CORSO

DI

MATEMATICA SUBLIME

TOMO I.

CALCOLO DELLE DIFFERENZE FINITE E SUE APPLICAZIONI

DEL DOTT. VINCENZIO BRUNACCI

PUBBLICO PROFESSORE DI MATEMATICA SUBLIME
NELL' UNIVERSITA' DI PAVIA

MEMBRO DELL' ISTITUTO NAZIONALE
E DELL' ACCADEMIA DELLE SCIENZE
DI TURINO &c.

FIRENZE 1804.

PRESSO PIETRO ALLEGRINI
CON APPROVAZIONE.

AVVERTIMENTO

DELL' AUTORE.

HO scritto questo Corso di Matematica Sublime principalmente per usarne nelle mie Lezioni. Il primo Tomo, che ora do alla luce, contiene il Calcolo delle Differenze Finite; negli altri due, che stanno stampandosi, verrà esposto il Calcolo Differenziale ed Integrale.

Scrivendo quest'Opera mi sono attenuto alle norme tracciate dal Regolamento per gli Studi delle due Università Nazionali (*a*). Mi sono per verità esteso molto più al di là che nol comporti un semplice Corso di Lezioni: ma, se non mi lusingo soverchiamente, ho riempiuto un vuoto che pur rimaneva, procurando a' Coltivatori delle Matematiche un Trattato, per quanto era possibile, completo di questa parte delle Scienze esatte e delle loro applicazioni, dettato in lingua Italiana.

Nè una tale estensione nuocerà punto a chi bramasse d'attingere in queste Teorie soltanto i primi Elementi; imperocchè egli potrà impararli leggendo unicamente que' paragrafi che nell' Indice non sono notati coll' asterisco *.

(*a*) Ecco quanto prescrive il Regolamento delle Università.

Il Corso di Matematica Sublime dee continuare due anni Scolastici. Debbono insegnarsi in esso „ il Calcolo delle Differenze Finite, con le sue Applicazioni, tra le quali debbono avere il primo luogo quelle alle Probabilità ed alle sorti nei Giochi d' Azzardo; il Calcolo Differenziale ed Integrale, con le Applicazioni alle cose di pura Analisi, alle cose di Geometria e Meccanica Sublime: il Calcolo delle Variazioni debbe esservi compreso „.

In quest' insegnamenti debbono escludersi gl' infinitesimi e tutto debb' essere appoggiato alle Teorie delle quantità finite; e perchè di questi Calcoli si veda il nesso che hanno tra loro, debbono essi dedursi dai Principj d' Analisi Derivata, della quale non sono che rami particolari.

Quantunque io sia stato sollecito di rendere il suo dritto agli Autori citandoli quando ho dovuto valermi delle loro scoperte; pure se per avventura avessi obliato questo dovere, dimando che un tal difetto si ascriva piuttosto ad inavvertenza, che al desiderio d'attribuirmi ciò che appartiene altrui. Sento di dovere assaissimo a chi mi ha preceduto nello scrivere di queste materie, e senza i loro lumi questo mio lavoro sarebbe riuscito più imperfetto.

Soggiungo relativamente a questo primo Volume che nelle applicazioni del Calcolo delle Differenze Finite ho reputato opportuno d'estendermi principalmente trattando la Teoria delle sorti negli Azzardi, ed in generale delle Probabilità, siccome quella che negli altri Corsi, sin ora pubblicati, è stata quasi intieramente negletta: eppure il Calcolo Finito trionfa in queste ricerche ove gli altri Calcoli rimangono quasi senza efficacia; per modo che taluni non han dubitato di chiamarlo = la Bacchetta Magica degli Indovini per i problemi di questo genere =.

A quel più che è necessario a sapersi supplirà l' Indice di ciò che si contiene in questo Tomo.

INDICE

DELLE COSE CONTENUTE IN QUESTO TOMO I.

Pag.	Lin.	ERRORI	CORREZIONI
7.	15.	$x(x-\omega)(x-2\omega)$ . .	$-x(x-\omega)(x-2\omega)$
25.	16.	$(n+2\omega)$	$(n+2)\omega$
44.	16.	avranno	avevano
47.	17.	tre	sei
48.	25.	avranno	avevano
70.	6,7.	$\varphi(x)+\varphi(1)$	$\varphi(x)+\Psi(1)$
78.	1.	Completo	Particolare
87.	1.	$y = \alpha'_x$	$y = \alpha'^x$
	3.	$B\alpha'_x$	$B\alpha'^x$
100.	4.	p^n	$p^{(n)}$
112.	4.	$C' = -1$	$C'' = -1$
	16.	$0 = C + 1 = -3$ . . .	$0 = C + 1 - 3$
115.	21.	Teoria dei limiti . . .	Teoria delle funzioni derivate
122.	22.	$\Sigma(\frac{\alpha}{\alpha'-\alpha} \cdot \frac{X}{\alpha^x}$	$\Sigma(\frac{\alpha}{\alpha'-\alpha} \cdot \frac{X}{\alpha'^x}$
140.	17.	$\frac{a^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{a}-1}$	$\frac{a^{-n}}{\frac{1}{a}-1}$
147.	16.	*Si aggiunga* „ per m, m' vogliamo significare i denominatori $\alpha' b + 2\alpha'^2 c$, $\alpha b + 2\alpha^2 c$.	
148.	17.	$\cos x\beta \cdot \sqrt{-1} \cdot \mathrm{sen}\, x\beta$ . .	$\cos x\beta - \sqrt{-1}\, \mathrm{sen}\, x\beta$
156.	6.	$y_x \cdot y_{x+1}$	$y_x \cdot y_{x+2}$
160.	10.	$-(\Delta a)^2$	$-(a+\Delta a)^2$
178.	16.	$(\alpha-1)^{y-1}$	$(\alpha-1)^{-y+1}$
191.	12,13.	$2\omega \cdot 2rp$	$2\omega \cdot 2\sqrt{p}$
125.	1.	$\frac{\nabla h_{x-u-2}}{\nabla g_y \cdot \nabla f_{x-y-u-1}}$ . .	$\frac{\nabla h_{x-u-2}}{\nabla g_y \cdot \nabla f_{x-y-u-2}}$
250.	4.	funzione	frazione

Se ne sono tralasciati alcuni pochi che il Lettore riconoscerà a colpo d' occhio.

NB. La nota (a) della pag. 29 deve andare alla pag. 43.

PRINCIPJ FONDAMENTALI DELL' ANALISI DERIVATA

NECESSARJ PER STABILIRE I FONDAMENTI DEL CALCOLO DELLE DIFFERENZE FINITE.

§. 1. Il Calcolo cui ho dato (*a*) il nome d' *Analisi Derivata*, comprende tutti quei rami di Analisi, per i quali fu stabilito un simbolo d' operazione, e fissato un algoritmo per calcolarli. Questi trovano in essa la sorgente comune ed il loro punto, per dir così, di contatto; di modo che il calcolo differenziale ed il calcolo degli Esponenti, non sono che branche di Scienza diramate dallo stesso principio.

Il principio fondamentale di una tale Analisi, e che si chiama *Principio di derivazione*, consiste nel considerare una quantità qualunque semplice o composta in diversi stati dipendenti uno dall' altro per una medesima legge; e il suo principale oggetto è di rintracciare le proprietà di questa medesima quantità relativamente ai suoi stati, per quindi fare uso delle stesse proprietà nella soluzione dei problemi.

Rappresentiamo per y una quantità qualunque, e facendo sopra di essa una determinata operazione, supponghiamo d' ottenerne per risultato un' altra quantità Y. E' manifesto che Y

(*a*) Analisi derivata: Pavia 1802.

dipende da y, e che ogni rapporto tra y e Y consiste nell' operazione, per cui abbiamo derivato una di quelle quantità dall' altra.

La y si chiama *Quantità o Funzione Derivatrice*. Dicesi *derivare* il fare la prescritta operazione; e con la lettera d messa avanti alla Derivatrice, si indica il risultato Y di questa operazione medesima, che è dunque rappresentato per dy. Chiamasi infine *Quantità o Funzione derivata* questo stesso risultato dy.

Se ora trattando dy come y, si deriva da dy con la medesima operazione un' altra quantità $d(dy)$, che possiamo indicare per d^2y, si avrà una seconda quantità derivata da dy come questa da y; e così se ne avrà una terza, una quarta, ec., di modo che secondo questo principio, la seguente serie $y, dy, d^2y, d^3y, \ldots\ldots d^my$ ci rappresenta col suo primo termine la quantità, dalla quale si deducono tutte le altre, e che abbiamo chiamata funzione *derivatrice:* col suo secondo termine, la *derivata prima* o di *primo ordine*; col suo terzo la *derivata seconda* o di *secondo ordine* ec. ec. e col suo $(m+1)^{esimo}$ la derivata m^{esima} di y.

§. 2. La legge di derivazione, la quale ci prescrive l' operazione, che deve farsi per dedurre o derivare una quantità da un' altra, potendo essere qualunque, non è possibile in conseguenza trattare delle proprietà di quella serie di quantità derivate che nelle sue applicazioni, nelle quali sia individuata questa legge medesima; pure sarà utilissima cosa considerare nella legge di derivazione due casi.

1°. Può la legge di derivazione essere tale, che ogni derivata ottenuta, diventi la derivatrice per la derivata successiva, senza avere alcun riguardo alla prima quantità, dalla quale tutte le altre si deducono, e che si può considerare come la base del sistema.

2°. Può la legge di derivazione essere tale, che nel passare da una derivata all' altra, richieda che abbiamo riguardo alla derivatrice, base del sistema, perchè obbligata nella stessa operazione di derivazione.

Di qui nasceranno due rami generali di sistemi di derivazione, i quali avranno proprietà distinte uno dall' altro. Ma ritornando a considerare il principio generale delle derivazioni, è facile concepire, che preso questo in tutta la sua estensione, l' Analisi cui dà origine, è per dir così infinita, poichè essa ha tante branche particolari, quante sono le operazioni che possono immaginarsi indicate da d, le quali sono all' arbitrio del Geometra, e però infinite di numero.

L' Analisi derivata adunque abbraccia in generale qualunque ramo d' analisi, che si raggiri sopra la maniera di dedurre una quantità da un' altra, e sul determinarne le proprietà. Così tutti quei rami di calcolo per i quali fu stabilito un algoritmo, cioè la Teoria degli Esponenti; il calcolo delle differenze finite; quello delle funzioni analitiche, sul quale è basato il calcolo differenziale, e il calcolo delle variazioni; la Teoria delle facoltà numeriche, formano tante parti d' analisi derivata, e dipendono dallo stesso principio: di modo che tali rami si possono considerare come compresi tutti in questo Calcolo generale.

§. 3. L' Analisi derivata ha due parti. Tutto ciò che si è detto fin' ora appartiene alla prima parte, che si chiama *Analisi derivata diretta*, perchè c' insegna a passare dalla Derivatrice alle sue derivate: l' altra parte si chiama *Analisi derivata inversa*, e a questa appartiene tutto ciò, che ha rapporto a

ritornare da una proposta derivata alla sua Derivatrice. Trovare la Derivatrice di una quantità z considerata come una derivata dell' ordine n, vuol dire trovare quella quantità x, sopra la quale eseguita n volte l' operazione di derivazione, torni per risultato z.

L' operazione che deve farsi sopra una funzione derivata per ottenerne la Derivatrice, s' indica per D. A questa lettera si dà un' indice eguale al numero delle volte, che deve ripetersi la detta operazione, ed il risultato è rappresentato simbolicamente per la quantità stessa, su cui dobbiamo operare, preceduta dalla caratteristica D affetta dal detto indice.

Se dunque riguardiamo z come una derivata prima della quantità incognita x, l' operazione da farsi sopra z per ottenerne la Derivatrice x, ci darà il risultato simbolico $\mathrm{D}z$, che ci rappresenterà la medesima incognita; avremo perciò $x=\mathrm{D}z$.

Egualmente se consideriamo z come una derivata seconda di una funzione Derivatrice incognita x, sarà $x=\mathrm{D}^2z$; indicando per D^2 l' operazione ripetuta due volte primieramente sopra z per averne $\mathrm{D}z$; e poi sopra questo stesso risultato $\mathrm{D}z$ per averne $\mathrm{DD}z$ ovvero D^2z. Infatti sia u la derivata prima di x, z sarà allora la derivata prima di u, e delle tre quantità x, u, z sarà x la Derivatrice di u, ed u la Derivatrice di z: Dunque avremo $x=\mathrm{D}u, u=\mathrm{D}z$, dalle quali si ricava $x=\mathrm{DD}z=\mathrm{D}^2z$. Nella stessa guisa rappresentando per z una derivata terza, la sua derivatrice sarà rappresentata simbolicamente per D^3z; ed in generale se z è una derivata n^{esima} la Derivatrice x sarà $=\mathrm{D}^nz$.

Siccome una stessa quantità z può essere riguardata come una derivata prima, seconda, ec.; così la Derivatrice x di una quantità z, chiamasi la *Derivatrice prima, seconda, terza*, ec. secondo che z è una derivata prima, seconda, ec. Quando poi si dice che $D^n z$ rappresenta la Derivatrice n^{esima} di x, vogliamo significare che $D^n z$ rappresenta quella quantità x, dalla quale per mezzo di n operazioni di derivazione si ottiene z.

§. 4. L'operazione indicata per D è precisamente l'inversa di quella indicata per d, in quanto che essa disfà ciò che ha fatto la prima. Nella serie y, dy, d^2y, d^3y, ec. si passa da un termine A al suo successivo B per mezzo dell'operazione indicata per d fatta sopra il primo A; e si passa da un termine B a quello che lo precede A, o si torna indietro per mezzo dell'operazione indicata da D fatta sopra lo stesso B.

Delle due quantità x, z essendo z la derivata n^{esima} di x, sarà viceversa x la Derivatrice n^{esima} di z. Considerando il primo rapporto abbiamo fra di esse questa equazione (1) ..... $z = d^n x$.

E considerandone il secondo, abbiamo quest'altra equazione (2) .... $x = D^n z$. Così le due equazioni (1) e (2) sono una l'inversa dell'altra; sussistono nello stesso tempo, e non dicono in sostanza che la stessa cosa.

Prendiamo ora la derivata n^{esima} dell'equazione $x = D^n z$, ed avremo $d^n x = d^n D^n z$; ma $d^n x = z$, dunque $d^n D^n z = z$; cioè, *la derivata* n^{esima} *della Derivatrice* n^{esima} *di z è eguale alla stessa z*.

Se facciamo $u = d^n z$, avremo $z = D^n u = D^n d^n z$: dunque $d^n D^n z = D^n d^n z$, cioè,

„ La Derivatrice della derivata dello stesso ordine di una
„ quantità, è sempre eguale alla derivata della Derivatrice del-
„ lo stesso ordine, appartenente alla medesima quantità.

§. 5. Nella derivata qualunque $d^n y$ dell'ordine n, l'indice n ci dice quante volte si è ripetuta l'operazione di derivazione sopra la derivatrice y. Se si aggiunge una unità ad n avremo $d^{n+1} y$, che sarà una derivata d'un ordine maggiore di una unità, o una quantità la quale avrà subita una operazione di derivazione di più di $d^n y$. Egualmente $d^{n-1} y$ ci indicherà una quantità, che ha subita una operazione di derivazione di meno di $d^n y$, o che dopo aver subite n operazioni di derivazione, ha subita un'operazione contraria, la quale distruggendo ciò che aveva fatto l'ultima, l'ha ridotta a non essere il risultato che di $n - 1$ operazioni fatte sopra la derivatrice y.

Nella serie y, dy, d^2y, d^3y, ec. . . . . . $d^n y$ si passa da un termine all'altro verso la destra, facendo sull'uno l'operazione di derivazione, che si rappresenta con l'aumento dell'unità nell'indice; e si torna da un termine all'altro verso la sinistra, facendo un'operazione opposta alla prima, o che distrugga ciò che quest'ultima ha fatto, il che si rappresenta col diminuire di una unità l'indice.

L'indice o ci mostra nessuna operazione fatta sopra la derivatrice, per il che restando essa inalterata, si ha

$$d^0 y = d^{m-m} y = y.$$

Infatti nella citata serie da una derivata qualunque si giunge al primo termine, quando sopra di essa si fanno tante operazioni inverse, quante essa ne conteneva delle dirette, ciò che si rappresenta col diminuire l'indice di una quantità eguale ad esso medesimo.

§. 6. Ma cosa indicheranno le derivate ad indici negativi?

La derivata dell'indice -1 di una quantità y, cioè $d^{-1}y$, deve essere a riguardo di y ovvero $d^{0}y$, ciò che è questa a riguardo di y: esprimerà dunque $d^{-1}y$ quella quantità, sopra la quale eseguendo l'operazione di derivazione, che faceva passare y a divenire dy, faccia passare $d^{-1}y$ ad essere y.

La derivata $d^{-2}y$ sarà riguardo a $d^{-1}y$, ciò che è questa riguardo ad y, ovvero ciò che è y riguardo a dy, e così di seguito: le derivate adunque ad indice negativo s'otterranno per una operazione inversa a quella, per la quale si ottengono le derivate ad indice positivo: così per ottenere $d^{-1}y$ dovremo fare sopra y una operazione inversa a quella che facevasi per ottenere dy: intendendo per *operazione inversa* un'operazione che porti per $d^{-1}y$ un tal risultato, sopra cui eseguita l'operazione diretta di derivazione, se ne ottenga la stessa y di nuovo.

In alcuni sistemi le derivate ad *indice negativo* sono la stessa cosa che le Derivatrici, cioè $d^{-n}y = D^{n}y$.

Accade ciò in quei sistemi, nei quali la legge di derivazione appartiene al caso espresso §. 2. N°. 1. Al contrario le Derivatrici sono ben diverse dalle derivate ad indice negativo in quei sistemi, la cui legge di derivazione è contenuta nel caso §. 2. N°. 2.

Le derivate adunque ad indice negativo sono i termini della serie formata dalle derivate ad indice positivo prolungata indietro, di modo che in generale la serie sarà

$$\ldots\ldots\; d^{-4}y,\, d^{-3}y,\, d^{-2}y,\, d^{-1}y,\, d^{0}y,\, d^{1}y,\, d^{2}y,\, d^{3}y \ldots\ldots$$

§. 7. Una unità dell'indice ci mostra una operazione di derivazione da eseguirsi; conserveremo l'analogia se per un indice che sia una frazione della unità, noi indicheremo una corrispondente porzione d'operazione di derivazione da eseguirsi; così $d^{\frac{1}{2}}y$ ci indicherà che sopra y dobbiamo fare un mezzo d'operazione, cioè fare una tale operazione sopra y per avere $d^{\frac{1}{2}}y$, che ripetuta la stessa sopra $d^{\frac{1}{2}}y$, abbiasi il medesimo risultato che nel fare una intera operazione di derivazione sopra y, di modo che sia $d^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}}y = dy$.

Egualmente $d^{\frac{m}{n}}y$ essendo $n > m$, c'indicherà che sopra y dobbiamo fare una porzione $\frac{m}{n}$ d'operazione di derivazione; ciò che otterremo facendo prima sopra y una porzione $\frac{1}{n}$ d'operazione e ripetendola m volte. Questo n^{esimo} d'operazione deve essere tale che se fosse ripetuto n volte, dovrebbe dare lo stesso risultato dy, che ci dà una intera operazione di derivazione.

Nella stessa maniera $d^{m+\frac{p}{n}}y$ essendo $p < n$ sarà eguale a $d^{m}d^{\frac{p}{n}}y$, e ci indicherà che sopra y bisogna eseguire m volte l'intera operazione di derivazione, e sopra il risultato di essa bisogna eseguire la porzione $\left(\frac{p}{n}\right)_{esima}$ d'operazione di derivazione.

§. 8. Le derivate ad indice frazionario ci indicano adunque delle quantità derivate dalla funzione Derivatrice per un certo numero d'operazioni di derivazione intere, e per una porzione della detta operazione indicata dalla frazione, che si contiene nell'indice: saranno adunque da esse rappresentati i termini intermedj fra quelli della serie del §. 6.: così se fra dy e d^2y si volessero tre termini intermedj, questi sarebbero indicati come segue

$$dy, d^{\frac{5}{4}}y, d^{\frac{6}{4}}y, d^{\frac{7}{4}}y, d^{\frac{8}{4}}y = d^2y:$$

Così gl' indici essendo in progressione aritmetica, i termini sono legati fra loro per la legge di derivazione del sistema.

Si ricava da tutto questo un Teorema importante:

„ Quando la legge di derivazione è tale, che l' operazio-
„ ne per mezzo della quale si deriva una quantità dall' altra,
„ può essere fatta a porzioni in più volte, allora le derivate a
„ indice fratto sono quantità reali, perchè esistenti in natura;
„ se al contrario quella operazione non può essere, per dir co-
„ sì, divisa o concepirsi divisibile in porzioni, l'aggregato del-
„ le quali renda la stessa operazione intiera, allora di natura
„ sua non possono esistere termini o derivate a indice frazio-
„ nario, ed un problema che in un tal sistema di derivazione
„ conducesse ad una derivata ad indice fratto, dovrebbe aver-
„ si per impossibile, e converrebbe riguardare quella derivata
„ come una quantità immaginaria, che non può esistere in na-
„ tura.

L' enunciato teorema ha un uso immediato nella teoria delle interpolazioni per decidere a *priori* se l'interpolazione può aver luogo fra i termini di una serie, della quale si conosce la natura o la legge che lega i termini stessi.

„ §. 9. Proposta una qualunque quantità o una funzione
„ composta di più quantità, se essa è di tal natura, che non
„ abbia delle proprietà contrarie a quelle portate necessaria-
„ mente dall' operazione di derivazione nelle derivate, questa

„ quantità potrà sempre considerarsi come capace di formare
„ parte di quel dato sistema di derivazione, essendo essa una
„ derivata se non ad indice intero, almeno ad indice fratto;
„ e perciò se di una tal quantità fosse ricercata la Deriva-
„ trice, si può concepire esistere in natura una quantità che
„ questa stessa Derivatrice rappresenti e che soddisfaccia alla
„ nostra ricerca. Al contrario se le proprietà di una data quan-
„ tità saranno incompatibili con quelle che necessariamente de-
„ vono avere le derivate in un dato sistema, allora questa quan-
„ tità non potrà mai considerarsi come una derivata del me-
„ desimo sistema, e perciò l' indice che segnerebbe l' ordine
„ della derivata, non potrà esistere in natura: non si potrà
„ dunque immaginare una quantità che rappresenti la Deri-
„ vatrice di quella quantità proposta, e sarà in conseguenza
„ la ricerca di una tale Derivatrice, una ricerca impossibile;
„ e quella Derivatrice una quantità immaginaria.

In questo e nell' antecedente paragrafo è contenuta la sorgente generale degli immaginarj. Ciò che s' intende comunemente per quantità immaginarie non è che una classe particolare di quantità appartenenti ad un sistema particolare d' analisi derivata.

CALCOLO DELLE DIFFERENZE FINITE

CAP. I.

PRINCIPJ GENERALI DELLE DIFFERENZE E DELLE SOMME.

Differenziazione e Integrazione delle Funzioni di una sola Variabile.

§. 1. SE per y_x rappresentiamo una qualunque funzione di x, e se supponghiamo che dalla stessa funzione, quando x vi è divenuto $x+\omega$ (essendo ω una quantità qualunque costante, o più generalmente una quantità indipendente da x) cioè da $y_{x+\omega}$, si sottragga la primitiva funzione y_x, s'avrà la differenza $y_{x+\omega}-y_x$ che sarà una quantità derivata da y_x per mezzo della suddetta operazione; di modo che indicando al solito questa operazione per d, avremo

$$dy_x = y_{x+\omega} - y_x.$$

Facendo ora sopra dy_x la stessa operazione di derivazione che abbiamo fatta sopra y_x, avremo per esprimere una seconda derivata d^2y_x la quantità $dy_{x+\omega}-dy_x$, sarà cioè $d^2y_x = dy_{x+\omega}-dy_x$. Così $d^3y_x = d^2y_{x+\omega}-d^2y_x$; ed in generale $d^ny_x = d^{n-1}y_{x+\omega}-d^{n-1}y_x$.

Questo sistema di quantità derivate rappresentato simbolicamente dalla serie

$$y_x,\ dy_x,\ d^2y_x,\ \ldots\ldots\ d^ny_x$$

è conosciuto sotto il nome di calcolo delle *differenze finite* o semplicemente *delle differenze*.

Si fa uso della lettera greca Δ, come caratteristica propria di questo ramo d'Analisi, per indicare precisamente l'operazione che abbiamo quì sopra indicata per d. Le derivate poi dy_x, d^2y_x, ec. non solo per mezzo di questa nuova caratteristica si scrivono così $\Delta y_x, \Delta^2 y_x, \Delta^3 y_x$, ec., ma chiamansi anche col nome particolare di *differenze finite*, o semplicemente di *differenze*. Si chiama Δy_x la *differenza prima* di y_x; $\Delta^2 y_x$ la *differenza seconda*; $\Delta^3 y_x$ la *differenza terza*; ed in generale $\Delta^n y_x$ la differenza n^{esima} di y_x.

L'operazione di prendere le differenze dicesi *differenziare*.

Dalla natura di queste differenze risulta che la differenza seconda di y_x, cioè $\Delta^2 y_x$ è la differenza prima di Δy_x; che la differenza terza di y_x, cioè $\Delta^3 y_x$ è la differenza prima di $\Delta^2 y_x$; ed in generale la differenza n^{esima} di y_x, cioè $\Delta^n y_x$ è la differenza prima di $\Delta^{n-1} y_x$.

§. 2. Dopo tutto questo sarà facile vedere come possano aversi le differenze delle diverse funzioni di x. Supponghiamo $y_x = x^m$ ed avremo

$$\Delta y_x = y_{x+\omega} - y_x = \Delta x^m = (x+\omega)^m - x^m = mx^{m-1}\omega + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}\omega^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^{m-3}\omega^3 + \text{ec.}$$

la qual formula termina quando m è un numero intero e positivo.

Se $m=0, =1, =2, =3, =4, =5, =6$, ec. abbiamo

$\Delta x^0 = \Delta 1 = 0$

$\Delta x^1 = \omega$

$\Delta x^2 = 2x\omega + \omega^2$

$\Delta x^3 = 3x^2\omega + 3x\omega^2 + \omega^3$

$\Delta x^4 = 4x^3\omega + 6x^2\omega^2 + 4x\omega^3 + \omega^4$

$\Delta x^5 = 5x^4\omega + 10x^3\omega^2 + 10x^2\omega^3 + 5x\omega^4 + \omega^5$

$\Delta x^6 = 6x^5\omega + 15x^4\omega^2 + 20x^3\omega^3 + 15x^2\omega^4 + 6x\omega^5 + \omega^6$

ec. ec. ec. ec.

Sia ora $m = -1$, $= -2$, ec. ed avremo

$$\Delta x^{-1} = \Delta \frac{1}{x} = -\frac{\omega}{x^2} + \frac{\omega^2}{x^3} - \frac{\omega^3}{x^4} + \text{ec.}$$

$$\Delta x^{-2} = \Delta \frac{1}{x^2} = -\frac{2\omega}{x^3} + \frac{3\omega^2}{x^4} - \frac{4\omega^3}{x^5} + \text{ec.}$$

ec. ec. ec.

Egualmente se m è un numero fratto, per esempio $m = \frac{1}{3}$, abbiamo $\Delta x^{\frac{1}{3}} = \Delta\sqrt[3]{x} = \frac{\omega}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{\omega^2}{9\sqrt[3]{x^5}} + \frac{5\omega^3}{81\sqrt[3]{x^7}} - \text{ec.}$

Supponghiamo adesso $y_x = log\, x$, che più semplicemente indicheremo per lx: (si parla quì dei logaritmi iperbolici); noi avremo $\Delta y_x = \Delta lx = l(x+\omega) - lx = l\frac{x+\omega}{x}$.

Sviluppando in serie la quantità logaritmica $l(\frac{x+\omega}{x}) = l(1 + \frac{\omega}{x})$, si ha la differenza finita di lx, cioè Δlx espressa per una serie di un numero infinito di termini in questa guisa

$$\Delta lx = \frac{\omega}{x} - \frac{\omega^2}{2x^2} + \frac{\omega^3}{3x^3} - \frac{\omega^4}{4x^4} + \frac{\omega^5}{5x^5} - \text{ec.}$$

Supponghiamo $y_x = a^x$; ed avremo $\Delta a^x = a^{x+\omega} - a^x = a^x(a^\omega - 1)$; e se vogliamo questa differenza espressa in serie, basta sostituire invece di a^ω la conosciuta serie $1 +$

$\omega la + \frac{\omega^2}{2}(la)^2 + \frac{\omega^3}{2.3}(la)^3 + \text{ec.}$, ed avremo

$$\Delta a^x = \omega a^x la + \frac{\omega^2}{2} a^x (la)^2 + \frac{\omega^3}{2.3}(la)^3 + \text{ec.}$$

Egualmente le differenze prime di queste funzioni xa^x, x^2a^x, x^3a^x, x^4a^x, ec. saranno

$\Delta(xa^x) = (x+\omega)a^{x+\omega} - xa^x = xa^x(a^\omega - 1) + \omega a^\omega a^x$;

$\Delta(x^2a^x) = x^2a^x(a^\omega - 1) + 2\omega a^\omega xa^x + \omega^2 a^\omega a^x$;

$\Delta(x^3a^x) = x^3a^x(a^\omega - 1) + 3\omega a^\omega x^2a^x + 3\omega^2 a^\omega xa^x + \ldots$

$\omega^3 a^\omega a^x$;

e così delle altre.

Con la medesima facilità si hanno le differenze delle trascendenti circolari: per esempio, le differenze delle due trascendenti $sen\, x$, $cos\, x$, saranno

$\Delta\, sen\, x = sen(x+\omega) - sen\, x = sen\, x . cos\, \omega + sen\, \omega . cos\, x -$

$sen\, x$:

$\Delta\, cos\, x = cos(x+\omega) - cos\, x = cos\, x . cos\, \omega - sen\, x . sen\, \omega -$

$cos\, x$.

Per aver poi queste differenze espresse in serie ordinate secondo le potenze di ω, servirà sostituirvi le conosciute serie, che danno il valore di $sen\, \omega$, e di $cos\, \omega$, cioè fare

$$sen\, \omega = \omega - \frac{\omega^3}{2.3} + \frac{\omega^5}{2.3.4.5} - \frac{\omega^7}{2.3.4.5.6.7} + \text{ec.}$$

$$cos\, \omega = 1 - \frac{\omega^2}{1.2} + \frac{\omega^4}{1.2.3.4} - \frac{\omega^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{ec.}$$

Avremo allora

$$\Delta\, sen\, x = \omega\, cos\, x - \frac{\omega^2}{1.2} sen\, x - \frac{\omega^3}{2.3} cos\, x + \frac{\omega^4}{2.3.4} sen\, x + \ldots$$

$$\frac{\omega^5}{2.3.4.5} cos\, x - \text{ec.}$$

$$\Delta\, cos\, x = -\omega\, sen\, x - \frac{\omega^2}{2} cos\, x + \frac{\omega^3}{2.3} sen\, x + \frac{\omega^4}{2.3.4} cos\, x - \ldots$$

$$\frac{\omega^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5}sen\,x - \text{ec.}$$

Si vede come ci dovremmo regolare per trovar le differenze prime di altre funzioni più complicate.

Sia $y_x = x^m sen\,x$, ed avremo

$$\Delta y_x = (x+\omega)^m sen(x+\omega) - x^m sen\,x = cos\,\omega.(x+\omega)^m \times$$
$$sen\,x - sen\,\omega.(x+\omega)^m cos\,x - x^m sen\,x$$: facendo ora lo sviluppo di quelle potenze, troveremo

$$\Delta y_x = (cos\,\omega - 1)x^m sen\,x + cos\,\omega.\Big(\frac{m\omega x^{m-1} sen\,x}{1} + \ldots\ldots$$
$$\frac{m(m-1).\omega^2 x^{m-2} sen\,x}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)\omega^3 x^{m-3} sen\,x}{1.2.3} + \text{ec.}\Big)$$
$$+ sen\,\omega.\Big(x^m cos\,x + \frac{m\omega x^{m-1} cos\,x}{1} + \frac{m(m-1)\omega^2 x^{m-2} cos\,x}{1.2} +$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)\omega^3 x^{m-3} cos\,x}{1.2.3} + \text{ec.}\Big)$$

Sia $y_x = x^m cos\,x$, e parimente sarà

$$\Delta y_x = (cos\,\omega - 1)x^m cos\,x + cos\,\omega.\Big(\frac{m\omega x^{m-1} cos\,x}{1} + \ldots\ldots$$
$$\frac{m(m-1)\omega^2 x^{m-2} cos\,x}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)\omega^3 x^{m-3} cos\,x}{1.2.3} + \text{ec.}\Big)$$
$$- sen\,\omega\Big(x^m sen\,x + \frac{m\omega x^{m-1} sen\,x}{1} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{m(m-1)\omega^2 x^{m-2} sen\,x}{1.2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)\omega^3 x^{m-3} sen\,x}{1.2.3} + \text{ec.}\Big).$$

Supponghiamo per abbreviare

$sen\,\omega = a$; $cos\,\omega = c$; $1 - cos\,\omega = b$; ed in seguito

$$\begin{array}{l|l}
m\omega\, sen\,\omega = A, & m\omega\, cos\,\omega = M, \\
\frac{m(m-1)\omega^2 sen\,\omega}{1.2} = B, & \frac{m(m-1)\omega^2 cos\,\omega}{1.2} = N, \\
\frac{m(m-1)(m-2)\omega^3 sen\,\omega}{1.2.3} = C, & \frac{m(m-1)(m-2)\omega^3 cos\,\omega}{1.2.3} = P, \\
\text{ec.} & \text{ec.}
\end{array}$$

ed avremo

$$\Delta(x^m sen\,x) = -bx^m sen\,x + sen\,x.(Mx^{m-1} + Nx^{m-2} + Px^{m-3} + \text{ec.})$$
$$+ ax^m cos\,x + cos\,x.(Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \text{ec.})$$
$$\Delta(x^m cos\,x) = -bx^m cos\,x + cos\,x.(Mx^{m-1} + Nx^{m-2} + Px^{m-3} + \text{ec.})$$
$$- ax^m sen\,x - sen\,x.(Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \text{ec.})$$

Se noi riguardiamo in queste due ultime equazioni $x^m sen\,x$, $x^m cos\,x$ come due incognite, e supponghiamo ancora $\frac{1}{aa+bb}$ ovvero $\frac{1}{2(1-cos\,\omega)} = g$, otterremo

$$x^m sen\,x = -ag.\Delta(x^m cos\,x) - bg.\Delta(x^m sen\,x)$$
$$+ bg\, sen\,x.(Mx^{m-1} + Nx^{m-2} + Px^{m-3} + \text{ec.})$$
$$+ bg\, cos\,x.(Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \text{ec.})$$
$$+ ag\, cos\,x.(Mx^{m-1} + Nx^{m-2} + Cx^{m-3} + \text{ec.})$$
$$- ag\, sen\,x.(Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \text{ec.})$$

$$x^m \cos x = ag.\Delta(x^m \operatorname{sen} x) - bg.\Delta(x^m \cos x)$$
$$+ bg.\cos x.(Mx^{m-1} + Nx^{m-2} + Px^{m-3} + \text{ec.})$$
$$- bg.\operatorname{sen} x.(Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \text{ec.})$$
$$- ag.\operatorname{sen} x.(Mx^{m-1} + Nx^{m-2} + Px^{m-3} + \text{ec.})$$
$$- ag.\cos x.(Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \text{ec.})$$

Sia $y_x = x(x+\omega)(x+2\omega)(x+3\omega)\ldots(x+n\omega)$, essendo n un numero intero e positivo, ed avremo

$\Delta y_x = (x+\omega)(x+2\omega)(x+3\omega)(x+4\omega)\ldots(x+(n+1)\omega) - x(x+\omega)(x+2\omega)\ldots(x+n\omega)$, espressione, che si riduce a questa forma più semplice,

$$\Delta y_x = (x+\omega)(x+2\omega)(x+3\omega)\ldots(x+n\omega)(n+1)\omega \ldots (a)$$

Sia $y_x = x(x-\omega)(x-2\omega)(x-3\omega)\ldots(x-n\omega)$, ed avremo

$\Delta y_x = (x+\omega)\,x\,(x-\omega)(x-2\omega)\ldots(x-(n-1)\omega) - x(x-\omega)(x-2\omega)\ldots(x-n\omega)$ e riducendo

$$\Delta y_x = x(x-\omega)(x-2\omega)\ldots(x-(n-1)\omega).(n+1)\omega.$$

Sia ora $y_x = \frac{1}{x(x+\omega)(x+2\omega)\ldots(x+n\omega)}$ ed avremo

$$\Delta y_x = -(n+1)\omega\frac{1}{x(x+\omega)(x+2\omega)\ldots(x+(n+1)\omega)}.$$

Se ora rappresentiamo per y_x e z_x due funzioni di x, la differenza finita del loro prodotto $\Delta(y_x.z_x)$ sarà eguale a $(z_x + \Delta z_x)(y_x + \Delta y_x) - z_x.y_x$; e quindi

(*a*) Non avrebbe potuto trovarsi la differenza finita di questa funzione $1.2.3\ldots x$, (della classe di quelle, che Eulero chiama inesplicabili) se ω non fosse stato eguale all'unità. Io penso che ciò derivi dall'essere nelle funzioni inesplicabili la x variabile in vero, ma la sua variabilità soggetta ad una certa legge, per la quale essa non può ricevere gli aumenti qualunque essi siano, ciò che tacitamente si suppone nel calcolo delle differenze finite.

$$\Delta(y_x.z_x) = z_x.\Delta y_x + y_x\Delta z_x + \Delta z_x.\Delta y_x:$$

„ La differenza, cioè, del prodotto di due funzioni è eguale „ alla prima funzione moltiplicata nella differenza della seconda, „ più la seconda moltiplicata nella differenza della prima, più il „ prodotto delle due differenze „. Sentiremo in seguito l'utilità di questa regola.

§. 3. Abbiam veduto al §. 1. che le differenze seconde delle funzioni sono le differenze prime delle differenze prime di esse; che le differenze terze sono le differenze prime delle differenze seconde; che le differenze quarte sono le differenze prime delle differenze terze, e così di seguito; dunque per trovare la differenza seconda di una funzione, converrà operare sopra la differenza prima, come si è fatto sopra la funzione medesima per avere quella stessa differenza prima: per trovare la differenza terza, converrà operare sopra la differenza seconda, come si è fatto sopra la stessa funzione, e così di seguito.

Ciò premesso, si cerchino le differenze degli ordini superiori della potenza x^m.

Avendo trovato al §. antecedente $\Delta x^m = mx^{m-1}\omega + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}\omega^2 + \text{ec.}$, s'avrà, facendo y_x eguale al secondo membro di questa equazione, $\Delta^2 x^m = \Delta y_x$, e perciò

$$\Delta y_x = \Delta^2 x^m = \Delta\left(mx^{m-1}\omega + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}\omega^2 + \text{ec.}\right), \text{ ovvero } (a)$$

$$\Delta^2 x^m = m\omega\Delta x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}\omega^2\Delta x^{m-2} + \text{ec.}$$

(*a*) Nel prendere la differenza finita dell'aggregato dei termini che si trova fra le parentesi, si è presa la differenza di ciascuno dei detti termini: per dimostrare la legittimità di questa operazione s'osservi che se abbiamo una funzione y_x eguale all'aggregato di due funzioni u_x, z_x, cioè $y_x = u_x + z_x$, sarà $\Delta y_x = \Delta(z_x + u_x) = z_{x+\omega} - z_x + u_{x+\omega} - u_x$, e perciò $\Delta y_x = \Delta z_x + \Delta u_x$; dal che si vede che per prendere la differenza finita dell'aggregato di due termini, serve prendere l'aggregato delle differenze di ciascuno di questi termini.

E siccome le espressioni delle differenze prime Δx^{m-1}, Δx^{m-2}, ec. si hanno dalla formula sopra trovata per Δx^{m} col solo sostituirvi $m-1$, ovvero $m-2$, ec. invece di m, così si potrà avere il valore di $\Delta^2 x^m$ espresso per x e per ω, e per dei coefficienti numerici.

Trovata la differenza seconda, potrebbesi con lo stesso metodo trovare l'espressione della differenza terza, ed in generale di una differenza qualunque n^{esima}, cioè di $\Delta^n x^m$. Per esempio

Sia $m=1$ ed avremo $\Delta x=\omega$, $\Delta^2 x=0$, $\Delta^3 x=0$, ec.

Sia $m=2 \ldots \Delta x^2 = 2\omega x+\omega^2$, $\Delta^2 x^2 = 2\omega . \Delta x + \omega^2 \Delta 1 = 1.2\,\omega^2$,
$\Delta^3 x^2 = 0$, ec.

Sia $m=3 \ldots \Delta x^3 = 3\omega^2 x + 3\omega x^2 + \omega^3$, $\Delta^2 x^3 = 3\omega \Delta x^2 + 3\omega^2 \Delta x$,
ovvero $\Delta^2 x^3 = 6\omega^2 x + 6\omega^3$, $\Delta^3 x^3 = 1 . 2 . 3 . \omega^3$,
$\Delta^4 x^3 = 0$, ec.

Se $m=4 \ldots \Delta x^4 = 4\omega x^3 + 6\omega^2 x^2 + 4\omega^3 x + \omega^4$
$\Delta^2 x^4 = 12\omega^2 x^2 + 24\omega^3 x + 14\omega^4$
$\Delta^3 x^4 = 24\omega^3 x + 36\omega^4$
$\Delta^4 x^4 = 1 . 2 . 3 . 4 . \omega^4$
$\Delta^5 x^4 = 0$, ec.

E continuando, vedremo che

$$\Delta^m x^m = 1 . 2 . 3 . 4 \ldots . m . \omega^m , \quad \Delta^{m+1} x^m = 0, \text{ ec.}$$

In generale quando l'ordine della differenza supera l'esponente della potenza, le differenze sono nulle.

Si vogliano ora le differenze degli ordini superiori della quantità esponenziale a^x, ed avremo

$$\Delta a^x = a^x (a^\omega - 1)$$
$$\Delta^2 a^x = (a^\omega - 1) \Delta a^x = a^x (a^\omega - 1)^2$$
$$\Delta^3 a^x = a^x (a^\omega - 1)^3$$
$$\Delta^4 a^x = a^x (a^\omega - 1)^4$$

. . . .

. . . .

$$\Delta^n a^x = a^x (a^\omega - 1)^n .$$

Noi non aggiungiamo altri esempj, ma raccomandiamo ai nostri Leggitori l'esercitarsi nel differenziare funzioni più complicate di quelle, che abbiamo trattate, e che essi medesimi avranno cura di proporsi: ciò servirà e per prendere la pratica di questo calcolo, e per ben concepirne i principj.

§. 4. Un' osservazione importante riguardo alla differenziazione delle funzioni è la seguente:

Se y_x rappresenta una qualunque funzione di x, abbiamo veduto che la sua differenza è $\Delta y_x = y_{x+\omega} - y_x$: ora la differenza della funzione y_x aumentata di una quantità costante C, o più generalmente di una quantità indipendente da x, cioè la differenza prima di $y_x + C$, è egualmente $y_{x+\omega} - y_x$, poichè $\Delta (y_x + C) = y_{x+\omega} + C - y_x - C$; dunque l'operazione della differenziazione ha fatta svanire una costante; dunque in generale la differenza prima di una funzione contiene, o può considerarsi contenere una costante di meno della funzione stessa; dunque se sarà data una quantità qualunque z_x funzione di x, la quale si riguardi come una differenza prima, la funzione y_x da cui essa dipenderà, o di cui essa sarà effettivamente la differenza, potrà essere tanto una sola funzione y_x, che una funzione y_x aumentata di una costante C.

Come la differenza prima di una quantità può contenere una costante di meno della quantità stessa, così si dimostrerà che la differenza seconda di una quantità, potrà contenere due costanti di meno che la quantità stessa; la differenza terza tre costanti di meno, e così di seguito. Sia infatti da differenziarsi l'espressione $y_x + A + Bx + Cx^2 + Ex^3 + \ldots . + Mx^m$ nella quale A, B, C, ec. M sono quantità costanti. Indicando per z_x tutta questa espressione, è facile vedere che avremo

$\Delta z_x = \Delta y_x + B\Delta x + C\Delta x^2 + E\Delta x^3 + \ldots + M\Delta x^m$, ove non si trova la costante A:

$\Delta^2 z_x = \Delta^2 y_x + C\Delta^2 x^2 + E\Delta^2 x^3 + \ldots + M\Delta^2 x^m$, (poichè $\Delta^2 x = 0$) ove non si trovano le due costanti A, B:

$\Delta^3 z_x = \Delta^3 y_x + E\Delta^3 x^3 + \ldots + M\Delta^3 x^m$, che non contiene nè A, nè B, nè C; ed infine

$\Delta^m z_x = \Delta^m y_x + M\Delta^m x^m$, nella qual differenza m^{esima} non si hanno più le m costanti A, D, C, E, ec. N, che erano nell'espressione proposta per differenziarsi. L'ultima costante N è quella che nell'espressione forma il coefficiente di x^{m-1}, ed è perciò nel penultimo termine Nx^{m-1} che non abbiamo scritto.

§. 5. Riprendiamo le equazioni trovate al §. 1.

$$\Delta y_x = y_{x+\omega} - y_x$$
$$\Delta^2 y_x = \Delta y_{x+\omega} - \Delta y_x$$
$$\Delta^3 y_x = \Delta^2 y_{x+\omega} - \Delta^2 y_x$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta^n y_x = \Delta^{n-1} y_{x+\omega} - \Delta^{n-1} y_x.$$

Se nella prima ponghiamo $x+\omega$ invece di x, avremo

$\Delta y_{x+\omega} = y_{x+2\omega} - y_{x+\omega}$: ora se per mezzo di questa equazione e della prima, si prendono i valori di $\Delta y_{x+\omega}$ e di Δy_x e si sostituiscono nella seconda, troveremo

$$\Delta^2 y_x = y_{x+2\omega} - 2y_{x+\omega} + y_x.$$

Se in questa equazione ponghiamo di nuovo $x+\omega$ invece di x, s'avrà

$\Delta^2 y_{x+\omega} = y_{x+3\omega} - 2y_{x+2\omega} + y_{x+\omega}$; e sostituendo nella terza

equazione i valori di $\Delta^2 y_x$, $\Delta^2 y_{x+\omega}$, otterremo

$$\Delta^3 y_x = y_{x+3\omega} - 3y_{x+2\omega} + 3y_{x+\omega} - y_x:$$

Continuando questo ragionamento è facile vedere che

$$\Delta^n y_x = y_{x+n\omega} - ny_{x+(n-1)\omega} + \frac{n(n-1)}{2} y_{x+(n-2)\omega} - \ldots \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} y_{x+(n-3)\omega} + \text{ec.} \pm ny_{x+\omega} \mp y_x.$$

In questa formula si suppone n numero intero e positivo: i di lei coefficienti seguono la legge di quelli del binomio di Neuton.

La ritrovata espressione per $\Delta^n y_x$ può anche essere messa sotto questa forma $\Delta^n y_x = (y_{x+\omega} - 1)^n$, purchè nello sviluppo del secondo membro invece di scrivere le potenze per es. $(y_{x+\omega})^m$ si scriva $y_{x+m\omega}$, ponendo l'esponente m come coefficiente dell'ω.

Si vede adunque che le successive differenze di y_x possono esprimersi per y_x, $y_{x+\omega}$, $y_{x+2\omega}$, ec. che sono la stessa funzione y_x nella quale abbiam fatto successivamente $x+\omega$ invece di x.

Egualmente le quantità $y_{x+\omega}$, $y_{x+2\omega}$, $y_{x+3\omega}$ ec. possono esprimersi per y_x e per le differenze Δy_x, $\Delta^2 y_x$, $\Delta^3 y_x$ ec.: infatti si ha dalla prima equazione $y_{x+\omega} = y_x + \Delta y_x$; e sostituendo nell'equazione

$\Delta^2 y_x = y_{x+2\omega} - 2y_{x+\omega} + y_x$ per $y_{x+\omega}$ il ritrovato valore, avremo

$$y_{x+2\omega} = \Delta^2 y_x + 2\Delta y_x + y_x.$$

Questo valore di $y_{x+2\omega}$ sostituito nell'equazione $\Delta^3 y_x = \ldots$
$y_{x+3\omega} - 3y_{x+2\omega} + 3y_{x+\omega} - y_x$, ci darà

$$y_{x+3\omega} = \Delta^3 y_x + 3\Delta^2 y_x + 3\Delta y_x + y_x;$$

e continuando lo stesso ragionamento, troveremo

$$y_{x+n\omega} = \Delta^n y_x + n\Delta^{n-1} y_x + \frac{n(n-1)}{2}\Delta^{n-2} y_x + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} \times$$
$$\Delta^{n-3} y_x + \ldots + n\Delta y_x + y_x.$$

Anche in questa formula n deve essere numero intiero e positivo: i di lei coefficienti seguono la legge del binomio di Neuton.

La ritrovata espressione può anche ridursi a questa forma elegante $y_{x+n\omega} = (\Delta y_x + 1)^n$ purchè si scriva invece delle potenze come per es. $(\Delta y_x)^m$, la differenza m^{esima} di y_x, cioè $\Delta^m y_x$, cioè purchè l'esponente m diasi per indice alla caratteristica Δ.

Risulta da quanto abbiamo detto in questo §, che un'espressione qualunque, la quale contenga le differenze Δy_x, $\Delta^2 y_x$ ec., potrà sempre cangiarsi in un'altra, che non contenga più quelle differenze, ma le quantità y_x, $y_{x+\omega}$, $y_{x+2\omega}$ ec., e viceversa si potranno eliminare queste ultime quantità da una espressione, col sostituirvi i loro valori dati in Δy_x, $\Delta^2 y_x$, $\Delta^3 y_x$ ec.

Le due formule assegnate per esprimere $\Delta^n y_x$ ed $y_{x+n\omega}$ sono state ritrovate per mezzo dell'analogia: non sarà discaro alle persone che amano il rigore geometrico nelle dimostrazioni, il vedere dimostrate queste formule direttamente: noi per questo rimandiamo i nostri Lettori al §. 23.

§. 6. Nell' equazione $\Delta y_x = y_{x+\omega} - y_x$ si faccia $x+\omega$ invece di x, ed avremo $\Delta y_{x+\omega} = y_{x+2\omega} - y_{x+\omega}$: egualmente facendo in quest' ultima equazione $x+\omega$ invece di x, avremo

$\Delta y_{x+2\omega} = y_{x+3\omega} - y_{x+2\omega}$: così troveremo

$\Delta y_{x+3\omega} = y_{x+4\omega} - y_{x+3\omega}$ ed in generale

$\Delta y_{x+(n-1)\omega} = y_{x+n\omega} - y_{x+(n-1)\omega}$.

Dunque le espressioni Δy_x, $\Delta y_{x+\omega}$, $\Delta y_{x+2\omega}$ ec.,

$\Delta y_{x+(n-1)\omega}$ rappresentano le differenze prime dei termini di questa serie

(A) .... $y_x, y_{x+\omega}, y_{x+2\omega}, y_{x+3\omega}, \ldots y_{x+n\omega}$.

Dall' equazione $\Delta^2 y_x = \Delta y_{x+\omega} - \Delta y_x$ per un medesimo ragionamento si dedurrà, che le espressioni $\Delta^2 y_x$, $\Delta^2 y_{x+\omega}$, $\Delta^2 y_{x+2\omega}$ ec. rappresentano le differenze prime dei termini di questa serie

(B) .... $\Delta y_x, \Delta y_{x+\omega}, \Delta y_{x+2\omega}, \Delta y_{x+3\omega}, \ldots$

che è composta delle differenze prime della serie (A): esse adunque esprimeranno le differenze seconde della stessa serie (A); e così di seguito.

Ecco la tabella di queste differenti serie che servirà di schiarimento a quanto si è detto:

Serie	y_x,	$y_{x+\omega}$,	$y_{x+2\omega}$,	$y_{x+3\omega}$,	$y_{x+4\omega}$, ...
Diff. prime	Δy_x,	$\Delta y_{x+\omega}$,	$\Delta y_{x+2\omega}$,	$\Delta y_{x+3\omega}$, ...	
Diff. seconde	$\Delta^2 y_x$,	$\Delta^2 y_{x+\omega}$,	$\Delta^2 y_{x+2\omega}$, ...		
Diff. terze	$\Delta^3 y_x$,	$\Delta^3 y_{x+\omega}$, ...			
Diff. quarte	$\Delta^4 y_x$, ...				
	ec.	ec.	ec.	ec.	

E se in questa tabella si fa $x = 0$, $\omega = 1$, avremo

Serie	y_0,	y_1,	y_2,	y_3,	y_4,	y_5, ...
Diff. prime	Δy_0,	Δy_1,	Δy_2,	Δy_3,	Δy_4, ...	
Diff. seconde	$\Delta^2 y_0$,	$\Delta^2 y_1$,	$\Delta^2 y_2$,	$\Delta^2 y_3$, ...		
Diff. terze	$\Delta^3 y_0$,	$\Delta^3 y_1$,	$\Delta^3 y_2$, ...			
Diff. quarte	$\Delta^4 y_0$,	$\Delta^4 y_1$				
	ec.	ec.	ec.	ec.		

Nelle quali tabelle cominciando dalla serie delle prime differenze, un termine qualunque è eguale alla differenza dei due che gli stanno immediatamente al di sopra: così $\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2$.

Avremo in seguito opportunità di fare osservare quanto è interessante nella Teoria delle serie la considerazione delle differenze dei loro termini.

§. 7. Se y_x o semplicemente y rappresenta una funzione esplicita di x, vale a dire se y rappresenta una espressione analitica formata di x in una maniera determinata e conosciuta, abbiamo veduto come possano trovarsi le differenze $\Delta y, \Delta^2 y, \Delta^3 y$, ec. della medesima funzione y.

Trattiamo adesso il caso nel quale y è una funzione implicita di x, nel quale cioè y è dato in x per mezzo di una equazione fra x e y; di modo che si richiede la risoluzione di un'equazione per avere la forma determinata della detta funzione.

Sia $\varphi(x,y)=0$ un' equazione qualunque fra due variabili x,y: Per $\varphi(x,y)$ noi intendiamo una qualunque funzione di x e di y. Una di queste due variabili è funzione dell' altra, e noi considereremo y funzione della x.

Ciò premesso siccome delle due indeterminate x,y, fra le quali esiste la sola equazione $\varphi(x,y)=0$, una, la x per es., dipende affatto dal nostro arbitrio, quindi è che detta equazione avrà luogo per tutti i valori possibili di x: essa in conseguenza sussisterà ancorchè invece di x vi si ponga $x+\omega$; e per ogni valore particolare, che daremo ad x, avremo un particolare corrispondente valore per la y.

Siccome y è una funzione implicita di x, indichiamola come superiormente per y_x: la nostra equazione diverrà $\varphi(x,y_x)=0$: se ora ponghiamo in questa equazione $x+\omega$ invece di x, avremo l'equazione $\varphi(x+\omega, y_{x+\omega})=0$, ovvero $\varphi(x+\omega, y_x+\Delta y_x)=0$, la quale sussisterà insieme con la proposta. La risoluzione di questa equazione ci darà Δy_x espresso in x,y,ω, vale a dire la differenza prima della y_x funzione implicita di x: dunque per avere la differenza prima di una funzione y implicita di x, si sostituirà nell' equazione, che determina quella funzione, $x+\omega$ invece di x,

e $y+\Delta y$ invece di y; quindi per mezzo della nuova equazione che ne risulta, si determinerà Δy.

Abbiasi per es. l' equazione $y^2+by=ax^2+cx+e$, e si voglia trovare la differenza finita della funzione y: avremo secondo la prescritta regola, questa nuova equazione

$(y+\Delta y)^2+b(y+\Delta y)=a(x+\omega)^2+c(x+\omega)+e$, ovvero $y^2+by+(\Delta y)^2+(2y+b)\Delta y=ax^2+cx+e+a\omega^2+(2ax+c)\omega$; ed osservando che $y^2+by=ax^2+cx+e$, troveremo per determinare Δy questa equazione più semplice

$(\Delta y)^2+(2y+b)\Delta y=a\omega^2+(2ax+c)\omega$, dalla quale otterremo $\Delta y=-\frac{2y+b}{2}\pm\sqrt{(d\omega^2+(2ax+c)\omega+(\frac{2y+b}{2})^2)}$.

§. 8. Nella stessa guisa potremo avere la differenza seconda $\Delta^2 y$: infatti la proposta $\varphi(x,y_x)=0$, ci ha dato $\varphi(x+\omega,y_{x+\omega})=0$, e questa, ponendovi $x+\omega$ invece di x, ci dà $\varphi(x+\ldots 2\omega, y_{x+2\omega})=0$.

Ora se in quest' ultima equazione ponghiamo invece di $y_{x+2\omega}$ il suo valore $y_x+2\Delta y_x+\Delta^2 y_x$, avremo l'equazione $\varphi(x+2\omega, y_x+2\Delta y_x+\Delta^2 y_x)=0$, che risoluta, ci darà $\Delta^2 y_x$, espresso per $y_x, \Delta y_x, x, \omega$; e ponendo per Δy_x il suo valore in x, y_x ed ω, ottenuto per la regola del §. antecedente, troveremo infine la differenza seconda $\Delta^2 y_x$ della funzione implicita y_x della variabile x espressa per x,y_x ed ω. Col medesimo ragionamento si potrebbero trovare le differenze degli ordini superiori.

§. 9. Il principio, che serve di base al metodo di trovare le differenze delle funzioni implicite, principio che abbiamo dimostrato al §. 7., è il seguente: sussistendo fra x ed y una equazione qualunque (è per noi lo stesso y ed y_x: si scrive o l' una, o l'altra espressione di funzione, secondo il bisogno)

(1) . . . $\varphi(x,y_x)=0$ sussistono ed hanno luogo insieme con essa le equazioni

(2) ... $\varphi(x+\omega, y_{x+\omega}) = 0$, ovvero (2)' ... $\varphi(x+\omega, y+\Delta y) = 0$

(3) ... $\varphi(x+2\omega, y_{x+2\omega}) = 0$, ovvero (3)' ... $\varphi(x+2\omega, y+2\Delta y+\Delta^2 y) = 0$

(4) ... $\varphi(x+3\omega, y_{x+3\omega}) = 0$, ovvero (4)' ... $\varphi(x+3\omega, y+3\Delta y+3\Delta^2 y+\Delta^3 y) = 0$

. . . .

. . . .

($n+1$) ... $\varphi(x+n\omega, y_{x+n\omega}) = 0$, ovvero ($n+1$)' ... $\varphi(x+n\omega, y+n\Delta y+\frac{n(n-1)}{2}\Delta^2 y+\ldots\ldots+n\Delta^{n-1}y+\Delta^n y) = 0$.

Ora sussistendo ciascuna di queste equazioni nello stesso tempo che sussiste la proposta, apparterrà ciascuna alla medesima relazione di variabili x, y, cui appartiene la proposta medesima, e potrà per conseguenza tenere il suo luogo. Lo stesso varrà ancora per qualunque combinazione delle stesse equazioni, che sarà sempre un'equazione, la quale potrà tenere il luogo della proposta.

Una combinazione poi delle due equazioni (1), (2) ovvero delle (1), (2)' dicesi un'equazione alle differenze prime: una combinazione delle tre equazioni (1), (2), (3), ovvero (1), (2)', (3)' dicesi una equazione alle differenze seconde: una combinazione delle quattro equazioni (1), (2), (3), (4), o che è lo stesso delle (1), (2)', (3)', (4)' si chiama una equazione alle differenze quarte, ed in generale una combinazione qualunque delle equazioni (1), (2), (3) ... ($n+1$), ovvero (1), (2)', (3)', ... ($n+1$)' si chiama una equazione alle differenze n^{esime}.

Si vede adunque che una equazione alle differenze prime deve contenere il Δy, ovvero la funzione $y_{x+\omega}$: una equazione alle differenze seconde deve contenere la differenza seconda $\Delta^2 y$, ovvero $y_{x+2\omega}$; ed in generale un'equazione alle differenze n^{esime} deve contenere la differenza n^{esima} $\Delta^n y$, ovvero la funzione $y_{x+n\omega}$; e qualunque di queste equazioni alle differenze appartiene alla stes-

sa relazione di variabili cui appartiene la proposta; essa adunque potrà farne le veci, ed alcune volte esserci di sommo vantaggio nella soluzione dei problemi.

§. 10. Le diverse combinazioni che possiamo fare con le superiori equazioni sono infinite di numero, noi però ne considereremo particolarmente due sorte: la prima consiste nella successiva sottrazione di quelle equazioni, e la seconda nell' eliminazione di quantità costanti. Ciò che diremo delle equazioni (1), (2), (3), ec. vale anche per l' equazioni (1), (2)', (3)', ec. che quantunque diverse di forma, sono in sostanza la stessa cosa.

Se dall' equazione (2) si sottrae l'equazione (1), avremo con questa combinazione un' equazione

$\varphi(x+\omega, y_{x+\omega}) - \varphi(x, y_x) = 0$ alle differenze prime, la quale si chiama la *differenza prima* della proposta $\varphi(x, y_x) = 0$.

Se dall' equazione (3) si sottrae la (2), s' avrà

$\varphi(x+2\omega, y_{x+2\omega}) - \varphi(x+\omega, y_{x+\omega}) = 0$; e sottraendo da quest' ultima equazione la trovata differenza prima, avremo con questa nuova combinazione, un' equazione alle differenze seconde

$\varphi(x+2\omega, y_{x+2\omega}) - 2\varphi(x+\omega, y_{x+\omega}) + \varphi(x, y_x) = 0$, la quale si chiama la *differenza seconda* della proposta $\varphi(x, y_x) = 0$.

Sottraendo dall' equazione (4) l' equazione (3), si ha

$\varphi(x+3\omega, y_{x+3\omega}) - \varphi(x+2\omega, y_{x+2\omega}) = 0$, dalla quale sottratta l' equazione $\varphi(x+2\omega, y_{x+2\omega}) - \varphi(x+\omega, y_{x+\omega}) = 0$, si ha

$\varphi(x+3\omega, y_{x+3\omega}) - 2\varphi(x+2\omega, y_{x+2\omega}) + \varphi(x+\omega, y_{x+\omega}) = 0$:

se ora da quest' ultima equazione si sottrae la differenza seconda, qui sopra trovata, s' avrà con questa combinazione un' equazione alle differenze terze

$\varphi(x+3\omega, y_{x+3\omega}) - 3\varphi(x+2\omega, y_{x+2\omega}) + 3\varphi(x+\omega, y_{x+\omega}) - \varphi(x, y_x) = 0$, la quale si chiama la *differenza terza* della proposta $\varphi(x, y_x) = 0$: così la *differenza quarta* è

$\varphi(x+4\omega, y_{x+4\omega}) - 4\varphi(x+3\omega, y_{x+3\omega}) + 6\varphi(x+2\omega, y_{x+2\omega})$
$- 4\varphi(x+\omega, y_{x+\omega}) + \varphi(x, y_x) = 0$: si vede facilmente quali in generale sarebbero l' equazioni, che esprimerebbero le differenze degli ordini superiori di una qualunque equazione $\varphi(x,y)=0$ fra le due variabili x ed y; poichè ridotta l' equazione ad avere il secondo membro eguale a zero, si tratta il primo come una semplice funzione dell' x, prendendone le differenze finite per mezzo delle formule del §. 5.

Per esempio ridotta l' equazione, proposta al §. 7, a questa forma $y^2_x + by_x - ax^2 - cx - e = 0$, si avrà la sua differenza prima così espressa

$$(y_{x+\omega})^2 + by_{x+\omega} - a(x+\omega)^2 - c(x+\omega) - e - y^2_x - by_x + ax^2 + cx + e = 0$$

ovvero

$$(y_{x+\omega})^2 + by_{x+\omega} - by_x - y^2_x - a\omega^2 - (2ax+c)\,\omega = 0$$

La sua differenza seconda sarà

$$(y_{x+2\omega})^2 + by_{x+2\omega} - a(x+2\omega)^2 - c(x+2\omega) - e - \ldots\ldots \Big((y_{x+\omega})^2 + by_{x+\omega} - a(x+\omega)^2 - c(x+\omega) - e\Big)\,2 + y^2_x + by_x - ax^2 - cx - e = 0$$

ovvero

$$(y_{x+2\omega})^2 + by_{x+2\omega} - 2\Big((y_{x+\omega})^2 + by_{x+\omega}\Big) + y^2_x + by_x - 2a\omega^2 = 0$$

Eseguendo le combinazioni di sottrazione suddette sopra le equazioni (1), (2)′, (3)′ ec. s' otterrebbero altre formule per esprimere le differenze prima, seconda ec. d' una equazione proposta: queste formule sarebbero però quelle stesse nelle quali si cangiano le ritrovate superiormente, allorchè vi si sostituisce $y + \Delta y$ per $y_{x+\omega}$; $y + 2\Delta y + \Delta^2 y$ per $y_{x+2\omega}$ e così di seguito.

§. 11. Se l' equazione (1) del §. 9, contiene alcune costanti

a, b, c, ec. queste si ritrovano inalterate nelle equazioni (2), (3), ec., e se per mezzo delle due equazioni (1), (2) eliminiamo una di queste costanti, a per es., s' avrà con questa combinazione un' equazione in x, y_x e $y_{x+\omega}$ alle differenze prime, la quale conterrà una costante di meno che l' equazione proposta $\varphi(x,y)=0$.

Se per mezzo delle tre equazioni (1), (2), (3) eliminiamo due costanti a, b, otterremo una equazione alle differenze seconde in $x, y_x, y_{x+\omega}, y_{x+2\omega}$, la quale conterrà due costanti di meno che l' equazione (1); ed in generale potremo per mezzo delle equazioni (1), (2), ... $(n+1)$ eliminare dalla proposta un numero m di costanti, ed ottenere un' equazione alle differenze m^{esime}, la quale contenga un numero m di costanti di meno della proposta.

Dunque data una equazione fra due variabili x, y e quante si vogliono costanti, si può sempre ottenere una nuova equazione che esprima l' istessa relazione fra le variabili, e che contenga un certo numero di costanti di meno della data medesima: questa nuova equazione però sarà un' equazione alle differenze, ed il di lei ordine sarà eguale al numero delle costanti che avremo eliminate.

Per esempio vogliasi avere un' altra equazione che appartenga alla stessa relazione di variabili, cui appartiene $y^2 = ax$, e non contenga la costante a.

Si faccia nell' equazione proposta $x+\omega$ invece di x, ed avremo allora queste due equazioni che sussistono nello stesso tempo $y^2_x = ax$, $(y_{x+\omega})^2 = a(x+\omega)$.

Cavando dalla prima il valore di a, e sostituendolo nella seconda, avremo $x(y_{x+\omega})^2 = y^2_x\,(x+\omega)$, equazione alle *differenze prime*: questa equazione può tenere luogo della proposta, e non contiene la costante a.

L' equazione trovata alle differenze prime, è molto più generale di quella da cui è stata dedotta: l' una e l' altra appartengono invero ad una parabola Apolloniana; la prima però e l' equazione di una parabola il cui parametro è a; e la seconda appartiene a tutte le parabole Apolloniane qualunque ne sia il parametro; essa ci dà una proprietà di queste curve, ma indipendente dal parametro, cioè che i quadrati delle ordinate sono proporzionali alle ascisse corrispondenti.

§. 12. La differenza n^{esima} di y_x è rappresentata per $\Delta^n y_x$, e considerando il calcolo delle differenze secondo i principj fondamentali dell' Analisi Derivata, questa differenza è una derivata n^{esima} indicata generalmente da $d^n y_x$.

Se noi ora rappresentiamo una tal derivata n^{esima} per z_x, avremo $z_x = d^n y_x$; e questa equazione (Princ. ec. §. 3, 4) conduce subito a quest' altra $y_x = \mathrm{D}^n z_x$, la quale ci dice, che per avere y_x conviene prendere la Derivatrice n^{esima} di z_x.

L' Analisi Derivata diretta consiste nella ricerca delle derivate di una data funzione, e l' inversa in quella delle Derivatrici.

In questo particolare sistema di derivate il calcolo inverso si chiama *Calcolo Sommatorio*, o *Calcolo delle Somme*, o *degli Integrali finiti*; noi adopreremo più sovente il nome di *Calcolo delle Somme*: le Derivatrici si chiamano *Somme*, o *Integrali finiti*, e si adopra ordinariamente la lettera greca Σ invece della D.

Noi adunque non parleremo d' ora in avanti che di differenze e di somme, e tutto ciò che abbiamo detto (Princ. ec. §. 3, 4) rapporto alle Derivatrici ha luogo parola a parola per le somme. Data pertanto una funzione u_x di x, che noi indicheremo semplicemente per u, appartiene al calcolo delle differenze il trovare le espressioni di $\Delta u, \Delta^2 u, \Delta^3 u$, ec., ed appartiene al calcolo delle somme il trovare le somme $\Sigma u, \Sigma^2 u, \Sigma^3 u$, ec. della stessa funzione u.

Queste espressioni $\Sigma u, \Sigma^2 u$, ec. si chiamano le somme *Prima*, *Seconda*, ec. della funzione u; esse ci indicano quelle quantità, le differenze delle quali ci danno la funzione u, poichè u è la differenza prima di Σu, la differenza seconda di $\Sigma^2 u$, la differenza terza di $\Sigma^3 u$, ed è in generale la differenza n^{esima} di $\Sigma^n u$, cioè $u = \Delta^n \Sigma^n u$.

L' operazione per prendere le somme, indicata da Σ, dicesi *Integrazione*, o *Somma*, e diciamo *Integrare*, o *Sommare* il fare quest' operazione: essa disfà ciò che ha fatto l' operazione per

prendere le differenze, ed in questo senso l' una è l' inversa dell' altra.

Se per z_x funzione di x s' indica una differenza n^{esima} di un' altra funzione y_x, sarà viceversa y_x la somma o l' integrale n^{esimo} di z_x: considerando il primo rapporto che lega le due funzioni z_x, y_x abbiamo fra di esse quest' equazione

(A) .... $z_x = \Delta^n y_x$: considerando il secondo rapporto, le dette due funzioni sono legate per quest' altra equazione

(B) .... $y_x = \Sigma^n z_x$: le due equazioni (A), (B) sussistono nello stesso tempo: esse sono una l' inversa dell' altra, e data l' equazione (A) se ne deduce subito l' equazione (B), come pure data l' equazione (B), se ne deduce subito l' equazione (A).

§. 13. Sia ora proposto il polinomio intiero $a + bx + cx^2 + \ldots + px^m$, e di questo se ne cerchi la somma prima, o si cerchi quella quantità, di cui la differenza prima renda lo stesso polinomio.

Se per y_x rappresentiamo la quantità ricercata, avremo $y_x = \Sigma(a + bx + cx^2 + \ldots\ldots + px^m)$, ovvero essendo costanti i coefficienti $a, b, c, \ldots p$, ed essendo $a = ax^0$, (a)

(a) Noi abbiamo tacitamente supposto che nel prendere l' integrale finito del polinomio serva prendere separatamente l' integrale di ciascuno dei suoi termini: per dimostrar tutto questo si osservi (§. 3.) che dall' equazione $\Delta(u_x + z_x) = \Delta u_x + \Delta z_x$, si deduce subito quest' altra $u_x + z_x = \Sigma(\Delta u_x + \Delta z_x)$; ma $u_x = \Sigma\Delta u_x$, $z_x = \Sigma\Delta z_x$; dunque $\Sigma(\Delta u_x + \Delta z_x) = \Sigma\Delta u_x + \Sigma\Delta z_x$; e facendo $\Delta u_x = m_x$, $\Delta z_x = n_x$, s' avrà $\Sigma(m_x + n_x) = \Sigma m_x + \Sigma n_x$.

Dimostrato che l' integrale dell' aggregato di due funzioni è lo stesso che l' aggregato dei due integrali delle dette funzioni, se ne dedurrà che l' integrale dell' aggregato di tre funzioni è lo stesso che l' aggregato dei tre integrali di ciascuna di quelle funzioni, e così di seguito.

$$y_x = a\Sigma x^0 + b\Sigma x + c\Sigma x^2 + \ldots + p\Sigma x^m :$$

Dunque per avere la somma del proposto polinomio, bisogna conoscere le somme delle semplici potenze della variabile x, cioè $\Sigma x^0, \Sigma x, \Sigma x^2$, ec. Ecco come si hanno queste somme. Abbiamo trovato al §. 2. $\Delta x = \omega$, ed una tale equazione, secondo ciò che si è detto al §. antecedente, ci dà quest' altra equazione $x = \Sigma\omega = \omega\Sigma 1 = \omega\Sigma x^0$, dalla quale si ricava $\Sigma x^0 = \frac{x}{\omega}$.

Parimente l' equazione $\Delta x^2 = 2\omega x + \omega^2$, ci dà $x^2 = 2\omega\Sigma x + \omega^2\Sigma x^0 = 2\omega\Sigma x + \omega x$, (avendo sostituito $\frac{x}{\omega}$ invece di Σx^0) e da questa equazione si ricava $\Sigma x = \frac{x^2}{2\omega} - \frac{x}{2} = \frac{x(x-\omega)}{2\omega}$.

L' equazione $\Delta x^3 = 3\omega x^2 + 3\omega^2 x + \omega^3$ ci dà $x^3 = 3\omega\Sigma x^2 + 3\omega^2\Sigma x + \omega^3\Sigma x^0$, dalla quale si ricava

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3\omega} - \frac{x^2}{2} + \frac{\omega x}{2.3} = \frac{x(x-\omega)(2x-\omega)}{2.3.\omega}.$$

L' equazione $\Delta x^4 = 4\omega x^3 + 6\omega^2 x^2 + 4\omega^3 x + \omega^4$ ci dà $x^4 = 4\omega\Sigma x^3 + 6\omega^2\Sigma x^2 + 4\omega^3\Sigma x + \omega^4\Sigma x^0$, da cui si deduce

$$\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4\omega} - \frac{x^3}{2} + \frac{\omega x^2}{4} = \frac{x^2(x-\omega)^2}{4\omega} :$$

Nella stessa maniera si troveranno le somme delle altre potenze, ed avremo

$$\Sigma x^4 = \frac{x^5}{5\omega} - \frac{x^4}{2} + \frac{\omega x^2}{3} - \frac{\omega x^3}{30}$$

$$\Sigma x^5 = \frac{x^6}{6\omega} - \frac{x^5}{2} + \frac{5x^4\omega}{12} - \frac{x^2\omega^3}{12}$$

e così di seguito.

Ma per avere in generale la somma di x^m supponghiamo

$\Sigma x^m = Ax^{m+1} + Bx^m + Cx^{m-1} +$ ec. Ora questa equazione ci dà (§. 13.)

$x^m = A\Delta x^{m+1} + B\Delta x^m + C\Delta x^{m-1} +$ ec. ovvero prendendo le respettive differenze

$$x^m = A(m+1)\omega x^m + A\frac{(m+1)m}{2}\omega^2 x^{m-1} + \ldots\ldots$$
$$A\frac{(m+1)(m)(m-1)}{2.3}\omega^3 x^{m-2} + \text{ec.}$$
$$+ Bm\omega x^{m-1} + \ldots\ldots$$
$$B\frac{m(m-1)}{2}\omega^2 x^{m-2} + \text{ec.}$$
$$+ C(m-1)\omega x^{m-2} + \text{ec.}$$

dunque $A = \frac{1}{(m+1)\omega}$, $B = -\frac{A(m+1)\omega}{2} = -\frac{1}{2}$,

$$C = -\frac{A(m+1)m}{2.3}\omega^2 - \frac{Bm}{2}\omega,$$

$$D = -\frac{A(m+1)m(m-1)}{2.3.4}\omega^3 - \frac{Bm(m-1)}{2.3}\omega^2 - \frac{C(m-1)}{2}\omega$$

ec.

Sia per es. $m = 3$, e sarà

$$y_x = \Sigma(a + bx + cx^2 + ex^3) = a\Sigma 1 + b\Sigma x + c\Sigma x^2 + e\Sigma x^3;$$

Sostituendo ora i ritrovati valori delle somme $\Sigma 1, \Sigma x$ ec., s' avrà la ricercata somma così espressa

$$y_x = \left(\frac{a}{\omega} - \frac{b}{2} + \frac{c\omega}{6}\right)x + \left(\frac{b}{2\omega} - \frac{c}{2} + \frac{e\omega}{4}\right)x^2 + \left(\frac{c}{3\omega} - \frac{e}{2}\right)x^3 + \frac{ex^4}{4\omega}.$$

A questa somma y_x conviene aggiungere una costante C, poichè (§. 4.) la differenza prima di $y_x + C$ è la stessa che quella di y_x; e siccome sopra questa quantità rappresentata da C, non si determina cosa alcuna, così essa rimane al nostro arbitrio, e può ricevere quel valore che a noi piace, purchè sia sempre indipendente da x. Si dà poi il nome di *Somma Completa*, o d' integrale *Finito Completo* alla somma, cui si è aggiunta la costante arbitraria: così la somma completa del proposto polinomio è $y_x + C$, prendendo per y_x la ritrovata espressione.

§. 14. Si voglia adesso la somma completa della funzione $x(x+\omega)(x+2\omega)\ldots(x+n\omega)$.

Siccome abbiamo trovato al §. 2.

$$\Delta(x(x+\omega)(x+2\omega)\ldots\ldots(x+n\omega)) = (n+1)\omega(x+\omega)(x+2\omega)\ldots(x+n\omega)$$

così s'avrà subito (§. 12.)

$$\Sigma((x+\omega)(x+2\omega)\ldots\ldots(x+n\omega)) = \frac{x(x+\omega)(x+2\omega)\ldots\ldots(x+n\omega)}{(n+1)\omega};$$

E ponendo in questa equazione $x-\omega$ invece di x, avremo

$$\Sigma(x(x+\omega)(x+2\omega)\ldots\ldots(x+(n-1)\omega)) = \frac{(x-\omega)x(x+\omega)\ldots\ldots(x+(n-1)\omega)}{(n+1)\omega}:$$

Ora essendo n un numero intiero qualunque, si ponga $n+1$ invece di n, ed otterremo infine la ricercata somma completa così espressa

$$\Sigma(x(x+\omega)(x+2\omega)\ldots\ldots(x+n\omega)) = \frac{(x-\omega)x(x+\omega)\ldots\ldots(x+n\omega)}{(n+2\omega)} + C,$$

indicando per C la costante arbitraria.

Con egual facilità si ha la somma completa della frazione $\frac{A}{x(x+\omega)(x+2\omega)\ldots\ldots(x+n\omega)}$ nella quale A è una quantità costante, ed n un numero intiero. Infatti essendo

$$\Delta\frac{1}{x(x+\omega)(x+2\omega)\ldots\ldots(x+n\omega)} = -(n+1)\omega\frac{1}{x(x+\omega)(x+2\omega)\ldots\ldots(x+(n+1)\omega)}$$

avremo

$$\Sigma\frac{1}{x(x+\omega)(x+2\omega)\ldots\ldots(x+(n+1)\omega)} = -\frac{1}{(n+1)\omega(x)(x+\omega)(x+2\omega)\ldots\ldots(x+n\omega)};$$

e ponendo in quest'equazione $n-1$ invece di n, e quindi moltiplicandola per A, troveremo

$$\Sigma\frac{A}{x(x+\omega)(x+2\omega)\ldots\ldots(x+n\omega)} = -\frac{A}{n\omega x(x+\omega)(x+2\omega)\ldots(x+(n-1)\omega)}:$$

Il secondo membro di questa equazione sarà la somma della proposta frazione, cui aggiungeremo la costante C per renderla completa.

Per avere la somma completa del prodotto $x(x-\omega)(x-2\omega)\ldots\ldots(x-n\omega)$ si prenda l'equazione ottenuta al §. 2.

$$\Delta(x(x-\omega)(x-2\omega)\ldots\ldots(x-n\omega)) = x(x-\omega)(x-2\omega)\ldots(x-(n-1)\omega)(n+1)\omega:$$

Si deduce subito da essa

$$\Sigma x(x-\omega)\ldots(x-(n-1)\omega) = \frac{x(x-\omega)(x-2\omega)\ldots\ldots(x-n\omega)}{(n+1)\omega},$$

nella quale ponendo $n+1$ invece di n, ed aggiungendo al secondo membro una costante arbitraria, si trova

$$\Sigma x(x-\omega)(x-2\omega)\ldots(x-n\omega) = \frac{x(x-\omega)(x-2\omega)\ldots\ldots(x-(n+1)\omega)}{(n+2)\omega}.$$

Così facendo

$n=0$ si ha $\Sigma x = \frac{x(x-\omega)}{2\omega} + C$

$n=1\ldots\ldots \Sigma x(x-\omega) = \frac{x(x-\omega)(x-2\omega)}{3\omega} + C$

$n=2\ldots\ldots \Sigma x(x-\omega)(x-2\omega) = \frac{x(x-\omega)(x-2\omega)(x-3\omega)}{4\omega} + C$

$n=3\ldots\ldots \Sigma x(x-\omega)(x-2\omega)(x-3\omega) = \frac{x(x-\omega)(x-2\omega)(x-3\omega)(x-4\omega)}{5\omega} + C$

ec. ec. ec.

L'integrazione delle potenze di x può ancora ridursi all'integrazione di queste funzioni: cerchiamo per es. il valore di Σx^3.

Facendo $x^3 = x(x-\omega)(x-2\omega) + Ax(x-\omega) + B$ avremo per determinare A, B quest' equazioni $A - 3\omega = 0$, $B - A\omega + 2\omega = 0$, e sarà allora

$$\Sigma x^3 = \Sigma x(x-\omega)(x-2\omega) + A\Sigma x(x-\omega) + B\Sigma x.$$

In generale per avere Σx^{n+1} (n è supposta intiera e positiva) facciamo

$$\begin{aligned} x^{n+1} = {} & x(x-\omega)(x-2\omega) \ldots\ldots (x-n\omega) + \\ & Ax(x-\omega)(x-2\omega) \ldots\ldots (x-(n-1)\omega) + \\ & Bx(x-\omega)(x-2\omega) \ldots (x-(n-2)\omega) + \\ & Cx(x-\omega)(x-2\omega) \ldots (x-(n-3)\omega) + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & Px(x-\omega) + \\ & Qx, \end{aligned}$$

e la difficoltà sarà ridotta a trovare i coefficienti A, B, C ec.

Per questo io osservo che

$$\begin{aligned} x(x-\omega)(x-2\omega)\ldots(x-n\omega) &= x^{n+1} - a'x^{n} + a''x^{n-1} - a'''x^{n-2} + \ldots \pm a^{(n)}x \\ x(x-\omega)(x-2\omega)\ldots(x-(n-1)\omega) &= x^{n} - b'x^{n-1} + b''x^{n-2} + \ldots \mp b^{(n-1)}x \\ x(x-\omega)(x-2\omega)\ldots(x-(n-2)\omega) &= x^{n-1} - c'x^{n-2} + \ldots \pm c^{(n-2)}x \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x(x-\omega) &= x^2 - \omega x \\ x &= x \end{aligned}$$

(le quantità a', a'', ec., b', b'', ec., ec. si ritrovano facilmente per mezzo della moltiplicazione) e perciò avremo le equazioni seguenti $A - a' = 0$; $B - Ab' + a'' = 0$; $C - Bc' + Ab'' - a''' = 0$; ec. dalle quali ricaveremo i valori di A, B, C, ec.

La natura dei fattori che entrano in quei prodotti facilita moltissimo la ricerca delle quantità a', a'', ec., b', b'', ec., ec.

Infatti dalla Teoria dell'equazioni abbiamo

$$a' = \omega + 2\omega + 3\omega + 4\omega + \ldots + n\omega = \omega(1+2+3+4+\ldots+n):$$

Ora secondo ciò che diremo al §. 16., $1+2+3+\ldots+n = \Sigma(n+1)$; dunque

$a' = \omega\Sigma(n+1)$, ed in conseguenza $b' = \omega\Sigma n$, $c' = \omega\Sigma(n-1)$, ec.

Egualmente

$$\begin{aligned} a'' = {} & \omega^2(n(1+2+3+\ldots(n-1)) + (n-1)(1+2+3\ldots+(n-2)) + (n-2)(1+2+3+\ldots+(n-3)) + \ldots + 2\cdot 1) \\ = {} & \omega^2(n\Sigma n + (n-1)\Sigma(n-1) + (n-2)\Sigma(n-2)\ldots) = \omega^2\Sigma(n+1)\Sigma(n+1); \end{aligned}$$

$a''' = \omega^3\Sigma(n+1)\Sigma(n+1)\Sigma(n+1)$, ec. ec., ed in conseguenza

$b'' = \omega^2\Sigma n\Sigma n$, $b''' = \omega^3\Sigma n\Sigma n\Sigma n$, ec.

$c'' = \omega^2\Sigma(n-1)\Sigma(n-1)$, $c''' = \omega^3\Sigma(n-1)\Sigma(n-1)\Sigma(n-1)$, ec.

ec.

L'equazioni allora, che determinano i coefficienti A, B, ec. diverranno

$$\begin{aligned} & A - \omega\Sigma(n+1) = 0 \\ & B - A\omega\Sigma(n) + \omega^2\Sigma(n+1)\Sigma(n+1) = 0 \\ & C - B\omega\Sigma(n-1) + A\omega^2\Sigma n\Sigma n - \omega^3\Sigma(n+1)\Sigma(n+1)\Sigma(n+1) = 0 \\ & E - C\omega\Sigma(n-2) + B\omega^2\Sigma(n-1)\Sigma(n-1) - A\omega^3\Sigma n\Sigma n\Sigma n + \omega^4\Sigma(n+1)\Sigma(n+1)\Sigma(n+1)\Sigma(n+1) = 0 \\ & \text{ec.} \qquad \text{ec.} \end{aligned}$$

delle quali è manifesta la legge (a).

(a) Si può estendere il metodo allo sviluppo in serie delle potenze dei polinomi, come segue . . . .

§. 15. Le funzioni di cui fin ora abbiamo dati gli integrali finiti, sono funzioni algebraiche: assegniamo gli integrali di alcune funzioni trascendenti.

Si voglia la somma completa della funzione

$a^x\,(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ec.})$ nella quale $a, A, B, C,$ ec. sono quantità costanti.

Essendo

$$\Sigma a^x (A + Bx + Cx^2 + \text{ec.}) = A\Sigma a^x + B\Sigma x a^x + C\Sigma x^2 . a^x + \text{ec.}$$

è evidente che tutto si ridurrà ad avere le somme Σa^x, $\Sigma x a^x$, $\Sigma x^2 a^x$, ec. Ora si ha (§. 2.)

$$\Delta a^x = a^x (a^\omega - 1),$$

$$\Delta x a^x = x a^x (a^\omega - 1) + \omega a^\omega a^x,$$

Si cerchi per esempio lo sviluppo di $(1 + ax + bx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{ec.})^n$. Fingiamo questo sviluppo $= 1 + h_n x + h'_n x^2 + h''_n x^3 + h'''_n x^4 + \text{ec.}$ essendo h_n, h'_n, h''_n, ec. funzioni di n da determinarsi: avremo allora

$(1 + ax + bx^2 + \text{ec.})^{n+1} = 1 + h_{n+1} x + h'_{n+1} x^2 + h''_{n+1} x^3 + \text{ec.}$

Ma $(1 + ax + bx^2 + \text{ec.})^{n+1} = (1 + ax + bx^2 + \text{ec.})(1 + h_n x + h'_n x^2 + \text{ec.}) =$

$$\left\{\begin{array}{llll} 1 + h_n x & + h'_n x^2 & + h''_n x^3 & + \text{ec.} \\ + a & + h_n a & + h'_n a & + \text{ec.} \\ & + b & + b h_n & + \text{ec.} \\ & & + c & + \text{ec.} \end{array}\right.$$

dunque paragonando i termini omologhi s' avranno l' equazioni $h_{n+1} = h_n + a$; $h'_{n+1} = h'_n + a h_n + b$; $h''_{n+1} = h''_n + a h'_n + b h_n + c$; ec. ovvero $\Delta h_n = a$; $\Delta h'_n = a h_n + b$; $\Delta h''_n = a h'_n + b h_n + c$, ec. dalle quali determineremo h_n, h'_n, h''_n, ec.

$$\Delta x^2 a^x = x^2 a^x (a^\omega - 1) + 2\omega a^\omega x a^x + \omega^2 a^\omega a^x,$$

$$\Delta x^3 a^x = x^3 a^x (a^\omega - 1) + 3\omega a^\omega x^2 a^x + 3\omega^2 a^\omega x a^x + \omega^3 a^\omega a^x$$

ec. ec.

Dunque (§ 12.)

$$\Sigma a^x = \frac{a^x}{a^\omega - 1},$$

$$\Sigma x a^x = \frac{x a^x}{a^\omega - 1} - \frac{\omega a^\omega \Sigma a^x}{a^\omega - 1},$$

$$\Sigma x^2 a^x = \frac{x^2 a^x}{a^\omega - 1} - \frac{2\omega a^\omega}{a^\omega - 1}\Sigma x a^x - \frac{\omega^2 a^\omega}{a^\omega - 1}\Sigma a^x,$$

$$\Sigma x^3 a^x = \frac{x^3 a^x}{a^\omega - 1} - \frac{3\omega a^\omega}{a^\omega - 1}\Sigma x^2 a^x - \frac{3\omega^2 a^\omega}{a^\omega - 1}\Sigma x a^x - \frac{\omega^3 a^\omega}{a^\omega - 1}\Sigma a^x,$$

ec. ec. ec.

Conosceremo pertanto la somma della funzione proposta, alla quale aggiungeremo al solito la costante arbitraria per renderla completa.

Le differenze delle trascendenti circolari (ritrovate al §. 2.) $sen\,x$, $cos\,x$, ci somministrano il mezzo d' averne le somme: infatti dal citato §. ricaviamo

$$\Delta\, sen\,x = cos\,x \,.\, sen\,\omega - (1 - cos\,\omega)\, sen\,x$$

$$\Delta\, cos\,x = -\, sen\,x\, sen\,\omega - (1 - cos\,\omega)\, cos\,x,$$

dalle quali si deduce (§. 12.)

$$sen\,x = sen\,\omega\, \Sigma\, cos\,x - (1 - cos\,\omega)\, \Sigma\, sen\,x$$

$$cos\,x = -\, sen\,\omega\, \Sigma\, sen\,x - (1 - cos\,\omega)\, \Sigma\, cos\,x;$$

ed infine

$$\Sigma\, sen\,x = -\frac{(1 - cos\,\omega)\, sen\,x + sen\,\omega\, cos\,x}{2(1 - cos\,\omega)} + C$$

$$\Sigma\, cos\,x = \frac{sen\,\omega\, sen\,x - (1 - cos\,\omega)\, cos\,x}{2(1 - cos\,\omega)} + C$$

che sono le somme complete delle suddette trascendenti.

Dalle formule che abbiamo trovate al § citato per esprimere le differenze di $x^m \, sen\, x$, $x^m \cos x$, si ricavano facilmente le somme delle stesse funzioni, e si ottiene

$$\Sigma x^m \, sen\, x = - ag \cdot x^m \cos x - bg \cdot x^m \, sen\, x$$
$$+ bg \Sigma \, sen\, x (\mathrm{M}x^{m-1} + \mathrm{N}x^{m-2} + \text{ec.})$$
$$+ bg \Sigma \cos x (\mathrm{A}x^{m-1} + \mathrm{B}x^{m-2} + \text{ec.})$$
$$+ ag \Sigma \cos x (\mathrm{M}x^{m-1} + \mathrm{N}x^{m-2} + \text{ec.})$$
$$- ag \Sigma \, sen\, x (\mathrm{A}x^{m-1} + \mathrm{B}x^{m-2} + \text{ec.})$$

$$\Sigma x^m \cos x = ag \cdot x^m \, sen\, x - bg \cdot x^m \cos x$$
$$+ bg \Sigma \cos x (\mathrm{M}x^{m-1} + \mathrm{N}x^{m-2} + \text{ec.})$$
$$- bg \Sigma \, sen\, x (\mathrm{A}x^{m-1} + \mathrm{B}x^{m-2} + \text{ec.})$$
$$- ag \Sigma \, sen\, x (\mathrm{M}x^{m-1} + \mathrm{N}x^{m-2} + \text{ec.})$$
$$- ag \Sigma \cos x (\mathrm{A}x^{m-1} + \mathrm{B}x^{m-2} + \text{ec.}).$$

Facendo $m = 0$, si trovano i valori di $\Sigma \, sen\, x$, $\Sigma \cos x$; dalla cognizione di questi, facendo $m = 1$, si trovano i valori di $\Sigma x \, sen\, x$, $\Sigma x \cos x$; facendo in seguito $m = 2$ si trovano i valori di $\Sigma x^2 \, sen\, x$, $\Sigma x^2 \cos x$, ec.

§. 16. Oltre le funzioni che quì abbiamo integrate, poche altre ve ne sono dotate di qualche generalità, ed indipendenti da quelle sopra trattate, delle quali se ne possano determinare le somme. Non si ha un metodo generale per trovare le somme delle funzioni, e per sommare una funzione bisogna sempre ricorrere ad artifizj particolari, che gli siano propri: non ostante, contentandosi d' avere le somme delle funzioni espresse per serie, si potranno ottenere in questa guisa.

Sia z_x la funzione di x di cui si vuole trovare la somma Σz_x. Questa somma deve essere una tale quantità y_x, che la sua diffe-

renza finita sia $= z_x$, che si abbia cioè $y_{x+\omega} - y_x = \Delta y_x = z_x$:

Ora la serie indefinita rapporto al suo principio

$$\ldots\ldots z_{x-n\omega} + z_{x-(n-1)\omega} + z_{x-(n-2)\omega} + \ldots\ldots +$$
$$z_{x-3\omega} + z_{x-2\omega} + z_{x-\omega}$$

può rappresentare in generale questa somma: infatti supponghiamo che in questa serie x divenga $x + \omega$: avremo allora una seconda serie, da cui sottratta la prima, ne risulterà per differenza la funzione z_x: dunque sarà in generale

$$\Sigma z_x = z_{x-\omega} + z_{x-2\omega} + z_{x-3\omega} + z_{x-4\omega} + \ldots + z_{x-n\omega} +$$
$$z_{x-(n+1)\omega} + \ldots$$

E' facile dedurne di quì

$$\Sigma z_{x+\omega} = z_x + \Sigma z_x$$
$$\Sigma z_{x+2\omega} = z_{x+\omega} + z_x + \Sigma z_x$$
$$\Sigma z_{x+3\omega} = z_{x+2\omega} + z_{x+\omega} + z_x + \Sigma z_x$$

ec. ec. ec.

Si vedrà in seguito l' utilità di queste formule.

Quando per ω si prende l' unità, e per x un numero intiero e positivo, allora si suole incominciare la serie dal termine z_0, e terminarla al termine z_{x-1}: abbiamo in questa supposizione

$$\Sigma z_x = z_{x-1} + z_{x-2} + z_{x-3} + \ldots\ldots + z_3 + z_2 + z_1 + z_0.$$

Così per es. la somma della serie $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-1)$ è rappresentata da Σn, riguardando n come la variabile x. La natura delle questioni dà l' origine della serie negli altri casi come vedremo.

Si può ancora aver la somma di un certo numero di termini di una serie data per le differenze finite del termine generale.

Infatti essendo $\Sigma z_{x+n} = z_{x+n-1} + z_{x+n-2} + \ldots +$
$z_x + \Sigma z_x$

sarà $\Sigma z_{x+n} - \Sigma z_x$ la somma dei termini che precedono Σz_x:

Ora abbiamo dal §. 5.

$$z_{x+n} = z_x + n\Delta z_x + \frac{n(n-1)}{2}\Delta^2 z_x + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}\Delta^3 z_x + \text{ec};$$

dunque prendendo l' integrale dei due membri di quest' ultima equazione, avremo

$$\Sigma z_{x+n} = \Sigma z_x + n z_x + \frac{n(n-1)}{2}\Delta z_x + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}\Delta^2 z_x + \text{ec.}$$

da cui si ricava $\Sigma z_{x+n} - \Sigma z_x = n z_x + \frac{n(n-1)}{2}\Delta z_x + \ldots\ldots \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}\Delta^2 z_x + \text{ec.}$

§. 17. Spesso accade che è di somma utilità cangiare la ricerca d' un' integrale in quella di un' altro per avere qualche vantaggiosa trasformazione: così avendo ritrovato al §. 1. che (rappresentando per z e per y due funzioni di x).

$$\Delta(z.y) = z\Delta y + y\Delta z + \Delta z.\Delta y,$$

avremo

$$\Sigma(z\Delta y) = zy - \Sigma(y\Delta z + \Delta z.\Delta y);$$

e facendo $\Delta y = u$,

$$\Sigma(z.u) = z\Sigma u - \Sigma(\Sigma u.\Delta z + u\Delta z).$$

Risulta di quì che „ per integrare il prodotto di due funzio-
„ ni z, u, conviene moltiplicare la prima funzione z nell' integra-
„ le della seconda; e moltiplicando la differenza della prima fun-
„ zione nella seconda aumentata del suo integrale, sottrarre l' in-
„ tegrale di questo ultimo prodotto dal primo.

Questo Teorema è conosciuto sotto il nome di *Regola d' integrazione per parti*.

§. 18. Le suddette formule sono di uso nella determinazione dell' integrale finito della frazione $\frac{A}{x(x+n\omega)(x+q\omega)(x+r\omega)\ldots\ldots}$ nella quale n, p, q, ec. sono numeri intieri positivi ed ineguali, ed A una quantità costante.

Incominciamo dal supporre che la frazione da sommarsi sia

questa $\frac{A}{x(x+n\omega)}$.

Decomponghiamo questa frazione nelle sue frazioni elementari, e sia $\frac{A}{x(x+n\omega)} = \frac{C}{x} + \frac{B}{x+n\omega}$.

Per determinare A, B avremo l' equazione

$(C+B)x + Cn\omega = A$, dalla quale si ricava $C = \frac{A}{n\omega}$, $B = -C = -\frac{A}{n\omega}$: sarà per tanto $\Sigma\frac{A}{x(x+n\omega)} = \frac{A}{n\omega}\Sigma\frac{1}{x} - \ldots \frac{A}{n\omega}\Sigma\frac{1}{x+n\omega}$:

ma per ciò che si è detto al §. antecedente

$$\Sigma\frac{1}{x+n\omega} = \frac{1}{x+(n-1)\omega} + \frac{1}{x+(n-2)\omega} + \ldots\ldots + \frac{1}{x+\omega} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-\omega} + \frac{1}{x-2\omega} + \ldots\ldots = \frac{1}{x+(n-1)\omega} + \frac{1}{x+(n-2)\omega} + \ldots + \frac{1}{x+\omega} + \frac{1}{x} + \Sigma\frac{1}{x};$$

dunque sostituendo per $\Sigma\frac{1}{x+n\omega}$ il suo valore, avremo

$$\Sigma\frac{A}{x(x+n\omega)} = -\frac{A}{n\omega}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+\omega} + \ldots\ldots + \frac{1}{x+(n-2)\omega} + \ldots \frac{1}{x+(n-1)\omega}\right)$$

Questa espressione aumentata di una costante arbitraria, è la ricercata somma completa, composta di un numero finito di termini.

La frazione $\frac{A}{(x+n\omega)(x+p\omega)}$ si somma ancora facilmente riducendola alla prima col fare $x + n\omega = y$, poichè abbiamo allora da sommarsi la frazione $\frac{A}{y(y+(p-n)\omega)}$, che è della stessa forma di quella da noi trattata.

Sia ora la frazione da sommarsi $\frac{A}{x(x+n\omega)(x+p\omega)}$: siccome questa frazione si può sempre decomporre in due frazioni di questa forma $\frac{C}{x(x+n\omega)} + \frac{B}{x(x+p\omega)}$, essendo C, D quantità costanti, così la di lei integrazione è ridotta a quella della frazione antecedente.

Egualmente se la frazione da sommarsi avesse quattro fattori nel denominatore, fosse cioè $\frac{A}{x(x+n\omega)(x+p\omega)(x+q\omega)}$ se ne potrebbe avere la somma completa: essa infatti è sempre riducibile in tre frazioni di questa forma $\frac{C}{x(x+n\omega)(x+p\omega)}+\ldots\ldots\ldots$ $\frac{B}{x(x+n\omega)(x+q\omega)}+\frac{E}{x(x+p\omega)(x+q\omega)}$, i denominatori delle quali sono quantità costanti, e ciascuna di queste frazioni è integrabile per ciò che si è detto di sopra.

All' integrazione poi di una frazione che ha quattro fattori nel denominatore, si potrebbe ridurre, con lo stesso metodo, l' integrazione di una frazione che avesse cinque fattori nel denominatore e così di seguito.

La frazione $\frac{M+Nx}{x(x+n\omega)(x+p\omega)}$, nella quale M ed N sono quantità costanti ed n, p numeri intieri, positivi e ineguali, si può ridurre ancora essa all' integrazione di frazioni col numeratore costante, e col denominatore composto di due fattori, ed è perciò integrabile completamente. Per questo supponghiamo

$$\frac{M+Nx}{x\cdot x+n\omega)(x+p\omega)}=\frac{A}{x(x+n\omega)}+\frac{B}{x(x+p\omega)}$$

ed avremo fra le costanti incognite A, B, questa equazione $M+Nx=(A+B)x+Ap\omega+Bn\omega$, la quale si decompone nelle due $A+B=N$, $Ap\omega+Bn\omega=M$, che ci determinano i valori di B e di A. Sarà pertanto

$$\Sigma\frac{M+Nx}{x(x+n\omega)(x+p\omega)}=A\Sigma\frac{1}{x(x+n\omega)}+B\Sigma\frac{1}{x(x+p\omega)}.$$

Egualmente si può integrare la frazione $\frac{M+Nx}{x(x+n\omega)(x+p\omega)(x+q\omega)}$, poichè possiamo sempre decomporla in tre frazioni di questa forma

$$\frac{A}{x(x+n\omega)(x+p\omega)}+\frac{B}{x(x+n\omega)(x+q\omega)}+\frac{C}{x(x+p\omega)(x+q\omega)},$$

le quali si sanno già integrare.

In generale è sempre completamente integrabile una frazione, il cui numeratore sia $M+Nx$, ed il denominatore un prodotto di un numero qualunque di fattori x, $x+n\omega$, $x+p\omega$, $x+q\omega$, ec. essendo però M, N quantità costanti, ed n, p, q, ec. numeri intieri positivi ed ineguali.

Per quanto il sin quì detto sopra la differenziazione, e sopra l' integrazione delle funzioni, possa essere più che sufficiente per gli usi e le applicazioni che possono farsi del calcolo delle differenze finite, pure noi rimandiamo i nostri Leggitori, i quali desiderano di vedere un maggior dettaglio nella differenziazione delle funzioni, ed un maggior numero di funzioni integrabili, al calcolo Differenziale dell' Eulero, e a quello del Bossut.

§. 19. L' aumento ω, che noi abbiamo dato alla variabile x, è comunemente indicato per Δx, e chiamasi la *Differenza Finita*, o semplicemente la Differenza della variabile medesima.

Questa quantità poi ω ovvero Δx può essere qualunque: noi l' abbiamo supposta costante, ma potrebbe ancora riguardarsi come variabile e dipendente da x. In questo caso le differenze delle funzioni, e le loro somme dipenderebbero e dall' ordine che esse occupano, e dalla legge di variabilità della differenza Δx: i fondamenti però del calcolo sono i medesimi. Sempre la differenza finita prima di una funzione y_x di x, è eguale a $y_{x+\varphi x}-y_x$ (essendo φx l' aumento variabile della x), e $y_{x+\varphi(x+\varphi x)}-2y_{x+\varphi x}+y_x$ è la differenza seconda di y_x nella stessa ipotesi.

Così per es. supponendo $\omega=\Delta x=\varphi x=\frac{x}{2}$, si hanno le differenze finite di x^2,

$$\Delta x^2=(x+\tfrac{x}{2})^2-x^2=\tfrac{5x^2}{4}$$

$$\Delta^2 x^2=\tfrac{5}{4}((x+\tfrac{x}{2})^2-x^2)=\tfrac{5.5}{4.4}.x^2,\ \text{ec.}$$

Ordinariamente però è supposto Δx eguale ad una quantità costante, come abbiamo fatto ancora noi, ed anche talvolta eguale all' unità: anzi più comunemente in questa ultima supposizione, si fanno le applicazioni del calcolo delle differenze finite.

In generale indicando per y una funzione qualunque di x, e per y', y'', y''', ec. i valori successivi, che ella prende allorchè vi si pone $x+\Delta x$ invece di x, avremo

$$\Delta y=y'-y;\ \Delta^2 y=\Delta y'-\Delta y=y''-2y'+y;\ \Delta^3 y=y'''-3y''+3y'-y;\ \text{ec.}$$

E' facile poi vedere che le formule trovate al §. 5. nell' ipotesi della differenza costante, si riducono al caso di qualunque differenza variabile ponendovi y', y'', y''', ec. invece di $y_{x+\omega}, y_{x+2\omega}$, $y_{x+3\omega}$, ec.

Così avremo $\Delta^n y = (y - 1)^n$ purchè nello sviluppo del secondo membro si scriva y, y', y'', ec. $y^{(n)}$ invece di y^0, y, y^2, ec. y^n; ed egualmente $y^{(n)} = (\Delta^n y + 1)^n$ purchè nello sviluppo del secondo membro l' esponente diasi per indice alla caratteristica Δ, e si scriva cioè $\Delta^m y$ invece di Δy^m.

§. 20 Le somme o integrali finiti degli ordini superiori si ottengono per mezzo della ripetizione dell' operazione d' integrazione. L' integrale completo secondo si ottiene prendendo la somma dell' integrale completo primo, ed aggiungendovi una costante: l' integrale completo terzo, ci è dato dalla somma dell' integrale completo secondo aggiuntavi una costante, e così di seguito; di modo che, se rappresentiamo per y_x una data funzione di x, sarà $\Sigma y_x + A$ il suo integrale primo completo;

$\Sigma(\Sigma y_x + A) + B = \Sigma^2 y_x + A\Sigma 1 + B$ il suo integrale secondo completo;

$\Sigma(\Sigma^2 y_x + A\Sigma 1 + B) + C = \Sigma^3 y_x + A\Sigma^2 1 + B\Sigma 1 + C$ il suo integrale terzo completo ec.: segue di quì che l' integrale completo n^{esimo} di una data funzione contiene un numero n di costanti; il valore di queste costanti è indeterminato e perciò si chiamano arbitrarie; quando manca alcuna di quelle costanti, o si dà ad esse un certo valore, allora l' integrale dicesi *particolare*.

Osserviamo intanto che come (§. 4.) le differenziazioni fanno svanire le costanti dall' espressioni, così le integrazioni, disfacendo quello che hanno fatto le differenziazioni, introducono di nuovo le costanti svanite.

Si vedranno in seguito le applicazioni di queste Teorie.

§. 21. All' integrazione delle funzioni si riduce la ricerca del termine generale delle serie, le quali hanno le differenze di qualche ordine costante, e la ricerca della somma dei loro termini, quando è dato il termine generale.

Cerchiamo per esempio quale è il termine generale di quelle serie che hanno le differenze terze costanti, e che si chiamano in questa classe di serie, *serie del terzo ordine;* supponendo che y_x funzione incognita di x, rappresenti questo termine, e che per a s' indichi la costante, cui sono eguali le differenze, avremo contenuta in quest' equazione (§. 6.) $\Delta^3 y_x = a$ la condizione suddetta.

L' equazione $\Delta^3 y_x = a$, ci dà immediatamente (§. 12.), $y_x = \Sigma^3 a$: ma dal §. 13, 14 si ha (supponendo $\omega = 1$) $\Sigma a = a\Sigma 1 = ax + A$, essendo A la costante arbitraria che si aggiunge nell' integrazione; $\Sigma\Sigma a = a\Sigma x + A\Sigma 1 = \frac{ax(x-1)}{2} + Ax + B$, e $\Sigma\Sigma\Sigma a = \Sigma^3 a = \frac{ax(x-1)(x-2)}{2.3} + A\frac{x(x-1)}{2} + Bx + C$, essendo ancora B, C due costanti arbitrarie aggiunte per le integrazioni; dunque il ricercato termine generale sarà

$$y_x = a\frac{x(x-1)(x-2)}{2.3} + A\frac{x(x-1)}{2} + Bx + C.$$

Le costanti A, B, C sono arbitrarie, perciò possono avere qualunque valore che ci piaccia assegnar loro.

Se fossero state costanti le differenze quarte, allora avremmo avuto $\Delta^4 y_x = a$, dalla quale ne avremmo dedotto

$$y_x = \Sigma^4 a = a\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{2.3.4} + A\frac{x(x-1)(x-2)}{2.3} + \ldots\ldots$$

$B\frac{x(x-1)}{2} + Cx + D$: A, B, C, D sono quattro costanti arbitrarie.

Abbiasi per es. la seguente serie, di cui si cerca il termine generale;

Indici	0	1	2	3	4	x
Serie	27,	64,	125,	216,	343, ...	y_x
Diff^e. I^e.		37,	61,	91,	127, ...	
Diff^e. II^e.			24,	30,	36, ...	
Diff^e. III^e.				6,	6, ...	

Avendo questa serie le differenze terze costanti ed eguali a 6, sarà

$$y_x = x(x-1)(x-2) + A\frac{x(x-1)}{2} + Bx + C.$$

Ora acciocchè questo termine generale, il quale appartiene a tutte le serie che hanno le differenze costanti $=6$, convenga particolarmente alla serie proposta, bisogna determinare le costanti A, B, C.

Per questo io osservo, che se facciamo $x=0, =1, =2$ nell'espressione, che rappresenta il termine generale, dobbiamo avere $y_0=27$; $y_1=64$; $y_2=126$; dunque avremo queste tre equazioni per determinare le tre costanti

$$27=C,\quad 64=B+C,\quad 125=A+2B+C,$$

dalle quali si ricava $C=27$, $B=37$, $A=24$: dunque $y_x=x(x-1)(x-2)+12.x(x-1)+37x+27$.

Vogliasi il quinto termine della serie: avremo $x=4$, dunque $y_4=4\cdot3\cdot2+12\cdot4\cdot3+37\cdot4+27=343$, come sopra è in effetto.

La ritrovata espressione del termine generale della proposta serie diviene ancora più semplice, poichè si riduce ad $y_x=(x+3)^3$; per $x=4$ si trova $y_x=7^3=343$ come sopra.

§. 22. Se y_x è il termine generale di una serie qualunque, la forma della serie sarà

Indici $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ldots\ x-1,\ x$

$\qquad y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots\ldots\ y_{x-1}, y_x$

Ora per avere l'aggregato di tutti questi termini della serie, cioè per avere l'espressione di $y_0+y_1+y_2+\ldots\ldots+y_{x-1}+y_x$ ci basterà prendere l'integrale finito di y_x ed aggiungervi lo stesso ultimo termine y_x; se cioè indichiamo per S quest'aggregato sarà $S=\Sigma y_x+y_x$:

Infatti abbim veduto (§. 16.) che

$\Sigma y_x = y_{x-1}+y_{x-2}+\ldots\ldots+y_2+y_1+y_0$; dunque

$y_x+\Sigma y_x = y_x+y_{x-1}+y_{x-2}+\ldots\ldots+y_2+y_1+y_0$, e quindi

$S=y_x+\Sigma y_x$.

Si voglia per es. la somma dei primi cinque termini della serie a differenze terze costanti, sopra trattata.

Avremo $x=4$, e quindi secondo la suddetta formula generale

$$S=\Sigma x(x-1)(x-2)+12\Sigma x(x-1)+37\Sigma x+27\Sigma 1+x(x-1)(x-2)+12x(x-1)+37x+27.$$

Eseguendo ora l'integrazioni, s'avrà (§. 14.)

$$S=\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4}+12\frac{x(x-1)(x-2)}{3}+37\frac{x(x-1)}{2}+\ldots$$
$$+x(x-1)(x-2)+12x(x-1)+\ldots$$
$$27x+A$$
$$37x+27$$

essendo A la costante arbitraria: per determinarla osserviamo che quando $x=0$, dobbiamo avere $y_0=27$, $S=y_0=27$; questa condizione ci darà adunque $A=0$; ed $S=\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4}+5x(x-1)(x-2)+61.\frac{x(x-1)}{2}+64x+27$.

Se ora facciamo $x=4$ avremo per la ricercata somma $S=3\cdot2\cdot1+5\cdot4\cdot3\cdot2+61\cdot2\cdot3+64\cdot4+27=775$, come noi avremmo trovato sommando effettivamente i primi cinque termini della serie.

Per applicare a qualche altro esempio la regola che ci dà la somma delle serie, sia proposta la serie

Indici	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9, ... x
Serie	1,	0,	−1,	0,	1,	0,	−1,	0,	1,	0, ... ec.

il cui termine generale è $\cos\frac{\pi x}{2}$: si indica per $\frac{\pi}{2}$ un arco di 90 gradi.

La somma ricercata sarà

$S=\Sigma\cos\frac{\pi x}{2}+\cos\frac{\pi x}{2}+C$; ponendo ora nella formula del §. 15. $\frac{\pi x}{2}$ in vece di x, e $\frac{\pi}{2}$ in vece di ω, avremo

$\Sigma\cos\frac{\pi x}{2}=\frac{\text{sen}\frac{\pi x}{2}-\cos\frac{\pi x}{2}}{2}+C$: dunque la ricercata somma sarà

$S=\frac{\text{sen}\frac{\pi x}{2}+\cos\frac{\pi x}{2}}{2}+C$: per determinare la costante, s'osservi che quando $x=0$, si ha $S=1$; dunque

$1=\frac{1}{2}+C$, cioè $C=\frac{1}{2}$: avremo per tanto

$$S=\frac{\text{sen}\frac{\pi x}{2}+\cos\frac{\pi x}{2}+1}{2}.$$

Se $x=7$, la somma sarà

$S=\frac{\text{sen}\left(2\pi+\frac{3\pi}{2}\right)+\cos\left(2\pi+\frac{3\pi}{2}\right)+1}{2}=\frac{-1+1}{2}=0$: come può verificarsi.

§. 23. Noi abbiamo promesso al §. 5. di dimostrare direttamente le due formule date per esprimere $\Delta^n y_x$ ed $y_{x+n\omega}$, le quali abbiamo ottenute per induzione: eccoci a mantenere la promessa.

Sia dunque

$$y_{x+n\omega}=y_x+A\Delta y_x+B\Delta^2 y_x+C\Delta^3 y_x+\text{ ec.}$$

è chiaro che i coefficienti A, B, C ec. sono funzioni di n, e noi perciò gli indicheremo per A_n, B_n, C_n ec.

Se ponghiamo nella supposta equazione $n+1$ invece di n, avremo

$$y_{x+(n+1)\omega}=y_x+A_{n+1}\Delta y_x+B_{n+1}\Delta^2 y_x+C_{n+1}\Delta^3 y_x+\text{ec.}$$

Parimente facendo nella medesima $x+\omega$ in vece di x, avremo

$$y_{x+(n+1)\omega}=y_{x+\omega}+A_n\Delta y_{x+\omega}+B_n\Delta^2 y_{x+\omega}+C_n\Delta^3 y_{x+\omega}+\text{ec.}$$

ovvero

$$y_{x+(n+1)\omega}=y_x+(1+A_n)\Delta y_x+(A_n+B_n)\Delta^2 y_x+\text{ ec.}$$

Paragonando le due espressioni trovate per $y_{x+(n+1)\omega}$ abbiamo queste equazioni

$A_{n+1}=A_n+1$; $B_{n+1}=A_n+B_n$; $C_{n+1}=B_n+C_n$; ec.

dalle quali si ricava

$\Delta A_n=1$; $\Delta B_n=A_n$; $\Delta C_n=C_n$ ec.; dunque

$A_n=\Sigma 1=n$, $B_n=\Sigma n=\frac{n(n-1)}{2}$, $C_n=\Sigma\frac{n(n-1)}{2}=\ldots\ldots$ $\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}$ ec., e perciò

$$y_{x+n\omega}=y_x+n\Delta y_x+\frac{n(n-1)}{2}\Delta^2 y_x+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}\Delta^3 y_x+\text{ec.}$$

che è la formula trovata al §. citato.

Col medesimo metodo potrebbe dimostrarsi l'altra formula per esprimere $\Delta^n y_x$.

Avvertiamo che nel fare l'integrazione delle funzioni ΔA_n, ΔB_n ec., non abbiamo aggiunto le costanti, poichè determinandole per mezzo della condizione che devono annullarsi i coefficienti quando $n=0$, le avremmo trovate nulle.

Lo stesso artifizio serve a dimostrare semplicemente e direttamente la formula del Binomio Neutoniano per qualunque esponente.

Sia infatti $(1+x)^n=1+A_n x+B_n x^2+C_n x^3+$ ec.

essendo A_n, B_n, C_n ec. funzioni di n da determinarsi.

Facciamo aumentare n di una unità, ed avremo

$$(1+x)^{n+1} = 1 + A_{n+1}\, x + B_{n+1}\, x^2 + C_{n+1}\, x^3 + \text{ec.}$$

$$\text{Ma}\,(1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x) = (1 + A_n x + B_n x^2 + \text{ec.})\,(1+x) = 1 + (A_n + 1)x + (B_n + A_n)x^2 + (C_n + B_n)x^3 + \text{ec.}$$

dunque paragonando le due espressioni di $(1+x)^n$, avremo $A_{n+1} = A_n + 1$, $B_{n+1} = B_n + C_n$, $C_{n+1} = B_n + C_n$ ec.

ed in conseguenza

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}x^3 + \text{ec.}$$

come si trova per induzione nell' Algebra Cartesiana (a).

(*a*) L' inesattezza, con la quale suole dimostrarsi negli elementi d' Algebra il Canone Neutoniano anche per n numero intiero, mi ha determinato ad esporne in questa nota una semplice e rigorosa dimostrazione, la quale dimanda solo la nozione della moltiplicazione algebraica.

Essendo n un numero intiero e determinato, supponghiamo d' aver ottenuta con le successive moltiplicazioni

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}x^3 + \text{ec.}$$

io dico che essendo vera questa equazione, sarà tale e si conserverà legittima se in vece di n ponghiamo $n+1$, che sarà cioè

$$(1+x)^{n+1} = 1 + (n+1)x + \frac{(n+1)n}{2}x^2 + \frac{(n+1)n(n-1)}{2\cdot 3}x^3 + \text{ec.}$$

Infatti $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) = \left(1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \text{ec.}\right)(1+x)$

$$\left.\begin{aligned} &= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}x^3 + \text{ec} \\ &\quad + x + nx^2 + \frac{n(n-1)}{2}\,.\,x^3 + \text{ec.} \end{aligned}\right\}\ldots\ldots$$

$$= 1 + (n+1)x + \frac{(n+1)n}{2}x^2 + \text{ec.}$$

com. ci eravamo proposti di dimostrare.

§. 24. Mostriamo adesso l' uso della integrazione delle funzioni nella Teoria delle combinazioni.

Dato un numero qualunque ω di quantità a, b, c, d, e ec. in quante maniere si possono elleno combinare prendendole due a due; tre a tre; quattro a quattro ec. n ad n?

Noi supponghiamo per adesso che si vogliano soltanto le combinazioni diverse; così delle due combinazioni ab, ba non se ne vuole considerare che una sola.

Sia y_x una funzione di x che esprime il numero delle combinazioni diverse delle quantità prese due a due: se il numero di queste quantità aumenta di un' unità, il numero delle combinazioni sarà espresso per y_{x+1}. Questo secondo numero di combinazioni sarà eguale al primo aumentato di x, giacchè la nuova quantità unita a ciascuna di quelle che già esistevano, forma una nuova combinazione, e così il numero delle nuove combinazioni, è eguale al numero delle quantità che s' avranno prima, cioè ad x. Avremo per tanto $y_{x+1} = y_x + x$; d' onde si ricava $\Delta y_x = x$. Quest' ultima equazione conduce subito a quest' altra $y_x = \Sigma x$, cioè il ricercato numero delle combinazioni è eguale alla somma della quantità x: si ha in conseguenza $y_x = \Sigma x = \ldots\ldots \frac{x(x-1)}{2} + C$.

Per determinare la costante C osserviamo che quando $x = 0$, cioè quando non vi è alcuna quantità, non si può avere alcuna combinazione, e perciò $y_x = 0$ in questa supposizione: dunque $0 = 0 + C$, e quindi $C = 0$. Sarà per tanto $y_x = \frac{x(x-1)}{2}$.

Sia ora y_x la funzione di x che esprime il numero delle com-

---

Ora la formula $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \text{ec.}$ essendo vera quando in essa si pone $n+1$ in vece di n; lo sarà ancora quando si pone $n+2$ in vece di $n+1$; quando si pone $n+3$ in vece di $n+2$, ed in generale sarà vera per qualunque numero n indeterminato purchè sia intiero e positivo.

binazioni diverse delle quantità prese tre a tre. Se si aggiunge una nuova quantità, il numero delle combinazioni sarà rappresentato da y_{x+1}; e la nuova quantità aggiunta aumenterà di tanto il numero delle combinazioni tre a tre, quante erano le combinazioni due a due del numero x di quantità, poichè ogni combinazione binaria unita con la nuova quantità, forma una combinazione nuova di tre quantità: sarà dunque

$y_{x+1} = y_x + \frac{x(x-1)}{2}$, dalla quale equazione si ricava

$\Delta y_x = \frac{x(x-1)}{2}$, e quindi $y_x = \Sigma \frac{x(x-1)}{2} = \frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}$, cui non si aggiunge costante, poichè questa si troverebbe eguale a zero, come nel caso precedente.

Egualmente indicando per y_x il numero delle combinazioni diverse delle quantità prese quattro a quattro, avremo per determinare questo numero di combinazioni

$y_{x+1} = y_x + \frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}$, da cui si ricava

$\Delta y_x = \frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}$, e quindi $y_x = \Sigma \frac{x(x-1)(x-2)}{2.3} = \ldots$

$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{2.3.4}$ essendo sempre nulla la costante arbitraria, che dovremmo aggiungere integrando.

Si vede senza bisogno d'andare più avanti, che indicando per y_x il numero delle combinazioni diverse, che si possono fare con x quantità prese n ad n, sarà.

$y_x = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots\ldots(x-n+1)}{2.3.4\ldots\ldots n}$: questa formula generale trovata ora per induzione, si dimostrerà rigorosamente, quando avremo data la Teoria dell' integrazione delle equazioni a differenze finite e parziali.

E siccome il numero delle maniere, nelle quali possiamo combinare x quantità prendendone un numero n per volta, è eguale al numero di quelle che si possono fare con le stesse x lettere prendendone un numero $x-n$ per volta, quindi è che y_x potrà ancora essere espresso dalla detta formula superiore, nella quale si ponga $x-n$ in vece di n: avremo allora

$y_x = \frac{x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots\ldots(x-n)}$. Queste due formule per quanto in apparenza diverse sono in sostanza eguali fra loro.

Ciascuna di queste formule esprime anche in quante maniere possiamo dividere in due parti un numero x di quantità, di cui una parte contenga un numero n di quelle quantità, e l' altra un numero $x-n$ delle medesime.

Se poi si ricercasse in quante maniere un numero x di quantità può dividersi in tre parti, di cui la prima ne contenga un numero n; la seconda un numero n', s' avrà questo numero di maniere espresso da

$$\frac{x(x-1)\ldots\ldots(x-n+1)}{2.3\ldots\ldots n} \times \frac{(x-n)(x-n-1)\ldots\ldots(x-n-n'+1)}{2.3\ldots\ldots n'}.$$

Poichè ciascuna delle combinazioni fatte con x quantità, prendendole n ad n, si può accozzare con una delle combinazioni fatte con $x-n$ quantità prendendole n' ad n'.

In generale il numero delle maniere, nelle quali un numero x di quantità può dividersi in qualunque numero di parti, di cui la prima ne contenga un numero n; la seconda un numero n'; la terza un numero n'' ec. è rappresentato dalla formula

$$\frac{x(x-1)\ldots\ldots(x-n+1)}{2.3\ldots\ldots n} \times \frac{(x-n)(x-n-1)\ldots\ldots(x-n-n'+1)}{2.3\ldots\ldots n'} \times \ldots\ldots$$
$$\frac{(x-n-n')(x-n-n'-1)\ldots\ldots(x-n-n'-n''+1)}{2.3\ldots\ldots n''} \times \text{ec.}$$

Per esempio se si dimanda in quante maniere 52 carte del gioco dell' Wisk, si possono dividere fra quattro Giocatori a 13 carte per ciascuno: si faccia $x=52$, $n=n'=n''=13$ ed avremo

$$\frac{52.51\ldots\ldots40}{1.2\ldots\ldots13} \cdot \frac{39\ldots\ldots27}{1.2\ldots13} \cdot \frac{26\ldots\ldots14}{2.3\ldots13} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

8565126197851151797861440000.

Anche queste formule possono ottenersi direttamente per mezzo dell' integrazione dell' equazioni a differenze finite e parziali.

§. 25. Se dato il numero x di lettere si dimandasse la somma totale di tutte le combinazioni diverse di quelle lettere prese una ad una; più tutte le combinazioni prendendo le lettere due a due; più tutte le combinazioni prendendo le lettere tre a tre;

più ec. più tutte le combinazioni prendendo le lettere $x-1$ ad $x-1$; più le combinazioni delle lettere prese x ad x, potremmo avere questa somma totale facilmente: indicandola infatti per S, s' avrà

$$S=x+\frac{x(x-1)}{2}+\frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{2.3.4}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{2.3.4\ldots n}$$ nella quale però dobbiamo fare $n=x$; in conseguenza

$$S=x+\frac{x(x-1)}{2}+\frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}+\ldots+\frac{x(x-1)}{2}+x+1,$$

la quale espressione si contrae in questa $S=2^x-1$.

Se si volessero tutte le combinazioni possibili delle quantità a, b, c ec., cioè non solo tutte le combinazioni diverse da noi sopra calcolate, ma ancora tutte quelle combinazioni che possiamo avere permutando una combinazione diversa in tante altre, quante sono le permute di luogo delle quantità che la compongono, per es. nelle combinazioni binarie, riguardando come due combinazioni ab, ba; nelle combinazioni ternarie, riguardando come tre combinazioni $abc, bac, bca, cba, cab, acb$ ec., ecco come potremo ottenerle:

Essendo al solito x il numero delle lettere da combinarsi, sia y_x quella funzione di x che rappresenta il numero delle combinazioni binarie tutte possibili, vale a dire delle combinazioni diverse colle permute. Aumentando x di un unità, cioè alle quantità da combinarsi aggiungendone una, avremo allora y_{x+1} per esprimere il numero delle combinazioni in questo secondo caso, e per un ragionamento simile a quello fatto superiormente, s' avrà

$y_{x+1}=y_x+2x$, d' onde $\Delta y_x=2x$, e quindi $y_x=2\Sigma x$.

Sarà per tanto questo ricercato numero $y_x=x(x-1)$.

Per tutte le combinazioni diverse e le permute ternarie, chiamando y_x il loro numero, s' avrà per determinarlo

$y_{x+1}=y_x+3x(x-1)$, d' onde $\Delta y_x=3x(x-1)$, e perciò

$y_x=3\Sigma x(x-1)=x(x-1)(x-2)$.

Nella stessa guisa il numero totale delle combinazioni diverse e delle permute quadernarie sarà dato da questa equazione

$y_{x+1}=y_x+4x(x-1)(x-2)$,

dalla quale si ricava

$y_x=x(x-1)(x-2)(x-3)$;

in generale il numero delle combinazioni diverse e delle permute prendendo le lettere da combinarsi n ad n sarà

$y_x=x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$.

Si vede adunque che le espressioni le quali danno il numero delle combinazioni diverse e delle permute, sono eguali a quelle, che ci hanno dato il numero delle combinazioni diverse soltanto, private però quelle espressioni dei loro denominatori.

Cerchiamo adesso in quante maniere si può combinare un numero x di quantità a, b, c ec. prendendole due a due, tre a tre ec. supponendo però che la stessa quantità si possa trovare ripetuta un qualunque numero di volte nella stessa combinazione, e che possano aver luogo tutte le permutazioni possibili delle quantità.

Rappresentando per z_x il numero di combinazioni binarie, supponghiamo che x aumenti di un' unità, sarà z_{x+1} il numero delle combinazioni in questo secondo caso: ora questo numero z_{x+1} sarà eguale al primo numero delle combinazioni z_x, più $2x$ (che esprime il numero delle nuove combinazioni, le quali possiamo fare unendo una nuova quantità m a ciascuna di quelle che già s' avranno, esprime cioè il numero delle combinazioni am, ma, bm, mb ec.) più 1, che è la combinazione mm: s' avrà dunque

$z_{x+1}=z_x+1+2x$,

dalla quale si ricava

$\Delta z_x=2x+1$,

e perciò

$z_x = \Sigma(2x + 1) = x^2$.

Trascuriamo le costanti perchè queste si trovano eguali a zero.

Indicando per z_x il numero delle combinazioni ternarie, e supponendo che si accresca una nuova quantità m, è manifesto che per causa di questa quantità, s' avranno le seguenti combinazioni di più di quelle che avremmo avute senza essa, cioè mmm, mmb, mbm, bmm ec., il cui numero è $1 + 3x$; come pure le combinazioni mab, amb, abm ec. il cui numero è il triplo delle combinazioni binarie, cioè $3x^2$: avremo adunque

$$z_{x+1} = z_x + 1 + 3x + 3x^2,$$

dalla quale si deduce

$$\Delta z_x = 3x^2 + 3x + 1,$$

e perciò

$$z_x = \Sigma(3x^2 + 3x + 1) = x^3.$$

Per le combinazioni delle quantità quadernarie, se indichiamo egualmente per z_x il loro numero, e supponghiamo che m sia la nuova quantità da aggiungersi, avremo per causa di essa le seguenti combinazioni di più

$mmmm$; $mmma$; $mmam$; $mamm$; $ammm$ ec. che sono di numero $1 + 4x$; come pure le combinazioni $mmab$; $mamb$; $mabm$; $ammb$; $ambm$; $abmm$ ec. il cui numero è sestuplo delle combinazioni binarie, cioè $6x^2$; come pure le combinazioni $mabc$; $ambc$; $abmc$; $abcm$; ec. il cui numero è quadruplo delle combinazioni ternarie, cioè $4x^3$: s'avrà pertanto

$$z_{x+1} = z_x + 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3,$$

ed in conseguenza

$$z_x = x^4.$$

Vedesi in generale che il numero totale delle combinazioni, compresevi le permute e ripetizioni delle stesse lettere che possono farsi con un numero x di quantità, combinandole n ad n, sarà

$$z_x = x^n.$$

Noi ci siamo trattenuti a mostrare l' uso che si può fare della Teoria dell' integrazione delle funzioni nelle combinazioni, per far conoscere fino di quì ai nostri Leggitori l' utilità del calcolo delle Differenze Finite.

§. 26. Terminiamo questo primo Capitolo con alcune considerazioni sopra le differenze e le somme di un indice indeterminato.

Se per y rappresentiamo una funzione di x, le espressioni $\Sigma^n y$, $\Delta^n y$, ci esprimono la differenza n^{esima} di y, e la somma n^{esima} della detta funzione: tutto questo però è nella supposizione che n sia un numero intiero e positivo: ora nel caso che n sia eguale a zero, o ad un numero negativo, o ad un numero fratto, cosa significheranno quelle espressioni?

Saranno elleno delle quantità reali esistenti in natura, ovvero dovranno considerarsi come delle semplici combinazioni di calcolo, che non si riportano a nessuna cosa di reale, e perciò relegarsi nella classe degli immaginarj?

La soluzione di questa questione dipende dai principj fondamentali di derivazione.

La differenza ad indice zero, cioè $\Delta^0 y$ è la stessa funzione y, poichè l' indice segnandoci il numero delle operazioni di differenziazione fatte sopra y, l' indice zero ci dirà che non è stata fatta alcuna operazione di differenziazione sopra y, e che perciò $\Delta^0 y = y$.

Le differenze poi ad indici negativi, $\Delta^{-1} y$ per es., ci rappresenta una quantità z, funzione di x tale che eseguendo sopra di essa la differenziazione, si ottenga per risultato la stessa funzione y: così $\Delta^{-2} y$ ci rappresenta una quantità z, funzione di x tale, che facendo due operazioni di differenziazione, s' ottenga $\Delta^{-1} y$ dopo la prima operazione, e si ottenga y, dopo la seconda; in generale $\Delta^{-n} y$ ci rappresenta una tal funzione z, che facendo sopra di essa n operazioni di differenziazione ritorni la funzione y.

Abbiamo spiegato (Principj ec. §. 5, 6) estesamente il senso che deve darsi alle derivate ad indici negativi, che nel nostro caso sono le differenze ad indici negativi: ivi abbiamo detto che queste sono derivate della funzione y, ottenute per mezzo d' un' operazione inversa a quella che ci ha date le derivate ad indici positivi; e che queste derivate ad indici negativi formano i termini della serie composta di quelle ad indici positivi prolungata indietro.

Così nel nostro caso la serie sarà

Indici ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...

Serie delle diff.^e ..... $\Delta^{-3}y$, $\Delta^{-2}y$, $\Delta^{-1}y$, y, Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, ...

nella quale i termini che precedono y sono le differenze finite con indici negativi.

Siccome $\Delta^{-n}y$ esprime una tal funzione che differenziata n volte deve rendere y; così se questa funzione $\Delta^{-n}y$ s'indica per z, avremo $\Delta^n z = y$, dalla quale equazione si ricava $z = \Sigma^n y$; dunque $\Delta^{-n}y = \Sigma^n y$: „ cioè le differenze finite d'un ordine o indice „ negativo, sono la stessa cosa che le somme o gli integrali dello „ stesso ordine ma positivo.

Viceversa si dimostrerebbe „ che le somme d'un ordine ne- „ gativo sono identicamente la stessa cosa che le differenze del „ medesimo ordine ma positivo „.

Possiamo dunque permutare le une nelle altre.

La serie superiore potrebbe in conseguenza ancora scriversi così:

Indici ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

Serie delle diff.^e e

degli Integr.^i ... $\Sigma^3 y$, $-\Sigma^2 y$, $\Sigma^{-1} y$, y, Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, ...

Rapporto alle differenze ad indice fratto, è difficile definire se queste prese in tutta la loro generalità sono quantità reali o immaginarie. Tali differenze sono invero (Principj ec. §. 7.) i termini intermedi a quelli della serie formata dalle differenze ad indici intieri, ed esprimono delle quantità ottenute facendo (Principj ec. §. 7.) sopra la funzione derivatrice y un numero fratto delle dette operazioni di differenziazione; ma nel calcolo di cui si tratta, non concepiamo come potrebbe per es. farsi sopra y una metà d'operazione di differenziazione per avere una quantità rappresentata da $\Delta^{\frac{1}{2}}y$, sopra cui ripetendo quella metà d'operazione, potesse ottenersi la quantità $\Delta^{\frac{1}{2}}\Delta^{\frac{1}{2}}y$, la quale fosse la stessa cosa che Δy, risultato di una intiera differenziazione: quindi noi crediamo di non dover pronunziare sopra lo stato di detta questione. Tutte queste riflessioni fatte per n indice fratto, a più forte ragione vagliono per n numero irrazionale. Come lasciamo indeterminato il giudizio, di cosa significhino in natura le differenze ad indice fratto, così non possiamo cosa alcuna stabilire sopra le somme egualmente ad indice fratto (a).

(a) L'immortale La Grange parlando del passaggio da $\Delta^{-n}y$ a $\Sigma^n y$ in una sua Memoria *del* 1772 *Atti di Berlino*, dice che sarebbe difficilissimo darne una dimostrazione diretta ed analitica: sembra che la dimostrazione data sopra goda di questi pregj.

CALCOLO DELLE DIFFERENZE FINITE

C A P. II.

Differenziazione e Integrazione delle Funzioni a più variabili.

§. 27. Sia z una funzione di più quantità variabili x, y, u ec. che noi indicheremo per $z_{x,y,u \text{ ec.}}$. Se in essa le variabili ricevono degli aumenti qualunque, il valore della funzione z varierà, poichè allora la z, che era funzione soltanto di quelle variabili, diverrà funzione di quelle variabili accresciute dei loro aumenti; e se da questo nuovo valore di z sottragghiamo il di lei primo valore, avremo un residuo che chiamasi la *differenza prima totale* di z. S' aggiunge a questa differenza il nome *Totale* per esprimere che tutte le variabili ricevono i loro aumenti nello stesso tempo; in questa guisa essa è distinta da quelle differenze che si otterrebbero facendo solamente aumentare alcune variabili, ed alle quali daremo in seguito il nome di *Parziali*.

Noi considereremo due sole variabili x, y come componenti la funzione z; sarà sempre facile estendere le teorie che daremo per le funzioni a due variabili, alle funzioni che ne contengono un maggior numero. Sia dunque questa funzione rappresentata da $z_{x,y}$: gli aumenti delle variabili siano ω, θ che noi supponghiamo quantità costanti, o generalmente quantità indipendenti da x e da y.

Indicando al solito per Δ le differenze totali, avremo

$$\Delta z_{x,y} = z_{x+\omega, y+\theta} - z_{x,y};$$

riguardando la differenza prima totale $\Delta z_{x,y}$ come una nuova funzione di x e di y; e prendendone la differenza prima totale, s' avrà

$$\Delta\Delta z_{x,y} = \Delta z_{x+\omega, y+\theta} - \Delta z_{x,y} = \Delta^2 z_{x,y}.$$

Così sarà

$$\Delta^3 z_{x,y} = \Delta^2 z_{x+\omega, y+\theta} - \Delta^2 z_{x,y}$$

ed in generale

$$\Delta^n z_{x,y} = \Delta^{n-1} z_{x+\omega, y+\theta} - \Delta^{n-1} z_{x,y}.$$

Si vede adunque che le differenze totali delle funzioni a più variabili si hanno nella stessa guisa, che le differenze delle funzioni di una sola variabile; ed un ragionamento simile a quello fatto al §. 5., ci darà

$$\Delta^n z_{x,y} = (z_{x+\omega, y+\theta} - 1)^n,$$ purchè nello sviluppo del secondo membro in vece di scrivere le potenze per es.

$(z_{x+\omega, y+\theta})^m$, si scriva

$z_{x+m\omega, y+m\theta}$, ponendo cioè l' esponente m come coefficiente degli aumenti ω e θ. Egualmente troveremo

$z_{x+m\omega, y+m\theta} = (\Delta z_{x,y} + 1)^m$ purchè nello sviluppo gli esponenti si diano per indici alla caratteristica Δ.

Potremo adunque eliminare da qualunque espressione le funzioni differenziali

$$\Delta z_{x,y}, \Delta^2 z_{x,y}, \Delta^3 z_{x,y} \text{ ec.}$$

per sostituirvi le funzioni

$$z_{x,y}, z_{x+\omega, y+\theta}, z_{x+2\omega, y+2\theta} \text{ ec.};$$

e viceversa eliminare da una espressione le dette funzioni per sostituirvi le differenze.

§. 28. In questo §. troveremo le differenze prime totali d' alcune funzioni di due variabili.

(1) ... $\Delta(x+y) = \omega + \theta$;

(2) ... $\Delta(x^2+y) = 2x\omega + \omega^2 + \theta$;

$$(3)\ldots\Delta(x^3+y)=3x^2\omega+3x\omega^2+\omega^3+\theta;$$

ec. ec.

$$(4)\ldots\Delta(x^2+y^2)=2x\omega+\omega^2+2y\theta+\theta^2;$$

$$(5)\ldots\Delta(x^3+y^2)=3x^2\omega+3x\omega^2+\omega^3+2y\theta+\theta^2;$$

ec. ec.

$$(6)\ldots\Delta(x.y)=x\theta+y\omega+\omega\theta$$

$$(7)\ldots\Delta(x^2y)=x^2\theta+2xy\omega+2x\omega\theta+\omega^2y+\omega^2\theta$$

$$(8)\ldots\Delta(x^3y)=x^3\theta+3x^2\omega\theta+3x^2y\omega+3x\omega^2\theta+3xy\omega^2+\ldots\omega^3y+\omega^3\theta$$

ec. ec.

$$(9)\ldots\Delta(x^3y^2)=3x^2y^2\omega+3xy^2\omega^2+\omega^3y^2+2x^3y\theta+6x^2y\theta\omega+6xy\theta\omega^2+2y\theta\omega^3+x^3\theta^2+3x^2\omega\theta+3x\omega^2\theta+\omega^3\theta^2.$$

ec. ec.

Così noi vediamo come potrebbero aversi le differenze totali di qualunque funzione algebraica di x e di y.

Cerchiamo ora le differenze totali d' alcune funzioni trascendenti.

Siano queste funzioni $sen\,x\cos y$; $sen\,x\,sen\,y$; $\cos x\,sen\,y$; $\cos x\cos y$; ed avremo

$$\Delta\,sen\,x\cos y=sen(x+\omega)\cos(y+\theta)-sen\,x\cos y:$$

la differenza totale di $sen\,x\cos y$ avrà dunque questa forma

$$\Delta\,sen\,x\cos y=\mathrm{A}\,sen\,x\,sen\,y+\mathrm{B}\,sen\,x\cos y+\mathrm{C}\,sen\,y\cos x+\mathrm{D}\cos x\cos y.$$

Nella stessa guisa le differenze totali delle altre espressioni avranno le forme seguenti

$$\Delta\,sen\,x\,sen\,y=\mathrm{A}'\,sen\,x\,sen\,y+\mathrm{B}'\,sen\,x\cos y+\mathrm{C}'\,sen\,y\cos x+\mathrm{D}'\cos x\cos y;$$

$$\Delta\cos x\,sen\,y=\mathrm{A}''\,sen\,x\,sen\,y+\mathrm{B}''\,sen\,x\cos y+\mathrm{C}''\,sen\,x\cos y+\mathrm{D}'\cos x\cos y;$$

$$\Delta\cos x\cos y=\mathrm{A}'''\,sen\,x\,sen\,y+\mathrm{B}'''\,sen\,x\cos y+\mathrm{C}'''\,sen\,x\cos y+\mathrm{D}'''\cos x\cos y.$$

Le quantità A, A′ ec., B, B′ ec. ec., sono funzioni di $sen\,\omega$, $\cos\omega$, $sen\,\theta$, $\cos\theta$, ben facili a determinarsi.

Otterremo le differenze degli ordini superiori, per esempio le differenze totali seconde, prendendo le differenze prime delle già ritrovate differenze; così per avere le differenze terze si prenderanno le differenze prime delle differenze seconde ec.. Secondo questo ragionamento avremo

$$\Delta^2(x+y)=0,\quad \Delta^2(x^2+y)=2\omega^2 \text{ ec.}$$

§. 29. Le funzioni le quali differenziate ci danno le differenze totali, si chiamano *Integrali Totali* e s'indicano col solito segno Σ: così $x+y$ è l'integrale totale di $\omega+\theta$; ed x^2+y è l'integrale totale di $2x\omega+\omega^2+\theta$, ed in generale $z_{x,y}$ è l'integrale totale di $\Delta z_{x,y}$; e se si rappresenta questa differenza totale per $u_{x,y}$, avremo

$u_{x,y}=\Delta z_{x,y}$, e $z_{x,y}=\Sigma u_{x,y}$, delle quali due equazioni una ci dà sempre l' altra. Generalmente se per $u_{x,y}$ si rappresenta una funzione che risulta dall'avere differenziata n volte un' altra funzione $z_{x,y}$, avremo

$u_{x,y}=\Delta^n z_{x,y}$, e quest' equazione conduce subito a quest' altra $z_{x,y}=\Sigma^n u_{x,y}$, la quale ci dice che $z_{x,y}$ è viceversa l' integrale n^{esimo} totale di $u_{x,y}$.

Nel passare dalle differenze agli integrali conviene, ogni volta che si fa un' integrazione, aggiungere una costante arbitraria, affinchè si trovino nel risultato tante costanti arbitrarie, quante unità contiene l'ordine dell' integrale ricercato: ha luogo per queste differenze e somme quanto si è detto ai §. 4, 13, 20.

Le costanti arbitrarie possono essere anche funzioni della quantità $x\theta - y\omega$, cioè $\varphi(x\theta - y\omega)$, poichè questa quantità $x\theta - y\omega$ non cangia, quando x cresce di ω, ed y cresce di θ; infatti $\varphi(x\theta - y\omega) = \varphi((x+\omega)\theta - (y+\theta)\omega) = \varphi(x\theta - y\omega + \omega\theta - \omega\theta)$; in generale adunque noi prenderemo delle diverse funzioni di $x\theta - y\omega$, per esprimere le diverse arbitrarie che devono completare gli integrali, o le somme delle funzioni.

Ciò premesso occupiamoci della integrazione delle funzioni. Al §. antecedente abbiamo ritrovato

$$\Delta(x+y) = \omega + \theta = (\omega+\theta)\,1;$$ dunque sarà

$$\Sigma 1 = \frac{x+y}{\omega+\theta} + \varphi(x\theta - y\omega)$$ essendo $\varphi(x\theta - y\omega)$ la quantità costante arbitraria che completa la somma totale dell' unità.

Parimente dall' equazione (2), ricaviamo

$$x^2 + y = 2\omega\Sigma x + (\omega^2 + \theta)\Sigma 1,$$ ed in conseguenza

$$\Sigma x = \frac{x^2 + y - (\omega^2 + \theta)\Sigma 1}{2\omega} + \varphi(x\theta - y\omega);$$

e questa espressione sarà la somma completa di x.

Permutando nella ritrovata espressione x in y, ed ω in θ e viceversa, avremo

$$\Sigma y = \frac{y^2 + x - (\theta^2 + \omega)\Sigma 1}{2\theta} + \varphi(x\theta - y\omega).$$

L' equazione (3) ci dà

$$x^3 + y = 3\omega\Sigma x^2 + 3\omega^2\Sigma x + \omega^3 + \theta,$$ e quindi

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3 + y - 3\omega^2\Sigma x - (\omega^3 + \theta)\Sigma 1}{3\omega} + \varphi(x\theta - y\omega);$$ e permutando x in y, ω in θ e viceversa, avremo

$$\Sigma y^2 = \frac{y^3 + x - 3\theta^2\Sigma y - (\theta^3 + \omega)\Sigma 1}{3\theta} + \varphi(x\theta - y\omega)$$

Così troveremmo le somme complete delle potenze superiori dell' x e dell' y.

Dall' equazione (7) abbiamo

$$x^2 y = \Sigma x^2\theta + 2\omega\Sigma xy + 2\omega\theta\Sigma x + \omega^2\Sigma y + \omega^2\theta\Sigma 1$$

dalla quale possiam dedurre

$$\Sigma xy = \frac{x^2 y - \theta\Sigma x^2 - 2\omega\theta\Sigma x - \omega^2\Sigma y - \omega^2\theta\Sigma 1}{2\omega} + \varphi(x\theta - y\omega).$$

Dall' equazione (8) ritroveremo l' integrale di $x^2 y$, cioè l' espressione completa di $\Sigma x^2 y$, da cui avremo quella di Σxy^2; e per mezzo di tutte queste somme conosciute, ricaveremo dall' equazione (9) l' espressione di $\Sigma x^2 y^2$; e così di seguito.

Dal fin quì detto è facile concludere che potremo sempre avere la somma completa di un prodotto $x^m y^n$, qualunque numeri intieri e positivi siano gli esponenti m ed n.

Per farne un esempio, cerchiamo la somma completa di $z = 4x + 2y + 2$: avremo in questo caso, supponendo $\omega = \theta = 1$, $\Sigma(4x + 2y + 2) = 4\Sigma x + 2\Sigma y + 2\Sigma 1$, e fatte le debite sostituzioni, sarà

$$\Sigma z = 2x^2 + 2y - 2(x+y) + y^2 + x - (x+y) + (x+y) + \varphi(x-y) = 2x^2 + y^2 - x + \varphi(x-y)$$ essendo $\varphi(x-y)$ l' arbitraria che porta l' integrazione. Può verificarsi questo risultato per mezzo della differenziazione.

Gl' integrali o somme complete delle quantità trascendenti $sen\,x\cos y$, $sen\,y\cos x$, $\cos x\cos y$, $sen\,x\,sen\,y$ ci sono dati dalle equazioni trovate al §. 28. per esprimerne le differenze: abbiamo infatti da queste equazioni

$$sen\,x\cos y = \mathrm{A}\Sigma\,sen\,x\,sen\,y + \mathrm{B}\Sigma\,sen\,x\cos y + \mathrm{C}\Sigma\,sen\,y\cos x + \mathrm{D}\Sigma\cos x\cos y$$

$$sen\,x\,sen\,y = \mathrm{A}'\Sigma\,sen\,x\,sen\,y + \mathrm{B}'\Sigma\,sen\,x\cos y + \mathrm{C}'\Sigma\,sen\,y\cos x + \mathrm{D}'\Sigma\cos x\cos y$$

$$\cos x\,sen\,y = \mathrm{A}''\Sigma\,sen\,x\,sen\,y + \mathrm{B}''\Sigma\,sen\,x\cos y + \mathrm{C}''\Sigma\,sen\,y\cos x + \mathrm{D}''\Sigma\cos x\cos y$$

$$\cos x\cos y = \mathrm{A}'''\Sigma\,sen\,x\,sen\,y + \mathrm{B}'''\Sigma\,sen\,x\cos y + \mathrm{C}'''\Sigma\,sen\,y\cos x + \mathrm{D}'''\Sigma\cos x\cos y$$

d' onde si ricavano per mezzo dell' eliminazione i valori di $\Sigma\,sen\,x \times \cos y$; $\Sigma\,sen\,x\,sen\,y$; $\Sigma\cos x\cos y$; $\Sigma\cos x\,sen\,y$.

In generale facendo quì un ragionamento simile a quello fatto al §. 17 per gli integrali delle funzioni di una sola variabile, avremo per esprimere la somma completa di una qualunque funzione di due variabili x, y, cioè di $z_{x,y}$, avremo dico

$$\Sigma z_{x,y} = \varphi(x\theta - y\omega) + z_{x-\omega,\,y-\theta} + z_{x-2\omega,\,y-2\theta} + \ldots \ldots$$
$$z_{x-3\omega,\,y-3\theta} + z_{x-4\omega,\,y-4\theta} + \ldots \ldots \ldots,$$

la quale finisce secondo i casi particolari cui appartiene: ordinariamente però se $\omega = 1$, $\theta = 1$, quando x è maggiore di y, si fà

$$\Sigma z_{x,y} = \varphi(x - y) + z_{x-1,\,y-1} + z_{x-2,\,y-2} + \ldots + z_{x-y,\,0};$$

e quando y è maggiore di x, si fà

$$\Sigma z_{x,y} = \varphi(x - y) + z_{x-1,\,y-1} + z_{x-2,\,y-2} + \ldots + z_{0,\,y-x}.$$

§. 30. Abbiamo veduto al §. antecedente che

$$\Sigma y = \frac{y^2 + x - (\theta^2 + \omega)\Sigma 1}{2\theta} + \Psi(x\theta - y\omega).$$

Parimente dall' equazione (6) del §. 28., noi avremmo ottenuto

$$\Sigma y = \frac{xy - \theta\Sigma x - \omega\theta\Sigma 1}{\omega} + \varphi(x\theta - y\omega),$$ da cui sostituendo per Σx il suo valore, troveremo

$$\Sigma y = \frac{2\omega xy - \theta x^2 - \theta y + (\theta^2 - \omega^2\theta)\Sigma 1}{2\omega^2} + \varphi(x\theta - y\omega):$$

noi abbiamo adunque due espressioni per Σy: e siccome ciò accade ancora per le somme delle potenze superiori delle variabili, non sarà inutile trattenersi a dimostrare, che queste due espressioni diverse in apparenza, sono però in sostanza la stessa, molto più che con lo stesso modo dimostreremo l' eguaglianza di due qualunque altre espressioni, che potessero aversi per rappresentare una medesima somma. Se le due espressioni avute per Σy sono in sostanza la stessa, dovrà l' equazione

$$\frac{2\omega xy - \theta x^2 - \theta y + (\theta^2 - \omega^2\theta)\Sigma 1}{2\omega^2} + \varphi(x\theta - y\omega) =$$
$$\frac{y^2 + x - (\theta^2 + \omega)\Sigma 1}{2\theta} + \Psi(x\theta - y\omega)$$ esser vera. Segue di quì che nell' equazione

$$\frac{\omega^2 y^2 + \omega^2 x - 2\omega\theta xy + \theta^2 x^2 + \theta^2 y - (\omega^3 + \theta^3)\frac{x+y}{\omega+\theta}}{2\theta\omega^2} = \Psi(x\theta - y\omega) - \ldots$$

$\varphi(x\theta - y\omega)$ il primo membro deve essere una funzione di $x\theta - y\omega$: dunque questo primo membro o deve divenire zero o eguale ad una quantità costante facendo $x\theta - y\omega = 0$, ovvero $x = \frac{y\omega}{\theta}$: fatta questa sostituzione il primo membro diviene effettivamente nullo: egli è dunque una funzione di $x\theta - y\omega$: dunque i due valori di Σy sono tali che l' uno si riduce facilmente all' altro, cambiando la forma della funzione arbitraria.

Il Geometra Bossut che (a) ha detto qualche cosa sopra la somma delle funzioni a più variabili, a parer mio ha fallato, poichè dichiara non sommabili certe espressioni, le quali per mezzo delle nostre teorie sono integrabili completamente.

§. 31. Noi abbiamo supposto nella determinazione delle differenze superiormente trattate, che le variabili x, y crescano nello stesso tempo degli aumenti ω e θ: può ancora considerarsi il caso nel quale queste variabili aumentino in tempi diversi, o una dopo dell' altra, e ricercarsi in questa ipotesi le differenze della funzione $z_{x,y}$: anzi in questo secondo caso la teoria che trattiamo, è di una maggiore estensione e di un maggior uso.

Ora adunque considerando generalmente la variazione che può soffrire la funzione $z_{x,y}$ in virtù degli aumenti che ricevono le variabili, si vedrà che possiamo ricercare le di lei differenze o rapporto ad x o rapporto ad y o rapporto ad x e ad y nello stesso tempo: così sarà espressa per

$z_{x+\omega,\,y} - z_{x,y}$ la differenza di $z_{x,y}$ rapporto ad x; per

$z_{x,\,y+\theta} - z_{x,y}$ la differenza di $z_{x,y}$ rapporto ad y; ed infine la differenza di $z_{x,y}$ presa per rapporto ad x e ad y nello stesso tempo sarà espressa dà $z_{x+\omega,\,y+\theta} - z_{x,y}$.

Le prime due differenze si chiamano *Differenze Parziali*,

(a) *Traité de Calcul Differentiel et de Calcul Integral: Tom. I. pag.* 64.

per distinguerle dalla terza, alla quale si è dato il nome di *Differenza Totale*. Ancora le differenze parziali sono indicate dalla lettera greca Δ, ma al disotto della funzione da differenziarsi si pone la variabile, rapporto alla quale dobbiamo differenziare, separandola dalla funzione medesima con una linea curva: l' ispezione oculare basterà per una maggior spiegazione.

Noi scriviamo $\Delta z_{\underbrace{x,y}_{x}}$ per indicare la differenza prima presa per rapporto ad x: egualmente $\Delta z_{\underbrace{x,y}_{y}}$ per indicare là differenza prima presa per rapporto ad y; e semplicemente (§. 23) $\Delta z_{x,y}$ per esprimere la differenza totale. Così:

$$\Delta z_{\underbrace{x,y}_{x}} = z_{x+\omega,y} - z_{x,y}\,,\quad \Delta z_{\underbrace{x,y}_{y}} = z_{x,y+\theta} - z_{x,y}\,.$$

Considerando la seguente tabella, vedremo come devono prendersi le differenze parziali del secondo ordine, e come devono scriversi:

Diff^{a}. 2^{a}. rapp. ad $x \ldots \Delta^2 z_{\underbrace{x,y}_{x^2}} = z_{x+2\omega,y} - 2z_{x+\omega,y} + z_{x,y}$

ad $y \ldots \Delta^2 z_{\underbrace{x,y}_{y^2}} = z_{x,y+\theta} - 2z_{x,y+\theta} + z_{x,y}$

ad x, e ad y successivamente $\Big\} \ldots \Delta^2 z_{\underbrace{x,y}_{xy}} = z_{x+\omega,y+\theta} - z_{x+\omega,y} - z_{x,y+\theta}$

$+ z_{x,y}$.

In generale per esprimere una differenziale $(m+n)^{esima}$ parziale presa m volte rapporto ad x, ed n volte rapporto ad y, si scrive $\Delta^{m+n} z_{\underbrace{x,y}_{x^m y^n}}$: si dà cioè alla caratteristica Δ un indice eguale all' ordine della differenza, e si scrive accanto ad essa la funzione $z_{x,y}$, sotto la quale sono collocate le variabili x, y rapporto a cui dobbiamo differenziare, ed è posta una linea curva in luogo della barra di divisione: a ciascuna poi di queste variabili si dà un esponente eguale al numero delle volte che deve prendersi la differenza rapporto ad essa.

L' operazione per avere le effettive differenze parziali non ha alcuna difficoltà; poichè nel prendere una differenza consideriamo costanti tutte le variabili, eccettuata quella rapporto a cui si vuol differenziare.

§. 32. Prendendo la differenza seconda di $z_{x,y}$ prima per rapporto ad y, poi per rapporto ad x, ottenghiamo per $\Delta^2 z_{\underbrace{x,y}_{yx}}$ una espressione, la quale eguaglia quella ritrovata superiormente per $\Delta^2 z_{\underbrace{x,y}_{xy}}$: è dunque indifferente l'ordine da seguirsi nel prendere la differenza seconda di $z_{x,y}$ rapporto ad x e ad y successivamente; in generale non sarà difficile dimostrare che per avere la differenza $\Delta^{m+n} z_{\underbrace{x,y}_{x^m y^n}}$, possiamo seguire nel differenziare quell' ordine che più ci piace: si può differenziare un certo numero di volte per rapporto ad x, quindi differenziare rapporto ad y, poi tornare a differenziare rapporto ad x, in quell' ordine che si vuole, poichè avremo sempre lo stesso risultato: conviene però che ad operazione finita le differenziazioni rapporto ad x siano m di numero, e quelle rapporto ad y n di numero.

Il superiore algoritmo per indicare le differenze quanto è chiaro e semplice allorchè trattasi soltanto di differenze parziali, o soltanto di differenze totali; diverrebbe imbarazzante e confuso se volessero indicarsi con esso le differenze parziali delle differenze totali e viceversa: in questo caso per indicare le differenze totali sarebbe necessario adoprare un' altra lettera diversa dal Δ.

Ma una tale inesattezza d' algoritmo non è d' alcuna influenza, come vedremo in tutto il corso dell' Opera. Vaglia per ogni cautela averla avvertita.

§. 33. Passiamo ora a dimostrare un teorema interessante che esprime la relaziane fra le differenze totali e le parziali appartenenti alla stessa funzione.

Abbiamo trovato al §. antecedente

$$\Delta^2 z_{\underbrace{x,y}_{xy}} = z_{x+\omega,y+\theta} - z_{x+\omega,y} - z_{x,y+\theta} + z_{x,y}$$

$$\Delta z_{\underbrace{x,y}_{x}} = z_{x+\omega,y} - z_{x,y}, \ \Delta z_{\underbrace{x,y}_{y}} = z_{x,y+\theta} - z_{x,y} \text{ : dunque}$$

$$\Delta z_{\underbrace{x,y}_{x}} + \Delta z_{\underbrace{x,y}_{y}} + \Delta^2 z_{\underbrace{x,y}_{xy}} = z_{x+\omega,y+\theta} - z_{x,y}\text{; ma (§. 27.)}$$

$$z_{x+\omega,y+\theta} - z_{x,y} = \Delta z_{x,y} \text{ dunque}$$

$$\Delta z_{x,y} = \Delta z_{\underbrace{x,y}_{x}} + \Delta z_{\underbrace{x,y}_{y}} + \Delta^2 z_{\underbrace{x,y}_{xy}}\text{;}$$ equazione che contiene questo interessante teorema.

„ La differenza totale della funzione $z_{x,y}$ delle due variabili „ x ed y è eguale alla somma delle tre differenze parziali della „ stessa funzione, cioè alla differenza prima parziale rapporto ad „ x, più alla differenza prima parziale rapporto ad y, più alla „ differenza seconda parziale per rapporto ad x, poi per rapporto ad y „.

Potrebbero trovarsi altri teoremi per le differenze degli ordini superiori.

§. 34. Premesse le regole generali per ottenere le differenze parziali delle funzioni a più variabili, trattenghiamoci nell' assegnare le differenziali delle diverse funzioni, per servirsi dei risultati che otterremo, allorchè parleremo delle integrazioni delle funzioni medesime.

$$(1) \ldots \Delta^2 \underbrace{xy}_{xy} = \omega\theta.$$

$$(2) \ldots \Delta^2 \underbrace{x^2y}_{xy} = 2\omega\theta x + \omega^2\theta.$$

$$(3) \ldots \Delta^2 \underbrace{x^3y}_{xy} = 3\theta\omega x^2 + 3\theta\omega^2 x + \omega^3\theta.$$

$$(4) \ldots \Delta^2 \underbrace{x^4y}_{xy} = 4\theta\omega x^3 + 6\theta\omega^2 x^2 + 4\theta\omega^3 x + \omega^4\theta.$$

ec. ec.

$$(5) \ldots \Delta^2 \underbrace{x^2y^2}_{xy} = 4\theta\omega xy + 2\theta\omega^2 y + 2\omega\theta^2 x + \omega^2\theta^2.$$

$$(6) \ldots \Delta^2 \underbrace{x^3y^2}_{xy} = 6\theta\omega x^2 y + 6\theta\omega^2 xy + 2\theta\omega^3 y + 3\omega\theta^2 x^2 + 3\omega^2\theta^2 x + \omega^3\theta^2.$$

ec. ec. ec.

In generale indicando per z_x una funzione di x, e per r_y una funzione di y, avremo

$$(7) \ldots \Delta^2 \underbrace{z_x . u_y}_{xy} = \Delta z_x . \Delta z_y.$$

Si vede come potranno aversi le differenze parziali degli ordini superiori, poichè l' operazione per prendere le differenze, non ha alcuna difficoltà: così

$$\Delta^3 \underbrace{x^2y}_{x^2y} = 2\omega\theta, \ \Delta^3 \underbrace{x^3y}_{x^2y} = 3\theta\omega(2x+\omega) + 3\theta\omega^3 \text{ ec.}$$

Nè sarà inutile osservare, che i risultati ottenuti nelle superiori differenziazioni, sarebbero stati li stessi, se le funzioni che abbiamo differenziate, fossero state aumentate di $\varphi(x) + \Psi(y)$, essendo $\varphi(x)$ una funzione qualunque di x, e $\Psi(y)$ una funzione qualunque di y, cioè la differenza parziale seconda di $x^2y + \varphi(x) + \Psi(y)$ sarebbe stata egualmente $2\omega\theta x + \omega^2\theta$, come era la differenza di x^2y.

§. 35. Sia $u_{x,y}$ o semplicemente u la differenza $\Delta^2 z_{\underbrace{x,y}_{xy}}$, ovvero (scrivendo z per $z_{x,y}$) $\Delta^2 \underbrace{z}_{xy}$, ed avremo $u = \Delta^2 \underbrace{z}_{xy}$.

La funzione z, la quale differenziata due volte, prima per rapporto ad x, poi per rapporto ad y, dà la funzione u, chiamasi la *Somma Seconda* o l' *Integrale Secondo* di z, *Parziale*, preso cioè prima per rapporto ad x, poi per rapporto ad y, e s' indica così

$z = \Sigma^2 \underbrace{u}_{xy}$: di modo che l' equazione

$u = \Delta^2 \underbrace{z}_{xy}$, conduce subito l' altra

$z = \Sigma^2 \underbrace{z}_{xy}$; ed in generale l' equazione

$u = \Delta^{m+n} \underbrace{z}_{x^m y^n}$ conduce l' equazione

$z = \Sigma^{m+n} \underbrace{u}_{x^m y^n}$; e queste due equazioni significano in sostanza la stessa cosa.

Nel passare dalle differenze agli integrali, ogni volta che si fa un' integrazione conviene aggiungere una costante arbitraria, acciocchè ad operazione finita si trovino nel risultato dell' integrazioni tante costanti arbitrarie, quante unità contiene l' ordine dell' integrale: così un integrale d' un ordine $n+m$ dovrà contenere un numero $m+n$ di costanti arbitrarie: in questo caso l' integrale prende il nome d' *Integrale Completo*.

Quelle costanti potranno anche essere funzioni variabili: imperocchè quando si faranno le integrazioni rapporto ad x, le costanti arbitrarie potranno essere funzioni di y, e quando integreremo rapporto ad y, le arbitrarie potranno essere funzioni di x.

Dopo tutto questo è facile ricavare dalle differenziali del §. antecedente queste formule d' integrazione

$\Sigma^2 \underbrace{1}_{xy} = \frac{xy}{\omega\theta} + \varphi(x) + \Psi(y)$, essendo $\varphi(x)$, $\Psi(y)$ due funzioni respettivamente di x e di y arbitrarie.

$\Sigma^2 \underbrace{x}_{xy} = \frac{x^2 y}{2\omega\theta} - \frac{\omega}{2} \Sigma^2 \underbrace{1}_{xy} + \varphi(x) + \Psi(y)$, e mutando x in y, ω in θ e

viceversa, avremo

$$\Sigma^2 \underbrace{y}_{xy} = \frac{y^2 x}{2\omega\theta} - \frac{\theta}{2} \Sigma^2 \underbrace{1}_{xy} + \varphi(x) + \Psi(y).$$

$$\Sigma^2 \underbrace{x^2}_{xy} = \frac{x^3 y}{3\omega\theta} - \omega \Sigma^2 \underbrace{x}_{xy} - \frac{\omega^2}{3} \Sigma 1 + \varphi(x) + \Psi(y)$$

ec. ec.

$$\Sigma^2 \underbrace{xy}_{xy} = \frac{x^2 y^2}{4\omega\theta} - \frac{\omega}{2} \Sigma^2 \underbrace{x}_{xy} - \frac{\theta}{2} \Sigma^2 \underbrace{x}_{xy} - \frac{\omega\theta}{4} \Sigma^2 \underbrace{1}_{xy} + \varphi(x) + \Psi(y).$$

$$\Sigma^2 \underbrace{x^2 y}_{xy} = \frac{x^3 y^2}{6\omega\theta} - \omega \Sigma^2 \underbrace{xy}_{xy} - \frac{\omega^2}{3} \Sigma^2 \underbrace{y}_{xy} - \frac{\theta}{2} \Sigma^2 \underbrace{x^2}_{xy} - \frac{\omega\theta}{2} \Sigma^2 \underbrace{x}_{xy} - \frac{\omega^2\theta}{6} \times \ldots$$
$$\Sigma^2 \underbrace{1}_{xy} + \varphi(x) + \Psi(y).$$

ec. ec. ec.

Si vede come potremo avere la somma seconda di un prodotto qualunque $x^m y^n$; anzi in generale dalla formula (7) del §. antecedente abbiamo (indicando per p_x una funzione di x, e per q_y una funzione di y)

$$\Sigma^2 \underbrace{p_x . q_y}_{xy} = \Sigma p_x . \Sigma q_y + \varphi(x) + \Psi(y).$$

Da quest' ultima formula possono aversi ancora più semplicemente espresse le somme che abbiamo quì sopra trovate.

§. 36. Dalla teorìa delle serie possiamo ancora ricavare la formula generale dell' integrale o *Somma Seconda* di una qualunque funzione $z_{x,y}$ di x e di y: infatti $\Sigma^2 \underbrace{z_{x,y}}_{xy}$ è eguale alla somma rapporto ad y della somma di $z_{x,y}$ rapporto ad x: ora la somma di $z_{x,y}$ rapporto ad x è

$z_{x-\omega,y} + z_{x-2\omega,y} + z_{x-3\omega,y} + z_{x-4\omega,y} +$ ec. dunque

$$\Sigma^2 \underbrace{z_{x,y}}_{xy} = \Sigma \underbrace{z_{x-\omega,y}}_{y} + \Sigma \underbrace{z_{x-2\omega,y}}_{y} + \Sigma \underbrace{z_{x-3\omega,y}}_{y} + \text{ec., e però}$$

$$\begin{aligned} \Sigma^2 \underbrace{z_{x,y}}_{xy} = {} & z_{x-\omega,y-\theta} + z_{x-2\omega,y-\theta} + z_{x-3\omega,y-\theta} + \text{ec.} \\ & + z_{x-\omega,y-2\theta} + z_{x-2\omega,y-2\theta} + z_{x-3\omega,y-2\theta} + \text{ec.} \\ & + z_{x-\omega,y-3\theta} + z_{x-2\omega,y-3\theta} + z_{x-3\omega,y-3\theta} + \text{ec.} \\ & + \text{ec.} \qquad + \text{ec.} \qquad + \text{ec.} \end{aligned}$$

Questa formula in generale è composta di un numero infinito di termini: nei diversi casi particolari però secondo le circostanze del problema, ne è assegnato il fine.

Se si fa $\omega = 1$, $\theta = 1$, e le variabili x, y si suppongono numeri intieri, allora la serie suole finire ai termini ove o tutte e due, o una delle variabili diviene nulla. Così incominciando dagli ultimi termini a scrivere la serie, si ha

$$\begin{aligned} \Sigma^2 \underbrace{z_{x,y}}_{xy} = {} & z_{0,0} + z_{1,0} + z_{2,0} + z_{3,0} + \ldots\ldots + z_{x-1,0} \\ & + z_{0,1} + z_{1,1} + z_{2,1} + z_{3,1} + \ldots\ldots + z_{x-1,1} \\ & + z_{0,2} + z_{1,2} + z_{2,2} + z_{3,2} + \ldots\ldots + z_{x-1,2} \\ & + z_{0,3} + z_{1,3} + z_{2,3} + z_{3,3} + \ldots\ldots + z_{x-1,3} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + z_{0,y-1} + z_{1,y-1} + z_{2,y-1} + z_{3,y-1} + \ldots + z_{x-1,y-1}. \end{aligned}$$

§. 37. **Facciamo** qualche applicazione delle integrazioni delle funzioni a più variabili, alle serie doppie (a).

(a) Si chiamano serie doppie quelle che hanno il termine generale funzione di due variabili.

Sia la serie doppia che è conosciuta sotto il nome di Tavola Pittagorica

	0	1	2	3	4	5 x
0	0	0	0	0	0	0 0
1	0	1	2	3	4	5 x
2	0	2	4	6	8	10 ..... $2x$
3	0	3	6	9	12	15 ..... $3x$
4	0	4	8	12	16	20 ..... $4x$
⋮	.	.	.	.	.	. ...
y	0	y	$2y$	$3y$	$4y$	$5y$ ..... xy

della quale cercasi la somma. Indichiamo per S la somma di tutti i termini fino agli indici $x-1$, $y-1$; avremo perciò che si è veduto al §. antecedente

$$S = \Sigma^2 \underbrace{xy}_{xy}.$$

Ora dal §. 35. si ricava, facendo $\omega = \theta = 1$,

$$\Sigma^2 \underbrace{xy}_{xy} = \frac{x^2y^2}{4} - \frac{1}{2}\Sigma^2 \underbrace{y}_{xy} - \frac{1}{2}\Sigma^2 \underbrace{x}_{xy} - \frac{1}{4}\Sigma^2 \underbrace{1}_{xy} + \varphi(x) + \Psi(y),$$

$$\Sigma^2 \underbrace{xy}_{xy} = \frac{x^2y^2}{4} - \frac{xy^2}{4} + \frac{xy}{4} - \frac{x^2y}{4} + \frac{xy}{4} - \frac{xy}{4} + \varphi(x) + \Psi(y),$$

$$\Sigma^2 \underbrace{xy}_{xy} = \frac{x^2y^2 - xy^2 - yx^2 + xy}{4} + \varphi(x) + \Psi(y) = \frac{x(x-1)}{2}\cdot\frac{y(y-1)}{2} +$$

$\varphi(x) + \Psi(y)$, dunque

$$S = \frac{x(x-1)y(y-1)}{2.2} + \varphi(x) + \Psi(y).$$

Avremmo trovato subito questo risultato per mezzo della formula

$\Sigma^2 \underbrace{p_x \cdot q_y}_{xy} = \Sigma p_x \cdot \Sigma q_y + \varphi(x) + \Psi(y)$, facendovi $p_x = \dots$ x, $q_y = y$.

Siccome quando x ed y sono nulle, la somma S deve essere ancora essa nulla, avremo perciò $\varphi(x) = 0$, $\Psi(y) = 0$, e perciò

$$S = \frac{x(x-1)y(y-1)}{4}.$$

Sia $x = 5$, $y = 4$, e troveremo

$$S = \frac{5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3}{4} = 60.$$

La somma adunque di tutti i termini della serie fino all' indice 4 orizzontale e all' indice 3 verticale, è $= 60$. Ciò può facilmente verificarsi.

Per un altro esempio abbiasi la serie doppia

	0	1	2	3	4 x
0	0	1	2	3	4 x
1	1	2	3	4	5 .... $x+1$
2	2	3	4	5	6 .... $x+2$
3	3	4	5	6	7 .... $x+3$
4	4	5	6	7	8 .... $x+4$
⋮	. . .	. . .	. . .	. . .	. . . .
⋮	. . .	. . .	. . .	. . .	. . . .
y	y,	$y+1$,	$y+2$,	. . .	. . . . . . $y+x$

della quale sia cercata la somma. Indichiamo per S la somma di tutti i di lei termini, fino agli indici $x-1$, $y-1$, ed avremo

$$S = \Sigma^2 \underbrace{(x+y)}_{xy} = \Sigma^2_{xy} x + \Sigma^2_{xy} y = \frac{x^2 y + y^2 x - 2xy}{2} + \varphi(x) + \Psi(y).$$

Per determinare le due funzioni osserveremo che facendo $x = 1$, dobbiamo avere

$S = \frac{y(y-1)}{2}$, e da questa condizione si ricava $\frac{y(y-1)}{2} = \dots$ $\frac{y + y^2 - 2y}{2} + \varphi(1) + \Psi(y)$ che ci dà $\Psi(y) = -\varphi(1)$. Egualmente facendosi $y = 1$ dobbiamo avere

$S = \frac{x(x-1)}{2}$, e quindi $\frac{x(x-1)}{2} = \frac{x^2 + x - 2x}{2} + \varphi(x) + \varphi(1)$, dalla quale si deduce $\varphi(x) + \varphi(1) = 0$.

Le due funzioni adunque $\varphi(x)$, $\Psi(y)$ sono costanti; queste si annullano, poichè la somma cercata deve essere $= 0$ quando $x = y = 0$. Sarà pertanto

$S = \frac{x^2 y + y x^2 - 2xy}{2}$. Se $x = 5$, $y = 4$, avremo $S = 70$.

§. 38. Data una funzione esplicita delle due variabili x, y che noi abbiamo rappresentata per $z_{x,y}$, abbiamo considerato il di lei stato variato, quando cioè x, y divenivano $x+\omega, y+\theta$; ne abbiamo determinate le differenze parziali, totali, e le somme. Consideriamo adesso il caso nel quale la funzione z è una funzione implicita di due variabili x ed y, cioè il caso, in cui z è data in x ed y per mezzo di una equazione fra essa e le dette variabili.

Una equazione fra tre variabili x, y, z che possiamo generalmente rappresentare per $\varphi(x, y, z) = 0$ ci dà sempre o possiamo supporre che ci dia una di queste variabili espressa in funzione delle altre due. I valori di due di queste variabili rimangono indeterminati, e l' equazione sussiste sempre qualunque d' altronde siano questi valori. Riguardiamo z come una funzione delle due variabili x ed y, ed indichiamola per $z_{x,y}$: la forma generale dell' equazione sarà allora $\varphi(z_{x,y}, x, y) = 0$.

Quest' equazione essendo vera per qualunque valore di x e di y, potremo in essa sostituire $x+\omega$ invece di x; ed $y+\theta$ invece di y, senza che questa cessi di sussistere: ricaveremo adunque da essa queste tre equazioni

$(1) \ldots \varphi(z_{x+\omega,y}, x+\omega, y)=0$

$(2) \ldots \varphi(z_{x,y+\theta}, x, y+\theta)=0$

$(3) \ldots \varphi(z_{x+\omega,y+\theta}, x+\omega, y+\theta)=0$

le quali avranno luogo insieme con lei.

L'equazione (1) s'ottiene ponendo nella proposta $x+\omega$ per x; l'equazione (2) si ottiene sostituendovi $y+\theta$ per y; e l'equazione (3), sostituendovi $x+\omega, y+\theta$ nello stesso tempo per x e per y.

Ciascuna di queste equazioni (1), (2), (3) ci dà altre tre equazioni che hanno luogo insieme con essa: così l'equazione (1) ci dà

$(4) \ldots \varphi(z_{x+2\omega,y}, x+2\omega, y)=0$

$(5) \ldots \varphi(z_{x+\omega,y+\theta}, x+\omega, y+\theta)=0$

$(6) \ldots \varphi(z_{x+2\omega,y+\theta}, x+2\omega, y+\theta)=0.$

L'equazione (2) ci dà

$(7) \ldots \varphi(z_{x+\omega,y+\theta}, x+\omega, y+\theta)=0$

$(8) \ldots \varphi(z_{x,y+2\theta}, x, y+2\theta)=0$

$(9) \ldots \varphi(z_{x+\omega,y+2\theta}, x+\omega, y+2\theta)=0.$

L'equazione (3) ci dà

$(10) \ldots \varphi(z_{x+2\omega,y+\theta}, x+2\omega, y+\theta)=0$

$(11) \ldots \varphi(z_{x+\omega,y+2\theta}, x+\omega, y+2\theta)=0$

$(12) \ldots \varphi(x+2\omega, y+2\theta, z_{x+2\omega,y+2\theta})=0.$

Di tutte queste dodici equazioni la (3), la (5) e la (7) sono la stessa; la (6) e la (10) sono parimente la stessa; la (8) e la (11) sono anche la stessa: così esse si riducono ad otto equazioni diverse che sussistono nello stesso tempo della proposta $\varphi(z_{x,y}, x, y)=0$:

Seguendo lo stesso andamento, potremmo dedurne delle altre che avessero luogo insieme con loro.

§. 39. Avendo luogo insieme con la proposta le equazioni (1), (2), (3) ec. qualunque combinazione di queste equazioni, avrà luogo ancora essa simultaneamente: le differenze adunque dell'equazione $\varphi(z_{x,y}, x, y)=0$, o semplicemente $\varphi=0$, sia parziali, sia totali, sussisteranno insieme con l'equazione stessa $\varphi=0$; esse infatti non sono che combinazioni delle superiori equazioni, ottenute sottraendo le une di quelle equazioni dalle altre: così per es.

$$\Delta^2 \underset{xy}{\varphi} = \varphi(z_{x+\omega,y+\theta}, x+\omega, y+\theta) - \varphi(z_{x,y+\theta}, x, y+\theta) -$$
$$\varphi(z_{x+\omega,y}, x+\omega, y) + \varphi(z_{x,y}, x, y) = 0.$$

In generale si dà il nome d'*Equazioni a Differenze Parziali* a quelle equazioni che sono o possono considerarsi essere una combinazione qualunque delle (1), (2), (3) ec. Si chiamano del *Primo Ordine* quando contengono

$z_{x+\omega,y}$ e $z_{x,y+\theta}$: si chiamano del *Secondo* quando contengono alcune delle funzioni

$z_{x+2\omega,y}, z_{x+\omega,y+\theta}, z_{x,y+2\theta}$: si chiamano del *Terzo* quando contengono alcune delle funzioni

$z_{x+3\omega,y}, z_{x+2\omega,y+\theta}, z_{x+\omega,y+2\theta}, z_{x,y+3\theta}$, e generalmente si chiamano dell' n^{esimo} ordine, quando esse contengono alcune funzioni di questa forma

$z_{x+(n-m)\omega,y+m\theta}$.

Tutte le combinazioni adunque che possono farsi con la proposta e con l'equazioni (1) e (2), sono equazioni a differenze parziali del primo ordine; e tutte quelle che possono farsi con la proposta e con le equazioni (1), (2), (3), (4) ec. (12), sono equazioni a differenze parziali del quarto ordine, e così di seguito.

§. 40. Supponghiamo che la proposta equazione $\varphi(z_{x,y}, x, y)$

$=0$, contenga alcune costanti arbitrarie: è manifesto che queste si ritroveranno inalterate nelle equazioni (1), (2), (3), (4) ec. Ora per mezzo della proposta e delle equazioni (1), (2) potremo eliminare due costanti arbitrarie, ed otterremo un' equazione a differenze parziali del primo ordine, la quale conterrà due costanti di meno della proposta: egualmente se per mezzo della proposta e di tutte le ritrovate equazioni diverse che sono otto di numero, si eliminano otto costanti arbitrarie, avremo un' equazione del secondo ordine, nella quale non mancherà alcuna di quelle funzioni

$z_{x+2\omega,y}, z_{x+\omega,y+\theta}, z_{x,y+2\theta}$, conterrà otto costanti di meno della proposta, ed avrà luogo insieme con essa. Così potrebbe dalla proposta dedursi un' equazione del terzo ordine a differenze finite e parziali che avesse luogo insieme con lei, e contenesse un certo numero di costanti di meno di essa.

Anzi le quantità che si eliminano, possono essere ancora funzioni variabili. Abbiasi infatti l' equazione

$\varphi(z_{x,y}, x, y, u_y, p_x)=0$ nella quale u_y e p_x rappresentano funzioni determinate o indeterminate di x e di y respettivamente.

Ha luogo insieme con la proposta (§. 38.) ancora questa equazione che da essa deriva

$\varphi(z_{x+\omega,y}, x+\omega, y, p_{x+\omega}, u_y)=0$: ora se per mezzo di quest' ultima equazione e della proposta medesima eliminiamo la funzione u_y che ritrovasi inalterata in ambedue, avremo una nuova equazione che rappresenteremo per

$(a)\ldots\Psi(z_{x+\omega,y}, x, y, p_x, p_{x+\omega})=0$, la quale non conterrà traccia alcuna della funzione u_y.

Sussistendo quest' ultima equazione, avranno luogo con essa ancora quest' altre due

$$\Psi(z_{x+\omega,y+\theta}, x, y+\theta, p_x, p_{x+\omega})=0$$

$$\Psi(z_{x+\omega,y+2\theta}, x+\omega, y+2\theta, p_x, p_{x+\omega})=0$$

le quali s' ottengono col sostituire nell' equazione successivamente $y+\theta$ per y.

Per mezzo di queste due ultime equazioni e della (a), potremo eliminare le due funzioni $p_x, p_{x+\omega}$, ed avremo infine un' equazione fra

$x, y, z_{x,y}, z_{x+\omega,y}, z_{x+\omega,y+\theta}, z_{x+\omega,y+2\theta}$, la quale non conterrà più alcuna traccia delle due funzioni p_x, u_y che si ritrovavano nella proposta. Questa sarà un' equazione a differenze parziali del terzo ordine; così per eliminare due funzioni da una equazione, è stato necessario passare alle equazioni a differenze parziali del terzo ordine: può accadere però che bastino l' equazioni a differenze parziali del secondo ordine per eliminare due funzioni secondo la natura delle funzioni e dei loro coefficienti.

Per esempio indicando per

$u_{\theta x+\omega y}, p_{\theta x+\omega y}$ due funzioni diverse della quantità variabile $\theta x+\omega y$, esse possono eliminarsi dall' equazione

$\varphi(z_{x,y}, x, y, u_{\theta x+\omega y}, p_{\theta x+\omega y})=0$ per mezzo dell' equazioni alle differenze parziali del secondo ordine: infatti insieme con la proposta hanno luogo queste tre equazioni

$$\varphi(z_{x+2\omega,y}, x+2\omega, y, u_{\theta x+\omega y+2\omega\theta}, p_{\theta x+\omega y+2\omega\theta})=0$$

$$\varphi(z_{x+\omega,y+\theta}, x+\omega, y+\theta, u_{\theta x+\omega y+2\omega\theta}, p_{\theta x+\omega y+2\omega\theta})=0$$

$$\varphi(z_{x,y+2\theta}, x, y+2\theta, u_{\theta x+\omega y+2\omega\theta}, p_{\theta x+\omega y+2\omega\theta})=0$$

dalle quali eliminando

$u_{\theta x+\omega y+2\omega\theta}, p_{\theta x+\omega y+2\omega\theta}$, avremo un' equazione a differenze parziali del secondo ordine che non conterrà le funzioni, le quali erano nella proposta.

Vedremo tutto più chiaramente allorchè parleremo dell' integrazione delle equazioni a differenze finite e parziali.

§. 41. Le equazioni a differenze parziali sono moltissimo più generali di quelle dalle quali per mezzo dell' eliminazione delle funzioni sono state dedotte: ciò si concepisce facilmente, imperocchè eliminata da una proposta equazione una funzione u_x determinata di x, l' equazione a differenze parziali che non contiene questa funzione, è la stessa come se u_x fosse stata una funzione indeterminata di x: mentre dunque l'equazione proposta appartiene ad un problema, in cui u_x ha un certo valore determinato, l'equazione a differenze parziali appartiene a tutti i diversi problemi che corrispondono ai diversi valori, i quali possono darsi ad u_x secondo il nostro arbitrio.

§. 42. I due aumenti delle variabili x, y che noi abbiamo rappresentati per ω e θ, sogliono ancora rappresentarsi per Δx e Δy: essi infatti sono le differenze delle variabili x ed y. Ordinariamente si suppongono costanti, ma può ancora estendersi il calcolo delle differenze finite a considerarli variabili: le regole della differenziazione però sono le stesse.

CALCOLO DELLE DIFFERENZE FINITE

C A P. III.

Integrazione delle Equazioni a differenze finite delle funzioni di una sola variabile.

§. 43. Abbiamo veduto al (§. 11.) che data un' equazione

$$(\mathrm{U}) \ldots \varphi(x, y_x, a, b, c \text{ ec.}) = 0$$

fra x, y_x e quante si vogliono costanti, possiamo sempre dedurne un' altra

$$\varphi'(x, y_x, \Delta y_x, \Delta^2 y_x, \text{ ec.}) = 0 \text{ ovvero } (\S.\ 5.)$$

$$(\mathrm{V}) \ldots \Psi(x, y_x, y_{x+\omega}, y_{x+2\omega}, \text{ ec.}) = 0$$

alle differenze finite dell' ordine n^{esimo}, la quale contenga un numero n di costanti di meno della data equazione (U) medesima.

Come l'equazione (V) si chiama l'equazione alle differenze dell' ordine n^{esimo} della (U), così quest' ultima chiamasi l' *Equazione Sommatoria*, o l' *Integrale* n^{esimo} della equazione (V).

Dunque *l' integrale* n^{esimo} *di una equazione alle differenze* n^{esime} *è un' altra equazione fra* x, y_x *ed un numero* n *di costanti, dall' eliminazione delle quali risulta la stessa equazione alle differenze*; e siccome data l'equazione (V), nella quale non si trovano quelle costanti, non è determinata cosa alcuna sopra la loro natura, così esse possono ricevere qualunque valore che ci piace: si chiamano per questo *Arbitrarie*.

Si dà poi il nome d' *Integrale Completo* a quella equazione (U) quando il numero delle costanti arbitrarie che essa contiene è eguale all' ordine dell' equazione differenziale; e dicesi semplicemente *Integrale*, o *Integrale Particolare* quando le costanti arbitrarie vi sono in un minor numero.

Chiamasi *Integrale del Primo ordine* o *Integrale Primo*, un' equazione fra $x, y_x, y_{x+\omega}, y_{x+2\omega}$, ec., $y_{x+(n-1)\omega}$ ed una costante arbitraria, dall' eliminazione della quale risulti l' equazione (V); si chiama *Integrale del Secondo* o *Integrale Secondo* una equazione fra $x, y_x, y_{x+\omega}, y_{x+2\omega}$, ec., $y_{x+(n-2)\omega}$, e due costanti arbitrarie, dall' eliminazione delle quali risulti la proposta (V) e così di seguito.

D' ora in avanti tutte le nostre ricerche sopra l' integrazione dell' equazioni saranno dirette a ritrovare l' integrale dell' ordine n^{esimo}; e per questo noi diremo semplicemente *Integrale* per intendere l' integrale n^{esimo}: quando la cosa dovrà essere diversamente lo avvertiremo.

§. 44. Siccome l' equazione sommatoria (U) e l' equazione colle differenze n^{esime} (V) hanno luogo nello stesso tempo, così quest' ultima diverrà identica quando vi si sostituiscono i valori di $y_x, y_{x+\omega}, y_{x+2\omega}$ ec. ricavati dall' equazione sommatoria ed espressi per x e per le n costanti arbitrarie.

Segue da ciò che è la stessa cosa, data un' equazione (V) alle differenze dell' ordine n^{esimo}, *ritrovare un' equazione* (U) *fra* x, y_x, *dalla quale per mezzo dell' eliminazione di* n *costanti essa risulti*, ovvero *ritrovare per* y_x *una tale espressione che sostituita nella stessa* (V) *la renda identica*; per questo noi daremo il nome d' integrale dell' equazione (V) a quell' espressione di y_x *la quale contiene un numero* n *di costanti arbitrarie, e che sostituendo essa ed i valori da lei dedotti per* $y_{x+\omega}, y_{x+2\omega}$ *ec. nella equazione alle differenze* (V), *la rende identica*. S' aggiunge a questo integrale il nome di *Completo*, onde distinguerlo da quella espressione cui mancano alcune

costanti arbitrarie, e che prende allora il nome d' *Integrale* completo, conformemente a ciò che è detto sopra.

Nel trattare dell' integrazione delle equazioni noi cominceremo dal sopporre $\omega = 1$, e vedremo in seguito come dagli integrali ottenuti in questa supposizione, possono dedursi gli integrali che si convengono al caso di qualunque valore di ω; noi parleremo principalmente dell' integrazione delle equazioni lineari, nelle quali cioè la funzione incognita y_x e le sue differenze Δy_x, $\Delta^2 y_x$ ec. ovvero le funzioni y_{x+1}, y_{x+2} ec., non sono elevate che alla prima potenza, poichè queste sono le sole equazioni, per le quali si abbiano dei metodi d' integrazione dotati di qualche generalità.

§. 45. Ecco la forma generale delle equazioni che ci proponghiamo d' integrare:

$$\Delta^n y_x + A\Delta^{n-1} y_x + B\Delta^{n-2} y_x + \ldots\ldots + P\Delta y_x + Q y_x = X$$

ovvero

$y_{x+n} + a y_{x+n-1} + b y_{x+n-2} + \ldots\ldots + q y_x = X$: di queste due forme una si può sempre ridurre all' altra per mezzo delle formule del (§. 5.) e ciascuna di esse rappresenta egualmente un' equazione lineare alle differenze finite dell' ordine n. La seconda forma però, come più comoda per i nostri metodi, sarà quella sotto la quale considereremo le equazioni da integrarsi.

Si tratta adunque di trovare l' integrale completo dell' equazione lineare dell' ordine n^{esimo}:

$$(A) \ldots y_{x+n} + a y_{x+n-1} + b y_{x+n-2} + \ldots\ldots + p y_x = X,$$

di trovare cioè per y_x una tale espressione in x che contenga un numero n di costanti arbitrarie, e che ponendovi $x+1$ invece di x per avere y_{x+1}, $x+2$ per x a fine di avere y_{x+2}, e così di seguito, e quindi sostituendo l' espressioni di y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, ec. nella proposta, questa divenga identica.

Per procedere con metodo in tal ricerca, noi cominceremo dalle equazioni del primo ordine, e quindi passeremo alle equazioni degli ordini superiori.

Sia pertanto da integrarsi l' equazione del primo ordine

$y_{x+1} - a_x y_x = 0$, nella quale il secondo membro è nullo, ed il coefficiente a_x è una cognita funzione di x. Abbiamo da questa equazione $y_{x+1} = a_x y_x$, e prendendone i logaritmi

$ly_{x+1} = ly_x + la_x$, ovvero

$ly_{x+1} - ly_x = la_x$, e perciò

$\Delta ly_x = la_x$.

Quest' ultima equazione conduce subito (14) quest' altra

$ly_x = \Sigma la_x$, da cui $y_x = e^{\Sigma la_x}$, (indicando per e il numero il di cui logaritmo iperbolico è l' unità). Ora abbiamo (13) in generale $\Sigma la_x = \Sigma la_x + C$ rappresentando per C una costante arbitraria; dunque sarà

$y_x = e^{\Sigma la_x + C} = e^C . e^{\Sigma la_x}$: ma essendo C arbitraria è ancora e^C una quantità arbitraria; dunque ponendo invece di e^C, la costante arbitraria A, avremo

$y_x = Ae^{\Sigma la_x}$; e questa espressione di y_x sarà l' integrale completo (44) della proposta.

L' espressione poi di Σla_x si ritrova per mezzo delle regole date per l' integrazione delle funzioni al Cap. I.: in generale sarà (17)

$\Sigma la_x = la_{x-1} + la_{x-2} + \ldots\ldots + la_1 + la_0 = l(a_{x-1}.a_{x-2} \times \ldots\ldots\ldots a_1.a_0)$, ed avremo l' integrale completo della proposta espresso ancora in quest' altra maniera

$y_x = Ae^{l(a_{x-1}.a_{x-2}\ldots\ldots a_1.a_0)} = Aa_{x-1}.a_{x-2}\ldots\ldots a_1.a_0$, come può verificarsi.

§. 46. Abbia l' equazione da integrarsi il secondo membro che sia una funzione qualunque di x che indicheremo per X; debbasi cioè trovar l' integrale completo dell' equazione $y_{x+1} - a_x y_x = X$.

Facciamo $y_x = \alpha_x \Sigma z_x$, essendo α_x, z_x due funzioni incognite di x da determinarsi. Sarà evidentemente (16)

$y_{x+1} = \alpha_{x+1} \Sigma z_{x+1} = \alpha_{x+1}(z_x + \Sigma z_x)$, e sostituendo nella proposta per y_x e per y_{x+1}, i loro valori, troveremo fra α_x e z_x questa equazione

$(\alpha_{x+1} - a_x \alpha_x)\Sigma z_x + \alpha_{x+1}.z_x = X$.

Siccome abbiamo una sola equazione fra le due incognite α_x, z_x, così una di queste potrà determinarsi a nostro arbitrio: determiniamo α_x in maniera che il coefficiente di Σz_x divenga nullo. Questa condizione ci darà per determinare α_x l' equazione

$\alpha_{x+1} - a_x \alpha_x = 0$, e per determinare z_x, l' equazione

$\alpha_{x+1}, z_x = X$: avremo adunque (45)

$\alpha_x = Ae^{\Sigma la_x}$,

$z_x = \frac{1}{A} e^{-\Sigma la_{x+1}}.X$, e quindi

$y_x = \alpha_x \Sigma z_x = e^{\Sigma la_x} \Sigma e^{-\Sigma la_{x+1}}.X$: ma

$\Sigma e^{-\Sigma la_{x+1}}.X = \Sigma e^{-\Sigma la_{x+1}}.X + C$ costante; dunque

$y_x = e^{\Sigma la_x}(C + \Sigma e^{-\Sigma la_{x+1}}.X)$: questa espressione è l' integrale completo della proposta, poichè soddisfa ad essa (44) e contiene una costante arbitraria.

Essendo (17) $\Sigma la_{x+1} = la_x + \Sigma la_x$, avremo

$e^{-\Sigma la_{x+1}} = e^{-la_x - \Sigma la_x} = e^{-\Sigma la_x}\cdot\frac{1}{e^{la_x}} = e^{-\Sigma la_x}\cdot\frac{1}{a_x}$, e quindi sostituendo nell' espressione trovata per y_x, avremo l' integrale completo della proposta sotto quest' altra forma

$$y_x = e^{\Sigma la_x}\left(C + \Sigma e^{-\Sigma la_x}\cdot\frac{X}{a_x}\right).$$

Supponghiamo che l' equazione sia $y_{x+1} - ay_x = b$, a, b essendo costanti: avremo allora

$$y_x = a^{x-1}\left(C + b\Sigma\frac{1}{a^x}\right) = a^{x-1}\left(C + b.\frac{1}{a^x}.\frac{a}{1-a}\right) = Ca^{x-1} + \frac{b}{1-a} = C'a^x + \frac{b}{1-a},$$ facendo $C' = \frac{C}{a}$.

Lo sviluppo dei ritrovati integrali ci è dato dall' integrazione di funzioni di una sola variabile; ma una equazione si considera come integrata quando il suo integrale dipende dalle somme delle funzioni.

Essendo X una funzione qualunque data di x, rappresentiamola per m_x, e quando le funzioni che entrano nell' integrale completo, non saranno integrabili, prenderemo per rappresentare lo stesso integrale completo, la seguente espressione sbarazzata dai segni sommatorj:

$y_x = a_0\cdot a_1 \ldots\ldots a_{x-1}\cdot\left(C + \Sigma\frac{m_x}{a_x\cdot a_{x-1}\ldots\ldots a_1\cdot a_0}\right)$; e togliendo l' altro segno sommatorio che è fra le parentesi, avremo

$$y_x = a_{x-1}\cdot a_{x-2}\cdot a_{x-3}\ldots\ldots a_1\cdot a_0\Big(C + \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{m_{x-1}}{a_{x-1}\cdot a_{x-2}\ldots\ldots a_1\cdot a_0} + \frac{m_{x-2}}{a_{x-2}\ldots\ldots a_1\cdot a_0} + \ldots\ldots\ldots +$$

$$\frac{m_1}{a_1\cdot a_0} + \frac{m_0}{a_0}\Big),$$ ovvero

$$\begin{aligned}
y_x = {} & m_{x-1} + \\
& a_{x-1}m_{x-2} + \\
& a_{x-1}a_{x-2}m_{x-3} + \\
& a_{x-1}a_{x-2}a_{x-3}m_{x-4} + \\
& a_{x-1}a_{x-2}a_{x-3}a_{x-4}m_{x-5} + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
& a_{x-1}a_{x-2}a_{x-3}\ldots\ldots\ldots a_1 m_0 + \\
& a_{x-1}a_{x-2}a_{x-3}\ldots\ldots\ldots a_1 a_0 C.
\end{aligned}$$

Se a_0, m_0 fossero zero, cioè se le funzioni m_x, a_x diventassero nulle quando $x = 0$, allora le espressioni finirebbero con m_1 ed a_1, e se queste ultime fossero anche nulle, terminerebbero le espressioni con m_2, a_2, e così di seguito: in generale dalle circostanze dei problemi, nella soluzione dei quali s' impiegano queste formule, determineremo il fine delle serie.

§. 47. Per farne un esempio, supponghiamo che si ricerchi il termine generale della seguente serie

Indici	0	1	2	3	4	5	6 x
Serie	1,	3,	16,	137, ... y_x			

i termini della quale sono legati con questa legge: un termine qualunque è eguale al termine antecedente moltiplicato per 2 elevato ad una potenza indicata dall' indice del termine che si ricerca, più il quadrato di questo stesso indice. Sia y_x il termine ricercato, sarà y_{x-1}, il suo termine antecedente, e secondo questa legge avremo $y_x = 2^x y_{x-1} + x^2$: se facciamo in questa equazione $x+1$ invece di x, avremo $y_{x+1} = 2^{x+1} y_x + (x+1)^2$ equazione a differenze finite del primo ordine, dall' integrazione della quale dipende il termine generale di quella serie.

Paragonando questa equazione con quella del §. antecedente avremo

$a_x = 2^{x+1}$, $X = (x+1)^2$, e quindi

$$y_x = e^{\Sigma l 2^{x+1}} \left(C + \Sigma e^{-\Sigma l 2^{x+2}} . (x+1)^2 \right):$$ ora

$$e^{\Sigma l 2^{x+1}} = e^{\Sigma (x+1) l 2} = e^{\frac{(x+1)x}{2} l 2} = e^{l 2 \frac{x(x+1)}{2}} = 2^{\frac{x(x+1)}{2}};$$

dunque

$$y_x = 2^{\frac{x(x+1)}{2}} . \left(C + \Sigma \frac{(x+1)^2}{2^{\frac{(x+1)(x+2)}{2}}} \right),$$ e perciò che abbiam detto al §. antecedente,

$$y_x = 2^{\frac{x(x+1)}{2}} \left(C + \frac{1}{2} + \frac{2^2}{2^3} + \frac{3^2}{2^{2\cdot3}} + \frac{4^2}{2^{2\cdot5}} + \dots\dots + \frac{x^2}{2^{\frac{x(x+1)}{2}}} \right).$$

Per determinare la costante, s'osservi che $x = 0$, ci dà $y_0 = 1$, e perciò $1 = 2^0 C$, da cui $C = 1$, e quindi il termine generale della serie sarà

$$y_x = 2^{\frac{x(x+1)}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{2^2}{2^3} + \frac{3^2}{2^{2\cdot3}} + \frac{4^2}{2^{2\cdot5}} + \dots\dots + \frac{x^2}{2^{\frac{x(x+1)}{2}}} \right).$$

Vogliasi il termine corrispondente all'indice 3, avremo $x = 3$, e perciò

$y_3 = 2^6 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{2^2}{2^3} + \frac{3^2}{2^6} \right) = 64 + 32 + 32 + 9 = 137$, come è

appunto nella serie.

§. 48. Venendo alle equazioni del secondo ordine, sia proposta l'equazione

$y_{x+2} - b_x y_{x+1} - a_x y_x = 0$, nella quale a_x, b_x sono due funzioni cognite di x, ed il secondo membro è nullo.

Per averne l'integrale ponghiamo $y_x = A e^{\Sigma l m_x}$ essendo A una quantità costante indeterminata, ed m_x una funzione di x incognita. Dopo questa posizione avremo

$$y_{x+1} = A e^{\Sigma l m_{x+1}} = A e^{\Sigma l m_x} . e^{l m_x};$$

$y_{x+2} = A e^{\Sigma l m_x} . e^{l m_x + l m_{x+1}}$, e sostituendo nella proposta, otterremo (dividendo tutti i suoi termini per $A e^{\Sigma l m_x}$) per determinare m_x questa equazione

$e^{l m_x + l m_{x+1}} - b_x e^{l m_x} - a_x = 0$, ovvero più semplicemente

$m_x m_{x+1} - b_x m_x - a_x = 0$. Quest' ultima equazione, cui si è ridotta l' integrazione della proposta, è una equazione del primo ordine, ma non lineare, alla quale soddisfa per m_x questa funzione inesplicabile in forma di frazione continua

$$m_x = b_{x-1} + \cfrac{a_{x-1}}{b_{x-2} + \cfrac{a_{x-2}}{b_{x-3} + \cfrac{a_{x-3}}{b_{x-4} + \cfrac{a_{x-4}}{\ddots + b_1 + \cfrac{a_1}{C}}}}}$$

indicando C una costante qualunque indeterminata.

L' integrale adunque della proposta sarà $y_x = Ae^{\Sigma l m_x}$, ponendovi invece di m_x la ritrovata espressione, e sarà completo, poichè contiene due costanti A, C che rimanendo indeterminate dipendono in conseguenza dal nostro arbitrio.

Essendo $e^{\Sigma l m_x} = m_{x-1} \cdot m_{x-2} \cdot m_{x-3} \cdots\cdots m_1 \cdot m_0$ è evidente che potremo prendere per il ricercato integrale questa espressione sviluppata

$$y_x = A\left(b_{x-2} + \cfrac{a_{x-2}}{b_{x-3} + \cfrac{a_{x-3}}{\ddots\; b_1 + \cfrac{a_1}{C}}}\right)\left(b_{x-3} + \cfrac{a_{x-3}}{b_{x-4} + \cfrac{a_{x-4}}{\ddots\; b_1 + \cfrac{a_1}{C}}}\right)\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\left(b_3 + \cfrac{a_3}{b_2 + \cfrac{a_2}{b_1 + \cfrac{a_1}{C}}}\right)\left(b_2 + \cfrac{a_2}{b_1 + \cfrac{a_1}{C}}\right)\left(b_1 + \cfrac{a_1}{C}\right).$$

Non abbiamo considerato m_0, poichè essendo questa una quantità costante, può essere contenuto in A.

Se i coefficienti dell' equazione sono costanti, se cioè vogliamo integrare $y_{x+2} - by_{x+1} - ay_x = 0$, essendo b, a due costanti determinate, ne avremo l' integrale per mezzo della ritrovata formula, e sarà

$$y_x = A\left(b + \cfrac{a^{x-2}}{b + \cfrac{a}{b + \cfrac{a}{\ddots\; b + \cfrac{a}{C}}}}\right)\left(b + \cfrac{a^{x-3}}{b + \cfrac{a}{\ddots\; b + \cfrac{a}{C}}}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\left(b + \cfrac{a^2}{b + \cfrac{a}{C}}\right)\left(b + \cfrac{a^1}{C}\right).$$

I numeri $x-2$, $x-3$, ... 2, 1 che si trovano sopra questi fattori ci indicano quante divisioni sono nella sottoposta frazione continua: essi sono indici d' operazione.

Osserveremo che questo integrale è completo, poichè contiene due costanti arbitrarie.

Per un' altra strada potrebbe ricercarsi l' integrale dell' equazione

$y_{x+2} - b_x y_{x+1} - a_x y_x = 0$, cioè ricercandone in qualche maniera due integrali particolari, dotati ciascuno di una costante arbitraria; imperocchè ne avremmo allora l' integrale completo prendendo la somma dei due integrali particolari.

Supponghiamo che soddisfaccia alla proposta $y_x = \alpha_x$ ed $y_x = \alpha'_x$ essendo α_x, α'_x due funzioni determinate di x contenenti ciascuna una costante arbitraria, e l' integrale completo sarà $y_x = \alpha_x + \alpha'_x$. Infatti essendo identiche le due equazioni

$$\alpha_{x+2} - b_x \alpha_{x+1} - a_x \alpha_x = 0,\ \alpha'_{x+2} - b_x \alpha'_{x+1} - a_x \alpha'_x = 0,$$

sarà anche identica la loro somma,

$$\alpha_{x+2} + \alpha'_{x+2} - b_x(\alpha_{x+1} + \alpha'_{x+1}) - a_x(\alpha_x + \alpha'_x) = 0$$

sarà cioè soddisfatta l' equazione proposta quando si fà $y_x = \alpha_x + \alpha'_x$. Tutto questo ha luogo perchè l' equazione da integrarsi è lineare.

Egualmente se le due funzioni α_x, α'_x soddisfacessero alla proposta, ma non contenessero costanti arbitrarie, avremmo l' integrale completo prendendo la somma di quelle funzioni moltiplicate ciascuna per una costante arbitraria, e sarebbe

$y_x = A\alpha_x + B\alpha'_x$, A, B essendo le due costanti arbitrarie. Questo metodo riesce felicemente quando i coefficienti dell' equazione sono costanti; poichè allora è facile vedere che prendendo per α, α' le due radici dell' equazione $\alpha^2 - b\alpha + a = 0$, soddisfà all' equazione

$y_{x+2} - by_{x+1} - ay_x = 0$ tanto $y_x = \alpha^x$ che $y_x = \alpha'_x$, ed il di lei integrale è in conseguenza

$y_x = A\alpha^x + B\alpha'_x$: abbiamo in questa maniera trovate due espressioni per integrare un' equazione del secondo ordine a coefficienti costanti col secondo membro nullo.

Per farne una applicazione, vogliasi il termine generale di questa serie

Indici	0,	1,	2,	3,	4,	5,	 x
Serie	1,	2,	8,	42,	296,		.... y_x

nella quale un termine qualunque y_x è eguale ai due termini che lo precedono y_{x-1}, y_{x-2} moltiplicato il primo per l' indice x, ed il secondo per il quadrato dello stesso indice; questa legge è contenuta nell' equazione

$y_x = xy_{x-1} + x^2y_{x-2}$, che è del secondo ordine a differenze finite; e dall' integrazione di questa dipende il termine generale di quella serie.

Ponghiamo nell' equazione alle differenze $x+2$ invece di x, ed avremo l' equazione

$y_{x+2} = (x+2)y_{x+1} + (x+2)^2 y_x$: che paragonata con l' equazione generale sopra integrata, ci dà $b_x = x+2$, $a_x = (x+2)^2$, e quindi avremo per y_x questa espressione:

$$y_x = A\left(x + \cfrac{x^2}{x-1+\cfrac{(x-1)^2}{x-2+\cfrac{(x-2)^2}{\ddots\, 1+\cfrac{1^2}{C}}}}\right)\left(x-1+\cfrac{(x-1)^2}{x-2+\cfrac{(x-2)^2}{x-3+\ddots\, 1+\cfrac{1^2}{C}}}\right)\left(x-2+\cfrac{(x-2)^2}{x-3+\cfrac{(x-3)^2}{\ddots\, 1+\cfrac{1^2}{C}}}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(2+\cfrac{2^2}{1+\cfrac{1^2}{C}}\right)\left(1+\frac{1^2}{C}\right)$$

le due costanti A, C si determineranno osservando che $x = 0$ ci dà $y_x = 1$; ed $x = 1$ ci dà $y_x = 2$. Abbiamo allora $1 = A$, e $A\left(1+\frac{1}{C}\right) = 2$; dunque $A = 1$, $C = 1$.

Se si fa $x = 4$, avremo

$$y_4 = \left(4+\cfrac{16}{3+\cfrac{9}{2+\cfrac{4}{2}}}\right)\left(3+\cfrac{9}{2+\cfrac{4}{2}}\right)\left(2+\frac{4}{2}\right)(1+1) = \cdots$$

$$\frac{148}{21}\cdot\frac{21}{4}\cdot 4 \cdot 2 = 296$$

come è effettivamente.

§. 49. Noi abbiamo supposto nullo il secondo membro dell' equazione del secondo ordine: sia ora questo secondo membro una funzione qualunque data X di x: abbiasi cioè da integrare l' equazione,

$y_{x+2} - b_x y_{x+1} - a_x y_x = X$. Supponghiamo come al §. 46

$y_x = \alpha_x \Sigma z_x$, essendo α_x, z_x due funzioni incognite di x da determinarsi, ed avremo

$y_{x+1} = \alpha_{x+1}(z_x + \Sigma z_x)$;

$y_{x+2} = \alpha_{x+2}(z_{x+1} + z_x + \Sigma z_x)$. Facendo le opportune sostituzioni nella proposta, troveremo fra le due funzioni indeterminate questa equazione

$$(\alpha_{x+2}-b_x\alpha_{x+1}-a_x\alpha_x)\Sigma z_x+(\alpha_{x+2}-b_x\alpha_{x+1})z_x+\alpha_{x+2}\times z_{x+1}=X.$$

Determiniamo adesso una di quelle funzioni α_x per es. in modo che il coefficiente di Σz_x sia nullo: con questa condizione α_x ci sarà dato da questa equazione

$(1)\ldots\ \alpha_{x+2}-b_x\alpha_{x+1}-a_x\alpha_x=0$; e z_x da quest' altra equazione.

$(2)\ldots\ (\alpha_{x+2}-b_x\alpha_{x+1})z_x+\alpha_{x+2}z_{x+1}=X.$

Dunque l' integrazione dell' equazione del secondo ordine $y_{x+2}-b_xy_{x+1}-a_xy_x=X$ dipende dall' integrazione di essa medesima quando il secondo membro è nullo, e dall' integrazione di una equazione del primo ordine.

Ora l' equazione (1) integrata, secondo ciò che si è detto al §. antecedente, ci dà

$\alpha_x=Ae^{\Sigma lm_x}$ prendendo per m_x il valore determinato allo stesso §. L' altra equazione (2) si riduce evidentemente a questa

$z_{x+1}-\frac{(b_x\alpha_{x+1}-\alpha_{x+2})}{\alpha_{x+2}}z_x=\frac{X}{\alpha_{x+2}}$; la quale facendo il coefficiente di z_x eguale ad α'_x, ed $\frac{X}{\alpha_{x+2}}=X'$, prenderà la forma $z_{x+1}-a'_xz_x=X'$, il di cui integrale è (§. 46)

$$z_x=e^{\Sigma la'_x}(C+\Sigma e^{-\Sigma la'_x}\cdot\frac{X'}{a'_x});$$

avremo adunque sostituendo per α_x, z_x i loro valori, il ricercato integrale così espresso:

$$y_x=Ae^{\Sigma lm_x}\Sigma e^{\Sigma la'_x}(C+\Sigma e^{-\Sigma la'_x}\cdot\frac{X'}{a'_x}),$$

e questo integrale sarà completo perchè contiene due costanti arbitrarie A, C.

Noi abbiamo adunque completamente integrate le equazioni lineari a differenze finite a coefficienti variabili del primo e del secondo ordine, e rapporto a queste ultime sarebbe desiderabile che si potesse aver l' integrale in una maniera più semplice e che non contenesse le somme delle funzioni inesplicabili; ma tutti i nostri tentativi per questo oggetto sono stati vani, e le formule quì esposte sono quelle stesse che abbiam pubblicate in altre occasioni (a). Riguardo alle equazioni degli ordini superiori, non è nelle forze per adesso degli Analisti di determinarne gli integrali: si hanno però degli interessanti teoremi sopra la teoria della loro integrazione, i quali noi ci proponghiamo di far conoscere.

§. 50. Per questo sia proposta per integrarsi l' equazione lineare dell' ordine n^{esimo}.

$$(A)\ldots\ ay_x+by_{x+1}+cy_{x+2}+\ldots\ldots+ry_{x+n-1}+py_{x+n}=X$$

nella quale a, b, c ec. r, p, X sono funzioni qualunque date di x. Facciamo $y_x=\alpha_x\Sigma z_x$, essendo al solito α_x, z_x due funzioni di x da determinarsi, ed avremo (16)

$$y_{x+1}=\alpha_{x+1}(z_x+\Sigma z_x)$$

$$y_{x+2}=\alpha_{x+2}(z_{x+1}+z_x+\Sigma z_x)$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$y_{x+n}=\alpha_{x+n}(z_{x+n-1}+z_{x+n-2}+\ldots\ldots+z_x+\Sigma z_x):$$

(a) Opuscolo Analitico stampato a Livorno l' anno 1792. presso Carlo Giorgi „ Calcolo delle Equazioni Lineari stampato a Firenze presso Pietro Allegrini l' anno 1798.

fatte le debite sostituzioni nella proposta, ed ordinata secondo le funzioni z_x, z_{x+1} ec. si ha fra α_x e z_x questa equazione

$$\left.\begin{array}{l}(a\alpha_x + b\alpha_{x+1} + c\alpha_{x+2} + \ldots\ldots + p\alpha_{x+n})\Sigma z_x \\ \quad + (b\alpha_{x+1} + c\alpha_{x+2} + \ldots\ldots + p\alpha_{x+n}) z_x \\ \qquad + (c\alpha_{x+2} + \ldots\ldots + p\alpha_{x+n}) z_{x+1} \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad + p\alpha_{x+n} . z_{x+n-1}\end{array}\right\} = X.$$

Ora avendosi un' equazione sola fra due indeterminate, se ne può determinare una a nostro arbitrio: determiniamo adunque α_x in maniera che il coefficiente di Σz_x divenga nullo: sarà allora data α_x dall' equazione

$$(1) \ldots\ldots a\alpha_x + b\alpha_{x+1} + c\alpha_{x+2} + \ldots\ldots + p\alpha_{x+n} = 0,$$

e z_x da una equazione di questa forma

$$(B) \ldots\ldots b'z_x + c'z_{x+1} + \ldots\ldots + p'z_{x+n-1} = X,$$

nella quale

$$b' = b\alpha_{x+1} + c\alpha_{x+2} + \ldots\ldots + p\alpha_{x+n}$$
$$c' = c\alpha_{x+2} + \ldots\ldots + p\alpha_{x+n}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p' = p\alpha_{x+n}.$$

L' equazione (1) non è altro che la proposta, fatto in essa $X = 0$, e l' equazione (B) è una equazione lineare a coefficienti variabili dell' ordine $n-1$; così l' integrazione della proposta

dipende dall' integrazione di due equazioni, una che è essa medesima quando X è nullo, l' altra che è un' equazione lineare di un ordine minore di un' unità di quello della proposta.

Per determinare z_x, cioè per integrare l' equazione (B), seguendo lo stesso andamento, faremo $z_x = \alpha'_x \Sigma z'_x$ essendo α'_x, z'_x due funzioni di x parimente da determinarsi; e fatte le opportune sostituzioni nell' equazione (B), avremo

$$\left.\begin{array}{l}(b'\alpha'_x + c'\alpha'_{x+1} + \ldots\ldots + p'\alpha'_{x+n-1})\Sigma z'_x \\ \quad + (c'\alpha'_{x+1} + \ldots\ldots + p'\alpha'_{x+n-1}) z'_x \\ \qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad + p'\alpha'_{x+n-1} . z'_{x+n-2}\end{array}\right\} = X$$

la quale si decompone in queste due

$$(2) \ldots\ldots b'\alpha'_x + c'\alpha'_{x+1} + \ldots\ldots + p'\alpha'_{x+n-1} = 0$$

$$(C) \ldots c''z'_x + d''z'_{x+1} + \ldots\ldots + p''z'_{x+n-2} = X,$$

essendo $c'' = c'\alpha'_{x+1} + \ldots\ldots + p'\alpha'_{x+n-1}$

$$d'' = d'\alpha'_{x+2} + \ldots\ldots + p'\alpha'_{x+n-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p'' = p'\alpha'_{x+n-1}.$$

Così l' integrale della proposta dell' ordine n^{esimo} dipende dall' integrazione dell' equazioni (1), (2), e dall' integrazione dell' equazione (C) che è d' un ordine inferiore di due unità di quello della proposta. Trovato il valore di z'_x dall' equazione (C), s' avrebbe

$$y_x = \alpha_x \Sigma \alpha'_x \Sigma z'_x.$$

Continuando lo stesso metodo vedremo che facendo $z'_x =$

$\alpha''_x \Sigma z''_x$, ed avremo per determinare α''_x l' equazione

$$(3) \ldots\ldots c''\alpha''_x + d''\alpha''_{x+1} + \ldots\ldots\ldots + p''\alpha''_{x+n-2} = 0$$

e per determinare z''_x l' equazione dell' ordine $n - 3$ di questa forma

$$(\mathrm{D}) \ldots\ldots d'''z''_x + e'''z''_{x+1} + \ldots\ldots\ldots + p'''z''_{x+n-3} = \mathrm{X},$$

ed infine scemando sempre l' ordine delle equazioni da integrarsi, si giungerà a queste due equazioni

$$(n) \ldots\ldots q^{(n-1)} \alpha^{(n-1)}_x + p^{(n-1)} \alpha^{(n-1)}_{x+1} = 0$$

$$(\mathrm{P}) \ldots\ldots\ldots\ldots p^{(n)} z^{(n-1)}_x = \mathrm{X}$$

ed il ricercato integrale completo, sarà di questa forma

$y_x = \alpha_x \Sigma\alpha'_x \Sigma\alpha''_x \Sigma\alpha'''_x \ldots\ldots \Sigma\alpha^{(n-1)}_x \Sigma z^{(n-1)}_x$, e conterrà un numero n di costanti arbitrarie, le quali saranno introdotte dagli n segni sommatorj.

Le funzioni $\alpha_x, \alpha'_x, \alpha''_x, \alpha'''_x$ ec., $\alpha^{(n-1)}_x$, $z^{(n-1)}_x$, le quali entrano nell' espressione dell' integrale, dipendono dall' integrazioni delle equazioni (1), (2), (3) ec., (n), (P).

§. 51. Riprendendo le equazioni da integrarsi

$$\begin{array}{ll}
(1) \ldots \; a\alpha_x + b\alpha_{x+1} + c\alpha_{x+2} + \ldots\ldots + p\alpha_{x+n} & = 0 \\
(2) \ldots\ldots\ldots \; b'\alpha'_x + c'\alpha'_{x+1} + \ldots\ldots + p'\alpha'_{x+n-1} & = 0 \\
(3) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; c''\alpha''_x + \ldots\ldots + p''\alpha''_{x+n-2} & = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
(n) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; q^{(n-1)}\alpha^{(n-1)}_x + p^{(n-1)}\alpha^{(n-1)}_{x+1} & = 0
\end{array}$$

per avere l' integrale completo della proposta: è facile dimostrare che trovati un numero n d' integrali particolari dell' equazione (1)

si hanno immediatamente e senza alcuna operazione che dipenda da integrazione d' equazioni, gli integrali particolari dell' altre equazioni (2), (3) ec.: infatti se all' equazione (2), dopo avervi sostituiti i valori dei di lei coefficienti, si aggiunge l' equazione (1) moltiplicata per $\Sigma\alpha'_x$, avremo la seguente equazione

$$(2)' \ldots \left.\begin{array}{r}
(a\alpha_x + b\alpha_{x+1} + c\alpha_{x+2} + \ldots + p\alpha_{x+n})\Sigma\alpha'_x \\
+ (b\alpha_{x+1} + c\alpha_{x+2} + \ldots + p\alpha_{x+n})\alpha'_x \\
+ (c\alpha_{x+2} + \ldots + p\alpha_{x+n})\alpha'_{x+1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ p\alpha_{x+n} \cdot \alpha'_{x+n-1}
\end{array}\right\} = 0$$

la quale si riduce a

$a\alpha_x \Sigma\alpha'_x + b\alpha_{x+1}(\alpha'_x + \Sigma\alpha'_x) + c\alpha_{x+2}(\alpha'_{x+1} + \alpha'_x + \Sigma\alpha'_x) + \ldots$
$\ldots\ldots + p\alpha_{x+n}(\alpha'_{x+n-1} + \alpha'_{x+n-2} + \ldots\ldots\ldots +$
$\alpha'_x + \Sigma\alpha'_x) = 0$, e quindi a questa

$$(2)' \ldots\ldots a\alpha_x \Sigma\alpha'_x + b\alpha_{x+1}\Sigma\alpha'_{x+1} + c\alpha_{x+2}\Sigma\alpha'_{x+2} + \ldots\ldots + p\alpha_{x+n}\Sigma\alpha'_{x+n} = 0.$$

Ora questa equazione (2)′ avendo i medesimi coefficienti che l' equazione (1), è evidente che $\alpha_x \Sigma\alpha'_x$ deve essere un' integrale particolare della stessa equazione (1), il quale se indichiamo per $\alpha 1_x$, avremo $\alpha_x \Sigma\alpha'_x = \alpha 1_x$, e perciò $\alpha'_x = \Delta(\alpha 1_x : \alpha_x)$; ciò che porta a concludere che un' integrale particolare dell' equazione (2) è eguale alla differenza finita del quoziente di due integrali particolari $\alpha 1_x$ e α_x della equazione (1); così se rappresentiamo per $\alpha_x, \alpha 1_x, \alpha 2_x, \ldots\ldots\ldots \alpha(n-1)_x$ gli n integrali particolari dell' equazione (1), e per $\alpha'_x, \alpha' 1_x, \alpha' 2_x, \ldots\ldots\ldots \alpha'(n-2)_x$, gli $n - 1$ integrali particolari dell' equazione (2), avremo immediatamente

$$\alpha'_x = \Delta(\alpha 1_x : \alpha_x);\ \alpha' 1_x = \Delta(\alpha 2_x : \alpha_x);\ \alpha' 2_x = \Delta(\alpha 3_x : \alpha_x, \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ \alpha'(n-2)_x = \Delta(\alpha(n-1)_x : \alpha_x),$$

e siccome l'equazione (3) è rapporto all' equazione (2), ciò che è questa rapporto alla equazione (1), così trovati gli integrali particolari dell' equazione (2), s' avranno nel momento quelli della equazione (3), i quali saranno le differenze prime dei quozienti degli integrali dell' equazione (2): si vede adunque che per integrare la proposta, tutto si riduce a trovare un numero n d' integrali particolari che vi soddisfacciano nel caso di $X = 0$.

§. 52. Serviranno anzi un numero $n - 1$ d' integrali particolari della proposta, ed anche un numero $n - 2$ dei medesimi quando $X = 0$: poichè nel primo caso l' unica diversità che avremo sarà la mancanza d' un' integrale particolare a ciascuna delle equazioni (1), (2) ec. e perciò non s' avrà l' integrale dell' ultima equazione (n) dato per mezzo di quegli dell' equazione (1); ma siccome quest' ultima equazione (n) è del primo ordine, così potrà sempre (46) integrarsi, ed in conseguenza „ si potrà avere „ l' integrale completo della proposta, quando si conoscerà un nu- „ mero $n - 1$ d' integrali particolari di essa per il caso di $X = 0$ „.

Questo Teorema è dovuto ai Geometri Condorcet e La-Place, come può vedersi nel sesto Volume delle Memorie dei Sapienti Stranieri dell' Accademia delle Scienze di Parigi. Nel secondo caso poi non conoscendosi due integrali particolari dell' equazione (1), non si conosceranno egualmente due integrali particolari di ciascuna delle altre equazioni e perciò non potranno aversi i due integrali particolari dell' equazione ($n - 1$) penultima, che è del secondo ordine: ma siccome (§. 48.) questa può sempre integrarsi completamente, così avendo soddisfatto anche in questo caso a tutte quelle equazioni (1), (2) ec. (n), l' equazione proposta sarà anche integrata. Dedurremo di qui un altro Teorema

„ Un' equazione lineare a differenze finite dell' ordine n^{esimo} a coef-
„ ficienti variabili col secondo membro funzione qualunque di x,
„ è sempre integrabile completamente, quando si conoscono un
„ numero $n - 2$ d' integrali particolari di essa per il caso, in cui
„ il secondo membro sia nullo.

§. 53. Se i coefficienti $a, b, c, \ldots\ldots p$ dell' equazione linea-

re dell' ordine n^{esimo} proposta al §. 50. invece di essere variabili fossero costanti, allora potrebbe effettivamente aversi l' integrale completo di quella equazione, almeno ammessa la risoluzione generale delle equazioni algebriche. Noi potremmo dedurre dalla formula generale dell' integrale completo trovato ai §§. 50, 51, quella che si conviene a questo caso; pure noi crediamo meglio d' applicare direttamente all' integrazione generale delle equazioni lineari a coefficienti costanti, un metodo analogo a quello di cui abbiam fatto uso quì sopra per i coefficienti variabili.

Sia dunque da integrarsi l' equazione

$$(A) \ldots\ ay_x + by_{x+1} + cy_{x+2} + \ldots\ldots + py_{x+n} = X$$

nella quale a, b, c ec. p, sono quantità costanti, ed X funzione qualunque di x.

Supponghiamo $y_x = \alpha^x \Sigma z_x$ essendo α una costante da determinarsi, e z_x una funzione di x egualmente da determinarsi.

Sostituendo nella proposta i valori di y_x, y_{x+1} ec. y_{x+n}, dati da questa supposizione, e seguendo lo stesso metodo del §. 50, avremo fra α e z_x questa equazione

$$\left.\begin{array}{l} (a\alpha^x + b\alpha^{x+1} + c\alpha^{x+2} + \ldots\ldots + p\alpha^{x+n})\Sigma z_x \\ \quad + (b\alpha^{x+1} + c\alpha^{x+2} + \ldots\ldots + p\alpha^{x+n}) z_x \\ \qquad + (c\alpha^{x+2} + \ldots\ldots + p\alpha^{x+n}) z_{x+1} \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad + p\alpha^{x+n} . z_{x+n-1} \end{array}\right\} = X.$$

Supponghiamo che il coefficiente del primo termine di questa equazione sia zero, ed avremo dopo di aver diviso per α^x, per determinare α l' equazione del grado n^{esimo}

$$(1) \ldots\ a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots\ldots + p\alpha^n = 0,$$ e per determinare z_x,

l' equazione di questa forma

$$(\mathrm{B}) \ldots \alpha^x (b' z_x + c' z_{x+1} + d' z_{x+2} + \ldots\ldots + p' z_{x+n-1}) = \mathrm{X},$$

che è una equazione lineare a differenze finite dell' ordine $n-1$ a coefficienti costanti, poichè α^x può darsi per divisore al secondo membro X, ed allora l' equazione (B) diviene

$$(\mathrm{B}) \ldots b' z_x + c' z_{x+1} + d' z_{x+2} + \ldots\ldots + p' z_{x+n-1} = \frac{\mathrm{X}}{\alpha^x}.$$

E' facile vedere che i coefficienti di questa equazione sono

$$b' = b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + \ldots\ldots\ldots + p\alpha^n$$
$$c' = c\alpha^2 + d\alpha^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + p\alpha^n$$
$$d' = d\alpha^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + p\alpha^n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p' = p\alpha^n.$$

La costante α è ora riguardata come cognita, poichè essa dipende dalla risoluzione dell' equazione algebraica (1): è perciò una delle sue radici.

L' integrazione adunque dell' equazione dell' ordine n è stata ridotta all' integrazione di una equazione di un ordine inferiore di una unità.

§. 54. Per determinare z_x, cioè per integrare l' equazione (B) seguendo il medesimo andamento che si è seguito al § 50., supponghiamo $z_x = \alpha_1^x \Sigma z'_x$ essendo α_1 una costante e z'_x una funzione di x ambedue da determinarsi. Facendo sopra z_x e z'_x le medesime riflessioni che abbiamo fatte sopra y_x e z_x, avremo

$$z_x = \alpha_1^x . \Sigma z'_x$$
$$z_{x+1} = \alpha_1^{x+1} (\Sigma z'_x + z'_x)$$
$$z_{x+2} = \alpha_1^{x+2} (\Sigma z'_x + z'_x + z'_{x+1})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$z_{x+n-1} = \alpha_1^{x+n-1} (\Sigma z'_x + z'_{x+n-2} + z'_{x+n-3} + \ldots\ldots + z'_x)$$

e sostituendo queste espressioni nell' equazione (B), essa diverrà

$$\left.\begin{array}{r} (b'\alpha_1^x + c'\alpha_1^{x+1} + d'\alpha_1^{x+2} + \ldots\ldots + p'\alpha_1^{x+n-1}) \Sigma z'_x \\ + (c'\alpha_1^{x+1} + d'\alpha_1^{x+2} + \ldots\ldots + p'\alpha_1^{x+n-1}) z'_x \\ + (d'\alpha_1^{x+2} + \ldots\ldots + p'\alpha_1^{x+n-1}) z'_{x+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + p'\alpha_1^{x+n-1} . z'_{x+n-2} \end{array}\right\} = \frac{\mathrm{X}}{\alpha^x}$$

Se adesso si suppone che il coefficiente del primo termine sia zero, e si divide per α_1^x, avremo per determinare α_1 la seguente equazione algebraica del grado $n-1$

$(2) \ldots b' + c'\alpha_1 + d'\alpha_1^2 + \ldots\ldots + p'\alpha_1^{n-1} = 0$, e per determinare z'_x, l' equazione della forma

$$(\mathrm{C}) \ldots c'' z'_x + d'' z'_{x+1} + \ldots\ldots + p'' z'_{x+n-2} = \frac{\mathrm{X}}{\alpha_1^x \cdot \alpha^x}.$$

L' equazione (C) è una equazione lineare a differenze finite dell' ordine $n-2$, a coefficienti costanti, i quali sono

$$c'' = c'\alpha_1 + d'\alpha_1^2 + \ldots\ldots + p'\alpha_1^{n-1}$$

$$d'' = d'\alpha_1^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + p'\alpha_1^{n-1}$$

. . . .

. . . .

$$p'' = p'\alpha_1^{n-1}.$$

Tali coefficienti sono quantità conosciute, poichè sono composti dei coefficienti della proposta, della radice α, e della α_1 che ci è data dall' equazione (2).

Così la proposta sarà ridotta all' integrazione di una equazione di un ordine inferiore di due unità. Continuando il medesimo metodo vedremo che facendo $z'_x = \alpha_2^x . \Sigma z''_x$ avremo per determinare α_2 l' equazione algebraica

$(3) \ldots c'' + d''\alpha_2 + e''\alpha_2^2 + \ldots\ldots + p''\alpha_2^{n-2} = 0$ del grado $n-2$, e per determinare z''_x l' equazione dell' ordine $n-3$ della forma

$$(\mathrm{D}) \ldots\ldots d'''z''_x + e'''z''_{x+1} + \ldots\ldots\ldots + p'''z''_{x+n-3} = \ldots \frac{X}{\alpha_2^x . \alpha_1^x . \alpha^x}$$

ed infine scemando sempre il grado dell' equazione algebraica da risolversi, e l' ordine dell' equazione da integrarsi giungeremo a queste due equazioni

$$(n) \ldots q^{(n-1)} + p^{(n-1)}\alpha_{n-1} = 0$$

$$(\mathrm{P}) \ldots p^{(n)} . z_x^{(n-1)} = \frac{X}{\alpha_{n-1}^x . \alpha_{n-2}^x . \alpha_{n-3}^x \ldots \alpha_2^x . \alpha_1^x . \alpha^x}.$$

Dall' equazione (n), si ricava il valore della costante α_{n-1}, e dall' equazione (P) si ricava il valore della funzione $z_x^{(n-1)}$ così espresso

$$z_x^{(n-1)} = \frac{X}{p^{n} . \alpha_{n-1}^x . \alpha_{n-2}^x . \alpha_{n-3}^x \ldots\ldots \alpha_2^x . \alpha_1^x . \alpha^x}.$$

Rammentiamo quì che le costanti $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \ldots\ldots \alpha_2, \alpha_1, \alpha$ sono le radici dell' equazioni (n), $(n-1)$, ... (3), (2), (1).

§. 55. Considerando adesso che $y_x = \alpha^x \Sigma z_x$, $z_x = \alpha_1^x \Sigma z'_x$, $z'_x = \alpha_2^x \Sigma z''_x$, ... $z_x^{(n-2)} = \alpha_{n-1}^x \Sigma z_x^{(n-1)}$ avremo facendo le successive sostituzioni così espresso l' integrale dell' equazione (A) proposta al §. 53

$$y_x = \alpha^x \Sigma \alpha_1^x \Sigma \alpha_2^x \ldots\ldots \Sigma \alpha_{n-1}^x \Sigma \frac{X}{p^{(n)} . \alpha_{n-1}^x . \alpha_{n-2}^x \ldots\ldots \alpha_2^x . \alpha_1^x . \alpha^x}.$$

E siccome il valore di $p^{(n)}$ non è composto che del coefficiente p della proposta e delle quantità costanti $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ ec., sarà perciò costante e potremo portarlo fuori dei segni sommatorj: avremo in conseguenza

$$y_x = \frac{\alpha^x}{p^{(n)}} \Sigma \alpha_1^x \Sigma \alpha_2^x \ldots\ldots \Sigma \alpha_{n-1}^x \Sigma \frac{X}{\alpha_{n-1}^x . \alpha_{n-2}^x \ldots\ldots \alpha_2^x . \alpha_1^x . \alpha^x}.$$

I segni sommatorj sono di numero n, ed introducono nell' integrale n costanti arbitrarie, perciò tale espressione di y_x sarà l' integrale completo dell' equazione proposta.

§. 56. Se per giungere al valore completo di y_x dovessero, come sembra a prima vista, risolversi tutte le equazioni (1), (2), (3), ... (n) di numero n che danno i valori di $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ ec., questo metodo sarebbe un poco complicato: ma siccome conosciute tutte le radici dell' equazione (1) cioè dell' equazione

$$a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots\ldots\ldots + p\alpha^n = 0$$

si trovano subito i valori di $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_{n-1}$, così non sarà necessaria la risoluzione di tutte le altre equazioni $(2)'$, (3), $\ldots (n)$. Infatti l' equazione che determina α è

$$(1) \ldots\ldots a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots\ldots\ldots + p\alpha^n = 0,$$

e quella che determina α_1, dopo avervi sostituito il valore dei coefficienti b', c' ec. p' trovati al §. 53, è

$$(2) \ldots (b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + \ldots\ldots + p\alpha^n) + (c\alpha^2 + d\alpha^3 + \ldots\ldots + p\alpha^n)\alpha_1 + (d\alpha^3 + \ldots\ldots + p\alpha^n)\alpha_1^2 + (e\alpha^4 + \ldots\ldots + p\alpha^n)\alpha_1^3 + \ldots\ldots + p\alpha^n . \alpha_1^{n-1} = 0;$$

se si moltiplica per α_1, l' equazione (2), avremo

$$(b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + \ldots\ldots + p\alpha^n)\alpha_1 + (c\alpha^2 + d\alpha^3 + \ldots\ldots + p\alpha^n)\alpha_1^2 + (d\alpha^3 + \ldots\ldots + p\alpha^n)\alpha_1^3 + (e\alpha^4 + \ldots\ldots + p\alpha^n)\alpha_1^4 + \ldots\ldots + p\alpha^n . \alpha_1^n = 0$$

equazione che si riduce a questa

$$b\alpha . \alpha_1 + c\alpha^2 . \alpha_1^2 + d\alpha^3 . \alpha_1^3 + e\alpha^4 . \alpha_1^4 + \ldots\ldots + p\alpha^n . \alpha_1^n + (c\alpha^2 + d\alpha^3 + \ldots\ldots + p\alpha^n)\alpha_1 + (d\alpha^3 + \ldots\ldots + p\alpha^n)\alpha_1^2 + (e\alpha^4 + \ldots\ldots + p\alpha^n)\alpha_1^3 + \ldots\ldots + p\alpha^n . \alpha_1^{n-1} = 0.$$

Ora se questa equazione si sottrae dall' equazione (2), rimarrà l' equazione

$$b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + \ldots\ldots + p\alpha^n - (b\alpha . \alpha_1 + c\alpha^2 . \alpha_1^2 + d\alpha^3 . \alpha_1^3 + \ldots\ldots + p\alpha^n . \alpha_1^n) = 0.$$

Se adesso questa equazione si sottrae dall' equazione (1), avremo finalmente l' equazione

$$(2)' \ldots\ldots a + b\alpha . \alpha_1 + c\alpha^2 . \alpha_1^2 + d\alpha^3 . d\alpha_1^3 + \ldots\ldots + p\alpha^n . \alpha_1^n = 0.$$

Così la risoluzione dell' equazione (2) che ci doveva dare il

valore di α_1 è stata ridotta alla risoluzione dell' equazione $(2)'$; dalla quale deve determinarsi il valore di α_1 medesimo.

L' equazione $(2)'$ essendo la medesima (prendendo per incognita $\alpha . \alpha_1$), che l' equazione (1), per avere ambedue i medesimi coefficienti, è chiaro che $\alpha . \alpha_1$ sarà ancora una radice dell' equazione (1): e se questa radice si indica per α', avremo $\alpha . \alpha_1 = \alpha'$, e perciò $\alpha_1 = \frac{\alpha'}{\alpha}$. Dal che si deduce che una radice dell' equazione (2) è il quoziente di due radici dell' equazione (1); così se le radici di quest' ultima sono $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots\ldots \alpha^{(n-1)}$, quelle dell' equazione (2) saranno $\frac{\alpha'}{\alpha}, \frac{\alpha''}{\alpha}, \frac{\alpha'''}{\alpha}, \ldots\ldots \frac{\alpha^{(n-1)}}{\alpha}$. Abbiamo in questa guisa trovato il valore di α_1 senza la risoluzione dell' equazione (2), ricavandolo dalla risoluzione della medesima equazione, da cui era ricavato α.

§. 57. L' equazione (3) del §. 54 che determina α_2 è rapporto a quella (2) che determina α_1, ciò che questa quì era rapporto all' equazione (1) che determinava α; onde col medesimo ragionamento fatto sopra, si dimostrerà che se per $\alpha_1, \alpha'_1, \alpha''_1, \alpha'''_1$ ec. rappresentiamo le radici dell' equazione (2), quelle dell' equazione (3) che indichiamo per $\alpha_2, \alpha'_2, \alpha''_2$ ec. saranno eguali respettivamente a $\frac{\alpha'_1}{\alpha_1}, \frac{\alpha''_1}{\alpha_1}, \frac{\alpha'''_1}{\alpha_1}$ ec.: avremo adunque

$$\alpha_2 = \frac{\alpha'_1}{\alpha_1} = \frac{\alpha''}{\alpha} : \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\alpha''}{\alpha'}.$$

E' facile vedere che il medesimo andamento ci porterà ad avere $\alpha_3 = \frac{\alpha'''}{\alpha''}$ essendo α''' un' altra radice dell' equazione (1); di modo che in generale se le radici dell' equazione (1)

$a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + \ldots\ldots + p\alpha^n = 0$ sono rappresentate per $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots\ldots \alpha^{(n-1)}$ avremo $\alpha_1 = \frac{\alpha'}{\alpha}, \alpha_2 = \frac{\alpha''}{\alpha'}, \alpha_3 = \frac{\alpha'''}{\alpha''}, \ldots\ldots \alpha_{n-1} = \frac{\alpha^{(n-1)}}{\alpha^{(n-2)}}$.

§. 58. Al §. 53. abbiamo trovato $p' = p\alpha^n$, al §. 54. abbiam parimente trovato $p'' = p'\alpha_1^{n-1}$, e ponendo mente all' andamento che ha condotto a queste espressioni, vedremo che $p''' = p''\alpha_2^{n-2}$, $p'''' = p'''\alpha_3^{n-3}$ ec., ed infine

$p^{(n)} = p^{(n-1)}\alpha_{n-1}$. Da ciò si ricava per mezzo delle successive sostituzioni

$p^{(n)} = p\alpha^n . \alpha_1^{n-1} . \alpha_2^{n-2} \ldots\ldots \alpha_{n-1}$, ovvero sostituendo per $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ec. i loro valori, avremo

$$p^{(n)} = p\alpha^n . \frac{\alpha'^{n-1}}{\alpha^{n-1}} . \frac{\alpha''^{n-2}}{\alpha'^{n-2}} . \frac{\alpha'''^{n-3}}{\alpha''^{n-3}} \ldots\ldots \frac{\alpha^{(n-1)}}{\alpha^{(n-2)}} \text{ ovvero}$$

$$p^{(n)} = \alpha . \alpha' . \alpha'' . \alpha''' \ldots\ldots \alpha^{(n-1)} . p.$$

Ma il prodotto di tutte le radici $\alpha, \alpha', \alpha''$ ec. $\alpha^{(n-1)}$ di una equazione (1) è eguale, secondo ciò che è dimostrato nell' algebra, alla quantità $\pm \frac{a}{p}$, che è l' ultimo termine dell' equazione (1) essendo il primo α^n; dunque sostituendo in $p^{(n)}$ invece di questo prodotto, il suo valore, avremo $p^{(n)} = \pm a$.

Se adesso si pongono nella formula del §. 55. i valori di $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ec. e di $p^{(n)}$, avremo

$$y_x = \pm \frac{\alpha^x}{a} \Sigma \frac{\alpha'^x}{\alpha^x} \Sigma \frac{\alpha''^x}{\alpha'^x} \Sigma \frac{\alpha'''^x}{\alpha''^x} \ldots\ldots \Sigma \frac{\alpha^{(n-1)x}}{\alpha^{(n-2)x}} \Sigma \frac{X}{\alpha^{(n-1)x}}.$$

Il segno + vale per n pari, il — per n impari.

Questa espressione di y_x sarà l' integrale completo della proposta, poichè oltre il soddisfare ad essa, contiene le n costanti che vi introducono gli n segni sommatorj.

§. 59. Se alcune delle radici dell' equazione $a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots + p\alpha^n = 0$ sono eguali, se per esempio $\alpha = \alpha' = \alpha'' = \alpha'''$, avremo l' integrale dell' equazione (A) così espresso

$$y_x = \pm \frac{\alpha^x}{\alpha} \Sigma \frac{\alpha^x}{\alpha^x} \Sigma \frac{\alpha^x}{\alpha^x} \Sigma \frac{\alpha^x}{\alpha^x} \Sigma \frac{\alpha''''^x}{\alpha^x} \ldots\ldots \Sigma \frac{\alpha^{(n-1)x}}{\alpha^{(n-2)x}} \Sigma \frac{X}{\alpha^{(n-1)x}}, \text{ ovvero}$$

$$y_x = \pm \frac{\alpha^x}{\alpha} \Sigma\Sigma\Sigma\Sigma \frac{\alpha''''^x}{\alpha^x} \ldots\ldots \Sigma \frac{\alpha^{(n-1)x}}{\alpha^{(n-2)x}} \Sigma \frac{X}{\alpha^{(n-1)x}}.$$

Quest' integrale sarà sempre completo, poichè contiene sempre n segni sommatorj, i quali introducono n costanti arbitrarie.

Sia l' equazione proposta per integrarsi

$$y_x - ny_{x+1} + \frac{n.n-1}{2} y_{x+2} - \frac{n.n-1.n-2}{2.3} y_{x+3} + \ldots\ldots \pm y_{x+n} = X$$ e l' equazione da risolversi sarà

$$1 - n\alpha + \frac{n.n-1}{2}\alpha^2 - \frac{n.n-1.n-2}{2.3}\alpha^3 \ldots\ldots \pm \alpha^n = 0,$$

la quale non è altro che $(\alpha - 1)^n = 0$. Le radici di quest' ultima equazione essendo tutte eguali all' unità, cioè $\alpha = \alpha' = \alpha'' = \alpha''' =$ ec. $= 1$, l' integrale sarà così espresso $y_x = \Sigma\Sigma\Sigma\Sigma \ldots \Sigma X$ e sarà completo, poichè i segni sommatorj che devono essere di numero n, portano n costanti arbitrarie. Riflettendo all' equazione differenziale proposta, e rammentandoci ciò che abbiam detto al §. 5., si vede che il primo membro è $\Delta^n y_x$, onde l' equazione da integrarsi diventa $\Delta^n y_x = X$, la quale integrata col metodo delle successive integrazioni ci dà

$$\Delta^{n-1} y_x = \Sigma X, \Delta^{n-2} y_x = \Sigma\Sigma X, \Delta^{n-3} y_x = \Sigma\Sigma\Sigma X \text{ ec.},$$

si perviene così al medesimo risultato ottenuto per il nostro metodo.

§. 60. Ma per vedere più chiaramente come il nostro integrale contenga sempre un numero n di costanti arbitrarie, supponghiamo che siano quattro le radici eguali e che eseguita l'integrazione della porzione della formula

$$\Sigma \frac{\alpha''''^x}{\alpha^x} \ldots\ldots \Sigma \frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-2)^x}} \Sigma \frac{X}{\alpha^{(n-1)^x}},$$

questa divenga $Z_x + A$, essendo A la costante che porta l'ultima integrazione: avremo in questo caso

$y_x = \pm\frac{\alpha^x}{a}\Sigma\Sigma\Sigma(Z_x + A)$. Ora

$\Sigma Z_x + \Sigma A = Z'_x + Ax + A'$, (essendo Z'_x la somma ΣZ_x e A' la nuova costante arbitraria che porta l'integrazione); egualmente

$$\Sigma\Sigma(Z_x+A)=\Sigma(Z'_x+Ax+A')=Z''_x+\frac{Ax(x-1)}{2}+A'x+A'',$$

e mutando la forma delle costanti, cioè a dire rappresentando per A, A' i coefficienti costanti di x^2 e di x, sarà detta quantità $= Z''_x + Ax^2 + A'x + A''$, essendo $Z''_x = \Sigma Z'_x$.

Continuando si vede che avremo

$\Sigma\Sigma\Sigma(Z_x+A) = Z'''_x + Ax^3 + A'x^2 + A''x + A'''$, essendo $Z'''_x = \Sigma Z''_x$ e A, A', A'', A''' costanti arbitrarie.

In questo caso adunque l'integrale completo sarà

$y_x = \pm\frac{\alpha^x}{a}(Z'''_x + Ax^3 + A'x^2 + A''x + A''')$, e considerando $\pm\frac{1}{a}$ contenuto entro le costanti arbitrarie, avremo infine

$y_x = \pm\frac{\alpha^x}{a}Z'''_x + Ax^3.\alpha^x + A'x^2.\alpha^x + A''x.\alpha^x + A'''.\alpha^x$

e questa espressione sarà l'integrale completo, poichè in Z_x, da cui viene per le successive integrazioni Z'''_x, sono contenute $n-4$ costanti arbitrarie, ed in conseguenza il valore di y_x ne conterrà un numero n.

§. 61. Sia X = o, e l'equazione allora da integrarsi diverrà

$ay_x + by_{x+1} + cy_{x+2} + \ldots\ldots + py_{x+n} = 0$.

Ora facendo X = o nella formula trovata al §. 58., ed avvertendo che in questo caso $\Sigma\frac{X}{\alpha^{(n-1)^x}} = \Sigma 0 = A$, costante arbitraria, avremo per l'integrale,

(a) .... $y_x = \pm\frac{\alpha^x}{a}\Sigma\frac{\alpha'^x}{\alpha^x}\Sigma\frac{\alpha''^x}{\alpha'^x}\Sigma\frac{\alpha'''^x}{\alpha''^x}\ldots\ldots\Sigma\frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-2)^x}}.A$;

per una considerazione simile a quella che abbiam fatta al §. 48. riguardo all'equazioni del secondo ordine, le diverse funzioni esponenziali $\alpha^x, \alpha'^x, \alpha''^x$ ec., $\alpha^{(n-1)^x}$, soddisfacendo ciascuna di esse in particolare, sostituita per y_x, alla superiore equazione lineare, ancora la somma di tutte moltiplicata ognuna per una costante arbitraria, vi soddisfarà: si potrà adunque prendere per y_x questa espressione

(b) .... $y_x = C\alpha^x + C'\alpha'^x + C''\alpha''^x + C'''\alpha'''^x + \ldots\ldots + C^{(n-1)}\alpha^{(n-1)^x}$,

la quale rappresenterà anche l'integrale completo della proposta, poichè contiene un numero n di costanti C, C', C'' ec. arbitrarie.

Al §. 66. vedremo più precisamente come può ottenersi questa formula.

Le due formule (a), (b) per quanto sembrino diverse, sono però in sostanza la stessa cosa, essendo facile di dedurre l'una dall'altra.

Infatti facendo le successive integrazioni indicate nella prima formula, avremo (§. 16.)

$$\Sigma A\frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-2)^x}} = A\frac{1}{\frac{\alpha^{(n-1)}}{\alpha^{(n-2)}}-1}\cdot\frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-2)^x}} + A'$$

essendo A' costante arbitraria. Se mutiamo adesso la forma della costante A, se cioè consideriamo come contenuto in essa il coefficiente costante

$$1:\left(\frac{\alpha^{(n-1)}}{\alpha^{(n-2)}}-1\right),\text{ avremo }\Sigma A\,\frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-2)^x}}=A\,\frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-2)^x}}+A';$$

così moltiplicando quest' ultima equazione per $\frac{\alpha^{(n-2)^x}}{\alpha^{(n-3)^x}}$ che è la quantità immediatamente avanti all' ultimo segno sommatorio, ed integrando, avremo

$$\Sigma\frac{\alpha^{(n-2)^x}}{\alpha^{(n-3)^x}}\Sigma\frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-2)^x}}\,.\,A=A\Sigma\frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-3)^x}}+A'\Sigma\frac{\alpha^{(n-2)^x}}{\alpha^{(n-3)^x}}=\ldots\ldots$$

$$A\,\frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-3)^x}}+A'\,.\,\frac{\alpha^{(n-2)^x}}{\alpha^{(n-3)^x}}+A''.$$

Le quantità costanti che portano l' integrazioni, sono considerate contenute entro le costanti arbitrarie A, A′, A″.

Continuando il medesimo andamento, si avrà

$$\Sigma\frac{\alpha^{(n-3)^x}}{\alpha^{(n-4)^x}}\Sigma\frac{\alpha^{(n-2)^x}}{\alpha^{(n-3)^x}}\Sigma\frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-2)^x}}\,.\,A=A\,.\,\frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-4)^x}}+A'\frac{\alpha^{(n-2)^x}}{\alpha^{(n-4)^x}}+$$

$$A''\frac{\alpha^{(n-3)^x}}{\alpha^{(n-4)^x}}+A''',\text{ ed infine}$$

$$\Sigma\frac{\alpha'^x}{\alpha^x}\Sigma\frac{\alpha''^x}{\alpha'^x}\ldots\ldots\ldots\;\Sigma\frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-2)^x}}\,.\,A=A\frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^x}+A'\frac{\alpha^{(n-2)^x}}{\alpha^x}+$$

$$A''\frac{\alpha^{(n-3)^x}}{\alpha^x}+\ldots\ldots\ldots+A^{(n-2)}\,.\,\frac{\alpha'^x}{\alpha^x}+A^{(n-1)},$$

onde il valore di y_x sarà

$$y_x=\pm\frac{1}{a}(A\alpha^{(n-1)^x}+A'\alpha^{(n-2)^x}+A''\alpha^{(n-3)^x}+\ldots\ldots\ldots$$

$$+A^{(n-2)}\alpha'^x+A^{(n-1)}\alpha^x);\text{ ora essendo }\pm\frac{A}{a},\pm\frac{A'}{a},\pm\frac{A''}{a},$$

ec. $\pm\frac{A^{(n-1)}}{a}$ quantità costanti arbitrarie, indichiamole più

semplicemente per $C^{(n-1)}$, $C^{(n-2)}$, $C^{(n-3)}$ ec. C′, C ed avremo

$y_x=C\alpha^x+C'\alpha'^x+C''\alpha''^x+\ldots\ldots+C^{(n-1)}\alpha^{(n-1)^x}$ che è la formula (b).

§. 62. La formula (a) per altro (§. 61.) ha il vantaggio di dar sempre gl' integrali completi, qualunque sieno le radici α, α' ec. dell' equazione da risolversi, mentre la formula (b) non dà gl' integrali completi quando alcune delle radici $\alpha, \alpha', \alpha''$ ec. sono fra di loro eguali.

Per vedere chiaramente tutto questo, supponghiamo che tre di quelle radici siano eguali, sia cioè $\alpha=\alpha'=\alpha''$. Il ragionamento che faremo sarebbe lo stesso ancora per un maggior numero di radici eguali: avremo in questo caso

$y_x=C\alpha^x+C'\alpha^x+C''\alpha^x+C'''\alpha'''^x+\ldots\ldots+C^{(n-1)}\alpha^{(n-1)^x}$, ovvero

$$y_x=(C+C'+C'')\alpha^x+C'''\alpha'''^x+\ldots\ldots+C^{(n-1)}\alpha^{(n-1)^x}:$$

ora la somma delle tre costanti C, C′, C″ arbitraria, potendo essere rappresentata per una quantità arbitraria A, avremo

$y_x=A\alpha^x+C'''\alpha'''^x+\ldots\ldots+C^{(n-1)}\alpha^{(n-1)^x}$, integrale che è incompleto, poichè gli mancano due costanti arbitrarie, essendovene solamente un numero $n-2$.

Ecco in questo caso come l' altra formula soddisfà alla ricerca: quando le tre radici $\alpha, \alpha', \alpha''$ sono eguali, si ha

$$y_x=\pm\frac{\alpha^x}{a}\Sigma\Sigma\Sigma\frac{\alpha'''^x}{\alpha^x}\Sigma\frac{\alpha''''^x}{\alpha'''^x}\ldots\ldots\;\Sigma\frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-2)^x}}\,.\,A\,.$$

Abbiamo veduto al §. antecedente che

$$\Sigma\frac{\alpha'''^x}{a^x}\Sigma\frac{\alpha''''^x}{\alpha'''^x}\ldots\ldots\;\Sigma\frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-2)^x}}A=A\,\frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^x}+A'\frac{\alpha^{(n-2)^x}}{\alpha^x}+\ldots$$

$$+A^{(n-4)}\frac{\alpha'''^x}{\alpha^x}+A^{(n-3)},\text{ e perciò (§. 60.) avremo}$$

$$\Sigma\Sigma\Sigma\frac{\alpha'''^x}{\alpha^x}\ldots\ldots\Sigma\frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-2)^x}}A = A\frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^x} + A'\frac{\alpha^{(n-2)^x}}{\alpha^x} + \ldots\ldots$$

$$+ A^{(n-4)}\frac{\alpha'''^x}{\alpha^x} + A^{(n-3)}x^2 + A^{(n-2)}x + A^{(n-1)}:$$

l'espressione adunque di y_x, considerando $\pm\frac{1}{a}$ contenuto nelle costanti che noi rappresenteremo come sopra per C, C' ec., sarà la seguente

$$y_x = C\alpha^x + C'x\alpha^x + C''x^2\alpha^x + C'''\alpha'''^x + \ldots\ldots + C^{(n-1)}\alpha^{(n-1)^x}.$$

Si vede adunque che invece dei tre termini $C\alpha^x + C'\alpha'^x + C''\alpha''^x$, i quali si riducono ad uno solo quando quelle radici sono eguali, l'integrale completo deve contenere questi tre $C\alpha^x + C'x\alpha^x + C''x^2\alpha^x$.

Generalmente se le radici eguali fossero m di numero, l'integrale conterrebbe i termini

$C\alpha^x + C'x\alpha^x + C''x^2\alpha^x + \ldots\ldots\ldots + C^{(m-1)}x^{m-1}\alpha^x$ invece dei termini

$C\alpha^x + C'\alpha'^x + \ldots\ldots\ldots\ldots + C^{(m-1)}\alpha^{(m-1)^x}$, i quali si riducono ad un solo, quando le radici $\alpha, \alpha', \alpha''$ ec. $\alpha^{(m-1)}$ sono eguali.

Se nello stesso tempo che si hanno m radici eguali ad α, ve ne fosse un numero p eguali ad un'altra radice e così di seguito, allora invece dei termini che avrebbe introdotti ciascun numero di radici eguali, se quelle non fossero state tali, bisogna sostituirvi altrettanti termini, composti di costanti diverse, moltiplicate ciascuna per una di quelle radici eguali, e quindi per una di queste potenze x^0, x^1, x^2 ec., x^{p-1}: si dica lo stesso per gli altri numeri di radici eguali.

§. 63. Facciamo qualche applicazione di queste Teorie alla ricerca del termine generale e della somma delle serie.

Si voglia il termine generale della serie

Indici . . . . 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , ... x

Termini . . . 1 , 2 , 4 , 9 , 30 , 157 , ... y_x

nella quale un termine qualunque y_{x+3} è eguale al 5 innalzato alla potenza x sommato con i termini y_{x+2}, y_{x+1}, y_x moltiplicati il primo per 9, il secondo per -26, il terzo per 24. Avremo in questo caso tal proprietà espressa da questa equazione

$y_{x+3} = 5^x + 9y_{x+2} - 26y_{x+1} + 24y_x$, ovvero

$-24y_x + 26y_{x+1} - 9y_{x+2} + y_{x+3} = 5^x$ equazione del terzo ordine.

Per l'equazioni di un tale ordine l'integrale è

$$y_x = -\frac{\alpha^x}{a}\Sigma\frac{\alpha'^x}{\alpha^x}\Sigma\frac{\alpha''^x}{\alpha'^x}\Sigma\frac{X}{\alpha''^x}.$$

Essendo $a = -24$, $X = 5^x$, ed $\alpha, \alpha', \alpha''$ le radici di questa equazione

$\alpha^3 - 9\alpha^2 + 26\alpha - 24 = 0$, e perciò $\alpha = 2$, $\alpha' = 3$, $\alpha'' = 4$, avremo adunque

$y_x = \frac{2^x}{24}\Sigma\frac{3^x}{2^x}\Sigma\frac{4^x}{3^x}\Sigma\frac{5^x}{4^x}$, e facendo le successive integrazioni, avremo

$y_x = \frac{2^x}{24}\left(4\frac{5^x}{2^x} + A\frac{4^x}{2^x} + A'\frac{3^x}{2^x} + A''\right) = \frac{5^x}{6} + A.4^x + A'.3^x + A''.2^x$, essendo A, A', A'' le tre costanti arbitrarie portate dall' integrazioni.

Tale è dunque l'integrale completo dell'equazione, da cui dipende il cercato termine generale.

Per determinare le costanti, facciamo nell'espressione del termine generale successivamente $x = 0, 1, 2$, ed avremo

$$y_0 = 1 = \frac{1}{6} + A + A' + A''$$

$$y_1 = 2 = \frac{5}{6} + 4A + 3A' + 2A''$$

$$y_2 = 4 = \frac{25}{6} + 16A + 9A' + 4A''.$$

Per mezzo di queste equazioni si trova $A = -\frac{3}{6}$, $A' = \frac{3}{6}$, $A'' = \frac{5}{6}$, e fatte le sostituzioni nell'espressione generale di y_x, avremo il termine generale della nostra serie così espresso

$$y_x = \frac{5^x - 3 \cdot 4^x + 3 \cdot 3^x + 5 \cdot 2^x}{6}.$$

Può verificarsi questo valore nei termini della serie che seguono il terzo e che abbiamo sopra notati.

Per un secondo esempio abbiasi la serie

Indici . . . . . 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , ... x

Termini . . . . 0 , 0 , 1 , 5 , 17 , 49 , ... y_x

nella quale un termine qualunque come y_{x+3} è eguale alla somma dei termini antecedenti, il primo moltiplicato per 5, il secondo per -8, il terzo per 4, e ricerchiamone la somma.

E' evidente che converrà trovare prima il di lei termine generale: ora la legge che lega i termini di questa serie ci dà l'equazione

$y_{x+3} = 5y_{x+2} - 8y_{x+1} + 4y_x$, ovvero

$-4y_x + 8y_{x+1} - 5y_{x+2} + y_{x+3} = 0$, a differenze finite del terzo ordine, per la quale, secondo ciò che si è detto al §. 61., si avrà

$y_x = -\frac{\alpha^x}{a} \Sigma \frac{\alpha'^x}{\alpha^x} \Sigma \frac{\alpha''^x}{\alpha'^x} \Sigma 0$; e siccome nel nostro caso $a = -4$, $\alpha = \alpha' = 2$, $\alpha'' = 1$, avremo perciò

$y_x = \frac{2^x}{4} \Sigma\Sigma \frac{1}{2^x} \Sigma 0$: sarà pertanto (62)

$y_x = C + C'x \cdot 2^x + C''2^x$, rappresentando per C, C', C'' le tre costanti arbitrarie.

Facendo $x = 0, 1, 2$, ed osservando che $y_0 = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, avremo per determinare le costanti queste tre equazioni

$0 = C + C''$

$0 = C + 2C' + 2C''$

$1 = C + 8C' + 4C''$,

dalle quali si ricava $C' = \frac{1}{2}$, $C' = -1$, $C = 1$; sarà allora

$y_x = 1 + x \cdot 2^{x-1} - 2^x$.

Per avere la ricercata somma basterà (22) aggiungere all'integrale del termine generale, lo stesso termine generale. Così indicando questa somma per S, avremo

$S = y_x + \Sigma y_x = 1 + x \cdot 2^{x-1} - 2^x + \Sigma 1 + \Sigma 2^{x-1} \cdot x - \Sigma 2^x$, e perciò

$S = 1 + x \cdot 2^{x-1} - 2^x + x + x \cdot 2^{x-1} - 2^{x+1} + C = C + 1 + x + x \cdot 2^x - 3 \cdot 2^x$:

la costante C si determina osservando che la somma S deve essere nulla quando $x = 0$: avremo in conseguenza

$0 = C + 1 = -3$, dalla quale $C = 2$: dunque

$S = 3 + x + x \cdot 2^x - 3 \cdot 2^x$.

Se si fa $x = 5$, avremo

$S = 3 + 5 + 5 \cdot 2^5 - 3 \cdot 2^5 = 3 + 5 \cdot 32 - 3 \cdot 32 + 5$,

$S = 67 + 5 = 72$, come si può verificare.

§. 64. La formula generale ottenuta al §. 58. per esprimere l'integrale completo in qualunque caso di un'equazione a differenze finite dell'ordine n^{esimo}, egualmente che quella (a) che da essa ne deriva riportata al §. 61., è stata data da me la prima volta nel mio Calcolo Integrale delle Equazioni Lineari pubblicato in Firenze nel 1798.

Le formule che si conoscevano allora davano sempre gl'integrali incompleti nel caso delle radici eguali.

Abbiamo veduto al § 62. che la formula (b), risente appunto quel difetto; e quantunque la nostra ne sia affatto esente, pure ci tratterremo ad esporre l'artifizio, col quale vi rimediavano gli Analisti, mostrandone l' inesattezza, ed esporremo in seguito i veri principj, dai quali si può ricavare il metodo per ricompletare quelle formule che per causa delle radici eguali, mancano di alcune costanti arbitrarie. Non ci tratterremmo a sviluppare i principj di questo nuovo metodo, non avendone bisogno le nostre formule, se non ne dovessimo fare uso per l' Equazioni Lineari a Differenze Finite e Parziali, delle quali parleremo nel Capitolo seguente.

Se le radici eguali sono due; se cioè $\alpha = \alpha'$, la formula (b) del §. 61., diviene (§ 62)

$$y_x = A\alpha^x + C''\alpha''^x + C'''\alpha'''^x + \ldots\ldots\ldots + C^{(n-1)}\alpha^{(n-1)x}$$

alla quale manca una costante: essa perciò è un' integrale particolare della proposta.

Per ricompletarlo, D'Alembert il primo, e tutti gli altri Geometri dopo lui, suppongono che le quantità eguali α, α' differiscano fra loro di una quantità piccolissima ω, di modo che sia $\alpha' = \alpha + \omega$: secondo questa supposizione si ha

$$\alpha'^x = (\alpha + \omega)^x = \alpha^x + x\alpha^{x-1}.\omega + \frac{x(x-1)}{2}\alpha^{x-2}.\omega^2 + \text{ec.},$$

così i due primi termini $C\alpha^x + C'\alpha'^x$, i quali si erano ridotti ad un solo per l' eguaglianza delle due radici α, α', saranno in conseguenza $C\alpha^x + C'(\alpha + \omega)^x$, ovvero

$$C\alpha^x + C'(\alpha^x + x\alpha^{x-1}.\omega + \frac{x(x-1)}{2}\alpha^{x-2}.\omega^2 + \text{ec.}).$$

Trascurando ora gli infinitamente piccoli al di là del primo ordine, avremo per quei due primi termini

$C\alpha^x + C'(\alpha^x + x\alpha^{x-1}.\omega)$, che si riducono a $(C + C')\alpha^x + C'\frac{\omega}{\alpha}\alpha^x$: supponendo adunque la somma delle due costanti arbitrarie $C + C'$, rappresentata da una sola C, e la quantità costante $\frac{\omega}{\alpha}$ contenuta in C', cioè mutando la forma delle costanti, avremo

$C\alpha^x + C'\alpha^x.x$: così questi due termini non potendosi ridurre ad uno solo, l'integrale rimarrà completo, e valendo il medesimo ragionamento per qualunque altra coppia di radici eguali, ne segue che se si abbiano quante si vogliono coppie di radici eguali, come $\alpha^{(m)} = \alpha^{(m-1)}$, i due termini i quali contengono queste radici e che si ridurrebbero ad uno solo, dovranno essere lasciati nell' integrale, moltiplicando uno di essi per x: ciò è conforme a quello che si è detto al §. 62.

Siano tre le radici eguali, cioè $\alpha, \alpha', \alpha''$ e supponghiamo, come sopra, che le quantità α', α'' differiscano infinitamente poco dalla quantità α, che si abbia cioè $\alpha' = \alpha + \omega$, $\alpha'' = \alpha + \xi$, essendo ω, ξ quantità piccolissime; avremo invece degli ultimi tre termini dell' integrale

$C\alpha^x + C'\alpha'^x + C''\alpha''^x$, i tre seguenti $C\alpha^x + C'(\alpha + \omega)^x + C''(\alpha + \xi)^x$, ovvero sviluppando le potenze dei binomj, questi altri tre

$$C\alpha^x + C'(\alpha^x + x\alpha^{x-1}.\omega + \frac{x(x-1)}{2}\alpha^{x-2}.\omega^2 + \text{ec.}) + C''(\alpha^x + x\alpha^{x-1}.\xi + \frac{x(x-1)}{2}\alpha^{x-2}.\xi^2 + \text{ec.});$$

trascuriamo adesso gli infinitamente piccoli al di là del secondo ordine, ed avremo

$$(C + C' + C'')\alpha^x + (C'(\frac{\omega}{\alpha} - \frac{\omega^2}{2\alpha^2}) + C''(\frac{\xi}{\alpha} - \frac{\xi^2}{2\alpha^2}))x\alpha^x + (C'\frac{\omega^2}{2\alpha^2} + C''\frac{\xi^2}{2\alpha^2})x^2\alpha^x;$$

cangiando ora la forma delle costanti e rappresentando per una costante arbitraria C il coefficiente di α^x, per C' quello di $x\alpha^x$, per C'' quello di $x^2\alpha^x$, avremo questi tre termini $C\alpha^x + C'x\alpha^x + C''x^2\alpha^x$, i quali non potendo ridursi in un solo, e contenendo essi tre costanti arbitrarie diverse, l'integrale si conserverà completo.

Con lo stesso metodo si trova che se le radici eguali sono quattro, se

$\alpha = \alpha' = \alpha'' = \alpha'''$, facendo $\alpha' = \alpha + \omega$, $\alpha'' = \alpha + \xi$, $\alpha''' = \alpha + \theta$, e trascurando gl' infinitamente piccoli al di là del terzo ordine nello sviluppo dei binomj

$(\alpha + \omega)^x$, $(\alpha + \xi)^x$, $(\alpha + \theta)^x$, si ha invece dei quattro termini

$C\alpha^x + C'\alpha'^x + C''\alpha''^x + C'''\alpha'''^x$ i quali si riducono ad un solo, i seguenti

$C\alpha^x + C'x\alpha^x + C''x^2\alpha^x + C'''x^3\alpha^x$, e per questo l' integrale rimane completo.

In generale se le radici eguali sono di numero m, invece dei termini

$C\alpha^x + C'\alpha'^x + \ldots\ldots + C^{(m-1)}\alpha^{(m-1)x}$ che si riducono ad un solo, avremo i seguenti

$C\alpha^x + C'x\alpha^x + C''x^2\alpha^x + \ldots\ldots + C^{(m-1)}x^{m-1}\alpha^x$.

Il tutto è conforme a quanto abbiamo detto al §. 62.

§. 65. Quantunque questo metodo per ridurre ad essere completi gl' integrali che per il caso delle radici eguali avevano cessato di esserlo, conduca ai medesimi risultati, i quali abbiamo al §. 62. direttamente dedotti dal calcolo integrale, pure non mi sembra che possa soddisfare i Geometri per l' inesattezza dei suoi principj e del suo sviluppo.

Primieramente il supporre che le radici eguali differiscano fra loro di quantità piccolissime, non può essere ammesso in rigore di analisi, e possono quì mettersi in campo tutte quelle difficoltà che erano mosse contro il calcolo infinitesimale, quando non se ne deducevano i suoi fondamenti dalla Teoria dei limiti.

In secondo luogo ponendo mente allo sviluppo del metodo, si vede che quando le radici eguali sono due, abbiamo trascurati gl' infinitamente piccoli del secondo ordine, ed al di là di esso; quando sono tre, quegli del terzo; quando le radici eguali sono quatrro, quegli del quarto, e così di seguito: ora tutto questo andamento è precario, poichè non vi è nessuna ragione dipendente dalla eguaglianza delle radici, per cui dobbiamo determinarci a trascurare piuttosto gl' infinitamente piccoli di un ordine che di un altro. Infatti per qual ragione quando le radici eguali sono due di numero, non si ammettono gl' infinitamente piccoli di secondo ordine, i quali hanno il loro luogo per il caso di tre radici eguali?

Dopo queste riflessioni e molte altre che io tralascio, ne ho conclusa l' inesattezza del metodo del Sig. D' Alembert; ed ho

sentita la necessità di sostituirne un altro per ricompletare gl' integrali dipendente dalla natura della questione.

§. 66. Riprendiamo l' equazione lineare del §. 53., avendovi supposto $X=0$,

$$(A)\ \ldots\ ay_x + by_{x+1} + cy_{x+2} + \ldots\ldots + py_{x+n} = 0.$$

Supponghiamo che y_x sia di questa forma $y_x = A\alpha^x$, essendo A, α due costanti. Se si sostituiscono i valori di y_x, y_{x+1} ec. nell' equazione (A) e la dividiamo per A, avremo per determinare la costante α questa equazione

$$(1)\ \ldots\ a\alpha^x + b\alpha^{x+1} + c\alpha^{x+2} + \ldots\ldots + p\alpha^{x+n} = 0,$$

la quale divisa per α^x diviene una equazione algebraica del grado n,

$$a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots\ldots + p\alpha^n = 0.$$

Ora avendo questa equazione n radici, se queste si rappresentano per $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots\ldots \alpha^{(n-1)}$, moltiplicando le potenze x^{esime} di queste radici per delle costanti indeterminate diverse, avremo un numero n di valori per y_x, ciascun dei quali soddisfarà alla proposta (A), e contenendo una costante arbitraria; ne sarà perciò un integrale particolare. Questi valori dell' y_x, o questi integrali particolari della proposta, saranno

$$y_x = A.\alpha^x,\ A'.\alpha'^x,\ A''.\alpha''^x,\ A'''.\alpha'''^x,\ \ldots\ldots\ A^{(n-1)}.\alpha^{(n-1)x};$$

le quantità $A, A', A'', \ldots\ldots A^{(n-1)}$ essendo costanti arbitrarie.

Siccome l' equazione (A) è lineare, è chiaro che ancora la somma di tutti questi integrali particolari soddisfarà ad essa (48) e che perciò potrà prendersi per y_x l' espressione

$$A\alpha^x + A'\alpha'^x + A''\alpha''^x + \ldots\ldots + A^{(n-1)}\alpha^{(n-1)x},$$

la quale sarà l' integrale completo, perchè contiene un numero n di costanti arbitrarie: questa è la formula che abbiamo ancora trovata al §. 62.

L' integrale cómpleto adunque dell' equazione (A) è l' aggregato di un numero n di suoi integrali particolari.

Così l' equazione $24y_x + 14y_{x+1} - 13y_{x+2} - 2y_{x+3} + y_{x+4} = 0$ avendo questi quattro integrali particolari

$$y_x = A.4^x;\; y_x = A'(-3)^x;\; y_x = A''.2^x;\; y_x = A'''(-1)^x,$$

perchè $4, -3, 2, -1$ sono le quattro radici dell' equazione algebraica $24 + 14\alpha - 13\alpha^2 - 2\alpha^3 + \alpha^4 = 0$, l' integrale completo, sarà

$$y_x = A.4^x + A'(-3)^x + A''.2^x + A'''(-1)^x, \text{ ovvero}$$

$$y_x = A.4^x \pm A'.3^x + A''.2^x \pm A'''$$

il *più* vale per x pari, il *meno* per x impari.

Supponghiamo che due radici α, α' siano eguali; allora due degl' integrali particolari si riducono ad un solo, e l' espressione superiore dell' y_x diviene

$$y_x = (A + A')\alpha'^x + A''\alpha''^x + \ldots\ldots + A^{(n-1)}\alpha^{(n-1)^x},$$

ovvero, facendo $A + A' =$ ad una sola costante A',

$$y_x = A'\alpha'^x + A''\alpha''^x + \ldots\ldots + A^{(n-1)}\alpha^{(n-1)^x};$$

e questa espressione non sarà la somma che di $n - 1$ integrali particolari; le mancherà in conseguenza una costante arbitraria, e l' integrale che essa rappresenta sarà incompleto.

Ciò premesso osserviamo che l' equazione (1) dalla risoluzione della quale dipende l' integrazione dell' equazione (A), può anche ricevere questa forma

$$(1)' \ldots\; \alpha^{x+n} + a'\alpha^{x+n-1} + b'\alpha^{x+n-2} + \ldots\ldots + p'\alpha^x = 0,$$

essendo $a' = \frac{q}{p}, b' = \frac{r}{p}, \ldots\ldots p' = \frac{a}{p}$; e da questa equazione $(1)'$ dipenderà l' integrazione dell' equazione (A).

Se adesso moltiplichiamo ciascun termine dell' equazione $(1)'$ per l' esponente dell' incognita α, otterremo l' equazione

$$(1)'' \ldots (x+n)\alpha^{x+n} + (x+n-1)a'\alpha^{x+n-1} + (x+n-2)b'\alpha^{x+n-2} + \ldots\ldots + xp'\alpha^x = 0.$$

E' noto per la teoria della natura delle equazioni che le radici dell' equazione $(1)'$ sono i limiti delle radici dell' equazione $(1)''$: se dunque l' equazione $(1)'$ ha due radici eguali, $\alpha = m$, $\alpha' = m$, l' equazione $(1)''$ deve avere una radice contenuta fra le radici m ed m, cioè una radice $= m$; e generalmente se l' equazione $(1)'$ ha un numero l di radici $= m$, l' equazione $(1)''$ avrà un numero $l - 1$ di radici parimente $= m$: una adunque di queste radici eguali soddisfarà nel medesimo tempo alle due equazioni $(1)'$, $(1)''$.

Se dunque per y_x si prende un tal valore che sostituito nella proposta (A) la trasformi nell' equazione $(1)''$, la quale quando le radici sono eguali è soddisfatta nel tempo stesso che l' equazione $(1)'$, questo valore sarà un altro integrale particolare, il quale aggiunto all' espressione incompleta, la renderà di nuovo completa.

Ora si riconosce facilmente che questo valore di y_x è $y_x = A(x+n)\alpha'^x$, essendo α' una delle due radici eguali; poichè sostituendo invece di y_x questo valore, l' equazione (A) diviene l' equazione $(1)''$, la quale è soddisfatta nel medesimo tempo che l' equazione $(1)'$: dunque $y_x = A(x+n)\alpha'^x$ sarà un' altro integrale particolare dell' equazione (A), che aggiunto all' espressione incompleta, la ridurrà alla seguente

$$y_x = A(x+n)\alpha'^x + A'\alpha'^x + A''\alpha''^x + \ldots\ldots + A^{(n-1)}\alpha^{(n-1)^x},$$

la quale, mutando le costanti, prende la forma

$$y_x = Ax\alpha'^x + A'\alpha'^x + A''\alpha''^x + \ldots\ldots + A^{(n-1)}\alpha^{(n-1)^x};$$

e questa contenendo n costanti arbitrarie, è perciò l' integrale completo.

Avremmo potuto trovare anche a *priori* il nuovo valore di y_x: infatti supponendo che questo sia $y_x = A.\alpha^x\varphi(x)$, indicando per

$\varphi(x)$ una funzione di x da determinarsi, e sostituendo i valori di y_{x+1}, y_{x+2} ec. nella proposta, si giunge dopo aver tutto diviso per Ap, si giunge dico all' equazione

$$\alpha^{x+n}\varphi(x+n) + a'\alpha^{x+n-1}\varphi(x+n-1) + \ldots\ldots\ldots$$
$$+ p'\alpha^{x}\varphi(x) = 0 .$$

Ora essendo α una delle radici eguali, l' equazione quì trovata sarà soddisfatta e nel caso di $\varphi(x)=1$, e in quello di $\varphi(x+n)=x+n$; poichè nel primo caso essa diviene l' equazione $(1)'$ e nel secondo l' equazione $(2)''$; dunque y_x ha due valori $A\alpha^x$, $A(x+n)\alpha^x$; e questo secondo è il nuovo integrale particolare dato dalle radici eguali.

Egualmente si proverà che se abbiamo un altro pajo qualunque di radici eguali $\alpha''' = \alpha''''$, basterà invece dei due termini $A'''\alpha'''^x + A''''\alpha''''^x$, i quali si riducono ad un solo, mettere i seguenti $A'''x\alpha'''^x + A''''\alpha''''^x$ che sono distinti fra loro.

§. 67. Se nell' equazione $(1)''$ si moltiplica ciascun termine per il respettivo esponente di α, avremo l' equazione

$$(1)''' \ldots (x+n)^2\alpha^{x+n} + (x+n-1)^2 a'\alpha^{x+n-1} + \ldots\ldots$$
$$+ x^2 p'\alpha^x = 0,$$

e le radici dell' equazione $(1)''$ saranno i limiti delle radici dell' equazione $(1)'''$; di modo che se l' equazione $(1)'$ avrà l radici eguali ad m, l' equazione $(1)''$ avrà $l-1$ radici eguali ad m, e l' equazione $(1)'''$ ne avrà un numero $l-2$ parimente eguali ad m; così una di queste radici eguali soddisfarà nel medesimo tempo alle tre equazioni $(1)', (1)'', (1)'''$.

Siano per tanto tre radici eguali $\alpha = \alpha' = \alpha''$; i tre integrali particolari $A\alpha^x$; $A'\alpha'^x$, $A''\alpha''^x$ si riducono ad un solo, e mancano perciò all' espressione di y_x due costanti arbitrarie.

Se adunque prenderemo in questo caso due tali valori di y_x, che sostituiti successivamente nella proposta, la trasformino nelle due equazioni $(1)''$, $(1)'''$, questi due valori dell' y_x saranno due

nuovi integrali particolari, i quali aggiunti all' espressione incompleta di y_x, la ricompleteranno.

E' facile vedere che tali valori particolari di y_x sono

$$y_x = A(x+n)\alpha''^x, \; y_x = A'(x+n)^2\alpha''^x,$$

essendo α'' una delle tre radici eguali; infatti sostituendo nella proposta $A(x+n)\alpha''^x$ per y_x, essa diviene l' equazione $(1)''$, o sostituendovi $A'(x+n)^2\alpha''^x$ per y_x, si trasforma nell' equazione $(1)'''$.

Aggiungendo ora all' espressione incompleta di y_x i due integrali particolari trovati, avremo

$$y_x = A(x+n)\alpha''^x + A'(x+n)^2\alpha''^x + A''\cdot\alpha'''^x + \ldots\ldots\ldots$$
$$+ A^{(n-1)}\cdot\alpha^{(n-1)x};$$

e cangiando la forma delle costanti, sarà

$$y_x = Ax\alpha''^x + A'x^2\alpha''^x + A''\alpha''^x + \ldots\ldots + A^{(n-1)}\cdot\alpha^{(n-1)x}:$$

espressione che conterrà un numero n di costanti arbitrarie, e rappresenterà perciò l' integrale completo della proposta.

Così quando avremo tre radici eguali qualunque, per esempio $\alpha''', \alpha'''', \alpha^{v}$, invece dei termini

$A'\alpha'''^x + A''''\alpha''''^x + A^{v}\alpha^{vx}$ che si riducono ad un solo, dovremo mettere i tre termini

$A'''x^2.\alpha^{vx} + A''''x.\alpha^{vx} + A^{v}.\alpha^{vx}$ che sono sempre distinti.

Col medesimo ragionamento si dimostrerebbe che se abbiamo un numero l di radici eguali

$\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots\ldots\ldots \alpha^{(l-1)}$ invece degl' l termini

$A\alpha^x + A'\alpha'^x + \ldots\ldots\ldots + A^{(l-1)}\alpha^{(l-1)x}$ che si riducono ad un solo, converrà mettere gl' l termini seguenti

$$A.x^{l-1}.\alpha^{(l-1)^x} + A'.x^{l-2}.\alpha^{(l-1)^x} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ A^{(l-2)}.x.\alpha^{(l-1)^x} + A^{(l-1)}.\alpha^{(l-1)^x},$$

ed allora l' integrale si conserverà completo: si vede come dovrebbe farsi se oltre il numero l di radici eguali fra loro, vi fosse anche un altro numero p di radici eguali fra loro, ma diverse dalle prime ec.: si trovano i medesimi risultati che al §. 62.

Risulta adunque, come dalla natura stessa delle equazioni si attinga il metodo per ricompletare quegl' integrali che dalla risoluzione di tali equazioni dipendendo, erano ridotti incompleti per la presenza delle radici eguali; di modo che se quelle equazioni a radici eguali portano seco un difetto, contengono ancora in se stesse i principj per correggerlo; in questa guisa per ricompletare gl' integrali ci serviamo di un metodo attaccato alla natura della ricerca.

§. 68. Riprendiamo l' espressione dell' integrale completo data al §. 58.

$$y_x = \pm \frac{\alpha^x}{a} \Sigma \frac{\alpha'^x}{\alpha^x} \Sigma \frac{\alpha''^x}{\alpha'^x} \ldots\ldots\ldots \Sigma \frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-2)^x}} \Sigma \frac{X}{\alpha^{(n-1)^x}}$$

il $+$ valendo per n pari, e il $-$ per n impari. E' facile da questa dedurre la formula stata data dai Geometri per l' integrazione delle equazioni lineari a coefficienti costanti, la quale è (a)

$$y_x = \frac{\alpha^x(A + \Sigma \frac{X}{\alpha^x})}{m} + \frac{\alpha'^x(A' + \Sigma \frac{X}{\alpha'^x})}{m'} + \frac{\alpha''^x(A'' + \Sigma \frac{X}{\alpha''^x})}{m''} + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{\alpha^{(n-1)^x}(A^{(n-1)} + \Sigma \frac{X}{\alpha^{(n-1)^x}})}{m^{(n-1)}}.$$

In questa formula A, A' ec. sono le costanti arbitrarie; α, α' ec. rappresentano come per noi, le radici dell' equazione (1) del §. 53 e m, m', m'' ec. sono quantità costanti, i valori delle quali sono

(a) Fra gli altri si veda il Calcolo Integrale del Professore Paoli.

$$m = \alpha b + 2\alpha^2 c + 3\alpha^3 d + \ldots\ldots + n\alpha^n p$$
$$m' = \alpha' b + 2\alpha'^2 c + 3\alpha'^3 d + \ldots\ldots + n\alpha'^n p$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$m^{(n-1)} = \alpha^{(n-1)} b + 2\alpha^{(n-1)^2} c + \ldots\ldots + n\alpha^{(n-1)^n} p.$$

Il metodo per il quale si deduce questa formula dalla nostra lo applicheremo ad una equazione del secondo ordine per maggior semplicità; giacchè osservandone l' andamento, vedremo come potrebbe generalizzarsi per qualunque ordine.

Se dunque l' equazione da integrarsi è $ay_x + by_{x+1} + cy_{x+2} = X$, l' equazione da risolversi sarà $a + b\alpha + c\alpha^2 = 0$: siano le radici di questa equazione α, α', ed allora il nostro integrale diverrà

$y_x = \frac{\alpha^x}{a} \Sigma \frac{\alpha'^x}{\alpha^x} \Sigma \frac{X}{\alpha'^x}$; e quello dato dall' altra formula

$$y_x = \frac{\alpha^x(A + \Sigma \frac{X}{\alpha^x})}{\alpha b + 2\alpha^2 c} + \frac{\alpha'^x(A' + \Sigma \frac{X}{\alpha'^x})}{\alpha' b + 2\alpha'^2 c}.$$

Secondo le regole dell' integrazione per parti (§. 17.) per le quantità a differenze finite, se z, u rappresentano due funzioni variabili, si ha

$\Sigma(z.u) = z.\Sigma u - \Sigma(\Sigma u.\Delta z + u\Delta z)$; dunque facendo

$u = \frac{\alpha'^x}{\alpha^x}$, $z = \Sigma \frac{X}{\alpha'^x}$, avremo dopo aver fatte le opportune riduzioni

$$\Sigma \frac{\alpha'^x}{\alpha^x} \Sigma \frac{X}{\alpha'^x} = \frac{\alpha}{\alpha' - \alpha} . \frac{\alpha'^x}{\alpha^x} \Sigma \frac{X}{\alpha'^x} - \Sigma\left(\frac{\alpha}{\alpha' - \alpha} . \frac{X}{\alpha^x} + \frac{X}{\alpha^x}\right) = \ldots\ldots$$
$$\frac{\alpha}{\alpha' - \alpha} . \frac{\alpha'^x}{\alpha^x} . \Sigma \frac{X}{\alpha'^x} - \frac{\alpha'}{\alpha' - \alpha} \Sigma \frac{X}{\alpha^x}, \text{ onde}$$

$y_x = \frac{1}{a} . \frac{\alpha}{\alpha' - \alpha} . \alpha'^x \Sigma \frac{X}{\alpha'^x} + \frac{1}{a} . \frac{\alpha' . \alpha^x}{\alpha - \alpha'} . \Sigma \frac{X}{\alpha^x}$; ed aggiungendovi le costanti che portano l' integrazioni, avremo

$$y_x = \frac{\alpha'^x (A' + \Sigma \frac{X}{\alpha'^x})}{a(\frac{\alpha'}{\alpha} - 1)} + \frac{\alpha^x (A + \Sigma \frac{X}{\alpha^x})}{a(\frac{\alpha}{\alpha'} - 1)}.$$

Ora in un' equazione di secondo grado l' ultimo termine col suo segno (allorchè il coefficiente del quadrato dell' incognita è l' unità) è eguale al prodotto delle due radici, e il coefficiente del secondo col segno mutato è la somma delle radici medesime; dunque $\frac{a}{c} = \alpha\alpha'$, e perciò $a = \alpha\alpha' c$, e $\alpha + \alpha' = -\frac{b}{c}$; onde $a(\frac{\alpha}{\alpha'} - 1) = \alpha^2 c - \alpha\alpha' c = \alpha^2 c + (\frac{b}{c} + \alpha)\alpha c = \alpha b + 2\alpha^2 c$, come pure $a(\frac{\alpha'}{\alpha} - 1) = \alpha'^2 c - \alpha\alpha' c = \alpha'^2 c + (\frac{b}{c} + \alpha')\alpha' c = \alpha' b + 2\alpha'^2 c$. Il valore adunque di y_x diverrà

$$y_x = \frac{\alpha'^x (A' + \Sigma \frac{X}{\alpha'^x})}{\alpha' b + 2\alpha'^2 c} + \frac{\alpha^x (A + \Sigma \frac{X}{\alpha^x})}{\alpha b + 2\alpha^2 c},$$ che è l' integrale delle equazioni di secondo ordine dato dalla formula degli altri Geometri. Si terrebbe il medesimo metodo, qualunque fosse l' ordine dell' equazione.

Questa formula per altro non è d' alcun uso quando le radici sono eguali, poichè essa dà gli integrali incompleti: noi per questo non ce ne occuperemo di più, ed in tutte le applicazioni faremo uso della nostra formula, la quale dà sempre gl' integrali completi qualunque siano le radici della equazione.

Infatti nel caso di due radici eguali $\alpha = \alpha'$, sarà

$y_x = \frac{\alpha^x}{a} \Sigma 1 . \Sigma \frac{X}{\alpha^x}$ ed integrando per parti,

$$y_x = \frac{\alpha^x}{a} \left\{ x\Sigma\frac{X}{\alpha^x} - \Sigma\left(x . \frac{X}{\alpha^x} + \frac{X}{\alpha^x}\right) \right\} = \frac{\alpha^x}{a} \left\{ (x-1)\Sigma\frac{X}{\alpha^x} - \ldots \Sigma x . \frac{X}{\alpha^x} \right\} = \frac{\alpha^x}{a} \left\{ (x-1)\left(A + \Sigma\frac{X}{\alpha^x}\right) \right\} - \frac{\alpha^x}{a} \left\{ A' + \Sigma x . \frac{X}{\alpha^x} \right\}$$

essendo A, A' le due costanti arbitrarie che portano le integrazioni.

§. 69. All' integrazione dell' equazione proposta al §. 53. si riduce l' integrazione di quest' altra equazione

$$Aa_x . y_x + Ba_x . a_{x+1} . y_{x+1} + Ca_x . a_{x+1} . a_{x+2} . y_{x+2} + \ldots\ldots$$
$$+ Pa_x . a_{x+1} \ldots\ldots\ldots a_{x+n} . y_{x+n} = X,$$

nella quale a_x, X sono funzioni conosciute di x: ed A, B ec. sono quantità costanti.

Infatti ponghiamo $y_x = e^{\Sigma m_x} . z_x$ essendo m_x, z_x due funzioni di x da determinarsi. Se sostituiamo questo valore di y_x nella proposta e s' avverte che

$$\Sigma m_{x+1} = m_x + \Sigma m_x$$
$$\Sigma m_{x+2} = m_{x+1} + m_x + \Sigma m_x$$

ec.

avremo l' equazione

$$(1) \ldots Aa_x . e^{\Sigma m_x} . z_x + Ba_x . a_{x+1} . e^{\Sigma m_x} . e^{m_x} z_{x+1} + \ldots\ldots$$
$$+ Pa_x . a_{x+1} \ldots\ldots a_{x+n} . e^{\Sigma m_x} . e^{m_x} . e^{m_{x+1}} \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots e^{m_{x+n-1}} . z_{x+n} = X.$$

Dividiamo ora tutta questa equazione per $a_x e^{\Sigma m_x}$, e troveremo

$$(2) \ldots Az_x + Ba_{x+1} . e^{m_x} . z_{x+1} + Ca_{x+1} . a_{x+2} . e^{m_{x+1}} . e^{m_x} \times$$
$$z_{x+2} + \ldots\ldots + Pa_{x+1} . a_{x+2} \ldots\ldots a_{x+n} . e^{m_x} . e^{m_{x+1}} \ldots$$
$$\ldots\ldots e^{m_{x+n-1}} . z_{x+n} = X : a_x . e^{\Sigma m_x}.$$

Per determinare m_x ponghiamo $a_{x+1} e^{m_x} = 1$, ed avremo $m_x = -\log.(a_{x+1})$, e perciò $\Sigma m_x = -\Sigma \log.(a_{x+1})$.

Fatte queste sostituzioni nell' equazione (2), diverrà

$$Az_x + Bz_{x+1} + Cz_{x+2} + \ldots\ldots + Pz_{x+n} = \frac{X}{a_x e^{-\Sigma \log . a_{x+1}}} = \frac{e^{\Sigma \log . a_{x+1}} . X}{a_x}.$$

Quest' ultima equazione essendo della forma di quella del §. 53., il suo integrale sarà

$$z_x = \pm \frac{\delta^x}{A} \Sigma \frac{\delta'^x}{\delta^x} \Sigma \ldots\ldots \Sigma \frac{\delta^{(n-1)^x}}{\delta^{(n-2)^x}} \Sigma \frac{X . e^{\Sigma \log . a_{x+1}}}{a_x . \delta^{(n-1)^x}} :$$

le quantità $\delta, \delta', \delta'', \ldots\ldots\ldots \delta^{(n-1)}$ sono le n radici dell' equazione

$$A + B\delta + C\delta^2 + \ldots\ldots\ldots + P\delta^n = o.$$

Trovati il valore di z_x e di $e^{\Sigma m_x}$, s' avrà il valore di $y_x = z_x e^{\Sigma m_x}$, e perciò l' integrale della proposta equazione.

Il Sig. La-Place ha il primo integrata una tale equazione a coefficienti variabili.

§. 70. Siccome (48, 66) l' integrale completo di una equazione lineare

$$ay_x + by_{x+1} + \ldots\ldots\ldots + py_{x+n} = X$$ a coefficienti costanti o variabili, è la somma dei suoi integrali particolari, così dalla cognizione di questi si passerà alla cognizione di quello.

Ponghiamo nella proposta equazione $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \ldots\ldots \alpha^n$ invece di

$y_x, y_{x+1}, \ldots\ldots y_{x+n}$ ed avremo, facendo $X = o$,

$$(A) \ldots a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots\ldots\ldots + p\alpha^n = o,$$ equazione algebraica del grado n^{esimo}.

Se i coefficienti sono costanti, le n radici di questa equazione sono costanti, ed abbiamo i casi sopra considerati; se però i coefficienti sono variabili, le radici dell' equazione algebraica possono essere o tutte variabili, o alcune variabili ed alcune costanti; e quest' ultimo caso ammette alcune considerazioni che facilitano la ricerca dell' integrale.

Siano $\alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots\ldots \alpha^{(n)}$ le n radici dell' equazione algebraica (A), e tutte siano costanti eccettuata una, e questa sia α'; allora è manifesto che si avranno un numero $n - 1$ d' integrali particolari, cioè

$$y_x = A''\alpha''^x, = A'''\alpha'''^x \text{ ec. } \ldots\ldots = A^{(n)}\alpha^{(n)^x}$$, i quali soddisfaranno all' equazione proposta nel caso di $X = o$; dunque quest' equazione sarà (§. 52.) completamente integrabile.

Egualmente se due saranno le radici variabili, ed $n - 2$ quelle costanti, s' avranno un numero $n - 2$ d' integrali particolari che soddisfaranno alla proposta nel caso di $X = o$, e perciò secondo il suddetto §. 52., l' equazione sarà integrabile completamente.

Se poi le radici variabili saranno di numero m, e quelle costanti di numero $n - m$, allora avremo un numero $n - m$ d' integrali particolari, e la loro somma ci darà anche un integrale particolare dotato di $n - m$ costanti arbitrarie: sarà poi facile dimostrare seguendo il ragionamento fatto per i due Teoremi del citato §. che l' integrale completo dipende in quest' ultimo caso dall' integrazione di una equazione a coefficienti variabili dell' ordine m.

Da tutto questo concluderemo i seguenti Teoremi.

Se in un' equazione alle differenze finite dell' ordine n a coefficienti variabili

$$ay_x + by_{x+1} + cy_{x+2} + \ldots\ldots + py_{x+n} = X,$$

si fa $X = o$, e si sostituisce $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots\ldots \alpha^n$ invece di

$y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \ldots\ldots\ldots y_{x+n}$ avremo un' equazione algebraica

$$a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots\ldots\ldots + p\alpha^n = o,$$ e sarà

PRIMO TEOREMA

„ L' equazione integrabile completamente, se le radici sa-
„ ranno tutte costanti una eccettuata:

SECONDO TEOREMA

„ L' equazione integrabile completamente, se le radici sa-
„ ranno tutte costanti due eccettuate:

TERZO TEOREMA

„ L' equazione integrabile particolarmente con un numero
„ m di costanti arbitrarie, quando le radici costanti saranno di
„ numero m.

QUARTO TEOREMA

„ L' integrale completo dell' equazione in quest' ultimo ca-
„ so dipenderà dall' integrazione di una equazione lineare a coef-
„ ficienti variabili dell' ordine $n - m$, tante essendo le radici
„ variabili.

Abbiamo dati questi Teoremi negli Atti di Turino del 1803, ma dimostrati diversamente.

§. 71. Quando fra un numero m di funzioni incognite y_x, z_x, u_x ec., e la variabile x, si ha un numero m d' equazioni a differenze finite, potremo sempre per mezzo dell' eliminazione giungere ad una equazione che contenga una sola funzione incognita: questa equazione però sarà d' un ordine maggiore di quello delle equazioni proposte: dimostreremo tutto questo in due equazioni di secondo ordine, e sarà facile vedere che il medesimo metodo si applica ad un qualunque numero d' equazioni, fra un qualunque numero di variabili.

Siano adunque da determinarsi i valori completi di y_x, e z_x in funzioni di x per mezzo delle seguenti equazioni (1), (2)

$$(1) \ldots \left.\begin{array}{l} a_x y_x + b_x y_{x+1} + c_x y_{x+2} \\ + a'_x z_x + b'_x z_{x+1} + c'_x z_{x+2} \end{array}\right\} = \varphi(x)$$

$$(2) \ldots \left.\begin{array}{l} A_x y_x + B_x y_{x+1} + C_x y_{x+2} \\ + A'_x z_x + B'_x z_{x+1} + C'_x z_{x+2} \end{array}\right\} = \varphi'(x)$$

nelle quali tanto i coefficienti che il secondo membro sono funzioni date dell' x.

Se ricaviamo dalla seconda equazione il valore di z_{x+2} e lo sostituiamo nella prima, avremo una equazione di questa forma

$$(3) \ldots \left.\begin{array}{l} a1_x \cdot y_x + b1_x \cdot y_{x+1} + c1_x \cdot y_{x+2} \\ a'1_x \cdot z_x + b'1_x z_{x+1} \end{array}\right\} = \varphi 1(x),$$

nella quale i coefficienti, e il secondo membro saranno quelli che porta una tal sostituzione.

Se in questa equazione facciamo che x divenga $x+1$, avremo

$$(4) \ldots \left.\begin{array}{l} a1_{x+1} \cdot y_{x+1} + b1_{x+1} \cdot y_{x+2} + c1_{x+1} \cdot y_{x+3} \\ a'1_{x+1} \cdot z_{x+1} + b'1_{x+1} \cdot z_{x+2} \end{array}\right\} = \varphi 1(x+1).$$

Se adesso si sostituisce in questa equazione il valore di z_{x+2} ricavato dalla equazione (2), avremo una equazione di questa forma

$$(5) \ldots \left.\begin{array}{l} a2_x \cdot y_x + b2_x \cdot y_{x+1} + c2_x \cdot y_{x+2} + d2_x \cdot y_{x+3} \\ a'2_x \cdot z_x + b'2_x \cdot z_{x+1} \end{array}\right\} = \varphi 2(x)$$

$a2_x$, $b2_x$ ec. $\varphi 2(x)$ rappresentano i coefficienti dopo questa sostituzione. Il valore di z_{x+1} ricavato da questa equazione (5), si sostituisca nell' equazione (3), ed avremo un' equazione di questa forma

$$(6)\ldots.\left.\begin{array}{l} a3_x\cdot y_x + b3_x\cdot y_{x+1} + c3_x\cdot y_{x+2} + d3_x\cdot y_{x+3} \\ + a'3_x\cdot z_x \end{array}\right\} = \varphi 3(x),$$

la quale ci dà il valore di z_x. Per mezzo delle due equazioni (3) e (5) eliminiamo z_x, avremo il valore di z_{x+1}, il quale, facendovi x crescere di una unità, diverrebbe il valore di z_{x+2}. Ora sostituiti questi tre valori nell' equazione (1), questa conterrà solamente le variabili x, y_x; sarà però del quarto ordine ed avrà questa forma

$$(P)\ldots\ldots a4_x\cdot y_x + b4_x\cdot y_{x+1} + c4_x\cdot y_{x+2} + d4_x\cdot y_{x+3} + e4_x\cdot y_{x+4} = X;$$

$a4_x, b4_x$ ec. X rappresentano funzioni variabili conosciute, e sono funzioni dei coefficienti delle equazioni proposte e dei loro secondi membri.

L' integrazione adunque delle due equazioni (1), (2) dipende dall' integrazione dell' equazione (P).

E' facile vedere che se i coefficienti della proposta sono costanti, ancora i coefficienti della risultante equazione (P) sono parimente costanti, e perciò essa sarà sempre integrabile.

L' ordine dell' equazioni proposte (1), (2) era il medesimo per ambedue; potrebbe essere anche diverso nelle due equazioni; giacchè sarebbe cosa facile di ridurre l' equazioni al medesimo ordine con l' aggiungere i termini che mancano, e fare nella finale equazione risultante, eguali a zero i coefficienti dei termini aggiunti.

Si vede che questo metodo è generale per qualunque numero m d' equazioni, fra un numero qualunque $m+1$ di variabili, e di qualunque ordine n.

Nel caso dei coefficienti costanti, se i secondi membri sono nulli, possiamo anche così trattare quelle equazioni proposte. Facciasi $y_x = \alpha^x, z_x = \alpha^x . l$, essendo α, l due costanti da determinarsi. Sostituendo questi valori nelle equazioni (1), (2) avremo dopo aver tutto diviso per α^x

$$\left.\begin{array}{l} a + b\alpha + c\alpha^2 \\ + (a' + b'\alpha + c'\alpha^2)\, l \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} A + B\alpha + C\alpha^2 \\ + (A' + B'\alpha + C'\alpha^2)\, l \end{array}\right\} = 0$$

dalle quali devono determinarsi α ed l. Preso il valore di l da una di queste equazioni e sostituito nell' altra, dopo averla ridotta, avremo per determinare α la seguente equazione

$$(a + b\alpha + c\alpha^2)(A' + B'\alpha + C'\alpha^2) - (a' + b'\alpha + c'\alpha^2)(A + B\alpha + C\alpha^2) = 0.$$

Questa equazione algebraica essendo del quarto grado ci dà quattro valori per α, per mezzo dei quali s' avranno altrettanti valori di l: questi valori poi di α e di l ci daranno quattro valori particolari di y_x e di z_x, i quali moltiplicati per delle costanti arbitrarie e sommati, ci daranno i valori completi di y_x e di z_x: così se i quattro valori di α sono $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$, e quelli di l sono l, l', l'', l''', avremo per il valore completo di y_x questa espressione

$$y_x = A\alpha^x + A'\alpha'^x + A''\alpha''^x + A'''\alpha'''^x,$$ e per z_x quest' altra

$$z_x = A\alpha^x . l + A'\alpha'^x . l' + A''\alpha''^x . l'' + A'''\alpha'''^x . l'''.$$

Le costanti A, A', A'', A''' dell' y_x sono le stesse che quelle della z_x.

Ad una equazione differenziale del quarto ordine a coefficienti costanti saremmo giunti se avessimo adoprato il metodo del §. antecedente, e l' integrale di una tale equazione sarebbe stato sempre dipendente dalla risoluzione d' un' equazione algebraica del quarto grado.

Se il numero delle equazioni alle differenze fosse minore del numero delle funzioni incognite, si concepisce facilmente che alcune di queste funzioni resterebbero al nostro arbitrio, per il che potrebbero anche stabilirsi delle equazioni arbitrarie per avere un numero d' equazioni eguale al numero delle funzioni incognite.

§. 72. Per fare un' applicazione delle cose dette quì sopra prendiamo a risolvere un Problema appartenente al Gioco degli Scacchi.

PROBLEMA

„ Data nello Scacchiere una casella qualunque e supponen-
„ do la torre posta in una casella parimente data, si dimanda in
„ quante maniere la torre facendo x mosse, possa andare dalla ca-
„ sella o scacco in cui si trova, alla detta determinata casella „.

Conviene distinguere in questo Problema tre casi: 1°. Quando la torre si trova nella stessa casella d' arrivo: 2°. Quando lo scacco della torre, e lo scacco d' arrivo sono sopra la stessa fila, in modo che possa la torre in una mossa andare allo scacco d' arrivo: 3°. Quando la torre e lo scacco d' arrivo non sono in alcuna delle suddette due posizioni.

Indichiamo per y_x il numero ricercato delle maniere nel primo caso; per z_x lo stesso numero nel secondo caso, e per u_x il numero delle maniere nel terzo caso.

Supponghiamo che la torre deva fare $x+1$ mosse: sarà allora il ricercato numero di maniere y_{x+1} nel primo caso; z_{x+1} nel secondo; e u_{x+1} nel terzo. D' altronde nel primo caso può la torre con la prima mossa andare in 14 scacchi diversi, in ciascun dei quali essa si trova nella situazione del secondo caso, ed ha perciò in ciascuno di essi un numero di maniere z_x per arrivare in x mosse allo scacco d' onde era partita; dunque il numero delle maniere per $x+1$ mosse, sarà ancora espresso nel primo caso per $14z_x$: dunque $y_{x+1}=14z_x$.

Nel secondo caso può la torre con la prima mossa passare in 14 scacchi, sette cioè sopra la fila che unisce lo scacco di partenza della torre, e lo scacco d' arrivo, ed altri sette sopra la fila a questa perpendicolare. In ciascuno degli ultimi sette essa prende una posizione appartenente al terzo caso, e perciò in virtù di questi sette scacchi avremo un numero di maniere rappresentato per $7u_x$. In sei scacchi dei primi sette essa prende una posizione appartenente al secondo caso, ed in virtù di essi abbiamo il numero del-

le maniere rappresentato da $6z_x$, e nell' altro scacco essa prende la posizione appartenente al primo caso, ed in virtù di esso si ha il numero delle maniere y_x; dunque nel secondo caso il numero totale delle maniere per $x+1$ mosse, sarà

$y_x+6z_x+7u_x$, e perciò

$$z_{x+1}=y_x+6z_x+7u_x.$$

Nel terzo caso un ragionamento simile ci darà l' equazione $u_{x+1}=2z_x+12u_x$.

Avremo adunque per risolvere il Problema queste tre equazioni a differenze finite del primo ordine

$$y_{x+1}=14z_x$$
$$z_{x+1}=y_x+6z_x+7u_x$$
$$u_{x+1}=2z_x+12u_x$$

fra le tre funzioni incognite y_x, z_x, u_x.

Seguendo il metodo spiegato sopra (70) elimineremo z_x e z_{x+1} per mezzo delle due prime equazioni e dell' equazione $y_{x+2}=14z_{x+1}$ dedotta dalla prima, ed avremo

$$(1)\ldots y_{x+2}=14y_x+6y_{x+1}+98u_x.$$

Da quest' ultima equazione si deduce quest' altra

$$(2)\ldots y_{x+3}=14y_{x+1}+6y_{x+2}+98u_{x+1}.$$

Sostituendo nella terza delle equazioni proposte il valore di z_x, s' avrà un' altra equazione

$$(3)\ldots 14u_{x+1}=2y_{x+1}+168u_x.$$

Ora per mezzo di queste equazioni (1), (2), (3) eliminiamo u_x e u_{x+1}, ed avremo in fine per determinare y_x quest' equazione a differenze finite del terzo ordine

$y_{x+3} = 18y_{x+2} - 44y_{x+1} - 168y_x$,

l' integrale della quale (§. 66.) è $y_x = A\alpha^x + B\alpha'^x + C\alpha''^x$, essendo $\alpha, \alpha', \alpha''$ le tre radici di questa equazione

$\alpha^3 - 18\alpha^2 + 44\alpha + 168 = 0$: ora queste radici sono $\alpha = 6, \alpha' = 14, \alpha'' = -2$, e perciò

$y_x = A.6^x + B.14^x + C(-2)^x$: le quantità A, B, C, rappresentano le tre costanti arbitrarie.

Trovato il valore di y_x ricaveremo dalla prima delle equazioni proposte il valore di z_x, e questo sarà

$$z_x = \tfrac{3}{7}A.6^x + B.14^x - \tfrac{1}{7}C(-2)^x.$$

Dalla seconda poi avremo

$$u_x = -\tfrac{1}{7}A.6^x + B.14^x + \tfrac{1}{49}C(-2)^x.$$

Per determinare le costanti s'osservi che facendo $x=1$, abbiamo $y_x = y_1 = 0$, $z_x = z_1 = 1$, $u_x = u_1 = 0$, onde queste condizioni daranno

$$6A + 14B - 2C = 0$$

$$\tfrac{18}{7}A + 14B + \tfrac{2}{7}C = 1$$

$$-\tfrac{6}{7}A + 14B - \tfrac{2}{49}C = 0,$$

dalle quali si ricava $A = \frac{14}{64}$, $B = \frac{1}{64}$, $C = \frac{49}{64}$: sarà in fine

$$y_x = \frac{14.6^x + 14^x + 49(-2)^x}{64}$$

$$z_x = \frac{6.6^x + 14^x - 7(-2)^x}{64}$$

$$u_x = \frac{-2.6^x + 14^x + (-2)^x}{64};$$

queste formule contengono la soluzione completa del Problema.

Sia $x = 2$, ed avremo $y_x = 14$; $z_x = 6$; $u_x = 2$: cioè la

torre facendo due mosse può in 14 maniere sortire dalla casa ove si trova e ritornarvi: facendo parimente due mosse può la torre in sei maniere andare dalla casa, ove essa trovasi, ad uno scacco qualunque posto nella stessa linea; e facendo anche due mosse può la torre in sole due maniere andare dallo scacco, in cui essa è, ad un altro scacco posto in un' altra linea qualunque.

§. 73. Fin ora abbiamo supposto che la differenza della variabile x fosse l' unità, ovvero che la variabile x crescesse della quantità 1, ed abbiamo insegnato per questo caso ad integrare l' equazioni lineari. Vediamo adesso come giunger si possa all' integrazione delle medesime equazioni quando la differenza finita Δx dell' x, è una qualunque costante a, ovvero una funzione qualunque variabile Fx della medesima x.

Sia pertanto da integrarsi l' equazione

(A) .... $ay_x + by_{x'} + cy_{x''} + \ldots\ldots + py_{x^{(n)}} = X$, nella quale a, b, c ec. p, X sono costanti, o funzioni date di x; $x' = x + \Delta x$, $x'' = x' + \Delta x'$, $x''' = x'' + \Delta x''$ ec. $x^{(n)} = x^{(n-1)} + \Delta x^{(n-1)}$.

Facciasi $y_x = \alpha_x \Sigma z_x$, essendo α_x, z_x due funzioni di x da determinarsi: avremo

$$y_{x'} = \alpha_{x'} \Sigma z_{x'}$$

$$y_{x''} = \alpha_{x''} \Sigma z_{x''}$$

$$y_{x'''} = \alpha_{x'''} \Sigma z_{x'''}$$

. . . .

. . . .

$$y_{x^{(n)}} = \alpha_{x^{(n)}} \Sigma z_{x^{(n)}}.$$

Ora rappresentando per Σz_x la somma dei termini che precedono z_x, per $\Sigma z_{x'}$ la somma di quelli che precedono $z_{x'}$ nella serie

$z_{'''x}, z_{''x}, z_{'x}, z_x, z_{x'}, z_{x''}, z_{x'''}$, essendo

$'''x = ''''x + \Delta''''x$

$''x = '''x + \Delta'''x$

$'x = ''x + \Delta''x$

$x = 'x + \Delta'x$

$x' = x + \Delta x$

$x'' = x' + \Delta x'$

ec.

Avremo

$y_x = \alpha_x \Sigma z_x$

$y_{x'} = \alpha_{x'} (z_x + \Sigma z_x)$

$y_{x''} = \alpha_{x''} (z_x + z_{x'} + \Sigma z_x)$

$y_{x'''} = \alpha_{x'''} (z_x + z_{x'} + z_{x''} + \Sigma z_x)$

. . . .

. . . .

$y_{x^{(n)}} = \alpha_{x^{(n)}} (z_x + z_{x'} + z_{x''} + \dots\dots + z_{x^{(n-1)}} + \Sigma z_x)$.

Sostituendo questi valori nella proposta e seguendo il medesimo ragionamento del §. 50., avremo

$$\left.\begin{array}{r} (a.\alpha_x + b.\alpha_{x'} + c.\alpha_{x''} + \dots\dots + p\alpha_{x^{(n)}})\Sigma z_x \\ +(b.\alpha_{x'} + c.\alpha_{x''} + \dots\dots + p\alpha_{x^{(n)}}) z_x \\ +(c.\alpha_{x''} + \dots\dots + p\alpha_{x^{(n)}}) z_{x'} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ + p\alpha_{x^{(n)}} . z_{x^{(n-1)}} \end{array}\right\} = X.$$

Se supponghiamo il coefficiente di Σz_x eguale a zero, avremo per determinare α_x questa equazione

$a . \alpha_x + b . \alpha_{x'} + c . \alpha_{x''} + \dots\dots + p . \alpha_{x^{(n)}} = 0$ dell' ordine n a differenze variabili, e nella quale il secondo membro è zero; e per determinare z_x una equazione di questa forma

$b'z_x + c'z_{x'} + \dots\dots + p'z_{x^{(n-1)}} = X$ dell' ordine $n - 1$

a differenze parimente variabili.

La prima non è altro che la proposta quando vi si fa $X = 0$, e la seconda è una equazione di un ordine inferiore di una unità della proposta medesima.

Trattando questa ultima equazione come l' equazione (A), e seguendo parola a parola il medesimo metodo tenuto al §. citato (mutando però x, $x + 1$, $x + 2$ ec., $x + n$, in x, x', x'' ec., $x^{(n)}$) giungeremo al medesimo Teorema, che abbiamo ivi trovato per le equazioni a differenze costanti, eguali all' unità, a coefficienti variabili; e si vedrà che la forma dell' integrale completo delle equazioni che quì trattiamo, è egualmente

$y_x = \alpha_x \Sigma\alpha'_x \Sigma\alpha''_x \dots\dots \Sigma\alpha_x^{(n-1)} \Sigma z_{x^{(n-1)}}$, rappresentando per i segni Σ le somme di termini nelle serie, nelle quali la x cresce da un termine all' altro della quantità variabile Δx. Le funzioni α_x, α'_x ec. $z_{x^{(n-1)}}$ dipendono da equazioni lineari a differenze variabili di cui il secondo membro è eguale a zero.

Tutta la difficoltà adunque si riduce ad integrare queste equazioni lineari quando il secondo membro è nullo.

§. 74. Supponghiamo perciò che il valore di y_x sia $\alpha_u \Sigma z_x$, essendo u una funzione di x da determinarsi, e α_u una funzione di u parimente da determinarsi.

Indicando per u' ciò che diviene u quando in esso x cresce di Δx, per u'' ciò che diviene u' nel medesimo caso ec., avremo

$y_x = \alpha_u \Sigma z_x$

$y_{x'} = \alpha_{u'} \Sigma z_{x'} = \alpha_{u'} (z_x + \Sigma z_x)$

$y_{x''} = \alpha_{u''} \Sigma z_{x''} = \alpha_{u''} (z_x + z_{x'} + \Sigma z_x)$

. . . .

$$y_{x^{(n)}} = \alpha_{u^{(n)}} \Sigma z_{x^{(n)}} = \alpha_{u^{(n)}} (z_x + z_{x'} + \ldots\ldots + z_{x^{(n-1)}} + \Sigma z_x).$$

Sostituendo questi valori nella proposta, eguagliando a zero il coefficiente di Σz_x, e indicando per b', c' ec. p', i coefficienti di $z_x, z_{x'}$ ec., $z_{x^{(n-1)}}$, avremo queste due equazioni

$$(1) \ldots\ldots a\alpha_u + b\alpha_{u'} + c\alpha_{u''} + \ldots\ldots\ldots + p\alpha_{u^{(n)}} = 0$$

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots b'z_x + c'z_{x'} + \ldots\ldots\ldots + p'z_{x^{(n-1)}} = X,$$ dall'integrale delle quali dipende l'integrale della proposta (A).

Ora osserviamo che nell'equazione (1) non solo è indeterminata la funzione α_u di u, ma ancora la medesima u funzione di x: essendo ora due le indeterminate, ed una sola l'equazione fra di esse, una di queste indeterminate dipenderà dal nostro arbitrio. Facciamo adunque servire la u alla seguente condizione: sia u tal funzione di x, che quando x cresce della sua differenza finita Δx, tutto l'aumento che riceve la u, cioè Δu, sia eguale all'unità; così determinata la u avremo

$$u' = u + \Delta u = u + 1$$

$$u'' = u' + \Delta u' = u + 2$$

. . . .

. . . .

$$u^{(n)} = u^{(n-1)} + \Delta u^{(n-1)} = u + n,$$

e perciò l'equazione (1) diverrà

$$a\alpha_u + b\alpha_{u+1} + c\alpha_{u+2} + \ldots\ldots\ldots + p\alpha_{u+n} = 0,$$ che è una equazione dell'ordine n a differenze finite eguali all'unità, i cui coefficienti sono variabili, perchè sono funzioni di x, ovvero di u, potendosi sempre determinare x per u, quando u è determinato per x. Per mezzo di questa equazione abbiamo il valore di α_u.

Trattando l'equazione (2) come la proposta, e seguendo il medesimo andamento del §. 50., si vedrà che l'integrale completo della proposta avrà questa forma

$$y_x = \alpha_u \Sigma\alpha'_u \Sigma\alpha''_u \ldots\ldots\ldots \Sigma\alpha_u^{(n-1)} \Sigma z_{x^{(n-1)}},$$ u essendo una funzione di x, dotata della proprietà sopra accennata: α_u, α'_u ec. $\alpha_u^{(n-1)}$ essendo funzioni di u determinate da equazioni in u, simili a quelle (1), (2), (3) ec. (n) in x del §. 51. delle quali i secondi membri sono nulli.

Così l'integrazione delle equazioni lineari a differenze variabili, è stata ridotta all'integrazione d'equazioni lineari a differenze costanti eguali all'unità (a).

§. 75. Ma parliamo di quelle equazioni a differenze variabili, i cui coefficienti a, b, c ec., p sono costanti, giacchè di queste sole si può aver l'integrale completo.

Facciamo in questo caso $y_x = \alpha^u \Sigma z_x$, α essendo una costante da determinarsi, ed u una tal funzione di x, che crescendo l'x della differenza Δx, u cresca dell'unità.

Prendendo i valori di $y_{x'}, y_{x''}$ ec., sostituendoli nella proposta, facendo eguale a zero il coefficiente di Σz_x, e indicando per b', c' ec., p' i coefficienti di $z_x, z_{x'}$ ec. $z_{x^{(n-1)}}$ divisi per α^u, avremo queste due equazioni

$$(1) \ldots\ldots a\alpha^u + b\alpha^{u+1} + c\alpha^{u+2} + \ldots\ldots + p\alpha^{u+n} = 0$$

$$(2) \ldots\ldots b'z_x + c'z_{x'} + \ldots\ldots + p'z_{x^{(n-1)}} = \frac{X}{\alpha^u}.$$

Così si vede che tenendo il medesimo metodo da noi adoprato al §. 53. e dando al segno sommatorio Σ il significato quì sopra spiegato, avremo

---

(a) Questa idea di ridurre l'integrazione delle equazioni lineari a differenze variabili, a quella d'equazioni a differenze costanti, si deve ai Sigg. La-Place, Condorcet; è stata poi seguita da Cousin ed altri Geometri.

$$y_x = \pm \frac{\alpha^u}{a} \Sigma \frac{\alpha'^u}{\alpha^u} \Sigma \frac{\alpha''^u}{\alpha'^u} \cdots\cdots\cdots \Sigma \frac{\alpha^{(n-1)^u}}{\alpha^{(n-2)^u}} \Sigma \frac{X}{\alpha^{(n-1)^u}}.$$

Le costanti $\alpha, \alpha', \alpha''$ ec., $\alpha^{(n-1)}$ sono al solito le n radici dell' equazione

$$a + b\alpha + c\alpha^2 + \cdots\cdots + p\alpha^n = 0.$$

Tutta adunque la difficoltà dell' integrazione dell' equazioni a differenze variabili, si riduce alla ricerca della funzione u.

Rappresentiamo per u_x quella funzione dell' x, tale che quando x cresce della differenza variabile Δx, la funzione u_x cresca dell' unità. Questa proprietà sarà espressa dall' equazione $u_{x+\Delta x} = u_x + 1$, dalla quale ricaveremo $u_{x+\Delta x} - u_x = 1$, e perciò integrando $u_x = \Sigma 1$; così la ricercata funzione è eguale all' integrale finito dell' unità, preso quell' integrale secondo il sistema di differenza variabile che regna nella proposta.

L' integrale pertanto dell' equazioni lineari dell' ordine n nel caso dei coefficienti costanti, sarà

$$y_x = \pm \frac{\alpha^{\Sigma 1}}{a} \Sigma \frac{\alpha'^{\Sigma 1}}{\alpha^{\Sigma 1}} \cdots\cdots \Sigma \frac{\alpha^{(n-1)^{\Sigma 1}}}{\alpha^{(n-2)^{\Sigma 1}}} \Sigma \frac{X}{\alpha^{(n-1)^{\Sigma 1}}}.$$ Se la differenza dell' x fosse eguale per esempio ad una costante b', avremmo $\Sigma 1 = \frac{x}{b'} + C$, e facendo per più semplicità $C = 0$, $\Sigma 1 = \frac{x}{b'}$, l' integrale sarà la formula trovata quì sopra, se invece di $\Sigma 1$ vi si pone $\frac{x}{b'}$.

§ 76. Si può ancora ridurre la ricerca del valore di u all' integrazione d' una equazione a differenze finite costanti del primo ordine, ma non lineare. Infatti siccome è $u_{x+\Delta x} = u_x + 1 = u + 1$, avremo $x + \Delta x = p_{u+1}$ indicando per p_{u+1} una funzione di $u_x + 1$, ovvero di $u + 1$. Ora supponghiamo $\Delta x = \varphi(x) - x$, ed avremo $x + \varphi(x) - x = p_{u+1}$ e perciò $\varphi(x) = p_{u+1}$.

Siccome poi $u_x = u$, $u_{\varphi(x)} = u + 1$, e u_x, $u_{\varphi(x)}$ sono due simili funzioni in x e $\varphi(x)$, sarà perciò x eguale ad una funzione di u simile alla funzione di $u + 1$, cui è eguale $\varphi(x)$, cioè sarà $x = p_u$: sostituendo il valore di x nell' equazione $\varphi(x) = p_{u+1}$, s' avrà $\varphi(p_u) = p_{u+1}$, equazione dalla cui integrazione dipende il valore di p_u: trovato p_u eguale ad una determinata funzione di u, sarà x eguale a quella stessa funzione; avremo adunque un' equazione fra x ed u, e perciò u in funzione di x. Percorriamo alcuni casi d' integrabilità di questa equazione.

Sia $\varphi(x) = ax + b$, ove a e b sono quantità costanti, ed avremo allora $p_{u+1} = ap_u + b$, ovvero $ap_u - p_{u+1} = -b$; e facilmente troveremo per ciò che si è detto (§. 58.),

$$p_u = -\frac{\alpha^u}{a} \Sigma \frac{-b}{\alpha^u} = ba^{u-1} \Sigma \frac{1}{a^u},$$ poichè l' equazione $a - \alpha = 0$ ci dà $\alpha = a$; eseguendo ora l' integrazione si troverà

$$p_u = ba^{u-1}\left(\frac{\frac{1}{a^u}}{\frac{1}{a} - 1} + C\right) = ba^{u-1}\left(\frac{a^{-u+1}}{1-a} + C\right);$$ ovvero

$$p_u = \frac{b + Cba^{u-1}}{1-a} = \frac{-Cba^{u-1} - b}{a-1},$$ e mutando la forma della costante, cioè facendo $C = -\frac{Ca}{b}$, sarà

$$p_u = \frac{Ca^u - b}{a-1}.$$

Supponendo $C = 1$, cioè prendendo un integrale particolare, s' avrà

$$p_u = \frac{a^u - b}{a-1}, \text{ onde } x = \frac{a^u - b}{a-1}.$$

Da quest' ultima equazione risulta $u = \frac{lo\cdot(b + (a-1)x)}{log. a}$.

Se $\varphi(x) = ax^m$, avremo $p_{u+1} = ap_u^m$, e ponendo $p_u = a^{q_u}$, otterremo $a^{q_{u+1}} = a . a^{mq_u} = a^{mq_u + 1}$, e prendendo i logaritmi, si ha $q_{u+1}\, log. a = (mq_u + 1)\, log. a$, ovvero

$q_{u+1} = mq_u + 1$, equazione lineare del primo ordine, la quale integrata ci dà

$q_u = \frac{Cm^u - 1}{m - 1}$; onde $p_u = x = a^{\frac{Cm^u - 1}{m - 1}}$, dalla quale si ricava, prendendo due volte i logaritmi,

$u = \frac{log.\left(\frac{1}{C} + \frac{(m-1)\, log. x}{C\, log. a}\right)}{log. m}$, e facendo $C = \frac{1}{log. a}$,

$u = \frac{log. log. ax^{m-1}}{log. m}$. Non ci estenderemo di più sopra queste ricerche particolari (a).

Da tutto ciò che abbiamo detto si conclude che le equazioni a differenze variabili potranno integrarsi, quando alcun Geometra avrà insegnato ad integrare completamente l' equazione

$\varphi(p_u) = p_{u+1}$, ovvero a trovare il valore generale di $\Sigma 1$ in tutti i possibili sistemi d' integrazione, ricerche ambedue della stessa difficoltà.

§. 77. Sia ora proposta per integrarsi l' equazione $y_{x+m} - a_x y_x = X$, nella quale a_x, X sono due funzioni qualunque date di x, ed m è una quantità costante qualunque.

Riguardando m come l' aumento o differenza della x, sarà questa un' equazione del primo ordine, e paragonata con l' equazione (A) del §. 73., avremo

$a = -a_x$, $b = 1$, $c = d = e = \text{ec.} = 0$, $x' = x + \Delta x = x + m$, $\Delta x = m$.

(a) Si vedano gli Atti della Società Italiana. Mem. del Dott. Paoli.

Sarà dunque $y_x = \alpha_u \Sigma z_x$, essendo α_u dato da questa equazione $-a_x \alpha_u + \alpha_{u'} = 0$, e z_x da quest' altra $\alpha_{u'} z_x = X$. Determinando adesso u secondo la condizione espressa al §. 74., si trova $u = \frac{x}{m}$, e quindi $u' = \frac{x+m}{m} = \frac{x}{m} + 1 = u + 1$: l' equazione adunque che determina α_u sarà (avvertendo che $x = mu$) questa $-a_{mu} . \alpha_u + \alpha_{u+1} = 0$, la quale ci dà

$\alpha_u = e^{\Sigma l(a_{mu})}$. Sarà dunque

$$y_x = e^{\Sigma l(a_{mu})} \Sigma (X : \alpha_{\frac{x}{m}+1}).$$

L' integrale rapporto ad u deve prendersi nella supposizione che la differenza di u sia l' unità, e quello rapporto ad x nella supposizione che la differenza della variabile sia m; e se si rappresenta per U ciò che diviene X, quando vi si pone mu invece di x, avremo

$y_x = e^{\Sigma l(a_{mu})} \Sigma U : \alpha_{u+1}$ integrando sempre rapporto ad u.

L' integrale adunque completo della proposta sarà

$$y_x = e^{\Sigma l(a_{mu})} (C + \Sigma e^{-l(a_{mu+m})} U).$$

Sia per esempio $m = 2$, $X = 0$, e l' integrale dell' equazione $y_{x+2} = a_x y_x$, sarà

$$y_x = e^{\Sigma l(a_{2u})} C.$$

Ora da ciò che abbiamo detto (§. 45.), si ha

$$e^{\Sigma l(a_{2u})} = a_{2u-2} . a_{2u-4} . a_{2u-6} \dots\dots\dots$$

dunque facendo $2u = x$, sarà

$$y_x = Ca_{x-2} \cdot a_{x-4} \cdot a_{x-6} \cdot \ldots\ldots\ldots \text{ ec.}$$

l' ultimo fattore sarà a_0, ovvero a_1 secondo che la variabile x è pari, ovvero dispari.

Al medesimo risultato saremmo giunti per mezzo della formula dell' integrale delle equazioni del secondo ordine a coefficienti variabili data al §. 48. Facendo in essa infatti $b_x = 0$, abbiamo

$$y_x = C\cfrac{a_{x-2}}{\cfrac{a_{x-3}}{\cfrac{a_{x-4}}{\cfrac{a_{x-5}}{\cfrac{a_{x-6}}{\cfrac{\vdots}{\cfrac{a_1}{C'}}}}}}} \cdot \cfrac{a_{x-3}}{\cfrac{a_{x-4}}{\cfrac{a_{x-5}}{\cfrac{a_{x-6}}{\cfrac{\vdots}{\cfrac{a_1}{C'}}}}}} \cdot \cfrac{a_{x-4}}{\cfrac{a_{x-5}}{\cfrac{a_{x-6}}{\cfrac{\vdots}{\cfrac{a_1}{C'}}}}} \cdot \cfrac{a_{x-5}}{\cfrac{a_{x-6}}{\cfrac{\vdots}{\cfrac{a_1}{C'}}}} \cdot \ldots\ldots\ldots \cfrac{a_2}{\cfrac{a_1}{C'}} \cdot \frac{a_1}{C'}.$$

il quale ridotto diviene

$$y_x = Ca_{x-2} \cdot a_{x-4} \cdot a_{x-6} \cdot \ldots\ldots \left\{\begin{matrix} a_0 \\ a_1 \end{matrix}\right. \text{ secondo che } x \text{ è pari}$$

o impari.

§. 78. L' equazione integrata al §. antecedente è del primo ordine quando si consideri, come abbiamo fatto, $\Delta x = m$: essa però sarebbe dell' ordine m^{esimo} quando fosse $\Delta x = 1$. In questo secondo caso il suo integrale completo deve contenere un numero m di costanti arbitrarie, e perciò quello che abbiamo trovato non è allora che un integrale particolare.

Per averne l' integrale completo, o almeno per vedere come questo può dedursi dalle cose dette di sopra, supponghiamo al solito che l' integrale dell' equazione $-a_x y_x + y_{x+m} = X$, sia

$y_x = \alpha_x \Sigma z_x$: avremo allora (50) per determinare α_x l' equazione

$$(1) \ldots\ldots -a_x \alpha_x + \alpha_{x+m} = 0,$$ e per determinare z_x l' equazione

$$(2) \ldots\ldots z_x + z_{x+1} + z_{x+2} + \ldots\ldots + z_{x+m-1} = \frac{X}{\alpha_{x+m}}.$$

Ora siccome l' integrale completo dell' equazione (2) ci darà per z_x un' espressione contenente un numero $m-1$ di costanti arbitrarie, così Σz_x ne conterrà un numero m, e perciò basterà prendere per α_x un valore particolare che soddisfaccia all' equazione (1). (*a*)

Dal §. antecedente si ha $\alpha_x = e^{\Sigma l(a_{mu})}$, essendo $u = \frac{x}{m}$; e dal §. 58. parimente abbiamo l' integrale dell' equazione (2)

$$z_x = \pm \delta^x \Sigma \frac{\delta'^x}{\delta^x} \Sigma \frac{\delta''^x}{\delta'^x} \ldots\ldots \Sigma \frac{\delta^{(m-2)^x}}{\delta^{(m-3)^x}} \Sigma \frac{X}{\alpha_{x+m} \cdot \delta^{(m-2)^x}}:$$

rappresentando per $\delta, \delta', \delta'', \ldots\ldots \delta^{(m-2)}$ le $m-1$ radici di quest' equazione

$$1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \ldots\ldots\ldots + \delta^{(m-1)} = 0.$$

Sarà dunque il ricercato integrale completo

(*a*) Si potrebbe avere per α_x un' espressione dotata di un numero m di costanti arbitrarie. Poichè facendo $\alpha_x = e^{\Sigma m_x}$, e sostituendo, sarebbe

$$-a_x e^{\Sigma m_x} + e^{\Sigma m_{x+n}} = 0, \text{ ovvero}$$

$$a_x = e^{m_x + m_{x+1} + \ldots\ldots + m_{x+n-1}},$$ e prendendo i logaritmi, m_x sarebbe dato dall' integrazione di una equazione a differenze finite dell' ordine $n-1$.

$$y_x = a_x \Sigma z_x = \pm e^{\Sigma l(a_{mu})} \Sigma \left(\delta^x \Sigma \frac{\delta'^x}{\delta^x} \cdots\cdots\cdots \Sigma \frac{\delta^{(m-2)^x}}{\delta^{(m-3)^x}} \times \cdots \right.$$

$$\left. \Sigma \frac{X}{a_{x+m} \cdot \delta^{(m-2)^x}} \right):$$

il segno $+$ vale per $m - 1$ pari, e l' inferiore per $m - 1$ impari.

Se ora supponghiamo $X = 0$, la quì ritrovata formula diviene molto più semplice.

Si trova infatti per ciò che abbiam detto al §. 61.

$$y_x = \pm e^{\Sigma l(a_{mu})} \left(C + C'\delta^x + C''\delta'^x + C'''\delta''^x + \cdots\cdots\cdots \right.$$
$$\left. + C^{(m-1)} \delta^{(m-2)^x} \right)$$

essendo C, C', C'' ec. $C^{(m-1)}$ un numero m di costanti arbitrarie.

Ponghiamo $m = 2$, ed avremo

$y_x = - e^{\Sigma l(a_{2u})} (C + C'(-1)^x)$; ovvero considerando il segno $-$ contenuto entro le costanti, e ponendo per $e^{\Sigma l(a_{2u})}$, l' espressione

$$a_{x-2} \cdot a_{x-4} \cdot a_{x-6} \cdots\cdots\cdots$$

$$y_x = a_{x-2} \cdot a_{x-4} \cdot a_{x-6} \cdots\cdots \left\{ \begin{matrix} a_0 \\ a_1 \end{matrix} \right\} (C + C'(-1)^x); \text{ e}$$

questa espressione ci dà l' integrale completo dell' equazione del secondo ordine

$y_{x+2} = a_x y_x$, nella quale la differenza dell' x è l' unità.

Per avere una più estesa Teoria sopra gl' integrali completi di certe determinate equazioni, si veda il Libro citato al §. 49.

§. 79. Se alcune radici delle equazioni algebraiche, le quali bisogna risolvere per avere gl' integrali delle equazioni lineari, fossero immaginarie, ecco come si opererebbe. Si sa dall' Algebra Cartesiana che queste radici immaginarie sono della forma $A + B\sqrt{-1}$, e quando non lo siano, possono sempre ridurvisi, essendo A e B quantità reali. E' parimente dimostrato che se in una

equazione algebraica vi è una radice della forma $A + B\sqrt{-1}$, ve ne deve essere ancora un' altra della forma $A - B\sqrt{-1}$; dunque nel caso delle radici immaginarie nell' espressione completa dell' integrale, vi saranno contenute sotto i segni sommatorj le quantità $(A + B\sqrt{-1})^x$, $(A - B\sqrt{-1})^x$: eseguite però l' integrazioni come se gl' immaginarj non vi fossero, compariranno ancora nella formula sviluppata dell' integrale delle quantità immaginarie, le quali elimineremo se ci piace, col sostituirvi delle quantità trascendenti, e col dare una certa forma alle costanti arbitrarie portate dall' integrazioni. Così nel caso che il secondo membro dell' equazione lineare del §. 53. sia $X = 0$, e l' equazione algebraica abbia due radici α', α immaginarie, di modo che sia $\alpha' = a + b\sqrt{-1}$, $\alpha = a - b\sqrt{-1}$, gli ultimi due termini dell' integrale avuto al citato paragrafo, saranno

$$A^{(n-2)}(a + b\sqrt{-1})^x + A^{(n-1)}(a - b\sqrt{-1})^x:$$

rammentiamo che $A^{(n-2)}$, $A^{(n-1)}$ sono due costanti arbitrarie.

Ora è dimostrato nell' analisi dei finiti che $(a \pm b\sqrt{-1})^x = (a^2 + b^2)^{\frac{x}{2}} (cos. x\beta \pm \sqrt{-1} . sen\, x\beta)$, essendo β l' arco che ha per tangente $\frac{a}{b}$; dunque sostituendo, avremo così espressi gli ultimi due termini dell' integrale completo (§. 66.)

$$(a^2 + b^2)^{\frac{x}{2}} . \left\{ A^{(n-2)} (cos. x\beta + \sqrt{-1} . sen. x\beta) + A^{(n-1)} \times \right.$$
$$\left. (cos. x\beta - \sqrt{-1} . sen. x\beta) \right\},$$

i quali si riducono a

$$(a^2 + b^2)^{\frac{x}{2}} . \left\{ (A^{(n-2)} + A^{(n-1)}) . cos. x\beta + (A^{(n-2)} - \ldots \right.$$
$$\left. A^{(n-1)}) \sqrt{-1} . sen. x\beta \right\},$$

e mutando la forma delle costanti arbitrarie, cioè facendo

$$A^{(n-2)} + A^{(n-1)} = C,$$

$(A^{(n-2)} - A^{(n-1)}) \sqrt{-1} = C'$, avremo $(a^2 + b^2)^{\frac{x}{2}} (C\, cos.$

$x\beta + C'\operatorname{sen}.x\beta$) per rappresentare quei due termini del suddetto integrale; si vede cosa dovremo fare per qualunque altro pajo di radici immaginarie.

Nel caso poi che il secondo membro dell'equazione non sia nullo, e che due radici α, α' siano immaginarie, possiamo con la stessa facilità eliminare gli immaginarj per sostituirvi i trascendenti. Infatti prendiamo l'equazione del secondo ordine $ay_x + by_{x+1} + cy_{x+2} = X$ (vale lo stesso per gli ordini superiori) il cui integrale è (§. 68.)

$$y_x = \frac{\alpha^x}{a}\Sigma\frac{\alpha'^x}{\alpha^x}\Sigma\frac{X}{\alpha'^x} = \frac{\alpha'^x\left(A' + \Sigma\frac{X}{\alpha'^x}\right)}{\alpha' b + 2\alpha'^2 c} + \frac{\alpha^x\left(A + \Sigma\frac{X}{\alpha^x}\right)}{\alpha b + 2\alpha^2 c};$$ e siano le due radici α, α' immaginarie; sia $\alpha = a' + b'\sqrt{-1}$; $\alpha' = a' - b'\sqrt{-1}$, ed avremo

$$y_x = \frac{(a' + b'\sqrt{-1})^x}{a}\Sigma\frac{(a' - b'\sqrt{-1})^x}{(a' + b'\sqrt{-1})^x}\Sigma\frac{X}{(a' - b'\sqrt{-1})^x},$$ ovvero

$$y_x = \frac{(a + b\sqrt{-1})^x\left(A + \Sigma\frac{X}{(a + b\sqrt{-1})^x}\right)}{p + q\sqrt{-1}} + \frac{(a - b\sqrt{-1})^x\left(A' + \Sigma\frac{X}{(a - b\sqrt{-1})^x}\right)}{p - q\sqrt{-1}},$$

essendo $p + q\sqrt{-1}$ ciò che diviene m, allorchè si fa in essa $\alpha = a' + b'\sqrt{-1}$, e $p - q\sqrt{-1}$ il valore di m' quando $\alpha' = a' - b'\sqrt{-1}$. Riducendo questi due termini al medesimo denominatore, e sostituendovi le quantità trascendenti invece degli esponenziali, avremo (Si trascura $(a'^2 + b'^2)^{\frac{x}{2}}$ per semplicità: la restituiremo alla fine del calcolo)

$$\Big\{(p - q\sqrt{-1})(\cos.x\beta + \sqrt{-1}.\operatorname{sen}.x\beta)\Big(A + \ldots\ldots \Sigma\frac{X}{\cos.x\beta + \sqrt{-1}.\operatorname{sen}.x\beta}\Big) + (p + q\sqrt{-1})(\cos.x\beta - \sqrt{-1}.\operatorname{sen}.x\beta)\Big(A' + \Sigma\frac{X}{\cos.x\beta - \sqrt{-1}.\operatorname{sen}.x\beta}\Big)\Big\} : p^2 + q^2;$$ eseguendo ora le moltiplicazioni, si troverà

$$\Big\{(Ap + A'p - Aq\sqrt{-1} + A'q\sqrt{-1})(\cos.x\beta) + (Ap\sqrt{-1} + Aq - A'p\sqrt{-1} + A'q)(\operatorname{sen}.x\beta) + p\cos.x\beta \times \ldots\ldots \Sigma\frac{X}{\cos.x\beta + \sqrt{-1}.\operatorname{sen}.x\beta} + p\cos.x\beta.\Sigma\frac{X}{\cos.x\beta - \sqrt{-1}.\operatorname{sen}.x\beta} + \ldots$$

$$p\sqrt{-1}.\operatorname{sen}.x\beta.\Sigma\frac{X}{\cos.x\beta + \sqrt{-1}.\operatorname{sen}.x\beta} - p\sqrt{-1}.\operatorname{sen}.x\beta.\Sigma\frac{X}{\cos.x\beta - \sqrt{-1}.\operatorname{sen}.x\beta} - q\sqrt{-1}.\cos.x\beta \times \ldots\ldots \Sigma\frac{X}{\cos.x\beta + \sqrt{-1}.\operatorname{sen}.x\beta} + q\sqrt{-1}.\cos.x\beta \times \ldots\ldots \Sigma\frac{X}{\cos.x\beta - \sqrt{-1}.\operatorname{sen}.x\beta} + q\operatorname{sen}.x\beta.\Sigma\frac{X}{\cos.x\beta + \sqrt{-1}.\operatorname{sen}.x\beta} + q\operatorname{sen}.x\beta\Sigma\frac{X}{\cos.x\beta - \sqrt{-1}.\operatorname{sen}.x\beta}\Big\} : p^2 + q^2.$$ I coefficienti dei primi due termini sotto le parentesi, cioè

$Ap + A'p - Aq\sqrt{-1} + A'q\sqrt{-1}$, e $Ap\sqrt{-1} + Aq - A'p\sqrt{-1} + A'q$

si possono a causa delle costanti arbitrarie che contengono, eguagliare a due altre costanti arbitrarie C, C': così quei due primi termini diverranno $C\cos.x\beta + C'\operatorname{sen}.x\beta$.

Gli altri otto termini, non considerando per ora il divisore $p^2 + q^2$, si riducono ai seguenti

$$p\cos.x\beta.\Sigma\Big(\frac{X}{\cos.x\beta + \sqrt{-1}.\operatorname{sen}.x\beta} + \frac{X}{\cos.x\beta - \sqrt{-1}.\operatorname{sen}.x\beta}\Big)$$
$$+ p\sqrt{-1}.\operatorname{sen}.x\beta.\Sigma\Big(\frac{X}{\cos.x\beta + \sqrt{-1}.\operatorname{sen}.x\beta} + \frac{X}{\cos.x\beta - \sqrt{-1}.\operatorname{sen}.x\beta}\Big)$$
$$+ q\sqrt{-1}.\cos.x\beta\,\Sigma\Big(-\frac{X}{\cos.x\beta + \sqrt{-1}.\operatorname{sen}.x\beta} + \frac{X}{\cos.x\beta - \sqrt{-1}.\operatorname{sen}.x\beta}\Big)$$
$$+ q\operatorname{sen}.x\beta.\Sigma\Big(\frac{X}{\cos.x\beta + \sqrt{-1}.\operatorname{sen}.x\beta} + \frac{X}{\cos.x\beta - \sqrt{-1}.\operatorname{sen}.x\beta}\Big).$$

Riducendo al medesimo denominatore le quantità sotto i segni sommatorj, alcuni degli immaginarj si distruggono, ed abbiamo

$$p\cos.x\beta.\Sigma\frac{2\cos.x\beta.X}{(\cos.x\beta)^2 + (\operatorname{sen}.x\beta)^2} + p\sqrt{-1}.\operatorname{sen}.x\beta \times \ldots\ldots \Sigma\frac{-2\sqrt{-1}.\operatorname{sen}.x\beta.X}{(\cos.x\beta)^2 + (\operatorname{sen}.x\beta)^2} + q\sqrt{-1}.\cos.x\beta.\Sigma\frac{2\sqrt{-1}.\operatorname{sen}.x\beta.X}{(\cos.x\beta)^2 + (\operatorname{sen}.x\beta)^2} + q\operatorname{sen}.x\beta.\Sigma\frac{2\cos.x\beta.X}{(\cos.x\beta)^2 + (\operatorname{sen}.x\beta)^2};$$

e portando fuori dei segni sommatorj le quantità costanti, e gl'immaginarj, avremo (facendo eguale all'unità il quadrato del coseno più quello del seno)

$2p\, cos.\, x\beta . \Sigma\, cos.\, x\beta . X + 2p\, sen.\, x\beta . \Sigma\, sen.\, x\beta . X - 2q\, cos.\, x\beta \times \Sigma\, sen.\, x\beta . X + 2q\, sen.\, x\beta . \Sigma\, cos.\, x\beta . X = (2p\, cos.\, x\beta + 2q\, sen.\, x\beta) \Sigma\, cos.\, x\beta . X + (2p\, sen.\, x\beta - 2q\, cos.\, x\beta) \Sigma\, sen \times x\beta . X.$

Dunque nel caso di due radici immaginarie quell' integrale completo sarà (restituendo $(a'^2 + b'^2)^{\frac{x}{2}}$):

$$y_x = \frac{C'(a'^2 + b'^2)^{\frac{x}{2}}\, sen.\, x\beta + (a'^2 + b'^2)^{\frac{x}{2}}(2p\, sen.\, x\beta - 2q\, cos.\, x\beta)\Sigma \frac{sen.\, x\beta . X}{(a'^2 + b'^2)^{\frac{x}{2}}}}{p^2 + q^2} +$$

$$\frac{C(a'^2 + b'^2)^{\frac{x}{2}}\, cos.\, x\beta + (a'^2 + b'^2)^{\frac{x}{2}}(2p\, cos.\, x\beta + 2q\, sen.\, x\beta)\Sigma \frac{cos.\, x\beta . X}{(a'^2 + b'^2)^{\frac{x}{2}}}}{p^2 + q^2}$$

che non contiene più quantità immaginarie, ma solo quantità trascendenti.

§ 80. Le costanti che entrano nelle integrazioni possono essere variabili, come osservò il primo il Sig. Euler, purchè esse non mutino allorchè la variabile x cresce della sua differenza 1. Per trovar questa forma, supponghiamo che $\varphi(x)$ rappresenti una quantità che non cangia valore quando x diviene $x + 1$: sarà dunque $\varphi(x) = \varphi(x + 1)$, ovvero $\varphi(x + 1) - \varphi(x) = 0$; e questa equazione ci darà la forma di $\varphi(x)$. Integrando tale equazione per le cose dette al §. 46, si ha $\varphi(x) = \alpha^x \Sigma \frac{0}{\alpha^x} = \alpha^x C$, essendo C una costante arbitraria.

Ora per determinare α abbiamo l' equazione $\alpha - 1 = 0$; e perciò $\alpha = 1$. Ma il Sig. Euler dimostra nell' Introduzione all' Analisi sublime che $log.\, 1 = \pm 2mp\sqrt{-1}$, indicando per $2p$ la circonferenza del circolo, e per m un numero intero qualunque; dunque $1 = e^{\pm 2mp\sqrt{-1}}$, e quindi avremo $\alpha = e^{\pm 2mp\sqrt{-1}}$; dunque $\varphi(x) = Ce^{\pm 2mpx\sqrt{-1}}$, e questa sarà la forma variabile che possono prendere le costanti degl' integrali. Ora la conversione delle quantità immaginarie in quantità trascendenti, ci dà

$e^{\pm 2mpx\sqrt{-1}} = cos.\, 2mpx \pm \sqrt{-1} . sen.\, 2mpx$; avremo perciò $\varphi(x)$ espresso ancora per $C.(cos.\, 2mpx \pm \sqrt{-1} . sen.\, 2mpx)$. Infatti $2mp$ rappresentando un certo numero di periferie, è chiaro che se $2mpx$ rappresenta un certo arco l, $2mp(x + 1)$ sarà eguale a $2mp + l$, vale a dire ad un multiplo della periferia del circolo + l' arco l: ora è dimostrato in trigonometria che $cos.\, l$ è il medesimo che $cos(l + 2mp)$; dunque $cos.\, 2mpx$ non varierà quando x cresce dell' unità. Il medesimo ragionamento vale per $sen.\, 2mpx$: la quantità adunque $C(cos.\, 2mpx \pm C\sqrt{-1} \times sen.\, 2mpx)$ non varierà variando x, poichè le due parti di cui è composta, conservano sempre il medesimo valore. Ora essendo C una quantità arbitraria, e le due parti della funzione conservandosi sempre costanti indipendentemente una dall' altra, potremo fare $C\sqrt{-1}$, eguale ad una costante indeterminata B; avremo così per la forma ricercata $A\, cos.\, 2mpx \pm B\, sen.\, 2mpx$. Ancora più generalmente potremo rappresentare le costanti arbitrarie che entrano negl' integrali, per funzioni qualunque Ψ della quantità $A\, cos.\, 2mpx \pm B\, sen.\, 2mpx$; cioè per $\Psi(A\, cos.\, 2mpx \pm B\, sen \times 2mpx)$, ed anche per $\varphi(cos\, 2mpx, sen\, 2mpx)$, funzione qualunque di $cos\, 2mpx$ e $sen\, 2mpx$. Ritorneremo sopra queste considerazioni al §. 131.

§. 81. La Teoria dell' integrazione delle equazioni a differenze finite è talmente collegata con la Teoria delle serie ricorrenti, che crediamo di far cosa grata ai nostri Leggitori col trattenersi alcun poco sopra queste serie medesime.

Siano di una serie

gl' indici	0,	1,	2,	3,	. . . .	x,	$x + 1$	ec.
i termini	y_0,	y_1,	y_2,	y_3,	. . . .	y_x,	y_{x+1}	ec.

Se fra un numero qualunque di termini di questa serie regna un' equazione qualunque, di modo che un termine sia conosciuto per mezzo degli altri che lo precedono, tal serie forma la classe delle serie recurrenti: noi parleremo di quelle nelle quali l' equazione che lega i termini della serie è lineare.

Fra i problemi che possono proporsi sopra le serie, i principali sono due, cioè la ricerca del termine generale, e quella della somma: vedremo come la loro soluzione dipenda dall' integrazione d' un' equazione a differenze finite.

Troviamo adunque il termine generale di una serie nella quale ciascun termine, come y_{x+n} aumentato di una quantità X funzione di x, è eguale alla somma di tutti i termini antecedenti, y_{x+n-1}, y_{x+n-2} ec. y_x moltiplicati ciascuno per le quantità $a, b, c \ldots\ldots\ldots p$. Ponendo in equazione questa proprietà, avremo

$X + y_{x+n} = ay_x + by_{x+1} + \ldots\ldots + py_{x+n-1}$ che è evidentemente un'equazione lineare dell' ordine n a differenze finite. I coefficienti a, b, c ec., possono essere costanti o variabili.

Se sono costanti, unico caso per la soluzione completa quando $n > 2$, il valore di y_x è (58)

$$y_x = \pm \frac{\alpha^x}{a} \Sigma \frac{\alpha'^x}{\alpha^x} \ldots\ldots\ldots \Sigma \frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-2)^x}} \Sigma (X : \alpha^{(n-1)^x})$$

essendo $\alpha, \alpha', \alpha''$ ec. le n radici dell' equazione

$$a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + p\alpha^{n-1} - \alpha^n = 0.$$

Tale pertanto sarà l' espressione del termine generale y_x della serie. Tutto adunque si riduce a semplici integrazioni.

Nel caso di $X = 0$, si ha (59)

$$y_x = C\alpha^x + C'\alpha'^x + C''\alpha''^x + \ldots\ldots\ldots + C^{(n-1)}\alpha^{(n-1)^x};$$

le quantità $C, C', C'' \ldots\ldots\ldots C^{(n-1)}$ sono le n costanti arbitrarie che rendono l' integrale completo.

L' espressione adunque del termine generale conterrà un numero n di costanti arbitrarie, le quali si determineranno per mezzo degli n primi termini della serie che devono essere dati, poichè solo dopo un tal numero di termini comincia ad avere luogo la legge ed in conseguenza a sussistere l' equazione.

Per trovare poi la somma, è evidente che basterà prendere l' integrale o somma finita del termine generale, ed aggiungervi (22) il termine generale medesimo, essendo sempre

$y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots\ldots + y_x = y_x + \Sigma y_x$. Se ne pos-

sono vedere degli esempj ai §§. (47, 48, 63).

§. 82. Quantunque dipendendo la ricerca del termine generale dall' integrazione d' una equazione a differenze finite, la ricerca della somma, la quale suppone conosciuto il termine generale, ne dipenda anche in conseguenza, pure è facile mostrare che si può far dipendere questa somma ancora direttamente dall' integrazione d' una equazione a differenze finite.

Sia infatti $ay_x + by_{x+1} + \ldots\ldots + py_{x+n-1} + y_{x+n} = X$ l' equazione che ci dà il termine generale e siano i suoi coefficienti costanti.

Si prendano le somme dei due membri di questa equazione, ed avremo,

$a\Sigma y_x + b\Sigma y_{x+1} + \ldots\ldots + p\Sigma y_{x+n-1} + \Sigma y_{x+n} = \Sigma X$; e chiamando z_x la somma dei termini fino ad y_{x-1} inclusive, avremo

$\Sigma y_x = z_x + C$, essendo C la costante che porta il segno sommatorio. Ora sostituendo nell'equazione questi valori, essa si trasformerà in

$$a(z_x + C) + b(z_{x+1} + C) + c(z_{x+2} + C) + \ldots\ldots$$
$$+ p(z_{x+n-1} + C) + z_{x+n} + C = \Sigma X.$$

Questa equazione dalla quale si deve ricavare il valore di z_x è una equazione a differenze finite dell' ordine n, egualmente che era quella del termine generale, ed ha ancora i medesimi coefficienti. S' avrà adunque per $z_x + C$ questo valore.

$$z_x + C = \pm \frac{\alpha^x}{a} \Sigma \frac{\alpha'^x}{\alpha^x} \Sigma \frac{\alpha''^x}{\alpha'^x} \ldots\ldots\ldots \Sigma \frac{\alpha^{(n-1)^x}}{\alpha^{(n-2)^x}} \Sigma \frac{\Sigma X}{\alpha^{(n-1)^x}};$$

α, α' ec. sono le medesime che al §. 81.; l' unica diversità nella forma dei due valori di y_x e di $z_x + C$ è nell' ultimo segno sommatorio: nella somma in vece di X si trova ΣX.

Se supponghiamo che X sia nullo, l' equazione dalla quale si ricavava il termine generale, è

$$(A) \ldots ay_x + by_{x+1} + cy_{x+2} + \ldots\ldots + py_{x+n-1} + y_{x+n} = 0,$$

e quella dalla quale si determina la somma, è

$$(B) \ldots a(z_x + C) + b(z_{x+1} + C) + c(z_{x+2} + C) + \ldots\ldots$$
$$+ p(z_{x+n-1} + C) + z_{x+n} + C = 0.$$

La sola inspezione di queste due equazioni serve per farci comprendere che l'equazione (A) si converte nell'equazione (B) ponendovi $z_x + C$ in luogo di y_x, e che sono tutte e due del medesimo ordine con i medesimi coefficienti; se dunque (§. 61.) si trova per y_x

$y_x = C'\alpha^x + C''\alpha'^x + C'''\alpha''^x + \ldots\ldots + C^{(n)}\alpha^{(n-1)x}$, avremo subito

$$z_x = C + C'\alpha^x + C''\alpha'^x + \ldots\ldots + C^{(n)}\alpha^{(n-1)x}.$$

Conviene avvertire che le costanti, le quali entrano nel termine generale, sono ben diverse da quelle che hanno luogo nella somma. Le prime sono date dalla cognizione degl' n primi termini della serie, i quali somministrano n equazioni (§. 81.) fra le medesime costanti, e le seconde dalle $n+1$ prime somme della serie, per mezzo delle quali se ne ottengono $n+1$ equazioni.

Siccome poi le prime $n+1$ somme si ricavano dalle somme dei primi n termini della serie, così sarà facilissimo vedere come, sommando le prime equazioni e paragonandole con le seconde, le costanti contenute nella somma possono determinarsi per mezzo di quelle del termine generale.

Osserviamo che se l'equazione in z contiene alcune radici, come $\alpha^{(n-1)} = \alpha^{(n-2)} = \varphi = 1$, il valore di y_x conterrà i termini (§ 62.) $A(1)^x + A'(1)^x x +$ ec., ovvero $A + A'x +$ ec.; in tal caso la somma deve contenere per questi, i termini $Ax + A'x^2 +$ ec. Così infatti porterebbe l'integrazione del termine generale.

Avremmo potuto ricavare a dirittura l'espressione di z_x dall' osservazione che l'integrazione del termine generale, allorchè questo non contiene che quantità esponenziali, non porta variazione che nelle costanti.

§. 83. Abbiamo veduto al §. antecedente che l'equazione la quale determina z_x è

$$(B) \ldots a(z_x + C) + b(z_{x+1} + C) + c(z_{x+2} + C) + \ldots\ldots$$
$$+ p(z_{x+n-1} + C) + z_{x+n} + C = 0.$$

Se si facesse $C = 0$, questa diverrebbe

$$az_x + bz_{x+1} + cz_{x+2} + \ldots\ldots + pz_{x+n-1} + z_{x+n} = 0;$$

e la risoluzione di una tale equazione ci darebbe un valore particolare di z_x, ovvero un integrale particolare dell' equazione (B).

Ora essendo l'equazione (B) la medesima che quella la quale determina y_x, ne risulta questo Teorema:

„ L' integrale completo dell' equazione a differenze finite, „ il quale determina il termine generale è un integrale parti- „ colare dell' equazione a differenze finite che determina la somma.

Se i coefficienti dell' equazione dalla quale dipende il termine generale, fossero variabili, il metodo adoprato per far da quella dipendere la somma, non servirebbe. In questo caso siccome è sempre

$$y_x = z_{x+1} - z_x,\ y_{x+1} = z_{x+2} - z_{x+1} \text{ ec.},\ y_{x+n} = \ldots$$
$$z_{x+n-1} - z_{x+n},$$

sostituendo perciò questi valori nell' equazione che dà il termine generale, avremo l'equazione fra z_x, z_{x+1} ec., z_{x+n+1} a differenze finite a coefficienti variabili, che determina la somma, la quale è dell' ordine $n+1$.

Così allorquando i coefficienti sono variabili, l'equazione lineare che determina la somma, è di un ordine superiore di una unità a quello che determina il termine generale.

Ciò che abbiamo detto fin quì serve per mostrare il rapporto fra la somma ed il termine generale di una serie. Da un altro

Geometra (*a*) era stato osservato tal rapporto, con la diversità però che ancora nel caso dei coefficienti costanti che era quello solo considerato, la somma si faceva dipendente da un' equazione lineare di un ordine superiore di un' unità a quella del termine generale.

§. 84. Le equazioni non lineari a differenze finite di rado si sanno integrare, ed a questo riguardo il calcolo delle differenze finite è molto imperfetto.

Questa equazione

$ay_x^m = by_{x+1}^n \cdot y_{x+2}^{n'} \cdot y_{x+3}^{n''}$. ec., nella quale m, n, n' ec. sono degli esponenti qualunque, s' integra facilmente riducendola ad una equazione lineare, per mezzo dei logaritmi: infatti con un tale artifizio ottenghiamo l' equazione

$la + mly_x = lb + nly_{x+1} + n'ly_{x+2} + n''ly_{x+3} +$ ec., la quale si riduce a

$X = mz_x - nz_{x+1} - n'z_{x+2} - n''z_{x+3} -$ ec. facendo

$ly_x = z_x$, ed $lb - la = X$.

Per es. cerchiamo l' integrale dell' equazione

$y_{x+1}^2 = y_x \cdot y_{x+2}$, e prendendone i logaritmi, avremo

$ly_x - 2ly_{x+1} + ly_{x+2} = 0$ che si riduce a

$z_x - 2z_{x+1} + z_{x+2} = 0$, facendo $ly_x = z_x$.

L' integrale di quest' ultima equazione è

$z_x = \alpha^x \Sigma \frac{\alpha'^x}{\alpha^x} \Sigma 0$, (59) essendo α, α' le radici dell' equazione $1 - 2\alpha + \alpha^2 = 0$; ora abbiamo $\alpha = \alpha' = 1$, dunque $z_x = \Sigma\Sigma 0 = Ax + B$, essendo A, B due costanti arbitrarie.

L' integrale pertanto della proposta equazione sarà

(*a*) Il Dott. Paoli „ Atti dell' Accademia di Mantova „.

$y_x = e^B \cdot e^{Ax}$, ovvero, mutando la forma delle costanti, $y_x = C \cdot C'^x$; C, C' sono due costanti arbitrarie. Questa espressione per y_x è il termine generale di una progressione geometrica con qualunque primo termine, e con qualunque quoziente; deve essere infatti così, poichè l' equazione

$y_{x+1}^2 = y_x y_{x+1}$ esprime una proprietà delle progressioni geometriche indipendente da quei due elementi.

Per avere l' integrale dell' equazione

$y_{x+1}^2 = ay_x \cdot y_{x+2} + by_x \cdot y_{x+3}$ nella quale a, b sono quantità costanti, si faccia

$y_x = A\alpha^x$, ed avremo per determinare α quest' equazione $1 = a + b\alpha$: sarà dunque

$y_x = A\left(\frac{1-a}{b}\right)^x$: questo integrale però non sarà completo perchè contiene una sola costante arbitraria.

Egualmente per mezzo della stessa supposizione potremo avere degli integrali almeno particolari per l' equazioni di una natura simile alla seguente

$$y_x^3 + ay_x y_{x+1} y_{x+2} + by_{x+1} y_{x+2}^2 + cy_{x+1} \cdot y_{x+2} \cdot y_{x+3} + ey_{x+2} \cdot y_{x+3} \cdot y_{x+4} + \text{ec.} = 0$$

nella quale a, b, c ec. son costanti:

Infatti facendo $y_x = A\alpha^x$, noi abbiamo per determinare α quest' equazione algebraica

$1 + a\alpha^3 + b\alpha^5 + c\alpha^6 + e\alpha^9 = 0$, che ci darà nove valori per α, e per conseguenza troveremo nove integrali particolari per quell' equazione di terzo grado e di quarto ordine, ciascuno dei quali conterrà una costante arbitraria.

Se i coefficienti sono variabili, allora la difficoltà cresce maggiormente, e mancando regole generali, conviene sempre ricorrere ad artifizi particolari, onde avere gl' integrali delle equazioni: l' equazione per es.

$y^2_{x+1} = a_x \cdot y_x y_{x+1} + b_x \cdot y_x y_{x+2}$, nella quale a_x, b_x sono funzioni date di x, può integrarsi ponendo

$y_x = Ae^{\Sigma m_x}$, essendo m_x una funzione di x da determinarsi: infatti fatta l'opportuna sostituzione e riduzione, avremo per determinare m_x quest' equazione

$e^{m_x} = a_x + b_x e^{m_{x+1}}$, la quale si riduce a

$z_x = a_x + b_x z_{x+1}$ (facendo $e^{m'_x} = z_x$) che è integrabile completamente.

L' equazione proposta si poteva subito ridurre a quest' ultima ancora in altra guisa. Si divida la medesima per $y_x y_{x+1}$, ed avremo

$\frac{y_{x+1}}{y_x} = a_x + b_x \cdot \frac{y_{x+2}}{y_{x+1}}$, la quale diviene

$z_x = a_x + b_x z_{x+1}$ facendo $\frac{y_{x+1}}{y_x} = z_x$.

Per farne un esempio cerchiamo il termine generale di una serie, nella quale presi tre termini consecutivi y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, il prodotto del primo nel terzo, meno il prodotto del primo nel secondo, sia eguale al quadrato del secondo.

Questa condizione ci conduce all' equazione

$y_x y_{x+2} - y_x y_{x+1} = y^2_{x+1}$, la quale diverrà

$z_{x+1} - z_x = 1$, facendo $\frac{y_{x+1}}{y_x} = z_x$.

L' integrale completo di quest' ultima equazione è

$z_x = A + x$; dunque y_x sarà dato dall' equazione

$y_{x+1} = (A + x) y_x$, il cui integrale (§. 45.) completo è

$y_x = (A + 0)(A + 1)(A + 2)(A + 3) \ldots (A + (x - 1)) A'$:

questa espressione sarà l' integrale completo della proposta, poichè contiene due costanti arbitrarie A, A'.

Per determinare queste costanti, supponghiamo che i due primi termini della serie siano 1, 2, sia cioè 1 il termine corrispondente all' indice 1, e 2 il termine corrispondente all' indice 2, ed avremo

$y_1 = (A + 0) A' = 1$, $y_2 = (A + 0)(A + 1) A' = 2$, onde

$AA' = 1$, $A(A + 1) A' = 2$, e quindi $A = 1$, $A' = 1$, sarà dunque il ricercato termine generale

$y_x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \ldots x$, e la serie sarà

Indici	1	2	3	4	5	6	 x
Termini	1	2	6	24	120	720	. . . . . . ec.

nella quale può verificarsi la stabilita proprietà.

Si potrà ancora molte volte abbassare il grado di una equazione alle differenze per mezzo della risoluzione algebraica delle equazioni: sia per es. l' equazione

$y^2_{x+1} - 2y_x \cdot y_{x+1} + y^2_x = a_x$: se in essa ponghiamo

$y_x + \Delta y_x$ invece di y_{x+1}, avremo,

$\Delta^2 y^2_x = a_x$. Quest' ultima equazione si decompone in queste due

$\Delta y_x = + \sqrt{a_x}$, $\Delta y_x = - \sqrt{a_x}$; avremo in conseguenza due integrali completi per l' equazione proposta, cioè

$y_x = + \Sigma \sqrt{a_x} + A$

$y_x = - \Sigma \sqrt{a_x} + A'$. Facendo $a_x =$ ad una costante a^2, sarà

$y_x = ax + A$, $y_x = - ax + A'$.

Oltre questi due integrali possono aversi ancora altre espressioni le quali soddisfacciano alla proposta: infatti,

$\Delta^2 y_x = a^2 = a^2 \cdot 1 = a^2 (-1)^{2x}$; dunque

$\Delta y_x = \pm a (-1)^x$, e perciò

$y_x = + a\Sigma(-1)^x + B$, $y_x = -a\Sigma(-1)^x + B'$ essendo B, B' due costanti arbitrarie; eseguendo ora le integrazioni, avremo

$$y_x = -\tfrac{a}{2}(-1)^x + B,\quad y_x = +\tfrac{a}{2}(-1)^x + B'.$$

Siccome l'unità è sempre eguale a $(-1)^{2z}$, indicando per $2z$ un numero pari, e per z una qualunque funzione di x intiera, avremo per y_x queste due espressioni più generali

$y_x = a\Sigma(-1)^z + B$, $y_x = -a\Sigma(-1)^z + B'$, le quali contengono ancora i due primi integrali; questi infatti si hanno facendo z eguale ad un numero intiero costante. Non ci estendiamo di più sopra tali ricerche, rapporto a cui sono stati fatti ben pochi progressi dai Geometri.

§. 86. Una equazione alle differenze $\phi(x, y, \Delta y) = 0$, il di cui integrale sia $F(x, a, y) = 0$ è, come si sa, il risultato dell'eliminazione della costante a, che si fa per mezzo delle due equazioni $F(x, a, y) = 0$, $F(x+1, a, y+\Delta y) = 0$: ora supponendo a variabile, ma tale che i termini da essa introdotti in questa ipotesi si annullino da se medesimi, è manifesto che il risultato della di lei eliminazione sarà lo stesso, come se essa fosse stata costante.

Ogni valore adunque di a, il quale goda di una tal proprietà, sostituito nell'integrale $F(x, a, y) = 0$, ci darà una nuova relazione di variabili che soddisfarà all'equazione alle differenze: questa relazione di variabili non sarà un integrale particolare perchè non nasce da qualche valore particolare costante, che diasi ad a; si suole perciò chiamare *soluzione particolare*.

Dato adunque l'integrale $F(x, a, y) = 0$, ecco come potremo trovare le soluzioni particolari dell'equazione $\phi(x, y, \Delta y) = 0$. Supponghiamo che a sia una funzione di x, ed avremo $F(x+1, a+\Delta a, y+\Delta y) = 0$, alla quale se diamo la forma $F(x+1, a, y+\Delta y) + \Delta a . P = 0$, sarà $\Delta a . P$ la totalità dei termini portati dalla variazione di a.

Facendo ora $\Delta a . P = 0$, quest'ultima equazione si riduce a questa $F(x+1, a, y+\Delta y) = 0$, ed abbiamo per determinare a

queste due equazioni $\Delta a = 0, P = 0$; delle quali la prima ci dà per a una costante arbitraria, e la seconda ci potrà dare (qualora P contenga a) uno o più valori di a in funzione di x: s'avranno in questa guisa le ricercate soluzioni particolari. Rendiamo il tutto più chiaro con qualche esempio.

Per es. l'equazione alle differenze

$y_x = (y_{x+1} - y_x)x - (y_{x+1} - y_x)^2$, ovvero $y_x = x\Delta y - (\Delta y)^2$

ha per integrale completo $y = ax - a^2$.

Per averne le soluzioni particolari supponghiamo a variabile, e sarà allora

$$y + \Delta y = (a + \Delta a)(x+1) - (\Delta a)^2 = a(x+1) - a^2 + \Delta a\left\{(x+1) - 2a - \Delta a\right\}:$$

i termini portati dalla variazione di a sono

$\Delta a . \left\{(x+1) - 2a - \Delta a\right\}$; quindi avremo per determinare a quest'equazione

$\Delta a + 2a = x + 1$; e siccome a è una funzione di x, perciò indicandola per a_x, sarà

$a_{x+1} + a_x = x + 1$, il cui integrale (59) è

$$a_x = -\frac{(-1)^x}{1}\Sigma\frac{x+1}{(-1)^x} = \mp\Sigma(-1)^x(x+1) = \mp(\Sigma(-1)^x(x+1) + C),$$

il segno superiore vale per x pari, e l'inferiore per x impari: C rappresenta una costante arbitraria.

La soluzione particolare è dunque

$$y = \mp x(\Sigma(-1)^x(x+1) + C) - (\Sigma(-1)^x(x+1) + C)^2,$$

la quale sarà diversa secondo il diverso valore che si darà all'arbitraria C.

Eseguendo ora l'integrazione, si trova (15)

$a_x = \mp\left\{C - \frac{(2x+1)(-1)^x}{4}\right\}$; e perciò sostituendo,

$$y = \mp x \left\{ C - \frac{(2x+1)(-1)^x}{4} \right\} - \left\{ C - \frac{(2x+1)(-1)^x}{4} \right\}^2 .$$

Non sarà inutile osservare che il numero delle soluzioni particolari sarà infinito, perchè infiniti sono i valori che possono assegnarsi alla costante C.

CALCOLO DELLE DIFFERENZE FINITE

C A P. IV.

Integrazione delle Equazioni a differenze finite e parziali delle funzioni a più variabili.

§. 86. RAppresentando per $z_{x,y}$ una qualunque funzione delle due variabili x, y abbiamo detto al §. (39) che si chiama *equazione a differenze parziali* una equazione $V = 0$ fra $x; y; z_{x,y}; z_{x+\omega,y}; z_{x+2\omega,y}$; ec. $z_{x,y+\theta}; z_{x+\omega,y+\theta}$ ec. ec., $z_{x+n\omega,y+m\theta}$: l' ordine poi di questa equazione ci è dato dalla maggior somma dei coefficienti che hanno gli aumenti ω e θ in un medesimo termine; così se è $z_{x+n\omega,y+m\theta}$ il termine nel quale ω e θ hanno la maggior somma $m+n$ dei coefficienti, sarà dell' ordine $(n+m)^{esimo}$ una tale equazione.

Noi supporremo $\omega = \theta = 1$, e di più supporremo che nell' equazioni non si trovino nè le potenze al di là della prima, nè i prodotti delle funzioni incognite $z_{x,y}$, $z_{x+1,y}$, $z_{x+1,y+1}$ ec. Quest' ultima condizione dà all' equazioni il nome d' *Equazioni Lineari*. Di queste soltanto noi parleremo perchè sono le sole per le quali si hanno dei metodi d' integrazione.

Integrare una equazione a differenze parziali $V = 0$ vuol dire *trovare un' equazione* $U = 0$ *fra* $x, y, z_{x,y}$ *ed un certo numero di funzioni arbitrarie, dalla quale per mezzo dell' eliminazione di quelle funzioni, o per mezzo di qualunque altra combinazione* (39) *possa ottenersi l' equazione* $V = 0$: in generale l' equazione $U = 0$ che si chiama l' integrale della proposta, deve sussistere nello stesso tempo che la proposta medesima.

E siccome per mezzo della risoluzione delle equazioni possiamo sempre dall' equazione $U = 0$, ricavare il valore di $z_{x,y}$ dato per x,y e per quel numero di funzioni arbitrarie, il quale soddisfaccia a $V = 0$; così per *integrare un' equazione* intenderemo anche *trovare una tale espressione per* $z_{x,y}$, *contenente le variabili* x, y *ed un certo numero di funzioni arbitrarie, la quale, avendo luogo nello stesso tempo che l' equazione da integrarsi, la renda per conseguenza identica*; e questa espressione di $z_{x,y}$ chiamasi l' integrale di quella equazione.

Aggiungesi ordinariamente il nome di *completo* all' integrale d' un' equazione a differenze parziali, quando il numero delle funzioni arbitrarie che egli contiene, è eguale all' ordine della equazione medesima.

La forma generale dell' equazioni lineari dell' ordine n^{esimo} è la seguente

$$\left.\begin{array}{l} Az_{x,y} + Bz_{x+1,y} + Cz_{x+2,y} + \ldots\ldots + Nz_{x+n,y} \\ \quad + B'z_{x,y+1} + C'z_{x+1,y+1} + \ldots\ldots + N'z_{x+n-1,y+1} \\ \qquad + C''z_{x,y+2} + \ldots\ldots + N''z_{x+n-2,y+2} \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad + N^{(n)}z_{x,y+n} \end{array}\right\} = Z$$

nella quale A, B, C ec. Z, possono essere funzioni delle variabili x, y.

Per integrare completamente una tale equazione bisogna adunque, secondo ciò che è detto sopra, trovare per $z_{x,y}$ una tale espressione che contenga un numero n di funzioni arbitrarie e che sostituita nella suddetta equazione, vi soddisfaccia o la renda identica.

Per procedere con metodo in una sì difficile ricerca, noi comincieremo dalle più semplici equazioni del primo ordine.

Abbiasi adunque da integrare l' equazione a differenze finite e parziali del primo ordine

$$Az_{x,y} + Bz_{x+1,y} + B'z_{x,y+1} = 0$$

nella quale A, B, B' siano quantità costanti ed il secondo membro è nullo. Noi cercheremo adunque per $z_{x,y}$ una tale espressione in x ed y che contenga una funzione arbitraria, e che sostituita nella proposta la renda identica.

Per questo pongasi $z_{x,y} = C\alpha^x\beta^y$, essendo α e β due costanti da determinarsi (*a*), e C parimente costante indeterminata. Fatta questa posizione, avremo

$$z_{x+1,y} = C\alpha^{x+1}\beta^y = C\alpha.\alpha^x\beta^y$$

$$z_{x,y+1} = C\alpha^x\beta^{y+1} = C\beta.\alpha^x\beta^y$$

e sostituendo questi valori di $z_{x,y}$, $z_{x+1,y}$, $z_{x,y+1}$, nella proposta, dopo averla divisa per il fattore comune $C\alpha^x\beta^y$, troveremo

$$A + B\alpha + B'\beta = 0.$$

Per mezzo di questa equazione, delle due indeterminate α, β si può determinare una per l' altra. Determinando β, abbiamo

$$\beta = -\frac{A}{B'} - \frac{B}{B'}\alpha, \text{ ovvero (facendo } -\frac{A}{B'} = a, -\frac{B}{B'} = b), \beta = a + b\alpha,$$

dunque

$$z_{x,y} = C\alpha^x\beta^y = C\alpha^x(a + b\alpha)^y, \text{ ovvero}$$

$$z_{x,y} = Ca^y\alpha^x + yCa^{y-1}.b\alpha^{x+1} + y\frac{y-1}{2}Ca^{y-2}.b^2\alpha^{x+2} + \ldots\ldots + C.b^y\alpha^{x+y}.$$

In questa espressione C ed α rimangono indeterminate e perciò possono essere qualunque.

Se dunque indichiamo per C, C', C'', C''' ec. un numero infinito di costanti indeterminate, e parimente per $\alpha, \alpha', \alpha''$ ec. un al-

(*a*) Si deve al Celebre La-Grange il Metodo d' Integrazione che qui spieghiamo: Atti di Berlino 1775.

tro numero infinito di costanti qualunque, avremo un numero infinito d' espressioni per $z_{x,y}$ ciascuna delle quali soddisfacendo alla proposta, ne sarà l' integrale, avremo cioè

$$z_{x,y} = Ca^y\alpha^x + yCa^{y-1}.b\alpha^{x+1} + \frac{y(y-1)}{2}Ca^{y-2}.b^2\alpha^{x+2} + \ldots.. + Cb^y.\alpha^{x+y}$$

$$z_{x,y} = C'a^y\alpha'^x + yC'a^{y-1}.b\alpha'^{x+1} + \frac{y(y-1)}{2}C'a^{y-2}.b^2\alpha'^{x+2} + \ldots.. + C'b^y.\alpha'^{x+y}$$

$$z_{x,y} = C''a^y\alpha''^x + yC''a^{y-1}.b\alpha''^{x+1} + \frac{y(y-1)}{2}C'a^{y-2}.b^2\alpha''^{x+2} + \ldots.. + C''b^y.\alpha''^{x+y}$$

ec. ec. ec. ec.

Ora essendo lineare l' equazione da integrarsi, soddisfarà la somma di tutte quelle espressioni, ed avremo perciò ancora

$$z_{x,y} = a^y(C\alpha^x + C'\alpha'^x + C''\alpha''^x + \text{ec.}) + ya^{y-1}b(C\alpha^{x+1} + C'\alpha'^{x+1} + C''\alpha''^{x+1} + \text{ec.}) + \frac{y(y-1)}{2}a^{y-2}b^2(C\alpha^{x+2} + C'\alpha'^{x+2} + C''\alpha''^{x+2} + \text{ec.}) + \ldots\ldots\ldots + b^y(C\alpha^{x+y} + C'\alpha'^{x+y} + C'\alpha''^{x+y} + \text{ec.});$$

quest' espressione conterrà un numero infinito di costanti arbitrarie e soddisfarà alla proposta equazione.

Considerando adesso la quantità $C\alpha^x + C'\alpha'^x + C''\alpha''^x +$ ec., è facile vedere che sviluppando in serie le quantità esponenziali $\alpha^x, \alpha'^x, \alpha''^x$ ec., trovasi

$$C\alpha^x + C'\alpha'^x + C''\alpha''^x + \text{ec.} = (C + C' + C'' + \text{ec.}) + x(Cl\alpha + C'l\alpha' + C''l\alpha'' + \text{ec.}) + \frac{x^2}{2}(C(l\alpha)^2 + C'(l\alpha')^2 + C''(l\alpha'')^2 + \text{ec.}) + \frac{x^3}{2.3}(C(l\alpha)^3 + C'(l\alpha')^3 + C''(l\alpha'')^3 + \text{ec.}) + \text{ec.}$$

Ora si sa per la Teoria dello sviluppo delle funzioni in serie

che se per $\varphi(x)$ si rappresenta una qualunque funzione di x, può questa svilupparsi secondo le potenze di x, e si ha

$$\varphi(x) = \varphi + x\varphi' + \frac{x^2}{2}\varphi'' + \frac{x^3}{2.3}\varphi''' + \text{ec.}$$

essendo $\varphi, \varphi', \varphi'', \varphi'''$ quantità costanti: dunque facendo

$$C + C' + C'' + \text{ec.} = \varphi$$

$$Cl\alpha + C'l\alpha' + C''l\alpha'' + \text{ec.} = \varphi'$$

$$C(l\alpha)^2 + C'(l\alpha')^2 + C''(l\alpha'')^2 + \text{ec.} = \varphi''$$

$$C(l\alpha)^3 + C'(l\alpha')^3 + C''(l\alpha'')^3 + \text{ec.} = \varphi'''$$

ec. ec. ec.

avremo un numero infinito d' equazioni fra un numero infinito di quantità C, C' ec., α, α' ec. da determinarsi, e perciò potranno tali quantità C, C' ec determinarsi in maniera che siano soddisfatte tutte quelle equazioni: sarà allora

$$C\alpha^x + C'\alpha'^x + C''\alpha''^x + \text{ec.} = \varphi + x\varphi' + \frac{x^2}{2}\varphi'' + \frac{x^3}{2.3}\varphi''' + \text{ec.} = \varphi(x).$$

Dunque l' espressione $C\alpha^x + C'\alpha'^x + C''\alpha''^x +$ ec. composta di un numero infinito di termini, nella quale C, C', C'' ec., $\alpha, \alpha', \alpha''$ ec. sono quantità arbitrarie, può rappresentare una funzione qualunque arbitraria $\varphi(x)$ di x.

Sostituendo pertanto nella ritrovata espressione per $z_{x,y}$ invece di $C\alpha^x + C'\alpha'^x +$ ec. la funzione arbitraria $\varphi(x)$, ed in conseguenza $\varphi(x+1)$ per $C\alpha^{x+1} + C'\alpha'^{x+1} +$ ec., $\varphi(x+2)$ per $C\alpha^{x+2} + C'\alpha'^{x+2} +$ ec., e così $\varphi(x+y)$ per $C\alpha^{x+y} + C'\alpha'^{x+y} +$ ec., avremo per $z_{x,y}$

$$z_{x,y} = a^y\varphi(x) + ya^{y-1}b\varphi(x+1) + \frac{y(y-1)}{2}a^{y-2}b^2\varphi(x+2) + \ldots.. + b^y\varphi(x+y):$$

la quale espressione soddisfacendo alla proposta e contenendo una funzione arbitraria, ne sarà perciò l' integrale completo.

In generale quando avremo una serie, come per es.

$$PC\alpha^{x} + P'C\alpha^{x+m} + P''C\alpha^{x+m+n} + \text{ec.}, \text{ o semplicemente}$$

$P\alpha^{x} + P'\alpha^{x+m} + P''\alpha^{x+m+n} + \text{ec.}$, nella quale C ed α sono arbitrarie, che soddisfaccia ad una equazione a differenze finite e parziali lineare, l'integrale di quella equazione, per ciò che ha rapporto a questa serie, sarà

$$P\varphi(x) + P'\varphi(x+m) + P''\varphi(x+m+n) + \text{ec.}$$

Per determinare poi la funzione arbitraria che entra nell' integrale sopra trovato, io osservo che $y = 0$ dà $z_{x,0} = \varphi(x)$. Dunque la funzione arbitraria si determina per mezzo del valore di $z_{x,y}$ quando $y = 0$: Perciò questo valore deve essere dato per le condizioni del problema. Potremo adunque porre sotto questa forma il nostro integrale

$$z_{x,y} = a^{y}.z_{x,0} + ya^{y-1}.bz_{x+1,0} + \frac{y(y-1)}{2}a^{y-2}b^{2}z_{x+2,0} + \ldots\ldots + b^{y}z_{x+y,0}.$$

Se invece di determinare β per α avessimo determinato α per β, avremmo avuto $\alpha = b^{-1}(\beta - a)$; quindi

$$z_{x,y} = C\beta^{y}\alpha^{x} = C\beta^{y}(\beta - a)^{x} = b^{-x}(C\beta^{y+x} - xCa\beta^{y+x-1} + \frac{x(x-1)}{2}Ca^{2}\beta^{y+x-2} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \pm Ca^{x}.\beta^{y}),$$

e per ciò che è detto quì sopra,

$$z_{x,y} = b^{-x}\{\Psi(x+y) - xa\Psi(x+y-1) + \frac{x(x-1)}{2}a^{2}\Psi(x+y-2) - \ldots\ldots\ldots \pm \Psi(y)\},$$

indicando per $\Psi(y)$ una funzione arbitraria della quantità che è fra le parentesi.

La detta funzione $\Psi(y)$ si determina per mezzo del valore

di $z_{x,y}$ quando $x = 0$, ed abbiamo $\Psi(y) = z_{0,y}$ e perciò

$$z_{x,y} = b^{-x}\{z_{0,x+y} - xaz_{0,x+y-1} + \frac{x(x-1)}{2}a^{2}z_{0,x+y-2} - \ldots\ldots \pm a^{x}z_{0,y}\}.$$

Questa ultima espressione per quanto di una forma diversa dall' altra, rappresenta anche l'integrale completo della proposta, poichè contiene una funzione arbitraria $\Psi(y)$: l'integrale che contiene la funzione $\varphi(x)$ è composto di un numero $y+1$ termini, e quello che contiene la funzione $\Psi(y)$ ne ha un numero $x+1$.

§. 87. Mostriamo fino di quì l'uso dell' integrazione delle equazioni a differenze finite e parziali nella Teoria delle serie.

Se in una funzione $z_{x,y}$ di due variabili x, y supponghiamo una di esse variabili per esempio $y = 0$, e facciamo $x = 0, 1, 2, 3$ ec., avremo questa serie di quantità $z_{0,0}$, $z_{1,0}$, $z_{2,0}$ ec. Pa[illegible] ec., supponendo $y = 1$, si fa [illegible] ec., troveremo un' altra serie di queste quantità $z_{0,1}$, $z_{1,1}$, $z_{2,1}$ ec. e così di seguito: ora tutte queste diverse serie possono disporsi nella tavola seguente, nella quale gl' indici verticali, o la colonna verticale dei numeri naturali indica il valore della y nella serie che gli corrisponde, e gl' indici orizzontali indicano il valore della x nei termini che sono sotto di essi.

Indici orizzontali	0	1	2	3	......	x	$x+1$	ec.
0	$z_{0,0}$,	$z_{1,0}$,	$z_{2,0}$,	$z_{3,0}$,	.....	$z_{x,0}$,	$z_{x+1,0}$,	ec.
1	$z_{0,1}$,	$z_{1,1}$,	$z_{2,1}$,	$z_{3,1}$,	.....	$z_{x,1}$,	$z_{x+1,1}$,	ec.
2	$z_{0,2}$,	$z_{1,2}$,	$z_{2,2}$,	$z_{3,2}$,	.....	$z_{x,2}$,	$z_{x+1,2}$,	ec.
Indici verticali :	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
:	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
:	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
y	$z_{0,y}$,	$z_{1,y}$,	$z_{2,y}$,	$z_{3,y}$,	.....	$z_{x,y}$,	$z_{x+1,y}$,	ec.
$y+1$	$z_{0,y+1}$,	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
ec.	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

E' dunque manifesto che ciascun termine di questa Tavola per esempio $z_{3,2}$ è una funzione dei suoi indici 3, 2 come $z_{x,y}$ è una simil funzione degl' indici x e y. Se pertanto fosse conosciuto il valore di $z_{x,y}$, è chiaro che potrebbero aversi tutti i termini di quella Tavola, facendovi x e y eguali agl' indici che appartengono ai termini ricercati.

Quando però non conoscendosi il valore di $z_{x,y}$, è conosciuta la legge, con la quale i termini di quella Tavola sono formati, o che lega quei termini stessi fra loro, e si ricerca il valore di $z_{x,y}$ (che chiamasi il termine generale di quella Tavola), conviene allora ricorrere al calcolo integrale delle differenze finite e parziali.

Se la legge con la quale sono formati i termini è tale che uno qualunque $z_{x,y}$ dipenda da alcuni degli altri termini che lo precedono o che lo seguono, tanto nelle file orizzontali che verticali, la Tavola rappresenta allora la formula generale di quelle serie che si chiamano *Recurro-Recurrenti*.

E' dunque evidente che esprimendo questa dipendenza per una equazione fra il termine $z_{x,y}$ e gli altri, tale equazione sarà a differenze finite e parziali; e dall' integrazione di questa dipenderà la ricerca del termine generale $z_{x,y}$. Quando questa equazione è lineare, essa è compresa nella classe di quelle che trattiamo. Ponendo adesso mente a quel che abbiamo detto al §. antecedente, vedremo la determinazione delle funzioni arbitrarie dipendere dai valori particolari di $z_{x,y}$ quando una variabile ha dei valori fissi e determinati, cioè dai valori di alcune file di termini della serie *Recurro-Recurrente*, le quali perciò dovranno essere date: tutto si comprenderà anche meglio per mezzo d' alcuni esempj.

Prendiamo per esempio la seguente serie *Recurro-Recurrente*,

	0	1	2	3	4 x
0	0	2	4	6	8 ...... $2x$
1	2	8	14	20	26 ....
2	12	30	48	66	84 ....
3	54	108	162	216	....
4	216	378	540	.....	....
.	.....	.....	.....	.....	....
.	.....	.....	.....	.....	....
y	.....	.....	.....	.....	....

nella quale un termine qualunque $z_{x,y}$ è eguale al doppio del suo termine superiore $z_{x,y-1}$, più il termine $z_{x+1,y-1}$, che segue questo superiore medesimo.

Ponendo una tal condizione in equazione, avremo

$z_{x,y}=2z_{x,y-1}+z_{x+1,y-1}$ equazione lineare a differenze finite e parziali, dall' integrazione della quale dipende il valore del termine generale $z_{x,y}$. Se in questa equazione si fa crescere la y di una unità, e si pongono tutti i termini in un sol membro, troveremo $2z_{x,y}+z_{x+1,y}-z_{x,y+1}=0$. Questa equazione che è del primo ordine, paragonata con quella del §. antecedente, ci dà $a=2$, $b=1$, onde avremo per $z_{x,y}$ queste due espressioni

$$z_{x,y}=2^y\varphi(x)+y2^{y-1}\varphi(x+1)+\frac{y(y-1)}{2}2^{y-2}\varphi(x+2)+\dots+\varphi(x+y),$$

$$z_{x,y}=\Psi(x+y)-x.2\Psi(x+y-1)+\frac{x(x-1)}{2}2^2\Psi(x+y-2)-\dots\dots\pm 2^x\Psi(y);$$

e siccome $\varphi(x)$ rappresenta $z_{x,0}$, e $\Psi(y)$, $z_{0,y}$, così avremo

$$z_{x,y}=2^y z_{x,0}+y.2^{y-1}.z_{x+1,0}+\frac{y(y-1)}{2}2^{y-2}.z_{x+2,0}+\dots+z_{x+y,0}$$

$$z_{x,y}=z_{0,x+y}-x.2z_{0,x+y-1}+\frac{x(x-1)}{2}.2^2 z_{0,x+y-2}-\dots\dots\pm 2^x z_{0,y}.$$

Servendosi adunque della prima formula è necessario che siano dati i termini della prima fila orizzontale, e adoprando la seconda, quegli della prima fila verticale: anzi nei termini della prima fila orizzontale, essendo in generale $z_{x,0}=2x$: la prima espressione di $z_{x,y}$ diverrà

$$z_{x,y}=2^y.2x+y2^{y-1}.2(x+1)+\frac{y(y-1)}{2}2^{y-2}.2(x+2)+\dots+2(x+y).$$

Vogliasi per es. il terzo termine della terza fila orizzontale, cioè $z_{3,3}$: facendo nella formula trovata $x=3$, $y=3$, si ha $z_{3,3}=2^3.6+3.2^2.8+3.2.10+12=48+96+60+12=216$, e così degli altri.

§. 88. Passiamo alle equazioni del secondo ordine. Abbiasi da integrare l' equazione del secondo ordine

$$\left.\begin{array}{l} Az_{x,y}+Bz_{x+1,y}+Cz_{x+2,y}\\ \quad +B'z_{x,y+1}+C'z_{x+1,y+1}\\ \qquad +C''z_{x,y+2}\end{array}\right\}=0$$

nella quale i coefficienti sono supposti costanti.

Incominciamo dall' esaminare il caso, nel quale essa non ha che quattro termini, cioè sia l' equazione

$$Az_{x,y}+Bz_{x+1,y}+B'z_{x,y+1}+C'z_{x+1,y+1}=0.$$

Facciamo come al §. 86. $z_{x,y}=C\alpha^x\beta^y$, o semplicemente $z_{x,y}=\alpha^x\beta^y$. Noi tralasciamo la costante, poichè essa comparisce sempre come semplice moltiplicatore che è destinato a svanire nell' introduzione della funzione.

Fatte le opportune sostituzioni nella proposta, avremo fra α e β quest' equazione

$$A+B\alpha+B'\beta+C'\alpha\beta=0.$$

Per mezzo di una tale equazione determiniamo β per α, e troveremo

$$\beta=-\frac{A+B\alpha}{B'+C'\alpha},\ \text{e perciò}\ z_{x,y}=\alpha^x\beta^y=\alpha^x\left(-\frac{A+B\alpha}{B'+C'\alpha}\right)^y.$$

Se adesso svolgiamo questa espressione in serie ordinata secondo le potenze decrescenti di α, s' avrà per $z_{x,y}$ una espressione di questa forma

$$z_{x,y}=T\alpha^{x+\mu y}+T'\alpha^{x+\mu y-1}+T''\alpha^{x+\mu y-2}+\text{ec.},$$

e per ciò che si è detto al §. 86.

$$z_{x,y}=T\varphi(x+\mu y)+T'\varphi(x+\mu y-1)+T''\varphi(x+\mu y-2)+\text{ec.}$$

Questa espressione anderà all' infinito sempre che la quantità $\left(-\frac{A+B\alpha}{A'+B'\alpha}\right)^y$ non potrà essere sviluppata in serie finita, o sempre che non sarà eguale a zero alcuna delle funzioni $\varphi(x + \mu y - \omega)$ e quelle che a questa seguono; la quantità però $\left(-\frac{A + B\alpha}{A' + B'\alpha}\right)^y$ si riduce in una serie finita, quando B′ ovvero C′ sono zero. Ma per trovare l'integrale in termini finiti ancora quando B′ ovvero C′ non sono nulle, adopreremo il metodo seguente.

Facciamo nel valore di β la quantità $B' + C'\alpha$ eguale ad una nuova indeterminata $-\omega$, ed avremo $\alpha = -\frac{\omega + B'}{C'}$. Sostituendo ora questo valore di α in quello di β, sarà

$\beta = -\frac{B}{C} + \left(A - \frac{BB'}{C'}\right)\frac{1}{\omega}$: s'avrà dunque

$$\alpha = -\frac{\omega}{C'}\left(1 + \frac{B'}{\omega}\right),$$

$\beta - \frac{B}{C'}\left\{1 + \left(B' - \frac{AC'}{B}\right)\frac{1}{\omega}\right\}$, e perciò

$z_{x,y} = \alpha^x \beta^y = \left\{-\frac{\omega}{C'}\left(1 + \frac{B'}{\omega}\right)\right\}^x \cdot \left\{1 + \left(B' - \frac{AC'}{B}\right)\frac{1}{\omega}\right\}^y \cdot \left(-\frac{B}{C'}\right)^y$. Ora i due fattori $\left\{-\frac{\omega}{C'}\left(1 + \frac{B'}{\omega}\right)\right\}^x$, $\left\{1 + \left(B' - \frac{AC'}{B}\right)\frac{1}{\omega}\right\}^y$. $\left(-\frac{B}{C'}\right)^y$ ridotti in serie secondo le potenze di ω danno due serie di questa forma

$$P\omega^x + P'\omega^{x-1} + P''\omega^{x-2} + \ldots\ldots + P^{(x)}$$

$q + q'\omega^{-1} + q''\omega^{-2} + \ldots\ldots + q^{(y)}\omega^{-y}$, dalla moltiplicazione delle quali verrà anche per $z_{x,y}$ una espressione finita di questa forma

$z_{x,y} = V\omega^x + V'\omega^{x-1} + V''\omega^{x-2} + \ldots\ldots\ldots + V^{(x)}\omega^0 + V^{(x+1)}\omega^{-1} + \ldots\ldots\ldots + V^{(x+y)}\omega^{-y}$; la quale si cangerà (§. 86.) in

$$z_{x,y} = V\varphi(x) + V'\varphi(x-1) + V''\varphi(x-2) + \ldots\ldots + V^{(x)}\varphi(0) + V^{(x+1)}\varphi(-1) + \ldots\ldots + V^{(x+y)}\varphi(-y)$$

indicando per $\varphi(x)$ una funzione arbitraria di x.

Vedremo in seguito come può determinarsi questa funzione arbitraria.

Quantunque tale espressione di $z_{x,y}$ contenga una funzione arbitraria (a), pure essa non è che un integrale particolare della equazione proposta; poichè per esser completo dovrebbe contenere due funzioni arbitrarie (85).

L'espressione che abbiamo data per $z_{x,y}$ è sempre finita; per trovare poi i valori di V, V', V'' ec. è manifesto che basterà moltiplicare fra loro le due serie che esprimono i valori di α^x, β^y: così facendo nel valore di α, la quantità $-\frac{1}{C'} = m$, $B' = n$, e in quello di β, le quantità $-\frac{B}{C'} = p$, $B' - \frac{AC'}{B} = q$, avremo

$$\alpha^x = \left(m\omega\left(1 + \frac{n}{\omega}\right)\right)^x = m^x\left(\omega^x + xn\omega^{x-1} + \frac{x(x-1)}{2}n^2\omega^{x-2} + \text{ec.}\right)$$

$\beta^y = \left(p\left(1 + \frac{q}{\omega}\right)\right)^y = p^y\left(1 + y\frac{q}{\omega} + \frac{y(y-1)}{2}\cdot\frac{q^2}{\omega^2} + \text{ec.}\right)$, la moltiplicazione delle quali serie darà

$$V = m^x p^y,$$

$$V' = m^x p^y (xn + yq),$$

$$V'' = m^x p^y \left(\frac{x(x-1)}{2}n^2 + xn.yq + \frac{y(y-1)}{2}q^2\right),$$

$$V''' = m^x p^y \left(\frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}n^3 + \frac{x(x-1)}{2}n^2.yq + xn.\frac{y(y-1)}{2}q^2 + \frac{y(y-1)(y-2)}{2.3}q^3\right),$$

. . . .

. . . .

$$V^{(s)} = m^x p^y \left(\frac{x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-s+1)}{2.3\ldots\ldots s}n^s + \ldots\ldots\ldots\right.$$

(a) Potrebbe dimostrarsi *a priori* che l'equazioni della forma suddetta non possono avere nell'integrale più di una funzione arbitraria.

$$\frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-s+2)}{2.3\dots(s-1)} n^{s-1} . yq + \dots\dots\dots$$

$$\frac{x(x-1)\dots(x-s+3)}{2.3\dots(s-2)} n^{s-2} . \frac{y(y-1)}{2} q^2 + \dots\dots\dots$$

$$+ xn . \frac{y(y-1)\dots(y-s+2)}{2.3\dots(s-1)} q^{s-1} + \frac{y(y-1)\dots(y-s+1)}{2.3\dots s} q^s).$$

Se $q = n$, ciò che accade quando $A = 0$, questi valori dei coefficienti diverranno più semplici

$$V = m^x p^y,$$

$$V' = m^x p^y (x+y) n,$$

$$V'' = m^x p^y . \frac{(x+y)(x+y-1)}{2} n^2,$$

$$V''' = m^x p^y . \frac{(x+y)(x+y-1)(x+y-2)}{2.3} n^3,$$

ec.

Allorchè passeremo all' applicazioni di queste Teorie, parleremo della determinazione delle funzioni arbitrarie.

§. 89. Noi siamo adesso nel caso di poter direttamente dimostrare la formula generale per le combinazioni che abbiamo per induzione data al §. 24. Questa dimostrazione servirà per un esempio dell' integrazione di cui abbiam sopra parlato.

Si ricerchi adunque in quante maniere possono combinarsi un numero x di quantità prendendone un numero y per volta. Quì s' intende soltanto parlare delle combinazioni diverse (24).

E' evidente che il ricercato numero di maniere sarà diverso, secondo che diverso sarà il numero delle quantità da combinarsi, ed il numero di quelle che devono entrare in una combinazione: egli adunque dipenderà da questi due numeri x ed y; sarà in conseguenza una funzione dei medesimi.

Rappresentiamo per $z_{x,y}$ funzione di x, y il numero ricercato di maniere; sarà $z_{x+1,y}$ il detto numero di maniere quando le quantità da combinarsi sono una di più. Ora questo secondo numero di combinazioni sarà eguale al primo $z_{x,y}$ aumentato di tut-

te le combinazioni che con x lettere possono farsi prendendone un numero $y-1$ per volta, poichè ognuna di queste combinazioni, aggiuntavi la nuova quantità, ci dà una combinazione nuova di y quantità. S' avrà dunque per risolvere il Problema quest' equazione a differenze finite e parziali

$$z_{x+1,y} = z_{x,y} + z_{x,y-1};$$

e ponendo $y+1$ per y, affine di ridurla alla forma di quella dell' antecedente §.,

$$z_{x+1,y+1} = z_{x,y+1} + z_{x,y}:$$

dall' integrazione adunque di quest' equazione dipenderà la soluzione del problema.

Fatto il paragone della nostra equazione con quella citata; abbiamo $A = 1$, $B = 0$, $B' = 1$, $C' = -1$, e quindi fra α, e β questa equazione $\alpha\beta = \beta + 1$.

Determinando α per β sarà $\alpha^x = (1 + \beta^{-1})^x$, e però

$$z_{x,y} = \alpha^x \beta^y = \beta^y (1+\beta^{-1})^x = \beta^y + x\beta^{y-1} + \frac{x(x-1)}{2}\beta^{y-2} +$$
$$\frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}\beta^{y-3} + \dots\dots\dots\dots +$$
$$\frac{x(x-1)(x-2)\dots\dots(x-m)}{2.3.4\dots\dots(m+1)}\beta^{y-m-1} + \text{ec.},$$

e quindi l' integrale completo di quell' equazione

$$z_{x,y} = \varphi(y) + x\varphi(y-1) + \frac{x(x-1)}{2}\varphi(y-2) + \dots\dots +$$
$$\frac{x(x-1)(x-2)\dots\dots(x-m)}{2.3.4\dots\dots(m+1)}\varphi(y-m-1) + \text{ec.}$$

essendo $\varphi(y)$ una funzione arbitraria di y.

Per determinarla si faccia $x = 0$; avremo $z_{0,y} = \varphi(y)$ e perciò

$$z_{x,y} = z_{0,y} + xz_{0,y-1} + \frac{x(x-1)}{2} z_{0,y-2} + \dots\dots\dots +$$
$$\frac{x(x-1)(x-2)\dots\dots(x-m)}{2.3.4\dots\dots(m+1)} z_{0,y-m-1} + \text{ec.}$$

E siccome $z_{0,y}$, $z_{0,y-1}$ ec. $z_{0,1}$ (esprimendo i numeri delle maniere, nelle quali un numero o di lettere possono combinarsi fra loro, prendendone un numero y per volta, ovvero un numero $y-1$ per volta ec., ovvero una per volta) sono quantità nulle, così sarà $z_{0,y} = z_{0,y-1} =$ ec. $= z_{0,1} = 0$. Egualmente sono nulle le quantità $z_{0,-1}$, $z_{0,-2}$ ec., e solo $z_{0,0}$ è eguale all' unità; s' avrà dunque, facendo nella formula superiore $m = y - 1$,

$$z_{x,y} = \frac{x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-y+1)}{2.3.4\ldots\ldots y};$$

questa formula è la stessa che la ritrovata al §. 24.

Determinando β per α, noi avremmo avuto

$$z_{x,y} = \alpha^x \left(\frac{1}{\alpha-1}\right)^y = \alpha^{x-y} + y\alpha^{x-y-1} + \frac{y(y+1)}{2}\alpha^{x-y-2} + \ldots\ldots \frac{y(y+1)(y+2)}{2.3}\alpha^{x-y-3} + \text{ec.}$$

Ed in conseguenza (86)

$$z_{x,y} = z_{x-y,0} + yz_{x-y-1,0} + \frac{y(y+1)}{2}z_{x-y-2,0} + \ldots\ldots \frac{y(y+1)(y+2)}{2.3}z_{x-y-3,0} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{y(y+1)(y+2)\ldots\ldots(x-1)}{2.3\ldots\ldots(x-y)}z_{0,0} + \text{ec.}$$

Ma $z_{m,0}$ esprime il numero delle maniere, nelle quali possono m quantità combinarsi non prendendo alcuna di esse quantità; dunque sarà $z_{m,0} = z_{m-1,0} = z_{m-2,0} =$ ec. $= z_{0,0} = 1$, e le quantità come $z_{-n,0}$ saranno tutte nulle; e perciò

$$z_{x,y} = 1 + y + \frac{y(y+1)}{2} + \frac{y(y+1)(y+2)}{2.3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{y(y+1)(y+2)\ldots\ldots(x-1)}{2.3.4\ldots\ldots(x-y)}.$$

Questa formula per quanto diversa dall' altra è però in sostanza la stessa: Infatti indicandola per S si vede facilmente che avremo

$$S = (y+1)\left\{1 + \frac{y}{2} + \frac{y(y+2)}{2.3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{y(y+2)\ldots\ldots(y+x-y-1)}{2.3\ldots\ldots(x-y)}\right\} =$$

$$\frac{(y+1)(y+2)}{2}\left\{1 + \frac{y}{3} + \frac{y(y+3)}{4} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{y(y+3)\ldots\ldots(y+x-y-1)}{2.3\ldots\ldots(x-y)}\right\} =$$

$$\frac{(y+1)(y+2)(y+3)}{2.3}\left\{1 + \frac{y}{4} + \frac{y(y+4)}{4} + \ldots\ldots\ldots + \frac{y(y+4)\ldots\ldots(y+x-y-1)}{2.3\ldots\ldots(x-y)}\right\} =$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots =$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots =$$

$$\frac{(y+1)(y+2)(y+3)\ldots\ldots(y+x-y-1)}{2.3\ldots\ldots(x-y-1)}\left\{1 + \frac{y}{x-y}\right\} = \ldots\ldots \frac{(y+1)(y+2)\ldots\ldots x}{2.3.4\ldots\ldots(x-y)},$$

formula che è eguale (24) identicamente all' altra quì sopra trovata.

Si può ancora ottenere un' altra espressione per rappresentare il suddetto numero, nella quale sia più chiara la determinazione delle funzioni arbitrarie: essendo per la natura dell' equazione $\beta = (\alpha-1)^{-1}$, avremo

$$z_{x,y} = \alpha^x\beta^y = \beta x^x \beta^{y-1} = \beta\alpha^x(\alpha-1)^{y-1} = \alpha^{x-y+1}\beta + (y-1)\alpha^{x-y}\beta + \frac{(y-1)y}{2}\alpha^{x-y-1}\beta + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{(y-1)y(y+1)\ldots\ldots(x-2)}{2.3\ldots\ldots(x-y)}\alpha\beta + \text{ec.}$$

Ora ponendo (86) $\varphi(x-y+1)$ per α^{x-y+1} ec., sarà

$$z_{x,y} = \varphi(x-y+1).\beta + (y-1)\varphi(x-y).\beta + \frac{(y-1)y}{2}\varphi(x-y-1).\beta + \ldots\ldots + \frac{(y-1)y(y+1)\ldots\ldots(x-2)}{2.3\ldots\ldots(x-y)}\varphi(1).\beta + \text{ec.}.$$

Facendo $y = 1$, si ha $z_{x,1} = \varphi(x).\beta$, dunque sarà

$\varphi(x+\omega).\beta = z_{x+\omega,1}$, e perciò

$$z_{x,y} = z_{x-y+1,1} + (y-1)z_{x-y,1} + \frac{(y-1)y}{2} z_{x-y-1,1} + \ldots\ldots + \frac{(y-1)y(y+1)\ldots\ldots(x-2)}{2.3.4\ldots\ldots(x-y)} z_{1,1} + \text{ec.}$$

Ma in generale significando $z_{m,1}$ il numero delle combinazioni che si possono fare con un numero m di quantità, prendendone una per volta, abbiam trovato (24) $z_{m,1} = m$, dunque

$$z_{x,y} = (x-y+1) + (y-1)(x-y) + \frac{(y-1)y}{2}(x-y-1) + \frac{(y-1)y(y+1)}{2.3}(x-y-2) + \ldots + \frac{(y-1)y(y+1)\ldots(x-2)}{2.3\ldots\ldots(x-y)}$$

giacchè $z_{0,1}$, $z_{-1,1}$ ec. sono tutte eguali a zero. Potrebbe ridursi quest' ultima espressione alla forma di quelle sopra trovate.

§. 90. I valori di $z_{x,y}$ quando una delle variabili ovvero ambedue sono nulle, devono essere dati per la natura del Problema, e noi abbiamo, parimente negli esempj superiori, considerati come dati dalle condizioni del quesito i valori di $z_{x,y}$, allorchè, essendo una variabile nulla, l' altra diviene negativa. Questi ultimi valori per altro avrebbero potuto più rigorosamente ottenersi per mezzo di considerazioni puramente analitiche, le quali essendo comuni a qualunque Problema meritano per ciò di non essere tralasciate.

Ad oggetto però di spiegarsi con maggior semplicità, noi supporremo che l' equazioni a differenze parziali appartengono alle serie *Recurro-Recurrenti*, di cui è data al §. 87. la forma generale; in questa supposizione che non altera la generalità delle nostre ricerche $z_{1,0}$, $z_{2,0}$, ... $z_{x,0}$ saranno i termini della prima fila orizzontale, e $z_{0,1}$, $z_{0,2}$, ... $z_{0,y}$ quelli della prima verticale.

Riprendiamo ora l' equazione integrata al §. 88. e supponghiamo che ancora B′ sia nullo: avremo allora $\beta = -\frac{A+B\alpha}{C'\alpha} = -\frac{B}{C'}\left(1+\frac{A}{C'}.\frac{1}{\alpha}\right)$, e facendo per semplicità di calcolo $-\frac{B}{C'} = p$, $\frac{A}{C'} = q$, sarà $\beta = p\left(1+\frac{q}{\alpha}\right)$, ed in conseguenza

$$z_{x,y} = \alpha^x\beta^y = p^y\left(\alpha^x + yq\alpha^{x-1} + \frac{y(y-1)}{2}q^2\alpha^{x-2} + \ldots\ldots\ldots + q^y\alpha^{x-y}\right);$$

questa espressione secondo ciò che abbiam detto (86) sarà

$$z_{x,y} = p^y\left(z_{x,0} + yq.z_{x-1,0} + \frac{y(y-1)}{2}q^2.z_{x-2,0} + \ldots\ldots + q^y.z_{x-y,0}\right):$$

ora è evidente che quando y è maggiore di x, questa formula contiene dei termini di questa specie $z_{-1,0}$, $z_{-2,0}$ ec., i quali se non sono conosciuti, si determineranno per mezzo dei termini $z_{0,1}$, $z_{0,2}$ ec. della prima fila verticale in questa guisa.

Facciasi nella formula, trovata per esprimere il termine generale, $x=0$, ed $y=1,2,3$ ec., avremo

$$z_{0,1} = p(z_{0,0} + q.z_{-1,0})$$
$$z_{0,2} = p^2(z_{0,0} + 2q.z_{-1,0} + q^2.z_{-2,0})$$
$$z_{0,3} = p^3(z_{0,0} + 3q.z_{-1,0} + 3q^2.z_{-2,0} + q^3.z_{-3,0})$$

ec. ec.

d' onde è facile ricavare

$$q.z_{-1,0} = \frac{1}{p}z_{0,1} - z_{0,0}$$
$$q^2.z_{-2,0} = \frac{1}{p^2}.z_{0,2} - \frac{2}{p}.z_{0,1} + z_{0,0}$$
$$q^3.z_{-3,0} = \frac{1}{p^3}.z_{0,3} - \frac{3}{p^2}.z_{0,2} + \frac{3}{p}.z_{0,1} - z_{0,0}$$

ec. ec.

ed in generale

$$q^s \cdot z_{-s,0} = \frac{1}{p^s} \cdot z_{0,s} - \frac{s}{p^{s-1}} \cdot z_{0,s-1} + \frac{s(s-1)}{2p^{s-2}} \cdot z_{0,s-2} - \text{ec.}:$$

si vede adunque che essendo conosciuti i termini della prima fila verticale della serie *Recurro-Recurrente*, potranno determinarsi per mezzo di essi i termini della prima fila orizzontale d'indice negativo, i quali compariscono nell'espressione del termine generale della serie medesima.

Nella formula $z_{x,y} = z_{x-y,0} + yz_{x-y-1,0} + \ldots\ldots$

$$\frac{y(y+1)}{2} z_{x-y-2,0} + \text{ec.}$$

trovata al §. antecedente, noi ci siamo fermati al termine ove trovasi $z_{0,0}$ poichè abbiamo detto che sono nulle le quantità $z_{-m,0}$. Per dimostrare rigorosamente tutto questo, si faccia in quella medesima formula $x = 0$, ed avremo

$$z_{0,y} = z_{-y,0} + yz_{-y-1,0} + \frac{y(y+1)}{2} z_{-y-2,0} + \text{ec.}:$$

ma qualunque sia y, è sempre $z_{0,y} = 0$; dunque

$0 = z_{-y,0} + yz_{-y-1,0} + \frac{y(y+1)}{2} z_{-y-2,0} + \text{ec.}$ equazione che per essere soddisfatta richiede che sia $z_{-y,0} = z_{-y-1,0} = \text{ec.} = 0$, come avevamo supposto.

§. 91. Determiniamo adesso le funzioni arbitrarie contenute nell' integrale dell' equazione

$Az_{x,y} + Bz_{x+1,y} + B'z_{x,y+1} + C'z_{x+1,y+1} = 0$, avuto in termini finiti col metodo del §. 88., e supponghiamo che questa equazione appartenga parimente ad una serie *Recurro-Recurrente* rappresentata generalmente dalla Tavola del §. 87.

Abbiamo al §. medesimo ritrovate le espressioni di α^x e β^y date per una indeterminata ω; e se in esse si pone invece delle potenze di ω tante funzioni degli esponenti delle potenze medesime, come ivi è detto, s' avranno allora le due seguenti espressioni per α^x, β^y, ed in conseguenza (86) per $z_{x,0}$, $z_{0,y}$

$$z_{x,0} = \alpha^x = m^x \{f(x) + xn \cdot f(x-1) + \frac{x(x-1)}{2} n^2 \cdot f(x-2) + \ldots\ldots\ldots + n^x \cdot f(0)\}$$

$$z_{0,y} = \beta^y = p^y \{f(0) + y \cdot qf(-1) + \frac{y(y-1)}{2} \cdot q^2 f(-2) + \ldots\ldots + q^y \cdot f(-y)\}.$$

Supponghiamo successivamente

$x = 0, 1, 2, 3$ ec., ed avremo

$z_{0,0} = f(0)$.

$z_{1,0} = m\{f(1) + nf(0)\}$

$z_{2,0} = m^2\{f(2) + 2n \cdot f(1) + n^2 f(0)\}$

$z_{3,0} = m^3\{f(3) + 3n \cdot f(2) + 3n^2 \cdot f(1) + n^3 f(0)\}$

ec.

dalle quali si ricava

$f(0) = z_{0,0}$

$\frac{1}{n} f(1) = \frac{1}{mn} z_{1,0} - z_{0,0}$

$\frac{1}{n^2} f(2) = \frac{1}{m^2 n^2} \cdot z_{2,0} - \frac{2}{mn} \cdot z_{1,0} + z_{0,0}.$

$\frac{1}{n^3} f(3) = \frac{1}{m^3 n^3} \cdot z_{3,0} - \frac{3}{m^2 n^2} \cdot z_{2,0} + \frac{3}{mn} \cdot z_{1,0} - z_{0,0}$

ec.

$$\frac{1}{n^x} f(x) = \frac{1}{m^x n^x} \cdot z_{x,0} - x \frac{1}{m^{x-1} n^{x-1}} \cdot z_{x-1,0} + \frac{x(x-1)}{2} \times \ldots\ldots \frac{1}{m^{x-2} n^{x-2}} \cdot z_{x-2,0} - \text{ec.} \pm z_{0,0}.$$

Se adesso supponghiamo successivamente $y = 0, 1, 2, 3, 4$ ec., s' avrà

$z_{0,0} = f(0)$

$$z_{0,1}=p\{f(0)+q.f(-1)\}$$

$$z_{0,2}=p^2\{f(0)+2q.f(-1)+q^2.f(-2)\}$$

ec.

d' onde si deduce

$$f(0)=z_{0,0}$$

$$q.f(-1)=\frac{1}{p}z_{0,1}-z_{0,0}$$

$$q^2f(-2)=\frac{1}{p^2}.z_{0,2}-\frac{2}{p}z_{0,1}+z_{0,0}$$

ec.

$$q^y.f(-y)=\frac{1}{p^y}.z_{0,y}-\frac{y}{p^{y-1}}.z_{0,y-1}+\frac{y(y-1)}{2}.\frac{1}{p^{y-2}}.z_{0,y-2}$$

$$-\text{ ec. }\pm z_{0,0};$$

si prende il segno $+$ quando x, y sono pari, il $-$ quando sono impari.

Le funzioni adunque tanto positive che negative sono determinate per mezzo dei termini della serie.

Se per fare una applicazione del secondo metodo del §. 88, si risolve per mezzo di esso l'equazione

$z_{x+1,y+1}=z_{x,y+1}+z_{x,y}$ proposta al §. 89., avremo per il paragone di questa equazione con quella del citato §., $A=1$, $B'=1$, $C'=-1$, $B=0$; e perciò $m=1$, $n=1$, $p=0$, $q=\infty$, $pq=1$. Di più

$z_{0,0}=z_{1,0}=z_{2,0}=$ ec. $=1$, $z_{0,1}=z_{0,2}=z_{0,3}=$ ec. $=0$: sostituendo adunque questi valori nelle superiori formule, avremo

$$f(0)=1,\ f(1)=1-1=0,\ f(2)=1-2+1=0 \text{ ec.},$$
$$f(x)=0;$$

$$f(-1)=\frac{1}{1}.0-\frac{1}{\infty}=0, \text{ e così } f(-2)=0,\ f(-3)=0$$
$$\text{ec. } f(-y)=0:$$

si vede adunque che di tutti i termini che porta la formula del §. 88. per l'integrale completo in questo caso, non sarà zero quello soltanto moltiplicato per $f(0)$; ora il coefficiente di $f(0)$ in quella formula è V^x, dunque abbiamo $z_{x,y}=V^{(x)}$.

Se nel valore di $V^{(s)}$ trovato al §. 88., si fa $s=x$, s' avrà

$$V^{(x)}=m^x p^y\left\{\frac{x(x-1)\ldots\ldots 1}{2.3.4\ldots\ldots x}n^x+\frac{x(x-1)\ldots\ldots 2}{2.3\ldots\ldots x-1}n^{x-1}.yq+\ldots\ldots\right.$$
$$\frac{x(x-1)\ldots\ldots 3}{2.3\ldots\ldots x-2}n^{x-2}.\frac{y(y-1)}{2}q^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$
$$\left.xn\frac{y(y-1)\ldots\ldots(y-x+2)}{2.3\ldots\ldots x-1}q^{x-1}+\frac{y(y-1)\ldots\ldots(y-x+1)}{2.3\ldots\ldots x}q^x\right\}$$

che si riduce alla seguente

$$V^{(x)}=m^x p^y\left\{n^x+xn^{x-1}.yq+\frac{x(x-1)}{2}n^{x-2}.\frac{y(y-1)}{2}q^2+\ldots\right.$$
$$\frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}n^{x-3}.\frac{y(y-1)(y-2)}{2.3}q^3+\ldots\ldots\ldots\ldots+$$
$$\left.xn\frac{y(y-1)\ldots\ldots(y-x+2)}{2.3.4\ldots\ldots(x-1)}q^{x-1}+\frac{y(y-1)(y-2)\ldots(y-x+1)}{2.3\ldots x}q^x\right\}$$

ovvero

$$V^{(x)}=m^x n^x p^y+xm^x n^{x-1}.yp^y q+\frac{x(x-1)}{2}m^x n^{x-2}.\frac{y(y-1)}{2}\times\ldots$$
$$p^y q^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{x(x-1)\ldots\ldots(x-y+1)}{2.3\ldots\ldots y}m^x n^{x-y}\times\ldots$$
$$\frac{y(y-1)\ldots\ldots 1}{2.3\ldots\ldots y}p^y q^y+\ldots\ldots\ldots+xn\frac{y(y-1)\ldots\ldots(y-x+2)}{2.3\ldots\ldots(x-1)}\times$$
$$m^x p^y q^{x-1}+\frac{y(y-1)\ldots\ldots(y-x+1)}{2.3\ldots\ldots x}m^x p^y q^x;$$

e facendo in questa formula $p=0$, $q=\infty$, $pq=1$, $m=n=1$, avremo

$V^{(x)}=\frac{x(x-1)\ldots\ldots(x-y+1)}{2.3\ldots\ldots y}$, poichè tutti i termini, nei quali il p ha una maggiore dimensione del q, vanno a zero, essendo anche p nullo; e quegli altri nei quali è maggiore la dimensione del q vanno a zero, perchè nei loro coefficienti si trova il fattore $y-y$: avremo adunque per $z_{x,y}$ questa espressione

$z_{x,y} = \frac{x(x-1)\ldots\ldots(x-y+1)}{2.3\ldots\ldots y}$, la quale abbiamo anche trovata al §. 89.

§. 92. Ritorniamo adesso all' equazione di secondo ordine, nella quale non manca alcun termine:

Facendo come sopra $z_{x,y} = \alpha^x \beta^y$, sostituendo e dividendo per il fattore comune $\alpha^x \beta^y$, otterremo questa equazione fra α e β
$A + B\alpha + C\alpha^2 + B'\beta + C'\alpha\beta + C''\beta^2 = 0$, per la quale determinando β in α, s' avrà

$$\beta = -\frac{1}{2C''}\left(C'\alpha + B' \pm \sqrt{[(C'\alpha + B')^2 - 4C''(C\alpha^2 + B\alpha + A)]}\right),$$

e perciò il valore di $z_{x,y}$ sarà così espresso

$$z_{x,y} = \alpha^x \beta^y = \alpha^x \left\{-\frac{1}{2C''}(C'\alpha + B' \pm \sqrt{[(C'\alpha + B')^2 - 4C''(C\alpha^2 + B\alpha + A)]})\right\}^y.$$

Per $z_{x,y}$ avremo adunque due valori uno prendendo il segno $+$ del radicale, l' altro prendendo il segno $-$. Si prenda per ora il segno superiore. Se per mezzo d' alcuno dei metodi immaginati dai Geometri per l' evoluzione delle funzioni in serie, si riduce l' espressione di $z_{x,y}$ in una serie ordinata secondo le potenze decrescenti di α, avremo una serie infinita di questa forma

$$z_{x,y} = T . \alpha^{x + \mu y} + T' . \alpha^{x + \mu y - \mu'} + T'' . \alpha^{x + \mu y - \mu''} + \text{ec.}$$

Ora con un ragionamento simile a quello fatto al §. 86., vedremo che per $\alpha^{x+\omega}$ possiamo sostituire qualunque funzione $\varphi(x + \omega)$ della quantità $x + \omega$: avremo adunque per $z_{x,y}$ la seguente serie

$$z_{x,y} = T . \varphi(x + \mu y) + T' . \varphi(x + \mu y - \mu') + T'' . \varphi(x + \mu y - \mu'') + \text{ec.}$$

Nella medesima guisa se si prende il segno meno, avremo un' altra simil serie per esprimere il valore di $z_{x,y}$: questa sarà

$z_{x,y} = V . \alpha^{x + vy} + V' . \alpha^{x + vy - v'} + V'' . \alpha^{x + vy - v''} + \text{ec.}$; e ponendo per una qualunque potenza $\alpha^{x+\omega}$ una funzione arbitraria $\Psi(x + \omega)$, avremo

$$z_{x,y} = V . \Psi(x + vy) + V' . \Psi(x + vy - v') + V'' . \Psi(x + vy - v'') + \text{ec.}$$

che sarà una seconda espressione di $z_{x,y}$: ora l' equazione proposta essendo lineare, soddisfarà ad essa ancora la somma delle due espressioni trovate, e sarà

$$z_{x,y} = T . \varphi(x + \mu y) + T' . \varphi(x + \mu y - \mu') + T'' . \varphi(x + \mu y - \mu'') + \text{ec.}$$
$$+ V . \Psi(x + vy) + V' . \Psi(x + vy - v') + V'' . \Psi(x + vy - v'') + \text{ec.}$$

e questa espressione è chiamata dai Geometri integrale completo della proposta perchè, essendo essa del secondo ordine, contiene due funzioni arbitrarie φ, Ψ.

Le quantità T, T', T'' ec. V, V', V'' ec. sono funzioni di x che si trovano facendo l' attuale svolgimento delle funzioni in serie; $\mu . \mu' . \mu''$ ec. v, v', v'' ec. sono numeri positivi e crescenti. L' espressione che noi abbiamo trovata per $z_{x,y}$ sarà sempre infinita, se la quantità che è sotto il segno radicale non è un quadrato perfetto, cioè se non spariscono dal valore di β i radicali di una quantità complessa in α; che equivale a dire se l' equazione fra α e β non è risolubile in due fattori di primo grado; in quest' ultimo caso l' espressione diviene composta di un numero finito di termini, come fra poco vedremo.

Contentandosi d' avere gli integrali completi espressi per delle serie che vadano all' infinito, il metodo adoprato per il secondo ordine serve per l' equazioni di qualunque ordine: infatti abbiasi da integrare l' equazione generale dell' ordine n^{esimo}

$$\left.\begin{array}{l} Az_{x,y} + Bz_{x+1,y} + Cz_{x+2,y} \quad + \ldots\ldots + Nz_{x+n,y} \\ \quad + B'z_{x,y+1} + C'z_{x+1,y+1} \quad + \ldots\ldots + N'z_{x+n-1,y+1} \\ \qquad + C''z_{x,y+2} \quad + \ldots\ldots + N''z_{x+n-2,y+2} \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad + N^{(n)}z_{x,y+n} \end{array}\right\} = 0$$

Se supponghiamo come ai §§. antecedenti $z_{x,y} = \alpha^x \beta^y$, e quindi se facciamo le debite sostituzioni, avremo, dopo aver diviso per $\alpha^x\beta^y$, fra α e β questa equazione algebraica del grado n

$$A + B\alpha + C\alpha^2 + \ldots\ldots + N\alpha^n + \beta(B' + C'\alpha + \ldots\ldots$$
$$+ N'\alpha^{n-1}) + \beta^2(C'' + \ldots\ldots + N''\alpha^{n-2}) + \ldots\ldots$$

$+ N^{(n)}\beta^n = 0$, la quale risoluta darà un numero n di valori diversi di β, e però di β^y. Questi valori saranno in generale tante funzioni irrazionali di α, le quali non potranno in generale ridursi che in serie infinite secondo le potenze decrescenti di α. Siano tali serie

$$\beta^y = T\alpha^{\mu y - \mu'} + T'\alpha^{\mu y - \mu''} + \text{ec.}$$
$$\beta^y = T1 . \alpha^{\nu y - \nu'} + T'1 . \alpha^{\nu y - \nu''} + \text{ec.}$$
$$\beta^y = T2 . \alpha^{\theta y - \theta'} + T'2 . \alpha^{\theta y - \theta''} + \text{ec.}$$
$$\text{ec.} \qquad\qquad \text{ec.}$$

Queste n serie moltiplicate ciascuna per α^x, ci daranno n espressioni di $z_{x,y}$; e se in ciascuna di queste espressioni si sostituisce invece di $\alpha^{x+\omega}$ una funzione arbitraria $\phi(x+\omega)$ diversa in ciascuna di esse, avremo per $z_{x,y}$ un numero n di valori diversi, ciascuno dei quali sarà una serie infinita e conterrà una fun-

zione arbitraria. La somma adunque di questi valori, contenendo un numero n di funzioni arbitrarie diverse, rappresenterà perciò l' integrale completo della proposta.

§. 93. Se l' equazione fra α e β potesse risolversi in n fattori di primo grado, se potesse cioè mettersi sotto questa forma

$$(\beta - a'\alpha - b')(\beta - a''\alpha - b'')(\beta - a'''\alpha - b''') \ldots\ldots (\beta -$$
$$a^{(n)}\alpha - b^{(n)}) = 0,$$

l' integrale completo sarebbe composto di un numero finito di termini: infatti avrebbesi allora

$$\beta = a'\alpha + b', \beta = a''\alpha + b'', \beta = a'''\alpha + b''', \beta = a''''\alpha + b'''', \ldots\ldots$$

$\ldots\ldots \beta = a^{(n)}\alpha + b^{(n)}$; questi n diversi valori di β ci daranno n diversi valori di β^y e perciò di $\alpha^x\beta^y$ ovvero di $z_{x,y}$, la somma dei quali soddisfarà anche alla proposta, perchè questa è lineare: avremo in conseguenza, prendendo per $z_{x,y}$ questa somma medesima

$$z_{x,y} = \alpha^x(a'\alpha + b')^y + \alpha^x(a''\alpha + b'')^y + \alpha^x(a'''\alpha + b''')^y + \ldots\ldots$$
$$+ \alpha^x(a^{(n)}\alpha + b^{(n)})^y$$

ovvero, facendo lo sviluppo di queste potenze,

$$z_{x,y} = a'^y . \alpha^{x+y} + ya'^{y-1}b' . \alpha^{x+y-1} + \frac{y(y-1)}{2}a'^{y-2}b'^2 \times \ldots$$
$$\alpha^{x+y-2} + \ldots\ldots + b'^y . \alpha^x$$
$$+ a''^y . \alpha^{x+y} + ya''^{y-1}b'' . \alpha^{x+y-1} + \frac{y(y-1)}{2}a''^{y-2}b''^2 \times \ldots$$
$$\alpha^{x+y-2} + \ldots\ldots + b''^y . \alpha^x$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+a^{(n)y}.\alpha^{x+y}+ya^{(n)y-1}b^{(n)}.\alpha^{x+y-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+b^{(n)y}.\alpha^{x}.$$

Ora la quantità α rimane indeterminata; dunque (86) prenderemo $\varphi'(x)$ in vece di α^x, ed in generale $\varphi'(x+\omega)$ per $\alpha^{x+\omega}$. Ponendo adesso nell' espressione trovata per $z_{x,y}$, tante diverse funzioni di $x+y$, quanti sono i coefficienti diversi da cui è moltiplicato α^{x+y}, s' avrà

$$z_{x,y}=a'^{y}.\varphi'(x+y)+ya'^{y-1}b'.\varphi'(x+y-1)+\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{y(y-1)}{2}a'^{y-2}b'^2.\varphi'(x+y-2)+\ldots\ldots+b'^{y}.\varphi'(x)$$
$$+a''^{y}.\varphi''(x+y)+ya''^{y-1}b''.\varphi''(x+y-1)+\ldots\ldots$$
$$\frac{y(y-1)}{2}a''^{y-2}b''^2.\varphi''(x+y-2)+\ldots\ldots+b''^{y}.\varphi''(x)$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+a^{(n)y}.\varphi^{(n)}(x+y)+ya^{(n)y-1}b^{(n)}.\varphi^{(n)}(x+y-1)+\ldots\ldots$$
$$+b^{(n)y}.\varphi^{(n)}(x);$$

e questo sarà l' integrale completo della proposta, poichè contiene un numero n di funzioni arbitrarie $\varphi', \varphi'', \varphi'''$ ec.

Supponghiamo che $b'=b''=b'''=\ldots\ldots=b^{(n)}=0$, vale a dire che la proposta sia

$$Nz_{x+n,y}+N'z_{x+n-1,y+1}+N''z_{x+n-2,y+2}+\ldots\ldots\ldots$$
$$+N^{(n)}z_{x,y+n}=0;$$

ed avremo fra α e β l' equazione

$$N\alpha^n+N'\alpha^{n-1}\beta+N''\alpha^{n-2}\beta^2+\ldots\ldots\ldots+N^{(n)}\beta^n=0,$$

che può sempre supporsi risoluta in fattori di questa forma $\beta -$

$a'\alpha$; poichè dividendola tutta per α^n e considerando per incognita $\frac{\beta}{\alpha}$, si hanno da essa n valori per $\frac{\beta}{\alpha}$ e perciò n fattori di quella forma. Facendo ora nella formula superiore $b'=b''=b'''=$ ec. $=0$, avremo così espresso l' integrale completo di una tale equazione

$$z_{x,y}=a'^{y}\varphi'(x+y)+a''^{y}\varphi''(x+y)+a'''^{y}\varphi'''(x+y)+\ldots\ldots$$
$$+a^{(n)y}\varphi^{(n)}(x+y).$$

Quando l' equazione proposta non ha che i termini, nei quali le variabili x, y hanno i medesimi aumenti, quando ha cioè questa forma

$$Az_{x,y}+Bz_{x+1,y+1}+\ldots\ldots\ldots\ldots+Pz_{x+m,y+m}=0,$$

facendo come sopra $z_{x,y}=\alpha^x\beta^y$, si giungerà a questa equazione

$A+B\alpha\beta+\ldots\ldots\ldots+P\alpha^m\beta^m=0$, la quale, considerando per incognita $\alpha\beta$, ci darà m valori a', a'' ec. per $\alpha\beta$; e potremo perciò dare ad essa questa forma

$$(\alpha\beta-a')(\alpha\beta-a'')(\alpha\beta-a''')\ldots\ldots\ldots(\alpha\beta-a^{(m)})=0.$$

Da questi m fattori si ricavano m valori per β, i quali sono $a'\alpha^{-1}, a''\alpha^{-1}, a'''\alpha^{-1}$ ec.: così si hanno per $z_{x,y}$ m valori diversi, i quali sono $a'^{y}.\alpha^{x-y}, a''^{y}.\alpha^{x-y}, a'''^{y}.\alpha^{x-y}$ ec. Presa ora la somma di questi valori, e introducendovi le diverse funzioni arbitrarie per mezzo del ragionamento fatto al §. 86., s' avrà l' integrale così espresso

$$z_{x,y}=a'^{y}.f'(x-y)+a''^{y}.f''(x-y)+a'''^{y}.f'''(x-y)+\ldots\ldots$$
$$+a^{(m)y}.f^{(m)}(x-y).$$

f', f'', f''' ec. indicano delle funzioni arbitrarie diverse della quantità $x-y$.

§. 94. Riprendendo il valore di β dato al §. 92., cioè

$$\beta = -\frac{1}{2C''}\left(C'\alpha + B \pm \sqrt{}\left[(C'^2 - 4C''C)\alpha^2 + (2C'B' - 4C''B)\alpha\right.\right.$$

$$\left.\left. + B'^2 - 4C''A\right]\right),$$ e facendo per maggior semplicità di calcolo $p = C'^2 - 4C''C$, $q = 2C'B' - 4C''B$, $r = B'^2 - 4C''A$, avremo

$$\beta = -\frac{1}{2C''}\left(C'\alpha + B \pm \sqrt{}[p\alpha^2 + q\alpha + r]\right),$$ ed è chiaro che se invece dell' indeterminata α è presa una funzione intera d' un' altra indeterminata ω in modo che la quantità $p\alpha^2 + q\alpha + r$ sia un quadrato perfetto, svanirà dal valore di β il radicale, ed allora potremo ridurre il valore di β^y in una serie finita ordinata secondo le potenze della indeterminata ω: secondo la Teorìa dell' Analisi degli indeterminati (a), se si fa $\alpha = \frac{q^2 - 4rp}{4p}\cdot\frac{1}{\omega} + \frac{1}{4p}\cdot\omega - \frac{q}{2p}$, abbiamo $p\alpha^2 + q\alpha + r$ eguale al quadrato $\left(\frac{q^2 - 4rp - \omega^2}{2\omega . 2rp}\right)^2$: dunque il valore β sarà

$$\beta = -\frac{1}{2C''}\left(C'\alpha + B \pm \left(\frac{q^2 - 4rp - \omega^2}{4\omega . rp}\right)\right);$$ possiamo pertanto esprimere i valori di α e di β in funzioni razionali di un' altra indeterminata ω, ed abbiamo $\alpha = e\omega + f\omega^{-1} + g$, $\beta = e'\omega + f'\omega^{-1} + g'$, essendo $f = \frac{q^2 - 4rp}{4p}$, $e = \frac{1}{4p}$, $g = -\frac{q}{2p}$; sostituendo poi nel valore di β, quello trovato per α, ricavansi i valori di e'; f'; g'; ed abbiamo

$$z_{x,y} = \alpha^x\beta^y = (e\omega + f\omega^{-1} + g)^x . (e'\omega + f'\omega^{-1} + g')^y,$$ la quale espressione essendo sviluppata ed ordinata secondo le potenze di ω, sarà ridotta ad una serie finita di questa forma

$$z_{x,y} = V + V'\omega + V''\omega^2 + V'''\omega^3 + \ldots\ldots + V^{(x+y)}.\omega^{x+y}$$
$$+ {}'V\omega^{-1} + {}''V\omega^{-2} + {}'''V\omega^{-3} + \ldots\ldots {}^{(x+y)}V\omega^{-(x+y)},$$

(a) V. il T. II. degli Elem. d' Algebra d' Eulero.

nella quale i coefficienti V, V' ec. $'V, ''V$ ec. saranno delle funzioni di x e di y che si possono determinare in differenti maniere secondo i metodi conosciuti.

Introduciamo ora la funzione arbitraria invece della quantità esponenziale indeterminata, ed avremo per rappresentare $z_{x,y}$ la seguente espressione

$$z_{x,y} = V.f(0) + V'.f(1) + V''.f(2) + \ldots\ldots + V^{(x+y)}.f(x+y)$$
$$+ {}'V.f(-1) + {}''V.f(-2) + \ldots\ldots + {}^{(x-y)}V.f(-x-y),$$

la quale contiene una funzione arbitraria $f(x+y)$.

Prendendo nel valore di β il segno $-$, avremo per β un altro valore, il quale ci darà un' altra espressione per $z_{x,y}$

$$z_{x,y} = T.\Psi(0) + T'.\Psi(1) + T''.\Psi(2) + \ldots\ldots +$$
$$T^{(x+y)}.\Psi(x+y)$$
$$+ {}'T.\Psi(-1) + {}''T.\Psi(-2) + \ldots\ldots +$$
$${}^{(x-y)}T.\Psi(-x-y),$$

che contiene un' altra funzione arbitraria $\Psi(x+y)$: la somma adunque di queste due espressioni di $z_{x,y}$ contenendo due funzioni arbitrarie, rappresenterà l' integrale completo della proposta equazione del secondo ordine, il quale sarà sempre composto di un numero finito di termini. Allorchè faremo l' applicazione di queste Teorìe, ci tratterremo sopra i metodi di determinare le funzioni arbitrarie che entrano negli integrali completi. E' facile però vedere che i valori di quelle funzioni dipendono dai valori di $z_{x,y}$ quando una delle variabili y è zero.

Il metodo che abbiamo adoprato per avere l' integrale completo in termini finiti delle equazioni del secondo ordine, non può adoprarsi per gli ordini superiori; in fatti se si trattasse di quelle del terzo, (e ciò che dico di questo vale per gli altri) essendovi allora fra α e β una equazione del terzo grado, si avrebbero per β dei valori i quali conterrebbero le radici cube di una quantità complessa di questa forma $\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d$, e perchè queste sparissero bisognerebbe che potesse prendersi per α tal numero da rendere quella quantità complessa un cubo perfetto: ora l'analisi degli indeterminati non è spinta tanto oltre per soddisfare a questa ricerca, e perciò non potendo eliminare i radicali del valore di β, la potenza β^y ridotta in serie secondo le potenze di α, conterrà un numero infinito di termini: così il metodo precedente non è limitato che all'equazioni di secondo ordine.

Dopo aver fatta qualche altra applicazione, esporremo un metodo che si estende alle equazioni di tutti gli ordini e unisce al vantaggio di dare sempre gli integrali finiti, l'altro di rendere la determinazione delle funzioni arbitrarie facilissima in tutti i casi.

§. 95. Risolviamo adesso un Problema sopra la partizione dei numeri, la cui soluzione dipende dall'integrazione di una equazione a differenze finite e parziali.

„ In quante maniere il prodotto di un numero x di lettere
„ $a, b, c, d, e, \ldots\ldots m$ può avere la somma degli esponen-
„ ti di quelle lettere eguale ad y, supponendo che i detti esponen-
„ ti siano ciascuno > 0 „.

S' intende facilmente che quel ricercato numero di maniere sarà diverso secondo che diverso sarà quel numero x delle lettere, ed il numero y somma degli esponenti: esso sarà una quantità dipendente da x e da y: sarà dunque una funzione di x, y.

Sia adunque rappresentato da $z_{x,y}$ funzione di x e di y quel ricercato numero di maniere: siano p, q, r gli esponenti di quelle lettere: il Problema si riduce a trovare in quante maniere può farsi

$$p + q + r + \text{ec.} = y.$$

Facendo $p = 1$; $z_{x-1,y-1}$ esprimerà il numero delle maniere nelle quali può essere

$1 + q + r + s + \text{ec.} = y$, ovvero

$q + r + s + \text{ec.} = y - 1$: ora il numero totale $z_{x,y}$ delle maniere è eguale a questo numero di maniere $z_{x-1,y-1}$ più a tutte quelle nelle quali può essere

$2 + q + r + s + \text{ec.} = y$ ovvero $1 + q + r + s + \text{ec.} = y - 1$
$3 + q + r + s + \text{ec.} = y \;\ldots\ldots\; 2 + q + r + s + \text{ec.} = y - 1$
$4 + q + r + s + \text{ec.} = y \;\ldots\ldots\; 3 + q + r + s + \text{ec.} = y - 1$
ec. ec.

ovvero $p + q + r + s + \text{ec.} = y - 1$, il quale ultimo numero di maniere è espresso da $z_{x,y-1}$: abbiamo dunque

$$z_{x,y} = z_{x-1,y-1} + z_{x,y-1}.$$

Per integrare quest' equazione facciasi al solito $z_{x,y} = \alpha^x \beta^y$, ed avremo fra α e β questa equazione $\alpha\beta = 1 + \alpha$, da cui si ricava $\beta = 1 + \frac{1}{\alpha}$. Sarà dunque

$$\alpha^x \beta^y = \alpha^x \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^y = \alpha^x + y\alpha^{x-1} + \frac{y(y-1)}{2}\alpha^{x-2} + \ldots\ldots \frac{y(y-1)(y-2)}{2\cdot 3}\alpha^{x-3} + \ldots\ldots + \alpha^{x-y}.$$

Moltiplicando questa equazione per β, sarà

$$\alpha^x \beta^{y+1} = \alpha^x \beta + y\alpha^{x-1}\beta + \frac{y(y-1)}{2}\alpha^{x-2}\beta + \frac{y(y-1)(y-2)}{2\cdot 3}\alpha^{x-3}\beta + \ldots \ldots\ldots + \frac{y(y-1)(y-2)\ldots\ldots(y-x+2)}{2\cdot 3\ldots\ldots(x-1)}\alpha\beta + \ldots\ldots + \alpha^{x-y}\beta;$$

dunque, facendo un ragionamento simile a quello fatto in fine del § 89., troveremo

$$z_{x,y+1} = \varphi(x) + y\varphi(x-1) + \frac{y(y-1)}{2}\varphi(x-2) + \ldots\ldots\ldots + \frac{y(y-1)(y-2)\ldots\ldots(y-x+2)}{2\cdot 3\ldots\ldots(x-1)}\varphi(1).$$

Ora per determinare la funzione arbitraria $\varphi(x)$, si faccia $y = 0$; avremo $\varphi(x) = z_{x,1}$, e perciò

$$z_{x,y+1} = z_{x,1} + yz_{x-1,1} + \frac{y(y-1)}{2}z_{x-2,1} + \ldots\ldots\ldots + \frac{y(y-1)(y-2)\ldots\ldots(y-x+2)}{2\cdot 3\ldots\ldots(x-1)}z_{1,1} + \ldots\ldots + z_{x-y,1}.$$

Ma $z_{x,1}$, $z_{x-1,1}$, $z_{x-2,1}$ ec., $z_{2,1}$ sono tutte quantità nulle; e $z_{1,1} = 1$, (poichè avendo un numero m di lettere è impossibile che la somma dei loro esponenti sia eguale all'unità); e le quantità $z_{0,1}$, $z_{-1,1}$, $z_{-2,1}$ sono tutte nulle; dunque avremo

$$z_{x,y+1} = \frac{y(y-1)(y-2)\ldots\ldots(y-x+2)}{2.3.4\ldots\ldots(x-1)};$$

la quale espressione (ponendovi $y-1$ per y), diviene

$$z_{x,y} = \frac{(y-1)(y-2)(y-3)\ldots\ldots(y-x+1)}{2.3\ldots\ldots(x-1)},$$ che è il ricercato numero di maniere.

Che poi $z_{0,1}$, $z_{-1,1}$, $z_{-2,1}$ siano eguali a zero, si dimostrerà così.

Siccome le quantità $z_{0,1}$, $z_{0,2}$, $z_{0,3}$ ec. indicano le maniere nelle quali un numero zero di lettere può avere la somma degli esponenti eguali ad $1, 2, 3$ ec., così esse saranno tutte nulle.

Se dunque nella serie che rappresenta il valore di $z_{x,y+1}$ facciamo $x = 0$, ed $y = 1, 2, 3$ ec., avremo

$$z_{0,2} = z_{0,1} + z_{-1,1}$$

$$z_{0,3} = z_{0,2} + 2z_{-1,1} + z_{-2,1}$$

$$z_{0,4} = z_{0,3} + 3z_{-1,1} + 3z_{-2,1} + z_{-3,1}$$

ec. ec.

le quali equazioni ci danno ancora $z_{-1,1} = z_{-2,1} = z_{-3,1} =$ ec. $= 0$.

Sia per es. $y = 5$, $x = 3$, ed avremo

$z_{3,5} = \frac{4.3}{2} = 6$: infatti quando si hanno tre lettere a, b, c non può la somma dei loro esponenti essere eguale a 5 che in una di queste sei maniere

$a^1b^1c^3$; $a^1b^3c^1$; $a^3b^1c^1$; $a^1b^2c^2$; $a^2b^1c^2$; $a^2b^2c^1$;

se poi gli esponenti p, q, r ec. che abbiamo supposti maggiori di

zero, volessero prendersi anche eguali a zero, allora con uno stesso ragionamento, rappresentando per $z_{x,y}$ il ricercato numero di maniere, si troverebbe, per risolvere il Problema, questa equazione

$$z_{x,y} = z_{x-1,y} + z_{x,y-1},$$

il cui integrale sarebbe

$$z_{x,y} = \frac{(y+1)(y+2)\ldots\ldots(y+x-1)}{2.3.4\ldots\ldots(x-1)}.$$

Ecco il ragionamento che ci conduce alla suddetta equazione: facciamo $p = 0$, ed il ricercato numero di maniere sarà eguale al numero delle maniere nelle quali può essere $0 + q + r + s +$ ec. $= y$ che è indicato da $z_{x-1,y}$, più il numero di maniere, nelle quali può essere

$1 + q + r + s +$ ec. $= y$ ovvero $0 + q + r + s +$ ec. $= y - 1$

$2 + q + r + s +$ ec. $= y$ . . . . $1 + q + r + s +$ ec. $= y - 1$

$3 + q + r + s +$ ec. $= y$ . . . . $2 + q + r + s +$ ec. $= y - 1$

ec. ec.

che è evidentemente $z_{x,y-1}$, e perciò $z_{x,y} = z_{x-1,y} + \ldots\ldots z_{x,y-1}$.

§. 96. La sostituzione di $\alpha^x\beta^y$ invece di $z_{x,y}$ nella equazione generale a differenze finite e parziali del grado n riportata al §. 92. ci dà una equazione, la quale ordinata secondo le potenze di β è della seguente forma

$$(1) \ldots\ldots A\beta^y + A1.\beta^{y+1} + A2.\beta^{y+2} + \ldots\ldots + A(n).\beta^{y+n} = 0:$$

ovvero ordinata secondo le potenze di α, è di questa altra forma

$$(2) \ldots\ldots B\alpha^x + B1.\alpha^{x+1} + B2.\alpha^{x+2} + \ldots\ldots + B(n).\alpha^{x+n} = 0$$

e queste due equazioni non sono in sostanza che la medesima.

Ora la prima dà n valori diversi per β espressi in α, e siano β, β', β'' ec., e la seconda dà n diversi valori di α espressi in β, e siano α, α', α'' ec., così di qualunque ci serviamo di queste equazioni, avremo sempre n espressioni diverse di $\alpha^x\beta^y$, e perciò di $z_{x,y}$. In ciascuna di queste espressioni introducendo con l' artifizio di cui sopra ci siamo serviti, una funzione arbitraria, la somma di quelle medesime espressioni darà l' integrale completo dell' equazione proposta. Ma se l' equazione fra α e β avesse alcune delle radici eguali, è evidente che il numero delle espressioni diverse di $\alpha^x\beta^y$ scemerebbe di tante unità quanto è il numero delle radici eguali meno una, e che in conseguenza l' integrale sarebbe incompleto. Vediamo come si potrà ricompletare il numero di queste espressioni diverse.

Avvertiamo prima che se l' equazione (1) ha un numero m di radici eguali in α, cioè se $\beta = \beta' = \beta'' = \ldots\ldots = \beta^{(m-1)}$, l' equazione (2) avrà il medesimo numero di radici eguali in β, cioè $\alpha = \alpha' = \alpha'' = \ldots\ldots = \alpha^{(m-1)}$.

Ora se nell' equazione (1) due radici per esempio β, β' sono eguali, una di queste soddisfa come si è detto (§. 65. e segg. Cap. III.) nel medesimo tempo a quella equazione e a questa (1)'

$$(1)' \ldots y A\beta^{y-1} + (y+1)A1.\beta^y + (y+2)A2.\beta^{y+1} + \ldots\ldots$$
$$+ (y+n)A(n).\beta^{y+n-1} = 0;$$

e se tre sono le radici eguali β, β', β'', una di queste soddisfarà nel medesimo tempo alle due equazioni (1), (1)' superiori, e a questa (1)''

$$(1)'' \ldots y(y-1)A\beta^{y-2} + (y+1)yA1.\beta^{y-1} + \ldots\ldots\ldots$$
$$+ (y+n)(y+n-1)A(n).\beta^{y+n-2} = 0$$

e così di seguito.

L' equazione (1)' è ricavata dall' equazione (1) moltiplicando ciascun termine di questa ultima equazione per l' esponente che vi ha β, e quindi dividendo per β, e nella medesima guisa si ricava l' equazione (1)'' dall' equazione (1)'. E siccome se sono eguali tre radici β, β', β'' dell' equazione (1), lo sono anche tre $\alpha, \alpha', \alpha''$ dell' equazione (2); così una di queste soddisfarà nel tempo stesso

all' equazione (2) ed alle seguenti (2)', (2)''

$$(2)' \ldots xB\alpha^{x-1} + (x+1)B1.\alpha^x + (x+2)B2.\alpha^{x+1} + \ldots\ldots$$
$$+ (x+n)B(n).\alpha^{x+n-1} = 0$$

$$(2)'' \ldots x(x-1)B\alpha^{x-2} + (x+1)xB1.\alpha^{x-1} + \ldots\ldots\ldots$$
$$+ (x+n)(x+n-1)B(n).\alpha^{x+n-2} = 0;$$

e perciò le sei equazioni (1), (1)', (1)'', (2), (2)', (2)'' saranno sempre soddisfatte nel medesimo tempo da una delle radici eguali.

Si vede adunque che se due sono le radici eguali dell' equazione (1), soddisfà alla proposta tanto $z_{x,y} = \alpha^x\beta^y$, quanto $z_{x,y} = y\alpha^x\beta^{y-1}$, purchè β sia una di queste due radici eguali; infatti sostituito questo secondo valore nell' equazione generale del §. 92., esso la muta nell' equazione (1)' che è soddisfatta egualmente; così nel caso di tre radici eguali, potranno prendersi per $z_{x,y}$ queste tre espressioni

$$z_{x,y} = \alpha^x\beta^y,$$
$$z_{x,y} = y\alpha^x\beta^{y-1}$$
$$z_{x,y} = y(y-1)\alpha^x\beta^{y-2}$$

essendo β una di queste tre radici eguali: poichè questo ultimo valore sostituito nell' equazione del §. 92., la riduce all' equazione (1)'' che è soddisfatta da una di quelle stesse radici eguali nello stesso tempo che lo è l' equazione (1).

Se le radici eguali fossero quattro, avremmo anche

$z_{x,y} = y(y-1)(y-2)\alpha^x\beta^{y-3}$ e così di seguito; e siccome le espressioni di $z_{x,y}$ possono essere moltiplicate per una costante qualunque C, la quale entrando come moltiplicatore in tutti i termini dell' equazione del §. 92., svanisce e rimane indeterminata; così se questa costante si suppone eguale all' unità nel primo valore di $z_{x,y}$, eguale a β nel secondo, a β^2 nel terzo ec., avremo per $z_{x,y}$ nel caso delle radici eguali, le seguenti espressioni

$\alpha^x\beta^y$, $y\alpha^x\beta^y$, $y(y-1)\alpha^x\beta^y$, $y(y-1)(y-2)\alpha^x\beta^y$ ec.

Facendo per α il medesimo ragionamento, è manifesto che avremo ancora quest'altre espressioni per $z_{x,y}$, $\alpha^x\beta^y$, $x\alpha^x\beta^y$, $x(x-1)\alpha^x\beta^y$, $x(x-1)(x-2)\alpha^x\beta^y$ ec.

Si potrebbero ancora trovare altri valori per $z_{x,y}$ nel caso delle radici eguali. Infatti quando le radici eguali sono tre $\beta=\beta'=\beta''$, $\alpha=\alpha'=\alpha''$ ec. è manifesto che l'equazione $(1)'$ conterrà due di queste radici eguali a β; e perciò ordinata per α, ancora due radici eguali ad α.

Se ora in questa equazione $(1)'$ ordinata che sia per le potenze di α si moltiplicano i termini per gli esponenti x, $x+1$ ec., $x+n$ di quelle potenze medesime di α, avremo una equazione (a) che sarà soddisfatta nel medesimo tempo che le equazioni $(1),(1)'$, e si vedrà facilmente che se facciamo $z_{x,y}=xy\alpha^x\beta^y$, e sostituiamo un tal valore di $z_{x,y}$ nella proposta, sarà essa trasformata nell'equazione (a), la quale essendo soddisfatta da una delle radici eguali, ci mostra essere $xy\alpha^x\beta^y$ un'altra espressione della variabile $z_{x,y}$: queste diverse espressioni serviranno sempre a ridurre completo l'integrale della proposta quando le radici eguali lo avranno ridotto incompleto.

Sia per esempio da integrarsi l'equazione

$$z_{x,y}=\frac{1}{4}z_{x-1,y+1}+z_{x+1,y-1}.$$

Facendo in questa equazione crescere la x e la y d'un'unità e moltiplicandola tutta per 4, avremo

$$z_{x,y+2}-4z_{x+1,y+1}+4z_{x+2,y}=0$$

equazione del secondo ordine.

Paragonata questa equazione con quella del §. 92. del secondo ordine, abbiamo $A=B=B'=0$, $C=4$, $C'=-4$, $C''=1$, onde l'equazione da risolversi è $\beta^2=-4\beta\alpha+4\alpha^2$, la quale dà per β due valori eguali 2α; e se β', β'' rappresentano i due valori di β, s'avrà $\beta'=\beta''=2\alpha$.

Dunque secondo ciò che abbiamo detto quì sopra (93) per il caso nel quale l'equazione fra α e β di secondo grado è divisibile in due fattori di primo della forma $\beta-a'\alpha$, $\beta'-a''\alpha$, si ha

$$z_{x,y}=a'^y\varphi'(x+y)+a''^y\varphi''(x+y):$$

ma per noi essendo $a'=a''=2$, avremo

$$z_{x,y}=2^y(\varphi'(x+y)+\varphi''(x+y)).$$

Ora le due funzioni $\varphi'(x+y)$, $\varphi''(x+y)$ essendo arbitrarie, possiamo rappresentare per una funzione arbitraria $\varphi(x+y)$ la somma $\varphi'(x+y)+\varphi''(x+y)$; e per questo sarà $z_{x,y}=2^y\varphi(x+y)$, integrale incompleto, poichè contiene una sola funzione arbitraria.

Noi abbiamo sopra veduto che nel caso di due radici eguali oltre all'espressione $\alpha^x\beta^y$ soddisfà alla proposta equazione anche $y\alpha^x\beta^y$, e perciò facendo $\beta=2\alpha$, soddisfarà alla nostra equazione $y.2^y.\alpha^{x+y}$, ovvero $y.2^y\varphi'(x+y)$ essendo $\varphi'(x+y)$ una funzione arbitraria diversa da $\varphi(x+y)$: questa ultima espressione per $z_{x,y}$ sarà un altro integrale particolare, e se prendiamo l'aggregato di questi due integrali particolari, avremo l'integrale completo di quella proposta equazione espresso da

$$z_{x,y}=2^y\varphi(x+y)+2^y.y\varphi'(x+y).$$

§. 97. Noi abbiamo promesso alla fine del §. 94. di dare un metodo generale per integrare in termini finiti l'equazioni a differenze finite e parziali di qualunque ordine: ecco in che cosa consiste questo metodo.

L'equazione differenziale dell'ordine n^{esimo} riportata al §. 92.

allorchè vi si fa $z_{x,y} = \alpha^x \beta^y$, ci conduce alla seguente equazione del grado n^{esimo} fra α e β

$$
(1)\ldots\quad \left.\begin{array}{l}
A + B\alpha + C\alpha^2 + \ldots\ldots + N\alpha^n \\
\quad + B'\beta + C'\alpha\beta + \ldots\ldots + N'\alpha^{n-1}\beta \\
\qquad + C''\beta^2 + \ldots\ldots + N''\alpha^{n-2}\beta^2 \\
\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad + N^{(n)}\beta^n
\end{array}\right\} = 0
$$

Per mezzo di questa equazione si può determinare β per α, ovvero α per β: supponghiamo che si determini β per α.

Siccome in generale non possiamo esprimere β in potenze di α che per una serie infinita, non potremo perciò avere il valore di β^y che espresso per una serie parimente infinita: ora si osservi che può ridursi questo valore di β^y ad una serie razionale e finita di termini ordinati secondo le potenze di α, purchè vi si ammettano le potenze di β inferiori a β^n; poichè se si prende il valore di β^n dato per l'equazione precedente, esso sarà espresso per le potenze β^{n-1} e sue inferiori: se questa espressione si moltiplica per β, s'avrà per β^{n+1} una espressione che conterrà β^n e le sue potenze inferiori, nella quale sostituendo l'espressione trovata per β^n, verrà per β^{n+1} una espressione che conterrà le potenze β^{n-1} e le sue inferiori; l'espressione trovata per β^{n+1} moltiplicata per β, (sostituendovi per β^n il suo valore) ci darà β^{n+2} in α ed in β; ma le potenze del β non saranno maggiori di β^{n-1}: continuando questo ragionamento si vede che potremo avere qualunque potenza

β^y espressa per una funzione algebraica finita e razionale di α e β, nella quale le potenze di β non passeranno le $n - 1^{esime}$; tal potenza dunque avrà questa forma

$$
(2)\ldots\quad \begin{array}{l}
\beta^y = T + T'\alpha + T''\alpha^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad + T^y\alpha^y \\
\quad + T1.\beta + T1'.\alpha\beta + T1''.\alpha^2\beta + \ldots\ldots\ldots \\
\qquad + T1^{(y-1)}.\alpha^{y-1}\beta \\
\quad + T2.\beta^2 + T2'.\alpha\beta^2 + T2''.\alpha^2\beta^2 + \ldots\ldots\ldots \\
\qquad + T2^{(y-2)}.\alpha^{y-2}\beta^2 \\
\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad + \ldots\ldots \\
\quad + T(n-1).\beta^{n-1} + T(n-1)'.\alpha\beta^{n-1} + \ldots\ldots \\
\qquad + T(n-1)^{(y-n+1)}.\alpha^{y-n+1}\beta^{n-1};
\end{array}
$$

ove i coefficienti T, T', T'' ec., $T1'$ ec., saranno delle funzioni razionali date di y e dei coefficienti dell'equazione proposta.

Se questa espressione di β^y si moltiplica per α^x avremo l'espressione finita di $\beta^y\alpha^x$ che sarà il valore di $z_{x,y}$ così espresso

$$
\begin{array}{l}
z_{x,y} = T\alpha^x + T'.\alpha^{x+1} + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad + T^{(y)}.\alpha^{x+y} \\
\quad + T1.\alpha^x\beta + T1'.\alpha^{x+1}\beta + \ldots\ldots\ldots \\
\qquad + T1^{(y-1)}.\alpha^{x+y-1}\beta \\
\quad + T2.\alpha^x\beta^2 + T2'.\alpha^{x+1}\beta^2 + \ldots\ldots\ldots \\
\qquad + T2^{(y-2)}.\alpha^{x+y-2}\beta^2
\end{array}
$$

$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$+ \ldots \ldots \ldots$

$$+ T(n-1).\alpha^x\beta^{n-1} + T(n-1)'.\alpha^{x+1}\beta^{n-1} + \ldots\ldots$$

$$+ T(n-1)^{(y-n+1)}\alpha^{x+y-n+1}\beta^{n-1}.$$

Il valore adunque di $z_{x,y}$ sarà di questa forma

$$z_{x,y} = A\beta^0 + B\beta^1 + C\beta^2 + \ldots\ldots\ldots + P\beta^{n-1}.$$

Se si fa $\beta = 0$, s'avrà $z_{x,y} = A$; e questo valore di $z_{x,y}$ soddisfà alla proposta, la quale per essere lineare, sarà anche soddisfatta da

$z_{x,y} = B\beta + C\beta^2 + \ldots\ldots\ldots + P\beta^{n-1}$, ovvero da

$z_{x,y} = B + C\beta + \ldots\ldots\ldots + P\beta^{n-2}$; poichè tutti i termini contenendo z, la potenza prima di β entrerà come moltiplicatore in tutta l'equazione, e non influirà nulla nella di lei identicità.

Facendo in quest'ultima espressione di $z_{x,y}$, $\beta = 0$, avremo $z_{x,y} = B$, ed ancora questo valore di $z_{x,y}$ soddisfarà alla proposta: continuando il medesimo ragionamento, proveremo che possiamo soddisfare alla proposta prendendo $z_{x,y}$ eguale a qualunque dei coefficienti delle diverse potenze di β: ovvero eguale a qualunque di quei coefficienti moltiplicati per la respettiva potenza di β, la quale entrerà come semplice moltiplicatore in tutta l'equazione.

Dunque $z_{x,y} = Tm.\alpha^x\beta^m + T'm.\alpha^{x+1}\beta^m + \ldots\ldots\ldots$

$$+ T^{(y-1)}m.\alpha^{x+y-1}\beta^m$$

sarà un valore particolare di $z_{x,y}$ qualunque sia α.

Questa espressione di $z_{x,y}$, secondo ciò che è detto al §. 86., cangiasi in quest'altra

$$z_{x,y} = Tm.fm(x) + T'm.fm(x+1) + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ T^{(y-1)}m.fm(x+y-1)$$

essendo $fm(x)$ una funzione arbitraria di x; se facciamo ora lo stesso ragionamento per qualunque termine dell'espressione generale di $z_{x,y}$, avremo

$$z_{x,y} = T.f(x) + T'.f(x+1) + T''.f(x+2) + \ldots\ldots$$
$$+ T^{(y)}.f(x+y)$$
$$+ T1.f1(x) + T1'.f1(x+1) + \ldots\ldots\ldots$$
$$+ T1^{(y-1)}.f1(x+y-1)$$
$$+ T2.f2(x) + T2'.f2(x+1) + \ldots\ldots\ldots$$
$$+ T2^{(y-2)}.f2(x+y-2)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$
$$+ T(n-1).f(n-1)(x) + T(n-1)'.f(n-1)(x+1) + \ldots$$
$$+ T(n-1)^{(y-n+1)}.f(n-1)(x+y-n+1);$$

le funzioni arbitrarie contenute in questa formula sono di numero n. Esse sono arbitrarie ed indipendenti fra loro.

§. 98. Per determinare frattanto i valori di queste funzioni, io suppongo che siano conosciuti tutti i differenti valori di $z_{x,0}$, $z_{x,1}$, $z_{x,2}$, $z_{x,3}$ ec., $z_{x,n-1}$, cioè a dire tutti i valori di $z_{x,y}$, quando $y = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots n-1$. Se l'equazione da integrarsi appartiene ad una serie *Recurro-Recurrente*, quella supposizione richiede che siano date le n prime file orrizzontali della Tavola §. 87. che la rappresenta.

Facendo $y = 0$, abbiamo $\beta^y = 1$; dunque dalla formula (2) del §. antecedente ricaveremo $T = 1$, $T' = 0$ ec., $T1 = 0$ ec; facendo $y = 1$, abbiamo $\beta^y = \beta$, dunque $T1 = 1$, e tutti gli altri coefficienti sono nulli; facendo $y=2$, si ha $\beta^y=\beta^2$; dunque $T2=1$, e gli altri coefficienti nulli, e così di seguito.

Dunque se facciamo $y=0$ nella formula trovata per $z_{x,y}$, avremo $z_{x,0}=f(x)$; se facciamo $y=1$, avremo $z_{x,1}=f1(x)$; se si fa $y=2$, s' avrà

$z_{x,2}=f2(x)$ e così di seguito fino a $z_{x,n-1}=f(n-1)(x)$.

Si conoscono per tanto con questo mezzo tutte le funzioni arbitrarie, i valori delle quali sostituiti nella formula generale, ci danno

$$
\begin{aligned}
z_{x,y} = {} & Tz_{x,0}+T'z_{x+1,0}+ \ldots \ldots \ldots \ldots \\
& +T^{(y)}z_{x+y,0} \\
& +T1.z_{x,1}+T1'.z_{x+1,1}+ \ldots \ldots \ldots \ldots \\
& +T1^{(y-1)}.z_{x+y-1,1} \\
& + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
& + \ldots \ldots \ldots \\
& +T(n-1).z_{x,n-1}+T.(n-1)'z_{x+1,n-1}+ \ldots \ldots \\
& +T(n-1)^{(y-n+1)}.z_{x+y-n+1,n-1}.
\end{aligned}
$$

Vediamo adesso come possono determinarsi i coefficienti T, T' ec., T1, T1' ec.

Se dall' equazione (1) del §. 97., ricaviamo il valore di β in α, e ne facciamo la sostituzione nell' equazione (2), e dopo avere ordinati i termini secondo le potenze di α, facciamo eguali a zero i coefficienti delle stesse potenze, avremo una serie d' equazioni, per le quali potranno determinarsi i coefficienti ricercati T, T' ec., T1, T1' ec.

La considerazione delle differenti radici dell' equazione può ancora semplicizzare questo metodo: infatti se diamo all' equazione (2) questa forma

$\beta^y=A+A1.\beta+A2.\beta^2+\ldots\ldots+A(n-1).\beta^{n-1}$, A es-

sendo un numero polinomio in α del grado y; A1 un altro polinomio in α del grado $y-1$, e così di seguito, e indichiamo per β', β'' ec., le n radici dell' equazione (1) ordinata per rapporto a β, s' avranno queste n equazioni differenti

$$
\begin{aligned}
\beta'^y &= A+A1.\beta'+A2.\beta'^2+\ldots\ldots+A(n-1).\beta'^{n-1} \\
\beta''^y &= A+A1.\beta''+A2.\beta''^2+\ldots\ldots+A(n-1).\beta''^{n-1} \\
& \text{ec.} \qquad\qquad \text{ec.}
\end{aligned}
$$

Per mezzo delle quali si determineranno separatamente le n quantità A, A1, A2 ec. in β', β'' ec.; allora servirà sostituire in luogo di β', β'' ec., i loro valori in α ridotti in serie ascendente e spinti solamente fino alla y^{esima} potenza per la quantità A, fino alla $(y-1)^{esima}$ per la quantità A1, e così di seguito.

§. 99. Ma per fare una applicazione di questa Teorìa, supponghiamo che l' equazione da integrarsi sia di secondo grado, quella cioè che abbiamo proposta al §. 88.: avremo allora $n=2$, e perciò l' espressione del §. 97., per $z_{x,y}$, sarà

$$
\begin{aligned}
z_{x,y} = {} & T.f(x)+T'f(x+1)+T''f(x+2)+ \ldots \ldots \\
& +T^{(y)}f(x+y) \\
& +T1.f1(x)+T1'.f1(x+1)+T1''.f1(x+2)+ \ldots \\
& +T1^{(y-1)}.f1(x+y-1)
\end{aligned}
$$

la quale ne rappresenterà l' integrale completo.

Per determinare i coefficienti T, T' ec., secondo ciò che abbiamo detto al §. antecedente, avremo

$\beta^y=A+A1.\beta$, nella quale è

$A=T+T'\alpha+T''\alpha^2+\ldots\ldots+T^{(y)}\alpha^y$

$A1=T1+T1'.\alpha+T1''.\alpha^2+\ldots\ldots+T1^{(y-1)}.\alpha^{y-1}$: ora al §. 92. abbiamo trovato per β', β'' due valori di questa forma

$\beta'=a\alpha+b+\sqrt{[m\alpha^2+n\alpha+p]}$

$\beta''=a\alpha+b-\sqrt{[m\alpha^2+n\alpha+p]}$, i quali ci danno queste due equazioni

$\beta'^{y} = \mathrm{A} + \mathrm{A}1 \,.\, \beta'$

$\beta''^{y} = \mathrm{A} + \mathrm{A}1 \,.\, \beta''$, da cui si ricava

$$\mathrm{T} + \mathrm{T}'\alpha + \mathrm{T}''\alpha^2 + \dots\dots + \mathrm{T}^{(y)}\alpha^{y} = \mathrm{A} = \frac{\beta''\beta'^{y} - \beta'\beta''^{y}}{\beta'' - \beta'}$$

$$\mathrm{T}1 + \mathrm{T}1'.\alpha + \mathrm{T}1''.\alpha^2 + \dots\dots + \mathrm{T}1^{(y-1)}.\alpha^{y-1} = \mathrm{A}1 = \frac{\beta'^{y} - \beta''^{y}}{\beta' - \beta''}.$$

Ora sostituendo i valori di β', β'', sviluppiamo i secondi membri in serie secondo le potenze di α, e siano questi sviluppi

$$a + a'\alpha + a''\alpha^2 + \dots\dots + a^{(y)}\alpha^{y} + a^{(y+1)}\alpha^{y+1} + \text{ec.}$$

$b + b'\alpha + b''\alpha^2 + \dots\dots + b^{(y)}\alpha^{y} + b^{(y+1)}\alpha^{y+1} +$ ec. (le quantità a, a' ec. b, b' ec. sono funzioni cognite di y che si determinano per mezzo della formula Neutoniana) : è chiaro che la prima serie continuata fino alla potenza α^{y} inclusive, ci darà il valore di A; e che la seconda continuata fino alla potenza α^{y-1} inclusive, ci darà il valore di A1; quindi per il paragone delle potenze omologhe di α avremo $\mathrm{T} = a$, $\mathrm{T}' = a'$ ec. $\mathrm{T}1 = b$, $\mathrm{T}1' = b'$ ec.

Per farne un esempio prendiamo a risolvere l' equazione

$$z_{x,y+2} - 5z_{x+1,y+1} + 6z_{x+2,y} = 0:$$

facendo $z_{x,y} = \alpha^{x}\beta^{y}$, s' avrà fra α e β quest' equazione da risolversi $\beta^2 - 5\alpha\beta + 6\alpha^2 = 0$, la quale si scioglie in questi due fattori $\beta - 2\alpha$, $\beta - 3\alpha$, e perciò secondo ciò che è detto al §. 93., abbiamo per il di lei integrale

$z_{x,y} = 3^{y}\varphi(x+y) + 2^{y}\varphi'(x+y)$, il quale è completo perchè contiene due funzioni arbitrarie.

Se si adoprasse il metodo superiore, facendo $\beta' = 2\alpha$, $\beta'' = 3\alpha$, avremmo

$\mathrm{A} = \frac{(3.2^{y} - 2.3^{y})\alpha^{y+1}}{3\alpha - 2\alpha}$, $\mathrm{A}1 = \frac{(3^{y} - 2^{y})\alpha^{y}}{3\alpha - 2\alpha}$, cioè

$\mathrm{A} = (3.2^{y} - 2.3^{y})\alpha^{y}$, $\mathrm{A}1 = (3^{y} - 2^{y})\alpha^{y-1}$; è dunque evidente che

$\mathrm{T} = \mathrm{T}' = \mathrm{T}'' = \text{ec.} = 0$, $\mathrm{T}^{(y)} = 3.2^{y} - 2.3^{y}$,

$\mathrm{T}1 = \mathrm{T}1' = \mathrm{T}1'' = \text{ec.} = 0$, $\mathrm{T}1^{(y-1)} = 3^{y} - 2^{y}$, e perciò l' integrale completo secondo questo metodo, sarà

$z_{x,y} = \mathrm{T}^{(y)}.f(x+y) + \mathrm{T}1^{(y-1)}.f1(x+y-1)$; ponendo ora per $\mathrm{T}^{(y)}$, $\mathrm{T}1^{(y-1)}$ i di loro valori, avremo l' integrale

$z_{x,y} = (3.2^{y} - 2.3^{y})f(x+y) + (3^{y} - 2^{y})f1(x+y-1)$, il quale è completo perchè contiene due funzioni arbitrarie.

Facilmente si vede che a questo integrale può darsi la stessa forma di quello trovato quì sopra col metodo del §. 93: in fatti essendo

$z_{x,y} = 3^{y}(f1(x+y-1) - 2f(x+y)) + 2^{y}(3f(x+y) - f1(x+y-1))$, se ponghiamo per $f1(x+y-1) - 2f(x+y)$ un' altra funzione $\varphi(x+y)$; e per $3f(x+y) - f1(x+y-1)$ una funzione $\varphi'(x+y)$, avremo

$z_{x,y} = 3^{y}\varphi(x+y) + 2^{y}\varphi'(x+y)$, come sopra.

§. 100. Passiamo adesso a parlare delle equazioni lineari a differenze finite e parziali a più funzioni variabili $z_{x,y}$, $u_{x,y}$, $\omega_{x,y}$, ec. Se fra queste funzioni si hanno tante equazioni quante sono quelle funzioni medesime, ecco come possiamo integrarle.

Facciamo $z_{x,y} = \alpha^{x}\beta^{y}$, $u_{x,y} = a\alpha^{x}\beta^{y}$, $\omega_{x,y} = b\alpha^{x}\beta^{y}$, ec. essendo a, b ec. costanti da determinarsi; sostituendo questi valori nelle equazioni che saranno proposte, e dividendole ciascuna per il fattore comune $\alpha^{x}\beta^{y}$, avremo in α, β, a, b ec. tante equazioni, quante sono le costanti a, b ec. più una; se adunque per mezzo di queste equazioni s'elimineranno queste stesse costanti, la qual cosa facilmente può eseguirsi perchè dette costanti vi sono sotto la forma lineare, avremo una equazione finita fra α e β, la quale servirà a determinare una di queste costanti α, β per mezzo dell'altra. Potremo adunque trovare, secondo ciò che è stato detto sopra, il valore di $\alpha^x\beta^y$ e perciò l'espressione completa per $z_{x,y}$; moltiplicando in seguito quest'espressione per a, b ec., s'avranno le espressioni di $u_{x,y}$, $\omega_{x,y}$ ec.

Noi rimandiamo i nostri Leggitori all'Opera del Sig. La-Grange citata (§. 86.).

A questa istessa Opera gli rimandiamo per l'integrazione delle equazioni a differenze finite fra quattro variabili $x, y, u, z_{x,y,u}$ ed è certo che avendo ben compreso ciò che è detto sopra, essi non troveranno alcuna difficoltà nel comprendere tutto quello che riguarda l'integrazione di tali equazioni; solo quì parleremo di una equazione del primo ordine.

Per integrare l'equazione

$$Az_{x,y,u} + Bz_{x+1,y,u} + Cz_{x,y+1,u} + Dz_{x,y,u+1} = 0.$$

Facciamo $z_{x,y,u} = C\alpha^x\beta^y\gamma^u$; α, β, γ, C sono quantità costanti da determinarsi, e sostituendo il valore di $z_{x,y,u}$ nella proposta, avremo dopo averla divisa per $C\alpha^x\beta^y\gamma^u$, $A + B\alpha + C\beta + D\gamma = 0$, dalla quale si ricava $\gamma = a + b\alpha + c\beta$, avendo fatto $-\frac{A}{D} = a$, $-\frac{B}{D} = b$, $-\frac{C}{D} = c$: sarà dunque $z_{x,y,u} = C\alpha^x\beta^y(a + b\alpha + c\beta)^u$.

Ora svolgendo la quantità $(a + b\alpha + c\beta)^u$ in una serie ordinata per le potenze ed i prodotti di α e β, e moltiplicando la suddetta serie per $C\alpha^x\beta^y$, avremo per $z_{x,y,u}$ una espressione di questa forma

$$\begin{aligned}
z_{x,y,u} = {} & CT\alpha^x\beta^y + CT'\alpha^{x+1}\beta^y + \dots\dots\dots\dots \\
& \quad + CP\alpha^{x+u}\beta^y \\
& + CT1.\alpha^x\beta^{y+1} + CT1'.\alpha^{x+1}\beta^{y+1} + \dots\dots\dots \\
& \quad + CP1.\alpha^{x+u-1}\beta^{y+1} \\
& + CT2.\alpha^x\beta^{y+2} + CT2'.\alpha^{x+1}\beta^{y+2} + \dots\dots\dots \\
& \quad + CP2.\alpha^{x+u-2}\beta^{y+2} \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& \quad + \dots\dots\dots\dots \\
& + CT(u).\alpha^x\beta^{y+u}.
\end{aligned}$$

Rimanendo indeterminate le quantità C, α, β e l'equazione essendo lineare, potrà prendersi per $z_{x,y,u}$ la somma di un numero qualunque di simili espressioni, cangiando a piacere i valori di C, α, e β. Di quì si ricava per mezzo di un ragionamento simile a quello del §. 86. che può sostituirsi ad un prodotto $C\alpha^t\beta^\omega$ una funzione arbitraria $\varphi(t, u)$ delle due quantità t, e ω: sarà allora l'espressione generale di $z_{x,y,u}$

$$\begin{aligned}
z_{x,y,u} = {} & T\varphi(x,y) + T'\varphi(x+1,y) + \dots\dots\dots \\
& \quad + P\varphi(x+u,y) \\
& + T1\varphi(x,y+1) + T1'\varphi(x+1,y+1) + \dots\dots \\
& \quad + P1.\varphi(x+u-1,y+1) \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& \quad + \dots\dots\dots\dots \\
& + T(u)\varphi(x,y+u),
\end{aligned}$$

che rappresenterà l'integrale completo della proposta, perchè contiene la funzione arbitraria $\varphi(x,y)$.

Allorchè scioglieremo alcuni Problemi che dipendono da simili equazioni a differenze parziali, ci tratterremo sopra i dettagli di questo metodo, i quali d'altr' onde non hanno alcuna difficoltà.

Ci contenteremo quì di far osservare che le formule generali per le combinazioni (§. 24.) dipendono dall' integrazione di queste equazioni. Così per sapere quante sono le combinazioni, o in quante maniere si può dividere un numero x di lettere in tre parti tali che la prima ne contenga un numero y, la seconda un numero u, s' avrà per risolvere il Problema questa equazione

$$z_{x+1,y,u} = z_{x,y,u} + z_{x,y-1,u} + z_{x,y,u-1};$$

indicando per $z_{x,y,u}$ ciò che si cerca.

Se quel numero di lettere dovesse dividersi in quattro parti di cui la prima ne contenesse un numero y; la seconda un numero u; la terza un numero ω, allora indicando per $z_{x,y,u,\omega}$ ciò che si ricerca, avrebbesi l' equazione

$$z_{x+1,y,u,\omega} = z_{x,y,u,\omega} + z_{x,y-1,u,\omega} + z_{x,y,u-1,\omega} + \dots \; z_{x,y,u,\omega-1}:$$

e così di seguito per un maggior numero di parti.

Sarà bene che i nostri leggitori s' esercitino ad integrare quest' equazioni, onde ottenere direttamente le formule date per induzione a quel §.

§. 101. Sia ora da integrarsi l' equazione

$$\left.\begin{array}{l} Az_{x,y} + Bz_{x+1,y} + \dots\dots\dots + Pz_{x+n,y} \\ \quad + B'z_{x,y+1} + \dots\dots\dots + P'z_{x+n-1,y+1} \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad + P^{(n)}z_{x,y+n} \end{array}\right\} = X$$

nella quale A, B ec. P, P' ec., X si suppongono funzioni date della variabile x.

Facciamo in questo caso $z_{x,y} = \alpha_x \beta^y + u_x$, essendo α_x, u_x

due funzioni di x da determinarsi e β una costante indeterminata; ed avremo per determinare α_x una equazione di questa forma

$$(1) \dots A1_x . \alpha_x + B1_x . \alpha_{x+1} + C1_x . \alpha_{x+2} + \dots + P1_x . \alpha_{x+n} = 0$$

nella quale

$$A1_x = A + B'\beta + C''\beta^2 + \dots\dots\dots + P^{(n)}\beta^n$$

$$B1_x = B + C'\beta + \dots\dots\dots\dots + P^{(n-1)}\beta^{n-1}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P1_x = P:$$

e per determinare u_x un' altra equazione di questa forma

$$(2) \dots A2_x . u_x + B2_x . u_{x+1} + C2_x . u_{x+2} + \dots + P2_x . u_{x+n} = X$$

nella quale

$$A2_x = A + B' + C'' + \dots\dots\dots + P^{(n)}$$

$$B2_x = B + C' + \dots\dots\dots + P^{(n-1)}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P2_x = P.$$

L' equazioni (1), (2) superano le attuali forze dell' Analisi, come è stato dimostrato nel Capitolo antecedente.

Si vede però che l' integrazione delle equazioni a differenze finite e parziali a coefficienti funzioni di una variabile, dipende dall' integrazione delle equazioni a differenze finite ordinarie a coefficienti variabili, di modo che ogni passo fatto nell' integrazione di queste, ne porta uno nell' integrazione di quelle; così i Teoremi del §. 70. hanno luogo anche per quest' equazioni.

Se all' equazione manchino quei termini, nei quali gli aumenti della x sono maggiori dell' unità, se è cioè

$$\left.\begin{array}{l} Az_{x,y} + B'z_{x,y+1} + C''z_{x,y+2} + \ldots\ldots\ldots \\ \qquad + P^{(n)}z_{x,y+n} \\ + Bz_{x+1,y} + C'z_{x+1,y+1} + \ldots\ldots\ldots \\ \qquad + P^{(n-1)}z_{x+1,y+n-1} \end{array}\right\} = X;$$

allora le due equazioni (1), (2) diverranno

$$A1_x . \alpha_x + B1_x . \alpha_{x+1} = 0, \text{ e } A2_x . u_x + B2_x . u_{x+1} = X.$$

Dalla seconda di queste due equazioni abbiamo facilmente il valore di u_x per ciò che è detto al §. 46.

Rapporto poi alla prima, essa contiene nei suoi coefficienti l' indeterminata β, della quale ci serviremo per introdurre nell' integrale una funzione arbitraria.

Infatti facendo $- A1_x : B1_x = m_x$ è (§. 45.)

$\alpha_x = Cm_{x-1} . m_{x-2} . m_{x-3} \ldots\ldots\ldots m_2 . m_1$, essendo C una costante arbitraria e perciò $z_{x,y} = C\beta^y . m_{x-1} . m_{x-2} \ldots\ldots m_2 . m_1 + u_x$. Ora essendo

$$m_x = -\frac{A1_x}{B1_x} = \frac{A + B'\beta + C''\beta^2 + \ldots\ldots + P^{(n)}\beta^n}{B + C'\beta + \ldots\ldots + P^{(n-1)}\beta^{n-1}},$$

riduciamo in serie secondo le potenze di β, l' espressione

$m_{x-1} . m_{x-2} . m_{x-3} \ldots\ldots\ldots m_2 . m_1$, e sia questa

$T\beta^\mu + T'\beta^{\mu-1} + T''\beta^{\mu-2} + T'''\beta^{\mu-3} +$ ec.,

avremo allora

$$z_{x,y} = CT\beta^{y+\mu} + CT'\beta^{y+\mu-1} + CT''\beta^{y+\mu-2} + \text{ec.} + u_x;$$

all' esponenziale indeterminato $\beta^{y+\mu}$ può sostituirsi (§. 86., 98.) una funzione qualunque arbitraria dell' esponente $y + \mu$; sarà in

conseguenza così espresso l' integrale della proposta equazione

$$z_{x,y} = T\varphi(y+\mu) + T'\varphi(y+\mu-1) + T''\varphi(y+\mu-2) + \text{ec.} + u_x,$$

indicando per $\varphi(y+\mu)$ quella funzione arbitraria.

Per determinare questa funzione, facciamo le stesse riflessioni che abbiamo fatte ai §§. 86., 98. e troveremo $\varphi(y+\mu) = z_{0,y+\mu} - u_0$.

Se i coefficienti dell' equazioni sopra trattate, fossero costanti, allora il secondo membro dell' equazione potrebbe anche aver questa forma $X + Y$, ovvero anche $a^y X + b^x Y$ essendo X, Y funzioni respettivamente di x e di y, ed a e b quantità costanti.

Per ottenerne l' integrale faremmo

$z_{x,y} = \alpha^x\beta^y + a^y u_x + b^x \omega_y$ essendo α e β due costanti, ed u_x, ω_y due funzioni respettivamente di x e di y da determinarsi; crediamo inutile trattenersi a fare un dettagliato generale sviluppo e piuttosto ne applicheremo il metodo ad un esempio.

Quale è il termine generale di questa serie *Recurro-Recurrente*?

	0	1	2	3	4 x
0	1	1	1	1	1 1
1	5	6	7	8	9 ....
2	11	25	29	33	....
3	79	92	105	118	....
4	....				
⋮	....				
y	....				$z_{x,y}$

In questa serie ciascun termine $z_{x,y}$ è eguale al suo indice x, più il numero 2 elevato alla potenza y^{esima}, più il termine $z_{x,y-1}$

che ne è immediatamente al di sopra, più il doppio del termine che segue quest' ultimo.

L' equazione adunque, da cui dipende il termine generale ricercato, sarà

$$z_{x,y}=x+2^y+z_{x,y-1}+2z_{x+1,y-1}.$$

Pongasi $z_{x,y}=\alpha^x\beta^y+u_x+\omega_y$ e facendo le opportune sostituzioni nella proposta, avremo:

$$\alpha^x\beta^y+u_x+\omega_y=x+2^y+\alpha^x\beta^{y-1}+u_x+\omega_{y-1}+2\alpha^{x+1}\beta^{y-1}+$$
$$2u_{x+1}+2\omega_{y-1},$$

la quale può spezzarsi in queste tre

$$\beta=1+2\alpha$$
$$2u_{x+1}+x=0$$
$$\omega_y-3\omega_{y-1}=0$$

dalle quali si ricava

$$\beta^y=1+2y\alpha+\frac{y(y-1)}{2}2^2\alpha^2+\frac{y(y-1)(y-2)}{2\cdot3}2^3\alpha^3+\ldots+2^y\alpha^y;$$
$$u_x=-\tfrac{1}{2}(x-1)$$
$$\omega_y=\frac{-3^y}{-3}\Sigma\frac{2^{y+1}}{3^y}=3^{y-1}\cdot2\Sigma\left(\tfrac{2}{3}\right)^y=-2^{y+1}+3^yC:$$

avremo adunque

$$z_{x,y}=\alpha^x+y\cdot2\alpha^{x+1}+\frac{y(y-1)}{2}\cdot2^2\alpha^{x+2}+\ldots\ldots\ldots$$
$$+2^y\alpha^{x+y}+u_x+\omega_y:$$

ed in conseguenza (§. 86).

$$z_{x,y}=f(x)+y\cdot2f(x+1)+\frac{y(y-1)}{2}\cdot2^2f(x+2)+\ldots\ldots$$
$$+2^yf(x+y)+u_x+\omega_y,$$

rappresentando $f(x)$ una funzione arbitraria di x.

Per determinare questa funzione, facciasi $y=0$, ed avremo $z_{x,0}=f(x)+u_x+\omega_0$: dunque $f(x)=z_{x,0}-u_x-\omega_0$: l' espressione adunque per $z_{x,y}$, sarà

$$z_{x,y}=(z_{x,0}+\tfrac{1}{2}(x-1)+2-C)+y\cdot2(z_{x+1,0}+\tfrac{1}{2}x+$$
$$2-C)+\frac{y(y-1)}{2}\cdot2^2(z_{x+2,0}+\tfrac{1}{2}(x+1)+2-C)+\ldots$$
$$+2^y(z_{x+y}+\tfrac{1}{2}(y+x-1)+2-C)-\tfrac{1}{2}(x-1)-$$
$$2^{y+1}+3^yC.$$

Ora la costante svanisce da se medesima, poichè la somma dei coefficienti di $-C$ è $(1+2)^y=3^y$, e perciò nella espressione suddetta avremo $-3^yC+3^yC=0$; sarà dunque

$$z_{x,y}=z_{x,0}+2y(z_{x+1,0}+\tfrac{1}{2}x)+2^2\cdot\frac{y(y-1)}{2}(z_{x+2,0}+\tfrac{1}{2}(x+$$
$$1))+2^3\cdot\frac{y(y-1)(y-2)}{2\cdot3}(z_{x+3,0}+\tfrac{1}{2}(x+2))+\ldots\ldots$$
$$+2^y(z_{x+y,0}+\tfrac{1}{2}(x+y-1))+2\cdot3^y-2^{y+1}.$$

Siccome tutti i termini della prima fila orizzontale sono eguali all' unità, così per avere il termine generale di questa serie dovremo fare nella ritrovata formula $z_{x,0}=z_{x+1,0}=$ ec. $=1$: avremo allora, fatte le opportune riduzioni

$$z_{x,y}=1+y(x+2)+2\frac{y(y-1)}{2}(x+3)+2^2\cdot\frac{y(y-1)(y-2)}{2\cdot3}(x+$$
$$4)+\ldots\ldots+2^{y-1}\cdot(x+y+1)+2\cdot3^y-2^{y+1}.$$

Se si fa $x=2$, $y=2$, avremo $z_{2,2} = 1 + 2\cdot 4 + 2\cdot 5 + 2\cdot 3^2 - 2^3 = 29$ come appunto è nella serie.

§. 102. Il metodo d'integrazione che abbiamo dato al §. antecedente è appoggiato allo sviluppo in serie secondo le potenze di β della funzione

$m_{x-1}\cdot m_{x-2}\cdot m_{x-3}\cdots\cdots m_2\cdot m_1$. Ciò potrà conseguirsi secondo i diversi metodi conosciuti, fra i quali dovrà l'Analista scegliere il più adattato alla natura della quantità $m_x = -\frac{A'_x}{B'_x}$.

Solo quì avvertiamo che la serie è sempre finita, quando il denominatore non ha che un termine, ed è allora composta di un numero $(n+1)(x-1)$ di termini.

Qualunque però sia il numero dei termini che compongono il numeratore e denominatore di quella frazione, se ne potrà ottenere lo sviluppo nella seguente maniera:

la frazione $\frac{A + B'\beta + C''\beta^2 + \ldots\ldots + P^{(n)}\beta^n}{B + C'\beta + \ldots\ldots + P^{(n-1)}\beta^{n-1}}$

nella quale A, B' ec., sono funzioni di x, può ricevere sempre questa forma

$$n_x\beta\cdot\frac{1 + a'_x\beta^{-1} + a''_x\beta^{-2} + \ldots\ldots + a^{(n)}_x\beta^{-n}}{1 + b'_x\beta^{-1} + b''_x\beta^{-2} + \ldots\ldots + b^{(n-1)}_x\beta^{-n+1}}$$

essendo n_x, a'_x, a''_x ec., b'_x, b''_x ec., funzioni conosciute di x: avremo adunque

$$m_{x-1}\cdot m_{x-2}\cdot m_{x-3}\cdots\cdots m_2\cdot m_1 = n_{x-1}\cdot n_{x-2}\cdot n_{x-3}\cdots$$
$$\cdots n_2\cdot n_1\cdot\beta^{x-1}\times\frac{1 + a'_{x-1}\beta^{-1} + a''_{x-1}\beta^{-2} + \ldots + a^{(n)}_{x-1}\beta^{-n}}{1 + b'_{x-1}\beta^{-1} + b''_{x-1}\beta^{-2} + \ldots + b^{(n-1)}_{x-1}\beta^{-n+1}}\times$$
$$\frac{1 + a'_{x-2}\beta^{-1} + \ldots\ldots + a^{(n)}_{x-2}\beta^{-n}}{1 + b'_{x-2}\beta^{-1} + b''_{x-2}\beta^{-2} + \ldots + b^{(n-1)}_{x-2}\beta^{-n+1}}\times \text{ec. ec.}$$

Ora supponghiamo che il prodotto delle quantità complesse contenute fra le parentesi, sia eguale a questa serie ordinata secondo le potenze decrescenti del β

$$T_x + T'_x\beta^{-1} + T''_x\beta^{-2} + T'''_x\beta^{-3} + T''''_x\beta^{-4} + T^{v}_x\beta^{-5} + \text{ec.},$$

ed allora tutta la difficoltà consisterà nel determinare le funzioni T_x, T'_x, T''_x ec. ec.

Per questo facciamo crescere x di una unità, ed avremo

$$\frac{1 + a'_x\beta^{-1} + a''_x\beta^{-2} + \ldots\ldots + a^{(n)}_x\beta^{-n}}{1 + b'_x\beta^{-1} + b''_x\beta^{-2} + \ldots + b^{(n-1)}_x\beta^{-n+1}}\times\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1 + a'_{x-1}\beta^{-1} + \ldots\ldots + a^{(n)}_{x-1}\beta^{-n}}{1 + b'_{x-1}\beta^{-1} + \ldots\ldots + b^{(n-1)}_{x-1}\beta^{-n+1}}\times \text{ec. ec.} = T_{x+1} +$$
$$T'_{x+1}\beta^{-1} + T''_{x+1}\beta^{-2} + T'''_{x+1}\beta^{-3} + \text{ec.}$$

L'equazione per determinare quei coefficienti sarà in conseguenza

$$(T_x + T'_x\beta^{-1} + T''_x\beta^{-2} + \text{ec.})\times\cdots\cdots$$
$$\left\{\frac{1 + a'_x\beta^{-1} + a''_x\beta^{-2} + \ldots\ldots + a^{(n)}_x\beta^{-n}}{1 + b'_x\beta^{-1} + b''_x\beta^{-2} + \ldots\ldots + b^{(n-1)}_x\beta^{-n+1}}\right\} = T_{x+1} + \cdots$$

$T'_{x+1}\beta^{-1} + T''_x\beta^{-2} + $ ec., la quale ordineremo secondo le potenze negative di β, ed eguaglieremo a zero i coefficienti di queste potenze, per averne le seguenti equazioni

$$T_{x+1} - T_x = 0$$
$$T'_{x+1} - T'_x + b'_x T_{x+1} - a'_x T_x = 0$$
$$T''_{x+1} - T''_x + b'_x T'_{x+1} - a'_x T'_x + b''_x T_{x+1} - a''_x T_x = 0$$
$$T'''_{x+1} - T'''_x + b'_x T''_{x+1} - a'_x T''_x + b''_x T'_{x+1} - a''_x T'_x +$$
$$b'''_x T_{x+1} - a'''_x T_x = 0$$

$$T''''_{x+1} - T''''_{x} + b'_{x} T'''_{x+1} - a'_{x} T'''_{x} + b''_{x} T''_{x+1} - a''_{x} T''_{x} + b'''_{x} T'_{x+1} - a'''_{x} T'_{x} + b''''_{x} T_{x+1} - a''''_{x} T_{x} = 0$$

ec. ec.

di cui è chiara la legge.

Da queste equazioni, integrate che siano, ricaviamo

$T_x = C$ costante

$T'_x = C\Sigma a'_x - Cb'_x$

$$T''_x = C\Sigma a''_x - C\Sigma b''_x + \Sigma a'_x T'_x - \Sigma b'_x T'_{x+1} = C\Sigma a''_x - C\Sigma b''_x + C\Sigma a'_x \Sigma a'_x - C\Sigma a'_x \Sigma b'_x - C\Sigma b'_x \Sigma a'_{x+1} + C\Sigma b'_x \Sigma b'_{x+1}$$

ec. ec.

Il nostro integrale sarà adunque così espresso

$$z_{x,y} = m_{x-1} \cdot m_{x-2} \ldots\ldots m_1 \left(C\varphi(y+x-1) + T'_x \varphi(y+x-2) + T''_x \varphi(y+x-3) + \text{ec.} \right)$$

La costante C è $= 1$, come può vedersi facendo $\beta = 0$ nella serie che abbiamo supposta per esprimere il valore di quel prodotto.

Se la natura dell'equazione desse $a''_x = a'''_x = \text{ec.} = 0$, come pure $b''_x = b'''_x = \text{ec.} = 0$, allora avremmo

$T_x = 1$

$T'_x = \Sigma a'_x - \Sigma b'_x$

$T''_x = \Sigma a'_x T'_x - \Sigma b'_x T'_{x+1}$

$T'''_x = \Sigma a'_x T''_x - \Sigma b'_x T''_{x+1}$

$T''''_x = \Sigma a'_x T'''_x - \Sigma b'_x T'''_{x+1}$

ec.;

e se di più fosse ancora $b'_x = 0$, cioè la frazione complessa si riducesse ad $1 + a'_{x-1}\beta^{-1}$, allora sarebbe

$T_x = 1$

$T'_x = \Sigma a'_x$

$T''_x = \Sigma a'_x \Sigma a'_x$

$T'''_x = \Sigma a'_x \Sigma a'_x \Sigma a'_x$

ec. ec.

In questo caso è facile vedere che la serie terminerà dopo il termine $T^{(x-1)}_x \beta^{-x+1}$ inclusive: infatti questo termine $T^{(x-1)}_x$ conterrà $x - 1$ segni sommatorj che appartengono ad a_x. Ora quando vi è un solo segno sommatorio come Σa_x, la serie cui questa somma è eguale, comincia da a_{x-1}: quando vi sono due segni sommatorj, comincia da a_{x-2} ec.; quando adunque sono x segni sommatorj, comincia da $a_{x-x} = a_0$ che si considera zero, poichè si suppone che i prodotti comincino da a_1; e perciò $T^{(x)}_x$ e i suoi seguenti saranno zero; l'integrale adunque finirà al termine $T^{(x-1)}_x \varphi(y)$.

§. 103. Quando i coefficienti di una equazione a differenze finite e parziali, sono funzioni di più variabili, l'equazione non può integrarsi che per certe determinate forme di coefficienti.

Sia per esempio da integrarsi l'equazione del secondo ordine

$$z_{x,y} + m_y \cdot n_x \cdot z_{x+1,y} + p_y \cdot z_{x,y+1} + l_y \cdot n_x \cdot z_{x+1,y+1} = 0$$

nella quale m_y, n_x, p_y, l_y, sono funzioni respettivamente delle variabili poste in basso

Per integrare questa equazione io faccio $z_{x,y} = \omega_x \cdot u_{x,y}$, essendo ω_x una funzione di x da determinarsi, ed $u_{x,y}$ una funzione delle due variabili x, y egualmente da determinarsi; sostituisco nella proposta, e dividendola per ω_x ho

$$u_{x,y} + m_y \cdot \frac{n_x \omega_{x+1}}{\omega_x} u_{x+1,y} + p_y \cdot u_{x,y+1} + l_y \cdot \frac{n_x \cdot \omega_{x+1}}{\omega_x} \times \ldots \ldots$$
$$z_{x+1,y+1} = 0,$$

la quale determinando ω_x in maniera che sia $\frac{n_x \cdot \omega_{x+1}}{\omega_x} = 1$ (ciò che è sempre possibile) diviene

$$u_{x,y} + m_y \cdot u_{x+1,y} + p_y \cdot u_{x,y+1} + l_y \cdot u_{x+1,y+1} = 0.$$

Questa equazione, avendo i coefficienti funzioni di una sola variabile, appartiene alle equazioni trattate al §. 101.

Si potrebbero trovare altre forme d'equazioni capaci d'essere completamente integrate (a); noi però ci tratterremo soltanto a parlare dell' integrazione di alcune nuove equazioni da nessuno fin ora trattate, e per le quali non sono sufficienti i metodi d' integrabilità conosciuti; queste equazioni sono di una diretta applicazione nella Teoria degli azzardi.

Abbiasi l' equazione

$$(a) \ldots . \; z_{x,y} = \frac{\alpha_y}{m_x} z_{x-1,y-1} + \frac{n_{x-y}}{m_x} z_{x-1,y}$$

nella quale α_y, m_x, n_{x-y} sono funzioni date di y, di x, e di $x-y$ respettivamente.

Per integrarla facciamo

$$z_{x,y} = \frac{\nabla\alpha_y \cdot \nabla n_{x-y}}{\nabla m_x} \alpha^x \beta^y$$

essendo

(a) Si veda per questo il mio Opuscolo Analitico sopra l' Integrazione delle Equazioni a Differenze Finite: Livorno 1792.

$$\nabla\alpha_y = \alpha_y \cdot \alpha_{y-1} \cdot \alpha_{y-2} \ldots \ldots \alpha_1$$
$$\nabla n_{x-y} = n_{x-y} \cdot n_{x-y-1} \cdot n_{x-y-2} \ldots \ldots n_1$$
$$\nabla m_x = m_x \cdot m_{x-1} \cdot m_{x-2} \ldots \ldots m_1$$

ed α, β due costanti indeterminate.

Avremo allora, facendo le opportune sostituzioni,

$$\frac{\nabla\alpha_y \cdot \nabla n_{x-y}}{\nabla m_x} \alpha^x \beta^y = \frac{\alpha_y \nabla\alpha_{y-1} \cdot \nabla n_{x-y}}{m_x \nabla m_{x-1}} \alpha^{x-1} \beta^{y-1} + \ldots \ldots$$
$$\frac{n_{x-y} \cdot \nabla\alpha_y \cdot \nabla n_{x-y-1}}{m_x \nabla m_{x-1}} \alpha^{x-1} \beta^y$$

equazione che divisa per il fattore comune

$$\frac{\nabla\alpha_y \cdot \nabla n_{x-y}}{\nabla m_x} \alpha^{x-1} \beta^{y-1}$$

diviene $\alpha\beta = 1 + \beta$.

Da quest' ultima equazione fra α e β ottenghiamo

$\beta = (\alpha - 1)^{-1} = \frac{1}{\alpha}(1 - \alpha^{-1})^{-1}$, e perciò

$$\beta^y = \alpha^{-y} + y\alpha^{-y-1} + \frac{y(y+1)}{2}\alpha^{-y-2} + \frac{y(y+1)(y+2)}{2.3}\alpha^{-y-3} + \text{ec.}:$$

sarà dunque

$$z_{x,y} = \frac{\nabla\alpha_y \cdot \nabla n_{x-y}}{\nabla m_x} \left\{ \alpha^{x-y} + y\alpha^{x-y-1} + \frac{y(y+1)}{2}\alpha^{x-y-2} + \ldots \ldots \right.$$
$$\left. \frac{y(y+1)(y+2)}{2.3}\alpha^{x-y-3} + \text{ec.} \right\};$$

ed introducendo la funzione arbitraria invece dell' indeterminata α^{x-y}, avremo

$$z_{x,y} = \frac{\nabla\alpha_y \cdot \nabla n_{x-y}}{\nabla m_x} \left\{ \varphi(x-y) + y\varphi(x-y-1) + \frac{y(y+1)}{2}\varphi(x - \right.$$
$$\left. y - 2) + \text{ec.} \right\}.$$

Questa espressione sarà l'integrale dell'equazione proposta.

Per determinare la funzione arbitraria facciamo $y=0$, ed avremo (la quantità $\nabla\alpha_y$ diviene allora $\nabla\alpha_0$ ed è $=1$)

$$z_{x,0}=\frac{\nabla n_x}{\nabla m_x}\varphi(x),\ \text{dunque}\ \varphi(x)=\frac{\nabla m_x}{\nabla n_x}z_{x,0}\ \text{ed in conseguenza}$$

$$z_{x,y}=\frac{\nabla\alpha_y\cdot\nabla n_{x-y}}{\nabla m_x}\left\{\frac{\nabla m_{x-y}}{\nabla n_{x-y}}z_{x-y,0}+y\cdot\frac{\nabla m_{x-y-1}}{\nabla n_{x-y-1}}z_{x-y-1,0}+\right.$$

$$\left.\frac{y(y+1)}{2}\cdot\frac{\nabla m_{x-y-2}}{\nabla n_{x-y-2}}z_{x-y-2,0}+\text{ec.}\right\}.$$

Abbiamo detto quì sopra che $\nabla\alpha_0=1$; infatti

$$\nabla\alpha_{y-p}=\alpha_{y-p-1}\cdot\alpha_{y-p-2}\cdots\cdots\alpha_2\cdot\alpha_1,\ \text{ovvero}$$

$$\nabla\alpha_{y-p}=\frac{\alpha_y\cdot\alpha_{y-1}\cdot\alpha_{y-2}\cdots\cdots\alpha_2\cdot\alpha_1}{\alpha_y\cdot\alpha_{y-1}\cdots\cdots\alpha_{y-p+1}},\ \text{e facendo}\ p=y,$$

$$\nabla\alpha_{y-y}=\nabla\alpha_0=\frac{\alpha_y\cdot\alpha_{y-1}\cdot\alpha_{y-2}\cdots\cdots\alpha_2\cdot\alpha_1}{\alpha_y\cdot\alpha_{y-1}\cdot\alpha_{y-2}\cdots\cdots\alpha_2\cdot\alpha_1}=1,$$ come noi abbiamo asserito.

§. 104. Abbiasi da integrare l'equazione fra quattro variabili

$$(b)\ldots\ldots z_{x,y,u}=\frac{g_y}{h_x}z_{x-1,y-1,u}+\frac{e_u}{h_x}z_{x-1,y,u-1}+\cdots\cdots$$
$$\frac{f_{x-y-u}}{h_x}z_{x-1,y,u},$$

nella quale h_x, g_y, e_u, f_{x-y-u} sono funzioni respettivamente di x, y, u, $x-y-u$.

Facciamo $z_{x,y,u}=\dfrac{\nabla g_y\cdot\nabla e_u\cdot\nabla f_{x-y-u}}{\nabla h_x}\alpha^x\beta^y\gamma^u$

essendo

$$\nabla g_y=g_y\cdot g_{y-1}\cdots\cdots g_1$$
$$\nabla h_x=h_x\cdot h_{x-1}\cdots\cdots h_1$$
$$\nabla e_u=e_u\cdot e_{u-1}\cdots\cdots e_1$$
$$\nabla f_{x-y-u}=f_{x-y-u}\cdot f_{x-y-u-1}\cdots\cdots f_1,$$

ed α, β e γ quantità costanti indeterminate.

Fatte le opportune sostituzioni, si ottiene fra le indeterminate suddette l'equazione $\alpha\beta\gamma=\gamma+\beta+\beta\gamma$, dalla quale si ricava

$$\gamma=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha\beta}},\ \text{e perciò}$$

$$\gamma^u=\frac{1}{\alpha^u}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha\beta}}\right)^u=\frac{1}{\alpha^u}\left\{1+\frac{u}{\alpha}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)+\frac{u(u+1)}{2\alpha^2}\left(1+\right.\right.\ldots$$

$$\left.\left.\frac{2}{\beta}+\frac{1}{\beta^2}\right)+\frac{u(u+1)(u+2)}{2\cdot3\alpha^3}\left(1+\frac{3}{\beta}+\frac{3}{\beta^2}+\frac{1}{\beta^3}\right)+\text{ec.}\right\}:$$

sarà dunque

$$z_{x,y,u}=\frac{\nabla g_y\cdot\nabla e_u\cdot\nabla f_{x-y-u}}{\nabla h_x}\alpha^x\beta^y\gamma^u=\frac{\nabla g_y\cdot\nabla e_u\cdot\nabla f_{x-y-u}}{\nabla h_x}\left\{\alpha^{x-u}\times\right.$$

$$\beta^y+u(\alpha^{x-u-1}\beta^y+\alpha^{x-u-1}\beta^{y-1})+\frac{u(u+1)}{2}(\alpha^{x-u-2}\beta^y+$$

$$\left.2\alpha^{x-u-2}\beta^{y-1}+\alpha^{x-u-2}\beta^{y-2})+\text{ec.}\right\}.$$

Ora sostituendo in vece dell'indeterminata $\alpha^{x-u}\cdot\beta^y$, una funzione arbitraria $\varphi(x-u,y)$; e quindi determinando il valore di questa funzione, avremo

$$z_{x,y,u}=\frac{\nabla g_y\cdot\nabla e_u\cdot\nabla f_{x-y-u}}{\nabla h_x}\left\{\frac{\nabla h_{x-u}}{\nabla g_y\cdot\nabla f_{x-y-u}}z_{x-u,y,0}+\cdots\cdots\right.$$

$$u\left(\frac{\nabla h_{x-u-1}}{\nabla g_y\cdot\nabla f_{x-y-u-1}}z_{x-u-1,y,0}+\frac{\nabla h_{x-u-1}}{\nabla g_{y-1}\cdot\nabla f_{x-y-u}}\times\cdots\cdots\right.$$

$$z_{x-u-1,y-1,0}\Big) + \frac{u(u+1)}{2}\Big(\frac{\nabla h_{x-u-2}}{\nabla g_y \cdot \nabla f_{x-y-u-1}} z_{x-u-2,y,0} +$$

$$2\frac{\nabla h_{x-u-2}}{\nabla g_{y-1} \cdot \nabla f_{x-y-u-1}} z_{x-u-2,y-1,0} + \frac{\nabla h_{x-u-2}}{\nabla g_{y-2} \cdot \nabla f_{x-y-u}} \times \ldots$$

$$z_{x-u-2,y-2,0}\Big) + \text{ec.}\Big\}$$

per esprimere l'integrale della nostra equazione.

Per integrare l'equazione

$$(c) \ldots z_{x,y} = \frac{a_y}{c_{x+y}} z_{x,y-1} + \frac{e_x}{c_{x+y}} z_{x-1,y}$$

ponghiamo $z_{x,y} = \frac{\nabla a_y \cdot \nabla e_x}{\nabla c_{x+y}} \alpha^x \beta^y$ essendo al solito

$$\nabla a_y = a_y \cdot a_{y-1} \cdot a_{y-2} \ldots\ldots\ldots a_2 \cdot a_1$$

$$\nabla e_x = e_x \cdot e_{x-1} \cdot e_{x-2} \ldots\ldots\ldots e_2 \cdot e_1$$

$$\nabla c_{x+y} = c_{x+y} \cdot c_{x+y-1} \cdot c_{x+y-2} \ldots\ldots\ldots c_2 \cdot c_1 :$$

facendo le opportune sostituzioni nell'equazione (c), e dividendola per il fattore comune a tutti i suoi termini, avremo fra α e β quest'equazione $\alpha\beta = \alpha + \beta$, dalla quale si deduce $\beta = (1 - \alpha^{-1})^{-1}$, e perciò

$$z_{x,y} = \frac{\nabla a_y \cdot \nabla e_x}{\nabla c_{x+y}} \Big\{\alpha^x + y\alpha^{x-1} + \frac{y(y+1)}{2}\alpha^{x-2} + \frac{y(y+1)(y+2)}{2\cdot 3} \times$$

$$\alpha^{x-3} + \text{ec.}\Big\}:$$

introducendo ora la funzione arbitraria e determinandola come si è fatto quì sopra per le equazioni (a), (b), s'avrà

$$z_{x,y} = \frac{\nabla a_y \cdot \nabla e_x}{\nabla c_{x+y}} \Big\{\frac{\nabla c_x}{\nabla e_x} z_{x,0} + y\frac{\nabla c_{x-1}}{\nabla e_{x-1}} z_{x-1,0} + \frac{y(y+1)}{2} \times \ldots$$

$$\frac{\nabla c_{x-2}}{\nabla e_{x-2}} z_{x-2,0} + \frac{y(y+1)(y+2)}{2\cdot 3} \cdot \frac{\nabla c_{x-3}}{\nabla e_{x-3}} z_{x-3,0} + \text{ec.}\Big\}.$$

L'equazioni

$$(d) \ldots z_{x,y,u} = \frac{d_y}{h_{x+y+u}} z_{x,y-1,u} + \frac{e_x}{h_{x+y+u}} z_{x-1,y,u} +$$

$$\frac{f_u}{h_{x+y+u}} z_{x,y,u-1},$$

$$(e) \ldots z_{x,y} = \frac{m_{(x+y):2}}{h_x} z_{x-1,y-1} + \frac{n_{(x-y):2}}{h_x} z_{x-1,y+1}$$

sono integrabili col medesimo metodo facendo per la prima

$z_{x,y,u} = \frac{\nabla d_y \cdot \nabla e_x \cdot \nabla f_u}{\nabla h_{x+y+u}} \alpha^x \beta^y \gamma^u$; e per la seconda

$z_{x,y} = \frac{\nabla m_{(x+y):2} \cdot \nabla n_{(x-y):2}}{\nabla h_x} \alpha^x \beta^y$, ed operando come abbiam fatto per le altre equazioni.

Noi ci siamo trattenuti ad integrare le equazioni (a), (b), (c), (d), (e) poichè esse danno la soluzione dei Problemi sopra le probabilità, (proposti e risoluti da La-Grange (Atti di Berlino 1775.) per il caso della probabilità costante) quando questa probabilità è variabile. In una tale ipotesi non erano sufficienti i metodi di quel Gran Geometra. Vedremo tutto questo chiaramente nelle applicazioni agli azzardi che ponghiamo in fine di questo Trattato.

§. 105. L'equazioni che abbiamo integrate avevano i coefficienti funzioni di x e y, ma di una determinata forma: la seguente

$az_{x,y} + bz_{x+1,y+1} + \ldots\ldots\ldots pz_{x+m,y+m} = \mathrm{T}$ è integrabile qualunque funzioni delle variabili x, y siano i coefficienti a, b, c ec., ed il secondo membro T. Per questo facciamo $x - y = u$, $x = \omega$; avremo $y = \omega - u$. Se adesso in vece delle due variabili x, y si sostituiscono nell'equazione i loro valori ω, $\omega - u$, la funzione $z_{x,y}$ diverrà una funzione di u e di ω che noi rappresenteremo per $t_{\omega,u}$. Delle due variabili ω, u, la u non varia col variare di x e di y, poichè è eguale alla lor differenza, la quale è costante quando x e y crescono della medesima quantità: a, b, c ec., T divengono funzioni delle variabili ω, u che indicheremo per a', b', c' ec. T'.

L' equazione proposta diverrà adunque

$$a'.t_{u,\omega} + b'.t_{u,\omega+1} + \ldots\ldots + p'.t_{u,\omega+m} = T'.$$

Ora è facile vedere che in questa equazione possiamo supporre u costante, poichè la sua variazione è nulla: i coefficienti allora potranno considerarsi come funzioni di una sola variabile ω, e servirà integrare l'equazione in questa supposizione; in vece poi delle costanti che l'integrazione introduce, si porranno tante funzioni della variabile che è supposta costante, cioè tante funzioni di u, vale a dire di $x-y$. L' integrazione adunque dell' equazione proposta dipende da quella di una equazione a differenze finite ordinarie a coefficienti variabili, delle quali è stato parlato al Cap. III.

Per farne degli esempj prendiamo ad integrare l' equazione $z_{x,y} = xy^2 z_{x-1,y-1}$, ovvero, facendo crescere le variabili di un' unità, l' equazione

$(x+1)(y+1)^2 z_{x,y} - z_{x+1,y+1} = 0$. Ponendo in quest' ultima equazione ω per x e $\omega - u$ per y, abbiamo

$(\omega+1)(\omega-u+1)^2 t_{u,\omega} - t_{u,\omega+1} = 0$; la quale è una equazione a differenze finite del primo ordine, il cui integrale nella supposizione di u costante, è

$t_{u,\omega} = C.1.2.3\ldots\ldots\omega(1-u)^2(2-u)^2(3-u)^2\ldots\ldots(\omega-u)^2$; e perciò ponendo $\varphi(x-y)$ per C, x per ω, $x-y$ per u,

$z_{x,y} = \varphi(x-y).1.2.3\ldots\ldots x(1-x+y)^2(2+y-x)^2(3-x+y)^2\ldots\ldots y^2$ che è integrale completato con una funzione arbitraria $\varphi(x-y)$.

Per un secondo esempio, proponghiamo l' equazione

$x.2^x.z_{x,y} + x.z_{x,y+1} - (x^2-2)z_{x+1,y+4} = X$, essendo X una qualunque funzione di x.

Facendo $z_{x,y} = \alpha_x.\beta^y + u_x$, avremo (dopo aver fatte le debite sostituzioni e aver diviso per il fattore comune β^y) per determinare α_x questa equazione

$$\alpha_{x+1} = \alpha_x.\frac{x.2^x + x\beta}{(x^2-2)\beta^4}, \text{ ovvero}$$

$$\alpha_{x+1} = \alpha_x.\frac{x}{(x^2-2)\beta^3}(1+2^x\beta^{-1}); \text{ onde}$$

$$\alpha_x = \frac{(x-1)(x-2)\ldots\ldots3.2.1}{((x-1)^2-2)((x-2)^2-2)\ldots\ldots(1^2-2)}\beta^{-3(x-1)}.(1+2^{x-1}\times\beta^{-1})(1+2^{x-2}\beta^{-1})\ldots\ldots(1+2\beta^{-1});$$

questa equazione secondo ciò che è stato detto al §. 102., diviene

$$\alpha_x = \frac{(x-1)(x-2)\ldots\ldots3.2.1}{((x-1)^2-2)((x-2)^2-2)\ldots\ldots(1^2-2)}\beta^{-3(x-1)}(1+\beta^{-1}\times \Sigma 2^x + \beta^{-2}\Sigma 2^x\Sigma 2^x + \ldots\ldots + \beta^{-x+1}\Sigma 2^x\Sigma 2^x\Sigma 2^x\ldots\ldots\Sigma 2^x);$$

ora eseguendo le integrazioni, abbiamo

$$\Sigma 2^x = \frac{2^x}{2-1}$$

$$\Sigma 2^x\Sigma 2^x = \frac{2^{2x}}{(2^2-1)(2-1)}$$

$$\Sigma 2^x\Sigma 2^x\Sigma 2^x = \frac{2^{3x}}{(2^3-1)(2^2-1)(2-1)}$$

. . . .

$$\Sigma 2^x\Sigma 2^x\ldots\ldots\Sigma 2^x = \ldots\ldots \frac{2^{x(x-1)}}{(2^{x-1}-1)(2^{x-2}-1)(2^{x-3}-1)\ldots\ldots(2^2-1)(2-1)};$$

dunque moltiplicando l' espressione di α_x per β^y, ed osservando che per il medesimo β^y possiamo prendere qualunque funzione arbitraria di y rappresentata per $\varphi(y)$, avremo l' integrale della proposta così espresso

$$z_{x,y} = \frac{(x-1)(x-2)\ldots\ldots 2.1}{((x-1)^2-2)\ldots\ldots(1^2-2)}\Big\{\varphi(y-3(x-1)) + \frac{2^x}{2-1}\varphi(y- 3(x-1)-1) + \frac{2^{2x}}{(2^2-1)(2-1)}\varphi(y-3(x-1)-2)+\ldots\ldots + \frac{2^{x(x-1)}}{(2^{x-1}-1)(2^{x-2}-1)\ldots(2-1)}\times\varphi(y-3(x-1)-(x-1))\Big\}.$$

La quantità poi u_x è data da questa equazione

$x(2^x+1)u_x-(x^2-2)u_{x+1}=X$; sarà per tanto

$$u_x = e^{\Sigma \log \frac{x(2^x+1)}{x^2-2}}\Big(C+\Sigma e^{-\Sigma \log\frac{x(2^x+1)}{x^2-2}}\cdot\frac{x^2-2}{x(2^x+1)}X\Big).$$

§. 106. Esponghiamo adesso il metodo immaginato dal Geometra La-Place per integrare l' equazioni a differenze finite e parziali a coefficienti funzioni di una sola variabile; metodo che si trova nel Tomo VII. delle Memorie presentate all' Accademia di Parigi. Supporremo in questo che la forma delle equazioni sia tale, che le variazioni di x e di y siano negative, essendo facile ridurle ad avere le variazioni positive, quali le abbiamo considerate fin ora.

Sia proposta adunque l' equazione

$(A)\ldots z_{x,y}=A_x z_{x-1,y}+B_x z_{x,y-1}+C_x$ nella quale A_x, B_x, C_x sono funzioni date di x. Se in questa equazione facciamo $x=1$, avremo

$z_{1,y}=A_1 z_{0,y}+B_1 z_{1,y-1}+C_1$; e ponendo una funzione qualunque $\varphi(y)$ per $z_{0,y}$, sarà

$(1)\ldots z_{1,y}=A_1\varphi(y)+B_1 . z_{1,y-1}+C_1$. Se nella proposta si fa $x=2$, avremo

$(2)\ldots z_{2,y}=A_2 z_{1,y}+B_2 z_{2,y-1}+C_2$, e scemando in questa equazione la y di una unità, si trova

$z_{2,y-1}=A_2 z_{1,y-1}+B_2 z_{2,y-2}+C_2$ da cui si ricava il valore di $z_{1,y-1}$ che sostituito nell' equazione (1), darà

$z_{1,y}=A_1\varphi(y)+C_1+\frac{B_1}{A_2}(z_{2,y-1}-B_2 z_{2,y-2}-C_2)$. Ponendo ora questo valore nell' equazione (2), ella si cangerà in questa

$$(A')\ldots z_{2,y}-(B_1+B_2)z_{2,y-1}+B_1 . B_2 . z_{2,y-2}=A_2(A_1\varphi\times(y)+C_1)+C_2(1+B_2).$$

L' equazione (A) dà ancora

$(3)\ldots z_{3,y}=A_3 . z_{2,y}+B_3 . z_{3,y-1}+C_3$, da cui si ricava

$$z_{3,y-1}=A_3 . z_{2,y-1}+B_3 . z_{3,y-2}+C_3$$

$$z_{3,y-2}=A_3 . z_{2,y-2}+B_3 . z_{3,y-3}+C_3.$$

Se adesso nell' equazione (A′) si sostituiscono i valori di $z_{2,y-1}$, $z_{2,y-2}$ ricavati dall' equazioni precedenti, otterremo un valore di $z_{2,y}$ il quale essendo sostituito nell' equazione (3) la cambierà nella seguente

$$(A^2)\ldots z_{3,y}-(B_1+B_2+B_3)z_{3,y-1}+(B_3(B_1+B_2)+B_1B_2)z_{3,y-2}-B_1B_2B_3z_{3,y-3}=A_3(A_2(A_1\varphi(y)+C_1)+C_2(1-B_2))+C_3(1-B_1-B_2+B_1B_2).$$

E' facile vedere che se indichiamo per $u_{1,y}$ il secondo membro dell' equazione (A′) e per $u_{2,y}$ quello dell' equazione (A^2) sarà

$$u_{2,y}=A_3u_{1,y}+C_3(1-B_1-B_2+B_1B_2).$$

Continuando a fare uso della proposta (A), avremo

$(4)\ldots\; z_{4,y} = A_4 . z_{3,y} + B_4 . z_{4,y-1} + C_4$ e quindi

$$z_{4,y-1} = A_4 . z_{3,y-1} + B_4 . z_{4,y-2} + C_4$$
$$z_{4,y-2} = A_4 . z_{3,y-2} + B_4 . z_{4,y-3} + C_4$$
$$z_{4,y-3} = A_4 . z_{3,y-3} + B_4 . z_{4,y-4} + C_4$$

queste tre ultime equazioni danno i valori di $z_{3,y-1}$, $z_{3,y-2}$, $z_{3,y-3}$ i quali sostituiti nell'equazione (A^2), daranno una equazione da cui si prenderà il valore di $z_{3,y}$ per sostituirlo nell'equazione (4): fatta questa sostituzione troveremo questa equazione

$$(A^3)\ldots\; z_{4,y} - (B_1 + B_2 + B_3 + B_4) z_{4,y-1} + (B_4(B_3 + B_2 + B_1) + B_3(B_1 + B_2) + B_1 B_2) z_{4,y-2} - (B_4(B_3(B_1 + B_2) + B_1 B_2) + B_1 B_2 B_3) z_{4,y-3} + B_1 B_2 B_3 B_4 z_{4,y-4} = A_4 u_{2,y} + C_4 (1 - B_1 - B_2 - B_3 + B_2 B_3 + B_4 (B_1 + B_2) - B_1 B_2 B_3) = u_{3,y}.$$

Continuando il medesimo andamento, si vedrà facilmente che giungeremo ad una equazione di questa forma

$$(B)\ldots\; z_{x,y} - M_x z_{x,y-1} + N_x z_{x,y-2} - P_{x,y-3} + \ldots\ldots \pm T_x z_{x,y-x} = u_{x,y},$$

nella quale x è considerato come costante: questa equazione potrà trattarsi perciò come una equazione a differenze ordinarie a coefficienti costanti.

Esaminando i coefficienti delle equazioni (A^1), (A^2), (A^3) ec. vedremo che per determinare M_x, N_x si hanno le seguenti equazioni del primo ordine a differenze ordinarie

$$M_x = M_{x-1} + B_x$$
$$N_x = N_{x-1} + B_x M_{x-1}$$

$$P_x = P_{x-1} + B_x N_{x-1}$$

ec.

$$T_x = T_{x-1} + B_x S_{x-1}$$
$$u_{x,y} = A_x u_{x-1,y} + C_x (1 - M_{x-1} + N_{x-1} - P_{x-1} \ldots\ldots \pm T_{x-1}).$$

L'integrazioni di queste equazioni ci danno

$$M_x = \Sigma B_{x+1}$$
$$N_x = \Sigma B_{x+1} \Sigma B_{x+1}$$

ec.

$T_x = \Sigma B_{x+1} \Sigma B_{x+1} \ldots\ldots \Sigma B_{x+1}$, i segni sommatorj nel valore di T_x sono di numero x.

L'integrale poi dell'ultima equazione, considerando la y costante, è

$$u_{x,y} = e^{\Sigma \log (A_{x+1})} \left(C' - \Sigma e^{-\Sigma \log A_{x+1}} \times \ldots\ldots \frac{(-1 + M_x - N_x + P_x - \ldots \pm T_x)}{A_{x+1}} C_{x+1}\right).$$

C' è la costante arbitraria che porta l'integrazione, la quale può essere qualunque funzione di y, e perciò possiamo fare $C' = \varphi(y)$. Così tutti i coefficienti dell'equazione (B), come pure $u_{x,y}$ saranno determinati.

Consideriamo ora le equazioni (A^1), (A^2), (A^3) ec., e vedremo che se prendiamo la serie B_1, B_2, B_3, B_x il coefficiente M_x è eguale alla somma dei termini di questa serie; il coefficiente N_x è eguale alla somma dei prodotti dei termini della medesima serie presi due a due; il coefficiente P_x è eguale alla somma dei prodotti dei termini presi tre a tre ec., ed in fine il coefficiente T_x è eguale al prodotto di tutti i termini della medesima serie; così queste diverse somme saranno espresse dalle formule integrali trovate per i detti coefficienti.

Per integrare adunque l'equazione (B) supponghiamo che y cresca in tutta l'equazione della quantità x, ed essa diverrà

$$z_{x,y+x} - M_x z_{x,y+x-1} + N_x z_{x,y+x-2} - \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\pm T_x \cdot z_{x,y} = u_{x,y+x}$$

la quale (riguardandovi x costante) paragonata con quella del §. 50. Cap. II., ha per l'integrale completo.

$$z_{x,y} = \frac{\alpha^y}{T_x} \Sigma \frac{\alpha'^y}{\alpha^y} \Sigma \frac{\alpha''^y}{\alpha'^y} \ldots\ldots\ldots \Sigma \frac{\alpha^{(x-1)^y}}{\alpha^{(x-2)^y}} \Sigma \frac{u_{x,y+x}}{\alpha^{(x-1)^y}}$$: i segni

sommatorj hanno tutti rapporto alla variabile y. Le quantità α, α' ec. $\alpha^{(x-1)}$ sono tante funzioni determinate di x, le quali rappresentano le x radici di questa equazione

$$\alpha^x - M_x \alpha^{x-1} + N_x \alpha^{x-2} - P_x \alpha^{x-3} + \ldots\ldots \pm T_x = 0.$$

Ora per ciò che abbiamo detto sopra, è facile vedere che questa equazione non è altro che la seguente

$$(\alpha - B_1)(\alpha - B_2)(\alpha - B_3) \ldots\ldots (\alpha - B_{x-1})(\alpha - B_x) = 0;$$

si hanno adunque questi x valori per α, $\alpha = B_1$, $\alpha' = B_2$, $\alpha'' = B_3$ ec.,

$\alpha^{(x-1)} = B_x$: sarà perciò

$$z_{x,y} = \frac{B_1^y}{T_x} \Sigma \frac{B_2^y}{B_1^y} \Sigma \frac{B_3^y}{B_2^y} \ldots\ldots\ldots \Sigma \frac{B_x^y}{B_{x-1}^y} \Sigma \frac{u_{x,y+x}}{B_x^y}$$ e questo sarà l'integrale completo dell'equazione proposta (A) a differenze parziali.

Siccome il trovato valore per $z_{x,y}$ contiene un numero x di segni sommatorj, questi porteranno un numero x di costanti arbitrarie, le quali potranno essere funzioni di x. Si determineranno tali funzioni sostituendo il valore che trovasi per $z_{x,y}$ nella proposta (A), e paragonando i termini omologhi per rapporto a y. Ciò si renderà chiaro per mezzo degl'esempj.

Ancora l'equazione del §. 101., che è del primo ordine rapporto ad x, e dell'ordine n rapporto a y, può integrarsi col medesimo metodo, ed egualmente si trattano l'equazioni del secondo ordine; noi però non ce ne occuperemo, poichè ciò che abbiamo detto fin ora, serve a fare comprendere ai nostri Leggitori lo spirito di un tal metodo.

§. 107. Per applicare il metodo a qualche esempio sia proposta l'equazione

$z_{x,y} = x^2 . z_{x,y-1} + z_{x-1,y}$. Paragonata questa equazione con quella del §. antecedente, avremo $A_x = 1$, $C_x = 0$, $B_x = x^2$, onde sostituendo questi valori nelle formule dell'integrale date al suddetto §, avremo

$$T_x = 1^2 . 2^2 . 3^2 . 4^2 \ldots\ldots x^2,\ u_{x,y} = \varphi(y) = z_{0,y},\ \alpha = 1^2,\ \alpha' = 2^2,\ \alpha'' = 3^2 \text{ ec.},\ \alpha^{(x-1)} = x^2, \text{ onde}$$

$$z_{x,y} = \frac{1^{2y}}{1^2 . 2^2 . 3^2 . 4^2 \ldots\ldots x^2} \Sigma \frac{2^{2y}}{1^{2y}} \Sigma \frac{3^{2y}}{2^{2y}} \Sigma \frac{4^{2y}}{3^{2y}} \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \Sigma \frac{x^{2y}}{(x-1)^{2y}} \Sigma \frac{z_{0,y+x}}{x^{2y}}$$

se facciamo $z_{0,y} = 1$ qualunque sia la y, avremo

$$\Sigma \frac{z_{0,y+x}}{x^{2y}} = \Sigma x^{-2y}:$$

l'espressione allora di $z_{x,y}$, eseguite l'integrazioni, diviene di questa forma (Cap. II. §. 61.)

$$z_{x,y} = A_x + A'_x . 2^{2y} + A''_x . 3^{2y} + A'''_x . 4^{2y} + \ldots\ldots\ldots$$
$$+ A_x^{(x-1)} (x^2)^y,$$ nella quale A_x, A'_x ec., sono le x costan-

ti arbitrarie, funzioni in questo caso di x, le quali sono portate dalle integrazioni. Per determinarle, secondo ciò che abbiamo detto sopra, si prenderanno i valori di $z_{x,y-1}$, $z_{x-1,y}$, e questi saranno

$$z_{x,y-1}=A_x+A'_x\cdot 2^{2(y-1)}+A''_x\cdot 3^{2(y-1)}+\ldots\ldots\ldots$$
$$+A_x^{(x-1)}(x^2)^{y-1}$$

$$z_{x-1,y}=A_{x-1}+A'_{x-1}\cdot 2^{2y}+A''_{x-1}\cdot 3^{2y}+\ldots\ldots\ldots$$
$$+A_{x-1}^{(x-2)}(x-1)^{2y}.$$

Sostituiti tali valori e quello di $z_{x,y}$ nella proposta, avremo

$$A_x+A'_x\cdot 2^{2y}+A''_x\cdot 3^{2y}+\ldots\ldots+A_x^{(x-1)}x^{2y}=x^2A_x+$$
$$x^2A'_x\cdot 2^{2(y-1)}+\ldots\ldots+x^2A_x^{(x-1)}(x^2)^{y-1}+A_{x-1}+$$
$$A'_{x-1}\cdot 2^{2y}+\ldots\ldots+A_{x-1}^{(x-2)}(x-1)^{2y};$$

ed eguagliando a zero i coefficienti delle potenze omologhe dei numeri 2, 3, 4 ec., sarà

$$A_x=x^2A_x+A_{x-1},$$
$$2^2A'_x=x^2A'_x+2^2A'_{x-1},$$
$$3^2A''_x=x^2A''_x+3^2A''_{x-1}$$

ec.

$$(x-1)^2A_x^{(x-2)}=x^2A_x^{(x-2)}+(x-1)^2A_{x-1}^{(x-2)}$$
$$x^2A_x^{(x-1)}=x^2A_x^{(x-1)}.$$

Queste equazioni servono a determinare le funzioni A_x, A'_x ec.. La quantità $A_x^{(x-1)}$ rimane però indeterminata. Si ricava adunque per mezzo dell' integrazione

$$A_x=\frac{1}{(1-2^2)(1-3^2)(1-4^2)\ldots\ldots(1-x^2)}A_1$$
$$A'_x=\frac{2^{2(x-2)}}{(2^2-3^2)(2^2-4^2)\ldots\ldots(2^2-x^2)}A'_2$$
$$A''_x=\frac{3^{2(x-3)}}{(3^2-4^2)(3^2-5^2)\ldots\ldots(3^2-x^2)}A''_3$$

. . . .

. . . .

$$A_x^{(x-2)}=\frac{(x-1)^2}{((x-1)^2-x^2)}A_{x-1}^{(x-2)}$$

$A_x^{(x-1)}=A_x^{(x-1)}$. Il valore per tanto di $z_{x,y}$, sarà

$$z_{x,y}=\frac{1}{(1-2^2)(1-3^2)\ldots\ldots(1-x^2)}A_1+\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{2^{2(x+y-2)}}{(2^2-3^2)(2^2-4^2)\ldots\ldots(2^2-x^2)}A'_2+\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{3^{2(x+y-3)}}{(3^2-4^2)(3^2-5^2)\ldots\ldots(3^2-x^2)}A''_3+\ldots\ldots+A_x^{(x-1)}x^{2y}.$$

Per trovare le quantità A_1, A'_2 ec., conviene che siano dati i valori di $z_{x,0}$, come or ora vedremo. Siccome una quantità qualunque a^2-x^2 si scioglie in questo prodotto $(a+x)(a-x)$, così potremo, sciogliendo in fattori semplici tutte le quantità che formano i denominatori della superior formula, dare al valore di $z_{x,y}$ questa forma

$$z_{x,y}=\pm\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots(x-1)3\ldots\ldots(x+1)}\Big(A_1-\frac{3\cdot 4(x-1)}{x+2}\times\ldots\ldots$$
$$2^{2(x+y-2)}A'_2+\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot(x-2)(x-1)}{(x+1)(x+3)}3^{2(x+y-3)}A''_3-\ldots\ldots$$
$$\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot(x-3)(x-2)(x-1)}{(x+2)(x+3)(x+4)}4^{2(x+y-4)}A'''_4+\text{ec.}\Big).$$

Quando $x-1$ è dispari, si prende il segno inferiore, quando è pari, il superiore.

Facciamo adesso $x=2$, 3, 4 ec., e $y=0$, ed avremo

$$z_{2,0} = -\frac{1}{3}\left(A_1 - \frac{3\cdot4}{4}\cdot A'_2\right) = -\frac{1}{3}A_1 + A'_2$$

$$z_{3,0} = \frac{1}{2\cdot3\cdot4}\left(A_1 - \frac{3\cdot4\cdot2\cdot2^2}{5}\cdot A'_2 + \frac{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot1\cdot2}{5\cdot6}A''_3\right) = \frac{1}{2\cdot3\cdot4}A_1 -$$

$$\frac{2^2}{5}A'_2 + A''_3 .$$

ec.

Dalle quali sono dedotti i valori delle quantità A'_2, A''_3 ec. Per determinare poi la quantità A_1 che rimane in queste equazioni indeterminata, facciasi $x = 1$ nella formula

$$z_{x,y} = A_x + A'_x\cdot 2^{2y} + A''_x\cdot 3^{2y} + \ldots\ldots + A_x^{(x-1)}x^{2y} ,$$ ed

avremo

$z_{1,y} = A_1$; siccome poi A_x deve essere funzione della sola x, così facendovi $x = 1$, sarà A_1 una costante. Per vedere come l'espressione trovata per $z_{x,y}$ soddisfaccia alla proposta nei diversi valori che possono avere le variabili x, y, facciamo $x = 2$, $y = 2$, l'equazione proposta diviene

$z_{2,2} = 2^2 z_{2,1} + z_{1,2}$: ora la formula dell'integrale dà

$$z_{2,2} = -\frac{1}{3}\left(A_1 - \frac{3\cdot4}{4}\cdot2^4\cdot A'_2\right)$$

$$z_{2,1} = -\frac{1}{3}\left(A_1 - \frac{3\cdot4}{4}2^2\cdot A'_2\right)$$

$z_{1,2} = A_1$, e l'equazione

$z_{2,2} = 2^2 z_{2,1} + z_{1,2}$ diviene identica per la sostituzione dei valori $z_{2,2}, z_{2,1}, z_{1,2}$. L'istesso varrebbe per gli altri valori che possono prendere le variabili x, y.

§. 108. Terminiamo questo Capitolo col dare la soluzione di un Problema che appartiene alla partizione dei numeri, per prender' occasione di parlare di un nuovo genere d'equazioni a differenze parziali, del quale non abbiamo fatto parola.

Sia proposto adunque di trovare il numero delle maniere, nelle quali un numero qualunque y può essere la somma di x termini della serie naturale 1, 2, 3, 4 ec., o eguali o diseguali fra loro.

Disponendo per ordine tutte le maniere, nelle quali il numero y può dividersi in x parti eguali o diseguali, ne nasceranno le seguenti serie

$$\left.\begin{array}{l}
y = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + 1 + (y - x + 1)\\
\ldots\ldots + 1 + 2 + (y - x)\\
\ldots\ldots + 3 + (y - x - 1)\\
\quad\text{ec.}\qquad\text{ec.}\\
\ldots\ldots + 1 + 2 + 2 + (y - x - 1)\\
\ldots\ldots + 3 + (y - x - 2)\\
\quad\text{ec.}\qquad\text{ec.}\\
\ldots\ldots + 1 + 3 + 3 + (y - x - 3)\\
\ldots\ldots + 4 + (y - x - 4)\\
\quad\text{ec.}\qquad\text{ec.}
\end{array}\right\} (a)$$

$$\left.\begin{array}{l}
y = 2 + 2 + 2 + \ldots + 2 + 2 + 2 + (y - 2x + 2)\\
\ldots\ldots + 2 + 3 + (y - 2x + 1)\\
\ldots\ldots + 2 + 4 + (y - 2x)\\
\quad\text{ec.}\qquad\text{ec.}\\
\ldots\ldots + 2 + 3 + 3 + (y - 2x)\\
\ldots\ldots + 4 + (y - 2x - 1)\\
\quad\text{ec.}\qquad\text{ec.}\\
\ldots\ldots + 2 + 4 + 4 + (y - 2x - 2)\\
\ldots\ldots + 5 + (y - 2x - 3)\\
\quad\text{ec.}\qquad\text{ec.}
\end{array}\right\} (b)$$

$$\left.\begin{array}{r}
y=3+3+3+\ \ldots\ldots\ +3+3+3+(y-3x+3)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ +4+(y-3x+2)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ +5+(y-3x+1)\\
\text{ec.}\qquad\qquad \text{ec.}\qquad\qquad\qquad\\
\ldots\ldots\ldots\ +3+4+4+(y-3x+1)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ +5+(y-3x)\quad\\
\text{ec.}\qquad\qquad \text{ec.}\qquad\qquad\qquad\\
\ldots\ldots\ldots\ +3+5+5+(y-3x-1)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ +6+(y-3x-2)\\
\text{ec.}\qquad\qquad \text{ec.}\qquad\qquad\qquad
\end{array}\right\}(c)$$

In tutte quelle serie che sono composte di x termini, tutti i numeri devono essere combinati in tutte le maniere soddisfacenti, purchè il primo termine resti sempre lo stesso. Le lettere a, b, c ec. esprimono il numero delle serie corrispondenti, e quindi il numero delle maniere, nelle quali il numero y può dividersi in x parti, è $= a + b + c +$ ec: ora è chiaro che a è il numero delle maniere nelle quali il numero $y - 1$ può dividersi in $x - 1$ parti, e le altre serie b, c ec., sono tali che il valore di b, c ec. sarà lo stesso, se ad esse sostituiamo le seguenti serie composte di x termini.

$$\left.\begin{array}{r}
1+1+1+\ \ldots\ldots\ +1+1+(y-2x+1)\\
\ldots\ldots\ldots\ +1+2+(y-2x)\quad\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ +3+(y-2x-1)\\
\text{ec.}\qquad\qquad \text{ec.}\qquad\qquad\qquad\\
\ldots\ldots\ldots\ +1+2+2+(y-2x-1)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ +3+(y-2x-2)\\
\text{ec.}\qquad\qquad \text{ec.}\qquad\qquad\qquad\\
\ldots\ldots\ldots\ +1+3+3+(y-2x-3)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ +4+(y-2x-4)\\
\text{ec.}\qquad\qquad \text{ec.}\qquad\qquad\qquad
\end{array}\right\}(b)$$

$$\left.\begin{array}{r}
2+2+2+\ \ldots\ldots\ +2+2+(y-3x+2)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ +3+(y-3x+1)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ +4+(y-3x)\quad\\
\text{ec.}\qquad\qquad \text{ec.}\qquad\qquad\qquad\\
\ldots\ldots\ldots\ +2+3+3+(y-3x)\quad\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ +4+(y-3x-1)\\
\text{ec.}\qquad\qquad \text{ec.}\qquad\qquad\qquad\\
\ldots\ldots\ldots\ +2+4+4+(y-3x-2)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ +5+(y-3x-3)\\
\text{ec.}\qquad\qquad \text{ec.}\qquad\qquad\qquad
\end{array}\right\}(c)$$

Si vedrà facilmente che tutte queste seconde serie rappresentano le maniere, nelle quali il numero $y - x$ può dividersi in x parti: infatti ponendo nelle prime $y - x$ in luogo di y ne nascono le seconde; dunque il numero delle maniere nelle quali il numero $y - x$ può dividersi in x parti, è $= b + c + d +$ ec.

Ciò premesso se $z_{x,y}$ rappresenta il numero delle maniere nelle quali può il numero y dividersi in x parti, avremo per sciogliere il Problema da integrare quest' equazione

$$z_{x,y} = z_{x-1,y-1} + z_{x,y-x}.$$

Quest' equazione è di un genere differente da quelle che abbiamo integrate superiormente: poichè in quelle le differenze dell' x e dell' y erano costanti, ed in questa la differenza dell' y è variabile ed eguale ad x. Tal sorte d' equazioni ha insegnato il primo ad integrare il Celebre Dott. Paoli in una sua Memoria inserita nel Tomo secondo della Società Italiana, e se ne è servito per la risoluzione dei Problemi, che riguardano la partizione dei numeri; Problemi sciolti in parte con metodo meno diretto da Eulero nella sua introduzione all' Analisi degli Infiniti.

Occupiamoci adunque dell' integrazione della ritrovata equazione a differenze finite e parziali; facciamo per questo $z_{x,y} = \alpha_x \beta^y$, essendo α_x una funzione di x da determinarsi, e β una costante parimente da determinarsi; sostituendo nella proposta e dividendo per β^{y}, avremo per determinare a_x quest'equazione a differenze finite

$$a_x = \frac{\beta^{-1}}{1-\beta^{-x}}\, a_{x-1}$$

cui soddisfà

$$a_x = \beta^{-x}\,\frac{1}{(1-\beta^{-1})(1-\beta^{-2})\ldots\ldots(1-\beta^{-x})}.$$

Supponghiamo adesso che il denominatore della frazione che moltiplica β^{-x}, sia decomposto nei suoi fattori di primo grado, e questi siano

$1-a\beta^{-1}$, $1-b\beta^{-1}$, $1-c\beta^{-1}$, $1-e\beta^{-1}$ ec., ciò che equivale a dire, siano a, b, c ec., le radici dell'equazione

$(1-\beta^{-1})(1-\beta^{-2})\ldots\ldots(1-\beta^{-x})=0$, o i valori che si troverebbero per β risolvendo queste equazioni $1-\beta^{-1}=0$, $1-\beta^{-2}=0$, $1-\beta^{-3}=0$ ec.: avremo allora

$$a_x = \beta^{-x}\,\frac{1}{(1-a\beta^{-1})(1-b\beta^{-1})(1-c\beta^{-1})\ldots\ldots}.$$

Questa ultima frazione che moltiplica β^{-x}, si riduca in serie ordinata per le potenze di β^{-1}. Per ottenere questa riduzione pongasi

$$\frac{1}{(1-a\beta^{-1})(1-b\beta^{-1})(1-c\beta^{-1})\ldots\ldots} = A + A'\beta^{-1} + A''\beta^{-2} + A'''\beta^{-3} + \text{ec.},$$

e prendendo i logaritmi da ambe le parti, avremo

$$-\left\{l(1-a\beta^{-1}) + l(1-b\beta^{-1}) + l(1-c\beta^{-1}) + \ldots\ldots\right\} = l\,(A + A'\beta^{-1} + A''\beta^{-2} + A'''\beta^{-3} + \text{ec.})$$

Ora quest'ultima equazione essendo vera per qualunque valore di β, sussisterà dunque ancora se in vece di β si pone $\beta+\omega$, essendo ω una quantità qualunque: avremo per tanto

$$-\left\{l(1-a(\beta+\omega)^{-1}) + l(1-b(\beta+\omega)^{-2}) + l(1-c(\beta+\omega)^{-3}) + \ldots\ldots\right\} = l\left\{A + A'(\beta+\omega)^{-1} + A''(\beta+\omega)^{-2} + A'''(\beta+\omega)^{-3} + \ldots\ldots\right\}:$$

sviluppati i due membri di questa equazione secondo le potenze dell'indeterminata ω, i coefficienti delle respettive potenze di ω s'eguaglieranno fra di loro, e prendendo l'equazione che ci danno i coefficienti della prima potenza, avremo questa nuova equazione

$$-\left\{\frac{a\beta^{-2}}{1-a\beta^{-1}} + \frac{b\beta^{-2}}{1-b\beta^{-1}} + \frac{c\beta^{-2}}{1-c\beta^{-1}} + \ldots\ldots\right\} = -\frac{A'\beta^{-2} + 2A''\beta^{-3} + 3A'''\beta^{-4} + \ldots\ldots}{A + A'\beta^{-1} + A''\beta^{-2} + A'''\beta^{-3} + \text{ec.}}$$

ovvero

$$\frac{a}{1-a\beta^{-1}} + \frac{b}{1-b\beta^{-1}} + \frac{c}{1-c\beta^{-1}} + \ldots\ldots = \frac{A' + 2A''\beta^{-1} + 3A'''\beta^{-2} + \ldots\ldots}{A + A'\beta^{-1} + A''\beta^{-2} + A'''\beta^{-3} + \ldots}.$$

Sviluppando ora in serie le frazioni del primo membro, avremo

$$a+b+c+\text{ec.} + (a^2+b^2+c^2+\text{ec.})\beta^{-1} + (a^3+b^3+c^3+\text{ec.})\beta^{-2} + (a^4+b^4+c^4+\text{ec.})\beta^{-3} + \ldots\ldots = \frac{A' + 2A''\beta^{-1} + 3A'''\beta^{-2} + \ldots\ldots}{A + A'\beta^{-1} + A''\beta^{-2} + A'''\beta^{-3} + \ldots};$$

ed indicando per r la somma di tutte le prime potenze delle radici a, b, c ec., per r' quella dei quadrati, per r'' quella delle terze potenze, ed in generale per $r^{(m)}$ quella delle potenze $(m+1)^{esime}$, s'avrà

$$r + r'\beta^{-1} + r''\beta^{-2} + r'''\beta^{-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots =$$

$$\frac{A' + 2A''\beta^{-1} + 3A'''\beta^{-2} + \ldots\ldots}{A + A'\beta^{-1} + A''\beta^{-2} + A'''\beta^{-3} + \ldots}.$$

Quest' ultima equazione ordinata secondo le potenze di β^{-1}, ci dà le seguenti equazioni per determinare i coefficienti A, A', A'', A''' ec.,

$$A' = Ar$$

$$2A'' = A'r + Ar'$$

$$3A''' = A''r + A'r' + Ar''$$

$$4A'''' = A'''r + A''r' + A'r'' + Ar'''$$

ec.

La quantità A poi si determinerà facendo $\beta = 0$ nel valore di α_x.

Dalle precedenti equazioni si ricava

$$\frac{A'}{A} = r$$

$$\frac{A''}{A} = \frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}$$

$$\frac{A'''}{A} = \frac{r''}{3} + r\frac{r'}{3} + \left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)\frac{r}{3}$$

$$\frac{A''''}{A} = \frac{r'''}{4} + r\frac{r''}{4} + \left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)\frac{r'}{4} + \left(\frac{r''}{3} + r\frac{r'}{3} + \left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)\frac{r}{3}\right)\frac{r}{4}$$

ed in generale

$$\frac{A^{(m+1)}}{A} = \frac{r^{(m)}}{m+1} + r\frac{r^{(m-1)}}{m+1} + \left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)\frac{r^{(m-2)}}{m+1} + \left(\frac{r''}{3} + r\frac{r'}{3} +\right.$$

$$\left.\left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)\frac{r}{3}\right)\frac{r^{(m-3)}}{m+1} + \left\{\frac{r'''}{4} + r\frac{r''}{4} + \left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)\frac{r'}{4} +\right.$$

$$\left.\left(\frac{r''}{3} + r\frac{r'}{3} + \left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)\frac{r}{3}\right)\frac{r}{4}\right\}\frac{r^{(m-4)}}{m+1} + \left\{\frac{r''''}{5} + r\frac{r'''}{5} + \ldots\right.$$

$$\left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)\frac{r''}{5} + \left(\frac{r''}{3} + r\frac{r'}{3} + \left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)\frac{r}{3}\right)\frac{r'}{5} + \left[\frac{r'''}{4} +\right.$$

$$\left.\left.r\frac{r''}{4} + \left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)\frac{r'}{4} + \left(\frac{r''}{3} + r\frac{r'}{3} + \left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)\frac{r}{3}\right)\frac{r}{4}\right]\frac{r}{5}\right\} \times$$

$$\frac{r^{(m-5)}}{m+1} + \text{ec.}$$

Ecco la legge che osservano fra loro i diversi termini di questa formula, la cui forma è

$$\frac{r^{(m)}}{m+1} + B\frac{r^{(m-1)}}{m+1} + C\frac{r^{(m-2)}}{m+1} + D\frac{r^{(m-3)}}{m+1} + E\frac{r^{(m-4)}}{m+1} + \ldots\ldots$$

Si ottiene il coefficiente B del secondo termine, ponendo nel primo $m = 0$; il coefficiente C del terzo, facendo nel primo e nel secondo termine $m = 1$, e generalmente il coefficiente del termine $(\mu + 2)^{esimo}$ facendo nei termini antecedenti $m = \mu$.

Trovati i valori dei coefficienti A', A'', A''' ec., avremo

$$z_{x,y} = A\beta^{y-x} + A'\beta^{y-x-1} + A''\beta^{y-x-2} + A'''\beta^{y-x-3} + \text{ec.}$$

e per il ragionamento fatto (§. 86.), troveremo

$$z_{x,y} = A\varphi(y-x) + A'\varphi(y-x-1) + A''\varphi(y-x-2) +$$
$$A'''\varphi(y-x-3) + \text{ec.}$$

ovvero, poichè facendo $\beta = 0$ abbiamo $A = 1$,

$$z_{x,y} = \varphi(y-x) + A'\varphi(y-x-1) + A''\varphi(y-x-2) +$$
$$A'''\varphi(y-x-3) + \text{ec.}$$

§. 109. Troviamo adesso gli effettivi valori di A', A'', A''' ec.

Le diverse potenze delle radici delle equazioni $\beta - 1 = 0$, $\beta^2 - 1 = 0$, $\beta^3 - 1 = 0$, $\beta^4 - 1 = 0$, ... $\beta^x - 1 = 0$, sono espresse dalla Tavola seguente

		1^a	2^a	3^a	4^a	5^a	6^a	7^a	8^a	9^a	ec.
Potenze											
Equazione	1^a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	2^a	0	2	0	2	0	2	0	2	0	
	3^a	0	0	3	0	0	3	0	0	3	
	4^a	0	0	0	4	0	0	0	4	0	
	5^a	0	0	0	0	5	0	0	0	0	
	6^a	0	0	0	0	0	6	0	0	0	
	ec.	ec.	ec.	ec.	ec.	ec.	ec.	ec.	ec.	ec.	

Così la prima fila verticale di questa Tabella, sommata, ci dà il valore di r; la seconda, sommata, ci dà il valore di r'; la terza quello di r''; la quarta quello di r''', e così di seguito.

Ora è facile il vedere che la somma delle potenze m^{esime} delle radici di tutte queste equazioni, ovvero la somma della colonna m^{esima} della Tabella superiore, potrà esprimersi dalla formula

$m + \frac{m}{2} + \frac{m}{3} + \frac{m}{4} + \ldots\ldots\ldots + \frac{m}{m}$, purchè si rigettino tutti i termini fratti, e quei che sono maggiori di x: questa formula così intesa rappresentiamola col segno δm, ed avremo qualunque sia m, $r^{(m-1)} = \delta m$, ovvero $r^{(m)} = \delta(m+1)$.

Sostituendo adunque i respettivi valori di r, r', r'', r''' ec. nelle quì sopra trovate espressioni per i coefficienti A', A'', A''' ec., avremo

$$A' = \delta 1$$

$$A'' = \frac{\delta 2}{2} + \delta 1 . \frac{\delta 1}{2}$$

$$A''' = \frac{\delta 3}{3} + \delta 1 . \frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 . \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}$$

ed in generale

$$A^{(m)} = \frac{\delta m}{m} + \delta 1 \frac{\delta(m-1)}{m} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta(m-2)}{m} + \left\{\frac{\delta 3}{3} + \right.\ldots$$

$$\left.\delta 1 \frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right\}\frac{\delta(m-3)}{m} + \left\{\frac{\delta 4}{4} + \delta 1 \frac{\delta 3}{4} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \right.\right.$$

$$\left.\left.\delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 2}{4} + \left[\frac{\delta 3}{3} + \delta 1 \frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right]\frac{\delta 1}{4}\right\}\frac{\delta(m-4)}{m} + \text{ec.}$$

Così nell' espressione

$$\varphi(y-x) + A'\varphi(y-x-1) + A''\varphi(y-x-2) + \ldots\ldots$$

che si è trovata per $z_{x,y}$, la funzione indicata da φ è arbitraria, ed i coefficienti A', A'' ec. sono quantità numeriche conosciute per le formule superiori.

Facendo $x = 1$, abbiamo $A' = A'' = A''' =$ ec. $= 1$: dunque

$$z_{y,1} = \varphi(y-1) + \varphi(y-2) + \varphi(y-3) + \varphi(y-4) + \text{ec.},$$

e ponendo $y-1$ in luogo di y, sarà

$$z_{y-1,1} = \varphi(y-2) + \varphi(y-3) + \varphi(y-4) + \text{ec.},$$

Ora sottraendo queste due equazioni, una dall' altra, avremo

$$z_{y,1} - z_{y-1,1} = \varphi(y-1);$$

dalle quali si ricava

$$\varphi(y-2) = z_{y-1,1} - z_{y-2,1}$$

$$\varphi(y-3) = z_{y-2,1} - z_{y-3,1}$$

. . . .

. . . .

$$\varphi(1) = z_{2,1} - z_{1,1}$$

$$\varphi(0) = z_{1,1} - z_{0,1}$$

$$\varphi(-1) = z_{0,1} - z_{-1,1}$$

. . . .

. . . .

$\varphi(-p) = z_{-p+1,1} - z_{-p,1}$.

Ma dalla natura del Problema si deduce $z_{y,1} = 1$ se y è positiva, e

$z_{y,1} = 0$ se y è zero o negativa, dunque

$\varphi(y-1) = z_{y,1} - z_{y-1,1} = 1 - 1 = 0$

$\varphi(y-2) = 1 - 1 = 0$

$\varphi(y-3) = 1 - 1 = 0$ . . . . . .

. . . .

. . . .

$\varphi(1) = 1 - 1 = 0$

$\varphi(0) = 1 - 0 = 1$

$\varphi(-1) = 0$

$\varphi(-2) = 0$

. . . . . .

. . . . . .

$\varphi(-p) = 0$

cioè $\varphi(y)$ è $= 1$ nel solo caso di $y = 0$, negli altri casi è sempre $= 0$.

Avremo perciò $z_{x,y}$ = al coefficiente di $\varphi(0)$, il quale se supponghiamo che sia $A^{(m)}$, avremo $y - x - m = 0$, cioè $m = y - x$, e quindi

$$z_{x,y} = \frac{\delta(y-x)}{y-x} + \delta 1 \frac{\delta(y-x-1)}{y-x} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta(y-x-2)}{y-x} + \left\{\frac{\delta 3}{3} + \delta 1 \frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right\}\frac{\delta(y-x-3)}{y-x} + \left\{\frac{\delta 4}{4} + \delta 1 \frac{\delta 3}{4} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 2}{4} + \left(\frac{\delta 3}{3} + \delta 1 \frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta 1}{4}\right\} \times \frac{\delta(y-x-4)}{y-x} + \text{ec.}$$

Cerchiamo, per esempio, in quante maniere il numero diciotto può dividersi in sedici parti; avremo $x = 16$, $y = 18$, $\delta(y - x) = \delta 2 = 2 + 1 = 3$: quindi $z_{18,16} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$: queste due maniere sono le seguenti

$18 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3$

$18 = 1 + \ldots + 1 + 2 + 2$.

Cerchiamo adesso in quante maniere si può dividere il numero 9 in quattro parti; sarà $x = 4$, $y = 9$, $\delta(y - x) = \delta 5 = 1$, $\delta 4 = 4 + 2 + 1 = 7$, $\delta 3 = 3 + 1 = 4$, $\delta 2 = 2 + 1 = 3$, $\delta 1 = 1$. Onde il numero delle maniere dimandato sarà

$$z_{9,4} = \frac{1}{5} + \frac{7}{5} + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{4}{5} + \left(\frac{4}{3} + \frac{3}{3} + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}\right)\frac{3}{5} + \ldots \left\{\frac{7}{4} + \frac{4}{4} + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{3}{4} + \left(\frac{4}{3} + \frac{3}{3} + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}\right)\frac{1}{4}\right\}\frac{1}{5} = \frac{8}{5} + \frac{8}{5} + \frac{9}{5} + \frac{5}{5} = 6.$$

Si può dunque comporre il numero 9 con quattro parti in sei differenti maniere:
queste maniere sono le seguenti

$9 = 1 + 1 + 1 + 6$

$9 = 1 + 1 + 2 + 5$

$9 = 1 + 2 + 2 + 4$

$9 = 1 + 1 + 3 + 4$

$9 = 1 + 2 + 3 + 3$

$9 = 2 + 2 + 2 + 3$.

Nella sopra citata memoria si troveranno molti interessanti Problemi dello stesso genere.

I. APPLICAZIONE

Del Calcolo delle Differenze Finite alla Teoria degli Azzardi.

---

§. 110. NOI abbiamo fatte tratto tratto in tutto il Calcolo delle Differenze Finite diverse applicazioni alle combinazioni, alle serie, alla partizione dei numeri. Le applicazioni alla Teoria degli Azzardi e delle probabilità, ed alla Geometria, abbiamo creduto bene di darle a parte, precedute da una breve Raccolta di Nozioni necessarie per ben comprenderle. Così i nostri Leggitori non avranno bisogno di consultare alcun Libro per ricercarvi i principj che servono di fondamento alla stima della probabilità degli eventi.

I. Si chiama *Certezza* l'espettativa che si ha di un evento o il motivo di credere che succeda questo evento, il quale dovendo accadere, non può accadere in una maniera diversa da quello che si desidera: così se in un'urna si hanno cento palle nere soltanto, l'espettativa che si ha d'estrarre una palla nera, quando si pone la mano nell'urna, è una certezza.

II. Si chiama poi *Probabilità* l'espettativa che si ha di un evento, o il motivo di credere che succeda questo evento, il quale dovendo accadere può accadere o nella maniera che si desidera, o in una maniera diversa: così se nell'urna suddetta sono sessanta palle nere e quaranta bianche, si chiama *Probabilità* l'espettativa che si ha d'estrarre una palla nera quando si ponga la mano nell'urna.

La più semplice riflessione serve per farci conoscere che la probabilità d'ottenere un evento sarà di diversi gradi, secondo che il numero dei casi che lo possono condurre, ha un diverso rapporto col numero dei casi che lo possono non far succedere; così se nell'urna citata la quale contiene cento palle fra bianche e nere, saranno ottanta le palle nere, l'espettativa d'ottenere una palla nera, o la probabilità, sarà in questo caso maggiore che nel precedente; se le palle nere fossero novanta, la probabilità sarebbe anche maggiore; e se fossero novanta nove nere, ed una soltanto bianca, la probabilità d'ottenere una palla nera sarebbe la più grande possibile in questo caso, ossia la più vicina alla certezza.

III. Si può adunque considerare la probabilità come una funzione della certezza, poichè aumentando continuamente una probabilità si giunge alla certezza medesima: nell'esempio superiore la probabilità aumenta con l'aumentare il numero delle palle nere, le quali se dall'essere novanta nove si riducono a cento, la probabilità si cangia in certezza.

IV. Avendo adunque convenuto di rappresentare la certezza per l'unità, dovranno rappresentarsi le probabilità per frazioni dell'unità.

§. 111. Determiniamo ora queste frazioni: nell'esempio dell'urna, facilmente si comprende che se avremo cinquanta palle nere e cinquanta bianche, l'espettativa o il motivo di credere che con una estrazione uscirà dall'urna una palla nera, eguaglierà l'espettativa d'ottenere una palla bianca; e se avremo settanta cinque palle nere, venti cinque bianche, l'espettativa per ottenere una palla nera sarà tripla di quella per ottenere una palla bianca: poichè dividendo il settanta cinque in tre parti eguali, avremo nell'urna quattro masse di venti cinque palle ciascuna, tre masse di palle nere ed una di bianche; ed essendo egualmente facile che una mano introdotta nell'urna prenda la palla da una qualunque di quelle tre masse, la facilità che la mano prenda una palla nera, sarà in conseguenza tripla della probabilità che ne prenda una bianca, l'espettativa adunque, o il motivo di credere, o la probabilità per avere la palla nera, sarà anche tripla di quella per l'estrazione della bianca.

In generale se a sarà il numero delle palle nere, b quello delle bianche, l'espettativa per ottenere una palla nera, starà all'espettativa di ottenere una palla bianca come, $a:b$; ed in conseguenza le due probabilità, le quali altro non sono che le suddette espettative staranno fra loro $::a:b$: indicando adunque per m la frazione che rappresenta la probabilità d'avere una palla nera, per n la frazione che rappresenta la probabilità d'avere una palla bianca, avremo

$$m:n::a:b, \text{ dalla quale } mb=na.$$

Ora estraendo dall'urna una palla, io ho la certezza che questa palla sarà o nera o bianca: così l'espettativa d'avere una palla nera, aggiunta all'espettativa d'avere una palla bianca, sarà eguale alla certezza: dunque $m + n = 1$, poichè la certezza è indicata per l'unità.

Dalle due equazioni ritrovate fra m ed n si ricava

$m = \frac{a}{a+b}$, $n = \frac{b}{a+b}$: cioè la probabilità per ottenere una palla nera è eguale al numero delle palle nere diviso per il numero totale delle palle bianche e nere; ed egualmente la probabilità per ottenere una palla bianca è eguale al numero delle palle bianche diviso per il numero totale delle palle.

Nella stessa guisa si dimostrerebbe che se nell' urna fossero palle nere, bianche e rosse, ed i respettivi numeri di esse a, b, c, la probabilità per estrarre una palla bianca sarebbe $= \frac{b}{a+b+c}$: quella per estrarre una palla nera sarebbe $= \frac{a}{a+b+c}$, e quella in fine per estrarre una palla rossa $= \frac{c}{a+b+c}$.

Di qui si ricava in generale il primo principio per stimare la probabilità degli Eventi.

V. *Principio I.* „ La probabilità di un evento è eguale ad „ una frazione, il cui numeratore è formato dal numero dei casi „ favorevoli che possono far succedere questo evento, ed il cui „ denominatore è formato dal numero dei casi favorevoli aumentato del numero dei casi contrarj „.

Così se p indica il numero dei casi che possono condurre un evento; q il numero dei casi che possono non condurlo; la probabilità perchè l'evento succeda, sarà $\frac{p}{p+q}$, e quella perchè non succeda, sarà $\frac{q}{p+q}$.

Se poi dal succedere un certo evento dipende il guadagno d'una determinata quantità m, è facile concepire che pria che l'evento succeda, la quantità $\frac{p}{p+q}\, m$ sarà la porzione della scommessa m, che apparterrà a colui, il quale attende questo evento con una probabilità $\frac{p}{p+q}$.

Infatti nel sopra riportato esempio delle palle nere e delle palle bianche poste nella stessa urna, se è stato promesso il guadagno della quantità m a chi indovina qual palla in una estrazione uscirà dall' urna, è manifesto che ciascuna delle palle nere o bianche che sono nell' urna, porta, sortendo, il guadagno della quantità m: ora ciascuna di quelle cento palle potendo egualmente sortire, avrà ciascuna di esse il dritto ad un centesimo di m, cioè alla quantità $\frac{m}{100}$: dunque 60 palle nere avranno dritto prima dell' estrazione a $\frac{60}{100}\, m$: dunque quello che tiene in favore delle palle nere avrà dritto prima dell' estrazione a $\frac{60}{100}\, m$, e quello che tiene in favore delle palle bianche a $\frac{40}{100}\, m$. Generalizzando la dimostrazione si concluderebbe che

VI. Essendo la probabilità di un evento $\frac{p}{p+q}$, se col succedere questo evento si deve ottenere una quantità qualunque m, prima che l'evento succeda ha dritto, chi lo aspetta, ad una porzione di $m = \frac{p}{p+q}\, m$.

Questa quantità $\frac{p}{p+q}\, m$ si chiama *Sorte*: così se p è la probabilità che ha un Giocatore di guadagnare una scommessa m; pm è la sorte di quel Giocatore.

§. 112. La probabilità di cui abbiamo parlato, dicesi probabilità *Semplice*, per distinguerla da un' altra probabilità, cui si dà il nome di *Composta* come ora spiegheremo.

VII. L' espettativa o la probabilità di un evento, il quale dipenda da alcuni altri eventi egualmente probabili, si chiama *Probabilità composta*.

Così per esempio se in una stanza siano dieci urne, sette delle quali contengano cento palle rosse per ciascheduna, e che ciascuna delle altre tre contenga egualmente cento palle, sessanta delle quali siano nere e quaranta bianche; e se si supponga che un Uomo, senza distinguere quali sono le urne con le palle rosse, e quelle con le palle bianche e nere, s' introduca in quella stanza per estrarre da quell' urna che più gli piace, una palla nera, la probabilità per estrarre questa palla nera si chiama composta, perchè dipende; 1°. dalla probabilità di sciegliere una delle urne ove si trovano le palle bianche e nere; 2°. dalla probabilità di estrarre la palla nera da essa.

Ora quale è la misura di questa probabilità composta?

Sia m la probabilità che vi è per estrarre da una di quelle tre urne la palla nera. Dieci essendo le urne, e tre sole quelle, dalle quali l'Uomo può estrarre la palla nera, ovvero quelle ciascuna delle quali gli dà la probabilità m, è evidente che l'espettativa di sciegliere una di queste urne è $\frac{3}{10}$, e che prima di sciegliere un'urna, l'Uomo che deve estrarre la palla nera, non ha che tre decimi di speranza (VII) di guadagnare le probabilità m; egli in conseguenza, prima d'entrare nella stanza dell'urne, non ha per estrarre la palla nera che tre decimi della probabilità m, cioè $\frac{3}{10}m$ che nel nostro caso in questione è $= \frac{3}{10} \cdot \frac{60}{100}$; e questa espressione rappresenta quella probabilità che abbiamo chiamata composta.

Dunque per avere in questo caso la misura della probabilità composta, conviene moltiplicare la probabilità che vi è d'estrarre la palla nera da un'urna, per la probabilità di sciegliere fra tutte le urne una di quelle che contengono le palle bianche e nere.

Il ragionamento che noi abbiamo fatto particolarmente sopra le urne, e sopra le palle bianche e nere, s'applica in generale alla determinazione della probabilità composta, onde succeda un qualunque evento che dipenda da un altro evento egualmente probabile, ed in generale s'avrà questo

VIII. *Principio secondo:* se la contingibilità di un evento dipende comunque da altri eventi, la probabilità della sua riuscita è eguale al prodotto della probabilità di ciascuno.

Così la probabilità P che accada un evento A, il quale non può accadere, se non accade anche un altro evento B la cui probabilità è p, il quale evento B non può del pari accadere se non accade anche un evento C la cui probabilità è q, e così di seguito, si otterrà, moltiplicando le probabilità p, q, r ec., semplici fra loro, e sarà $P = pqr$ ec.

Per esempio, se la camera, ove si trovano le prefate dieci urne, fosse in un andito fra altre otto camere, delle quali sette non contenessero le urne, e si proponesse a taluno d'andare in questo andito ad indovinare la stanza ove sono le urne, e quindi indovinare l'urna ove sono le palle nere e bianche, ed estrarre una palla nera, la probabilità d'ottenere questo intento sarebbe $P = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{60}{100} = \frac{9}{400}$.

Nè bisogna considerare l'espettativa che abbiamo di un evento, o il motivo di credere che questo evento succeda come identicamente eguale alla frazione che esprime la probabilità del medesimo evento; poichè quel sentimento morale d'attendere un evento è affatto eterogeneo alla quantità numerica che esprime la probabilità del medesimo; e noi intanto abbiamo confusa l'espettativa di un evento colla probabilità di esso in quanto che sono queste quantità proporzionali fra loro: infatti nella stessa proporzione in cui cresce la probabilità, cresce il motivo di credere che l'evento succeda; del resto questa eguaglianza fra l'espettativa e l'espressione cui essa è proporzionale, è dello stesso genere della eguaglianza fra la velocità ed il quoziente dello spazio diviso per il tempo.

§. 113. Nella ricerca adunque della probabilità di un evento tutto si riduce a determinare il numero dei casi favorevoli all'evento, ed il numero dei casi favorevoli e sfavorevoli insieme: così se si volesse sapere qual probabilità vi è per credere che tirando due dadi di sei faccie ciascuno, si scoprano due numeri tali, che la loro somma sia 9, converrà cercare prima in quante maniere si possono combinare le sei faccie di un dado con le sei faccie dell'altro, due a due, e poi quante di queste combinazioni portano il nove: ora le combinazioni totali sono 36, e quelle favorevoli, o che portano il numero 9 sono 4: la probabilità dunque per ottenere l'evento è $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Si concepisce da ciò che la Teoria generale delle combinazioni è il fondamento di quella delle probabilità; pure si può direttamente applicare quel calcolo alla soluzione delle diverse questioni sulle probabilità che sarebbe difficilissimo, se non impossibile risolvere in tutta la generalità per la semplice Teoria delle combinazioni.

Noi daremo quì la soluzione diretta di varj Problemi appartenenti alle probabilità, esponendoli secondo l'ordine della maggiore o minore facilità che essi hanno a mettersi in equazione.

PROBLEMA I.

§. 114. Due Giocatori A, B scommettono fra loro, che chi di essi farà il primo un numero n di tiri favorevoli guadagnerà la partita: manca a B un numero x di tiri favorevali; ne manca ad A uno soltanto; si cerca la probabilità che ha ciascuno di essi di guadagnare.

Trovate le probabilità dei due Giocatori abbiamo subito la sorte di ciascuno di essi moltiplicando la scommessa per la respettiva probabilità; e se la scommessa si rappresenta per l'unità, allora l'espressione analitica della probabilità è quella stessa della sorte.

Sia z_x funzione incognita di x, la probabilità di A. Supponghiamo ora che si faccia un tiro: questo o è favorevole ad A, o è favorevole a B (imperocchè se è sfavorevole ad ambidue non cangia la questione). Se è favorevole ad A, allora la partita è terminata, ed A guadagna: se è favorevole a B, allora dopo questo tiro la probabilità di A diviene z_{x-1}.

Indichiamo per p la probabilità che il tiro sia favorevole ad A; e per q la probabilità che il tiro sia favorevole a B.

Può adunque il Giocatore A o guadagnare la certezza se il tiro gli è favorevole, o la probabilità z_{x-1} se il tiro è favorevole a B: egli adunque prima che il tiro segua (110, VI) ha dritto ad una porzione p della stessa certezza, e ad una porzione q della probabilità z_{x-1}: ma la certezza è rappresentata (IV) per l'unità, dunque avremo l'equazione

$z_x = p + qz_{x-1}$: ovvero $-qz_x + z_{x+1} = p$,

dall'integrazione della quale dipenderà la soluzione del Problema.

Paragonando adesso questa equazione con quella del §. 46, avremo

$$z_x = q^{x-1}\Sigma \frac{p}{q^x} = Cq^{x+1} + q^{x-1}\Sigma \frac{p}{q^{x-1}}$$

$z_x = Cq^{x-1} + \frac{p}{1-q}$. Per determinare la costante C, s'osservi che se $x = 1$, cioè se manca a B un solo colpo, allora la probabilità di A per guadagnare è la stessa probabilità p; dal che si deduce $p = C + \frac{p}{1-q}$, e quindi $C = -\frac{pq}{1-q}$: sarà dunque

$z_x = \frac{p}{1-q} - \frac{p}{1-q}q^x$, indicando per ω_x la probabilità di B, un ragionamento simile a quello fatto per A, ci darà $\omega_x = q\omega_{x-1}$, e quindi $\omega_x = Cq^x$: ora $x = 1$, dà $\omega_x = q$; dunque $C = 1$, perciò $\omega_x = q^x$. Se q fosse eguale ad $1 - p$, allora senza cercare direttamente la probabilità di B, questa sarebbe stata $= 1 - z_x$.

Supponendo $p = q = \frac{1}{2}$, abbiamo $z_x = 1 - \frac{1}{2^x}$; e la probabilità che avrà B, sarà $\frac{1}{2^x}$.

Ponghiamo per esempio $x = 3$, ed avremo $z_x = z_3 = \frac{7}{8}$: così A avrà $\frac{7}{8}$ di probabilità di guadagnare la partita, e B ne avrà $\frac{1}{8}$.

A questo stesso Problema se ne riduce un altro per quanto in apparenza sembri diverso.

„ Supponendo che la probabilità d'avere un evento sia p, „ quella d'avere l'evento contrario q, si dimanda quale è la pro„ babilità d'avere quell'evento almeno una volta in x tiri „ o per spiegarsi più semplicemente, supponendo che in un'urna trovisi un numero b di palle bianche, un numero c di palle nere, si cerca la probabilità d'estrarre almeno una palla bianca in x estrazioni.

Si suppone però che ad ogni tiro sia rimessa nell'urna la palla estratta, onde resti sempre lo stesso numero di palle bianche e nere.

Una piccola riflessione basta a mostrare che la probabilità d'estrarre una palla bianca in x estrazioni, è la probabilità di guadagnare una partita quando manca a me un sol tiro favorevole, e ne mancano x al mio contrario, e questa è stata calcolata nel Problema superiormente risoluto; così (110, V) facendo $p = \frac{b}{b+c}$, $q = \frac{c}{b+c}$, avremo $z_x = 1 - \left(\frac{c}{b+c}\right)^x$.

Si dimanda per esempio qual probabilità vi è di ottenere il numero 6 tirando un dado di 6 faccie tre volte?

Si faccia nella formula superiore $b = 1$, $c = 5$, ed avremo $z_3 = 1 - \frac{5^3}{6^3} = \frac{216 - 125}{216} = \frac{91}{216}$; e la probabilità di non avere il 6 sarà $\frac{126}{216}$: le due probabilità, cioè quella di averlo, a quella di non l' avere :: 91 : 125 :: 3 : 4 circa.

Per farne un altro esempio si dimandi la probabilità d' ottenere il numero 10 tirando due dadi quattro volte.

Avremo in questo caso $b = 5$, $c = 31$, $x = 4$, e quindi $z_4 = \frac{36^4 - 31^4}{36^4} = \frac{756095}{1679616} = 0,45$ circa.

Accade spesso nella società che scommettendo due Giocatori per guadagnare una certa partita, vogliono fra loro dividere la scommessa prima d' aver terminata la detta partita: per sapere in questo caso qual porzione di scommessa tocca a ciascuno, altro non si fa (111, VI) che determinata la probabilità che aveva ciascuno di guadagnare la partita, moltiplicare per questa la quantità che esprime la scommessa; il prodotto sarà allora la porzione della scommessa che a ciascuno appartiene. Così supponendo che Tizio e Cajo, le cui abilità nel gioco siano eguali, scommettano cinquanta Scudi per ciascuno, e che mancando a Tizio un sol colpo favorevole per guadagnare la partita, e a Cajo tre colpi, essi non volendo continuare a giocare, propongano di dividersi la scommessa fra loro, la parte che deve toccare a Tizio sarà $\frac{7}{8}$ 100 Scudi, e la parte di Cajo $\frac{1}{8}$ 100: sarà cioè la parte di Tizio eguale alla scommessa di 100 Scudi moltiplicata per la probabilità che esso ha di guadagnare, e simile sarà la parte di Cajo.

PROBLEMA II.

§. 115. Avvi in un' urna un numero m di palle bianche, un numero n delle nere: Tizio e Cajo fanno scommessa, il primo dicendo che sortiranno dall' urna a palle bianche avanti che sortano b palle nere; ed il secondo sostiene il contrario. Manca a Tizio una palla bianca perchè ci guadagni; ne manca un numero x a Cajo: supponendo che le palle estratte non si ripongano nell' urna (perchè se si riponessero nell' urna s' avrebbe il Problema antecedente) si chiede quale è la probabilità dei due Giocatori?

Ecco i dati del Problema

Prima di cominciare il gioco.

Num°. delle Palle bianche . . . . . . $= m$

Num°. delle Palle nere . . . . $= n$

Num°. totale delle Palle . . . . $= m + n$

Essendo il gioco nella situazione che espone il Problema

N°. delle Palle bianche estratte . . . . . . $= a - 1$

N°. delle residue nell' urna . . . . $= m - a + 1$

N°. delle Palle nere estratte . . . . $= b - x$

N°. delle residue . . . . $= n - b + x$

N°. totale delle Palle residue nell' urna $= m + n - a - b + x + 1$

La probabilità che i Giocatori hanno in questa situazione per estrarre una palla bianca (110, V) è $p = \frac{m - a + 1}{m + n - a - b + x + 1}$: quella per estrarre la palla nera è $q = \frac{n - b + x}{m + n - a - b + x + 1}$.

Il medesimo ragionamento che si è fatto per il Problema I. ci dà questa equazione

$$z_x = \frac{m - a + 1}{m + n - a - b + x + 1} + \frac{n - b + x}{m + n - a - b + x + 1} z_{x-1}$$

a differenze finite del primo ordine a coefficienti variabili.

Facciamo per semplicità di calcolo $m - a + 1 = \alpha$, $m + n - a - b + 1 = \beta$, $n - b = \alpha'$, e l' equazione prenderà questa forma più semplice

$$z_x = \frac{\alpha}{\beta + x} + \frac{\alpha' + x}{\beta + x} z_{x-1}.$$

Facendo crescere la x d' un' unità essa diviene

$z_{x+1} = \frac{\alpha}{\beta+x+1} + \frac{\alpha'+x+1}{\beta+x+1} z_x$, equazione che paragonata con quella del §. 46., avrà per integrale completo

$$\begin{aligned} z_x = {} & \frac{\alpha}{\beta+x} + \\ & \frac{\alpha'+x}{\beta+x}\cdot\frac{\alpha}{\beta+x-1} + \\ & \frac{\alpha'+x}{\beta+x}\cdot\frac{\alpha'+x-1}{\beta+x-1}\cdot\frac{\alpha}{\beta+x-2} + \\ & \frac{\alpha'+x}{\beta+x}\cdot\frac{\alpha'+x-1}{\beta+x-1}\cdot\frac{\alpha'+x-2}{\beta+x-2}\cdot\frac{\alpha}{\beta+x-3} + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & \frac{\alpha'+x}{\beta+x}\cdot\frac{\alpha'+x-1}{\beta+x-1}\cdot\frac{\alpha'+x-2}{\beta+x-2}\cdot\ldots\ldots\frac{\alpha'+2}{\beta+2}\cdot\frac{\alpha'+1}{\beta+1}\cdot C. \end{aligned}$$

Per determinare la costante C si faccia $x=1$, ed avremo

$z_1 = \frac{\alpha}{\beta+1} + \frac{\alpha'+1}{\beta+1}.C$: ma la probabilità che ha Tizio di guadagnare la partita quando manca a Cajo un solo tiro, cioè z_1, è eguale alla stessa probabilità che ha Tizio per ottenere un tiro favorevole, cioè $= \frac{m-a+1}{m+n-a-b+1}$; dunque, sostituendo per α, α', β, i loro valori, avremo

$$\frac{m-a+1}{m+n-a-b+2} = \frac{m-a+1}{m+n-a-b+2} + \frac{n-b+1}{m+n-a-b+2}C$$

d' onde si ricava $C=0$, e quindi l' integrale rimane privo di quell' ultimo termine e finisce al termine

$$+ \frac{\alpha'+x}{\beta+x}\cdot\frac{\alpha'+x-1}{\beta+x-1}\ldots\ldots\ldots\frac{\alpha'+2}{\beta+2}\cdot\frac{\alpha}{\beta+1}.$$

Per farne un esempio, sia $m=10$, $n=5$, $a=4$, $b=3$, ed $x=2$: sarà $\alpha=7$, $\alpha'=2$, $\beta=9$: facendo le opportune sostituzioni, avremo

$z_2 = \frac{7}{11} + \frac{4}{11}\cdot\frac{7}{10} = \frac{70+28}{110} = \frac{98}{110} = \frac{49}{55} = 0,89$ circa.

Se le palle estratte si fossero rimesse continuamente nell' urna, al-

lora il valore di z_2 apparterrebbe al Problema precedente; sarebbe in quest' ultimo caso $p=\frac{2}{3}$, $q=\frac{1}{3}$, e quindi $z_2 = 1-\frac{1}{3^2} = \frac{8}{9} = 0,88$ circa.

PROBLEMA III.

§ 116. „ Quale è la probabilità perchè un numero di palle „ prese in una sola volta a caso da un' urna, sia pari, ovvero „ dispari „ ?

Rappresentando per x il numero delle palle contenute nel recipiente, è chiaro che le due probabilità tanto per prendere un numero di palle pari che per prenderne un numero dispari, saranno due funzioni del numero totale delle palle: rappresentiamo adunque per y_x la somma dei casi nei quali il numero delle palle da prendersi può esser pari; z_x la somma di quei casi nei quali il numero che si prenderà può essere impari.

Se si aumenta x d' un' unità, y_{x+1} esprimerà la somma dei casi pari, ed è chiaro che sarà eguale a $y_x + z_x$: poichè ogni caso impari per l' aggiunta della nuova palla diviene pari, avremo dunque questa prima equazione

$$y_{x+1} = y_x + z_x.$$

Egualmente z_{x+1} sarà la somma di tutti i casi impari dopo che alle palle contenute nel recipiente ne ho aggiunta una: questo numero sarà eguale a z_x numero dei casi impari prima dell' aggiunta dell' unità, più y_x (poichè ogni numero pari aggiuntavi l' unità diviene impari) più l' unità che è il caso per la nuova palla che si aggiunge; avremo per ciò un' altra equazione

$z_{x+1} = z_x + y_x + 1$. Il Problema adunque si risolve con l' integrazione di queste due equazioni

$$y_x - y_{x+1} + z_x = 0$$
$$y_x + z_x - z_{x+1} = -1.$$

Secondo ciò che abbiamo detto al §. 70. elimineremo per mezzo delle due superiori equazioni z_x, ed otterremo un' equazione del secondo ordine:

$y_{x+2} - 2y_{x+1} = 1$, la quale si riduce del primo, facendo scemare l' x d' una unità, e diviene

$y_{x+1} - 2y_x = 1$; integrando quest' equazione abbiamo

$y_x = \frac{\alpha^x}{2} \Sigma \frac{1}{\alpha^x}$, essendo α la radice dell' equazione $\alpha - 2 = 0$, per il che $\alpha = 2$; dunque

$y_x = 2^{x-1} \Sigma 2^{-x} = 2^{x-1}(-2^{-x+1} + A)$, $y_x = A2^{x-1} - 1$.

Per determinare la costante A, si osservi che quando $x = 1$, si ha $y_1 = 0$, perchè non vi sono casi pari, onde $A - 1 = 0$, $A = 1$; avremo adunque

$y_x = 2^{x-1} - 1$.

Sostituendo questo valore di y_x nella prima equazione, avremo

$z_x = 2^{x-1}$. La somma adunque di tutti i casi possibili sarà

$z_x + y_x = 2^{x-1} + 2^{x-1} - 1 = 2^x - 1$; così la probabilità per prendere un numero pari di palle sarà $\frac{2^{x-1}-1}{2^x-1}$; e quella per prenderne un numero impari $= \frac{2^{x-1}}{2^x-1}$: vi sarà dunque sempre più probabilità per il numero impari che per il numero pari.

Sia $x = 6$ ed avremo la probabilità per prendere un numero pari di palle $= \frac{2^5-1}{2^6-1} = \frac{31}{63}$:

quella per prenderne un numero dispari $= \frac{32}{63}$.

PROBLEMA IV.

§. 117. „ Mancano a Tizio un numero y d' eventi favorevoli per guadagnare la partita: ne mancano a Cajo un numero x: „ si dimanda la probabilità che ha ciascuno di guadagnare „.

Cerchiamo la sorte di Tizio. La probabilità che ha Tizio di vincere dipende e dal numero y degli eventi che mancano ad esso, e dal numero x di quelli che mancano al suo contrario: questa sarà dunque una funzione di x e y: rappresentiamola per $z_{x,y}$.

Supponghiamo che si faccia un tiro, e che ottengasi un evento: se questo è favorevole a Tizio, la di lui probabilità diverrà $z_{x,y-1}$, e se è favorevole a Cajo, $z_{x-1,y}$.

Ora essendo q la probabilità perchè l' evento sia favorevole a Tizio, o perchè la di lui probabilità divenga $z_{x,y-1}$; e p la probabilità perchè sia favorevole a Cajo, o perchè la probabilità di Tizio divenga $z_{x-1,y}$, avremo (110, VI)

$z_{x,y} = qz_{x,y-1} + pz_{x-1,y}$

e dall' integrazione di questa equazione dipende la soluzione del Problema.

Se in questa equazione facciamo aumentare x ed y dell' unità, e portiamo tutti i termini da una sola parte, avremo

$pz_{x,y+1} + qz_{x+1,y} - z_{x+1,y+1} = 0$. Quest' equazione paragonata con quella del (§. 88.) ci dà

$A = 0$, $C' = -1$, $B' = p$, $B = q$, e quindi $\beta = -\frac{q\alpha}{p-\alpha} = \frac{q}{1-\frac{p}{\alpha}}$: sarà dunque

$\beta^y = q^y\left(1 + y\frac{p}{\alpha} + \frac{y(y+1)}{2}\cdot\frac{p^2}{\alpha^2} + \frac{y(y+1)(y+2)}{2\cdot3}\cdot\frac{p^3}{\alpha^3} + \text{ec.}\right)$, e per conseguenza (86.)

$$z_{x,y} = q^y\left(z_{x,0} + ypz_{x-1,0} + \frac{y(y+1)}{2}\cdot p^2 z_{x-2,0} + \frac{y(y+1)(y+2)}{2\cdot3} p^3 \cdot z_{x-3,0} + \text{ec.}\right).$$

Ora la probabilità del Giocatore diviene certezza, o eguale all' unità, quando $y = 0$ ed x è positivo; e diviene nulla quando

$x = 0$ ed y è positivo, dunque $z_{x,0} = 1$ quando $x > 0$; $z_{0,y} = 0$ quando $y > 0$:
ciò premesso, facciasi nella trovata espressione per $z_{x,y}$, $x = 0$, ed avremo

$$z_{0,y} = 0 = q^y (z_{0,0} + ypz_{-1,0} + \frac{y(y+1)}{2} . p^2 z_{-2,0} + \text{ec.}),$$

la quale equazione ci dà

$$z_{0,0} = 0,\ z_{-1,0} = 0 \text{ ec.}:$$

si vede adunque che la ricercata probabilità è espressa per una serie di un numero finito di termini; l'ultimo termine è quello, ove si trova $z_{1,0}$. Cioè

$$z_{x,y} = q^y (1 + yp + \frac{y(y+1)}{2} p^2 + \frac{y(y+1)(y+2)}{2.3} p^3 + \ldots \frac{y(y+1)(y+2)(y+3)}{2.3.4} p^4 + \ldots + \frac{y(y+1)(y+2)\ldots(y+x-2)}{1.2.3\ldots(x-1)} p^{x-1}).$$

Moltiplicando per questa espressione della probabilità il valore della scommessa, avremo (111, VI) la parte di questa scommessa che appartiene a Tizio se la partita non si finisce; o la sorte di Tizio prima di terminare la partita.

Quella medesima formula ci dà la probabilità di guadagnare per l'altro Giocatore col solo cangiare in essa x per y; y per x; p per q; q per p.

PROBLEMA V.

§. 118. „ Abbiasi un' urna ove si trovano palle bianche e „ nere, si dimanda la probabilità che ha Tizio di guadagnare, „ quando scommette che, estraendo dall' urna successivamente un „ certo numero di palle, uscirà dall' urna medesima un numero „ a di palle nere prima che ne esca un numero b di bianche „.

Supponghiamo che resti un numero y di palle nere ad estrarsi, prima che ne escano un numero x, ed indichiamo la ricercata probabilità per $z_{x,y}$.

Se ogni palla estratta si riponesse di nuovo nell' urna, questo Problema sarebbe identicamente quello del §. antecedente, ma non avendo luogo questa condizione, egli è diverso.

Sia n il numero delle palle nere che si trovano nell' urna al principio del gioco; sia m il numero totale delle palle: sarà in conseguenza $m - n$ il numero delle bianche.

Quando restano un numero y di palle nere da estrarsi, avanti che ne esca un numero x, avremo:

Il numero delle palle nere restate nell' urna $= n - a + y$: quello delle bianche $= m - n - b + x$:

Il numero totale delle palle restate $= m - a - b + x + y$.

Sarà dunque il q del Problema antecedente $= \frac{n - a + y}{m - a - b + x + y}$; ed il p sarà $= \frac{m - n - b + x}{m - a - b + x + y}$: dunque il Problema sarà risoluto da questa equazione

$$z_{x,y} = \frac{n - a + y}{m - a - b + x + y} z_{x,y-1} + \frac{m - n - b + x}{m - a - b + x + y} z_{x-1,y}:$$

equazione a differenze finite e parziali a coefficienti variabili.

Facciamo per comodo e semplicità di calcolo $n - a = d$, $m - n - b = e$, $m - a - b = h$, ed avremo

$$z_{x,y} = \frac{d + y}{h + x + y} z_{x,y-1} + \frac{e + x}{h + x + y} z_{x-1,y}.$$

Per integrare questa equazione facciamo (103)

$$z_{x,y} = \frac{\nabla(d + y) . \nabla(e + x)}{\nabla(h + x + y)} \alpha^x \beta^y$$

indicando per α, β due costanti indeterminate, ed essendo

$$\nabla(d + y) = (d + y)(d + y - 1)(d + y - 2) \ldots (d + 1)$$
$$\nabla(e + x) = (e + x)(e + x - 1) \ldots (e + 1)$$
$$\nabla(h + x + y) = (h + x + y).(h + x + y - 1) \ldots (h + 1),$$

facendo le opportune sostituzioni, avremo

$$\frac{\nabla(d + y) . \nabla(e + x)}{\nabla(h + x + y)} \alpha^x \beta^y = \frac{(d + y) . \nabla(d + y - 1) . \nabla(e + x)}{(h + x + y) \nabla(h + x + y - 1)} \alpha^x \beta^{y-1} + \ldots$$

$$\frac{(e + x) \nabla(d + y) . \nabla(e + x - 1)}{(h + x + y) . \nabla(h + x + y - 1)} \alpha^{x-1} \beta^y;$$

la quale si riduce ad $\alpha\beta = \alpha + \beta$: e ci dà

$$\beta = (1 - \alpha^{-1})^{-1}, \text{ e perciò } \beta^y = (1 - \alpha^{-1})^{-y}; \text{avremo per tanto}$$

$$\alpha^x \beta^y = \alpha^x + y\alpha^{x-1} + \frac{y(y+1)}{2}\alpha^{x-2} + \frac{y(y+1)(y+2)}{2.3}\alpha^{x-3} + \ldots + \frac{y(y+1)(y+2)\ldots\ldots(y+m-1)}{2.3\ldots\ldots m}\alpha^{x-m} + \text{ec.},$$

e quindi

$$z_{x,y} = \frac{\nabla(d+y).\nabla(e+x)}{\nabla(h+x+y)}\left\{\alpha^x + y\alpha^{x-1} + \frac{y(y+1)}{2}\alpha^{x-2} + \ldots\ldots \frac{y(y+1)(y+2)}{2.3}\alpha^{x-3} + \text{ec.}\right\}:$$

introducendo la funzione arbitraria, avremo

$$z_{x,y} = \frac{\nabla(d+y).\nabla(e+x)}{\nabla(h+x+y)}\left\{\varphi(x) + y\varphi(x-1) + \frac{y(y+1)}{2}\varphi(x-2) + \frac{y(y+1)(y+2)}{2.3}\varphi(x-3) + \text{ec.}\right\}.$$

Per determinare questa funzione facciamo $y = 0$, ed avremo (essendo $\nabla(d+0) = 1$)

$$z_{x,0} = \frac{\nabla(e+x)}{\nabla(h+x)}\varphi(x) \text{ e per ciò } \varphi(x-m) = \frac{\nabla(h+x-m)}{\nabla(e+x-m)}z_{x-m,0}.$$

Dunque

$$z_{x,y} = \frac{\nabla(d+y).\nabla(e+x)}{\nabla(h+x+y)}\left\{\frac{\nabla(h+x)}{\nabla(e+x)}z_{x,0} + y\frac{\nabla(h+x-1)}{\nabla(e+x-1)}z_{x-1,0} + \frac{y(y+1)}{2}.\frac{\nabla(h+x-2)}{\nabla(e+x-2)}z_{x-2,0} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{y(y+1)\ldots\ldots(y+m-1)}{2.3\ldots\ldots m}.\frac{\nabla(h+x-m)}{\nabla(e+x-m)}z_{x-m,0} + \text{ec.}\right\}.$$

Ora (§. antecedente)

$$z_{x,0} = z_{x-1,0} = \text{ec.} = z_{1,0} = 1;\ z_{0,0} = z_{-1,0} = z_{-2,0} = \text{ec.} = 0, \text{ dunque}$$

$$z_{x,y} = \frac{\nabla(d+y).\nabla(e+x)}{\nabla(h+x+y)}\left\{\frac{\nabla(h+x)}{\nabla(e+x)} + y\frac{\nabla(h+x-1)}{\nabla(e+x-1)} + \frac{y(y+1)}{2}\times\ldots \frac{\nabla(h+x-2)}{\nabla(e+x-2)} + \ldots\ldots + \frac{y(y+1)(y+2)\ldots(y+x-2)}{2.3\ldots(x-1)}.\frac{\nabla(h+1)}{\nabla(e+1)}\right\}.$$

Ponendo in questa formula a in vece di y, b in vece di x, avremo la ricercata probabilità.

PROBLEMA VI.

§. 119. „ Si suppone che a ciascun tiro possano accadere tre „ eventi diversi che per più chiarezza indicheremo per P, Q, R, „ e che le probabilità di questi eventi siano respettivamente p, „ q, r; si dimanda la probabilità di guadagnare che ha un Gioca- „ tore, il quale scommette d' ottenere l' evento R un numero c „ di volte, prima che l' evento Q sia ottenuto b volte, e l' evento „ P a volte „.

Indichiamo per $z_{x,y,u}$ la probabilità del Giocatore, allorchè l' evento R resta da aversi un numero u di volte, prima che l' evento Q arrivi un numero y di volte, e l' evento P un numero x: la cercata probabilità sarà $z_{a,b,c}$.

Supponghiamo che il Giocatore faccia un tiro; questo tiro o può portare l' evento P, o l' evento Q, o l' evento R: la probabilità adunque $z_{x,y,u}$ può divenire $z_{x-1,y,u}$; ovvero $z_{x,y-1,u}$; ovvero $z_{x,y,u-1}$.

In conseguenza avremo per risolvere il Problema questa equazione

$$z_{x,y,u} = pz_{x-1,y,u} + qz_{x,y-1,u} + rz_{x,y,u-1},$$

la quale si riduce ancora a quest' altra

$$pz_{x,y+1,u+1} + qz_{x+1,y,u+1} + rz_{x+1,y+1,u} - \ldots\ldots z_{x+1,y+1,u+1} = 0.$$

Seguendo il metodo spiegato al §. 100., facciasi $z_{x,y,u} = \alpha^x\beta^y\gamma^u$; e sostituendo e dividendo per $\alpha^x\beta^y\gamma^u$, avremo fra le indeterminate α, β, γ questa equazione

$p\beta\gamma + q\alpha\gamma + r\alpha\beta - \alpha\beta\gamma = 0$, dalla quale si ricava

$$\gamma = \frac{r\alpha\beta}{q\alpha + p\beta - \alpha\beta} = -\frac{r}{1 - \frac{p}{\alpha} - \frac{q}{\beta}}, \text{ ed in conseguenza}$$

$$\gamma^u = r^u\left\{1 + u\left(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}\right) + \frac{u(u+1)}{2}\left(\frac{p^2}{\alpha^2}+\frac{2pq}{\alpha\beta}+\frac{q^2}{\beta^2}\right) + \dots \frac{u(u+1)(u+2)}{2\cdot 3}\left(\frac{p^3}{\alpha^3}+\frac{3p^2q}{\alpha^2\beta}+\frac{3pq^2}{\alpha\beta^2}+\frac{q^3}{\beta^3}\right) + \text{ec.}\right\}$$

avremo adunque, facendo $\alpha^x\beta^y = \varphi(x,y)$,

$$z_{x,y,u} = r^u\left\{\varphi(x,y) + u(p\varphi(x-1,y)+q\varphi(x,y-1)) + \frac{u(u+1)}{2}(p^2\varphi(x-2,y)+2pq\varphi(x-1,y-1)+q^2\varphi(x,y-2)) + \text{ec}\right\}:$$

ora facendo $u=0$, abbiamo $\varphi(x,y)=z_{x,y,0}$; dunque

$$z_{x,y,u} = r^u\left\{z_{x,y,0}+u(pz_{x-1,y,0}+qz_{x,y-1,0})+\frac{u(u+1)}{2}\times(p^2z_{x-2,y,0}+2pqz_{x-1,y-1,0}+q^2z_{x,y-2,0})+\dots \frac{u(u+1)(u+2)}{2\cdot 3}(p^3z_{x-3,y,0}+3p^2qz_{x-2,y-1,0}+\dots 3pq^2z_{x-1,y-2,0}+q^3z_{x,y-3,0})+\text{ec.}\right\}.$$

La natura della scommessa è tale che quando $u=0$, ed x ed y sono maggiori di x, il Giocatore ha guadagnato; dunque $z_{x,y,0}=1$ quando $x>0$, $y>0$.

Al contrario il Giocatore ha perduto in questi tre casi „ P°. quando $y=0$, ed $x>0$, $u>0$; S°. quando $x=0$, ed $y>0$, $u>0$; T°. quando $x=0$, $y=0$, ed $u>0$: dunque

$z_{x,0,u}=0$; $z_{0,y,u}=0$; $z_{0,0,u}=0$.

Da queste condizioni possiamo ricavare i valori di $z_{x,y,0}$ quando x,y sono nulli, quando sono negativi, e quando uno di essi è negativo o nullo.

In fatti facendo nella espressione superiormente trovata per $z_{x,y,u}$, $x=0$, $y=0$, avremo

$z_{0,0,u}=0=r^u\{z_{0,0,0}+u(pz_{-1,0,0}+qz_{0,-1,0})+\text{ec}\}$, dalla quale

$z_{0,0,0}+u(pz_{-1,0,0}+qz_{0,-1,0})+\text{ec.}=0$, ed in conseguenza

$z_{0,0,0}=0$; $z_{-1,0,0}=0$; $z_{0,-1,0}=0$; ec. Facendo soltanto $x=0$, avremo

$$z_{0,y,u}=0=r^u\left\{z_{0,y,0}+u(pz_{-1,y,0}+qz_{0,y-1,0})+\text{ec.}\right\}$$

e da queste due equazioni si vede che i valori di $z_{x,y,0}$ sono nulli quando $x=0$, $y=0$: quando $x=-m$, $y=-n$: quando $x=0$, ovvero $y=0$: quando $x=-m$, ovvero $y=-n$.

Per $-m$, $-n$ abbiamo inteso d'indicare dei numeri negativi.

Dunque l'espressione di $z_{x,y,u}$ sarà finita, e sarà rappresentata nella maniera seguente

$$z_{x,y,u}=r^u\left\{1+u(p+q)+\frac{u(u+1)}{2}(p^2+2pq+q^2)+\dots \frac{u(u+1)(u+2)}{2\cdot 3}(p^3+3p^2q+3pq^2+q^3)+\text{ec.}\right\}$$

non continuando questa serie che fino ai termini nei quali le potenze di p saranno minori di x, e quelle di q minori di y.

Si vede come dovremmo regolarci se gli eventi che possono accadere a ciascun tiro, fossero in un maggior numero.

PROBLEMA VII.

§. 120. „ Abbiasi un' urna con palle bianche, nere, e rosse, e si dimandi qual probabilità vi è per supporre che si estrarrà „ prima dall' urna un numero a di palle nere di quello che s' e„ straggano un numero c di rosse, ed un numero b di bianche „.

Se ogni palla estratta fosse riposta di nuovo nell' urna prima di fare la successiva estrazione, allora il Problema ricade in quello sopra risoluto: egli è però ben diverso se questa condizione non ha luogo.

Siansi già estratte $a-y$ palle nere, $c-x$ palle rosse, $b-u$ palle bianche. Sia $z_{x,y,u}$ questa probabilità, la quale si converte in quella che si cerca facendo $x=c$, $y=a$, $u=b$.

Sia $= m$ il numero totale delle palle poste nell'urna:
Sia $= n$ il numero delle palle nere:
Sia $= l$ quello delle rosse;
Sarà $= m - l - n$ quello delle bianche:
Ora le palle nere restate nell'urna, saranno $= n - a + y$
Le rosse restate ec. $= l - c + x$
Le bianche restate ec. $= m - n - l - b + u$.
Il numero totale delle palle restate $= m - b - c - a + x + y + u$.

Avremo adunque nel nostro caso

$$p = \frac{n - a + y}{m - b - c - a + x + y + u}$$

$$q = \frac{l - c + x}{m - b - c - a + x + y + u}$$

$$r = \frac{m - b - l - n + u}{m - b - c - a + x + y + u};$$

e l'equazione che risolve il Problema, sarà

$$z_{x,y,u} = \frac{d+y}{h+x+y+u} z_{x,y-1,u} + \frac{e+x}{h+x+y+u} z_{x-1,y,u} + \ldots \frac{f+u}{h+x+y+u} z_{x,y,u-1}$$

essendo $d = n - a$; $e = l - c$; $f = m - b - l - n$; $h = m - b - c - a$.

Una tale equazione è un caso particolare dell'equazione (d) del § 103: faremo adunque

$$z_{x,y,u} = \frac{\nabla(d+y).\nabla(e+x).\nabla(f+u)}{\nabla(h+x+y+u)} \alpha^x \beta^y \gamma^u$$

essendo

$$\nabla(d+y) = (d+y).(d+y-1) \ldots\ldots (d+2).(d+1)$$

$$\nabla(e+x) = (e+x)(e+x-1) \ldots\ldots (e+2)(e+1)$$

$$\nabla(f+u) = (f+u)(f+u-1) \ldots\ldots (f+2)(f+1)$$

$$\nabla(h+x+y+u) = (h+x+y+u)(h+x+y+u-1) \ldots \ldots (h+2)(h+1).$$

Facendo ora le opportune sostituzioni nella proposta e dividendo tutti i di lei termini per i loro fattori comuni, avremo fra α, β, γ quest' equazione

$\alpha\beta\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\beta$, dalla quale si ricava

$$\gamma = \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}}.$$

Dunque

$$z_{x,y,u} = \frac{\nabla(d+y).\nabla(e+x).\nabla(f+u)}{\nabla(h+x+y+z)} \alpha^x \beta^y \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}}\right)^u = \ldots\ldots$$

$$\frac{\nabla(d+y).\nabla(e+x).\nabla(f+u)}{\nabla(h+x+y+u)} \Big\{ \alpha^x \beta^y + u(\alpha^{x-1}\beta^y + \alpha^x \beta^{y-1}) + \frac{u(u+1)}{2}(\alpha^{x-2}\beta^y + 2\alpha^{x-1}\beta^{y-1} + \alpha^x\beta^{y-2}) + \frac{u(u+1)(u+2)}{2 \cdot 3} \times (\alpha^{x-3}\beta^y + 3\alpha^{x-2}\beta^{y-1} + 3\alpha^{x-1}\beta^{y-2} + \alpha^x\beta^{y-3}) + \text{ec.} \Big\}:$$

nella quale espressione sostituendo in vece di $\alpha^x \beta^y$ una funzione qualunque arbitraria $\varphi(x,y)$, avremo

$$z_{x,y,u} = \frac{\nabla(d+y).\nabla(e+x).\nabla(f+u)}{\nabla(h+x+y+u)} \Big\{ \varphi(x,y) + u(\varphi(x-1,y) + \varphi(x,y-1)) + \frac{u(u+1)}{2}(\varphi(x-2,y) + 2\varphi(x-1,y-1) + \varphi(x,y-2)) + \frac{u(u+1)(u+2)}{2 \cdot 3}(\varphi(x-3,y) + 3\varphi(x-2,y-1) + 3\varphi(x-1,y-2) + \varphi(x,y-3)) + \text{ec.} \Big\}:$$

per determinare la funzione arbitraria facciamo in quest' equazione $u = 0$, ed avremo

$$\varphi(x,y) = \frac{\nabla(h+x+y)}{\nabla(d+y)\nabla(e+x)} z_{x,y,0}:$$

sarà dunque

$$z_{x,y,u} = \frac{\nabla(d+y)\nabla(e+x)\nabla(f+u)}{\nabla(h+x+y+u)} \Big\{ \frac{\nabla(h+x+y)}{\nabla(d+y).\nabla(e+x)} z_{x,y,0} + u\left(\frac{\nabla(h+x+y-1)}{\nabla(d+y).\nabla(e+x-1)} z_{x-1,y,0} + \frac{\nabla(h+x+y-1)}{\nabla(d+y-1).\nabla(e+x)} \times \right.$$

$$z_{x,y-1,0}) + \frac{u(u+1)}{2}\left(\frac{\nabla(h+x+y-2)}{\nabla(d+y).\nabla(e+x-2)} z_{x-2,y} + \ldots\right.$$
$$2\frac{\nabla(h+x+y-2)}{\nabla(d+y-1).\nabla(e+x-1)} z_{x-1,y-1,0} + \frac{\nabla(h+x+y-2)}{\nabla(d+y-2).\nabla(e+x)} \times$$
$$z_{x,y-2,0}) + \text{ec.}$$

La quale finisce a quei termini, ove in $z_{x,y,0}$, x ovvero y è nullo o negativo. Nei termini poi che rimangono conviene fare $z_{x,y,0} = 1$ qualunque siano x e y, purchè siano maggiori di zero. Tutto questo si è dimostrato al §. antecedente.

P R O B L E M A VIII.

§. 121. „ Un Giocatore scommette d' ottenere un dato evento b volte almeno in un numero a di tiri: *la probabilità* d' ottenerlo a ciascun tiro essendo p; io dimando la probabilità di guadagnare che ha questo Giocatore „.

Indichiamo per $z_{x,y}$ questa probabilità, mentre restano ad esso x tiri da farsi, ed y volte da ottenersi l' evento; è chiaro che la probabilità cercata al principio della partita, sarà $z_{a,b}$: ora supponendo che si faccia un tiro, avremo per i principj sopra spiegati

$$z_{x,y} = pz_{x-1,y-1} + (1-p)z_{x-1,y}$$

che è una equazione a differenze finite e parziali del secondo ordine.

Questa equazione integrata secondo il metodo spiegato (86), ci dà

$$z_{x,y} = p^y\left(z_{x-y,0} + y(1-p)z_{x-y-1,0} + \frac{y(y+1)}{2}\times \ldots\right.$$
$$\left.(1-p)^2 z_{x-y-2,0} + \text{ec.}\right):$$

per quanto questa espressione vada all' infinito, pure nel nostro caso le condizioni del Problema la finiscono dopo un certo numero di termini.

E' evidente in fatti che il Giocatore guadagna, ovvero che

$z_{x,y} = 1$ quando $y = 0$, x essendo > 0; e che egli perde, ovvero che $z_{x,y} = 0$, quando $x = 0$, y essendo > 0; dunque $z_{x,0} = 1$ quando $x > 0$; $z_{0,y} = 0$ quando $y > 0$:

Si faccia ora nella ritrovata espressione per $z_{x,y}$, $x = 0$, ed avremo

$$z_{0,y} = 0 = p^y\left\{z_{-y,0} + y(1-p)z_{-y-1,0} + \text{ec.}\right\},$$

da cui si ricava $z_{-y,0} = 0$, $z_{-y-1,0} = 0$ ec., purchè $y > 0$.

Dunque l' espressione suddetta termina ove trovasi $z_{0,0}$: essa sarà per tanto

$$z_{x,y} = p^y\left(z_{x-y,0} + y(1-p)z_{x-y-1,0} + \frac{y(y+1)}{2}(1-p)^2\times\right.$$
$$z_{x-y-2,0} + \frac{y(y+1)(y+2)}{2.3}(1-p)^3 z_{x-y-3,0} + \ldots\ldots$$
$$\left.\ldots\ldots + \frac{y(y+1)\ldots\ldots(x-1)}{2.3\ldots\ldots(x-y)} z_{0,0}\right):$$

Facendo ora $x = a$, $y = b$, $z_{0,0} = z_{1,0} = z_{2,0} = \text{ec.} = 1$, avremo

$$z_{a,b} = p^b\left(1 + b(1-p) + \frac{b(b+1)}{2}(1-p)^2 + \frac{b(b+1)(b+2)}{2.3}\times\right.$$
$$\left.(1-p)^3 + \text{ec.}\ldots\ldots + \frac{b(b+1)(b+2)\ldots..(a-1)}{2.3\ldots..(a-b)}(1-p)^{a-b}\right).$$

Questa formula è stata trovata supponendo col metodo spiegato al §. 86., $z_{x,y} = \alpha^x\beta^y$ e determinando β per α in virtù dell' equazione $\alpha\beta = p + (1-p)\beta$.

Se noi avessimo determinato α per β, avremmo avuto (noi facciamo per semplicità $1 - p = q$) questa seconda formula per $z_{x,y}$,

$$z_{x,y} = p^x z_{0,y-x} + xp^{x-1}qz_{0,y-x+1} + \frac{x(x-1)}{2}p^{x-2}q^2\times$$
$$z_{0,y-x+2} + \text{ec.}$$

Essendo $x > y$, gl' indici $y - x$; $y - x + 1$; $y - x + 2$; .... $y - x + (x - y - 1)$ saranno tutti numeri negativi; l' indice $y - x + (x - y)$ sarà nullo, ed i seguenti positivi.

Ora se nella prima formula facciamo $a=0$; $b=-1$; $b=-2$; $b=-3$ ec., troveremo

$z_{0,-1}=1$; $z_{0,-2}=1$; $z_{0,-3}=1$ ec., dunque

$$z_{x,y}=p^x+xp^{x-1}q+\frac{x(x-1)}{2}p^{x-2}q^2+\ldots\ldots\ldots+\frac{x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(y+1)}{2.3\ldots\ldots(x-y)}p^y.q^{x-y};$$

facendo poi $x=a$, $y=b$, avremo

$$z_{a,b}=p^a+ap^{a-1}q+\frac{a(a-1)}{2}p^{a-2}q^2+\ldots\ldots\ldots+\frac{a(a-1)(a-2)\ldots\ldots(b+1)}{2.3\ldots\ldots(a-b)}p^bq^{a-b}.$$

Se il Problema avesse dimandato il preciso numero b d' eventi nè più nè meno nel numero a di tiri, allora da quest' espressione sarebbe bisognato togliere quella della probabilità d' ottenere un numero $b+1$ d' eventi almeno in a tiri, la quale è

$$z_{a,b+1}=p^a+ap^{a-1}q+\frac{a(a-1)}{2}p^{a-2}q^2+\ldots\ldots\ldots+\frac{a(a-1)(a-2)\ldots\ldots(b+2)}{2.3\ldots\ldots(a-b-1)}p^{b+1}q^{a-b+1}.$$

La probabilità per ottenere precisamente il numero b d' eventi sarebbe allora (indicando per $Z_{a,b}$ questa probabilità)

$$Z_{a,b}=z_{a,b}-z_{a,b+1}=\frac{a(a-1)(a-2)\ldots\ldots(b+1)}{2.3\ldots\ldots(a-b)}p^b.q^{a-b}.$$

Se facciamo $b=a-1$, abbiamo

$Z_{a,a-1}=\frac{a}{1}.p^{a-1}q$; se facciamo $b=a-2$, abbiamo

$Z_{a,a-2}=\frac{a(a-1)}{2}p^{a-2}.q^2$ ec.; e se facciamo $b=0$, abbiamo

$Z_{a,0}=q^a$:

si vede adunque che se p rappresenta la probabilità d'avere un evento, q quella d' aver l' evento contrario, ed m il numero delle volte che si fa un tiro, ovvero che uno si espone ad ottenere l' evento, facendo lo sviluppo del binomio $(p+q)^m$

$$(p+q)^m=p^m+mp^{m-1}q+\frac{m(m-1)}{2}p^{m-2}q^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\times p^{m-3}q^3+\ldots\ldots+q^m,$$

il primo di lui termine rappresenterà la probabilità che tutti gli eventi siano favorevoli; il secondo rappresenterà la probabilità che gli eventi siano favorevoli ed uno contrario; il terzo quella che tutti gli eventi, eccettuati due, siano favorevoli ec.; ed infine l' ultimo termine darà la probabilità che tutti gli eventi siano contrarj.

Facciamo m eguale ad un numero impari $2n+1$, ed avremo

$$(p+q)^{2n+1}=p^{2n+1}+(2n+1)p^{2n}q+\frac{(2n+1)2n}{2}p^{2n-1}q^2+\ldots\ldots+\frac{(2n+1)2n(2n-1)\ldots\ldots(n+2)}{2.3\ldots\ldots n}p^{n+1}q^n+\ldots\ldots+\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)\ldots\ldots(n+2)}{2.3\ldots\ldots n}p^n.q^{n+1}+\ldots\ldots\ldots+(2n+1)pq^{2n}+q^{2n+1}.$$

Ora è facile di vedere che in questo binomio sviluppato la somma dei termini fino alla potenza $p^{n+1}q^n$ inclusive rappresenta la probabilità che l' evento favorevole succeda $n+1$ volta almeno in $2n+1$ tiri; e che la somma del rimanente dei termini rappresenta la probabilità che l' evento contrario succeda esso $n+1$ volte almeno in $2n+1$ tiri; se dunque indichiamo queste due probabilità per E, F, avremo

$$E=p^{2n+1}+(2n+1)p^{2n}q+\frac{(2n+1)2n}{2}p^{2n-1}q^2+\ldots\ldots+\frac{(2n+1)2n(2n-1)\ldots\ldots(n+2)}{2.3\ldots\ldots n}p^{n+1}q^n$$

$$F=q^{2n+1}+(2n+1)q^{2n}.p+\frac{(2n+1)2n}{2}q^{2n-1}p^2+\ldots\ldots+\frac{(2n+1)2n(2n-1)\ldots\ldots(n+2)}{2.3\ldots\ldots n}q^{n+1}p^n.$$

Le due quantità E, F sono eguali quando $p=q$; ma se $p>q$ allora $E>F$; e se $p<q$ allora $E<F$. La differenza poi fra E ed F cresce col crescere il numero $2n+1$, e col crescere la differenza fra p e q.

Supponghiamo adesso che s'abbiano $(2n+1)$ urne, ciascuna delle quali contenga palle bianche e nere, e che p sia la probabilità d'estrarre una palla bianca, e q la probabilità per estrarre la nera.

Se noi prenderemo una palla da ciascuna urna, è chiaro che E rappresenterà la probabilità che fra $2n+1$ palle estratte si ritrovino almeno $n+1$ palle bianche, ed n palle nere; ed F rappresenterà la probabilità che fra $2n+1$ palle estratte si ritrovino almeno $n+1$ palle nere Se p sarà maggiore di q, più grande che sarà il numero delle urne, più facile sarà che la pluralità nelle palle estratte sia favorevole alle bianche, e questa facilità crescerà col crescere il numero delle urne e viceversa.

Trasportiamo ora tutto questo a cose più astratte, e supponghiamo che vi sia un Magistrato, Consiglio, Assemblea, o qualunque corpo morale composto di un numero $2n+1$ di votanti per deliberare sopra una certa questione.

Ciascun votante può dare il suo voto in favore della verità, o in favore dell'errore. Sia p la probabilità che un votante si deciderà per la verità; q quella che ei (sebbene involontariamente) si deciderà per l'errore: l'espressione che abbiamo trovata per E, ci darà la probabilità che la decisione risultante dalla ballottazione, sarà conforme alla verità; ed F ci darà la probabilità che la decisione sarà conforme all'errore.

Dunque se $p>q$ cioè se i lumi di ciascun votante son tali che gli sia più difficile ingannarsi, di quello che vedere la verità, allora più che sarà grande il numero dei votanti, più la decisione avrà di probabilità per essere conforme alla verità, ed in conseguenza per essere giusta. Al contrario se $p<q$, se cioè i lumi di ciascun votante saranno tali da farlo più facilmente cadere nell'inganno, allora più numerosa che sarà l'Assemblea, più facilmente sarà ingiusta la di lei decisione, perchè contraria alla verità.

Per questo l'Assemblee numerosissime è necessario che siano composte di persone istruite sopra l'oggetto da deliberarsi; per questo le Assemblee Popolari sono sempre cattive se il popolo non è istruito sopra gli interessi, per i quali è chiamato a deliberare.

Per far un esempio, si dimandi la probabilità che ha in favor della verità, una decisione data a pluralità di voti da un Magistrato composto di nove votanti, ciascun dei quali abbia $\frac{9}{10}$ di probabilità per risolvere in favore della verità, ed $\frac{1}{10}$ in favor dell'errore.

Avremo in questo caso $m=9$; $p=\frac{9}{10}$; $q=\frac{1}{10}$: dunque la probabilità che la decisione sia conforme alla verità, sarà

$$E=\left(\frac{9}{10}\right)^9+9\left(\frac{9}{10}\right)^8\cdot\left(\frac{1}{10}\right)+\frac{9\cdot8}{2}\left(\frac{9}{10}\right)^7\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2+\frac{9\cdot8\cdot7}{2\cdot3}\left(\frac{9}{10}\right)^6\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^3+\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{2\cdot3\cdot4}\left(\frac{9}{10}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^4,$$ la quale si riduce e diviene

$$E=\frac{99910908}{100000000};$$

e la probabilità che la decisione sia errata, sarà

$$F=\frac{89092}{100000000}$$: dunque $E:F::99910908:89092::1121:1$ circa. Sarà dunque 1121 volte più facile che la decisione sia conforme alla verità che all'errore; e di 1121 decisioni ve ne sarà probabilmente una errata; ma non si trovano spesso Magistrati così istruiti.

Noi abbiamo fatto questa breve digressione per far travedere ai nostri Leggitori l'eccellenza del Calcolo delle Differenze Finite col potersi applicare per fino alla stima dei giudizi degli Uomini; del resto chi vorrà vedere in esteso simili applicazioni può leggere la sublime Opera, unica nel suo genere, del Geometra Condorcet, che ha per titolo „ *Essay sur la Probabilité des Decisions rendues a la pluralité des voix*.

P R O B L E M A IX.

§. 122. „ Un Giocatore estraendo da un'urna, la quale con-
„ tiene palle bianche e nere, un numero a di palle, scommette
„ che fra queste se ne trovino almeno un numero b nere; quale è
„ la probabilità di guadagnare che ha questo Giocatore „.

Se le palle estratte si riponessero successivamente nell'urna, questo Problema sarebbe identico con l'antecedente: senza questa condizione egli è diverso, poichè la probabilità d'estrarre una palla varia da un tiro all'altro, variando ad ogni estrazione il numero delle palle che si trovano nell'urna medesima.

Sia m il numero totale delle palle:

Sia n il numero delle nere:

Sarà $m-n$ quello delle bianche.

Indichiamo al solito per $z_{x,y}$ la probabilità quando gli restano x tiri a fare ed y palle nere ad estrarsi: la probabilità ricercata sarà $z_{a,b}$.

Ora avendo il Giocatore fatto $a-x$ estrazioni, il residuo numero totale delle palle nell' urna sarà $m-a+x$; ed avendo estratte $x-y$ palle nere, il residuo numero di esse sarà $n-b+y$; ed il residuo delle bianche, sarà $m-a+x+n-b+y$.

La probabilità adunque d' avere nella seguente estrazione una palla nera, sarà

$p=\frac{n-b+y}{m-a+x}$; e quella d' averne una palla bianca, sarà

$$1-p=\frac{m-n-a+b+x-y}{m-a+x}.$$

Avremo allora per risolvere il Problema l' equazione

$$z_{x,y}=\frac{n-b+y}{m-a+x}z_{x-1,y-1}+\frac{m-n-a+b+x-y}{m-a+x}z_{x-1,y}, \text{ ovvero}$$

$$z_{x,y}=\frac{p+y}{r+x}z_{x-1,y-1}+\frac{p'+x-y}{r+x}z_{x-1,y}$$

essendo $p=n-b$; $p'=m-n-a+b$; $r=m-a$.

Paragonata questa equazione con l' equazione (a) del §. 103., troveremo

$\alpha_y=p+y$; $n_{x-y}=p'+x-y$; $m_x=r+x$, e per ciò

$$z_{x,y}=\frac{\nabla(p+y).\nabla(p'+x-y)}{\nabla(r+x)}\Big\{\frac{\nabla(r+x-y)}{\nabla(p'+x-y)}z_{x-y,0}+\ldots\ldots$$

$$y\frac{\nabla(r+x-y-1)}{\nabla(p'+x-y-1)}z_{x-y-1,0}+\frac{y(y+1)}{2}\cdot\frac{\nabla(r+x-y-2)}{\nabla(p'+x-y-2)}\times\ldots$$

$$z_{x-y-2,0}+\text{ec.}\Big\}$$

ora essendo (§. 120.) $z_{s,0}=1$ quando $s=0$, ovvero $s>0$; ed $z_{s,0}=0$, quando $s=$ negativo, la serie superiore diverrà

$$z_{x,y}=\frac{\nabla(p+y).\nabla(p'+x-y)}{\nabla(r+x)}\Big\{\frac{\nabla(r+x-y)}{\nabla(p'+x-y)}+y\frac{\nabla(r+x-y-1)}{\nabla(p'+x-y-1)}+$$

$$\frac{y(y+1)}{2}\cdot\frac{\nabla(r+x-y-2)}{\nabla(p'+x-y-2)}+\ldots\ldots+\frac{y(y+1)\ldots\ldots(x-1)}{2.3.4\ldots\ldots(x-y)}\Big\}.$$

Facendo effettivamente i prodotti indicati dalle caratteristiche ∇, e quindi ponendo a per x, b per y, otterremo la ricercata probabilità.

Da questa soluzione generale si ricava quella del Problema antecedente.

Supponghiamo in fatti che si ripongano nell' urna tutte le palle che s' estraggono; allora nei coefficienti dell' equazione non entrerà nè x, nè y, nè a, nè b; sarà $p=n$, $p'=m-n$, $r=m$, ed avremo perciò

$$\nabla(p+y)=p^y,\ \nabla(r+x)=r^x,\ \nabla(p'+x-y)=p'^{x-y};$$

dunque

$$z_{x,y}=\frac{p^y.p'^{x-y}}{r^x}\Big\{\frac{r^{x-y}}{p'^{x-y}}+y\frac{r^{x-y-1}}{p'^{x-y-1}}+\frac{y(y+1)}{2}\cdot\frac{r^{x-y-2}}{p'^{x-y-2}}+$$

$$\text{ec.}\Big\}$$

ma $\frac{p}{r}$ è ciò che al §. antecedente si è indicato per p; $\frac{p'}{r}$ ciò che si è indicato per $1-p$: dunque

$$z_{x,y}=p^y\Big\{1+y(1-p)+\frac{y(y+1)}{2}(1-p)^2+\frac{y(y+1)(y+2)}{2.3}\times$$

$$(1-p)^3+\ldots\ldots\ldots+\frac{y(y+1)\ldots\ldots(x-1)}{2.3\ldots\ldots(x-y)}(1-p)^{x-y}\Big\},$$

come abbiamo trovato al suddetto §.

Per farne un esempio, sia $m=20$, $n=10$, $b=8$, ed avremo $p=2$, $p'=8$, $r=10$; sarà dunque (facendo $x=a=10$, $y=b=8$)

$$z_{10,8}=\frac{\nabla(p+8).\nabla(p'+2)}{\nabla(r+10)}\Big\{\frac{\nabla(r+2)}{\nabla(p'+2)}+8.\frac{\nabla(r+1)}{\nabla(p'+1)}+\frac{8.9}{2}.\Big\}.$$

$$z_{10,8}=\frac{10.9.8.7.6.5.4.3\times10.9}{20.19.18\ldots\ldots12.11}\Big\{\frac{12.11}{10.9}+8\frac{12}{10}+\frac{8.9}{2}\Big\};$$

e riducendo $z_{10,8}=\frac{1059}{92.378}=0,011$ circa

E se le palle estratte si riponessero nell' urna s' avrebbe $p=\frac{1}{2}$, $1-p=\frac{1}{2}$ e quindi

$$z_{10,8}=\frac{1}{256}\{1+4+9\}=0,055 \text{ circa}.$$

I Problemi II, V, VII, IX possono chiamarsi a *Probabilità variabile*, poichè la probabilità varia da un tiro all' altro: non mi sembra che alcuno fin ora ne avesse date le soluzioni dirette, come aveva fatto La-Grange per i Problemi IV, VI, VIII (a) a probabilità costante.

P R O B L E M A X.

§. 123. „ Stimare la sorte del Gioco della Bassetta (b) „.

Per esercitare sempre più i miei Leggitori nella difficile arte di mettere in equazione i Problemi sopra agli Azzardi, non credo opera perduta il trattenermi a stimare la sorte nel Gioco della Bassetta.

Questo Gioco è stato calcolato ancora dal Celebre Giacomo Bernoulli *nella sua Arte di Congetturare;* la sagacità di cui fa uso in quella analisi è degna di un tanto Uomo, poichè non conoscendosi allora il Calcolo delle Differenze Finite, mancava a quel Geometra il metodo diretto per sì fatte ricerche; ma le formule date da esso non potrebbero servire per noi, poichè le nostre leggi di questo Gioco sono diverse da quelle calcolate da Bernoulli.

Noi pertanto riprendendo la questione dai suoi principj, adopreremo un metodo diretto, e quanto siamo per dire servirà di guida a chi vorrà intraprendere la stima della sorte in altri Giochi d' Azzardo.

Io suppongo che si conoscano le leggi di questo Gioco per le quali l' unico vantaggio del Banchiere consiste nel riscuotere la metà della scommessa quando vengono i doppietti della carta giocata; e nell' essere in favore del Banchiere l' ultima coppia di carte che si sfogliano: cominceremo dal non considerare questo secondo vantaggio, al quale avremo riguardo in seguito.

(a) Atti di Berlino 1775.

(b) Si chiama anche Gioco del Faraone.

Sia $2x$ il numero delle carte che restano a sfogliarsi:

I. Supponghiamo che la scommessa cada sopra la carta del Re, e che vi sia una sola carta del Re fra le $2x$ carte.

E' chiaro per la Teoria delle combinazioni che le combinazioni binarie di $2x$ quantità sono $\frac{2x(2x-1)}{2}$, ovvero $x(2x-1)$: ora il numero delle carte esclusa la carta del Re, sarà $2x-1$, ed il numero delle combinazioni binarie che possono farsi con esse sarà $(2x-1)(x-1)$, delle quali non ve ne è alcuna che contenga il Re.

Le combinazioni poi in ciascuna delle quali può ritrovarsi la carta del Re sono $(2x-1).1$; e le combinazioni nelle quali la carta del Re può trovarsi due volte, sono $\frac{1.(1-1)}{2}=0$.

Chiamando adunque P la probabilità perchè il Re non si trovi nel primo binario di carte che si sfogliano, ed avvertendo che la probabilità è eguale al numero dei casi favorevoli divisa per il numero dei casi possibili (20), avremo

$$P=\frac{(2x-1)(x-1)}{x(2x-1)}=\frac{x-1}{x}.$$

Chiamando P′ la probabilità perchè il Re si trovi nel primo binario, sarà

$$P'=\frac{(2x-1)1}{x(2x-1)}=\frac{1}{x};$$

e finalmente chiamando P″ la probabilità perchè il Re si trovi due volte nel primo binario, sarà

$$P''=0.$$

II. Supponghiamo adesso che nel numero $2x$ di carte si trovino due Re.

Il numero delle carte, fra le quali non si trovano i due Re, sarà $2x-2$: le combinazioni binarie di queste carte, saranno $\frac{(2x-3)(2x-2)}{2}=(x-1)(2x-3)$: le combinazioni binarie nelle quali può trovarsi una volta la carta del Re, saranno $(2x-2).2$; e quelle nelle quali possono trovarsi due Re, saranno $\frac{2.1}{2}=1$.

Chiamando adunque P, P′, P″ le tre probabilità come sopra, avremo

$$P=\frac{(x-1)(2x-3)}{x(2x-1)},\quad P'=\frac{(2x-2).2}{x(2x-1)},\quad P''=\frac{1}{x(2x-1)}.$$

III. Supponghiamo che nel numero $2x$ si trovino tre carte del Re e per un ragionamento simile, avremo

$$P=\frac{(2x-3)(x-2)}{x(2x-1)}$$

$$P'=\frac{(2x-3).3}{x(2x-1)}$$

$$P''=\frac{3}{x(2x-1)}:$$

IV. In fine trovandosi quattro Re fra il numero $2x$ di carte, sarà

$$P=\frac{(2x-5)(x-2)}{x(2x-1)}$$

$$P'=\frac{(2x-4).4}{x(2x-1)}$$

$$P''=\frac{6}{x(2x-1)}$$

Rammentiamo che P rappresenta sempre la probabilità che nella prima coppia di carte non si trovi un Re; P′ la probabilità che vi se ne trovi un solo; P″ la probabilità che vi se ne trovino due.

§. 124. Risolviamo ora le principali questioni che possono proporsi sopra questo Gioco.

Prima questione

Quale è la sorte del Banchiere e del Giocatore nella prima coppia di carte?

Rappresentiamo per l'unità la scommessa, ed indicando per P′ la probabilità d'avere il Re nella prima coppia, sarà $\frac{P'}{2}$ la probabilità che il Re sia favorevole al Banchiere: e la sua sorte sarà (110, VI) $=\frac{P'}{2}.1=\frac{P'}{2}$: così essendo P″ la probabilità che la prima coppia abbia due Re, o sia un doppietto, e guadagnando in questo caso il Banchiere la metà della scommessa, cioè $\frac{1}{2}$, sarà

$P''.\frac{1}{2}=\frac{P''}{2}$ la sorte del Banchiere in virtù del doppietto: Dunque la sorte totale del Banchiere, sarà $\frac{P'+P''}{2}$.

Egualmente la probabilità che nella prima coppia di carte si trovi un Re favorevole al Giocatore è $\frac{P'}{2}$, e quindi la sua sorte in virtù di questo Re sarà $\frac{P'}{2}.1=\frac{P'}{2}$; e siccome venendo un doppietto, il Giocatore perde la metà della scommessa che equivale a dire guadagna $-\frac{1}{2}$, così per causa del doppietto la sua sorte sarà $P''\times-\frac{1}{2}=-\frac{P''}{2}$: dunque la sorte totale del Giocatore, sarà $\frac{P'-P''}{2}$.

Sostituendo adesso nelle trovate formule i diversi valori di P′, P″ avuti al §. antecedente per i casi I, II, III, IV, avremo

Per il caso I. $\begin{cases}\text{Sorte del Banch.}=\frac{1}{2x}\\ \text{Sorte del Gioc.}=\frac{1}{2x}\end{cases}$

Per il caso II. $\begin{cases}\text{Sorte del Banch.}=\frac{4x-3}{2x(2x-1)}\\ \text{Sorte del Gioc.}=\frac{4x-5}{2x(2x-1)}\end{cases}$

Per il caso III. $\begin{cases}\text{Sorte del Banch.}=\frac{3x-3}{x(2x-1)}\\ \text{Sorte del Gioc.}=\frac{3x-6}{x(2x-1)}\end{cases}$

Per il caso IV. $\begin{cases}\text{Sorte del Banch.}=\frac{4x-5}{x(2x-1)}\ (\text{e facendo } x=26)=\frac{99}{1326}\\ \text{Sorte del Gioc.}=\frac{4x-11}{x(2x-1)}\ \ldots\ldots\ldots\ldots=\frac{93}{1326}\end{cases}$

E sarà soddisfatta la prima questione.

S'avverta che le suddette espressioni (113) rappresentano ancora le probabilità del Banchiere e del Giocatore per guadagnare la scommessa nella prima coppia di carte.

§. 125. Seconda Questione

Quale è la sorte del Banchiere, e quale quella del Giocatore quando si sfogliano tante carte, finchè venga la carta del Re, su cui cade la scommessa?

Risolviamo questa questione nei quattro casi sopra considerati.

I. Caso. Sia z_x funzione di x la sorte del Banchiere; u_x funzione di x la sorte del Giocatore.

Nella prima coppia di carte può guadagnare il Banchiere; può guadagnare il Giocatore; può nessun guadagnare: in quest' ultimo caso le loro sorti si riducono a z_{x-1}; u_{x-1}: ora la probabilità (§. antecedente) perchè il Banchiere guadagni la scommessa nella prima coppia di carte è $\frac{1}{2x}$; dunque la sua sorte per il caso che la scommessa finisca nella prima coppia, sarà $\frac{1}{2x}\cdot 1$, ovvero $\frac{1}{2x}$. La probabilità perchè il Banchiere non vinca nè perda nella prima coppia, o perchè la sua sorte si riduca a z_{x-1}, o perchè esso guadagni la quantità z_{x-1}, è (§. 122.) $\frac{x-1}{x}$; dunque $\frac{x-1}{x}z_{x-1}$, sarà la sorte del Banchiere, se la scommessa non finisce nella prima coppia: avremo adunque per rappresentare la sorte del Banchiere $\frac{x-1}{x}z_{x-1}+\frac{1}{2x}$, e perciò

(1) .... $z_x=\frac{x-1}{x}z_{x-1}+\frac{1}{2x}$,

lo stesso ragionamento ci dà

(2) .... $u_x=\frac{x-1}{x}u_{x-1}+\frac{1}{2x}$.

e dall' integrazione di queste due equazioni dipendono i valori di z_x, u_x.

Per integrare l' equazione (1) io faccio $xz_x=p_x$, ed ho $p_x=p_{x-1}+\frac{1}{2}$, onde $p_{x+1}=p_x+\frac{1}{2}$; $\Delta p_x=\frac{1}{2}$, $p_x=\frac{1}{2}\Sigma 1$, $p_x=\frac{1}{2}x+C$, e quindi $z_x=\frac{1}{2}+\frac{C}{x}$: ora facendo $x=1$, si ha $z_1=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+C$, e $C=0$, dunque $z_x=\frac{1}{2}$.

Nella stessa maniera troveremo $u_x=\frac{1}{2}$.

II. Caso. Sia z'_x la sorte del Banchiere; u'_x la sorte del Giocatore

Nella prima coppia di carte può guadagnare il Banchiere; può guadagnare il Giocatore; può nessun di lor guadagnare. In quest' ultimo caso le loro sorti sono ridotte a z'_{x-1}, u'_{x-1}. Ora (§. antecedente) la probabilità perchè il Banchiere guadagni la scommessa nella prima coppia di carte è $\frac{4x-3}{2x(2x-1)}$; dunque la sorte di esso per il caso che la scommessa finisca nella prima coppia, sarà $\frac{4x-3}{2x(2x-1)}\cdot 1$, ovvero $\frac{4x-3}{2x(2x-1)}$. La probabilità, perchè non venga alcun Re nella prima coppia di carte, cioè perchè il Banchiere non vinca nè perda nella prima coppia, o perchè la sua sorte si riduca a z'_{x-1}, o perchè esso guadagni la quantità z'_{x-1}, è (§. 122.) $\frac{(x-1)(2x-3)}{x(2x-1)}$; dunque $\frac{(x-1)(2x-3)}{x(2x-1)}z'_{x-1}$ sarà la sorte del Banchiere se la scommessa non termina nelle due prime carte: dunque la sorte totale del Banchiere sarà rappresentata da $\frac{(x-1)(2x-3)}{x(2x-1)}z'_{x-1}+\frac{4x-3}{2x(2x-1)}$: dunque avremo

(3) .... $z'_x=\frac{(x-1)(2x-3)}{x(2x-1)}z'_{x-1}+\frac{4x-3}{2x(2x-1)}$:

un simile ragionamento fatto per il Giocatore, darà

(4) .... $u'_x=\frac{(x-1)(2x-3)}{x(2x-1)}u'_{x-1}+\frac{4x-3}{2x(2x-1)}$.

Per integrare l' equazione (3) facciasi $x(2x-1)z'_x=p'_x$, ed avremo da integrare

$p'_x=p'_{x-1}+\frac{4x-3}{2}$, e perciò $p'_{x+1}=p_x+\frac{4x+1}{2}$, d' onde

$p_x=\frac{1}{2}\Sigma(4x+1)=\frac{2x(x-1)+x}{2}=\frac{x(2x-1)}{2}+C$: sarà per tanto

$z'_x=\frac{x(2x-1)}{2x(2x-1)}=\frac{1}{2}$ poichè la costante trovasi eguale a zero.

Col medesimo artifizio integrando l' equazione (4) si trova

$u'_x=\frac{2x-3}{2(2x-1)}$

d' ora in avanti non aggiungeremo costanti, poichè determinandole si troverebbero $=0$.

III. Caso. Sia rappresentata da z''_x la sorte del Banchiere, e da u''_x quella del Giocatore: il medesimo ragionamento che abbiam fatto per gli altri due casi, applicato al caso presente, ci dà queste due equazioni a differenze finite del primo ordine per determinare z''_x, u''_x.

(5) .... $z''_x = \frac{(2x-3)(x-2)}{x(2x-1)} z''_{x-1} + \frac{3x-3}{x(2x-1)}$

(6) .... $u''_x = \frac{(2x-3)(x-2)}{x(2x-1)} u''_{x-1} + \frac{3x-6}{x(2x-1)}$.

Per integrare l'equazione (5) ponghiamo $x(2x-1)z''_x = p_x$, ed avremo

$p_x = \frac{x-2}{x-1} p_{x-1} + 3x - 3$: facciamo anche $(x-1)p_x = p'_x$ ed avremo

$p'_x = p'_{x-1} + (3x-3)(x-1)$, dalla quale

$p'_{x+1} = p'_x + 3x^2$: sarà dunque

$p'_x = 3\Sigma x^2 = \frac{x(x-1)(2x-1)}{2}$;

$p''_x = \frac{x(x-1)(2x-1)}{2(x-1)} = \frac{x(2x-1)}{2}$;

$z''_x = \frac{x(2x-1)}{2(2x-1)x} = \frac{1}{2}$:

per integrare l'equazione (6) ponghiamo $x(2x-1)u''_x = q_x$ e questa diverrà

$q_x = \frac{x-2}{x-1} q_{x-1} + 3x - 6$; ponghiamo ora $(x-1)q_x = q'_x$, ed avremo

$q'_x = q'_{x-1} + (3x-6)(x-1)$, dalla quale

$q'_x = \Sigma x(3x-3) = 3\Sigma x(x-1) = x(x-1)(x-2)$: sarà dunque

$q_x = \frac{x(x-1)(x-2)}{x-1} = \frac{x(x-2)}{1}$; $u''_x = \frac{x(x-2)}{x(2x-1)} = \frac{x-2}{2x-1}$.

IV. Caso. Egualmente per questo quarto caso indicando per

z'''_x la sorte del Banchiere, e per u'''_x la sorte del Giocatore, avremo le due seguenti equazioni

(7) .... $z'''_x = \frac{(2x-5)(x-2)}{x(2x-1)} z'''_{x-1} + \frac{4x-5}{x(2x-1)}$

(8) .... $u'''_x = \frac{(2x-5)(x-2)}{x(2x-1)} u'''_{x-1} + \frac{4x-11}{x(2x-1)}$.

Le quali ridotte più semplici col medesimo artifizio ed integrate, ci danno

$z'''_x = \frac{1}{2}$, $u'''_x = \frac{(2x-1)(2x-3)-2(4x-5)}{2(2x-1)(2x-3)}$, ovvero

$u'''_x = \frac{1}{2} - \frac{4x-5}{(2x-1)(2x-3)}$.

Resta così sodisfatta la seconda questione.

§. 126. Terza Questione.

Quale è la sorte del Banchiere in virtù soltanto dei doppietti?

Ciò costituisce particolarmente il vantaggio che ha in questo Gioco il Banchiere, e lo scapito che vi ha il Giocatore; ed il doppio di questa quantità forma la differenza fra la sorte del Banchiere e quella del Giocatore.

La soluzione di questa questione si potrebbe ricavare dalla considerazione delle sorti calcolate nel §. antecedente, giacchè anche nella questione attuale si suppone che la scommessa termini allorchè si sfoglia la carta su cui si scommetteva.

Pure considerandola indipendentemente da ciò che è detto al §. citato; vedremo che indicando per z'_x questa sorte nel secondo caso; per z''_x la medesima sorte nel terzo caso; e per z'''_x la sorte nel quarto caso, abbiamo

II. Caso .... $z'_x = \frac{(x-1)(2x-3)}{x(2x-1)} + \frac{1}{2x(2x-1)}$ da cui $z'_x = \frac{1}{2(2x-1)}$

III. Caso .... $z''_x = \frac{(2x-3)(x-2)}{x(2x-1)} z''_{x-1} + \frac{3}{2x(2x-1)}$ .... $z''_x = \frac{3}{4(2x-1)}$

IV. Caso .... $z'''_x = \frac{(2x-5)(x-2)}{x(2x-1)} z'''_{x-1} + \frac{6}{2x(2x-1)}$ .... $z'''_x = \frac{4x-5}{2(2x-1)(2x-3)}$.

Il ragionamento col quale si ottengono queste equazioni, ed il metodo per integrarle sono simili a quelli seguiti per la seconda questione: gli ripeteremo in dettaglio nella seguente ove sono più interessanti.

§ 127. Quarta Questione.

Quale è la sorte del Banchiere e del Giocatore nel II; III; IV Caso, supponendo che la scommessa continui finchè non siansi avuti tutti i Re, giacchè si suppone che sia il Re la carta giocata?

Non si considera il primo Caso, poichè questa questione ricade allora nella seconda.

Indichiamo per z_x, u_x le sorti del Banchiere e del Giocatore nel primo caso, le quali abbiamo trovate $= \frac{1}{2}$.

II. Caso. Siano z'_x, u'_x le dette sorti nel secondo caso.

Nella prima coppia di carte può trovarsi un Re, possono trovarsi due Re, può trovarsi nessun Re: in questo ultimo evento la sorte del Banchiere diviene z'_{x-1} che equivale a dire se non viene alcun Re il Banchiere guadagna la quantità z'_{x-1}, e siccome la probabilità perchè ciò succeda (123) è $\frac{(x-1)(2x-3)}{x(2x-1)}$, così la sorte del Banchiere dipendente da questo evento, sarà $\frac{(x-1)(2x-3)}{x(2x-1)} z'_{x-1}$.

Nel primo evento la scommessa non termina, o almeno ricomincia: così guadagnata o perduta che abbia il Banchiere la scommessa $= 1$ gli resta la sorte z_{x-1}; ovvero dal venire nella prima coppia di carte un Re, il Banchiere guadagna certamente la quantità z_{x-1}, e può anche guadagnare la scommessa 1 se il Re gli è favorevole. La probabilità che si trovi un Re nelle due prime carte è $\frac{(2x-2).2}{x(2x-1)}$ (123); la probabilità perchè il Re sia favorevole al Banchiere è $\frac{2x-2}{x(2x-1)}$: dunque per causa di questo primo evento la sorte del Banchiere sarà

$$\frac{(2x-2)\,2}{x(2x-1)} \cdot z_{x-1} + \frac{2x-2}{x(2x-1)} \cdot 1 = \frac{2(2x-2)}{x(2x-1)} \text{ (poichè } z_{x-1} = \tfrac{1}{2} \text{).}$$

Nel secondo evento il Banchiere guadagna la metà della scommessa $= \frac{1}{2}$, ed essendo la probabilità che accada questo secondo evento $\frac{1}{x(2x-1)}$, la sorte da esso dipendente sarà $\frac{1}{x(2x-1)} \cdot \frac{1}{2}$.

Sommando adunque le sorti dipendenti da questi tre eventi possibili, avremo l' espressione della sorte z'_x, e perciò

$$(1) \ldots\ldots z'_x = \frac{(x-1)(2x-3)}{x(2x-1)} z'_{x-1} + \frac{8x-7}{2x(2x-1)}:$$

da un simil ragionamento fatto per il Giocatore risulta

$$(2) \ldots\ldots u'_x = \frac{(x-1)(2x-3)}{x(2x-1)} u'_{x-1} + \frac{8x-9}{2x(2x-1)}:$$

queste equazioni integrate ci danno

$$z'_x = \frac{4x-3}{2(2x-1)}, \quad u'_x = \frac{4x-5}{2(2x-1)}.$$

III. Caso. Siano z''_x, u''_x le sorti del Banchiere e del Giocatore: nella prima coppia di carte può trovarsi un Re, possono trovarsi due Re, può trovarsi nessun Re. In questo terzo evento (noi facciamo il ragionamento per il Giocatore) la sorte del Giocatore diviene u''_{x-1}, ovvero in questo terzo evento egli guadagna la quantità u''_{x-1}: la probabilità perchè questo evento succeda è $\frac{(2x-3)(x-2)}{x(2x-1)}$; dunque la sorte del Giocatore per causa di questo avento sarà $\frac{(2x-3)(x-2)}{x(2x-1)} u''_{x-1}$.

Nel primo evento vinca o perda il Giocatore gli resta sicuramente la sorte u'_{x-1} del caso precedente: la probabilità perchè accada il primo evento è $\frac{6x-9}{x(2x-1)}$; e la probabilità perchè l' evento sia favorevole al Giocatore è $\frac{6x-9}{2x(2x-1)}$: dunque la sorte dipendente dà questo evento è

$$\frac{6x-9}{x(2x-1)} \cdot u'_{x-1} + \frac{6x-9}{2x(2x-1)} \cdot 1 = \frac{6x-9}{x(2x-1)} \cdot \frac{4x-9}{2(2x-3)} + \frac{6x-9}{2x(2x-1)} = \frac{9x-18}{x(2x-1)}.$$

Nel secondo evento il Giocatore perde la metà della scommessa, e gli resta la probabilità di guadagnare u_{x-1}: nella continuazione della scommessa, ovvero nel secondo evento egli guadagna la quantità $-\frac{1}{2}+u_{x-1}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$: la di lui sorte adunque in virtù di questo evento è $=0$.

La somma delle sorti per i tre eventi che possono aver luogo nella prima coppia di carte, sarà eguale alla sorte u''_x, ed avremo

$$(3)\ \ldots\ u''_x=\frac{(2x-3)(x-2)}{x(2x-1)}u''_{x-1}+\frac{9(x-2)}{x(2x-1)}:$$

un simile ragionamento fatto per il Banchiere conduce all'equazione

$$(4)\ \ldots\ z''_x=\frac{(2x-3)(x-2)}{x(2x-1)}z''_{x-1}+\frac{6(3x-4)}{2x(2x-1)}:$$

queste equazioni integrate ci danno

$$z''_x=\frac{3x-3}{2x-1},\quad u''_x=\frac{3x-6}{2x-1}.$$

IV. Caso. Siano z'''_x, u'''_x le sorti del Banchiere e del Giocatore, e ripetendo gli stessi ragionamenti che abbiamo fatti per gli altri casi, avremo queste due equazioni

$$(5)\ \ldots\ z'''_x=\frac{(2x-5)(x-2)}{x(2x-1)}z'''_{x-1}+\frac{24(x-2)^2+3(4x-7)+(4x-5)(2x-3)}{x(2x-1)(2x-3)}$$

$$(6)\ \ldots\ u'''_x=\frac{(2x-5)(x-2)}{x(2x-1)}u'''_{x-1}+\frac{24(x-3)(x-2)+3(4x-9)+(4x-11)(2x-3}{x(2x-1)(2x-3)}$$

le quali bisogna integrare per aver la soluzione della questione.

Facendo uso dell'artifizio adoprato per l'equazioni del §. 124, queste si riducono all'integrazione di semplici funzioni, e si trova

$$z'''_x=\frac{4x-5}{2x-1},\quad u'''_x=\frac{4x-11}{2x-1}.$$

In fatti per l'equazione (5) facciasi $x(2x-1)z'''_x=p_x$, ed avremo

$$p_x=\frac{(2x-5)(x-2)}{(x-1)(2x-3)}p_{x-1}+\frac{24(x-2)^2+3(4x-7)+(4x-5)(2x-3)}{2x-3}:$$

facciasi $(x-1)(2x-3)p_x=p'_x$, ed avremo

$$p'_x=p'_{x-1}+\{24(x-2)^2+3(4x-7)+(4x-5)(2x-3)\}(x-1),\ \text{ovvero}$$

$$p'_{x+1}=p'_x+24x(x-1)^2+3x(4x-3)+x(4x-1)(2x-1),\ \text{e riducendo}$$

$$p'_{x+1}=p'_x+32x^3-42x^2+16x:$$

integrando ora qnest' ultima equazione, avremo (15)

$$p'_x=32\Sigma x^3-42\Sigma x^2+16\Sigma x=8x^2(x-1)^2-7x(x-1)(2x-1)+8x(x-1),\ \text{ovvero}$$

$$p'_x=x(x-1)(2x-3)(4x-5):\ \text{sarà dunque}$$

$$p_x=\frac{x(x-1)(2x-3)(4x-5)}{(x-1)(2x-3)}=x(4x-5),\ \text{e}$$

$$z'''_x=\frac{p_x}{x(2x-1)}=\frac{x(4x-5)}{x(2x-1)}=\frac{4x-5}{2x-1}.$$

Nella stessa guisa si troverebbe il valore di u'''_x.

Le costanti si tralasciano, perchè si troverebbero $=0$.

§. 128. Se alle sorti del Banchiere quì sopra calcolate s'aggiunge la sorte che nasce dall'ultima coppia di carte che è sempre vantaggiosa al Banchiere, avremo nei diversi casi le effettive sorti del Banchiere medesimo. Questo aumento di sorte per l'ultima coppia nasce e dalla probabilità che la carta sia favorevole al Giocatore (che nell'ultima coppia (123) è in favore del Banchiere) e dalla metà della probabilità perchè si abbia un doppietto.

Questo aumento di sorte è dunque eguale alla sorte del Banchiere nella prima coppia di carte: dunque indicando per A questo aumento, sarà

I. Caso . . . . $A=\frac{1}{2x}$

II. Caso . . . . $A=\frac{4x-3}{2x(2x-1)}$

III. Caso . . . . $A=\frac{3x-3}{x(2x-1)}$

IV. Caso . . . . $A=\frac{4x-5}{x(2x-1)}$.

Queste quantità devono togliersi dalle calcolate sorti per il Giocatore per avere le vere sorti del medesimo.

Se si fa $x=26$, avremo per la quarta questione nel Caso IV, cioè quando comincia il gioco,

Sorte del Banchiere $=\frac{4x-5}{2x-1}+\frac{4x-5}{x(2x-1)}=\frac{2673}{26.51}$:

Sorte del Giocatore $=\frac{4x-11}{2x-1}-\frac{4x-5}{x(2x-1)}=\frac{2319}{26.51}$:

dunque indicando per S la sorte del Banchiere, e per s quella del Giocatore, sarà

$S : s :: 2673 : 2319 :: 115 :: 100$ circa.

Ciò mostra che il guadagno assoluto del Banchiere in tutto il gioco è il quindici per $\frac{o}{o}$ circa (*a*);

e facendo $x = 26$ nella seconda questione si trova che

$S : s :: 108 :: 100$ circa.

II.ᵃ APPLICAZIONE

Del Calcolo delle Differenze Finite alla Geometria.

§. 129. Il Calcolo delle Differenze Finite ha la sua applicazione ancora nella Teoria delle curve. Tutte le proprietà ed affezioni di una curva le quali appartengono a punti le di cui ascisse differiscono fra loro di una quantità ω, s'esprimono analiticamente per equazioni a differenze finite. Se dunque data una curva vorremo alcuna di queste proprietà, faremo uso del calcolo diretto delle differenze; e se dalla cognizione di alcuna di queste proprietà ritrovar dobbiamo la curva, sarà necessaria l'integrazione dell'equazione che esprime quella proprietà medesima.

Sia infatti $y = \varphi(x)$ l'equazione di una curva qualunque: finchè x rimane indeterminato e capace di ricevere qualunque valore possibile, l'ordinata y può appartenere a qualunque punto della curva secondo il valore che è dato ad x. Supponghiamo ora che x divenga $x + \omega$, avremo allora $y' = \varphi(x + \omega)$, e quantunque quest'equazione esprima delle ordinate distanti dalla prima della quantità ω, pure ancora essa rappresenterà quella curva, ed anche questa seconda ordinata y' potrà appartenere a qualunque punto della curva, finchè x rimarrà indeterminato: lo stesso si dica di una terza equazione $y'' = \varphi(x + 2\omega)$, e così di seguito.

(*a*) Supponendo che un Banchiere tenga Banco per quattro ore per sera, che faccia quattro giocate in un'ora, e che la totalità delle scommesse (con cui si principia un gioco che si continuano finchè siano uscite tutte le carte delle dignità sopra le quali cadono le scommesse medesime) sia di 25 Zecchini, il guadagno del Banchiere sarà in quella sera di 60 Zecchini. In 360 sere questo Banchiere guadagnerà 21600 Zecchini; eppure si trova chi va a scommettere contro il Banchiere! Questa è una riprova che i *Goffi sono il patrimonio dei Furbi*.

Ora, se qualunque sia x, una proprietà o affezione della curva appartiene ai punti delle ascisse x; $x + \omega$; $x + 2\omega$ ec., e delle ordinate $\varphi(x)$, $\varphi(x + \omega)$, $\varphi(x + 2\omega)$ ec., si concepisce facilmente che questa proprietà potrà analiticamente essere espressa per una equazione fra x, ω, e le quantità $\varphi(x)$, $\varphi(x + \omega)$, $\varphi(x + 2\omega)$ ec., le quali determinano le posizioni di quei punti; cioè per un'equazione a differenze finite. L'integrale poi di una tale equazione ci determinerà la forma di $\varphi(x)$; se questa sarà incognita, ci darà cioè l'equazione della curva cui appartiene quella proprietà. Premessi questi principj venghiamo a delle particolari ricerche.

Data la curva (Fig. 1) EF espressa dall'equazione $y = \varphi(x)$, proponghiamoci „ di condurre per un qualunque di lei „ punto M una tal secante SMM', tale che la porzione MM' cor- „ risponda alla differenza delle ascisse $PP' = \omega$ „. Per questo troviamo il valore della subsecante SP.

I triangoli simili SMP, SP'M ci danno $SP : SP + PP' :: MP : P'M'$, cioè $SP : SP + \omega :: \varphi(x) : \varphi(x + \omega)$, e quindi

$SP = \frac{\omega\varphi(x)}{\varphi(x + \omega) - \varphi(x)} = \frac{\omega y}{y' - y} = \frac{\omega y}{\Delta y}$; questa sarà l'espressione analitica della subsecante SP per qualunque punto della curva: trovato il punto S, si condurrà per S e per M una retta, ed avremo la ricercata secante SMM'.

Se con alcuno dei metodi che sogliono insegnarsi nell'*introduzione all' Analisi sublime*, supponghiamo sviluppata in serie secondo le potenze intiere e crescenti di ω, la funzione $\varphi(x + \omega)$, e che questa serie sia

$\varphi(x + \omega) = \varphi(x) + p\omega + q\omega^2 +$ ec., potremo dare un'altra forma all'espressione di SP, ed avremo

$SP = \varphi(x) : (p + q\omega + r\omega^2 +$ ec.$)$:

ora la secante (Fig. 2) MM' diventa tangente quando $MM' = 0$, ovvero quando $\omega = 0$; dunque SP (che diviene allora subtangente) sarà in questo caso $= \varphi(x) : p$.

„ In una curva per tanto, qualunque siasi, la subtangente è „ eguale all'ordinata $\varphi(x)$ divisa per il coefficiente della prima „ potenza di ω nello sviluppo di $\varphi(x + \omega)$ „: ricavasi di quì la regola per tirare una tangente a qualunque punto di una curva data.

§. 130. Egualmente conducendo nel punto M (Fig 1) la linea MN perpendicolare alla secante, troveremo il valore di PN, ed avremo

$\mathrm{PN} = \frac{\phi(x).(\varphi(x+\omega)-\varphi(x))}{\omega} = \varphi(x).(p + \omega q + \omega^2 r + \text{ec.})$. Allorchè per la supposizione di $\omega = 0$, la secante diviene tangente (Fig. 2), la perpendicolare MN diventa normale alla curva, e PN subnormale: la subnormale adunque sarà $\mathrm{PN} = \varphi(x).p = yp$; cioè „ la subnormale corrispondente ad un punto qualunque „ di una curva sarà eguale all'ordinata di questo punto moltipli- „ cata per il coefficiente p „. E' tanto facile dopo tutto questo trovare le espressioni analitiche dell'intiera secante SMM' e della perpendicolare MN, che credo inutile il trattenermivi; solo avvertirò che trovati i valori della secante e della perpendicolare ad essa, possono aversi sul momento le espressioni della tangente e della normale alla curva col fare $\omega = 0$; anzi quest'ultime espressioni potranno ottenersi per mezzo di quelle della subtangente e della subnormale che abbiam già date; in fatti ciascuna di queste linee rappresenta l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo di cui sono dati i cateti.

Per farne un qualche esempio cerchiamo la subsecante nella parabola.

Sia ω la differenza delle due ascisse: l'equazione della parabola è $y^2 = ax$, ovvero $y = \sqrt{ax}$; sarà perciò $y' = \sqrt{(a(x+\omega))}$, e quindi la subsecante

$$\mathrm{SP} = \frac{\omega y}{y' - y} = \frac{\omega\sqrt{ax}}{\sqrt{(ax + \frac{a\omega}{2})} - \sqrt{ax}}.$$

Facciamo $\omega = \frac{a}{2}$ cioè alla metà del parametro, ed avremo

$$\mathrm{SP} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{ax}}{\sqrt{(ax + \frac{a^2}{2})} - \sqrt{ax}} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{x}}{\sqrt{(x + \frac{a}{2})} - \sqrt{x}}.$$

Per averne la subtangente incominceremo da sviluppare in serie la funzione $\sqrt{(a(x+\omega))}$, ed avremo

$\sqrt{a}(x+\omega) = \sqrt{a}.\{x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.\omega + \text{ec.}\}$, e perciò $p = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.\sqrt{a}$, onde $\mathrm{SP} = \sqrt{(ax)}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\sqrt{a} = 2x$: cioè *nella Parabola Apolloniana la subtangente è doppia dell'ascissa corrispondente*.

§. 131. Proponghiamoci ora di ritrovare la curva di cui è conosciuta la subsecante.

Sia X funzione cognita di x il valore dato della subsecante, ed avremo allora $\frac{\omega y}{\Delta y} = \mathrm{X}$, e quindi $\omega y = \mathrm{X}.\Delta y$, ovvero $\omega y_x = \mathrm{X}y_{x+\omega} - \mathrm{X}y_x$;
dall'integrazione adunque di quest'equazione
$\mathrm{X}y_{x+\omega} - (\mathrm{X}+\omega)y_x = 0$ a differenze finite del primo ordine, dipende la ricerca dell'equazione della curva richiesta.

Egualmente si vede come potrebbe ritrovarsi l'equazione di una curva, della quale fosse conosciuta la secante, la perpendicolare alla secante, o qualunque altra funzione di esse. Sempre il Problema si riduce all'integrazione d'equazioni a differenze finite.

Rendiamo tutto questo più semplice per mezzo d'alcuni esempj.

Sia $\mathrm{X} = \frac{\omega}{a-1}$ essendo a una costante data, ed avremo

$y_{x+\omega} = \frac{\left(\frac{\omega}{a-1} + \omega\right)}{\frac{\omega}{a-1}} y_x$, ovvero $y_{x+\omega} = a y_x$. Integrando quest'equazione, si trova $y_x = \mathrm{A}a^{\frac{x}{\omega}}$, essendo A una costante arbitraria; questo integrale completo sarà l'equazione di una curva, la cui subsecante corrispondente alle due ascisse x; $x+\omega$, è $= \frac{\omega}{a-1}$.

Si cerchi ora l'equazione della curva (Fig. 1) EF, nella quale la subtangente SP stia alla subperpendicolare PN in una ragione qualunque data $1 : n^2$.

Questa condizione sarà espressa dall'equazione $\mathrm{SP}.n^2 = \mathrm{PN}$, la quale, ponendovi i valori di SP e di PN trovati al §. antecedente, diverrà

$\frac{\omega y}{\Delta y}.n^2 = \frac{y\Delta y}{\omega}$, ovvero $\Delta y^2 = \omega^2 n^2$.

L'integrale di quest'ultima equazione è $y = \pm\Sigma\omega n + \mathrm{A}$, essendo A la costante arbitraria che porta l'integrazione: il Problema adunque avrà due soluzioni secondo che prendiamo il segno + ovvero il —.

Sia $n = mx$, essendo m una costante data, ed allora $y = \pm\frac{x(x-\omega)}{2}m + \mathrm{A}$: dunque la curva, nella quale la subsecante SP sta alla subperpendicolare PN come $1 : m^2x^2$ è una parabola Apolloniana.

Per risolvere un altro Problema, proponghiamoci di trovare una curva, nella quale le ordinate distanti fra loro della quantità ω, siano tali che la somma dei quadrati eguagli il loro doppio prodotto.

Una tal condizione evidentemente è espressa da quest'equazione $y^2_{x+\omega} + y^2_x = 2y_x y_{x+\omega}$, ovvero $y^2_{x+\omega} - 2y_x \cdot y_{x+\omega} + y^2_x = 0$, la quale si riduce ad $y_{x+\omega} = y_x$; e dall'integrale di quest'equazione dipende la soluzione del Problema.

Integrando quest'equazione, si trova $y_x = a$, essendo a una costante arbitraria; dunque la curva cercata è una linea parallela distante dall'asse degli x di una quantità qualunque a. Ciò è per se medesimo evidente.

§. 132. L'equazione $y_x = a$, appartiene, come abbiam detto, ad una parallela all'asse dell'ascisse: questo però succede, allorchè a è una quantità che si conserva costante, qualunque aumento riceva la variabile x; se poi per le condizioni del Problema si ricerca solo che a sia costante quando x aumenta di una certa determinata quantità ω (e questo è il caso nel quale $y_x = a$ è l'integrale dell'equazione $y_{x+\omega} - y_x = 0$) allora quest'equazione $y_x = a$ non appartiene più alla parallela suddetta: vediamo adesso cosa tale equazione significa in questa supposizione.

Abbiamo al §. 80 trovato $y_x = \varphi\,(\cos 2mpx, \operatorname{sen} 2mpx)$ per esprimere l'integrale completo dell'equazione $y_{x+1} - y_x = 0$. La quantità $\varphi\,(\cos 2mpx, \operatorname{sen} 2mpx)$ rappresenta una funzione qualunque arbitraria di $\cos 2mpx$, e di $\operatorname{sen} \times 2mpx$, la quale non cangia valore quando x diviene $x+1$; $2p$ rappresenta la circonferenza di un circolo, ed m un qualunque numero intiero e positivo. Facciamo per più semplicità $m = 1$, e riflettendo che per noi la differenza finita dell'x, è ω, avremo

$y_x = \varphi\left(\cos\frac{2px}{\omega}, \operatorname{sen}\frac{2px}{\omega}\right)$ per rappresentare l'intégrale di $y_{x+\omega} - y_x = 0$.

Prendiamo adesso (Fig. 3) $AP = x$ e $PM = \varphi\left(\cos\frac{2px}{\omega}, \operatorname{sen}\frac{2px}{\omega}\right)$. Sia $PP' = P'P'' = P''P''' = $ ec. $= \omega$; ed è chiaro che alle ascisse $AP' = x + \omega$, $AP'' = x + 2\omega$ ec., corrisponderanno le ordinate $P'M'$; $P''M''$ ec., eguali fra loro ed eguali alla prima PM, poichè

$$\varphi\left(\cos\frac{2px}{\omega}, \operatorname{sen}\frac{2px}{\omega}\right) =$$
$$\varphi\left(\cos\frac{2p(x+\omega)}{\omega}, \operatorname{sen}\frac{2p(x+\omega)}{\omega}\right) =$$
$$\varphi\left(\cos\frac{2p(x+2\omega)}{\omega}, \operatorname{sen}\frac{2p(x+2\omega)}{\omega}\right) = \text{ec.}$$

e che per i punti M, M', M'' ec., può passare una linea retta parallela all'asse dell'ascisse AB.

Dando poi ad x tutti i valori possibili intermedj fra x ed $x + \omega$; fra $x + \omega$, ed $x + 2\omega$; fra $x + 2\omega$, ed $x + 3\omega$ ec., avremo le porzioni di curva MmM'; $M'm'M''$; $M''m''M'''$ ec., tutte eguali e simili, ed in conseguenza le ordinate pm; $p'm'$; $p''m''$ ec., distanti fra loro di ω, saranno anche eguali fra loro. Infatti facendo $Pp = \Delta x$, avremo

$$pm = \varphi\left(\cos\frac{2p(x+\Delta x)}{\omega}, \operatorname{sen}\frac{2p(x+\Delta x)}{\omega}\right) =$$
$$\varphi\left(\cos\frac{2p(x+\Delta x+\omega)}{\omega}, \operatorname{sen}\frac{2p(x+\Delta x+\omega)}{\omega}\right) =$$
$$\varphi\left(\cos\frac{2p(x+\Delta x+2\omega)}{\omega}, \operatorname{sen}\frac{2p(x+\Delta x+2\omega)}{\omega}\right) = \text{ec.}$$

e perciò $pm = p'm' = p''m'' = $ ec.

L'equazione adunque $y_x = \varphi\left(\cos\frac{2px}{\omega}, \operatorname{sen}\frac{2px}{\omega}\right)$ rappresenterà la curva $MmM'm'M''m''M'''m'''M''''$ ec.

Siccome la funzione φ è arbitraria si potranno egualmente avere infinite curve dello stesso genere che soddisfaranno all'equazione

$y_x = \varphi\left(\cos\frac{2px}{\omega}, \operatorname{sen}\frac{2px}{\omega}\right)$, come per esempio

$aa'a''a'''a''''$ ec., $bb'b''b'''b''''$ ec.

§. 133. Noi abbiamo fin ora tacitamente supposto che le coordinate x, y fossero riferite a due assi ad angolo retto fra loro: supponghiamo adesso che le ordinate partano tutte da un centro, e che le ascisse siano prese sopra un arco di circolo.

Sia dunque (Fig. 4.) $AP = x$, $CM = y$, e la curva EF sarà espressa dall' equazione $y = \varphi(x)$.

L' integrale dell' equazione $\Delta y = 0$, ovvero $y_{x+\omega} - y_x = 0$ è, ancora in questa supposizione, $y_x = a$, essendo a una costante arbitraria. Una tale equazione $y_x = a$ rappresenta il circolo MM'H di raggio $CM = a$, quando la quantità a deve restar costante, qualunque sia l' aumento che riceva la x.

Questa equazione poi rappresenta (Fig. 5.) tutti i poligoni circoscritti al circolo, come MM'M''M''' ec., MmM'm'M''m''M''' ec., quando la quantità a deve conservarsi costante per un determinato aumento ω che riceva la x, ovvero quando essa ha la forma $\varphi\left(sen\frac{2px}{\omega},\ cos\frac{2px}{\omega}\right)$.

Si vede adunque che $y_x = a$ è l' equazione del circolo; e $y_x = \varphi\left(sen\frac{2px}{\omega}, cos\frac{2px}{\omega}\right)$ è l' equazione dei poligoni ad esso concentrici.

Se ω è eguale al 6^{esto} della circonferenza $2p$, la suddetta equazione esprime la famiglia generale degli Esagoni; se ω è eguale al quinto della medesima circonferenza, l' equazione esprime la famiglia dei Pentagoni, e così di seguito. Tutto questo dipende da un ragionamento simile a quello fatto al §. antecedente per le coordinate ortogonali; abbiamo perciò creduto inutile di ripeterlo; solo avvertiremo che l' equazione particolare di ciascun poligono dipende dalla determinazione della funzione arbitraria φ.

§. 134. L' equazione $y = \varphi(x)$ rappresenta una curva quando x può ricevere tutti gli aumenti possibili, ed in conseguenza tutti i valori che ci piace di dargli. Ma allor quando per i dati della questione, o per la natura stessa della funzione, i suoi aumenti sono assoggettati ad una certa legge (per il che non può egli ricevere tutti i valori possibili) l' equazione $y = \varphi(x)$, ci dà dei punti separati; e se questi si considerano uniti con delle linee rette, essa ci rappresenta allora un poligono rettilineo.

Cerchiamo per esempio la curva di cui la subsecante sia $= \frac{1}{x}$. Supponghiamo $\omega = 1$, ed avremo (§. 131.)

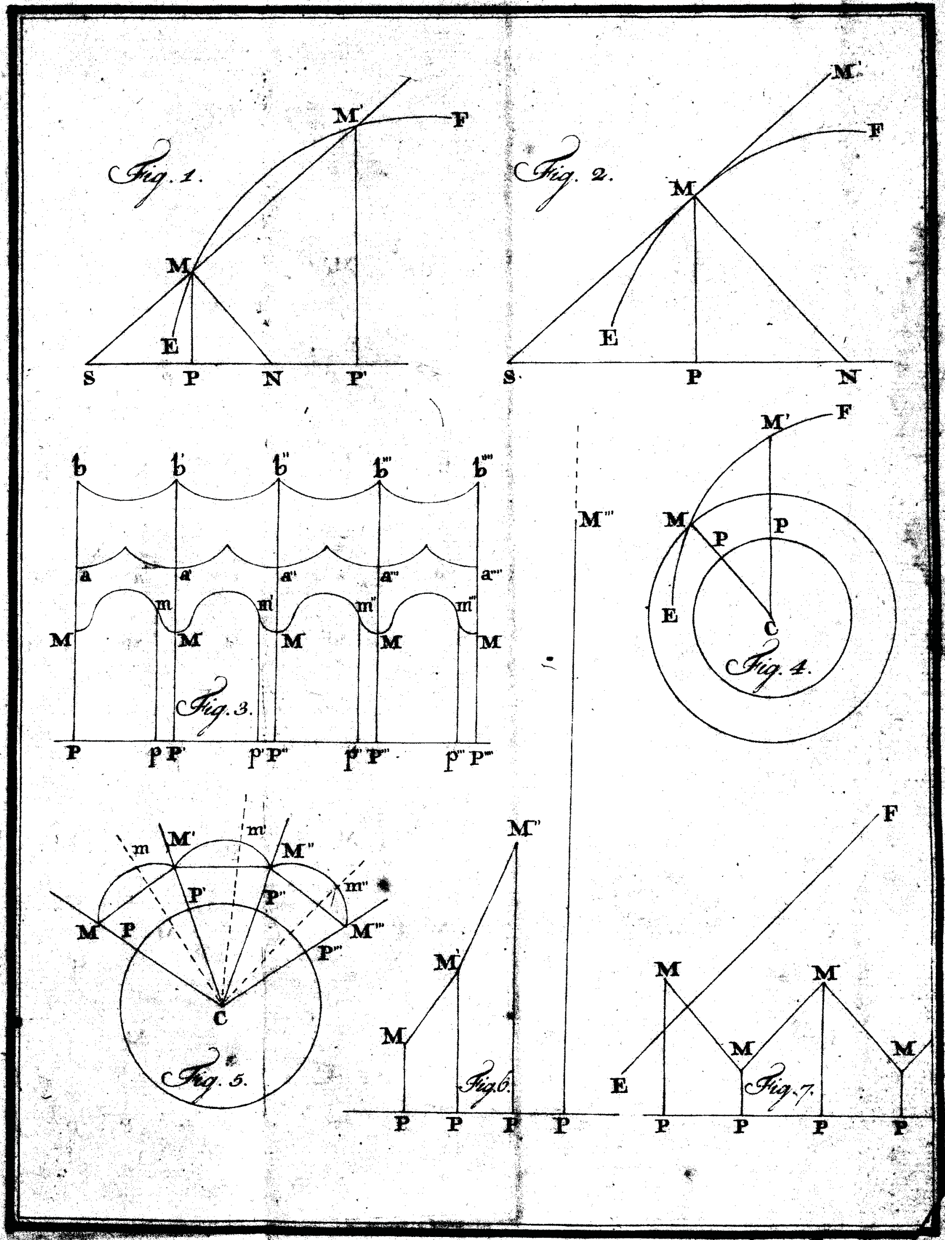
$y_{x+1} = (x+1)y_x$, l' integrale della quale è $y_x = Ae^{\Sigma l(x+1)}$, ovvero (§. 45) $y_x = Ax.(x-1)(x-2)\ldots 3.2.1$. La lettera A esprime la costante arbitraria.

L' ordinata y adunque è una tal funzione di x, che x deve essere sempre un numero intiero e positivo. Sarà pertanto un poligono rettilineo quello che soddisfarà alla questione, nel quale converrà però considerare i vertici degli angoli come i soli punti dotati della ricercata proprietà. Così (Fig. 6) prendendo O per origine delle ascisse, e facendo $OP = P'P'' = P'''P''' = $ ec. $= 1$; $PM = A$; $P'M' = 1.2.A$; $P''M'' = 1.2.3.A$; $P'''M''' = 1.2.3.4.A$ ec., il poligono MM'M''M''' ec., sarà la curva richiesta.

Al §. 84. abbiamo integrata l' equazione $\Delta y^2 = a^2$, ed abbiamo trovato le quattro equazioni $y = ax + A$; $y = -ax + A'$; $y = -\frac{a}{2}(-1)^x + B$; $y = \frac{a}{2}(-1)^x + B$ che vi soddisfanno. La prima e la terza di queste equazioni sono geometricamente rappresentate nella Fig. 7: la linea EF rappresenta la prima equazione, e la serie dei punti M, M', M'' ec. che formano i vertici degli angoli del poligono MM'M'' ec., e che corrispondono alle ascisse $AP = 1$; $AP'' = 2$; $AP''' = 3$ ec., rappresenta la terza equazione: lo stesso si direbbe della seconda e della quarta.

Non ci tratteghiamo di più sopra queste ricerche, e ponghiamo termine a questo Trattato del Calcolo delle Differenze Finite.

Fine del Calcolo delle Differenze Finite.



Gius. Poggiali inc.