazione (1) sono $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots\ldots \alpha^{(n-1)}$, e quelle dell' equazione (2) siano $\alpha_1, \alpha'_1, \alpha''_1, \ldots\ldots \alpha^{(n-2)}_1$, avremo $\alpha_1 = \alpha' - \alpha$, $\alpha'_1 = \alpha'' - \alpha$, $\alpha''_1 = \alpha''' - \alpha$ ec.: si avrà dunque fin ora,

$y = e^{\alpha x} \int e^{(\alpha' - \alpha)x} dx \int z' dx$, ed il secondo membro dell' equazione (C), sarà $\frac{X}{e^{\alpha x} . e^{(\alpha' - \alpha)x}}$.

Per avere il valore di z' dato dall' equazione (C), supporremo $z' = e^{\alpha_2 x} \int z'' dx$ ed otterremo per determinare α_2 una equazione algebraica

$(3) \ldots\ldots c'' + e''\alpha_2 + f''\alpha^2_2 + \ldots\ldots + p''\alpha^{n-2}_2 = 0$ del grado $n - 2$, e per determinare z'' una equazione lineare dell' ordine $n - 3$ di questa forma

$$(D) \ldots\ldots e'''z'' + f'''(\tfrac{dz''}{dx}) + \ldots\ldots\ldots + p'''(\tfrac{d^{n-3}z''}{dx^{n-3}}) = \frac{X}{e^{\alpha x} . e^{(\alpha' - \alpha)x} . e^{\alpha_2 x}};$$

i valori di e''', f''' ec., dipendono da b'', c'' ec., come questi dipendono da b', c' ec., e come i medesimi b', c' ec. dipendono da a, b, c ec., coefficienti della proposta; così $p''' = p'' = p' = p$. Ora l' equazione (3) è rapporto all' equazione (2), ciò che questa è rapporto all' equazione (1): dunque facendo il medesimo ragionamento che per l' equazione (2), si vedrà che $\alpha_2 + \alpha_1$ è una radice α'_1 dell' equazione (2), come $\alpha_1 + \alpha$ lo era dell' equazione (1), e perciò avremo $\alpha_2 + \alpha_1 = \alpha'_1$, da cui si ricaverà $\alpha_2 = \alpha'_1 - \alpha_1$ e in generale rappresentando per $\alpha_2, \alpha'_2, \alpha''_2$ ec., $\alpha^{(n-3)}_2$, le $n - 2$ radici dell' equazione (3), s' avrà $\alpha_2 = \alpha'_1 - \alpha_1$, $\alpha'_2 = \alpha''_1 - \alpha_1$ ec., ma $\alpha_1 = \alpha' - \alpha$, ed $\alpha'_1 = \alpha'' - \alpha$; dunque $\alpha_2 = \alpha'' - \alpha - \alpha' + \alpha = \alpha'' - \alpha'$; e perciò

$z' = e^{(\alpha'' - \alpha')x} \int z'' dx$; dunque fin qui s' avrà

$y = e^{\alpha x} \int e^{(\alpha' - \alpha)x} dx \int e^{(\alpha'' - \alpha')x} dx \int z'' dx$, e il secondo membro dell' equazione (D), sarà

$\frac{X}{e^{\alpha x} . e^{(\alpha' - \alpha)x} . e^{(\alpha'' - \alpha')x}}$; avremo così data z'' da una equazione dell' ordine $n-3$, che rapporto a quella in z', è ciò che questa era rapporto a quella in z.

Col medesimo metodo si troverà

$z'' = e^{(\alpha'''-\alpha'')x}\int z''' dx$, essendo α''' un' altra radice dell' equazione (1); ed avremo per determinare z''' una equazione lineare dell' ordine $n-4$, il cui secondo membro sarà

$$\frac{X}{e^{\alpha x}\cdot e^{(\alpha'-\alpha)x}\cdot e^{(\alpha''-\alpha')x}\cdot e^{(\alpha'''-\alpha'')x}}.$$

Ora abbiam trovato

$y = e^{\alpha x}\int z dx$ . . . . e fatto $z =$

$e^{(\alpha'-\alpha)x}\int z' dx$, si ha

$y = e^{\alpha x}\int e^{(\alpha'-\alpha)x} dx\int z' dx$ . . . . e fatto $z' =$

$e^{(\alpha''-\alpha')x}\int z'' dx$, si ha

$y = e^{\alpha x}\int e^{(\alpha'-\alpha)x} dx\int e^{(\alpha''-\alpha')x} dx\int z'' dx$, e fatto $z'' =$

$e^{(\alpha'''-\alpha'')x}\int z''' dx$, si ha

$y = e^{\alpha x}\int e^{(\alpha'-\alpha)x} dx\int e^{(\alpha''-\alpha')x} dx\int e^{(\alpha'''-\alpha'')x} dx\int z''' dx$:

potremo dunque concludere che se le radici dell' equazione (1) sono $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$ ec., $\alpha^{(n-1)}$, avremo

$z''' = e^{(\alpha''''-\alpha''')x}\int z'''' dx$

$z'''' = e^{(\alpha^{v}-\alpha'''')x}\int z^{v} dx$, ed infine

$z^{(n-2)} = e^{(\alpha^{(n-1)}-\alpha^{(n-2)})x}\int z^{(n-1)} dx$.

La quantità $z^{(n-1)}$ sarà data da un' equazione dell' ordine $n-(n-1)-1$ che è zero, vale a dire da una equazione che non contiene più differenziali; tale equazione è

$$p^{(n-2)} z^{(n-1)} = \frac{X}{e^{\alpha x}\cdot e^{(\alpha'-\alpha)x}\cdot e^{(\alpha''-\alpha)x}\cdots\cdots e^{(\alpha^{(n-1)}-\alpha^{(n-2)})x}};$$

la quale si riduce a

$$z^{(n-1)} = \frac{X}{p e^{\alpha^{(n-1)}x}}, \text{ poichè } p^{(n-2)} = p^{(n-3)} = \dots\dots$$

$$\dots\dots = p'' = p' = p.$$

Egl' è facile vedere che continuando a fare le successive sostituzioni di z''', z'''' ec., $z^{(n-1)}$ nel valore di y, avremo infine

$$(a) \dots\dots y = \frac{1}{p} e^{\alpha x}\int e^{(\alpha'-\alpha)x} dx\int e^{(\alpha''-\alpha')x} dx \dots\dots \times$$

$$\int e^{(\alpha^{(n-1)}-\alpha^{(n-2)})x} dx\int \frac{X}{e^{\alpha^{(n-1)}x}} dx.$$

Tale espressione di y contenendo n segni integrali, sarà l' integrale completo della proposta, poichè questi introducono n costanti arbitrarie. Tutto ciò ha una perfetta somiglianza con quel che abbiamo detto delle equazioni a differenze finite.

Per farne un esempio, supponiamo che sia proposta l' equazione

$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) - 6m\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + 11m^2\left(\frac{dy}{dx}\right) - 6m^3y = n^x$: paragonando questa equazione con l' equazione generale (A), avremo

$a = -6m^3$, $b = 11m^2$, $c = -6m$, $p = 1$, $X = n^x$, e l' equazione algebraica da risolversi, sarà

$\alpha^3 - 6m\alpha^2 + 11m^2\alpha - 6m^3 = 0$, della quale indicando per $\alpha, \alpha', \alpha''$ le radici, avremo

$\alpha = 3m$, $\alpha' = 2m$, $\alpha'' = m$; l' integrale dunque della proposta sarà

$$y = e^{3mx} \int e^{-mx} dx \int e^{-mx} dx \int \frac{n^x}{e^{mx}} dx. \text{ Ora}$$

$$\int \frac{n^x}{e^{mx}} dx = \frac{n^x}{e^{mx}} : l\left(\frac{n}{e^m}\right) + \mathrm{A} = \frac{\frac{n^x}{e^{mx}}}{-m + ln} + \mathrm{A},$$ essendo A la costante che porta l' integrazione: così

$$\int e^{-mx} dx \left(\frac{\frac{n^x}{e^{mx}}}{-m + ln} + \mathrm{A} \right) = \int \left(\frac{\frac{n^x}{e^{2mx}}}{-m + ln} + \mathrm{A}e^{-mx} \right) dx =$$
$$\frac{\frac{n^x}{e^{2mx}}}{(-m + ln)(-2m + ln)} + \frac{\mathrm{A}e^{-mx}}{-m} + \mathrm{A}';$$

$$\int e^{-mx} dx \left(\frac{n^x : e^{2mx}}{(-m + ln)(-2m + ln)} + \frac{\mathrm{A}e^{-mx}}{-m} + \mathrm{A}' \right) = \int \left(\frac{n^x}{e^{3mx}} : (-m + ln)(-2m + ln) + \frac{\mathrm{A}e^{-2mx}}{-m} + \mathrm{A}'e^{-mx} \right) dx = \frac{n^x}{e^{3mx}} : (-m + ln)(-2m + ln)(-3m + ln) + \frac{\mathrm{A}e^{-2mx}}{2m^2} + \frac{\mathrm{A}e^{-mx}}{-m} + \mathrm{A}'';$$

se adesso si moltiplica tutta questa quantità per e^{3mx}, avremo per y questa espressione

$$y = n^x : (-m + ln)(-2m + ln)(-3m + ln) + \frac{\mathrm{A}e^{mx}}{2m^2} + \frac{\mathrm{A}'e^{2mx}}{-m} + \mathrm{A}''e^{3mx};$$

e considerando contenuti entro le costanti arbitrarie A, A′ i divisori $2m^2$, $-m$, s' avrà

$$y = n^x : (-m + ln)(-2m + ln)(-3m + ln) + \mathrm{A}e^{mx} + \mathrm{A}'e^{2mx} + \mathrm{A}''e^{3mx};$$

e questo è l' integrale completo della proposta equazione.

§. 128. Possiamo dare anche un' altra forma all' integrale, che noi abbiam ritrovato nel §. antecedente.

Faremo il ragionamento per un' equazione del terzo ordine, giacchè si vedrà che è sempre facile d' estenderlo agli ordini superiori.

Supponendo $n = 3$, avremo (si pone $p = 1$ per semplicità)

$$(b) \ldots\ldots y = e^{\alpha x} \int e^{(\alpha' - \alpha)x} dx \int e^{(\alpha'' - \alpha')x} dx \int e^{-\alpha'' x} dx,$$

essendo $\alpha, \alpha', \alpha''$ le tre radici dell' equazione

$a + b\alpha + c\alpha^2 + e\alpha^3 = 0$.

Integriamo per parti la formula (a), ed avremo

$$y = \frac{e^{\alpha' x} \int e^{(\alpha'' - \alpha')x} dx \int \mathrm{X}e^{-\alpha'' x} dx}{\alpha' - \alpha} - \frac{e^{\alpha x} \int e^{(\alpha'' - \alpha)x} dx \int \mathrm{X}e^{-\alpha'' x} dx}{\alpha' - \alpha} =$$
$$\frac{e^{\alpha'' x} \int e^{-\alpha'' x} \mathrm{X}dx}{(\alpha' - \alpha)(\alpha'' - \alpha')} - \frac{e^{\alpha' x} \int e^{-\alpha' x} \mathrm{X}dx}{(\alpha' - \alpha)(\alpha'' - \alpha')} - \frac{e^{\alpha'' x} \int e^{-\alpha'' x} \mathrm{X}dx}{(\alpha' - \alpha)(\alpha'' - \alpha)} +$$
$$\frac{e^{\alpha x} \int e^{-\alpha x} \mathrm{X}dx}{(\alpha' - \alpha)(\alpha'' - \alpha)}, \text{ ovvero}$$

$$y = \left\{ \frac{1}{(\alpha' - \alpha)(\alpha'' - \alpha')} - \frac{1}{(\alpha' - \alpha)(\alpha'' - \alpha)} \right\} e^{\alpha'' x} \int e^{-\alpha'' x} \mathrm{X}dx +$$
$$\frac{e^{\alpha' x} \int e^{-\alpha' x} \mathrm{X}dx}{(\alpha' - \alpha)(\alpha' - \alpha'')} + \frac{e^{\alpha x} \int e^{-\alpha x} \mathrm{X}dx}{(\alpha - \alpha')(\alpha - \alpha'')}, \text{ ovvero}$$

$$y = \frac{e^{\alpha'' x} \int e^{-\alpha'' x} \mathrm{X}dx}{(\alpha'' - \alpha')(\alpha'' - \alpha)} + \frac{e^{\alpha' x} \int e^{-\alpha' x} \mathrm{X}dx}{(\alpha' - \alpha)(\alpha' - \alpha'')} + \frac{e^{\alpha x} \int e^{-\alpha x} \mathrm{X}dx}{(\alpha - \alpha')(\alpha - \alpha'')};$$

se adesso a ciascuno dei segni d' integrazione s' aggiunge la sua costante arbitraria, s' avrà

$$y = \frac{e^{\alpha'' x}(C'' + \int e^{-\alpha'' x} X dx)}{(\alpha'' - \alpha')(\alpha'' - \alpha)} + \frac{e^{\alpha' x}(C' + \int e^{-\alpha' x} X dx)}{(\alpha' - \alpha)(\alpha' - \alpha'')} + \ldots\ldots$$

$$\frac{e^{\alpha x}(C + \int e^{-\alpha x} X dx)}{(\alpha - \alpha')(\alpha - \alpha'')},$$

che sarà l' integrale completo dell' equazioni lineari del terzo ordine sotto altra forma.

Il medesimo metodo ci darebbe l' integrale completo d' un' equazione dell' ordine n^{esimo}, così espresso

$$(c) \ldots y = \frac{e^{\alpha x}(C + \int e^{-\alpha x} X dx)}{m} + \frac{e^{\alpha' x}(C' + \int e^{-\alpha' x} X dx)}{m'} + \ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{e^{\alpha^{(n-1)} x}(C^{(n-1)} + \int e^{-\alpha^{(n-1)} x} X dx)}{m^{(n-1)}}$$ essendo

$$m = (\alpha - \alpha')(\alpha - \alpha'') \ldots\ldots (\alpha - \alpha^{(n-1)})$$

$$m' = (\alpha' - \alpha)(\alpha' - \alpha'') \ldots\ldots (\alpha' - \alpha^{(n-1)})$$

$$m'' = (\alpha'' - \alpha)(\alpha'' - \alpha') \ldots\ldots (\alpha'' - \alpha^{(n-1)})$$

. . . .

. . . .

$$m^{(n-1)} = (\alpha^{(n-1)} - \alpha)(\alpha^{(n-1)} - \alpha') \ldots (\alpha^{(n-1)} - \alpha^{(n-2)}).$$

Questa forma è però difettosa in alcuni casi, come vedremo in seguito.

Se noi supponiamo il secondo membro dell' equazione differenziale, nullo, cioè $X = 0$, avremo

$$\int e^{-\alpha^{(n-1)} x} X dx = \int 0 \,.\, dx = A^{(n-1)}$$

costante arbitraria, e l' espressione completa di y, cioè l' integrale dell' equazione

$$ay + b\left(\frac{dy}{dx}\right) + c\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \ldots\ldots + p\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

sarà

$$(d) \ldots y = \frac{1}{p} e^{\alpha x} \int e^{(\alpha' - \alpha)x} dx \int e^{(\alpha'' - \alpha')x} dx \ldots\ldots \times$$

$$\int e^{(\alpha^{(n-1)} - \alpha^{(n-2)})x} dx \,.\, A^{(n-1)};$$

ora avvertendo che in generale $\int e^{mx} dx = \frac{e^{mx}}{m} + C$, quando m è una costante, s' avrà

$$\int e^{(\alpha^{(n-1)} - \alpha^{(n-2)})x} dx \,.\, A^{(n-1)} = \frac{e^{(\alpha^{(n-1)} - \alpha^{(n-2)})x}}{\alpha^{(n-1)} - \alpha^{(n-2)}} A^{(n-1)} +$$

$$A^{(n-2)};$$

essendo $A^{(n-2)}$ una nuova costante arbitraria; e se si considera il divisore $\alpha^{(n-1)} - \alpha^{(n-2)}$, come contenuto entro la costante arbitraria $A^{(n-1)}$, avremo il superiore integrale eguale ad

$A^{(n-1)} \,.\, e^{(\alpha^{(n-1)} - \alpha^{(n-2)})x} + A^{(n-2)}$. Così s' avrà

$$\int e^{(\alpha^{(n-2)} - \alpha^{(n-3)})x} dx \int e^{(\alpha^{(n-1)} - \alpha^{(n-2)})x} dx \,.\, A^{(n-1)} =$$

$$\int e^{(\alpha^{(n-2)} - \alpha^{(n-3)})x} dx (A^{(n-1)} \,.\, e^{(\alpha^{(n-1)} - \alpha^{(n-2)})x} +$$

$$A^{(n-2)}) = \int A^{(n-1)} \,.\, e^{(\alpha^{(n-1)} - \alpha^{(n-3)})x} dx + \int A^{(n-2)} \times$$

$$e^{(\alpha^{(n-2)}-\alpha^{(n-3)})x}dx = A^{(n-1)}.e^{(\alpha^{(n-1)}-\alpha^{(n-3)})x} + A^{(n-2)}.e^{(\alpha^{(n-2)}-\alpha^{(n-3)})x} + A^{(n-3)},$$

considerando sempre contenuti entro le costanti arbitrarie $A^{(n-1)}$, $A^{(n-2)}$, i divisori che portano le integrazioni. Col medesimo metodo s' avrà

$$\int e^{(\alpha'-\alpha)x}dx\int e^{(\alpha''-\alpha')x}dx \ldots\ldots \int e^{(\alpha^{(n-1)}-\alpha^{(n-2)})x} \times A^{(n-1)}dx = A^{(n-1)}.e^{(\alpha^{(n-1)}-\alpha)x} + A^{(n-2)} \times \ldots\ldots e^{(\alpha^{(n-2)}-\alpha)x} + \ldots\ldots + A'e^{(\alpha'-\alpha)x} + A;$$

la quale espressione moltiplicata per $\frac{1}{p}e^{\alpha x}$, e considerato $\frac{1}{p}$ come contenuto entro le costanti arbitrarie, ci darà

$$(e) \ldots\ldots y = A.e^{\alpha x} + A'.e^{\alpha' x} + A''.e^{\alpha'' x} + \ldots\ldots + A^{(n-1)}.e^{\alpha^{(n-1)}x};$$

anche questa formula dell' integrale completo, quando $X = o$, è difettosa in alcuni casi.

Ad essa si giunge facendo subito $y = Ae^{\alpha x}$: imperocchè sostituendo il valore di y e dei suoi differenziali in

$$ay + b\left(\frac{dy}{dx}\right) + c\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \ldots\ldots + p\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right) = o,$$

la costante A rimane indeterminata, e per determinare α, si ha

$$a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots\ldots\ldots + p\alpha^n = o.$$

Quest' ultima equazione algebraica ci dà n valori di α, i

quali se sono $\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots\ldots \alpha^{(n-1)}$, avremo n espressioni per y, cioè

$$y = Ae^{\alpha x};\ y = A'e^{\alpha' x};\ y = A''e^{\alpha'' x};\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ y = A^{(n-1)}.e^{\alpha^{(n-1)}x},$$

la somma delle quali soddisfarà alla proposta, egualmente che ci soddisfà una di esse, e perciò sarà

$$y = Ae^{\alpha x} + A'e^{\alpha' x} + A''e^{\alpha'' x} + \ldots\ldots + A^{(n-1)}.e^{\alpha^{(n-1)}x}:$$

le lettere $A, A', A'', \ldots\ldots A^{(n-1)}$ indicano le n costanti arbitrarie.

§. 129. Quando alcune delle radici sono eguali, le formule (b) del §. 127, (d) del §. 128 rappresentano sempre gl' integrali completi dell' equazioni cui appartengono. Ma le formule (c), (e) del §. antecedente in questi casi cessano d' esser complete. Infatti siano $\alpha, \alpha', \alpha''$ tre radici eguali; la formula (b) diverrà allora

$$y = \frac{1}{p}e^{\alpha x}\int dx\int dx\int e^{(\alpha'''-\alpha)x}dx\int \ldots\ldots \int e^{-\alpha^{(n-1)}x}Xdx,$$

e la (d) diverrà

$$y = \frac{1}{p}e^{\alpha x}\int dx\int dx\int e^{(\alpha'''-\alpha)x}dx \ldots \int e^{(\alpha^{(n-1)}-\alpha^{(n-2)})x} \times A^{(n-1)}dx;$$

ora è evidente che sussistendo ancora in questo caso n segni integrali, le n integrazioni porteranno sempre un numero n di costanti arbitrarie.

Se le radici delle equazioni sono tutte eguali, le nostre formule divengono

$$y = \frac{1}{p} e^{\alpha x} \int dx \int dx \int dx \int \ldots\ldots \int dx \int \frac{X}{e^{\alpha x}} dx$$

$$y = \frac{1}{p} e^{\alpha x} \int dx \int dx \int dx \int \ldots\ldots \int A^{(n-1)} dx,$$

e rappresentano sempre gl' integrali completi, perchè le integrazioni indicate sono di numero n. Se l' equazione da integrarsi non avesse nel primo membro che il termine $\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)$, se fosse cioè $\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right) = X$; l' equazione da risolversi sarebbe $\alpha^n = 0$, dalla quale si ricaverebbe

$$\alpha = \alpha' = \alpha'' = \text{ec.} = \alpha^{(n-1)} = 0$$

e perciò l' espressione dell' integrale sarebbe

$$y = \int dx \int dx \int dx \int \ldots\ldots\ldots \int X dx,$$

essendo i segni integrali di numero n.

Questa espressione dell' integrale si trova ancora con le successive integrazioni del primo membro della stessa equazione $\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right) = X$; così si ha

$$\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) = \int X dx, \; \left(\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}\right) = \int dx \int X dx,$$

$$\left(\frac{d^{n-3} y}{dx^{n-3}}\right) = \int dx \int dx \int X dx \text{ ec.},$$

e si giunge in fine al medesimo risultato che ci ha dato il nostro metodo.

Supponiamo che l' equazione lineare da integrarsi cominci dalle differenze m^{esime}, e sia

$$g\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right) + h\left(\frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}}\right) + \ldots\ldots\ldots + p\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right) = X:$$

m è minore di n; l' equazione da risolversi sarà allora

$g\alpha^m + h\alpha^{m+1} + \ldots\ldots\ldots + p\alpha^n = 0$, la quale ha m radici $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots\ldots\ldots \alpha^{(m-1)}$ eguali a zero; l' integrale dunque dato dalla nostra formula (b), sarà

$$y = \frac{1}{p} \int dx \int dx \int \ldots\ldots\ldots \int e^{\alpha^{(m)} x} dx \int e^{(\alpha^{(m+1)} - \alpha^{(m)})x} \times$$

$$dx \int \ldots\ldots \int \frac{X}{e^{\alpha^{(n-1)} x}} dx,$$

nel quale i segni integrali che precedono $\int e^{\alpha^{(m)} x} dx$, sono $m - 1$ di numero, e tutti insieme sono di numero n; così le costanti che questi introducono, sono sempre n di numero.

Ma per vedere più chiaramente come gl' integrali (b), (d) si mantengano completi nel caso delle radici eguali, supponiamo che le radici eguali siano tre $\alpha = \alpha' = \alpha''$, come al principio di questo paragrafo.

Sia la porzione dell' integrale,

$$\int e^{(\alpha''' - \alpha)x} dx \int \ldots\ldots \int e^{(\alpha^{(n-1)} - \alpha^{(n-2)})x} dx \int \frac{X}{e^{\alpha^{(n-1)} x}} dx =$$

$$Z_x + A'',$$

essendo Z_x una funzione di x, e A'' una costante arbitraria; avremo allora

$y = \frac{1}{p} e^{\alpha x} \int dx \int dx \,(Z_x + A'')$: ora

$\int dx \,(Z_x + A'') = Z'_x + A''x + A'$; dunque

$y = \frac{1}{p} e^{\alpha x} \int dx \,(Z'_x + A''x + A')$; ed eseguendo questa integrazione, sarà

$$y=\frac{1}{p}e^{\alpha x}(Z''_x+A''x^2+A'x+A)\text{, ovvero}$$

$$y=\frac{1}{p}e^{\alpha x}Z''_x+A''x^2e^{\alpha x}+A'x^{\alpha x}+Ae^{\alpha x}.$$

Per Z'_x si è rappresentato l' integrale $\int dx\,.\,Z_x$; per Z''_x l' integrale $\int dx\,.\,Z'_x$; la quantità $\frac{1}{p}$ e i coefficienti che portano l' integrazioni, si considerano contenuti entro le costanti arbitrarie.

Ora siccome Z''_x contiene le costanti arbitrarie le quali sono comprese in Z_x che sono $n-3$ di numero, il valore di y ne conterrà perciò un numero n e resterà completo.

Quando X essendo nullo, alcune delle radici sono eguali, per esempio $\alpha=\alpha'=\alpha''$, si ha (poichè allora è

$$Z_x=A^{(n-1)}e^{(\alpha^{(n-1)}-\alpha)x}+\ldots\ldots+A'''e^{(\alpha'''-\alpha)x}+A''),$$

$$y=\frac{1}{p}e^{\alpha x}\int dx\int dx\left\{A^{(n-1)}e^{(\alpha^{(n-1)}-\alpha)x}+\ldots\ldots+A'''e^{(\alpha'''-\alpha)x}+A''\right\}=Ae^{\alpha x}+A'xe^{\alpha x}+A''x^2e^{\alpha x}+A'''e^{\alpha'''x}+\ldots\ldots+A^{(n-1)}e^{\alpha^{(n-1)}x},$$

e quest' integrale è sempre completo.

Così la formula (e)

$$y=Ae^{\alpha x}+A'e^{\alpha' x}+A''e^{\alpha'' x}+A'''e^{\alpha''' x}+\ldots\ldots\ldots\ldots+A^{(n-1)}e^{\alpha^{(n-1)}x},$$

nella quale i primi tre termini si riducono ad un solo ($A+A'+A''$) $e^{\alpha x}$ nel caso di tre radici eguali α,α',α'', conterrà invece di quei tre termini, i tre seguenti

$Ae^{\alpha x}+A'xe^{\alpha x}+A''x^2e^{\alpha x}$, che non potendosi ridurre più in un solo, faranno sì che la formula abbia sempre un numero n di costanti arbitrarie diverse, e sia perciò completa; e se in generale il numero delle radici eguali fosse m, l' integrale completo, invece dei termini

$$Ae^{\alpha x}+A'e^{\alpha' x}+\ldots\ldots\ldots+A^{(m-1)}e^{\alpha^{(m-1)}x}$$

conterrebbe i termini

$$Ae^{\alpha x}+A'e^{\alpha x}.x+A''e^{\alpha x}.x^2+\ldots\ldots+A^{(m-1)}e^{\alpha x}.x^{m-1}.$$

Tutto passa come nelle equazioni a differenze finite (Cap. III.).

§. 130. Dimostriamo ora come le formule (c) ed (e) sono inesatte, quando alcune delle radici α,α',α'' ec., sono eguali.

In questi casi esse divengono incomplete, non contenendo più il necessario numero di costanti arbitrarie. La formula per il caso in cui X non è nullo, ha di più l' inconveniente di rendere infiniti alcuni dei suoi termini. Se si suppone infatti che tre radici α,α',α'' siano eguali, i primi tre termini divengono

$$\frac{e^{\alpha x}(C+\int e^{-\alpha x}Xdx)}{m}+\frac{e^{\alpha x}(C'+\int e^{-\alpha x}Xdx)}{m'}+\frac{e^{\alpha x}(C''+\int e^{-\alpha x}Xdx)}{m''},$$

i quali hanno i loro numeratori che sono i medesimi, e i denominatori m,m',m'' nulli, poichè contengono i fattori $\alpha-\alpha'$, $\alpha'-\alpha''$, $\alpha''-\alpha$, i quali sono zero; questi termini perciò divengono infiniti.

Nel caso di X nullo, quando si hanno tre radici eguali, i primi tre termini

$Ae^{\alpha x} + A'e^{\alpha' x} + A''e^{\alpha'' x}$ si riducono ad uno solo ($A + A' + A''$) $e^{\alpha x}$, ovvero $Ce^{\alpha x}$ (considerando rappresentata da una sola costante C la somma delle tre costanti arbitrarie A, A′, A″), e l' integrele rimane incompleto, poichè gli mancano due costanti arbitrarie.

A tutti questi inconvenienti (a) hanno i Geometri supplito adoprando il metodo del Sig. d' Alambert, di cui noi abbiamo mostrato l' inesattezza dei suoi Principj nel Calcolo delle Differenze Finite, parlando della maniera di completare gl' integrali delle Equazioni a Differenze Finite. E perchè si veda più chiaramente che le riflessioni fatte contro quel metodo, vagliono ancora per il caso presente, noi lo adopreremo per ricompletare la formula superiore, quando due sole sono le radici eguali, quando cioè $\alpha = \alpha'$.

In questo caso i primi due termini $Ae^{\alpha x} + A'e^{\alpha' x}$ si riducono ad un solo $Ce^{\alpha x}$. Se però si fà $\alpha' = \alpha + \omega$, essendo ω

(a) Io credo di essere stato il primo a dimostrare l' inesattezza del Metodo di d' Alambert, ed a sostituirvene un altro dedotto dalle proprietà dei limiti delle radici dell' equazioni algebraiche, e dotato di tutto il rigore. Esposi tali dottrine, tanto riguardo alle Equazioni a Differenze Finite, che a quelle Differenziali, nel mio *Calcolo Integrale delle Equazioni Lineari* stampato a Firenze nel 1798. In seguito altri Geometri han fatto lo stesso, e tra questi il Bossut nel suo Corso di Calcolo Integrale. Relativamente poi alla medesima ricerca nel Tomo XI della Società Italiana del 1804 alla pag. 154 in una Memoria d' Analisi del Sig. Pietro Franchini Prof. a Lucca, si ritrova un nuovo metodo per ricompletare gl' integrali delle equazioni, di cui qui sopra parliamo. Questo anche dipende dalle proprietà stesse dei limiti delle radici: ad una tale indagine si è applicato l' Autore, poichè, come Ei dice, *sin ad ora non si è conosciuto altro ripiego per ricompletare gl' Integrali, che quello del Sig. d' Alambert*. Io mi sono incontrato col Sig. Franchini, scrivendo sei anni prima di Lui.

quantità piccolissima, avremo per quei due termini $Ae^{\alpha x} + A'e^{(\alpha+\omega)x}$, che saranno eguali ad

$$Ae^{\alpha x} + A'e^{\alpha x}.e^{\omega x} = Ae^{\alpha x} + A'e^{\alpha x}\left(1 + \omega x + \frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^3 x^3}{2.3} + \text{ec.}\right),$$

e trascurando gl' infinitamente piccoli degl' ordini superiori al primo (se le radici fossero tre si trascurerebbero gl' infinitamente piccoli degl' ordini superiori al secondo ordine, e così di seguito come nelle equazioni a differenze finite) s' avrà

$$Ae^{\alpha x} + A'e^{\alpha x}(1 + \omega x) = (A + A')e^{\alpha x} + A'\omega x.e^{\alpha x};$$

facciamo $A + A' = A$, $A'\omega = A'$, ed avremo per i primi due termini dell' integrale

$Ae^{\alpha x} + A'x.e^{\alpha x}$. Si vede dunque che un tal metodo ha per base i medesimi principj che abbiamo esaminati al luogo citato; perciò noi lo rigettiamo senza più parlarne.

Ma quelle formule possono di nuovo ridursi ad essere complete senza bisogno di ricorrere in modo alcuno al metodo del Sig. d' Alambert, deducendo la correzione agl' inconvenienti che contengono, da nessun principio a loro estrinseco, ma dalla natura stessa delle equazioni, di cui esse esprimono gl' integrali: questo è ciò che andiamo a vedere.

Nel caso di X nullo l' integrale dell' equazione

$$a + b\left(\frac{dy}{dx}\right) + c\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \dots\dots + p\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \text{ è}$$

$$y = Ae^{\alpha x} + A'e^{\alpha' x} + A''e^{\alpha'' x} + \dots\dots + A^{(n-1)}e^{\alpha^{(n-1)}x},$$

che è la somma di un numero n d' integrali particolari diversi (§. 128) $Ae^{\alpha x}$, $A'e^{\alpha' x}$ ec., $A^{(n-1)}e^{\alpha^{(n-1)}x}$, ciascuno dei quali contiene una costante arbitraria.

Quando alcune radici α, α' ec., $\alpha^{(n-1)}$ sono eguali, si hanno alcuni di questi integrali particolari eguali, e perciò scemando il numero degli integrali particolari, ciascuno dei quali è moltiplicato per una costante arbitraria diversa, la loro somma conterrà un minor numero di costanti arbitrarie, e l' integrale da essa rappresentato rimarrà incompleto.

Siccome α, α' ec., $\alpha^{(n-1)}$ sono le radici dell' equazione

$(1) \ldots\ldots a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots\ldots + p\alpha^n = 0$, è noto che le radici dell' equazione

$(1)' \ldots\ldots b + 2c\alpha + 3e\alpha^2 + \ldots\ldots\ldots + np\alpha^{n-1} = 0$,

(la quale nasce dal moltiplicare ciascun termine dell' equazione (1) per l' esponente che vi ha l' α, e dividere quindi per α), avranno per limiti (§. 63) le quantità α, α', ... $\alpha^{(n-1)}$: dunque se l' equazione (1) ha due radici eguali α, α', l' equazione (1)' avrà una radice eguale ad α; e perciò questa radice soddisfarà nel medesimo tempo alle equazioni (1), (1)': se ora l' equazione (1) si moltiplica per x e vi si aggiunga l' equazione (1)', avremo questa equazione $(1)x + (1)' = 0$, cioè

$(2) \ldots\ldots ax + b(\alpha x + 1) + c(\alpha^2 x + 2\alpha) + e(\alpha^3 x + 3\alpha^2) + \ldots\ldots + p(\alpha^n x + n\alpha^{n-1}) = 0$; ed una delle due radici eguali α, α' soddisfarà o renderà identiche nel medesimo tempo le due equazioni (1), (2).

Ora è evidente che qualunque valore di y, funzione di una delle radici eguali α e di x, il quale sostituito nella propo-

sta la trasformi nell' equazione (2), sarà un nuovo integrale particolare della proposta medesima. Se dunque si fa $y = A'x e^{\alpha x}$, essendo A' una costante arbitraria, si ha

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = A'e^{\alpha x}(\alpha x + 1)$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = Ae^{\alpha x}(\alpha^2 x + 2\alpha)$$

. . . .

. . . .

$\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right) = A'e^{\alpha x}(\alpha^n x + n\alpha^{n-1})$, e sostituendo questi valori nell' equazione

$ay + b\left(\frac{dy}{dx}\right) + \ldots\ldots\ldots + p\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$, abbiam precisamente l' equazione (2); dunque sarà $y = A'x \cdot e^{\alpha x}$ un' altro integrale particolare della proposta; dunque nel caso che α sia una delle radici eguali dell' equazione (1), soddisfà all' equazione differenziale non solo $y = Ae^{\alpha x}$, ma ancora $y = A'xe^{\alpha x}$; e perciò invece dei due termini $Ae^{\alpha x} + A'e^{\alpha' x}$ (i quali si riducono ad un solo) si metteranno i due $Ae^{\alpha x} + A'xe^{\alpha x}$, e così l' integrale essendo sempre un aggregato di n integrali particolari diversi, sarà completo.

§. 131. Nel caso che le radici eguali siano tre $\alpha = \alpha' = \alpha''$, una di tali radici soddisfarà nel medesimo tempo alle due equazioni (1), (2) del §. antecedente, ed all' equazione

$(1)'' \ldots\ldots 2c + 2 \cdot 3e\alpha + 3 \cdot 4f\alpha^2 + \ldots\ldots + n(n-1) \times p\alpha^{n-2} = 0$, le cui radici hanno per limiti quelle dell' equazione (1)'; quest' equazione (1)'' si ricava dall' equazione (1)', come si è ricavata la stessa (1)' da (1): se adesso si moltiplica l' equazione (1) per x^2, l' equazione $(1)'$ per $2x$, e s' aggiungono ad $(1)''$, avremo l' equazione

$$(3) \ldots\ ax^2 + b(\alpha x^2 + 2x) + c(\alpha^2 x^2 + 2\alpha . 2x + 2) + e(\alpha^3 x^2 + 3\alpha^2 . 2x + 2 . 3\alpha) + \ldots\ldots + p(\alpha^n x^2 + n\alpha^{n-1} . 2x + n(n-1)\alpha^{n-2}) = 0;$$

ed una delle radici eguali soddisfarà nel medesimo tempo alle tre equazioni (1), (2), (3).

Prendiamo ora per y una tal funzione di x e di α, che sostituita nella proposta, la trasformi nell' equazione (3); questa funzione sarà un altro integrale particolare della proposta.

E' facile vedere che $y = A''e^{\alpha x} . x^2$ ha siffatta proprietà, poichè generalmente si trova

$$\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right) = A''e^{\alpha x}(\alpha^n x^2 + 2 . n\alpha^{n-1} . x + n(n-1)\alpha^{n-2});$$

e sostituiti i valori di y e dei suoi differenziali nella proposta, ella si riduce all' equazione (3); dunque $y = Ae^{\alpha x} . x^2$ sarà un nuovo integrale particolare della proposta: dunque nel caso di tre radici eguali ad α, questa radice darà i tre integrali particolari diversi

$$y = Ae^{\alpha x},\ y = A'e^{\alpha x} . x,\ y = A''e^{\alpha x} . x^2;$$

onde invece dei tre termini dell' integrale completo

$$Ae^{\alpha x} + A'e^{\alpha' x} + A''e^{\alpha'' x},$$

i quali in questo caso si riducono ad uno solo, si porranno i tre seguenti

$$Ae^{\alpha x} + A'e^{\alpha x} . x + A''e^{\alpha x} . x^2;$$

e così l' integrale si manterrà completo.

Col medesimo ragionamento si può provare che se abbiamo un numero l di radici eguali, cioè

$$\alpha = \alpha' = \alpha'' = \ldots\ldots\ldots = \alpha^{(l-1)},$$

invece degli l termini

$$Ae^{\alpha x} + A'e^{\alpha' x} + \ldots\ldots\ldots + A^{(l-1)}e^{\alpha^{(l-1)}x},$$

i quali si riducono ad un solo, dovranno mettersi i termini

$$Ae^{\alpha x} + A'e^{\alpha x} . x + A''e^{\alpha x} . x^2 + \ldots\ldots + A^{(l-1)}e^{\alpha x} . x^{l-1};$$

ed allora l' integrale sarà sempre completato dal necessario numero di costanti arbitrarie.

Abbiamo veduto qui sopra, che nel caso di due radici eguali $\alpha = \alpha'$, una di queste radici soddisfa nel medesimo tempo alle due equazioni (1), $(1)'$. Se ora si moltiplica l' equazione (1) per φx e l' equazione $(1)'$ per Ψx, essendo φx, Ψx due funzioni di x, e si sommano queste due equazioni, avremo

$$(2) \ldots\ a . \varphi x + b(\alpha . \varphi x + \Psi x) + c(\alpha^2 . \varphi x + 2\alpha . \Psi x) + \ldots\ldots + p(\alpha^n . \varphi x + n\alpha^{n-1} . \Psi x) = 0;$$

ed è chiaro che una delle radici eguali soddisfarà nel medesimo tempo alle equazioni (1), (2). Dunque se per y si trova una tal funzione in x ed α, che sostituita nella proposta, la riduca all' equazione (2), questa sarà un nuovo integrale particolare della medesima.

Facciamo $y = Ae^{\alpha x}\varphi x$, ed avremo

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = Ae^{\alpha x}\left(\alpha\varphi x + \left(\frac{d\varphi x}{dx}\right)\right)$$

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) = Ae^{\alpha x}\left(\alpha^2\varphi x + 2\alpha\left(\frac{d\varphi x}{dx}\right) + \left(\frac{d^2\varphi x}{dx^2}\right)\right)$$

ec.

Affinchè dunque la proposta

$$ay + b\left(\frac{dy}{dx}\right) + c\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + p\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

si riduca all' equazione (2) col sostituirvi i valori dell' y e delle sue differenziali, conviene che sia $\left(\frac{d\phi x}{dx}\right) = \Psi x$, e $\left(\frac{d^2\phi x}{dx^2}\right) = 0$; da queste due equazioni si ricava $\phi x = Cx + C'$, $\Psi x = C$ (essendo C, C' due costanti arbitrarie), ed in conseguenza $y = Ae^{\alpha x}(Cx + C') = A'e^{\alpha x}.x + Ae^{\alpha x}$, avendo mutato la forma delle costanti, cioè avendo posto A' per AC, e A per AC'. Questo valore di y sarà il nuovo integrale particolare che dovrà aggiungersi all' espressione incompleta dell' y. Si perviene così al medesimo risultato trovato sopra.

E si potrebbe procedere in questa guisa direttamente alla ricerca degl' integrali particolari che hanno luogo per più radici eguali; e si troverebbero a *priori* quelle istesse espressioni per gl' integrali, le quali abbiamo di già ottenute per altra strada.

Noi non ci tratterremo a dedurre dalla natura dell' equazione differenziale il metodo di ricompletare la formula (c) del §. 128., per il caso in cui X non è nullo; poichè quella (b) del §. 127, dandoci sempre gl' integrali completi per qualunque caso, può soddisfare a qualsiasi quesito. Sarebbe però facile mostrare che non vi è bisogno di mai ricorrere al metodo del Sig. d' Alembert, qualunque sia la forma sotto la quale si tengono gl' integrali.

Passiamo a trattare dell' integrazione dell' equazioni a coefficienti variabili.

§. 132. Se i coefficienti a, b, c ec., p di questa equazione

$$(A) \ldots ay + b\left(\frac{dy}{dx}\right) + c\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + p\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right) = X,$$

sono funzioni dell' x; allora per averne l' integrale si farà $y = \alpha\int zdx$, essendo α e z due funzioni della variabile x da determinarsi. Dopo questa supposizione, avremo

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)\int zdx + \alpha z$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2\alpha}{dx^2}\right)\int zdx + 2\left(\frac{d\alpha}{dx}\right).z + \alpha\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = \left(\frac{d^3\alpha}{dx^3}\right)\int zdx + 3\left(\frac{d^2\alpha}{dx^2}\right).z + 3\left(\frac{d\alpha}{dx}\right).\left(\frac{dz}{dx}\right) + \alpha\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$$

. . . .

. . . .

$$\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right) = \left(\frac{d^n\alpha}{dx^n}\right)\int zdx + n\left(\frac{d^{n-1}\alpha}{dx^{n-1}}\right).z + \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{d^{n-2}\alpha}{dx^{n-2}}\right).\left(\frac{dz}{dx}\right) +$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\left(\frac{d^{n-3}\alpha}{dx^{n-3}}\right).\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + \alpha\left(\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\right);$$

e sostituendo questi valori nella equazione (A), troveremo

$$\left\{a\alpha + b\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + c\left(\frac{d^2\alpha}{dx^2}\right) + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + p\left(\frac{d^n\alpha}{dx^n}\right)\right\}\int zdx +$$
$$\left\{b\alpha + 2c\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + np\left(\frac{d^{n-1}\alpha}{dx^{n-1}}\right)\right\}z + \left\{c\alpha +\right.$$
$$\left.3e\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + \frac{n(n-1)}{2}p\left(\frac{d^{n-2}\alpha}{dx^{n-2}}\right)\right\}.\left(\frac{dz}{dx}\right) +$$
$$\left\{e\alpha + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}p\left(\frac{d^{n-3}\alpha}{dx^{n-3}}\right)\right\}.\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$\cdot\cdot\cdot\cdot + p\alpha\left(\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\right) = X:$$

se ora si fa eguale a zero il coefficiente della quantità $\int zdx$, s' otterrà per determinare α, quest' equazione

$$(1) \ldots\ldots a\alpha + b\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + c\left(\frac{d^2\alpha}{dx^2}\right) + \cdot\cdot\cdot\cdot + p\left(\frac{d^n\alpha}{dx^n}\right) = 0;$$

e per determinare z una equazione della forma

$$(B) \ldots b'z + c'\left(\frac{dz}{dx}\right) + e'\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \ldots + p'\left(\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\right) = X.$$

L' equazione (1) che determina α, non è altro che la proposta, nel caso che X sia nullo; e quella (B) che determina z, è una equazione dell' ordine $n - 1$, ancora essa a coefficienti variabili. Nella medesima maniera si faccia $z = \alpha' \int z' dx$, essendo ancora α', z' due funzioni di x da determinarsi, ed operando come per la proposta, s' avrà per determinare α', l' equazione

$$(2) \ldots (b'\alpha' + c'\left(\frac{d\alpha'}{dx}\right) + e'\left(\frac{d^2\alpha'}{dx^2}\right) + \ldots + p'\left(\frac{d^{n-1}\alpha'}{dx^{n-1}}\right) = 0;$$

e per determinare z', una equazione dell' ordine $n - 2$ di questa forma

$$c''z' + e''\left(\frac{dz'}{dx}\right) + \ldots + p''\left(\frac{d^{n-2}z'}{dx^{n-2}}\right) = X.$$

Se il valore di z si sostituisce in

$y = \alpha \int z dx$, si avrà

$y = \alpha \int \alpha' dx \int z' dx$.

Parimente facendo

$z' = \alpha'' \int z'' dx$,

$z'' = \alpha''' \int z''' dx$ ec., avremo

$y = \alpha \int \alpha' dx \int \alpha'' dx \int z'' dx$,

$y = \alpha \int \alpha' dx \int \alpha'' dx \int \alpha''' dx \int z''' dx$

ec., e

seguendo il medesimo andamento che abbiamo tenuto per l' equazioni a differenze finite, si vedrà che giungeremo infine a questa espressione di y

$$y = \alpha \int \alpha' dx \int \alpha'' dx \int \alpha''' dx \ldots \int \alpha^{(n-1)} dx \int z^{(n-1)} dx,$$

la quale sarà l' integrale completo della proposta.

Così l' integrale completo di una equazione lineare (A) dell' ordine n a coefficienti variabili dipende della conoscenza delle funzioni $\alpha, \alpha', \ldots \alpha^{(n-1)}, z^{(n-1)}$, le quali si ottengono per mezzo dell' integrazione di queste n equazioni

$$(1) \ldots a\alpha + b\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + c\left(\frac{d^2\alpha}{dx^2}\right) + \ldots + p\left(\frac{d^n\alpha}{dx^n}\right) = 0$$

$$(2) \ldots b'\alpha' + c'\left(\frac{d\alpha'}{dx}\right) + e'\left(\frac{d^2\alpha'}{dx^2}\right) + \ldots + p'\left(\frac{d^{n-1}\alpha'}{dx^{n-1}}\right) = 0$$

$$(3) \ldots c''\alpha'' + e''\left(\frac{d\alpha''}{dx}\right) + \ldots + p''\left(\frac{d^{n-2}\alpha''}{dx^{n-2}}\right) = 0$$

. . . .

. . . .

$$(n) \ldots q^{(n-1)}\alpha^{(n-1)} + p^{(n-1)}\left(\frac{d\alpha^{(n-1)}}{dx}\right) = 0,$$

e dalla risoluzione dell' equazione finita

$$(n+1) \ldots p^{(n)} z^{(n-1)} = X.$$

I coefficienti b', c' ec., p' sono conosciuti, poichè dipendono dai coefficienti della proposta e dalla quantità α. Egualmente i coefficienti c'', e'' ec., p'' dipendono da b', c' ec., p' e da α', e così di seguito.

Ora è facile mostrare che trovati n integrali particolari dell' equazione (1), si hanno sul momento e senza alcuna operazione che dipenda dalle equazioni (2), (3) ec., gl' integrali particolari di quest' altre equazioni. Infatti se all' equazione (2) si aggiunge l' equazione (1)' moltiplicata per $\int \alpha' dx$, s' avrà (avendo sostituito per b', c' ec., p' i loro valori) la seguente equazione

$$\left\{a\alpha + b\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + c\left(\frac{d^2\alpha}{dx^2}\right) + \ldots\ldots\ldots + p\left(\frac{d^n\alpha}{dx^n}\right)\right\}\int\alpha' dx +$$

$$\left\{b\alpha + 2c\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + \ldots\ldots + np\left(\frac{d^{n-1}\alpha}{dx^{n-1}}\right)\right\}\alpha' + \left\{c\alpha +\right.$$

$$\left.3e\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + \ldots\ldots + \frac{n(n-1)}{2}p\left(\frac{d^{n-2}\alpha}{dx^{n-2}}\right)\right\}\left(\frac{d\alpha'}{dx}\right) + \ldots$$

$$\ldots\ldots + p\alpha\left(\frac{d^{n-1}\alpha'}{dx^{n-1}}\right) = 0,$$

la quale si riduce evidentemente a questa

$$(2)' \ldots\ldots\ a\alpha\int\alpha' dx + b\left(\frac{d.\alpha\int\alpha' dx}{dx}\right) + c\left(\frac{d^2.\alpha\int\alpha' dx}{dx^2}\right) +$$

$$e\left(\frac{d^3.\alpha\int\alpha' dx}{dx^3}\right) + \ldots\ldots + p\left(\frac{d^n.\alpha\int\alpha' dx}{dx^n}\right) = 0.$$

Ora questa equazione $(2)'$, avendo i medesimi coefficienti dell' equazione (1), è evidente che $\alpha\int\alpha' dx$ deve essere un integrale particolare della medesima, il quale se noi indichiamo per $\alpha 1$, avremo

$\alpha\int\alpha' dx = \alpha 1$, e quindi $\int\alpha' dx = \frac{\alpha 1}{\alpha}$, $\alpha' = \left(\frac{d(\alpha 1:\alpha)}{dx}\right)$; cioè un integrale particolare α' dell' equazione (2) è eguale alla differenziale del quoziente di due integrali particolari dell' equazione (1).

Se dunque indichiamo per α, $\alpha 1$, $\alpha 2$, ... $\alpha(n-1)$, gli n integrali particolari dell' equazione (1); e per α', $\alpha' 1$, $\alpha' 2$, ... $\alpha'(n-2)$ gli $n-1$ integrali dell' equazione (2), avremo

$$\alpha' = \left(\frac{d(\alpha 1:\alpha)}{dx}\right),\ \alpha' 1 = \left(\frac{d(\alpha 2:\alpha)}{dx}\right),\ \alpha' 2 = \left(\frac{d(\alpha 3:\alpha)}{dx}\right), \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ \alpha'(n-2) = \left(\frac{d[\alpha(n-1):\alpha]}{dx}\right);$$

e siccome l' equazione (3) è rapporto all' equazione (2) ciò che questa qui è rapporto all' equazione (1); perciò dagl' integrali particolari dell' equazione (2), prendendo le differenziali dei loro quozienti $\frac{\alpha' 1}{\alpha'}$, $\frac{\alpha' 2}{\alpha'}$, ... $\frac{\alpha'(n-2)}{\alpha'}$, si troveranno nel momento quegli dell' equazione (3), e saranno $\frac{1}{dx}.d(\alpha' 1:\alpha')$, $\frac{1}{dx}.d(\alpha' 2:\alpha')$ ec., cioè, sostituendovi i valori di $\alpha' 1$, $\alpha' 2$ ec., $\frac{1}{dx}d\left(\frac{1}{dx}d(\alpha 2:\alpha):\frac{1}{dx}d(\alpha 1:\alpha)\right)$, $\frac{1}{dx}d\left(\frac{1}{dx}d(\alpha 3:\alpha):\frac{1}{dx}d(\alpha 1:\alpha)\right)$ ec., ec.; e così di seguito per le altre equazioni.

Dunque si potrà sempre aver l' integrale completo della proposta quando si abbiano un numero n d' integrali particolari dell' equazione (1), cioè della proposta medesima nel caso di $X = 0$; e la forma di questo integrale sarà simile a quella ritrovata per l' equazioni a coefficienti costanti.

§. 133. Serviranno anzi un numero $n - 1$ soltanto d' integrali particolari della proposta nel caso di $X = 0$, poichè non conoscendosi un integrale particolare dell' equazione (1), ne resterà in conseguenza sconosciuto uno nell' equazione (2), uno nella (3), uno nella (4) ec.; ed è chiaro che dell' ultima equazione (n) non si conoscerà l' integrale per mezzo degli integrali dell' equazione (1); ma quest' ultima equazione (n) del primo ordine è sempre (§. 126) integrabile; dunque ancora quando si conoscono solamente $n - 1$ integrali particolari della proposta per il caso di $X = 0$, potremo sodisfare a tutte l' equazioni (1), (2), (3) ec., (n) dalle quali la di lei integrazione dipende, ed in conseguenza assegnar l' integrale completo della medesima.

Questo Teorema è dovuto al Sig La-Grange. Se poi i coefficienti saranno tali, che l' equazione nel caso di $X = 0$ abbia un numero $n - m$ d' integrali particolari conosciuti, e gli altri di numero m siano incogniti, allora mancheranno m integrali particolari all' equazione (1); ne mancherà un egual numero all' equazione (2); egualmente ne mancheranno o non si conosceranno m integrali dell' equazione (3) ec, ed è chiaro, che all' equazione $(n - m - 1)$ dell' ordine m, mancheranno o non si conosceranno i di lei integrali particolari: l' integrale allora della proposta dipenderà dall' integrazione di quest' ultima equazione dell' ordine m. Ora se l' equazione

$$a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots\ldots\ldots + p\alpha^n = 0,$$

la quale si forma ponendo nella proposta α^0 per y, α per $(\frac{dy}{dx})$, α^2 per $(\frac{d^2y}{dx^2})$ ec. e per X, avrà alcune radici variabili ed alcune costanti, supponendo che $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots\ldots \alpha^{(n-m)}$ siano queste radici costanti

$$y = Ae^{\alpha x},\ y = A'e^{\alpha' x},\ y = A''e^{\alpha'' x},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ y = A^{(n-m)}.e^{\alpha^{(n-m)}x},$$

saranno allora tanti integrali particolari che soddisfaranno alla proposta nel caso di $X = 0$; avremo dunque quest' altro Teorema:

„ L' integrale completo di un' equazione lineare dell' or-
„ dine n a coefficienti variabili

„ $ay + b(\frac{dy}{dx}) + c(\frac{d^2y}{dx^2}) + \ldots\ldots\ldots + p(\frac{d^ny}{dx^n}) = X$

„ dipende sempre dall' integrazione di un' equazione dell' ordi-
„ ne m parimente a coefficienti variabili, essendo m il nume-
„ ro delle radici variabili, ed $n - m$ quello delle costanti che
„ si trovano in quest' equazione

„ $a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots\ldots\ldots + p\alpha^n = 0$ „.

E se il secondo membro dell' equazione è nullo,

„ Di un' equazione lineare dell' ordine n^{esimo} s' avrà sem-
„ pre un integrale particolare completato con tante costanti arbi-
„ trarie, quante sono le radici costanti di quell' equazione me-
„ desima „: quest' integrale è l' aggregato degl' integrali particolari trovati qui sopra, è cioè

$$y = Ae^{\alpha x} + A'e^{\alpha' x} + \ldots\ldots\ldots + A^{(n-m)}.e^{\alpha^{(n-m)}x}.$$

Questi Teoremi si trovano negli Atti di Turino del 1808.

§. 134. Proponiamoci l' equazione

$$(A) \ldots a'y + b'(p + qx).(\tfrac{dy}{dx}) + c'(p + qx)^2.(\tfrac{d^2y}{dx^2}) + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + p'(p + qx)^n.(\tfrac{d^ny}{dx^n}) = X,$$

che è stata integrata la prima volta dal Sig. Euler; a', b' ec., p', p, q, sono quantità costanti.

Paragoniamo quest' equazione con quella del §. 131, ed il di lei integrale sarà della forma

$$y = \alpha\int\alpha' dx\int\alpha'' dx \ldots\ldots\ldots \int\alpha^{(n-1)}dx\int z^{(n-1)}dx.$$

Per trovare i valori di $\alpha, \alpha', \alpha''$ ec., $z^{(n-1)}$, conviene prima cercare un numero n d' integrali particolari che soddisfacciano alla proposta nel caso di $X = 0$, uno dei quali ci darà il valore di α.

Ora per integrare l' equazione

$$a'y + b'(p + qx)(\tfrac{dy}{dx}) + \ldots\ldots\ldots + p'(p + qx)^n(\tfrac{d^ny}{dx^n}) = 0,$$

facciamo $y = A(p + qx)^m$, essendo m una costante da determinarsi, ed avremo

$$(\tfrac{dy}{dx}) = Amq(p + qx)^{m-1}$$

$(\frac{d^2y}{dx^2}) = Am(m-1)q^2(p+qx)^{m-2}$

. . . .

. . . .

$(\frac{d^ny}{dx^n}) = Am(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-1))q^n(p+qx)^{m-n}$,

sostituendo e dividendo per $A(p+qx)^m$, si avrà per determinare m l' equazione algebraica del grado n,

$(a)\ldots a' + b'mq + c'm(m-1)q^2 + \ldots + p'm(m-1)\ldots\ldots(m-(n-1))q^n = 0.$

Da quest' equazione (a) si ricaveranno n valori per m, i quali se siano $m, m', m'', \ldots\ldots m^{(n-1)}$, saranno indicati da $A(p+qx)^m$, $A'(p+qx)^{m'}$ ec.,

$A^{(n-1)}(p+qx)^{m^{(n-1)}}$ gli n integrali della proposta, nel caso di $X=0$.

Ecco dunque trovati i valori di $\alpha, \alpha 1, \alpha 2, \ldots \alpha(n-1)$ del §. 131; sarà $\alpha = A(p+qx)^m$, $\alpha 1 = A'(p+qx)^{m'}$ ec.

Per ottenere quei di $\alpha', \alpha 1', \ldots\ldots \alpha'(n-2)$, sostituiscansi i valori di $\alpha, \alpha 1$ ec., nell' espressioni

$\alpha' = (\frac{d(\alpha 1 : \alpha)}{dx})$, $\alpha' 1 = (\frac{d(\alpha 2 : \alpha)}{dx})$ ec., ed avremo

$\frac{1}{dx}d(\frac{A'(p+qx)^{m'}}{A(p+qx)^m})$, $\frac{1}{dx}d\frac{A''(p+qx)^{m''}}{A(p+qx)^m}$ ec., $\frac{1}{dx}d\frac{A^{(n-1)}(p+qx)^{m^{(n-1)}}}{A(p+qx)^m}$;

eseguendo le differenziazioni e mutando la forma delle costanti, tali espressioni diverranno

$B(p+qx)^{m'-m-1}$, $B'(p+qx)^{m''-m-1}$ ec., $B^{(n-2)}(p+qx)^{m^{(n-1)}-m-1}$, e perciò

$\alpha' = B(p+qx)^{m'-m-1}$, $\alpha' 1 = B'(p+qx)^{m''-m-1}$ ec.

Egualmente trovati i valori di $\alpha', \alpha' 1$ ec., si hanno quei di $\alpha'', \alpha'' 1, \ldots\ldots \alpha''(n-3)$; poichè

$\alpha'' = (\frac{d(\alpha' 1 : \alpha')}{dx})$, $\alpha'' 1 = (\frac{d(\alpha' 2 : \alpha')}{dx})$ ec., e quindi nel nostro caso si ha per α'' quest' espressione

$\frac{1}{dx}d\frac{B'(p+qx)^{m''-m-1}}{B(p+qx)^{m'-m-1}}$, dalla quale, eseguite le differenziazioni, e mutata la forma delle costanti, si ricava $\alpha'' = C(p+qx)^{m''-m'-1}$: egualmente troveremo $\alpha''' = D(p+qx)^{m''-m'-1}$, e così di seguito fino ad $\alpha^{(n-1)}$, che sarà $= P(p+qx)^{m^{(n-1)}-m^{(n-2)}-1}$.

Facendo ora eguali all' unità le costanti arbitrarie A, B, C, D ec., P di tutti questi integrali particolari, e sostituendo i valori di $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$ ec., $\alpha^{(n-1)}$ nell' espression di y, si avrà

$$y = (p+qx)^m \int (p+qx)^{m'-m-1} dx \int (p+qx)^{m''-m'-1} dx \times$$

$$\int \ldots\ldots \int (p+qx)^{m^{(n-1)}-m^{(n-2)}-1} dx \int z^{(n-1)} dx;$$

per avere $z^{(n-1)}$, osserviamo che al §. 131 si trova $z^{(n-1)} = \frac{X}{p^{(n)}}$, e che ivi $p^{(n)} = p\alpha\alpha'\alpha'' \ldots\ldots \alpha^{(n-1)}$: essendo dunque nel nostro caso $p = p'(p+qx)^n$,

$$\alpha = (p+qx)^m, \alpha' = (p+qx)^{m'-m-1}, \alpha'' = (p+qx)^{m''-m'-1},$$

$$\alpha''' = (p+qx)^{m'''-m''-1} \text{ ec., avremo}$$

$$z^{(n-1)} = \frac{X}{p'(p+qx)^{m^{(n-1)}+1}}.$$

L' espressione per tanto dell' integrale, sarà

$$y = (p+qx)^m \int (p+qx)^{m'-m-1} dx \int (p+qx)^{m''-m'-1} dx \times$$

$$\int \ldots\ldots\ldots\ldots \int (p+qx)^{m^{(n-1)}-m^{(n-2)}-1} dx \times$$

$$\int \frac{X}{p'(p+qx)^{m^{(n-1)}+1}}.$$

Questa formula contenendo un numero n di segni integrali esprimerà l' integrale completo, qualunque siano le radici m, m', m'' ec., eguali o diseguali fra loro; imperocchè questi segni integrali introdurranno sempre un numero n di costanti arbitrarie.

Facendo $X = 0$, questa formula diviene

$$y = A(p+qx)^m \int (p+qx)^{m'-m-1} dx \int (p+qx)^{m''-m'-1} dx \times$$

$$\int \ldots\ldots \int (p+qx)^{m^{(n-1)}-m^{(n-2)}-1} dx, \text{ poichè allora}$$

$$\int \frac{X}{p'(p+qx)^{m^{(n-1)}+1}} = \int 0 dx = A \text{ costante arbitraria}.$$

E se si eseguissero le successive integrazioni, senza aver riguardo ai cofficienti costanti che esse portano, considerandoli contenuti entro le costanti arbitrarie, avremmo

$$y = A(p+qx)^m + B(p+qx)^{m'} + C(p+qx)^{m''} + \text{ec.},$$

essendo A, B, C ec. un numero n di costanti arbitrarie: l' ultimo termine di questa formula è $L(p+qx)^{m^{(n-1)}}$.

§. 135. Diciamo ora qualche cosa dell' equazioni lineari a più variabili.

Quando fra le variabili y, θ, x si hanno due equazioni lineari, si può sempre per mezzo della differenziazione eliminare una di queste variabili, e giungere ad una equazione lineare fra due sole variabili.

Noi applicheremo il metodo a due equazioni del secondo ordine, potendo estendersi anche all' equazioni degli ordini superiori tutto ciò che siamo per dire.

Si abbiano dunque le due equazioni

$$(1) \ldots\ldots \left.\begin{array}{l} ay + b\left(\frac{dy}{dx}\right) + c\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \\ + a'\theta + b'\left(\frac{d\theta}{dx}\right) + c'\left(\frac{d^2\theta}{dx^2}\right) \end{array}\right\} = X$$

$$(2) \ldots\ldots \left.\begin{array}{l} Ay + B\left(\frac{dy}{dx}\right) + C\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \\ + A'\theta + B'\left(\frac{d\theta}{dx}\right) + C'\left(\frac{d^2\theta}{dx^2}\right) \end{array}\right\} = X'$$

Se il valore di $\left(\frac{d^2\theta}{dx^2}\right)$ ricavato dalla seconda equazione, si sostituisce nella prima, avremo un' equazione di questa forma

$$(3) \ldots\ldots \left.\begin{array}{l} a_1 . y + b_1 . \left(\frac{dy}{dx}\right) + c_1 . \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \\ + a'_1 . \theta + b'_1 . \left(\frac{d\theta}{dx}\right) \end{array}\right\} = X_1.$$

Si differenzi adesso l' equazione (3), e si avrà un' equazione della forma

$$(4)\ldots\ \left.\begin{array}{l} a2\cdot y + b2\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right) + c2\cdot\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + e2\cdot\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) \\ + a'2\cdot\theta + b'2\cdot\left(\frac{d\theta}{dx}\right) + c'2\cdot\left(\frac{d^2\theta}{dx^2}\right) \end{array}\right\} = X2.$$

In questa equazione (4) sostituendo il valore di $\left(\frac{d^2\theta}{dx^2}\right)$ ricavato dall' equazione (2), avremo l' equazione della forma

$$(5)\ldots\ \left.\begin{array}{l} a3\cdot y + b3\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right) + c3\cdot\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + e3\cdot\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) \\ + a'3\cdot\theta + b'3\cdot\left(\frac{d\theta}{dx}\right) \end{array}\right\} = X3.$$

L' equazione (5) differenziata, e sostituito in essa il valore di $\left(\frac{d^2\theta}{dx^2}\right)$ dato dall' equazione (2), divenga di questa forma

$$(6)\ldots\ \left.\begin{array}{l} a4\cdot y + b4\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right) + c4\cdot\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + e4\cdot\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + f4\cdot\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) \\ + a'4\cdot\theta + b'4\cdot\left(\frac{d\theta}{dx}\right) \end{array}\right\} = X4.$$

Per mezzo adesso delle equazioni (3), (5), (6) si possono eliminare le quantità θ e $\left(\frac{d\theta}{dx}\right)$, e s' avrà allora una equazione lineare del quarto ordine fra le due sole variabili x e y. Si ricaverà da una tale equazione il valore di y, il quale sostituito in due delle stesse equazioni (3), (5), (6), ed eliminando per mezzo di esse $\left(\frac{d\theta}{dx}\right)$, s' avrà il valore di θ senza nessuna integrazione.

Quando i coefficienti sono costanti, l' equazione risultante ha ancora essa i coefficienti costanti; anzi in questo caso se anche X, X' sono nulli, si può far subito $y = Ae^{\alpha x}$, $\theta = Ae^{\alpha x}\cdot\delta$, α e δ essendo costanti da determinarsi, ed A una costante la

quale, come vedremo, resta arbitraria. Sostituendo questi valori nelle equazioni (1), (2), si avranno per determinare α e δ le due equazioni

$$\left.\begin{array}{l} a + b\alpha + c\alpha^2 \\ + (a' + b'\alpha + c'\alpha^2)\delta \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} A + B\alpha + C\alpha^2 \\ + (A' + B'\alpha + C'\alpha^2)\delta \end{array}\right\} = 0$$

dalle quali eliminando δ si ha un' equazione algebraica del quarto grado

$$(a + b\alpha + c\alpha^2)(A' + B'\alpha + C'\alpha^2) = (A + B\alpha + C\alpha^2)$$
$$(a' + b'\alpha + c'\alpha^2),$$ dalla quale si ricaverà il valore di α.

Questa equazione avrà quattro radici, e perciò quattro valori per α, che possiamo indicare per $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$. Questi ci daranno quattro valori per δ, che indichiamo per $\delta, \delta', \delta'', \delta'''$. Avremo allora per y quest' espressione

$y = Ae^{\alpha x} + A'e^{\alpha' x} + A''e^{\alpha'' x} + A'''e^{\alpha''' x}$, e per θ quest' altra

$\theta = Ae^{\alpha x}\cdot\delta + A'e^{\alpha' x}\cdot\delta' + A''e^{\alpha'' x}\cdot\delta'' + A'''e^{\alpha''' x}\cdot\delta'''$.

Le lettere A, A', A'', A''' rappresentano quattro costanti arbitrarie.

Si vede come potremmo fare se il numero delle equazioni fosse maggiore. Tutto passa nelle equazioni differenziali, come nelle equazioni a differenze finite.

Osserviamo che se il numero delle equazioni date sarà inferiore al numero delle variabili y, θ ec. funzioni di x, allora non potranno trovarsi i valori di esse, e resteranno tante di quelle variabili al nostro arbitrio, quante sono le equazioni di meno. Potremo, se ci piace, dar dei valori particolari ad alcune di quelle variabili, o completare il numero delle equazioni, con delle altre equazioni arbitrarie qualunque, sicchè siano tante equazioni, quante variabili da determinarsi; così se si avesse l' equazione del primo ordine $M + N(\frac{dy}{dx}) + L(\frac{d\theta}{dx}) = 0$, potrebbesi prendere qualunque valore per y o per θ, o in generale stabilire un' altra equazione qualunque tra x, y, θ, onde poterne ottenere i valori di y e di θ.

§. 136. Se alcune delle radici sono immaginarie, esse avranno sempre la forma $A + B\sqrt{(-1)}$; ed è noto che se vi sarà una radice di quella forma $A + B\sqrt{(-1)}$, ve ne sarà un' altra della forma $A - B\sqrt{(-1)}$: così supponendo che l' equazione proposta al §. 127, abbia alcune delle radici, due per esempio, immaginarie, si avrà

$$\alpha = A + B\sqrt{(-1)},$$
$$\alpha' = A - B\sqrt{(-1)}.$$

La formula che rappresenta l' integrale di quell' equazione, diverrà

$$y = \frac{1}{p} e^{(A + B\sqrt{(-1)})x} \int e^{-2B\sqrt{(-1)}.x} dx \int e^{(\alpha'' - A + B\sqrt{(-1)})x} dx \times$$
$$\int e^{(\alpha''' - \alpha'')x} dx \int \ldots\ldots\ldots \int \frac{X}{e^{\alpha^{(n-1)}x}} dx.$$

Ora è noto che

$e^{\pm Bx\sqrt{(-1)}} = \cos Bx \pm \sqrt{(-1)}.\operatorname{sen} Bx$; dunque sostituendo, avremo

$$y = \frac{1}{p} e^{Ax} (\cos Bx + \sqrt{(-1)}.\operatorname{sen} Bx) \int (\cos 2Bx - \sqrt{(-1)} \times$$
$$\operatorname{sen} 2Bx) dx \int e^{(\alpha'' - A)x} (\cos Bx - \sqrt{(-1)}.\operatorname{sen} Bx) dx \times$$
$$\int e^{(\alpha''' - \alpha'')x} dx \int \ldots\ldots\ldots \int \frac{X}{e^{\alpha^{(n-1)}x}} dx.$$

Nello sviluppo di questa formula alcuni degli immaginarj si distruggeranno, altri rimarranno compresi nelle costanti arbitrarie, e non compariranno che le quantità trascendenti. Noi non ci tratterremo a far vedere tutto questo, essendo facile ai nostri Lettori il fare un tal calcolo da se medesimi, in specie dopo avere compreso ciò che noi abbiamo detto per un simile oggetto nel Cap. III. del Calcolo delle Differenze Finite.

Per fare alcun esempio delle cose dette di sopra, si proponga l' equazione

$(\frac{d^2y}{dx^2}) + a^2y = X$; in essa a^2 è una costante, e X funzione qualunque di x.

Paragonando questa equazione con quella del §. 127, avremo $p = 1$, $n = 2$; l' equazione da risolversi sarà $a^2 + \alpha^2 = 0$, onde

$\alpha = a\sqrt{(-1)}$, $\alpha' = -a\sqrt{(-1)}$; e però sostituendo tali valori di p, α, α' in

$$y = \frac{1}{p} e^{\alpha x} \int e^{(\alpha' - \alpha)x} dx \int \frac{X}{e^{\alpha' x}} dx, \text{ si avrà}$$

$$y = e^{ax\sqrt{(-1)}} \int e^{-2a\sqrt{(-1)}.x} dx \int e^{a\sqrt{(-1)}.x}.X dx, \text{ ed integrando per parti}$$

$$y = \frac{e^{-ax\sqrt{(-1)}} \int e^{ax\sqrt{(-1)}}.X dx}{-2a\sqrt{(-1)}} - \frac{e^{ax\sqrt{(-1)}} \int e^{-ax\sqrt{(-1)}}.X dx}{-2a\sqrt{(-1)}};$$

aggiungendo ora a ciascun segno sommatorio una costante arbitraria, otterremo

$$y = Ce^{-ax\sqrt{(-1)}} + C'e^{ax\sqrt{(-1)}} - \frac{e^{-ax\sqrt{(-1)}}}{2a\sqrt{(-1)}} \int e^{ax\sqrt{(-1)}} \times$$
$$X dx + \frac{e^{ax\sqrt{(-1)}}}{2a\sqrt{(-1)}} \int e^{-a\sqrt{(-1)}.x}.X dx;$$ e mutando, secondo

ciò che si è detto sopra, gl' immaginarj in quantità trascendenti, si avrà dopo averne fatta la riduzione,

$y = (C + C')\cos ax + (C' - C)\sqrt{(-1)}\,.\,sen\ ax - \frac{\cos ax}{a}\int sen\ ax\,.\,Xdx + \frac{sen\ ax}{a}\int\cos ax\,.\,Xdx$; questa espressione (mutandovi la forma delle costanti), diviene

$y = A\cos ax + B\,sen\ ax - \frac{\cos ax}{a}\int sen\ ax\,.\,Xdx + \frac{sen\ ax}{a}\times\int\cos ax\,.\,Xdx$; che è l' integrale completo della proposta.

CALCOLO INTEGRALE

CAP. IV.

Dell' Integrazione dell' Equazioni Lineari ai Differenziali Parziali.

§. 137. SE per z si rappresenta una funzione delle due variabili x, y, chiamasi *Equazione Lineare a Differenziali Parziali* un' equazione nella quale tanto la funzione z che le sue differenziali parziali non sono elevate al di là della prima potenza. L' ordine poi di una tale equazione è dato dalla più alta differenziale parziale che in essa si trova.

Ecco la forma generale di un' equazione a differenziali parziali dell' ordine n^{esimo}, e lineare

$$\left.\begin{array}{l} Az + B\left(\frac{dz}{dx}\right) + C\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \ldots\ldots + P\left(\frac{d^nz}{dx^n}\right) \\ \quad + B'\left(\frac{dz}{dy}\right) + C'\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + \ldots\ldots + P'\left(\frac{d^nz}{dx^{n-1}dy}\right) \\ \quad\quad + C''\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) + \ldots\ldots + P''\left(\frac{d^nz}{dx^{n-2}dy^2}\right) \\ \quad\quad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad\quad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad\quad\quad\quad + P^{(n)}\left(\frac{d^nz}{dy^n}\right) \end{array}\right\} = V.$$

Tratteremo in questo Capitolo dell' integrazione di tali equazioni.

Incominciamo dal considerare il caso, in cui i coefficienti sono costanti ed il secondo membro è nullo, e proponiamoci l' equazione del primo ordine

$Az + B(\frac{dz}{dx}) + B'(\frac{dz}{dy}) = 0$: anderemo in seguito agli ordini superiori.

Per integrare una tale equazione facciamo

$z = Ce^{\alpha x + \beta y}$, essendo C, α, β costanti da determinarsi. Questa supposizione ci dà

$(\frac{dz}{dx}) = Ce^{\alpha x + \beta y} \cdot \alpha$,

$(\frac{dz}{dy}) = Ce^{\alpha x + \beta y} \cdot \beta$.

Sostituiamo questi valori di z, $(\frac{dz}{dx})$, $(\frac{dz}{dy})$ nella proposta, ed avremo, dopo averla divisa per $Ce^{\alpha x + \beta y}$,

$A + B\alpha + B'\beta = 0$. La costante C resterà arbitraria, e delle due quantità α, β se ne determinerà una per l' altra che rimarrà al nostro arbitrio.

Determinando β per α, e facendo $-\frac{A}{B'} = a$, $-\frac{B}{B'} = b$, s' avrà $\beta = a + b\alpha$.

Soddisfarà dunque alla proposta equazione

$z = Ce^{ay + \alpha(x + by)} = Ce^{ay} \cdot e^{\alpha(x + by)}$, essendo C ed α due costanti arbitrarie. Questa espressione di z è, secondo ciò che abbiamo detto al §. 118., l' integrale completo di

$Az + B(\frac{dz}{dx}) + B'(\frac{dz}{dy}) = 0$.

Ma possiamo invece delle due costanti arbitrarie introdurre nell' integrale una funzione arbitraria per mezzo dell' artifizio spiegato al §. 123; avremo allora l' integrale completato con una funzione arbitraria, come abbiam detto al §. 121.

Infatti facciamo $C = \varphi(\alpha)$; ed avremo per determinare α,

$(\frac{dF}{d\alpha}) + (\frac{d\varphi}{d\alpha})(\frac{dF}{d\varphi}) = 0$, essendo (§. 123)

$F = z - \varphi(\alpha) \cdot e^{ay} \cdot e^{\alpha(x + by)}$; dunque sostituendo per F il suo valore sarà

$- \varphi(\alpha) \cdot e^{ay} \cdot e^{\alpha(x + by)} \cdot (x + by) - (\frac{d\varphi}{d\alpha}) \cdot e^{ay} \cdot e^{\alpha(x + by)} = 0$,

ovvero

$(\frac{d\varphi}{d\alpha}) \cdot \frac{1}{\varphi(\alpha)} = -(x + by)$.

Quest' ultima equazione ci dice che $x + by$ è una funzione di α, senza d' altr' onde nulla pronunziare sopra la natura di questa funzione: sarà perciò viceversa anche α una funzione indeterminata di $x + by$: egualmente sarà $\varphi(\alpha) \cdot e^{\alpha(x + by)}$ una funzione indeterminata $\Psi(x + by)$ di $x + by$: sarà dunque $z = e^{ay} \cdot \Psi(x + by)$ l' integrale completo della detta equazione, e $\Psi(x + by)$ indicherà la funzione arbitraria che lo completa.

Si può giungere a quest' ultimo risultato con un altro metodo, di cui abbiamo fatto uso nel calcolo delle differenze finite al §. 85, per l' integrazione dell' equazioni a differenze finite e parziali.

Se noi indichiamo per C', α'; C'', α''; C''', α''' ec.; altrettante costanti arbitrarie diverse da C, α, soddisfarà a quell' equazione non solo

$z = C\, e^{ay} \cdot e^{\alpha(x + by)}$, ma ancora

$z = C' e^{ay} \cdot e^{\alpha'(x + by)}$

$z = C'' e^{ay} \cdot e^{\alpha''(x + by)}$

$z = C''' e^{ay} \cdot e^{\alpha'''(x + by)}$

ec. ec.

Ed essendo lineare l' equazione da integrarsi, anche la omma di queste espressioni vi soddisfarà; dunque

$$z = e^{ay}\left\{Ce^{\alpha(x+by)} + C'e^{\alpha'(x+by)} + C''e^{\alpha''(x+y)} + \text{ec.}\right\},$$

sarà l' integrale di $Az + B(\frac{dz}{dx}) + B'(\frac{dz}{dy}) = o$: ora abbiam dimostrato al luogo citato che l' espressione $C\beta^x + C'\beta'^x + C''\beta''^x +$ ec., nella quale C, β, C', β' ec., sono costanti arbitrarie, e che è composta di un numero infinito di termini, può sempre supporsi eguale ad una funzione qualunque arbitraria φx di x; dunque potremo sempre prendere $\varphi(x+by)$ per

$$Ce^{\alpha(x+by)} + C'e^{\alpha'(x+by)} + C''e^{\alpha''(x+by)} + C'''e^{\alpha'''(x+by)} +$$

ec., e perciò sarà $z = e^{ay}\varphi(x+by)$, come sopra.

D' ora in avanti pertanto, quando negli integrali delle equazioni lineari troveremo dei termini di questa forma $P.Ce^{\alpha u}$, essendo u una quantità variabile conosciuta ed α, C due costanti arbitrarie, porremo invece di essi $P.\varphi(u)$, indicando per $\varphi(u)$ una funzione arbitraria di u.

§. 138. Per l' equazione del secondo ordine

$$\left.\begin{array}{l} Az + B(\frac{dz}{dx}) + E(\frac{d^2z}{dx^2}) \\ \quad + B'(\frac{dz}{dy}) + E'(\frac{d^2z}{dxdy}) \\ \qquad + E''(\frac{d^2z}{dy^2}) \end{array}\right\} = o.$$

Facciamo egualmente $z = Ce^{\alpha x+\beta y}$, e sostituendo e dividendo per $Ce^{\alpha x+\beta y}$, avremo fra α e β quest' equazione di secondo grado

$$\left.\begin{array}{l} A + B\alpha + E\alpha^2 \\ \quad + B'\beta + E'\alpha\beta \\ \qquad + E''\beta^2 \end{array}\right\} = o.$$

Sia primieramente risolubile in due fattori di primo grado $\beta -$

$b\alpha - a$, $\beta - b'\alpha - a'$, ed avremo allora $\beta = a + b\alpha$, $\beta = a' + b'\alpha$.

Questi due valori di β ci danno due valori per z, cioè

$z = Ce^{ay}.e^{\alpha(x+by)}$, $z = C'e^{a'y}.e^{\alpha'(x+b'y)}$; per C', α' indichiamo due altre costanti arbitrarie diverse da C, α.

Anche la somma di questi due valori di z soddisfarà alla proposta, e sarà

$$z = e^{ay}.Ce^{\alpha(x+by)} + e^{a'y}.C'e^{\alpha'(x+b'y)}.$$

Ora poniamo, secondo ciò che abbiam detto al §. antecedente,

$\varphi(x+by)$ per $Ce^{\alpha(x+by)}$, e $\varphi'(x+b'y)$ per $C'e^{\alpha'(x+b'y)}$,

ed avremo l' integrale completo della proposta rappresento da

$z = e^{ay}\varphi(x+by) + e^{a'y}.\varphi'(x+b'y)$, essendo $\varphi(x+by)$, $\varphi'(x+b'y)$ due funzioni arbitrarie.

Quando la risoluzione della suddetta equazione in due fattori di primo grado non ha luogo, allora l' integrale non ha più quella forma.

Supponiamo dunque che si abbia $\beta = M$; $\beta = M'$, essendo M, M' due quantità composte in qualunque maniera di α e dei coefficienti dell' equazione, di modo che sia la detta equazione eguale al prodotto $(\beta - M)(\beta - M')$: avremo allora

$z = Ce^{\alpha x+My}$, $z = C'e^{\alpha' x+M'y}$, ed anche

$z = Ce^{\alpha x+My} + C'e^{\alpha' x+M'y}$: questa espressione di z contiene quattro costanti arbitrarie diverse, essendo in nostro arbitrio prendere le costanti del secondo termine diverse da quelle del primo.

Se ora si suppone che la quantità e^{My} ridotta in serie secondo le potenze intiere di α, sia

$e^{My} = T + T'\alpha + T''\alpha^2 + T'''\alpha^3 +$ ec., nella quale T, T', T'' ec., sono funzioni di y, avremo

$$Ce^{\alpha x + My} = T.Ce^{\alpha x} + T'.Ce^{\alpha x}.\alpha + T''.Ce^{\alpha x}.\alpha^2 + \text{ec.};$$

ma ponendo $\varphi(x)$ invece di $Ce^{\alpha x}$, dovrà porsi $(\frac{d\varphi(x)}{dx})$ per $Ce^{\alpha x}.\alpha$, $(\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2})$ per $Ce^{\alpha x}.\alpha^2$ ec., dunque

$$Ce^{\alpha x + My} = T\varphi(x) + T'(\frac{d\varphi(x)}{dx}) + T''(\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}) + T'''(\frac{d^3\varphi(x)}{dx^3}) + \text{ec.}$$

Nella stessa maniera troveremo

$$C'e^{\alpha' x + M'y} = T1.\varphi'(x) + T'1.(\frac{d.\varphi'(x)}{dx}) + T''1.(\frac{d^2\varphi'(x)}{dx^2}) + \text{ec.}$$

essendo $T1$, $T'1$ ec., i coefficienti dello sviluppo di $e^{M'y}$.

L' integrale dunque completato con due funzioni arbitrarie, sarà

$$z = T\varphi(x) + T'(\frac{d\varphi(x)}{dx}) + T''(\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}) + \text{ec.}$$

$$+ T1.\varphi'(x) + T'1.(\frac{d\varphi'(x)}{dx}) + T''1.(\frac{d^2\varphi'(x)}{dx^2}) + \text{ec.}$$

Questo avrà un numero infinito di termini, se i coefficienti di queste serie non si annullano dopo un certo numero di essi, o se non si dà alla funzione una forma determinata, la quale abbia i differenziali di un certo ordine eguali a zero (a).

(a) Questo metodo che è generalizzato in seguito per qualunque ordine, fu da me pubblicato nel Calcolo Integrale dell' Equazioni Lineari nel 1798. Ivi è la formula dell' integrale dell' ordine n^{esimo} espresso in serie ordinate per i differenziali delle funzioni arbitrarie. Riguardo a questa dottrina il C. Prof. Paoli in una sua Memoria inserita nel Tomo dieci della Società Italiana dell' Anno 1803, volendo dimostrare l' inesattezza di un ragionamento di La-Place relativo all' integrazione dell' Equazioni Lineari a Differenziali Parziali del secondo ordine, soggiunge aver osservato potersi ottenere l' integrale di quelle equazioni, volute da La-Place inintegrabili, per mezzo di una serie che proceda secondo i differenziali di una funzione arbitraria; ed in quella Memoria, destinata ad un tale oggetto, ne dà degli esempj. Il Sig. La-Croix nel suo terzo Volume pag 580, cita la medesima osservazione del Prof. Paoli, che dice, essere anche stata fatta da Diot. Spiacemi che quel mio Libro citato altrove dallo stesso La-Croix e stampato a Firenze, non fosse capitato in mano di alcuno dei sullodati Geometri all' epoca dei loro lavori.

Se invece di determinare β per α avessimo determinato α per β, avremmo trovati gl' integrali delle equazioni sotto forme diverse in apparenza, ma in sostanza le medesime.

Nel caso infatti in cui l' equazione è resolubile in due fattori di primo grado, s' avrebbe

$\alpha = \frac{\beta}{b} - \frac{a}{b}$, $\alpha = -\frac{\beta}{b} - \frac{a'}{b'}$, e perciò

$z = Ce^{-\frac{a}{b}x}.e^{\beta(\frac{x}{b}+y)}$, $z = C'e^{-\frac{a'}{b'}x}.e^{\beta'(\frac{x}{b'}+y)}$, ovvero

$z = Ce^{-\frac{a}{b}x}.e^{\beta(\frac{x}{b}+y)} + C'e^{-\frac{a'}{b'}x}.e^{\beta'(\frac{x}{b'}+y)}$, che si trasforma in

$z = e^{-\frac{a}{b}x}.\Psi(y + \frac{x}{b}) + e^{-\frac{a'}{b'}x}\Psi'(y + \frac{x}{b'})$, essendo Ψ, Ψ' due funzioni arbitrarie.

Ora l' integrale ottenuto con la determinazione di β per α, è $z = e^{ay}\varphi(x + by) + e^{a'y}\varphi'(x + b'y)$, e questo potrà facilmente ridursi all' altro.

Facciamo $\varphi(x + by) = \frac{\Psi(x+by)}{e^{\frac{a}{b}(x+by)}}$, ed il primo termine di quest' integrale, sarà

$$e^{ay}\varphi(x + by) = \Psi(x + by)\frac{e^{ay}}{e^{\frac{a}{b}(x+by)}} = \Psi(x + by)\, e^{-\frac{a}{b}x}$$

nella stessa maniera troveremo il secondo termine eguale ad $e^{-\frac{a'}{b'}x}\Psi'(x + b'y)$; dunque

$z = e^{-\frac{a}{b}x}\Psi(x + by) + e^{-\frac{a'}{b'}x}\Psi'(x + b'y)$, ovvero dividendo per b la quantità $x + by$,

$z = e^{-\frac{a}{b}x}\Psi(\frac{x}{b} + y) + e^{-\frac{a'}{b'}x}\Psi'(\frac{x}{b'} + y)$.

§. 139. Facendo egualmente $z = Ce^{\alpha x + \beta y}$ in un' equazione dell' ordine n^{esimo}, avremo fra α e β quest' equazione algebraica dell' n^{esimo} grado

$$\left.\begin{array}{l} A + B\alpha + D\alpha^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + P\alpha^n \\ \quad + B'\beta + D'\alpha\beta + \ldots\ldots\ldots\ldots + P'\alpha^{n-1}\beta \\ \qquad + D''\beta^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + P''\alpha^{n-2}\beta^2 \\ \qquad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad + P^{(n)}\beta^n \end{array}\right\} = 0:$$

non solo dunque rimarrà indeterminata C, ma ancora una delle due α, β.

Supponiamo primieramente che quest' equazione algebraica sia risolubile in n fattori di primo grado, e si abbia per β questi n valori

$\beta = b\alpha + a$; $\beta' = b'\alpha + a'$; $\beta'' = b''\alpha + a''$ ec.; $\beta^{(n-1)} = b^{(n-1)}\alpha + a^{(n-1)}$.

Avremo ancora per z n espressioni, cioè

$z = e^{ay}.Ce^{\alpha(x+by)}$, $z = e^{a'y}.C'e^{\alpha'(x+b'y)}$ ec.,

$z = e^{a^{(n-1)}y}.C^{(n-1)}e^{\alpha^{(n-1)}(x+b^{(n-1)}y)}$, la somma delle quali soddisfarà alla proposta: avremo dunque

$z = e^{ay}.Ce^{\alpha(x+by)} + e^{a'y}.C'e^{\alpha'(x+b'y)} + \ldots\ldots\ldots +$
$e^{a^{(n-1)}y}.C^{(n-1)}e^{\alpha^{(n-1)}(x+b^{(n-1)}y)}$.

Quest' ultima espressione contiene un numero $2n$ di costanti arbitrarie diverse.

Introducendo ora le funzioni arbitrarie, avremo

$$z = e^{ay}\varphi(x+by) + e^{a'y}\varphi'(x+b'y) + e^{a''y}\varphi''(x+b''y) + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + e^{a^{(n-1)}y}\varphi^{(n-1)}(x + b^{(n-1)}y)$$

per esprimere l' integrale della proposta, completato con un numero n di funzioni arbitrarie $\varphi, \varphi', \varphi''$ ec., delle quantità che sono respettivamente fra le loro parentesi.

Supponiamo che l' equazione non contenga altro che le differenziali n^{esime}. Sia cioè

$$P(\tfrac{d^nz}{dx^n}) + P'(\tfrac{d^nz}{dx^{n-1}dy}) + P''(\tfrac{d^nz}{dx^{n-2}dy^2}) + \ldots + P^{(n)}(\tfrac{d^nz}{dy^n}) = 0:$$

allora l' equazione fra α e β, sarà

$$P\alpha^n + P'\alpha^{n-1}\beta + P''\alpha^{n-2}\beta^2 + \ldots\ldots + P^{(n)}\beta^n = 0,$$

e dividendo tutta l' equazione per α^n, si avrà

$$P + P'\frac{\beta}{\alpha} + P''\frac{\beta^2}{\alpha^2} + \ldots\ldots\ldots + P^{(n)}\frac{\beta^n}{\alpha^n} = 0.$$

Siano b, b', b'' ec., $b^{(n-1)}$ gli n valori di $\frac{\beta}{\alpha}$, cioè le n radici di questa equazione, ed allora i fattori nei quali sarà risolubile, diverranno

$\beta - b\alpha$, $\beta - b'\alpha$, $\beta - b''\alpha$ ec., $\beta - b^{(n-1)}\alpha$.

Essendo dunque zero le quantità a, a', a'' ec., l' integrale completo della nostra equazione sarà quello trovato sopra, purchè vi si faccia $a = a' = a'' =$ ec. $= 0$: sarà dunque

$$z = \varphi(x+by) + \varphi'(x+b'y) + \ldots\ldots + \varphi^{(n-1)}(x+b^{(n-1)}y).$$

Quando quell' equazione algebraica del grado n^{esimo} non è risolubile in fattori di primo grado, l' integrale non si può, generalmente parlando, avere espresso in termini finiti, ma potrà sempre esprimersi per le serie.

Siano infatti $M, M', M'', M''', \ldots\ldots M^{(n-1)}$, gli n valori qualunque di β dati in α dalla risoluzione della suddetta equazione: avremo allora

$$z = Ce^{\alpha x + My} + C'e^{\alpha' x + M'y} + C''e^{\alpha'' x + M''y} + \ldots\ldots\ldots +$$
$$C^{(n-1)}e^{\alpha^{(n-1)}x + M^{(n-1)}y},$$

che soddisfarà alla proposta, e conterrà un numero $2n$ di costanti $C, \alpha, C', \alpha', C'', \alpha''$ ec., arbitrarie diverse.

Se ora riduciamo in serie ordinate per le potenze intiere di α, α' ec., respettivamente, le quantità $e^{My}, e^{M'y}, e^{M''y}$ ec., e supponiamo

$$e^{My} = T + T'\alpha + T''\alpha^2 + \text{ec.}$$
$$e^{M'y} = T1 + T1'.\alpha' + T1''.\alpha'^2 + \text{ec.}$$

ec., avremo

$$\begin{aligned} z = {} & T . Ce^{\alpha x} + T' . Ce^{\alpha x} . \alpha + T'' . Ce^{\alpha x} . \alpha^2 + \text{ec.} \\ & + T1 . C'e^{\alpha' x} + T1' . C'e^{\alpha' x} . \alpha' + T1'' . C'e^{\alpha' x} . \alpha'^2 + \text{ec.} \\ & + T2 . C''e^{\alpha'' x} + T2' . C''e^{\alpha'' x} . \alpha'' + T2'' . C''e^{\alpha'' x} . \alpha''^2 + \text{ec.} \\ & + \text{ec.} \end{aligned}$$

Sostituendo in seguito $\varphi(x)$, $(\frac{d\varphi(x)}{dx})$ ec., per $Ce^{\alpha x}$, $Ce^{\alpha x}\alpha$ ec.; $\varphi'(x)$, $(\frac{d\varphi'(x)}{dx})$ ec., per $C'e^{\alpha' x}$, $C'e^{\alpha' x}\alpha'$ ec., ec., si avrà

$$\begin{aligned} z = {} & T\varphi(x) + T'(\frac{d\varphi(x)}{dx}) + T''(\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}) + \text{ec.} \\ & + T1.\varphi'(x) + T1'.(\frac{d\varphi'(x)}{dx}) + T1''.(\frac{d^2\varphi'(x)}{dx^2}) + \text{ec.} \\ & + T2.\varphi''(x) + T2'.(\frac{d\varphi''(x)}{dx}) + T2''.(\frac{d^2\varphi''(x)}{dx^2}) + \text{ec.} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + T(n-1).\varphi^{(n-1)}(x) + T(n-1)'.(\frac{d\varphi^{(n-1)}(x)}{dx}) + \\ & T(n-1)''.(\frac{d^2\varphi^{(n-1)}(x)}{dx^2}) + \text{ec.}; \end{aligned}$$

e questo è l' integrale della proposta dotato di un numero n di funzioni arbitrarie $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ ec.

Se le quantità M, M' ec., sono tali, che nello sviluppo di e^{My}, $e^{M'y}$ ec., si trovino le potenze negative di α, allora nelle serie esprimenti i valori di $Ce^{\alpha x + My}$, $C'e^{\alpha' x + M'y}$ ec., troveremo dei termini come $T^{(m)}.C\alpha^{-1}.e^{\alpha x}$; $T^{(m+1)}.Ce^{\alpha x} \times \alpha^{-2}$ ec., i quali, quando $Ce^{\alpha x}$ è rappresentato da $\varphi(x)$, saranno rappresentati da $T^{(m)}.\int dx.\varphi(x)$; $T^{(m+1)}\int dx \int dx.\varphi(x)$, ovvero $T^{(m+1)}\int^2 dx^2.\varphi(x)$ ec.

Sia per esempio l' equazione da integrarsi

$$Az + B(\frac{d^2z}{dxdy}) + D(\frac{d^4z}{dx^2dy^2}) + \ldots\ldots + P(\frac{d^{2n}z}{dx^ndy^n}) = 0.$$

Facendo al solito $z = Ce^{\alpha x + \beta y}$, avremo tra α e β quest' equazione algebraica

$$A + B\alpha\beta + D\alpha^2\beta^2 + \ldots\ldots\ldots + P\alpha^n\beta^n = 0$$

la quale dà n valori per $\alpha\beta$: siano questi valori a', a'', a''' ec. $a^{(n)}$, ed avremo

$$\beta = \frac{a'}{\alpha},\ \beta = \frac{a''}{\alpha},\ \beta = \frac{a'''}{\alpha},\ \ldots\ldots\ldots\ \beta = \frac{a^{(n)}}{\alpha}:$$

sarà quindi

$$z = Ce^{\alpha x + \frac{a'}{\alpha}y} + C'e^{\alpha' x + \frac{a''}{\alpha'}y} + C''e^{\alpha'' x + \frac{a'''}{\alpha''}y} + \text{ec.}$$

Ora riducendo in serie la quantità $e^{\frac{a'}{\alpha}y}$, abbiamo

$$e^{\frac{a'}{\alpha}y} = 1 + \frac{a'y}{\alpha} + \frac{a'^2y^2}{2 \cdot \alpha^2} + \frac{a'^3y^3}{2 \cdot 3 \cdot \alpha^3} + \text{ec.};$$

dunque il primo termine dell' espressione di z, sarà

$$Ce^{\alpha x + \frac{a'}{\alpha}y} = Ce^{\alpha x} + a'y \cdot Ce^{\alpha x}\alpha^{-1} + \frac{a'^2y^2}{2} \cdot Ce^{\alpha x}\alpha^{-2} + \text{ec.}$$

e perciò

$$Ce^{\alpha x + \frac{a'}{\alpha}y} = \varphi(x) + a'y\int dx \cdot \varphi(x) + \frac{a'^2y^2}{2}\int^2 dx^2 \cdot \varphi(x) + \frac{a'^3y^3}{2 \cdot 3}\int^3 dx^3 \cdot \varphi(x) + \text{ec.}$$

Egualmente ogni altro termine di z, ci darà una serie simile, e s' avrà l' integrale espresso per un numero n di serie, ciascuna delle quali contiene una funzione arbitraria; e quì osserveremo, che il numero delle funzioni arbitrarie è la metà dell' ordine dell' equazione differenziale; in generale il numero delle funzioni arbitrarie è eguale al numero dei valori di β.

Se alcune delle quantità M, M' ec. non contengono α, allora le serie che tali quantità portano nell' integrale, non hanno che i primi termini, mancando tutti quei che contengono la quantità α; tali primi termini sono della forma $T\varphi(x)$ e l' integrale rimane sempre completato con un numero n di funzioni arbitrarie.

Determinando β per α si hanno tanti valori diversi per β, quante unità ha la massima potenza di β; e determinando α per β si hanno tanti valori diversi per α, quante unità contiene la massima potenza di α. Ora può accadere che nell' equazione

fra α e β, la massima potenza di β sia minore della massima potenza di α, (ciò che segue quando nell' equazione differenziale l' ordine della più alta differenziale di z per rapporto ad y è minore di quello della più alta differenziale rapporto ad x), allora si hanno per β meno valori di quello, che sia l' ordine dell' equazione, e nell' integrale viene un minor numero di funzioni arbitrarie. In questo caso basterà prendere i valori di α determinati per β e cercare l' integrale, operando per α come abbiamo fatto per β.

Può accadere non ostante, che l' integrale non abbia tante funzioni arbitrarie, quante si richiedono per essere completo, e questo segue ogni qual volta la massima potenza di una delle quantità α e β è minore dell' ordine dell' equazione differenziale, ciò che appunto accadeva nell' equazione quì sopra integrata.

Quando il secondo membro dell' equazione differenziale invece di essere nullo, fosse $X + Y$, essendo X, Y respettivamente funzioni di x e di y, se ne potrebbe egualmente avere l' integrazione.

Si farebbe in questo caso $z = Ce^{\alpha x + \beta y} + F(x) + F'(y)$ essendo $F(x)$, $F'(y)$ due funzioni di x e di y da determinarsi; sostituendo in seguito tanto il valore di z, che delle sue differenziali parziali nella proposta, avremmo fra α e β la stessa equazione algebraica, e per determinar quelle funzioni, le due equazioni differenziali dell' ordine n^{esimo}

$$AF + B\left(\frac{dF}{dx}\right) + D\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) + \ldots\ldots\ldots + P\left(\frac{d^nF}{dx^n}\right) = X$$

$$AF' + B'\left(\frac{dF'}{dy}\right) + D''\left(\frac{d^2F'}{dy^2}\right) + \ldots\ldots\ldots + P^{(n)}\left(\frac{d^nF'}{dy^n}\right) = Y,$$

che noi abbiamo insegnato ad integrare nel Capitolo antecedente.

L' integrale dunque dell' equazione lineare a differenziali parziali dell' ordine n^{esimo} a coefficienti costanti col secondo membro eguale ad $X + Y$, sarà quello stesso che abbiamo trovato per il caso del secondo membro nullo, aumentato di $F(x) + F'(y)$.

Quest' integrale per tanto conterrà un numero $4n$ di costanti arbitrarie, ovvero un numero n di funzioni arbitrarie, ed un numero $2n$ di costanti, poichè l' espressioni che troveremo per $F(x)$, $F'(y)$, contengono ciascuna un numero n di costanti arbitrarie.

§. 140. Allorquando alcuni valori di β sono eguali, alcune delle serie rappresentanti e^{My}, $e^{M'y}$ ec., hanno i medesimi coefficienti, e scema il numero delle funzioni arbitrarie che entrano nell' integrale: supponiamo infatti che $M = M'$, i coefficienti allora T, T', T'' ec., saranno li stessi che $T1, T1', T1''$ ec., e perciò le prime due serie dell' integrale

$$T \;\; \varphi(x) + T' \;\; \left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right) + \text{ec.}$$

$$T1 . \varphi'(x) + T1' . \left(\frac{d\varphi'(x)}{dx}\right) + \text{ec.}$$

si ridurranno ad una sola

$$T\left\{\varphi(x) + \varphi'(x)\right\} + T'\left\{\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right) + \left(\frac{d\varphi'(x)}{dx}\right)\right\} + \text{ec.}$$

L' aggregato di due funzioni arbitrarie non può tener luogo e rappresentare che una sola funzione arbitraria; dunque cangiando la forma delle funzioni, cioè facendo $\varphi(x) + \varphi'(x) = \Psi(x)$ (indicando per $\Psi(x)$ una nuova funzione arbitraria) le due serie diverranno una sola

$$T\Psi(x) + T'\left(\frac{d\Psi(x)}{dx}\right) + T''\left(\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2}\right) + \text{ec.}$$

In questo caso l' integrale conterrà una funzione arbitraria di meno.

Per ricondurre l' integrale a contenere lo stesso numero di funzioni, adopreremo un metodo analogo a quello di cui abbiam fatto uso nel Capitolo antecedente per i simili casi dell' equazioni differenziali.

Avvertiamo che d' ora in avanti nella supposizione di $z = Ce^{\alpha x + \beta y}$ tralascieremo la costante C, giacchè essa svaniva nella sostituzione della funzione arbitraria, e sostituiremo $\varphi(x)$ per

$e^{\alpha x}$; così la lettera C che non compariva nei coefficienti dell' equazione per non arrecar confusione, vi sarà di nuovo; quando la vorremo adoprare come costante arbitraria, lo diremo.

Sostituendo $z = e^{\alpha x + \beta y}$ nell' equazione

$$\left.\begin{array}{r} Az + B\left(\frac{dz}{dx}\right) + C\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \ldots\ldots + P\left(\frac{d^nz}{dx^n}\right) \\ + B'\left(\frac{dz}{dy}\right) + C'\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + \ldots\ldots + P'\left(\frac{d^nz}{dx^{n-1}dy}\right) \\ + C''\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) + \ldots\ldots + P''\left(\frac{d^nz}{dx^{n-2}dy^2}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + P^{(n)}\left(\frac{d^nz}{dy^n}\right) \end{array}\right\} = 0$$

si ha

$$\left.\begin{array}{r} A + B\alpha + C\alpha^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + P\alpha^n \\ + B'\beta + C'\alpha\beta + \ldots\ldots\ldots\ldots + P'\alpha^{n-1}\beta \\ + C''\beta^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + P''\alpha^{n-2}\beta^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + P^{(n)}\beta^n \end{array}\right\} = 0$$

la quale ordinata secondo le potenze di β, diviene

$$(1) \ldots\ldots\ldots \beta^0(A + B\alpha + C\alpha^2 + \ldots\ldots\ldots + P\alpha^n + (B' + C'\alpha + \ldots\ldots + P'\alpha^{n-1})\beta + (C'' + \ldots\ldots + P''\alpha^{n-2})\beta^2 + \ldots\ldots\ldots + P^{(n)}\beta^n = 0.$$

Se si moltiplicano i termini di questa equazione per gli esponenti di β, e si divide per β tutta l' equazione, avremo

$$(2) \ldots\ldots (B + C'\alpha + \ldots\ldots\ldots + P'\alpha^{n-1}) + 2(C'' + \ldots\ldots + P''\alpha^{n-2})\beta + \ldots\ldots\ldots + nP^{(n-1)}\beta^{n-1} = 0,$$

e le radici della prima equazione (1) essendo i limiti delle radici dell' equazione (2), ne segue che nel caso di due valori per β eguali, uno di questi soddisfarà nel medesimo tempo a queste due equazioni (1), (2).

Se ora la prima equazione moltiplicata per y s' aggiunge all' equazione (2), s' avrà l' equazione (3)

$$(3) \ldots\ldots (A + B\alpha + C\alpha^2 + \ldots\ldots\ldots + P\alpha^n)y + (B' + C'\alpha + D'\alpha^2 + \ldots\ldots\ldots + P'\alpha^{n-1})(\beta y + 1) + (C'' + D''\alpha + \ldots\ldots\ldots + P''\alpha^{n-2})(\beta^2 y + 2\beta) + (D''' + \ldots\ldots\ldots + P'''\alpha^{n-3})(\beta^3 y + 3\beta^2) + \ldots\ldots\ldots + P^{(n)}(\beta^n y + n\beta^{n-1}) = 0,$$

e uno dei valori eguali di β soddisfarà nel medesimo tempo alle due equazioni (1), (3).

Per tanto, qualunque funzione di x, y e di uno di quei valori eguali di β, la quale sostituita nella proposta invece di z, la trasformi nell' equazione (3), sarà un nuovo integrale della proposta medesima.

Prendiamo $z = ye^{\alpha x + \beta y}$, ed avremo in generale

$$\left(\frac{d^n z}{dx^{n-m}dy^m}\right) = e^{\alpha x + \beta y}\alpha^{n-m}\beta^m y + me^{\alpha x + \beta y}\alpha^{n-m}\beta^{m-1};$$

e se si sostituiscono i valori della z e dei suoi differenziali nella proposta, la ridurremo appunto all' equazione (3); dunque nel caso di due radici eguali, soddisfà alla proposta ancora $z = ye^{\alpha x + \beta y}$, oltre a $z = e^{\alpha x + \beta y}$; se dunque questo secondo valore di z era rappresentato dalla serie

$$T\varphi(x) + T'\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right) + \text{ec.},$$

l' altro sarà rappresentato da questa istessa serie moltiplicata per y; e prendendo allora una diversa funzione arbitraria $\varphi'(x)$ della x, sarà il nuovo integrale

$$z = Ty \cdot \varphi'(x) + T'y \cdot \left(\frac{d\varphi'(x)}{dx}\right) + T''y \cdot \left(\frac{d^2\varphi'(x)}{dx^2}\right) + \text{ec.}:$$

e così queste due serie prese in luogo delle prime due, le quali nel caso delle radici eguali diventavano una sola, riporteranno l' integrale allo stesso numero di funzioni arbitrarie.

Siccome quando si hanno due valori di β in α, eguali tra loro, se ne hanno viceversa due eguali di α in β, perciò ordinando per α l' equazione fra α e β, e facendo il medesimo ragionamento, si troverà che soddisfà ancora alla proposta l' espressione

$z = xe^{\alpha x + \beta y}$, e perciò si può prendere anche per esprimere uno degli integrali particolari della proposta, la serie

$$Tx \cdot \varphi'(x) + T'x \cdot \left(\frac{d\varphi'(x)}{dx}\right) + T''x \cdot \left(\frac{d^2\varphi'(x)}{dx^2}\right) + \text{ec.},$$

che potrebbe egualmente servire a ricompletare l' integrale.

Se i valori di β eguali sono tre di numero, moltiplicando l' equazione (2) per i suoi esponenti, e dividendola per β, diviene

$$2(C'' + \ldots\ldots\ldots + P''\alpha^{n-2})\beta^0 + \ldots\ldots\ldots + n(n-1)P^{(n)}\beta^{n-2} = 0,$$

e dalla Teorìa dei limiti risulta, che uno dei tre valori eguali di β soddisfà nel medesimo tempo alle equazioni (1), (2), ed a quest' ultima. Se ora si moltiplica per y^2 l' equazione (1), per y l' equazione (2), e si aggiungono a quest' ultima medesima, avremo una equazione (4)

$$(4) \ldots\ldots (A + B\alpha + \ldots\ldots\ldots + P\alpha^n)y^2 + (B' + C'\alpha + \ldots\ldots\ldots + P'\alpha^{n-1})(\beta y^2 + 2y) + (C'' + \ldots\ldots + P''\alpha^{n-2})(\beta^2 y^2 + 2\beta y + 1) + \ldots\ldots\ldots + P^{(n)}(\beta^n y^2 + n\beta^{n-1} \cdot 2y + n(n-1) \cdot \beta^{n-2}) = 0,$$

ed una delle radici eguali soddisfarà alle equazioni (1), (3), (4).

Se dunque si trova per z una tale espressione, la quale sostituita nella proposta, la trasformi nell' equazione (4), questa sarà un nuovo integrale particolare. Prendiamo $z = y^2 e^{\alpha x + \beta y}$, essendo β una di quelle radici eguali, e sostituiamo il valore di z e delle sue differenziali nella proposta, essa si cangierà nella equazione (4); sarà perciò una tale espressione di z un nuovo integrale particolare; così nel caso di tre radici eguali s' avranno, oltre l' espressione $z = e^{\alpha x + \beta y}$, le due espressioni $z = ye^{\alpha x + \beta y}$, $z = y^2 e^{\alpha x + \beta y}$, le quali tutte soddisfaranno alla proposta: β è una di quelle radici eguali; dunque invece delle prime tre serie dell' integrale, le quali si ridurrebbero ad una sola, si prenderanno queste quì

$$T \quad \varphi\ (x) + T' \quad (\frac{d\varphi(x)}{dx}) + T'' \quad (\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}) + \text{ec.}$$

$$Ty\ .\ \varphi'\ (x) + T'y\ .\ (\frac{d\varphi'(x)}{dx}) + T''y\ .\ (\frac{d^2\varphi'(x)}{dx^2}) + \text{ec.}$$

$$Ty^2\ .\ \varphi''\ (x) + T'y^2\ .\ (\frac{d\varphi''(x)}{dx}) + T''y^2\ .\ (\frac{d^2\varphi''(x)}{dx^2}) + \text{ec.}$$

e l' integrale rimarrà completo.

Quando si hanno tre valori eguali di β in α, se ne hanno parimente tre eguali di α in β, e perciò ragionando per α come per β, avremo ancora per soddisfare all' equazione differenziale, le due espressioni $z = x^2 e^{\alpha x + \beta y}$, $z = xe^{\alpha x + \beta y}$, le quali portano le due serie

$$Tx\ .\ \varphi'\ (x) + T'x\ .\ (\frac{d\varphi'(x)}{dx}) + \text{ec.},$$

$$Tx^2\ .\ \varphi''(x) + T'x^2\ .\ (\frac{d\varphi''(x)}{dx}) + \text{ec.},$$

che potranno egualmente servire per completare gl' integrali invece di quelle adoprate superiormente: ma nel caso di tre radici eguali si può avere anche un altro integrale particolare oltre quelli trovati.

Se dopo avere ordinata l' equazione secondo le potenze di α, si moltiplicano i suoi termini per gli esponenti che vi ha questa quantità, e si divide per α, s' avrà questa equazione $(2)'$

$$(2)' \ldots\ldots (B + C'\beta + D''\beta^2 + \ldots\ldots\ldots +$$
$$P^{(n-1)}\beta^{n-1})\alpha^0 + 2(C + D'\beta + \ldots\ldots\ldots +$$
$$P^{(n-1)}\beta^{n-2})\alpha + 3(D + E'\beta + \ldots\ldots\ldots +$$
$$P^{(n-2)}\beta^{n-3})\alpha^2 + \ldots\ldots\ldots + nP\alpha^{n-1} = 0.$$

Se adesso l' equazione (2) si ordina secondo le potenze di α, e moltiplicando i di lei termini per gli esponenti che vi ha l' α, si divide per α, avremo la seguente equazione $(3)'$

$$(3)' \ldots C' + 2D''\beta + \ldots\ldots + (n-1)P^{(n-1)}\beta^{n-2} +$$
$$2(D' + \ldots\ldots + (n-2)P^{(n-2)}\beta^{n-3})\alpha + \ldots$$
$$\ldots\ldots + (n-1)P'\alpha^{n-1} = 0,$$

ed è manifesto che uno dei valori eguali di β, soddisfarà nel medesimo tempo alle quattro equazioni (1), (2), $(2)'$, $(3)'$; e perciò ancora alla somma dell' equazione (1) moltiplicata per xy, con l' equazione (2) moltiplicata per x, con l' equazione $(2)'$ moltiplicata per y, e con l' equazione $(3)'$, cioè a questa equazione

$$(5) \ldots\ (1)xy + (2)x + (2)'y + (3)' = 0.$$

Così qualunque espressione per z la quale sostituita nella proposta la trasformi nell' equazione (5), sarà un nuovo integrale dell' equazione proposta: è facile vedere che questa espressione è $z = xy \cdot e^{\alpha x + \beta y}$, prendendo per β un dei valori eguali, poichè sostituendo tale espressione e i di lei differenziali nella proposta, ella si riduce appunto all' equazione (5).

Se dunque la serie che esprime il valore di $e^{\alpha x + \beta y}$ si moltiplica per xy, s' avrà la serie che esprime quest' ultimo integrale particolare. Sarà facile vedere come dobbiamo regolarci quando si abbiano un maggior numero di radici eguali.

Se l' equazione fosse nel caso che abbiamo detto al §. 139, vale a dire fosse resolubile in fattori di primo grado, l' integrale, quando si sono tre radici eguali, sarebbe

$$z = e^{ay}\varphi(x + by) + e^{ay} y\varphi'(x + by) + e^{ay} \cdot y^2 \varphi''(x + by) + e^{a'''y}\varphi'''(x + b'''y) + \ldots\ldots + e^{a^{(n-1)}y} \cdot \varphi^{(n-1)}(x + b^{(n-1)}y),$$

che contiene un numero n di funzioni arbitrarie diverse. Passiamo adesso all' equazioni ad un più gran numero di variabili.

§. 141. Sia z una funzione $z_{x,y,u}$ di tre variabili x, y, u, e si abbia una equazione lineare fra z e le sue differenziali: per integrarla si seguirà il medesimo metodo, di cui si è fatto uso quì sopra.

Prendiamo l' equazione del primo ordine

$$Az + B\left(\frac{dz}{dx}\right) + C\left(\frac{dz}{dy}\right) + E\left(\frac{dz}{du}\right) = 0,$$

nella quale i coefficienti vi sono supposti costanti; si faccia $z = e^{\alpha x + \beta y + \gamma u}$, ed avremo in generale

$$\left(\frac{d^{n+p+q}z}{dx^n dy^p du^q}\right) = e^{\alpha x + \beta y + \gamma u}\alpha^n \beta^p \gamma^q.$$ Se ora si sostituisce nella proposta il valore di z e dei suoi differenziali, s' avrà dopo aver diviso per il fattore comune $e^{\alpha x + \beta y + \gamma u}$, fra le quantità α, β e γ questa equazione

$$A + B\alpha + C\beta + E\gamma = 0,$$

dalla quale se ne può determinare una per le altre due. Si prenda il valore di γ, e sarà

$$\gamma = -\frac{A}{E} - \frac{B}{E}\alpha - \frac{C}{E}\beta,$$ ovvero (facendo $-\frac{A}{E} = a$, $-\frac{B}{E} = b$, $-\frac{C}{E} = c$),

$\gamma = a + b\alpha + c\beta$; sostituendo questo valore nell' espressione di z, avremo

$$z = e^{\alpha x + \beta y + au + b\alpha u + c\beta u},$$ che si riduce a

$$z = e^{\alpha(x + bu) + \beta(y + cu)} \cdot e^{au}:$$

per mezzo d' alcuno dei due metodi citati al §. 137, si potrà dimostrare che alla quantità $e^{\alpha(x + bu) + \beta(y + cu)}$, nella quale α, β sono costanti indeterminate, può sempre sostituirsi una funzione arbitraria

$\varphi(x + bu, y + cu)$ delle quantità $x + bu$, $y + cu$; dunque avremo

$z = e^{au}\varphi(x + bu, y + cu)$. L' integrale pertanto potrà essere completato con una funzione arbitraria, ovvero con tre costanti arbitrarie, giacchè l' espressione $e^{\alpha(x + bu) + \beta(y + cu)}$ può ancora moltiplicarsi per una costante arbitraria C.

Se in vece di determinare γ, avessimo preso il valore di β o di α, avremmo avuto

$$\beta = \frac{1}{c}\gamma - \frac{b}{c}\alpha - \frac{a}{c}$$

$$\alpha = \frac{1}{b}\gamma - \frac{c}{b}\beta - \frac{a}{b};$$ e ragionando per ciascuna di queste come si è fatto per γ, si avrebbero altre due forme dell' integrale completo

$$z = e^{-\frac{a}{c}y}\varphi'\left(x - \frac{b}{c}y, u + \frac{1}{c}y\right)$$

$$z = e^{-\frac{a}{b}x}\varphi''\left(y - \frac{c}{b}x, u + \frac{1}{b}x\right);$$

ma queste tre espressioni di z, quantunque in apparenza diverse, sono però in sostanza la medesima. Infatti se alla funzione arbitraria φ dell' integrale completo, trovato sopra, si dà questa forma

$$\varphi(x+bu,\,y+cu)=\frac{\varphi'\left(x+bu-\frac{b}{c}(y+cu),\,\frac{1}{c}(y+cu)\right)}{e^{\frac{a}{c}(y+cu)}},$$ che è

sempre una funzione di $x+bu$, e di $y+cu$, avremo

$$z=e^{au}\varphi(x+bu,\,y+cu)=\frac{e^{au}\varphi'\left(x+bu-\frac{b}{c}(y+cu),\,\frac{1}{c}(y+cu)\right)}{e^{\frac{a}{c}(y+cu)}}=$$

$e^{-\frac{a}{c}y}\varphi'\left(x-\frac{b}{c}y,\,u+\frac{1}{c}y\right)$, che è la seconda forma dell' integrale completo: così facendo

$$\varphi(x+bu,\,y+cu)=\frac{\varphi''\left(\frac{1}{b}(x+bu),\,y+cu-\frac{c}{b}(x+bu)\right)}{e^{\frac{a}{b}(x+bu)}},$$ s'avrà

moltiplicando per e^{au}, e riducendo

$z=e^{-\frac{a}{b}x}\varphi''\left(\frac{1}{b}x+u,\,y-\frac{c}{b}x\right)$, che è la terza forma dell' integrale.

§. 142. Per generalizzare il nostro metodo, prendiamo ad integrare una equazione del terzo ordine; e ciò che si dirà di questa, servirà di norma per gli ordini superiori. Una tale equazione ha generalmente questa forma

$$\left.\begin{array}{r}
Az+B\left(\frac{dz}{dx}\right)+C\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+D\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)\\
+B'\left(\frac{dz}{dy}\right)+C'\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)+D'\left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right)\\
+C''\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)+D''\left(\frac{d^3z}{dxdy^2}\right)\\
+D'''\left(\frac{d^3z}{dy^3}\right)\\
+E\left(\frac{dz}{du}\right)+F\left(\frac{d^2z}{dxdu}\right)+H\left(\frac{d^3z}{dx^2du}\right)\\
+F'\left(\frac{d^2z}{du^2}\right)+H'\left(\frac{d^3z}{dxdu^2}\right)\\
+H''\left(\frac{d^3z}{du^3}\right)\\
+P\left(\frac{d^2z}{dudy}\right)+Q\left(\frac{d^3z}{dxdudy}\right)\\
+Q'\left(\frac{d^3z}{du^2dy}\right)\\
+Q''\left(\frac{d^3z}{dudy^2}\right)
\end{array}\right\}=0$$

Se si fa $z=e^{\alpha x+\beta y+\gamma u}$, e si sostituisce il valore di z, e delle sue differenziali parziali in questa equazione, s'avrà, dopo averla ridotta,

$$\left.\begin{array}{llll}
A + B\alpha & + C\alpha^2 & + D\alpha^3 & \\
+ B'\beta & + C'\alpha\beta & + D'\alpha^2\beta & \\
& + C''\beta^2 & + D''\alpha\beta^2 & \\
& & + D'''\beta^3 & \\
+ E\gamma & + F\gamma\alpha & + H\alpha^2\gamma & \\
& + F'\gamma^2 & + H'\alpha\gamma^2 & \\
& & + H''\gamma^3 & \\
& + P\beta\gamma & + Q\gamma\beta\alpha & \\
& & + Q'\gamma^2\beta & \\
& & + Q''\gamma\beta^2 &
\end{array}\right\} = 0.$$

Quando il primo membro di questa equazione in α, β, e γ potrà risolversi in tre fattori di primo grado, di modo che sarà eguale a questo prodotto

$$(\beta - a'\alpha - b'\gamma - c')(\beta - a''\alpha - b''\gamma - c'')(\beta - a'''\alpha - b'''\gamma - c''')$$

avremo allora per β questi tre valori

$$\beta = a'\alpha + b'\gamma + c'$$
$$= a''\alpha + b''\gamma + c''$$
$$= a'''\alpha + b'''\gamma + c''',$$

e quindi per z queste tre espressioni diverse

$$z = e^{\alpha(x + a'y) + \gamma(u + b'y)} . e^{c'y}$$
$$= e^{\alpha(x + a''y) + \gamma(u + b''y)} . e^{c''y}$$
$$= e^{\alpha(x + a'''y) + \gamma(u + b'''y)} . e^{c'''y},$$

ciascuna delle quali dà un integrale particolare, che contiene

una funzione arbitraria; la loro somma darà dunque l'integrale completo della proposta, che sarà

$$z = e^{c'y}\varphi'(x + a'y, u + b'y) + e^{c''y}\varphi''(x + a''y, u + b''y) + e^{c'''y}\varphi'''(x + a'''y, u + b'''y);$$

φ', φ'', φ''' rappresentano le tre funzioni arbitrarie diverse.

In generale i valori di β non si possono esprimere che in funzioni irrazionali delle indeterminate α e γ; siano dunque M, M', M'' i tre valori di β, ed avremo allora per z queste tre espressioni

$$z = e^{\alpha x + My + \gamma u},$$
$$z = e^{\alpha x + M'y + \gamma u},$$
$$z = e^{\alpha x + M''y + \gamma u},$$

le quali si possono ancora considerare moltiplicate per una costante arbitraria, ed allora sommandole s' avrà per z questa espressione di tre termini

$$z = Ce^{\alpha x + \gamma u} . e^{My} + C'e^{\alpha x + \gamma u} . e^{M'y} + C''e^{\alpha x + \gamma u} . e^{M''y},$$

in cui si trovano nove costanti arbitrarie diverse; poichè le indeterminate α, γ d' un termine, possono essere diverse da quelle di un altro; ma se si vorranno introdurre le tre funzioni arbitrarie, ridurremo la quantità e^{My} in una serie secondo le potenze di α e γ, e se si suppone che un termine di questa serie sia $P\alpha^m\gamma^n$, essendo m, n numeri interi positivi qualunque, avremo nella espressione di z il termine $Pe^{\alpha x + \gamma u} . \alpha^m\gamma^n$, il quale, facendo $e^{\alpha x + \gamma u} = \varphi(x, u)$, è $P\left(\frac{d^{m+n}\varphi(x, u)}{dx^m du^n}\right)$. Se poi i numeri m ed n fossero tutti e due negativi, allora nell' espressione della

z, vi sarà il termine $Pe^{\alpha x + \gamma u} \cdot \frac{1}{\alpha^m \gamma^n}$, che nella detta supposizione, diviene

$$P\int dx \int dx \ldots\ldots\ldots \int dx \int du \int \ldots\ldots\ldots \int \varphi(x, u)\, du,$$

prendendo m segni sommatorj rapporto ad x, ed n segni rapporto ad u; e se dei due numeri m, n uno è positivo, l' altro negativo, cioè se un termine dall' espressione è $Pe^{\alpha x + \gamma u} \times \alpha^{-m} \gamma^n$, si potrà mettere nell' integrale

$$P\int dx \int dx \int \ldots\ldots\ldots \int dx \left(\frac{d^n \varphi}{du^n}\right),$$

essendo m di numero i segni sommatorj: così la serie che esprime il valore di $e^{\alpha x + \gamma u} \cdot e^{My}$ introdurrà una funzione arbitraria. Due altre funzioni arbitrarie introdurranno le serie che esprimono i valori degli altri due termini dell' integrale, ed in questa guisa l' integrale completo sarà dato in serie, e conterrà tre funzioni arbitrarie.

Abbiamo nell' equazione superiore supposto nullo il secondo membro: esso però potrebbe essere di questa forma $X + Y + U$, essendo X, Y, U respettive funzioni delle variabili x, y, u: in tal caso s' aggiungerebbe all' integrale che abbiam trovato, la quantità $\omega_x + \omega'_y + \omega''_u$, essendo ω_x, ω'_y, ω''_u respettive funzioni di x, di y, e di u da determinarsi. Avremo per determinare ciascuna di esse, una di quelle equazioni differenziali delle quali abbiamo parlato al Capitolo antecedente.

Sia proposta per esempio l' equazione $c^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$ che è l' equazione alle corde vibranti di uniforme densità. Prendendo z per y, ed y per t, essa diverrà $c^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$, la quale paragonata con l' equazione del §. 138, ci dà questa equazione da risolversi $c^2\alpha^2 = \beta^2$, da cui si ricava $\beta = \pm c\alpha$; l' integrale completo sarà dunque

$z = \varphi(x + cy) + \varphi'(x - cy)$, e perciò rimettendo y per z, e t per y, avremo

$y = \varphi(x + ct) + \varphi'(x - ct)$; le caratteristiche φ, φ' denotano due funzioni arbitrarie.

Si proponga da integrarsi un' altra equazione

$$2z + 3\left(\frac{dz}{dx}\right) - 2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) - 3\left(\frac{dz}{dy}\right) - \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = mx + ny^2.$$

Se si fa $z = e^{\alpha x + \beta y} + z'_x + z''_y$, avremo fra α e β l' equazione

$\beta^2 - (3 + \alpha)\beta + 2 + 3\alpha - 2\alpha^2 = 0$, la quale si scioglie in questi due fattori $\beta - 2\alpha - 1$, $\beta + \alpha - 2$, che ci danno $\beta = 2\alpha + 1$, $\beta = 2 - \alpha$; per determinare z', z'' s' avranno le due equazioni

$$2z' + 3\left(\frac{dz'}{dx}\right) - 2\left(\frac{d^2z'}{dx^2}\right) = mx,$$

$$2z'' - 3\left(\frac{dz''}{dy}\right) + \left(\frac{d^2z''}{dy^2}\right) = ny^2,$$

dalle quali ricaviamo (Cap. III.)

$$z' = -\tfrac{1}{2}e^{2x}\int e^{-\frac{5}{2}x} dx \int \frac{mx}{e^{-\frac{1}{2}x}} dx$$

$z'' = e^y \int e^y dy \int \frac{ny^2}{e^{2y}} dy$. L' integrale completo della proposta, sarà dunque

$$z = \varphi(x + 2y)e^y + \varphi'(x - y)e^{2y} - \tfrac{1}{2}e^{2x}\int e^{-\frac{5}{2}x} dx \times \int \frac{mx}{e^{-\frac{1}{2}x}} dx + e^y \int e^y dy \int \frac{ny^2}{e^{2y}} dy.$$

§ 143. Una equazione a differenze parziali si considera dai Geometri come integrata, allorchè la di lei integrazione si fa dipendere da quella di una equazione a differenziali ordinarie.

Ciò premesso sia proposta da integrarsi l' equazione

$$\left.\begin{array}{r} Az + B\,(\frac{dz}{dx}) + C\,(\frac{d^2z}{dx^2}) + \ldots\ldots + P\,(\frac{d^nz}{dx^n}) \\ + B'(\frac{dz}{dy}) + C'\,(\frac{d^2z}{dxdy}) + \ldots\ldots + P'\,(\frac{d^nz}{dx^{n-1}dy}) \\ + C''\,(\frac{d^2z}{dy^2}) + \ldots\ldots + P''(\frac{d^nz}{dx^{n-2}dy^2}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + P^{(n)}(\frac{d^nz}{dy^n}) \end{array}\right\} = X$$

nella quale i coefficienti e il secondo membro X si suppongono funzioni date della variabile x. Per riuscire in questa ricerca, supponiamo $z = ue^{\beta y} + z'_x$, essendo u e z'_x funzioni di x da determinarsi, e β una costante indeterminata. Sostituendo il valore di z e dei suoi differenziali nella proposta, s' avrà

$$\{(A + B'\beta + C''\beta^2 + \ldots\ldots + P^{(n)}\beta^n)\,u + (B + C'\beta + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + P^{(n-1)}\beta^{n-1})(\tfrac{du}{dx}) + (C + \ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$P^{(n-2)}\beta^{n-2})(\tfrac{d^2u}{dx^2}) + \ldots\ldots\ldots\ldots + P.(\tfrac{d^nu}{dx^n})\}\,e^{\beta y} +$$
$$Az'_x + B.(\tfrac{dz'}{dx}) + C.(\tfrac{d^2z'}{dx^2}) + \ldots\ldots + P.(\tfrac{d^nz'}{dx^n}) = X.$$

Se adesso supponiamo

$$(1)\ldots\ldots Az'_x + B(\tfrac{dz'}{dx}) + C(\tfrac{d^2z'}{dx^2}) + \ldots\ldots + P.(\tfrac{d^nz'}{dx^n}) = X,$$

si determinerà z'_x per mezzo di questa equazione, e s' avrà per u una equazione di questa forma

$$(2)\ldots\ldots au + b.(\tfrac{du}{dx}) + c.(\tfrac{d^2u}{dx^2}) + \ldots\ldots + p.(\tfrac{d^nu}{dx^n}) = o:$$

l' integrale dunque della proposta dipende dall' integrazione delle due equazioni (1), (2) differenziali lineari a coefficienti variabili.

Se nell' equazione non vi fossero, rapporto all' x, altre che le differenziali prime $(\frac{dz}{dx})$, $(\frac{d^2z}{dxdy})$ ec., $(\frac{d^nz}{dxdy^{n-1}})$, se cioè l' equazione fosse

$$(F)\ldots\left.\begin{array}{r} Az + B'.(\frac{dz}{dy}) + C''.(\frac{d^2z}{dy^2}) + \ldots\ldots + P^{(n)}\,(\frac{d^nz}{dy^n}) \\ + B.(\frac{dz}{dx}) + C.(\frac{d^2z}{dxdy}) + \ldots\ldots + P^{(n-1)}(\frac{d^nz}{dxdy^{n-1}}) \end{array}\right\} = X,$$

allora facendo eguali a zero i coefficienti delle differenziali che mancano, questa equazione dipenderebbe dall' integrazione delle due

$$Az' + B.(\tfrac{dz}{dx}) = X$$

$$(A + B'.\beta + C''.\beta^2 + \ldots\ldots + P^{(n)}.\beta^n)\,u + (B + C'.\beta + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + P^{(n-1)}.\beta^{n-1})(\tfrac{du}{dx}) = o,$$

le quali essendo del primo ordine, possono ambedue integrarsi completamente.

Al Cap. III. §. 126. si ha la formula per l' integrale dell' equazioni lineari del primo ordine a coefficienti variabili.

Paragonando le nostre equazioni con quella formula, abbiamo per z' quest' espressione

$$z' = e^{-\int\frac{A}{B}dx}(E' + \int e^{\int\frac{A}{B}dx}.\tfrac{X}{B}\,dx),\ \text{e per } u$$

$$u = Ee^{-\int\frac{A + B'.\beta + \ldots\ldots + P^{(n)}.\beta^n}{B + C'.\beta + \ldots\ldots + P^{(n-1)}.\beta^{n-1}}dx}:$$

l' integrale dunque della proposta, sarà

$$z = ue^{\beta y} + z' = \mathrm{E}e^{\beta y - \int \frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}'.\beta + \,.\,.\,.\,.\,.\, + \mathrm{P}^{(n)}.\beta^n}{\mathrm{B} + \mathrm{C}'.\beta + \,.\,.\,.\,.\,.\, + \mathrm{P}^{(n-1)}.\beta^{n-1}} dx} +$$

$$e^{-\int \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} dx} (\mathrm{E}' + \int e^{\int \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} dx} . \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{B}} dx)$$. In questa espressione la quantità β rimane indeterminata; e le E, E′ sono due costanti arbitrarie.

Se si riducesse in serie ordinata secondo le potenze di β, la quantità

$$\mathrm{E}e^{-\int \frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}.\beta + \,.\,.\,.\,.\,.\, + \mathrm{P}^{(n)}.\beta^n}{\mathrm{B} + \mathrm{C}'.\beta + \,.\,.\,.\,.\,.\, + \mathrm{P}^{(n-1)}.\beta^{n-1}} dx}$$, e questa serie si supponesse rappresentata da $\mathrm{T} + \mathrm{T}'\beta + \mathrm{T}''\beta^2 +$ ec. (essendo T, T′, T″ ec., funzioni conosciute di x), avremmo così espresso il valore dl z

$$z = \mathrm{T}e^{\beta y} + \mathrm{T}'\beta e^{\beta y} + \mathrm{T}''\beta^2 e^{\beta y} + \text{ec.} + e^{-\int \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} dx} (\mathrm{E}' + \,.\,.\,.$$

$$\int e^{\int \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} dx} . \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{B}} dx).$$

Poniamo ora $\varphi(y)$ per $e^{\beta y}$, $(\frac{d\varphi(y)}{dy})$ per $e^{\beta y}\beta$, $(\frac{d^2\varphi(y)}{dy^2})$ per $e^{\beta y}\beta^2$ ec., ed avremo

$$z = \mathrm{T}\varphi(y) + \mathrm{T}'(\frac{d\varphi(y)}{dy}) + \mathrm{T}''(\frac{d^2\varphi(y)}{dy^2}) + \text{ec.} + e^{-\int \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} dx} (\mathrm{E} +$$

$$\int e^{\int \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} dx} . \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{B}} dx)$$

questa formula rappresenterà l' integrale della proposta, corredato di una funzione arbitraria $\varphi(y)$. Perchè tale espressione di z potesse dirsi l' integrale completo, dovrebbe secondo le idee ricevute dai Geometri contenere un numero n di funzioni arbitrarie. Si veda il Cap. II. §. 122.

Si abbia da integrare l' equazione del primo ordine

$$\mathrm{A}z + \mathrm{B}.(\frac{dz}{dx}) + \mathrm{B}'.(\frac{dz}{dy}) = \mathrm{X}.$$

Paragonando questa equazione con la superiore (F), avremo il di lei integrale rappresentato da

$$z = e^{\beta y}.\mathrm{E}.e^{\mathrm{X}' + \mathrm{X}''\beta} + e^{-\int \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} dx} .\int e^{\int \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} dx} . \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{B}} dx,$$ essendo $\mathrm{X}' = -\int \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} dx$, e $\mathrm{X}'' = -\int \frac{\mathrm{B}'}{\mathrm{B}} dx$. Sarà pertanto

$$z = e^{\mathrm{X}'}.\mathrm{E}.e^{\beta(y + \mathrm{X}'')} + e^{\mathrm{X}'}\int e^{-\mathrm{X}'} . \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{B}} dx.$$ Ora al §. 137. abbiamo veduto che si può prendere $\varphi(y)$ per $e^{\beta y}$, ed in conseguenza $\mathrm{E}\varphi(y + \mathrm{X}'')$ per $\mathrm{E}.e^{\beta(y + \mathrm{X}'')}$, dunque l' integrale completo sarà

$$z = \mathrm{E}e^{\mathrm{X}}\varphi(y + \mathrm{X}'') + e^{\mathrm{X}'}\int e^{-\mathrm{X}'} . \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{B}} dx.$$

La costante E può considerarsi contenuta entro la funzione arbitraria.

Sia ora da integrarsi l' equazione del secondo ordine

$$-3x^2 z + x^3(\frac{dz}{dx}) - 2x(\frac{dz}{dy}) + x^2(\frac{d^2z}{dxdy}) = 0.$$

Paragonata questa equazione con quella (F), avremo $\mathrm{A} = -3x^2$, $\mathrm{B} = x^3$, $\mathrm{B}' = -2x$, $\mathrm{C}' = x^2$, $\mathrm{X} = 0$, e tutti gli altri coefficienti saranno zero. Si avrà pertanto

$$z = \mathrm{E}e^{\int \frac{3x^2 + 2x\beta}{x^3 + x^2\beta} dx} . e^{\beta y};$$ ed integrando

$$z = \mathrm{E}.e^{\log(x^3 + x^2\beta)} . e^{\beta y},$$ cioè

$$z = \mathrm{E}x^3 e^{\beta y} + \mathrm{E}.x^2 e^{\beta y}\beta$$ e quindi

$$z = x^3\varphi(y) + x(\frac{d\varphi(y)}{dy}).$$

§. 144. Andiamo adesso a vedere una forma generale d'equazioni a coefficienti variabili, funzioni delle due variabili x e y, le quali sono suscettibili d'una integrazione completa. Noi tratteremo una equazione del terzo ordine, avvertendo che il metodo che useremo per questa, sarà adattabile ancora all'equazione degli ordini superiori. Sia pertanto proposta l'equazione,

$$\left.\begin{array}{r} Az + Bx\left(\frac{dz}{dx}\right) + Cx^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + Dx^3\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) \\ + B'y\left(\frac{dz}{dy}\right) + C'xy\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + D'x^2y\left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right) \\ + C''y^2\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) + D''xy^2\left(\frac{d^3z}{dxdy^2}\right) \\ + D'''y^3\left(\frac{d^3z}{dy^3}\right) \end{array}\right\} = 0$$

nella quale A, B, C ec. sono quantità costanti.

Facciamo $z = Ex^m y^n$, essendo E, m, n quantità costanti da determinarsi. Sostituendo il valore di z e delle sue differenziali parziali, e dividendo per $Ex^m y^n$, avremo

$$\left.\begin{array}{r} A + Bm + Cm(m-1) + Dm(m-1)(m-2) \\ + B'n + C'mn \qquad + D'm(m-1)n \\ + C''n(n-1) + D''n(n-1)m \\ + D'''n(n-1)(n-2) \end{array}\right\} = 0;$$

la costante E rimane indeterminata, e parimente rimane indeterminata una delle due costanti m, n fra le quali vi è un'equazione algebraica del terzo grado.

Siano N, N', N'' i tre valori di m dati per n, ed avremo per z queste tre espressioni

$$z = Ex^N y^n, \; z = E'x^{N'} y^n, \; z = E''x^{N''} y^n.$$

Ora la proposta equazione essendo lineare, soddisfarà ad essa anche la somma di quelle tre espressioni, ed avremo

$$z = Ex^N y^n + E'x^{N'} y^n + E''x^{N''} y^n,$$

nella quale E, E', E'' sono tre costanti arbitrarie; la quantità n è anche arbitraria e può prendersi diversa in ciascun termine.

Supponiamo ora che $B' = B$; $C' = 2C$; $C'' = C$; $D' = 3D$; $D'' = 3D$; $D''' = D$; l'equazione da integrarsi diverrà

$$\left.\begin{array}{r} Az + \\ B\left(x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right)\right) + \\ C\left(x^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2xy\left(\frac{d^2z}{dydx}\right) + y^2\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right) + \\ D\left(x^3\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) + 3x^2y\left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right) + 3xy^2\left(\frac{d^3z}{dxdy^2}\right) + y^3\left(\frac{d^3z}{dy^3}\right)\right) \end{array}\right\} = 0,$$

e l'equazione algebraica tra m ed n sarà

$$A + B(m+n) + C(m(m-1) + 2nm + n(n-1)) + D\{m(m-1)(m-2) + 3n.m(m-1) + 3m.n(n-1) + n(n-1)(n-2)\} = 0.$$

Se quest'equazione risoluta nei suoi fattori è

$$(m - gn - h)(m - g'n - h')(m - g''n - h'') = 0,$$

avremo per rappresentare z, l'espressione seguente

$$z = x^h (x^g y)^n . E + x^{h'} (x^{g'} y)^n . E' + x^{h''} (x^{g''} y)^n . E''.$$

In questo caso però le costanti E, E', E'' possono supporsi funzioni di $\frac{x}{y}$. L'integrale allora è completato con tre funzioni arbitrarie: infatti fatta $E = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, e sostituiti i differenziali di z nell'equazione, si trova che i coefficienti delle differenziali di E si elidono da se medesimi, e tutto passa come se la E fosse costante. Per convincersene, osserviamo che fatta

$z = x^m y^n \varphi(\frac{x}{y})$, e supposto

$$d\varphi(\omega) = \varphi'(\omega) \left\{ (\tfrac{d\omega}{dx}) dx + (\tfrac{d\omega}{dy}) dy \right\}$$

$$d\varphi'(\omega) = \varphi''(\omega) \left\{ (\tfrac{d\omega}{dx}) dx + (\tfrac{d\omega}{dy}) dy \right\} \text{ ec.},$$

si ha (scrivendo φ per $\varphi(\frac{x}{y})$ ec.),

$$(\tfrac{dz}{dx}) = mx^{m-1} y^n . \varphi + x^m y^{n-1} . \varphi'$$

$$(\tfrac{d^2z}{dx^2}) = m(m-1) x^{m-2} y^n . \varphi + 2mx^{m-1} y^{n-1} . \varphi' + \ldots . \; x^m y^{n-2} . \varphi'',$$

$$(\tfrac{dz}{dy}) = nx^m y^{n-1} . \varphi - nx^{m+1} y^{n-2} \varphi'$$

$$(\tfrac{d^2z}{dy^2}) = n(n-1) x^m y^{n-2} . \varphi - 2(n-1) x^{m+1} y^{n-3} . \varphi' + x^{m+2} y^{n-4} . \varphi'',$$

$$(\tfrac{d^2z}{dxdy}) = mnx^{m-1} y^{n-1} . \varphi - mx^m y^{n-2} . \varphi' + (n-1) x^m y^{n-2} \times \varphi' - x^{m+1} y^{n-3} . \varphi''.$$

ec. ec.

Se ora i valori di questi differenziali si sostituiscono nella proposta, avremo la stessa equazione che nel caso di E costante, ma nel di lei primo membro vi saranno di più i termini seguenti

$$B \left\{ x^{m+1} y^{n-1} . \varphi' - x^{m+1} y^{n-1} . \varphi' \right\} + C \left\{ 2mx^{m+1} y^{n-1} . \varphi' + x^{m+2} y^{n-2} . \varphi'' - 2mx^{m+1} y^{n-1} . \varphi' - 2x^{m+2} y^{n-2} . \varphi'' + 2(n-1) x^{m+1} y^{n-1} . \varphi' + x^{m+2} y^{n-2} . \varphi'' - 2(n-1) x^{m+1} y^{n-1} . \varphi' \right\} + D \left\{ \text{ec.} \right\},$$

ed è evidente che questi termini s' annullano da se medesimi; l' integrale dunque completo della proposta sarà

$$z = x^{h+gn} . y^n . \varphi(\tfrac{x}{y}) + x^{h'+g'n} . y^n . \varphi'(\tfrac{x}{y}) + x^{h''+g''n} . y^n . \varphi''(\tfrac{x}{y}),$$

essendo φ, φ', φ'' tre funzioni arbitrarie diverse.

§. 115. Noi abbiamo supposto nullo il secondo membro dell' equazione integrata al §. antecedente. Sia questo una funzione di x e di y, cioè $\Psi(x, y)$. Ponendo $\frac{x}{y} . y$ invece di x, essa diverrà una funzione di $\frac{x}{y}$ e di y, prenderà cioè la forma $F(\frac{x}{y}, y)$.

Per integrare allora l' equazione, si faccia

$z = x^m y^n \varphi(\frac{x}{y}) + Y$, essendo Y una funzione incognita di y, e sostituendo questo valore nella proposta, avremo per determinare Y, quest' equazione

$$AY + By(\tfrac{dY}{dy}) + Cy^2(\tfrac{d^2Y}{dy^2}) + Dy^3(\tfrac{d^3Y}{dy^3}) = F(\tfrac{x}{y}, y):$$

per integrarla considereremo la quantità $\frac{x}{y}$, che si trova in F, come costante (poichè i di lei differenziali sostituiti nell' equazione proposta si distruggono da se medesimi), e trovato il valore di Y, lo aggiungeremo all' integrale ottenuto nell' antecedente §.

Se i coefficienti A, B, C ec. fossero funzioni di $\frac{x}{y}$, gl' integrali avrebbero la stessa forma; poichè quantunque l' equazione che allora determina m, abbia i coefficienti variabili, e dia perciò m eguale ad una funzione di $\frac{x}{y}$, pure questo valore di m è come se fosse costante, giacchè i di lui differenziali moltiplicati per i coefficienti della proposta s' annullano da se stessi.

Sarà facile persuadersene prendendo le differenziali di

$z = x^{f(\frac{x}{y})} y^{n} \cdot \varphi(\frac{x}{y})$; (la funzione $f(\frac{x}{y})$ esprime il valore di m che è dato dall' equazione fra m ed n); imperocchè i termini, ove si trovano le differenziali di f e di φ, si annulleranno da se medesime.

Quando il secondo membro diviene una funzione qualunque $\theta(x, y)$ di x e di y, ed i coefficienti funzioni qualunque $F'(\frac{x}{y})$, $F''(\frac{x}{y})$ ec., di $\frac{x}{y}$, l' equazione del §. antecedente prende la forma

$$\theta(x, y) = F'(\tfrac{x}{y}) z + F''(\tfrac{x}{y}) \left\{ x (\tfrac{dz}{dx}) + y (\tfrac{dz}{dy}) \right\} + F'''(\tfrac{x}{y}) \left\{ x^2 (\tfrac{d^2z}{dx^2}) + 2xy (\tfrac{d^2z}{dxdy}) + y^2 (\tfrac{d^2z}{dy^2}) \right\} + F''''(\tfrac{x}{y}) \left\{ x^3 (\tfrac{d^3z}{dx^3}) + 3x^2y (\tfrac{d^3z}{dx^2dy}) + 3xy^2 (\tfrac{d^3z}{dxdy^2}) + y^3 (\tfrac{d^3z}{dy^3}) \right\};$$

ed il suo integrale completo è

$$z = x^{f(\frac{x}{y})} \cdot y^{n} \varphi(\tfrac{x}{y}) + x^{f'(\frac{x}{y})} \cdot y^{n} \varphi'(\tfrac{x}{y}) + x^{f''(\frac{x}{y})} \times \ldots \ldots . \; y^{n} \varphi''(\tfrac{x}{y}) + Y;$$

le lettere f, f', f'' indicano tre funzioni di $\frac{x}{y}$ che esprimono i tre valori di m, dati dall' equazione fra m ed n, che è del terzo grado. Le funzioni $\varphi, \varphi', \varphi''$, come pure la n, dipendono dal nostro arbitrio. La Y è data da quest' equazione

$$F'(\tfrac{x}{y}) Y + F''(\tfrac{x}{y}) y (\tfrac{dY}{dy}) + F'''(\tfrac{x}{y}) \cdot y^2 (\tfrac{d^2Y}{dy^2}) + F''''(\tfrac{x}{y}) \times y^3 (\tfrac{d^3Y}{dy^3}) = \theta(\tfrac{x}{y}, y);$$

siccome la quantità n che trovasi nell' integrale, resta indeterminata, perciò possiam semplicizzarlo col supporla nulla: facendo allora $n = 0$, l' equazione la quale determina m, diverrà

$$A + Bm + Cm(m-1) + Dm(m-1)(m-2) = 0,$$

ed il valore di z sarà

$$z = x^{f(\frac{x}{y})} \cdot \varphi(\tfrac{x}{y}) + \text{ec.} + Y.$$

E' chiaro che il metodo medesimo si estende anche agli ordini superiori: e si può dunque concludere che sarà sempre completamente integrabile una equazione a differenziali parziali dell' ordine n a coefficienti variabili; purchè questi seguano la legge dei coefficienti di quella di terzo ordine quì sopra integrata; cioè la fila delle differenziali n^{esime} sia

$$F^{(n)}(\tfrac{x}{y}) \left\{ x^n (\tfrac{d^nz}{dx^n}) + nx^{n-1} y (\tfrac{d^nz}{dx^{n-1}dy}) + \tfrac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \times \ldots y^2 (\tfrac{d^nz}{dx^{n-2}dy^2}) + \ldots \ldots \ldots + y^n (\tfrac{d^nz}{dy^n}) \right\}.$$

Per farne una applicazione, abbiasi da integrare l' equazione

$$xy - a\tfrac{x^2}{y^2} z + (-(a+1)\tfrac{x}{y} + 1) (x(\tfrac{dz}{dx}) + y(\tfrac{dz}{dy})) + x^2 (\tfrac{d^2z}{dx^2}) + 2xy (\tfrac{d^2z}{dxdy}) + y^2 (\tfrac{d^2z}{dy^2}) = 0,$$

la quale è del secondo ordine, e conduce perciò alla risoluzione di una equazione del secondo grado

$A + Bm + Cm(m-1) = 0$. Ora $A = a\frac{x^2}{y^2}$, $B = 1 - (a+1)\frac{x}{y}$, $C = 1$; avremo dunque per determinare m

$a\frac{x^2}{y^2} - (a+1)\frac{x}{y} m + m^2 = 0$, dalla quale si ricava $m = \frac{x}{y}$, $m = a\frac{x}{y}$; perciò l' integrale completo sarà

$z = x^{\frac{x}{y}} \varphi(\frac{x}{y}) + x^{a\frac{x}{y}} \cdot \varphi'(\frac{x}{y}) + Y$. La quantità Y è data da questa equazione lineare

$$a\frac{x^2}{y^2}.\mathrm{Y} + (1 - (a+1)\frac{x}{y})y(\frac{d\mathrm{Y}}{dy}) + y^2(\frac{d^2\mathrm{Y}}{dy^2}) = \frac{x}{y}.y^2,$$

la quale deve integrarsi supponendo $\frac{x}{y}$ una quantità costante. L' integrale di questa equazione ci è data dalle formule del §. 134.

Si tratterebbero con i medesimi metodi l' equazioni ad un più gran numero di variabili. Non ce ne occuperemo di più.

§. 146. Ancora l' equazione

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{A}z + \mathrm{B}(ax+by)(\frac{dz}{dx}) + \mathrm{C}(ax+by)^2(\frac{d^2z}{dx^2}) + \text{ec.} \\ + \mathrm{B}'(ax+by)(\frac{dz}{dy}) + \mathrm{C}'(ax+by)^2(\frac{d^2z}{dxdy}) + \text{ec.} \\ + \mathrm{C}''(ax+by)^2(\frac{d^2z}{dy^2}) + \text{ec.} \end{array}\right\} = 0$$

ammette un integrale, ma non completato da una funzione arbitraria, almeno facendo uso del metodo seguente.

Sia $z = \mathrm{E}(ax+by)^m$; sostituendo il valore di z e delle sue differenziali parziali nella equazione proposta, e dividendola per $\mathrm{E}(ax+by)^m$, avremo

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{A} + \mathrm{B}ma + \mathrm{C}m(m-1)a^2 + \text{ec.} \\ + \mathrm{B}'mb + \mathrm{C}'m(m-1)ab + \text{ec.} \\ + \mathrm{C}''m(m-1)b^2 + \text{ec.} \\ + \text{ec.} \end{array}\right\} = 0,$$

ovvero

$$\mathrm{A} + (\mathrm{B}a + \mathrm{B}'b)m + (\mathrm{C}a^2 + \mathrm{C}'ab + \mathrm{C}''b^2)m(m-1) + \text{ec.} = 0.$$

Per mezzo di questa equazione determineremo m, ed avremo per m tanti valori particolari, quanto è il grado di quell' equazione: ciascuno di quei valori particolari ci darà un' espressione di z, e la somma di tutte queste espressioni sarà il va-

lore di z che soddisfarà alla proposta. Quest' equazione è stata integrata la prima volta dal Sig. La-Place (Atti di Parigi 1773).

Quando i coefficienti delle equazioni lineari a differenziali parziali sono funzioni qualunque delle variabili x, y, i metodi spiegati non bastano per trovarne gli integrali; e siccome questa ricerca dimanda delle nozioni sopra l' integrazione dell' equazioni non lineari, così non possiamo trattarla adesso.

§ 147 Terminiamo questo Capitolo con dir qualche cosa del caso, nel quale sono date più equazioni lineari a differenziali parziali, fra più funzioni z, u ec. delle variabili x, y.

Si abbiano queste due equazioni a coefficienti costanti

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{A}z + \mathrm{B}(\frac{dz}{dx}) + \mathrm{C}(\frac{dz}{dy}) \\ \mathrm{A}'u + \mathrm{B}'(\frac{du}{dx}) + \mathrm{C}'(\frac{du}{dy}) \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} az + b(\frac{dz}{dx}) + c(\frac{dz}{dy}) \\ a'u + b'(\frac{du}{dx}) + c'(\frac{du}{dy}) \end{array}\right\} = 0$$

tra le funzioni z, u, e le loro differenziali parziali.

Facciamo $z = e^{\alpha x + \beta y}$, $u = \mathrm{L}.e^{\alpha x + \beta y}$, essendo $\mathrm{L}, \alpha, \beta$ costanti da determinarsi.

Sostituendo e dividendo per $e^{\alpha x + \beta y}$, abbiamo

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{A} + \mathrm{B}\alpha + \mathrm{C}\beta \\ \mathrm{L}(\mathrm{A}' + \mathrm{B}'\alpha + \mathrm{C}'\beta) \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} a + b\alpha + c\beta \\ \mathrm{L}(a' + b'\alpha + c'\beta) \end{array}\right\} = 0.$$

dalle quali elimineremo la L, e troveremo allora fra α e β un' equazione algebraica del secondo grado.

Sia $\beta = \mathrm{M}$ una radice di quell' equazione, la quale ci dia $\mathrm{L} = \mathrm{N}$: saranno M, N due funzioni conosciute di α, ed avremo

$z = e^{\alpha x + My}$; $u = N . e^{\alpha x + My}$

Riduciamo in serie ordinate per α le quantità

e^{My}, Ne^{My}, e supponiamo

$$e^{My} = T + T'\alpha + T''\alpha^2 + T'''\alpha^3 + \text{ec.}$$

$$Ne^{My} = V + V'\alpha + V''\alpha^2 + V'''\alpha^3 + \text{ec.}:$$

avremo allora

$$z = Te^{\alpha x} + T'e^{\alpha x}\alpha + T''e^{\alpha x}\alpha^2 + T'''e^{\alpha x}\alpha^3 + \text{ec.}$$

$$u = Ve^{\alpha x} + V'e^{\alpha x}\alpha + V''e^{\alpha x}\alpha^2 + V'''e^{\alpha x}\alpha^3 + \text{ec.}$$

ed introducendo per $e^{\alpha x}$ una funzione arbitraria, sarà

$$z = T\varphi(x) + T'\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right) + T''\left(\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}\right) + \text{ec.}$$

$$u = V\varphi(x) + V'\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right) + V''\left(\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}\right) + \text{ec.}$$

Questi valori di z, u soddisfanno all' equazioni proposte. L' altra radice ci darebbe due simili espressioni per z e per u, e si potrebbero anche prendere le somme di queste con le ritrovate, per averne in questa guisa i valori di z e di u con due funzioni arbitrarie. Si vede come dovremmo fare per le equazioni degli ordini superiori.

Quando i coefficienti sono funzioni variabili, il metodo che abbiamo insegnato, non basta: e bisogna allora eliminare per mezzo dell' equazioni proposte tutte le funzioni z, u ec., meno una, ed integrare infine l' equazione a differenziali parziali, la quale contiene la funzione non eliminata. Questa equazione sarà di un ordine più elevato delle proposte; imperocchè, generalmente parlando, avrem bisogno di ricavare da queste, per mezzo della differenziazione, altre equazioni, onde ottenere quell' eliminazione medesima. Siccome questo metodo è comune anche all' equazioni non lineari, per questo ne parleremo nei Capitoli seguenti.

APPENDICE

Delle Curve a doppia Curvatura, e delle Superficie Curve.

N°. I. Per quanto la dottrina delle Curve a doppia Curvatura e delle Superficie, in ciò che riguarda l' applicazione ad esse dell' Algebra, appartenga direttamente a quel ramo di Analisi chiamato *Introduzione alla Matematica Sublime*, pure ho determinato di farne parola, e perchè queste debbono formare una parte del mio insegnamento e perchè stimo utile per i Lettori di questo Libro presentare alcune cognizioni che a quelle appartengono nell' aspetto che può ad essi in seguito abbisognare.

Il principio o l' assioma analitico il quale serve come di prima pietra all' Edifizio dell' applicazione del Calcolo alle curve è il seguente „ Due quantità le quali son costanti insieme „ e variabili insieme, sono necessariamente l' una funzione dell' al- „ tra „ cioè se si hanno due quantità tali, che una è invariabile finchè l' altra non soffre alcun cangiamento, e varia allorchè la seconda in qualche modo si cambia, debbono essere di necessità l' una funzione dell' altra; infatti esse dipendono allora in qualche modo l' una dall' altra, ed analiticamente parlando, questo rapporto si esprime col dire *l' una è funzione dell' altra*.

Per poco che si consideri una curva descritta in un piano, ad un punto della quale siano condotte le due coordinate x, y, si vedrà che queste quantità x, y sono costanti insieme e variabili insieme, che cioè rimanendo sempre la stessa ascissa x, l' ordinata anche rimane la stessa, e che variando la x, si varia anche subito la y: ne concluderemo allora che in una curva qualunque, l' ordinata è una certa funzione dell' ascissa, o viceversa l' ascissa è una certa funzione dell' ordinata; così per $y = \varphi(x)$, ovvero $x = \Psi(y)$ rappresenteremo analiticamente qualunque curva piana; la natura poi della funzione che eguaglia l' ordinata o l' ascissa, sarà determinata o dalla genesi stessa, onde è formata la curva, o dalla dipendenza che costantemente deve regnare tra le due coordinate corrispondenti a qualunque di lei punto. Io non mi fermo a considerare le curve piane; e solo rammenterò alcune nozioni sopra l' equazioni alle linee rette situate in un piano.

Siano AC, AB due assi ad angolo retto in A: sia disegnata nel piano CAB la linea retta EF: sia AB l' asse degli x, AC quello degli y: se è dato il punto E e l' angolo FEB, è data anche di posizione la retta EF, imperocchè non vi può essere un' altra retta, la quale passi per il punto E, faccia con AB un angolo eguale ad FEB, e non cada sopra EF; se poi fosse dato l' angolo FEB e non il punto E, ove essa deve segare l' asse degli x, allora non è intieramente data di posizione la nostra retta, poichè invece di EF potremmo prendere qualunque altra F'E' che facesse con AB un angolo F'E'B = FEB; e sarebbe questa F'E' una parallela ad EF: osserviamo che di queste parallele ve ne ha un numero infinito; e se fissato il punto E, non fosse stabilito l' angolo FEB, sotto cui la retta EF deve tagliare l' asse AB, non sarebbe anche in questo caso intieramente data di posizione la nostra retta; noi potremmo invece di EF prendere una qualunque altra linea EL che soddisfarebbe alla condizione di segare in E l' asse delle ascisse: osserviamo egualmente che di queste rette ve ne ha un numero infinito. Fig. 29.

E quando non fosse determinato nè il luogo ove la retta dee tagliar l' asse, nè l' angolo dell' intersezione, non si conoscerebbe allora in alcun modo la posizione della retta.

Questo premesso, facciamo AE $= a$, $tang$ FEB $= b$, AP $= x$, PM $= y$, ed avremo $\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{PE}} = tang\,\mathrm{FEB}$, $\frac{y}{x-a} = b$, $y = bx - ab$, e questa è l' equazione della retta riferita agli assi CA, AB.

Se le quantità a, b saranno date, questa equazione sarà quella della retta EF; se la quantità a sarà incognita, la nostra equazione rappresenterà qualunque parallela E'F'; e se sarà incognita b, l' equazione sarà quella di una retta qualunque EL; se poi saranno incognite amendue, da quell' equazione sarà rappresentata qualunque linea retta HG.

Fig. 29. Un' equazione lineare $Ay + Bx + C = 0$ qualunque tra x ed y può sempre ridursi alla forma $y = \alpha x + \beta$, e questa paragonata con l' equazione alla linea retta $y = bx - ab$, ci dà $\alpha = b$, $\beta = -ab$, e quindi $\alpha = b$, $-\frac{\beta}{\alpha} = a$: dunque l' equazione $y = \alpha x + \beta$ rappresenta una linea retta disegnata in un piano, e riferita a due assi ortogonali presi nello stesso piano, per mezzo delle coordinate x, y, la quale fa con l' asse degli x un angolo di cui la tangente è α, e sega quest' asse in un punto distante dall' origine delle ascisse di una quantità $-\frac{\beta}{\alpha}$.

Spiegato il significato di quest' equazione $y = \alpha x + \beta$, noi la terremo sempre per rappresentare una retta descritta in un piano. Facciamo alcune considerazioni riguardo alla medesima.

1°. I ragionamenti fatti quì sopra per x ed y gli avremmo potuti fare per y e per x, e saremmo giunti a stabilire che anche l' equazione $x = \alpha' y + \beta'$ ci rappresenta una linea retta; che α' è la tangente dell' angolo da essa fatto con l' asse degli y; e che $-\frac{\beta'}{\alpha'}$ è la distanza del punto d' intersezione di questa retta con lo stesso asse dall' origine delle ascisse.

2°. Se nell' equazione $y = \alpha x + \beta$ facciamo $\beta = 0$, si ha $y = \alpha x$; e questa è l' equazione di una retta, la quale passa per l' origine delle ascisse, e fa con l' asse degli x un angolo la cui tangente è α.

3°. Se nella stessa equazione facciamo $\alpha = 0$, si ha $y = \beta$; e quest' equazione è quella di una linea retta parallela all' asse degli x, o che fa con quest' asse un angolo la cui tangente è nulla: la distanza di questa retta dal medesimo asse è $= \beta$.

Nella stessa maniera un' equazione $x = \beta'$ rappresenta una retta parallela all' asse degli y, e distante da quest' asse di una quantità β'.

4°. Diventi nulla la distanza β, e sarà allora $y = 0$ l' equazione di una parallela all' asse degli x, e distante da esso di una quantità $\beta = 0$: questa parallela coinciderà con lo stesso asse; ed in conseguenza sarà $y = 0$ l' espressione analitica dell' asse degli x.

Sarà così $x = 0$ l' equazione che rappresenta l' asse degli y.

5ª. Supponendo indeterminati i due coefficienti costanti α, β dell' equazione alla linea retta $y = \alpha x + \beta$, proponiamo di determinarli in modo che essa passi per due dati punti; siano le coordinate per il primo punto dato di posizione $x = m$, $y = n$, e quelle del secondo punto $x = \mu$, $y = \nu$, e determineremo α, β per mezzo di queste due equazioni $n = \alpha m + \beta$, $\nu = \alpha\mu + \beta$, dalle quali ottiensi $\alpha = \frac{n-\nu}{m-\mu}$, $\beta = \frac{n\mu - \nu m}{m-\mu}$, e l' equazione della retta che passa per quei due punti diviene

$$y = \left(\frac{n-\nu}{m-\mu}\right) x + \frac{n\mu - \nu m}{m-\mu}.$$

6ª. Se la retta fosse stata assoggettata a passare per un solo punto dato di posizione, sarebbe bastata la determinazione di uno dei due coefficienti α, β, e ne sarebbe restato uno per soddisfare ad un' altra condizione.

Così supponiamo che si cerchi l' equazione di una retta che deve passare per un punto fisso dato, e segare un' altra retta data sotto un dato angolo.

Sia $y = \alpha x + \beta$ l' equazione data di una retta; sia la tangente di questo dato angolo $= e$; siano m, n le coordinate del punto parimente dato; e sia $y = \gamma x + \lambda$ l' equazione della retta ricercata: tutto si ridurrà alla determinazione dei due coefficienti γ e λ.

Per ottenerla, supponiamo che sia E′F′ la linea data, M′ il punto dato, HM′G la linea cercata, e sarà AP′ $= m$; P′M′ $= n$; *tang* F′E′B $= \alpha$; AE′ $= -\frac{\beta}{\alpha}$; *tang* HKE′ $= e$; *tang* GHB $= \gamma$; AH $= -\frac{\lambda}{\gamma}$: ora *tang* F′E′B $=$ *tang* (GHB + HKE′) $= \frac{tang\,\text{GHB} + tang\,\text{HKE}'}{1 - tang\,\text{GHB}\; tang\,\text{HKE}'}$, e sostituendo, si avranno quest' equazioni per determinare γ e λ, Fig. 29.

$\alpha = \frac{\gamma + e}{1 - \gamma e}$, $m = \gamma n + \lambda$, dalle quali si ricava $\gamma = \frac{\alpha - e}{1 + e\alpha}$, $\lambda = m - \left(\frac{\alpha - e}{1 + \alpha e}\right) n$. La dimandata equazione sarà per tanto $y = \left(\frac{\alpha - e}{1 + e\alpha}\right) x + m - \left(\frac{\alpha - e}{1 + e\alpha}\right) n$; questa ci rappresenterà la retta GH, la quale passa per il dato punto M′, e taglia l' altra linea retta E′F′ sotto un angolo HKE′ che ha per tangente e. Fig. 29.

Quando il punto M′ dovesse essere nella retta E′F′: cioè quando fosse dato il punto nel quale la retta cercata dee segare la data e l' angolo d' intersezione, allora si farebbe nella qui ritrovata equazione $m = \alpha n + \beta$, ed avremmo

$y = \left(\frac{\alpha - e}{1 + e\alpha}\right) x + \alpha n + \beta - \frac{\alpha - e}{1 + e\alpha} n$, che si riduce alla seguente

$$y = \frac{\alpha - e}{1 + e\alpha} x + \left\{\beta(1 + e\alpha) + en(\alpha^2 + 1)\right\} : (1 + e\alpha)$$

7ª. Se la seconda retta della quale si è ricercata l' equazione, dovesse esser parallela alla prima E′F′, e passare per il punto M′, la tangente e sarebbe allora nulla, e la sua equazione diverrebbe $y = \alpha x + m - \alpha n$.

Così le due equazioni

$y = \alpha x + \beta$, $y = \alpha x + m - \alpha n$, ovvero $y - m = \alpha(x - n)$ rappresenterebbero due linee parallele tra di loro: è inutile avvertire che x, y non sono le stesse in ciascuna di quell' equazioni: esse sono però le coordinate della retta rappresentata dall' equazione cui appartengono.

8ª. Supponiamo che la retta GH deva essere perpendicolare alla linea E′F′: allora $\frac{1}{e} = cotang$ HKE′ $= 0$; dunque la di lei equazione sarà $y = -\frac{1}{\alpha} x + m + \frac{1}{\alpha} n$: dunque una linea retta la cui equazione sia $y = -\frac{1}{\alpha} x + m + \frac{1}{\alpha} n$ sarà perpendicolare ad un' altra che abbia per equazione $y = \alpha x + \beta$, e passerà per un punto M′ le cui coordinate sono $x = n$, $y = m$; così il sistema di queste due equazioni

$y = \alpha x + \beta$, $y = -\frac{1}{\alpha} x + m + \frac{1}{\alpha} n$ ci rappresenterà due linee perpendicolari tra di loro, ed una delle quali passerà per un punto dato M′.

9ª. In generale il sistema di queste due equazioni $y = \alpha x + \beta$, $y = \alpha x + \lambda$ ci rappresenterà due parallele; ed il sistema di quest' altre due $y = \alpha x + \beta$, $y = -\frac{1}{\alpha} x + \lambda$ ci rappresenta due perpendicolari l' una all' altra.

Se dunque si avranno due qualunque equazioni $y = \alpha x + \beta$; $y = \gamma x + \lambda$, queste ci significheranno due parallele quando $\alpha = \gamma$, e due perpendicolari quando $\alpha\gamma + 1 = 0$.

Avverto di nuovo che le coordinate di una equazione non sono le stesse che quelle dell' altra.

II. Abbiamo sin ora considerata la retta disegnata in un certo piano, vediamo adesso come possa analiticamente determinarsi la posizione di una retta condotta nello spazio.

Attesa la difficoltà di rappresentare in un piano le cose che hanno rilievo, o che sono staccate da quello, io mi contenterò il più delle volte di descrivere le figure, piuttosto che disegnarle, e così mi dirigerò più alla immaginazione che all' occhio dei miei Lettori; d' altronde una lunga esperienza mi ha mostrato che sono talvolta intese con maggior facilità le descrizioni che i disegni, dei quali pure intendo servirmi, allorquando lo reputerò vantaggioso.

Come i punti situati in un piano si riportano a due assi ortogonali disegnati nel piano medesimo, e dei quali prendiamo per conosciuta la posizione, poichè dipende dal nostro arbitrio determinarla: così quei punti i quali sono situati nello spazio si riportano a tre piani perpendicolari tra loro, e la cui posizione per lo stesso motivo è a noi cognita.

Quando si tratti di punti in un piano, si assegnano le distanze di essi da i due assi ortogonali; e quando di punti nello spazio, si assegnano le distanze dai tre piani ortogonali suddetti. Queste distanze non sono altro che le perpendicolari, le quali si abbassano da quei punti o sopra gli assi, o sopra i piani, ed assegnate che siano, determinano la posizione dei punti, poichè fissano i luoghi ove questi si trovano.

Così per determinare il punto a situato nello spazio, bisogna determinare le distanze di esso da tre piani perpendicolari tra loro dati di posizione: siano questi tre piani CAB che rappresenti per esempio il piano orizzontale della Tavola; EAB che rappresenti il piano verticale avanti agli occhi di chi guarda; ed EAC quello verticale che fa angolo retto con l' altro, ed è situato alla sinistra di chi guarda la figura: si intendano dal punto a abbassate le perpendicolari aQ nel punto Q sul piano orizzontale; aR nel punto R sul piano verticale anteriore; Fig. 30.

Fig. 30. ed aS sul piano verticale laterale: queste perpendicolari sono le distanze determinanti la posizione di a di cui parliamo.

Le linee AB, AC, AE che sono le intersezioni dei tre piani, si chiamano gli assi. Se dai piedi di quelle tre perpendicolari Q, R, S si conducono le perpendicolari sopra i tre assi, cioè da Q le due QP, QN; da R le due RL, RP; da S le due SL, SN, sarà compito un parallelepipedo rettangolo APRLSaQN, di cui il punto A sarà l' intersezione comune di quei tre piani; ed il di lui opposto a sarà il punto situato nello spazio del quale si parla.

Il punto A si dice l'origine delle coordinate; le distanze perpendicolari aQ, aR, aS chiamansi ordinate del punto a da esse determinato: AB, AC, AE chiamansi gli assi delle coordinate; e siccome quelle tre coordinate sogliono indicarsi con le lettere x, y, z, così quegli assi si chiamano gli assi delle x, delle y, e delle z; se l' ordinata aS è indicata per x, l' asse cui è parallela, cioè AB, chiamasi l' asse degli x; così indicando aR per y, AC è l' asse degli y; ed AE l' asse delle z: il piano CAB che passa per i due assi delle x e delle y, dicesi il piano delle x, y; il piano CAE dicesi piano delle y, z; e quello EAB è detto piano delle x, z.

Siccome aS = AP; aR = PQ; così ordinariamente per coordinate del punto a s' intendono le tre rette AP $= x$, PQ $= y$, aQ $= z$; la prima delle quali è una porzione dell' asse delle x tale che conducendo alla sua estremità P una perpendicolare o una parallela ad AC, incontra il piede Q della perpendicolare aQ: abbassata dunque la perpendicolare aQ, se dal punto Q si abbassa una perpendicolare sull' asse AB, si avranno le tre coordinate del punto a. Le medesime considerazioni si facciano relativamente a ciascuno degli altri assi.

Osserviamo, che quando si prolungassero quei tre piani in tutte le direzioni, si formerebbero intorno al punto A otto angoli solidi, eguali all' angolo solido CABAEAC, che racchiude lo spazio da noi quì sopra considerato. Avendo poi convenuto che prendansi per positive le coordinate, le quali si estendono nelle direzioni degli assi da A verso B, verso C, verso E, ne segue che per quei punti, i quali si trovano in taluno degli altri sette angoli solidi fatti intorno al vertice A, alcune delle coordinate, o tutte saranno negative: saranno negative tutte nell' angolo solido opposto direttamente all' angolo CABAEAC, e che non ha di comune con questo che il punto A: vi sarà un' ordinata negativa in quegli angoli i quali han di comune col suddetto uno dei piani; e ve ne saranno due in quei che hanno di comune una linea. Fig. 30.

Tutto questo premesso, figuriamoci una linea retta descritta nello spazio: se da ciascun punto della medesima si abbassano le perpendicolari e sul piano delle x, y supposto da noi orizzontale, e sopra il piano delle x, z supposto verticale anteriore, e sopra quello delle y, z, supposto (per limitare le idee) verticale e laterale sinistro, tutte le perpendicolari che cadono sopra ciascuno di questi piani vi segneranno una retta che si chiama la projezione della nostra linea tirata nello spazio: questa linea dunque avrà tre projezioni, ciascuna in un di quei tre piani, e queste projezioni sono tre linee rette; di più si concepisce facilmente che se si facesse passare un piano per la nostra linea condotta nello spazio, e per una sua projezione, questo sarebbe perpendicolare al piano ove è segnata quella projezione.

Due di queste tre projezioni bastano a determinare la posizione della linea; infatti facendo passare per esse, due superficie piane perpendicolari ai piani in cui quelle projezioni si trovano, si segheranno queste in una sola linea, la quale sarà in conseguenza la retta nello spazio, che a tali projezioni appartiene. Per questo motivo noi diciamo che una linea condotta nello spazio è analiticamente determinata per il sistema delle due equazioni, che a due delle di lei projezioni convengono; ci vogliono dunque due equazioni per rappresentare una linea retta condotta nello spazio. Dunque se $x = az + b$ è l' equazione di una linea retta nel piano verticale degli x e z, e se $y = a'z + b'$ è quella di un' altra retta nell' altro piano verticale degli y e z, il sistema di queste due equazioni $x = az + b$, $y = a'z + b'$ rappresenterà una linea retta nello spazio, tale che essa abbia quelle due rette per projezioni.

III. Data una linea retta nello spazio, e parimente dato un punto fuori di essa, proponiamoci di condurre per quel punto una retta a quella parallela; ciò che per noi equivale a dire: date le equazioni che determinano una linea retta nello spazio, e le coordinate che determinano un punto, si dimandano le equazioni di un' altra retta parallela alla prima, e che passi per quel punto.

Due rette nello spazio sono parallele quando lo sono le loro respettive projezioni.

Rappresentiamo per x, y, z le tre coordinate rettangolari tra le quali al solito z è la verticale.

Siano $\left\{\begin{array}{l} x = az + b \\ y = a'z + b' \end{array}\right\}$ l' equazioni delle projezioni della retta data sopra i piani verticali, dalle quali eliminando z, si ha la relazione tra le x, y che appartiene alla stessa linea, cioè l' equazione della di lei projezione orizzontale: $ay - a'x = ab' - a'b$.

Indichiamo per x', y', z' le coordinate del punto dato.

Secondo ciò che abbiamo detto al N°. I., l' equazioni della retta parallela da noi voluta, saranno

$$x - x' = a(z - z'),$$
$$y - y' = a'(z - z'),$$
$$a'(x - x') = a(y - y'),$$

due qualunque delle quali producono la terza.

Se poi si volessero trovare l' equazioni di una retta obbligata a passare per due punti dati nello spazio, ecco come faremo.

Siano x', y', z' le coordinate del primo punto, e x'', y'', z'' quelle del secondo, e siano $x = az + b$, $y = a'z + b'$ l' equazioni della retta cercata: tutta la difficoltà si riduce alla determinazione dei coefficienti a, b, a', b'.

La retta dovendo passare per il primo punto, le sue equazioni saranno della forma $x - x' = a(z - z')$, $y - y' = a'(z - z')$: ma dovendo anche passare per il secondo, le sue equazioni saranno anche $x - x'' = a(z - z'')$, $y - y'' = a'(z - z'')$: ora eliminando a, a' tra queste quattro equazioni, avremo per determinare la retta voluta

$$x(z' - z'') = z(x' - x'') + x''z' - x'z''$$
$$y(z' - z'') = z(y' - y'') + z'y'' - z''y'.$$

Queste sono l' equazioni delle projezioni sopra i due piani verticali: eliminandone z, si avrebbe l' equazione della projezione sopra il piano orizzontale.

La lunghezza poi della retta che unisce quei due punti dati è

$$\sqrt{\{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2\}}.$$

IV. Passiamo alla considerazione del piano esteso nello spazio.

Per trovare l' equazione del piano, come per altre più delicate ricerche che verranno in seguito, faremo uso della considerazione del movimento, per mezzo del quale supporremo che si generino le superficie ed i solidi; e ciò non vuol dire che si abbia bisogno di ricorrere alla Meccanica per le indagini Geometriche, imperocchè per quanto poco si voglia riflettere sopra i metodi a siffatte considerazioni appoggiati, vedremo non servire esse che come un ripiego, onde instituire più facilmente certi ragionamenti, i quali potrebbero anche farsi senza di loro; noi facciamo uso del moto, come si fa nella Geometria Elementare, quando si considera il circolo generato del ravvolgimento del raggio circa un centro: si aggiunga a tutto questo, che è anche naturale considerare il movimento nella generazione delle linee, delle superficie e dei solidi, perchè effettivamente non può esso escludersi dalla loro vera descrizione.

Deesi al Sig. Monge questa maniera di trattare l' applicazione dell' Algebra alle curve ed alle superficie.

Per poco che riflettiamo ad un piano condotto nello spazio, troveremo che egli è determinato: 1°. Se è assegnato in qual punto esso sega l' asse verticale: 2°. Se sono dati gli angoli, che l' intersezioni di quel piano con i due verticali fanno con l' orizzonte; così noi supporremo che un piano sia conosciuto: 1°. Per mezzo dell' ordinata verticale all' origine, ordinata che noi rappresenteremo per C: 2°. Per gli angoli che le sue due traccie sopra i piani verticali formano con l' orizzonte; e che di più le tangenti di questi angoli siano A per quello che è nel piano degli x e z; e B per quello che è nel piano degli y e z.

Per equazione poi del piano si intende una relazione tra x, y, z tale, che dato a piacere un valore qualunque a due di queste coordinate x, y per esempio (che equivale a dire preso a piacere un qualunque punto nel piano orizzontale) si ricavi dall' equazione contenente quella relazione, un tal valore per z, che innalzando al piano orizzontale stesso, nel punto

preso in lui una perpendicolare eguale a z, questa incontri per l' appunto con la sua estremità superiore il piano da lei rappresentato.

Ecco come troveremo quest' equazione.

Un piano può considerarsi sempre come generato per mezzo del moto di una linea parallelamente a se stessa lungo un' altra fissa: ora se delle due intersezioni di un piano con i due verticali degli x e z, degli y e z, fingiamo che una, per esempio quella del piano verticale x, z, stia ferma, e che l' altra si muova con la suddetta legge lungo di lei, è evidente che si genererà quel piano, e non è difficile a concepire che l' ordinata verticale z di un punto preso sopra del piano generato e corrispondente alle coordinate x, y, sarà composta di tre parti, cioè 1°. dell' ordinata C all' origine; 2°. della quantità Ax, della quale la traccia mobile si innalza lungo l' altra; 3°. della quantità By, di cui bisogna innalzarsi sopra la traccia mobile, per andare dalla traccia fissa al punto; sarà dunque $z=Ax+By+C$, la cercata equazione del piano.

Se il piano si muove parallelamente a se medesimo, le tangenti A, B restano costanti, e la quantità C è la sola che varia; per aver dunque l' equazione di un piano parallelo al primo, e che passi per un punto di cui le coordinate siano x', y', z', bisogna determinar C in maniera che nell' equazione del piano dato facendosi $x=x'$, $y=y'$, abbiasi $z=z'$: l' equazione dunque del piano parallelo sarà

$$z-z'=A(x-x')+B(y-y').$$

In generale l' equazione lineare tra x, y, z,

$$Ax+By+Cz+D=0$$

è quella di un piano, nel quale $-\frac{D}{C}$ rappresenta l'ordinata del piano all' origine; $-\frac{A}{C}$ la tangente dell' angolo che l' intersezione di questo piano con quello verticale delle x, z, fa con l' orizzonte; $-\frac{B}{C}$ la tangente dell' angolo che l' intersezione del suddetto piano con l' altro verticale, fa egualmente con l' orizzonte.

Si osservi che delle quattro costanti A, B, C, D, sole tre sono necessarie per determinare la posizione di un piano.

Se si vuol trovare l' equazione di un piano che passa per tre punti dati nello spazio, supponendo che quest' equazione sia

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

tutto si ridurrà alla determinazione delle costanti **A**, **B**, **C**, **D**; siano x', y', z' le coordinate del primo punto

x'', y'', z'' . . . . del secondo

x''', y''', z''' . . . . del terzo

e se il piano passa per quei tre punti, dovremo avere

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0,$$
$$Ax'' + By'' + Cz'' + D = 0,$$
$$Ax''' + By''' + Cz''' + D = 0,$$

dalle quali ricaveremo i valori delle tre quantità $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$, ciò che dà

$$A = z'(y'' - y''') + z''(y''' - y') + z'''(y' - y'');$$
$$B = x'(z'' - z''') + x''(z''' - z') + x'''(z' - z'');$$
$$C = y'(x'' - x''') + y''(x''' - x') + y'''(x' - x'');$$
$$D = x'(y''z''' - y'''z'') + x''(y'''z' - y'z''') + x'''(y'z'' - y''z'),$$

valori che dovrem sostituire nella supposta equazione del piano, affinchè ei possa passare per quei tre punti.

V. Supponiamo adesso che sia data la posizione di un piano nello spazio, che cioè sia data la di lui equazione $Ax + By + Cz + D = 0$, e cerchiamo gli angoli che egli forma con i piani rettangolari delle projezioni.

Immaginiamoci i soliti tre piani rettangolari, e fingiamo che dall' origine delle ascisse sia abbassata una perpendicolare sopra la superficie piana corrispondente alla data equazione: questa perpendicolare formerà con quei tre piani, degli angoli che saranno i complementi di quei ricercati: per comprenderlo supponiamo che PQRS sia un piano sopra il quale ne sia inclinato un altro ELFM, di cui si cerchi l' inclinazione. Se da un Fig. 31.
punto qualunque A del primo piano si abbassa una perpendico-

lare AB sopra il secondo; e dal suo piede B una perpendico-
Fig. 31. lare BD sopra la comune intersezione LF; quindi si unisca il punto D col punto A, si vedrà subito che l' angolo BAD fatto dalla perpendicolare AB col piano PQ, è il complemento dell' angolo BDC che misura la ricercata inclinazione del piano.

Rappresentiamo per P la grandezza di quella perpendicolare, e per x', y', z' le coordinate del suo piede, e si avrà

$$(1) \ldots\ldots x'^2 + y'^2 + z'^2 = P^2$$
$$(2) \ldots\ldots Ax' + By' + Cz' + D = 0.$$

Delle tre quantità x', y', z', contenute nella prima equazione supponendo costante ed invariabile la seconda y', l' equazione si manterrà legittima qualunque valore mi piacerà dare ad x', purchè io prenda per z' un valore tale che sia soddisfatta tutta quell' equazione; ed il Calcolo Differenziale mi darà allora

$$(3) \ldots\ldots x' + z'\left(\frac{dz'}{dx'}\right) = 0.$$

Una stessa riflessione ci condurrà a quest' altra equazione

$$(4) \ldots\ldots y' + z'\left(\frac{dz'}{dy'}\right) = 0.$$

L' equazione (2) poi ci darà

$$(5) \ldots\ldots A + C\left(\frac{dz'}{dx'}\right) = 0$$
$$(6) \ldots\ldots B + C\left(\frac{dz'}{dy'}\right) = 0.$$

Da queste sei equazioni eliminando $\left(\frac{dz'}{dx'}\right)$, $\left(\frac{dz'}{dy'}\right)$ e trovando i valori di x', y', z', P, ricaveremo

$$x' = \frac{-AD}{A^2 + B^2 + C^2}$$
$$y' = \frac{-BD}{A^2 + B^2 + C^2}$$
$$z' = \frac{-CD}{A^2 + B^2 + C^2}$$
$$P^2 = \frac{D^2}{A^2 + B^2 + C^2};$$

ora le quantità $\frac{x'}{P}$, $\frac{y'}{P}$, $\frac{z'}{P}$ sono i seni degli angoli, che la perpendicolare fa con i tre piani rettangolari; dunque esse saranno i coseni degli angoli dimandati; così

L' angolo che il piano nello spazio forma con quello delle x, y, avrà il coseno $= \frac{C}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}}$:

L' angolo che il detto piano fa con quello delle x, z, avrà il coseno $= \frac{B}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}}$:

L' angolo infine fatto col piano delle y, z ha il coseno $= \frac{A}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}}$.

Cerchiamo adesso le relazioni che devono aversi tra i coefficienti dell' equazione di un piano, e quei dell' equazioni di una retta, affinchè la stessa retta ed il piano siano tra di loro perpendicolari.

Rappresentiamo al solito per $Ax + By + Cz + D = o$ l' equazione di un piano, e per $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$ le due equazioni determinanti la retta normale ad esso.

Facciamo scorrere la retta parallelamente a se stessa finchè essa passi per l' origine: in questo movimento non cesserà mai di esser perpendicolare al piano, e le sue equazioni, quando essa è giunta all' origine, saranno $x = az$, $y = bz$.

Indichiamo per x', y', z' le coordinate del punto in cui la retta ed il piano si incontrano, ed avremo per quel punto $x' = az'$, $y' = bz'$; ora sostituendo per x', y', z' i valori trovati al N°. antecedente, avremo $A = aC$, $B = bC$, le quali equazioni esprimeranno le relazioni che devono avere tra loro le equazioni del piano e della retta, acciocchè siano perpendicolari tra loro; con queste possiam determinare i coefficienti a, b quando, essendo dato il piano, è incognita la posizione della retta, e possiam trovare due dei tre cofficienti necessarj nell' equazione del piano, quando è data la posizione della retta e non quella del piano.

Siano dunque dati di posizione nello spazio un punto ed un piano, e vogliasi da quel punto abbassare una perpendicolare sopra il detto piano.

Per soddisfare a questa ricerca, converrà trovare l' equazioni della retta, le coordinate del punto d' incontro di essa col piano, e la grandezza di questa medesima retta.

Siano x', y', z' le coordinate del punto dato; $Ax + By + Cz + D = o$ l' equazione del piano dato, ed $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$ quelle della linea voluta. La condizione che questa retta deva passare per il dato punto determinerà le due costanti α, β, e l' equazioni di quella retta diverranno allora

$(x - x') = a(z - z')$, $(y - y') = b(z - z')$.

L' altra condizione che la linea deva esser normale al piano determinerà i due coefficienti a, b, e si avrà

$a = \frac{A}{C}$, $b = \frac{B}{C}$; così le due equazioni cercate diverranno

$C(x - x') = A(z - z')$, $C(y - y') = B(z - z')$.

Le due equazioni della perpendicolare e quella del piano dovendo per il punto d' intersezione sussistere tutte nello stesso tempo, potranno trovarsi per mezzo di esse i valori di x, y, z i quali saranno le coordinate di questo punto; perciò se facciamo per semplicità di calcolo $Ax' + By' + Cz' + D = L$, e diamo all' equazione del piano questa forma

$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') + L = o$,

le coordinate nel punto d' intersezione saranno

$$x = x' - \frac{AL}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$y = y' - \frac{BL}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$z = z' - \frac{CL}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Se infine chiamiamo P la distanza dal punto dato al piano dato, si avrà

$P^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$, e perciò

$P = \frac{L}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}}$.

VI. Risolviamo adesso il Problema inverso, quello cioè in cui si dimanda di condurre per un punto dato nello spazio un piano perpendicolare ad una retta parimente data nello spazio.

Questo Problema sarà intieramente risoluto quando avrem trovato: 1°. l' equazione del piano: 2°. le coordinate del punto d' incontro della retta e del piano: 3°. la grandezza della retta condotta dal punto d' incontro al punto dato, e che è perpendicolare alla retta data.

Siano x', y', z' le coordinate del punto dato; $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$ le equazioni della retta data, e $Ax + By + Cz + D = 0$ la ricercata equazione del piano.

La condizione che il piano deva passare per il punto dato ci determinerà il coefficiente D, ed avremo

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0.$$

I due coefficienti $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ saranno determinati dalla condizione di dovere essere il piano perpendicolare alla retta data, la quale ci darà $\frac{A}{C} = a$, $\frac{B}{C} = b$, e quindi l'equazione del piano dimandato sarà $a(x - x') + b(y - y') + z - z' = 0$.

Se per mezzo di quest' equazione e delle due appartenenti alla retta data, troviamo i valori di x, y, z, avremo (facendo per abbreviare il calcolo $a(x' - \alpha) + b(y' - \beta) + z' = M$)

$$x = \frac{aM}{1 + a^2 + b^2} + \alpha$$

$$y = \frac{bM}{1 + a^2 + b^2} + \beta$$

$$z = \frac{M}{1 + a^2 + b^2}:$$

se infine indichiamo per P la perpendicolare abbassata dal punto dato sopra la retta data, la quale è la linea di unione di questo punto dato con quello di incontro tra la retta ed il piano, avremo

$$P^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

ove sostituiremo i valori trovati per x, y, z, e faremo le opportune riduzioni, onde avere

$$P^2 = (x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 + z'^2 - \frac{M^2}{1 + a^2 + b^2}.$$

VII. Determiniamo adesso le condizioni che danno l' intersezione di due linee nello spazio.

Siano $\left\{ \begin{array}{l} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{array} \right\}$ l' equazioni di una prima retta condotta nello spazio: parimente siano $\left\{ \begin{array}{l} x = a'z + \alpha' \\ y = b'z + \beta' \end{array} \right\}$ l' equazioni di una seconda retta. Se queste due rette devono segarsi, bisogna che le quattro equazioni sussistano tutte insieme nel punto

d' intersezione; se dunque per mezzo di esse eliminiamo le coordinate x, y, z, avremo la relazione che devono aver tra loro quei coefficienti costanti, acciò abbia luogo l' intersezione, o perchè le due linee siano in uno stesso piano. Questa relazione è contenuta nell' equazione $(\alpha' - \alpha)(b' - b) - (\beta' - \beta)(a' - a) = 0$.

Immaginiamo ora che per l' origine delle ascisse si conducano due rette parallele a quelle quì sopra considerate.

L' equazioni di queste due parallele saranno

per la prima $\left\{ \begin{array}{l} x = az \\ y = bz \end{array} \right.$

per la seconda $\left\{ \begin{array}{l} x = a'z \\ y = b'z \end{array} \right.$

Consideriamo adesso un punto preso nella prima di cui le coordinate siano x, y, z; ed un punto preso nella seconda riferito ai piani per mezzo delle coordinate x', y', z'. La distanza P di questi due punti, sarà

$$P = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2, \text{ ovvero}$$

$$P = (az - a'z')^2 + (bz - b'z')^2 - (z - z')^2:$$

ora se questa distanza è perpendicolare alla prima retta, sarà allora la più corta linea che dal punto delle coordinate x', y', z' si può condurre a quella prima retta, e quindi $\left(\frac{dP}{dz}\right) = 0$, ovvero

$$(az - a'z')a + (bz - b'z')b + z - z' = 0,$$

$z(1 + a^2 + b^2) = z'(1 + aa' + bb')$; quest' equazione determinerà in z' il valore di z che conviensi al piede della perpendicolare.

Se però la seconda retta fosse ella medesima perpendicolare alla prima, il suo piede caderebbe all' origine: sarebbe allora $z = 0$, e l' equazione diventerebbe $z'(1 + aa' + bb') = 0$, ovvero $1 + aa' + bb' = 0$.

Questa esprime la relazione che devono avere i coefficienti dell' equazioni di quelle due rette; onde siano ad angoli retti tra loro.

Dato un punto nello spazio ed una retta data, cerchiamo le equazioni di un' altra retta, la quale passi per quel punto e sia perpendicolare alla prima.

Siano x', y', z' le coordinate del punto dato; $\left\{ \begin{array}{l} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{array} \right.$

l' equazioni della data retta; $\begin{cases} x = a'z + \alpha' \\ y = b'z + \beta' \end{cases}$ quelle della retta richiesta. La condizione che la retta deva passare per il punto dato, ci determinerà α', β', ed avremo $\alpha' = x' - a'z'$, $\beta' = y' - b'z'$.

Le due equazioni della retta diverranno allora

$$\begin{cases} x - x' = a'(z - z') \\ y - y' = b'(z - z') \end{cases}$$

Converrà ora determinare a', b'. Questi due coefficienti saranno dati dalle altre due condizioni, dal dover cioè le due linee segarsi ad angoli retti, le quali condizioni sono espresse dall' equazioni

$$(\alpha' - \alpha)(b' - b) - (\beta' - \beta)(a' - a) = 0,$$
$$1 + aa' + bb' = 0.$$

Trovati i valori di a', b' si avrà tutto ciò che è necessario a determinare le due equazioni cercate.

In somma tutto si riduce ad eliminare a', b', α', β' tra le sei equazioni quì sopra trovate, e fatta questa eliminazione si hanno (pongo per abbreviare)

$$a\{a(x' - \alpha) + b(y' - \beta) + z'\} - (x' - \alpha)(1 + a^2 + b^2) = P$$
$$b\{a(x' - \alpha) + b(y' - \beta) + z'\} - (y' - \beta)(1 + a^2 + b^2) = Q$$
$$a(x' - \alpha) + b(y' - \beta) + z' - z'(1 + a^2 + b^2) = R$$

dal che ottengo $aP + bQ + R = 0$) le due equazioni della retta cercata

$$(x - x')R = (z - z')P$$
$$(y - y')R = (z - z')Q.$$

VIII. Immaginiamoci ora due piani condotti nello spazio e rappresentati dall' equazioni $Ax + By + Cz + D = 0$
$A'x + B'y + C'z + D' = 0$:
quando questi non siano paralleli, si segheranno in una linea retta, della quale proponiamoci trovare le equazioni.

La linea d' intersezione appartenendo ai due piani, devono le due equazioni superiori divenire eguali tra di loro, o sussistere nello stesso tempo per tutti i punti dei piani convenienti a quell' intersezione; se dunque, supponendo che x, y, z siano le coordinate

dell' intersezione, eliminiamo per mezzo di quelle due equazioni una qualunque di queste coordinate; l' equazione risultante darà la relazione che esiste tra le due altre coordinate residue appartenenti all' intersezione: quest' equazione sarà quella di una delle projezioni della retta d' intersezione dei piani; così eliminando x, y, z fra le equazioni dei due piani, e facendo per abbreviare

$$BC' - B'C = l \qquad DA' - D'A = \lambda$$
$$CA' - C'A = m \qquad DB' - D'B = \mu$$
$$AB' - A'B = n \qquad DC' - D'C = \nu,$$ segue

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0,$$

le equazioni delle tre projezioni sopra i piani rettangolari saranno

$$ly - mx + \nu = 0,$$
$$mz - ny + \lambda = 0,$$
$$nx - lz + \mu = 0,$$

due delle quali danno la terza.

Da quì innanzi terremo sotto questa forma l' equazioni che determinano la posizione di una linea retta data nello spazio. Si ritrovano sei coefficienti costanti in queste tre equazioni, cioè $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$, dei quali quattro soltanto sono necessarj: uno è dato dall' equazione di condizione $l\lambda + m\mu + n\nu = 0$, un altro è arbitrario, e per mezzo di una idonea determinazione possono semplicizzarsi certe operazioni di Analisi.

Determiniamo l' angolo che fanno tra loro i due piani dei quali quì sopra assegnata abbiamo l' intersezione.

Fingiamo che dall' origine delle coordinate si conducano due piani paralleli ai due primi: è manifesto che essi faranno tra loro lo stesso angolo che quelli, e che le equazioni da cui sono rappresentati, saranno

$$Ax + By + Cz = 0$$
$$A'x + B'y + C'z = 0$$

Fig. 31. I due piani di cui si parla, siano quei della Fig. 31; ELFM sia il piano rappresentato dalla prima equazione; QRPS quello della seconda. Da un punto A preso a piacere nel secondo piano si abbassi una perpendicolare AB sopra il primo, e dal piede B si abbassi una perpendicolare BC sopra lo stesso piano QRPS: si

vede facilmente che $\frac{BC}{BA} = \cos BDC = \cos$ dell' angolo fatto da quei due piani. Tutto dunque si riduce a trovare le grandezze di queste due perpendicolari, le quali prenderemo con segni contrarj poichè esse si misurano in sensi diversi.

Le coordinate del punto A preso ad arbitrio, siano x', y', z', e si avrà in esso $A'x' + B'y' + C'z' = o$. Sia P la grandezza della perpendicolare AB, ed x'', y'', z'' le coordinate del suo piede, e si avrà (N°. V.)

$$x'' = x' - \frac{AL}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$y'' = y' - \frac{BL}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$z'' = z' - \frac{CL}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$P = \frac{L}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}}.$$

Sia P' la grandezza dell' altra perpendicolare BC ed $L' = A'x'' + B'y'' + C'z''$; si avrà

$$P' = \frac{L'}{\sqrt{(A'^2 + B'^2 + C'^2)}}.$$

Sostituiamo per x'', y'', z'' i quì sopra ritrovati valori in L', ed osservando che $A'x' + B'y' + C'z' = o$, troveremo

$$L' = \frac{-L(AA' + BB' + CC')}{A^2 + B^2 + C^2},$$

e per conseguenza

$$P' = \frac{-L(AA' + BB' + CC')}{(A^2 + B^2 + C^2)\sqrt{(C'^2 + B'^2 + A'^2)}}.$$

Sarà dunque $\frac{BC}{BA} = -\frac{P'}{P}$, e quindi

$$\cos BDC = \cos \text{ dell' angolo cercato} = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}.\sqrt{(A'^2 + B'^2 + C'^2)}}.$$

Se i due piani fanno angolo retto tra loro, il coseno dell' angolo d' inclinazione di uno a riguardo dell' altro è nullo, e quindi $AA' + BB' + CC' = o$ esprimerà questa circostanza.

Affinchè dunque tre piani, di cui le equazioni sono

$$Ax + By + Cz + D = o$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = o$$
$$A''x + B''y + C''z + D'' = o,$$

siano rettangoli tra loro, dovranno aversi le tre equazioni seguenti

$$AA' + BB' + CC' = o$$
$$A''A + B''B + C''C = o$$
$$A'A'' + B'B'' + C'C'' = o.$$

IX. Se consideriamo due linee rette condotte nello spazio, può proporsi la questione di determinare l' angolo che fanno tra di esse se s' incontrano, e ciò non succedendo, l' angolo delle lor projezioni sopra un piano a quelle due linee parallelo.

Per risolverla siano l' equazioni delle projezioni delle due rette

$$\left.\begin{aligned} ly - mx + \nu &= o \\ mz - ny + \lambda &= o \\ nx - lz + \mu &= o \end{aligned}\right\} \text{ per la prima}$$

$$\left.\begin{aligned} l'y - m'x + \nu' &= o \\ m'z - n'y + \lambda' &= o \\ n'x - l'z + \mu' &= o \end{aligned}\right\} \text{ per la seconda.}$$

Se ci immaginiamo che dall' origine delle coordinate si conducano due piani perpendicolari a ciascuna di queste rette, l' equazioni (N°. IV) di questi piani saranno

$$lx + my + nz = o$$
$$l'x + m'y + n'z = o$$

e l' angolo che questi piani formano tra loro sarà l' angolo domandato. Alla spiegazione di questa costruzione si può applicare la Fig. 31.

Il coseno di questo angolo (N°. VIII) sarà = ...

$$\frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{(l^2 + m^2 + n^2)}\sqrt{(l'^2 + m'^2 + n'^2)}}.$$

Se queste due rette sono perpendicolari a due piani rettangolari tra loro, ciò che può accadere senza che esse si taglino, avremo $ll' + mm' + nn' = o$:

Quest' equazione dunque esprime la relazione che debbono avere i coefficienti dell' equazioni di due rette, perchè siano rettangolari tra di loro.

Se infine l' equazioni di tre rette sono

$$\left.\begin{array}{l} ly - mx + \nu = 0 \\ mz - ny + \lambda = 0 \\ nx - lz + \mu = 0 \end{array}\right\} \text{per la prima}$$

$$\left.\begin{array}{l} l'y - m'x + \nu' = 0 \\ m'z - n'y + \lambda' = 0 \\ n'x - l'z + \mu' = 0 \end{array}\right\} \text{per la seconda}$$

$$\left.\begin{array}{l} l''y - m''x + \nu'' = 0 \\ m''z - n''y + \lambda'' = 0 \\ n''x - l''z + \mu'' = 0 \end{array}\right\} \text{per la terza}$$

Acciò sian queste linee rettangolari tra loro converrà che abbiansi le tre equazioni

$$\begin{array}{l} ll' + mm' + nn' = 0 \\ ll'' + mm'' + nn'' = 0 \\ l'l'' + m'm'' + n'n'' = 0. \end{array}$$

X. Supponiamo ora dati nello spazio una retta ed un piano, e cerchiamo l' angolo d' incidenza di questa retta col piano. Siano

$Ax + By + Cz + D = 0$ l' equazione del piano

$$\left.\begin{array}{l} ly - mx + \nu = 0 \\ mz - ny + \lambda = 0 \\ nx - lz + \mu = 0 \end{array}\right\} \text{equazioni della retta.}$$

Se dall' origine delle coordinate si immagina un piano perpendicolare alla retta, la sua equazione (N°. IV) sarà

$$lx + my + nz = 0,$$

e l' angolo che questo formerà col piano dato, sarà il complemento dell' angolo dimandato; si avrà dunque il seno di quest' angolo

$$\text{seno} = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}\sqrt{(l^2 + m^2 + n^2)}}.$$

Se la retta sarà perpendicolare al piano, il suo seno sarà l' unità, e perciò

$$Al + Bm + Cn = \sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}\sqrt{(l^2 + m^2 + n^2)},$$

la quale equazione si riduce a

$$(Am - Bl)^2 + (Bn - Cm)^2 + (Cl - An)^2 = 0,$$

che non può essere soddisfatta senza che sia

$$\begin{array}{l} Am - Bl = 0 \\ Bn - Cm = 0 \\ Cl - An = 0, \end{array}$$

delle quali tre equazioni due danno sempre la terza: queste esprimono le relazioni che debbono sussistere tra i coefficienti dell' equazioni di un piano e di una retta, acciò la retta ed il piano si incontrino ad angoli retti, il che combina con quanto abbiam detto sopra.

Il problema che ora ci proponiamo appartiene alle Teorie dei massimi e minimi, ed ivi noi ne abbiamo parlato; non ostante sarà utile vedere come possa risolversi per mezzo dell' Algebra Elementare.

XI. Date due rette nello spazio, si dimanda la più corta distanza tra loro.

Siano l' equazioni delle projezioni per le due rette

$$\left.\begin{array}{l} l'y - m'x + \nu' = 0 \\ m'z - n'y + \lambda' = 0 \\ n'x - l'z + \mu' = 0 \\ l'\lambda' + m'\mu' + n'\nu' = 0 \end{array}\right\} \text{per la prima}$$

$$\left.\begin{array}{l} l''y - m''x + \nu'' = 0 \\ m''z - n''y + \lambda'' = 0 \\ n''x - l''z + \mu'' = 0 \\ l''\lambda'' + m''\mu'' + n''\nu'' = 0 \end{array}\right\} \text{per la secanda}$$

Fingiamo che per queste due rette si conducano due piani paralleli tra loro; per la condizione di questo parallelismo, i coefficienti di x, y, z nell' equazioni dei piani, saranno eguali tra loro; così tali equazioni avran la forma

$$Ax + By + Cz + D = 0$$
$$Ax + By + Cz + D' = 0$$

Fingiamo egualmente che dall' origine delle coordinate si abbassi una perpendicolare sopra un piano, e questa prolungata sarà anche perpendicolare sull' altro, e la distanza di quei due piani misurata sopra questa perpendicolare, sarà la più corta distanza cercata.

Indichiamo per P la perpendicolare sopra il piano più lontano dall' origine, e sia quello della prima equazione; sia P' la perpendicolare sopra l' altro piano, e sarà $P - P'$ quella più piccola distanza.

Ora abbiam trovato

$$P = \frac{D}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}}$$
$$P' = \frac{D'}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}},$$

dunque, se indichiamo per Q la più corta distanza, si avrà

$$Q = \frac{D - D'}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}};$$

tutta la difficoltà è ora ridotta a trovare i valori di A, B, C, D, D'.

Se il primo dei due piani invece di passare per la prima retta, avesse un punto d' intersezione con essa, i valori delle coordinate convenienti a questo punto d' intersezione, sarebbero

$$x = \frac{B\nu' - C\mu' - Dl'}{Al' + Bm' + Cn'},$$
$$y = \frac{C\lambda' - A\nu' - Dm'}{Al' + Bm' + Cn'},$$
$$z = \frac{A\mu' - B\lambda' - Dn'}{Al' + Bm' + Cn'}:$$

ma il piano passando per la retta, questo punto d' intersezione non può essere determinato; per questo in un tal caso i trovati valori di x, y, z debbono essere espressioni indeterminate, eguali a $\frac{0}{0}$: dunque nel nostro caso dobbiamo avere

$$\begin{aligned} Al' + Bm' + Cn' &= 0, \\ A\mu' - B\lambda' - Dn' &= 0, \\ B\nu' - C\mu' - Dl' &= 0, \\ C\lambda' - A\nu' - Dm' &= 0. \end{aligned}$$

Lo stesso ragionamento facendosi per l' altro piano, si avranno altre quattro equazioni

$$\begin{aligned} Al'' + Bm'' + Cn'' &= 0, \\ A\mu'' - B\lambda'' - D'n'' &= 0, \\ B\nu'' - C\mu'' - D'l'' &= 0, \\ C\lambda'' - A\nu'' - D'm'' &= 0; \end{aligned}$$

si osservi che in ciascuna di queste serie di equazioni, le prime due conducono alle altre; così sono quattro soltanto le equazioni, delle quali possiamo far conto per la determinazione dei coefficienti A, B, C, D, D'.

Se per mezzo delle prime equazioni delle due serie, eliminiamo A e B, si trova

$$A(l'm'' - l''m') + C(n'm'' - n''m') = 0,$$
$$B(l'm'' - l''m') + C(l'n'' - l''n') = 0.$$

Ora l' equazioni dei due piani hanno un coefficiente di più, che non è necessario, e del quale disporre possiamo come più ci piace; facciamo dunque $C = l'm'' - l''m'$, e si avrà

$$A = m'n'' - m''n', \quad B = n'l'' - n''l', \quad C = l'm'' - l''m'.$$

In seguito considerando le seconde equazioni delle due serie, si moltiplicherà la prima per n'', la seconda per n', e si troverà

$$(D - D')n'n'' = A(\mu'n'' - \mu''n') - B(\lambda'n'' - \lambda''n'),$$

da cui si ricaverà (facendo per abbreviatura $m'n'' - m''n' = L$; $l'm'' - l''m' = N$; $\mu'n'' - \mu''n' = L'$; $n'l'' - n''l' = M$; $\nu'l'' - \nu''l' = M'$)

$$D - D' = \frac{LL' - MM'}{n'n''}, \text{ ed in conseguenza}$$

$$Q = \frac{LL' - MM'}{n'n''\sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)}}.$$

Se le due linee si segano tra loro, allora la più corta distanza è zero: si avrà in questo caso $LL' = MM'$, equazione di condizione tra i coefficienti delle due rette, acciò l' intersezione abbia luogo.

Se tra due rette condotte nello spazio, si tira una retta che sia perpendicolare ad ambedue, questa sarà eguale a quella più corta distanza da noi qui sopra determinata: cerchiamo l' equazioni delle di lei projezioni. Riteniamo li stessi dati posti quì sopra.

Sieno le ricercate equazioni

$$ly - mx + \nu = 0$$
$$mz - ny + \lambda = 0$$
$$nx - lz + \mu = 0,$$

e tutta la difficoltà sarà ridotta a trovare i valori di $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$.

Fra queste sei quantità abbiam già l' equazione

$$(A) \ldots\ldots l\lambda + \mu m + n\nu = 0.$$

La retta domandata dovendo esser perpendicolare alle due altre, si avranno (N°. IX) le due equazioni di condizione

$$(B) \ldots\ldots ll' + mm' + nn' = 0$$
$$(C) \ldots\ldots ll'' + mm'' + nn'' = 0.$$

Infine questa retta dovendo tagliare le due altre, si avranno due altre equazioni

$$(D) \ldots\ldots (\mu n' - \mu' n)(m'n - mn') = (n\lambda' - n'\lambda)(l'n - ln');$$
$$(E) \ldots\ldots (\mu n'' - \mu'' n)(m''n - mn'') = (n\lambda'' - n''\lambda)(l''n - ln'').$$

Per mezzo di queste cinque equazioni si troveranno i valori dei cinque coefficienti necessarj, e del sesto ne disporremo a piacere.

Se tra le equazioni (B), (C) eliminiamo l ed m, troveremo

$$l(l'm'' - l''m') + n(n'm'' - n''m') = 0,$$
$$m(l'm'' - l''m') + n(l'n'' - l''n') = 0:$$

Disponendo di n, e facendo

$n = l'm'' - l''m'$, si avranno per l, m, n i valori seguenti

$$l = m'n'' - m''n',$$
$$m = n'l'' - n''l'$$
$$n = l'm'' - l''m'.$$

In seguito potrebbero trovarsi i valori degli altri coefficienti: non vi essendo altra difficoltà che quella del calcolo, la tralascio all' esercizio dei Lettori.

XII. Veduto come possono esprimersi analiticamente le circostanze tutte dei piani e delle linee che si conducono nello spazio, veniamo a parlare delle curve a doppia curvatura.

Chiamansi *Curve a doppia Curvatura*, quelle linee curve le quali non possono essere disegnate in un piano, o quelle per il continuo tratto delle quali non si può far passare un piano, sicchè debbano giacere in esso.

Queste curve si determinano analiticamente riportando tutti i loro punti a tre piani ortogonali condotti nello spazio.

Fig. 32. Siano rappresentati dalla (Fig 32) i tre piani: sia XAY il piano orizzontale degli x, y: sia XAZ il piano verticale anteriore degli x, z: sia YAZ il piano verticale laterale degli y, z. Sia A l' origine delle coordinate; AX l' asse degli x; AY l' asse degli y; AZ quello degli z. Supponiamo condotta nello spazio una curva a doppia curvatura qualunque EMF, e da ciascun punto M di essa abbassate la perpendicolare Mm sul piano orizzontale, e la perpendicolare Mm' sul piano verticale laterale. Il punto M sarà determinato dalle due projezioni m, m'. Nella stessa guisa tutti i punti della curva a doppia curvatura EMF saranno determinati dalle respettive projezioni.

Tutti i punti di projezione sopra il piano orizzontale XAY formano la curva piana di projezione emf; e tutti i punti di projezione sopra il piano verticale YAZ formano l' altra curva piana di projezione $e'm'f'$. Queste due curve chiamansi le projezioni della EMF; così per una curva a doppia curvatura si hanno tre projezioni ciascuna delle quali è sopra uno dei tre piani ortogonali. Due sole però di queste bastano a determinare la curva a doppia curvatura.

Per questo motivo noi intenderemo che sia determinata analiticamente una curva a doppia curvatura, quando sono analiticamente determinate due delle sue tre projezioni; e siccome una projezione essendo tutta situata in un piano, è rappresentata da un' equazione tra le sue coordinate, così per rappresentare una curva a doppia curvatura ci vorranno due equazioni che saranno quelle le quali rappresentano due delle sue projezioni.

Se pertanto considerando il punto M della curva a doppia curvatura facciamo $Mm = z$, e dal punto m abbassando una perpendicolare sopra AX, poniamo $mP = y$, $AP = x$, la projezione emf sarà data da una equazione in x, y, e sia $y = \varphi(x)$; la projezione $e'm'f'$ da un' equazione in AQ e Qm', cioè y e z, e sia $z = \Psi(y)$. Il sistema poi delle due equazioni

$$\left.\begin{array}{l} y = \varphi(x) \\ z = \Psi(y) \end{array}\right\}$$ rappresenterà la curva a doppia curvatura EMF.

E quì si vede facilmente che avute l'equazioni di due projezioni sopra due dei tre piani ortogonali, si può addirittura avere la projezione sopra il terzo piano: questa projezione infatti sarà una curva riferita alle coordinate x, z, e per ottenere l'equazione, basterà eliminare y dalla seconda equazione, sostituendo il suo valore in x; avremo allora un'equazione $z = F(x)$ che sarà l'equazione della terza projezione.

XIII. Ancora le curve a semplice curvatura o come diconsi piane, se si immaginano condotte nello spazio, si riferiscono a tre piani ortogonali tra loro, e si rappresentano con un sistema di due equazioni, che sono quelle di due delle loro projezioni, e sotto questo punto di vista possono considerarsi come della stessa classe (almeno riguardo alla maniera di esprimersi analiticamente) delle curve a doppia curvatura; la differenza però che passa tra queste e quelle si è, che sono indispensabili due equazioni per rappresentare una curva a doppia curvatura, comunque nello spazio siano situati i tre piani cui si vuol riferire; mentre che per una curva a semplice curvatura possiamo immaginare che i tre piani di relazione siano presi in tal modo, che essa tutta si ritrovi in uno di loro, ed in conseguenza sia rappresentata da una sola equazione.

Abbiamo detto nel N°. antecedente che da due equazioni di due curve descritte sopra due dei tre piani ortogonali, è determinata una curva a doppia curvatura, della quale quelle curve piane sono le projezioni. Non vi è nello spazio che una sola curva a doppia curvatura che possa convenire a due determinate projezioni. Se però in una di quelle due equazioni si trovasse qualche quantità arbitraria che ricever potesse tutti i valori possibili, allora vi sarebbero infinite curve a doppia curvatura rappresentate da quel sistema di due equazioni; imperocchè per ogni valore dato all'arbitraria si avrebbe un diverso sistema, e quindi una diversa curva nello spazio. Questa osservazione ci sarà interessante in altro luogo.

Ancora nelle curve a doppia curvatura si considerano le tangenti, e dicesi tangante di una curva a doppia curvatura EMF in M una retta MT, che avendo di comune con la curva il solo punto M, ha due projezioni mt, $m't'$, che sono anche tangenti delle curve di projezione nei punti m, m'; come si determini questa tangente MT, egualmente che le altre circostanze dei contatti delle curve a doppia curvatura, lo vedremo a suo luogo. Fig. 32.

XIV. Riguardo alla maniera di rappresentare una curva a doppia curvatura per mezzo di due equazioni, diamo qualche esempio.

Supponiamo che si voglia rappresentare analiticamente una spirale circolare condotta nello spazio, la quale abbia per asse lo stesso asse verticale delle z. Immaginiamoci un cilindro che abbia questo stesso asse, e sopra di lui fingiamo disegnata la spirale: è evidente che se da ciascun punto della spirale abbasso delle perpendicolari sul piano orizzontale, queste cadono tutte nella circonferenza della base del cilindro: se dunque a è il raggio di questo cilindro, sarà $x^2 + y^2 = a^2$ l'equazione della projezione della spirale sul piano orizzontale.

Per avere l'altra equazione per la projezione sopra il piano degli y e z, si osservi che questa curva produce una retta sopra lo sviluppo della superficie del cilindro; così quest'equazione sarà $z = b.\,arc\ sen\,(y) + c$ essendo b, c due costanti.

La nostra spirale dunque sarà rappresentata dal sistema di queste due equazioni

$$x^2 + y^2 = a^2$$
$$z = b.\,arc\ sen\,(y) + c.$$

La costante c può servire a determinare il passaggio della spirale per un dato punto; e la b per determinare l'inclinazione della spirale.

Le curve a doppia curvatura possono ancora riguardarsi, come nate dall'intersezione di due superficie curve, anzi sogliono considerarsi sotto questo punto di vista: noi perciò tralascieremo qui di parlarne, e passeremo alle superficie.

XV. Premesso quanto abbiam detto ai Numeri precedenti, immaginiamo una superficie curva condotta nello spazio. Ciascun punto di questa superficie è determinato di posizione per mezzo delle distanze di esso da tre piani ortogonali, o per mezzo delle coordinate x, y, z. Considerando al solito il piano delle x, y come orizzontale, sarà l'asse delle z verticale, o le coordinate z saranno tante verticali abbassate dai diversi punti della superficie sopra il piano orizzontale. Le tre coordinate x, y, z, le quali convengono ad un punto qualunque di una superficie curva, sono tali che due di esse x, y, per esempio, non variando la terza z

neppure varia; ma se alcuna di queste tre coordinate soffre qualche cangiamento, le altre due o almeno una di esse, deve anche cangiare, se vuolsi che le tre coordinate appartengano sempre a qualche punto della superficie curva: queste tre quantità dunque x, y, z, quando siano sempre obbligate ad essere coordinate dei punti di una superficie curva, hanno tra loro una qualche dipendenza per la quale una è funzione delle altre due; per esempio z è funzione di x e di y che possiamo esprimere per $z = \varphi(x, y)$.

Dunque una superficie curva qualunque sarà in generale rappresentata da $z = \varphi(x, y)$, essendo x, y, z le di lei ordinate ortogonali. La forma particolare della funzione $\varphi(x, y)$, o la maniera particolare con la quale x, y entrano a comporre quel secondo membro, dipenderà dalla natura particolare della superficie che vuolsi rappresentare.

L' equazione $z = \varphi(x, y)$ può anche ricevere la forma $F(x, y, z) = 0$, indicando per il primo membro una funzione qualunque delle tre coordinate x, y, z; così tanto l' una che l' altra di queste forme ci servirà per esprimere analiticamente una superficie curva riferita a tre piani ortogonali.

Si dice che una superficie curva è espressa dall' equazione $F(x, y, z) = 0$, perchè la possiamo immaginare come costruita per mezzo di questa equazione: infatti dati ad x, y due valori a, b, si determinerà un punto nel piano orizzontale, nel quale elevando una perpendicolare eguale al valor che ci dà per z l' equazione $F(a, b, z) = 0$, si avrà nello spazio un punto che apparterrà a quella superficie; e fingendo d' aver fatta quest' operazione per tutti gli altri punti del piano orizzontale, si avranno nello spazio tanti punti corrispondenti per i quali passerà la superficie curva. Rappresentando per $F(x, y, z) = 0$ una superficie curva, sinchè x, y restano indeterminate (per il che tale anche resta z) quest' equazione appartiene a ciascun punto di quella superficie; ma se diamo ad x un valore particolare e costante, come per esempio $x = a$, allora l' equazione apparterrà a quei punti soli della superficie pe' quali l' ascissa x è sempre la stessa ed eguale ad a. Questi sono i punti di una sezione che si farebbe in quella superficie, conducendo un piano che la segasse, distante perallelamente dal piano verticale delle y, z della quantità a. Si potrebbe fare una simile considerazione rapporto agli altri piani.

Supponiamo ora che abbiansi due equazioni

$$F(x, y, z) = 0,$$
$$F'(x, y, z) = 0.$$

Ciascuna di queste esprimerà una superficie curva condotta nello spazio. Queste due superficie possono essere situate in modo, che una non incontri l' altra, possono toccarsi, o possono intersecarsi vicendevolmente. Lasciando il caso del contatto, di cui dovrem parlare in altra occasione, se esse si tagliano tra di loro, l' intersezione sarà in generale una curva a doppia curvatura; dico in generale, perchè se una delle due superiori equazioni rappresentasse un piano, la sezione sarebbe una curva piana.

XVI. Per avere l' equazioni che rappresentano questa curva a doppia curvatura, cioè le equazioni delle di lei projezioni, ecco come si farà. Nei punti dell' intersezione le coordinate x, y, z appartengono nello stesso tempo alle due superficie curve; dunque per questi punti l' equazioni $F(x, y, z) = 0$, $F'(x, y, z) = 0$ sussistono nello stesso tempo.

Se fra queste due equazioni eliminiamo z, avremo un' equazione della forma $f(x, y) = 0$, la quale conterrà la relazione tra le x e le y appartenente a tutti i punti di quell' intersezione: essa ne rappresenterà dunque la projezione sopra il piano degli x, y: egualmente eliminando y avremo un' equazione $f'(x, z) = 0$ che sarà quella della projezione sul piano verticale delle x, z; ed eliminando x, si avrà la projezione sopra il terzo piano rappresentata da $f''(y, z) = 0$.

Siccome la sussistenza simultanea delle due equazioni

$$F(x, y, z) = 0, \quad F'(x, y, z) = 0$$

rappresenta necessariamente l' intersezione di due superficie, o una curva a doppia curvatura, e ci dà per mezzo delle semplici regole di eliminazione, le projezioni di questa curva; quindi è che possiamo anche in generale riguardare una curva a doppia curvatura, come nata dall' intersezione di due superficie, e rappresentata dal sistema di due equazioni, ciascuna delle quali sia quella di una superficie; anzi sotto questo punto di vista è esattissima l' espressione *a doppia curvatura*, poichè una curva tale trovandosi nello stesso tempo situata in due superficie curve, gode anche nel tempo stesso della curvità di ciascuna.

Abbiamo detto quì sopra che nell' equazione $z = \phi(x, y)$ rappresentante una superficie curva, la maniera con la quale x, y entrano a formare la funzione $\phi(x, y)$ dipende dalla natura speciale della superficie. Questa natura speciale di una superficie o può ricavarsi dalla considerazione del moto con cui essa è generata, la quale ci potrà fare scoprire come le variazioni che risente la z, dipendano da quelle che risentono le x, y; o dalla considerazione di alcuna proprietà caratteristica appartenente a ciascun punto della curva, proprietà che possa esprimersi per una equazione tra le coordinate: in questo secondo caso non si saprà in vero *a priori*, come le variazioni delle coordinate influiscano le une sopra le altre, ma sarem certi che devono variare in maniera da dar sempre luogo a quella proprietà. Per esempio, se si vorrà l' equazione della superficie sferica di raggio r condotta nello spazio, si rifletterà che una proprietà caratteristica di ciascuno dei suoi punti è, che la distanza di esso dal centro è eguale al raggio r: se dunque chiamiamo x, y, z le coordinate di un qualunque punto della superficie sferica, ed a, b, c quelle del suo centro, avremo (N°. III) rappresentata da $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$ il quadrato della distanza di questi due punti; sarà dunque

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

l' equazione rappresentante la superficie di una sfera di raggio r, ed avente il centro in un punto dello spazio corrispondente alle coordinate a, b, c.

SCOLIO.

Tutto ciò che concerne 1°. la classazione delle superficie in diversi gradi secondo le dimensioni che hanno le coordinate nell' equazioni: 2°. la considerazione delle diverse falde delle superficie: 3°. l' esame particolare dell' intersezioni delle superficie con i piani, e quivi la considerazione dei centri e dei piani diametrali di esse: 4°. l' esame particolare delle intersezioni di certe determinate superficie curve: 5°. le permutazioni delle coordinate: e 6°. la considerazione di certi punti rimarchevoli sopra le superficie, come per esempio delle sommità ec, è da me tralasciato, perchè appartiene direttamente all' introduzione all' Analisi Sublime. Basta che i miei Lettori abbiano letta la Teoria delle superficie curve, che Eulero dà nella sua Introduzione, o ciò che scrive qualunque altro Autore che tratti di questa materia, e non avranno alcuna difficoltà per l' intelligenza del restante di questa Appendice.

Vediamo ora come possano ricavarsi le equazioni di varie classi di superficie curve dalla considerazione della loro generazione.

SUPERFICIE CILINDRICHE.

XVII. Data nello spazio una qualunque linea retta, se ci immaginiamo un' altra retta, cui si dà il nome di generatrice, la quale si muova nello spazio, restando però sempre parallela alla data, e che lasci in questo movimento continua traccia del suo passaggio, verrà a descriversi una superficie curva; e tutte le superficie generate in questa guisa hanno il nome di superficie cilindriche. Si tratta di ritrovare l' equazione generale che ci rappresenta la Classe o la famiglia delle superficie cilindriche.

Supponiamo che la data retta passi per l' origine, e se non vi passasse, da quel punto gli si condurrebbe una parallela che potrebbe prendersi invece di essa: siano l' equazioni di questa retta $x = az$, $y = bz$.

La retta Generatrice dovendo esser parallela alla data, le sue equazioni, saranno

$x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$,

nelle quali a, b sono costanti, qualunque sia la posizione della generatrice; ma le quantità α, β che sono costanti per una medesima posizione della generatrice, variano allorchè la generatrice passa da una posizione ad un' altra; così per ogni superficie cilindrica, allorchè il punto che si considera, cangia di posizione senza uscire dalla medesima retta generatrice, le due quantità α, β, ovvero i loro valori $x - az$, $y - bz$, sono costanti, e se si muove in modo da andare da una posizione della generatrice ad un' altra, queste quantità variano ambedue: dunque queste due quantità α e β sono costanti insieme e variabili insieme: esse dunque sono l' una funzione dell' altra; si avrà in conseguenza $\beta = \phi(\alpha)$, ovvero $y - bz = \phi(x - az)$.

Quest' equazione $y - bz = \phi(x - az)$ sarà l' equazione generale delle superficie cilindriche, e la forma della funzione che ne compone il secondo membro, dipenderà dalla natura della curva, la quale dirige il moto della generatrice: se questa curva non è sottomessa alla legge di continuità, se cioè le sue projezioni non possono esprimersi ciascuna per una equazione, la forma di quella funzione non può esprimersi analiticamente.

L'equazioni poi della retta generatrice saranno

$$x - az = \alpha$$
$$y - bz = \varphi(\alpha),$$

α essendo la quantità che particolarizza la posizione di questa retta.

Se fosse data ancora la curva a doppia curvatura, la quale dirige il movimento della generatrice, allora si potrebbe determinare la forma della funzione $\varphi(\alpha)$, che conviene a quella superficie individuale che si considera.

Infatti siano $F(x,y,z) = 0$, $f(x,y,z) = 0$ le due equazioni date della curva a doppia curvatura; siccome la generatrice dee in tutte le sue posizioni passare per la data curva, bisognerà che le quattro equazioni

$$F(x,y,z) = 0, f(x,y,z) = 0, x - az = \alpha, y - bz = \varphi(\alpha)$$

sussistano nello stesso tempo, qualunque sia il valore di α; dunque se da queste quattro equazioni si eliminano le tre quantità x, y, z, si avrà in α e $\varphi(\alpha)$ un'equazione che rappresenteremo per $\Psi(\alpha, \varphi(\alpha)) = 0$, che determinerà il valore di $\varphi(\alpha)$ in α, cioè la forma della funzione φ.

Rimettendo per α e $\varphi(\alpha)$ i respettivi valori, si avrà l'equazione

$$\Psi(x - az, y - bz) = 0$$

per rappresentare quella particolare superficie Cilindrica.

Se per esempio la curva direttrice del movimento fosse un circolo tracciato nello spazio, siccome un circolo risulta sempre dall' intersezione di una superficie sferica con un piano, perciò le quattro equazioni quì sopra citate sarebbero

$$(x - a')^2 + (y - b')^2 + (z - c')^2 - r^2 = 0,$$
$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$x - az = \alpha,$$
$$y - bz = \varphi(\alpha),$$

dalle quali eliminando x, y, z, si otterrebbe l'equazione in α e $\varphi(\alpha)$, ed in conseguenza ci sarebbe conosciuta la forma di $\varphi(\alpha)$.

Superficie di Rivoluzione.

XVIII. Chiamansi superficie di rivoluzione quelle generate dal movimento di una curva qualunque che si ravvolge intorno ad un' asse dato di posizione. Ecco come può aversene l'equazione generale.

Siano $\begin{cases} x = Az + a \\ y = Bz + b \end{cases}$

le due equazioni date, le quali rappresentano l'asse di posizione. Dalla legge, con la quale si generano queste superficie, dipende che se si tagliano con un piano qualunque perpendicolare all'asse di rivoluzione, si ha per sezione la circonferenza di un circolo, il centro del quale è nell'asse, e tutti i punti del quale sono ad eguali distanze da un medesimo punto preso nell'asse medesimo.

Ora essendo $\left.\begin{matrix} x = Az + a \\ y = Bz + b \end{matrix}\right\}$ l'equazioni dell'asse di rivoluzione, l'equazione di un piano perpendicolare all'asse è

$$Ax + By + z = \alpha,$$

ove la quantità α che determina la posizione di questo piano, è costante per uno stesso piano perpendicolare, e variabile da un piano all'altro; inoltre l'asse di rivoluzione incontra il piano delle x, y in un punto, le cui coordinate sono $x = a$, $y = b$, $z = 0$, e prendendo questo punto come il centro comune di una serie di sfere concentriche, l'equazione generale di queste superficie sferiche sarà

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = \beta^2,$$

nella quale il raggio β è costante per una medesima sfera, e varia da una sfera all'altra.

Posto questo, se il punto che si considera sopra la superficie di rivoluzione, si muove senza uscire dal medesimo piano perpendicolare all'asse, ei non escirà neppure dalla medesima superficie della sfera, ed allora α e β saranno amendue costanti: ma se questo punto movendosi esce dal piano perpendicolare all'asse, ei passerà anche da una sfera in un' altra, e le quantità α e β avranno tutte e due variato; dunque le superficie di rivoluzione hanno questa proprietà caratteristica „ le due quantità α e β^2, ovvero i loro „ respettivi valori $Ax + By + z$, $(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2$

„ sono costanti insieme e variabili insieme. „

Esse avranno dunque per equazione

$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=\varphi(Ax+By+z)$, nella quale il secondo membro rappresenta una funzione qualunque della quantità contenuta tra le parentesi, e la cui forma dipende dalla natura della curva generatrice.

Se l'asse di rivoluzione fosse lo stesso asse verticale delle z, le sue equazioni sarebbero $x=0$, $y=0$, ed in conseguenza $A=0$, $B=0$, $a=0$, $b=0$: l'equazione diviene allora

$x^2+y^2=\varphi(z)$, ovvero

$z=\varphi(x^2+y^2)$.

Quest' equazione è egualmente generale che la prima, perchè si possono sempre permutare le coordinate in modo che l'asse di rivoluzione sia uno dei tre assi ortogonali.

Quando è data l'equazione della curva a doppia curvatura, che con la sua rivoluzione produce la superficie, allora si può determinare la forma di quella funzione, acciò l'equazione delle superficie cilindriche rappresenti appunto la superficie descritta da quella curva a doppia curvatura. Siano infatti

$F(x,y,z)=0$, $f(x,y,z)=0$,

le equazioni della generatrice, e le equazioni della circonferenza di un circolo, descritto da qualunque punto della generatrice, saranno

$$Ax+By+z=\alpha$$
$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=\varphi(\alpha);$$

ed acciò la superficie di rivoluzione passi per la curva data, bisogna che la generatrice sia tagliata dalla circonferenza del circolo, qualunque sia il valore di α; bisogna dunque che le quattro equazioni precedenti possano aver luogo tra le quattro quantità x, y, z, α: eliminando dunque le tre quantità x, y, z resterà una equazione tra α e $\varphi(\alpha)$, la quale può esser rappresentata da $F'(\alpha, \varphi(\alpha))=0$, e che darà il valore di $\varphi(\alpha)$ in α. Ora sostituiamo in quest' equazioni i respettivi valori per α e $\varphi(\alpha)$, ed avremo l'equazione

$F'(Ax+By+z,\ (x-a)^2+(y-b)^2+z^2)=0$,

che rappresenterà quella determinata superficie di rivoluzione.

Per fare un esempio: supponiamo che l'asse passi per l'origine, e che sia parallelo alle z, e cerchiamo l'equazione della superficie di rivoluzione generata per il moto di una retta qualunque data di posizione.

Siano $\begin{cases} x=A'z+a' \\ y=B'z+b' \end{cases}$

l'equazioni date della retta generatrice; quelle della circonferenza descritta da ciascun dei suoi punti saranno $z=\alpha$, $x^2+y^2=\varphi(\alpha)$; eliminiamo x, y, z tra queste quattro equazioni, e si avrà

$(A'\alpha+a')^2+(B'\alpha+b')^2=\varphi(\alpha)$,

che ci dice come $\varphi(\alpha)$ è composta di α. Rimettiamo i valori di α, e di $\varphi(\alpha)$, ed avremo l'equazione

$(A'z+a')^2+(B'z+b')=x^2+y^2$

per rappresentare quella superficie.

Se in quest' equazione si fa $x=0$ ovvero $y=0$, il che ci dà una sezione per l'asse, l'equazione risultante diviene quella di un' iperbola; dunque la superficie che si considera, è quella di un' iperboloide di rivoluzione.

Se conservando una delle due equazioni della retta generatrice, si cambiano tutti i segni del secondo membro dell' altra, l'equazione della superficie sarà ancora la medesima: questa superficie dunque può esser generata da due rette differenti; e siccome ciascuna di queste due rette generatrici passa per tutti i punti della superficie, ne segue che la superficie non ha alcun punto, per il quale non possano farsi passare due linee rette differenti, le quali riposino tutte e due intieramente sopra la superficie medesima.

Altra Famiglia di Superficie.

XIX. Consideriamo ora quelle superficie che sono generate dal movimento di una linea che è sempre orizzontale, e che passa sempre per una medesima verticale.

Dalla genesi di queste superficie si ricava una proprietà caratteristica di esse, e che loro appartiene, qualunque d'altronde sia la legge con la quale è diretto il moto della linea generatrice. Ecco in cosa consiste „ se questa superficie si taglia con un qualunque „ piano che passi per la verticale, la sezione è una linea retta orizzontale „. Ora supponiamo che la data verticale passi per l' origine, e sia lo stesso asse delle z, e si vedrà che l' equazione di un piano qualunque condotto per la verticale è $y = \alpha x$, ovvero $\frac{y}{x} = \alpha$, nella quale α è il parametro che determina la posizione di questo piano, parametro che è costante per un medesimo piano, e che varia da un piano verticale ad un altro; di più l' equazione di una linea orizzontale è $z = \beta$; se dunque il punto che si considera, si muove sopra la superficie senza uscire dal medesimo piano verticale, il che suppone α costante, non escirà neppure dalla linea orizzontale, ed ancor β sarà costante; ma se nel suo movimento egli cangierà di piano verticale, il che suppone α variabile, passerà anche in un' altra linea orizzontale, e perciò β sarà ancora esso variabile: dunque nelle superficie che consideriamo, le quantità α, β, ovvero z, $\frac{y}{x}$ sono costanti insieme, e variabili insieme: sono dunque funzioni una dell' altra; sarà pertanto l' equazione generale di queste superficie $z = \varphi(\frac{y}{x})$; la forma di φ dipende dalla natura della curva che dirige il movimento.

Se sarà data questa curva direttrice, allora si determinerà la forma di φ. Siano

$F(x, y, z) = 0$, $F'(x, y, z) = 0$

l' equazioni che rappresentano questa curva a doppia curvatura; eliminando tra queste quattro equazioni

$$F(x, y, z) = 0,$$
$$F'(x, y, z) = 0,$$
$$\frac{y}{x} = \alpha,$$
$$z = \varphi(\alpha)$$

le tre quantità x, y, z, avremo un' equazione

$f(\alpha, \varphi(\alpha)) = 0$ tra α e $\varphi(\alpha)$, che ci darà l' espressione di $\varphi(\alpha)$.

L' equazione poi di questa superficie individuale sarà $f(\frac{y}{x}, z) = 0$.

Facciamo qualche esempio.

I°. Nelle stanze *a volta*, si incontrano ordinariamente delle volte, le quali vanno a terminare in altre piccole volte parziali che sono ordinariamente chiamate *Lunette*. Le superficie di queste volte parziali sono della classe di quelle, che quì si considerano.

Data dunque l' equazione della centina, o dell' arco che forma la base della lunetta, si dimanda l' equazione della di lei superficie.

Sia $x = a$ la distanza di questa centina dall' origine: ordinariamente l' arco che forma questa centina, è un arco ellittico; e siccome questo arco è in un piano parallelo a quello delle y e z, avremo $z^2 = \frac{b^2}{c^2}(c^2 - y^2)$ per l' equazione della sua projezione sopra il detto piano. Per b, c sono rappresentati i due semiassi dell' ellisse.

Dunque per avere l' equazione della superficie della lunetta, dovremo eliminare x, y, z per mezzo di queste quattro equazioni

$$x = a,$$
$$c^2z^2 + b^2y^2 = c^2b^2,$$
$$\frac{y}{x} = \alpha,$$
$$z = \varphi(\alpha)$$

e si avrà

$c^2\varphi((\alpha))^2 + b^2a^2\alpha^2 = c^2b^2$, e sostituendo per α, $\varphi(\alpha)$ i loro valori, l' equazione dimandata sarà

$$c^2z^2 + b^2a^2 . \frac{y^2}{x^2} = c^2b^2.$$

II°. Cerchiamo l' equazione della superficie inferiore di una scala a *Chiocciola*, ovvero a *Lumaca*, supponendo che il disotto dei suoi scalini sia ridotto ad una superficie continua.

Si sa che la curva a doppia curvatura, la quale dirige il movimento della generatrice, è l' Elice o la Spira di una Vite, di cui l' asse è la verticale che passa per l' origine.

Quest' Elice è rappresentata (XIV) da queste due equazioni

$$x^2 + y^2 = a^2$$
$$z = b . arc\ sen\, y + c;$$

dunque si avrà la dimandata equazione eliminando x, y, z per mezzo di queste quattro equazioni

$$x^2 + y^2 = a^2,$$
$$z = b . arc\ sen\, y + c,$$
$$\frac{y}{x} = \alpha,$$
$$z = \varphi(\alpha).$$

Da una tale eliminazione si ricava

$\varphi(\alpha) = b . arc\ sen\left(\frac{a\alpha}{\sqrt{(1+\alpha^2)}}\right) + c$; e sostituendo per α e per $\varphi(\alpha)$ i respettivi valori, si avrà l'equazione

$$z = b . arc\ sen\left(\frac{ay}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\right) + c;$$

la quale rappresenterà quella superficie.

Questa superficie è una di quelle di cui l'area è un minimo; vale a dire, se sopra questa superficie si circoscrive un'area con una curva qualunque dipendente o indipendente dalla legge di continuità, di tutte le superficie curve, le quali passano per quella curva circoscrivente, la superficie che noi consideriamo, è quella la cui porzione d'area circoscritta è la minima.

XX. Se una retta si muove nello spazio in qualunque modo, senza però cessar mai di essere parallela ad un piano dato di posizione, essa descriverà una superficie curva, della quale vogliamo trovare l'equazione.

Se ci immaginiamo nello spazio due curve qualunque a doppia curvatura, e che una retta costantemente parallela ad un piano fisso, si muova appoggiandosi sempre a quelle due curve, essa genererà una superficie, la cui equazione sarà determinata e dalla legge di quel movimento, e dalla natura delle due curve che lo dirigono.

Siano x, y, z le coordinate di un punto qualunque di quella superficie, e consideriamo la retta generatrice quando passa per questo punto. Se per questa retta generatrice si fanno passare due piani, uno parallelo al piano fisso, l'altro che passi per l'origine, è evidente che quando il punto della superficie si moverà senza uscire dalla direttrice, ei ne anche uscirà da quei due piani, poichè quella è la loro intersezione: ora sia

$Ax' + By' + Cz' = 0$, l'equazione del piano fisso condotto per

l'origine, al quale la generatrice è sempre parallela, e sarà $Ax + By + Cz = \alpha$ l'equazione di un piano parallelo a quello, e che passa per il punto preso in considerazione, ed in conseguenza per la generatrice considerata in quel punto.

Sia $z = ax + by$ l'equazione dell'altro piano che passa per l'origine e per la generatrice. Finchè il punto movendosi sopra la superficie, non abbandona il piano $Ax + By + Cz = \alpha$, non esce neppure dall'altro piano $z = ax + by$; dunque a, b sono ambedue costanti, se è costante α, e variabili se quella varia; dunque a, b saranno due funzioni diverse di α; l'equazione dunque dimandata sarà

$$z = x\varphi(Ax + By + Cz) + y\psi(Ax + By + Cz),$$

nella quale le due forme φ, ψ sono arbitrarie.

Se poi saranno date due curve a doppia curvatura qualunque nello spazio, e si vorrà trovare l'equazione della superficie individuale che ad esse appartiene, converrà determinare le forme delle due funzioni φ, ψ.

Per questo siano

$$\left.\begin{array}{l}(A) \ldots F(x,y,z) = 0 \\ (B) \ldots F'(x,y,z) = 0\end{array}\right\} \text{l'equazioni per una di quelle curve;}$$

$$\left.\begin{array}{l}(C) \ldots f(x,y,z) = 0 \\ (D) \ldots f'(x,y,z) = 0\end{array}\right\} \text{l'equazioni per l'altra.}$$

Se facciamo

$(E) \ldots Ax + By + Cz = u$, l'equazione della superficie diverrà

$(F) \ldots z = x\varphi u + y\psi u.$

Ora la superficie dovendo passare per la prima curva, le quattro equazioni (A), (B), (E), (F) debbono sussistere tra le coordinate di ciascun punto di questa curva, e quindi eliminando tra queste quattro equazioni le quantità x, y, z, si avrà in $u, \varphi u, \psi u$ una prima equazione

$(H) \ldots F(u, \varphi u, \psi u) = 0$ cui dovranno soddisfare le due funzioni φ, ψ.

Nella stessa guisa dovendo la superficie passare per l'altra curva, se elimineremo x, y, z per mezzo delle quattro equazioni (C), (D), (E), (F) avremo un'altra equazione

(G) .... $F'(u, \varphi u, \Psi u) = 0$ a cui anche le forme delle funzioni φu, Ψu devono soddisfare; per mezzo dunque delle due equazioni (G), (H) troveremo i valori di φu, Ψu dati per u, e conosceremo in conseguenza le forme di quelle funzioni.

Trovate le due equazioni (H), (G) si può subito ottenere l'equazione appartenente alla superficie, eliminando u, φu, Ψu dalle quattro equazioni (E), (F), (H), (G); giacchè allora si otterrà un' equazione in x, y, z senza alcun segno di funzione indeterminata.

Supponiamo ora che si voglia l'equazione di una superficie descritta da una retta che passa sempre per l'asse degli z. Introduciamo due curve a doppia curvatura per dirigere il movimento di questa retta, le quali potendo esser qualunque, non limitano in conseguenza il problema; se ora si concepisce che questa retta passi costantemente per l'asse degli z, e nel suo movimento si appoggi costantemente a quelle due curve, la superficie così generata avrà la seguente proprietà.

Se per l'asse degli z conduciamo un piano, e consideriamo la generatrice quando si trova in questo piano; essa movendosi, uscirà da questo piano e passerà in un altro, e così essendo costante la di lei posizione, sarà costante quella del piano in cui essa si trova. La posizione del piano è determinata (se per x, y, z rappresentiamo le coordinate di un punto della superficie curva) dalla quantità $\frac{y}{x}$; dunque essendo costante la posizione della retta, è anche costante la quantità $\frac{y}{x}$, e quella variando, questa anche varierà.

Ora siano $z = \gamma x + \beta$, $z = \delta y + \beta$

l'equazioni delle due projezioni della generatrice sopra i due piani delle x e z, e dell'y e z. Bisognerà che nell' una e nell' altra di queste due equazioni le quantità β, γ, δ siano costanti quando $\frac{y}{x}$ è costante: esse saranno dunque funzione di quest' ultima quantità: dunque una qualunque delle due equazioni seguenti

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + F\left(\frac{y}{x}\right), \quad z = y\Psi\left(\frac{y}{x}\right) + F\left(\frac{y}{x}\right)$$

rappresenta la superficie di cui parliamo.

Le forme di queste funzioni sono indeterminate, e per determinarle bisogna che siano date le due curve a doppia curvatura che dirigono il movimento. Il tutto passa come nei casi precedenti.

NOTA AL CAP. II. DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

In questo Capitolo allorchè abbiamo considerato z funzione di due variabili x, y, abbiamo supposte queste variabili indipendenti tra loro, e per dx, dy ne abbiamo rappresentati gli aumenti indeterminati: allora la differenziale totale $dz = \left(\frac{dz}{dx}\right)dx + \left(\frac{dz}{dy}\right)dy$ era composta della somma dei due differenziali parziali $\left(\frac{dz}{dx}\right)dx$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)dy$.

Supponiamo ora che delle due variabili x, y che entrano nella composizione di z, la y deva riguardarsi come funzione di x; allora seguendo le regole date nel Cap. I., si avrà $dz = \left(\frac{dz}{dx}\right)dx + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)dx$, e scrivendo dy semplicemente per $\left(\frac{dy}{dx}\right)dx$, si ha ancora in questo caso $dz = \left(\frac{dz}{dx}\right)dx + \left(\frac{dz}{dy}\right)dy$.

Così, sia che le variabili x, y non abbiano alcuna dipendenza tra loro, sia che y dipenda da x, la differenziale totale della z è $dz = \left(\frac{dz}{dx}\right)dx + \left(\frac{dz}{dy}\right)dy$,

La sola differenza consiste nel significato del dy; nel primo caso esso è un aumento indeterminato che nulla ha che fare con le altre quantità; e nel secondo egli è il differenziale della y funzione di x.

Acciò dunque una espressione $Pdx + Qdy$ possa prendersi per una differenziale totale dz di una funzione z composta di due variabili x, y indipendenti, ovvero per una differenziale della stessa funzione quando y dipende da x, converrà che P possa far le veci di $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, e Q di $\left(\frac{dz}{dy}\right)$.

Lo stesso succede per z funzione di un qualunque numero di variabili x, y, u, t ec. La differenziale totale di z, quando le variabili sono indipendenti, è

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right)dx + \left(\frac{dz}{dy}\right)dy + \left(\frac{dz}{du}\right)du + \text{ec.}$$

e quando esse consideransi funzioni tutte della x, è ancora

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right)dx + \left(\frac{dz}{dy}\right)dy + \left(\frac{dz}{du}\right)du + \text{ec.}$$

La differenza consiste in questo: nel primo caso dx, dy, du ec., rappresentano gli aumenti indeterminati ed indipendenti di quelle variabili; mentre nel secondo caso dx è ancora l'aumento indeterminato di x, ma dy, du ec., sono i differenziali $\left(\frac{dy}{dx}\right) dx$, $\left(\frac{du}{dx}\right) dx$ ec., delle y, u ec., funzioni di x.

Concluderemo di quì che le condizioni perchè una espressione

$Pdx + Qdy + Rdu +$ ec.

sia una differenziale totale di una quantità z, saranno le stesse e nell'ipotesi delle variabili indipendenti, ed in quella che esse dipendano tutte da una, per esempio da x.

Non è però così nei differenziali degli ordini superiori. Considerando quei del secondo, noi abbiamo veduto che la differenziale totale del secondo ordine di z, funzione di due variabili x, y indipendenti tra di loro, è

$$d^2z = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) dx^2 + 2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) dxdy + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) dy^2,$$

ove dx, dy rappresentano gli aumenti indeterminati delle variabili x, y.

E se consideriamo y come funzione di x, essa è allora

$$d^2z = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) dx^2 + 2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) dx \left(\frac{dy}{dx}\right) dx + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) dx^2,$$

ovvero

$$d^2z = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) dx^2 + 2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) dxdy + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) dy^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right) d^2y.$$

Quivi dx rappresenta l'aumento indeterminato di x, il dy rappresenta il differenziale primo $\left(\frac{dy}{dx}\right) dx$ della funzione y, ed il d^2y il differenziale secondo della stessa funzione. Si vede che nei due casi l'espressione di d^2z è diversa: nel secondo vi si trova di più il termine $\left(\frac{dz}{dy}\right) d^2y$.

Consimili riflessioni hanno luogo per le differenziali delle equazioni.

Se tra un numero qualunque di variabili x, y, u, t ec., z, si ha una qualunque equazione $V = 0$, e se riguardando x, y, u, t ec. come indipendenti tra loro, si considera z come funzione di esse, il differenziale primo totale di quest'equazione è

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) dx + \left(\frac{dV}{dy}\right) dy + \left(\frac{dV}{du}\right) du + \text{ec.} + \left(\frac{dV}{dz}\right) dz = 0,$$

in cui dx, dy, du ec., sono gli aumenti indeterminati delle variabili x, y, u ec., e dz è la differenziale totale di z considerata come funzione di quelle variabili, essa cioè è

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy + \left(\frac{dz}{du}\right) du + \text{ec.}$$

Se poi nell'equazione $V = 0$ si riguardano tutte le variabili y, u ec., z come funzioni di x per esempio, il differenziale primo di quella equazione è

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) dx + \left(\frac{dV}{dy}\right) dy + \left(\frac{dV}{du}\right) du + \ldots\ldots + \left(\frac{dV}{dz}\right) dz = 0$$

della stessa forma che l'altro, ma in questa equazione dx è l'aumento indeterminato di x; dy, du ec. sono i differenziali $\left(\frac{dy}{dx}\right) dx$, $\left(\frac{du}{dx}\right) dx$ ec., delle quantità y, u ec. funzioni di x, ed ancora

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy + \left(\frac{dz}{du}\right) du + \text{ec.}$$

essendo $dy = \left(\frac{dy}{dx}\right) dx$, $du = \left(\frac{du}{dx}\right) dx$ ec.

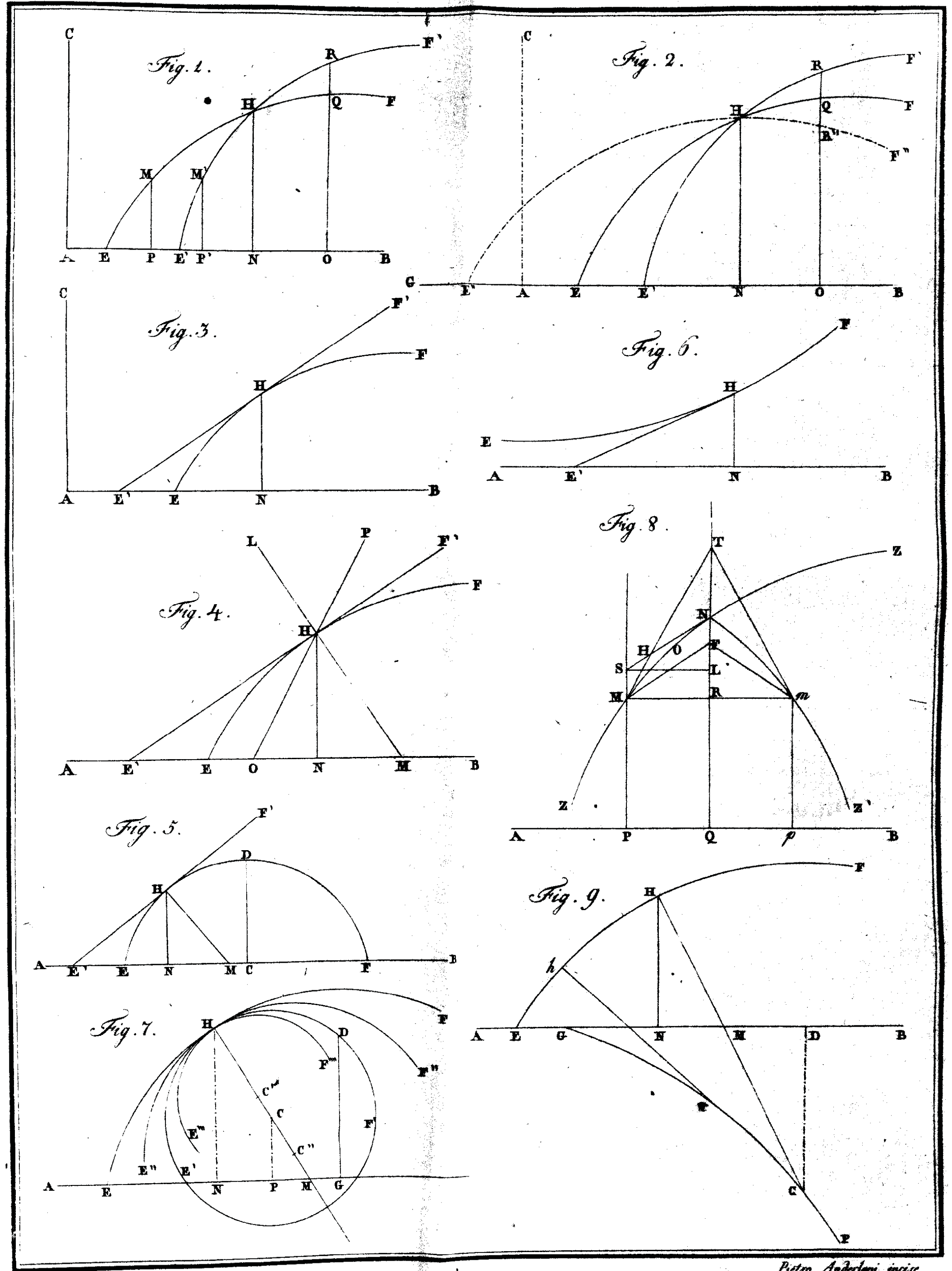
Data dunque una equazione differenziale del primo ordine

$Pdx + Qdy + Rdu + \ldots\ldots + Tdz = 0$

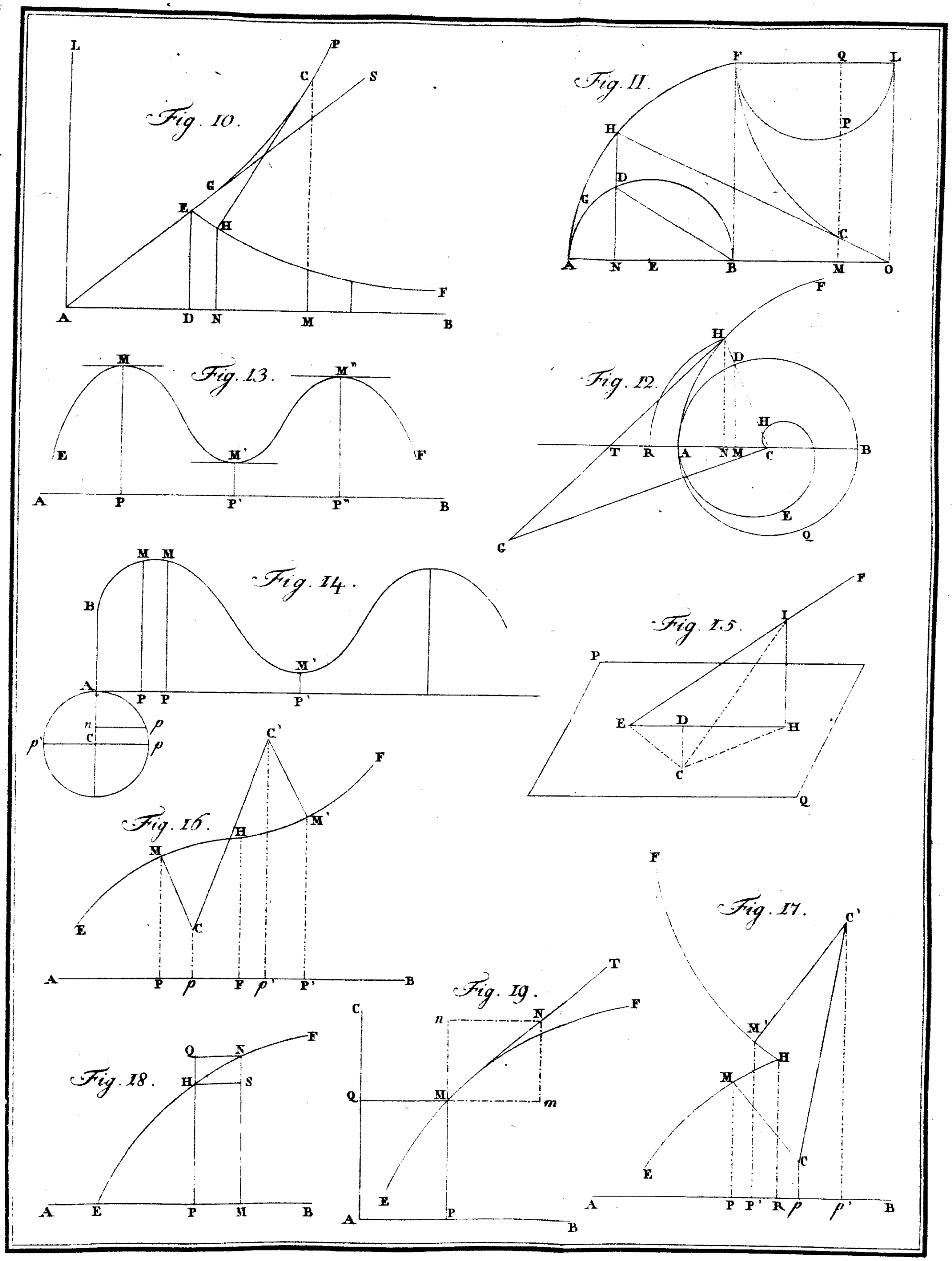
si hanno le medesime relazioni tra i coefficienti $P, Q, R, \ldots\ldots T$, acciò sia essa una differenziale esatta di una equazione $V = 0$ tra x, y, u ec. z; sia che si riguardi z come funzione delle variabili x, y, u ec. indipendenti tra loro, sia che si considerino tutte queste variabili y, u ec. come dipendenti da x.

Facilmente si potrebbe vedere che la faccenda và diversamente per le differenziali delle equazioni degli ordini superiori, mentre nel caso della dipendenza delle variabili, l'equazioni differenziali contengono dei termini di più, i quali non si troverebbero se le variabili fossero indipendenti. Non mi trattengo in questo esame, essendo facile ad instituirsi da chi avrà ben comprese le cose contenute nei Cap. I. e II.

Fine del Tomo Secondo.



Pietro Anderloni incise



P. A. inc.

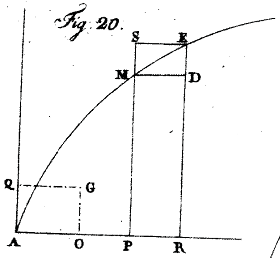


Fig. 20.

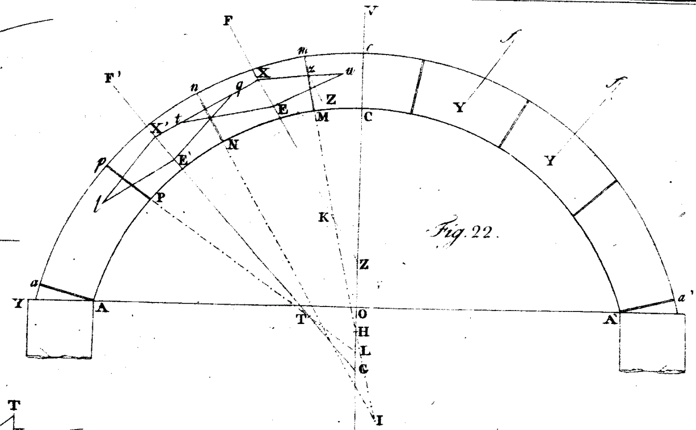


Fig. 22.

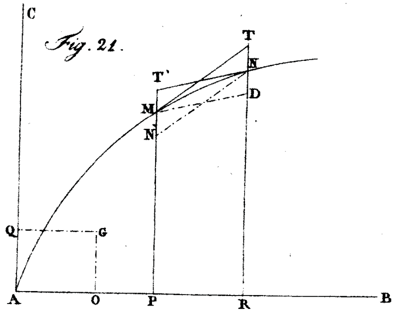


Fig. 21.

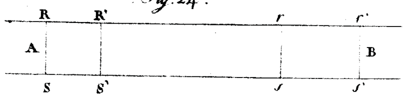


Fig. 24.

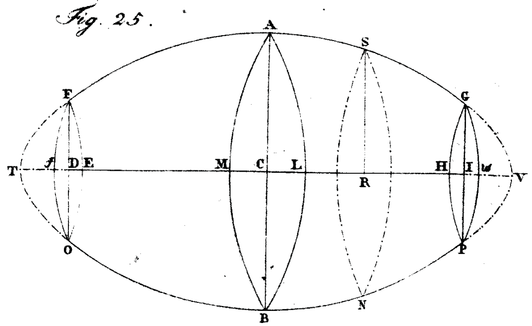


Fig. 25.

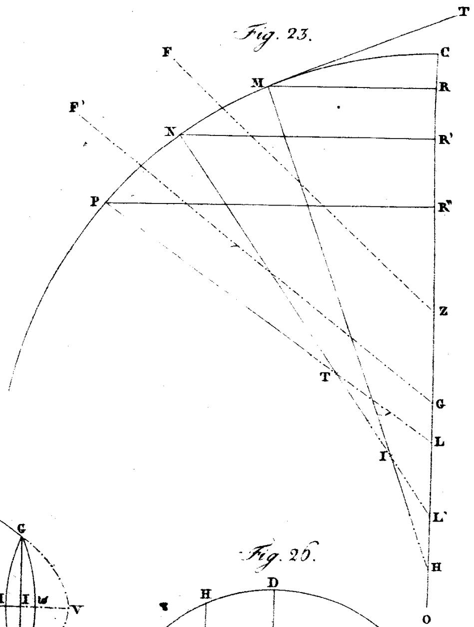


Fig. 23.

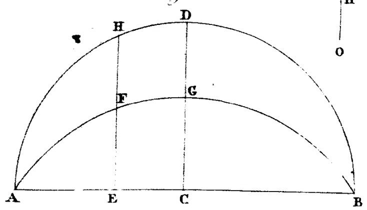


Fig. 26.

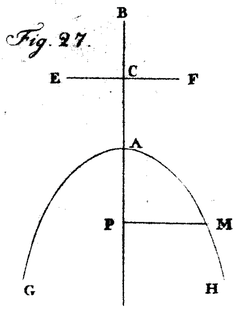


Fig. 27.

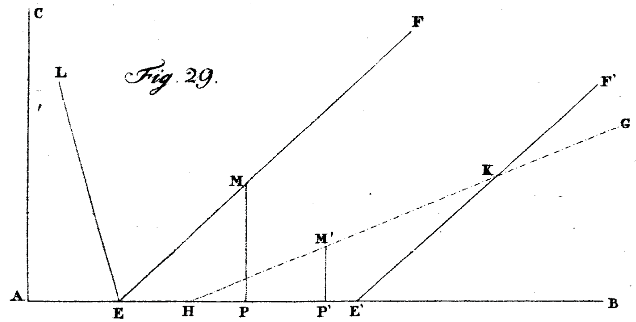


Fig. 29.

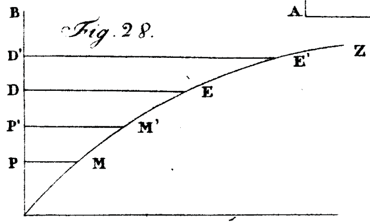


Fig. 28.

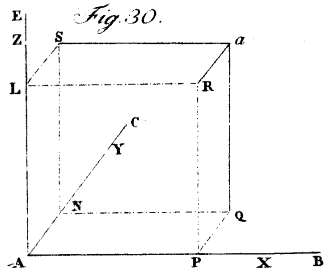


Fig. 30.

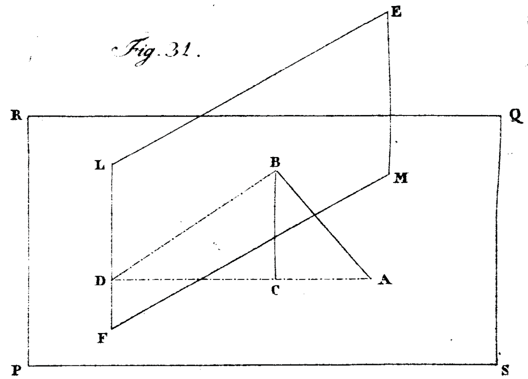


Fig. 31.

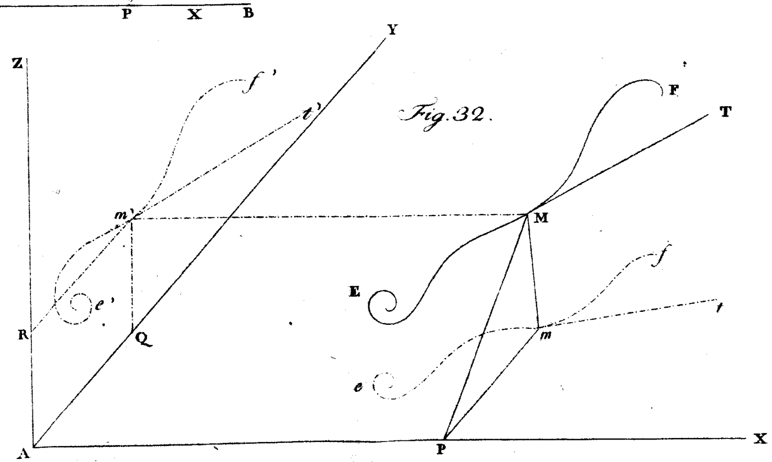


Fig. 32.