

R. Conti  
7.1.1944

TULLIO LEVI-CIVITA

QUESTIONI  
DI  
MECCANICA CLASSICA  
E RELATIVISTA



BOLOGNA  
NICOLA ZANICHELLI  
EDITORE

L'EDITORE ADEMPIUTI I DOVERI  
ESERCITERÀ I DIRITTI SANCITI DALLE LEGGI

REGOLARIZZAZIONE DEL PROBLEMA

DEI TRE CORPI E SUA PORTATA

I.

Generalità sull'integrazione  
delle equazioni differenziali ordinarie.

Sia  $t$  una variabile indipendente; e siano  $x_1, x_2, \dots, x_n$  funzioni incognite di  $t$  le quali debbano verificare un sistema di equazioni differenziali normale, cioè della forma

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \dots, x_n; t) \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

i secondi membri essendo funzioni assegnate delle stesse  $x$  e della  $t$ .

Integrare il sistema ha sempre significato — si può dire dall'invenzione del calcolo in poi — caratterizzare in qualche modo le funzioni incognite  $x_i(t)$ . Il modo migliore per raggiungere questo scopo può variare secondo la natura specifica della questione che si studia. Ma i mezzi analitici di cui si può disporre si sono andati moltiplicando ed affinando.

Dapprima si risguardò come unico criterio di integrazione quello di sostituire, in quanto possibile, alle equazioni differenziali (1), altrettante relazioni in termini finiti fra le  $x_i$  e la  $t$ , espresse per mezzo delle cosiddette trascendenti elementari, riconducendosi così la discussione del comportamento delle

funzioni  $x(t)$  ad un problema meno elevato, cioè alla risoluzione di equazioni in termini finiti. In alcuni casi si raggiunge con questo procedimento una esauriente caratterizzazione delle incognite, ma in altri non si fa che spostare la difficoltà; sopra tutto poi è limitatissima la classe di equazioni integrabili mediante trascendenti elementari, donde la necessità di impostare la questione in altro modo.

Già gli analisti del XVIII secolo avevano esperito sviluppi in serie e procedimenti approssimativi, ma bisogna arrivare a Cauchy per la dimostrazione dei teoremi di esistenza, la quale implica una trattazione sistematica del problema *locale*, cioè la costruzione di un algoritmo atto a fornire sotto forma di serie le funzioni  $x(t)$  in un intorno abbastanza piccolo di valori di  $t$ .

In modo preciso, riferendosi per fissare le idee al campo delle funzioni analitiche, se i secondi membri  $X_i$  sono funzioni regolari di tutti i loro argomenti nell'intorno di certi valori (a priori quali si vogliono)  $x_i^{(0)}, t_0$ , il teorema di esistenza afferma che c'è una soluzione e una soltanto, definita dai valori iniziali  $x_i^{(0)}$ , cioè un solo sistema di funzioni  $x_i(t)$  le quali verificano le (1), si comportano regolarmente per  $t$  abbastanza vicino a  $t_0$ , assumendo proprio i valori  $x_i^{(0)}$  per  $t = t_0$ . Quando le  $X_i$  presentano delle singolarità, anche il semplice studio locale degli integrali presenta difficoltà considerevoli; e, non ostante i risultati classici di Briot e Bouquet, Fuchs, Poincaré, Picard, rimangono lumeggiati soltanto alcuni aspetti particolari, per quanto notevoli, della questione.

Torniamo a un intorno di regolarità. Fissata, mediante i valori iniziali, una soluzione generica, la sua caratterizzazione rimane circoscritta all'immediata prossimità del valore iniziale  $t_0$ ; mentre, pur restando nell'ambito dei valori reali, si desidera naturalmente di poter far variare  $t$  da  $-\infty$  a  $+\infty$ , o quanto meno di abbracciare tutto il campo di esistenza della soluzione. Un tale studio globale è in generale assai difficile e, nei problemi di interesse concreto, esso si compie caso per caso con criteri particolari (per lo più sfruttando espressioni formali degli integrali già conseguite). Poincaré, nelle sue memorabili ricerche sulle curve definite da equazioni differenziali, ha aperto nuove vie all'indagine; ma sono ancora poche le classi di sistemi differenziali per cui si è in grado di condurla a termine. La difficoltà maggiore proviene, come s'è detto, dalle eventuali singolarità dei secondi membri delle (1). Mettiamoci dapprima nel caso più favorevole in cui le singolarità non disturbino, e vediamo fin dove si può arrivare. Le  $X_i$  si mantengano regolari e inferiori in valore assoluto ad un numero prefissato  $M$ , *comunque* varino le  $x$  in un certo campo  $\Gamma$ , e la  $t$  in una striscia (del proprio piano complesso) che comprenda interamente l'asse reale e abbia ampiezza minima  $a$  (ossia comprenda anche due parallele distinte di  $a$  da una parte e dall'altra). Si sappia inoltre, in qualche modo, che ogni soluzione  $x_i(t)$  delle (1), definita per  $t=t_0$  da valori iniziali  $x_i^{(0)}$  appartenenti ad un qualche campo  $\Gamma'$  contenuto in  $\Gamma$ , non può uscire da questo campo  $\Gamma'$ . Allora si è sicuri che le  $x(t)$  sono funzioni regolari di  $t$  da  $-\infty$  a  $+\infty$ .

Si tratta di un facile corollario del teorema di esistenza su cui val forse la pena di soffermarsi un momento. All'uopo basta specificare l'ipotesi che  $\Gamma'$  sia tutto interno a  $\Gamma$ , supponendo che, qualunque siano i valori reali  $x_i^{(0)}$  entro  $\Gamma'$ , esiste un intorno  $|x_i - x_i^{(0)}| \leq b$  con  $b$  costante, interamente contenuto in  $\Gamma$ .

In queste condizioni, detto  $T'$  il più piccolo dei due numeri  $a$  e  $\frac{b}{M}$ , si è sicuri, in base al teorema di esistenza, che ogni soluzione  $x_i(t)$  è, a partire da un generico valore reale di  $t$ , prolungabile analiticamente entro un cerchio di raggio  $T'$ , in particolare per  $\pm T'$  lungo l'asse reale. Quest'asse appartiene quindi tutt'intero al campo di regolarità delle funzioni  $x_i(t)$ , e in particolare rimane compreso nella stella di Mittag-Leffler d'una generica  $x_i$ , relativa ad un suo punto qualsiasi. Perciò le  $x_i(t)$  sono in tal caso rappresentabili mediante serie di polinomi in  $t$ , convergenti uniformemente lungo ogni porzione finita comunque grande dell'asse reale. Come si vede, almeno dal punto di vista matematico di una rappresentazione mediante algoritmo convergente, siamo pervenuti ad abbracciare l'intero campo reale di esistenza, assurgendo dal locale al globale.

Non è ancora con ciò completamente raggiunta quella esauriente caratterizzazione degli integrali che involge l'andamento qualitativo, la periodicità, la stabilità, il comportamento assintotico, ecc., a cui, per la grandissima importanza concettuale ed applicativa, sono oggi, sulle tracce di Poincaré, indirizzati di preferenza gli sforzi dei geometri. Ma

questa parte così notevole dello studio degli integrali è essa stessa subordinata, almeno come venne impostata finora, ai campi di regolarità dei secondi membri  $X$ . Perciò può dirsi a doppio titolo privilegiata quella categoria di sistemi ovunque regolari nel campo reale, cui accennavo poc' anzi; e si rende manifesto l'interesse di trasformare, ove sia possibile, i sistemi differenziali provenienti dalle applicazioni, per esempio meccaniche, in cui i secondi membri si trovino affetti da qualche singolarità nel campo reale, in altri che ne siano esenti. In ciò consiste la *regolarizzazione*.

## II.

### Il problema dei tre corpi.

#### Richiamo delle ricerche sulle condizioni di urto.

Un esempio cospicuo di questa categoria di sistemi regolarizzabili è offerta dal famoso problema dei tre corpi. Si tratta, come tutti sanno, del moto di tre punti materiali  $O$ ,  $P$  e  $P'$ , i quali si attraggono secondo la legge di Newton.

Le equazioni differenziali del movimento, in una qualunque delle loro forme classiche, si comportano (nel campo reale) sempre regolarmente finchè le posizioni dei tre corpi sono distinte, ma presentano singolarità quando venissero a coincidere due dei tre corpi o tutti tre (urti). Lo studio analitico del comportamento del sistema nell'immediata prossi-

mità di un urto fu iniziato dal Painlevé una trentina di anni or sono. Egli dimostrò in modo rigoroso ciò che intuitivamente appare ovvio, ossia che, se tendendo  $t$  a  $t_1$  il moto non si mantiene regolare, ciò può avvenire soltanto perchè *una sola* delle mutue distanze o *tutte tre* hanno per limite zero quando  $t$  converge a  $t_1$  <sup>(1)</sup>. Nel primo caso si ha un *urto binario*, nel secondo una *collisione generale*.

Da questi studi il Painlevé <sup>(2)</sup> fu condotto ad annunciare come probabile che l'urto binario implica due relazioni uniformi fra le coordinate e le componenti di velocità dei tre corpi; e che, nel caso particolare del problema piano, dovrebbe bastare una sola condizione, l'altra rimanendo identicamente soddisfatta.

Da questi accenni del Painlevé sono stato indotto ad approfondire l'analisi del moto nell'immediata prossimità di un urto, limitandomi, per meglio concentrare lo sforzo sui punti essenziali, al caso più semplice che è dato dal cosiddetto problema ristretto <sup>(3)</sup>. Si tratta, come è ben noto, di

<sup>(1)</sup> Come si vede, rimane esclusa l'eventualità, a priori possibile, sebbene contrastante al nostro senso fisico, che due corpi possano avvicinarsi indefinitamente senza cadere l'uno sull'altro, oppure senza che la distanza mutua sia sempre decrescente.

<sup>(2)</sup> *Leçons etc., professées à Stockholm*, Paris: Hermann, 1897, pp. 582-586.

<sup>(3)</sup> *Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei tre corpi*, « Ann. di Mat. », Serie III, T. IX, 1903, pp. 1-32.

un caso particolare del problema piano in cui uno dei tre corpi, diciamo  $P$ , ha massa infinitamente piccola, sicchè non influisce sul moto degli altri due  $O$  e  $P'$ . Si suppone che  $O$  e  $P'$  si muovano nel modo più semplice compatibile con la legge di Newton, cioè ruotino uniformemente attorno al loro comune centro di gravità  $G$ . Il problema si può così ricondurre allo studio del moto di  $P$  nel piano in cui avviene la rotazione di  $O$ ,  $P'$ , sotto l'azione di questi due centri mobili.

Manifestamente qui può soltanto aver luogo un urto binario: di  $P$  con  $O$ , ovvero con  $P'$ .

Potei assodare che l'urto avviene sempre secondo una direzione ben determinata, nel senso che, considerando per es. un urto che segua all'istante  $t_1$  fra  $O$  e  $P$ , ove si indichino con  $r$  e  $\dot{\varphi}$  coordinate polari di  $P$  rispetto ad  $O$ , non soltanto si ha  $\lim_{t \rightarrow t_1} r = 0$ , come già risultava dalle proposizioni preliminari del Painlevé, ma esiste anche un limite ben determinato  $\dot{\varphi}_1$  per  $\dot{\varphi}$ . La velocità  $v$  tende invece a diventare infinita, ma  $\sqrt{rv}$  resta finito, ecc. Trasformando il sistema differenziale che regge il moto e sfruttando alcuni risultati concernenti le singolarità polari, si arriva a costruire sotto forma esplicita la condizione d'urto, che è unica e uniforme come aveva affermato Painlevé. Il Biscconcini <sup>(1)</sup> affrontò poco di poi, su analoghi

<sup>(1)</sup> *Sur le problème des trois corps*, « Acta Math. », T. 30, 1906, pp. 49-92.

principi, l'analisi degli urti binari nel problema generale dei tre corpi, pervenendo ad esplicitare due relazioni uniformi caratteristiche dell'urto, con che rimase pienamente confermata la previsione del Painlevé.

D'altra parte il Sundman <sup>(1)</sup> cominciò allora a rivolgere la sua attenzione al problema dei tre corpi, esaminando per il primo l'eventualità di una collisione generale, e dimostrando che questa può avvenire solo nel caso che si annulli il momento risultante delle quantità di moto dei tre corpi. Si tratta di un vettore globale,  $M$ , necessariamente costante durante il movimento di un qualsiasi sistema materiale soggetto (come è il caso dei tre corpi) a sole forze interne. Se le condizioni iniziali sono tali da rendere  $M$  non nullo, si può senz'altro escludere l'eventualità (più improbabile) di una collisione generale, con che le sole singolarità locali di cui va tenuto conto sono i tre possibili tipi di urti binari. In linea storica, pare che Weierstrass già avesse riconosciuto la portata essenziale della restrizione  $M \neq 0$  nello studio analitico del problema dei tre corpi <sup>(2)</sup>; ma è giusto attribuire la proposizione al Sundman, poichè egli la ritrovò, la dimostrò e ne trasse partito sistematico.

<sup>(1)</sup> *Recherches sur le problème des trois corps*, « Acta Scientiarum Societatis Fennicae », T. XXXIV, n.° 6 (Helsingfors, 1907).

<sup>(2)</sup> *Zur Biographie von Weierstrass*, « Acta Math. », T. 35, 1911, p. 30.

III.

**Primo saggio di regolarizzazione.  
Il risultato fondamentale di Sundman.**

Questi primi successi condussero a pensare che le singolarità analitiche corrispondenti al fenomeno di un urto siano meno formidabili di quanto si era temuto a priori. E invero non tardai molto ad accorgermi che, almeno nel problema ristretto, l'urto binario è regolarizzabile con mezzi singolarmente semplici. Comunicai questo risultato al Congresso Matematico di Heidelberg del 1904 illustrando poi la regolarizzazione stessa e le sue conseguenze in una memoria degli « Acta Math. » (T. 30, 1906, pp. 305-327).

Come tutti sanno, spetta al Sundman il vanto di aver per il primo regolarizzato in modo completo il problema dei tre corpi. Il lavoro <sup>(1)</sup> ottenne nel 1913 il premio Pontécoulant, dall'Accademia delle Scienze di Parigi, e il risultato impressionò a buon diritto i matematici e fu anche segnalato al gran pubblico come scoperta della soluzione del famoso problema dei tre corpi, invano cercata da Newton in poi. Le considerazioni preliminari, già istituite a proposito di un generico sistema diffe-

---

<sup>(1)</sup> *Mémoire sur le problème des trois corps.* « Acta Math. », T. 36, 1912, pp. 105-179.

renziale, ci indicano in quale senso sia effettivamente giustificato il parlare di problema risolto, e in pari tempo quali e quante questioni rimangano ancora insolute, pure essendo per lo più subordinate alla preventiva regolarizzazione degli urti.

Ma sulla portata di questo passo indiscutibilmente essenziale mi propongo di tornare più avanti. Per ora vogliamo fissare la nostra attenzione sui mezzi atti a realizzarlo. La via seguita dal Sundman è indiretta; richiede l'introduzione di un numero piuttosto rilevante di variabili ausiliarie, e calcoli ineleganti, per dar luogo ad un sistema regolarizzato che non rientra più nell'ambito delle equazioni della dinamica; il che costituisce un grave inconveniente, poichè non è più lecito (almeno senza discussione preventiva) di applicare a tale sistema nè i risultati teorici, nè i metodi di calcolo della meccanica analitica.

Per il problema piano mi riuscì agevole di raggiungere una regolarizzazione degli urti binari veramente dinamica, che conserva cioè tutte le prerogative del sistema originario, compresa la forma canonica <sup>(1)</sup>.

Basta infatti in sostanza la stessa trasformazione, che (anche prima della ricerca generale del Sundman) mi aveva permesso di regolarizzare il problema ristretto. Data la grande semplicità di questo procedimento, mi permetto di svolgerlo per disteso riferendomi al problema piano.

---

<sup>(1)</sup> « Rend. dei Lincei », vol. XXIV (2° semestre 1915), pp. 61-75.

IV.

**Il problema piano.**  
**Lemmi di comportamento analitico.**

Consideriamo, nel piano dei tre corpi, un sistema di assi  $Ox_1x_2$  coll'origine (mobile) nel punto  $O$ , ma di direzione invariabile.

Siano  $x_1, x_2$  e  $x_1', x_2'$  le coordinate di  $P$  e di  $P'$  riferite a questi assi;  $p_1, p_2$  e  $p_1', p_2'$  le componenti delle loro quantità di moto, riferite invece al baricentro  $G$  della terna, con che  $-(p_1 + p_1')$ ,  $-(p_2 + p_2')$  sono le componenti dell'analogha quantità di moto di  $O$ .

Dette  $m_0, m, m'$  le masse di  $O, P, P'$ ;  $r, r', \Delta$  le tre distanze  $OP, OP', PP'$ ,  $f$  la costante di attrazione universale, la funzione delle forze è notoriamente

$$U = f \left\{ \frac{m_0 m}{r} + \frac{m_0 m'}{r'} + \frac{m m'}{\Delta} \right\},$$

la quale si presenta come funzione olomorfa di  $x_1, x_2, x_1', x_2'$  in tutto il campo reale di questi argomenti, a meno che non si annullino  $r, r'$  o  $\Delta$ .

Ove si ponga

$$\left\{ \begin{array}{l} T = \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2) \quad (\text{forza viva di } P), \\ T' = \frac{1}{2m'} (p_1'^2 + p_2'^2) \quad (\text{forza viva di } P'), \\ T_0 = \frac{1}{2m_0} \{ (p_1 + p_1')^2 + (p_2 + p_2')^2 \} \quad (\text{forza viva di } O); \\ \mathfrak{T} = T + T' + T_0, \\ H = \mathfrak{T} - U, \end{array} \right.$$

si ha in  $H$  una funzione delle quattro coordinate  $x_1, x_2, x_1', x_2'$  e delle quattro componenti di quantità di moto (assolute o meglio baricentrali)  $p_1, p_2, p_1', p_2'$ , la quale manifestamente ha le sole singolarità già notate a proposito di  $U$ , e quelle corrispondenti a eventuali infiniti delle velocità, cioè di  $p_1, p_2, p_1', p_2'$ .

Le equazioni del moto, sotto la forma canonica (di Poincaré), si possono scrivere

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \\ \frac{dp_j}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (j = 1, 2) \end{array} \right.$$

colle analoghe relative alla quaterna accentata. Esse costituiscono come si vede un sistema normale. I secondi membri sono derivate di  $H$ ; e sono quindi affetti da singolarità locali quando si annullano  $r, r'$  o  $\Delta$ , o quando divengono infinite le velocità. Quest'ultima eventualità va considerata solo subordinatamente alla prima, poichè il teorema delle forze vive, espresso dalla equazione

$$H = \text{cost.},$$

ossia

$$\mathfrak{T} - U = \text{cost.},$$

assicura che, finchè il limite inferiore delle mutue distanze è diverso da zero, con che  $U$  resta finita, lo stesso avviene per  $\mathfrak{T}$  e quindi (dato il suo carattere di forma quadratica definita) per ciascuna delle  $p$ .

D'altra parte, come abbiamo accennato, se ci si pone nel caso generale in cui il momento risultante



$M$  delle quantità di moto è un vettore non nullo, è da escludere una collisione generale. Quando poi si considera un generico urto binario, per es. tra  $P$  ed  $O$ , si possono ritenere acquisite, dagli studi preliminari intorno al comportamento qualitativo di questa singolarità, alcune circostanze, le quali non fanno che esprimere sotto forma analitica ben precisata, ciò che ovviamente suggerisce l'intuizione meccanica di un urto fra due corpi, cui il terzo rimane completamente estraneo. Si tratta delle circostanze seguenti <sup>(1)</sup>.

Al convergere di  $t$  verso l'istante catastrofico  $t_1$ :

a)  $\lim_{t \rightarrow t_1} r = 0$ ;

b) posizione e velocità (baricentrale) nel terzo corpo  $P$ , e per esse le quattro variabili  $x', p'$  convergono verso limiti finiti e determinati, quando  $t$  tende a  $t_1$ . In particolare quindi  $\lim_{t \rightarrow t_1} r' = \lim_{t \rightarrow t_1} \Delta > 0$ ;

c) la frazione  $\frac{1}{r}$  diviene infinita per  $t = t_1$ , a norma della a), ma resta integrabile, talchè, posto

$$du = \frac{dt}{r},$$

si definisce (a meno di una inessenziale costante additiva) un parametro  $u$ , che cresce sempre con  $t$  e converge verso un valore finito  $u_1$ , quando  $t$  tende a  $t_1$ .

<sup>(1)</sup> Sur la régularisation du problème des trois corps, « Acta Math. », T. 42, 1918, pp. 99-143, Cap. I.

Dall'integrale delle forze vive, moltiplicando per  $r$  e passando al limite, scende ovviamente

$$d) \lim_{t \rightarrow t_1} r\mathcal{T} = \lim_{t \rightarrow t_1} r \left( \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m_0} \right) (p_1^2 + p_2^2) = fm_0 m.$$

V.

### Regolarizzazione canonica del problema piano.

Tutto ciò premesso, si noti che le equazioni differenziali (1) rimangono inalterate se si aggiunge alla funzione  $H$  una costante qualsiasi. D'altra parte le (1) stesse ammettono, come già si è osservato, l'integrale delle forze vive  $H = \text{cost.}$  Ove si designi con  $E$  la costante del secondo membro, e si fissi, ben s'intende, l'attenzione su quella categoria di soluzioni che corrispondono ad un valore di  $E$  ben determinato, ma del resto qualunque, si può immaginare scritto nelle equazioni (1)  $H - E$  al posto di  $H$ . Ciò ha il vantaggio, di cui usufruiremo tra un momento, che  $H - E$  si annulla lungo ognuna delle soluzioni di cui si tratta. Perciò è chiaro che (sempre per la categoria di soluzioni in questione), ove si ponga

$$(2) \quad H^* = r(H - E) = rT + r(T' + T_0) - rU - rE,$$

e si sostituisca alla variabile indipendente  $t$  la  $u$  definita dalla posizione differenziale c), il sistema (1)

diviene

$$(1') \quad \begin{cases} \frac{dx_j}{du} = \frac{\partial H^*}{\partial p_j}, \\ \frac{dp_j}{du} = -\frac{\partial H^*}{\partial x_j} \end{cases} \quad (j = 1, 2)$$

ed analoghe relative alle lettere accentate, coll' integrale  $H^* = \text{cost.}$  A noi però interessa soltanto quella categoria di soluzioni per cui  $H^* = 0$ , categoria che corrisponde a quella dell'originario sistema (1) per cui  $H = E$ .

La trasformazione semplicissima con cui siamo passati da (1) ad (1') fu usata per la prima volta da me una ventina d'anni or sono a proposito del problema ristretto. Essa può opportunamente qualificarsi di Darboux-Sundman, perchè congiunge il criterio di fissare  $E$ , usato in generale dal Darboux nello studio delle traiettorie, colla trasformazione di variabile indipendente adottata dal Sundman. Se si osserva la struttura analitica della funzione  $H^*$  all'approssimarsi di un urto binario  $P, O$ , si vede subito che c'è qualche miglioramento rispetto alla originaria funzione caratteristica. Sono infatti scomparsi gli infiniti; perchè la moltiplicazione per  $r$  ha sanato sia il termine  $\frac{f m_0 m}{r}$  di  $U$ , sia il termine  $T + T_0$

di  $\mathcal{T}$ , in base alla  $d$ ). Ma non si tratta ancora di funzione regolare, rispetto a tutte le variabili da cui dipende, perchè, comparendovi  $r$ , presenta un punto critico rispetto ad  $x_1, x_2$  per i valori nulli di questi due argomenti; inoltre, in virtù di  $d$ ),  $p_1^2 + p_2^2$  cresce indefinitamente, sicchè, anche rispetto

alle variabili  $p_1, p_2$ , l'urto non è incluso nel campo di regolarità.

Un'ulteriore trasformazione, portante unicamente sulle quattro variabili incriminate  $(x_1, x_2, p_1, p_2)$ , e per di più elementarissima, permette di regolarizzare in modo completo, e ciò conservando la forma canonica del sistema differenziale.

Basta sostituire ad  $x_1, x_2$  due nuove variabili  $\xi_1, \xi_2$ , legate alle prime dalla relazione complessa

$$(3) \quad x_1 + ix_2 = (\xi_1 + i\xi_2)^2$$

e a  $p_1, p_2$  due nuovi argomenti  $\pi_1, \pi_2$  tali da rendere

$$(4) \quad p_1 dx_1 + p_2 dx_2 = \pi_1 d\xi_1 + \pi_2 d\xi_2$$

una identità, tenuto conto della (3). La condizione (4) (che fornirebbe ovviamente le espressioni esplicite di  $\pi_1, \pi_2$ ) assicura, come è ben noto, la conservazione della forma canonica. In forma più esplicita, si può assumere

$$(5) \quad p_1 + ip_2 = \frac{\pi_1 + i\pi_2}{2(\xi_1 - i\xi_2)}.$$

La (4) appare allora quale ovvia conseguenza delle (3) e (5), che si ottiene differenziando la prima, cambiando nella seconda  $i$  in  $-i$  e moltiplicando membro a membro. Oltre alla (4), ci serve essenzialmente un altro paio di conseguenze formali delle (3) e (5); ed ecco quali. Ove si noti che la distanza  $r$  non è altro che il modulo di  $x_1 + ix_2$ , e si indichi con  $\rho$  l'analogo modulo di  $\xi_1 + i\xi_2$ , si

ha dalla (3), prendendo i moduli,

$$(6) \quad r = \rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2,$$

e dalla (5), eguagliando i quadrati dei moduli,

$$(7) \quad p_1^2 + p_2^2 = \frac{\pi_1^2 + \pi_2^2}{4\rho^2}.$$

Se invece si moltiplicano ambo i membri della (5) per

$$r = (\xi_1 + i\xi_2)(\xi_1 - i\xi_2),$$

si ricava

$$(8) \quad r(p_1 + ip_2) = \frac{1}{2}(\pi_1 + i\pi_2)(\xi_1 + i\xi_2).$$

Da quest'ultima segue ancora, in virtù della *d*),

$$\frac{r}{2}(p_1^2 + p_2^2) = \frac{\pi_1^2 + \pi_2^2}{8} = \frac{fm_0^2 m^2}{m_0 + m},$$

la quale mostra che  $\pi_1^2 + \pi_2^2$  resta finito quando i due corpi *P* e *O* tendono ad urtarsi, il che, congiunto all'osservazione già fatta in generale, che la direzione *OP* tende ad un limite ben determinato, assicura che altrettanto avviene per  $\pi_1$  e  $\pi_2$  separatamente.

Dalle (3), (6), (7) e (8) risulta manifestamente che  $x_1, x_2, r, r(p_1^2 + p_2^2), rp_1, rp_2$  sono tutte funzioni di 2° grado delle nuove variabili  $\xi_1, \xi_2, \pi_1, \pi_2$ ; la loro regolarità, nell'intorno di  $\xi_1 = 0, \xi_2 = 0$  e di quei valori (finiti come s'è osservato) di  $\pi_1, \pi_2$  che competono ad un urto, è così assicurata.

Se ora si nota che  $\frac{1}{r}, \frac{1}{\Delta}$  si comportano regolarmente nell'intorno di un urto, già rispetto alle coordinate  $x_1, x_2$  (nonchè  $x_1', x_2'$ ), è chiaro che questo carattere si conserva anche sostituendo  $\xi_1, \xi_2$  ad  $x_1, x_2$ . Siccome in  $H^* = r(\mathcal{T} - U - E)$  le variabili  $x_1, x_2, p_1, p_2$  compariscono ulteriormente soltanto pel tramite di  $r$ , nonchè di  $r(p_1^2 + p_2^2)$  in  $T$  e  $T_0$ , e di  $rp_1, rp_2$  in  $T_0$ , così si è proprio raggiunta la regolarizzazione completa di  $H^*$ , e quindi anche del sistema differenziale relativo alle nuove variabili, che è ancora canonico, ed ha per funzione caratteristica appunto la  $H^*$  espressa nelle nuove variabili, sicchè si scrive sotto la forma

$$\begin{cases} \frac{d\xi_j}{du} = \frac{\partial H^*}{\partial \pi_j}, & \frac{dx_j'}{du} = \frac{\partial H^*}{\partial p_j'}, \\ \frac{d\pi_j}{du} = -\frac{\partial H^*}{\partial \xi_j}, & \frac{dp_j'}{du} = -\frac{\partial H^*}{\partial x_j'}, \end{cases} \quad (j=1, 2).$$

## VI.

### Il problema spaziale.

#### Varie specie di elementi ellittici.

Se si passa dal problema piano a quello spaziale, le formule cartesiane conservano lo stesso aspetto, salvo che aumenta di due il numero dei gradi di libertà, intervenendo, per ognuno dei due corpi *P* e *P'*, una coordinata di più,  $x_3$  e  $x_3'$  rispettivamente, colle corrispondenti componenti  $p_3$  e  $p_3'$  di

quantità di moto.  $r$ ,  $r'$  e  $\Delta$  avendo le espressioni che loro competono come mutue distanze, dovremo ora ritenere

$$\left\{ \begin{aligned} T &= \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2), \\ T' &= \frac{1}{2m'} (p_1'^2 + p_2'^2 + p_3'^2), \\ T_0 &= \frac{1}{2m_0} \{ (p_1 + p_1')^2 + (p_2 + p_2')^2 + (p_3 + p_3')^2 \}, \end{aligned} \right.$$

conservando del resto  $\mathfrak{T}$ ,  $U$  ed  $H$  le espressioni loro attribuite precedentemente.

Per parecchio tempo cercai indarno di adattare allo spazio la trasformazione elementare

$$x_1 + ix_2 = (\xi_1 + i\xi_2)^2$$

da cui, come abbiamo visto, discende senza sforzo alcuno la regolarizzazione del caso piano. Ad alcuni criteri di impostazione — in particolare a quello di far capo alla forma (1) (con  $j=1, 2, 3$ , cioè corrispondente allo spazio), e di ricorrere ad una trasformazione portante unicamente sulle  $x_j$  e  $p_j$  (cioè sull'atto di movimento di  $P$ , senza mescolare  $P'$ ) — non mi pareva il caso di rinunciare.

D'altro lato la regolarizzazione mediante ausiliarie, già conseguita dal Sundman, dava affidamento, se non proprio garanzia, che deve esistere anche per il problema generale una intrinseca regolarizzazione meccanica. Era dunque giustificato di insistere nei tentativi rivolti a rintracciarla.

A nulla mi condussero le trasformazioni puramente puntuali, con che si intende sostituzione a  $x_1, x_2, x_3$  di altre coordinate  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , le nuove variabili coniugate  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  rimanendo allora definite, in funzione lineare delle  $p$  (a coefficienti che dipendono dalle  $x$ ), dalla relazione differenziale

$$(9) \quad p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3 = \pi_1 d\xi_1 + \pi_2 d\xi_2 + \pi_3 d\xi_3 + dW,$$

con  $W$  funzione a priori arbitraria, la quale identità [generalizzazione della (4)] assicura la conservazione della forma canonica e della funzione caratteristica.

Non riuscendo le trasformazioni puramente puntuali, era naturale il saggiare più generalmente trasformazioni di contatto, cioè trasformazioni fra le due sestuple  $(x_j, p_j), (\xi_j, \pi_j)$  verificanti la (9). Tali sono quelle fornite dal metodo di integrazione di Jacobi, in particolare quella classica (o una delle sue varianti introdotte da Poincaré) che fa passare dalle  $x_j, p_j$  alle cosiddette variabili kepleriane che hanno un significato specifico in relazione all'orbita ellittica osculatrice col fuoco nel centro  $O$ , individuata dai valori istantanei delle  $x_j, p_j$ .

Nessuna di queste trasformazioni desunta dal moto ellittico è regolarizzante per il problema dei due corpi  $O, P$ , nè a fortiori per il corrispondente urto binario nel problema dei tre corpi. Ma il metodo di Jacobi consente di costruirne altre, suggerite, anzichè dal moto centrale ellittico, da quello parabolico, cui compete virtù regolarizzante nell'intorno del centro  $O$ .

Non è difficile rendersi conto del significato geometrico e cinematico delle nuove variabili  $(\xi_j, \pi_j)$  che si è così condotti a sostituire alle  $(x_j, p_j)$ .

Consideriamo, in un generico istante  $t$ , il punto  $P$  e il vettore  $q$  definiti rispettivamente dai valori delle coordinate  $x_j$  e delle componenti  $p_j$  relativi a quell'istante. Il vettore  $q$  rappresenta veramente la quantità di moto di  $P$  riferita al baricentro  $G$  dei tre corpi. Ma nulla vieta di considerare, accanto al moto reale, un moto ipotetico, detto *intermediario*, o più spesso ma impropriamente *osculatore*, nel quale si consideri  $q$  come la quantità di moto di  $P$  nell'istante  $t$ , riferita ad  $O$  (anzichè a  $G$ ), e inoltre la forza agente su  $P$  si riduca all'attrazione del centro  $O$  di potenziale

$$\frac{fm_0m}{r}.$$

Se, come accade sempre per i pianeti e invece non sempre per le comete,

$$T - \frac{fm_0m}{r} = \frac{1}{2m} q^2 - \frac{fm_0m}{r} < 0,$$

allora il moto ipotetico, attorno al centro  $O$ , definito dall'atto di movimento  $P, q$ , è kepleriano, e le trasformazioni classiche di cui parlavo poco fa si hanno sostituendo alle  $x_j, p_j$  altrettanti elementi di questo moto kepleriano.

Il criterio di raffrontare il fenomeno reale con movimenti ipotetici aventi a comune l'atto di movimento  $P, q$  può essere modificato ed esteso in

più maniere. Si può per esempio, ogni qualvolta la costante  $E$  (energia totale del moto reale) è negativa, immaginare definita, mediante i valori delle  $x_j, p_j$  dell'istante considerato, una nuova costante  $k$  per mezzo della equazione

$$\frac{1}{2m} q^2 - \frac{k}{r} = E$$

e considerare il moto kepleriano che avverrebbe a partire da  $P, q$  sotto il potenziale  $\frac{k}{r}$  anzichè  $\frac{fm_0m}{r}$ .

Si tratta manifestamente di un moto ipotetico che ha comune l'energia col moto reale, mentre è variata ( $k$  in luogo di  $fm_0m$ ) la costante di attrazione del centro. I corrispondenti elementi ellittici si dicono *isoenergetici*, a differenza degli ordinari che possono opportunamente qualificarsi come *isodinamici*. Questi elementi isoenergetici non sono regolarizzanti nemmeno essi, ma vanno segnalati perchè introducono come variabile canonica l'anomalia eccentrica in luogo dell'anomalia media che classicamente figura tra gli isodinamici, sostituzione questa che presenta particolare interesse per alcuni tipi di perturbazioni (<sup>4</sup>).

(<sup>4</sup>) Cfr. *Nuovo sistema canonico di elementi ellittici*, « Ann. di Mat. », Ser. III, T. XX, 1913, pp. 153-170 (vol. dedicato alla memoria di Lagrange).

VII.

**Trasformazione canonica desunta dal moto parabolico.  
Regolarizzazione di un urto binario.**

Un altro tipo di moto fittizio che non è nè isodinamico, nè isoenergetico, ma risponde al criterio che l'orbita intermediaria risulti *parabolica*, si ha definendo la costante di attrazione del centro (per questo moto fittizio) a norma della formula

$$\frac{1}{2m} q^2 - \frac{k}{r} = 0.$$

L'annullarsi della costante delle forze vive è, come ben si sa, condizione caratteristica perchè il moto centrale newtoniano sia parabolico. Fissiamo l'attenzione su quello che viene a corrispondere al generico atto di movimento  $P, q$ , attribuendo a  $k$  il valore suaccennato. La parabola intermediaria (passante per  $P$  nella direzione del vettore  $q$ ) avrà in ogni caso il fuoco in  $O$ .

Si possono ora definire due vettori, uno  $\xi$  di lunghezza  $\xi = 2k$ , diretto dal fuoco al vertice; l'altro  $\pi$ , parallelo a  $q$ , di lunghezza  $\pi = \frac{r}{\xi} q$ . Indicando con  $\xi_j, \pi_j$  le componenti di questi due vettori e ponendo per brevità

$$-\frac{1}{2} W = \sum_1^3 \xi_j \pi_j,$$

si trova <sup>(4)</sup> che fra le due sestuple  $(x_j, p_j), (\xi_j, \pi_j)$  passano le relazioni

$$(10) \quad \begin{cases} x_j = \pi^2 \xi_j + W \pi_j, \\ p_j = \frac{\pi_j}{\pi^2} \end{cases} \quad (j = 1, 2, 3).$$

Queste definiscono effettivamente una trasformazione di contatto, perchè (atteso il significato di  $W$ ) ne segue materialmente la (9). Quando  $P$  si avvicina indefinitamente ad  $O$ , la lunghezza del vettore  $q$  tende, come sappiamo, a crescere indefinitamente. Però il prodotto  $r q^2$  resta finito e diverso da zero.

Dacchè abbiamo introdotto  $\xi$  come un vettore di lunghezza  $2k = \frac{1}{m} r q^2$ , e quindi finita anche in condizioni di urto con  $O$ , riconosciamo ovviamente che  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  tendono verso limiti finiti e determinati. Le  $\pi_j$  convergono invece allo zero, perchè tende ad annullarsi la lunghezza  $\pi = \frac{r q}{\xi}$  del vettore di cui esse sono le componenti.

Tali essendo i valori che competono alla sestupla trasformata nel caso di un urto fra  $P$  ed  $O$ , a noi importa ancora rilevare che, non soltanto le  $x_j$ , come direttamente appare dalle prime delle (10), sono funzioni regolari delle  $\xi_j, \pi_j$ , nell'intorno di un urto — cioè per valori nulli delle  $\pi_j$ , non tutti nulli delle  $\xi_j$  —

<sup>(4)</sup> Cfr. *Sur la régularisation etc.* (già citata a pag. 15), Cap. II.

ma che lo stesso avviene per

$$(11) \quad \begin{cases} r = \xi \pi^2, \\ r p_j = \xi \pi_j, \\ r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = \xi. \end{cases}$$

Di qua scende, con verificaione perfettamente analoga a quella effettuata nel problema piano, che anche la funzione caratteristica  $H^*$  e quindi il sistema differenziale rimangono regolarizzati.

## VII.

### Parametro simmetrico. Regolarizzazione completa.

Ci siamo occupati, per fissar le idee, della regolarizzazione di un urto binario  $PO$ . Considerazioni analoghe si possono manifestamente ripetere per gli altri due tipi di urti  $PP'$ ,  $P'O$ , cambiando però in conformità la trasformazione.

Siamo ricorsi (per gli urti  $PO$ ), non soltanto alla trasformazione di contatto ora specificata, ma anche ad un preventivo cambiamento di variabile indipendente, avendo sostituito a  $t$  il parametro  $u$  a norma della formula

$$du = \frac{dt}{r}.$$

Se si osserva che il prodotto

$$rU = fm_0 m + \frac{fm_0 m'}{r'} r + \frac{fmm'}{\Delta} r,$$

considerato come funzione delle variabili trasformate  $\xi_j$ ,  $\pi_j$ , nonchè delle  $x'$ , si comporta regolarmente anche in stato di urto  $PO$ , e non vi si annulla, è manifesto che, senza compromettere l'avvenuta regolarizzazione, si può sostituire ad  $u$  una nuova variabile indipendente  $\tau$ , definita dalla relazione differenziale

$$(12) \quad d\tau = rU du,$$

con che  $\tau$  cresce costantemente assieme ad  $u$ , e quindi assieme a  $t$ , convergendo al pari di  $u$  verso un valore finito per  $t = t_1$  (istante dell'urto).

Questo parametro  $\tau$ , legato all'originario  $t$  dalla relazione

$$(12') \quad d\tau = U dt,$$

ha sopra  $u$  il vantaggio evidente di una struttura simmetrica rispetto ai tre corpi. Ove si introduca  $\tau$  al posto di  $u$  nelle (1), e si ponga

$$F = \frac{1}{rU} H^*,$$

ossia, in base alla (2),

$$(13) \quad F = \frac{1}{U} (H - E),$$

notando che, per le soluzioni che ci interessano,  $F$  si annulla al pari di  $H^*$ , il sistema (1), relativo allo spazio, può essere ritenuto sotto la forma

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{dx_j}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial p_j}, & \frac{dx_j'}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial p_j'}, \\ \frac{dp_j}{d\tau} = -\frac{\partial F}{\partial x_j}, & \frac{dp_j'}{d\tau} = -\frac{\partial F}{\partial x_j'} \end{cases} \quad (j = 1, 2, 3).$$

Coll'adozione del parametro simmetrico  $\tau$ , si è sicuri che la regolarizzazione locale degli eventuali urti binari non richiede alcuna modificazione di variabile indipendente, ma soltanto trasformazioni di contatto del tipo indicato poc' anzi, combinate, se del caso, con trasformazioni elementari di coordinate cartesiane intese a trasportare l'origine da  $O$  in  $P$ , ovvero in  $P'$ , onde trattare analogamente un urto  $P, P'$ .

Tenuto conto del teorema di Sundman, a norma del quale, quando non si annulla il momento risultante  $M$  delle quantità di moto, rimane esclusa l'eventualità di una collisione generale, sicchè sono possibili soltanto urti binari, si ha ben diritto di affermare, in base a quanto precede, che il sistema canonico (14) è di per sè regolare ovvero regolarizzabile con semplice trasformazione canonica delle funzioni incognite, per qualsiasi valore di  $\tau$ , il che vuol dire del tempo, anche attraverso eventuali urti, se mai ne avvengono.

#### VIII.

In quale senso si può dire risolto il problema.

Le coordinate dei tre corpi o figurano direttamente fra le incognite, oppure — a norma del primo gruppo delle (10) e di trasformazioni elementari di coordinate cartesiane — sono esprimibili come funzioni olomorfe delle ausiliarie di cui ci si vale per regolarizzare. Ne segue che le *coor-*

*dinate dei tre corpi, le loro mutue distanze e*, in base alla (12) [e per essa, alla (12')] ovvero sue analoghe, anche il tempo  $t$  sono funzioni del parametro  $\tau$  per tutti i valori reali di questo parametro, valori che corrispondono biunivocamente a tutti i valori reali del tempo.

È questa la conclusione ormai classica del Sundman, la quale ha posto, si può dire, il suggello a tutta una categoria di ricerche antiche e moderne.

Per quanto sia notevole l'importanza del passo compiuto, non si può disconoscere che le serie di polinomi, in  $\tau$ , (o altre consimili) servono bensì a rappresentare la soluzione, ma in modo aridamente quantitativo, senza metterne in luce nè l'andamento generale, nè le caratteristiche salienti. Al punto che, se ad esempio per  $\tau = \tau_1$ , interviene un urto, le formule non ce ne avvertono (senza nuove discussioni): esse restano valide anche al di là dell'urto.

#### IX.

**Significato meccanico della continuazione analitica.**

A questa continuazione analitica non è del tutto irragionevole negare qualsiasi interesse astronomico, inquantochè le velocità dei corpi celesti sono (in media) parecchio superiori a quelle dei più potenti proiettili, essendo grossolanamente comparabile il materiale costitutivo. Se si prende norma dagli effetti balistici, si può pensare che un urto fra due



corpi celesti costituisce l'aspetto scientifico di quell'avvenimento catastrofico, detto fine del mondo, su cui tanto si esercitò e tanto si esercita la fantasia popolare. Se il mondo va in frantumi, il problema del moto dopo l'urto presenta ben diverse caratteristiche da quelle schematizzabili nel problema dei tre corpi, e la continuazione analitica nulla può rispecchiare della realtà.

Ma si può anche congetturare diversamente, supponendo che le conseguenze catastrofiche di un urto rimangano limitate alle regioni in cui i due corpi celesti vengono a collidere, l'effetto generale essendo un rimbalzo, come nei corpi perfettamente elastici, e nelle molecole contemplate dalla teoria cinetica dei gas; avrà allora senso fisico perfettamente determinato la continuazione, posteriormente all'urto, del moto dei due corpi celesti, diciamo specificamente dei loro centri di gravità.

Orbene il prof. Armellini <sup>(1)</sup> ha rilevato che alla continuazione analitica del Sundman compete effettivamente una espressiva interpretazione meccanica, rispecchiando essa il moto dei centri nel caso che i corpi sieno assimilabili a sfere perfettamente elastiche.

Con ciò rimane giustificato, anzi addirittura imposto dalla natura delle cose, il criterio analitico di far variare incondizionatamente  $\tau$  fra  $-\infty$  e  $+\infty$ ,

<sup>(1)</sup> *Estensione della soluzione del Sundman dal caso di corpi ideali al caso di sferette elastiche omogenee*, « Rend. della R. Acc. dei Lincei », vol. XXIV (primo semestre 1913), pp. 185-190.

senza lasciarci arrestare da urti eventuali; ma questi sono pur sempre avvenimenti così salienti nella storia del moto che non si può dire di avere integrato esaurientemente le equazioni differenziali del problema, se non si è in grado di farne almeno una previsione positiva o negativa, in base alle condizioni iniziali.

X.

Previsioni a breve scadenza. Sicurezza secolare.

La questione delle condizioni caratteristiche di un urto condusse, come si vide, ad approfondire la natura della corrispondente singolarità. Raggiunta la regolarizzazione locale, con che esiste certo un intorno  $D$  di un urto in cui *tutti* gli integrali del sistema differenziale sono olomorfi, la costruzione effettiva delle condizioni d'urto non presenta alcuna difficoltà nè concettuale, nè formale, le equazioni caratteristiche potendo essere ottenute con algoritmi uniformemente convergenti in  $D$ .

Ma tutto è subordinato all'ipotesi che ci si trovi in  $D$ .

Così ad esempio, se per fissare l'attenzione sopra il caso più semplice, ci riferiamo al problema ristretto nel quale senza discussione ( $O$  e  $P'$  rimanendo a

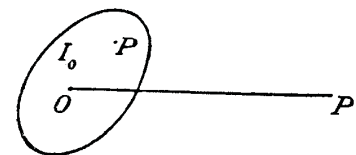


Fig. 1.

distanza invariabile) possiamo sostituire a  $D$  due certi intorni  $I_0$  ed  $I'$  dei centri  $O$  e  $P'$ , quando  $P$  è già in  $I_0$  possiamo immediatamente desumere da uno qualunque dei suoi atti di movimento se è o no soddisfatta la condizione d'urto. (Cfr. Fig. 1).

Se lo è, vuol dire che, in capo ad un certo tempo di cui si può anche assegnare il limite superiore,  $P$  va a cadere in  $O$ .

Se non lo è, vuol dire semplicemente che non c'è pericolo di urti *fin tanto che  $P$  rimane in  $I_0$* ; ma non si può a priori escludere che  $P$ , dopo essere uscito da  $I_0$ , vi rientri e che in questo nuovo ravvicinamento si trovi proprio verificata la condizione dell'urto <sup>(4)</sup>.

Ecco pertanto una questione vitale, difficile forse, ma non inaffrontabile e certo meritevole di studio: la previsione se anche *alla lunga* ci sarà un qualche urto, in base alla semplice ispezione dei dati iniziali. Affinchè la questione sia veramente vitale, come ebbi a chiamarla or ora, conviene tuttavia modificarla un pochino, in modo che essa rispecchi le condizioni assintotiche (voglio dire per un tempo indefinitamente lungo) di sicurezza dei tre corpi. All'uopo basta pensare che, pur valendo rigorosamente il principio del moto del baricentro per ciascuno dei tre corpi, la legge del moto dei baricentri si identifica con quella del problema ideale

(4) Cfr. per es. *Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps*, « Acta Math. », T. XXX, 1906, pp. 305-327.

di tre punti matematici che si attraggono secondo la legge di Newton, soltanto a patto che le mutue distanze di questi ultimi sieno superiori ad un certo limite  $\epsilon$ , dipendente dalle dimensioni e dalla distribuzione della massa dei corpi reali. La condizione di sicurezza, riferita al problema ristretto, è dunque caratterizzata dalle disuguaglianze

$$OP \geq \epsilon, \quad P'P \geq \epsilon.$$

Per valori abbastanza alti della costante delle forze vive, si sa, come ha osservato per primo Hill, che si possono tracciare due ovali, ciascuno comprendente uno ed un solo dei due centri  $O$ ,  $P'$ , così fatti che  $P$  rimane indefinitamente entro uno di essi. Il pericolo di urto è così unico, e la condizione di sicurezza, considerando per fissar le idee l'ovale  $\mathcal{Q}_0$  intorno ad  $O$ , è rappresentata unicamente dalla disuguaglianza

$$OP \geq \epsilon.$$

## XI.

### Dubbi critici.

#### Giustificazione intuitiva della sicurezza.

#### Riflessioni generali.

Lasciandosi guidare dall'analogia con altri problemi a due gradi di libertà, in particolare per esempio col movimento di un punto pesante sopra una superficie rotonda, si affaccia il dubbio che le

traiettorie, in quanto non sieno chiuse, in quanto non si tratti cioè di orbite periodiche, invadano praticamente tutto il campo  $\Omega_0$ . L'avverbio praticamente sta a designare la circostanza che, scelto un punto qualsiasi  $M$  di  $\Omega_0$ , e un numero positivo  $\epsilon$  piccolo a piacere, ogni traiettoria finisce col passare (nei suoi indefiniti avvolgimenti spiraliformi) a distanza  $< \epsilon$  da  $M$ . Se così fosse effettivamente, la condizione di sicurezza non sarebbe verificata in modo astronomicamente utile. Infatti, siccome da un lato i dati iniziali sono desumibili soltanto con un certo grado di approssimazione (grande ma limitato), e d'altro lato le soluzioni periodiche costituiscono, rispetto alla totalità delle soluzioni, una varietà che (in generale, e certo nel problema dei tre corpi) dipende da un numero minore di parametri, così, in prossimità indefinita a dati iniziali quali si vogliono, la maggioranza delle soluzioni corrispondenti finirebbe col riempire praticamente  $\Omega_0$ , escludendo quindi ogni sicurezza assintotica del moto.

Ma non conviene essere troppo pessimisti. È perfettamente possibile che, secondo il comportamento dei dati iniziali, sieno diverse le regioni di  $\Omega_0$  invase; sicchè in particolare venga fatto di garantire la sicurezza sotto opportune limitazioni portanti unicamente sui dati iniziali.

L'intuizione meccanica sembra anzi confortare questo punto di vista. Infatti, se non ci fosse il secondo centro  $P'$ ,  $P$  descriverebbe (a parità di condizioni iniziali) un'orbita ellittica tutta contenuta in  $\Omega_0$ . La perturbazione proveniente da  $P'$ , calco-

landone i suoi effetti *secolari* al modo di Gauss, si può assimilare a quella di un anello circolare avente sede sull'orbita di  $P'$ . La forza perturbatrice corrispondente  $\Phi$  (differenza fra l'attrazione unitaria su  $P$  e su  $O$ ) sarebbe radiale, per ragione di simmetria, e *vólta all'esterno*. Il suo effetto generale

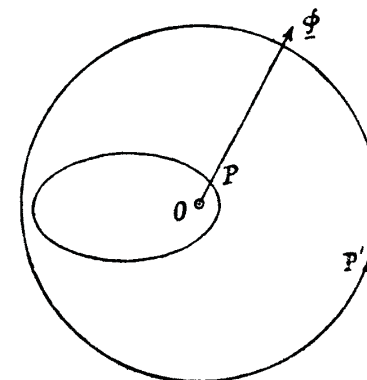


Fig. 2.

dovrebbe dunque essere quello di *aumentare*, non mai di diminuire la minima distanza da  $O$ . Perciò se l'ellisse non perturbata soddisfa alla condizione di sicurezza, a partire dalle stesse condizioni iniziali, la sicurezza dovrebbe essere anche maggiore nel problema ristretto. Si tratta manifestamente di semplici congetture basate sopra un procedimento, bensì classico ed espressivo, ma non rigoroso per il computo delle perturbazioni secolari. Comunque la conclusione è incoraggiante, sicchè mi sembra

legittimo il raccomandare la questione della sicurezza — diciamo, per cominciare, nel problema ristretto dei tre corpi — all'attenzione degli studiosi. Essa costituisce in verità una pregiudiziale del più grande interesse astronomico per previsioni a lunga scadenza. Se anche la teoria di Einstein ci consiglia oggi di risguardare l'impostazione newtoniana del problema dei tre corpi come una prima approssimazione, questa è ad ogni modo così serrata che un risultato newtoniano *assintotico* (valido cioè al crescere indefinito del tempo) resta sempre prezioso come indicazione *secolare* se non proprio *assintotica*, anche alla stregua della nuova meccanica.

Chi si accinga a discutere col necessario rigore matematico la più semplice questione di sicurezza, che è quella delineata or ora, potrà cercare di orientarsi invertendo la questione, studiando cioè i movimenti le cui traiettorie passano a distanza  $< \epsilon$  da  $O$  ed esaminando il campo che esse finiscono coll'invadere nella varietà rappresentativa degli atti di movimento. Se vi restano delle lacune, queste sono altrettante zone di sicurezza.

La questione così si collega, anzi appare anche essa essenzialmente subordinata, alla preventiva regolarizzazione delle equazioni del moto. A tale regolarizzazione sono egualmente subordinate le indagini moderne intese a lumeggiare in modo sintetico l'andamento delle soluzioni singole, le loro proprietà assintotiche e quelle statistiche dell'insieme. In questo indirizzo, inaugurato e vigorosamente promosso da Poincaré, vanno in particolare segnalate le notevolissime ricerche del Birkhoff

sulla distribuzione delle soluzioni periodiche nel problema ristretto dei tre corpi (<sup>1</sup>).

Considerazioni analoghe valgono per il caso generale, sicchè se è vero che la regolarizzazione del problema dei tre corpi non ne costituisce ancora la soluzione completa, è vero del pari che da un lato se ne trae un algoritmo risolutivo incondizionatamente valido, a partire da dati iniziali quali si vogliono, per tutta la durata reale del moto et ultra (Sundman); d'altro lato essa va risguardata come preparazione indispensabile a quella comprensione intima del fenomeno cui, pur con differente concezione dei mezzi atti a raggiungerla, fu dai grandi matematici antichi e moderni sempre rivolto l'intervento della matematica nello studio dei problemi naturali.

---

(<sup>1</sup>) Cfr. *The restricted problem of the three bodies*, « Rend. del Circolo Mat. di Palermo », t. XXXIX, 1915, pp. 265-334.

LE ONDE DEI LIQUIDI  
PROPAGAZIONE NEI CANALI

I.

Che cos'è un moto ondoso?

Non sono in grado di dare una definizione generale di moto ondoso in un fluido, la quale da un lato abbracci tutti i casi in cui, per una ragione o per l'altra, le onde sono fisicamente tangibili, e dall'altro sia matematicamente precisa. Io credo che questo inconveniente derivi dalla natura delle cose, cioè dal fatto che, quando si generalizza, cercando di estendere la considerazione a tutti i tipi possibili, le caratteristiche salienti tendono a sfumare e si finisce col comprendere addirittura tutti i movimenti dinamicamente possibili.

Accontentandosi di una indicazione di orientamento, si può forse qualificare *ondoso* il moto di un fluido, quando gli spostamenti delle singole particelle materiali implicano un moto assai più cospicuo di un qualche elemento caratteristico: per esempio di una superficie libera, o di una superficie di separazione fra due diversi regimi. Ma nemmeno questo è un carattere nettamente discriminante, e si può rendersene conto con un esempio classico.

Consideriamo un canale rettilineo a fondo orizzontale e pareti verticali, riferendoci al caso tipico

in cui il movimento del liquido pesante contenuto nel canale — diciamo addirittura acqua — avviene parallelamente alle sponde, comportandosi nello stesso modo in tutte le sezioni longitudinali del canale, cioè nei vari piani verticali paralleli alle sponde. Il fenomeno si può allora studiare in due dimensioni, occupandosi di una sezione longitudinale generica. Il fondo vi sarà rappresentato da una retta orizzontale  $\Omega X$ , e il pelo libero superiore da una linea  $l$  in generale variabile col tempo,

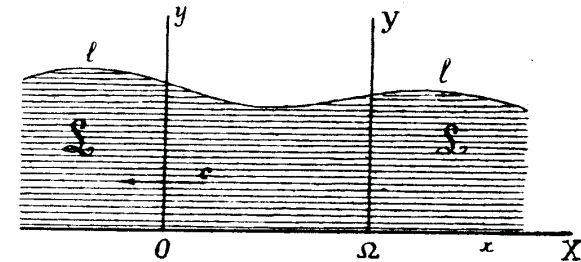


Fig. 3.

ma comunque (almeno in condizioni ordinarie) non molto diversa da una retta orizzontale  $Y = h$ , quella tale retta che costituirebbe la linea di livello in condizioni statiche, sicchè  $h$  rappresenta la profondità (media) del canale. Indichiamo con  $L$  il campo del moto, cioè la striscia indefinita (in generale variabile anch'essa col tempo) compresa fra il fondo e la linea  $l$ .

Ciò premesso, il problema generale dell'idrodinamica per questi moti piani si può manifestamente formulare così: Nell'istante iniziale  $t = 0$  è data

la perturbazione, cioè la configurazione di  $l$  e la distribuzione delle velocità in  $L$ . Caratterizzare l'andamento successivo del moto, in particolare la legge con cui varia  $l$ .

Questa stessa impostazione, salvo specificazioni qualitative, spetta al problema generale delle onde di canale, chiamandosi appunto propagazione ondosa la legge che presiede allo svolgimento del moto a partire da una perturbazione iniziale assegnata. Un tale punto di vista che mira direttamente all'integrale generale, rilevando poi quasi per incidenza in alcune applicazioni particolari, l'aspetto di moto ondoso nel senso ordinario della parola, si riscontra nelle prime ricerche di Lagrange, che riconducono il problema all'equazione delle corde vibranti, trascurando di fronte a  $g$  (accelerazione della gravità) l'accelerazione verticale del moto delle singole particelle: l'applicazione saliente è costituita dalle onde di marea. Analogamente procedono Poisson e Cauchy abbandonando la ipotesi molto restrittiva concernente l'accelerazione, e trattando in generale dei piccoli moti in canali molto profondi. Le onde saltano poi fuori in modo indubbiamente espressivo, ma senza una demarcazione sistematica, là dove per la natura fisica della questione non potrebbero mancare. Così avviene ad esempio per le cosiddette onde di emersione che corrispondono all'ipotesi di un solido (quale potrebbe essere un galleggiante) che venga bruscamente sollevato e tirato via, lasciando poi la massa fluida a riassetarsi da sè. In questo riassetto che, almeno in teoria (fluidi ideali rigorosa-

mente incompressibili), si inizia istantaneamente in tutta la massa d'acqua si formano intumescenze e depressioni del pelo libero, le quali viaggiano lungo il canale con accelerazione (badisi bene accelerazione, non velocità) sensibilmente costante. Ecco un qualche cosa che si propaga, ma pur trattandosi di una circostanza saliente, non c'è ancora una legge nitida, la quale domina invece altri tipi non meno importanti di moto ondoso.

Fra questi tipi ricordo semplicemente, perchè interessa in modo essenziale i fluidi compressibili e non i liquidi, quello che si schematizza nella propagazione delle discontinuità, e si impernia sulle ricerche di Riemann, Hugoniot, Hadamard, raccolte e rese sistematiche da quest'ultimo <sup>(1)</sup>.

## II.

### Onde progressive di tipo permanente.

#### Caratteri essenziali.

E vengo al caso specifico su cui mi propongo di intrattenermi. Si tratta delle onde progressive di *tipo permanente*, cioè di quei movimenti di liquido nel nostro canale nei quali il pelo libero  $l$  si sposta senza alterazione di forma, progredendo con una certa velocità  $c$ , mentre le singole parti-

<sup>(1)</sup> *Leçons sur la propagation des ondes*, Paris: Hermann, 1903.

celle materiali, lungi dall'essere animate da una velocità comparabile con  $c$ , compiono soltanto piccole oscillazioni con velocità locale di valor medio nullo.

Circoscritta così la nozione di onde di canale, cerchiamo di approfondirne la trattazione matematica.

All'uopo è assai conveniente introdurre, accanto agli assi fissi  $\Omega XY$ , già segnati in figura — asse  $\Omega Y$  verticale verso l'alto, asse  $\Omega X$  sul fondo, colla direzione positiva in senso *opposto* a quello in cui avviene la traslazione di  $l$  — un sistema di assi  $Oxy$  *solidali* con  $l$  e coincidenti coi fissi nell'istante iniziale  $t = 0$ .

Tra le coordinate  $X, Y$  ed  $x, y$  di un medesimo punto intercedono manifestamente le relazioni

$$(1) \quad \begin{cases} X = x - ct, \\ Y = y. \end{cases}$$

Indicheremo con  $u$  e  $v$  le componenti (secondo  $X, Y$  o indifferentemente secondo  $x, y$ ) della velocità *relativa*, voglio dire riferita agli assi mobili  $Oxy$ , di una particella generica. In base alla regola dei moti relativi, saranno  $u - c, v$  le componenti della velocità assoluta, cioè riferita agli assi fissi  $\Omega XY$ . La circostanza qualitativa che il moto *materiale* è assai meno rilevante di quello da cui ci appare animato il pelo libero implica che la grandezza

$$V_a = \sqrt{(u - c)^2 + v^2}$$

della velocità assoluta sia piccola di fronte a  $c$ . Dal

punto di vista matematico ci basterà ritenere  $< 1$  il rapporto

$$(2) \quad \beta = \frac{V_a}{c},$$

o più precisamente ( $V_a$  essendo una quantità variabile), il limite inferiore di questo rapporto in tutto il campo e per tutta la durata del moto.

Ne risulta in particolare che deve essere  $u > 0$ , anzi che è *positivo il limite inferiore dei valori di  $u$* .

A priori sono incognite sia la linea  $l$ , di cui si sa soltanto che non deve scostarsi troppo da una stessa orizzontale, pur potendo del resto avere andamento comunque irregolare e sinuoso, sia le componenti  $u, v$ . Le condizioni quantitative da soddisfare (che definiscono manifestamente non una sola, ma tutta una categoria di soluzioni) sono:

- I) Cinematiche:
  - incompressibilità; condizioni al fondo e al pelo libero;
- II) dinamiche:
  - equazioni indefinite; costanza della pressione su  $l$ .

III.

Onde trocoidali di Gerstner.

Loro insufficienza come prototipo del fenomeno reale.

Espliciteremo tra un momento queste condizioni, dopo aver ulteriormente circoscritta la nostra ricerca. Intanto, anche per giustificare l'ulteriore delimitazione del mio compito, sarà bene che io



ricordi come, per i canali di grande profondità <sup>(1)</sup>, si conosce da quasi un secolo una soluzione particolare, o piuttosto una categoria  $\infty^4$  di soluzioni particolari, soddisfacente rigorosamente alle 1), II). Si tratta delle cosiddette onde trocoidali, trovate indipendentemente da Gerstner e da Rankine <sup>(2)</sup>. In queste il pelo libero  $l$  ha appunto forma di trocoide, e le singole particelle fluide descrivono piccole circonferenze che si rimpiccioliscono verso il fondo. Del parametro da cui dipendono queste soluzioni si può disporre in modo che la perturbazione ondosa sia più o meno accentuata, con apparenza che va dai piccoli increspamenti ai forti cavalloni. Indichiamo con  $\lambda$  la lunghezza d'onda, cioè, nel caso attuale, la lunghezza di un arco di trocoide compreso fra punti omologhi (punti, passando dall'uno all'altro dei quali il cerchio generatore della trocoide ha compiuto un giro intero). Fra  $\lambda$  e la velocità di propagazione  $c$  passa la relazione notevolissima

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi},$$

<sup>(1)</sup> Si vuol dire con ciò che il fondo (praticamente assai discosto dal pelo libero) va, nella schematizzazione matematica, rimandato all'infinito. In tal caso la figura del n. 1 andrebbe ovviamente modificata, il campo  $L$  essendo limitato solo superiormente da  $l$ , e le origini  $\Omega$  ed  $O$  trovandosi sopra una orizzontale generica.

<sup>(2)</sup> Cfr. per esempio APPELL, *Traité de mécanique rationnelle*, T. III (terza ediz.), pp. 508-515; ovvero LAMB, *Hydrodynamics*, (quarta ediz.), Cambridge, 1916, art. 251.

dove si designa al solito con  $g$  l'accelerazione della gravità.

Non sto a citare delle formole, accontentandomi di rilevare che queste onde di Gerstner sono permanenti non soltanto *geometricamente*, cioè nel senso, già adottato come definizione, che  $l$  si sposta senza alterazione di tipo rimanendo rigidamente collegata cogli assi mobili  $Oxy$ ; ma anche *cinematicamente*, nel senso che  $u, v$ , considerate con *referenza all'osservatore mobile*, cioè quali funzioni di  $x, y, t$ , dipendono soltanto dal posto  $x, y$  e non da  $t$ , sicchè il moto ha carattere permanente rispetto all'anzidetto osservatore.

Per le onde trocoidali si può anche formulare in modo quantitativamente preciso l'intuizione fisica fondamentale (moto appariscente del pelo libero cui non fa riscontro un reale trasporto di materia), che è tradotta nella disuguaglianza

$$(2) \quad \beta = \frac{V_a}{c} < 1.$$

Alludo alla circostanza che è nullo il trasporto globale di materia, ossia il valore medio della massa liquida che passa attraverso una generica sezione del canale.

Possedendo tutte queste belle prerogative, la soluzione di Gerstner merita oggi ancora un posto onorevole in tutti i trattati di idrodinamica, ed è accolta con fiducia nelle applicazioni idrauliche e nautiche come base teorica di primo approccio, per apprezzare in qualche modo le molteplici influenze

perturbatrici che si presentano in pratica. Ma bisogna pur rilevare che essa presenta una limitazione essenziale ed un grave inconveniente, per cui l'ufficio che le è stato conferito di schema teorico di riferimento appare giustificato soltanto in via provvisoria, finchè non si trova di meglio.

La limitazione, già s'è detto, risiede nell'ipotesi che la profondità sia infinita, il che praticamente vuol dire così grande che sia assolutamente trascurabile l'influenza del fondo: e certo non sempre è così.

L'inconveniente, ben noto e da tutti riconosciuto, consiste nel carattere *vorticoso* del moto. Come ben si sa, in un liquido perfetto, sotto l'azione di forze conservative, possono destarsi soltanto moti *irrotazionali*. Per giustificare la produzione delle onde di Gerstner, bisognerebbe immaginare, come ha notato Stokes, una preventiva azione del vento per la quale si fosse stabilito un opportuno moto laminare di senso opposto alla propagazione, e rapidamente smorzato dalla superficie all'ingiù. A partire da questo stato di moto laminare (in cui la rotazione intestina delle particelle sia proprio quella che conviene alle onde di Gerstner), si potrebbe passare al moto ondoso trocoidale con processo conservativo. Ma una tale genesi è troppo speciale per poter essere ritenuta anche approssimativamente plausibile in tutti i casi in cui effettivamente si osservano onde propagantisi senza sensibile alterazione di tipo.

Convien dunque cercare altre onde progressive di tipo permanente, che, pur avvicinandosi per

quanto possibile all'istruttiva semplicità di quelle di Gerstner, siano dovute a vibrazioni irrotazionali delle particelle liquide.

#### IV.

##### Onde irrotazionali.

In prima approssimazione la questione si tratta assai semplicemente. Lo constateremo noi stessi quanto prima deducendo le celebri onde semplici di Airy come immediata conseguenza dell'equazione funzionale che, come avrò l'onore di mostrarvi, traduce nel modo più completo e conciso tutte le condizioni del problema per un canale di profondità qualsiasi.

Riprendiamo intanto l'impostazione cinematica già indicata, riferendoci agli assi mobili *Oxy*, rispetto a cui, per ipotesi, la striscia *L* (campo del moto relativo) è costante (mentre, rispetto agli assi fissi *QXY*, sarebbe variabile). Occupiamoci in primo luogo delle condizioni cinematiche I), aggiungendo l'irrotazionalità del moto, la quale equivale alla circostanza che esiste una funzione  $\varphi$  (potenziale di velocità), regolare entro *L*, tale che

$$(3) \quad d\varphi = udx + vdy.$$

L'incomprimibilità sta poi a dire che  $\varphi$  è armonica, od anche che  $-vdx + udy$  è un differenziale esatto. Si può dunque introdurre la funzione asso-

ciata  $\psi$  (funzione di corrente) mediante l'equazione ai differenziali totali

$$(4) \quad d\psi = -vdx + udy.$$

Le (3) e (4) definiscono le funzioni  $\varphi$  e  $\psi$ , a meno di una costante arbitraria ciascuna. Fisseremo queste due costanti inessenziali, assumendo  $\varphi = \psi = 0$  in  $O$ . Con ciò, il campo  $L$  essendo semplicemente connesso, le due funzioni  $\varphi$  e  $\psi$  rimangono univocamente individuate. Notiamo subito che  $l$  (nella sua qualità di linea libera terminale) è sempre costituita dalle stesse particelle fluide. D'altra parte essa è per ipotesi solidale coi nostri assi  $Oxy$ . Essa è quindi traiettoria (linea di corrente) di tutte le particelle che vi appartengono. La condizione caratteristica che la linea è diretta come la velocità implica  $\psi$  costante sopra ogni linea di flusso, in particolare sul fondo e lungo  $l$ . Sul fondo ( $y=0$ ) il valore costante di  $\psi$  è zero, perchè già abbiamo assunto  $\psi=0$  in  $O$ . Scriveremo poi

$$(5) \quad \psi = q \quad \text{su } l,$$

indicando appunto con  $q$  il valore costante di  $\psi$  sul pelo libero.

Se si suppone per semplicità eguale ad 1 la densità del liquido, si può identificare  $q$  con la portata *relativa* del canale, dovuta in massima parte, non a reale trasporto delle particelle, ma al fatto che ci riferiamo ad assi animati da velocità orizzontale  $-c$ , rispetto ai quali quindi gli oggetti fermi appaiono animati da velocità  $c$ . Ciò si

rende evidente fissando una generica sezione verticale del canale  $x = \text{cost.}$ , e considerando la portata (per unità di tempo e di larghezza del canale) attraverso tale sezione. Essendo  $udy$  il flusso attraverso l'elemento  $dy$  (contato positivamente nel senso  $Ox$ , opposto alla propagazione), sarà

$$\int udy,$$

esteso dal fondo alla linea  $l$ , lungo la verticale generica di cui si tratta, l'espressione di tale portata; per la (4), essendo  $dx=0$ , il valore dell'integrale è appunto la costante  $q$ , giusta l'asserto. È appena necessario osservare che, per il carattere qualitativo del moto ondoso (liquido animato da piccolo moto assoluto e quindi, rispetto agli assi  $Oxy$ , da velocità orizzontale non molto diversa da  $c$ ) la portata  $q$  è certo  $> 0$ .

Rendiamoci un po' conto del comportamento di  $\psi$  entro  $L$ . In primo luogo, dacchè  $u$  e  $v$  sono entrambe finite e continue nel canale (anche allontanandosi indefinitamente nell'uno o nell'altro senso), la funzione  $\psi$  è certo regolare al finito in base alla (3), e armonica, dacchè assieme alla (3), sussiste la (4). Essa si mantiene finita anche all'infinito. Questo risulta subito dall'osservare che un punto generico  $P$  di  $L$ , di ascissa comunque grande, si può immaginare raggiunto a partire dal punto  $Q$  del fondo, ovvero della linea libera  $l$ , cui compete la medesima ascissa, percorrendo un cammino (per esempio segmento di ordinata) finito

(non superiore per esempio alla massima ordinata di  $l$ ). Siccome  $\psi_0$  ha valore costante e

$$\psi_P - \psi_0 = \int (-v dx + u dy),$$

l'integrale essendo esteso ad un arco che resta finito anche se  $P$  si allontana indefinitamente, così  $\psi$  si conserva effettivamente finita anche all'infinito. Tenuta presente questa circostanza e l'altra che si tratta di funzione armonica la quale prende al contorno i valori 0 (sul fondo) e  $q$  (su  $l$ ), potremo senz'altro inferirne che  $\psi$  rimane sempre compresa fra 0 e  $q$  in tutto  $L$ ; inoltre che tale  $\psi$  (individuata dalla forma del campo e dalla costante  $q$ ) risulta funzione uniforme del posto, cioè di  $x, y$ . Tali sono perciò, in base alla (4), anche le componenti  $u, v$  della velocità, sicchè il fenomeno di moto relativo ai nostri assi  $Oxy$  ha necessariamente carattere stazionario.

È interessante rilevare che noi abbiamo ammesso inizialmente soltanto il fatto che il pelo libero si sposta senza alterazioni di forma. Basta questo per portare come necessaria conseguenza, che, rispetto al detto pelo libero, cioè rispetto ad un generico sistema  $Oxy$  di assi solidali, il moto è permanente.

Naturalmente anche il potenziale di velocità  $\varphi$ , definito dalla (3), colla condizione iniziale  $\varphi=0$  in  $O$ , risulta armonico e funzione soltanto di  $x, y$ . A differenza di  $\psi$ , la  $\varphi$  tende però a diventare infinita con  $x$ , e precisamente converge verso  $+\infty$  o  $-\infty$ , secondo che si procede nel verso  $Ox$  o nell'opposto.

V.

### Caratteristica di massa.

Questo si può stabilire nel modo più semplice, col vantaggio di assegnare in pari tempo il termine assintotico, traducendo analiticamente la *caratteristica di massa*. Ne abbiamo già tenuto conto in modo qualitativo riguardando poco rilevante, in confronto della velocità di propagazione  $c$ , il moto assoluto del liquido. Conviene ora esprimere la circostanza che, *negli strati profondi, non c'è in media alcun trasporto globale*.

Per vero dire, si potrebbe essere tentati a pensare che il vero moto ondoso fosse in certo modo tutta apparenza, ossia che le singole particelle fluide oscillino intorno a posizioni medie, fisse nello spazio, senza dar luogo a traslazione di insieme. Ma una tale pretesa sarebbe troppo restrittiva, anzi, come ebbe a rilevare Lord Rayleigh (con una argomentazione suggestiva, se non del tutto esauriente), addirittura in contraddizione colla supposta irrotazionalità del movimento.

Convien pertanto limitarsi ad esigere che l'eventuale (piccolo) trasporto di massa, che accompagna la propagazione ondosa, sia esclusivamente dovuto alle disuguaglianze superficiali: gli strati profondi non debbono portarvi alcun contributo. Ecco perchè assumiamo come caratteristica di massa l'assenza di trasporto negli strati profondi.

Per maggior chiarezza, rifacciamoci da principio. Come già abbiamo notato, considerando un elemento  $dy$  di verticale collegato cogli assi  $Oxy$ , il flusso nel senso positivo  $Ox$  (riferito all'unità di tempo e di larghezza del canale) vale

$$udy.$$

Se invece si tratta di una verticale fissa nello spazio, bisogna sostituire ad  $u$ , la velocità assoluta  $u - c$ . Invertendo il senso, cioè *contando la portata assoluta positivamente nel senso della propagazione*, dovremo scrivere

$$(c - u)dy.$$

Nel primo caso la verticale stessa ha per equazione  $x = \text{cost.}$ ; nel secondo è invece costante la coordinata  $X$  riferita agli assi fissi, e si deve ritenere  $x = X - ct$ . Comunque, la portata totale si ha integrando, rispetto ad  $y$ , dal fondo fino alla linea libera. A norma della (4), lungo ogni verticale,  $udy = d\psi$ , quindi la portata relativa è  $q$ , come già abbiamo rilevato. La portata assoluta (nel senso della propagazione) vale invece

$$Q = \int (c - u)dx = cy_1 - q,$$

dove ho scritto  $y_1$  onde mettere in evidenza che si tratta dell'ordinata della linea libera corrispondente alla sezione considerata.

Ciò posto, chiameremo *profondo* un punto o un tratto di canale sempre immerso, cioè situato al disotto della minima ordinata della linea libera.

Ove sia  $dy$  un generico elemento profondo di verticale *fissa*, intendiamo per caratteristica di massa la circostanza che la quantità d'acqua  $m$  la quale passa attraverso  $dy$  durante un intervallo di tempo  $(t_1, t_2)$  comunque lungo rimane sempre finita: allora il rapporto fra questa stessa quantità e l'intervallo  $t_2 - t_1$ , cioè il valore medio, tende a zero al crescere dell'intervallo. Valutando  $m$  positivamente nel senso della propagazione, si ha

$$m = dy \int_{t_1}^{t_2} (c - u)dt \quad (1).$$

La  $u$  sotto il segno, in quanto riferita agli assi mobili, dipende, come abbiamo visto, esclusivamente da  $x, y$ .

Nell'integrazione rispetto a  $t$ , l'argomento  $x$  deve riguardarsi sostituito da  $X - ct$ , con  $X$  pure fisso.

Detti  $x_1, x_2$  i valori di  $x$  che corrispondono a  $t_1, t_2$  (ascisse della verticale fissa rispetto agli assi mobili, in questi due istanti), ove si introduca  $x$  al posto di  $t$  come variabile di integrazione e si tenga presente che  $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ , risulta subito

$$m = dy \{ c(x_2 - x_1) - [\varphi(x_2, y) - \varphi(x_1, y)] \}.$$

(1) Si noti che, nell'attribuire ad un elemento verticale  $dy$  la portata  $dy(c - u)dt$  per tutti i  $dt$  dell'intervallo di tempo considerato, si sfrutta l'ipotesi che l'elemento sia profondo. Infatti, ove esso restasse per qualche po' al disopra della linea libera, bisognerebbe, nei tempuscoli corrispondenti, sostituire zero a  $dy(c - u)dt$ .

La circostanza che  $m$  deve rimanere finita, qualunque siano  $t_1, t_2$  (e di conseguenza  $x_1, x_2$ ) equivale manifestamente a quest'altra: La funzione

$$(6) \quad \Phi(x, y) = \varphi(x, y) - cx$$

si mantiene finita, anche al crescere indefinito di  $x$ , per tutti i valori di  $y$  inferiori alla minima ordinata della linea  $L$ . Quest'ultima restrizione si può togliere, ritenendo in definitiva  $\Phi(x, y)$  finita anche all'infinito in tutto il campo  $L$  del moto. Per giustificarlo, basta osservare, come già si fece a proposito di  $\psi(x, y)$ , che un punto qualunque di  $L$  può essere raggiunto da un punto profondo (allora si diceva addirittura dal fondo) spostandosi verticalmente di un tratto finito, inferiore alla massima ordinata della linea libera. Il divario fra i valori di  $\Phi$  in questi due punti non può superare il prodotto della differenza di livello per il limite superiore di

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right| = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right| = |v|,$$

che è per ipotesi finito, c. d. d.

La (6), dato che  $\Phi(x, y)$  si mantiene finita anche all'infinito, ci mostra che  $\varphi$  diviene infinita come  $cx$ .

Teniamo presente che in tutto il campo  $L$  la velocità relativa  $V = \sqrt{u^2 + v^2}$  rimane sempre  $> 0$  (anzi  $>$  di una qualche costante positiva). Notiamo d'altra parte che, detto  $s$  l'arco di una generica linea di flusso contato positivamente nel senso del

moto, si ha, per definizione della linea,

$$\frac{dx}{ds} = \frac{u}{V}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{v}{V}.$$

Con ciò, sempre lungo una linea di flusso, la (3) dà

$$\frac{d\varphi}{ds} = V.$$

Quest'ultima mostra che  $\varphi$  cresce costantemente con  $s$ ; ma  $s$  a sua volta (in base alla espressione di  $\frac{dx}{ds}$ , siccome anche  $u$  si mantiene sempre positivo) cresce costantemente con  $x$ , variando assieme ad esso da  $-\infty$  a  $+\infty$ . Così rimane acquisito che, lungo ogni linea di flusso, in particolare sulle due estreme (fondo ed  $l$ ),  $\varphi$  va costantemente crescendo con  $x$  da  $-\infty$  a  $+\infty$ .

## VI.

### Conseguenze analitiche.

Risulta da quanto precede che, se si rappresentano in un piano cartesiano  $(\varphi, \psi)$  i valori assunti dalle funzioni  $\varphi$  e  $\psi$  nel campo del moto  $L$ , questi valori appartengono tutti alla striscia  $S$  compresa fra le due rette  $\psi = 0$  e  $\psi = g$ . Questo non ci dice ancora che, facendo variare il punto  $(x, y)$  in  $L$ ,

si riscontrino proprio tutte le coppie  $(\varphi, \psi)$  di  $S$ , nè ciascuna una volta soltanto, ossia che vi sia corrispondenza *biunivoca* fra le due striscie. È fa-

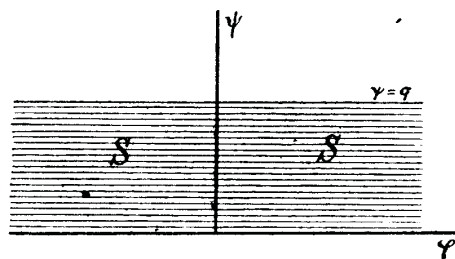


Fig. 4.

cile però assicurarsi che effettivamente le cose stanno così, ricorrendo ancora una volta alle (3), (4) e ad una proposizione generale concernente le rappresentazioni conformi.

Posto

$$(7) \quad \begin{cases} x + iy = z, \\ \varphi + i\psi = f, \\ u - iv = w, \end{cases}$$

le (3) e (4) stesse si compendiano in

$$(8) \quad df = wdz,$$

le quali dimostrano che  $f$  risulta funzione monogena della variabile complessa  $z$ , la cui derivata è la funzione pur monogena  $w$ . Quest'ultima, per quanto s'è osservato a proposito di  $u$  e  $v$ , si comporta regolarmente nel campo  $L$  del piano  $x, y$ ,

o se si vuole  $z$ , mantenendosi finita anche all'infinito. Inoltre

$$|w|^2 = u^2 + v^2 = V^2$$

non discende mai al disotto di un certo limite inferiore  $> 0$ .

Dacchè  $\left| \frac{df}{dz} \right| = |w|$  gode della stessa proprietà, e fra i contorni delle due striscie  $L, S$  (fondo,  $l$  del piano  $z$ ;  $\psi = 0, \psi = q$  del piano  $f$ ) c'è corrispondenza biunivoca, se ne inferisce in base a noti principi, che corrispondenza pure biunivoca e conforme sussiste fra i due campi  $L$  ed  $S$ . Con ciò ogni funzione della variabile complessa  $z$ , uniforme e regolare nel campo  $L$  del moto, si può egualmente riguardare come funzione di  $f$ , uniforme e regolare in  $S$ . Adottando questo punto di vista, fissiamo d'ora innanzi la nostra attenzione sopra la funzione  $w(f) = u - iv$ . Essa resta naturalmente finita anche all'infinito, in  $S$ , perchè aveva tale comportamento rispetto ad  $L$ ; è reale sull'asse reale  $\psi = 0$ , perchè sul fondo ( $y = 0$  che corrisponde a  $\psi = 0$ ) è  $v = 0$ , ecc. Quando fosse nota  $w(f)$ , la completa risoluzione del problema idrodinamico sotto la forma euleriana, cioè la conoscenza di  $w(z)$ , dipende da una sola quadratura seguita da eliminazione.

Infatti la (8), scritta sotto la forma

$$dz = \frac{df}{w},$$

determina  $z(f)$  con una quadratura, la costante andando fissata in modo che sia  $z=0$  per  $f=0$ . Invertendo e sostituendo si ricava  $w(z)$ . Il cambiamento di variabile indipendente da  $z$  ad  $f$  è evidentemente consigliabile perchè la forma del campo  $L$  di variabilità della  $z$  non è a priori determinata, ma dipende dalla linea libera  $l$ , mentre il campo  $S$  della  $f$  si presenta, in ogni caso di moto ondoso, come una striscia a bordi rettilinei, compresa fra l'asse reale  $\psi=0$  e una sua parallela  $\psi=q$  del semipiano positivo.

Sarà bene rilevare che, se si pone

$$(9) \quad F = f - cz,$$

considerando, per seguire il criterio suddetto,  $z$  come funzione di  $f$ , rimane definita una funzione  $F$  della variabile complessa  $f$ , regolare in  $S$  (tali essendo  $f$  e  $z$ ) e, a differenza di  $f$  e di  $z$ , finita anche all'infinito. Per constatarlo esaminiamone separatamente la parte reale e il coefficiente dell'immaginario. A norma della (9), questi sono rispettivamente:  $\varphi - cz$ , cioè la funzione  $\Phi$ , definita dalla (6), e  $\Psi = \psi - cy$ . Della  $\Phi$  abbiamo già rilevato che si conserva finita, come funzione dei punti  $x, y$  di  $L$ , anche quando si va all'infinito; lo stesso può dirsi di  $\Psi$ , perchè rimangono finite in  $L$  sia  $\psi$  che  $y$ . Basta ripassare da  $L$  ad  $S$  per concludere giusta l'asserto.

VII.

Relazione globale.

Necessaria esistenza di un trasporto superficiale.

I dati cinematici sono ormai tutti raccolti e opportunamente sintetizzati in poche premesse che spettano alla teoria delle funzioni analitiche. Prima di rispecchiare il lato dinamico, pervenendo in definitiva alla annunciata equazione funzionale che è veramente il nucleo della questione, mi permetto di segnalare ancora alcune conseguenze delle ipotesi. Queste si riattaccano alla espressione del flusso attraverso una generica sezione *fissa* del canale durante un qualsiasi intervallo di tempo  $t_1, t_2$ .

Abbiamo già trovato la portata  $Q$  nell'unità di tempo sotto la forma

$$Q = \int_0^{y_l} (c - u) dy = cy_l - q$$

dove  $y_l$  designa l'ordinata della linea libera. Per avere il flusso  $M$  durante un intervallo, basta naturalmente moltiplicare per  $dt$  e integrare fra gli istanti estremi dell'intervallo. Dacchè  $Q$  (al pari di  $u$  e di  $y_l$ ) dipende da  $t$  soltanto pel tramite di  $x = X - ot$ , colla stessa trasformazione già impiegata nel caso di un elemento profondo, avremo

$$M = \frac{1}{c} \int_{x_1}^{x_2} dx \int_0^{y_l} (c - u) dy = \int_{x_1}^{x_2} y_l dx - \frac{q}{c} (x_2 - x_1).$$



La prima espressione di  $M$ , chiamando  $L'$  quella porzione del campo  $L$  che sta fra le ascisse  $x_1$  e  $x_2$ , e scrivendo  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  in luogo di  $u$ , può essere posta sotto la forma

$$(10) \quad M = \int_{L'} \left( 1 - \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dL.$$

Sfruttando la corrispondenza conforme fra le due strisce  $L$  ed  $S$ , indichiamo con  $S'$  la porzione della striscia  $S$  che corrisponde a  $L'$ , e osserviamo che tale corrispondenza stabilisce una rappresentazione conforme fra i due campi, il cui modulo è  $\left| \frac{dz}{df} \right|$  (rapporto fra un elemento lineare  $|dz|$  e l'elemento corrispondente  $|df|$ ).

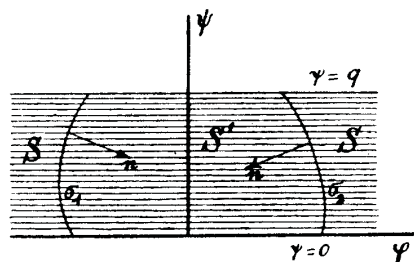


Fig. 5.

Se  $dL$  e  $dS$  designano due elementi d'area corrispondenti, sarà in conformità

$$dL = \left| \frac{dz}{df} \right|^2 dS,$$

in cui  $z$  si può considerare funzione di  $f$ , o viceversa, a norma della (9).

Dalla identità

$$\frac{df}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{df}},$$

in virtù delle due prime formule (7), si deduce eguagliando le parti reali,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{1}{\left| \frac{dz}{df} \right|^2}.$$

Con ciò la (10), adottando come variabili di integrazione  $\varphi$  e  $\psi$  in luogo di  $x$  e  $y$ , può essere scritta

$$(10') \quad M = \int_{S'} \left\{ \left| \frac{dz}{df} \right|^2 - \frac{1}{c} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right\} dS.$$

Dalla (9), attesa la monogeneità di

$$F(f) = F(\varphi + i\psi) = \Phi + i\Psi,$$

risulta

$$(9) \quad \frac{dz}{df} = \frac{1}{c} - \frac{1}{c} \frac{dF}{df} = \frac{1}{c} \left( 1 - \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) - \frac{i}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi},$$

da cui

$$\left| \frac{dz}{df} \right|^2 = \frac{1}{c^2} \left( 1 - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{c^2} \left| \frac{dF}{df} \right|^2.$$

Considerando  $F$  come funzione di  $f$  pel tramite di  $z$ , osservando che, per le (9) ed (8),

$$\frac{dF}{dz} = \frac{df}{dz} - c = w - c,$$

e ricordando che si è designata con  $\beta$  la frazione  $\frac{V_a}{c} = \frac{|w - c|}{c}$ , possiamo alla precedente espressione

di  $\left| \frac{dz}{df} \right|^2$  attribuire l'aspetto

$$\left| \frac{dz}{df} \right|^2 = \frac{1}{c^2} \left( 1 - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) + \beta^2 \left| \frac{dz}{df} \right|^2.$$

La (9'), eguagliando le parti reali dei due membri, dà

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{1}{c} \left( 1 - \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right),$$

da cui e dalla precedente scende

$$\left| \frac{dz}{df} \right|^2 - \frac{1}{c} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \beta^2 \left| \frac{dz}{df} \right|^2.$$

Sostituendo nella (10') e ponendo

$$N = \frac{1}{c^2} \int_{S'} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} dS,$$

la (10') stessa assume la forma definitiva

$$(10'') \quad M = \int_{L'} \beta^2 dL + N.$$

Per il nostro scopo è essenziale la circostanza che l'addendo  $N$  si mantiene finito anche se  $L'$  si estende indefinitamente.

Infatti il campo  $S'$  del piano  $f$  è compreso fra le due parallele  $\psi = 0$ ,  $\psi = q$  e due linee trasver-

sali  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , che sono le immagini delle due verticali  $x = x_1$  e  $x = x_2$  del piano  $z$ . Orbene, se si designa con  $\sigma'$  il contorno completo di  $S'$  e con  $d\sigma'$  un suo elemento generico, con  $n$  la direzione della normale all'elemento (volta verso l'interno di  $S'$ ), applicando alla definizione di  $N$  il lemma di Green, risulta

$$N = - \frac{1}{c^2} \int_{\sigma'} \Phi \cos(\widehat{n, \varphi}) d\sigma'.$$

Ma sulle parallele  $\psi = 0$ ,  $\psi = q$ ,  $\cos(\widehat{n, \varphi})$  si annulla, sicchè rimane

$$N = - \frac{1}{c^2} \int_{\sigma_1 + \sigma_2} \Phi \cos(\widehat{n, \varphi}) d\sigma'.$$

L'elemento  $d\sigma'$  d'una delle due trasversali e l'elemento  $dy$  della verticale corrispondente stanno nel rapporto  $\left| \frac{df}{dz} \right|$ , essenzialmente finito e diverso da zero (eguale al valore assoluto della velocità relativa  $w$ ). Egualmente finita è la funzione  $\Phi$  in tutto  $L$  (o  $S$ ) [n.° 5]. Perciò, se si designa con  $P$  il prodotto dell'ordinata massima della linea libera  $l$  pel limite superiore del modulo di  $\Phi w$  in tutto il campo del moto, da

$$\left| \int_{\sigma_1 + \sigma_2} \Phi \cos(\widehat{n, \varphi}) d\sigma' \right| \leq \int |\Phi| |w| dy,$$

tenendo presente che, nel secondo membro, si deve

integrare sulle due verticali corrispondenti a  $\sigma_1, \sigma_2$ , risulta senz'altro

$$|N| \leq \frac{2P}{c^2}.$$

Questa disuguaglianza ci assicura che  $N$  rimane finito comunque si ingrandisca  $L$ , o, se si vuole, l'intervallo  $(t_1, t_2)$ .

Riprendiamo ormai la (10").

Il primo addendo è essenzialmente positivo, e di regola — in particolare ogni qualvolta  $w(x)$  sia funzione periodica — cresce indefinitamente con  $L$ . Di qua l'interesse della trasformazione eseguita, la quale consente senz'altro di affermare che le onde irrotazionali di tipo permanente, in generale, e quelle periodiche di necessità, sono accompagnate da un trasporto globale nel senso della propagazione: trasporto da attribuirsi esclusivamente agli strati superficiali, valendo invece per quelli profondi la caratteristica di massa. Questa circostanza, come mostra la (10), dipende essenzialmente da  $\beta^2$ . Essa non potrebbe perciò desumersi dalle teorie che si limitano alla prima approssimazione, trascurando appunto i termini di secondo ordine in  $\beta$ . Tale è precisamente il caso delle onde di Airy. Fu Stokes il primo ad accorgersi, in modo quasi direi sperimentale, cioè studiando in seconda approssimazione le onde periodiche, che esse implicano un piccolo trasporto superficiale.

Che si tratti proprio di necessaria concomitanza della irrotazionalità fu intuito ed annunciato da Lord Rayleigh. Una dimostrazione matematica sod-

disfacente sembra richiedere quelle specificazioni che ci hanno condotto alla (10). Da essa si ricava una interessante relazione fra elementi globali, sostituendo per  $M$  la seconda delle espressioni inizialmente indicate. Dividendo anche per  $x_2 - x_1$ , si ha

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \int_L \beta^2 dL + \frac{N}{x_2 - x_1} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} y_l dx - \frac{q}{c}.$$

Ricordiamo che fra le nostre premesse figura l'ipotesi puramente qualitativa che la linea  $l$  non sia molto diversa da una retta orizzontale  $y = h$  (pelo libero imperturbato). A quell'ipotesi vogliamo attribuire anche un significato assintotico, ammettendo, come è nella natura delle cose, che il livello medio fra due sezioni generiche ossia il valore medio dell'ordinata  $y_l$

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} y_l dx$$

relativo ad un tratto qualsiasi di canale, converga verso il limite  $h$  al crescere indefinito del tratto. È appena necessario rilevare che questa condizione è sempre soddisfatta quando si tratta di onde periodiche. In tal caso il valore medio assintotico coincide, come si verifica immediatamente, col valore medio relativo ad un'onda generica, cioè con

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda y_l dx,$$

$\lambda$  designando la lunghezza d'onda.

Notiamo ancora che l'ipotesi di esistenza di un livello medio che ho voluto enunciare esplicitamente per preoccupazione di rigore matematico, non costituisce dal punto di vista fisico restrizione alcuna, essendo implicita tra le caratteristiche intuitive del moto ondoso.

Tutto ciò ritenuto, riprendiamo l'ultima equazione notando che  $\frac{N}{x_2 - x_1}$  e il secondo membro convergono rispettivamente verso i limiti  $0$ ,  $h - \frac{q}{c}$ , al crescere indefinito dell'intervallo  $x_2 - x_1$ . Ne viene che

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{L'} \beta^2 dL$$

ha per limite  $h - \frac{q}{c}$ ; ossia, ricordando che  $\beta^2 = \frac{V_a^2}{c^2}$

e moltiplicando per  $\frac{1}{2} c^2$ ,

$$\lim_{x_2 - x_1} \frac{1}{2} \int_{L'} V_a^2 dL = \frac{1}{2} c^2 \left( h - \frac{q}{c} \right).$$

Ora  $\frac{1}{2} \int_{L'} V_a^2 dL$  rappresenta l'energia cinetica del moto ondoso localizzata in  $L'$  (si intende per unità di larghezza del canale). La equazione cui siamo testè pervenuti mostra che esiste un valore medio (assintotico)  $\tau$  per l'energia del moto ondoso per

unità di lunghezza del canale, e di più che

$$(11) \quad \tau = \frac{1}{2} c^2 \left( h - \frac{q}{c} \right).$$

Ecco una relazione notevole fra elementi globali, la quale in prima approssimazione ( $\beta^2$  trascurabile) si riduce alla forma

$$h = \frac{q}{c},$$

che rispecchia del resto in modo diretto l'assenza di trasporto, come tosto si riconosce riflettendo che  $q$  è la portata relativa, la quale, ove sia da attribuirsi esclusivamente alla traslazione, deve identificarsi con  $ch$ .

#### VIII.

##### Espressione della velocità media di trasporto.

Vale la pena di rilevare che  $\frac{\tau}{h} = \tau'$  rispecchia il valore medio della densità di energia cinetica (energia per unità non solo di lunghezza e di larghezza, ma anche di profondità). D'altra parte  $\frac{q}{h}$  ha pure un significato globale assai espressivo. Esso rappresenta la velocità con cui all'osservatore mobile *sembra* che avvenga il trasporto. Se questo fosse rigorosamente nullo, dovrebbe aversi  $\frac{q}{h} = c$ .

La differenza  $\frac{q}{h} - c$  rappresenta la velocità assoluta di questo trasporto materiale nel senso positivo  $Ox$ ; perciò l'opposta  $c - \frac{q}{h} = \gamma$  misura precisamente la *velocità media di trasporto globale nel senso della propagazione ondosa*.

Ciò posto, dividendo entrambi i membri della (11) per  $\frac{1}{2} c^2 h$ , si ha

$$(11') \quad \frac{\gamma}{c} = \frac{\tau'}{\frac{1}{2} c^2},$$

che non è meno espressiva della precedente, ed ha su quella il vantaggio di rimanere valida senza modificazione anche per canali di profondità infinita.

## IX.

### Specificazione delle condizioni dinamiche.

#### Equazione funzionale caratteristica.

Occupiamoci finalmente delle condizioni derivanti dalle leggi della meccanica, riferendoci ai soliti assi  $Oxy$  che si possono trattare come fissi essendo semplicemente animati da moto traslatorio uniforme.

Quando le forze sono conservative, le equazioni indefinite dell'idrodinamica si riducono ad una relazione unica. Pei liquidi in moto stazionario, questa lega esclusivamente velocità  $V$ , potenziale delle

forze  $U$  e pressione  $p$ . Nel caso nostro, in cui la densità è 1, e (le forze attive riducendosi al peso) il potenziale unitario  $U$  vale  $-gy + \text{cost.}$  che possiamo specificare sotto la forma  $-g(y-h)$  ( $h$  livello medio), abbiamo

$$(12) \quad \frac{1}{2} V^2 + g(y-h) + p = \text{cost.}$$

che deve essere soddisfatta in tutto il campo  $L$  del moto. Per i punti interni, dove  $p$  non è data a priori, si ha qui la definizione di  $p$  in funzione delle forze e del moto; viceversa, sul pelo libero  $l$ , dove  $p$  deve riattaccarsi con continuità al valore costante  $p_0$  che spetta alla pressione atmosferica, la (12) porge una condizione ai limiti, anzi la condizione ai limiti caratteristica del problema:

$$(13) \quad \frac{1}{2} V^2 + g(y_l - h) = \text{cost.} \quad \text{su } l).$$

Assumiamo, per le ragioni già precedentemente accennate,  $f$  come variabile indipendente; e, come funzione incognita, la  $z$  o piuttosto la  $w$  che rappresenta (vettorialmente) la velocità relativa. Siccome sul fondo ( $y=0$ , cioè, nel piano  $S$ ,  $\psi=0$ ) la velocità è puramente orizzontale, così la funzione  $w = u - iv$  riesce, al pari di  $z(f)$ , reale per  $f$  reale. Ne consegue, per il noto principio della riflessione analitica di Schwarz, che queste funzioni sono prolungabili analiticamente al disotto dell'asse reale nella striscia  $S'$  (immagine speculare di  $S$  rispetto

all'asse delle  $\varphi$ ) limitata dalle rette  $\psi=0, \psi=-q$ , assumendo quindi valori coniugati a quelli che loro spettano in  $S$ .

Più precisamente, in punti simmetrici  $\varphi+i\psi, \varphi-i\psi$ ,  $z$  e  $w$  assumono valori coniugati. Con ciò si possono esprimere il coefficiente dell'immaginario  $y$  di  $z$  e il modulo  $|w|$  di  $w$  in un posto generico  $\varphi+i\psi$  di  $S$  (o di  $S'$ ) sotto la forma rispettiva

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2i} \{ z(\varphi+i\psi) - z(\varphi-i\psi) \}, \\ V^2 = |w|^2 = w(\varphi+i\psi)w(\varphi-i\psi). \end{cases}$$

Sul pelo libero,  $\psi=q$ , e la (13) può essere scritta

$$(13') \quad w(\varphi+iq)w(\varphi-iq) - iq\{z(\varphi+iq) - z(\varphi-iq)\} = \text{cost.}$$

Convieni ora far intervenire l'osservazione essenziale che si tratta di funzioni analitiche. La relazione che abbiamo ricavato per  $f$  reale, seguita a sussistere in tutto il campo di esistenza delle funzioni  $z, w$  (che è lo stesso per entrambe) <sup>(1)</sup>.

<sup>(1)</sup> Rispetto al campo di validità dell'equazione funzionale in discorso è bene notare che, se  $f$  è un argomento generico di tale campo, si deve potere senza uscire dal campo medesimo, cambiare  $f$  in  $f \pm iq$ . L'asse reale  $\psi=0$  verifica certamente questa condizione, e, per i punti che vi appartengono, si riproduce appunto la (13'). Basta poi che il pelo libero  $l$  sia esso stesso una linea analitica (o costituita da pezzi analitici) perchè la funzione  $z(f)$  che fornisce la rappresentazione conforme del piano del moto su  $S$  sia prolungabile analitica-

Si può dunque scrivere il generico argomento  $f$  al posto di  $\varphi$ . Se poi si deriva rispetto ad  $f$ , si elimina la costante del secondo membro, e, sostituendo  $\frac{1}{w}$  a  $\frac{dz}{df}$ , si ricava

$$(E) \quad \frac{d}{df} \{ w(f+iq)w(f-iq) \} - iq \left\{ \frac{1}{w(f+iq)} - \frac{1}{w(f-iq)} \right\} = 0.$$

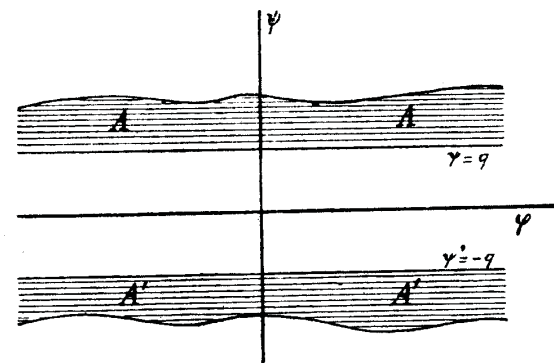


Fig. 6.

La (E) è una equazione *mista* (cioè insieme differenziale e alle differenze finite) in  $w(f)$ , la quale

mente fuori di  $S$  al di là della retta  $\psi=q$  (e per riflessione, al di là della sua immagine  $\psi=-q$ ).

Detti  $A$  ed  $A'$  questi campi addizionali, la validità della precedente equazione funzionale (E) rimane assicurata in zone congruenti ad  $A, A'$  e combacianti lungo l'asse reale.

sintetizza, si può dire, il problema del moto ondoso permanente. Infatti tutto si trova ricondotto alla determinazione di integrali  $w(f)$  di (E), reali sull'asse reale, regolari nella striscia  $\psi = q$ ,  $\psi = -q$ , finiti all'infinito e tali da rendere inoltre soddisfatta la caratteristica di massa che implica due cose:

1.°  $\frac{w-c}{c}$  resta in modulo inferiore a una frazione propria;

2.°  $f - cz$ , ossia  $f - c \int \frac{df}{w}$  rimane finito anche all'infinito.

È facile verificare che da ogni integrale  $w(f)$  così qualificato si ricava un effettivo moto ondoso di tipo permanente, dotato di tutti i requisiti che siamo andati enumerando. Ometto per brevità questa verifica, la quale del resto si trova sviluppata per disteso nella nota « Sulle onde progressive di tipo permanente » (1).

Rileverò piuttosto una proprietà invariante della (E), che consiste nel rimanere inalterata qualora si cambi  $f$  in  $-f$ . Più precisamente se si pone

$$w_1(f) = w(-f)$$

e si cambia materialmente in (E)  $f$  in  $-f$  si trova la stessa equazione (E) per  $w_1$ .

(1) *Rend. della R. Acc. dei Lincei*, vol. XVI (secondo sem. 1907), pp. 776-790.

X.

Onde periodiche.

Forma corrispondente della equazione funzionale.

Circa il pelo libero  $l$  noi abbiamo ammesso inizialmente che si tratti di una linea più o meno sinuosa, non molto diversa da una retta orizzontale  $y = h$ . Con questo andamento generale rimane incluso nella teoria svolta finora sia il caso delle onde periodiche, in cui manifestamente  $l$  deve constare di tratti riproducendosi periodicamente, sia il caso di onde aperiodiche vuoi con infinite sinuosità che si smorzano assintoticamente, vuoi con un numero discreto di intumescenze e depressioni. Un esempio cospicuo di quest'ultimo tipo è offerto dalla cosiddetta *onda solitaria*, che consta di un'unica intumescenza ed è stata studiata sperimentalmente da Scott Russell e teoricamente (in via approssimata) da Boussinesq e da Lord Rayleigh.

Fissiamo in particolare la nostra attenzione sulle onde periodiche, dette comunemente oscillatorie. Ciò che le contraddistingue, nell'ambito delle onde permanenti di cui abbiamo fissato i caratteri generali, è la circostanza che (rispetto al solito osservatore solidale con  $l$ ), quando si procede di un tratto costante  $\lambda$ , *lunghezza d'onda*, secondo  $Ox$ , le caratteristiche geometriche e cinematiche del moto si riproducono identicamente. Ciò val quanto dire che  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  sono funzioni periodiche

di  $z$  di periodo  $\lambda$ ; più comprensivamente che

$$w(z + \lambda) = w(z).$$

Dacchè  $df = w(z)dz$ , con  $w$  funzione periodica, quando  $z$  si incrementa di  $\lambda$ ,  $f(z)$  subisce un incremento, pure costante  $\omega$ . Se si suppone di partire da un valore reale di  $z$ , e si tiene presente che  $f$  e  $w$  sono entrambi reali sull'asse reale, si constata che  $\omega$  è reale al pari di  $\lambda$ . Ciò è come dire, pensando alla corrispondenza fra il piano  $z$  e il piano  $f$ , che ad una traslazione di ampiezza  $\lambda$  nel primo fa riscontro una traslazione di ampiezza  $\omega$  nel secondo, l'una e l'altra nel senso positivo dei rispettivi assi delle ascisse.

Una funzione di  $z$  che rimanga invariata per una tale traslazione, che ammetta cioè il periodo reale  $\lambda$ , diventa così, quando la si esprime per  $f$ , funzione periodica di tale variabile col periodo reale  $\omega$ ; e reciprocamente.

Riprendiamo per un momento l'equazione (9)

$$F(f) = f - cz$$

e sfruttiamo la circostanza che la funzione  $F(f)$  rimane finita entro  $S$  (anche all'infinito). Questo carattere implica la periodicità di  $F$ . Infatti, siccome  $\frac{dF}{df} = 1 - c \frac{dz}{df} = 1 - \frac{c}{w}$  è funzione periodica, quando l'argomento  $f$  si incrementa di un periodo,  $F$  subisce un incremento costante  $K$ . Ne viene

$$F(f + n\omega) = F(f) + nK \quad (n \text{ numero intero})$$

e questo, per  $K \neq 0$ , contraddirebbe all'ipotesi che  $F$  resta finito entro  $S$ . Dunque  $K = 0$ , ossia  $F$  è periodica. Con ciò, la già ricordata equazione (9), eguagliando gli incrementi dei due membri, porge

$$\omega = c\lambda.$$

Tale è dunque il periodo relativo all'argomento  $f$ .

Ove si ponga

$$(14) \quad \zeta = e^{\frac{2\pi i f}{c\lambda}},$$

l'asse reale del piano  $f$  si cambia nella circonferenza  $C$  di raggio 1,  $|\zeta| = 1$ , del piano  $\zeta$ , e la striscia  $S, S'$  limitata dalle due rette  $\psi = \pm q$ , nella corona circolare  $\Gamma$  limitata dalle due circonferenze  $C_1, C_2$ , di raggi rispettivi

$$R_1 = e^{-\frac{2\pi q}{c\lambda}}, \quad R_2 = e^{\frac{2\pi q}{c\lambda}},$$

il primo minore, il secondo maggiore dell'unità, anzi reciproco del primo.

Quando l'argomento  $f$  si incrementa di  $\pm iq$ , l'argomento  $\zeta$  rimane moltiplicato per  $e^{\mp\alpha}$ , avendo posto per brevità

$$(15) \quad \alpha = \frac{2\pi q}{\lambda c}.$$

Come è ben noto, ogni funzione  $w(f)$  regolare nella striscia  $\psi = \pm q$ , e periodica di periodo  $c\lambda$ , diviene in base alla (14) funzione della nuova variabile  $\zeta$  *uniforme* nella corona. Dacchè

$$\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{2\pi i}{c\lambda} df,$$



l'equazione funzionale (E) assume l'aspetto

$$(E') \quad \zeta \frac{d}{d\zeta} \{ w(e^{-\alpha\zeta}) w(e^{\alpha\zeta}) \} - \\ - \frac{g\lambda}{2\pi} c \left\{ \frac{1}{w(e^{-\alpha\zeta})} - \frac{1}{w(e^{\alpha\zeta})} \right\} = 0.$$

La condizione di realtà sull'asse reale, cui deve ottemperare  $w$  in quanto dipendente dall'originario argomento  $f$ , si trasforma naturalmente in:  $w(\zeta)$  reale sulla circonferenza  $C(|\zeta|=1)$ ; e la proprietà invariante ammessa dalla (E), di fronte al cambiamento di  $f$  in  $-f$ , dà luogo ad analoga proprietà per la (E') di fronte al cambiamento di  $\zeta$  in  $\frac{1}{\zeta}$ .

## XI.

### Prima approssimazione. Onde semplici.

La (E') si presta assai bene alla ricerca di soluzioni approssimate, nell'ipotesi che la perturbazione ondosa, cioè in modo preciso la velocità assoluta  $|w - c|$  sia molto piccola di fronte alla velocità di propagazione  $c$ . In tal caso conviene porre

$$w = c(1 + \varepsilon)$$

con che

$$\varepsilon = \frac{w - c}{c};$$

e si potrà trattare  $\varepsilon$  (che è manifestamente un nu-

mero puro, funzione complessa di  $f$ , o, se si vuole, di  $\zeta$ ) come una quantità di prim'ordine. Si ha in conformità

$$w(e^{-\alpha\zeta}) w(e^{\alpha\zeta}) = c^2 \{ 1 + \varepsilon(e^{-\alpha\zeta}) + \varepsilon(e^{\alpha\zeta}) \}, \\ \frac{1}{w(e^{-\alpha\zeta})} = \frac{1}{c} \{ 1 - \varepsilon(e^{-\alpha\zeta}) \}$$

e la (E') diviene naturalmente lineare in  $\varepsilon$ , assumendo l'aspetto

$$(16) \quad c^2 \zeta \frac{d}{d\zeta} \{ \varepsilon(e^{\alpha\zeta}) + \varepsilon(e^{-\alpha\zeta}) \} - \\ - \frac{g\lambda}{2\pi} \{ \varepsilon(e^{\alpha\zeta}) - \varepsilon(e^{-\alpha\zeta}) \} = 0.$$

Questa equazione approssimata conserva, ben si capisce, la proprietà invariante della (E') di rimanere inalterata quando si cambia  $\zeta$  in  $\frac{1}{\zeta}$ . L'osservazione ha importanza perchè permette di soddisfare con tutta facilità alla condizione imposta a  $w$ , e di conseguenza ad  $\varepsilon$ , di essere reale per  $|\zeta|=1$ . Suppongasì infatti di aver trovata una  $\varepsilon(\zeta)$  che verifica tutte le altre condizioni. Essa sarà sviluppabile entro  $\Gamma$  in serie di Laurent. Nell'ipotesi, ovviamente suggerita dalla natura delle cose, dato che tutto è reale nella (16), che i coefficienti dello sviluppo sieno reali, il coniugato di  $\varepsilon(\zeta)$ , per  $|\zeta|=1$ , non è altro che  $\varepsilon\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ . Perciò  $\varepsilon(\zeta) + \varepsilon\left(\frac{1}{\zeta}\right)$  costituisce una nuova soluzione della (16) do-

tata appunto della voluta realtà sulla circonferenza  $|\zeta| = 1$ .

Proviamoci a soddisfare alla (16) prendendo per  $\varepsilon(\zeta)$  una funzione lineare di  $\zeta$  senza termine noto: diciamo  $-\frac{1}{2}\mu\zeta$ , con  $\mu$  costante reale abbastanza piccola. Si è condotti all'equazione numerica

$$(17) \quad c^2(e^\alpha + e^{-\alpha}) - \frac{g\lambda}{2\pi}(e^\alpha - e^{-\alpha}) = 0$$

tra le quantità  $c$ ,  $\lambda$  ed  $\alpha$ .

## XII.

### Equazione di Airy.

Possiamo subito riconoscere che si tratta della classica equazione di Airy, che definisce la velocità di propagazione  $c$  in funzione di  $\lambda$  (lunghezza d'onda) e  $h$  (profondità del canale). All'uopo è bene ricordare che, come conseguenza di una relazione generale fra elementi globali, avevamo riconosciuto che in prima approssimazione, e tale è appunto il caso attuale,

$$q = ch.$$

Con ciò l'espressione (15) di  $\alpha$  assume l'aspetto

$$(15') \quad \alpha = \frac{2\pi h}{\lambda},$$

e la (17) può essere scritta

$$(17') \quad \frac{c^2}{gh} = \frac{T\alpha}{\alpha} \quad (1),$$

forma consueta della equazione di Airy.

Siccome il secondo membro va costantemente decrescendo con  $\alpha$  <sup>(2)</sup> a partire dal valore 1 per  $\alpha = 0$ , così la (17'), tenuto conto della (15'), ci dice che *la velocità di propagazione aumenta colla lunghezza d'onda e ci dà come limite superiore di  $c^2$  (per  $\alpha = 0$  ossia  $\lambda = \infty$ ) il valore  $gh$ .*

In base alla (15'), questo valore limite rimane praticamente valido per tutte le *onde lunghe*, tali cioè che  $\lambda$  sia molto grande rispetto alla profondità del canale, con che, in base alla (15'),  $\alpha$  riesce prossimo a zero. Assai lunghe sono generalmente le onde di marea, e il valore corrispondente  $\sqrt{gh}$  per

(1) Con  $Tx$  si designa la tangente iperbolica di  $x$ , ossia la funzione  $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ .

Analogamente  $Cx$  e  $Sx$  rappresentano il coseno e il seno iperbolico.

(2) Infatti la sua derivata è

$$-\frac{1}{\alpha^2}Tx + \frac{1}{\alpha} \frac{1}{C^2\alpha} = -\frac{1}{\alpha^2 C^2\alpha} \left\{ \frac{1}{2} S2\alpha - \alpha \right\},$$

e la quantità in parentesi è sempre positiva per  $\alpha$  positivo, come si constata materialmente immaginando per esempio di sostituire a  $\frac{1}{2} S2\alpha = \frac{e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}}{4}$  il suo sviluppo in serie di potenze di  $\alpha$ :  $\frac{1}{2} \left\{ 2\alpha + \frac{1}{3!} (2\alpha)^3 + \frac{1}{5!} (2\alpha)^5 + \dots \right\}$ .

la velocità di propagazione coincide con quello già trovato da Lagrange nella teoria più imperfetta in cui si trascurava l'accelerazione verticale delle particelle. Se invece  $\alpha$  è grande,  $T\alpha$  ha il valore asintotico 1. In base alla (15') è sufficiente che  $\lambda$  non superi il doppio della profondità, perchè  $T\alpha$  risulti compreso fra  $\frac{1 - e^{-\pi}}{1 + e^{-\pi}}$  e 1 e sia quindi assolutamente confondibile coll'unità.

Si ha così per *onde brevi* (e praticamente sono tali tutte quelle la cui lunghezza non supera il doppio della profondità)  $\frac{c^2}{gh} = \frac{1}{\alpha}$ , ossia

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}.$$

### XIII.

#### Espressione esplicita dei vari elementi del moto.

Studiamo più da vicino il moto ondoso oscillatorio corrispondente alla soluzione semplice

$$\varepsilon = -\frac{1}{2}\mu \left( \zeta + \frac{1}{\bar{\zeta}} \right)$$

con  $\mu$  costante positiva (piccola, ma del resto arbitraria): siamo già assicurati a priori che questa  $\varepsilon$  gode certamente di tutti i requisiti voluti. In primo luogo, riprendendo la variabile indipendente  $f$  in

base alla (14), e la funzione  $w$ , abbiamo

$$(18) \quad w(f) = c \left( 1 - \mu \cos \frac{2\pi f}{c\lambda} \right).$$

Siccome l'ipotesi che  $\varepsilon$  sia di prim'ordine implica che lo sia la costante  $\mu$ , ricaviamo di qua

$$(18') \quad \frac{1}{w} = \frac{1}{c} \left( 1 + \mu \cos \frac{2\pi f}{c\lambda} \right),$$

e quindi, da  $dz = \frac{df}{w}$  colla condizione  $z=0$  per  $f=0$ ,

$$(19) \quad z = \frac{f}{c} + \frac{\mu\lambda}{2\pi} \sin \frac{2\pi f}{c\lambda}.$$

Dacchè  $z$  differisce da  $\frac{f}{c}$  per quantità di primo ordine, si può, nel secondo termine (che è già di prim'ordine), sostituire  $z$  a  $\frac{f}{c}$ , e si ha la espressione di  $f$ , e quindi di tutti gli elementi del moto in termini di  $z$ , sotto la forma

$$(19') \quad f = c \left\{ z - \frac{\mu\lambda}{2\pi} \sin \frac{2\pi z}{\lambda} \right\}.$$

L'equazione parametrica del pelo libero  $\psi = q = ch$  è fornita concettualmente dalla stessa (19) ponendo  $f = \varphi + ich$  con  $\varphi$  reale. Con questa sostituzione, separando il reale dall'immaginario, e ricor-

dando la (15) si ha

$$\begin{cases} x = \frac{\varphi}{c} + \frac{\mu\lambda}{2\pi} C\alpha \sin \frac{2\pi\varphi}{c\lambda}, \\ y = h + \frac{\mu\lambda}{2\pi} S\alpha \cos \frac{2\pi\varphi}{c\lambda}. \end{cases}$$

Siccome la prima equazione mostra che  $x$  differisce per quantità di prim'ordine da  $\frac{\varphi}{c}$ , così, nell'espressione di  $y$  (dove  $\frac{\varphi}{c}$  figura in termini che sono già del prim'ordine), si può sostituire addirittura  $x$  in luogo di  $\frac{\varphi}{c}$ , ottenendo l'equazione cartesiana del pelo libero sotto forma di senoide

$$y = h + a \cos \frac{2\pi x}{\lambda};$$

per brevità ho compendiato in  $a$  la costante

$$\frac{\mu\lambda}{2\pi} S\alpha$$

(piccola, ma a priori arbitraria al pari di  $\mu$ ) che rappresenta manifestamente il massimo scostamento del pelo libero dal livello medio  $y = h$ , ossia l'altezza delle onde semplici di cui si tratta.

Ricordando la espressione (15') di  $\alpha$  si può ritenere per l'altezza la definizione

$$(20) \quad a = \mu h \frac{S\alpha}{\alpha}.$$

XIV.

Osservazione circa il calcolo di  $\tau'$ .

Valore della velocità di trasporto.

Nello studio di queste soluzioni abbiamo trascurato sistematicamente i termini di secondo ordine, trattando  $\frac{w-c}{c}$  come quantità di primo ordine.

L'energia localizzata in un elemento  $dL$  del canale è

$$\frac{1}{2} c^2 \left| \frac{w-c}{c} \right|^2 dL.$$

La sua parte principale risulta manifestamente di secondo ordine, ogni qualvolta sia di primo ordine il rapporto  $\frac{w-c}{c}$ ; ed è importante osservare che basta appunto la considerazione dei termini di primo ordine in una soluzione generica per tener conto esattamente dei termini di secondo ordine nella espressione dell'energia. Siamo così in grado, ricorrendo alla relazione globale rigorosa

$$(11') \quad \frac{\gamma}{c} = \frac{\tau'}{\frac{1}{2} c^2},$$

in cui  $\tau'$  designa la densità media dell'energia, di calcolare con pari esattezza — secondo ordine incluso — la velocità di trasporto  $\gamma$  delle nostre onde sinusoidali.

In tutto il corso del calcolo di  $\tau'$  sarà del resto perfettamente lecito sfruttare le semplificazioni della prima approssimazione, perchè ogni termine di  $\tau'$  è già di secondo ordine, e gli eventuali errori risultano quindi d'ordine superiore.

Con tale intesa calcoliamo  $\tau' = \frac{\tau}{h}$ , partendoci dalla espressione della energia elementare per unità di larghezza del canale

$$\frac{1}{2} |w - c|^2 dL.$$

Dacchè  $w = \frac{df}{dz}$ , si ha dalla (9)

$$w - c = \frac{dF}{dz},$$

d'altra parte  $F = \Phi + i\Psi$ , quindi (per la monogeneità)

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} - i \frac{\partial\Phi}{\partial y}.$$

Il quadrato del modulo di  $w - c$  può così presentarsi sotto la forma

$$|w - c|^2 = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 = \Delta\Phi.$$

Per un classico corollario del lemma di Green, se  $\Lambda$  designa una porzione qualunque di  $L$  e  $s$  il

relativo contorno, si ha

$$\int_{\Lambda} \Delta\Phi dL = - \int_s \Phi \frac{d\Phi}{dn} ds,$$

$dn$  designando un elemento di normale ad  $s$ , volta verso l'interno del campo.

Per valutare  $\tau'$ , conviene integrare  $\frac{1}{2} \Delta\Phi$  nel canale, per un'area  $\Lambda$  corrispondente ad una lunghezza d'onda  $\lambda$ , e dividere per  $\lambda h$ .

Il contorno  $s$  di  $\Lambda$  rimane in tal caso costituito da quattro pezzi: un tratto di fondo di lunghezza  $\lambda$ ,

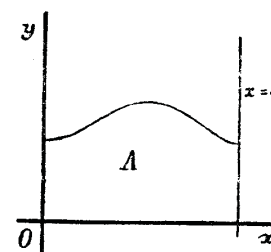


Fig. 7.

diciamo il tratto compreso fra  $x=0$  e  $x=\lambda$ ; due linee congruenti (rispetto ad una traslazione di ampiezza  $\lambda$ ), colleganti gli estremi del tratto colla linea libera; prenderemo per fissare le idee, le due ordinate di  $l$  corrispondenti alle ascisse  $x=0$ ,

$x=\lambda$ ; infine l'arco di  $l$  fra esse compreso. Per la periodicità di  $\Phi$ , in punti omologhi delle due ordinate,  $\Phi$  ha il medesimo valore,  $\frac{d\Phi}{dn}$  valori opposti

(perchè il  $dn$  è sempre volto all'interno). Perciò i contributi recati all'integrale

$$\int \Phi \frac{d\Phi}{dn} ds$$

dai due segmenti di ordinata si elidono. Pure nullo è il contributo del tratto di fondo, perchè su questo  $\frac{d\Phi}{dn} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0$ , essendo  $\Phi = \varphi - cx$  e quindi

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = v.$$

Con ciò

$$\tau' = \frac{1}{2\lambda h} \int_{\Lambda} \Delta\Phi dL$$

si riduce a

$$\tau' = -\frac{1}{2\lambda h} \int \Phi \frac{d\Phi}{dn} dl$$

esteso alla linea libera  $l$ , per una lunghezza d'onda, diciamo da  $x=0$  a  $x=\lambda$ .

Fin qui il calcolo è rigoroso. È ora il momento di tener conto della circostanza che la quantità sotto il segno è già di secondo ordine in  $\mu$ , talchè, nell'integrazione lungo  $l$ , questa si può addirittura assimilare (trascurando solo termini di terzo ordine) alla orizzontale  $y=h$ .

Si ha allora  $dl = dx$ ,  $dn = -dy$ , e quindi

$$\tau' = \frac{1}{2\lambda h} \int_0^{\lambda} \Phi \frac{\partial\Phi}{\partial y} dx,$$

$\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial y}$  dovendo, ben s'intende, riferirsi ad  $y=h$ .

Dalle (19') e (9) si ha

$$F = \Phi + i\Psi = -\frac{c\mu}{2\pi} \lambda \sin \frac{2\pi z}{\lambda}.$$

Eguagliando le parti reali e ricordando che l'altezza  $a$  vale  $\frac{\mu\lambda}{2\pi} Sx$ , talchè si può scrivere  $\frac{a}{Sx}$  in luogo di  $\frac{\mu\lambda}{2\pi}$ , si ricava

$$\Phi = -\frac{ca}{Sx} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} C \frac{2\pi y}{\lambda}.$$

Ne viene, in base alla (15'),

$$\left( \Phi \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right)_{y=h} = \frac{2\pi}{\lambda} c^2 a^2 \frac{1}{Tx} \sin^2 \frac{2\pi x}{\lambda}.$$

Integrando per una lunghezza d'onda e badando alla espressione di  $\tau'$ , risulta subito

$$\frac{\tau'}{1/2 c^2} = \frac{1}{2\lambda h} a^2 \frac{1}{Tx} 2\pi = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{h} \right)^2 \frac{1}{Tx} \frac{2\pi h}{\lambda}.$$

Attesa ancora una volta la (15') e l'equazione di Airy, si ha in definitiva dalla (11')

$$(21) \quad \frac{\gamma}{c} = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{h} \right)^2 \frac{gh}{c^2}.$$

Questa ci mostra come la velocità media di trasporto  $\gamma$  che si sapeva a priori di secondo ordine rispetto alla velocità di propagazione  $c$ , ne differisce per il fattore di riduzione  $\left( \frac{a}{h} \right)^2$  che è appunto di secondo ordine, nonchè per il fattore finito  $\frac{1}{2} \frac{gh}{c^2}$ .

XV.

**Sull'esistenza di soluzioni rigorose.  
Indicazione di ricerche del Cisotti.**

Dopo aver conseguito l'equazione mista (E'), ed aver affermato che essa è la chiave di volta di tutta la teoria delle onde periodiche, ci siamo in realtà limitati a discuterne le soluzioni di prima approssimazione, già da gran tempo conseguite per altra via. Sarebbe il momento di dire quale sia il progresso sostanziale che la (E') ha permesso di raggiungere. L'ora non mi consente di trattenermi più a lungo. Però debbo onestamente dichiarare che non mi è riuscito finora di trarre dalla (E') ciò che speravo di ricavarne con facile applicazione della teoria delle funzioni: intendo il teorema generale di esistenza, e quindi un algoritmo costruttivo di soluzioni rigorose, corrispondenti a onde di assegnata lunghezza  $\lambda$  (e conveniente velocità di propagazione  $c$ ).

È una questione di esistenza che non ha soltanto importanza matematica o speculativa; ma è ancora *sub judice* anche dal punto di vista fisico. Stokes studiò per il primo il problema in seconda e anche in terza approssimazione, cercando di soddisfare a tutte le condizioni nell'ipotesi che sia trascurabile non già  $\beta^2 = \left(\frac{V_a}{c}\right)^2$ , come nella teoria elementare, ma soltanto  $\beta^3$  o  $\beta^4$ , e rilevò notevoli

proprietà, conformi all'esperienza nella parte effettivamente suscettibile di controllo sperimentale. Ciò lo portò a ritenere come evidente l'esistenza di onde periodiche atte a propagarsi senza alterazione di tipo, risguardando quindi come un problema puramente matematico la conferma rigorosa di questa intuizione, ossia la illimitata applicabilità del passaggio ad approssimazioni successive e la convergenza del procedimento.

Lord Rayleigh da principio ritenne assai dubbia, per scrupoli di stabilità, l'esistenza di onde periodiche di tipo permanente; ma nel corso della sua vita andò accostandosi all'impressione opposta in seguito a risultati, pur soltanto approssimati, di McCowan e al successo del metodo di ignorazione dinamica di Korteweg e De Vries.

Il Rayleigh, come è proprio dei grandi, spiegò i motivi della sua evoluzione, onde evitare agli studiosi futuri le proprie dubbiezze, e riprese egli stesso la ricerca di Stokes spingendone alquanto le approssimazioni.

L'ultima parola dovrebbe ormai essere riservata alla nostra equazione (E'); ma io per ora non posso che esprimere un augurio. Mi permetto di aggiungere per notizia che l'equazione stessa si è mostrata assai conveniente per la trattazione delle approssimazioni successive <sup>(1)</sup>; e che d'altro lato

<sup>(1)</sup> Cfr. U. CRUDELI, *Sulle onde progressive di tipo permanente oscillatorie*, « Rend. della R. Acc. dei Lincei », volume XXVIII (secondo semestre 1919), pp. 174-178 e vol. XXIX (secondo semestre 1920), pp. 265-269.

---

il prof. Cisotti (<sup>4</sup>), estendendo al problema generale dei moti ondosi variabili le considerazioni qui svolte per il tipo permanente, ha potuto formare una equazione mista analoga alla (E') (contenente anche  $\frac{\partial w}{\partial t}$ ), la quale, per il caso dei piccoli moti, gli ha consentito di studiare in modo limpidissimo la propagazione ondosa in un canale di profondità qualunque  $h$ , riuscendo così a cogliere l'influenza del fondo sul fenomeno ondoso, e quindi a realizzare un progresso considerevole sulle celebri ricerche di Poisson e Cauchy, che contemplan esclusivamente il caso limite di una profondità infinita.

---

(<sup>4</sup>) Ibidem, vol. XXVII (secondo semestre 1918), pp. 255-259, 312-316; vol. XXVIII (primo semestre 1919), pp. 196-199; vol. XXIX (primo semestre 1920), pp. 131-133, 175-180, 261-264.



PARALLELISMO E CURVATURA  
IN UNA VARIETÀ QUALUNQUE

I.

**Parallelismo superficiale.**

Consideriamo una varietà a due dimensioni, cioè una superficie  $\sigma$ , un punto  $P$  di essa, il relativo piano tangente  $\hat{\omega}$ , e una direzione generica, spiccata da  $P$  tangenzialmente a  $\sigma$ , e quindi contenuta in  $\hat{\omega}$ : penseremo individuata la direzione mediante il corrispondente *versore* (vettore unitario)  $u$ , e in conformità diremo semplicemente direzione  $u$ , anzichè direzione il cui versore è  $u$ .

Sieno ancora  $P_1$  un altro punto qualsiasi di  $\sigma$ , e  $\hat{\omega}_1$  il piano tangente in  $P_1$ .

Se la superficie  $\sigma$  è *svilupicabile*, si può ovviamente stabilire fra le direzioni uscenti tangenzialmente da  $P$  e le analoghe uscenti da  $P_1$  una corrispondenza per parallelismo, chiamandosi *parallela* ad  $u$  in senso *superficiale* quella  $u_1$  che diviene parallela ad  $u$  in senso ordinario, quando si fa lo sviluppo di  $\sigma$  sopra un piano.

Un tale criterio vien meno nel caso di una superficie non svilupicabile (anche del tipo più elementare, come ad esempio la sfera), ed è naturale di cercarne una generalizzazione adeguata. Vi si è condotti nel modo più spontaneo pur che agli

elementi posizionali già presi in considerazione (i quali sono sufficienti senza ulteriori specificazioni per le superficie applicabili sul piano) si aggiunga una legge, a priori arbitraria, di concatenamento, raffigurandosi  $P_1$  come proveniente da  $P$  attraverso una *determinata* curva  $T$  di  $\sigma$  (*curva di trasporto*).

Con referenza a questa  $T$ , si può ovviamente definire il trasporto per parallelismo da  $P$  a  $P_1$ , associando a  $\sigma$  la svilupicabile  $\sigma_T$ , che le è tangente

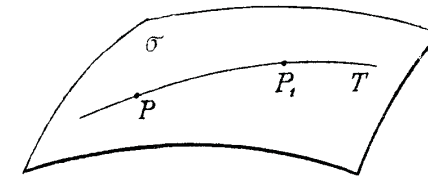


Fig. 8.

lungo  $T$ , svilupicabile costituita dall'inviluppo degli  $\infty^1$  piani tangenti a  $\sigma$  lungo  $T$ . In questi e in particolare in  $\hat{\omega}_1$ , assumeremo come definizione di parallelismo superficiale, relativo alla nostra superficie, lungo la curva  $T$ , quello subordinato dalla rigata  $\sigma_T$ .

II.

**Prime conseguenze.**

**Equipollenza (superficiale) di vettori.**

Una conseguenza inevitabile della precedente definizione è che (a differenza di quanto accade per le svilupicabili) la direzione  $u_1$  superficialmente

parallela ad  $u$  in  $P_1$  non è univocamente determinata dai soli dati  $P$ ,  $u$  e  $P_1$ , ma in generale dipende anche dalla curva di trasporto. Sotto questo aspetto, la nozione geometrica di parallelismo si può ravvicinare a quella fisica di lavoro, ovvero (badando al substrato analitico) all'integrale di una espressione differenziale  $X_1 dx_1 + X_2 dx_2$ . Ove si risguardino  $x_1, x_2$  come coordinate (di qualsiasi specie) su  $\sigma$ , il valore di un tale integrale tra i due punti  $P$  e  $P_1$  varia in generale colla linea  $T$  lungo la quale si integra; risultandone indipendente soltanto nel caso particolare in cui  $X_1 dx_1 + X_2 dx_2$  sia un differenziale esatto.

Tornando al parallelismo lungo  $T$ , conviene rilevare in primo luogo che, *nel trasporto, si conservano gli angoli*, cioè se  $a$  e  $b$  sono due direzioni generiche uscenti da  $P$ , le loro parallele superficiali in  $P_1$ ,  $a_1$  e  $b_1$  formano il medesimo angolo. Ciò risulta immediatamente dalla duplice circostanza che, nel piano su cui si sviluppa  $\sigma$ , si ha per costruzione parallelismo in senso ordinario (fra  $a$  e  $a_1$ ,  $b$  e  $b_1$ ) e che d'altra parte l'operazione di sviluppo non altera gli angoli.

Nelle considerazioni istituite finora ci siamo riferiti unicamente alle direzioni, considerando i corrispondenti versori. È chiaro che la stessa costruzione con cui si passa da  $u$  ad  $u_1$  può essere applicata ad un vettore (tangenziale)  $R$  di lunghezza qualsiasi  $R$  (non unitaria). Se  $u$  è il corrispondente versore, si ha  $R = Ru$ , e se ne trae un vettore  $R_1 = Ru_1$ , cioè un vettore applicato in  $P_1$ , avente la stessa lunghezza di  $R$ , e per direzione

quella della parallela superficiale  $u_1$ . Diremo, come è naturale, che  $R$  ed  $R_1$  sono *vettori* (superficialmente) *equipollenti*, con referenza al cammino  $T$ . In sostanza questa nozione di equipollenza superficiale si riconduce senz'altro al parallelismo, essendo equipollenti due vettori tangenziali quando sono paralleli ed hanno la stessa lunghezza.

Un cenno particolare, nei riguardi del parallelismo, merita il caso in cui la curva di trasporto  $T$  sia una geodetica di  $\sigma$ . Essa è allora geodetica anche rispetto a  $\sigma_T$ . Per convincersene, basta pensare che  $\sigma$  e  $\sigma_T$  hanno gli stessi piani tangenti e quindi le stesse normali lungo  $T$ , talchè se i vari piani osculatori di  $T$  risultano normali ad una delle due superficie (carattere specifico delle geodetiche) lo sono pure all'altra. Nello sviluppo, la geodetica  $T$  diventa una retta. Perciò, se la direzione che si trasporta per parallelismo lungo  $T$  è (in partenza) quella di  $T$  (cioè della sua tangente), lo stesso avviene in ogni altro punto. *Ogni geodetica gode dunque della proprietà specifica di avere elementi sempre egualmente diretti* (cioè paralleli, rispetto al trasporto lungo la geodetica stessa).

Si riconosce in questo enunciato un'ovvia estensione, a superficie di natura qualsiasi, della intuizione primordiale della retta, espressa da Euclide colle parole: εὐθεῖα γραμμὴ ἐστὶν ἥτις ἐξ ἑσού τοῦ ἐφ' αὐτῆς σημείους κείται.

III.

Trasporto infinitesimo.

Forma differenziale della legge di parallelismo.

Supponiamo in particolare  $P_1$  infinitamente vicino a  $P$ , riducendo il cammino  $T$  all'arco elementare  $PP_1$ , (che, a meno di infinitesimi d'ordine superiore al primo, rimane univocamente determinato dagli estremi). Per avere lo sviluppo, basta in tal caso far subire al piano  $\tilde{\omega}_1$  una rotazione elementare attorno alla retta  $r$ , secondo cui esso interseca  $\tilde{\omega}$ . La direzione di tale retta — notiamolo per incidenza — è la coniugata di  $PP_1$  in  $P$  (o, ciò che è lo stesso a meno di infinitesimi, in  $P_1$ ). Indicheremo con  $-\omega$  il vettore (infinitesimo) parallelo ad  $r$ , che rappresenta in grandezza direzione e verso la rotazione elementare mediante cui si adagia  $\tilde{\omega}_1$  su  $\tilde{\omega}$ . Sarà allora  $\omega$  la rotazione elementare che fa ripassare  $\tilde{\omega}_1$  dal piano di sviluppo  $\tilde{\omega}$  alla sua effettiva posizione di piano tangente in  $P_1$ . Se  $u$  è una direzione generica spiccata da  $P$ , per avere la parallela tangenziale  $u_1$ , dobbiamo, secondo la definizione, guidare  $u$  da  $P_1$  quando questo si trova nel piano di sviluppo;  $u_1$  non è altro che  $u$  cui si faccia subire la rotazione  $\omega$ , restituendo a  $\tilde{\omega}_1$  la sua posizione nello spazio. Dai primi elementi di cinematica dei sistemi rigidi si ha notoriamente, per il divario dei due vettori  $u$  ed  $u_1$ , cioè per l'incremento elementare  $du$  che

subisce il vettore  $u$ , passando da  $P$  a  $P_1$ ,

$$du = \omega \wedge u \quad (1).$$

Siccome tanto  $\omega$  quanto  $u$  sono vettori appartenenti al piano  $\tilde{\omega}$ , l'incremento  $du$  risulta perpendicolare a questo piano, o in particolare nullo (2). Perciò, se  $\tau$  è un vettore generico appartenente a  $\tilde{\omega}$ , il prodotto scalare

$$(1) \quad \tau \times du = 0.$$

Ciò val quanto dire che  $\tau \times u_1$  e  $\tau \times u$  sono eguali (a meno di infinitesimi d'ordine superiore al primo). Trattandosi di vettori unitari, l'eguaglianza dei prodotti scalari  $\tau \times u_1$  e  $\tau \times u$  implica quella degli angoli, ossia: *la parallela  $u_1$  ad  $u$  forma con qualsiasi direzione  $\tau$ , tangenziale in  $P$ , lo stesso angolo di  $u$*  (si intende, a meno di infinitesimi d'ordine superiore al primo).

(1) Col simbolo  $\wedge$ , rappresento un prodotto vettoriale (od esterno) attenendomi alla notazione, ormai largamente diffusa, di Marcolongo e Burali-Forti.

(2) Quest'ultima circostanza si presenta quando  $u$  abbia la direzione di  $\omega$ , la quale (come abbiamo incidentalmente rilevato) è la coniugata di  $PP_1$ . Si conclude che la parallela superficiale  $u_1$  coincide colla parallela euclidea allora (e allora soltanto) che  $u$  sia diretto come la coniugata di  $PP_1$ . L'osservazione è dovuta al prof. Bompiani il quale se ne è valso per generalizzare la teoria dei sistemi coniugati alle superficie appartenenti a spazi non euclidei.

Reciprocamente, importa rilevare che la proprietà angolare suddetta e con essa la (1) è caratteristica, sicchè si può assumere come definizione (differenziale) del parallelismo superficiale. Per riconoscerlo, si nota in primo luogo che, dovendo essere  $\tau \times du = 0$ , per qualsiasi direzione di  $\omega$ ,  $du$  risulta necessariamente perpendicolare al piano  $\omega$  in particolare nullo. D'altra parte  $u_1$ , cioè  $u + du$  deve appartenere al piano  $\omega_1$ . Perciò, figurando fra i dati della questione  $u$ ,  $\omega$  e  $\omega_1$  o, ciò che è lo stesso,  $u$ ,  $\omega_1$  ed  $n$  (normale in  $P$ ), ed essendovi un solo modo di decomporre un vettore in due, uno parallelo al piano  $\omega_1$  e l'altro alla retta  $n$ , dalla identità vettoriale

$$u = u_1 - du$$

apparisce che  $u_1$  e  $du$  rimangono univocamente determinati dalla semplice decomposizione di  $u$  secondo il piano  $\omega_1$  e la retta  $n$  (perpendicolare a  $\omega$ , ma in generale, non a  $\omega_1$ ), c. d. d.

IV.

**Spostamenti virtuali. Equazione simbolica.**

Alla (1) si può dare una forma più espressiva, facendo intervenire al posto del versore  $\tau$  un generico spostamento virtuale rispetto alla superficie  $\sigma$ , cioè un qualsiasi  $\delta P$  infinitesimo, diretto tangenzialmente a partire da  $P$ . Un tale  $\delta P$  è

sempre rappresentabile sotto la forma  $\varepsilon \tau$ , se  $\varepsilon$  ne designa l'ampiezza. Basterà moltiplicare per  $\varepsilon$  e si avrà da (1) la relazione equivalente

$$(1') \quad du \times \delta P = 0,$$

che ricorda il principio dei lavori virtuali.

Infatti questo compendia la definizione dell'accelerazione (variazione di velocità) quando si passa da un istante all'istante vicinissimo; la (1'), molto più semplice, compendia la definizione della variazione spaziale del versore  $u$ , quando questa direzione si trasporta, per parallelismo superficiale, da  $P$  ad un punto vicinissimo  $P_1$ .

Ove ci si riferisca ad un generico sistema cartesiano  $Oy_1y_2y_3$  e si indichino con  $\alpha_v$  ( $v = 1, 2, 3$ ) i coseni direttori di  $u$ , nonchè con  $\delta y_v$  le componenti di uno spostamento virtuale  $\delta P$ , la (1') può essere sostituita dalla equivalente relazione scalare

$$(2) \quad \sum_1^3 dz_v \cdot \delta y_v = 0,$$

che contiene la definizione degli incrementi dei coseni  $\alpha_v$ .

Se si torna ad un trasporto finito lungo una curva  $T$ , e indicandone l'arco con  $s$ , si considerano i coseni  $\alpha_v$  della direzione  $u$  come funzioni di  $s$ , le derivate  $\frac{d\alpha_v}{ds} = \alpha_v'$ , rimangono definite in ogni punto di  $T$  dalla equazione simbolica (che è quella

ora scritta divisa per  $ds$ )

$$(2') \quad \sum_1^3 \alpha_v' \delta y_v = 0,$$

anch'essa equivalente alla (1'), o, se si vuole, alla originaria costruzione geometrica desunta dalla sviluppabile  $\sigma_T$ .

V.

#### Carattere intrinseco della nozione di parallelismo.

Se la curva di trasporto  $T$  è una geodetica, si vede subito che il parallelismo dipende esclusivamente dalla superficie  $\sigma$ , e per essa dalla natura dell'elemento lineare, cioè del  $ds^2$ , non anche dalla configurazione della superficie nello spazio, come a priori può lasciar supporre la costruzione geometrica (che utilizza lo spazio ambiente) o la equivalente formula (2).

Basta infatti ricordare la proprietà generale della conservazione degli angoli, e quella speciale delle geodetiche di conservazione della propria direzione. Ne viene che la parallela  $u_1$  in  $P_1$  ad una generica direzione  $u$  spiccata da  $P$  rimane individuata dalla condizione (di appartenere alla superficie  $\sigma$  e) di formare in  $P_1$  colla geodetica di trasporto lo stesso angolo che la  $u$  forma in  $P$ . Si tratta, come si vede, di proprietà angolari che dipendono unicamente dalla metrica di  $\sigma$ .

Questa constatazione relativa ad una  $T$  geodetica, si estende agevolmente al caso generale, immaginandolo scisso in trasporti elementari, da un generico punto  $P$  ad un punto vicinissimo  $P_1$ . In un tale trasporto, l'alterazione elementare della direzione  $u$  rimane definita, come abbiamo visto, dagli estremi  $P, P_1$ : la natura della congiungente non influisce. D'altra parte — lo si è dimostrato or ora — per un arco geodetico, l'alterazione è intrinseca, dipende cioè soltanto dal  $ds^2$  della superficie  $\sigma$ , e non dalla forma di questa nello spazio ambiente. L'alterazione di  $u$  e quindi il parallelismo ha dunque comportamento intrinseco, qualunque sia la linea di trasporto, c. d. d.

VI.

#### Rappresentazione analitica.

Giova procedere ad una trattazione sistematica del parallelismo per via analitica, immaginando introdotte sulla superficie  $\sigma$  coordinate curvilinee quali si vogliono  $x_1, x_2$ , e trasformando la (2) in conformità.

All'uopo si prende naturalmente le mosse dalla circostanza che le coordinate cartesiane  $y_v$  dei punti di  $\sigma$  si presentano come funzioni ben determinate di  $x_1, x_2$ ; si ha con ciò la rappresentazione parametrica della superficie:

$$(3) \quad y_v = y_v(x_1, x_2) \quad (v = 1, 2, 3).$$

Il quadrato dell'elemento lineare, cioè della distanza  $ds$  di due punti vicinissimi della superficie corrispondenti alle coordinate  $x_i$  e  $x_i + dx_i$  ( $i=1,2$ ) rimane ovviamente definito dalle (3), avendosi

$$(4) \quad ds^2 = \sum_1^3 dy_v^2 = \sum_1^2 a_{ik} dx_i dx_k.$$

In ogni punto  $x_i$  di regolarità della superficie le  $a_{ik}$  risultano funzioni regolari <sup>(4)</sup> delle coordinate; la forma differenziale quadratica è definita, positiva, ecc.

Fissiamo un generico punto  $P$  di  $\sigma$ , le sue coordinate curvilinee  $x_1, x_2$  e le sue coordinate cartesiane  $y_1, y_2, y_3$ , esprimibili mediante le prime, a norma delle (3). Una direzione superficiale  $u$  spiccata da  $P$  è caratterizzata dagli incrementi infinitesimi  $dx_1, dx_2$  che subiscono le coordinate quando si passa da  $P$  ad un punto vicinissimo della  $\sigma$ , spostandosi nella direzione  $u$ . In tal guisa però ad ogni coppia di differenziali  $dx_1, dx_2$  corrisponde una direzione ben determinata; ma non viceversa, perchè una direzione dà luogo, secondo l'ampiezza (infinitesima ma a priori arbitraria) dello spostamento che si considera, a infinite coppie  $dx_1, dx_2$  tutte proporzionali fra loro. Per rendere biunivoca la corrispondenza, si introducono i cosiddetti *para-*

<sup>(4)</sup> Si vuol dire semplicemente finite, continue e derivabili quante volte occorre.

*metri di direzione*, cioè i rapporti

$$u^{(1)} = \frac{dx_1}{ds}, \quad u^{(2)} = \frac{dx_2}{ds},$$

fra gli incrementi delle coordinate e l'ampiezza  $ds$  dello spostamento. Tali parametri (che si riducono ovviamente ai coseni direttori, nel caso in cui la superficie sia piana e  $x_1, x_2$  rappresentino coordinate cartesiane ortogonali) rimangono, in virtù della (4), legati dalla relazione quadratica

$$(5) \quad \sum_1^2 a_{ik} u^{(i)} u^{(k)} = 1,$$

che fa riscontro alla ben nota identità del piano (e anche dello spazio) euclideo: somma dei quadrati dei coseni = 1.

La  $u$  può essere naturalmente riguardata come direzione dello spazio ambiente; in tale accezione le competono tre coseni direttori  $\alpha_v$  rispetto agli assi di riferimento  $y_v$ , e tali  $\alpha_v$  non sono altro che i rapporti  $\frac{dy_v}{ds}$  fra gli incrementi delle coordinate cartesiane e il  $ds$ , quando ci si sposta (di  $ds$ ) nella direzione  $u$ . Gli incrementi  $dy_v$  rimangono subordinati agli incrementi  $dx_1, dx_2$  dalla differenziazione delle (3). Dividendo anche per  $ds$  e badando alla definizione dei parametri  $u^{(1)}, u^{(2)}$ , si ha

$$(6) \quad \alpha_v = \sum_1^2 \frac{\partial y_v}{\partial x_j} u^{(j)}.$$

In modo analogo si hanno dalle stesse (3) le espressioni delle componenti  $\delta y$ , di uno spostamento virtuale  $\delta P$ . Un tale spostamento che fa passare da  $P$  ad altro punto vicinissimo della stessa superficie  $\sigma$ , sarà caratterizzato dal fatto che alle coordinate  $x_1, x_2$  si attribuiscono incrementi infinitesimi del tutto arbitrari  $\delta x_1, \delta x_2$ . Essi subordinano nelle coordinate cartesiane  $y_v$  gli incrementi

$$(6) \quad \delta y_v = \sum_1^2 \frac{\partial y_v}{\partial x_k} \delta x_k.$$

A questo punto si procede come nella classica applicazione del principio dei lavori virtuali per la costruzione delle equazioni di Lagrange. Si portano le espressioni (6) e (6') nella formula comprensiva (2) e si eguagliano a zero i coefficienti delle arbitrarie  $\delta x_k$ . Si ha così

$$\sum_1^3 dx_v \delta y_v = \sum_1^2 \delta x_k \sum_1^2 \sum_1^3 \frac{\partial y_v}{\partial x_k} \cdot d \left( \frac{\partial y_v}{\partial x_j} u^{(j)} \right) = 0$$

e quindi

$$\sum_1^2 \sum_1^3 \frac{\partial y_v}{\partial x_k} d \left( \frac{\partial y_v}{\partial x_j} u^{(j)} \right) = 0 \quad (k=1, 2).$$

Sono queste le due equazioni che definiscono gli incrementi  $du^{(1)}, du^{(2)}$  da attribuirsi ai parametri di una direzione generica  $u$ , quando la si trasporta per parallelismo lungo il cammino elementare  $dx_1, dx_2$ . Queste equazioni contengono ancora le espressioni parametriche delle coordinate cartesiane  $y_v(x_1, x_2)$

talchè, così come stanno, non mettono in evidenza il carattere intrinseco del parallelismo. Ma è facile trasformarle in modo che vi figurino esclusivamente elementi intrinseci della superficie  $\sigma$ , cioè del suo  $ds$ . All'uopo basta partire dalla espressione dei coefficienti  $a_{ik}$  fornita direttamente dalla (4):

$$a_{ik} = a_{ki} = \sum_1^3 \frac{\partial y_v}{\partial x_i} \frac{\partial y_v}{\partial x_k}.$$

In base alla definizione dei cosiddetti simboli di Christoffel di prima specie

$$a_{jl, k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_j} + \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_l} - \frac{\partial a_{jl}}{\partial x_k} \right),$$

se ne trae

$$a_{jl, k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_1^3 \frac{\partial y_v}{\partial x_k} \frac{\partial y_v}{\partial x_l} + \frac{\partial}{\partial x_l} \sum_1^3 \frac{\partial y_v}{\partial x_k} \frac{\partial y_v}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_1^3 \frac{\partial y_v}{\partial x_j} \frac{\partial y_v}{\partial x_l} \right) = \sum_1^3 \frac{\partial^2 y_v}{\partial x_j \partial x_l} \frac{\partial y_v}{\partial x_k}$$

e quindi

$$\sum_1^3 a_{jl, k} dx_l = \sum_1^3 \frac{\partial y_v}{\partial x_k} d \left( \frac{\partial y_v}{\partial x_j} \right).$$

Sfruttando questa identità (e la definizione di  $a_{kj}$ ), le due precedenti equazioni di parallelismo divengono

$$\sum_1^2 a_{kj} du^{(j)} + \sum_1^2 a_{jl, k} u^{(j)} dx_l = 0 \quad (k=1, 2),$$



in cui è effettivamente scomparsa ogni traccia di elementi estranei alla metrica superficiale. Conviene ancora risolverle rispetto ai differenziali delle  $u$ . All'uopo basta moltiplicare per  $a^{(ki)}$  <sup>(1)</sup> e sommare rispetto all'indice  $k$  da 1 a 2, ricordando le identità

$$\sum_1^2 a_{kj} a^{(ki)} = \varepsilon_{ij} \quad (\varepsilon_{ij} = 0 \text{ per } i \neq j; \varepsilon_{ij} = 1 \text{ per } i = j)$$

e la definizione dei simboli di Christoffel di seconda specie:

$$\left\{ \begin{matrix} j & l \\ i \end{matrix} \right\} = \sum_1^2 a_{jl, k} a^{(ki)}.$$

Ne risulta

$$(7) \quad du^{(i)} + \sum_1^2 \left\{ \begin{matrix} j & l \\ i \end{matrix} \right\} u^{(j)} dx_l = 0 \quad (i = 1, 2),$$

che costituiscono la forma finale delle equazioni differenziali del parallelismo. In queste, ripetiamolo ancora una volta,  $u^{(1)}$ ,  $u^{(2)}$  sono i parametri della direzione che si trasporta;  $dx_1$ ,  $dx_2$  individuano il trasporto elementare che le si fa subire, e i simboli di Christoffel  $\left\{ \begin{matrix} j & l \\ i \end{matrix} \right\}$  (da riguardarsi funzioni

<sup>(1)</sup> Cioè per i coefficienti della forma quadratica reciproca alla  $\sum_{ik} a_{ik} dx_i dx_k$ . Un generico  $a^{(ki)}$  è il complemento algebrico di  $a_{ik}$  nel determinante  $a$  di queste quantità, diviso per lo stesso  $a$ .

note del posto) dipendono dalla natura metrica della varietà nella quale si opera.

È appena necessario aggiungere che dai differenziali si passa immediatamente alle derivate, supponendo che il cammino  $dx_1$ ,  $dx_2$  appartenga ad un'assegnata curva  $T$ .

$$\text{Siano} \quad x_i = x_i(s) \quad (i = 1, 2)$$

le sue equazioni parametriche,  $s$  rappresentando l'arco contato a partire da un'origine arbitraria. Per un trasporto elementare di  $ds$  lungo  $T$  si avrà

$$dx_i = x_i' ds,$$

designando con apici le derivate rapporto ad  $s$ . Con ciò le (7), divise per  $ds$ , danno

$$(7') \quad \frac{du^{(i)}}{ds} + \sum_1^2 \left\{ \begin{matrix} j & l \\ i \end{matrix} \right\} u^{(j)} x_l' = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Lungo  $T$ , le  $x$ , e con esse le funzioni del posto, quali le  $\left\{ \begin{matrix} j & l \\ i \end{matrix} \right\}$ , nonchè le  $x'$ , vanno riguardate come funzioni conosciute della variabile indipendente  $s$ . Le (7') si presentano in conformità come un sistema di equazioni differenziali lineari nelle incognite funzioni  $u^{(i)}(s)$ . Ne consegue, in base ai noti teoremi di esistenza, la riprova analitica del fatto geometricamente evidente che, spiccata a piacimento una direzione (della varietà in questione) da un punto qualsiasi  $P$  di  $T$ , rimangono determinate le parallele in tutti gli altri punti della curva.

VII.

Trasporto per equipollenza. Commutabilità.

Abbiamo già notato al n. 2 che l'operazione geometrica di trasporto per parallelismo superficiale si applica tanto alle direzioni, e per esse ai vettori unitari, quanto ai vettori tangenziali di lunghezza qualsiasi. Lo stesso vale pel procedimento analitico, un vettore  $R$  tangente a  $\sigma$  rimanendo caratterizzato da direzione e lunghezza, cioè, nella metrica della varietà, da due elementi  $R^{(i)}$  (componenti contravarianti) proporzionali ai parametri  $u$  della sua direzione: per fattore di proporzionalità si assume la lunghezza  $R$  dello stesso vettore.

Si ha così

$$R^{(i)} = Ru^{(i)} \quad (i=1, 2)$$

e quindi

$$\sum_1^2 \alpha_{ik} R^{(i)} R^{(k)} = R^2.$$

Importa rilevare che questi vettori tangenziali (pur rimanendo caratterizzati intrinsecamente dai due numeri  $R^{(1)}, R^{(2)}$ ) provengono, come s'è detto, dall'immagine geometrica di un segmento spiccato tangenzialmente da un punto della superficie  $\sigma$ , ente che non appartiene interamente a  $\sigma$ , almeno in generale. Se però si tratta di vettori infinitesimi, l'elemento di piano tangente a cui appartengono si confonde coll'elemento superficiale di  $\sigma$  circo-

stante a  $P$ , e si può dire che non si esce da  $\sigma$ . Vale pertanto, per un generico vettore (tangenziale) infinitesimo, la solita immagine di uno spostamento che fa passare dall'origine  $P$  all'estremo  $P_1$ , anche esso punto di  $\sigma$ .

Riducendosi in tal caso la lunghezza  $R$  ad un elemento lineare  $ds$ , le  $R^{(i)} = u^{(i)} ds$  si identificano (in base alla stessa definizione di parametri di direzione) cogli incrementi  $dx_i$  che subiscono le coordinate (curvilinee) passando da  $P$  a  $P_1$ .

Torniamo ad un vettore tangenziale di lunghezza qualunque (finita o infinitesima). Le equazioni (7), in cui si sostituiscono materialmente le  $R^{(i)}$  alle  $u^{(i)}$ , cioè le

$$(8) \quad dR^{(i)} + \sum_1^2 \frac{\partial R^{(i)}}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x_i} R^{(j)} dx_i = 0 \quad (i=1, 2)$$

definiscono un trasporto per equipollenza, in quanto — sarebbe facile verificarlo formalmente <sup>(1)</sup> — la lunghezza del vettore rimane inalterata, e la direzione segue la legge di parallelismo.

Ciò posto, consideriamo due sistemi di differenziali  $dx_i, \delta x_i$  e i corrispondenti vettori o spostamenti infinitesimi (si intende sopra  $\sigma$ )

$$dP = PP_1, \quad \delta P = PP_2.$$

<sup>(1)</sup> Per la verifica rimando al § 6 della memoria *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque, ecc.* Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, tomo XLII, 1917, pp. 1-32; ovvero alle *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, redatte dal dott. Persico [Roma: Stock, 1924], Cap. V, § 18.

Conveniamo di designare con  $df$  l'aumento che subisce un generico vettore, o ente ad esso subordinato,  $f$ , quando si passa da  $P$  a  $P_1$  per equipollenza superficiale.

Analogo significato attribuiremo a  $\delta f$  in corrispondenza al passaggio da  $P$  a  $P_2$ .

In conformità  $d\delta P$  sta a rappresentare l'incremento vettoriale di  $\delta P$  (quando lo si trasporta da  $P$  a  $P_1$ ), e  $d\delta x_i$  l'incremento subordinato nel suo sistema contravariante  $\delta x_i$ . Per quest'ultimo si ha dalle (8)

$$(9) \quad d\delta x_i = - \sum_1^2 \left\{ \begin{matrix} j l \\ i \end{matrix} \right\} \delta x_j dx_i \quad (i = 1, 2).$$

Il trasporto di  $dP$  da  $P$  a  $P_2$  dà invece luogo agli incrementi  $\delta dP$ , e

$$\delta d x_i = - \sum_1^2 \left\{ \begin{matrix} j l \\ i \end{matrix} \right\} dx_j \delta x_l.$$

Siccome, per loro definizione, i simboli di Christoffel sono simmetrici rispetto ai due indici superiori (cioè  $\left\{ \begin{matrix} j l \\ i \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} l j \\ i \end{matrix} \right\}$ ), così (scambiando materialmente  $j$  con  $l$  in una delle due sommatorie) risulta senz'altro

$$d\delta x_i = \delta d x_i,$$

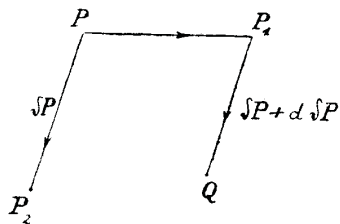


Fig. 9.

che prova la commutabilità dei due operatori  $d$  e  $\delta$  definiti nel modo poc' anzi dichiarato.

Il significato geometrico del risultato è particolarmente semplice. Basta tener presente che, per vettori infinitesimi (e tali sono quelli qui considerati), gli elementi del sistema contravariante altro non sono se non differenze di coordinate omologhe. Perciò, se  $x_i$  sono le coordinate di  $P$ , avremo in primo luogo per  $P_1$  le coordinate  $x_i + dx_i$ , e per  $P_2$  le coordinate  $x_i + \delta x_i$ . Detto  $Q$  il punto di  $\sigma$  cui si perviene guidando da  $P_1$  il vettore equipollente a  $\delta P$ , siccome il sistema contravariante di quest'ultimo è  $\delta x_i + d\delta x_i$ , si hanno in definitiva per  $Q$  le coordinate curvilinee

$$x_i + dx_i + \delta x_i + d\delta x_i.$$

Tali espressioni non si alterano scambiando  $d$  con  $\delta$ , perciò si perviene al medesimo punto  $Q$  anche guidando da  $P_2$  il vettore equipollente a  $dP$ . Si può dire, in forma più espressiva, che, per vettori infinitesimi superficialmente equipollenti, seguita a valere la regola del parallelogrammo <sup>(1)</sup>.

(<sup>1</sup>) Si potrebbe partire da questa proprietà per stabilire intrinsecamente il parallelismo rispetto alla metrica di  $\sigma$ , prescindendo, anche nella impostazione iniziale, dallo spazio ambiente. Il metodo si applica senz'altro alle varietà  $V_n$  di quante si vogliono dimensioni. Cfr. H. WEYL, *Gravitation und Elektrizität*, Sitzungsberichte der Preuss. Ak. der Wiss., 1918, pp. 465-480; ovvero la prima edizione della sua opera *Raum, Zeit, Materie* (Berlin: Springer, 1918), Cap. II.

*Osservazione.*

In ciò che precede si tien conto di quantità del secondo ordine del tipo  $d\delta x_i$ , ma si trascurano  $dx_i^2$ ,  $\delta x_i^2$ . Qualora se ne volesse tener conto, considerando i vettori  $\delta P$ ,  $dP$  e loro equipollenti (superficiali) per  $P_1$  e per  $P_2$  come vettori nello spazio, non si avrebbe più un parallelogrammo, anzi non si avrebbe nemmeno un quadrangolo chiuso. Lo si riconosce senza difficoltà, richiamandosi alla costruzione spaziale dei vettori superficialmente equipollenti, indicata al n. 3. Da essa si desume che i vettori  $d\delta P$  e  $\delta dP$  sono entrambi diretti secondo la normale alla superficie  $\sigma$  in  $T$ ; però le loro lunghezze saranno in generale diverse: basta ravvicinare la costruzione del n. 3 al fatto che i tre punti  $P$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  e i rispettivi piani tangenti  $\omega$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ , non hanno a priori altra relazione se non quella di essere infinitamente vicini.

VIII.

**Richiami sulle varietà  
ad un numero qualunque di dimensioni.**

Sia  $V_n$  una varietà astratta ad  $n$  dimensioni corrispondente al continuo numerico  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , o, più precisamente, ad un qualunque campo di questo continuo, cui vanno riferite le considerazioni che seguono.

Immaginiamo posta in  $V_n$  una determinazione metrica mediante l'espressione della distanza  $ds$  di

due punti generici infinitamente vicini  $x_i$  e  $x_i + dx_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Assumeremo al solito questa espressione sotto la forma

$$ds^2 = \sum_{i,k}^n a_{ik} dx_i dx_k$$

in cui, ben s'intende, le  $a_{ik}$  si risguardano funzioni del posto in  $V_n$  (cioè delle coordinate  $x_i$ ) finite e continue, assieme alle derivate prime e seconde, e tali da rendere la forma quadratica definita positiva.

Come è ben noto, si può sempre supporre la  $V_n$  immersa in uno spazio euclideo ad un numero di dimensioni  $N$  abbastanza alto (e non superiore a  $\frac{n(n+1)}{2}$ ). Si vuol dire con ciò che è possibile (e lo è in generale in infiniti modi) introdurre  $N$  funzioni delle  $x_i$

$$y_\nu = y_\nu(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (\nu = 1, 2, \dots, N)$$

tali che risulti identicamente (rispetto alle nostre variabili indipendenti  $x$ )

$$(10) \quad ds^2 = \sum_{\nu}^N dy_\nu^2 = \sum_{i,k}^n a_{ik} dx_i dx_k.$$

Nulla vieta manifestamente di risguardare le  $N$  quantità  $y_\nu$  come coordinate in uno spazio  $S_N$  a  $N$  dimensioni; anzi come coordinate cartesiane di un

tale spazio, assumendovi una metrica euclidea, ritenendo cioè

$$ds^2 = \sum_1^N dy_v^2.$$

Consideriamo in particolare entro  $S_N$  una varietà a  $n$  dimensioni definita mediante le equazioni parametriche

$$(11) \quad y_v = y_v(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (v=1, 2, \dots, N).$$

In virtù della (10), vi si subordina precisamente l'assegnata metrica di  $V_n$ , talchè è lecito assumere la varietà (11) (anzi una qualunque delle (11), se vi sono vari modi di scegliere le  $N$  funzioni  $y_v$ ) come un modello tangibile (se tangibile può dirsi uno spazio euclideo a  $N > 3$  dimensioni) della  $V_n$ . Per  $n=2$ ,  $N=3$ ; e il modello tangibile di una varietà  $V_2$  con assegnata determinazione metrica è in tal caso quello di una conveniente superficie  $\sigma$  dello spazio ordinario; possiamo perciò ritenere acquisita in base alle considerazioni precedenti, la teoria del parallelismo per qualsiasi  $V_2$ . Ed è anche facile estenderla alle varietà  $V_n$  di quante si vogliono dimensioni, fondandosi sulle (11) e (10), che costituiscono un'ovvia generalizzazione delle formule elementari (3) e (4) (sostituendo 2 con  $n$  e 3 con  $N$ ).

Ciò premesso, conviene ancora richiamare le seguenti generalità: ogni sistema di differenziali  $dx_i$ , attribuiti ad una generica ennupla di valori delle  $x_i$ , individua una direzione  $u$ , spiccata dal punto  $P$

che rappresenta l'ennupla. Detto  $P_1$  il punto  $x_i + dx_i$ , e  $ds$  l'elemento lineare  $PP_1$ , si chiamano, come già per le  $V_2$ , *parametri di direzione* i rapporti

$$u^{(i)} = \frac{dx_i}{ds} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

In virtù della (10), essi sono legati dalla relazione quadratica

$$(12) \quad \sum_1^n a_{ik} u^{(i)} u^{(k)} = 1$$

perfettamente analoga alla (5). Una direzione individua univocamente i suoi parametri (mentre non individua i differenziali  $dx_i$ ), e reciprocamente, sotto condizione che valga la (12).

I differenziali  $dx_i$  subordinano, a norma della (11), gli incrementi

$$(13) \quad dy_v = \sum_1^n \frac{\partial y_v}{\partial x_i} dx_i \quad (v=1, 2, \dots, N)$$

delle coordinate cartesiane  $y_v$ , e quindi individuano, come è geometricamente evidente, una direzione anche nello  $S_N$  euclideo ambiente. Seguiremo a designarla con  $u$ , anzi converremo di rappresentarla con questo stesso simbolo anche il versore corrispondente. Le sue componenti non sono altro che i coseni direttori, ossia i rapporti  $\frac{dy_v}{ds} = \alpha_v$  (parametri rispetto all' $S_N$ ). Dalle (13) si ha in confor-

mità, col materiale scambio di  $i$  in  $j$ ,

$$(14) \quad \alpha_v = \sum_1^n \frac{\partial y_v}{\partial x_j} u^{(j)}.$$

Dalle (13) stesse, cambiando  $d$  in  $\delta$ , per atterrarsi alla notazione abituale degli spostamenti virtuali (nonchè  $j$  in  $k$ ), si ha

$$(15) \quad \delta y_v = \sum_1^n \frac{\partial y_v}{\partial x_k} \delta x_k.$$

Possediamo oramai tutti gli elementi per definire (lumeggiandone la genesi) il trasporto  $P, V_n$  <sup>(4)</sup> di una direzione  $u$  da un punto generico  $P$  ad un punto vicinissimo  $P_1$ .

#### IX.

##### Estensione della nozione di parallelismo.

##### Consequenti formule e principali proprietà.

Per definire il parallelismo relativo ad una  $V_2$ , cioè ad una superficie  $\sigma$  dello spazio ordinario, abbiamo preso le mosse dalla considerazione della sviluppabile circoscritta a  $\sigma$  lungo una linea  $T$ .

<sup>(4)</sup> Dico brevemente  $P, V_n$  anzichè « per parallelismo relativo a  $V_n$  ».

Per le  $V_n$  manca un criterio analogo, poichè gli  $\infty^1$  spazi lineari (a  $n$  dimensioni) di  $S_N$  tangenti ad una  $V_n$  lungo una linea  $T$  non costituiscono in generale (per  $N > n + 1$ ) una varietà sviluppabile.

È invece immediatamente adattabile anche alle  $V_n$  la legge differenziale del parallelismo espressa dalla (1), cioè (n. 3) la seguente condizione geometrica: *la parallela  $u_1$  ad  $u$ , spiccata da un punto  $P_1$  vicinissimo a  $P$  deve formare (a meno di infinitesimi d'ordine superiore al primo) lo stesso angolo di  $u$  con ogni direzione tangenziale  $\tau$  (si vuol dire situata in  $V_n$ ) uscente da  $P$ .*

Detti  $dx_v$  gli incrementi (incogniti) dei coseni direttori della direzione da trasportare per  $P, V_n$ , e  $\tau_v$  i coseni direttori di una qualsiasi direzione tangenziale, la condizione angolare testè annunciata equivale a

$$\sum_1^N dx_v \cdot \tau_v = 0.$$

Ove si osservi, come al n. 4, che le direzioni  $\tau$  sono tutte e sole quelle conciliabili coi vincoli (11), appare manifesto (sostituendo alle  $\tau_v$  delle quantità proporzionali, quali sono le componenti  $\delta y_v$  di uno spostamento conciliabile coi medesimi vincoli) che si può ulteriormente assumere per definizione di parallelismo la equazione simbolica

$$(16) \quad \sum_1^N dx_v \cdot \delta y_v = 0,$$

valida per tutti gli spostamenti virtuali.

La formula è, come si vede, perfettamente analoga alla (2) che definisce il parallelismo superficiale: basta mandare l'indice  $\nu$  da 1 ad  $N$ , anziché da 1 a 3. E pure perfettamente analoghe alle (5), (6) sono le espressioni (14) e (15) delle  $\alpha_\nu$  e delle  $\delta y_\nu$  (colla sola differenza che l'indice di sommatoria va da 1 ad  $n$ , anziché semplicemente da 1 a 2). Tutti i calcoli successivi procedono automaticamente come al n. 6, e si è in definitiva condotti alle equazioni intrinseche del parallelismo, le quali definiscono gli incrementi  $du^{(i)}$  dei parametri di direzione, quando si passa per  $P$ ,  $V_n$  da  $P$  a  $P_1$ , sotto la forma

$$(I) \quad du^{(i)} + \sum_1^n \left\{ \begin{matrix} j l \\ i \end{matrix} \right\} u^{(j)} dx_l = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

che è, si può dire, identica a quella — formule (7) — già stabilita per le  $V_2$ , differendone materialmente solo per il numero delle dimensioni: va da sè che  $\left\{ \begin{matrix} j l \\ i \end{matrix} \right\}$  designano i simboli di Christoffel di seconda specie formati col  $ds^2$  della  $V_n$ .

Dalla (I) si passa ovviamente sia alle equazioni differenziali di un trasposto  $P$ ,  $V_n$  lungo un'assegnata curva  $T$ , sia al trasporto per equipollenza di vettori qualunque (non unitari). Il sistema differenziale lineare corrispondente, generalizzazione di (7'), cioè

$$(I') \quad \frac{du^{(i)}}{ds} + \sum_1^n \left\{ \begin{matrix} j l \\ i \end{matrix} \right\} u^{(j)} x'_l = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

è riducibile ad una forma tipica detta a determinante gobbo, che già si è presentata in altre ricerche di cinematica e di dinamica e fu oggetto di studio sistematico da parte dei signori Eiesland <sup>(1)</sup>, Laura <sup>(2)</sup>, Darboux <sup>(3)</sup>, Vessiot <sup>(4)</sup>.

Lo studio diretto del sistema (I) (e del suo aggiunto) conduce agevolmente a dimostrare per via analitica quelle proprietà del parallelismo entro una  $V_n$ , che, nel caso di una  $V_2$ , discendono direttamente dalla originaria definizione geometrica: conservazione degli angoli (quando più direzioni si trasportano lungo un medesimo cammino); conservazione delle lunghezze di vettori; autoparallelismo delle geodetiche; ecc. A titolo di esempio verificherò l'autoparallelismo, rimandando per resto ai § 5-6 della memoria già citata al n. 7.

Ricordo che le equazioni (del secondo ordine) le quali definiscono tutte le possibili geodetiche delle nostra  $V_n$  (cioè le curve per cui  $\delta ds = 0$ ) sono

$$x_i'' + \sum_1^n \left\{ \begin{matrix} j l \\ i \end{matrix} \right\} x_j' x_l' = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

fungendo, ben s'intende, da variabile indipendente

<sup>(1)</sup> American Journal of Math., vol. XXVIII (1906), pp. 17-42.

<sup>(2)</sup> Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XLII (1906-1907), pp. 1089-1108; vol. XLIII (1907-1908), pp. 358-378.

<sup>(3)</sup> Comptes Rendus, t. CXLVIII (premier semestre 1909), pp. 16-22, 673-679, 745-754.

<sup>(4)</sup> Ibidem, pp. 332-335.

l'arco  $s$ . Confrontate colle (I'), esse ci mostrano che, se si assume per curva di trasporto  $T$  una generica geodetica, le (I') stesse rimangono soddisfatte da  $u^{(i)} = x_i'$ . Questo significa appunto che ogni geodetica si mantiene parallela a sè stessa, o, in forma più precisa, che la direzione di una geodetica in un suo punto qualsiasi è sempre parallela alla direzione iniziale, c. d. d.

X.

#### Teorema di Severi.

Dati  $P, P_i$  ed  $u$ , consideriamo in  $V_n$  la giacitura individuata dalle due direzioni (che supponiamo distinte)  $PP_i$  ed  $u$ , e la superficie geodetica  $\gamma$  di polo  $P$  tangente a questa giacitura. La  $u$  si può trasportare da  $P$  a  $P_i$  sia per parallelismo ambientale, voglio dire relativo alla  $V_n$ , sia anche per parallelismo superficiale sopra la  $\gamma$ . Severi ha stabilito il risultato notevole che si perviene nei due modi alla stessa direzione. Si può rendersene conto senza alcun calcolo notando in primo luogo che la coincidenza sussiste certo allorchè la varietà  $V_n$  è euclidea, e quindi  $\gamma$  si riduce al piano determinato dalle due direzioni  $PP_i$  ed  $u$ . Se poi la varietà  $V_n$  è qualunque, immaginiamo di riferirla ad un sistema di *coordinate geodetiche di*

polo  $P$  <sup>(1)</sup>: si ha allora, in  $P$ ,  $\left\{ \begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix} \right\}$  eguale a zero, e tanto le equazioni del parallelismo, quanto quelle delle geodetiche spiccate da  $P$  si riducono, in  $P$ , alla forma elementare che loro compete per una varietà euclidea. Siccome le parallele ad  $u$  per  $P_i$ , sia quella ambientale che quella relativa alla superficie geodetica  $\gamma$ , si trovano in definitiva a dipendere dalle equazioni del parallelismo e delle geodetiche, con valori delle  $\left\{ \begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix} \right\}$  nel solo punto  $P$ , così la coincidenza delle due parallele, evidente per le  $V_n$  euclidee, vale senz'altro per ogni  $V_n$ , c. d. d.

XI.

#### Alcune formule.

Siano  $q_1, q_2$  variabili (reali) indipendenti,  $C$  un loro campo (finito) qualsiasi,  $T$  il relativo contorno,  $f(q_1, q_2)$  una funzione finita e continua in  $C$  ( $T$  in-

<sup>(1)</sup> Si designano notoriamente con tale nome quei sistemi di coordinate curvilinee  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , che, nell'immediata prossimità di  $P$ , si comportano, di fronte alla metrica della  $V_n$ , cioè al suo  $ds^2$ , come le coordinate cartesiane, rendendo i coefficienti  $a_{ik}$  (non rigorosamente costanti, perchè questo in generale non è possibile, ma) stazionari in  $P$ , cioè tali che si annullano in  $P$  tutte le derivate  $\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l}$  e quindi anche i simboli di Christoffel, sia di prima che di seconda specie.



cluso) assieme alle sue derivate prime. Valgono notoriamente le seguenti formule di trasformazione fra integrali semplici e doppi:

$$(17) \iint_{\sigma} \frac{\partial f}{\partial q_1} dq_1 dq_2 = \int_T f dq_2, \quad \iint_{\sigma} \frac{\partial f}{\partial q_2} dq_1 dq_2 = - \int_T f dq_1,$$

purchè sia fissato in modo opportuno il senso di percorrenza sul contorno. Di solito si interpretano  $q_1, q_2$  come coordinate cartesiane di un piano rappresentativo, e il senso si individua colla convenzione seguente: detta  $n$  la direzione della normale volta all'interno di  $C$ , il verso di percorrenza deve essere tale da formare con  $n$  una coppia congruente (nel piano) colla coppia degli assi coordinati  $q_1, q_2$ . Se si vuole, si possono eliminare gli assi, sostituendo un criterio locale equivalente, e precisamente quello fornito dalle due linee  $q_2 = \text{cost.}$ ,  $q_1 = \text{cost.}$ , spiccate da un punto generico del contorno e orientate nel senso in cui cresce il parametro ( $q_1$  o rispettivamente  $q_2$ ). Questa convenzione per fissare il senso sul contorno ha sulla prima il vantaggio che consente di interpretare  $q_1, q_2$  anche come generiche coordinate curvilinee, non solo nel piano, ma addirittura sopra una qualsiasi superficie o varietà  $V_2$ , cui si assegni una metrica a piacere: le eguaglianze numeriche (17) seguitano naturalmente a sussistere,  $C$  designando un campo del continuo  $q_1, q_2$ , e quindi di  $V_2$ , e  $T$  il relativo contorno su cui rimane determinato il verso di percorrenza in base al suaccennato criterio.

Un altro richiamo che ci sarà utile quanto prima si riferisce all'elemento d'area d'una varietà a due dimensioni, che si supponga immersa in una  $V_n$  la cui metrica sia al solito caratterizzata dal suo

$$ds^2 = \sum_{i,k}^1 a_{ik} dx_i dx_k.$$

Supponiamo in modo preciso che si tratti di una superficie (o pezzo di superficie)  $\sigma$  di  $V_n$ , definita parametricamente da equazioni della forma

$$(18) \quad x_i = x_i(q_1, q_2) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Se a partire da un punto generico  $P$  di  $\sigma$  (cioè da una coppia qualunque di valori di  $q_1, q_2$ ) si fa variare solo  $q_1$ , attribuendogli un incremento infinitesimo  $dq_1$ , ci si sposta sopra la linea  $q_2 = \text{cost.}$  della superficie  $\sigma$ , e si hanno subordinatamente per le  $x_i$  incrementi del tipo

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} dq_1;$$

in modo analogo, se si fa variare solo  $q_2$ , ci si sposta sopra la linea  $q_1 = \text{cost.}$ , e si ha un secondo spostamento infinitesimo corrispondente agli incrementi

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_2} dq_2.$$

In base alla espressione fondamentale del  $ds^2$ , le lunghezze  $ds$  e  $\delta s$  dei due spostamenti sono date

rispettivamente da

$$ds = \rho_1 dq_1, \quad \delta s = \rho_2 dq_2,$$

avendo posto per brevità

$$(19) \quad \rho_1^2 = \sum_1^n a_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \frac{\partial x_k}{\partial q_1}, \quad \rho_2^2 = \sum_1^n a_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \frac{\partial x_k}{\partial q_2}$$

e convenendo di attribuire a  $\rho_1, \rho_2$  gli stessi segni di  $dq_1$  e  $dq_2$  rispettivamente.

Quanto ai loro parametri che sono per definizione  $\xi^{(i)} = \frac{dx_i}{ds}, \eta^{(i)} = \frac{\delta x_i}{\delta s}$ , sostituendo a  $dx_i, \delta x_i, ds, \delta s$  i valori testè scritti, abbiamo senz'altro

$$(20) \quad \xi^{(i)} = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial x_i}{\partial q_1}, \quad \eta^{(i)} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

In base alla metrica di  $V_n$ , le due direzioni di parametri  $\xi^{(i)}, \eta^{(i)}$  — o come diremo brevemente (con ovvia estensione della notazione usata nei primi §), le due direzioni  $\xi, \eta$  — formano tra di loro un angolo  $\vartheta$  notoriamente definito da

$$\cos \vartheta = \sum_1^n a_{ik} \xi^{(i)} \eta^{(k)}.$$

Anche nella metrica subordinata sulla superficie  $\sigma$  dal  $ds^2$  di  $V_n$  vale la medesima determinazione per l'angolo delle due direzioni, e sarebbe facile trasformare la precedente espressione di  $\cos \vartheta$ , facendovi apparire solo elementi intrinseci, perti-

nenti alla metrica di  $\sigma$ . Ma a noi non occorre esplicitare; ci basta la nozione geometrica, mercè cui si esprime (nel modo più conveniente per gli sviluppi che seguono) l'area infinitesima  $\Delta\sigma$  del quadrangolo determinato sulla superficie da due coppie di linee coordinate  $q_1 = \text{cost.}, q_2 = \text{cost.}$  infinitamente vicine. Un tale quadrangolo è assimilabile ad un parallelogrammo di latercoli  $ds, \delta s$  inclinati l'uno sull'altro dell'angolo  $\vartheta$ ; perciò la sua area è misurata da  $ds \cdot \delta s \sin \vartheta$ , e si può quindi ritenere (sostituendo a  $ds, \delta s$  i valori precedenti)

$$(21) \quad \Delta\sigma = \rho_1 \rho_2 \sin \vartheta dq_1 dq_2.$$

## XII.

### Trasporto ciclico di una direzione.

#### Caso di un ciclo infinitesimo.

#### Divario angolare. Formula di Pérès.

Il signor Schouten <sup>(1)</sup>, coi suoi metodi vettoriali, e, indipendentemente da lui, con ordinari sviluppi di calcolo, il signor Pérès <sup>(2)</sup> hanno messo in evi-

<sup>(1)</sup> *Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie*, Verhandelingen der K. Ak. von Wet. te Amsterdam, 1919, Deel XII, n. 6; cfr. in particolare le pp. 67-71.

<sup>(2)</sup> *Le parallélisme de M. Levi-Civita et la courbure riemannienne*, Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XXVII (primo sem. 1919), pp. 425-428.

denza l'importanza che presenta, per la caratterizzazione delle proprietà geometriche di una  $V_n$ , il trasporto di una direzione lungo un ciclo chiuso; in particolare, per lo studio delle proprietà locali in un punto generico  $P$ , la considerazione dei cicli infinitesimi. Mi atterrò alla trattazione di Pérès, con lieve modificazione nello sviluppo del calcolo.

Sia  $u$ , di parametri  $u^{(r)}$  ( $r=1, 2, \dots, n$ ) la direzione che si tratta di trasportare, lungo un ciclo qualunque  $T$  che parte da  $P$  e torna in  $P$ . Designando con  $dx_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) i differenziali delle coordinate corrispondenti a un generico elemento  $dT$  del ciclo, nel trasporto elementare  $P, V_n$  lungo  $dT$  le  $u^{(r)}$  subiscono, a norma delle (I), incrementi che (con materiale cambiamento nella designazione degli indici di sommatoria) si scrivono

$$du^{(r)} = - \sum_1^n \left\{ \begin{matrix} i & k \\ i & k \\ r \end{matrix} \right\} u^{(i)} dx_k \quad (r=1, 2, \dots, n).$$

Gli incrementi totali  $\Delta u^{(r)}$  relativi all'intero ciclo cioè le differenze  $\bar{u}^{(r)} - u_P^{(r)}$  fra i valori in arrivo  $\bar{u}^{(r)}$  e i valori in partenza  $u_P^{(r)}$ , saranno espressi in conformità da

$$(22) \quad \Delta u^{(r)} = - \int_T \sum_1^n \left\{ \begin{matrix} i & k \\ i & k \\ r \end{matrix} \right\} u^{(i)} dx_k \quad (r=1, 2, \dots, n).$$

Giova in primo luogo trasformare i secondi membri, immaginando di far passare per  $T$  una (qualunque) calotta superficiale  $\sigma$  di cui la curva chiusa  $T$  costituisca il contorno completo. La rap-

presentazione parametrica di questa  $\sigma$  sia fornita dalle (18), essendo  $C$  (cfr. n. precedente) il campo di variabilità dei due parametri  $q_1, q_2$ . Sopra  $\sigma$  (e subordinatamente anche sul suo contorno  $T$ ) si ha, in forza delle (18),

$$(18') \quad dx_k = \frac{\partial x_k}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x_k}{\partial q_2} dq_2,$$

talchè, posto per brevità

$$Q_1^{(r)} = - \sum_1^n \left\{ \begin{matrix} i & k \\ i & k \\ r \end{matrix} \right\} u^{(i)} \frac{\partial x_k}{\partial q_1}, \quad Q_2^{(r)} = - \sum_1^n \left\{ \begin{matrix} i & k \\ i & k \\ r \end{matrix} \right\} u^{(i)} \frac{\partial x_k}{\partial q_2},$$

l'espressione di  $\Delta u^{(r)}$  si presenta sotto la forma

$$(22') \quad \Delta u^{(r)} = \int_T (Q_1^{(r)} dq_1 + Q_2^{(r)} dq_2).$$

Importa notare che le  $u^{(r)}$ , di cui supponiamo assegnati in  $P$  i valori iniziali  $u_P^{(r)}$ , rimangono definite dal trasporto per parallelismo in ogni punto della linea  $T$ ; per l'interno del campo  $C$  limitato da  $T$ , occorre procedere con cautela. In generale, non essendo le equazioni di parallelismo illimitatamente integrabili, i valori delle  $u^{(r)}$  in un punto  $Q$  di  $C$  (dedotti per parallelismo a partire da  $u_P^{(r)}$ ) dipendono da  $Q$  e dal cammino che lo collega a  $P$ . Tuttavia, se il campo  $C$  è infinitesimo, e se conveniamo in conformità di trascurare gli infinitesimi di secondo ordine (rispetto alla massima dimensione del campo), le cose vanno come se si trattasse di differenziali esatti.

Infatti, in tal caso, i divari fra le coordinate (superficiali)  $q_1, q_2$  di  $P$  e quelle del punto generico  $Q$  di  $C$  possono presentarsi sotto la forma  $dq_1, dq_2$ , da trattarsi come quantità infinitesime. Per le (18'), lo stesso avviene pei divari  $dx_k$  fra le coordinate dei due punti nella  $V_n$ . Si hanno allora per le  $u^{(r)}$ , in  $Q$ , le determinazioni  $u^{(r)Q}$  provenienti dal trasporto elementare  $P, V_n$ , a partire da  $P$ , cioè  $u^{(r)} + du^{(r)}$ , dovendosi, ben s'intende, nelle  $du^{(r)}$ , attribuire alle  $u^{(j)}$  e ai simboli di Christoffel le loro determinazioni in  $P$ .

In quest'ordine di approssimazione, le  $u^{(j)Q}$  sono pertanto assimilabili a funzioni uniformi del punto  $Q$  (anzi addirittura lineari nelle  $dq_1, dq_2$ ), finite e continue assieme alle loro derivate prime rapporto a  $q_1, q_2$ . Siamo pertanto autorizzati nel caso di un campo  $C$  infinitesimo, a riguardare come funzioni del posto (finite e continue assieme alle loro derivate rapporto a  $q_1, q_2$ ) anche le  $Q_1^{(r)}, Q_2^{(r)}$  che compariscono nell'integrale curvilineo (22). D'altra parte, ogni qualvolta le funzioni  $Q_1^{(r)}, Q_2^{(r)}$  rientrano nell'ambito suaccennato, sono applicabili le formule (17), e possiamo sostituire nella (22), all'integrale di contorno, un'integrale esteso al campo  $C$ , ottenendo

$$(22'') \quad \Delta u^{(r)} = \iint_C dq_1 dq_2 \left[ \frac{\partial Q_1^{(r)}}{\partial q_2} - \frac{\partial Q_2^{(r)}}{\partial q_1} \right].$$

Nel calcolo delle derivate delle  $Q$  rapporto a  $q_1$  e a  $q_2$ , bisogna tener presente che i simboli di Christoffel dipendono dalle  $q$  pel tramite delle  $x$  — e quindi delle equazioni (18) — mentre le deri-

vate delle  $u^{(j)}$  sono fornite dalle equazioni di parallelismo (I), riferite, come si vide, al punto  $P$ . Sottointendendo questa specificazione, riscriviamo le (I) nella forma

$$du^{(i)} = - \sum_1^n \left\{ \begin{matrix} l h \\ i \end{matrix} \right\} u^{(l)} dx_h.$$

Di qui, se si fa variare la sola  $q_1$ , si ha

$$\frac{\partial u^{(i)}}{\partial q_1} = - \sum_1^n \left\{ \begin{matrix} l h \\ i \end{matrix} \right\} u^{(l)} \frac{\partial x_h}{\partial q_1},$$

mentre una analoga si ricava facendo variare la sola  $q_2$ . Adottando questi valori per le derivate delle  $u^{(i)}$ , e sottointendendo per uniformità di riferir tutto a  $P$  (a derivazione eseguita), si trova materialmente

$$\begin{aligned} - \frac{\partial Q_2^{(r)}}{\partial q_1} &= \sum_1^n \frac{\partial}{\partial q_1} \left\{ \begin{matrix} i k \\ r \end{matrix} \right\} u^{(i)} \frac{\partial x_k}{\partial q_2} + \\ &+ \sum_1^n \left\{ \begin{matrix} i k \\ r \end{matrix} \right\} \frac{\partial u^{(i)}}{\partial q_1} \frac{\partial x_k}{\partial q_2} + \\ &+ \sum_1^n \left\{ \begin{matrix} i k \\ r \end{matrix} \right\} u^{(i)} \frac{\partial^2 x_k}{\partial q_1 \partial q_2} = \\ &= \sum_1^n \frac{\partial}{\partial q_1} \left\{ \begin{matrix} i k \\ r \end{matrix} \right\} \frac{\partial x_k}{\partial q_2} u^{(i)} \frac{\partial x_h}{\partial q_1} - \\ &- \sum_1^n \left\{ \begin{matrix} i k \\ r \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l h \\ i \end{matrix} \right\} u^{(l)} \frac{\partial x_h}{\partial q_1} \frac{\partial x_k}{\partial q_2} + \\ &+ \sum_1^n \left\{ \begin{matrix} i k \\ r \end{matrix} \right\} u^{(i)} \frac{\partial^2 x_k}{\partial q_1 \partial q_2}, \end{aligned}$$

od anche, scambiando nel secondo sommatorio  $i$  con  $l$  e raccogliendo a fattore  $u^{(i)} \frac{\partial x_h}{\partial q_1} \frac{\partial x_k}{\partial q_2}$ ,

$$-\frac{\partial Q_2^{(r)}}{\partial q_1} = \sum_1^n \{i h k\} u^{(i)} \frac{\partial x_h}{\partial q_1} \frac{\partial x_k}{\partial q_2} \left[ \frac{\partial \{i k\}_r}{\partial x_h} - \sum_1^n \{i h\}_l \{l k\}_r \right] + \sum_1^n \{i k\}_r u^{(i)} \frac{\partial^2 x_h}{\partial q_1 \partial q_2}.$$

Per avere l'espressione di  $-\frac{\partial Q_1^{(r)}}{\partial q_2}$ , basta manifestamente scambiare  $q_1$  con  $q_2$  nel secondo membro ora scritto; converrà inoltre (il che altera soltanto l'aspetto formale) scambiare fra loro, nel primo sommatorio,  $h$  con  $k$ . Con ciò nella differenza

$$\frac{\partial Q_1^{(r)}}{\partial q_2} - \frac{\partial Q_2^{(r)}}{\partial q_1}$$

gli ultimi addendi si elidono, e nei primi si può raccogliere a fattore comune  $u^{(i)} \frac{\partial x_h}{\partial q_1} \frac{\partial x_k}{\partial q_2}$ . Ove si ricordi la definizione dei simboli di Riemann di seconda specie,

$$\{i r, h k\} = \frac{\partial \{i h\}_r}{\partial x_k} - \frac{\partial \{i k\}_r}{\partial x_h} + \sum_1^n \left[ \{i h\}_l \{l k\}_r - \{i k\}_l \{l h\}_r \right],$$

risulta

$$\frac{\partial Q_1^{(r)}}{\partial q_2} - \frac{\partial Q_2^{(r)}}{\partial q_1} = - \sum_1^n \{i r, h k\} u^{(i)} \frac{\partial x_h}{\partial q_1} \frac{\partial x_k}{\partial q_2}.$$

Sfruttiamo ulteriormente l'ipotesi che tutto il nostro calcolo concerne un campo  $C$  infinitesimo, e riduciamo in conformità l'integrale che compare nel secondo membro della (22'') ad un unico elemento circostante al punto  $P$ . Dacchè già ci siamo procurata l'espressione esplicita della funzione sotto il segno,  $\frac{\partial Q_1^{(r)}}{\partial q_2} - \frac{\partial Q_2^{(r)}}{\partial q_1}$ , in  $P$ , avremo manifestamente (a meno di infinitesimi d'ordine superiore all'elemento  $dq_1 dq_2$ ):

$$(23) \quad \Delta u^{(r)} = - dq_1 dq_2 \sum_1^n \{i r, h k\} u^{(i)} \frac{\partial x_h}{\partial q_1} \frac{\partial x_k}{\partial q_2}.$$

Giova far apparire sotto il sommatorio i simboli di Riemann di prima specie  $a_{ij, hk}$ , legati a quegli di seconda dalle relazioni

$$\{i r, h k\} = \sum_1^n a^{(r)j} a_{ij, hk}.$$

Introducendo questa espressione nella (23), ove si tenga conto delle formule (20) e (21) del numero precedente, si ricava in definitiva

$$(23') \quad \Delta u^{(r)} = - \frac{\Delta \sigma}{\sin \vartheta} \sum_1^n \{i j h k\} a^{(r)j} a_{ij, hk} u^{(i)} \xi^{(h)} \eta^{(k)}.$$

Tale è dunque l'incremento subito dai parametri  $u^{(r)}$  di una direzione generica  $u$ , per trasporto  $P, V_n$  lungo un ciclo infinitesimo che comincia e termina in  $P$ . Nella (23'), l'influenza del ciclo di trasporto figura pel tramite di tre elementi geometrici che valgono sostanzialmente a caratterizzare il ciclo stesso, e sono: due direzioni  $\xi, \eta$  (a priori qualunque) che determinano la giacitura su cui si suppone tracciato il ciclo, e con esse l'angolo compreso  $\vartheta$ ; l'area  $\Delta\sigma$  del ciclo stesso (misurata secondo la metrica di  $V_n$ ).

Dalla (23') si ricava immediatamente la formula fondamentale che serve al collegamento fra parallelismo e curvatura. Si considera all'uopo una (quarta) direzione qualsiasi  $v$ , spiccata da  $P$ , di parametri  $v^{(i)}$ . Occupiamoci dell'angolo  $\alpha$  fra  $u$  e  $v$ , anzi della variazione che subisce il suo coseno quando  $u$  si trasporta per parallelismo lungo il nostro ciclo.

Ponendo per brevità

$$v_r = \sum_1^n a_{ri} v^{(i)}$$

(con che le  $v_r$  sono i cosiddetti momenti della direzione  $v$ ), la formula, richiamata anche al numero precedente, che definisce il coseno dell'angolo di due direzioni, dà intanto, per una generica determinazione di  $u$ ,

$$\cos \alpha = \sum_1^n u^{(r)} v_r.$$

Considerando successivamente la determinazione (arbitraria) di partenza e quella di arrivo, e sottraendo, si ricava

$$\Delta \cos \alpha = \sum_1^n \Delta u^{(r)} \cdot v_r.$$

Introducendo per le  $\Delta u^{(r)}$  le espressioni (23') e notando che  $\sum_1^n a^{(rj)} v_r$  altro non è che il parametro  $v^{(j)}$ , si ha in definitiva la formula di Pèrès

$$(24) \quad \frac{\Delta \cos \alpha}{\Delta \sigma} = - \frac{\sum_1^n a_{ijhk} a_{ij, hk} u^{(i)} v^{(j)} \xi^{(h)} \eta^{(k)}}{\sin \vartheta},$$

$\vartheta$  essendo l'angolo fra  $\xi$  ed  $\eta$ .

### XIII.

#### Relazioni fra parallelismo e curvatura.

Dalla definizione dei simboli di Riemann risulta immediatamente

$$\{ir, hk\} = - \{ir, kh\}$$

e per conseguenza

$$a_{ij, hk} = - a_{ij, kh}.$$

Dalla formula di Pérès si potrebbero poi dedurre senza calcoli le relazioni

$$\begin{aligned} a_{ij, hk} &= -a_{ji, hk}; \\ a_{ij, hk} + a_{ih, kj} + a_{ik, jh} &= 0, \end{aligned}$$

che, combinate colle precedenti, esauriscono sostanzialmente le proprietà algebriche dei simboli di Riemann, portando come conseguenza le ulteriori identità

$$a_{ij, hk} = a_{hk, ij} \quad (^1).$$

Non mi soffermo su questo punto, accontentandomi di notare che, se si scambiano le due direzioni  $u$  e  $v$ , il secondo membro cambia segno, e quindi anche  $\Delta \cos \alpha$ , il che non è geometricamente evidente. Come corollario risulta che, per  $v$  coincidente con  $u$ ,  $\Delta \cos \alpha = 0$ ; e questo era evidente a priori, inquantochè, a meno di infinitesimi d'ordine superiore,  $\Delta \cos \alpha = -\sin \alpha \Delta \alpha$ , essendo  $\alpha$  la determinazione dell'angolo in partenza, e quindi, nel caso presente, 0.

Passiamo ad illustrare l'importanza fondamentale della (24) in relazione alla curvatura della nostra  $V_n$ . Cominciamo dal caso elementare delle superficie,  $n=2$ . In questo caso è ben noto che i simboli di Riemann, in virtù delle richiamate re-

(<sup>1</sup>) Cfr. RICCI, *Sulla determinazione di varietà dotate di proprietà intrinseche date a priori*. Nota seconda, Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XIX (secondo semestre 1910), pag. 86.

lazioni, si annullano, oppure si riducono all'unico schema  $a_{12, 12}$ . È pure ben noto che, se si introduce il discriminante della forma che esprime il  $ds^2$ , cioè, se si pone

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

si ha, per la curvatura gaussiana  $K$  della corrispondente  $V_2$ ,

$$K = \frac{a_{12, 12}}{a}.$$

D'altra parte la (24), facendo coincidere la coppia di direzioni  $\xi, \eta$  con  $u, v$ , e quindi  $\vartheta$  con  $\alpha$ , si riduce a

$$\frac{\Delta \cos \alpha}{\Delta \sigma} = -\frac{a_{12, 12}}{\sin \alpha} \begin{vmatrix} u^{(1)} & u^{(2)} \\ v^{(1)} & v^{(2)} \end{vmatrix}^2.$$

Ora si noti che il prodotto dei due determinanti

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} u^{(1)} & u^{(2)} \\ v^{(1)} & v^{(2)} \end{vmatrix}$$

fatto per righe dà luogo al determinante

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

essendo le  $u_i = \sum_1^2 a_{ik} u^{(k)}$ ,  $v_i = \sum_1^2 a_{ik} v^{(k)}$  i momenti delle due direzioni  $u, v$ . Moltiplicando questo

nuovo determinante ancora per

$$\begin{vmatrix} u^{(1)} & u^{(2)} \\ v^{(1)} & v^{(2)} \end{vmatrix}$$

sempre per righe, e badando alle tre identità

$$\sum_1^2 u_i u^{(i)} = 1, \quad \sum_1^2 v_i v^{(i)} = 1,$$

$$\sum_1^2 u_i v^{(i)} = \sum_1^2 u^{(i)} v_i = \cos \alpha,$$

si riconosce infine che

$$a \begin{vmatrix} u^{(1)} & u^{(2)} \\ v^{(1)} & v^{(2)} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos \alpha \\ \cos \alpha & 1 \end{vmatrix} = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha,$$

talchè, per essere a meno di infinitesimi d'ordine superiore,  $\Delta \cos \alpha = -\sin \alpha \Delta \alpha$ , risulta infine

$$(25) \quad \frac{\Delta \alpha}{\Delta \sigma} = \frac{a_{12, 12}}{a} = K,$$

che porge una interpretazione sostanzialmente nota della curvatura gaussiana di una superficie, dando luogo all'enunciato seguente: sopra una superficie qualsiasi, si trasporti per parallelismo una direzione generica  $u$  spiccata da un punto  $P$ , lungo un ciclo chiuso; sia  $\Delta \sigma$  l'area del ciclo,  $\Delta \alpha$  l'angolo fra le due determinazioni di  $u$  in partenza e in arrivo; la curvatura  $K$  in  $P$  è espressa dal rapporto  $\frac{\Delta \alpha}{\Delta \sigma}$ .

Ho detto che si tratta di proposizione sostanzialmente nota perchè, se si considera in particolare come ciclo chiuso un triangolo geodetico (infinitesimo), si è ricondotti ad un celebre teorema di Gauss sui triangoli geodetici e sulla curvatura integra, anzi al caso limite in cui si tratta di un triangolo infinitesimo.

Passiamo ora al caso di una  $V_n$  qualsiasi. Fissate a piacimento  $u, v$ , consideriamo in particolare la giacitura che le contiene, e la superficie geodetica  $\gamma$  di polo  $P$  tangente a questa giacitura. Prendendo qui ancora  $\xi, \eta$  coincidenti con  $u, v$ , e notando che, per il teorema di Severi, lungo il nostro ciclo infinitesimo, le parallele ad  $u$  in  $V_n$  sono anche parallele sopra  $\gamma$ , si riconosce che  $\frac{\Delta \alpha}{\Delta \sigma}$  rappresenta la curvatura  $K$  di  $\gamma$  in  $P$ , e la formula (24) dà

$$(26) \quad K = \frac{\Delta \alpha}{\Delta \sigma} = \frac{\sum_1^n a_{ij, hk} a_{ij, hk} u^i v^j u^h v^k}{\sin^2 \alpha}.$$

In base alla definizione di Riemann, questa  $K$  è anche la curvatura della  $V_n$  secondo la giacitura  $u, v$ . D'altra parte, il parallelismo lungo il ciclo si può riferire direttamente alla  $V_n$  ambiente, e se ne ricava, sotto la forma  $\frac{\Delta \alpha}{\Delta \sigma}$  (svincolata dalla superficie geodetica ausiliaria), una espressiva interpretazione della curvatura  $K$ . Dalla simmetria del secondo membro della (26) rispetto ad  $u, v$  si desume tosto che, se si trasporta  $v$ , anzichè  $u$ ,



lungo lo stesso cielo, la variazione dell'angolo (fra  $u$  e le due determinazioni di  $v$  in partenza e in arrivo) è ancora  $\Delta\alpha$ .

Queste considerazioni fanno comprendere come, dal punto di vista metodologico, conviene assumere per misura della curvatura spettante ad una  $V_n$  in un suo punto generico e secondo una giacitura pure generica, il rapporto  $\frac{\Delta\alpha}{\Delta\sigma}$ ; la definizione ordinaria ne segue poi senza alcun calcolo.

Per maggiori sviluppi debbo limitarmi a rimandare al Cap. VII delle mie *Lezioni di calcolo differenziale assoluto* (redatte dal dott. Persico), già citate a pag. 114.

---

L'OTTICA GEOMETRICA  
E LA RELATIVITÀ GENERALE DI EINSTEIN

Nei primi mesi del corrente anno (1920) si conobbero i risultati delle osservazioni istituite in occasione dell'eclisse del 29 maggio 1919, allo scopo di misurare l'incurvamento tenuissimo — diremo *deflessione*, seguendo gli astronomi inglesi — che, secondo la relatività generale di Einstein, devono subire i raggi di luce provenienti dalle stelle quando passino nelle vicinanze del Sole.

La deflessione effettivamente constatata fu conforme alle previsioni della teoria, costituendone così una prova sperimentale, in certo senso anche più brillante, se non più decisiva, di quelle già offerte dalla spiegazione dell'esito negativo dell'esperienza di Michelson, del trascinamento parziale di Fresnel e dello spostamento secolare del perielio di Mercurio. In questi ultimi casi si tratta infatti di render ragione di fenomeni già osservati (per quanto indarno investigati al lume degli ordinari principî di meccanica), mentre la deflessione dei raggi è un fatto nuovo, enunciato prima dalla teoria e poi suffragato dall'esperienza. Forse per questa ragione l'interesse suscitato nei com-

petenti dalle memorabili scoperte dell'Einstein <sup>(1)</sup>, cominciò a diffondersi in tutti gli ambienti scientifici solo in seguito alla conferma astronomica dell'incurvamento dei raggi stellari; ed ebbe pronta ripercussione in un pubblico più largo.

Presupporrò nei lettori unicamente la conoscenza della meccanica classica, mirando a far intendere lo spirito del risultato finale e della sua deduzione quantitativa, senza intrattenermi sulle formule generali che racchiudono la teoria di Einstein, nè cercare di surrogarle — impresa ardua e comunque non costringibile in poche pagine — con una volgarizzazione adeguata.

Parecchi scritti sono stati naturalmente dedicati all'argomento in libri e periodici: qualcuno avrà occasione di citarne; degli altri mi limito a segnalare l'eccellente memoria del Palatini, *Lo spostamento del perielio di Mercurio e la deviazione dei raggi luminosi* (Nuovo Cimento, luglio 1917, pp. 12-54) da cui il presente articolo si differenzia perchè mira ad illustrare soltanto il fenomeno ottico col minimo sforzo.

---

<sup>(1)</sup> È doveroso il rilevare che Einstein trovò la necessaria base matematica per la sua relatività generale nel calcolo differenziale assoluto, creato ed elaborato nell'ultimo trentennio dal Prof. G. RICCI, dell'Università di Padova. Un esempio altrettanto cospicuo di speculazioni astratte, divenute in un dato momento essenziali al progresso della filosofia naturale, si ha forse soltanto nella teoria delle coniche di Apollonio, che rese possibile la scoperta delle leggi di Kepler.

I.

**Richiami d'ottica geometrica  
secondo lo schema classico.**

1. *Generalità. Legge di rifrazione. Principio di Fermat.* — In un mezzo trasparente, omogeneo, la luce si propaga notoriamente in linea retta con velocità costante. Nel caso dell'isotropia, cui esclusivamente ci riferiremo, la velocità è sempre la stessa in tutte le direzioni e costituisce quindi una costante caratteristica del mezzo. Per l'aria (e così sensibilmente per gli spazi interplanetari), questa costante vale in cifra tonda

$$c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm./sec.},$$

ossia 300 000 km. al secondo.

Se si tratta invece di mezzo eterogeneo, in cui l'indice di rifrazione  $n$ , che è poi l'inversa della velocità di propagazione, varia da punto a punto, allora i raggi non hanno in generale andamento rettilineo, ma sono incurvati secondo una legge che dipende dal modo di variare di  $n$  col posto, cioè dalla funzione  $n(x, y, z)$ , designandosi al solito con  $x, y, z$  coordinate cartesiane di un punto generico del mezzo.

Ecco quali considerazioni conducono a caratterizzare l'andamento dei raggi.

Si parte dal caso elementare di un mezzo illimitato che consta di due porzioni  $S_0, S$ , ciascuna separatamente omogenea, ma aventi due diversi

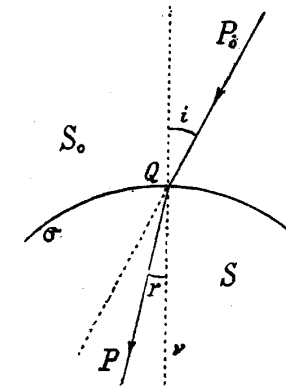


Fig. 10.

indici di rifrazione  $n_0, n$ . Sia  $\sigma$  la superficie di separazione fra  $S_0$  ed  $S$ . Entro  $S_0$  ogni raggio ha andamento rettilineo; così pure entro  $S$ . Perciò, nel passare da un punto generico  $P_0$  di  $S_0$  ad altro punto, pure generico,  $P$  di  $S$ , la luce segue un cammino che consta di due tratti rettilinei:  $P_0Q$ , da  $P_0$  fino ad un certo punto  $Q$  (a priori incognito) di  $\sigma$ ; e  $QP$ . Le leggi

sperimentali della rifrazione, attraverso la superficie di separazione  $\sigma$ , ci dicono poi che i due segmenti  $P_0Q, QP$  non sono in generale per diritto, stanno però in un medesimo piano colla normale  $\nu$  alla superficie in  $Q$ , l'ubicazione di  $Q$  essendo tale da rendere soddisfatta la nota legge (di Cartesio)

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{n}{n_0},$$

in cui  $i$  ed  $r$  designano gli angoli formati dal raggio incidente e dal raggio rifratto rispettivamente colla normale  $\nu$  alla superficie  $\sigma$  in  $Q$  (raggi

e normale intendendosi orientati nel senso della propagazione).

Orbene, queste leggi geometriche sono incluse nel principio di Fermat del minimo tempo. Se infatti si cerca quale sia il cammino fra  $P_0$  e  $P$  lungo cui la luce si propaga nel tempo più breve, appare in primo luogo manifesto che, in ognuna delle due porzioni  $S_0$  ed  $S$  (entro cui la velocità è costante), tale cammino deve essere rettilineo; sicchè tutto si riduce ad individuare la posizione di  $Q$  su  $\sigma$  in base alla condizione che risulti minima la somma

$$t = n_0 \overline{P_0 Q} + n \overline{QP}$$

dei due tempi che la luce impiega a percorrere il segmento  $P_0 Q$  (colla velocità  $\frac{1}{n_0}$ ) e il segmento  $QP$  (colla velocità  $\frac{1}{n}$ ). In condizioni di minimo deve essere  $\delta t = 0$ , e un facile calcolo porta subito a riconoscere che ciò implica appunto le leggi di Cartesio <sup>(1)</sup>.

2. *Mezzo costituito da più strati omogenei. Caso limite. Formula variazionale cui dà luogo il principio di Fermat.* — Lo stesso avviene più generalmente se il mezzo consta di quantesivogliono, diciamo  $m+1$ , porzioni omogenee, essendo inter-

<sup>(1)</sup> Cfr. per es. APPELL, *Traité de mécanique rationnelle* [3<sup>a</sup> ediz., Paris, Gauthier-Villars, 1909], T. I, Cap. VII, n.° 150, pp. 220-223.

posti, fra  $S_0$  ed  $S$ ,  $m-1$  strati intermedi, separati l'uno dall'altro e dai due estremi dalle superficie successive  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ . Gli indici di rifrazione siano ordinatamente le costanti  $n_0, n_1, n_2, \dots, n_{m-1}, n$ .

Per andare da  $P_0$  a  $P$ , un raggio dovrà attraversare le varie  $\sigma$  in punti (*a priori* incogniti)  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ . Il principio di Fermat esige in primo luogo che detto raggio sia costituito da una spezzata a tratti rettilinei  $P_0 Q_1, Q_1 Q_2, \dots, Q_{m-1} Q_m, Q_m P$ . L'ubicazione dei punti  $Q$  sarà poi caratterizzata dalla condizione di rendere minima la durata totale del tragitto, cioè il tempo,

$$t = n_0 \overline{P_0 Q_1} + n_1 \overline{Q_1 Q_2} + \dots + n_{m-1} \overline{Q_{m-1} Q_m} + n \overline{Q_m P}.$$

Anche qui si constata ovviamente che, per  $\delta t = 0$ , le rifrazioni successive ottemperano tutte alle leggi di Cartesio. Perciò il principio di Fermat, o anche soltanto quella parte di esso che esprime le condizioni differenziali necessarie pel minimo, cioè la formula

$$\delta t = 0,$$

apparisce come una opportuna sintesi dei fatti osservati.

Il caso più interessante di un mezzo eterogeneo, in cui  $n$  varia con continuità da punto a punto, si può ovviamente desumere per via di limite dalle stratificazioni discrete ora contemplate. Basta per un momento immaginare, nel mezzo assegnato, un certo numero di superficie della famiglia

$$n(x, y, z) = \text{cost.},$$

abbastanza vicine perchè dall'una all'altra di esse la  $n$  si mantenga sensibilmente costante. In un mezzo ipotetico nel quale la  $n$  fosse rigorosamente costante entro i singoli strati, subendo invece bruschi salti attraverso le superficie che li separano, l'andamento del raggio sarebbe di spezzata poligonale retta dal principio di Fermat. Ciò porta a passare al limite quando il numero degli strati cresce indefinitamente, ammettendo in conformità che seguiti ad essere valido lo stesso principio anche nel caso di un indice di rifrazione  $n(x, y, z)$  variabile con continuità. Ove si indichi con  $ds$  l'elemento d'arco di un generico raggio di luce propagantesi nel mezzo,  $n ds$  rappresenta manifestamente il tempuscolo impiegato dalla luce a percorrere  $ds$ , e il principio di Fermat si traduce nel fatto analitico che la curva incognita, seguita dal raggio luminoso fra due punti prefissati  $P_0, P$ , deve corrispondere al minimo tempo di percorso, ossia minimizzare l'  $\int_{P_0, P} n ds$ . Abbandonando come sopra le

specificazioni qualitative addizionali, che si richiedono per un effettivo minimo, e limitandoci ad esprimere che si annulla la variazione prima, possiamo inferirne che l'ottica geometrica di un mezzo in cui  $n(x, y, z)$  è una funzione qualunque del posto (continua e derivabile quanto occorre) rimane sostanzialmente compendiata nella formula (variazionale)

$$(1) \quad \delta \int n ds = 0.$$

Da questa si ricaverebbero ovviamente (col solito algoritmo del calcolo delle variazioni) le equazioni differenziali (equivalenti) atte a fornire, per integrazione, la forma effettiva dei raggi (fra due punti qualsivogliono del mezzo). Ma è preferibile, specie in vista delle considerazioni che mi propongo di svolgere più avanti, di evitare il calcolo diretto, profittando invece di una nota equivalenza dinamica. Ed ecco quale.

3. *Traiettorie dinamiche nei problemi conservativi. Fascio corrispondente ad un assegnato valore della costante delle forze vive. Equazioni differenziali del fascio. Principio della minima azione.* — Si consideri un punto materiale  $(x, y, z)$  il quale si muova sotto l'azione di una forza conservativa. Sia

$$U(x, y, z)$$

il potenziale di questa forza, unitario, cioè riferito all'unità di massa del punto di applicazione. Supposto che gli assi di riferimento sieno fissi (nel senso ordinariamente attribuito in meccanica a tale qualifica), si ha, per caratterizzare il moto del punto, la equazione (vettoriale) fondamentale della meccanica: accelerazione = forza unitaria, ossia, proiettando sui tre assi,

$$(2) \quad \ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z},$$

il punto sovrapposto indicando derivazione rispetto al tempo  $t$ .

Le (2) ammettono notoriamente l'integrale (delle forze vive)

$$(3) \quad \frac{1}{2} v^2 - U = E,$$

in cui  $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$  rappresenta manifestamente il quadrato della velocità del mobile, e la costante delle forze vive  $E$  l'energia complessiva (di moto e di posizione) che gli compete per unità di massa.

Alle (2) equivalgono le così dette equazioni intrinseche che provengono dalla stessa equazione vettoriale sopra ricordata, proiettando sulla tangente alla traiettoria, sulla sua normale principale  $N$  e sulla binormale  $B$ .

La prima si può immaginare sostituita dalla relazione integrale (3). Le altre due, ricordando che le componenti dell'accelerazione secondo  $N$  (verso la concavità della traiettoria) e secondo  $B$  valgono rispettivamente  $\frac{v^2}{\rho}$  ( $\rho$  raggio di curvatura) e 0, si scrivono

$$(4) \quad \frac{v^2}{\rho} = \frac{dU}{dN}, \quad 0 = \frac{dU}{dB},$$

i secondi membri essendo visibilmente derivate di direzione: del potenziale  $U$  secondo le (*a priori* incognite) direzioni  $N$  e  $B$ .

Se si tien conto della (3), si può riguardare  $v^2$  (introdotto originariamente come quadrato della velocità del mobile) quale una funzione nota del posto. D'altra parte, nei secondi membri delle (4),

si può anche scrivere, al posto di  $U$ ,  $U + E$ , ossia  $\frac{1}{2} v^2$ . Coll'accezione testè attribuita a  $v$ , scompare il tempo, e rimangono soltanto elementi geometrici. In altri termini, si ha il risultato della eliminazione di  $t$  dalle equazioni del moto, ossia le equazioni differenziali che definiscono tutte le possibili traiettorie, nel campo di forza derivante da un assegnato potenziale  $U(x, y, z)$  sotto la forma

$$(4') \quad \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dN} = \frac{v^2}{\rho}, \quad \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dB} = 0,$$

essendo  $v^2$  legata ad  $U$  dalla (3), con  $E$  costante arbitraria.

Immaginiamo in particolare di attribuire ad  $E$  un ben determinato valore, con che anche  $v^2$  rimane univocamente individuato in funzione del posto. Le (4) definiscono allora non più tutte le traiettorie, ma soltanto un loro *fascio*, chiamandosi appunto fascio il complesso delle traiettorie che corrispondono ad un medesimo valore della costante  $E$ . Le (4') stesse sono in definitiva due equazioni differenziali del secondo ordine fra  $x, y, z$ ; perciò la loro integrazione introduce quattro costanti arbitrarie, e un fascio consta in conformità di  $\infty^4$  traiettorie. La totalità delle traiettorie, risultando dall'insieme di tutti i fasci, viene invece a dipendere da cinque costanti: le quattro di un fascio generico e la  $E$  (che sono essenziali, cioè non riducibili a meno di cinque, escluso soltanto il caso di  $U$  costante, ossia di un campo di forza nullo).

Per il nostro scopo, cioè per evitare la trattazione diretta del problema generale dell'ottica geometrica, subordinando la ricerca dei raggi a quella di un fascio di traiettorie di un opportuno problema dinamico, è d'uopo ricorrere altresì al principio della minima azione.

Questo principio si traduce analiticamente in una equazione variazionale (esente da  $t$ ) che, per un assegnato valore della costante  $E$ , compendia le equazioni del corrispondente fascio di traiettorie. Essa esprime che si annulla la variazione dell'azione relativa all'arco di traiettoria compreso fra due punti generici, l'azione essendo definita come

$$\int \sqrt{2(U + E)} ds,$$

esteso all'arco di traiettoria di cui si tratta (4).

Abbreviando la scrittura, coll'usare qui ancora  $v^2$  in luogo della sua espressione esplicita  $2(U + E)$ , si può in definitiva ritenere come equivalente alle (4') la formula variazionale

$$(5) \quad \delta \int v ds = 0.$$

4. *Identità fra raggi luminosi e fasci di traiettorie dinamiche. Subordinazione di questi a quelle.* — La (5) [risguardandovi  $v$ , come realmente è in base alle (3), quale funzione assegnata di  $x, y, z$ ] diffe-

(4) APPELL, *loc. cit.*, Cap. XV, n.° 220, pp. 543-544.

risce dalla (1) soltanto per lo scambio materiale di  $n$  in  $v$ . Basta dunque sostituire  $n$  a  $v$  nelle (4') per avere, sotto la forma esplicita:

$$(4'') \quad \frac{1}{2} \frac{dn^2}{dN} = \frac{n^2}{\rho}, \quad \frac{1}{2} \frac{dn^2}{dB} = 0,$$

le equazioni differenziali dei raggi luminosi in un mezzo di indice  $n$ .

A questo criterio di equivalenza giova attribuire un'altra forma, che riescirà più agile, pur essendo meno definitiva in quanto, a differenza delle (4'), (4''), involge ancora la variabile ausiliaria  $t$ . Essa consiste nell'enunciato seguente:

*I raggi luminosi in un mezzo di indice variabile  $n(x, y, z)$  costituiscono altrettante traiettorie dinamiche di un punto materiale soggetto ad una forza derivante dal potenziale  $\frac{1}{2} n^2$ , e precisamente, valendo per il problema dinamico l'integrale delle forze vive*

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} n^2 = \text{cost.},$$

quel fascio di traiettorie, per cui è zero la costante del secondo membro, con che  $v = n$ .

La giustificazione è manifesta, perchè si riporta senz'altro alla coincidenza di (4') e (4'') per  $v = n$ .

La regola, testè formulata, è molto comoda consentendo interessanti interpretazioni ottiche di risultati già bene acquisiti o addirittura familiari nella loro veste meccanica. Consideriamo per es. il caso tipico — che dà luogo in condizioni oppor-



tune al così detto miraggio di Monge (\*) — di un mezzo in cui l'indice di rifrazione  $n$  varia soltanto colla quota  $z$ . Prendiamo anzi addirittura l'ipotesi (che sopra tutto ha interesse fisico) di una variazione lenta. Potremo in tal caso assumere, come espressione di  $n$  in funzione di  $z$ ,

$$n = n_0 \left( 1 + \frac{z}{h} \right),$$

essendo  $n_0$  ed  $h$  costanti, e di più quest'ultima (la quale è una lunghezza) tale che, nell'ambito dei valori di  $z$  che occorre prendere in considerazione, il rapporto  $\frac{z}{h}$  si possa trattare come quantità di primo ordine. Si ha allora, trascurando  $\frac{z^2}{h^2}$  e designando con  $g$  la costante  $\frac{n_0^2}{h}$ ,

$$\frac{1}{2} n^2 = \frac{1}{2} n_0^2 \left( 1 + 2 \frac{z}{h} \right) = \frac{1}{2} n_0^2 + gz.$$

I raggi si confondono pertanto con traiettorie di un problema dinamico in cui il potenziale  $\frac{1}{2} n^2$  è funzione lineare di  $z$ . Questa dipendenza lineare del potenziale della sola  $z$  sta a dire che la forza è parallela all'asse delle  $z$  ed ha per valore (più

(\*) Veggasi ad es. A. GARBASSO, *Il miraggio*, Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, T. LVII, 1906, pp. 1-57.

precisamente per componente unitaria)  $g$ . Ci ritroviamo quindi (salvo il diverso valore numerico di  $g$ ) nel caso elementare del moto dei gravi. I raggi (qualora non degenerino in rette) saranno altrettante parabole ad asse verticale, colla concavità nel senso della forza, cioè nel senso in cui cresce  $n$ , ecc.

## II.

### Energia e materia come aspetti diversi di una stessa entità fisica.

5. *Fenomeni radioattivi. Energia intrinseca della materia. Proporzionalità fra massa e energia e relativo coefficiente.* — La teoria elettromagnetica della luce ci ha abituati a riguardare le vibrazioni luminose come distinte soltanto quantitativamente dalle oscillazioni elettriche.

Una identificazione anche più radicale di quantità fisiche considerate finora come indipendenti — materia ed energia — è stata suggerita, in modo spontaneo ma ancora timido, dai fenomeni radioattivi, e si è poi affermata vigorosamente come conseguenza quasi ineluttabile delle nuove concezioni teoriche. Si tratta anzitutto della constatazione sperimentale che nei corpi radioattivi si trova immagazzinata una enorme quantità di energia. Per es. un grammo di radio metallico è capace di sviluppare (nel corso delle sue trasformazioni) oltre tre milioni di grandi calorie. Questa energia, che si va

svolgendo durante il processo di disintegrazione del radio, e così delle altre sostanze radioattive, deve necessariamente essere contenuta, in misura non prima sospettata, entro ogni atomo di queste sostanze. Siccome d'altra parte, dal punto di vista chimico, i corpi radioattivi (tranne l'alto peso atomico) non hanno caratteri speciali, così appare ragionevole l'induzione che ogni atomo di qualsiasi elemento racchiuda energia in misura altrettanto cospicua, voglio dire dello stesso ordine di grandezza. Un apprezzamento quantitativo fu suggerito per tutt'altra via dalla relatività (anche della prima maniera), la quale porta per forza di cose ad ammettere che la massa di un corpo vari (lievissimamente), oltrechè colla velocità, coll'energia che vi ha sede, e precisamente aumenti di  $\frac{\Delta E}{c^2}$  se gli si comunica una energia addizionale  $\Delta E$ .

Si è fatta così strada nella fisica moderna, e si può ritenere acquisita indipendentemente da ogni speciale costruzione teorica, la veduta che energia e materia siano necessariamente concomitanti (energia = massa  $\times c^2$ ); e si possano quindi riguardare come manifestazioni diverse di una stessa entità, la quale ci appare come materia ordinaria quando sia, per così dire, abbastanza concentrata, mentre si avverte, nelle forme più svariate, come energia quando non ci sono nuclei di condensazione.

Questo costituisce evidentemente un riconoscimento di equivalenza non meno grandioso di quello affermato dal primo principio della termodinamica. Esso si precisa nel dato quantitativo che  $c^2$  è il

fattore di proporzionalità fra la misura di una massa e quella della concomitante energia, e si designa perciò come *principio o postulato di proporzionalità*. Si può anche dirlo principio di identificazione (fra energia e materia), o anche di materializzazione dell'energia, o infine di inerzia e peso della medesima, le quali ultime denominazioni sono giustificate dal fatto che, ammessa la proporzionalità fra energia e massa materiale, l'energia stessa rimane materializzata e quindi dotata delle due qualità fondamentali che competono ai corpi ponderabili: inerzia, nonchè peso, cioè più generalmente attitudine a risentire l'azione gravitazionale degli altri corpi.

6. *Conseguenze ottiche. Incurvamento dei raggi luminosi entro un campo di forza.* — La schematizzazione cinematica, ricordata al § I, basta per lo svolgimento dell'ottica geometrica; non così per l'ottica fisica. La spiegazione dei più complessi fenomeni di interferenza, di diffrazione, di polarizzazione, ecc. richiede notoriamente una teoria che penetri alquanto più addentro nell'analisi del fenomeno. La teoria ondulatoria, che risale ad Huygens e si affermò in modo definitivo con Young e Fresnel, fu costituita in modo soddisfacente da prima su modello elastico (desunto dalle vibrazioni dei corpi solidi), poi, per opera di Maxwell, su modello elettromagnetico. Sia in questa teoria, oggi universalmente accettata, che nella anteriore teoria elastica, si identificano i raggi luminosi colle linee di flusso dell'energia, la velocità del flusso essendo quella sperimentalmente constatata per la

luce. Se si associa a questa circostanza, già da tempo acquisita, il postulato di proporzionalità introdotto al n.° precedente, si è necessariamente condotti ad assumere che, lungo ogni raggio luminoso, viaggia della materia: in quantità così esigua (stante la piccolezza del fattore di proporzionalità per cui ad un *erg* corrisponde appena la frazione  $\frac{1}{c^2} = \frac{1}{9 \cdot 10^{20}}$  di grammo) da risultare inapprezzabile nella maggior parte dei casi, ma pur sempre materia.

Questa nuovissima materializzazione dell'energia lascia sussistere il concetto di propagazione ondosa e la conseguente spiegazione dei fenomeni concreti; sicchè, dal punto di vista filosofico, concilia la teoria ondulatoria con l'antica teoria dell'emissione.

Ma vediamo quali specifiche conseguenze discendono dal principio di proporzionalità, quando ci si pone nelle condizioni più opportune perchè si possa avvertire l'influenza della (dilatissima e velocissima) materia che percorre i singoli raggi.

Consideriamo all'uopo un mezzo trasparente nel quale (in assenza d'ogni azione perturbatrice) la luce si propaga colla velocità costante *c*. Supponiamo che questo mezzo sia sede di un campo di forza, e sia  $U(x, y, z)$  il relativo potenziale. Un punto materiale libero che si muove in questo campo è soggetto unicamente alla forza derivante dal potenziale  $U$  e descrive quindi delle traiettorie che in generale non sono rette, ma curve, il raggio di curvatura in un punto generico essendo legato

al valore di  $U$  (in quel punto) e alla velocità (pure in quel punto) del mobile dalla prima delle (4). Essa mostra tra altro, come è del resto evidente per intuizione, che, *ceteris paribus*, la traiettoria è tanto meno incurvata quanto maggiore è la velocità. Orbene, se è vero che i raggi luminosi sono effettivamente traiettorie di particelle materiali (sia pure così infime, da essersi finora rivelate all'esperienza — e all'esperienza ottica che è la più squisita — con sole caratteristiche energetiche), ciascuna di queste particelle deve pur obbedire alle leggi dinamiche, e quindi, supponendo trascurabili le mutue influenze, con che ciascuna si comporta come un punto materiale libero, alle (3) e (4). D'altra parte le leggi stesse devono riportare, almeno con grande approssimazione, ai fatti osservati in condizioni ordinarie, i quali sono: velocità *c*, andamento rettilineo anche entro il campo gravitazionale terrestre e solare.

7. *Apprezzeramenti numerici sul campo gravitazionale nel sistema solare e sul presumibile incurvamento dei raggi luminosi.* — Possiamo agevolmente rendercene conto, assegnando anche la formula che in seconda (e più che bastevole) approssimazione può essere sostituita alla prima delle (4) come misura dell'incurvamento locale.

Cominciamo perciò dal considerare l'ordine di grandezza di  $U$  che vogliamo identificare col potenziale newtoniano di campi appartenenti al sistema solare. A titolo di apprezzamento, possiamo riferirci a corpi sferici, omogenei, ovvero stratificati per sfere concentriche. Se  $R$  è il raggio,  $M$  la

massa ed  $f$  la costante di attrazione,  $\frac{fM}{R}$  rappresenta il valore del potenziale proprio alla superficie, valore che è evidentemente il più grande di quelli presi da  $U$  nei punti non interni alla sfera potenziante, dacchè essa agisce su ognuno di questi punti come se tutta la massa fosse raccolta nel centro. In quanto poi ai vari corpi del sistema solare, il più grande valore numerico di  $\frac{fM}{R}$  si ha notoriamente pel Sole. Si tratta in ogni caso di una quantità [che ha le dimensioni di un potenziale unitario e quindi del quadrato di una velocità, come tra altro apparisce dalla (3)] molto piccola rispetto a  $c^2$ .

Calcoliamo infatti il rapporto  $\frac{1}{c^2} \frac{fM}{R}$ , pel Sole, tenendo conto di  $c = 30 \cdot 10^4$  km/sec., e di questi altri due dati:  $a$ ) il raggio apparente del Sole (per un osservatore terrestre alla distanza media) vale in cifra tonda (errore relativo inferiore al millesimo)  $16'$ ;  $b$ ) la velocità (media) della Terra nel suo moto di rivoluzione attorno al Sole vale, pure in cifra tonda (con errore inferiore al centesimo), 30 km. al secondo.

Designando con  $\Delta$  la distanza media Sole-Terra, sarà  $\frac{R}{\Delta}$  la misura in radianti dell'angolo di  $16'$ , sicchè

$$\frac{R}{\Delta} = 16 \cdot \frac{2\pi}{360 \cdot 60} = \frac{4\pi}{27 \cdot 10^2},$$

ossia

$$\frac{\Delta}{R} = \frac{27 \cdot 10^2}{4\pi} = 214.$$

Si ha così, in base al dato  $a$ ),

$$\frac{1}{c^2} \frac{fM}{R} = \frac{\Delta}{R} \cdot \frac{1}{c^2} \frac{fM}{\Delta} = 214 \cdot \frac{1}{c^2} \frac{fM}{\Delta}.$$

Ricordiamo d'altra parte che, per il moto in un circolo di raggio  $\Delta$  dovuto all'attrazione della massa  $M$  situata nel centro, si ha [per es. dalla prima delle (4)]

$$v^2 = \frac{fM}{\Delta}.$$

Applicando questa relazione al moto orbitale terrestre e tenendo conto del dato  $b$ ), possiamo scrivere

$$\frac{1}{c^2} \frac{fM}{\Delta} = \left(\frac{v}{c}\right)^2 = 10^{-8},$$

onde risulta

$$(6) \quad \frac{1}{c^2} \frac{fM}{R} = 214 \cdot 10^{-8} = 2,14 \cdot 10^{-6}.$$

Dacchè, come già si osservò, nell'espressione del potenziale  $U$  dovuto ai corpi del sistema solare, il termine che rispecchia l'attrazione del Sole assume un valore massimo di gran lunga preponderante sugli analoghi massimi degli altri termini, si può ritenere che, *in tutto lo spazio interplanetario, l'ordine di grandezza di  $\frac{U}{c^2}$  è conforme alla (6), cioè inferiore a pochi milionesimi.*

Entro questa approssimazione la (3) ci fa precisamente ritrovare la prima legge dell'ottica geometrica (velocità di propagazione =  $c$ ). Basta in-

fatti attribuire alla costante  $E$  del secondo membro il valore  $\frac{1}{2}c^2$  per avere come espressione rigorosa di  $v$ :

$$v^2 = c^2 - 2U = c^2 \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right),$$

donde appunto, trascurando  $\frac{2U}{c^2}$  (che ammonta al massimo a pochi milionesimi) di fronte all'unità,

$$v = c, \quad \text{c. d. d.}$$

L'altra legge, considerata finora come fondamento dell'ottica geometrica, è che (anche entro campi di forza quali quelli esistenti negli spazi interplanetari) i raggi hanno andamento rettilineo. Secondo l'ammesso postulato, le traiettorie sono invece definite dalle (4), in cui va sostituito a  $v^2$  il valore (3), ossia, coll'approssimazione testè specificata, il valore costante  $c^2$ . Ciò consente senz'altro di riconoscere che, se l'andamento non è rigorosamente rettilineo come assume la fisica classica, se ne scosta però in misura quasi insignificante. Infatti, dalla prima delle (4), in cui si scriva  $c^2$  per  $v^2$ , si ha

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{c^2} \frac{dU}{dN}.$$

La derivata  $\frac{dU}{dN}$  rappresenta la forza del campo nella direzione  $N$ , e perciò non può superare l'intensità di tale forza. Riprendendo il caso tipico del

Sole, che fissa l'ordine di grandezza, si ha la massima intensità alla sua stessa superficie, talchè

$$\left| \frac{dU}{dN} \right| \leq \frac{fM}{R^2},$$

e per conseguenza

$$\frac{1}{\rho} \leq \frac{1}{c^2} \frac{fM}{R} \cdot \frac{1}{R}.$$

Il primo fattore del secondo membro è un puro numero, è precisamente, in base alla (6), la piccola frazione  $2,14 \cdot 10^{-6}$ . Ne viene che  $\frac{1}{\rho}$  (cioè l'incurvamento dei raggi per effetto del campo gravitazionale) non supera tale piccola frazione di  $\frac{1}{R}$ ; in altri termini, il raggio di curvatura, se non è proprio  $\infty$ , come per le rette, è almeno dell'ordine di un milione di volte il raggio del Sole.

8. *Effetto angolare massimo (deflessione) per raggi che rasentano la corona solare. Applicazione ad un osservatore terrestre.* — La forma rigorosa dei raggi va naturalmente desunta dalle (3), (4), con  $E = \frac{1}{2}c^2$ . Si tratta, come abbiamo più volte rilevato, delle equazioni del moto di un punto materiale in un campo conservativo di potenziale  $U$ . Se questo proviene da un'unica massa gravitante — pensiamo specificamente al Sole — il problema è proprio quello del moto di un punto attratto da un centro fisso, la cui integrazione risale a Newton. Le traiettorie sono classicamente coniche col fuoco nel centro di forza, la cui specie dipende dal segno

della costante  $E$ . Per  $E > 0$ , e tale è il caso nostro, in cui va attribuito ad  $E$  il valore  $\frac{1}{2}c^2$ , si tratta manifestamente di iperboli. La circostanza qualitativa già rilevata che i raggi rimangono pochissimo incurvati, anche se passano vicinissimi al Sole, ci avverte che dovrà in ogni caso trattarsi di iperboli a' asintoti  $OA'$ ,  $OT'$  quasi per diritto (fig. 10).

Consideriamo in modo preciso un raggio iperbolico il quale lambisca la sfera solare in  $V$ . Sia  $O$  il centro dell'iperbole,  $S$  quello del Sole e quindi il fuoco della stessa iperbole. Sarà  $V$  il suo vertice e, ove si designi con  $a$  il semiasse trasverso, con  $e$  l'eccentricità, avremo per definizione

$$\begin{aligned} \overline{OV} &= a, & \overline{OS} &= ae, \\ \overline{SV} &= R = a(e-1). \end{aligned}$$

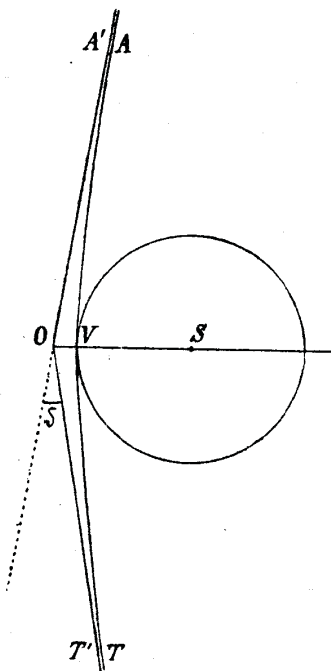


Fig. 10.

Si sa d'altra parte dalla geometria analitica che, se si rappresenta con  $\delta$  l'angolo (esterno) compreso fra i due asintoti,

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}}.$$

Nel caso che ci occupa,  $\delta$  deve essere piccolissimo; quindi  $e$  grandissimo, in base alla formula ora scritta. Potremo tranquillamente ritenere la tangente confondibile coll'arco, e  $\frac{1}{e}$  trascurabile di fronte all'unità. Con ciò, al posto di

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{1}{e^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{e},$$

si può scrivere

$$\delta = \frac{2}{e} = \frac{2}{e} \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{2}{e-1}.$$

Badando alla relazione  $R = a(e-1)$ , risulta in definitiva come misura di  $\delta$  in funzione delle due lunghezze  $R$  ed  $a$ ,

$$(7) \quad \delta = \frac{2a}{R}.$$

Il semiasse trasverso  $a$ , nel moto iperbolico dovuto all'attrazione newtoniana di una massa  $M$ , è classicamente legato alla costante  $E$  delle forze vive della relazione

$$E = \frac{fM}{2a}.$$

Ricavandone  $\alpha$  e ponendo per  $E$  il suo valore  $\frac{1}{2}c^2$ , la (7) diviene

$$(7) \quad \delta = 2 \cdot \frac{1}{c^2} \frac{fM}{R},$$

e quindi, badando alla (6),

$$\delta = 4,28 \cdot 10^{-6}.$$

Il secondo membro è un puro numero che esprime l'angolo  $\delta$  in radianti. Per averlo in ", dovremo moltiplicare per

$$\frac{360 \times 60 \times 60}{2\pi} = 57^\circ 17' 45'' = 206265''$$

con che risulta

$$(8) \quad \delta = 0'',88.$$

Si riconosce immediatamente che quest'angolo  $\delta$  porge appunto la misura della *deflessione*, ossia della massima deviazione angolare di cui (a norma del principio di proporzionalità) è suscettibile un raggio stellare per effetto gravitazionale del Sole. Supponiamo infatti di considerare un raggio di luce che parte da un astro  $A$  e arriva ad un osservatore terrestre  $T$ , seguendo un arco di iperbole che rasenta la corona solare in  $V$ , come nella fig. 10. La direzione dell'iperbole in  $T$ , secondo cui l'osservatore riceve il raggio di luce, si confonde con quella dell'asintoto  $OT'$ ; la direzione secondo cui la luce è partita dall'astro è quella della tangente

in  $A$ , che si confonde a sua volta coll'altro asintoto  $A'O$ , c. d. d.

Naturalmente  $A'O$  si può identificare colla direzione secondo cui  $T$  percepisce la stella in condizioni normali, cioè quando allontanandosi il Sole dalla direzione Terra-Astro e divenendo insensibile la perturbazione gravitazionale corrispondente, il raggio visuale torna ad essere rettilineo (ossia si scosta dall'andamento rettilineo in modo addirittura inapprezzabile).

Non sarà male osservare che, se il raggio visuale di una stella, anzichè rasentare la corona solare, passa a una distanza  $R_1 > R$  dal centro del Sole, la deflessione diminuisce, precisamente in ragione inversa della detta distanza perielia  $R_1$ .

Basta osservare che l'espressione (7) di  $\delta$  seguita naturalmente a sussistere, per una qualsiasi stella visibile dalla Terra, purchè soltanto vi si sostituisca al posto di  $R$  la distanza perielia  $R_1$ . Avremo in conformità

$$\delta = \frac{2a}{R_1} = \frac{2a}{R} \cdot \frac{R}{R_1}.$$

Il fattore  $\frac{2a}{R}$  è stato calcolato or ora, sicchè risulta in definitiva

$$\delta = 0'',88 \frac{R}{R_1}.$$

Dacchè  $R$  corrisponde a  $16'$ , basta evidentemente che la distanza angolare dal centro del Sole sia di pochissimi gradi, perchè  $\delta$  non superi qualche

centesimo di secondo e riesca quindi del tutto inavvertibile, come se il raggio rimanesse rigorosamente rettilineo.

9. *Ritorno al caso generale di un campo di forza qualsiasi. Equazione variazionale dei raggi luminosi, che compendia le vedute ordinarie associate al principio di proporzionalità.* — Abbiamo già rilevato alla fine del n.° 6 che, in un generico campo di forza di potenziale  $U$ , la propagazione dei raggi luminosi è retta dalle (3), (4), ossia dalle stesse equazioni che convergono al moto di un punto materiale; soltanto (n.° 7) conviene specificare la costante delle forze vive  $E$  attribuendole il valore  $\frac{1}{2}c^2$ . Con ciò si ha

$$v = \sqrt{c^2 + 2U},$$

e l'equazione variazionale (5) che definisce comprensivamente il fascio di traiettorie coincidente coi raggi luminosi, si scrive

$$\delta \int \sqrt{c^2 + 2U} ds = 0,$$

o, ciò che è lo stesso, dividendo ambo i membri per  $c$ ,

$$(9) \quad \delta \int \sqrt{1 + \frac{2U}{c^2}} ds = 0.$$

III.

**La relatività generale e le sue conseguenze concrete circa l'andamento dei raggi luminosi in un campo di forza.**

10. *Tempo e spazio nella fisica classica. Demolizione relativistica delle premesse tradizionali.* — Due sono i cardini della abituale rappresentazione geometrica e cinematica dei fenomeni naturali:

1.° Lo spazio in cui tali fenomeni si localizzano è rigorosamente euclideo, possiede cioè le ben note caratteristiche che gli attribuisce l'intuizione diretta, disciplinata e codificata dalla geometria elementare.

2.° Il tempo si può concepire e (almeno in astratto) misurare indipendentemente da ogni riferimento spaziale; esiste cioè un assoluto al quale si possono immaginare riportati gli orologi di tutti gli osservatori. È questo il tempo contemplato nella legge di inerzia, nella costanza della velocità  $c$  della luce rapporto all'etere, ecc.

Orbene, la così detta relatività ristretta (o della prima maniera) ha cominciato col contestare questa seconda veduta, rilevando, in base alle stesse modalità fisiche di misura del tempo, che due osservatori in moto (uniforme) l'uno rispetto all'altro, possono arrivare con identico procedimento (scambio di segnali) ad apprezzarlo in modo diverso. Donde l'opportunità di modificare tutta l'impostazione



concettuale, rinunciando al tempo assoluto, e sostituendovi un postulato che mette, per così dire, sullo stesso piede due osservatori che sono in moto (uniforme) l'uno rispetto all'altro. Il postulato consiste nell'ammettere l'eguaglianza, per entrambi, della velocità di propagazione di uno stesso raggio di luce, mentre, secondo la cinematica classica, queste due velocità dovrebbero differire per quella spettante al moto relativo dei due osservatori. Con ciò si stabilisce un legame fra le misure di tempo e quelle di spazio, e si vengono ad alterare in conformità fino i primi elementi di cinematica. Tenendo conto delle conseguenti modificazioni, rimangono spiegati nel modo più soddisfacente il risultato negativo dell'esperienza di Michelson, nonché il parziale trascinamento delle onde luminose in un mezzo in moto, sperimentalmente constatato da Fresnel, risultando d'altro lato che per gli ordinari fenomeni della meccanica dei corpi ponderabili (velocità piccole di fronte a  $c$ ), le correzioni sono addirittura trascurabili.

Pur rivoluzionando (sotto l'aspetto speculativo) cinematica e meccanica e con esse tutta la fisica, la relatività della prima maniera rispettava ancora, quanto alla localizzazione dei fenomeni nello spazio, i postulati della geometria elementare. In verità, discussioni appassionate intorno alla natura metrica dello spazio ambiente si erano svolte, come è ben noto, nel secolo scorso, a proposito della geometria non euclidea (o geometria degli spazi a curvatura costante). Tuttavia, in base ai controlli offerti dall'astronomia e dalla meccanica, esse avevano por-

tato alla conclusione che, se pure lo spazio fisico è a curvatura costante non nulla, il divario da uno spazio euclideo (curvatura rigorosamente nulla) dovrebbe essere così piccolo da sfuggire alle più affinate osservazioni. Pareva così superata l'eventualità di dover ricorrere a un più complicato schema geometrico, rafforzandosi l'ipotesi — vorrei dire il sentimento — che il nostro spazio sia rigorosamente euclideo.

Ma anche quest'ultimo credo scientifico dovette essere sacrificato per inquadrare in una concezione unitaria spazio, tempo e gravitazione. A tanto perviene la relatività generale di Einstein. Riassumerne, anche nel modo più sommario, il contenuto specifico non è possibile senza una preparazione adeguata. Rimandando il lettore desideroso di acquistare un'idea di questa radicale trasformazione della filosofia naturale, a qualcuna delle esposizioni di insieme finora pubblicate <sup>(1)</sup>, mi limiterò qui a

---

<sup>(1)</sup> Cfr. in particolare: A. EINSTEIN, *Sulla teoria speciale e generale della relatività* (traduzione di G. L. CALISSE), Bologna, Zanichelli, 1921. A chi voglia approfondire, rendendosi anche conto dello svolgimento matematico, sono specialmente raccomandabili i volumi seguenti: R. MARCOLONGO, *Relatività*, Messina, Principato (seconda edizione), 1923; J. BECQUEREL, *Le principe de relativité et la théorie de la gravitation*, Paris, Gauthier-Villars, 1922; A. S. EDDINGTON, *The mathematical theory of relativity*, Cambridge, University Press, 1923; G. D. BIRKHOFF, *Relativity and modern physics*, Cambridge (Mass.), Harvard University Press, 1923; H. WEYL, *Raum, Zeit, Materie*, Berlin, Springer (5<sup>a</sup> ediz.), 1923.

riferire quanto è strettamente necessario per affermare la genesi della formula in cui si compendiano le conseguenze ottiche di prima approssimazione.

11. *Modificazione dello spazio. Influenza sull'andamento dei raggi luminosi. Formula finale.* — Alla incondizionata validità della geometria euclidea si sostituisce, secondo Einstein, l'ipotesi, già affacciata in astratto da Riemann e da Clifford, che anche la natura metrica dello spazio (che si estrinseca nelle relazioni fra i vari elementi di una generica figura) possa dipendere dai fenomeni che vi si svolgono: in particolare dalla presenza e dal moto della materia.

L'ipotesi stessa si complica colla già postulata fusione delle misure di spazio e di tempo e si concreta in un sistema di equazioni differenziali che presiedono a queste deformazioni spaziali e temporali. Ben si intende che si tratta di deformazioni tenuissime, le quali nemmeno si avvertono nell'ambito dei fenomeni, in certo senso grossolani, che già sono soddisfacentemente rappresentati colle teorie ordinarie; ma in alcuni pochi casi ne discendono conseguenze sperimentalmente apprezzabili. Tra queste, celeberrima, la spiegazione dello spostamento secolare del perielio di Mercurio, di fronte a cui erano rimasti sterili tutti gli sforzi della meccanica celeste, che pur basta a rendere conto di particolarità anche più minute dei movimenti planetari. Inoltre — ci siamo — l'incurvamento dei raggi luminosi in un campo di forza.

Circa l'incurvamento, già sappiamo dal precedente § II, che il fatto quantitativo non è una

prerogativa della teoria di Einstein. Anche conservando in tutto lo schema classico, vi si è condotti colla sola ipotesi addizionale che energia e materia siano manifestazioni, diverse soltanto per gradi, di una stessa entità fisica. Lo svolgimento matematico di tali premesse porta, come abbiamo visto, alla formula variazionale (9) per definire in generale l'andamento dei raggi, nonchè in particolare [formula (8)] al valore numerico  $0'',88$  per la deflessione che dovrebbe essere causata dal Sole sopra raggi stellari che ne lambiscano la corona.

Che cosa dà, a calcoli eseguiti, la teoria di Einstein, quando la si applica a prevedere l'effetto di masse materiali sulla propagazione della luce?

Essa implica in primo luogo — ciò è uno dei suoi cardini, come abbiamo rilevato — cambiamento di natura metrica dello spazio ambiente, il quale non resta più euclideo, ma si incurva, come (scendendo da tre a due dimensioni per avere un'analogia tangibile) accade di una superficie piana, membrana o piastra elastica assicurata al contorno, quando venga per esempio premuta nelle parti centrali.

D'altra parte la teoria stessa (limitandoci per semplicità alla prima approssimazione) porta a riconoscere che basta sovrapporre la deformazione dello spazio al diretto incurvamento dei raggi, già calcolato per via energetica e rappresentato dalla (9).

In definitiva, *le cose vanno come se lo spazio ambiente* (che in realtà, o, se vogliamo essere agnostici, secondo la concezione einsteiniana, si è incurvato) *rimanesse rigorosamente euclideo e i raggi*

vi fossero definiti dal principio variazionale <sup>(4)</sup>.

$$(10) \quad \delta \int \sqrt{1 + \frac{4U}{c^2}} ds = 0,$$

rappresentando  $U$  il potenziale newtoniano delle masse che si prendono in considerazione.

Il confronto colla (9) mostra che c'è una sola differenza: il fattore 4, anzichè 2, premesso ad  $U$ . Si può quindi inferirne che anche secondo la teoria della relatività generale (limitata alla prima approssimazione, cioè ritenendo trascurabili i termini di 2° ordine in  $\frac{U}{c^2}$ ), i raggi luminosi entro un campo di forza di potenziale  $U$  si identificano con un fascio di traiettorie dinamiche, spettanti però al potenziale doppio  $2U$ ; la costante delle forze vive caratteristica del fascio è  $\frac{1}{2}c^2$  (questo, come nella teoria ordinaria cui si associ il postulato di proporzionalità).

La sostituzione di  $2U$  ad  $U$ , nella equazione comprensiva che definisce i raggi, porta naturalmente la stessa sostituzione nelle equazioni che se ne ricavano. Riferendosi in particolare al caso della attrazione solare, discusso al § II, per cui  $U = \frac{fM}{r}$

<sup>(4)</sup> Per la dimostrazione veggansi le note: *Statica einsteiniana*, Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XVI (1° semestre 1917), pag. 459-470, e *ds² einsteiniani in campi newtoniani. I: Generalità e prima approssimazione*, ibidem (2° semestre 1917), pp. 307-317.

( $r$  distanza del centro del Sole) basterà materialmente raddoppiare il coefficiente  $fM$ , nelle varie formule.

Risulta così, dalle (7) ed (8), che la deflessione (dei raggi che provengono da una stella e rasentano la corona solare) prevista dalla teoria di Einstein è doppia di quella calcolata coi soliti criteri in base alla semplice proporzionalità fra energia e massa materiale, e ammonta a

$$1'',76.$$

Siamo in un ordine di grandezza perfettamente accessibile ad accurate osservazioni astronomiche:

Si noti che, per Giove, l'analogo effetto, pur in condizioni di massimo, raggiunge appena  $0'',017$ , rimanendo quindi inapprezzabile.

12. *Conferma sperimentale.* — Gli eventuali spostamenti angolari dovuti al Sole divengono effettivamente osservabili durante una sua eclisse totale. Concettualmente, basta scegliere una qualche stella fissa il cui raggio visuale passi rasente al Sole nel momento dell'eclisse, e paragonare la posizione osservata in tale occasione con quella che si desume dai cataloghi. In pratica, data la limitata precisione dei cataloghi che può lasciare incertezze dell'ordine di  $1''$ , si ricorre al confronto di lastre fotografiche (di zone del cielo prossime alla corona solare), ottenute durante l'eclisse, e in condizioni normali.

Un primo tentativo in questo senso fu promosso dall'Osservatorio di Lick nel 1918; ma la precisione delle osservazioni riuscì insufficiente allo scopo.

Per l'eclisse totale del 29 maggio 1919, due spedizioni simultanee furono organizzate dalla Società Reale di Londra: l'una operò a Sobral nel Brasile settentrionale, l'altra all'isola di Principe nel Golfo di Guinea, località entrambe comprese nella zona di totalità dell'eclisse. I risultati delle osservazioni raccolte in queste due spedizioni si possono riassumere come segue <sup>(1)</sup>: La media degli spostamenti osservati a Sobral dà per la deflessione 1",98 (con errore probabile di  $\pm 0",12$ ); l'analogia media delle osservazioni di Principe da 1",61 (con errore probabile di  $\pm 0,30$ ). Fra i due valori sperimentali sta la deflessione 1",76 prevista dalla relatività generale di Einstein <sup>(2)</sup>. Questa ne ha così

---

<sup>(1)</sup> DYSON, EDDINGTON and DAVIDSON, *A determination of the deflection of light by the Sun's gravitational field, from observations made at the total eclipse of May 29, 1919*, Transactions of the Royal Society of London, S. A., Vol. 220, 1920, pp. 291-333.

<sup>(2)</sup> Nota aggiunta nel correggere le bozze della presente edizione italiana (Maggio 1924). In occasione del successivo eclisse totale del 21 Settembre 1922, visibile nell'Australia Occidentale, altre tre spedizioni si portarono nella zona di totalità. Soltanto quella americana, organizzata dall'Osservatorio di Lick e diretta dal Campbell, poté effettivamente osservare. Ma si trattava di stelle relativamente lontane del lembo del Sole, e quindi (cfr. n.° 8) di deflessioni assai piccole. I risultati, pubblicati nel n.° 346 del Lick Observatory Bulletin (1923), presentano una dispersione notevole, così che molti astronomi non risguardano quale ulteriore conferma il valore medio di queste osservazioni, per quanto sia anch'esso in accordo quasi perfetto colla previsione einsteiniana.

ricevuto nuova e clamorosa conferma, rimanendo nettamente esclusa sia la deviazione nulla dell'ottica geometrica, sia la mezza deviazione ( $0",88$ ), cui si sarebbe condotti (§ II) dalla teoria ordinaria, associandole il semplice postulato di proporzionalità fra massa e energia.

## INDICE

### REGOLARIZZAZIONE DEL PROBLEMA DEI TRE CORPI E SUA PORTATA.

I. Generalità sull'integrazione delle equazioni differenziali ordinarie . . . . .	Pag. 3
II. Il problema dei tre corpi. Richiamo delle ricerche sulle condizioni di urto . . . . .	> 7
III. Primo saggio di regolarizzazione. Il risultato fondamentale di Sundman . . . . .	> 11
IV. Il problema piano. Lemmi di comportamento analitico . . . . .	> 13
V. Regolarizzazione canonica del problema piano . . . . .	> 16
VI. Il problema spaziale. Varie specie di elementi ellittici . . . . .	> 20
VII. Trasformazione canonica desunta dal moto parabolico. Regolarizzazione di un urto binario . . . . .	> 25
VII. Parametro simmetrico. Regolarizzazione completa . . . . .	> 27
VIII. In quale senso si può dire risolto il problema . . . . .	> 29
IX. Significato meccanico della continuazione analitica . . . . .	> 30
X. Previsioni a breve scadenza. Sicurezza secolare . . . . .	> 32
XI. Dubbi critici. Giustificazione intuitiva della sicurezza. Riflessioni generali . . . . .	> 34

### LE ONDE DEI LIQUIDI. PROPAGAZIONE NEI CANALI.

I. Che cos'è un moto ondoso? . . . . .	Pag. 41
II. Onde progressive di tipo permanente. Caratteri essenziali . . . . .	> 44

III. Onde trocoidali di Gerstner. Loro insufficienza come prototipo del fenomeno reale . . . . .	Pag. 46
IV. Onde irrotazionali . . . . .	> 50
V. Caratteristica di massa . . . . .	> 54
VI. Conseguenze analitiche . . . . .	> 58
VII. Relazione globale. Necessaria esistenza di un trasporto superficiale . . . . .	> 62
VIII. Espressione della velocità media di trasporto . . . . .	> 70
IX. Specificazione delle condizioni dinamiche. Equazione funzionale caratteristica . . . . .	> 71
X. Onde periodiche. Forma corrispondente della equazione funzionale . . . . .	> 76
XI. Prima approssimazione. Onde semplici . . . . .	> 79
XII. Equazione di Airy . . . . .	> 81
XIII. Espressione esplicita dei vari elementi del moto . . . . .	> 83
XIV. Osservazione circa il calcolo di $\tau$ . Valore della velocità di trasporto . . . . .	> 86
XV. Sull'esistenza di soluzioni rigorose. Indicazione di ricerche del Cisotti . . . . .	> 91

### PARALLELISMO E CURVATURA IN UNA VARIETÀ QUALUNQUE.

I. Parallelismo superficiale . . . . .	Pag. 97
II. Prime conseguenze. Equipollenza (superficiale) di vettori . . . . .	> 98
III. Trasporto infinitesimo. Forma differenziale della legge di parallelismo . . . . .	> 101
IV. Spostamenti virtuali. Equazione simbolica . . . . .	> 103
V. Carattere intrinseco della nozione di parallelismo . . . . .	> 105
VI. Rappresentazione analitica . . . . .	> 106
VII. Trasporto per equipollenza. Commutabilità . . . . .	> 113
VIII. Richiami sulle varietà ad un numero qualunque di dimensioni . . . . .	> 117
IX. Estensione della nozione di parallelismo. Conseguenti formule e principali proprietà . . . . .	> 121
X. Teorema di Severi . . . . .	> 125
XI. Alcune formule . . . . .	> 126

- XII. Trasporto ciclico di una direzione. Caso di un  
cielo infinitesimo. Divario angolare. Formula  
di Pérès . . . . . Pag. 130
- XIII. Relazioni fra parallelismo e curvatura . . . > 138

L'OTTICA GEOMETRICA E LA RELATIVITÀ GENERALE DI EINSTEIN.

- I. Richiami d'ottica geometrica secondo lo schema  
classico . . . . . Pag. 149
- II. Energia e materia come aspetti diversi di una  
stessa entità fisica . . . . . > 160
- III. La relatività generale e le sue conseguenze  
concrete circa l'andamento dei raggi lumi-  
nosi in un campo di forza . . . . . > 174
-

*Finito di stampare*  
*il giorno 24 giugno 1924*  
*nella Cooperativa Tipografica Azzoguidi*  
*in Bologna*