CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE
MONOGRAFIE DI MATEMATICA APPLICATA

G. VITALI E G. SANSONE

MODERNA TEORIA
DELLE
FUNZIONI DI VARIABILE REALE

PARTE II

GIOVANNI SANSONE

SVILUPPI IN SERIE DI FUNZIONI ORTOGONALI

LABORAVI FIDENTER

NICOLA ZANICHELLI EDITORE
BOLOGNA 1935 - XIV

N° 558

G Sansone

Bologna, Società Tipografica già Compositori - 1935 - XIV

PREFAZIONE

La Monografia di G. Vitali « Moderna teoria delle funzioni di variabile reale » trova qui il suo naturale proseguimento.

Il lavoro è destinato ai cultori delle Matematiche applicate i quali spesso non hanno la possibilità di consultare i trattati e le memorie originali ed ha lo scopo di far conoscere i risultati generali e i più facili criteri di convergenza sulle « Serie trigonometriche di Fourier » sulle « Serie di polinomi di Legendre » di « Tchebychef-Laguerre » e di « Tchebychef-Hermite ».

È stata nostra cura di mantenere il necessario legame tra questa e la Monografia del Vitali e abbiamo cercato di portare avanti il lettore in cui avremmo voluto destare il desiderio di estendere e approfondire alcune interessanti questioni delle quali abbiamo fissato soltanto i punti essenziali.

L'indice del volume dà un'idea precisa della materia trattata, ma non è inopportuno qualche chiarimento preliminare.

Il primo capitolo contiene i risultati più espressivi sugli « Sviluppi in serie di funzioni ortogonali »; ci è stato guida il volume di G. Vitali « Geometria nello spazio Hilbertiano ».

Gli « Sviluppi in serie trigonometriche di Fourier » e gli « Sviluppi in serie di polinomi di Legendre » dei capitoli secondo e terzo formano argomento di moderni trattati quali quelli del Tonelli e dell'Hobson; noi abbiamo raccolto alcune proposizioni fondamentali, sufficienti per indirizzare il lettore verso complete esposizioni.

Sulla materia del capitolo quarto « Sviluppi in serie di Tchebychef-Laguerre e di Tchebychef-Hermite », tuttora in elaborazione, ci siamo limitati a dar conto, per ragioni di brevità, di qualche risultato relativo alla convergenza ordinaria.

Il capitolo quinto sull'« Integrale di Stieltjes » doveva per certi aspetti far parte del primo volume; d'altro lato esso trova qui il suo giusto posto perchè vi abbiamo esposto i teoremi sull'inversione dell'integrale di Stieltjes e quelli che stanno a fondamento delle dimostrazioni del secondo teorema limite del Calcolo delle Probabilità.

Nella Monografia non è alcun cenno sul legame tra la teoria delle equazioni integrali e il problema degli sviluppi in serie di funzioni ortogonali, nè sono considerati gli sviluppi in serie di funzioni di Sturm-Liouville e le serie di Dini-Bessel; la trattazione completa della materia avrebbe richiesto un altro volume!

Vada l'espressione del nostro animo grato al Sottocomitato per la Matematica Applicata del Consiglio Nazionale delle Ricerche che volle conferirci l'incarico della revisione della Monografia Vitali e proporci la redazione di questa.

Firenze, aprile 1934 - XII.

GIOVANNI SANSONE

MODERNA TEORIA

DELLE

FUNZIONI DI VARIABILE REALE

CAPITOLO I.

Sviluppi in serie di funzioni ortogonali e prime nozioni sullo spazio Hilbertiano.

§ 1. - Funzioni a quadrato sommabile.

1. - *Definizione* 1. - Se g è un aggregato misurabile di punti di una retta, se $f(t)$ è una funzione generalmente definita in g e $f^2(t)$ è sommabile in g, la $f(t)$ si dice a *quadrato sommabile* in g.

TEOREMA 1. - Se f_1 e f_2 sono due funzioni misurabili [1] e a quadrato sommabile in un aggregato g, anche il prodotto $f_1 f_2$ è sommabile in g.

Dimostrazione. - Basta dimostrare che $|f_1 f_2|$ è sommabile in g [I, Cap. IV, teor. 12 [2]]. Si ha generalmente in g, $|f_1 f_2| \leq \frac{1}{2} f_1^2 + \frac{1}{2} f_2^2$, e perciò $|f_1 f_2|$ ammette una maggiorante sommabile.

Corollario. - Se f è una funzione a quadrato sommabile in un aggregato g a misura finita, la f è sommabile in g.

Dimostrazione. - Infatti la costante 1 in g è a quadrato sommabile, appunto perchè g ha misura finita [I, Cap. IV, teor. 8] e quindi il prodotto $1 \cdot f$ è sommabile in g.

TEOREMA 2. - Se $f_1, f_2, ..., f_n$ sono funzioni a quadrato sommabile in g, e $c_1, c_2, ..., c_n$ sono costanti, $c_1 f_1 + c_2 f_2 + ... + c_n f_n$ è una funzione a quadrato sommabile in g.

Dimostrazione. - Prescindendo infatti da un insieme di misura nulla, $f_1, f_2, ..., f_n$ si mantengono finite, ed avendosi

$$(c_1 f_1 + c_2 f_2 + ... + c_n f_n)^2 = \sum_{i,k}^{1...n} c_i c_k f_i f_k$$

(1) Nel seguito, senza che si dichiari espressamente, intendiamo riferirci a funzioni misurabili.

(2) Qui e nel seguito, i richiami alla prima parte sono indicati colla notazione I, seguita dal capitolo e dal numero al quale ci riferiamo.

dalla sommabilità del secondo membro segue la sommabilità del primo membro.

§ 2. - Funzioni linearmente indipendenti.

1. Funzioni linearmente indipendenti. - 2. Condizione necessaria e sufficiente perchè più funzioni a quadrato sommabile siano linearmente indipendenti. Limitazione di BUNIKOWSKY-SCHWARZ.

1. - *Definizione* 2. - Si dice che n funzioni $f_1, f_2, ..., f_n$ sono *linearmente dipendenti* in g se esistono n costanti $c_1, c_2, ..., c_n$ non tutte nulle per le quali la funzione $c_1 f_1 + c_2 f_2 + ... + c_n f_n$ risulti generalmente nulla. In caso contrario le n funzioni sono *linearmente indipendenti*.

In un aggregato g di misura nulla n funzioni sono sempre linearmente dipendenti; noi nel seguito ci riferiremo ad aggregati g di misura non nulla.

2. - TEOREMA 3. - Condizione necessaria e sufficiente perchè n funzioni

$$f_1, \quad f_2, ..., \quad f_n \tag{1}$$

definite in un aggregato g e ivi a quadrato sommabile siano linearmente dipendenti in g è che il *determinante di Gram*

$$G(f_1, f_2, ..., f_n) = \begin{vmatrix} \int_g f_1^2 dt, & \int_g f_1 f_2 dt, ..., & \int_g f_1 f_n dt \\ \int_g f_2 f_1 dt, & \int_g f_2^2 dt, ..., & \int_g f_2 f_n dt \\ \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot \\ \int_g f_n f_1 dt, & \int_g f_n f_2 dt, ..., & \int_n f_n^2 dt \end{vmatrix}$$

sia nullo [GRAM [21]; KOWALEWSKI [31]].

Dimostrazione. - La condizione è sufficiente. Se infatti è $G(f_1, f_2, ..., f_n) = 0$ è possibile trovare n costanti $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ non tutte nulle per le quali si ha

$$\sum_s^{1...n} \lambda_s c_{r,s} = 0, \qquad (r = 1, 2, ..., n)$$

dove

$$c_{r,s}=\int_g f_r f_s dt.$$

Posto $F=\sum_s^{1\dots n}\lambda_s f_s$, si ha $\int_g F f_r dt=\sum_s^{1\dots n}\lambda_s c_{r,s}=0$, quindi

$$0=\sum_r^{1\dots n}\lambda_r\int_g F f_r dt=\int_g \sum_r^{1\dots n}\lambda_r f_r\left(\sum_s^{1\dots n}\lambda_s f_s\right)dt=\int_g F^2 dt$$

e siccome $\mu(g)\neq 0$ la F^2, e perciò la F, è generalmente nulla in g.

Inversamente se le funzioni (1) sono linearmente dipendenti in g, esisterà un sistema di costanti $\lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_n$ non tutte nulle per le quali

$$\sum_s^{1\dots n}\lambda_s f_s=0$$

generalmente in g. Si ha da qui

$$0=\int_g f_r\left(\sum_s^{1\dots n}\lambda_s f_s\right)dt=\sum_s^{1\dots n}\lambda_s\int_g f_r f_s dt=\sum_s^{1\dots n}\lambda_s c_{r,s}\qquad (r=1, 2,\dots, n)$$

e perciò $G(f_1, f_2,\dots, f_n)=0$.

Teorema 4. - La caratteristica del determinante $G(f_1, f_2,\dots, f_n)$ dà il massimo numero di funzioni $f_1, f_2,\dots, f_n$ linearmente indipendenti, e se la caratteristica è r, r funzioni sono linearmente indipendenti, ed ogni altra funzione è da queste linearmente dipendente.

Dimostrazione. - Sia r la caratteristica di $G(f_1, f_2,\dots, f_n)$; essendo G un determinante simmetrico esisterà in esso un minore principale di ordine r diverso da zero che, senza alterare le generalità, possiamo supporre sia formato dalle prime r righe e dalle prime r colonne di G (¹). Ne viene $G(f_1, f_2,\dots, f_r)\neq 0$, perciò le funzioni $f_1, f_2,\dots, f_r$ sono tra loro linearmente indipendenti.

Avendosi $G(f_1, f_2,\dots, f_r, f_{r+j})=0$, $j=1, 2,\dots, n-r$, una qualsiasi

(¹) Cfr. ad es. M. Cipolla: *Analisi Algebrica e introduzione al calcolo infinitesimale*, 2ª ed., 1921 (Palermo), p. 145; oppure G. Sansone: *Lezioni di Analisi Matematica*, Vol. I, 2ª ed., 1934 (Padova), p. 513.

funzione f_{r+j} è per il teorema 3 legata linearmente alle $f_1, f_2,\dots, f_r$ e nella relazione

$$\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\dots+\lambda_r f_r+\lambda_{r+j}f_{r+j}=0$$

risulterà $\lambda_{r+j}\neq 0$, e perciò f_{r+j} è una combinazione lineare omogenea di $f_1, f_2,\dots, f_r$.

Teorema 5. - Se le funzioni $f_1, f_2,\dots, f_n$ definite in g e ivi a quadrato sommabile sono linearmente indipendenti, è $G(f_1, f_2,\dots, f_n)>0$.

Dimostrazione. - In g, escluso un insieme di misura nulla, qualunque siano le costanti $c_1, c_2,\dots, c_n$ si ha $(c_1f_1+c_2f_2+\dots+c_nf_n)^2>0$, quindi $\int_g(c_1f_1+c_2f_2+\dots+c_nf_n)^2dt>0$, perciò la forma quadratica nelle $c_1, c_2,\dots, c_n$

$$\sum_{i,k}^{1\dots n}c_ic_k\int_g f_i f_k dt$$

è definita positiva, e il suo discriminante $G(f_1, f_2,\dots, f_n)$ è >0 (¹).

Corollario 1. - Se $f_1, f_2,\dots, f_n$ sono funzioni definite in g e ivi a quadrato sommabile si ha

$$G(f_1, f_2,\dots, f_n)\geqslant 0$$

e il segno $=$ vale nel solo caso che le funzioni date siano linearmente dipendenti in g.

Corollario 2. - Se f_1 e f_2 sono due funzioni definite in g e ivi a quadrato sommabile si ha

$$G(f_1, f_2)=\begin{vmatrix}\int_g f_1^2dt, & \int_g f_1f_2dt\\ \int_g f_1f_2dt, & \int_g f_2^2dt\end{vmatrix}=\int_g f_1^2dt\int_g f_2^2dt-\left(\int_g f_1f_2dt\right)^2\geqslant 0$$

e perciò

$$\left(\int_g f_1f_2dt\right)^2\leqslant\int_g f_1^2dt\int_g f_2^2dt$$

[limitazione (o disuguaglianza) di Bunikowsky (1861) e Schwarz (1885)], e il segno $=$ vale nel solo caso che f_1 e f_2 siano linearmente dipendenti in g.

(¹) Cfr. M. Cipolla, op. cit. p. 183. Per una dimostrazione diretta del teorema indipendente dalla teoria delle forme quadratiche cfr. M. Picone [[45], b)].

Corollario 3. - Se una funzione f definita in un aggregato g di misura finita è a quadrato sommabile, si ha

$$\left(\int_g f\,dt\right)^2 \leq \mu(g)\int_g f^2 dt.$$

Dimostrazione. - Si ponga nella limitazione di BUNIKOWSKY-SCHWARZ, $f_1 = f$, $f_2 = 1$.

§ 3. - Nozioni elementari sullo spazio Hilbertiano.

1. Definizione di spazio Hilbertiano. - 2. Distanza di due punti. - 3. Rette. - 4. Angolo di due rette. - 5. Significato geometrico del determinante di GRAM.

1. - *Definizione* 3. - Dicesi *spazio Hilbertiano reale* o semplicemente spazio *Hilbertiano*, o spazio H, l'insieme di tutte le funzioni a quadrato sommabile in un aggregato g, considerando come uno stesso elemento due funzioni le quali risultino generalmente uguali in g. Una qualunque di tali funzione si dice un *punto* di H; la funzione generalmente nulla si dice l'*origine di H*.

Due punti f e g rappresentano due *punti distinti* di H se f e g non sono generalmente uguali.

2. - *Definizione* 4. - Se f_1 e f_2 sono due punti di H, chiamasi *distanza* di questi due punti la radice quadrata aritmetica di $\int_g (f_1 - f_2)^2 dt$; abbiamo quindi che se d è la distanza di due punti f_1 e f_2 è $d \geqslant 0$ e

$$d^2 = \int_g (f_1 - f_2)^2 dt.$$

La distanza di un punto f dall'origine di H è data da $\sqrt{\int_g f^2 dt}$; un punto f ha la distanza 1 dall'origine quando sia $\int_g f^2 dt = 1$.

3. - *Definizione* 5. - Se f e φ sono due punti distinti di H e φ è distinto dall'origine, chiamasi *linea retta* passante per i punti f e φ la totalità dei punti

$$f + \lambda\varphi$$

ove λ varia tra $-\infty$ e $+\infty$.

Ad ogni valore di λ corrisponde un punto sulla retta e si verifica immediatamente che due suoi punti la individuano univocamente.

Si consideri una retta $\lambda\varphi$ (passante per l'origine); i punti di essa a distanza 1 dall'origine si avranno quando λ verifica la relazione $\lambda^2 \int_g \varphi^2 dt = 1$; ne segue che sopra una retta $\lambda\varphi$ (passante per l'origine) esistono due punti, e due soltanto $\varphi/\sqrt{\int_g \varphi^2 dt}$, $-\varphi/\sqrt{\int_g \varphi^2 dt}$ che hanno dall'origine la distanza 1.

I due punti $\varphi/\sqrt{\int_g \varphi^2 dt}$, $-\varphi/\sqrt{\int_g \varphi^2 dt}$ si chiamano *parametri normali* della retta $\lambda\varphi$; ad uno di essi daremo il nome di *parametro principale.*

Definizione 6. - Una funzione φ a quadrato sommabile in g si dice *normale in* g quando sia

$$\int_g \varphi^2 dt = 1.$$

Le funzioni normali in g rappresentano tutti e soltanto i punti di H che hanno dall'origine distanza uguale ad 1.

Normalizzare una funzione φ a quadrato sommabile e non generalmente nulla in g, significa determinare un fattore c per cui $c\varphi$ risulti normale in g, o ciò che è lo stesso trovare sulla retta $\lambda\varphi$ i punti alla distanza 1 dall'origine. Per le cose dette si avrà

$$c = 1/\sqrt{\int_g f^2 dt}, \qquad c = -1/\sqrt{\int_g f^2 dt}.$$

4. - Siano λf, $\mu\varphi$ due rette per l'origine; a motivo della limitazione di BUNIKOWSKY-SCHWARZ

$$\left(\int_g f\varphi\,dt\right)^2 \leq \int_g f^2 dt \int_g g^2 dt$$

esiste un numero ω compreso tra 0 e π tale che

$$\cos\omega=\int_g f\varphi\,dt\Big/\sqrt{\int_g f^2dt\int_g \varphi^2dt}. \tag{1}$$

Definizione 7. - Il numero ω tra 0 e π il quale verifica la (1) chiamasi l'*angolo delle due rette* λf, $\mu\varphi$ in H.

In particolare perchè sia $\omega=\pi/2$ occorre e basta $\int_g f\varphi\,dt=0$. Diremo in questo caso che *le due rette* λf, $\mu\varphi$ (od anche le due funzioni f e φ) *sono ortogonali* in H (in g).

Notiamo che perchè sia $\omega=0$, π, occorre e basta

$$\left(\int_g f\varphi\,dt\right)^2=\int_g f^2dt\int_g \varphi^2dt,$$

le funzioni f e φ sono quindi linearmente dipendenti [cfr. § 2] e le due rette λf, $\mu\varphi$ coincidono.

Alla *metrica funzionale* ora definita è facile estendere le leggi dello spazio ordinario. Ad esempio se d_1 e d_2 sono le distanze di due punti f_1 e f_2 dall'origine, ω è l'angolo delle due rette λf_1, μf_2, e se d indica la distanza dei punti f_1 e f_2 si ha:

$$d^2=d_1^2+d_2^2-2d_1d_2\cos\omega.$$

Si ha infatti

$$d^2=\int_g (f_1-f_2)^2dt=\int_g f_1^2dt+\int_g f_2^2dt-2\sqrt{\int_g f_1^2dt\int_g f_2^2dt}\;\frac{\int_g f_1f_2dt}{\sqrt{\int_g f_1^2dt\int_g f_2^2dt}}.$$

5. - Vogliamo qui trovare il *significato geometrico del determinante di Gram.*

Teorema 6. - Siano $f_1, f_2,\ldots, f_n$, n funzioni di quadrato sommabile in g e sostituiamo ad esse il sistema di funzioni $\varphi_1, \varphi_2,\ldots, \varphi_n$ legate alle precedenti dalla sostituzione lineare

$$\varphi_i=\sum_k^{1\ldots n} b_{i,k}f_k \qquad (i=1, 2,\ldots, n)$$

a coefficienti costanti $b_{i,k}$ e di modulo $B=|b_{i,k}|\neq 0$. Vogliamo dimostrare che si ha:

$$G(\varphi_1, \varphi_2,\ldots, \varphi_n)=B^2G(f_1, f_2,\ldots, f_n).$$

Dimostrazione. - Si ha infatti

$$c'_{i,l}=\int_g \varphi_i\varphi_l dt=\int_g \sum_k^{1\ldots n} b_{i,k}f_k\sum_m^{1\ldots n} b_{l,m}f_m dt=\sum_{k,m}^{1\ldots n} b_{i,k}b_{l,m}\int_g f_kf_m dt=$$

$$=\sum_{k,m}^{1\ldots n} b_{i,k}b_{l,m}c_{k,m}=\sum_k^{1\ldots m}\left(\sum_m^{1\ldots n} b_{l,m}c_{k,m}\right)b_{i,k},$$

ove con le stesse notazioni del § 2 abbiamo posto $c_{k,m}=\int_g f_kf_m dt$.

Posto ancora $b'_{l,k}=\sum_m^{1\ldots n} b_{l,m}c_{k,m}$ avremo $c'_{i,l}=\sum_k^{1\ldots n} b'_{l,k}b_{i,k}$ e si ha

$$BG(f_1, f_2,\ldots, f_n)=|b_{l,m}|\,|c_{k,m}|=|b'_{l,k}|$$

$$B^2G(f_1, f_2,\ldots, f_n)=|b_{i,k}|\,|b'_{l,k}|=|c'_{i,l}|=G(\varphi_1, \varphi_2,\ldots, \varphi_n).$$

Teorema 7. - Se $f_1, f_2,\ldots, f_n$ sono a quadrato sommabile e linearmente indipendenti in g, si può costruire una loro combinazione lineare che sia ortogonale ad $f_1, f_2,\ldots, f_{n-1}$; essa è determinata a meno del segno ove si aggiunga la condizione che risulti normale in g.

Dimostrazione. - Consideriamo infatti la combinazione lineare

$$\varphi_n=\gamma_1f_1+\gamma_2f_2+\ldots+\gamma_nf_n; \tag{1}$$

posto al solito $c_{i,k}=\int_g f_if_k dt$, la ortogonalità di φ_n ad $f_1, f_2,\ldots, f_{n-1}$ porta

$$c_{i,1}\gamma_1+c_{i,2}\gamma_2+\ldots+c_{i,n}\gamma_n=0 \qquad (i=1, 2,\ldots, n-1),$$

e siccome nella matrice $|c_{i,k}|$, $(i, k=1,\ldots, n)$ il minore

$$\begin{vmatrix} c_{1,1},\ldots, & c_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots \\ c_{n-1,1},\ldots, & c_{n-1,n-1} \end{vmatrix}=G(f_1, f_2,\ldots, f_{n-1}) \tag{2}$$

è diverso da zero, le $\gamma_1, \gamma_2,\ldots, \gamma_n$ risultano determinate a meno di un fattore di proporzionalità, ma la φ_n corrispondente non è generalmente nulla in g, si potrà quindi disporre di questo fattore in guisa che la φ_n risulti normalizzata [cfr. § 3, 3].

Si noti ancora che a causa della (2) la costante γ_n risulta nella (1) diversa da zero.

Teorema 8. - *Siano $f_1, f_2, \ldots, f_n$, n funzioni linearmente indipendenti in g e ivi a quadrato sommabile; sia ϱ_i la distanza di f_i dall'origine; φ_3 la combinazione lineare di f_1, f_2, f_3 normalizzata e ortogonale ad f_1, f_2; φ_4 la combinazione lineare di f_1, f_2, f_3, f_4 normalizzata ed ortogonale ad f_1, f_2, f_3;....; φ_n la combinazione lineare di $f_1, f_2, \ldots, f_n$ normalizzata e ortogonale ad $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$.*

Vogliamo dimostrare che *sussiste la formula*

$$(3)\qquad G(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \\ = \varrho_1^2 \varrho_2^2 \ldots \varrho_n^2 \operatorname{sen}^2(f_1, f_2) \cos^2(f_3, \varphi_3) \ldots \cos^2(f_n, \varphi_n),$$

la quale fornisce appunto il significato geometrico del determinante di Gram.

Dimostrazione. - Dalla (1) essendo $\gamma_n \neq 0$ risulta

$$f_n = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_{n-1} f_{n-1} + a_n \varphi_n$$

con $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ costanti. Moltiplicando per φ_n e integrando in g si ha

$$a_n = \int_g f_n \varphi_n dt = \sqrt{\int_g f_n^2 dt \int_g \varphi_n^2 dt}\; \frac{\int_g f_n \varphi_n dt}{\sqrt{\int_g f_n^2 dt \int_g \varphi_n^2 dt}} = \varrho_n \cos(f_n, \varphi_n),$$

e siccome si passa da $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, \varphi_n$ ad $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, f_n$ colla sostituzione lineare

$$f_1 = f_1, \quad f_2 = f_2, \ldots, \quad f_{n-1} = f_{n-1},$$
$$f_n = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_{n-1} f_{n-1} + a_n \varphi_n$$

di modulo $a_n = \varrho_n \cos(f_n, \varphi_n)$ ne viene per il teorema 6

$$G(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, f_n) = \varrho_n^2 \cos^2(f_n, \varphi_n) G(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, \varphi_n),$$

ed essendo φ_n normale ed ortogonale ad $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ si avrà

$$G(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, \varphi_n) = G(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})$$

e perciò la formula ricorrente

$$G(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, f_n) = \varrho_n^2 \cos^2(f_n, \varphi_n) G(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}).$$

Si avrà allora

$$G(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \varrho_n^2 \varrho_{n-1}^2 \ldots \varrho_3^2 \cos^2(f_n, \varphi_n) \ldots \cos^2(f_3, \varphi_3) G(f_1, f_2)$$

e poichè

$$G(f_1, f_2) = \int_g f_1^2 dt \int_g f_2^2 dt - \left(\int_g f_1 f_2 dt\right)^2 = \left[1 - \left(\frac{\int_g f_1 f_2 dt}{\sqrt{\int_g f_1^2 dt \int_g f_2^2 dt}}\right)^2\right] \varrho_1^2 \varrho_2^2 =$$
$$= [1 - \cos^2(f_1, f_2)] \varrho_1^2 \varrho_2^2 = \varrho_1^2 \varrho_2^2 \operatorname{sen}^2(f_1, f_2)$$

ne viene appunto la (3).

Dalla (3) segue che se le $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sono normalizzate è

$$G(f_1, f_2, \ldots, f_n) \leq 1.$$

Si avrà $G = 1$ se

$$\operatorname{sen}^2(f_1, f_2) = 1, \quad \cos^2(f_3, \varphi_3) = 1, \ldots, \quad \cos^2(f_n, \varphi_n) = 1.$$

Dalla prima di queste segue che f_1 e f_2 sono ortogonali in g. Da $\cos^2(f_3, \varphi_3) = 1$ segue $\int_g f_3 \varphi_3 dt = \int_g f_3^2 dt \int_g \varphi_3^2 dt$ perciò [§ 2] $f_3 = k\varphi_3$ con k costante; ma φ_3 è ortogonale ad f_1 e f_2, perciò anche f_3 è ortogonale ad f_1 e f_2. Così continuando abbiamo il

Teorema 9. - *Il determinante di Gram di n funzioni normalizzate è minore od uguale ad* 1, *e se esso è uguale ad* 1, *le funzioni sono due a due ortogonali.*

§ 4. - Approssimazione lineare delle funzioni.

1. Combinazioni lineari omogenee normalizzate e mutualmente ortogonali di n funzioni assegnate. - 2. Ricerca della combinazione lineare di n funzioni date che da una funzione assegnata ha la minima distanza. - 3. Limitazione (disuguaglianza) di Bessel.

1. - **Teorema** 10. - Date n funzioni $f_1, f_2, \ldots, f_n$ a quadrato sommabile in g e ivi linearmente indipendenti, si possono costruire n loro combinazioni lineari normalizzate, mutualmente ortogonali.

Dimostrazione. - Per il teorema 7 possiamo costruire n funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ normalizzate tali che

$$\varphi_i = c_{i,1} f_1 + c_{i,2} f_2 + \ldots + c_{i,i} f_i; \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \qquad c_{i,i} \neq 0;$$

$$\int_g \varphi_i f_s dt = 0; \qquad s = 1, 2, \ldots, i-1; \qquad \int_g \varphi_i^2 dt = 1; \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Due qualunque delle funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sono tra loro ortogonali; si ha infatti per $i<l$

$$\int_g \varphi_i \varphi_l \, dt = \int_g \varphi_l \left(\sum_r^{1\ldots i} c_{i,r} f_i \right) dt = \sum_r^{1\ldots i} c_{i,r} \int_g \varphi_l f_i \, dt = 0.$$

Avendosi poi $G(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)=1$, le $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sono tra loro linearmente indipendenti.

2. - Siano $f_1, f_2, \ldots, f_n$, n funzioni definite in g e ivi a quadrato sommabile, F una funzione a quadrato sommabile in g e proponiamoci il problema di determinare una combinazione lineare $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n$ che abbia in g la minima distanza da F, o come si dice *la migliore approssimazione in media della F in g mediante combinazioni lineari delle $f_1, f_2, \ldots, f_n$.*

Per il teorema precedente possiamo senz'altro supporre che le funzioni $f_1, f_2, \ldots, f_n$ siano normalizzate e mutualmente ortogonali, e il nostro problema consiste nello scegliere le costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ in guisa che

(1) $$\int_g (F - c_1 f_1 - c_2 f_2 - \ldots - c_n f_n)^2 dt$$

assuma il valore minimo possibile.

L'integrale (1) può scriversi

$$\int_g F^2 dt + \sum_i^{1\ldots n} c_i^2 - 2 \sum_i^{1\ldots n} c_i \int_g F f_i \, dt$$

ed uguagliando a zero le derivate parziali rispetto a $c_1, c_2, \ldots, c_n$ troviamo

(2) $$c_i = \int_g F f_i \, dt, \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Proviamo ora inversamente che l'integrale (1) assume il suo valore minimo quando le costanti c_i sono date dalla (2). Si ha infatti

$$\int_g [F - c_1 f_1 - c_2 f_2 - \ldots - c_n f_n]^2 dt = $$
$$= \int_g F^2 dt + \sum_i^{1\ldots n} \left(c_i - \int_g F f_i \, dt \right)^2 - \sum_i^{1\ldots n} \left(\int_g F f_i \, dt \right)^2.$$

L'unico termine variabile nel secondo membro è $\sum_i^{1\ldots n} \left(c_i - \int_g F f_i \, dt \right)^2$, esso assume il valore minimo zero, quando le c_i hanno l'espressione (2).

Se poniamo la

Definizione 8. - Date n funzioni $f_1, f_2, \ldots, f_n$ normalizzate e mutualmente ortogonali in g, se F è una funzione di quadrato sommabile, le costanti c_i determinate con le (2) si chiamano i *coefficienti di Fourier* della funzione F rispetto alle funzioni $f_1, f_2, \ldots, f_n$, abbiamo per le cose dette il

TEOREMA 11. - Se F è una funzione a quadrato sommabile in g, ed $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sono n funzioni normalizzate e mutualmente ortogonali in g, la combinazione lineare $\sum_i^{1\ldots n} c_i f_i$, nella quale i coefficienti c_i hanno l'espressione (2) di FOURIER, è tra le combinazioni lineari di $f_1, f_2, \ldots, f_n$ quella che ha da F la minima distanza.

Al problema studiato possiamo dare veste geometrica. Poniamo per questo la seguente

Definizione 9. - Se $f_1, f_2, \ldots, f_n$; F, sono $n+1$ funzioni a quadrato sommabile in g, e le $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sono linearmente indipendenti in g, la totalità dei punti $F + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n$ ottenuti facendo variare ciascuna delle variabili λ_i tra $-\infty$ e $+\infty$ chiamasi *spazio lineare* o *euclideo* ad *n dimensioni*, o semplicemente un S_n.

Per $n=1$, S_1 chiamasi *retta* [§ 3, 3], per $n=2$, S_2 chiamasi *piano*.

Il problema da noi risoluto può così enunciarsi: dato uno spazio lineare trovare quel suo punto che ha la minima distanza dall'origine.

3. - TEOREMA 12. - Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni normalizzate mutualmente ortogonali in g, F una funzione a quadrato sommabile in g, $\{c_n\}$ la successione dei coefficienti di FOURIER di F rispetto alla successione $\{f_n\}$

$$c_n = \int_g F f_n \, dt \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

allora la serie

$$\sum_n^{1\ldots\infty} c_n^2$$

è convergente, e vale inoltre la relazione:

$$(3) \qquad \sum_{n}^{1\dots\infty} c_n^2 \leqq \int_g F^2\,dt,$$

[limitazione (*disuguaglianza*) di BESSEL].

Dimostrazione. - Abbiamo infatti

$$(4) \quad \int_g \Big[F-\sum_n^{1\dots N} c_n f_n\Big]^2 dt = \int_g F^2 dt + \sum_n^{1\dots N} c_n^2 \int_g f_n^2 dt - 2\sum_n^{1\dots N} c_n \int_g F f_n dt +$$
$$+2\sum_{n\neq m}^{1\dots N} c_n c_m \int_g f_n f_m dt = \int_g F^2 dt + \sum_n^{1\dots N} c_n^2 - 2\sum_n^{1\dots N} c_n^2 = \int_g F^2 dt - \sum_n^{1\dots N} c_n^2,$$

ed essendo generalmente in g, $\Big[F-\sum_n^{1\dots N} c_n f_n\Big]^2 \geqq 0$, ne segue, qualunque sia l'intero positivo N,

$$\sum_n^{1\dots N} c_n^2 \leqq \int_g F^2 dt$$

e perciò la (3).

§ 5. - Convergenza in media.

1. Convergenza in media. - 2. Convergenza completa in media in un aggregato di misura finita o infinita. - 3. Condizione necessaria e sufficiente di convergenza completa in media. - 4. Un teorema di passaggio al limite sotto il segno integrale. - 5. Somma di successioni di funzioni convergenti in media.

1\. - Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni normalizzate mutualmente ortogonali in g, F una funzione di quadrato sommabile in g, $\{c_n\}$ la successione dei coefficienti di FOURIER di F rispetto alla successione $\{f_n\}$ e ammettiamo che nella limitazione di BESSEL del § precedente valga il segno $=$, si abbia cioè

$$(1) \qquad \sum_n^{1\dots\infty} c_n^2 = \int_g F^2 dt,$$

$$\Big[\int_g f_n f_m dt = 0,\ n\neq m;\quad \int_g f_n^2 dt = 1;\quad c_n = \int_g F f_n dt\Big]$$

ciò che è lo stesso

$$\lim_{N\to\infty} \sum_n^{1\dots N} c_n^2 = \int_g F^2 dt.$$

Dalla (4) del § precedente si trae

$$\lim_{N\to\infty} \int_g \Big[F-\sum_n^{1\dots N} c_n f_n\Big]^2 dt = 0$$

talchè se poniamo

$$(2) \qquad \varphi_N = \sum_n^{1\dots N} c_n f_n$$

abbiamo

$$(3) \qquad \lim_{N\to\infty} \int_g [F-\varphi_N]^2 dt = 0.$$

Inversamente se vale la (3), tenuto conto della (4) del § precedente, segue la (1).

Se poniamo allora la

Definizione 10. - Una successione di funzioni $\{\varphi_N\}$ definite in un aggregato g e ivi a quadrato sommabile si dice *convergente in media* in g verso una funzione F, generalmente definita in g, e pure a quadrato sommabile, se si ha

$$\lim_{N\to\infty} \int_g [F-\varphi_N]^2 dt = 0,$$

abbiamo il

TEOREMA 13. - Condizione necessaria e sufficiente perchè nella limitazione di BESSEL valga il segno $=$ è che la successione $\{\varphi_N\}$ definita dalla (2) converga in media in g verso la funzione F.

2\. - Per non limitare il nostro studio soltanto agli aggregati g di misura finita, analogamente a quanto è stato fatto in I, cap. IV, § 4 converrà introdurre il concetto di convergenza completa in media in un aggregato g di misura finita o infinita con la seguente

Definizione 11. - Sia $\{\varphi_n(t)\}$ una successione di funzioni generalmente definite in un aggregato misurabile g e di quadrato sommabile in ogni sub-aggregato di g misurabile e di misura finita. Se esiste una funzione $\varphi(t)$, generalmente definita in g e di quadrato sommabile in ogni sub-aggregato di g misurabile e di misura finita, per cui si abbia, qualunque sia il sub-aggregato γ di g con $\mu(\gamma)$ finita,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\gamma |\varphi_n-\varphi|^2 dt=0 \tag{4}$$

si dice allora che la successione $\{\varphi_n\}$ *è convergente completamente in media verso* $\varphi(t)$.

TEOREMA 14. - Una successione $\{\varphi_n\}$ convergente completamente in media verso una funzione φ, è completamente convergente ed ha per quasi limite la φ [I, Cap. IV, § 4, n.° 3].

Dimostrazione. - Posto $C=\sqrt{\mu(\gamma)}$ per la limitazione di BUNIKOWSKI-SCHWARZ si ha

$$0\leq\int_\gamma|\varphi_n-\varphi|\,dt\leq C\sqrt{\int_\gamma(\varphi_n-\varphi)^2dt} \qquad [\S\ 2,\ \text{cor. } 3]$$

e dalla (4) consegue

$$\lim_{n\to\infty}\int_\gamma|\varphi_n-\varphi|\,dt=0$$

e la successione $\{\varphi_n\}$ converge completamente in g, e la φ è una sua quasi limite.

Si ha da qui [I, Cap. IV, teor. 35] che se la successione $\{\varphi_n\}$ converge completamente in media in g verso due funzioni φ e ψ esse sono generalmente uguali in g.

3. - TEOREMA 15. - Condizione necessaria e sufficiente perchè una successione $\{\varphi_n\}$ di funzioni generalmente definite in un aggregato misurabile g e di quadrato sommabile in ogni sub-aggregato di g misurabile e di misura finita sia completamente convergente in media in g è che per ogni sub-aggregato misurabile γ di misura finita di g si abbia

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\int_\gamma|\varphi_n-\varphi_m|^2dt=0. \tag{5}$$

Dimostrazione. - La condizione è necessaria. La successione $\{\varphi_n\}$ sia completamente convergente in media verso $\varphi(t)$, avremo

$$0\leq\int_\gamma|\varphi_n-\varphi_m|^2dt=\int_\gamma[(\varphi_n-\varphi)-(\varphi_m-\varphi)]^2dt\leq$$
$$\leq 2\int_\gamma|\varphi_n-\varphi|^2dt+2\int_\gamma|\varphi_m-\varphi|^2dt$$

e poichè

$$\lim_{n\to\infty}\int_\gamma|\varphi_n-\varphi|^2dt=0,\qquad \lim_{m\to\infty}\int_\gamma|\varphi_m-\varphi|\,dt=0$$

ne viene appunto la (5).

La condizione è sufficiente. Infatti posto $C=\sqrt{\mu(\gamma)}$, per la limitazione di BUNIKOWSKI-SCHWARZ si ha

$$0\leq\int_\gamma|\varphi_n-\varphi_m|\,dt\leq C\sqrt{\int_\gamma|\varphi_n-\varphi_m|^2dt}$$

e dalla (5) consegue

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\int_\gamma|\varphi_n-\varphi_m|\,dt=0,$$

e in virtù del teorema 38 di I, Cap. IV, segue che la $\{\varphi_n\}$ è completamente convergente in g.

Sia allora φ una quasi limite della successione $\{\varphi_n\}$; da questa si può estrarre una successione convergente generalmente in g verso φ [I, Cap. IV, corollario teor. 38], perciò da $\{\varphi_n^2\}$ si può estrarre una successione convergente generalmente in g verso φ^2 e sia essa

$$\varphi_{\varkappa_1}^2,\quad \varphi_{\varkappa_2}^2,\ldots,\quad \varphi_{\varkappa_n}^2,\ldots$$

Noi proveremo che si ha

$$\lim_{n\to\infty}\int_\gamma\varphi_{\varkappa_n}^2dt=\int\varphi^2dt, \tag{6}$$

e per questo basterà dimostrare che le integral-funzioni delle $\varphi_{\varkappa}^2$ sono equi-assolutamente-continue in γ [I, Cap. IV, teor. 37].

Sia ε positivo arbitrario e si determini n_0 in modo che qualunque sia l'intero $p\geq 0$ si abbia

$$\int_\gamma|\varphi_{n_0+p}-\varphi_{n_0}|^2dt<\frac{\varepsilon}{4}$$

e perciò qualunque sia l'aggregato misurabile γ' contenuto in γ

$$\int_{\gamma'}|\varphi_{n_0+p}-\varphi_{n_0}|^2dt<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Sia ora $m>0$ tale, che per $\mu(\gamma')<m$ risulti

$$\int_{\gamma'}\varphi_{n_0}^2dt<\frac{\varepsilon}{4};$$

avremo allora per $\mu(\gamma')<m$ e qualunque sia p

$$(7)\qquad \int_{\gamma'} \varphi^2_{n_0+p}dt=\int_{\gamma'}[(\varphi_{n_0+p}-\varphi_{n_0})+\varphi_{n_0}]^2dt< <2\int_{\gamma'}|\varphi_{n_0+p}-\varphi_{n_0}|^2dt+2\int_{\gamma'}\varphi^2_{n_0}dt<\varepsilon\,;$$

e impiccolendo ove occorra m, possiamo supporre che per $\mu(\gamma')<m$ sia anche

$$(7')\qquad \int_{\gamma'}\varphi^2_{n_0-p}dt<\varepsilon \qquad (p=1,2,...., n_0-1)$$

e dalle (7) e (7′) segue allora la equi-assoluta-continuità delle integral-funzioni della successione $\{\varphi^2_n\}$.

Dimostriamo infine che

$$(8)\qquad \lim_{n\to\infty}\int_\gamma|\varphi_n-\varphi|^2dt=0.$$

Fissato l'intero positivo n, se consideriamo la successione $\{\varphi_{n+k}-\varphi_n\}$ $k=1, 2,....,$ per essa valgono le ipotesi che abbiamo fatto sulla successione $\{\varphi_n\}$, possiamo quindi estrarre da essa una successione

$$\varphi_{s_1}-\varphi_n,\quad \varphi_{s_2}-\varphi_n,....,\quad \varphi_{s_k}-\varphi_n,....$$

che ha per quasi limite $\varphi-\varphi_n$ e tale che

$$\lim_{k\to\infty}\int_\gamma|\varphi_{s_k}-\varphi_n|^2dt=\int_\gamma|\varphi_n-\varphi|^2dt,$$

dalla quale passando al limite per $n\to\infty$, tenuto conto della (5), segue appunto la (8).

Il teorema è così dimostrato.

4. - Teorema 16. - Si abbia una successione di funzioni $\{\varphi_n\}$ ed una funzione F generalmente definite in g e a quadrato sommabile in qualsiasi sub-aggregato γ di g misurabile e di misura finita, e si abbia

$$(8)\qquad \lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\int_\gamma|\varphi_n-\varphi_m|^2dt=0\,;$$

allora se φ è una quasi limite della successione $\{\varphi_n\}$ si ha

$$(9)\qquad \lim_{n\to\infty}\int_\gamma F\varphi_n dt=\int_\gamma F\varphi dt.$$

Dimostrazione. - Per la limitazione di Bunikowski-Schwarz si ha

$$0\leq\int_\gamma|F\varphi_n-F\varphi_m|\,dt\leq\sqrt{\int_\gamma F^2dt\int_\gamma|\varphi_n-\varphi_m|^2dt}$$

e perciò per la (8)

$$(10)\qquad \lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\int_\gamma|F\varphi_n-F\varphi_m|\,dt=0$$

e quindi la successione $\{F\varphi_n\}$ è completamente convergente in g. D'altra parte φ è limite di una successione estratta da $\{\varphi_n\}$ [I, Cap. IV, dim. teor. 38] sarà quindi $F\varphi$ limite di una successione parziale estratta dalla $\{F\varphi_n\}$ e in virtù della (10) $F\varphi$ è quasi limite di $\{F\varphi_n\}$ [I, Cap. IV, cor. teor. 38]. Si ha dunque

$$\lim_{n\to\infty}\int_\gamma|F\varphi_n-F\varphi|\,dt=0$$

e poichè

$$0\leq\left|\int_\gamma(F\varphi_n-F\varphi)\,dt\right|\leq\int_\gamma|F\varphi_n-F\varphi|\,dt \qquad \text{[I, Cap. IV, teor. 21]}$$

è

$$\lim_{n\to\infty}\int_\gamma(F\varphi_n-F\varphi)\,dt=0$$

e perciò la (9).

5. - Teorema 17. - Se $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$ sono due successioni completamente convergenti in media in g rispettivamente verso le due funzioni φ e ψ, anche la successione $\{\varphi_n+\psi_n\}$ converge completamente in media in g verso $\varphi+\psi$.

Dimostrazione. - Si ha infatti

$$0\leq\int_\gamma[(\varphi_n+\psi_n)-(\varphi+\psi)]^2dt= =\int_\gamma[(\varphi_n-\varphi)+(\psi_n-\psi)]^2dt\leq 2\int_\gamma|\varphi_n-\varphi|^2dt+2\int_\gamma|\psi_n-\psi|^2dt$$

e poichè per ipotesi

$$\lim_{n\to\infty}\int_\gamma|\varphi_n-\varphi|^2dt=0,\qquad \lim_{n\to\infty}\int_\gamma|\psi_n-\psi|^2dt=0$$

ne viene

$$\lim_{n\to\infty}\int_\gamma[(\varphi_n+\psi_n)-(\varphi+\psi)]^2dt=0 \qquad \text{c. v. d.}$$

§ 6. - Sviluppi in serie di funzioni ortogonali.

1. Le funzioni ψ_r. - 2. Potenza di un sistema di funzioni normali e due a due ortogonali. - 3. Teorema di FISCHER-RIESZ. - 4. Sistemi chiusi di funzioni normali e due a due ortogonali. - 5. Sviluppo di una funzione a quadrato sommabile in serie di funzioni ortogonali. - 6. Teoremi di chiusura. Criteri di PICONE, LAURICELLA, VITALI.

1. - *Definizione* 12. - Dato un aggregato misurabile g, se r è un numero razionale, con ψ_r indicheremo la funzione che è uguale ad 1 in tutti i punti di g che precedono r, e che è *zero* nei rimanenti punti di g.

Evidentemente, essendo i numeri razionali un'infinità numerabile, anche le ψ_r sono un'infinità numerabile.

TEOREMA 18. - Se una funzione φ sommabile in g è ortogonale in g a tutte le ψ_r, essa è generalmente nulla.

Dimostrazione. - Infatti se $\int_g \varphi\psi_r dt=0$ ne viene $\int_{g_r} \varphi dt=0$, dove g_r indica l'aggregato dei punti di g che precedono r, e quindi [I, Cap. IV, cor. teor. 29] la φ è generalmente nulla in g.

2. - TEOREMA 19. - Un sistema di funzioni normali e a due a due ortogonali in un aggregato g di misura finita contiene un numero finito od un'infinità numerabile di funzioni.

Dimostrazione. - Indichiamo con (φ) un sistema di funzioni normali e a due a due ortogonali, e $\varphi_1, \varphi_2,\ldots, \varphi_n$ siano n di queste. Se con ψ indichiamo una ψ_r e, se poniamo

$$a_i=\int_g \psi\varphi_i dt$$

è

$$\int_g (\psi-a_1\varphi_1-a_2\varphi_2-\ldots-a_n\varphi_n)^2dt\geqslant 0$$

da cui, per l'ortogonalità delle φ, si ha [cfr. Teor. 12]

$$\int_g \psi^2dt\geqslant a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$$

ed infine

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\leqslant\mu(g).$$

Ne segue che per ogni $\lambda>0$ esiste un numero finito di funzioni (φ) per le quali si ha

$$\left|\int_g \psi\varphi dt\right|\geqslant\lambda$$

e se consideriamo quindi tutte le funzioni (φ) per le quali le corrispondenti costanti a_i soddisfano le limitazioni

$$|a_i|>1,\qquad 1\geqslant|a_i|>1/2,$$
$$1/2\geqslant|a_i|>1/3,\ldots,\qquad 1/n\geqslant|a_i|>1/(n+1),\ldots$$

esse formano un insieme finito o numerabile, ma le ψ formano un insieme numerabile, formano quindi un insieme finito o numerabile tutte le φ per le quali risulta per almeno un valore dell'indice r

$$\left|\int_g \psi_r\varphi dt\right|>0.$$

Ma l'equazione $\int_g \psi_r\varphi dt=0$ qualunque sia r è soddisfatta soltanto dalla funzione φ generalmente nulla, e il teorema è dimostrato.

3. - TEOREMA 20 (di FISCHER-RIESZ) (RIESZ [51, a)], FISCHER [18]). - Sia g un aggregato di misura *finita*, $\{\varphi_n\}$ una successione di funzioni normali e due a due ortogonali in g, $\{a_n\}$ una successione di costanti per le quali la serie $\sum_n^{1\ldots\infty} a_n^2$ risulti convergente; se si pone

$$f_n=a_1\varphi_1+a_2\varphi_2+\ldots+a_n\varphi_n$$

allora la successione $\{f_n\}$ converge in media in g verso una funzione f che ha per coefficienti di FOURIER i termini della successione $\{a_n\}$, si ha cioè

$$a_i=\int_g f\varphi_i dt \qquad (i=1, 2,\ldots).$$

Dimostrazione. - Si ha infatti per $n>m$

$$f_n-f_m=a_{m+1}\varphi_{m+1}+a_{m+2}\varphi_{m+2}+\ldots+a_n\varphi_n$$

e quindi

$$\int_g (f_n-f_m)^2dt=a_{m+1}^2+a_{m+2}^2+\ldots+a_n^2$$

e per la convergenza della serie $\sum_n^{1\ldots\infty} a_n^2$

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} \int_g |f_n - f_m|^2 dt = 0$$

ed essendo g di misura finita, la successione $\{f_n\}$ converge in media verso una funzione f [teor. 15]. Qualunque sia l'indice $n > i$ si ha poi

$$\int_g \varphi_i f_n dt = a_i$$

e passando al limite per $n \to \infty$ [teor. 16]

$$\int_g \varphi_i f\, dt = a_i,$$

Il teorema sussiste anche se g è di misura infinita (E. W. HOBSON [25, *a*)]; II, p. 761).

4. - *Definizione* 13. - Un sistema di funzioni normali e due a due ortogonali in un aggregato g, si dice *chiuso* o *completo* in g quando l'unica funzione a quadrato sommabile ortogonale in g a tutte le funzioni del sistema è la funzione generalmente nulla.

È facile costruire un sistema chiuso in un aggregato g. Consideriamo il sistema di funzioni ψ_r definito nel n.° 1 di questo paragrafo; sopprimiamo quelle ψ_r che sono generalmente nulle e ordinate le rimanenti in una nuova successione sopprimiamo quelle che risultano linearmente dipendenti dalle precedenti, e sia ψ_1', $\psi_2',\ldots, \psi_n',\ldots$ la successione ottenuta. Per il teorema 7 possiamo sostituire a ciascuna delle funzioni ψ_n' un'altra ψ_n'' che sia combinazione lineare delle $\psi_1', \psi_2',\ldots, \psi_n'$, normale e ortogonale alle $\psi_1', \psi_2',\ldots, \psi'_{n-1}$; formeremo in tal modo il sistema $\psi_1'', \psi_2'',\ldots, \psi_n'',\ldots$ che risulta chiuso in g. Difatti ogni ψ_r si può esprimere linearmente ed omogeneamente per le ψ_n'' e una funzione ortogonale a tutte le ψ_n'' è ortogonale a tutte le ψ_r e perciò generalmente nulla (teor. 18).

TEOREMA 21. - Un sistema chiuso in un aggregato g di misura finita contiene un'infinità numerabile di funzioni.

Dimostrazione. - Per dimostrare il teorema basterà far vedere che se $f_1, f_2,\ldots, f_n$ sono n funzioni normali e ortogonali due a due

in g si può costruire una funzione non generalmente nulla da queste linearmente indipendente; invero se φ è una tale funzione abbiamo già dimostrato col teorema 7 che si può costruire una combinazione lineare di $f_1, f_2,\ldots, f_n, \varphi$ normalizzata e ortogonale ad $f_1, f_2,\ldots, f_n$.

Ora se f è una qualsiasi funzione limitata, misurabile in g, non generalmente nulla, che in g assume più di $n+1$ valori distinti, tra le $n+1$ funzioni $f, f^2,\ldots, f^n, f^{n+1}$ ve ne è una almeno che non risulta una combinazione lineare omogenea delle $f_1, f_2,\ldots, f_n$, in caso opposto le $n+1$ relazioni in g

$$f^i = c_{i,1} f_1 + c_{i,2} f_2 + \ldots + c_{i,n} f_n \quad (i = 1, 2,\ldots, n+1)$$

con le $c_{i,k}$ costanti, portano che tra le funzioni $f, f^2,\ldots, f^n, f^{n+1}$ sussiste in g almeno una relazione del tipo $\lambda_1 f + \lambda_2 f^2 + \ldots + \lambda_{n+1} f^{n+1} = 0$ con le $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_{n+1}$ non tutte nulle, quindi f può assumere in g al massimo n+1 valori distinti, contro l'ipotesi.

5. - TEOREMA 22. - Se $\{\varphi_n\}$ è un sistema *chiuso* di funzioni normali e due a due ortogonali in un aggregato g di misura finita, ed f una qualsiasi funzione a quadrato sommabile in g, allora la successione $\{f_n\}$ dove

$$f_n = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \ldots + a_n\varphi_n \tag{1}$$

con

$$a_i = \int_g \varphi_i f\, dt \tag{2}$$

converge in media verso f, si ha cioè:

$$\lim_{n\to\infty} \int_g |f - f_n|^2 dt = 0. \tag{3}$$

e perciò [teor. 13]

$$\sum_i^{1\ldots\infty} a_i^2 = \int_g f^2 dt. \tag{4}$$

***Dimostrazione.* - Per la limitazione di BESSEL si ha**

$$\sum_i^{1\ldots\infty} a_i^2 \leq \int_g f^2 dt$$

perciò la serie $\sum_i^{1\ldots\infty} a_i^2$ è convergente, ne viene per il teorema di

FISCHER-RIESZ che la successione $\{f_n\}$ definita con le (1) converge in media verso una funzione $\bar{f}$ e si ha

$$a_i = \int_g \varphi_i \bar{f}\, dt \tag{2'}$$

e dal confronto delle (2) e (2')

$$\int_g \varphi_i (f - \bar{f})\, dt = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots);$$

ma il sistema $\{\varphi_n\}$ è chiuso, perciò la differenza $f - \bar{f}$ è generalmente nulla in g e la (2') coincide con la (2) c. v. d.

Il teorema sussiste anche se g è di misura infinita (E. W. HOBSON [25, *a*)]; II, p. 761).

Definizione 14. - Una *serie* $a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \ldots + a_n\varphi_n + \ldots$ si dice *convergente in media* in un aggregato g verso una funzione f quando

$$\lim_{n\to\infty} \int_g \Big(f - \sum_i^{1\ldots n} a_i\varphi_i\Big)^2 dt = 0.$$

Osservazione. - È quasi superfluo osservare che la convergenza in media della serie $\sum_n^{1\ldots\infty} a_n\varphi_n$ verso la f *non porta* di conseguenza *la convergenza puntuale* della serie, cioè se t è un punto di g non è lecito affermare che

$$f(t) = a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t) + \ldots + a_n\varphi_n(t) + \ldots;$$

dalla dimostrazione del teorema 15 risulta però che si possono formare delle somme parziali della serie

$$\sum_i^{1\ldots s_1} a_i\varphi_i(t), \quad \sum_i^{1\ldots s_2} a_i\varphi_i(t), \ldots, \quad \sum_i^{1\ldots s_n} a_i\varphi_i(t), \ldots$$

le quali convergono per $n \to \infty$ generalmente in g verso la $f(t)$.

6. - TEOREMA 23. - Condizione necessaria e sufficiente perchè una successione $\{\varphi_n\}$ di funzioni normali e due a due ortogonali in un aggregato di misura finita g formi un sistema chiuso è che per ogni funzione f a quadrato sommabile in g, sia

$$\int_g f^2 dt = \sum_n^{1\ldots\infty} \Big(\int_g \varphi_n f\, dt\Big)^2. \tag{5}$$

Dimostrazione. - La necessità della condizione segue dal teorema 22.

La condizione è anche sufficiente. Infatti se la successione $\{\varphi_n\}$ non è chiusa si può trovare una f a quadrato sommabile, non generalmente nulla e ortogonale a tutte le φ_n,

$$\int_g \varphi_n f dt = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

e per tale funzione la (5) diventa

$$\int_g f^2 dt = 0,$$

perciò se g_t è l'aggregato dei punti di g che precedono t si avrà anche

$$\int_{g_t} f^2 dt = 0$$

e la f è generalmente nulla [I, Cap. IV, teor. 29] contro l'ipotesi.

Il teorema sussiste anche se g è di misura infinita (E. W. HOBSON [25, *a*)]; II, p. 761).

Avvertiamo il lettore che recentemente M. PICONE [M. PICONE [45, *c*)]] ha dimostrato il seguente notevole teorema, del quale ci limitiamo a riportare l'enunciato.

TEOREMA 24 (di PICONE). - Sia $\theta(t)$ una funzione non negativa, sommabile in un aggregato misurabile g, e $\{\theta^{\frac{1}{2}}(t) f_n(t)\}$ una successione di funzioni normalizzate e mutualmente ortogonali in g; allora condizione necessaria e sufficiente perchè qualunque sia la funzione f, col prodotto θf^2 sommabile in g, sussista l'uguaglianza di BESSEL

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big[\int_g \theta f f_n dt\Big]^2 = \int_g \theta f^2 dt$$

è, che per ogni x reale, risulti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big[\int_g \theta(x) e^{itx} f_n(t)\, dt\Big]^2 = \int_g \theta(t)\, dt \quad [i = \text{unità immaginaria}].$$

Quest'ultima esprime quindi la condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema $\{\theta^{\frac{1}{2}}(t) f_n(t)\}$ sia chiuso in g.

TEOREMA 25 (di LAURICELLA [36]). - Condizione necessaria e sufficiente perchè una successione $\{\varphi_n\}$ di funzioni normali e due a due ortogonali in un aggregato di misura finita g formi un sistema chiuso è che la (5) valga per tutte le funzioni f che appartengono ad un sistema chiuso.

Dimostrazione. - Sia $\{f_n\}$ un sistema chiuso; è evidente che la (5) sussistendo per ogni funzione f a quadrato sommabile sussiste per ogni f_n.

Inversamente supponiamo che la (5) valga per ogni f_n di un sistema chiuso e proviamo che anche il sistema $\{\varphi_n\}$ è chiuso. Infatti se ciò non fosse, esisterebbe una funzione θ ortogonale a tutte le φ_n, e considerando il sistema delle φ_n e θ si dovrebbe avere per la limitazione di BESSEL

$$\int_g f_n^2 dt \geqslant \sum_m^{1\ldots\infty}\left(\int_g \varphi_m f_n dt\right)^2 + \left(\int_g f_n \theta dt\right)^2$$

e per la (5)

$$\int_g f_n \theta dt = 0 \qquad (n=1, 2,\ldots),$$

e la θ sarebbe ortogonale a tutte le f_n e ciò non può essere.

TEOREMA 26 (di VITALI [63, *b*)]). - Condizione necessaria e sufficiente perchè una successione $\{\varphi_n\}$ di funzioni normali e due a due ortogonali in un aggregato g di misura finita formi un sistema chiuso è che indicata con $\mu(t)$ la misura dell'aggregato $g_{a,t}$ dei punti di g compresi tra un punto fisso a e un punto generico t della retta cui appartiene g, si abbia

$$\mu(t) = \sum_n^{1\ldots\infty}\left[\int_{g_{a,t}} \varphi_n dt\right]^2. \tag{6}$$

Dimostrazione. - Che la condizione sia necessaria segue dalla (5), basterà prendere in essa f uguale alla funzione che è 1 nei punti di $g_{a,t}$ e nulla nei rimanenti.

Per dimostrare che la condizione è sufficiente basta osservare che se $\{\varphi_n\}$ non è chiuso esiste una funzione normale θ ortogonale a tutte le $\{\varphi_n\}$ e aggiungendo alla successione $\{\varphi_n\}$ questa funzione θ e considerando come avanti la funzione f che è uguale ad 1 nei punti di $g_{a,t}$ e nulla nei rimanenti, si dovrà avere per la limitazione di BESSEL

$$\mu(t) \geqslant \sum_n^{1\ldots\infty}\left[\int_{g_{a,t}} \varphi_n dt\right]^2 + \left[\int_{g_{a,t}} \theta dt\right]^2$$

e per la (6) $\int_{g_{a,t}} \theta dt = 0$ qualunque sia t. Si ha da qui che la θ è generalmente nulla in qualunque tratto finito che ha un estremo in a e perciò generalmente nulla, contrariamente all'ipotesi.

Se abbandoniamo la condizione che l'aggregato g sia di misura finita la seconda parte del nostro ragionamento resta ancora valida, abbiamo quindi il

TEOREMA 27. - Condizione sufficiente perchè una successione di funzioni $\{\varphi_n\}$ normali e due a due ortogonali in un aggregato g [di misura finita o no] formi un sistema chiuso è che indicata con $\mu(t)$ la misura dell'aggregato $g_{a,t}$ dei punti di g compresi tra un punto fisso a e uno generico t della retta cui appartiene g, si abbia la (6).

Avvertiamo il lettore che direttamente dalla (6) si può dedurre la (5) anche se g è infinito (G. SANSONE [54, *c*)]).

§ 7. - Sistemi cartesiani ortogonali dello spazio Hilbertiano.

1. Sistemi cartesiani ortogonali. - 2. Coordinate cartesiane di un punto dello spazio Hilbertiano. - 3. Teoremi sulla distanza di due punti. - 4. Integrale del prodotto di due funzioni di quadrato sommabile. - 5. Cambiamento del sistema di riferimento.

1. - *Definizione* 15. - Un sistema chiuso di funzioni normali e due a due ortogonali in un aggregato g di misura *finita* si chiama un *sistema cartesiano ortogonale* in H, e le rette $\lambda_1\varphi_1$, $\lambda_2\varphi_2,\ldots,$ $\lambda_n\varphi_n,\ldots$ gli *assi* del sistema.

2. - *Definizione* 16. - Se

$$\varphi_1, \quad \varphi_2,\ldots, \quad \varphi_n,\ldots \tag{1}$$

è un sistema cartesiano ortogonale in H, ed $f(t)$ è un punto di H, le costanti di FOURIER

$$a_n = \int_g f\varphi_n dt \qquad (n=1, 2,\ldots) \tag{2}$$

si chiamano le *coordinate del punto* f rispetto al sistema (1), e si scrive

$$f \equiv (a_1, a_2,\ldots, a_n,\ldots); \qquad f \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n.$$

L'origine ha tutte le coordinate nulle [cfr. § 3, 1].

I punti $\lambda\varphi_n$ della retta $\lambda\varphi_n$ hanno tutte le coordinate nulle tranne la n^{esima} uguale a λ [cfr. § 3, 3].

TEOREMA 28. - Se due punti f_1 e f_2 hanno le medesime coordinate coincidono.

Dimostrazione. - Infatti l'uguaglianza

$$\int_g f_1\varphi_n dt = \int_g f_2\varphi_n dt$$

porta

$$\int_g (f_1 - f_2)\varphi_n dt = 0,$$

e poichè $\{\varphi_n\}$ è chiuso, la differenza $f_1 - f_2$ è generalmente nulla in g.

TEOREMA 29. - Se $f \equiv (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, allora la serie $\sum_n^{1\ldots\infty} a_n^2$ è convergente e

$$\sum_n^{1\ldots\infty} a_n^2 = \int_g f^2 dt; \tag{3}$$

inversamente data una successione $\{a_n\}$ di costanti reali, se la serie $\sum_n^{1\ldots\infty} a_n^2$ è convergente, esiste uno e un sol punto f tale che

$$f \equiv (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots).$$

Dimostrazione. - Basterà ricordare i teoremi 22, 20 (di FISCHER-RIESZ), 28.

3. - TEOREMA 30. - Se

$$f_1 \equiv (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots), \quad f_2 \equiv (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$$

e se d è la distanza dei due punti f_1 e f_2 [cfr. § 3, 2] ha luogo la relazione

$$d^2 = \sum_n^{1\ldots\infty} (a_n - b_n)^2. \tag{4}$$

Dimostrazione. - Il punto $f_1 - f_2$ ha per le (2) le coordinate $a_1 - b_1$, $a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n, \ldots$ e applicando la (3) si ottiene la (4) che estende la nota formula dell'ordinario spazio euclideo.

In particolare se $f \equiv (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, $\sum_i^{1\ldots\infty} a_i^2$ rappresenta la distanza di f dall'origine.

4. - TEOREMA 31. - Se

$$f_1 \equiv (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots), \quad f_2 \equiv (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$$

si ha anche

$$\int_g f_1 f_2 dt = \sum_n^{1\ldots\infty} a_n b_n. \tag{5}$$

Dimostrazione. - La successione

$$\omega_1 = a_1\varphi_1, \quad \omega_2 = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2, \ldots, \quad \omega_n = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \ldots + a_n\varphi_n, \ldots$$

ha per quasi limite f_1 [teor. 22, teor. 14], quindi [teor. 16]

$$\int_g f_1 f_2 dt = \lim_{n\to\infty} \int_g \omega_n f_2 dt =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left[a_1 \int_g f_2\varphi_1 dt + a_2 \int_g f_2\varphi_2 dt + \ldots + a_n \int_g f_2\varphi_n dt\right] =$$
$$= \lim_{n\to\infty} [a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n] = \sum_n^{1\ldots\infty} a_n b_n.$$

Osservazione. - Consideriamo le due rette $\lambda_1 f_1$, $\lambda_2 f_2$ per l'origine, ove f_1 e f_2 sono due punti aventi la distanza 1 dall'origine;

$$f_1 \equiv (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots), \quad f_2 \equiv (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots);$$
$$\int_g f_1^2 dt = \int_g f_2^2 dt = 1.$$

Detto con ω l'angolo tra 0 e π delle due rette abbiamo (def. 7)

$$\cos\omega = \int_g f_1 f_2 dt = \sum_n^{1\ldots\infty} a_n b_n. \tag{6}$$

ed anche questa formula generalizza l'analoga dell'ordinario spazio euclideo.

È utile nelle applicazioni il seguente teorema che generalizza la (5) [M. PICONE, (45), c)].

TEOREMA 32. - Sia $\theta(t)$ una funzione non negativa, sommabile in un aggregato misurabile g [non necessariamente di misura finita], $\{\theta^{\frac{1}{2}}(t)\varphi_n(t)\}$ un sistema [non necessariamente chiuso] di funzioni normalizzate e ortogonali in g; $\theta^{\frac{1}{2}}f_1(t)$ una funzione di quadrato sommabile in g, e posto

$$(7)\qquad a_n=\int_g \theta\varphi_n f_1 dt,\qquad \theta^{\frac{1}{2}}f_1\sim\theta^{\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n$$

si abbia

$$(8)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\int_g \theta f_1^2 dt.$$

[Se il sistema $\{\theta^{\frac{1}{2}}\varphi_n\}$ è chiuso la (8) è necessariamente verificata (teor. 23)].

Sia $f_2(t)$ una funzione misurabile in g e si abbia

$$(9)\qquad |f_2(t)|\leqslant\theta(t),$$

e qualunque sia il sub-aggregato misurabile γ di g si ponga

$$(10)\qquad b_n(\gamma)=\int_\gamma f_2\varphi_n dt.$$

Vogliamo allora dimostrare che si ha

$$(11)\qquad \int_\gamma f_1f_2 dt=\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n(\gamma)$$

e la serie del secondo membro è convergente assolutamente, e uniformemente rispetto a γ.

Dimostrazione. - La sommabilità in g del quadrato di $\theta^{\frac{1}{2}}$ e di $\theta^{\frac{1}{2}}|f_1|$ $[\theta^{\frac{1}{2}}|\varphi_n|]$ porta la sommabilità in g di $\theta|f_1|$ $[\theta|\varphi_n|]$ e per la (9) anche la sommabilità di f_1f_2 $[f_2\varphi_n]$, perciò gli integrali che figurano nelle (10) e (11) hanno significato.

Posto d'altra parte

$$(12)\qquad F_n(t)=\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi_k(t)$$

si ha

$$\left|\int_\gamma f_2F_n dt-\int_\gamma f_2f_1 dt\right|=\left|\int_\gamma f_2(F_n-f_1)dt\right|\leqslant\int_\gamma\theta|F_n-f_1|\,dt$$

e perciò per la limitazione di BUNIKOWSKY-SCHWARZ

$$(13)\qquad \left|\int_\gamma f_2F_n dt-\int_\gamma f_1f_2 dt\right|\leqslant\sqrt{\int_g\theta dt}\sqrt{\int_g\theta|F_n-f_1|^2dt}.$$

Ora dalla (8) si ha [teor. 13]

$$\lim_{n\to\infty}\int_g\theta|F_n-f_1|^2dt=0$$

e dalla (13) segue appunto la (11) e la convergenza uniforme rispetto a γ.

Cambiando l'ordine dei termini della successione $\{\theta^{\frac{1}{2}}\varphi_n\}$ restano le stesse conclusioni, quindi la serie che figura nel secondo membro della (11) è anche assolutamente convergente, e così il teorema è dimostrato.

Osservazione 1. - Se supponiamo $\theta(t)=\theta_1(t)\theta_2(t)$ con $\theta_2(t)\geqslant\varrho>0$, quando t varia in un sub-aggregato misurabile g' di g, e per la funzione f_2 in luogo della (9) imponiamo l'altra condizione

$$(9')\qquad |f_2|\leqslant\theta_1,$$

la (11) resta ancora valida per tutti i sub-aggregati misurabili γ di g'.

Si ha infatti $\theta_1=\theta/\theta_2<\theta/\varrho$ e la (13) si scriverà ora

$$(13')\qquad \left|\int_\gamma f_2F_n dt-\int_\gamma f_1f_2 dt\right|\leqslant\frac{1}{\varrho}\sqrt{\int_g\theta dt}\sqrt{\int_g\theta|F_n-f_1|^2dt}.$$

Osservazione 2. - Quando sia $\theta=1$, g finito, $\{\varphi_n\}$ chiuso, $\gamma=g$, la (11) è un caso particolare della (5).

5. - Supponiamo che

$$(14)\qquad \{\varphi_n\},\qquad\qquad (14')\qquad \{\psi_n\}$$

siano due sistemi cartesiani ortogonali in H, e dato il punto f, nel sistema (14) si abbia

$$f\equiv(x_1, x_2,\dots, x_n,\dots),\qquad (15)\qquad x_n=\int_g f\varphi_n dt,$$

e nel sistema (14')

$$f\equiv(y_1, y_2,\dots, y_n,\dots)\qquad (15')\qquad y_n=\int_g f\psi_n dt.$$

Vogliamo trovare le relazioni che intercedono tra le coordinate $(x_1, x_2,\dots, x_n,\dots)$, $(y_1, y_2,\dots, y_n,\dots)$ del punto f.

Siccome la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n\varphi_n$ converge in media verso f [def. 14] ne viene (teor. 16)

$$\lim_{m\to\infty}\int_g (x_1\varphi_1+x_2\varphi_2+ \dots +x_m\varphi_m)\psi_n dt=\int_g f\psi_n dt=y_n$$

ovvero posto

$$a_{m,n}=\int_g \varphi_m\psi_n dt \qquad (m, n=1, 2,\dots) \tag{16}$$

$$\sum_m^{1\dots\infty} a_{m,n}x_m=y_n \qquad (n=1, 2,\dots) \tag{17}$$

e analogamente, cambiando le φ_n con le ψ_n

$$\sum_n^{1\dots\infty} a_{m,n}y_n=x_m \qquad (m=1, 2,\dots). \tag{17'}$$

Le (17) e (17′) sono le formule richieste.

Possiamo subito determinare un gruppo di relazioni fondamentali tra le costanti $a_{m,n}$.

Sia $f=\psi_r$, avremo

$$x_m=\int_g \psi_r\varphi_m dt=a_{m,r}\,;$$

$$y_1=0,\quad y_2=0,\dots,\quad y_{r-1}=0,\quad y_r=1,\quad y_{r+1}=0,\dots$$

e la (17) dà

$$\sum_m^{1\dots\infty} a^2_{m,n}=1\,;\qquad \sum_m^{1\dots\infty} a_{m,n}a_{m,r}=0 \quad \text{se} \quad n\neq r. \tag{18}$$

Analogamente se facciamo $f=\varphi_r$ otteniamo

$$\sum_n^{1\dots\infty} a^2_{m,n}=1\,;\qquad \sum_n^{1\dots\infty} a_{m,n}a_{r,n}=0 \quad \text{se} \quad m\neq r \quad [1]. \tag{18'}$$

---

[1] Il lettore che desideri approfondire l'argomento consulti G. VITALI: *Geometria nello Spazio Hilbertiano*, (1929, N. Zanichelli), [63, a)].

CAPITOLO II.

Sviluppi in serie di Fourier [1].

§ 1. - Approssimazione in media di una funzione mediante un polinomio trigonometrico di ordine n.

1. - *Definizione* 1. - Un polinomio della forma

$$\frac{1}{2}a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+ \dots +a_n\cos nx$$
$$+b_1\,\mathrm{sen}\,x+b_2\,\mathrm{sen}\,2x+\dots+b_n\,\mathrm{sen}\,nx$$

dove le a_k e le b_k sono costanti, con $a_n^2+b_n^2\neq 0$, chiamasi un *polinomio trigonometrico di ordine n*.

Ricordando le formule

$$\cos kx=\binom{k}{0}\cos^k x-\binom{k}{2}\cos^{k-2}x\,\mathrm{sen}^2\,x+\dots;$$
$$\mathrm{sen}\,kx=\binom{k}{1}\cos^{k-1}x\,\mathrm{sen}\,x-\binom{k}{3}\cos^{k-3}x\,\mathrm{sen}^3\,x+\dots$$

ne viene che ogni polinomio trigonometrico di ordine n è anche un polinomio di grado n in $\cos x$ e $\mathrm{sen}\,x$; inversamente per la formula

$$2^{2k-1}\cos^{2k}x=\binom{2k}{0}\cos 2kx+\binom{2k}{1}\cos(2k-2)x+\dots+\frac{1}{2}\binom{2k}{k}$$

e le altre analoghe per $\cos^{2k+1}x$, $\mathrm{sen}^{2k}\,x$, $\mathrm{sen}^{2k+1}\,x$ si ha che ogni polinomio trigonometrico di grado n in $\cos x$ e $\mathrm{sen}\,x$ è un polinomio di ordine non superiore ad n.

Ciò premesso sia data una funzione $f(x)$ a quadrato sommabile in $(-\pi,\pi)$ e ci si proponga di trovare il polinomio trigonometrico

---

[1] Limitiamo il nostro studio ai più elementari resultati della teoria degli sviluppi in serie di FOURIER; il lettore desideroso di ampli orientamenti potrà consultare l'eccellente trattato di L. TONELLI: *Serie Trigonometriche* (Bologna, N. Zanichelli, 1928), [63, *a*)].

di ordine non superiore ad n che ha da $f(x)$ la minima distanza [Cap. I, § 4, 2].

Note formule ci assicurano che il sistema

$$(1)\qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}};\quad \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\mathrm{sen}\,kx}{\sqrt{\pi}},\qquad (k=1,2,\dots)$$

è normalizzato e ortogonale, ne viene [Cap. I, § 4, 2] che se noi indichiamo con $\frac{1}{2}A_0$; A_k, B_k $(k=1,2,\dots)$ i coefficienti di FOURIER di $f(x)$ rispetto al sistema (1), se poniamo cioè

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}A_0=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx; \\ A_k=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx dx,\qquad B_k=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{sen}\,kx dx \quad (^1), \end{cases}$$

il polinomio

$$\frac{1}{2}A_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}A_1\cos x+\frac{1}{\sqrt{\pi}}A_2\cos 2x+\dots+\frac{1}{\sqrt{\pi}}A_n\cos nx$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}B_1\,\mathrm{sen}\,x+\frac{1}{\sqrt{\pi}}B_2\,\mathrm{sen}\,2x+\dots+\frac{1}{\sqrt{\pi}}B_n\,\mathrm{sen}\,nx$$

rappresenta il polinomio trigonometrico di ordine non superiore ad n che ha da $f(x)$ la minima distanza, di guisa che se noi poniamo

$$(3)\quad \begin{cases} a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx; \\ a_k=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx dx,\qquad b_k=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{sen}\,kx dx \quad (k=1,2,\dots) \end{cases}$$

il polinomio

$$(4)\qquad \frac{1}{2}a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\dots+a_n\cos nx$$
$$+b_1\,\mathrm{sen}\,x+b_2\,\mathrm{sen}\,2x+\dots+b_n\,\mathrm{sen}\,nx$$

è il polinomio richiesto.

---

[1] Ricordiamo che col simbolo $\int_a^b f(x)dx$ con $a\leq b$ intendiamo l'integrale di LEBESGUE di $f(x)$ esteso al tratto (a,b), e quando sia $a>b$ poniamo $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.

Abbiamo allora il

Teorema 1. - Il polinomio trigonometrico (4), dove i coefficienti a_k, b_k hanno l'espressione (3), è fra tutti i polinomi trigonometrici di ordine n quello che in $(-\pi, \pi)$ ha da $f(x)$ la minima distanza.

§ 2. - Convergenza in media della serie di Fourier di una funzione a quadrato sommabile.

1. Serie di Fourier e costanti di Fourier di una funzione sommabile $f(x)$. - 2. Serie di coseni e di seni. - 3. Chiusura del sistema $1/\sqrt{2\pi}$, $(\cos kx)/\sqrt{\pi}$, $(\operatorname{sen} kx)/\sqrt{\pi}$ in $(-\pi, \pi)$ rispetto alle funzioni sommabili. - 4. Teorema di Parseval. - 5. Teorema di integrazione per sostituzione nell'integrale di Lebesgue.

1. - *Definizione* 2. - Data una funzione $f(x)$ sommabile, col periodo 2π, le costanti $\frac{1}{2}a_0$; a_k, b_k date dalle formule

$$(1)\quad \begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx; \\ a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx, \qquad b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx dx \quad (k=1, 2,....), \end{cases}$$

chiamansi le *costanti di Fourier* della $f(x)$, e la serie (trigonometrica)

$$(2)\qquad \frac{1}{2}a_0 + \sum_k^{1...\infty}(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

la serie di Fourier della $f(x)$.

Tra i coefficienti di Fourier e le costanti di Fourier della $f(x)$, a motivo delle (2) del § 1 sussistono le relazioni

$$(3)\qquad \frac{1}{2}A_0 = \sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{2}a_0\right); \qquad A_k = \sqrt{\pi}a_k, \quad B_k = \sqrt{\pi}b_k \quad (k=1, 2,....).$$

Supposta la $f(x)$ periodica col periodo 2π [1], le costanti di

[1] Negli studi di questo capitolo, quando avremo occasione di considerare funzioni periodiche, le supporremo col periodo 2π; ciò non limita evidentemente la generalità delle nostre considerazioni perchè se $f(x)$ è definita tra $-\infty$ e $+\infty$ ed ha il periodo ω, la funzione $F(x) = f\left(\frac{\omega}{2\pi}x\right)$ è periodica col periodo 2π.

Fourier della $f(x)$ possiamo anche calcolarle con le formule

$$(1')\quad \begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{a}^{a+2\pi} f(x)dx; \\ a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\cos kx dx, \qquad b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{a}^{a+2\pi} f(x) \operatorname{sen} kx dx \quad (k=1, 2,....), \end{cases}$$

ove a è una costante qualsiasi.

Per indicare che la serie (2) è la serie di Fourier di $f(x)$ si usa la notazione di Hurwitz [1]

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_k^{1...\infty}(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx),$$

e beninteso con questo non affermiamo che la serie del secondo membro rappresenti una serie convergente, e che se essa converge, la sua somma sia $f(x)$.

2. - **Teorema** 2. - Se una funzione $f(x)$ sommabile in $(-\pi, \pi)$ soddisfa la condizione

$$(4)\qquad f(x) = f(-x), \qquad [(3')\quad f(x) = -f(-x)]$$

ossia è una funzione pari (dispari), la sua serie di Fourier si riduce ad una *serie di coseni* (*seni*).

Dimostrazione. - Se $f(x)$ verifica la (4) si ha

$$f(x)\cos kx = f(-x)\cos(-kx); \qquad f(x) \operatorname{sen} kx = -f(-x)\operatorname{sen}(-kx),$$

perciò

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx dx, \qquad b_k = 0, \quad (k=0, 1, 2,....),$$

quindi

$$(5)\qquad f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_k^{1...\infty} a_k \cos kx, \qquad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx dx,$$

[1] A. Hurwitz: *Ueber die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen*, Math. Annalen, Bd. 57 (1903), pp. 425-446; oppure A. Hurwitz, Math. Werke, I, 556.

e analogamente se $f(x)$ è dispari, avremo

$$(5') \qquad f(x)=\sum_k^{1\ldots\infty} b_k \operatorname{sen} kx, \qquad b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx dx.$$

Abbiamo quindi che per una funzione $f(x)$ sommabile in $(0, \pi)$ possiamo considerare l'uno o l'altro dei due sviluppi (5), (5').

3. - Per applicare alle nostre serie i resultati conseguiti nel Cap. I, converrà dimostrare il

TEOREMA 3. - Il sistema di funzioni

$$(6) \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}; \qquad \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \qquad \frac{\operatorname{sen} kx}{\sqrt{\pi}}, \qquad (k=1, 2,....)$$

è chiuso in $(0, 2\pi)$, ossia non esiste alcuna funzione $\theta(x)$ a quadrato sommabile in $(0, 2\pi)$ tale che

$$(7) \qquad \int_0^{2\pi}\theta(x)dx=0; \qquad \int_0^{2\pi}\theta(x)\cos kx dx=0, \qquad \int_0^{2\pi}\theta(x)\operatorname{sen} kx dx=0,$$

$$(k=1, 2,....).$$

Dimostrazione. - Per il teorema di VITALI basterà provare che [Cap. I, teor. 26 (1)]

$$x=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x dx\right)^2+\sum_n^{1\ldots\infty}\frac{1}{\pi}\left[\left(\int_0^x \cos nx dx\right)^2+\left(\int_0^x \operatorname{sen} nx dx\right)^2\right]$$

$$=\frac{x^2}{2\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_n^{1\ldots\infty}\frac{1}{n^2}-\frac{2}{\pi}\sum_n^{1\ldots\infty}\frac{\cos nx}{n^2},$$

ovvero, essendo $\sum_n^{1\ldots\infty} 1/n^2=\pi^2/6$ (2) basterà provare che

$$(8) \qquad \sum_n^{1\ldots\infty}\frac{2\cos nx}{n^2}=\frac{x^2}{2}-\pi x+\frac{\pi^2}{3}, \qquad (0\leqq x\leqq 2\pi).$$

Questa identità dovuta a D. BERNOULLI [HOBSON (25, *a*)), II, p. 480] noi la proveremo direttamente come segue. Posto

$$f(x)=\frac{x^2}{2}-\pi x+\frac{\pi^2}{3}$$

(1) Cfr. A. TONOLO [61].

(2) Cfr., ad es., L. BIANCHI: *Lezioni sulla Teoria delle Funzioni di variabile complessa* (Pisa, 1901), p. 177.

si ha

$$(9) \qquad \int_0^{2\pi} f^2(x)dx=\frac{2\pi^5}{45}.$$

I coefficienti di FOURIER di $f(x)$ rispetto al sistema normale e ortogonale (6) sono

$$(10) \qquad A_0=0, \qquad A_n=\frac{2\sqrt{\pi}}{n^2}, \qquad B_n=0, \qquad (n=1, 2,....)$$

ed esse provano che il primo membro della (8) rappresenta la serie di FOURIER del secondo membro.

Abbiamo ora

$$\sum_n^{1\ldots\infty} A_n^2=4\pi\sum_n^{1\ldots\infty} 1/n^4=2\pi^5/45 \quad (1)$$

perciò confrontando con la (9)

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)dx=\sum_n^{1\ldots\infty} A_n^2,$$

quindi [Cap. I, teor. 13] la serie

$$(11) \qquad \sum_n^{1\ldots\infty}(2\cos nx)/n^2$$

converge in media in $(0, 2\pi)$ verso $f(x)$, e si possono perciò associare i suoi termini in guisa che la nuova serie risulti generalmente convergente verso $f(x)$ [Cap. I, § 6, n.° 5, osservazione].

D'altra parte la serie dei valori assoluti della (11), i cui termini sono funzioni continue della x, è minorante della serie $\sum_n^{1\ldots\infty} 1/n^2$, la (11) è quindi (assolutamente e uniformemente) convergente verso una funzione continua $\psi(x)$; la differenza $f(x)-\psi(x)$ è generalmente nulla in $(0, 2\pi)$, e per la continuità di $f(x)$ e $\psi(x)$, è nulla dappertutto.

Possiamo completare il teorema precedente col

TEOREMA 4. - Se una funzione $\theta(x)$ sommabile in $(0, 2\pi)$ soddisfa le (7) essa è generalmente nulla in $(0, 2\pi)$.

Dimostrazione. - La funzione sommabile $\theta(x)$ verifichi le (7)

(1) Vedi nota (2) della pagina precedente.

e si consideri la funzione (assolutamente continua) $\omega(x)$ definita dalla relazione

$$\omega(x)=c+\int_0^x \theta(x)dx$$

con

$$c=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}dx\int_0^x \theta(x)dx.$$

Si avrà

$$\int_0^{2\pi}\omega(x)dx=0, \qquad \omega(0)=c, \qquad \omega(2\pi)=c+\int_0^{2\pi}\theta(x)dx=c,$$

quindi integrando per parti [I, Cap. V, § 2, n.° 10],

$$0=\int_0^{2\pi}\theta(x)\cos nxdx=[\omega(x)\cos nx]_0^{2\pi}+$$
$$+n\int_0^{2\pi}\omega(x)\operatorname{sen} nxdx=n\int_0^{2\pi}\omega(x)\operatorname{sen} nxdx,$$
$$0=\int_0^{2\pi}\theta(x)\operatorname{sen} nxdx=[\omega(x)\operatorname{sen} nx]_0^{2\pi}-$$
$$-n\int_0^{2\pi}\omega(x)\cos nxdx=-n\int_0^{2\pi}\omega(x)\cos nxdx,$$

e perciò la $\omega(x)$ soddisfa le (7), ma essa è continua (quindi a quadrato sommabile) perciò la $\omega(x)$ è per il teorema precedente identicamente nulla; ma si ha generalmente $\omega'(x)=\theta(x)$ [I, Cap. V, teor. 12], perciò $\theta(x)$ è generalmente nulla in $(0, 2\pi)$ c. v. d.

Corollario. - Se due funzioni sommabili hanno le stesse costanti di FOURIER, esse sono generalmente uguali (e inversamente).

Dal teorema 3, in virtù del teorema 22 del Cap. I segue il

TEOREMA 5. - Se $f(x)$ è una funzione di quadrato sommabile in $(-\pi, \pi)$ la sua serie di FOURIER

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_k^{1\ldots\infty}(a_k\cos kx+b_k\operatorname{sen} kx)$$

converge in media in $(-\pi, \pi)$ verso $f(x)$, si ha cioè

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[f(x)-\frac{1}{2}a_0-\sum_k^{1\ldots n}(a_k\cos kx+b_k\operatorname{sen} kx)\Big]^2dx=0.$$

Se poniamo

$$S_n(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_k^{1\ldots n}(a_k\cos kx+b_k\operatorname{sen} kx)$$

abbiamo anche che si può formare una successione di somme parziali

$$S_{n_1}(x),\quad S_{n_2}(x),\ldots,\quad S_{n_m}(x),\ldots$$

tale che si abbia generalmente in $(-\pi, \pi)$

$$\lim_{m\to\infty}S_{n_m}(x)=f(x)$$

[Cap. I, § 6, n.° 5, osservazione].

Dichiariamo subito che gli studi che andremo a fare nei § seguenti riguardano la convergenza puntuale della serie di FOURIER.

4. - Sia $f(x)$ a quadrato sommabile in $(-\pi, \pi)$, tra le sue costanti di FOURIER e la $f(x)$ sussiste la relazione espressa dall'uguaglianza di BESSEL [Cap. I, teor. 22]

$$\frac{1}{4}A_0^2+\sum_k^{1\ldots\infty}(A_k^2+B_k^2)=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx,$$

ovvero per le (3) del § 2

$$\text{(12)}\qquad \frac{1}{2}a_0^2+\sum_k^{1\ldots\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx,$$

[formula di PARSEVAL [43]], abbiamo perciò il

TEOREMA 6. - Se $f(x)$ è a quadrato sommabile in $(-\pi, \pi)$, tra i suoi coefficienti di FOURIER e la $f(x)$ stessa sussiste la (12).

Più in generale siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni a quadrato sommabile in $(-\pi, \pi)$, e si ponga

$$\text{(13)}\qquad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx, \qquad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\operatorname{sen} kxdx$$

$$\text{(13')}\qquad \alpha_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos kxdx, \qquad \beta_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\operatorname{sen} kxdx$$

$$(k=0, 1, 2,\ldots)$$

avremo per il teorema 31 del Cap. I, e per le (3) del § 2

(14) $$\frac{1}{2}a_0\alpha_0+\sum_k^{1\dots\infty}(a_k\alpha_k+b_k\beta_k)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx,$$

[formula di PARSEVAL generalizzata], quindi il

TEOREMA 6'. - Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni a quadrato sommabile in $(-\pi, \pi)$ tra le loro costanti di FOURIER, calcolate con le (13) e (13') e le $f(x)$ e $g(x)$ sussiste la relazione (14).

5. - Vogliamo qui dimostrare il teorema di integrazione per sostituzione e conviene per questo premettere un'osservazione e un teorema preliminare.

Consideriamo il sistema ortogonale e normale in $(-l\pi, l\pi)$

$$\frac{1}{\sqrt{2l\pi}}; \quad \frac{1}{\sqrt{l\pi}}\cos\frac{k}{l}x, \quad \frac{1}{\sqrt{l\pi}}\operatorname{sen}\frac{k}{l}x \qquad (k=1, 2,\dots);$$

esso è chiuso in $(-l\pi, l\pi)$; basterà per questo effettuare negli integrali [di funzioni continue] che figurano nell'equazione di chiusura del VITALI la sostituzione $lx=y$. Ne viene che se $f(x)$ è a quadrato sommabile in $(-l\pi, l\pi)$ e poniamo

$$a_k=\frac{1}{l\pi}\int_{-l\pi}^{l\pi}f(x)\cos\frac{k}{l}x\,dx, \qquad b_k=\frac{1}{l\pi}\int_{-l\pi}^{l\pi}f(x)\operatorname{sen}\frac{k}{l}x\,dx$$

la serie

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_k^{1\dots\infty}\left(a_k\cos\frac{k}{l}x+b_k\operatorname{sen}\frac{k}{l}x\right)$$

converge in media verso $f(x)$ in $(-l\pi, l\pi)$.

Questa osservazione serve a rendere la dimostrazione del teorema seguente indipendente dal teorema di integrazione per sostituzione nell'integrale di LEBESGUE, teorema che ci proponiamo appunto di dimostrare.

TEOREMA 7. - Se $f(x)$ è una funzione sommabile nell'intervallo finito $g=(a, b)$, fissato un numero $\sigma>0$ e arbitrario, esiste una funzione continua $P(x)$ definita in (a, b) tale che

$$\int_g |f(x)-P(x)|\,dx<\sigma.$$

Dimostrazione. - Supponiamo dapprima che g coincida con l'intervallo $(-l\pi, l\pi)$. Se $f(x)$ è limitata e perciò a quadrato sommabile la proposizione da dimostrare è conseguenza dell'osservazione precedente e dell'osservazione del Cap. I, § 6, n.° 5; basterà infatti assumere $P(x)$ sotto la forma

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_k^{1\dots n}\left(a_k\cos\frac{k}{l}x+b_k\operatorname{sen}\frac{k}{l}x\right)$$

con n sufficientemente grande.

Sia $f(x)$ sommabile in g e per ogni intero positivo n indichi g_n l'aggregato dei punti g in cui $|f(x)|\leq n$, posto $\delta_n=g-g_n$, ogni δ_n contiene il successivo, il loro prodotto è di misura nulla, quindi [I, Cap. IV, teor. 21] $\lim_{n\to\infty}\int_{\delta_n}|f|\,dx=0$, e fissato perciò $\sigma>0$ possiamo trovare un δ_n tale che

$$\int_{\delta_n}|f|\,dx<\frac{\sigma}{2}.$$

Se indichiamo con $f_1(x)$ $[f_2(x)]$ la funzione uguale ad f in g_n $[\delta_n]$ e nulla in δ_n $[g_n]$ la $f_1(x)$ è limitata in g e perciò possiamo determinare una funzione continua $P(x)$ tale che $\int_g|f_1(x)-P(x)|\,dx<\sigma/2$; si avrà allora

$$\int_g|f-P|\,dx=\int_g|f_1+f_2-P|\,dx\leq\int_g|f_1-P|\,dx+\int_{\delta_n}|f|\,dx<\sigma.$$

Quando g non coincide con $(-l\pi, l\pi)$, scelto $l>0$ in guisa che si abbia $-l\pi\leq a<b\leq l\pi$ basterà riferirsi alla funzione $F(x)$ uguale ad $f(x)$ in g e nulla in $(-l\pi, a)$ $(b, l\pi)$ e determinare la corrispondente funzione continua $P(x)$.

TEOREMA 7'. - Sia $f(x)$ una funzione sommabile nell'intervallo $g=(a, b)$; vogliamo dimostrare che una successione $\{f_n(x)\}$ di funzioni $f_n(x)$ continue in g può determinarsi tale che generalmente in g si abbia

(15) $$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$$

ed anche

(16) $$\lim_{n\to\infty}\int_g|f(x)-f_n(x)|\,dx=0.$$

Se inoltre in (a, b) si ha

(17) $$l \leq f(x), \qquad [f(x) \leq L]$$

può anche prescriversi per la successione $\{f_n(x)\}$ la condizione

(17') $$l \leq f_n(x), \qquad [f_n(x) \leq L].$$

Dimostrazione. - Si consideri infatti la successione numerica $\{1/2^n\}$ e si determini secondo il teorema precedente una corrispondente successione $\{P_n(x)\}$ di funzioni $P_n(x)$ continue in (a, b) tali che

$$\int_g |f - P_n|\, dx < 1/2^n.$$

Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_g |f - P_n|\, dx = 0,$$

perciò dalla successione $\{P_n(x)\}$ una successione $\{f_n(x)\}$ può estrarsi tale che siano verificate le (15) e le (16) [I, Cap. IV; teor. 38, cor.].

Supponiamo ora

$$l \leq f(x)$$

e alla successione $\{f_n(x)\}$ associamo la successione $\{f_n^*(x)\}$ di funzioni $f_n^*(x)$ definite con la seguente legge

$$f_n^*(x) = f_n(x) \quad \text{se} \quad f_n(x) \geq l; \qquad f_n^*(x) = l \quad \text{se} \quad f_n(x) < l.$$

Le $f_n^*(x)$ sono continue in (a, b), si ha per esse $f_n^*(x) \geq l$ e generalmente in (a, b)

$$\lim_{n\to\infty} f_n^*(x) = f(x),$$

e poichè

$$|f(x) - f_n(x)| \geq |f(x) - f_n^*(x)|$$

ne viene anche

$$\lim_{n\to\infty} \int_g |f - f_n^*|\, dx = 0.$$

Con analogo ragionamento si prova che se $l \leq f(x) \leq L$, alla successione $\{f_n(x)\}$ di funzioni continue che verificano le (15) e (16) può imporsi la condizione $l \leq f_n(x) \leq L$ qualunque sia n; basterà definire le $f_n^*(x)$ con la seguente legge

$$f_n^*(x) = f_n(x) \quad \text{se} \quad l \leq f_n(x) \leq L;$$
$$f_n^*(x) = l \quad \text{se} \quad f_n(x) < l; \qquad f_n^*(x) = L \quad \text{se} \quad f_n(x) > L.$$

Teorema 7[2]. - Sia $\varphi(t)$ sommabile nell'intervallo finito (t_0, t_1) e si ponga

(18) $$\Phi(t) = a + \int_{t_0}^{t} \varphi(t)\, dt, \qquad t_0 \leq t \leq t_1, \qquad a = \text{costante},$$

e per t in (t_0, t_1) si abbia

(19) $$\alpha \leq \Phi(t) \leq \beta, \qquad t_0 \leq t \leq t_1.$$

Sia $f(x)$ *continua* in (α, β),

$$\Phi(t_0) = a, \qquad \Phi(t_1) = b,$$

vale allora la formula di integrazione per sostituzione

(20) $$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{t_0}^{t_1} f[\Phi(t)]\varphi(t)\, dt.$$

Dimostrazione. - Siccome $\varphi(t)$ è sommabile in (t_0, t_1) una successione di funzioni continue $\{\varphi_n(t)\}$ può determinarsi tale che generalmente in (t_0, t_1) si abbia

(21) $$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$$

e

(22) $$\lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t_1} |\varphi_n(t) - \varphi(t)|\, dt = 0 \qquad \text{[teor. 7}^1\text{]}.$$

Posto

$$\Phi_n(t) = a + \int_{t_0}^{t} \varphi_n(t)\, dt$$

si ha

$$\lim_{n\to\infty} |\Phi_n(t) - \Phi(t)| = \lim_{n\to\infty} \left| \int_{t_0}^{t} [\varphi_n(t) - \varphi(t)]\, dt \right| \leq$$
$$\leq \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t_1} |\varphi_n(t) - \varphi(t)|\, dt = 0,$$

quindi in (t_0, t_1) si ha *uniformemente*

(23) $$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(t) = \Phi(t).$$

Le $\Phi_n(t)$ risultano uniformemente limitate, e supposto

$$A \leq \Phi_n(t) \leq B \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

noi supponiamo la $f(x)$ prolungata con continuità a destra di β e a sinistra di α in modo che (A, B) risulti contenuto in (α, β).

Essendo $\Phi_n(t)$ continua [assolutamente] e $\Phi_n'(t) = \varphi_n(t)$ con $\varphi_n(t)$ continua, per un noto teorema di calcolo si ha

$$\int_a^{\Phi_n(t_1)} f(x)dx = \int_{t_0}^{t_1} f[\Phi_n(t)]\varphi_n(t)dt, \tag{24}$$

ed è $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n(t_1) = \Phi(t_1) = b$, e generalmente in (t_0, t_1)

$$\lim_{n\to\infty} f[\Phi_n(t)]\varphi_n(t) = f[\Phi(t)]\varphi(t). \tag{25}$$

La successione $\{f[\Phi_n(t)]\varphi_n(t)\}$ ha le integralfunzioni dei moduli dei suoi termini equi-assolutamente-continue in (a, b); infatti se L e il massimo di $|f(x)|$ in (a, b) qualunque sia l'aggregato misurabile γ di (t_0, t_1) si ha

$$\begin{aligned}\int_\gamma |f[\Phi_n(t)]\varphi_n(t)|\,dt &\leq L\int_\gamma |\varphi_n(t)|\,dt \leq \\ &\leq L\left[\int_\gamma |\varphi_n(t)-\varphi(t)|\,dt + \int_\gamma |\varphi(t)|\,dt\right] \leq \\ &\leq L\left[\int_{t_0}^{t_1} |\varphi_n(t)-\varphi(t)|\,dt + \int_\gamma |\varphi(t)|\,dt\right]\end{aligned}$$

e per la (22) e per l'assoluta continuità dell'integralfunzione di $|\varphi(t)|$ ne risulta la nostra affermazione.

Ne viene che nel secondo membro della (24) è lecito il passaggio al limite sotto il segno integrale per $n\to\infty$ [I, Cap. IV, teor. 37] e dalla (24) segue appunto la (20) c. v. d.

Se supponiamo ora $f(x)$ *sommabile* in (a, b) e se conveniamo che il prodotto $f[\Phi(t)]\varphi(t)$ rappresenti lo zero se $\varphi(t) = 0$ [anche se $f[\Phi(t)]$ è infinito], si dimostra che la (20) vale ancora in una delle seguenti ipotesi:

a) $\Phi(t)$ è monotona in (a, b) [LEBESGUE [37, *d*)]].

b) Posto $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ la funzione $F[\Phi(t)]$ risulta assolutamente continua in (t_0, t_1), oppure se $f[\Phi(t)]\varphi(t)$ risulta sommabile in (t_0, t_1), [DE LA VALLÉE-POUSSIN [13, *c*)]].

Noi qui dimostreremo la (22) nell'ipotesi *a*), proveremo cioè il

TEOREMA 7[3]. - Sia $\varphi(t)$ sommabile nell'intervallo finito (t_0, t_1) e si ponga

$$\Phi(t) = a + \int_{t_0}^{t} \varphi(t)dt, \qquad t_0 \leq t \leq t_1, \qquad a = \text{costante}, \tag{26}$$

e la funzione $\Phi(t)$ risulti *non decrescente* [non crescente] in (t_0, t_1)

$$\Phi(t_0) = a, \qquad \Phi(t_1) = b. \tag{27}$$

Sia $f(x)$ *sommabile* in (a, b), (¹) vale allora la formula di integrazione per sostituzione

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_0}^{t_1} f[\Phi(t)]\varphi(t)dt. \tag{28}$$

Dimostrazione. - L'ipotesi $\Phi(t)$ non decrescente in (t_0, t_1) porta che si ha generalmente in (t_0, t_1) $\Phi'(t) = \varphi(t) \geq 0$ [I, Cap. V, teor. 13].

Consideriamo tutti i punti x appartenenti ad un tratto (a', b') di (a, b), se p e q indicano rispettivamente la minima e la massima radice delle equazioni $\Phi(t) = a'$, $\Phi(t) = b'$, la corrispondenza $x = \Phi(t)$ ai punti x del tratto (a', b') fa corrispondere tutti e soltanto i punti t del tratto (p, q); ne viene che in questa corrispondenza ad un boreliano semplice B di (a, b) corrisponde un boreliano semplice B' di (t_0, t_1) e poichè $b' - a' = \int_p^q \varphi(t)dt$ ne segue per la misura $\lambda(B)$ del boreliano B

$$\lambda(B) = \int_{B'} \varphi(t)dt.$$

Sia ora γ *un insieme di misura nulla* di punti x di (a, b) e consideriamo l'insieme γ' di *tutti* i punti t di (t_0, t_1) per i quali il corrispondente valore $x = \Phi(t)$ è un punto x appartenente a γ.

Sia $\varepsilon > 0$ e si formi una copertura semplice B di γ di lunghezza $\lambda(B) < \varepsilon$ [I, Cap. II, § 2, n.° 2]; se in ogni tratto non nullo b di B costruiamo un boreliano semplice b_1 che sia una copertura del subaggregato di γ contenuto nel tratto b stesso e di lunghezza minore della metà della lunghezza di b, i boreliani b_1 formano un bore-

---

(¹) Quando $\Phi(t)$ è non crescente in (t_0, t_1) si avrà $a > b$.

liano semplice B_1 contenuto in B di lunghezza $<\varepsilon/2$ e anch'esso copertura di γ, talchè possiamo definire una successione B, B_1, $B_2, \dots, B_n, \dots$ di boreliani semplici, ciascuno contenuto nel precedente, ciascuno copertura di γ, e con $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(B_n)=0$.

Consideriamo ora i boreliani B', B_1', $B_2', \dots, B_n', \dots$ corrispondenti ai boreliani $B, B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ nella corrispondenza $x=\Phi(t)$; ognuno di essi è una copertura semplice di γ', e poichè ogni B_n' è contenuto nel precedente B'_{n-1}, se indichiamo con $\overline{B}'$ il prodotto $B' \cdot B_1' \cdot B_2' \cdot \dots \cdot B_n' \dots$, *$\overline{B}'$ è una copertura di γ'* e abbiamo

$$\lambda(B_n)=\int_{B'_n} \varphi(t)dt$$

ed anche [I, Cap. IV, teor. 22]

$$0=\lim_{n\to\infty} \lambda(B_n)=\int_{\overline{B}'} \varphi(t)dt$$

e perciò $\varphi(t)$ è generalmente nulla in $\overline{B}'$ salvo al più un insieme di misura nulla, e quindi *in ogni punto t di γ', salvo un insieme di misura nulla, si avrà $\varphi(t)=0$.*

Ciò premesso dimostriamo il teorema *supponendo dapprima $f(x)$ limitata in (a, b)*, $|f(x)|<L$.

Determiniamo una successione $\{f_n(x)\}$ di funzioni continue in (a, b) tali che si abbia generalmente in (a, b)

$$(29) \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$$

e

$$(30_1) \quad \lim_{n\to\infty}\int_a^b |f-f_n|\,dx=0, \qquad (30_2) \quad |f_n(x)|\leqslant L \quad \text{[teor. } 7^1].$$

Poichè $f_n(x)$ è continua in (a, b) per il teorema 7^2 si ha

$$(31) \qquad \int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f_n[\Phi(t)]\varphi(t)dt.$$

Sia γ l'insieme di misura nulla di (a, b) ove non ha luogo la (29). Se un punto x non appartiene a γ, in qualunque punto t ad esso corrispondente per la relazione $x=\Phi(t)$, si ha $\lim\limits_{n\to\infty} f_n[\Phi(t)]=f[\Phi(t)]$; se invece x è in γ, nei punti t corrispondenti, salvo un insieme di

misura nulla, si ha $\varphi(t)=0$ perciò $\lim\limits_{n\to\infty} f_n[\Phi(t)]\varphi(t)=0=f[\Phi(t)]\varphi(t)$, abbiamo quindi generalmente in (t_0, t_1)

$$(32) \qquad \lim_{n\to\infty} f_n[\Phi(t)]\varphi(t)=f[\Phi(t)]\varphi(t).$$

Ora, qualunque sia l'aggregato misurabile τ di (t_0, t_1), si ha:

$$\int_\tau |f_n[\Phi(t)]\varphi(t)|\,dt<L\int_\tau |\varphi(t)|\,dt,$$

le integralfunzioni dei termini della successione $\{f_n[\Phi(t)]\varphi(t)\}$ sono quindi equi-assolutamente-continue, e nella (31) è lecito passare al limite sotto il segno integrale tanto nel primo che nel secondo membro [I, Cap. IV, teor. 37], e in virtù delle (30_1), (32) si ottiene appunto la (28).

Sia infine $f(t)$ sommabile in (a, b); sono sommabili in (a, b) le funzioni $f_1=[|f|+f]/2$, $f_2=[|f|-f]/2$, e poichè $f=f_1-f_2$ basterà supporre la $f(x)$ sommabile e non negativa.

Supposto dunque $f(x)\geqslant 0$ definiamo una successione $\{f_n^*(x)\}$ con la seguente legge:

$$f_n^*(x)=f(x) \quad \text{se} \quad f(x)\leqslant n; \qquad f_n^*(x)=n \quad \text{se} \quad f(x)>n$$
$$(n=1, 2, \dots).$$

Si avrà

$$(33) \qquad f_n^*(x)\geqslant 0, \qquad f_n^*(x)\leqslant f_{n+1}^*(x); \quad (n=1, 2, \dots), \quad a\leqslant x\leqslant b,$$

e nei punti x ove $f(x)$ è finita, cioè generalmente in g

$$(34) \qquad \lim_{n\to\infty} f_n^*(x)=f(x),$$

e poichè $f_n^*(x)$ è limitata in (a, b) si ha anche

$$(35) \qquad \int_a^b f_n^*(x)dx=\int_{t_0}^{t_1} f_n^*[\Phi(t)]\varphi(t)dt.$$

In virtù del teorema 39 di I, Cap. IV, poichè $f(x)$ è sommabile in (a, b) e sono soddisfatte le (33) e (34) si avrà

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n^*(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

quindi dalla (35)

$$(36)\qquad \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t_1} f_n^*[\Phi(t)]\varphi(t)dt.$$

Ragionando come nel caso precedente abbiamo che generalmente in (t_0, t_1) è $\lim_{n\to\infty} f_n^*[\Phi(t)]\varphi(t) = f[\Phi(t)]\varphi(t)$, e siccome è generalmente $\varphi(t)\geqslant 0$ in (t_0, t_1) e perciò i termini della successione $\{f_n^*[\Phi(t)]\varphi(t)\}$ sono generalmente non negativi e non decrescenti, per l'invocato teorema 39 di I, Cap. IV, nel secondo membro della (36) possiamo passare al limite sotto il segno integrale e ritroviamo così la (28).

Le stesse considerazioni da noi svolte restano se $\Phi(t)$ risulta non crescente in (t_0, t_1).

§ 3. - Funzioni continue. Condizioni sufficienti di convergenza puntuale.

1. Funzioni continue con la serie di FOURIER corrispondente uniformemente convergente. - 2. Modulo di continuità. - 3. Modulo di continuità di una funzione lipschitziana. - 4. Ordine di grandezza delle costanti di FOURIER di una funzione continua. - 5. Convergenza uniforme della serie di FOURIER di una funzione continua la cui derivata soddisfi ad una condizione di LIPSCHITZ di ordine $\alpha > 0$.

1. - TEOREMA 8. - Se $f(x)$ è una funzione continua in $(-\pi, \pi)$, e la sua serie di FOURIER

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_k^{1\ldots\infty}(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

è uniformemente convergente in $(-\pi, \pi)$, questa ha per somma $f(x)$.

Dimostrazione. - Posto

$$(1)\qquad \varphi(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_k^{1\ldots\infty}(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

$\varphi(x)$ è una funzione continua in $(-\pi, \pi)$; moltiplicando poi ambo i membri della (1) per $\cos nx$ [$\operatorname{sen} nx$] e integrando tra $-\pi$ e π, siccome la serie

$$\frac{1}{2}a_0 \cos nx + \sum_k^{1\ldots\infty}(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)\cos nx$$

è [uniformemente convergente e perciò] integrabile termine a termine, abbiamo

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nx dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\operatorname{sen} nx dx,$$

perciò la $f(x)$ e la $\varphi(x)$ hanno le medesime costanti di FOURIER e la differenza $f(x)-\varphi(x)$ è generalmente nulla [cor. teor. 4]; ma $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono continue, quindi $f(x)=\varphi(x)$ in $(-\pi, \pi)$.

Corollario. - Se $f(x)$ è una funzione continua in $(-\pi, \pi)$ e le sue costanti di FOURIER sono tali che la serie $\sum_k^{1\ldots\infty}\{|a_k|+|b_k|\}$ risulti convergente, la serie di FOURIER di $f(x)$ è uniformemente convergente ed ha ovunque per somma $f(x)$.

Dimostrazione. - La serie $\sum_k^{1\ldots\infty}|a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx|$ è minorante della serie a termini costanti $\sum_k^{1\ldots\infty}\{|a_k|+|b_k|\}$, essa è quindi uniformemente convergente.

Esempi:

1°). Sia

$$f(x) = -\frac{1}{4}\pi(\pi+x) \quad \text{per} \quad -\pi\leqslant x\leqslant -\frac{1}{2}\pi;$$
$$f(x) = \frac{1}{4}\pi x \quad \text{per} \quad -\frac{1}{2}\pi\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}\pi;$$
$$f(x) = \frac{1}{4}\pi(\pi-x) \quad \text{per} \quad \frac{1}{2}\pi\leqslant x\leqslant \pi.$$

Si avrà

$$f(x) \sim \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 3x}{3^2} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5^2} - \ldots$$

e per l'uniforme convergenza del secondo membro

$$f(x) = \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 3x}{3^2} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5^2} - \ldots$$

2°). Sia

$$f(x) = \frac{1}{4}\pi(\pi+x) \quad \text{per} \quad -\pi\leqslant x\leqslant -\frac{1}{2}\pi;$$
$$f(x) = -\frac{1}{4}\pi x \quad \text{per} \quad -\frac{1}{2}\pi\leqslant x\leqslant 0;$$
$$f(x) = \frac{1}{4}\pi x \quad \text{per} \quad 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}\pi;$$
$$f(x) = \frac{1}{4}\pi(\pi-x) \quad \text{per} \quad \frac{1}{2}\pi\leqslant x\leqslant \pi.$$

Si avrà

$$f(x)=\frac{1}{16}\pi^2-2\left[\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 6x}{6^2}+\frac{\cos 10x}{10^2}+....\right].$$

3°). Sia

$$f(x)=\frac{1}{12}\pi^2-\frac{1}{4}x^2 \quad \text{per} \quad -\pi\leq x\leq\pi;$$

si avrà

$$\frac{1}{12}\pi^2-\frac{1}{4}x^2=\cos x-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-.... \qquad [\text{EULERO}].$$

2. - *Definizione* 3. - Se $f(x)$ è una funzione continua nell'intervallo finito (a, b), la funzione $\omega(\delta)$ definita nell'intervallo $(0, b-a)$ che per ogni valore di δ rappresenta il massimo di $|f(x'')-f(x')|$ per tutte le coppie di valori x', x'' di (a, b) tali che $0\leq x''-x'\leq\delta$ prende il nome di *modulo di continuità* di $f(x)$ in (a, b) [DE LA VALLÉE-POUSSIN [13, a)]].

La funzione $\omega(\delta)$ gode le seguenti proprietà:

1ª). $\omega(\delta)\geq 0$.

2ª). $\omega(\delta)$ è una funzione non decrescente di δ.

3ª). (2) $$\omega(\delta+h)\leq\omega(\delta)+\omega(h).$$

Siano infatti x', x'' due punti di (a,b) tali che $a\leq x'\leq x''\leq x'+\delta+h$; se abbiamo $a\leq x'\leq x''\leq x'+\delta$ si avrà allora $|f(x'')-f(x')|\leq\omega(\delta)\leq\leq\omega(\delta)+\omega(h)$, se invece è $a\leq x'\leq x'+\delta<x''<x'+\delta+h$ è anche $|f(x'')-f(x')|\leq|f(x'')-f(x'+\delta)|+|f(x'+\delta)-f(x')|\leq\omega(h)+\omega(\delta)$.

4ª). Dalla (2) con procedimento di induzione segue che per n intero positivo si ha

(3) $$\omega(n\delta)\leq n\omega(\delta).$$

5ª). Se $\lambda>0$ è

(4) $$\omega(\lambda\delta)\leq(\lambda+1)\omega(\delta).$$

Se λ è intero la (4) segue dalla (3); se λ non è intero e $\lambda+\varepsilon$ è il primo intero superiore a λ, $0<\varepsilon<1$, avremo

$$\omega(\lambda\delta)\leq\omega((\lambda+\varepsilon)\delta)\leq(\lambda+\varepsilon)\omega(\delta)\leq(\lambda+1)\omega(\delta).$$

6ª). $\omega(\delta)$ è una funzione continua di δ.

Per il teorema di CANTOR si ha $\lim_{h\to 0}\omega(h)=0$, e poichè

$$0\leq\omega(\delta+h)-\omega(\delta)\leq\omega(h)$$

è anche

$$\lim_{h\to 0}\omega(\delta+h)=\omega(\delta).$$

7ª). Se per un valore di δ diverso da zero è $\omega(\delta)=0$, la $f(x)$ è costante.

Infatti per $0\leq\delta_1\leq\delta$ si ha $\omega(\delta_1)=0$ e perciò $f(x)$ si annulla in qualunque intervallo di ampiezza $\leq\delta$, $f(x)$ è quindi una costante.

8ª). Se $f(x)$ è una funzione periodica si può definire il suo modulo di continuità per qualunque valore di δ. Osserviamo che *se* $f(x)$ *ha* ad esempio *il periodo* 2π, *il massimo di* $\omega(\delta)$ *è* $\omega(\pi)$, infatti a due valori x', x'' della variabile x possono sostituirsi sempre due congrui modulo 2π con la loro differenza in valore assoluto non superiore a π.

3. - *Definizione* 4. - Una funzione $f(x)$ definita in un intervallo (a, b) si dice che è *lipschitziana di ordine* $\alpha>0$, se esiste una costante L tale che se x_1, x_2 sono due punti qualunque di (a, b) è

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leq L|x_2-x_1|^\alpha, \qquad (\alpha>0).$$

Si ha dalla definizione che le funzioni lipschitziane sono continue.

Ogni funzione lipschitziana di ordine $\alpha>1$ è una costante. È infatti

$$0\leq|[f(x+h)-f(x)]/h|\leq Lh^{\alpha-1}$$

e perciò $f'(x)=0$ per x in (a, b), quindi $f(x)$ costante.

Se $\omega(\delta)$ è il modulo di continuità di una funzione lipschitziana di ordine α vale la formula $\omega(\delta)\leq L\delta^\alpha$.

Inversamente se data una funzione $f(x)$ continua in (a, b) il suo modulo di continuità $\omega(\delta)$ per $0\leq\delta\leq b-a$ soddisfa la limitazione $\omega(\delta)\leq L\delta^\alpha$ la $f(x)$ è lipschitziana di ordine α. Infatti per $0<x''-x'=\delta$ si ha

$$|f(x'')-f(x')|\leq\omega(\delta)\leq L\delta^\alpha=L|x''-x'|^\alpha.$$

4. - TEOREMA 9. - Se $f(x)$ è una funzione continua a periodo 2π e $\omega(x)$ è il suo modulo di continuità, per le sue costanti di FOURIER sussistono le limitazioni

(5) $$|a_n|\leq\omega\left(\frac{\pi}{n}\right), \qquad |b_n|\leq\omega\left(\frac{\pi}{n}\right) \qquad (n=1, 2,....).$$

Dimostrazione. - Si ha infatti

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{n}}^{2\pi-\frac{\pi}{n}} f\left(\xi+\frac{\pi}{n}\right)\cos(n\xi+\pi)\,d\xi=-\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{n}}^{2\pi-\frac{\pi}{n}} f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\cos nx\,dx$$

e per la periodicità di $f(x)$

$$a_n=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\cos nx\,dx$$

quindi

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right]\cos nx\,dx$$

e perciò

$$|a_n|\leqq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)dx=\omega\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

In modo analogo si prova la seconda delle (5).

Dalle (5) segue il

Corollario. - Se $f(x)$ è una funzione continua a periodo 2π, si ha

$$a_n=o(1),\qquad b_n=o(1)\quad (^1). \tag{6}$$

Nel § 4, teor. 13, troveremo che le (6) valgono per qualunque funzione sommabile.

TEOREMA 10. - Se la funzione continua $f(x)$ periodica a periodo 2π ammette derivata continua di ordine r, e se $\omega_r(x)$ indica il modulo di continuità di $f^{(r)}(x)$, per le costanti di FOURIER di $f(x)$ valgono le limitazioni

$$|a_n|\leqq\frac{1}{n^r}\,\omega_r\left(\frac{\pi}{n}\right),\qquad |b_n|\leqq\frac{1}{n^r}\,\omega_r\left(\frac{\pi}{n}\right)\qquad (n=1,2,....). \tag{7}$$

(1) Ricordiamo le notazioni di BACHMANN [*Zahlentheorie* (1894), p. 401] e LANDAU [*Primzahlen* I, (1909), p. 61] $a_n=O(\beta_n)$, $a_n=o(\beta_n)$. Se $\{a_n\}$ e $\{\beta_n\}$ sono due successioni, la notazione $a_n=O(\beta_n)$ che si legge a_n *dell'ordine di* β_n, indica che esiste una costante L indipendente da n tale che per $n>n_0$ si ha $|a_n/\beta_n|<L$. Se è $\lim_{n\to\infty}(a_n/\beta_n)=0$ si scrive $a_n=o(\beta_n)$.

Dimostrazione. - Osserviamo preliminarmente che $f'(x)$, $f^{(2)}(x)$,..., $f^{(r)}(x)$ sono periodiche e col periodo 2π.

Se indichiamo poi con $\frac{1}{2}a_0'$; a_n', b_n', le costanti di FOURIER di $f'(x)$ si ha

$$a_n'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[f(x)\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi}+$$

$$+\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx=nb_n$$

e analogamente

$$b_n'=-na_n.$$

Per induzione si prova che i coefficienti di FOURIER della derivata r^{esima} a meno dell'ordine e del segno sono $n^r a_n$, $n^r b_n$; si ha allora per il teorema 9

$$n^r|a_n|\leqq\omega_r\left(\frac{\pi}{n}\right),\qquad n^r|b_n|\leqq\omega_r\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

e perciò le (7).

5. - TEOREMA 11. - Se $f(x)$ è una funzione continua e periodica col periodo 2π, e se essa possiede derivata prima (continua) la quale soddisfa ad una condizione di LIPSCHITZ di ordine $\alpha>0$, allora la serie di FOURIER di $f(x)$ converge uniformemente ed ha per somma $f(x)$.

Dimostrazione. - Si ha infatti per il teorema precedente

$$|a_n|\leqq\frac{1}{n}\,\omega_1\left(\frac{\pi}{n}\right),\qquad |b_n|\leqq\frac{1}{n}\,\omega_1\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

ma [n.° 3]

$$\omega_1\left(\frac{\pi}{n}\right)\leqq L\left(\frac{\pi}{n}\right)^\alpha,$$

quindi

$$\sum_n^{1...\infty}\{|a_n|+|b_n|\}\leqq 2L\pi^\alpha\sum_n^{1...\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}},$$

e per la convergenza della serie $\sum_n^{1...\infty}1/n^{1+\alpha}$, converge anche la serie $\sum_n^{1...\infty}\{|a_n|+|b_n|\}$ e perciò [cor. teor. 7] è vero il teorema enunciato.

Il teorema dimostrato è un caso particolare del cor. 2 del teor. 17 che dimostreremo nel § seguente.

§ 4. - I più importanti criteri di convergenza puntuale.

1. Limiti di integrali trigonometrici. Teorema di LEBESGUE sulle costanti di FOURIER. - 2. Integrale di DIRICHLET. - 3. Teorema di RIEMANN. - 4. Condizione necessaria e sufficiente di convergenza puntuale. - 5. Criterio sufficiente di convergenza puntuale del DINI. - 6. Esempi. - 7. Enunciati dei criteri di convergenza di DIRICHLET-JORDAN, di CH. J. DE LA VALLÉE-POUSSIN, di LEBESGUE, del DINI, di TONELLI.

1. - TEOREMA 12. - Sia $f(x)$ sommabile nell'intervallo finito (A, B), e a e b due numeri qualunque contenuti in (A, B) e qualunque sia il numero reale μ formiamo gli integrali $(A \leq a < b \leq B)$

$$\int_a^b f(x) \cos \mu x \, dx, \qquad \int_a^b f(x) \operatorname{sen} \mu x \, dx;$$

vogliamo dimostrare che si ha

$$\lim_{\mu\to\infty} \int_a^b f(x) \cos \mu x \, dx = 0, \qquad \lim_{\mu\to\infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen} \mu x \, dx = 0$$

e la tendenza al limite 0 è *uniforme* rispetto agli estremi a e b, cioè fissato un numero ε positivo e arbitrario si può scegliere un numero k indipendente da a e b tale che si abbia qualunque sia $\mu > k$

$$\left| \int_a^b f(x) \cos \mu x \, dx \right| < \varepsilon, \qquad \left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen} \mu x \, dx \right| < \varepsilon \quad (^1).$$

Dimostrazione. - Supponiamo in primo luogo che la $f(x)$ sia continua in (A, B) e scegliamo μ in modo che si abbia

$$a < a + \frac{\pi}{\mu} < b - \frac{\pi}{\mu} < b;$$

si ha

$$\int_a^b f(x) \cos \mu x \, dx = \int_a^{a+\frac{\pi}{\mu}} f(x) \cos \mu x \, dx + \int_{a+\frac{\pi}{\mu}}^b f(x) \cos \mu x \, dx =$$

$$= \int_a^{a+\frac{\pi}{\mu}} f(x) \cos \mu x \, dx - \int_a^{b-\frac{\pi}{\mu}} f\left(x + \frac{\pi}{\mu}\right) \cos \mu x \, dx,$$

$$\int_a^b f(x) \cos \mu x \, dx = \int_a^{b-\frac{\pi}{\mu}} f(x) \cos \mu x \, dx + \int_{b-\frac{\pi}{\mu}}^b f(x) \cos \mu x \, dx$$

(1) H. LEBESGUE [37, a)], p. 61. Per intervalli infiniti cfr. teor. 42.

perciò

$$(1) \qquad 2 \int_a^b f(x) \cos \mu x \, dx = \int_a^{a+\frac{\pi}{\mu}} f(x) \cos \mu x \, dx +$$

$$+ \int_{b-\frac{\pi}{\mu}}^b f(x) \cos \mu x \, dx + \int_a^{b-\frac{\pi}{\mu}} \left[f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{\mu}\right) \right] \cos \mu x \, dx.$$

Essendo $f(x)$ continua in (A, B) esiste una costante M tale che $|f(x)| < M$, quindi il primo e il secondo integrale del secondo membro della (1) sono ciascuno in valore assoluto minore di $M \frac{\pi}{\mu}$; per l'uniforme continuità di $f(x)$ in (A, B) si può, fissato un numero positivo σ, scegliere un k tale che $\mu > k$ sia per qualunque x

$$(2) \qquad \left| f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{\mu}\right) \right| < \sigma$$

e dalla (1) si ha perciò

$$(3) \qquad \left| \int_a^b f(x) \cos \mu x \, dx \right| < M \frac{\pi}{\mu} + \frac{B-A}{2} \sigma.$$

Allora dato ε se scegliamo σ in modo che si abbia $\sigma < \varepsilon/(B-A)$ e determiniamo k in modo che per $\mu > k$ valga la (2), e se è necessario aumentiamo k in guisa che $M\pi/k < \varepsilon/2$, per ogni $\mu > k$ (dove k è indipendente da a e b) abbiamo per la (3)

$$\left| \int_a^b f(x) \cos \mu x \, dx \right| < \varepsilon.$$

Facciamo ora la sola ipotesi che $f(x)$ sia sommabile in (A, B), e determiniamo una funzione continua $P(x)$ in (A, B) tale che

$$\int_A^B |f(x) - P(x)| \, dx < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{[teor. 7].}$$

Avremo

$$\left| \int_a^b f(x) \cos \mu x \, dx \right| = \left| \int_a^b [f(x) - P(x) + P(x)] \cos \mu x \, dx \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |f(x) - P(x)| \, dx + \left| \int_a^b P(x) \cos \mu x \, dx \right|$$

perciò

(4) $$\left|\int_a^b f(x)\cos\mu x\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_a^b P(x)\cos\mu x\,dx\right|.$$

Essendo $P(x)$ continua in (A, B) possiamo determinare un k indipendente da a e da b tale che per $\mu > k$ risulti

(5) $$\left|\int_a^b P(x)\cos\mu x\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e dalla (4) e (5) segue appunto il teorema da dimostrare per il primo integrale.

Ugualmente si ragiona per

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{sen}\,\mu x\,dx.$$

Corollario 1. - Sia $f(x)$ una funzione sommabile in (A, B), α un punto qualunque di (A, B), a e b tali che

(6) $$A \leq \alpha + a \leq \alpha + b \leq B,$$

si ha allora

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_a^b f(\alpha+x)\cos\mu x\,dx = 0, \qquad \lim_{\mu\to\infty}\int_a^b f(\alpha+x)\,\mathrm{sen}\,\mu x\,dx = 0$$

e la tendenza al limite 0 è uniforme rispetto ad α, a, b, soddisfacenti la limitazione (6).

Dimostrazione. - Consideriamo il primo integrale, considerazioni analoghe valgono per il secondo.

Posto $\alpha + x = t$ si ha

$$\int_a^b f(\alpha+x)\cos\mu x\,dx = \int_{a+\alpha}^{b+\alpha} f(t)\cos\mu(t-\alpha)dt =$$
$$= \cos\mu\alpha\int_{a+\alpha}^{b+\alpha} f(t)\cos\mu t\,dt + \mathrm{sen}\,\mu\alpha\int_{a+\alpha}^{b+\alpha} f(x)\,\mathrm{sen}\,\mu t\,dt$$

perciò

$$\left|\int_a^b f(\alpha+x)\cos\mu x\,dx\right| \leq \left|\int_{a+\alpha}^{b+\alpha} f(t)\cos\mu t\,dt\right| + \left|\int_{a+\alpha}^{b+\alpha} f(t)\,\mathrm{sen}\,\mu t\,dt\right|$$

e basterà a questo punto invocare il teorema ora dimostrato.

Corollario 2. - Se $f(x)$ è una funzione sommabile in (A, B) e $g(x)$ una funzione continua insieme alla sua derivata prima in (A, B), si ha per α, a, b soddisfacenti la limitazione (6)

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_a^b f(\alpha+x)g(x)\cos\mu x\,dx = 0, \qquad \lim_{\mu\to\infty}\int_a^b f(\alpha+x)g(x)\,\mathrm{sen}\,\mu x\,dx = 0$$

e la tendenza al limite 0 è uniforme rispetto ad α, a, b soddisfacenti la limitazione (6).

Dimostrazione. - Posto

$$F(x, \alpha) = \int_a^x f(\alpha+\beta)\cos\mu\beta\,d\beta$$

con l'integrazione per parti si ha

$$\int_a^b f(\alpha+x)g(x)\cos\mu x\,dx = [g(x)F(x,\alpha)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b F(x,\alpha)g'(x)dx$$
$$= g(b)\int_a^b f(\alpha+\beta)\cos\mu\beta\,d\beta - \int_a^b F(x,\alpha)g'(x)dx.$$

Fissato ε positivo si può assegnare [cor. 1] un k indipendente da α, a, x tale che per $\mu > k$ sia

$$\left|\int_a^x f(\alpha+\beta)\cos\mu\beta\,d\beta\right| = |F(x,\alpha)| < \varepsilon$$

e se in (A, B) si ha $|g(x)| < L$, risulta

$$\left|\int_a^b f(\alpha+x)g(x)\cos\mu x\,dx\right| < \varepsilon\left[L + \int_A^B |g'(x)|\,dx\right]$$

e per l'arbitrarietà di ε ne segue la nostra proposizione.

TEOREMA 13. - Se $f(x)$ è una funzione sommabile in $(-\pi, \pi)$ la successione delle sue costanti di FOURIER $\{a_n, b_n\}$ tende a zero per $n \to \infty$ si ha cioè $a_n = o(1)$, $b_n = o(1)$ (1).

Dimostrazione. - Si ha infatti

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx$$

e basterà applicare il teorema 12.

---

(1) H. LEBESGUE [37, a)], p. 45; cfr. anche cor. teor. 9.

2. - È facile determinare l'espressione della somma dei primi n termini della serie di FOURIER di una funzione $f(x)$ sommabile in $(-\pi, \pi)$.

Sia

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_k^{1\dots\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

e poniamo

$$(1) \qquad S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_k^{1\dots n} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx).$$

Sostituendo come intendiamo di fare in tutto questo § al valore di $f(x)$ in π $f(-\pi)$ e definendo la $f(x)$ in $(-\infty, +\infty)$ considerandola come periodica, col periodo 2π, abbiamo (§ 2, n.° 1)

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \sum_k^{1\dots n} \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(\alpha)[\cos k\alpha \cos kx + \operatorname{sen} k\alpha \operatorname{sen} kx]\,d\alpha$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(\alpha)\left[\frac{1}{2} + \sum_k^{1\dots n} \cos k(\alpha - x)\right] d\alpha$$

e con la sostituzione $\alpha - x = \beta$ otteniamo

$$(2) \qquad S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\beta)\left[\frac{1}{2} + \sum_k^{1\dots n} \cos k\beta\right] d\beta.$$

Se osserviamo che

$$\frac{1}{2} + \sum_k^{1\dots n} e^{k\beta i} = \frac{e^{(n+1)\beta i} - 1}{e^{\beta i} - 1} - \frac{1}{2} = \frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta i} - e^{-\frac{1}{2}\beta i}}{e^{\frac{\beta i}{2}} - e^{-\frac{\beta i}{2}}} - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta i} - e^{-\frac{1}{2}\beta i}}{i \operatorname{sen}\frac{\beta}{2}} - 1\right] = \frac{-ie^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta i} + i\cos\frac{\beta}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}}$$

e separiamo il reale dall'immaginario otteniamo

$$(3) \qquad \frac{1}{2} + \sum_k^{1\dots n} \cos k\beta = \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta}{2\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}}, \qquad \sum_k^{1\dots n} \operatorname{sen} k\beta = \frac{\cos\frac{\beta}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta}{2\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}}$$

e sostituendo nella (2) otteniamo per $S_n(x)$ *l'integrale di Dirichlet*

$$(4) \qquad S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\alpha)\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha.$$

3. - TEOREMA 14 (di RIEMANN [49]). Il carattere della serie di FOURIER in un punto x dipende dai valori di $f(x)$ in un intorno arbitrariamente piccolo di questo punto.

Dimostrazione. - Sia ε un numero positivo, $\varepsilon < \pi$, e nell'integrale di DIRICHLET dividiamo l'intervallo di integrazione nei tre intervalli $(-\pi, -\varepsilon)$, $(-\varepsilon, \varepsilon)$, (ε, π).

Abbiamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\alpha)\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha = \int_{-\pi}^{-\varepsilon} f(x+\alpha)\frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\,d\alpha +$$

$$+ \int_{\varepsilon}^{\pi} f(x+\alpha)\frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\,d\alpha + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+\alpha)\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha.$$

Nel secondo membro nel primo integrale figura come funzione integranda il prodotto $f(x+\alpha)$ per $1/2 \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$ [con derivata continua in $(-\pi, -\varepsilon)$] per $\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha$, si ha quindi [teor. 12, cor. 2]

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{-\varepsilon} f(x+\alpha)\frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\,d\alpha = 0$$

e analogamente

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\varepsilon}^{\pi} f(x+\alpha)\frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\,d\alpha = 0$$

con convergenza uniforme allo zero rispetto ad x ed ε, quindi la ricerca del limite di $S_n(x)$ per $n\to\infty$ si riduce alla ricerca del limite per $n\to\infty$ di

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+\alpha)\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha,$$

e in questo integrale compariscono soltanto i valori che $f(x)$ assume in $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$.

Il teorema di RIEMANN può enunciarsi anche così: Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni sommabili in $(-\pi, \pi)$ e coincidono nei punti di un intervallo (a, b) contenuto in $(-\pi, \pi)$, nei punti interni ad (a, b) le loro serie di FOURIER sono contemporaneamente convergenti, divergenti o indeterminate, e se convergono hanno la stessa somma.

4. - Vogliamo determinare la condizione necessaria e sufficiente perchè in un punto x la somma $S_n(x)$ della serie di FOURIER di $f(x)$ converga verso un numero finito $S(x)$, che potrà essere o no uguale ad $f(x)$.

Avendosi [n.° 2, (3)]

$$\frac{1}{2} + \sum_{k}^{1\ldots n} \cos k\alpha = \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2 \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$$

integrando i due membri tra $-\pi$ e $+\pi$ risulta

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2 \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\, d\alpha, \qquad S(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x)\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2 \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\, d\alpha$$

e perciò [n.° 2, (4)]

$$(1) \qquad S_n(x) - S(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x+\alpha) - S(x)] \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2 \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\, d\alpha.$$

Si ha da qui il

TEOREMA 15. - Condizione necessaria e sufficiente perchè la serie di FOURIER di una funzione sommabile $f(x)$ in un punto x converga ed abbia per somma $S(x)$ è che comunque si assegni un numero σ positivo si possa trovare un intero n_σ tale che per ogni intero $n > n_\sigma$ sia

$$\left| \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x+\alpha) - S(x)] \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2 \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\, d\alpha \right| < \sigma.$$

Se (A, B) è un intervallo appartenente a $(-\pi, \pi)$ ed $S(x)$ continua in (A, B) [1], avremo che la convergenza della serie di FOURIER

[1] Quando sia $A = -\pi$, $B = \pi$ supporremo qui e in seguito che si abbia $S(-\pi) = S(\pi)$.

di $f(x)$ è uniforme verso $S(x)$ per x variabile in (A, B), se per ogni σ il numero n_σ è indipendente dal valore scelto per x in (A, B).

Vogliamo esprimere la condizione trovata sotto altra forma.

Dalla (1) si ha

$$(2) \qquad S_n(x) - S(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x+\alpha) - S(x)] \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\alpha}\, d\alpha +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x+\alpha) - S(x)] \operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha \left[\frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{\alpha}\right] d\alpha.$$

Posto $g(\alpha) = \dfrac{1}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} - \dfrac{1}{\alpha}$ si vede subito che $g(\alpha)$ è una funzione continua con derivata continua rispetto ad α in $(-\pi, \pi)$ e perciò [teor. 12, cor. 1 e cor. 2] il secondo integrale del secondo membro della (2) converge a zero per $n \to \infty$ [uniformemente rispetto ad x quando si supponga $S(x)$ continua e perciò limitata] quindi

$$\lim_{n\to\infty} [S_n(x) - S(x)] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x+\alpha) - S(x)] \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\alpha}\, d\alpha.$$

Nel secondo membro dividiamo l'intervallo di integrazione nei tre intervalli $(-\pi, -\varepsilon)$, $(-\varepsilon, \varepsilon)$, (ε, π) e ragioniamo come per il teorema 14, troviamo allora

$$(3) \quad \lim_{n\to\infty} [S_n(x) - S(x)] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} [f(x+\alpha) - S(x)] \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\alpha}\, d\alpha$$
$$0 < \varepsilon \leq \pi;$$

abbiamo quindi il

TEOREMA 15[1]. - Condizione necessaria e sufficiente perchè la serie di FOURIER di una funzione $f(x)$ in un punto x converga ed abbia per somma $S(x)$ è che comunque si assegni un numero $\sigma > 0$ si possano trovare un numero positivo $\varepsilon < \pi$ e un intero n_σ tali che per ogni intero $n > n_\sigma$ sia

$$\left| \frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} [f(x+\alpha) - S(x)] \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\alpha}\, d\alpha \right| < \sigma.$$

Se $S(x)$ è continua in (A, B) appartenente a $(-\pi, \pi)$ e se il numero ε e l'intero n_σ sono indipendenti da x, quando x varia in (A, B), la convergenza della serie di FOURIER di $f(x)$ verso $S(x)$ è uniforme in (A, B).

Abbiamo ora, cambiando a in $2a$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}[f(x+a)-S(x)]\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)a}{a}\,da=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}}[f(x+2a)-S(x)]\frac{\operatorname{sen}(2n+1)a}{a}\,da=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\varepsilon}{2}}[f(x+2a)-S(x)]\frac{\operatorname{sen}(2n+1)a}{a}\,da+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{0}[f(x+2a)-S(x)]\frac{\operatorname{sen}(2n+1)a}{a}\,da=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\varepsilon}{2}}[f(x+2a)+f(x-2a)-2S(x)]\frac{\operatorname{sen}(2n+1)a}{a}\,da$$

talchè posto

(4) $$\boxed{f(x+2a)+f(x-2a)-2S(x)=\varphi(x, a)}$$

e indicando ancora $\varepsilon/2$ con ε la (3) diventa

(5) $$\lim_{n\to\infty}[S_n(x)-S(x)]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon}\varphi(x, a)\frac{\operatorname{sen}(2n+1)a}{a}\,da.$$

Abbiamo quindi il

TEOREMA 15^2. - Condizione necessaria e sufficiente perchè la serie di FOURIER di una funzione sommabile $f(x)$ sia convergente in un punto x ed abbia per somma $S(x)$ è che per ogni numero σ positivo arbitrario si possano trovare un numero positivo $\varepsilon\leqq\pi/2$ e un intero n_σ tali che per ogni intero $n>n_\sigma$ sia

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon}\varphi(x, a)\frac{\operatorname{sen}(2n+1)a}{a}\,da\right|<\sigma,\quad 0<\varepsilon\leqq\pi/2,\quad (^1).$$

(1) Noti il lettore che per la (4) $\varphi(x, a)$ è sommabile, e la funzione $\operatorname{sen}(2n+1)a/a$ che per $a=0$ vale $2n+1$, è finita, continua derivabile.

Se $S(x)$ è continua in (A, B) appartenente a $(-\pi, \pi)$ e se il numero ε e l'intero n_σ sono indipendenti da x, quando x varia in (A, B) la convergenza della serie di FOURIER di $f(x)$ verso $S(x)$ è uniforme in (A, B).

TEOREMA 15^3. - Condizione necessaria e sufficiente perchè la serie di FOURIER di una funzione sommabile $f(x)$ sia convergente in un punto x, ed abbia per somma $S(x)$, è che comunque si assegni un numero $\sigma>0$, si possano trovare un numero positivo $\varepsilon\leqq\frac{\pi}{2}$, e un numero $m_\sigma>0$, tale che per *ogni numero reale* $m>m_\sigma$ risulti

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon}\varphi(x, a)\frac{\operatorname{sen} ma}{a}\,da\right|<\sigma.$$

Dimostrazione. - Sia la serie convergente; fissato σ si determini un numero positivo $\varepsilon\leqq\pi/2$ e un intero n_σ tale che per ogni intero $n>n_\sigma$ sia

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon}\varphi(x, a)\frac{\operatorname{sen}(2n+1)}{a}\,da\right|<\sigma/2$$

ed anche

(5') $$\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon}|\varphi(x, a)|\,da<\sigma/4.$$

Si ponga $m_\sigma=2n_\sigma+3$ e si consideri un qualsiasi numero reale $m>m_\sigma$; se $2n+1$ indica il maggior numero dispari contenuto in m e poniamo $m=2n+1+2\delta$ si avrà $n>n_\sigma$ e $0\leqq\delta<1$; abbiamo poi

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon}\varphi(x, a)\frac{\operatorname{sen} ma}{a}\,da\right|\leqq\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon}\varphi(x, a)\frac{1}{a}[\operatorname{sen} ma-\operatorname{sen}(2n+1)a]\,da\right|+$$

$$+\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon}\varphi(x, a)\frac{\operatorname{sen}(2n+1)a}{a}\,da\right|<$$

$$<\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon}\varphi(x, a)2\delta\frac{\operatorname{sen}\delta a}{\delta a}\cos(2n+1+\delta)a\,da\right|+$$

$$+\frac{\sigma}{2}\leqq\frac{2}{\pi}\int_0^{\varepsilon}|\varphi(x, a)|\,da+\frac{\sigma}{2}<\sigma,$$

che è appunto quello che volevasi dimostrare.

Al solito se il numero ε e il numero $m_\sigma > 0$ sono indipendenti da x, quando x varia in (A, B), la convergenza della serie di FOURIER di $f(x)$ verso $S(x)$ è uniforme in (A, B).

Infatti $S(x)$ è continua in (A, B) e per la (4), la limitazione (5′) può soddisfarsi per qualunque x di (A, B).

Noti il lettore che pur imponendo l'enunciato del teorema 15[2] condizioni meno restrittive del teorema 15[3], in quanto prima bastava far variare m soltanto per valori interi positivi dispari, per il seguito (Teorema 43) ci converrà il teorema ora dimostrato.

5. - TEOREMA 16 (del DINI). - Condizione sufficiente perchè la serie di FOURIER di una funzione periodica col periodo 2π, sommabile in $(-\pi, \pi)$ converga in un punto x ed ivi abbia per somma $S(x)$ è che si possa trovare un numero positivo ε (piccolo del resto a piacere) in modo che la funzione $\frac{\varphi(x, \alpha)}{\alpha}$ risulti sommabile quando α varia in $(0, \varepsilon)$ [DINI, [14, a)], p. 102].

Dimostrazione. - In questa ipotesi si ha infatti

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^\varepsilon \frac{|\varphi(x, \alpha)|}{\alpha} d\alpha = 0$$

[I, Cap. IV; teor. 26] quindi fissato σ si può determinare un ε tale che

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \frac{|\varphi(x, \alpha)|}{\alpha} d\alpha < \sigma,$$

ma qualunque sia n si ha

$$\frac{1}{\pi} \left| \int_0^\varepsilon \varphi(x, \alpha) \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\alpha}{\alpha} d\alpha \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \frac{|\varphi(x, \alpha)|}{\alpha} d\alpha < \sigma$$

e il teorema è così dimostrato.

Supposto $S(x)$ continua in (A, B), appartenente a $(-\pi, \pi)$, quando il numero ε è indipendente da x, la convergenza della serie di FOURIER di $f(x)$ verso $S(x)$ è uniforme in (A, B).

Corollario 1. - Se in un punto x e per α sufficientemente piccolo, $0 < \alpha \leq \varepsilon$, si ha

(6) $$|\varphi(x, \alpha)| \leq L\alpha^r \qquad (r > 0,\ L \text{ costante}),$$

la condizione del DINI è soddisfatta.

Dimostrazione. - Si ha infatti

$$\int_0^\varepsilon \frac{|\varphi(x, \alpha)|}{\alpha} d\alpha \leq L \int_0^\varepsilon \frac{1}{\alpha^{1-r}} d\alpha = \frac{\varepsilon^r}{r}.$$

Se la (6) sussiste qualunque sia x in (A, B), per $0 \leq \alpha \leq \varepsilon$ ed L indipendenti da x, la convergenza della serie di FOURIER di $f(x)$ verso $S(x)$ è uniforme in (A, B).

Volendo trovare delle condizioni sufficienti di convergenza della serie di FOURIER di $f(x)$ in un punto x verso $f(x)$, basterà porre negli enunciati precedenti $f(x)$ in luogo di $S(x)$, considerare cioè la funzione

$$\varphi(x, \alpha) = f(x + 2\alpha) + f(x - 2\alpha) - 2f(x).$$

Abbiamo allora il

Corollario 2. - Se fissato un punto x si può determinare un $\varepsilon > 0$, in guisa che la funzione

$$\frac{f(x + 2\alpha) + f(x - 2\alpha) - 2f(x)}{\alpha}$$

risulti sommabile quando α varia tra 0 ed ε, e più in particolare se quando α varia tra 0 ed ε risulta

(7) $$|f(x+2\alpha) + f(x-2\alpha) - 2f(x)| < L\alpha^r, \qquad (r > 0,\ L \text{ costante}),$$

allora la serie di FOURIER di $f(x)$ è convergente nel punto x ed ha per somma $f(x)$.

Supposta $f(x)$ continua in (A, B) appartenente a $(-\pi, \pi)$ (¹) se quando x varia in (A, B) esistono un numero $\varepsilon < 0$ e una costante L indipendenti da x tali che per α variabile in $(0, \varepsilon)$ sussiste la (7) allora la convergenza della serie di FOURIER di $f(x)$ verso $f(x)$ è uniforme in (A, B).

Riferendosi ai punti di continuità di $f(x)$ o ai suoi punti di discontinuità di prima specie [I, Cap. III, § 4, n.° 6] posto nell'enunciato del teorema del DINI $S(x) = [f(x+) + f(x-)]/2$ (²) abbiamo il

(¹) Quando sia $A = -\pi$, $B = \pi$ supponiamo come abbiamo già dichiarato $f(-\pi) = f(\pi)$.

(²) Con le nostre convenzioni nei punti $-\pi$, π si ha $f[(-\pi)-] = f(\pi -)$, $f[(-\pi)+] = f(\pi +)$.

TEOREMA 17. - Se la funzione $f(x)$ periodica, col periodo 2π, è sommabile in $(-\pi, \pi)$, se per un punto x di continuità di $f(x)$ o per un punto x di discontinuità di prima specie si può fissare un numero positivo ε tale che per h variabile in $(0, \varepsilon)$ risulti sommabile in $(0, \varepsilon)$ la differenza dei due rapporti incrementali

$$\frac{f(x+h)-f(x+)}{h}, \qquad \frac{f(x-h)-f(x-)}{-h}$$

[circostanza che si verifica se i due rapporti incrementali

$$[f(x+h)-f(x)]/h, \qquad [f(x-h)-f(x)]/(-h)$$

sono ciascuno sommabile in $(0, \varepsilon)$], allora la serie di FOURIER di $f(x)$ converge nel punto x verso $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

Quando le condizioni enunciate nel teorema si verificano in un punto x ove $f(x)$ è *regolare* [I, Cap. III, § 4, n.° 6] la serie di FOURIER di $f(x)$ converge in x verso $f(x)$.

Corollario 1. - La serie di FOURIER di $f(x)$, periodica col periodo 2π, sommabile in $(-\pi, \pi)$ converge in un punto x ove essa è continua oppure è discontinua di prima specie verso $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ (1), se esiste un numero positivo ε tale che per $0<h<\varepsilon$ risulti

$$(8) \qquad |f(x+h)-f(x+)|<Lh^r, \qquad |f(x-h)-f(x-)|<Lh^r,$$
$$(r>0, \ L \text{ costante}).$$

Più in particolare vale il

Corollario 2. - Se la funzione $f(x)$, periodica con periodo 2π, sommabile in $(-\pi, \pi)$ ha un punto x [di continuità] derivata a destra e derivata a sinistra entrambe finite [le (8) risultano soddisfatte facendovi $r=1$] la serie di FOURIER di $f(x)$ converge in x verso $f(x)$.

Se quando x varia in (A, B) appartenente a $(-\pi, \pi)$ $f(x)$ è continua in (A, B) ed ha ivi derivata limitata, la sua serie di FOURIER è uniformemente convergente in (A, B) ed ha per somma $f(x)$.

---

(1) Vedremo in seguito [§ 5, teor. 34, cor. 3 e 4] che nei punti x ove $f(x)$ è continua o presenta una discontinuità di prima specie, la sua serie di FOURIER, se è convergente, ha necessariamente per somma $[f(x+)+f(x-)]/2$.

6. - Per illustrare le cose dette diamo qualche esempio.

1). Sia $f(x)=\frac{1}{12}\pi^2-\frac{1}{4}x^2$ con $-\pi \leqq x \leqq \pi$.

La serie di FOURIER di $f(x)$ è una serie di coseni [§ 2, 2] e con facili calcoli si trova

$$a_0=0, \qquad a_k=(-1)^{k+1}/k^2,$$

si ha perciò uniformemente in $(-\pi, \pi)$ [teor. 17, cor. 2]

$$(1) \qquad \frac{1}{12}\pi^2-\frac{1}{4}x^2=\cos x-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-.... \qquad (-\pi \leqq x \leqq \pi).$$

2). Sia $f(x)=x$ per $-\pi<x<\pi$; $f(-\pi)=f(\pi)=0$.

Si ha

$$f(x) \sim 2\left[\frac{\operatorname{sen} x}{1}-\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}+\frac{\operatorname{sen} 3x}{3}-....\right].$$

La $f(x)$ ha derivata limitata [uguale ad 1] in ogni intervallo interno a $(-\pi, \pi)$, in $-\pi$ e $+\pi$ i rapporti incrementali

$$\frac{f(-\pi \pm h)-f(-\pi \pm)}{\pm h}, \qquad \frac{f(\pi \pm h)-f(\pi \pm)}{\pm h}$$

sono uguali ad 1, ed essendo

$$f(-\pi+)+f(-\pi-)=0, \qquad [f(\pi+)+f(\pi-)=0],$$

ne viene che per $-\pi \leqq x \leqq \pi$ si ha [EULERO [16, *a*)]]

$$(2) \qquad f(x)=2\left[\frac{\operatorname{sen} x}{1}-\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}+\frac{\operatorname{sen} 3x}{3}-....\right] \qquad (-\pi \leqq x \leqq \pi)$$

e la convergenza della serie è uniforme in ogni intervallo interno a $(-\pi, \pi)$.

3). Sia $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ per $0<x \leqq \pi$, $f(0)=0$, $f(x)=-f(-x)$ per $-\pi \leqq x<0$.

La serie di FOURIER di $f(x)$ è una serie di seni [§ 2, 2] e si otterrà

$$(3) \qquad \frac{\pi-x}{2}=\operatorname{sen} x+\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}+\frac{\operatorname{sen} 3x}{3}+...., \qquad 0<x \leqq \pi \quad (1),$$

e la serie del secondo membro è uniformemente convergente in qualunque intervallo interno $(0, 2\pi)$.

---

(1) D. BERNOULLI: *Petrop. N. Comm.*, 1772.

4). Dividendo la (2) per 2 e sommando con la (3) si ha

$$\frac{\pi}{4}=\text{sen }x+\frac{\text{sen }3x}{3}+\frac{\text{sen }5x}{5}+\dots,\qquad 0<x<\pi \tag{4}$$

e la serie del secondo membro è uniformemente convergente in qualunque intervallo interno a $(0,\pi)$.

5). Sia $f(x)=c$ per $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, $f(x)=-c$ per $-\pi\leq x<-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<x\leq\pi$, e $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

La serie di FOURIER di $f(x)$ è una serie di coseni [§ 2, 2] e si troverà $a_0=0$, $a_k=\frac{4c}{k}\text{sen }k\frac{\pi}{2}$ perciò

$$\frac{\pi}{4}=\cos x-\frac{\cos 3x}{3}+\frac{\cos 5x}{5}-\dots,\qquad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \tag{5}$$

$$-\frac{\pi}{4}=\cos x-\frac{\cos 3x}{3}+\frac{\cos 5x}{5}-\dots,\qquad -\pi\leq x<-\frac{\pi}{2},\quad \frac{\pi}{2}<x\leq\pi. \tag{5'}$$

Le serie del secondo membro sono uniformementi convergenti in qualunque intervallo interno a

$$\left(-3\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right),\qquad \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\qquad \left(\frac{\pi}{2},3\frac{\pi}{2}\right).$$

Col cambiamento $x=t+\frac{\pi}{2}$ dalla (4) si deduce la (5).

6). Sia

$$f(x)=c \qquad \text{per } 0<x<\frac{\pi}{2};$$
$$f(x)=-c \qquad \text{per } \frac{\pi}{2}<x<\pi;$$
$$f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(\pi)=0$$
$$f(x)=-f(-x) \qquad \text{per } -\pi\leq x\leq 0.$$

La serie di FOURIER di $f(x)$ è una serie di seni; si troverà

$$b_k=\frac{2c}{k\pi}\left[1-2\cos k\frac{\pi}{2}+\cos k\pi\right]$$

quindi

$$\frac{\pi}{8}=\frac{\text{sen }2x}{2}+\frac{\text{sen }6x}{6}+\frac{\text{sen }10x}{10}+\dots,\quad \text{per } 0<x<\frac{\pi}{2}, \tag{6}$$

$$-\frac{\pi}{8}=\frac{\text{sen }2x}{2}+\frac{\text{sen }6x}{6}+\frac{\text{sen }10x}{10}+\dots,\quad \text{per } \frac{\pi}{2}<x<\pi. \tag{6'}$$

Le serie del secondo membro sono uniformemente convergenti in qualunque intervallo che non contenga nè come punti interni nè come estremi punti di coordinata $k\frac{\pi}{2}$ con k intero.

7). Sia

$$f(x)=\log\left(2\text{ sen }\frac{x}{2}\right) \text{ [1]} \qquad \text{per } 0\leq x\leq\pi, \quad [f(0)=-\infty]$$
$$f(x)=f(-x) \qquad \text{per } -\pi\leq x\leq 0.$$

La serie di FOURIER di $f(x)$ è una serie di coseni [§ 2, 2]. Si ha

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \log\left(2\text{ sen }\frac{\alpha}{2}\right)d\alpha=2\log 2+\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\log\left(\text{sen }\frac{\alpha}{2}\right)d\alpha=$$
$$=2\log 2+\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\text{sen }x)dx$$

Abbiamo

$$\int_0^\pi\log(\text{sen }x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\text{sen }x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi\log(\text{sen }x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\text{sen }x)dx$$

[si cambi nel secondo integrale x in $\pi-z$], si ha pure

$$\int_0^\pi\log(\text{sen }x)dx=\int_0^\pi\log\left(2\text{ sen }\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)dx=$$
$$=\pi\log 2+\int_0^\pi\log\left(\text{sen }\frac{x}{2}\right)dx+\int_0^\pi\log\left(\cos\frac{x}{2}\right)dx=$$
$$=\pi\log 2+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\text{sen }x)dx+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\cos x)dx=$$
$$=\pi\log 2+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\text{sen }x)dx$$

---

[1] Intendiamo prendere il logaritmo principale di $2\text{ sen }\frac{x}{2}$.

[si cambi nel secondo integrale x in $\frac{\pi}{2}-t$] perciò

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\operatorname{sen} x)dx+\pi\log 2=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\operatorname{sen} x)dx$$

da cui

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\operatorname{sen} x)dx=-\pi\log 2.$$

e perciò

$$a_0=0.$$

Abbiamo poi

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos n\alpha\log\left(2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)d\alpha=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen} n\alpha}{n}\log\left(2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)\right]_{\alpha=0}^{\alpha=\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen} n\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}d\alpha=$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}d\alpha-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}\left(n-\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}d\alpha=-\frac{1}{n}$$

[cfr. n.° 4] e perciò qualunque sia x in $(0,\pi)$

$$-\log\left(2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)=\cos x+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 3x}{3}+\ldots,\tag{7}$$

e la serie secondo membro converge uniformemente in qualunque intervallo *interno* a $(0,2\pi)$; diverge per $x=2k\pi$ con k intero.

8). Vogliamo dare un esempio di una funzione $f(x)$ definita in $(-\pi,\pi)$ limitata, con infinite discontinuità di prima specie e una discontinuità di seconda specie la cui serie di FOURIER converge in tutti i punti verso $f(x)$ [1].

Consideriamo la funzione $f(x)$ definita tra $-\pi$ e π con la seguente legge.

1°) $f(x)+f(-x)=0$;

2°) $f\left(\frac{\pi}{2^p}\right)=0$, $\quad(p=0,1,2,\ldots)$;

3°) $f(x)=c>0$ per $\frac{\pi}{2^{2k+1}}<x<\frac{\pi}{2^{2k}}$;

4°) $f(x)=-c$ per $\frac{\pi}{2^{2k}}<x<\frac{\pi}{2^{2k-1}}$ $\quad(k=0,1,2,\ldots)$.

---

[1] Per questo esempio e il seguente cfr. H. LEBESGUE [37, a)], pp. 67-68.

La $f(x)$ è una quasi costante sommabile [il suo valore assoluto, salvo un insieme di misura nulla è c]. La $f(x)$ ha discontinuità di prima specie nei punti $\pm\pi/2^p$, una discontinuità di seconda specie nell'origine.

La sua serie di FOURIER è una serie di seni, la sua somma si annulla quindi nell'origine. In un punto x di continuità per $f(x)$ quando sia α sufficientemente piccolo si ha

$$\varphi(x,\alpha)=f(x+2\alpha)+f(x-2\alpha)-2f(x)=\pm(c+c-2c)=0;$$

in un punto x di discontinuità di prima specie, sempre per α sufficientemente piccolo si ha $\varphi(x,\alpha)=(+c)+(-c)-2\cdot 0=0$; ne viene che in qualsiasi punto la serie di FOURIER di $f(x)$ converge verso $f(x)$, ed essa converge uniformemente in qualunque intervallo interno a $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$,.... e negli intervalli simmetrici rispetto all'origine.

9). Diamo infine l'esempio di una funzione $f(x)$ definita in $(-\pi,\pi)$ non limitata, con infinite discontinuità di prima specie e una discontinuità di seconda specie, la cui serie di FOURIER converge in tutti i punti verso $f(x)$.

La funzione $f(x)$ sia definita in $(-\pi,\pi)$ con la seguente legge.

1°) $f(x)+f(-x)=0$;

2°) $f\left(\frac{\pi}{2^p}\right)=0$ $\quad(p=0,1,2,\ldots)$;

3°) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ per $\frac{\pi}{2^{2k+1}}<x<\frac{\pi}{2^{2k}}$;

4°) $f(x)=-\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ per $\frac{\pi}{2^{2k}}<x<\frac{\pi}{2^{2k-1}}$ $\quad(k=0,1,2,\ldots)$.

La funzione $|f(x)|$ in $(0,\pi)$, escluso un insieme di misura nulla, è uguale a $x^{-\frac{1}{2}}$ ed è perciò sommabile; $f(x)$ è quindi sommabile e la sua serie di FOURIER è una serie di seni [si annulla quindi all'origine].

In ogni punto di continuità $f(x)$ ha derivata finita; nei punti $x>0$ e di discontinuità di prima specie per α sufficientemente piccolo si ha

$$\varphi(x,\alpha)=f(x+2\alpha)+f(x-2\alpha)-2f(x)=\pm\left[(x-2\alpha)^{-\frac{1}{2}}-(x+2\alpha)^{-\frac{1}{2}}\right],$$

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\varphi(x,\alpha)}{\alpha}=\pm 2x^{-\frac{3}{2}}$, e perciò [teor. 17, cor. 2; teor. 16, cor. 2] la serie di FOURIER di $f(x)$ ha in ogni punto per somma $f(x)$.

7. - Diamo ora gli enunciati dei più noti criteri di convergenza puntuale rimandando il lettore per le dimostrazioni alla citata opera del TONELLI [60, a)], pp. 282-297.

Riferendosi sempre a funzioni $f(x)$ periodiche con il periodo 2π, sommabili abbiamo:

TEOREMA 18. (Criterio di convergenza di DIRICHLET-JORDAN ([1])). - La serie di FOURIER della $f(x)$ converge in ogni punto che sia interno ad un intervallo in cui la $f(x)$ sia a variazione limitata, e la convergenza avviene verso $f(x)$ o verso $[f(x+)+f(x-)]/2$ a seconda che nel punto considerato, la $f(x)$ è continua o discontinua.

Se $f(x)$ è continua e a variazione limitata in un intervallo (A, B) di $(-\pi, \pi)$, la serie di FOURIER di $f(x)$ converge uniformemente in qualunque intervallo interno ad (A, B) ed ha per somma $f(x)$.

TEOREMA 19. (Criterio di convergenza di CH. J. DE LA VALLÉE-POUSSIN [15, b)]). - In ogni punto x, per il quale la funzione di h,

$$G(h)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+a)da$$

è a variazione limitata in un intervallo $(0, \delta)$, $\delta>0$, la serie di FOURIER della $f(x)$ converge $G(0+)$.

TEOREMA 20. (Criterio di convergenza di LEBESGUE [37, c)]). - Se per un x e per un determinato valore di $S(x)$ è

$$\lim_{\delta\to 0}\int_0^{\delta}|\varphi(x, a)|\,da=0, \qquad [\varphi(x, a)=f(x+2a)+f(x-2a)-2S(x)].$$

e $(\delta>0)$
$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\varphi(x, a+\delta)-\varphi(x, a)}{a}\operatorname{sen}\frac{\pi a}{\delta}\,da=0$$

allora la serie di FOURIER della $f(x)$ converge, nel punto x, verso $S(x)$.

Da questo teorema segue immediatamente il

TEOREMA 21. (Criterio di convergenza del DINI [14, a)], p. 102). - Se $f(x)$ è continua in (A, B) all'interno del quale $|f(x+\delta)-f(x)|\log|\delta|$ tende uniformemente allo zero per $\delta\to 0$, allora la serie di FOURIER

([1]) C. JORDAN: *Sur la série de Fourier*. [Comptes Rendus, T. 92. (1881)], pp. 228-230. Daremo per altra via la dimostrazione di questo teorema nel § seguente al n.° 8.

di $f(x)$ converge uniformemente verso $f(x)$ in ogni intervallo (A_1, B_1) completamente interno ad (A, B).

TEOREMA 22. (Criterio di convergenza di TONELLI [60, b)]). - Se in un dato punto x, è $\varphi(x, a)\to 0$ per $a\to 0$; se esiste un $\delta<0$ tale che per $0<a<\delta$, la $\varphi(x, a)$ risulti assolutamente continua quando a varia in (a, δ); se è, per $a\to 0$, $\underline{\lim}_{a\to+0}\, a\varphi_a'(x, a)\geqslant 0$ [oppure $\overline{\lim}_{a\to+0}\, a\varphi_a'(x, a)\leqslant 0$], intendendo qui di considerare quei valori di a per i quali la $\varphi_a'(x, a)$ esiste finita [cfr. I, Cap. V, teor. 13]; allora la serie di FOURIER della $f(x)$ converge, nel punto x considerato, verso $S(x)$.

§ 5. - La sommazione $(C, 1)$ di Fejér delle serie di Fourier.

1. Teoremi sui limiti delle successioni. - 2. La sommazione (C, k) di CESARO per k intero, $k\geqslant 0$. - 3. La sommazione (C, k) per k reale. - 4. Teorema di HARDY-LANDAU. - 5. Sommazione $(C, 1)$ di FEJÉR delle serie di FOURIER. - 6. Criteri sufficienti di sommabilità $(C, 1)$. - 7. Teorema di LEBESGUE sulla sommabilità $(C, 1)$ delle serie di FOURIER. - 8. Funzioni a variazione limitata. Criterio di DIRICHLET-JORDAN.

1. - TEOREMA 23. - Se $\{b_n\}$ è una successione crescente di numeri positivi, divergente a $+\infty$, se $\{a_n\}$ è una successione qualsiasi a termini reali si ha

$$(1)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_n}{b_n}\geqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_n}{b_n}\geqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$ ([1]).

In particolare se $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ esiste ed è un numero finito, esiste anche $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ e i due limiti sono tra loro uguali; se $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=+\infty$ $[-\infty]$ è anche $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty$ $[-\infty]$. [Cfr. I, Cap. III, def. 3].

Dimostrazione. - Supponiamo dapprima

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=M, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=m;$$

([1]) Nei n.i 1, 2, 3 e 4 sono raccolti gli elementi indispensabili per orientare il lettore sul procedimento di sommazione (C, k) di CESARO.

per definizione, scelto un numero $\sigma>0$ esiste un n_0 tale che per $n \geqslant n_0$ si ha

$$m-\sigma<\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}<M+\sigma$$

$$(m-\sigma)(b_{n+1}-b_n)<a_{n+1}-a_n<(M+\sigma)(b_{n+1}-b_n)$$

e facendovi $n=n_0,\ n_0+1,\dots,\ n_0+k-1$ e sommando

$$(m-\sigma)(b_{n_0+k}-b_{n_0})<a_{n_0+k}-a_{n_0}<(M+\sigma)(b_{n_0+k}-b_{n_0})$$

e dividendo per b_{n_0+k}

$$(m-\sigma)\left(1-\frac{b_{n_0}}{b_{n_0+k}}\right)<\frac{a_{n_0+k}}{b_{n_0+k}}-\frac{a_{n_0}}{b_{n_0+k}}<(M+\sigma)\left(1-\frac{b_{n_0}}{b_{n_0+k}}\right);$$

ma si ha

$$\lim_{k\to\infty} b_{n_0}/b_{n_0+k}=0, \qquad \lim_{k\to\infty} a_{n_0}/b_{n_0+k}=0,$$

quindi per k sufficientemente grande

$$m-\sigma\leqslant\frac{a_{n_0+k}}{b_{n_0+k}}\leqslant M+\sigma$$

e da questa, per l'arbitrarietà di σ, segue appunto la (1).

Ci resta da esaminare il caso

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=+\infty$$

e perciò

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=+\infty$$

$\left[\text{e l'analogo } \overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=-\infty\right]$.

Nella nostra ipotesi preso un numero $L>0$ esiste un n_0 tale che per $n\geqslant n_0$ si ha

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}>L,$$

quindi

$$a_{n+1}-a_n>L(b_{n+1}-b_n)$$

e facendo in questa $n=n_0,\ n_0+1,\ n_0+2,\dots,\ n_0+k-1$ e sommando si ha

$$a_{n_0+k}-a_{n_0}>L(b_{n_0+k}-b_{n_0})$$

$$\frac{a_{n_0+k}}{b_{n_0+k}}-\frac{a_{n_0}}{b_{n_0+k}}>L\left(1-\frac{b_{n_0}}{b_{n_0+k}}\right)$$

e poichè

$$\lim_{k\to\infty} b_{n_0}/b_{n_0+k}=0, \qquad \lim_{k\to\infty} a_{n_0}/b_{n_0+k}=0,$$

quando k è sufficientemente grande si ha

$$a_{n_0+k}/b_{n_0+k}>L.$$

e perciò $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n=+\infty$ c. v. d.

TEOREMA 24. - Se una successione $\{a_n\}$ a termini reali è regolare, anche la successione $\left\{\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}\right\}$, dove l'$n^{\text{esimo}}$ termine è la media aritmetica dei primi n termini della successione data, è regolare e ammette lo stesso limite.

Dimostrazione. - Sia $\lim_{n\to\infty} a_n=A$, posto

$$\mathfrak{a}_n=a_1+a_2+\dots+a_n, \qquad \mathfrak{b}_n=n,$$

abbiamo

$$(\mathfrak{a}_n-\mathfrak{a}_{n-1})/(\mathfrak{b}_n-\mathfrak{b}_{n-1})=a_n,$$

quindi

$$\lim(\mathfrak{a}_n-\mathfrak{a}_{n-1})/(\mathfrak{b}_n-\mathfrak{b}_{n-1})=A,$$

e perciò per il teorema precedente

$$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{a}_n/\mathfrak{b}_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}=A.$$

La stessa dimostrazione vale se $\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$, $\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$.

TEOREMA 25. - Se per $n\to\infty$ le due successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ hanno rispettivamente come limiti A e B, si ha [Cesaro [8]]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\dots+a_{n-1}b_2+a_nb_1}{n}=A\cdot B. \tag{2}$$

Dimostrazione. - Si ha infatti $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|A|$ perciò [teor. 24]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_1|+|a_2|+\dots+|a_n|}{n}=A;$$

posto $\nu=\left[\frac{n}{2}\right]$ [$\nu=$massimo intero contenuto in $n/2$] si ha $\lim_{n\to\infty}\nu/n=1/2$ quindi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_1|+|a_2|+\dots+|a_\nu|}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\nu}{n}\,\frac{|a_1|+|a_2|+\dots+|a_\nu|}{\nu}=\frac{1}{2}|A|$$

e perciò se $a > |A|/2$ si può trovare un n_0 tale che per $n > n_0$ sia

$$\frac{1}{n}[|a_1|+|a_2|+ .... +|a_\nu|] < a, \qquad n > n_0 \qquad \nu = \left[\frac{n}{2}\right].$$

Consideriamo ora la successione $\{\sigma_n\}$ così definita

$$(3) \quad \sigma_n = \frac{1}{n}[a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + ... + a_\nu b_{n-\nu+1} - B(a_1 + a_2 + ... + a_\nu)]$$

$$\sigma_n = \frac{1}{n}[a_1(b_n - B) + a_2(b_{n-1} - B) + ... + a_\nu(b_{n-\nu+1} - B)].$$

Siccome $n-\nu \to \infty$ quando $n \to \infty$, si può supporre che n_0 sia così grande che $|b_r - B| < \varepsilon/a$ per $r > n-\nu$, abbiamo quindi

$$|\sigma_n| < \frac{1}{n}\frac{\varepsilon}{a}[|a_1|+|a_2|+ .... +|a_\nu|)] < \varepsilon$$

perciò $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 0$ e dalla (3) [teor. 24]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + ... + a_\nu b_{n-\nu+1}}{n} = B \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + ... + a_\nu}{n} = \frac{1}{2}AB.$$

Si ha analogamente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + ... + a_{\nu+1} b_{n-\nu}}{n} = \frac{1}{2}AB$$

e sommando si ha appunto la (2).

2. - La definizione di somma di una serie ha carattere convenzionale; è possibile come ora vedremo definire il concetto di somma in modo che se la serie è convergente ad S, o divergente a $+\infty$, $-\infty$ nel modo ordinario, resti rispettivamente convergente a S, o divergente a $+\infty$, $-\infty$ con la nuova definizione, mentre vi sono delle serie convergenti con la nuova definizione e non convergenti con la vecchia. Noi qui ci limiteremo ad esporre quanto ci è necessario del procedimento di sommazione di CESARO [8].

Sia $\{a_n\}$ una successione e poniamo

$$s_n^{(0)} = a_0 + a_1 + ... + a_n$$
$$s_n^{(1)} = s_0^{(0)} + s_1^{(0)} + ... + s_n^{(0)}$$

ed in generale per k intero poniamo

$$(1) \qquad s_n^{(k)} = s_0^{(k-1)} + s_1^{(k-1)} + ... + s_n^{(k-1)}, \qquad (k = 1, 2, ...).$$

Le somme $s_n^{(k)}$ contengono linearmente le somme $s_n^{(0)}$ ed è facile verificare che esse ne contengono in tutto $\binom{n+k}{k}$. Infatti questa proprietà sussiste per $k=0$, procediamo allora per induzione. Il secondo membro della (1) contiene

$$\binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + ... + \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k}{k}$$

termini $s_n^{(0)}$, e ne risulta quanto abbiamo osservato.

Definizione 5. - Posto

$$(2) \qquad C_n^{(k)} = s_n^{(k)} \Big/ \binom{n+k}{k} \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

diremo che $C_n^{(k)}$ è la *media di Cesaro di ordine* (rango) k dei primi $n+1$ termini della successione $s_0^{(0)}, s_1^{(0)}, ..., s_n^{(0)}, ...$ e se avviene che per qualche valore di k, $\lim\limits_{n\to\infty} C_n^{(k)}$ esiste ed è uguale ad un numero finito A, diremo che la serie $\sum\limits_n^{0...\infty} a_n$ è *sommabile secondo Cesaro di ordine* (rango) k *ed ha per somma* A, o semplicemente che essa è una serie (C, k) di somma A.

TEOREMA 26. - Se la serie $\sum\limits_n^{0...\infty} a_n$ sommata nel modo ordinario ha per somma A, la sua somma (C, k) è anch'essa uguale ad A; se la serie è divergente a $+\infty$ $[-\infty]$ anche la somma (C, k) diverge a $+\infty$ $[-\infty]$.

Si esprime questo fatto dicendo che la sommazione (C, k) soddisfa la *condizione di permanenza della somma* [*prima condizione di regolarità*].

Dimostrazione. - Posto $\alpha_n = s_n^{(k)}$, $\beta_n = \binom{n+k}{k}$ abbiamo

$$\alpha_n - \alpha_{n-1} = s_n^{(k-1)}, \qquad \beta_n - \beta_{n-1} = \binom{n+k}{k} - \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

quindi $\alpha_n/\beta_n = C_n^{(k)}$, $(\alpha_n - \alpha_{n-1})/(\beta_n - \beta_{n-1}) = C_n^{(k-1)}$ e per il teor. 24 se $\lim\limits_{n\to\infty} C_n^{(k-1)}$ esiste, esiste anche $\lim\limits_{n\to\infty} C_n^{(k)}$ e i due limiti sono tra loro uguali; ma la somma ordinaria della serie $\sum\limits_n^{1...\infty} a_n$ coincide con il $\lim\limits_{n\to\infty} C_n^{(0)}$ e il teorema è dimostrato.

TEOREMA 27. - Se le due serie $\sum\limits_n^{0...\infty} a_n$, $\sum\limits_n^{0...\infty} b_n$ sono sommabili (C, k) ed hanno rispettivamente come somma A e B, la serie $\sum\limits_{n}^{0\ldots\infty}(\lambda a_n+\mu b_n)$ ha la somma (C, k) uguale a $\lambda A+\mu B$, [*seconda condizione di regolarità*].

Dimostrazione. - Infatti tra la media $C_n^{(k)}$ della serie somma e le medie $\overline{C}_n^{(k)}$, $\overline{\overline{C}}_n^{(k)}$ delle serie date sussiste la relazione $C_k^{(k)}=\lambda\overline{C}_n^{(k)}+\mu\overline{\overline{C}}_n^{(k)}$, e passando al limite per $n\to\infty$ segue il teorema.

TEOREMA 28. - Posto

(3) $$A_n^{(k)}=\binom{n+k}{n}=\binom{n+k}{k}$$

sussistono le identità

(4) $$s_n^{(k)}=\sum\limits_{m}^{0\ldots n}A_{n-m}^{(k)}a_m=\sum\limits_{m}^{0\ldots n}A_{n-m}^{(k-1)}s_m^{(0)}=\sum\limits_{m}^{0\ldots n}A_{n-m}^{(k-l-1)}s_m^{(l)},\quad (k>l\geqslant 0).$$

Dimostrazione. - Cominciamo col verificare l'identità

(5_1) $$s_n^{(k)}=\binom{n+k}{n}a_0+\binom{n+k-1}{n-1}a_1+\ldots+\binom{k+1}{1}a_{n-1}+\binom{k}{0}a_n= =\sum\limits_{m}^{0\ldots n}\binom{n-m+k}{n-m}a_m.$$

Essa è vera per $k=0$, basterà quindi procedere per induzione. Si ha

$$s_n^{(k+1)}=\sum\limits_{i}^{0\ldots n}s_i^{(k)}=\sum\limits_{i}^{0\ldots n}\sum\limits_{m}^{0\ldots i}\binom{i-m+k}{i-m}a_m= =\sum\limits_{m}^{0\ldots n}a_m\left[\sum\limits_{i}^{m\ldots n}\binom{i-m+k}{i-m}\right]=\sum\limits_{m}^{0\ldots n}\binom{n-m+k+1}{n-m}a_m.$$

Poichè le $s_n^{(k)}$ si ottengono operando con la (1), $k+1$ volte sui termini della successione $\{a_n\}$, è perciò k volte sui termini della successione $\{s_n^0\}$, si ha l'altra identità

(5_2) $$s_n^{(k)}=\sum\limits_{m}^{0\ldots n}A_{n-m}^{(k-1)}s_m^{(0)}$$

e ripetendo il ragionamento si ha più in generale

(5_3) $$s_n^{(k)}=\sum\limits_{m}^{0\ldots n}A_{n-m}^{(k-l-1)}s_m^{(l)}.$$

TEOREMA 29. - Se le medie $C_n^{(k)}$ di ordine k delle somme $s_0^{(0)}$, $s_1^{(0)}, s_2^{(0)},\ldots, s_n^{(0)},\ldots$ quando $n\to\infty$ hanno per limite A $[+\infty, -\infty]$,

anche le medie di ordine k della successione $s_p^{(0)}$, $s_{p+1}^{(0)},\ldots, s_{p+n}^{(0)},\ldots$, ottenuta dalla precedente sopprimendo i suoi primi p termini, hanno per $n\to\infty$ come limite A $[+\infty, -\infty]$, [*terza condizione di regolarità*].

Dimostrazione. - Indichiamo con $T_{n,p}$ la media di ordine k dei primi $n+1$ termini della successione $s_p^{(0)}$, $s_{p+1}^{(0)},\ldots, s_{p+n}^{(0)},\ldots$; si avrà per le (2) e (4)

$$T_{n,p}=\frac{1}{A_n^{(k)}}\sum\limits_{i}^{0\ldots n}A_{n-i}^{(k-1)}s_{i+p}^{(0)}=\frac{1}{A_n^{(k)}}\sum\limits_{m}^{p\ldots(n+p)}A_{n+p-m}^{(k-1)}s_m^{(0)}= =\frac{1}{A_n^{(k)}}\sum\limits_{m}^{0\ldots(n+p)}A_{n+p-m}^{(k-1)}s_m^{(0)}-\frac{1}{A_n^{(k)}}\sum\limits_{m}^{0\ldots(p-1)}A_{n+p-m}^{(k-1)}s_m^{(0)};$$

è anche

$$C_{n+p}^{(k)}=\frac{1}{A_{n+p}^{(k)}}\sum\limits_{m}^{0\ldots(n+p)}A_{n+p-m}^{(k-1)}s_m^{(0)}$$

e perciò

(6) $$T_{n,p}=\frac{A_{n+p}^{(k)}}{A_n^{(k)}}C_{n+p}^{(k)}-\frac{1}{A_n^{(k)}}\sum\limits_{m}^{0\ldots(p-1)}A_{n+p-m}^{(k-1)}s_m^{(0)}.$$

Si ha ora per la (3)

$$\frac{A_{n+p}^{(k)}}{A_n^{(k)}}=\frac{(n+p+k)(n+p+k-1)\ldots(n+p+1)}{(n+k)(n+k-1)\ldots(n+1)};$$
$$\frac{A_{n+p-m}^{(k-1)}}{A_n^{(k)}}=k\frac{(n+p-m+k-1)\ldots(n+p-m+1)}{(n+k)\ldots(n+1)}$$

e perciò $\lim\limits_{n\to\infty}A_{n+p}^{(k)}/A_n^{(k)}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}A_{n+p-m}^{(k-1)}/A_n^{(k)}=0$, e osservando che la somma che figura nel secondo membro della (6) ha un numero finito di termini $[p]$, dalla (6) stessa passando al limite per $n\to\infty$ segue il teorema.

TEOREMA 30. - Se le due serie $\sum\limits_{n}^{0\ldots\infty}a_n$, $\sum\limits_{n}^{0\ldots\infty}b_n$ sono sommabili rispettivamente (C, k), (C, l), allora la loro serie prodotto secondo CAUCHY $\sum\limits_{n}^{0\ldots\infty}W_n$

$$W_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_{n-1}b_1+a_nb_0$$

è sommabile $(C, k+l+1)$ e la sua somma vale il prodotto delle somme delle serie fattori, [*quarta condizione di regolarità*].

Dimostrazione. - Ci limiteremo a provare il teorema nel caso $k=l=0$, faremo cioè vedere che posto

$$A_n=\sum_r^{0\dots n} a_r, \qquad B_n=\sum_r^{0\dots n} b_r, \qquad W_n=\sum_r^{0\dots n} w_r,$$

e supposto

$$\lim_{n\to\infty} A_n=A, \qquad \lim_{n\to\infty} B_n=B$$

è anche

(7) $$\lim_{n\to\infty} \frac{W_0+W_1+W_2+\dots+W_n}{n+1}=A\cdot B.$$

Si ha infatti

$$W_n=a_0B_n+a_1B_{n-1}+\dots+a_{n-1}B_1+a_nB_0,$$
$$W_0+W_1+W_2+\dots+W_n=A_0B_n+A_1B_{n-1}+\dots+A_{n-1}B_1+A_nB_0$$

e per il teorema 25 segue appunto la (7).

3. - Ricordiamo che le medie $C_n^{(k)}$ di CESARO di ordine k sono definite per le (3) e (4) del numero precedente, dalla relazione

(1) $$C_n^{(k)}=\sum_m^{0\dots n}\binom{n-m+k-1}{n-m}s_m^{(0)}\Big/\binom{n+k}{n}, \qquad \left[s_m=s_m^{(0)}=\sum_r^{0\dots m} a_r\right]$$

e questa ha significato non soltanto per k intero non negativo, ma per ogni numero reale k positivo o nullo e per ogni numero reale k negativo e non intero. Conviene allora di porre la

Definizione 6. - Se per k reale e diverso da un intero negativo esiste ed è finito $\lim_{n\to\infty} C_n^{(k)}=A$ diremo che *la serie* $\sum_n^{0\dots\infty} a_n$ *è sommabile* (C, k) *e la sua somma è* A.

I procedimenti di sommazione che si considerano in analisi sono quelli nei quali è $k>-1$ e ne diremo subito la ragione.

Evidentemente un procedimento di sommazione di una serie deve essere tale che siano evitati nelle sue applicazioni i paradossi e le contraddizioni, e perciò deve richiedersi che esso soddisfi le seguenti condizioni, dette *condizioni di regolarità*.

a). Un procedimento di sommazione regolare deve attribuire ad una serie convergente nel senso ordinario (o divergente a $+\infty$, $-\infty$) la stessa somma; in altri termini se indichiamo

con $\lim\limits_{n\to\infty}$ gen. s_n il valore che si attribuisce alla serie $\sum_n^{0\dots\infty} a_n$ col procedimento di sommazione prescelto, quando $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ esista, deve aversi

$$\lim_{n\to\infty}\text{gen. } s_n=\lim_{n\to\infty} s_n$$

[principio di permanenza di HARDY].

b). Deve sussistere la ***proprietà distributiva***, ossia se a e b sono costanti e $\lim\limits_{n\to\infty}$ gen. s_n, $\lim\limits_{n\to\infty}$ gen. s_n' esistono, deve aversi

$$\lim_{n\to\infty}\text{gen. } [as_n+bs_n']=a\lim_{n\to\infty}\text{gen. } s_n+b\lim_{n\to\infty}\text{gen. } s_n'.$$

c). La soppressione o l'alterazione dei primi n termini della successione $\{s_n\}$ non deve distruggere la sommabilità della serie, nè modificare il valore del limite generalizzato; in altre parole se p è un intero positivo qualsiasi deve aversi

$$\lim_{n\to\infty}\text{gen. } s_{n+p}=\lim_{n\to\infty}\text{gen. } s_n.$$

d). Se due serie e la loro serie prodotto ammettono somme generalizzate, il valore della serie prodotto deve essere uguale al prodotto dei valori dei due fattori.

Si dimostra che i procedimenti di sommazione (C, k) sono regolari allora e allora soltanto che sia $k\geqslant 0$.

4. - Ci sarà utile dimostrare il seguente teorema che dalla sommabilità $(C, 1)$ permette, in un caso particolare, di far dedurre la sommabilità $(C, 0)$ della serie stessa.

TEOREMA 31 (di HARDY-LANDAU). - Se la serie

(1) $$a_0+a_1+a_2+\dots+a_n+\dots$$

è sommabile $(C, 1)$, e se $na_n>-A$, $n=0, 1, 2,\dots$ [oppure $na_n<A$, $n=0, 1, 2,\dots$] la serie (1) è anche sommabile $(C, 0)$ [HARDY [22], LANDAU [34]].

Dimostrazione. - Posto al solito

(2) $$s_n=\sum_k^{0\dots n} a_k=a_0+a_1+\dots+a_n$$

definiamo la successione $\{\sigma_n\}$ con la relazione

$$(3) \qquad (n+1)\sigma_n = \sum_k^{0\dots n} s_k = s_0 + s_1 + \dots + s_n, \qquad [\sigma_n = C_n^{(1)}].$$

Noi abbiamo per ipotesi

$$na_n > -A, \qquad \lim_{n\to\infty} \sigma_n = S \qquad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

e dobbiamo provare che è anche $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = S$.

Sia p intero, $0 < p < n$, abbiamo

$$(n+1)\sigma_n = s_0 + s_1 + \dots + s_n; \qquad (n-p+1)\sigma_{n-p} = s_0 + s_1 + \dots + s_{n-p}$$

quindi

$$(4) \quad \sum_{k=n-p+1}^{n} s_k = (n+1)\sigma_n - (n-p+1)\sigma_{n-p} = (n+1)(\sigma_n - \sigma_{n-p}) + p\sigma_{n-p},$$

e analogamente

$$(5) \quad \sum_{l=n+1}^{n+p} s_l = (n+p+1)\sigma_{n+p} - (n+1)\sigma_n = (n+1)(\sigma_{n+p} - \sigma_n) + p\sigma_{n+p}.$$

Nella somma (4) per l'indice k si ha $n-p+1 \leqslant k \leqslant n$, perciò per $k < n$, $s_k = s_n - (a_n + a_{n-1} + \dots + a_{k+1})$, ed essendo $-a_n < A/n$ abbiamo $s_k < s_n + A/n + A/(n-1) + \dots + A/(k+1)$, quindi

$$s_k < s_n + \frac{(n-k)A}{k+1},$$

ma è $n-k \leqslant p-1 < p$, $n-p < n-p+1 \leqslant k < k+1$, e perciò

$$(6) \qquad s_k < s_n + \frac{pA}{n-p} \qquad n-p+1 \leqslant k \leqslant n$$

la quale sussiste anche per $k = n$.

Nella somma (5) è $n+1 \leqslant l \leqslant n+p$, e si avrà

$$s_l = s_n + (a_{n+1} + \dots + a_l) > s_n - A/(n+1) - \dots - A/l > s_n - (l-n)A/(n+1)$$

ed infine $[l - n \leqslant p,\ n+1 > n]$

$$(7) \qquad s_l > s_n - \frac{pA}{n} \qquad n+1 \leqslant l \leqslant n+p.$$

Per le (6) e (7), le (4) e (5) diventano rispettivamente

$$ps_n + \frac{p^2A}{n-p} > (n+1)(\sigma_n - \sigma_{n-p}) + p\sigma_{n-p};$$
$$ps_n - \frac{p^2A}{n} < (n+1)(\sigma_{n+p} - \sigma_n) + p\sigma_{n+p}$$

e dividendo per p

$$(8) \qquad \begin{cases} s_n + \dfrac{pA}{n-p} > \dfrac{n+1}{p}(\sigma_n - \sigma_{n-p}) + \sigma_{n-p}; \\ s_n - \dfrac{pA}{n} < \dfrac{n+1}{p}(\sigma_{n+p} - \sigma_n) + \sigma_{n+p}. \end{cases}$$

Sia ε positivo e minore di 1, $0 < \varepsilon < 1$, avendosi $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\varepsilon = \infty$, se p indica il massimo intero contenuto in $(n+1)\varepsilon$ si avrà $\lim\limits_{n\to\infty} p = \infty$, ed anche

$$p \leqslant (n+1)\varepsilon < p+1$$

$$\frac{p}{n+1} \leqslant \varepsilon < \frac{p}{n+1} + \frac{1}{n+1}, \qquad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{p}{n+1} - \varepsilon\right| \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p}{n+1} = \varepsilon, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{p}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{p}{n+1}\,\frac{n+1}{n} = \varepsilon, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{p} = \frac{1}{\varepsilon},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p}{n-p} = \lim_{n\to\infty}\frac{p/n}{1-p/n} = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

e poichè per ipotesi $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = S$, [e quindi $\lim\limits_{n\to\infty}(\sigma_{n+p} - \sigma_n) = 0$] dalle (8) segue che per il massimo e il minimo limite della successione $\{s_n\}$ sussistono le relazioni [cfr. I, Cap. III, def. 3]

$$\varliminf_{n\to\infty} s_n + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}A \geqslant S, \qquad \varlimsup_{n\to\infty} s_n - \varepsilon A \leqslant S,$$

e perciò

$$S - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}A \leqslant \varliminf_{n\to\infty} s_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} s_n \leqslant S + \varepsilon A.$$

Essendo ε arbitrario, $\varepsilon A/(1-\varepsilon)$ ed εA sono arbitrariamente piccoli in valore assoluto e ne viene

$$\varlimsup_{n\to\infty} s_n = \varliminf_{n\to\infty} s_n = S$$

ossia $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ esiste ed è uguale ad S (1).

---

(1) Per un'ampia bibliografia sulla sommazione delle serie col metodo delle medie aritmetiche il lettore consulti E. Kogbetliantz [30, a)].

5. - Sia $f(x)$ periodica con periodo 2π e sommabile in $(-\pi, \pi)$, e si abbia

(1) $$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_k^{1\ldots\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx \, dx,$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Poniamo

(2) $$\alpha_0 = \frac{1}{2} a_0, \qquad \alpha_k = a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx$$

ed effettuiamo la somma $(C, 1)$ della serie $\sum\limits_k^{0\ldots\infty} \alpha_k$.

Posto [cfr. n.° 2].

(3) $$S_k = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_k ; \qquad \sigma_n = \frac{1}{n} \sum_k^{0\ldots(n-1)} S_k$$

per determinare la somma $(C, 1)$ della serie (1) occorre studiare il

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n .$$

Abbiamo [cfr. § 4, n.° 2, (4)].

$$S_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\alpha) \frac{\operatorname{sen}\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} d\alpha$$

perciò

$$\sigma_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\alpha) \frac{\sum\limits_k^{0\ldots(n-1)} \operatorname{sen}\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} d\alpha$$

e per l'identità

$$\sum_k^{0\ldots(n-1)} \operatorname{sen}\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha = \frac{\sum\limits_k^{0\ldots(n-1)} 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen}\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_k^{0\ldots(n-1)} \{\cos k\alpha - \cos (k+1)\alpha\}}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \cos n\alpha}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} = \left(\operatorname{sen}^2 \frac{n}{2} \alpha\right) / \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$$

abbiamo anche

$$\sigma_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\alpha) \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{n}{2} \alpha}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}} d\alpha$$

e cambiando α in 2α otteniamo la media σ_n espressa per ***l'integrale di Fejér***

(4) $$\sigma_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x+2\alpha) \left(\frac{\operatorname{sen} n\alpha}{\operatorname{sen} \alpha}\right)^2 d\alpha \qquad [\text{Fejér } (17, a)].$$

Dividendo l'intervallo di integrazione $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ nei due intervalli $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e cambiando nel primo integrale α in $-\alpha$ abbiamo

(5) $$\sigma_n = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2\alpha) + f(x-2\alpha)] \left(\frac{\operatorname{sen} n\alpha}{\operatorname{sen} \alpha}\right)^2 d\alpha.$$

Per la funzione $f(x) = 1$ si ha $a_0 = 1$, $\alpha_k = 0$, $S_k = 1$, $\sigma_n = 1$, perciò per la (5)

(6) $$1 = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\operatorname{sen} n\alpha}{\operatorname{sen} \alpha}\right)^2 d\alpha$$

quindi

(6′) $$S(x) = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} S(x) \left(\frac{\operatorname{sen} n\alpha}{\operatorname{sen} \alpha}\right)^2 d\alpha$$

e allora perchè in un punto x la somma $(C, 1)$ della serie (1) sia uguale ad $S(x)$, si abbia cioè $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = S(x)$ occorre e basta che si abbia per le (5) e (6′)

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2\alpha) + f(x-2\alpha) - 2S(x)] \left(\frac{\operatorname{sen} n\alpha}{\operatorname{sen} \alpha}\right)^2 d\alpha.$$

Posto allora [cfr. § 4, n°. 4, (4)]

(7) $$\boxed{\varphi(x, \alpha) = f(x+2\alpha) + f(x-2\alpha) - 2S(x)}$$

abbiamo il

Teorema 32. - Condizione necessaria e sufficiente perchè la somma $(C, 1)$ della serie di **Fourier** di una funzione $f(x)$, periodica col periodo 2π, sommabile in $(-\pi, \pi)$ sia uguale in un punto x ad $S(x)$ è che comunque si assegni un numero ω positivo si possa trovare un intero $n_\omega > 0$ tale che per ogni intero $n > n_\omega$ sia

$$\left| \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x, a) \left(\frac{\operatorname{sen} na}{\operatorname{sen} a}\right)^2 da \right| < \omega.$$

Posto

$$A = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x, a) \left(\frac{\operatorname{sen} na}{\operatorname{sen} a}\right)^2 da - \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x, a) \left(\frac{\operatorname{sen} na}{a}\right)^2 da$$

abbiamo

$$|A| = \left| \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x, a) \operatorname{sen}^2 na \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 a} - \frac{1}{a^2}\right) da \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi(x, a)| \left| \frac{1}{\operatorname{sen}^2 a} - \frac{1}{a^2} \right| da,$$

e poichè la funzione $1/\operatorname{sen}^2 a - 1/a^2$ quando a varia tra 0 e $\frac{\pi}{2}$ è continua e perciò limitata, supposto $|1/\operatorname{sen}^2 a - 1/a^2| < L$ per $0 \leqslant a \leqslant \pi/2$ abbiamo

$$(8) \qquad |A| < \frac{L}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi(x, a)| \, da.$$

Si ha da qui che i limiti dei due integrali

$$(9) \qquad \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x, a) \left(\frac{\operatorname{sen} na}{\operatorname{sen} a}\right)^2 da, \qquad \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x, a) \left(\frac{\operatorname{sen} na}{a}\right)^2 da$$

quando $n \to \infty$ hanno uguale comportamento e ne segue il

Teorema 33. - Condizione necessaria e sufficiente perchè la somma $(C, 1)$ della serie di **Fourier** di una funzione $f(x)$, periodica, col periodo 2π, sommabile in $(-\pi, \pi)$ sia uguale in un punto x ad $S(x)$ è che comunque si assegni un numero positivo ω si possa trovare un intero $n_\omega > 0$ tale che per ogni intero $n > n_\omega$ sia

$$(10) \qquad \left| \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x, a) \left(\frac{\operatorname{sen} na}{a}\right)^2 da \right| < \omega.$$

Si ha di più che se $S(x)$ è continua in (a, b) appartenente a $(-\pi, \pi)$ [1] e qualunque sia ω il numero n_ω è indipendente da x la convergenza della somma $(C, 1)$ della serie di **Fourier** di $f(x)$ verso $S(x)$ è uniforme in (a, b).

Infatti se in (a, b) è $|S(x)| < L'$ abbiamo per le (7) e (8)

$$|A| < \frac{L}{n\pi} M$$

con

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x+2a)| \, da + \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x-2a)| \, da + L'\pi.$$

Vogliamo ancora trasformare la condizione espressa dalla (10). Sia $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$; abbiamo

$$\Omega = \left| \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x, a) \left(\frac{\operatorname{sen} na}{a}\right)^2 da - \frac{1}{n\pi} \int_0^{\varepsilon} \varphi(x, a) \left(\frac{\operatorname{sen} na}{a}\right)^2 da \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{n\pi} \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x, a) \left(\frac{\operatorname{sen} na}{a}\right)^2 da \right|$$

ma per $0 < \varepsilon \leqslant a$ si ha $(\operatorname{sen} na/a)^2 \leqslant 1/a^2 \leqslant 1/\varepsilon^2$ perciò

$$0 \leqslant \Omega \leqslant \frac{1}{n\pi\varepsilon^2} \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} |\varphi(x, a)| \, da,$$

e poichè $\lim_{n \to \infty} \Omega = 0$ abbiamo il

Teorema 33'. - Condizione necessaria e sufficiente perchè la somma $(C, 1)$ della serie di **Fourier** di una funzione $f(x)$, periodica,

[1] Qui e nel seguito facciamo la solita ipotesi che se $a = -\pi$, $b = \pi$ sia $S(-\pi) = S(\pi)$.

col periodo 2π, sommabile in $(-\pi, \pi)$ sia uguale in un punto x ad $S(x)$ è che comunque si fissi un numero positivo $\omega > 0$ si possano determinare un numero $\varepsilon > 0$ e un intero n_ω tali che per qualsiasi intero $n > n_\omega$ sia

$$\left| \frac{1}{n\pi} \int_0^\varepsilon \varphi(x, \alpha) \left(\frac{\operatorname{sen} n\alpha}{\alpha}\right)^2 d\alpha \right| < \omega.$$

Se $S(x)$ è continua in (a, b) appartenente a $(-\pi, \pi)$ ed i numeri ε ed n_ω sono indipendenti da x, la convergenza della somma $(C, 1)$ della serie di FOURIER di $f(x)$ verso $S(x)$ è uniforme in (a, b).

6. - TEOREMA 34. - Se $f(x)$ è una funzione periodica, col periodo 2π, sommabile in $(-\pi, \pi)$, e se posto

$$\varphi(x, \alpha) = f(x+2\alpha) + f(x-2\alpha) - 2S(x)$$

si ha

$$\lim_{\alpha \to 0} \varphi(x, \alpha) = 0$$

allora la somma $(C, 1)$ della serie di FOURIER di $f(x)$ nel punto x è uguale ad $S(x)$.

Dimostrazione. - Infatti supposto $\lim\limits_{\alpha \to 0} \varphi(x, \alpha) = 0$ ne viene che fissato $\omega > 0$ si può determinare un $\varepsilon > 0$ tale che per $0 \leqq \alpha \leqq \varepsilon$ sia $|\varphi(x, \alpha)| < \omega$.

Abbiamo ora, tenuto conto della (6) del n.° 5

$$\left| \frac{1}{n\pi} \int_0^\varepsilon \varphi(x, \alpha) \left(\frac{\operatorname{sen} n\alpha}{\alpha}\right)^2 d\alpha \right| \leqq \frac{\omega}{n\pi} \int_0^\varepsilon \left(\frac{\operatorname{sen} n\alpha}{\alpha}\right)^2 d\alpha \leqq$$

$$\leqq \frac{\omega}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\operatorname{sen} n\alpha}{\operatorname{sen} \alpha}\right)^2 d\alpha = \frac{\omega}{2} < \omega$$

e per il teorema 33′ ne segue il nostro teorema.

Abbiamo subito i seguenti notevoli corollari.

Corollario 1. - La somma $(C, 1)$ della serie di FOURIER di $f(x)$ in ogni punto x ove $f(x)$ è regolare [I, Cap. III, § 4, n.° 6] è uguale ad $f(x)$.

Corollario 2. - La somma $(C, 1)$ della serie di FOURIER di $f(x)$ in ogni punto x ove $f(x)$ ha una discontinuità di prima specie è uguale a $[f(x+) + f(x-)]/2$.

***Corollario* 3. - Se in un punto x, ordinario per $f(x)$, la serie di FOURIER è convergente [è sommabile $(C, 0)$] la sua somma è uguale ad $f(x)$.**

Dimostrazione. - Infatti le due somme $(C, 0)$ e $(C, 1)$ della $f(x)$ nel punto x sono uguali tra loro [teor. 26], ma nelle nostre ipotesi, in virtù del corollario 1, la somma $(C, 1)$ è uguale ad $f(x)$.

Corollario 4. - Se in un punto x di discontinuità di prima specie per $f(x)$, la serie di FOURIER è convergente [è sommabile $(C, 0)$] la sua somma è uguale ad $[f(x+) + f(x-)]/2$.

Dal teor. 33′ e dal teorema 34, posto $f(x) = S(x)$ risulta il

TEOREMA 35. - Se $f(x)$ è una funzione periodica, col periodo 2π, sommabile in $(-\pi, \pi)$, e se in (a, b) appartenente a $(-\pi, \pi)$ $f(x)$ è continua, la somma $(C, 1)$ della serie di FOURIER di $f(x)$ converge uniformemente verso $f(x)$ in qualunque intervallo interno ad (a, b).

In particolare se la $f(x)$ è continua in tutto $(-\pi, \pi)$,

$$[f(-\pi) = f(+\pi)]$$

la somma $(C, 1)$ della serie di FOURIER di $f(x)$ converge uniformemente verso $f(x)$ in qualunque intervallo.

7. - TEOREMA 36 (di LEBESGUE [37, a)], p. 94]). - Se $f(x)$ è una funzione sommabile in $(-\pi, \pi)$, la somma $(C, 1)$ della sua serie di FOURIER è generalmente uguale ad $f(x)$.

Dimostrazione. - Dobbiamo far vedere che escluso al più un insieme di misura nulla di $(-\pi, \pi)$ si ha

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = f(x)$$

od anche che posto

$$\varphi(x, \alpha) = f(x+2\alpha) + f(x-2\alpha) - 2f(x) \tag{1}$$

si ha generalmente per i punti x di $(-\pi, \pi)$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n\pi} \int_0^\varepsilon \varphi(x, \alpha) \left(\frac{\operatorname{sen} n\alpha}{\alpha}\right)^2 d\alpha = 0, \qquad 0 < \varepsilon \leqq \pi/2.$$

Essendo per $\alpha > 0$, $\alpha - \operatorname{sen} \alpha \geqq 0$, $\alpha(1 - \operatorname{sen} \alpha) \geqq 0$, sommando si ha $2a \geqslant (1+a)$ sen a, sen $a/a \leqslant 2/(1+a)$, basterà perciò dimostrare che è generalmente in $(-\pi, \pi)$

$$(2) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{\pi} \int_0^\varepsilon |\varphi(x, a)| \frac{1}{(1+na)^2} da = 0.$$

Posto

$$(3) \qquad \Phi(x, a) = \int_0^a |\varphi(x, \beta)| d\beta$$

abbiamo integrando per parti

$$\frac{4n}{\pi} \int_0^\varepsilon |\varphi(x, a)| \frac{1}{(1+na)^2} da = \frac{4}{\pi} \frac{n}{(1+n\varepsilon)^2} \Phi(x, \varepsilon) + \frac{8}{\pi} \int_0^\varepsilon \Phi(x, a) \frac{n^2}{(1+na)^3} da$$

$$\frac{4n}{\pi} \int_0^\varepsilon |\varphi(x, a)| \frac{1}{(1+na)^2} da \leqslant \frac{4}{\pi} \frac{n}{(1+n\varepsilon)^2} \Phi(x, \varepsilon) + \frac{8}{\pi} \int_0^\varepsilon \frac{\Phi(x, a)}{a} \frac{n}{(1+na)^2} da.$$

Fissato $\varepsilon > 0$ si ha $\lim_{n\to\infty} \frac{4}{\pi} \frac{n}{(1+n\varepsilon)^2} \Phi(x, \varepsilon) = 0$, e allora se facciamo vedere che escluso al più un aggregato di punti x di misura nulla, comunque si fissi un numero positivo σ, si può determinare un $\varepsilon > 0$ tale che

$$\int_0^\varepsilon \frac{\Phi(x, a)}{a} \frac{n}{(1+na)^2} da < \sigma,$$

ne risulta il teorema.

Abbiamo

$$\frac{\Phi(x, a)}{a} = \frac{1}{a} \int_0^a |\varphi(x, \beta)| d\beta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{a} \int_0^a |f(x+2\beta) - f(x)| d\beta + \frac{1}{a} \int_0^a |f(x-2\beta) - f(x)| d\beta$$

$$\frac{\Phi(x, a)}{a} \leqslant \frac{1}{2a} \int_x^{x+2a} |f(t) - f(x)| dt + \frac{1}{2a} \int_x^{x-2a} |f(t) - f(x)| dt$$

e siccome escluso al più un insieme di punti x di misura nulla si ha [I, Cap. V, n.° 8]

$$\lim_{a\to 0} \frac{1}{2a} \int_x^{x+2a} |f(t) - f(x)| dt = 0, \qquad \lim_{a\to 0} \frac{1}{2a} \int_x^{x-2a} |f(t) - f(x)| dt = 0$$

fissato σ si può determinare un $\varepsilon > 0$ tale che $0 < \frac{\Phi(x, a)}{a} < \sigma$ per $0 < a \leqslant \varepsilon$, quindi

$$\int_0^\varepsilon \frac{\Phi(x, a)}{a} \frac{n}{(1+na)^2} da \leqslant \sigma \int_0^\varepsilon \frac{n}{(1+na)^2} da < \sigma.$$

8. - Teorema 37 (di Lebesgue [37, a)], p. 45). - Se $f(x)$ è a variazione limitata in $(-\pi, \pi)$ per le sue costanti di Fourier vale la relazione

$$a_k = O\left(\frac{1}{k}\right), \qquad b_k = O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Dimostrazione. - Per la nostra ipotesi potremo porre in $(-\pi, \pi)$

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

ove $f_1(x)$, $f_2(x)$ sono due funzioni non negative, non decrescenti [I, Cap. III, teor. 21].

Si ha

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1 \cos kx\, dx - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2 \cos kx\, dx$$

e applicando il secondo teorema della media ai due integrali [I, Cap. IV, § 3, n.° 3] si ha

$$|a_k| \leqslant \frac{f_1(\pi)}{\pi} \left| \int_{\xi_1}^{\pi} \cos kx\, dx \right| + \frac{f_2(\pi)}{\pi} \left| \int_{\xi_2}^{\pi} \cos kx\, dx \right|$$

$$\leqslant \frac{f_1(\pi) + f_2(\pi)}{\pi} \frac{1}{k} [|\text{sen}\, k\xi_1| + |\text{sen}\, k\xi_2|] < \frac{2}{\pi} [f_1(\pi) + f_2(\pi)] \frac{1}{k}$$

Analoga dimostrazione vale per le costanti b_k.

Teorema 38 (di Dirichlet-Jordan [29]). - Se $f(x)$ è a variazione limitata in $(-\pi, \pi)$ in ogni punto interno a $(-\pi, \pi)$ la sua serie di Fourier converge verso $f(x)$ o verso $\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$, a seconda che nel punto considerato la $f(x)$ è continua o discontinua. [I, Cap. III, teor. 24].

Dimostrazione. - A seconda che nel punto x la $f(x)$ è continua o discontinua di prima specie, la sua somma $(C, 1)$ converge verso $f(x)$ o verso $\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$, [teor. 34, cor. 1, 2], ed avendosi per il teorema precedente $a_k \cos kx + b_k \text{ sen } kx = O\left(\frac{1}{k}\right)$ ne viene per il teorema di HARDY-LANDAU (teor. 31) che la somma $(C, 0)$ coincide con la somma $(C, 1)$ e da qui il nostro teorema.

TEOREMA 38'. - Se $f(x)$ è continua e a variazione limitata in $(-\pi, \pi)$ la sua serie di FOURIER converge uniformemente verso $f(x)$ in qualunque intervallo interno a $(-\pi, \pi)$. Quando sia $f(-\pi)=f(\pi)$ la convergenza uniforme ha luogo in tutto $(-\pi, \pi)$.

Dimostrazione. - Si ripeta il ragionamento precedente applicando il teor. 35.

Osservazione. - Se invece di supporre $f(x)$ a variazione limitata in $(-\pi, \pi)$ supponiamo $f(x)$ a variazione limitata in un intervallo (a, b) appartenente a $(-\pi, \pi)$, gli enunciati dei teoremi 38, 38' restano validi per i punti interni ad (a, b); infatti il comportamento della serie di FOURIER di $f(x)$ nei punti interni ad (a, b) è per il teorema di RIEMANN (teor. 14) lo stesso del comportamento della serie di FOURIER di una funzione a variazione limitata che in (a, b) coincide con $f(x)$.

§ 6. - La sommazione di Poisson delle serie di Fourier.

1. Sommazione delle serie di POISSON. Teorema di FROBENIUS. - 2. L'integrale di POISSON e la somma di POISSON delle serie di FOURIER.

1. - Vogliamo dare un rapidissimo cenno sul procedimento di sommazione delle serie di POISSON, per farne poi applicazione alla sommazione delle serie di FOURIER.

Definizione 7. - Data una serie numerica $\sum_n^{0\ldots\infty} a_n$, si consideri la serie $\sum_n^{0\ldots\infty} a_n\varrho^n$ (¹) e supponiamo che questa sia convergente per $0 \leq \varrho < 1$; allora, posto

$$S(\varrho) = \sum_n^{0\ldots\infty} a_n\varrho_n$$

se avviene che

$$\lim_{\varrho\to 1-} S(\varrho)$$

(¹) I fattori $1, \varrho, \varrho^2, \ldots, \varrho^n, \ldots$ chiamansi *fattori di convergenza*, e il procedimento di sommazione indicato rientra come caso particolare nei procedimenti di sommazione col metodo dei fattori di convergenza. Il lettore che vorrà orientarsi sull'argomento consulti É. BOREL: *Leçons sur les séries divergentes* (Paris, 1928) Cap. VI, p. 216.

esiste ed è uguale ad S, diremo che S è la somma generalizzata di POISSON della serie $\sum_n^{0\ldots\infty} a_n$.

Il teorema di ABEL sulle serie di potenze ci assicura subito che se la serie $\sum_n^{0\ldots\infty} a_n$ è convergente ed ha per somma S, la sua somma di POISSON coincide con S (¹); è facile poi provare che il procedimento di sommazione di POISSON è regolare.

Un legame tra la somma $(C, 1)$ delle serie $\sum_n^{0\ldots\infty} a_n$ e la sua somma di POISSON è dato dal seguente

TEOREMA 39 (di FROBENIUS [20]). - Se la serie $\sum_n^{0\ldots\infty} a_n$ è sommabile $(C, 1)$ e la sua somma è S, anche la sua somma generalizzata di POISSON è S, si ha cioè

$$\lim_{\varrho\to 1-} \sum_n^{0\ldots\infty} a_n\varrho^n = S.$$

Dimostrazione. - Definite al solito le successioni $\{s_n\}$, $\{\sigma_n\}$ con le relazioni

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n; \qquad (n+1)\sigma_n = s_0 + s_1 + \ldots + s_n$$

abbiamo per ipotesi

(1) $$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = S.$$

Si ha ora per $0 \leq \varrho < 1$ [in generale per $|\varrho| < 1$]

$$\frac{1}{1-\varrho} = \sum_n^{0\ldots\infty} \varrho^n, \qquad \frac{1}{(1-\varrho)^2} = \sum_n^{0\ldots\infty} (n+1)\varrho^n$$

e siccome la successione $\{\sigma_n\}$ è limitata ne viene che la serie $\sum_n^{0\ldots\infty} (n+1)\sigma_n\varrho^n$ è convergente per $0 \leq \varrho < 1$, e perciò per gli stessi valori di ϱ

(2) $$\lim_{m\to\infty} m\sigma_{m-1}\varrho^{m-1} = 0.$$

(¹) Cfr., ad es., M. PICONE: *Lezioni di Analisi Infinitesimale* (Catania, 1923), p. 271.

Dalla relazione

$$\sum_n^{0\ldots(m-1)} s_n\varrho^n = \sum_n^{0\ldots(m-1)} [(n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1}]\varrho^n =$$
$$= (1-\varrho)\sum_n^{0\ldots(m-2)} (n+1)\sigma_n\varrho^n + m\sigma_{m-1}\varrho^{m-1}$$

e per la (2) segue che la serie $\sum_n^{0\ldots\infty} s_n\varrho^n$ è convergente e che

$$(3)\qquad \sum_n^{0\ldots\infty} s_n\varrho^n = (1-\varrho)\sum_n^{0\ldots\infty}(n+1)\sigma_n\varrho^n.$$

Si ha pure

$$(4)\qquad \sum_n^{0\ldots m} a_n\varrho^n = \sum_n^{0\ldots m}(s_n - s_{n-1})\varrho^n = (1-\varrho)\sum_n^{0\ldots(m-1)} s_n\varrho^n + s_m\varrho^m$$

e poichè dalla convergenza della serie (3) segue $\lim\limits_{m\to\infty} s_m\varrho^m = 0$, dalla (4) passando al limite per $m\to\infty$ si ottiene

$$\sum_n^{0\ldots\infty} a_n\varrho^n = (1-\varrho)\sum_n^{0\ldots\infty} s_n\varrho^n = (1-\varrho)^2\sum_n^{0\ldots\infty}(n+1)\sigma_n\varrho^n.$$

Fissato $\varepsilon > 0$ si può trovare un intero positivo m_0 tale che per $n > m_0$ sia $|S-\sigma_n| < \varepsilon$ e avendosi

$$\left|\sum_n^{0\ldots\infty} a_n\varrho^n - S\right| = \left|(1-\varrho)^2\sum_n^{0\ldots\infty}(n+1)\sigma_n\varrho^n - (1-\varrho)^2 S\sum_n^{0\ldots\infty}(n+1)\varrho^n\right| <$$
$$< (1-\varrho)^2\left|\sum_n^{0\ldots m_0}(n+1)(\sigma_n - S)\varrho^n\right| + \varepsilon(1-\varrho)^2\sum_n^{0\ldots\infty}(n+1)\varrho^n <$$
$$< (1-\varrho)^2\left|\sum_n^{0\ldots m_0}(n+1)(\sigma_n - S)\varrho^n\right| + \varepsilon$$

e poichè ε è arbitrario, e $\lim\limits_{\varrho\to 1-}(1-\varrho)^2\left|\sum_n^{0\ldots m_0}(n+1)(\sigma_n - S)\varrho^n\right| = 0$ ne viene il teorema enunciato.

Osserviamo infine che se le a_n sono funzioni di θ in (θ_1, θ_2) e se $\sigma_n(\theta)$ tende uniformemente in (θ_1, θ_2) verso una funzione limitata $S(\theta)$, allora la convergenza di $\sum_n^{0\ldots\infty} a_n\varrho^n$ per $\varrho\to 1-$, verso $S(\theta)$ è uniforme in (θ_1, θ_2).

2. - Sia $f(\theta)$ una funzione sommabile in $(0, 2\pi)$, $f(0) = f(2\pi)$, e si consideri la sua serie di FOURIER

$$(5)\qquad f(\theta) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_n^{0\ldots\infty}[a_n\cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta],$$

con

$$(6)\qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\operatorname{sen} n\alpha\, d\alpha.$$

Per effettuare la sommazione di POISSON della serie di FOURIER di $f(\theta)$ occorre considerare la serie

$$(7)\qquad \frac{1}{2}a_0 + \sum_n^{0\ldots\infty}\varrho^n[a_n\cos n\theta + b_n\operatorname{sen} n\theta].$$

Se interpretiamo ϱ, θ come coordinate polari di un punto, ϱ raggio vettore e θ anomalia, è subito visto che la serie (7) converge uniformemente in qualunque cerchio con centro nell'origine e raggio $\varrho_1 < 1$; infatti per il teorema 13 (di LEBESGUE) si ha $a_n = o(1)$, $b_n = o(1)$, perciò esiste una costante L tale che

$$\left|\frac{1}{2}a_0\right| < L; \qquad |a_n| < L, \qquad |b_n| < L \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

e la serie dei moduli dei termini della (7) per $0 \leqslant \varrho \leqslant \varrho_1$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, è minorante della serie a termini costanti convergente

$$L\sum_n^{0\ldots\infty}\varrho_1^n.$$

Posto

$$(7')\qquad u(\varrho, \theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_n^{0\ldots\infty}\varrho^n[a_n\cos n\theta + b_n\operatorname{sen} n\theta]$$

abbiamo per le (6)

$$(8)\qquad u(\varrho, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\, d\alpha + \sum_n^{1\ldots\infty}\frac{\varrho^n}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos n(\alpha - \theta)\, d\alpha.$$

Si ha ora per $0 \leqslant \varrho < 1$

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\left[\frac{1}{2} + \sum_n^{1\ldots\infty}\varrho^n\cos n(\alpha - \theta)\right] d\alpha - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\, d\alpha - \right.$$
$$\left. - \sum_n^{1\ldots m}\frac{\varrho^n}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos n(\alpha-\theta)\, d\alpha\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|f(\alpha)|\, d\alpha\sum_{n=m+1}^{\infty}\varrho^n$$

e siccome

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|f(\alpha)|\,d\alpha\sum_{n=m+1}^{\infty}\varrho^n=0$$

ne viene che

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\alpha)\left[\frac{1}{2}+\sum_n^{1\ldots\infty}\varrho^n\cos n(\alpha-\theta)\right]d\alpha=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\alpha)d\alpha+\sum_n^{1\ldots\infty}\frac{\varrho^n}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\alpha)\cos n(\alpha-\theta)d\alpha,$$

e perciò dalla (8)

$$u(\varrho,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\alpha)\left[\frac{1}{2}+\sum_n^{1\ldots\infty}\varrho^n\cos n(\alpha-\theta)\right]d\alpha.$$

Ma è facile calcolare la somma in parentesi quadra sotto il segno integrale nel secondo membro; si ha infatti per $|z|<1$

$$\frac{1}{2}+z+z^2+\ldots.+z^n+\ldots.=-\frac{1}{2}+\frac{1}{1-z}$$

e per $z=\varrho e^{i(\alpha-\theta)}$, $0<\varrho<1$, abbiamo

$$\frac{1}{2}+\varrho\cos(\alpha-\theta)+\varrho^2\cos 2(\alpha-\theta)+\ldots.+\varrho^n\cos n(\alpha-\theta)+\ldots.=$$

$$=R\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{1-\varrho e^{i(\alpha-\theta)}}\right)\quad(^1),$$

e siccome

$$R\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{1-\varrho e^{i(\alpha-\theta)}}\right)=R\left(-\frac{1}{2}+\frac{1-\varrho e^{-i(\alpha-\theta)}}{1-2\varrho\cos(\alpha-\theta)+\varrho^2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1-\varrho\cos(\alpha-\theta)}{1-2\varrho\cos(\alpha-\theta)+\varrho^2}=\frac{1-\varrho^2}{2(1-2\varrho\cos(\alpha-\theta)+\varrho^2)}$$

troviamo infine per $0\leq\varrho<1$ la notevole formula [Poisson [47, *a*), *b*)]]

$$u(\varrho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\alpha)\frac{1-\varrho^2}{1-2\varrho\cos(\alpha-\theta)+\varrho^2}d\alpha$$

[*integrale di Poisson*].

(¹) Il simbolo $R(z)$ indica la parte reale di z.

Abbiamo allora che la somma di Poisson della serie di Fourier di $f(\theta)$ in un punto θ è espressa da

$$\lim_{\varrho\to1-}u(\varrho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\lim_{\varrho\to1-}\int_0^{2\pi}f(\alpha)\frac{1-\varrho^2}{1-2\varrho\cos(\alpha-\theta)+\varrho^2}d\alpha.$$

Ricordando i cor. 1, 2, 3 del teor. 34, il teor. 36 (di Lebesgue), il teorema 39 di Frobenius abbiamo il

Teorema 40. - Se $f(\theta)$ è una funzione sommabile in $(0,2\pi)$, $f(0)=f(2\pi)$.

a) se θ_0 è un punto di continuità di $f(\theta)$ è $\lim_{\varrho\to1-}u(\varrho,\theta_0)=f(\theta_0)$, cioè la somma di Poisson della serie di Fourier di $f(\theta)$ è uguale a $f(\theta_0)$ [teor. 34, cor. 1];

b) se θ_0 è un punto di discontinuità di prima specie di $f(\theta)$ si ha

$$\lim_{\varrho\to1-}u(\varrho,\theta_0)=\frac{f(\theta_0+)+f(\theta_0-)}{2}\quad\text{[teor. 34, cor. 2];}$$

c) è generalmente per θ variabile in $(0,2\pi)$ $\lim_{\varrho\to1-}u(\varrho,\theta)=f(\theta)$ [teor. 36];

d) se $f(\theta)$ è continua nell'intervallo (θ_1,θ_2) la somma di Poisson della serie di Fourier di $f(\theta)$ converge uniformemente verso $f(\theta)$ in qualunque intervallo interno a (θ_1,θ_2) [teor. 38'].

Notiamo infine che la $u(\varrho,\theta)$ nell'interno del cerchio unitario è una funzione armonica di ϱ, θ e nell'ipotesi che $f(\theta)$ sia continua in $(0,2\pi)$ risolve il problema di costruire una funzione armonica regolare nel cerchio unitario (continua il contorno del cerchio incluso) che sulla circonferenza di raggio 1 assuma una catena continua $f(\theta)$ di valori prescritti (¹).

(¹) Per un ampio studio sull'argomento cfr. L. Tonelli [60]: *Serie Trigonometriche* (Bologna, 1928), pp. 375-402.

§ 7. - Integrale di Fourier (1).

1. Funzioni a variazione limitata in intervalli infiniti. - 2. Funzioni ad integrale convergente. - 3. Limiti di alcuni integrali trigonometrici. - 4. Calcolo di $\lim\limits_{m\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen} m\alpha}{\alpha}\,d\alpha$. - 5. Un teorema preliminare. - 6. Teorema integrale di FOURIER, prima forma. - 7. Teorema di FOURIER, seconda forma. - 8. Le formule di FOURIER dedotte con procedimento abbreviato. - 9. Le formule di FOURIER del coseno e del seno. - 10. Esempi. - 11. La trasformazione di FOURIER. Formule di reciprocità.

1\. - *Definizione* 8. - Sia $I=(a, b)$ un tratto infinito in uno o in tutti e due i sensi, ed $f(x)$ una funzione definita per qualunque valore *finito* di x in I. Supponiamo che la $f(x)$ sia a variazione limitata in qualunque tratto finito (α, β) *interno* ad (a, b) e si indichi con $V(\alpha, \beta)$ la corrispondente variazione totale di $f(x)$. Se accade che l'insieme numerico $V(\alpha, \beta)$ corrispondente a tutti gli intervalli finiti (α, β) di (a, b) è limitato superiormente e indichiamo con $V(a, b)$ tale estremo superiore, diremo che $f(x)$ è a *variazione limitata* in (a, b) e $V(a, b)$ è la sua *variazione totale.*

TEOREMA 41. - Se $f(x)$ è a variazione limitata nel tratto infinito (a, b), $f(x)$ è la differenza di due funzioni limitate non negative non decrescenti, [esistono quindi i due limiti $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b-} f(x)$] e inversamente (2).

Dimostrazione. - Sia α un punto interno ad (a, b); se indichiamo con $P(\alpha, x)$, $N(\alpha, x)$ la variazione totale positiva e la variazione totale negativa di $f(x)$ in (α, x), si ha

$$f(x)=f(\alpha)+P(\alpha, x)-N(\alpha, x), \qquad x\geqslant \alpha \tag{1}$$

e poichè

$$0\leqslant P(\alpha, x)\leqslant V(\alpha, x)\leqslant V(a, b)\,; \qquad 0\leqslant N(\alpha, x)\leqslant V(\alpha, x)\leqslant V(a, b)$$

(1) Per un ampio studio dell'argomento cfr. S. BOCHNER [3]: *Vorlesungen über Fouriersche Integrale* (Leipzig, 1932), pp. 1-227.

(2) Per gli intervalli finiti cfr. I, Cap. III, teor. 21.

le funzioni $P(\alpha, x)$, $N(\alpha, x)$ sono limitate in (α, b) ed esistono quindi i due limiti

$$\lim_{x\to b-} P(\alpha, x), \qquad \lim_{x\to b-} N(\alpha, x)$$

ed esiste perciò il limite $\lim\limits_{x\to b-} f(x)$.

Con simboli analoghi si ha la formula

$$\begin{gathered} f(\alpha)=f(x)+P(x, \alpha)-N(x, \alpha)\\ f(x)=f(\alpha)-P(x, \alpha)+N(x, \alpha), \qquad x<\alpha \end{gathered} \tag{2}$$

e come avanti $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ esiste.

Se poniamo

$$\lim_{x\to a+} P(x, \alpha)=P(a, \alpha), \qquad \lim_{x\to a+} N(x, \alpha)=N(a, \alpha)$$

$$f(a)=f(\alpha)-P(a, \alpha)+N(a, \alpha) \tag{3}$$

dalle (1), (2), (3) si ricava la scomposizione richiesta per $f(x)$:

$$\begin{cases} f(x)=f(a)+[P(a, \alpha)-P(x, \alpha)]-[N(a, \alpha)-N(x, \alpha)] & \text{per } x<\alpha,\\ f(x)=f(a)+[P(a, \alpha)+P(\alpha, x)]-[N(a, \alpha)+N(\alpha, x)] & \text{per } x\geqslant\alpha. \end{cases} \tag{4}$$

Osservazione. - Se $f(x)$ è a variazione limitata in $(a, +\infty)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, $f(x)$ si può esprimere come differenza di due funzioni $f_1(x)$, $f_2(x)$ non decrescenti, ciascuna tendente a zero quando $x\to+\infty$.

Si ha infatti per il teorema dimostrato $f(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$ con $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ funzioni non decrescenti, limitate, e poichè per l'ipotesi fatta si ha $0=\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_1(x)-\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_2(x)$, posto $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_1(x)=l$, la formula

$$f(x)=[\varphi_1(x)-l]-[\varphi_2(x)-l]$$

realizza la decomposizione richiesta.

Scrivendo $f(x)=[l-\varphi_2(x)]-[l-\varphi_1(x)]$ si realizza la decomposizione con due funzioni non crescenti.

2\. - *Definizione* 9. - Sia a finito ed $f(x)$ definita per qualunque valore finito del tratto $(a\,;\,+\infty)$ $[(-\infty;\,a)]$; se comunque grande si sceglie il numero k la $f(x)$ è sommabile tra a e k $[-k$ e $a]$

e se $\lim\limits_{k\to+\infty}\int\limits_a^k f(x)\,dx$ $\left[\lim\limits_{k\to+\infty}\int\limits_{-k}^a f(x)\,dx\right]$ esiste ed è un numero finito, diremo che la funzione $f(x)$ è a *integrale convergente* tra a e $+\infty$ $[-\infty$ e $a]$ e indicheremo questo limite con

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx, \qquad \left[\int\limits_{-\infty}^a f(x)\,dx\right].$$

Abbiamo dunque per definizione

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{k\to+\infty}\int\limits_a^k f(x)\,dx\,; \qquad \int\limits_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{k\to+\infty}\int\limits_{-k}^a f(x)\,dx.$$

Se $f(x)$ è a integrale convergente tra $-\infty$ ed a, e tra a e $+\infty$ diremo che essa è a *integrale convergente* tra $-\infty$ e $+\infty$ e porremo per definizione

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \left[\lim_{\substack{k_1\to+\infty\\ k_2\to+\infty}}\int\limits_{-k_2}^{k_1} f(x)dx\right].$$

Definizione 10. - Sia $f(x)$ definita in tutti i punti finiti di $(a, +\infty)$ e sommabile in ogni tratto finito; se l'integrale $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ esiste, la $f(x)$ si dice ad *integrale assolutamente convergente* in $(a, +\infty)$.

Se $f(x)$ è ad integrale assolutamente convergente in $(a, +\infty)$ essa è anche ad integrale convergente in $(a, +\infty)$, ma non sempre è vero l'inverso; in generale se $f(x)$ e $g(x)$ sono definite in $(a, +\infty)$ e sommabili in ogni intervallo finito, se $f(x)$ è ad integrale assolutamente convergente in $(a, +\infty)$ e se generalmente nello stesso intervallo si ha $|\varphi(x)| \leq |f(x)|$, allora anche la $\varphi(x)$ è ad integrale assolutamente convergente e si ha

$$\left|\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx\right| \leq \int\limits_a^{+\infty}|f(x)|\,dx.$$

Osserviamo infine che se $f(x)$ è ad integrale assolutamente convergente in $(a, +\infty)$ i due integrali $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$, $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ coincidono con gli analoghi integrali di LEBESGUE nello stesso intervallo [I, Cap. IV, teor. 17], o ciò che è lo stesso la $f(x)$ è sommabile nel senso di LEBESGUE nello stesso intervallo, e inversamente [I, Cap. IV, teor. 16].

Definizione 11. - Se $f(x)$ è definita nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$ e sommabile in ogni intervallo finito, e se esiste il limite $\lim\limits_{k\to+\infty}\int\limits_{-k}^{k} f(x)\,dx$ esso chiamasi il *valore principale dell'integrale* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ secondo CAUCHY.

Osserviamo che può esistere il valore principale dell'integrale, senza che esso sia convergente.

3. - TEOREMA 42. - Sia $f(x)$ una funzione definita in tutti i punti finiti di un tratto $(A, +\infty)$, A finito, ed essa verifichi una delle seguenti condizioni:

a) $f(x)$ è ad integrale assolutamente convergente in $(A, +\infty)$;

b) $f(x)$ è a variazione limitata in $(A, +\infty)$, e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$;

vogliamo dimostrare che se a è un numero qualunque che soddisfa la limitazione $A \leq a \leq B$, B finito, allora

$$(5_1) \qquad \lim_{\mu\to\infty}\int\limits_a^{+\infty} f(x)\cos\mu x\,dx = 0,$$

$$(5_2) \qquad \lim_{\mu\to\infty}\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{sen}\,\mu x\,dx = 0$$

e la tendenza al limite è uniforme rispetto l'estremo a. [Cfr. teor. 12].

Dimostrazione. - Proviamo la (5_1), ugualmente si ragiona per la (5_2).

La funzione $f(x)$ soddisfi la condizione $a)$; fissato $\varepsilon > 0$, per il teorema di CAUCHY, può determinarsi un numero $k_0 > B$ tale che per $k > k_0$ risulti

$$\int\limits_{k_0}^{k} |f(x)|\,dx < \varepsilon/2.$$

e perciò anche

$$(6) \qquad \left|\int\limits_{k_0}^{k} f(x)\cos\mu x\,dx\right| \leq \int\limits_{k_0}^{k} |f(x)|\,dx < \varepsilon/2,$$

e questo prova per lo stesso teorema di CAUCHY che l'integrale di $f(x)$ cos μx è convergente in $(A, +\infty)$, e per la (6)

$$(7) \qquad \left|\int_{k_0}^{+\infty} f(x) \cos \mu x \, dx\right| \leq \varepsilon/2 \qquad \text{qualunque sia } \mu.$$

Per il teorema 12 un numero μ_0 può determinarsi, che, per $\mu > \mu_0$ e qualunque sia a in (A, B), risulti

$$(8) \qquad \left|\int_a^{k_0} f(x) \cos \mu x \, dx\right| < \varepsilon/2 \quad \text{per } A \leq a \leq B, \ \mu > \mu_0$$

e per la (7) e (8)

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x) \cos \mu x \, dx\right| < \varepsilon \quad \text{per } A \leq a \leq B, \ \mu > \mu_0.$$

Ci resta da dimostrare il teorema quando $f(x)$ soddisfa la condizione b). Per l'osservazione del n.° 1, basterà limitarci al caso in cui $f(x)$ è non decrescente, e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Fissato $\varepsilon > 0$ si determini $k_0 > B$ in modo che per $k \geq k_0$ sia $|f(x)| < \varepsilon/2$; ma in (k_0, k) si ha $f(k_0) \leq f(x) \leq 0$, e per il secondo teorema della media otteniamo

$$\left|\int_{k_0}^{k} f(x) \cos \mu x \, dx\right| = \left|f(k_0) \int_{k_0}^{\xi} \cos \mu x \, dx\right| \leq \frac{2}{\mu} |f(k_0)| < \frac{\varepsilon}{\mu},$$

e questo prova che l'integrale di $f(x) \cos \mu x$ è convergente in $(A, +\infty)$ e

$$\left|\int_{k_0}^{+\infty} f(x) \cos \mu x \, dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{\mu} < \varepsilon/2 \quad \text{per } \mu > 2.$$

Da questa e dalla (8) segue il teorema enunciato anche nel caso b).

4. - Ci sarà utile stabilire la seguente formula

$$(9) \qquad \lim_{m\to+\infty} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} m\alpha/2}{\alpha} \, d\alpha = \frac{\pi}{2},$$

o ciò che è lo stesso dimostrare che

$$(9') \qquad \lim_{m\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} m\alpha}{\alpha} \, d\alpha = \frac{\pi}{2} \quad (^1).$$

Dalla formula [§ 4, (3), n.° 2]

$$\frac{1}{2} + \sum_k^{1\ldots n} \cos k\alpha = \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}$$

integrando fra 0 e π si ha

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2 \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} \, d\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \, d\alpha =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)}{\alpha} \, d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(2n+1)\alpha \left[\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right] d\alpha,$$

e poichè $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right] \operatorname{sen}(2n+1)\alpha \, d\alpha = 0$, [teor. 12]

$$(10) \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\alpha}{\alpha} \, d\alpha = \frac{\pi}{2}, \qquad \left[\lim_{n\to+\infty} \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} \, d\alpha = \frac{\pi}{2}\right]$$

cioè la (9') per m intero, dispari.

In generale se $2n+1$ è il massimo intero dispari contenuto in m si ha

$$(11) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} m\alpha}{\alpha} \, d\alpha = \int_0^{m\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} \, d\alpha = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} \, d\alpha + \int_{(2n+1)\frac{\pi}{2}}^{m\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} \, d\alpha,$$

(1) m diverge all'∞ per valori reali.

ma è

$$\left|\int_{(2n+1)\frac{\pi}{2}}^{m\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} a}{a}\, da\right| \leqslant \int_{(2n+1)\frac{\pi}{2}}^{m\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a}\, da = \log\frac{m}{2n+1} < \log\frac{2n+3}{2n+1} = \log\left(1+\frac{2}{2n+1}\right) \to 0$$

per $n \to \infty$, e dalla (10) e (11) segue appunto la (9').

Dalla (9') cambiando ma in a si trova la nota formula

$$\text{(9'')} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Da questa vogliamo dedurre una limitazione che ci occorrerà tra poco.

Posto

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

abbiamo

$$\varphi(n\pi) = \int_0^{n\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{t+k\pi}\, dt$$

e siccome l'ultima somma è a segni alternati e coi termini decrescenti in valore assoluto ne viene

$$\pi > \varphi(\pi) > \varphi(3\pi) > \ldots > \varphi(2n-1)\pi > \ldots > \frac{\pi}{2};$$

$$0 < \varphi(2\pi) < \varphi(4\pi) < \ldots < \varphi(2n\pi) < \ldots < \frac{\pi}{2};$$

ma i punti $n\pi$ sono tutti e soltanto i punti di massimo e di minimo di $\varphi(x)$, allora è anche per $a>0$, $b>0$

$$\text{(9''')} \qquad \left|\int_a^b \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx\right| < \pi.$$

5. - **Teorema 43.** - Sia $f(a)$ sommabile nel tratto $(x-\pi, x+\pi)$ e il punto x sia un punto di continuità o un punto di discontinuità di prima specie per $f(a)$, vogliamo dimostrare che se la

serie di Fourier di $f(x)$ è convergente nel punto x, vale allora la formula

$$\text{(12)} \qquad \boxed{\lim_{m\to+\infty} \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(a) \frac{\operatorname{sen} m(a-x)}{a-x}\, da = \frac{1}{2}[f(x+)+f(x-)]} \quad (^1).$$

Dimostrazione. - Ricordiamo che data un funzione $f(x)$ sommabile periodica; col periodo 2π, abbiamo dimostrato che se la serie di Fourier di $f(x)$ converge in un punto x di continuità o di discontinuità di prima specie per $f(x)$, la somma della sua serie di Fourier in x vale $[f(x+)+f(x-)]/2$ [teor. 34, cor. 3 e cor. 4] e perciò [teor. 15^3]

$$\text{(13)} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\varepsilon} \varphi(x, a) \frac{\operatorname{sen} na}{a}\, da = 0, \qquad 0 < \varepsilon \leqslant \pi/2 \quad (^2),$$

con

$$\varphi(x, a) = f(x+2a) + f(x+2a) - [f(x+)+f(x-)].$$

Se osserviamo [teor. 12] che

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x, a) \frac{\operatorname{sen} na}{a}\, da = 0$$

la (13) può scriversi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x, a) \frac{\operatorname{sen} na}{a}\, da = 0,$$

ovvero

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2a)+f(x-2a)] \frac{\operatorname{sen} na}{a}\, da - \right.$$
$$\left. - [f(x+)+f(x-)] \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} na}{a}\, da \right] = 0$$

---

(1) m diverge all'∞ per valori reali.

(2) n diverge all'∞ per valori reali.

e per la (9′)

$$(14)\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x+2a)+f(x-2a)]\frac{\operatorname{sen} na}{a}\,da=\frac{f(x+)+f(x-)}{2}.$$

Ma si ha

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x+2a)+f(x-2a)]\frac{\operatorname{sen} na}{a}\,da=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x+2a)\frac{\operatorname{sen} na}{a}\,da=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+a)\frac{\operatorname{sen} 2na}{a}\,da$$

e cambiando $x+a$ in a, $2n$ in m, dalla (14) si ottiene la (12).

6. - Teorema 44. - Sia $f(x)$ una funzione definita per qualunque valore finito di x, sommabile in qualunque intervallo finito (a, b), ed $f(x)$ verifichi una delle seguenti ipotesi:

a) $f(x)/x$ è ad integrale assolutamente convergente in $(a, +\infty)$ con $a>0$;

b) $f(x)/x$ in $(a, +\infty)$, con $a>0$, è a variazione limitata e $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x)/x=0$.

Supponiamo poi che per un $b<0$ in $(-\infty, b)$ valga un' ipotesi analoga alla *a*) o alla *b*), e supponiamo infine che in un dato punto x la $f(x)$ sia continua o vi abbia una discontinuità di prima specie e che la serie di Fourier di $f(x)$, relativa ad un intervallo che contenga x nel suo interno [cfr. teor. 14], risulti in x convergente, vale allora la *formula di Fourier* [19, *a*)] [*1ª forma*]:

$$(15)\qquad \boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(a)\frac{\operatorname{sen} n(a-x)}{a-x}\,da=\frac{1}{2}[f(x+)+f(x-)]}.$$

Se inoltre la $f(x)$ è continua in un tratto (A, B) e la serie di Fourier di $f(x)$ converge uniformemente verso $f(x)$ in (A, B), allora la convergenza al limite del primo membro della (15) è uniforme in (A, B).

Dimostrazione. - Per le nostre ipotesi vale la (12) del teorema 43; sarà perciò dimostrata la (15) se proveremo che

$$(16_1)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{x+\pi}^{+\infty}f(a)\frac{\operatorname{sen} n(a-x)}{a-x}\,da=0;$$

$$(16_2)\qquad \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{x-\pi}f(a)\frac{\operatorname{sen} n(a-x)}{a-x}\,da=0.$$

Valga l'ipotesi *a*); per $a\geqslant x+\pi$, posto $\varphi(a)=f(a)/(a-x)$, si ha

$$|\varphi(a)|=\left|\frac{f(a)}{a}\right|\left|\frac{a}{a-x}\right|=\left|\frac{f(a)}{a}\right|\left|1+\frac{x}{a-x}\right|<\left|\frac{f(a)}{a}\right|\left(1+\frac{|x|}{\pi}\right),$$

la $\varphi(a)$ è quindi ad integrale assolutamente convergente in $(x+\pi, +\infty)$ e per il teorema 42 [ipotesi *a*)]

$$(17_1)\qquad \lim_{n\to\infty}\int_{x+\pi}^{+\infty}f(a)\frac{\operatorname{sen} na}{a-x}\,da=0,$$

$$(17_2)\qquad \lim_{n\to\infty}\int_{x+\pi}^{+\infty}f(a)\frac{\cos na}{a-x}\,da=0.$$

Si ha ora

$$\int_{x+\pi}^{b}f(a)\frac{\operatorname{sen} n(a-x)}{a-x}\,da=\cos nx\int_{x+\pi}^{b}f(a)\frac{\operatorname{sen} na}{a-x}\,da-\operatorname{sen} nx\int_{x+\pi}^{b}f(a)\frac{\cos na}{a-x}\,da$$

quindi

$$\left|\int_{x+\pi}^{b}f(a)\frac{\operatorname{sen} n(a-x)}{a-x}\,da\right|\leqslant\left|\int_{x+\pi}^{b}f(a)\frac{\operatorname{sen} na}{a-x}\,da\right|+\left|\int_{x+\pi}^{b}f(a)\frac{\cos na}{a-x}\,da\right|$$

e facendo tendere b a $+\infty$ e tenuto conto delle (17_1), (17_2) si trova la (16_1).

Supponiamo sussista l'ipotesi *b*); siccome $\dfrac{f(a)}{a-x}=\dfrac{f(a)}{a}\left[1+\dfrac{x}{a-x}\right]$ è a variazione limitata in $(x+\pi, +\infty)$ e $\lim\limits_{a\to+\infty} f(a)/(a-x)=0$, applicando il teorema 42 viene subito la (16_1).

Con analoghi ragionamenti si trova, nelle ipotesi dichiarate, la (16_2).

L'ultima parte dell'enunciato del teorema segue dall'osservare che nelle ipotesi ivi dichiarate e per il ricordato teor. 42, la tendenza al limite dei primi membri delle (12), (16_1), (16_2) ai secondi membri è uniforme per x variabile in (A, B).

Supponiamo ad es. $f(x)=|x|^{\mu}$ con $0<\mu<1$; si ha per $x\neq 0$

$|f(x)/x| = |x|^{\mu-1}$, è soddisfatta perciò la condizione $b)$ del teorema, quindi

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |a|^{\mu} \frac{\operatorname{sen} n(a-x)}{a-x} da = |x|^{\mu}, \qquad (0 < \mu < 1).$$

7. - Teorema 45. - Sia $f(x)$ una funzione definita per qualunque valore finito di x, sommabile in qualunque intervallo finito (a, b), ed $f(x)$ verifichi una delle seguenti ipotesi:

$a)$ $f(x)$ è ad integrale assolutamente convergente in $(a, +\infty)$ con $a > 0$;

$b)$ $f(x)$ in $(a, +\infty)$, con $a > 0$, è a variazione limitata, e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Supponiamo poi che per un $b < 0$, in $(-\infty, b)$ valga un'ipotesi analoga alla $a)$ o alla $b)$, e supponiamo infine che in un dato punto x la $f(x)$ sia continua o vi abbia una discontinuità di prima specie e che la serie di Fourier di $f(x)$, relativa ad un intervallo che contenga x nel suo interno, risulti in x convergente; vale allora nel punto x la *formula di Fourier* [19, $b)$] [2^a *forma*]:

$$\boxed{\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dv \int_{-\infty}^{+\infty} f(a) \cos v(a-x) da = \frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)]} \tag{18}$$

dove, quando si verifica l'ipotesi $b)$ conveniamo che sia

$$\int_0^{+\infty} \ldots.\, dv = \lim_{\sigma \to +0} \int_{\sigma}^{+\infty} \ldots.\, dv.$$

Dimostrazione. - Nelle ipotesi dichiarate nel teorema sussiste la formula (12) del teorema 43:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(a) \frac{\operatorname{sen} n(a-x)}{a-x} da = \frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)]. \tag{19}$$

Si ha

$$\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(a) \frac{\operatorname{sen} n(a-x)}{a-x} da = \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(a) da \int_0^n \cos v(a-x) dv =$$
$$= \int_0^n dv \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(a) \cos v(a-x) da \quad (^1)$$

(1) È lecita l'inversione delle integrazioni; infatti fissato $\varepsilon > 0$, si determini una funzione *continua* $P(a)$ in $(x-\pi, x+\pi)$ tale che $\int_{x+\pi}^{x+\pi} |f(a) - P(a)| da < \varepsilon$; si ha allora

$$\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(a) da \int_0^n \cos v(a-x) dv = \int_{x-\pi}^{x+\pi} [f(a) - P(a)] da \int_0^n \cos v(a-x) dv +$$
$$+ \int_{x-\pi}^{x+\pi} P(a) da \int_0^n \cos v(a-x) dv = \theta_1 n\varepsilon + \int_0^n dv \int_{x-\pi}^{x+\pi} P(a) \cos v(a-x) da =$$
$$= \theta_1 n\varepsilon + \int_0^n dv \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(a) \cos v(a-x) da + \int_0^n dv \int_{x-\pi}^{x+\pi} [P(a) - f(a)] \cos v(a-x) da =$$
$$= \theta_1 n\varepsilon + \theta_2 n\varepsilon + \int_0^n dv \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(a) \cos v(a-x) da,$$

con $|\theta_1| < 1$, $|\theta_2| < 1$, e per l'arbitrarietà di ε otteniamo la formula di inversione richiesta.

e la (19) diventa quindi

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dv \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(a) \cos v(a-x) da = \frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)]$$

e per provare la (18) basterà far vedere che

$$\int_0^{+\infty} dv \int_{x+\pi}^{+\infty} f(a) \cos v(a-x) da = 0,$$
$$\int_0^{+\infty} dv \int_{-\infty}^{x-\pi} f(a) \cos v(a-x) da = 0,$$

od anche, cambiando $a - x$ in a, e posto $f(a+x) = \varphi(a)$,

$$\int_0^{+\infty} dv \int_{\pi}^{+\infty} \varphi(a) \cos va\, da = 0\,; \tag{20_1}$$

$$\int_0^{+\infty} dv \int_{-\infty}^{-\pi} \varphi(a) \operatorname{sen} va\, da = 0 \tag{20_2}$$

dove per la $\varphi(a)$ valgono le ipotesi $a)$ o $b)$.

Proveremo la (20_1), ugualmente si ragiona sulla (20_2).

Valga l'ipotesi $a)$; fissato l'intero positivo n si può determinare un numero positivo b_0 tale che per $k \geqslant k_0$ risulti

$$\int_k^{+\infty} |\varphi(\alpha)|\, d\alpha < \frac{1}{n^2}, \qquad k \geqslant k_0;$$

si avrà

$$\left| \int_\pi^{+\infty} \varphi(\alpha) \cos v\alpha\, d\alpha - \int_\pi^{k} \varphi(\alpha) \cos v\alpha\, d\alpha \right| =$$

$$= \left| \int_k^{+\infty} \varphi(\alpha) \cos v\alpha\, d\alpha \right| \leqslant \int_k^{+\infty} |\varphi(\alpha)|\, d\alpha < \frac{1}{n^2}$$

perciò

$$\int_\pi^{+\infty} \varphi(\alpha) \cos v\alpha\, d\alpha = \int_\pi^{k} \varphi(\alpha) \cos v\alpha\, d\alpha + \frac{\theta_1(k, v)}{n^2},$$

$$|\theta_1(k, v)| < 1, \qquad k < k_0;$$

quindi

$$\int_0^n dv \int_\pi^{+\infty} \varphi(\alpha) \cos v\alpha\, d\alpha = \frac{\theta_1(k)}{n} + \int_0^n dv \int_\pi^{k} \varphi(\alpha) \cos v\alpha\, d\alpha =$$

$$= \frac{\theta_1(k)}{n} + \int_\pi^{k} \varphi(\alpha) \frac{\operatorname{sen} n\alpha}{\alpha}\, d\alpha, \qquad |\theta_1(k)| < 1$$

ma l'integrale $\int_\pi^{+\infty} \varphi(\alpha) \frac{\operatorname{sen} n\alpha}{\alpha}\, d\alpha$ è (assolutamente) convergente, e passando perciò al limite per $k \to +\infty$ otteniamo

$$\int_0^n dv \int_\pi^{+\infty} \varphi(\alpha) \cos v\alpha\, d\alpha = \frac{\mu(n)}{n} + \int_\pi^{+\infty} \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha} \operatorname{sen} n\alpha\, d\alpha, \qquad |\mu(n)| \leqslant 1,$$

dalla quale, passando al limite per $n \to \infty$, poichè il secondo membro $\to 0$, [teor. 42, a)], risulta appunto la (20_1).

Valga ora l'ipotesi $b)$, e limitiamoci, come è lecito, al caso di $\varphi(\alpha)$ non decrescente, e $\varphi(\alpha) \to 0$ per $\alpha \to +\infty$. Sia $\sigma > 0$ e consideriamo i valori di $v \geqslant \sigma$; fissato per $\varepsilon > 0$, si determini k_0 in modo che risulti $|2\varphi(k_0)/\sigma| < \varepsilon$; poichè per $\alpha \geqslant k_0$ si

ha $\varphi(k_0) \leqslant \varphi(\alpha) \leqslant 0$, applicando il secondo teorema della media, otteniamo

$$\left| \int_{k_0}^{k} \varphi(\alpha) \cos v\alpha\, d\alpha \right| = \left| \varphi(k_0) \int_{k_0}^{\xi} \cos v\alpha\, d\alpha \right| \leqslant \left| \frac{2}{\sigma} \varphi(k_0) \right| \leqslant \frac{2}{\sigma} |\varphi(k_0)| < \varepsilon$$

quindi l'integrale $\int_\pi^{+\infty} \varphi(\alpha) \cos v\alpha\, d\alpha$ converge uniformemente rispetto a v, possiamo perciò scrivere

$$\int_\sigma^n dv \int_\pi^{+\infty} \varphi(\alpha) \cos v\alpha\, d\alpha = \lim_{k \to +\infty} \int_\sigma^n dv \int_\pi^{k} \varphi(\alpha) \cos v\alpha\, d\alpha =$$

$$= \lim_{k \to +\infty} \int_\pi^{k} \varphi(\alpha) d\alpha \int_\sigma^n \cos v\alpha\, dv =$$

$$= \lim_{k \to +\infty} \left[\int_\pi^{k} \varphi(\alpha) \frac{\operatorname{sen} n\alpha}{\alpha}\, d\alpha - \int_\pi^{k} \varphi(\alpha) \frac{\operatorname{sen} \sigma\alpha}{\alpha}\, d\alpha \right].$$

Ma $\varphi(\alpha)/\alpha$ è monotona e tende a zero per $\alpha \to +\infty$, sono perciò convergenti i due integrali

$$\int_\pi^{+\infty} \varphi(\alpha) \frac{\operatorname{sen} n\alpha}{\alpha}\, d\alpha, \qquad \int_\pi^{+\infty} \varphi(\alpha) \frac{\operatorname{sen} \sigma\alpha}{\alpha}\, d\alpha,$$

quindi

$$(21) \qquad \int_\sigma^n dv \int_\pi^{+\infty} \varphi(\alpha) \cos v\alpha\, d\alpha = \int_\pi^{+\infty} \varphi(\alpha) \frac{\operatorname{sen} n\alpha}{\alpha}\, d\alpha - \int_\pi^{+\infty} \varphi(\alpha) \frac{\operatorname{sen} \sigma\alpha}{\alpha}\, d\alpha.$$

In virtù del teorema 42 $b)$ si ha

$$\lim_{n \to \infty} \int_\pi^{+\infty} \varphi(\alpha) \frac{\operatorname{sen} n\alpha}{\alpha}\, d\alpha = 0,$$

per dedurre dalla (21) la (20_1) basterà allora provare che

$$(22) \qquad \lim_{\sigma \to 0} \int_\pi^{+\infty} \varphi(\alpha) \frac{\operatorname{sen} \sigma\alpha}{\alpha}\, d\alpha = 0.$$

Sia $\varepsilon > 0$ e determiniamo k_0 in modo che si abbia $|\varphi(k_0)| < \varepsilon/2\pi$, e consideriamo i valori positivi di $\sigma < \sigma_0$ con $\sigma_0 \int_{\pi}^{+\infty} |\varphi(\alpha)|\, d\alpha < \varepsilon/2$.

Per $k > k_0$ si ha, (secondo teorema della media)

$$\left|\int_{\pi}^{k} \varphi(\alpha) \frac{\operatorname{sen} \sigma\alpha}{\alpha} d\alpha\right| = \left|\int_{\pi}^{k_0} \varphi(\alpha) \frac{\operatorname{sen} \sigma\alpha}{\alpha} d\alpha + \varphi(k_0) \int_{k_0}^{\xi} \frac{\operatorname{sen} \sigma\alpha}{\alpha} d\alpha\right|, \tag{23}$$

$$\xi \geqslant k_0$$

ma è

$$\left|\int_{\pi}^{k_0} \varphi(\alpha) \frac{\operatorname{sen} \sigma\alpha}{\alpha} d\alpha\right| = \left|\sigma \int_{\pi}^{k_0} \varphi(\alpha) \frac{\operatorname{sen} \sigma\alpha}{\sigma\alpha} d\alpha\right| \leqslant \sigma \int_{\pi}^{k_0} |\varphi(\alpha)|\, d\alpha < \varepsilon/2$$

$$\left|\varphi(k_0) \int_{k_0}^{\xi} \frac{\operatorname{sen} \sigma\alpha}{\alpha} d\alpha\right| < \frac{\varepsilon}{2\pi} \left|\int_{\sigma k_0}^{\xi\sigma} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} d\alpha\right| < \varepsilon/2 \quad [\text{cfr. } (9''')]$$

quindi dalla (23)

$$\left|\int_{\pi}^{k} \varphi(\alpha) \frac{\operatorname{sen} \sigma\alpha}{\alpha} d\alpha\right| < \varepsilon, \qquad \left|\int_{\pi}^{+\infty} \varphi(\alpha) \frac{\operatorname{sen} \sigma\alpha}{\alpha} d\alpha\right| \leqslant \varepsilon \quad \text{per } 0 < \sigma \leqslant \sigma_0$$

e questo prova la (22)

8. - Vogliamo esporre un procedimento abbreviato per arrivare alle due formule integrali di FOURIER.

Sia $f(x)$ ad integrale convergente in $(-\infty, +\infty)$, e consideriamo i valori da essa assunti in $(-l, l)$; con la trasformazione $x = lx'/\pi$, posto $f(x) = f(lx'/\pi) = \varphi(x')$ otteniamo una funzione $\varphi(x')$ definita in $(-\pi, \pi)$ e quando siano verificate le condizioni che assicurano la convergenza della serie di FOURIER di $\varphi(x')$ possiamo porre

$$\frac{1}{2}[\varphi(x'+) + \varphi(x'-)] = \frac{1}{2} a'_0 + \sum_{k}^{1\dots\infty} (a'_k \cos kx' + b'_k \operatorname{sen} kx')$$

con

$$a'_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\alpha') \cos k\alpha' d\alpha' = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(\alpha) \cos \frac{k\pi\alpha}{l} d\alpha,$$

$$b'_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(\alpha) \operatorname{sen} \frac{k\pi\alpha}{l} d\alpha$$

e perciò

$$\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(\alpha) d\alpha + \frac{1}{l} \sum_{k}^{1\dots\infty} \int_{-l}^{l} f(\alpha) \cos \frac{k\pi}{l} (\alpha - x) d\alpha.$$

Prendiamo l così grande da poter trascurare $\frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(\alpha) d\alpha$, e poniamo $\frac{\pi}{l} = \Delta v$, la formula precedente si scrive

$$\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] = \frac{1}{\pi}\Big[\Delta v \int_{-l}^{l} f(\alpha) \cos \Delta v(\alpha - x) d\alpha +$$
$$+ \Delta v \int_{-l}^{l} f(\alpha) \cos 2\Delta v(\alpha - x) d\alpha + \dots\Big]$$

e facendo tendere l a $+\infty$, supposti leciti tutti i passaggi al limite che ci occorrono si ha:

$$\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} dv \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \cos v(\alpha - x) d\alpha. \tag{18'}$$

Da questa, supposte lecite le inversioni delle integrazioni, abbiamo

$$\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] = \frac{1}{\pi} \lim_{n \to \infty} \int_{0}^{n} dv \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \cos v(\alpha - x) d\alpha =$$
$$= \lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) d\alpha \int_{0}^{n} \cos v(\alpha - x) d\alpha,$$

$$\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] = \frac{1}{\pi} \lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \frac{\operatorname{sen} n(\alpha - x)}{\alpha - x} d\alpha. \tag{15'}$$

Il procedimento ora indicato non ha alcun carattere di rigore, però i ragionamenti dei n.[i] 6 e 7 ci assicurano che possiamo applicare le formule (15'), (18') tutte le volte che la $f(x)$ soddisfi le condizioni dichiarate.

9. - La funzione $f(x)$ sia definita in $(0, +\infty)$ sommabile in qualunque tratto finito e soddisfi le condizioni dichiarate nel teorema 45 che ci assicurano la validità della (18), e per $x < 0$ si ponga $f(-x) = f(x)$ [$f(x)$ pari].

Se nella (18) spezziamo l'integrale tra i limiti $-\infty$, $+\infty$ in due integrali tra $-\infty$ e 0, e 0 $+\infty$, e teniamo conto della parità di $f(x)$ otteniamo

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dv\int_0^{+\infty} f(\alpha)\cos v(\alpha-x)d\alpha+\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dv\int_0^{+\infty} f(\alpha)\cos v(\alpha+x)d\alpha=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dv\int_0^{+\infty} f(\alpha)[\cos v(\alpha-x)+\cos v(\alpha+x)]d\alpha=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} dv\int_0^{+\infty} f(\alpha)\cos v\alpha\cos vx\,d\alpha$$

cioè

$$\boxed{\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} dv\int_0^{+\infty} f(\alpha)\cos v\alpha\cos vx\,d\alpha=\frac{1}{2}[f(x+)+f(x-)]} \tag{24}$$

$$[f(0+)=f(0-)]$$

valida quando la $f(x)$ soddisfa nel tratto $(0, +\infty)$ alle condizioni dichiarate nel teorema 45.

Analogamente se $f(x)$ è definita in $(0, +\infty)$ e soddisfa in questo tratto alle condizioni più volte ricordate del teorema 45, e poniamo per $x<0$, $f(-x)=-f(x)$ troviamo

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dv\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\cos v(\alpha-x)d\alpha=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dv\int_0^{+\infty} f(\alpha)[\cos v(\alpha-x)-\cos v(\alpha+x)]d\alpha$$

e perciò

$$\boxed{\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} dv\int_0^{+\infty} f(\alpha)\,\mathrm{sen}\, v\alpha\,\mathrm{sen}\, vx\,d\alpha=\frac{1}{2}[f(x+)+f(x-)]}\,, \tag{25}$$

$$f(0+)=-f(0-).$$

Le (24) e (25) prendono il nome di *formule integrali di Fourier del coseno e del seno* [1].

[1] Ricordiamo che quando si verifichi l'ipotesi $b)$ del Teor. 45 conveniamo che $\int_0^{+\infty}\ldots.\,dv$ sta per $\lim_{\sigma\to+0}\int_\sigma^{+\infty}\ldots.\,dv$.

10. - Vogliamo illustrare le cose dette con alcuni esempi:

1). Sia $f(x)=x^{-\gamma}$ $x>0$, $0<\gamma<1$. La funzione $x^{-\gamma}$ è decrescente, $\lim_{x\to+\infty} x^{-\gamma}=0$, e le (24) e (25) per ogni $x>0$ dànno:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} dv\int_0^{+\infty} \alpha^{-\gamma}\cos v\alpha\cos vx\,d\alpha=x^{-\gamma}; \tag{26_1}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} dv\int_0^{+\infty} \alpha^{-\gamma}\,\mathrm{sen}\, v\alpha\,\mathrm{sen}\, vx\,d\alpha=x^{-\gamma}. \tag{26_2}$$

Dalla (26_1) possiamo dedurre due risultati notevoli. Si ha

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} dv\int_0^{+\infty} \alpha^{-\gamma}\cos v\alpha\cos vx\,d\alpha=$$

$$=\frac{2x^{-\gamma}}{\pi}\int_0^{+\infty}(vx)^{-(1-\gamma)}\cos vx\,d(vx)\int_0^{+\infty}(v\alpha)^{-\gamma}\cos v\alpha\,d(v\alpha)$$

e perciò posto $vx=t$, $v\alpha=t$

$$\int_0^{+\infty} t^{-(1-\gamma)}\cos t\,dt\int_0^{+\infty} t^{-\gamma}\cos t\,dt=\frac{\pi}{2}, \tag{27_1}$$

e analogamente dalla (26_2)

$$\int_0^{+\infty} t^{-(1-\gamma)}\,\mathrm{sen}\, t\,dt\int_0^{+\infty} t^{-\gamma}\,\mathrm{sen}\, t\,dt=\frac{\pi}{2}, \tag{27_2}$$

dalle quali per $\gamma=1/2$ si ricava

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{sen}\, t}{\sqrt{t}}dt=\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \tag{28}$$

EULERO [16, b)].

Cambiando t in x^2 si ottengono le altre formule

$$\int_0^{+\infty}\cos x^2\,dx=\int_0^{+\infty}\mathrm{sen}\, x^2\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{29}$$

2). Consideriamo la funzione $f(x)=1$ se $0\leq x\leq 1$, $f(x)=0$ se $x>1$.

Dalla (24) abbiamo per $0 \leqq x < 1$

$$(30_1) \qquad 1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} dv \int_0^1 \cos v\alpha \cos vx \, d\alpha = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} v \cos vx}{v}\, dv, \qquad 0 \leqq x < 1,$$

per $x=1$ $[f(1-)+f(1+)=1]$

$$(30_2) \qquad \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} v \cos v}{v}\, dv$$

e infine per $x > 1$

$$(30_3) \qquad 0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} v \cos vx}{v}\, dv.$$

L'integrale $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} v \cos vx}{v}\, dv$ chiamasi *fattore discontinuo di Dirichlet* [15].

Dalle (30_1), (30_2), (30_3) si ha facilmente per $\lambda > 0$, $\mu > 0$

$$(31) \qquad \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \lambda x \cos \mu x}{x}\, dx = 1, \qquad \frac{1}{2}, \qquad 0$$

secondo che

$$\mu < \lambda, \qquad \mu = \lambda, \qquad \mu > \lambda$$

ed esse possono dedursi direttamente dalla (9″) del n.° 5.

3). Consideriamo la funzione $f(x) = e^{-ax}$ con $a > 0$; poichè

$$\int_0^{+\infty} e^{-a\alpha} \cos v\alpha \, d\alpha = \frac{a}{a^2+v^2}, \qquad \int_0^{+\infty} e^{-a\alpha} \operatorname{sen} v\alpha \, d\alpha = \frac{v}{a^2+v^2}$$

dalle (24) e (25) si ha

$$\frac{2a}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\cos vx}{a^2+v^2}\, dv = e^{-ax}, \qquad \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{v \operatorname{sen} vx}{a^2+v^2}\, dv = e^{-ax}$$

cioè le formule di LAPLACE [35, *e*)].

$$(32_1) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\cos vx}{a^2+v^2}\, dv = \frac{\pi}{2}\frac{e^{-ax}}{a}, \qquad \text{con } a > 0,\ x \geqq 0,$$

$$(32_2) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{v \operatorname{sen} vx}{a^2+v^2} = \frac{\pi}{2} e^{-ax}, \qquad \text{con } a > 0,\ x > 0.$$

11. - Sia $f(x)$ finita e *regolare* per ogni valore finito di x (1), sommabile in qualunque tratto finito e soddisfi *una* delle seguenti ipotesi

a) $f(x)$ è ad integrale assolutamente convergente in $(a, +\infty)$ con $a > 0$;

b) $f(x)$ in $(a, +\infty)$ $a > 0$ è a variazione limitata e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$;

e per un $b < 0$, in $(-\infty, b)$ valga un'ipotesi analoga alla *a)* o alla *b)*.

In queste ipotesi, qualunque sia il numero reale v, ha significato l'integrale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\, e^{-iv\alpha} d\alpha =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha - \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \operatorname{sen} v\alpha \, d\alpha, \qquad \text{[Teor. 42]}.$$

La funzione [complessa] della variabile reale v, definita dalla relazione

$$(33) \qquad \boxed{g(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iv\alpha} f(\alpha)\, d\alpha}$$

dove per l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \dots d\alpha$ intendiamo $\lim_{n \to +\infty}\left[\int_0^n \dots dv + \int_{-n}^0 \dots dv\right]$ se $f(x)$ soddisfa a destra e a sinistra dello zero alla condizione *a)*, e in ogni altro caso $\lim_{\substack{n \to +\infty \\ \sigma \to +0}}\left[\int_\sigma^n \dots dv + \int_{-n}^{-\sigma} \dots dv\right]$, chiamasi la *trasformata di Fourier* di $f(x)$.

Supponiamo ora che la serie di FOURIER di $f(x)$ relativa ad un intervallo che contenga nel suo interno il punto x, risulti qualunque sia x, convergente verso $f(x)$ [circostanza che si pre-

(1) La nostra ipotesi equivale a supporre che nei punti x ove $f(x)$ non è continua, essa vi ha una discontinuità di prima specie, e $2f(x) = f(x+) + f(x-)$. [I, Cap. III, § 4, n.° 6].

senta se $f(x)$ è a variazione limitata tra $-\infty$ e $+\infty$, (Teor. 38)], abbiamo allora per la (33)

$$\int_{\sigma}^{n} e^{ivx} g(v)dv + \int_{-n}^{-\sigma} e^{ivx} g(v)dv =$$

$$= \int_{\sigma}^{n} [e^{ivx} g(v) + e^{-ivx} g(-v)]dv = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sigma}^{n} dv \int_{-\infty}^{+\infty} f(a) \cos v(a-x) da$$

e passando al limite per $\sigma \to +0$, $n \to +\infty$, e tenendo conto della (18)

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivx} g(v)dv}. \tag{34}$$

Abbiamo quindi che se la $f(x)$ soddisfa le condizioni dichiarate, la (33) si lascia invertire con la (34).

Le formule (33) e (34) si chiamano le *formule di reciprocità di Fourier*.

La $f(x)$ sia definita nel tratto $(0, +\infty)$ e si abbia $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = f(0)$ $[\lim\limits_{x \to +0} f(x) = f(0) = 0]$ e si prolunghi nel tratto $(-\infty, 0)$ con la seguente legge $f(x) = f(x)$ $[f(-x) = -f(x)]$.

Se $f(x)$ soddisfa nel tratto $(0, +\infty)$ a tutte le condizioni dichiarate, le formule (33), (34) diventano rispettivamente

$$\boxed{g(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(a) \cos va\, da}, \tag{35$_1$}$$

$$\boxed{f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} g(v) \cos vx\, dv}; \tag{35$_2$}$$

$$\boxed{g(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(a) \operatorname{sen} va\, da}, \tag{36$_1$}$$

$$\boxed{f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} g(v) \operatorname{sen} vx\, dv}; \tag{36$_2$}$$

che rappresentano le formule di reciprocità di FOURIER, sotto forma reale.

Dalle cose dette abbiamo il

TEOREMA 46. - Se $f(a)$ soddisfa *l'equazione integrale* (35_1) [(36_1)], se essa è a variazione limitata in $(0, +\infty)$, regolare in ogni punto $x>0$, continua a destra del punto 0, [continua a destra e nulla per $x=0$] e se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, allora $f(x)$ ha l'espressione (35_2) [(36_2)], e perciò la soluzione dell'equazione stessa che soddisfa le condizioni dichiarate è unica.

CAPITOLO III.

Sviluppi in serie di polinomi di Legendre.

§ 1. - I polinomi di Legendre.

1. Sviluppi di $(1-2\varrho\cos\gamma+\varrho^2)^{-1/2}$, $(1-\varrho^2)(1-2\varrho\cos\gamma+\varrho^2)^{-3/2}$ in serie di potenze di ϱ. - 2. I polinomi di LEGENDRE. - 3. Formula di RODRIGUES.

1. - Nello studio sull'attrazione degli sferoidi e sulla figura dei pianeti LEGENDRE [38] fu condotto a considerare lo sviluppo in serie della funzione $1/r$ definita dalla relazione

$$(1)\qquad 1/r=(1-2\varrho\cos\gamma+\varrho^2)^{-1/2}$$

e che noi vogliamo qui ritrovare.

Supposto $|\varrho|<1$ e applicando lo sviluppo in serie binomiale abbiamo

$$1/r=(1-\varrho e^{i\gamma})^{-\frac{1}{2}}(1-\varrho e^{-i\gamma})^{-\frac{1}{2}}=$$
$$=\sum_n^{0\ldots\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}\varrho^n e^{in\gamma}\sum_n^{0\ldots\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}\varrho^n e^{-in\gamma}$$

e moltiplicando le due serie con la regola di CAUCHY

$$(1)\quad \frac{1}{r}=\sum_n^{0\ldots\infty}\varrho^n\sum_r^{0\ldots\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{-\frac{1}{2}}{r}\binom{-\frac{1}{2}}{n-r}[(-1)^r(-1)^{n-r}e^{ir\gamma}e^{-i(n-r)\gamma}+$$
$$+(-1)^r(-1)^{n-r}e^{-ir\gamma}e^{i(n-r)\gamma}]$$

e perciò

$$(2)\qquad \boxed{\frac{1}{r}=(1-2\varrho\cos\gamma+\varrho^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_n^{0\ldots\infty}\varrho^n P_n(\cos\gamma)}$$

con

$$(3)\quad P_n(\cos\gamma)=(-1)^n\left[\binom{-\frac{1}{2}}{n}2\cos n\gamma+\right.$$
$$\left.+\binom{-\frac{1}{2}}{n-1}\binom{-\frac{1}{2}}{1}2\cos(n-2)\gamma+\binom{-\frac{1}{2}}{n-2}\binom{-\frac{1}{2}}{2}2\cos(n-4)\gamma+\ldots\right]$$

ossia

$$(3')\quad \boxed{\begin{aligned}P_n(\cos\gamma)&=\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n)}2\cos n\gamma+\\&+\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n-2)}\frac{1}{2}2\cos(n-2)\gamma+\\&+\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-5)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n-4)}\frac{1\cdot3}{2\cdot4}2\cos(n-4)\gamma+\ldots\end{aligned}}$$

dove quando n è pari, il termine che non contiene $\cos\gamma$ *è privo del fattore* 2.

La serie (2), fissato γ, converge per $|\varrho|<1$ ed essendo una serie di potenze è derivabile quando ci occorra, rispetto a ϱ, termine a termine.

Conviene notare, per le applicazioni, oltre lo sviluppo (2), lo sviluppo di $(1-\varrho^2)(1-2\varrho\cos\gamma+\varrho^2)^{-\frac{3}{2}}$.

Abbiamo:

$$\frac{1-\varrho^2}{(1-2\varrho\cos\gamma+\varrho^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{(1-2\varrho\cos\gamma+\varrho^2)^{\frac{1}{2}}}+2\varrho\frac{d}{d\varrho}\frac{1}{(1-2\varrho\cos\gamma+\varrho^2)^{\frac{1}{2}}}$$
$$=\sum_n^{0\ldots\infty}\varrho^n P_n(\cos\gamma)+2\varrho\sum_n^{1\ldots\infty}n\varrho^{n-1}P_n(\cos\gamma)$$

e perciò

$$(4)\qquad \boxed{\frac{1-\varrho^2}{(1-2\varrho\cos\gamma+\varrho^2)^{\frac{3}{2}}}=1+\sum_n^{1\ldots\infty}(2n+1)\varrho^n P_n(\cos\gamma)}$$

dove, fissato γ, la serie del secondo membro converge uniformemente per $|\varrho|<1$.

2. - Se nella (3′) poniamo $\cos\gamma=x$ ed esprimiamo i coseni degli archi multipli di γ per le potenze di $\cos\gamma$ otteniamo $P_n(x)$ espresso con un polinomio in x. Possiamo trovare tale espressione brevemente col seguente procedimento.

Sia $2|x|+|\varrho|<1$ [e perciò $|\varrho(2x-\varrho)|<1$], abbiamo

$$(1-2\varrho x+\varrho^2)^{-\frac{1}{2}}=[1-\varrho(2x-\varrho)]^{-\frac{1}{2}}=$$
$$=\sum_n^{0\ldots\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}\varrho^n(2x-\varrho)^n=\sum_n^{0\ldots\infty}\frac{1}{2^n}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{n!}\varrho^n(2x-\varrho)^n=$$
$$=\sum_n^{0\ldots\infty}\frac{1}{2^n}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{n!}\varrho^n\sum_r^{0\ldots n}(-1)^r\binom{n}{r}\varrho^r2^{n-r}x^{n-r}.$$

La serie dei valori assoluti della serie doppia così ottenuta rappresenta lo sviluppo in serie di $[1-|\varrho|(2|x|+|\varrho|)]^{-\frac{1}{2}}$ e per le nostre ipotesi è convergente; è lecito quindi raccogliere nella serie doppia i termini in ϱ^n e otteniamo

$$(1-2\varrho x+\varrho^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_n^{1\ldots\infty}\varrho^n\Big[\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{n!}x^n-$$
$$-\frac{1}{2}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{(n-1)!}\frac{n-1}{1}x^{n-2}+$$
$$+\frac{1}{2^2}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-5)}{(n-2)!}\frac{(n-2)(n-3)}{1\cdot2}x^{n-4}-$$
$$-\frac{1}{2^3}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-7)}{(n-3)!}\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1\cdot2\cdot3}x^{n-6}+\ldots\Big]$$

e confrontando con la (2)

$$(5_1)\qquad \boxed{\begin{aligned}P_n(x)=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{n!}\Big[x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}+\\+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4\cdot(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}-\ldots\Big]\end{aligned}}$$

$$(5_2)\qquad \boxed{P_0(x)=1}.$$

I polinomi $P_n(x)$ definiti dalle (5_1), (5_2) prendono il nome di *polinomi di Legendre*; si ha in particolare

$$(6)\qquad \begin{cases} P_0=1, \quad P_1=x, \quad P_2=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}, \quad P_3=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x\\ P_4=\frac{35}{8}x^4-\frac{30}{8}x^2+\frac{3}{8}; \quad P_5=\frac{63}{8}x^5-\frac{70}{8}x^3+\frac{15}{8}x\\ P_6=\frac{231}{16}x^6-\frac{315}{16}x^4+\frac{105}{16}x^2-\frac{5}{16};\\ P_7=\frac{429}{16}x^7-\frac{693}{16}x^5+\frac{315}{16}x^3-\frac{35}{16}x.\end{cases}$$

Si ha pure

$$(7_1)\qquad \boxed{P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}=\binom{-\frac{1}{2}}{n}}$$
$$(n=1,2,\ldots)$$

$$(7_2)\qquad \boxed{P_{2n+1}(0)=0}\qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

$$(7_3)\qquad \boxed{P_{2n}(-x)=P_{2n}(x),\qquad P_{2n+1}(-x)=-P_{2n+1}(x)}$$
$$(n=0,1,2,\ldots).$$

3. - Dalle uguaglianze

$$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n-1)2n=1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n$$
$$n!\,(n+1)(n+2)\ldots(2n)=1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)2^nn!$$

si ha

$$1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)=\frac{2n(2n-1)\ldots(n+2)(n+1)}{2^n}$$

e dalla (5_1) si ha allora

$$2^nn!\,P_n(x)=2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)\Big[x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4\cdot(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}-\ldots\Big].$$

Ogni termine del secondo membro ha quindi la forma

$$\pm\frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)n(n-1)\ldots(n-2m+1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2m)(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2m+1)}x^{n-2m}=$$
$$=\pm\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(2n-2m+1)(2n-2m)(2n-2m-1)\ldots(n-2m+1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2m)(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2m+1)}x^{n-2m}$$
$$=\pm\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot m}(2n-2m)(2n-2m-1)\ldots(n-2m+1)x^{n-2m}=$$
$$=\pm\binom{n}{m}\frac{d^n}{dx^n}x^{2(n-m)}$$

ne viene

$$2^nn!\,P_n(x)=\sum_m^{0\ldots n}\binom{n}{m}(-1)^m\frac{d^n}{dx^n}x^{2(n-m)}=$$
$$=\frac{d^n}{dx^n}\sum_m^{0\ldots n}\binom{n}{m}(-1)^mx^{2(n-m)}=\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

e infine la notevole formula di RODRIGUES [50]

$$\boxed{P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n}. \tag{8}$$

§ 2. - Formula integrale di Schläfli [55].

Ricordiamo che se $f(z)$ è una funzione olomorfa di z in un dominio D, se x è un punto interno a D e C un circuito regolare qualsiasi contenuto in D e che abbia nel suo interno il punto x si ha

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\dot C} \frac{f(t)}{(t-x)^{n+1}}\,dt$$

dove C è percorso nel verso positivo.

Posto allora $f(z) = (z^2-1)^n$, $n = 0, 1, 2,....$ [$f(z)$ è olomorfa in tutto il piano] avremo

$$\boxed{P_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\dot C} \frac{(t^2-1)^n}{2^n(t-x)^{n+1}}\,dt} \tag{9}$$

dove *C è un circuito regolare qualsiasi, percorso nel verso positivo, e avente nel suo interno il punto x.*

§ 3. - Equazione differenziale dei polinomi di Legendre.

Vogliamo dimostrare che il polinomio $P_n(x)$ è una soluzione dell'equazione differenziale

$$\boxed{(1-x^2)\frac{d^2P_n}{dx^2} - 2x\frac{dP_n}{dx} + n(n+1)P_n = 0}. \tag{10}$$

Il primo membro della (10), in virtù della formula (9) di SCHLÄFLI si scrive

$$\begin{aligned}(1-x^2)\frac{d^2P_n}{dx^2} - 2x\frac{dP_n}{dx} + n(n+1)P_n &= \\ = \frac{n+1}{2\pi i}\int_{\dot C}\frac{(t^2-1)^n dt}{2^n(t-x)^{n+3}}&[n(t-x)^2 - 2(t-x)x + (n+2)(1-x^2)] = \\ = \frac{n+1}{2\pi i}\int_{\dot C}\frac{(t^2-1)^n dt}{2^n(t-x)^{n+3}}&[-(n+2)(t^2-1) + 2t(t-x)(n+1)] = \\ = \frac{n+1}{2\pi i\cdot 2^n}\int_{\dot C}\frac{d}{dt}&\left\{\frac{(t^2-1)^{n+1}}{(t-x)^{n+2}}\right\}dt\end{aligned}$$

e siccome n è intero e la funzione $(t^2-1)^{n+1}(t-x)^{-n-2}$ quando t descrive C riprende lo stesso valore, si ha che l'ultimo integrale scritto è nullo.

La (10) può anche scriversi

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right] + n(n+1)P_n = 0. \tag{10'}$$

§ 4. - Formule ricorrenti tra i polinomi di Legendre.

a). Essendo C un circuito regolare percorso nel verso positivo e contenente nel suo interno il punto x, abbiamo

$$P_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_{\dot C}\frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+1}}\,dt, \qquad P'(x) = \frac{n+1}{2^{n+1}\pi i}\int_{\dot C}\frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+2}}\,dt;$$

ora

$$\frac{d}{dt}\frac{(t^2-1)^{n+1}}{(t-x)^{n+1}} = \frac{2(n+1)t(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+1}} - \frac{(n+1)(t^2-1)^{n+1}}{(t-x)^{n+2}},$$

e integrando lungo il circuito C e dividendo per $n+1$,

$$0 = 2\int_{\dot C}\frac{t(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+1}}\,dt - \int_{\dot C}\frac{(t^2-1)^{n+1}}{(t-x)^{n+2}}\,dt;$$

si avrà quindi

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{n+2}\pi i}\int_{\dot C}\frac{(t^2-1)^{n+1}}{(t-x)^{n+2}}\,dt &= \frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_{\dot C}\frac{t(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+1}}\,dt = \\ &= \frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_{\dot C}\frac{[(t-x)+x](t^2-1)^n}{(t-x)^{n+1}}\,dt = \\ &= \frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_{\dot C}\frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^n}\,dt + \frac{x}{2^{n+1}\pi i}\int_{\dot C}\frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+1}}\,dt\end{aligned}$$

e perciò

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_{\dot C}\frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^n}\,dt + xP_n(x) \tag{11}$$

e derivando rispetto ad x

$$P'_{n+1}(x) = \frac{n}{2^{n+1}\pi i}\int_{\dot C}\frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+1}}\,dt + P_n(x) + xP_n'(x)$$

dalla quale

$$\boxed{P'_{n+1}(x) - xP_n'(x) = (n+1)P_n(x)}, \tag{12}$$

che è la prima formula che volevasi stabilire.

b). Dall'identità

$$\int_C \frac{d}{dt}\left[\frac{t(t^2-1)^n}{(t-x)^n}\right]dt=0$$

effettuando la derivazione sotto il segno integrale abbiamo

$$\int_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^n}\,dt+2n\int_C \frac{t^2(t^2-1)^{n-1}}{(t-x)^n}\,dt-n\int_C \frac{t(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+1}}\,dt=0$$

ma si ha

$$2n\int_C \frac{t^2(t^2-1)^{n-1}}{(t-x)^n}\,dt=2n\int_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^n}\,dt+$$
$$+\,2n\int_C \frac{(t^2-1)^{n-1}}{(t-x)^n}\,dt=2n\int_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^n}\,dt+2^n\pi i\cdot 2nP_{n-1}(x)$$
$$-n\int_C \frac{t(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+1}}\,dt=-n\int_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^n}\,dt-$$
$$-nx\int_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+1}}\,dt=-n\int_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^n}\,dt-2^{n+1}\pi i\cdot nxP_n(x),$$

e perciò

$$(n+1)\int_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^n}\,dt+2^n\pi i\cdot 2nP_{n-1}(x)-2^{n+1}\pi i\cdot nxP_n(x)=0,$$

e per la (11)

$$(n+1)2^{n+1}\pi i[P_{n+1}(x)-xP_n(x)]+$$
$$+2^n\pi i\cdot 2nP_{n-1}(x)-2^{n+1}\pi i\cdot nxP_n(x)=0$$
$$(n+1)[P_{n+1}(x)-xP_n(x)]+nP_{n-1}(x)-nxP_n(x)=0$$

ed infine la formula ricorrente fra tre polinomi consecutivi di LEGENDRE

$$\boxed{(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0}\,. \tag{13}$$

c). Derivando la (13) abbiamo

$$(n+1)P'_{n+1}-(2n+1)P_n-(2n+1)xP_n'+nP'_{n-1}=0,$$
$$(n+1)[P'_{n+1}-xP_n']-n[xP_n'-P'_{n-1}]-(2n+1)P_n=0$$

e per la (12)

$$(n+1)^2P_n-n[P'_{n+1}-(n+1)P_n-P'_{n-1}]-(2n+1)P_n=0$$
$$n(2n+1)P_n=n[P'_{n+1}-P'_{n-1}]$$

ed infine

$$\boxed{P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)=(2n+1)P_n(x)}\,. \tag{14}$$

d). Dalla (14) cambiando n in $n-1$, $n-2$,...., 2, 1, 0 e sommando si ottiene $[P_1'=1,\ P_0'=0,\ P_0=1]$

$$\boxed{\frac{dP_{n+1}(x)}{dx}+\frac{dP_n(x)}{dx}=P_0(x)+3P_1(x)+5P_2(x)+\,....\,+(2n+1)P_n(x)}\,. \tag{15}$$

e). Sottraendo dalla (14) la (12) abbiamo

$$\boxed{xP_n'(x)-P'_{n-1}(x)=nP_n(x)}\,. \tag{16}$$

f). Dalla (12) cambiando n in $n-1$, e dalla (16) moltiplicando per x, si ha rispettivamente

$$-P_n'+xP'_{n-1}=-nP_{n-1}, \qquad x^2P_n'-xP'_{n-1}=nxP_n$$

e sommando

$$\boxed{(x^2-1)P_n'(x)=nxP_n(x)-nP_{n-1}(x)}\,. \tag{17}$$

Le formule (12), (13), (14), (15), (16), (17) si chiamano le *formule ricorrenti* tra i polinomi di LEGENDRE.

§ 5. - Formula sommatoria di Christoffel [10].

Vogliamo provare l'identità

$$\boxed{\sum_r^{0\ldots n}(2r+1)P_r(x)P_r(y)=(n+1)\,\frac{P_n(x)P_{n+1}(y)-P_{n+1}(x)P_n(y)}{y-x}}\,. \tag{18}$$

Si ha infatti dalla (13), cambiando n in r e moltiplicando per $P_r(y)$

$$(r+1)P_{r+1}(x)P_r(y)-(2r+1)xP_r(x)P_r(y)+rP_{r-1}(x)P_r(y)=0$$

e cambiando x con y

$$(r+1)P_{r+1}(y)P_r(x)-(2r+1)yP_r(x)P_r(y)+rP_{r-1}(y)P_r(x)=0$$

e sottraendo

$$(2r+1)(y-x)P_r(x)P_r(y)=(r+1)[P_{r+1}(y)P_r(x)-P_{r+1}(x)P_r(y)]+$$
$$+r[P_{r-1}(y)P_r(x)-P_{r-1}(x)P_r(y)].$$

Facendo in questa $r=0,\ 1,\ 2,\dots,\ n$ otteniamo

$$(y-x)P_0(x)P_0(y)=[P_1(y)P_0(x)-P_1(x)P_0(y)]$$
$$3(y-x)P_1(x)P_1(y)=2[P_2(y)P_1(x)-P_2(x)P_1(y)]+$$
$$+1[P_0(y)P_1(x)-P_0(x)P_1(y)]$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(2n+1)(y-x)P_n(x)P_n(y)=(n+1)[P_{n+1}(y)P_n(x)-P_{n+1}(x)P_n(y)]+$$
$$+n[P_{n-1}(y)P_n(x)-P_{n-1}(x)P_n(y)]$$

e sommando si ottiene appunto la (18).

Dalla (18) facendo $y=1$ e tenuto conto della (15) si ottiene in particolare:

$$(18') \qquad \boxed{(n+1)\,\frac{P_n(x)-P_{n+1}(x)}{1-x}=\frac{dP_{n+1}(x)}{dx}+\frac{dP_n(x)}{dx}}\,.$$

§ 6. - Integrale di Laplace per $P_n(x)$.

1. Formula integrale di Laplace. - 2. I valori di $P_n(x)$ per x in $(-1,1)$.

1. - Sia $x \neq \pm 1$ e nella formula (9) di Schläfli si prenda per C un cerchio di centro x e di raggio $|x^2-1|^{\frac{1}{2}}$, talchè su C possiamo porre

$$t=x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\varphi}$$

con φ variabile tra $-\pi$ e $+\pi$, e dove $(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$ indica una qualunque delle due determinazioni di $\sqrt{x^2-1}$.

Si ha

$$(t-x)^{n+1}=(x^2-1)^{\frac{n+1}{2}}e^{i(n+1)\varphi}$$

$$t^2-1=(t+1)(t-1)=[(x+1)+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\varphi}][(x-1)+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\varphi}]=$$
$$=(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\varphi}[2x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\}]=$$
$$=2(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\varphi}[x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi];$$
$$(t^2-1)^n=2^n(x^2-1)^{\frac{n}{2}}e^{in\varphi}[x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi]^n;\qquad dt=(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\varphi}i\,d\varphi$$

quindi

$$P_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi]^n d\varphi$$

ed infine la formula di Laplace [35, b)]

$$(19) \qquad \boxed{P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi]^n d\varphi}$$

dove come abbiamo dichiarato il valore dell'integrale è indipendente dalla scelta della determinazione di $(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$.

Per la continuità, la (19) sussiste anche per $x=\pm 1$.

2. - Dalla (19) per $x=\pm 1$ si ha

$$(20) \qquad \boxed{P_n(1)=1, \qquad P_n(-1)=(-1)^n} \quad (^1).$$

Per x reale, $-1<x<1$ si ha

$$|x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi|=|x+i\sqrt{1-x^2}\cos\varphi|=|x^2+(1-x^2)\cos^2\varphi|^{\frac{1}{2}}\leq 1;$$

abbiamo quindi che salvo per $\varphi=0$, $\varphi=\pi$ è

$$|x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi|^n<1$$

e perciò dalla (19)

$$(21) \qquad \boxed{|P_n(x)|<1 \quad \text{per} \quad -1<x<1}\,.$$

Possiamo meglio precisare questo risultato. Dalla (19) abbiamo

$$P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon}[x+i(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi]^n d\varphi+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}[x+i(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi]^n d\varphi+\frac{1}{\pi}\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi}[x+i(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi]^n d\varphi;$$

si ha ora

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon}[x+i(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi]^n d\varphi\right|<\frac{\varepsilon}{\pi},$$
$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi}[x+i(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi]^n d\varphi\right|<\frac{\varepsilon}{\pi},$$

(1) Le (20) possono ricavarsi facilmente con procedimento ricorrente dalla (13).

si ha d'altra parte per φ variabile in $(\varepsilon, \pi-\varepsilon)$

$$|x+i(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi| = |x^2+(1-x^2)\cos^2\varphi|^{\frac{1}{2}} =$$
$$= |1-(1-x^2)\,\mathrm{sen}^2\,\varphi|^{\frac{1}{2}} \leq [1-(1-x^2)\,\mathrm{sen}^2\,\varepsilon]^{\frac{1}{2}}$$

quindi

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}[x+i(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi]^n d\varphi\right| \leq \frac{1}{\pi}[1-(1-x^2)\,\mathrm{sen}^2\,\varepsilon]^{\frac{n}{2}}(\pi-2\varepsilon),$$

ma per

$$-1+\eta \leq x \leq 1-\eta \qquad [1>\eta>0]$$

si ha

$$1-x^2 \geq 1-(1-\eta)^2 = \eta(2-\eta) > \eta$$

quindi

$$|P_n(x)| < \frac{2\varepsilon}{\pi} + \frac{\pi-2\varepsilon}{\pi}[1-\eta\,\mathrm{sen}^2\,\varepsilon]^{\frac{n}{2}}$$

e questa prova che *quando x varia in* $(-1+\eta, 1-\eta)$, fissato $\sigma>0$, *si può determinare un intero $n_0>0$ tale, che per $n>n_0$, e qualunque sia x in $(-1+\eta, 1-\eta)$, si abbia*:

(22) $$|P_n(x)| < \sigma.$$

Nel § 8 metteremo meglio in evidenza questa proprietà; possiamo in tanto affermare che in ogni punto x *interno* a $(-1, 1)$ è

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = 0 \qquad (1<x<1)$$

e la tendenza allo zero è uniforme in ogni intervallo $(-1+\eta, 1-\eta)$ interno a $(-1, 1)$.

§ 7. - Il sistema cartesiano ortogonale $\left\{\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,P_n(x)\right\}$.

1. Ortogonalità dei polinomi di LEGENDRE. - 2. Chiusura del sistema di polinomi di LEGENDRE. - 3. Serie di polinomi di LEGENDRE di una funzione sommabile in $(-1, 1)$. - 4. Sviluppi di x^n e $P_n'(x)$ per polinomi di LEGENDRE.

1. - Dalle due equazioni [cfr. (10')]

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right] = -n(n+1)P_n, \qquad \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_m}{dx}\right] = -m(m+1)P_m$$

moltiplicando la prima per P_m la seconda per P_n e sottraendo si ha

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\left\{P_m\frac{dP_n}{dx} - P_n\frac{dP_m}{dx}\right\}\right] = \{m(m+1)-n(n+1)\}\,P_nP_m$$

e integrando tra -1 e $+1$

$$[m(m+1)-n(n+1)]\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx = 0,$$

e quindi per $n \neq m$

(23₁) $$\boxed{\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx = 0}.$$

Si otterrà facilmente il valore dell'integrale $\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx$.
Si ha infatti per la (13)

$$nP_n(x) = (2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x)$$

e moltiplicando per $P_n(x)dx$ e integrando tra -1 e 1 e tenuto conto della (23₁), si ha

(24₁) $$n\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx = (2n-1)\int_{-1}^{1}xP_n(x)P_{n-1}(x)dx;$$

moltiplicando invece la (13) per $P_{n-1}(x)dx$ e integrando in $(-1, 1)$ si ha

(24₂) $$(2n+1)\int_{-1}^{1}xP_n(x)P_{n-1}(x)dx = n\int_{-1}^{1}P_{n-1}^2(x)dx$$

e le (24₁), (24₂) dànno allora

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx = \frac{2n-1}{2n+1}\int_{-1}^{1}P_{n-1}^2(x)dx,$$

e da questa cambiando n in $n-1$, $n-2$,...., 1 e moltiplicando si ottiene la formula cercata

(23₂) $$\boxed{\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}}.$$

2. - *a*). Dalle (23_1), (23_2) segue che il sistema $\left\{\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,P_n(x)\right\}$ è ortogonale e normale; noi proveremo che esso è *chiuso* rispetto alle funzioni di quadrato sommabile e perciò forma un sistema cartesiano ortogonale [1].

L'equazione di chiusura di VITALI [Cap. I, § 6, n.° 6; si faccia $a=-1$] diventa qui

$$1+x=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{2r+1}{2}\left[\int_{-1}^{x}P_r(x)dx\right]^2$$

od anche $[P_0=1]$

$$1-x^2=\sum_{r=1}^{\infty}(2r+1)\left[\int_{-1}^{x}P_r(x)dx\right]^2. \tag{25}$$

Abbiamo ora [(14)]

$$(2r+1)P_r(x)=P'_{r+1}(x)-P'_{r-1}(x),$$

$$(2r+1)\int_{-1}^{x}P_r(x)dx=[P_{r+1}(x)-P_{r-1}(x)]_{-1}^{x}=P_{r+1}(x)-P_{r-1}(x);$$

$$(2r+1)\left[\int_{-1}^{x}P_r(x)dx\right]^2=\frac{1}{2r+1}[P_{r+1}(x)-P_{r-1}(x)]^2=$$

$$=\frac{1}{2r+1}\int_{-1}^{x}\frac{d}{dx}[P_{r+1}(x)-P_{r-1}(x)]^2dx=$$

$$=\frac{2}{2r+1}\int_{-1}^{x}[P_{r+1}(x)-P_{r-1}(x)][P'_{r+1}(x)-P'_{r-1}(x)]dx=$$

$$=2\int_{-1}^{x}[P_{r+1}(x)-P_{r-1}(x)]P_r(x)dx$$

e quindi per la somma $S_n(x)$ dei primi n termini della serie del secondo membro della (25) otteniamo

$$S_n(x)=2\int_{-1}^{x}\sum_{r=1}^{n}[P_{r+1}(x)-P_{r-1}(x)]P_r(x)dx=$$
$$=2\int_{-1}^{x}[P_{n+1}(x)P_n(x)-x]dx. \tag{26}$$

[1] Per la dimostrazione cfr. G. SANSONE [54, *b*)].

I termini della successione $\{P_{n+1}(x)P_n(x)-x\}$ sono in $(-1,1)$ in valore assoluto, non superiori a 2; per $-1<x<1$, si ha

$$\lim_{n\to\infty}[P_{n+1}(x)P_n(x)-x]=-x$$

passando quindi, nella (26), al limite sotto il segno integrale otteniamo

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=-2\int_{-1}^{x}xdx=1-x^2,$$

ossia la (25).

b). Ragionando come nel Cap. II, § 2, n.° 3 si prova che il sistema $\left\{\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,P_n(x)\right\}$ è chiuso anche rispetto alle funzioni sommabili in $(-1,1)$.

3. - Sia $f(x)$ sommabile in $(-1,1)$ e si considerino i suoi coefficienti a_n' di FOURIER rispetto al sistema $\left\{\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,P_n(x)\right\}$

$$a_n'=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx;$$

la serie di FOURIER di $f(x)$ rispetto al sistema ortogonale considerato è quindi

$$\sum_{n}^{0\ldots\infty}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,a_n'P_n(x)$$

od anche posto

$$\boxed{a_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx}$$

si ha

$$f(x)\sim\sum_{n}^{0\ldots\infty}a_nP_n(x). \tag{27}$$

Chiameremo la serie $\sum_{n}^{0\ldots\infty}a_nP_n(x)$ la *serie di polinomi di Legendre* o più semplicemente la *serie di Legendre di* $f(x)$, e possiamo già affermare per i risultati del Cap. I, § 6, n.° 5 che *se* $f(x)$ *è di quadrato sommabile in* $(-1,1)$, *la sua serie di* *polinomi di Legendre converge in media nell'intervallo* $(-1, 1)$, *verso* $f(x)$.

Evidentemente se $f(x)$ è pari, la serie (27) conterrà soltanto i termini $P_n(x)$ di indice pari; se $f(x)$ è dispari i termini di indice dispari.

Possiamo anche affermare che se $f(x)$ è continua in $(-1, 1)$ e la sua serie di polinomi di LEGENDRE è uniformemente convergente in $(-1, 1)$ si ha allora

$$f(x) = \sum_{n}^{0\dots\infty} a_n P_n(x).$$

Nel § 12 studieremo la convergenza puntuale della serie (27); nel prossimo numero studieremo invece due sviluppi per polinomi di LEGENDRE che si ottengono con considerazioni elementari.

4. - a). Si voglia trovare lo sviluppo per polinomi di LEGENDRE di x^m, ove m è intero e positivo. Si avrà $x^m = \sum a_n P_n(x)$, e siccome x^m si esprime per $P_m(x)$, x^{m-2}, $x^{m-4}, \dots$; x^{m-2} si esprime per P_{m-2}, $x^{m-4}, \dots$; ne viene che x^m si esprimerà sotto la forma

$$x^m = a_m P_m + a_{m-2} P_{m-2} + \dots$$

e si avrà

$$a_s = \frac{2s+1}{2} \int_{-1}^{1} x^m P_s(x)\,dx \quad \text{per } m-s \geqq 0,\ m-s \text{ pari} \tag{28}$$

mentre

$$\int_{-1}^{1} x^m P_s(x)\,dx = 0 \quad \text{per } m-s \text{ dispari.}$$

Per calcolare l'integrale (28) procediamo nel seguente modo. Sia

$$P_s(x) = \alpha x^s + \beta x^{s-2} + \gamma x^{s-4} + \dots \quad [\alpha + \beta + \gamma + \dots = P_s(1) = 1]$$

si avrà

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^m P_s(x)\,dx = \frac{\alpha}{m+s+1} + \frac{\beta}{m+s-1} + \frac{\gamma}{m+s-3} + \dots =$$
$$= \frac{f(m)}{(m+s+1)(m+s-1)(m+s-3)\dots}$$

dove $f(m)$ è una funzione razionale intera in m di grado $s/2$ o

$(s-1)/2$ secondo che s è pari o dispari. Ma a motivo dell'ortogonalità delle P_n, $f(m)$ si annulla per $m = s-2$, $s-4$, $s-6, \dots$ e siccome il coefficiente della più alta potenza di $f(m)$ è $\alpha + \beta + \gamma + \dots = 1$ ne viene

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^m P_s(x)\,dx = \frac{m(m-2)\dots(m-s+2)}{(m+s+1)(m+s-1)\dots(m+1)} \tag{29$_1$}$$

per m ed s pari, e

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^m P_s(x)\,dx = \frac{(m-1)(m-3)\dots(m-s+2)}{(m+s+1)(m+s-1)\dots(m+2)} \tag{29$_2$}$$

per m ed s dispari; e moltiplicando nella (29$_1$) i due termini della frazione per $1\cdot 3\cdot 5\cdot \dots \cdot (m-1)$ e $2\cdot 4\cdot 6\cdot \dots \cdot (m-s)$, e nella (29$_2$) per $1\cdot 3\cdot 5\cdot \dots \cdot m$ e $2\cdot 4\cdot 6\cdot \dots \cdot (m-s)$ otteniamo

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^m P_s(x)\,dx = \frac{m!}{(m-s)!!\,(m+s+1)!!} \tag{30}$$

se $m \geqq s$, $m - s \equiv 0$ (mod. 2), e perciò identicamente per m intero e positivo

$$\boxed{\begin{aligned} x^m = \frac{m!}{(2m+1)!!}\Big[&(2m+1)P_m(x) + (2m-3)\frac{2m+1}{2}P_{m-2}(x) + \\ &+ (2m-7)\frac{(2m+1)(2m-1)}{2\cdot 4}P_{m-4}(x) + \\ &+ (2m-11)\frac{(2m+1)(2m-1)(2m-3)}{2\cdot 4\cdot 6}P_{m-6}(x) + \dots\Big]\end{aligned}} \tag{31}$$

b). Si voglia trovare lo sviluppo per polinomi di LEGENDRE di $P_n'(x)$.

Ragionando come in a) si ha che $P_n'(x)$ si esprimerà come combinazione lineare a coefficienti costanti di P_{n-1}, $P_{n-3}, \dots$ e potremo scrivere

$$P_n' = a_{n-1}P_{n-1} + a_{n-3}P_{n-3} + a_{n-5}P_{n-5} + \dots$$

con

$$a_s = \frac{2s+1}{2}\int_{-1}^{1} P_n' P_s\,dx, \qquad s < n,\ n-s \text{ dispari.}$$

Si ha

$$\int_{-1}^{1} P_n' P_s dx = [P_n P_s]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P_n P_s' dx = 2 - \int_{-1}^{1} P_n P_s' dx,$$

e per l'ortogonalità di P_n e P_s' ne viene

$$\int_{-1}^{1} P_n' P_s dx = 2,$$

quindi $a_s = 2s+1$ e infine

$$\boxed{P_n' = (2n-1)P_{n-1} + (2n-5)P_{n-3} + (2n-9)P_{n-5} + \dots} \tag{32}$$

formula che peraltro può dedursi dalla (15) uguagliando nei due membri i termini pari e i termini dispari.

§ 8. - Limitazioni di Stieltjes dei polinomi di Legendre. Dimostrazioni di Fejér (¹).

1. Trasformazione di BRUNACCI-ABEL. - 2. Lemma-preliminare. - 3. Primo teorema di STIELTJES. - 4. Secondo teorema di STIELTJES. - 5. Altre formule di maggiorazione.

1. - Richiamiamo preliminarmente la trasformazione di BRUNACCI-ABEL dalla quale trarremo una facile conseguenza.

Siano $z_1, z_2, \dots, z_n$, *costanti reali o complesse, e posto*

$$z_1 + z_2 + \dots + z_k = s_k \qquad (k = 1, 2, \dots, n) \tag{1}$$

sia

$$|s_k| \leq M \quad \text{per } k = 1, 2, \dots, n. \tag{2}$$

Sia $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ *una successione a termini reali monotona; vogliamo allora dimostrare che per*

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \dots \geq \varepsilon_n \geq 0 \tag{3}$$

si ha anche

$$|\varepsilon_1 z_1 + \varepsilon_2 z_2 + \dots + \varepsilon_n z_n| \leq \varepsilon_1 M, \tag{4}$$

(¹) Nella redazione di questo § ci siamo attenuti alla memoria di L. FEJÉR: *Abschätzungen für die Legendreschen und verwandte Polynome* [17, c)].

se invece è

$$0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \dots \leq \varepsilon_n \tag{3'}$$

è anche

$$|\varepsilon_1 z_1 + \varepsilon_2 z_2 + \dots + \varepsilon_n z_n| \leq 2\varepsilon_n M. \tag{4'}$$

Dimostrazione. - Si ha infatti

$$\sum_{k}^{1\dots n} \varepsilon_k z_k = \varepsilon_1 s_1 + \varepsilon_2(s_2 - s_1) + \dots + \varepsilon_n(s_n - s_{n-1}) = s_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \\ + s_2(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \dots + s_{n-1}(\varepsilon_{n-1} - s_n) + \varepsilon_n s_n$$

quindi

$$\left|\sum_{k}^{1\dots n} \varepsilon_k z_k\right| \leq M[|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |\varepsilon_2 - \varepsilon_3| + \dots + |\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n| + |\varepsilon_n|]$$

e secondo che valgono le (3) e (3') si hanno rispettivamente le (4) e (4').

2. - Sia

$$a_k = (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad a_0 = 1, \tag{5}$$

vogliamo dimostrare che per $|z| \leq 1$, $z \neq 1$, vale la limitazione

$$|s_n(z)| = |a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n| \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-z}}; \tag{6}$$
$$n = 0, 1, 2, \dots; \quad |z| \leq 1; \quad z \neq 1.$$

Si ha infatti

$$[s_n(z)]^2 = \sum_{r}^{0\dots 2n} q_r z^r$$

dove q_r, per $0 < r \leq n$, ha l'espressione

$$(-1)^r q_r = \binom{-\frac{1}{2}}{0}\binom{-\frac{1}{2}}{r} + \binom{-\frac{1}{2}}{1}\binom{-\frac{1}{2}}{r-1} + \dots + \binom{-\frac{1}{2}}{r-1}\binom{-\frac{1}{2}}{1} + \\ + \binom{-\frac{1}{2}}{r}\binom{-\frac{1}{2}}{0} = \binom{-1}{r} = (-1)^r$$

e perciò

$$q_r = 1 \qquad (r = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Si ha poi per $r=n+k$ e $k\geqslant 0$

$$q_{n+k}=\sum_{\nu=0}^{n-k} a_{k+\nu}a_{n-\nu}$$

quindi

$$q_{n+k}-q_{n+k+1}=\sum_{\nu}^{0\dots(n-k-1)}(a_{k+\nu}-a_{k+1+\nu})\,a_{n-\nu}+a_n a_k,$$

ma si ha $a_k>0$ per $k=0,\ 1,\ 2,\dots;$

(7) $$a_k/a_{k+1}=(2k+2)/(2k+1)>1$$

quindi $q_{n+k}>q_{n+k+1}$; abbiamo allora

$$[s_n(z)]^2=1+z+z^2+\dots+z^n+q_{n+1}z^{n+1}+\dots+q_{2n}z^{2n}$$

con

$$1=q_n>q_{n+1}>\dots>q_{2n}$$

e siccome nelle nostre ipotesi è

$$|1+z+z^2+\dots+z^\nu|=|(1-z^{\nu+1})/(1-z)|\leqslant 2/|1-z|,$$
$$|z|\leqslant 1,\quad z\neq 1$$

in virtù della (4) si ha $|s_n(z)|^2\leqslant 2/|1-z|$ dalla quale segue appunto la (6).

3. - Primo teorema di Stieltjes [56, *a*)]. - Per $0<\gamma<\pi$, $n=1,\ 2,\ 3,\dots$ vale la disuguaglianza

(8) $$\boxed{|P_n(\cos\gamma)|\leqslant\sqrt{2}\,\frac{4}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{n}\,\sqrt{\operatorname{sen}\gamma}}}\qquad n=1,\ 2,\dots,\quad 0<\gamma<\pi$$

Dimostrazione. - Abbiamo visto che [§ 1, (1)]

$$P_n(\cos\gamma)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{k}\binom{-\frac{1}{2}}{n-k}e^{ik\gamma}e^{-i(n-k)\gamma}$$

ovvero

(9) $$P_n(\cos\gamma)=\sum_{k=\nu}^{n}a_k a_{n-k}e^{ik\gamma}e^{-i(n-k)\gamma}=e^{-in\gamma}\sum_{k=\nu}^{n}a_k a_{n-k}e^{2ik\gamma}.$$

Posto

$$e^{2i\gamma}=z,\qquad e^{-2i\gamma}=z_0$$

per $0<h<n$ abbiamo

$$|P_n(\cos\gamma)|\leqslant\left|\sum_{k}^{0\dots h}a_k a_{n-k}z^k\right|+\left|\sum_{k=h+1}^{n}a_k a_{n-k}z^k\right|$$

ma

$$\left|\sum_{k=h+1}^{n}a_k a_{n-k}z^k\right|=\left|z_0^{-n}\sum_{k=h+1}^{n}a_k a_{n-k}z_0^{n-k}\right|=\left|\sum_{l=0}^{n-h-1}a_l a_{n-l}z_0^l\right|$$

perciò

(10) $$|P_n(\cos\gamma)|\leqslant\left|\sum_{k=0}^{h}a_k a_{n-k}z^k\right|+\left|\sum_{l=0}^{n-h-1}a_l a_{n-l}z_0^l\right|.$$

Ma si ha

$$|a_0|,\quad|a_0+a_1z|,\quad|a_0+a_1z+a_2z^2|,\dots\ \leqslant\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{|1-z|}},\qquad|z|\leqslant 1,\quad z\neq 1$$

e siccome per la (7) la successione

$$a_n,\quad a_{n-1},\quad a_{n-2},\dots,$$

è crescente, ne viene per la (4′)

(11) $$\left|\sum_{k}^{0\dots h}a_k a_{n-k}z^k\right|\leqslant\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{|1-z|}}\,a_{n-h},\qquad\left|\sum_{l=0}^{n-h-1}a_l a_{n-l}z_0^l\right|\leqslant\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{|1-z_0|}}\,a_{h+1},$$

ma è

$$|1-z|=|1-z_0|=|1-\cos 2\gamma-i\operatorname{sen}2\gamma|=\sqrt{2(1-\cos 2\gamma)}=2\operatorname{sen}\gamma$$

e la (10) dà

$$|P_n(\cos\gamma)|\leqslant\frac{2}{\sqrt{\operatorname{sen}\gamma}}\,(a_{n-h}+a_{h+1}),\qquad 0<h<n.$$

D'altra parte la formula di Wallis dà

(12) $$a_k=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}=\frac{1}{\sqrt{\pi k}}\sqrt{\frac{2k}{2k+\theta}}<\frac{1}{\sqrt{\pi k}},\qquad 0<\theta<1$$

e perciò

(13) $$|P_n(\cos\gamma)|<\frac{2}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{\operatorname{sen}\gamma}}\left(\frac{1}{\sqrt{n-h}}+\frac{1}{\sqrt{h+1}}\right).$$

Per n pari, posto $h=n/2$, risulta

$$1/\sqrt{n-h}+1/\sqrt{h+1}=\sqrt{2/n}+\sqrt{2/(n+2)}<2\sqrt{2/n},$$

per n dispari, posto $h=(n-1)/2$, risulta

$$1/\sqrt{n-h}+1/\sqrt{h+1}=\sqrt{2}\,[1/\sqrt{2n-2h}+1/\sqrt{2h+2}]=$$
$$=2\sqrt{2}/\sqrt{n+1}<2\sqrt{2/n}$$

e perciò in ogni caso dalla (13) segue la (8).

Se nella (8) poniamo $\cos\gamma=x$, otteniamo la formula utile a notarsi:

$$\boxed{|\sqrt{n}\sqrt[4]{1-x^2}\,P_n(x)|\leq 4\sqrt{\frac{2}{\pi}}},\quad (-1\leq x\leq 1,\ n=0,1,2,\ldots). \tag{14}$$

4. - Secondo teorema di Stieltjes. - *Per* $-1\leq x\leq 1$ *si ha*:

$$\boxed{|P_n(x)-P_{n+2}(x)|<\frac{4}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+2}}}. \tag{15}$$

Dimostrazione. - Dalla (3) del § 1 si ha

$$P_{2\nu-1}(\cos\gamma)=2\sum_{k=0}^{\nu-1}a_k a_{n-k}\cos(n-2k)\gamma,\qquad (n=2\nu-1)$$
$$P_{2\nu}(\cos\gamma)=2\sum_{k=0}^{\nu-1}a_k a_{n-k}\cos(n-2k)\gamma+a_\nu^2\qquad (n=2\nu)$$

e perciò

$$(16_1)\quad P_{2\nu-1}(\cos\gamma)-P_{2\nu+1}(\cos\gamma)=-2a_{n+2}\cos(n+2)\gamma+$$
$$+2\sum_{k=0}^{\nu-1}(a_k a_{n-k}-a_{k+1}a_{n-k+1})\cos(n-2k)\gamma,\quad (n=2\nu-1)$$

$$(16_2)\quad P_{2\nu}(\cos\gamma)-P_{2\nu+2}(\cos\gamma)=a_\nu^2-a_{\nu+1}^2-2a_{n+2}\cos(n+2)\gamma+$$
$$+2\sum_{k=0}^{\nu-1}(a_k a_{n-k}-a_{k+1}a_{n-k+1})\cos(n-2k)\gamma,\quad (n=2\nu).$$

Da queste per $\gamma=0$ [cfr. § 6, (20)] otteniamo

$$2\sum_{k=0}^{\nu-1}(a_k a_{n-k}-a_{k+1}a_{n-k+1})=\begin{cases}2a_{n+2} & \text{per } n=2\nu-1\\ 2a_{n+2}-(a_\nu^2-a_{\nu+1}^2) & \text{per } n=2\nu;\end{cases}$$

ma si ha

$$a_k>a_{k+1},\qquad a_{n-k}>a_{n-k+1}$$

quindi

$$a_k a_{n-k}-a_{k+1}a_{n-k+1}>0,\qquad a_\nu^2-a_{\nu+1}^2>0,$$

e perciò dalle (16_1), (16_2), (12)

$$|P_n(\cos\gamma)-P_{n+2}(\cos\gamma)|<4a_{n+2}<\frac{4}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+2}};$$

la (15) è così dimostrata.

5. - Dalla (14) del § 4 integrando tra -1 e x si ha

$$(2n+1)\int_{-1}^{x}P_n(\xi)d\xi=P_{n+1}(x)-P_{n-1}(x)$$

e per la (15)

$$\left|\int_{-1}^{x}P_n(\xi)d\xi\right|<\frac{4}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}(2n+1)}<\frac{2}{\sqrt{\pi}\,n^{3/2}}\quad\text{per } |x|\leq 1,\ n=1,2,\ldots \tag{17}$$

Dalla (10′) del § 3, integrando tra -1 ed x si ha:

$$(1-x^2)\frac{dP_n(x)}{dx}=-n(n+1)\int_{-1}^{x}P_n(\xi)d\xi$$

quindi per $|x|<1$, tenuto conto della (17) otteniamo

$$\left|\frac{dP_n(x)}{dx}\right|<\frac{4n(n+1)}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}(2n+1)}\,\frac{1}{1-x^2}$$

ma si ha $2n(n+1)/\sqrt{n+1}(2n+1)<\sqrt{n}$, perciò

$$\boxed{\left|\frac{dP_n(x)}{dx}\right|<\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\sqrt{n}}{1-x^2}}\quad\text{per } |x|<1,\ n=1,2,\ldots \tag{18}$$

Dalla (12) del § 4 integrando tra -1 ed x si ha

$$P_{n+1}(x)+(-1)^n-\int_{-1}^{x}\xi P_n'(\xi)d\xi=(n+1)\int_{-1}^{x}P_n(\xi)d\xi$$
$$P_{n+1}(x)-xP_n(x)=n\int_{-1}^{x}P_n(\xi)d\xi$$
$$P_{n+1}(x)+P_n(x)=(1+x)P_n(x)+n\int_{-1}^{x}P_n(\xi)d\xi$$

e per le (14) e (17)

$$|P_{n+1}(x)+P_n(x)|<\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{n}\sqrt{\pi}}\,\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{2}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n\pi}}\,\frac{\sqrt{1-x}+2\sqrt{2}\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}},$$

e poichè per $|x| \leq 1$ si ha $\sqrt{1-x}+2\sqrt{2}\sqrt{1+x} \leq 3\sqrt{2}$ ne viene

$$(19) \qquad \boxed{|P_{n+1}(x)+P_n(x)| < \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{1-x}}}, \quad \text{per } |x|<1.$$

§ 9. - Serie di polinomi di Legendre delle funzioni a variazione limitata. Teoremi di Picone e Jackson.

1. Maggiorazione della serie. - 2. Criterio di convergenza uniforme di PICONE. - 3. Criterio di convergenza uniforme di JACKSON.

1. - TEOREMA. - Sia $F(x)$ a variazione limitata in $(-1, 1)$, e si consideri la sua serie di LEGENDRE

$$F(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$$

con

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} F(x) P_n(x) dx.$$

Se in $(-1, 1)$ si ha $|F(x)| \leq M$, e se V indica la variazione totale di $F(x)$ in $(-1, 1)$ sussistono le limitazioni $[n \geq 1]$

$$(1_1) \qquad |a_n P_n(x)| < \frac{16\sqrt{2}}{\pi} \frac{M+V}{\sqrt[4]{1-\delta^2}} \frac{1}{n} \quad \text{per } |x| < \delta < 1,$$

$$(1_2) \qquad |a_n P_n(x)| < \frac{4}{\sqrt{\pi}}(M+V)\frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{per } |x| \leq 1 \quad (^1).$$

Dimostrazione. - Se con $P(x)$ ed $N(x)$ indichiamo la variazione positiva e la variazione negativa di $F(x)$ in $(-1, x)$ e se per $F(-1) \geq 0$ poniamo $F(x) = F_1(x) - F_2(x)$ con $F_1(x) = F(-1) + P(x)$, $F_2(x) = N(x)$, abbiamo $0 \leq F(-1) + P(x) \leq M + P(x) \leq M + V$, $0 \leq F_2(x) = N(x) \leq V$; così pure se per $F(-1) < 0$ poniamo $F(x) = P(x) - [N(x) - F(-1)]$ abbiamo che in ogni caso possiamo supporre $F(x) = F_1(x) - F_2(x)$ con $F_1(x)$, $F_2(x)$ non negative, non decrescenti e $0 \leq F_1(x) \leq M + V$, $0 \leq F_2(x) \leq M + V$.

(¹) JACKSON [[27]; pag. 73], PICONE [[45, a)], p. 259].

Per il secondo teorema della media si ha

$$\int_{-1}^{1} F_1(x) P_n(x) dx = (M+V) \int_{\xi_1}^{1} P_n(x) dx,$$

$$\int_{-1}^{1} F_2(x) P_n(x) dx = (M+V) \int_{\xi_2}^{1} P_n(x) dx$$

con $-1 \leq \xi_1 \leq 1$, $-1 \leq \xi_2 \leq 1$, e sottraendo

$$\int_{-1}^{1} F(x) P_n(x) dx = (M+V) \int_{\xi_1}^{\xi_2} P_n(x) dx$$

e per la (17) del § 8,

$$\left| \int_{-1}^{1} F(x) P_n(x) dx \right| < \frac{8(M+V)}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}\,(2n+1)},$$

quindi

$$(2_1) \qquad |a_n| < \frac{4(M+V)}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}}$$

$$(2_2) \qquad |a_n P_n(x)| < \frac{4(M+V)}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} |P_n(x)|.$$

Dalla (14) del § 8 si ha

$$(3_1) \qquad |P_n(x)| \leq \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt[4]{1-x^2}},$$

ed è anche

$$(3_2) \qquad |P_n(x)| \leq 1,$$

e dalle (2_2), (3_1), (3_2) seguono appunto le (1_1), (1_2).

2. - TEOREMA DI PICONE [[45 a)], p. 260]. - Sia $f(x)$ sommabile in $(-1, 1)$, la funzione $(1-x^2)f(x)$ risulti a variazione limitata in $(-1, 1)$, ed indichiamo con M' l'estremo superiore di $|f(x)(1-x^2)|$ in $(-1, 1)$ e con V' la variazione totale di $f(x)(1-x^2)$ in $(-1, 1)$.

Se consideriamo la funzione

$$(4) \qquad F(x) = F(-1) + \int_{-1}^{x} f(x) dx$$

allora per i termini della sua serie di LEGENDRE

$$F(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \qquad a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} F(x) P_n(x) dx$$

sussistono le limitazioni $[n \geqslant 1]$

$$(5_1) \qquad |a_n P_n(x)| < \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{M' + V'}{\sqrt[4]{1-\delta^2}} \frac{1}{n^{3/2}} \quad \text{per } |x| \leqslant \delta < 1,$$

$$(5_2) \qquad |a_n P_n(x)| < 2(M' + V') \frac{1}{n} \quad \text{per } |x| \leqslant 1,$$

e pertanto la serie di LEGENDRE della $F(x)$ è uniformemente e assolutamente convergente in ogni intervallo interno a $(-1, 1)$ ed ha per somma $F(x)$.

Per il resto della serie a partire dall'$(n+1)^{\text{esimo}}$ termine vale la limitazione

$$(6) \qquad |R_{n+1}(x)| < \frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{M' + V'}{\sqrt[4]{1-\delta^2}} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{per } |x| \leqslant \delta < 1.$$

Dimostrazione. - Tenuto conto della (10′) del § 3 abbiamo

$$\int_{-1}^{1} F(x) P_n(x) dx = -\frac{1}{n(n+1)} \int_{-1}^{1} F(x) \frac{d}{dx}\left[(1-x^2) \frac{dP_n}{dx}\right] dx =$$
$$= \frac{1}{n(n+1)} \int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2) \frac{dP_n}{dx} dx,$$

e ragionando come nel n.° 1

$$\int_{-1}^{1} F(x) P_n(x) dx = \frac{M' + V'}{n(n+1)} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{dP_n}{dx} dx$$

quindi

$$|a_n| = \frac{2n+1}{2} \left| \int_{-1}^{1} F(x) P_n(x) dx \right| \leqslant \frac{2n+1}{n(n+1)} (M' + V') < 2 \frac{M' + V'}{n},$$

e tenuto conto delle (3_1), (3_2) si hanno le (5_1) e (5_2).

Dalle (5_1) per $|x| \leqslant \delta < 1$ si ha

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(x) \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n P_n(x)| < \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{M' + V'}{\sqrt[4]{1-\delta^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

e per la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$ risulta la convergenza uniforme (e assoluta) nell'intervallo $I = (-\delta, +\delta)$ di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$; ma questa serie converge in media in I verso la funzione continua $F(x)$, risulta allora in I

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x).$$

Vedremo nel § 12, n.° 7, [che essendo $F(x)$ a variazione limitata] la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$ è convergente anche nei punti -1 e $+1$ e vi ha per somma rispettivamente $F(-1)$, $F(+1)$.

Abbiamo infine

$$|R_{n+1}(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k P_k(x) \right| < \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{M' + V'}{\sqrt[4]{1-\delta^2}} \sum_{k=n+1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}},$$

e poichè per $a > 0$ è

$$\frac{1}{(n+1)^{1+a}} + \frac{1}{(n+2)^{1+a}} + \dots < \frac{1}{an^a} \quad (^1)$$

ne viene

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{M' + V'}{\sqrt[4]{1-\delta^2}} \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad \text{c. v. d.}$$

TEOREMA DI JACKSON [[27], p. 76]. - Sia $f(x)$ a variazione limitata in $(-1, 1)$ e indichiamo rispettivamente con M' e V' l'estremo superiore di $|f(x)|$ e la variazione totale di $f(x)$ in $(-1, 1)$. Se consideriamo la funzione

$$F(x) = F(-1) + \int_{-1}^{x} f(x) dx,$$

(1) Si ha per $a > 0$

$$\frac{1}{n}\left[\frac{n^{1+a}}{(n+1)^{1+a}} + \frac{n^{1+a}}{(n+2)^a} + \dots\right] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{-(1+a)} < \int_0^{+\infty} (1+x)^{-(a+1)} da = \frac{1}{a},$$

perciò

$$\frac{1}{(n+1)^{1+a}} + \frac{1}{(n+2)^{1+a}} + \dots < \frac{1}{an^a}.$$

allora per i coefficienti a_n

$$a_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} F(x)P_n(x)dx$$

della sua serie di LEGENDRE

$$F(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$$

sussistono le limitazioni

$$(7_1) \qquad |a_n| < \frac{6}{\sqrt{\pi}}(M'+V')\frac{1}{n^{3/2}} \quad \text{per } n \geqq 1;$$

$$(7_2) \qquad |a_n| < \frac{4}{\sqrt{\pi}}(M'+V')\frac{1}{n^{3/2}} \quad \text{per } n \geqq 2,$$

e pertanto la serie di LEGENDRE della $F(x)$ è uniformemente e assolutamente convergente in $(-1, 1)$ ed ha per somma $F(x)$.

Per il resto della serie a partire dall'$(n+1)^{\text{esimo}}$ termine valgono le limitazioni

$$(8_1) \qquad |R_{n+1}(x)| < \frac{8}{\sqrt{\pi}}(M'+V')\frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{per } |x| \leqq 1,\ n \geqq 1,$$

$$(8_2) \qquad |R_{n+1}(x)| < \frac{16\sqrt{2}}{\pi}\frac{M'+V'}{\sqrt[4]{1-\delta^2}}\frac{1}{n} \quad \text{per } |x| \leqq \delta < 1,\ n \geqq 1.$$

Dimostrazione. - Come abbiamo già visto al n.° 5 del § 8, dalla (14) del § 4, integrando tra -1 ed x si ha

$$\omega_n(x) = (2n+1)\int_{-1}^{x} P_n(\xi)d\xi = P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)$$

quindi

$$a_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} F(x)P_n(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} F(x)\omega_n'(x)dx =$$
$$= \frac{1}{2}[F(x)\omega_n(x)]_{-1}^{1} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\omega_n(x)f(x)dx$$

ma si ha $\omega_n(-1)=0$, e per $n \geqq 1$ $\omega_n(1)=0$, e ragionando come nel n.° 1 si trova

$$a_n = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\omega_n(x)f(x)dx = -\frac{1}{2}(M'+V')\int_{\xi_1}^{\xi_2}\omega_n(x)dx =$$
$$= -\frac{1}{2}(M'+V')\int_{\xi_1}^{\xi_2}[P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)]dx$$

e per la (17) del § 8

$$|a_n| < \frac{1}{2}(M'+V')\frac{8}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{\sqrt{n+2}(2n+3)} + \frac{1}{\sqrt{n}(2n-1)}\right]$$

$$(9) \qquad |a_n| < \frac{4}{\sqrt{\pi}}(M'+V')\frac{1}{n^{3/2}}\left[\sqrt{\frac{n}{n+2}}\,\frac{n}{2n+3} + \frac{n}{2n-1}\right].$$

Il fattore in parentesi quadra per $n \geqq 1$ è minore di $3/2$, e per $n \geqq 2$ è minore di 1 e dalla (9) seguono allora le (7_1) e (7_2).

In $(-1, 1)$ si ha $|P_n(x)| \leqq 1$, quindi

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(x)\right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty}|a_n P_n(x)| < \frac{6}{\sqrt{\pi}}(M'+V')\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$$

e perciò in $(-1, 1)$ la serie di LEGENDRE di $F(x)$ converge uniformemente [e assolutamente] e la sua somma è quindi $F(x)$.

Si ha ora per $n \geqq 1$

$$\left|F(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k P_k(x)\right| < \frac{4}{\sqrt{\pi}}(M'+V')\sum_{k=n+1}^{\infty} n^{-3/2},$$

ma è $\sum_{k=n+1}^{\infty} n^{-3/2} < 2n^{-1/2}$, quindi per $n \geqq 1$

$$|R_{n+1}(x)| = \left|F(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x)\right| < \frac{8}{\sqrt{\pi}}(M'+V')\frac{1}{\sqrt{n}}; \qquad |x| \leqq 1,\ n \geqq 1.$$

Quando ci si limiti invece a considerare i valori di x tali che $|x| \leqq \delta < 1$ la (7_2) e la (3_1), dànno

$$\left|F(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x)\right| < \frac{16\sqrt{2}}{\pi}\frac{M'+V'}{\sqrt[4]{1-\delta^2}}\sum_{k=n+1}^{\infty} n^{-2}$$

e perciò

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{16\sqrt{2}}{\pi}\frac{M'+V'}{\sqrt[4]{1-\delta^2}}\frac{1}{n} \quad \text{per } |x| \leqq \delta < 1,\ n \geqq 1;$$

il teorema è così dimostrato.

Nel § 12 troveremo altri criteri di convergenza puntuale della serie di polinomi di LEGENDRE, e per questo sarà utile premettere la formula di STIELTJES di approssimazione assintotica dei polinomi di LEGENDRE [§ 10], e la dimostrazione di due teoremi sui limiti di alcuni integrali [§ 11].

§ 10. - Formule e serie di approssimazione assintotica dei polinomi di Legendre.

1. Le formule di approssimazione assintotica di LAPLACE, BONNET-HEINE, DARBOUX, STIELTJES. - 2. Dimostrazione della formula di STIELTJES. - 3. Maggiorazione dell'errore.

1. - Sono note le seguenti formule di approssimazione dei polinomi di LEGENDRE:

a). Formule di LAPLACE [35, *c*)]:

$$(1) \qquad P_n(\cos\gamma)=\sqrt{\frac{2}{\pi n \operatorname{sen}\gamma}}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma-\frac{\pi}{4}\right]+O(n^{-3/2}),$$

$$\varepsilon\leqq\gamma\leqq\pi-\varepsilon, \qquad 0<\varepsilon<\pi/2.$$

b). Formula di BONNET-HEINE [1]:

$$(2) \quad P_n(\cos\gamma)=\sqrt{\frac{2}{\pi n \operatorname{sen}\gamma}}\left\{\left(1-\frac{1}{4n}\right)\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma-\frac{\pi}{4}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{8n}\operatorname{ctg}\gamma \operatorname{sen}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma-\frac{\pi}{4}\right]\right\}+O(n^{-5/2})$$

$$\varepsilon\leqq\gamma\leqq\pi-\varepsilon, \qquad 0<\varepsilon<\pi/2;$$

c). Formula e serie di DARBOUX [12]:

$$(3) \quad P_n(\cos\gamma)=2a_n\left\{\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma-\frac{\pi}{4}\right]}{(2\operatorname{sen}\gamma)^{1/2}}-a_1\frac{1}{2n-1}\frac{\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\gamma+\frac{1}{4}\pi\right]}{(2\operatorname{sen}\gamma)^{3/2}}+\right.$$

$$\left.+a_2\frac{1\cdot 3}{(2n-1)(2n-3)}\frac{\cos\left[\left(n-\frac{3}{2}\right)\gamma+\frac{3}{4}\pi\right]}{(2\operatorname{sen}\gamma)^{5/2}}-\dots\right\}$$

con

$$(3') \qquad a_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \qquad \varepsilon\leqq\gamma\leqq\pi-\varepsilon, \qquad 0<\varepsilon<\pi/2 \quad (^2).$$

La serie è convergente per $\pi/6<\gamma<5\pi/6$; per $0<\gamma<\pi$ quando

---

(1) O. BONNET [4]. In luogo di $-1/4n$ il BONNET scrive $(-1)^n/4n$; la correzione è di H. E. HEINE [[23], pp. 171-187].

(2) Ricordiamo che

$$(2n-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1); \qquad (2n)!!=2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n).$$

Il simbolo $n!!$ si legge *n semifattoriale*.

si prenda per valore approssimato di $P_n(\cos\gamma)$ la somma dei suoi primi r termini l'errore è dell'ordine $O\left(n^{-r-\frac{1}{2}}\right)$.

d). Formula di STIELTJES [56, *b*)]:

$$(4) \quad P_n(\cos\gamma)=\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2n+1)a_n}\left[\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma-\frac{\pi}{4}\right]}{(2\operatorname{sen}\gamma)^{1/2}}+\right.$$

$$\left.+a_1\frac{1}{2n+3}\frac{\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\gamma-\frac{3}{4}\pi\right]}{(2\operatorname{sen}\gamma)^{3/2}}+a_2\frac{1\cdot 3}{(2n+3)(2n+5)}\frac{\cos\left[\left(n+\frac{5}{2}\right)\gamma-\frac{5}{4}\pi\right]}{(2\operatorname{sen}\gamma)^{5/2}}+\dots\right].$$

La serie è convergente per $\pi/6<\gamma<5\pi/6$, e sia o no la serie convergente, per $0<\gamma<\pi$, quando si prenda per valore approssimato di $P_n(\cos\gamma)$ la somma dei suoi primi r termini, l'errore $p_{n,r}(\gamma)$ che si commette soddisfa la limitazione:

$$(5) \quad |p_{n,r}(\gamma)|<\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2n+1)a_n}a_r\frac{(2r-1)!!}{(2n+3)(2n+5)\dots(2n+2r+1)}\frac{2}{(2\operatorname{sen}\gamma)^{r+\frac{1}{2}}},$$

cioè è minore del doppio del valore assoluto del primo termine trascurato, quando nel numeratore in luogo del coseno si ponga 1.

e). Altre formule di approssimazione dovute a WATSON, HILB, SZEGÖ [58] sono dimostrate con procedimenti non elementari.

f). Noi qui ci limiteremo nel successivo n.° 2 a dare la formula (4), riportando integralmente la dimostrazione di STIELTJES.

2. - Partiamo dalla formula integrale di LAPLACE [§ 6, (19)]

$$P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi[x+i\sqrt{1-x^2}\cos\varphi]^n d\varphi, \qquad -1<x<1,$$

dove del radicale $\sqrt{1-x^2}$ intendiamo di prendere il valore aritmetico.

Poniamo

$$(6) \qquad \xi=x+i\sqrt{1-x^2}, \qquad \xi^{-1}=x-i\sqrt{1-x^2}$$

ed effettuiamo il cambiamento di variabile

$$x+i\sqrt{1-x^2}\cos\varphi=z;$$

si ha

$$\operatorname{sen}\varphi=\sqrt{1-2xz+z^2}/\sqrt{1-x^2}, \qquad d\varphi=-i^{-1}dz/\sqrt{1-2xz+z^2},$$

dove $\sqrt{1-2xz+z^2}$ indica quella determinazione del radicale che nel cerchio di raggio 1 e centro nell'origine diventa uguale ad 1 per $z=0$; otteniamo così

$$P_n(x)=\frac{1}{\pi i}\int_{\xi^{-1}}^{\xi}\frac{z^n}{\sqrt{1-2xz+z^2}}\,dz.$$

Siccome è nullo l'integrale $\int\frac{z^n}{\sqrt{1-2xz+z^2}}\,dz$ esteso al contorno completo del triangolo che ha i suoi vertici nei punti 0, ξ^{-1}, ξ, ne viene

$$P_n(x)=\frac{1}{\pi i}\left[\int_0^{\xi}\frac{z^n}{\sqrt{1-2xz+z^2}}\,dz-\int_0^{\xi^{-1}}\frac{z^n}{\sqrt{1-2xz+z^2}}\,dz\right],$$

ovvero posto

$$(7_1)\qquad A=\frac{1}{\pi i}\int_0^{\xi}\frac{z^n}{\sqrt{1-2xz+z^2}}\,dz,$$

$$(7_2)\qquad B=\frac{1}{\pi i}\int_0^{\xi^{-1}}\frac{z^n}{\sqrt{1-2xz+z^2}}\,dz,$$

$$(8)\qquad P_n(x)=A-B.$$

Effettuiamo in A la trasformazione $z=\xi(1-u)$, $0\leq u\leq 1$, e poniamo $k=\xi^2/(\xi^2-1)$; si avrà

$$z^2-2xz+1=(1-\xi z)(1-\xi^{-1}z)=u(1-\xi z)=\frac{1}{1-k}u(1-ku)$$

e convenendo di prendere di $\sqrt{u}$ il valore aritmetico e per $\sqrt{1-k}$ il valore del radicale $\sqrt{1-ku}$ per $u=1$ abbiamo

$$A=\frac{1}{\pi i}\int_1^0 \xi^n(1-u)^n\sqrt{1-k}\,\frac{-\xi\,du}{\sqrt{u(1-ku)}}=\frac{1}{\pi i}\,\xi^{n+1}\sqrt{1-k}\int_0^1\frac{(1-u)^n du}{\sqrt{u(1-ku)}}$$

e procedendo in ugual modo per B otteniamo

$$(9)\qquad P_n(x)=\frac{1}{\pi i}\left[\xi^{n+1}\sqrt{1-k}\int_0^1\frac{(1-u)^n du}{\sqrt{u(1-ku)}}+\xi^{-(n+1)}\sqrt{1-k_1}\int_0^1\frac{(1-u)^n du}{\sqrt{u(1-k_1u)}}\right]$$

con

$$(10)\qquad k=\frac{\xi^2}{\xi^2-1},\qquad k_1=\frac{\xi^{-2}}{\xi^{-2}-1}.$$

Facciamo $x=\cos\gamma$ con $0<\gamma<\pi$, si avrà

$$\xi=e^{i\gamma},\qquad \xi^{-1}=e^{-i\gamma}$$

$$k=\frac{\xi}{\xi-\xi^{-1}}=\frac{\cos\gamma+i\,\mathrm{sen}\,\gamma}{2i\,\mathrm{sen}\,\gamma}=\frac{e^{i\left(\gamma-\frac{\pi}{2}\right)}}{2\,\mathrm{sen}\,\gamma}$$

ovvero

$$(11)\qquad k=\frac{e^{i\alpha}}{2\,\mathrm{sen}\,\gamma},\qquad \alpha=\gamma-\frac{\pi}{2}.$$

Si ha $1-ku=1-\frac{u}{2}+i\frac{u}{2}\operatorname{ctg}\gamma$, quindi la parte reale di $\sqrt{1-ku}$ non può mai annullarsi quando u varia tra 0 ed 1, e perciò se facciamo $\sqrt{1-ku}=1$ per $u=0$, per $\sqrt{1-k}$ dobbiamo scegliere la determinazione con la parte reale positiva.

Si ha ([1])

$$R\sqrt{1-k}=R\sqrt{-\frac{k}{\xi^2}}=R\,\frac{i\sqrt{k}}{\xi}=R\,\frac{ie^{\frac{1}{2}\alpha i}}{\xi\sqrt{2\,\mathrm{sen}\,\gamma}}=R\,\frac{ie^{\left(\frac{1}{2}\alpha-\gamma\right)i}}{\sqrt{2\,\mathrm{sen}\,\gamma}}=$$

$$=-\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}\alpha-\gamma\right)}{\sqrt{2\,\mathrm{sen}\,\gamma}}=\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2\,\mathrm{sen}\,\gamma}}$$

e perciò con le nostre convenzioni $\sqrt{2\,\mathrm{sen}\,\gamma}$ ha il valore aritmetico.

Abbiamo ora

$$\xi^{n+1}\sqrt{1-k}=\frac{ie^{\left(n\gamma+\frac{1}{2}\alpha\right)i}}{\sqrt{2\,\mathrm{sen}\,\gamma}},\qquad \xi^{-(n+1)}\sqrt{1-k_1}=\frac{-ie^{-\left(n\gamma+\frac{1}{2}\alpha\right)i}}{\sqrt{2\,\mathrm{sen}\,\gamma}}$$

e la (9) diventa

$$(12)\qquad P_n(\cos\gamma)=\frac{e^{\left(n\gamma+\frac{1}{2}\alpha\right)i}}{\pi\sqrt{2\,\mathrm{sen}\,\gamma}}\int_0^1\frac{(1-u)^n du}{\sqrt{u(1-ku)}}+\frac{e^{-\left(n\gamma+\frac{1}{2}\alpha\right)i}}{\pi\sqrt{2\,\mathrm{sen}\,\gamma}}\int_0^1\frac{(1-u)^n du}{\sqrt{u(1-k_1u)}}$$

od anche

$$(12')\qquad \boxed{P_n(\cos\gamma)=\frac{2}{\pi\sqrt{2\,\mathrm{sen}\,\gamma}}\,Re^{\left(n\gamma+\frac{1}{2}\alpha\right)i}\int_0^1\frac{(1-u)^n du}{\sqrt{u(1-ku)}}}\,.$$

([1]) Se $\alpha+i\beta$ è un numero complesso, α e β reali, col simbolo $R(\alpha+i\beta)$ intendiamo il numero α (cfr. p. 97).

Siccome $|k| = |e^{i\alpha}/2 \operatorname{sen} \gamma| = 1/2 \operatorname{sen} \gamma$, per $\operatorname{sen} \gamma > 1/2$, cioè $\pi/6 < \gamma < 5\pi/6$ vale lo sviluppo in serie [uniformemente convergente]

$$\frac{1}{\sqrt{1-ku}} = 1 + \sum_r^{1\ldots\infty} \frac{(2r-1)!!}{(2r)!!} k^r u^r = 1 + \sum_r^{1\ldots\infty} \frac{(2r-1)!!}{(2r)!!} \frac{e^{ir\alpha}}{2^r \operatorname{sen}^r \gamma} u^r$$

quindi

$$\frac{e^{\left(n\gamma+\frac{1}{2}\alpha\right)i}(1-u)^n}{\sqrt{u(1-ku)}} = e^{\left(n\gamma+\frac{1}{2}\alpha\right)i} u^{-\frac{1}{2}} (1-u)^n +$$
$$+ \sum_r^{1\ldots\infty} \frac{(2r-1)!!}{(2r)!!} \frac{e^{\left(n\gamma+\frac{1}{2}\alpha+r\alpha\right)i}}{2^r \operatorname{sen}^r \gamma} u^{r-\frac{1}{2}} (1-u)^n$$

e

$$(13)\quad R\,\frac{e^{\left(n\gamma+\frac{1}{2}\alpha\right)i}(1-u)^n}{\sqrt{u(1-ku)}} = \cos\left(n\gamma+\frac{1}{2}\alpha\right) u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^n +$$
$$+ \sum_r^{1\ldots\infty} \frac{(2r-1)!!}{(2r)!!} \frac{\cos\left(n\gamma+\frac{1}{2}\alpha+r\alpha\right)}{2^r \operatorname{sen}^r \gamma} (1-u)^n u^{r-\frac{1}{2}},$$

ma per le note proprietà della B Euleriana si ha

$$\frac{(2r-1)!!}{(2r)!!} \int_0^1 (1-u)^n u^{r-\frac{1}{2}} du = \frac{(2r-1)!!}{(2r)!!} B\left(r+\frac{1}{2};\ n+1\right) =$$
$$= \frac{(2r-1)!!}{(2r)!!} \frac{n!}{\left(r+\frac{1}{2}\right)\left(r+\frac{3}{2}\right)\ldots\left(r+\frac{1}{2}+n\right)} = \frac{[(2r-1)!!]^2 (2n)!!\, 2}{(2r)!!\,(2n+2r+1)!!} =$$
$$= \frac{2}{a_n(2n+1)} a_r \frac{(2r-1)!!}{(2n+3)(2n+5)\ldots(2n+2r+1)}$$

e perciò, integrando tra 0 e 1 termine a termine la (13), si trova la serie (4) di Stieltjes; essa come abbiamo già dichiarato risulta convergente per $\pi/6 < \gamma < 5\pi/6$.

3. - *a*). Vogliamo dimostrare con Stieltjes che γ soddisfi o no alla limitazione $\pi/6 < \gamma < 5\pi/6$, se nel secondo membro della (4) ci si ferma alla somma dei primi r termini, l'errore $p_{n,r}(\gamma)$ è maggiorato dalla (5).

Si osservi infatti che si ha

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{dv}{1-ku\operatorname{sen}^2 v} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{\cos^2 v + (1-ku)\operatorname{sen}^2 v} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \operatorname{tg} v}{1+(1-ku)\operatorname{tg}^2 v} =$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+(1-ku)t^2} = \frac{1}{\sqrt{1-ku}},$$

dove $\sqrt{1-ku}$ è quella determinazione del radicale con la parte reale positiva e perciò la (12′) può scriversi

$$(14)\quad P_n(\cos\gamma) = \frac{2}{\pi^2\sqrt{2\operatorname{sen}\gamma}} Re^{\left(n\gamma+\frac{1}{2}\alpha\right)i} \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^n du \int_0^\pi \frac{dv}{1-ku\operatorname{sen}^2 v},$$

ma si ha

$$\frac{1}{1-ku\operatorname{sen}^2 v} = 1 + ku\operatorname{sen}^2 v + \ldots + (ku\operatorname{sen}^2 v)^{r-1} + \frac{(ku\operatorname{sen}^2 v)^r}{1-ku\operatorname{sen}^2 v}$$

e siccome

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^{2s} v\, dv = \pi\frac{(2s-1)!!}{(2s)!!}$$

abbiamo che se nella (4) limitiamo la somma ai suoi primi r termini per l'errore $p_{n,r}(\gamma)$ vale la formula $[k^r = e^{ir\alpha}/(2\operatorname{sen}\gamma)^r]$

$$(15)\quad p_{n,r}(\gamma) =$$
$$= \frac{2}{\pi^2\sqrt{(2\operatorname{sen}\gamma)^{2r+1}}} Re^{\left[\left(n+r+\frac{1}{2}\right)\gamma-\left(r+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]i} \int_0^1 u^{r-\frac{1}{2}}(1-u)^n du \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^{2r} v}{1-ku\operatorname{sen}^2 v} dv$$

quindi

$$(16)\quad |p_{n,r}(\gamma)| = \frac{2}{\pi\sqrt{(2\operatorname{sen}\gamma)^{2r+1}}} \left|\frac{1}{\pi}\int_0^1 u^{r-\frac{1}{2}}(1-u)^n du \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^{2r} v}{1-ku\operatorname{sen}^2 v} dv\right|.$$

Abbiamo

$$|1-ku\operatorname{sen}^2 v|^{-1} = \left|1-\frac{1}{2}(1-i\operatorname{ctg}\gamma)u\operatorname{sen}^2 v\right|^{-1} =$$
$$= 2\operatorname{sen}\gamma/\sqrt{4\operatorname{sen}^2\gamma\cos^2\gamma + (2\operatorname{sen}^2\gamma - u\operatorname{sen}^2 v)^2}$$

e perciò per $\operatorname{sen}^2\gamma \leq 1/2$,

$$|1-ku\operatorname{sen}^2 v|^{-1} \leq 2\operatorname{sen}\gamma/\sqrt{4\operatorname{sen}^2\gamma\cos^2\gamma} = 1/|\cos\gamma| < 2,$$

mentre per $\text{sen}^2\gamma > 1/2$ si ha

$$(2\,\text{sen}^2\gamma - u\,\text{sen}^2 v)^2 \geqslant (2\,\text{sen}^2\gamma - 1)^2 = \cos^2 2\gamma,$$
$$4\,\text{sen}^2\gamma\cos^2\gamma + (2\,\text{sen}^2\gamma - u\,\text{sen}^2 v)^2 \geqslant \text{sen}^2 2\gamma + \cos^2 2\gamma = 1,$$

perciò

$$|1 - ku\,\text{sen}^2 v|^{-1} < 2\,\text{sen}\,\gamma\,;$$

è quindi in ogni caso

$$|1 - ku\,\text{sen}^2 v|^{-1} < 2,$$

e dalla (16) si ottiene

$$|p_{n,r}(\gamma)| < \frac{4}{\pi\sqrt{(2\,\text{sen}\,\gamma)^{2r+1}}}\int_0^1 (1-u)^n u^{r-\frac{1}{2}}\,du\,\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \text{sen}^{2r} v\,dv$$

ossia

$$|p_{n,r}(\gamma)| < \frac{4}{\pi}\,\frac{1}{(2n+1)a_n}\,a_r\,\frac{(2r-1)!!}{(2n+3)(2n+5)\ldots(2n+2r+1)}\,\frac{2}{(2\,\text{sen}\,\gamma)^{r+\frac{1}{2}}},$$

che è appunto la (5).

Fissato r, poichè si ha $1/a_n = (\pi n)^{1/2}(1+\theta/2n)^{1/2}$ [§ 8, (12)] ne viene $1/a_n = O(n^{1/2})$ e perciò

$$(17) \qquad \boxed{|p_{n,r}(\gamma)| < \frac{A}{(n\,\text{sen}\,\gamma)^{r+\frac{1}{2}}}}, \quad 0 < \gamma < \pi, \quad n \geqslant 1,$$

dove A è un numero fisso indipendente da n e da γ.

b). Vogliamo infine notare una limitazione di $\frac{dp_{n,r}(\gamma)}{d\gamma}$ che ci occorrerà, tra poco, nel § 12 destinato agli sviluppi in serie di polinomi di LEGENDRE.

Se nella formula (15) deriviamo ambo i membri rispetto a γ e notiamo che $\frac{d}{d\gamma}e^{\left[\left(n+r+\frac{1}{2}\right)\gamma - \left(r+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]i}$ porta il fattore $n+r+\frac{1}{2}$ e che

$$\left|\frac{d}{d\gamma}\,\frac{1}{1-ku\,\text{sen}^2 v}\right| = \frac{|u\,\text{sen}^2 v|}{|1-ku\,\text{sen}^2 v|^2}\left|\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\,\text{ctg}\,\gamma\right)\right| < \frac{2}{\text{sen}^2\gamma}$$

ne viene che per $\varepsilon \leqslant \gamma \leqslant \pi - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \pi/2$

$$(18) \qquad \boxed{\frac{dp_{n,r}(\gamma)}{d\gamma} = O\left(n^{-r+\frac{1}{2}}\right)}, \quad \varepsilon \leqslant \gamma \leqslant \pi - \varepsilon.$$

§ 11. - Limiti di integrali. Integrali singolari [1].

Nello studio degli sviluppi di una funzione assegnata in serie di integrali hanno importanza notevole i seguenti teoremi, dei quali noi faremo uso nel § 12 a proposito dello sviluppo di una funzione in serie di polinomi di LEGENDRE.

TEOREMA 1. - Sia $\Phi(x', x, \lambda_n)$ definita per x' variabile nell'intervallo finito (a, b), x variabile in un aggregato di punti g, e per λ_n variabile in una successione $\{\lambda_n\}$.

Supponiamo poi che siano verificate le seguenti ipotesi:

a). Fissati un punto x in g e λ_n in $\{\lambda_n\}$, per tutti i punti x' di (a, b), salvo al più un insieme di misura nulla, si abbia

$$(1) \qquad |\Phi(x', x, \lambda_n)| < k$$

con k indipendente da x e da λ_n.

b). Fissati x in g, λ_n in $\{\lambda_n\}$, per ogni intervallo (α, β) di (a, b), $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$ la funzione $\Phi(x', x, \lambda_n)$ sia sommabile in (α, β) e si abbia

$$(2) \qquad \lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta \Phi(x', x, \lambda_n)\,dx' = 0$$

uniformemente quando x varia in g.

Vogliamo allora dimostrare che se $f(x')$ è una funzione sommabile in (a, b), si ha

$$(3) \qquad \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x')\,\Phi(x', x, \lambda_n)\,dx' = 0,$$

e la convergenza a zero dell'integrale è uniforme quando x varia in g.

Dimostrazione. - Fissato $\varepsilon > 0$ si determini una funzione continua $\varphi(x')$ tale che [Cap. II, § 2, n.° 5]

$$(4) \qquad \int_a^b |f(x') - \varphi(x')|\,dx' < \frac{\varepsilon}{k}$$

e consideriamo una divisione di (a, b), $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{r-1} < a_r = b$ tale che l'oscillazione di $\varphi(x')$ in ogni intervallo (a_{s-1}, a_s), $s = 1, 2, \ldots, r$,

---

[1] Cfr. *a*) U. DINI [[14, *a*)], p. 119 e segg.]; *b*) E. W. HOBSON [[25, *a*)], II, p. 422].

sia inferiore ad $\varepsilon/k(b-a)$. Indichiamo con $\psi(x')$ la funzione definita con la seguente legge

$$\psi(a_s)=0 \qquad s=0, 1, 2,\dots, r$$

$$\psi(x')=\varphi\left(\frac{a_{s-1}+a_s}{2}\right)=c_s \quad \text{per } a_{s-1}<x'<a_s, \; s=1, 2,\dots, r.$$

La $\psi(x')$ assume in (a, b) i valori $0, c_1, c_2,\dots, c_r$, ed avendosi, eccettuati al più i punti $x'=a_s$, $|\varphi(x')-\psi(x')|<\varepsilon/k(b-a)$, si ha anche

$$\int_a^b |\varphi(x')-\psi(x')|\,dx'<\frac{\varepsilon}{k} \tag{5}$$

e dalle (4) e (5)

$$\int_a^b |f(x')-\psi(x')|\,dx'<\frac{2\varepsilon}{k}. \tag{6}$$

Per le nostre ipotesi $f(x')\Phi(x', x, \lambda_n)$ è sommabile rispetto ad x' in (a, b), e si ha

$$\left|\int_a^b f(x')\Phi(x', x, \lambda_n)dx'\right| \leqslant \left|\int_a^b \{f(x')-\psi(x')\}\Phi(x', x, \lambda_n)dx'\right| +$$

$$+\sum_s^{1\dots r}|c_s|\left|\int_{a_{s-1}}^{a_s}\Phi(x', x, \lambda_n)dx'\right| \leqslant 2\varepsilon+\sum_s^{1\dots r}|c_s|\left|\int_{a_{s-1}}^{a_s}\Phi(x', x, \lambda_n)dx'\right|,$$

e siccome per le nostre ipotesi può determinarsi un intero positivo n_ε tale che per $n>n_\varepsilon$ sia

$$\left|\int_{a_{s-1}}^{a_s}\Phi(x', x, \lambda_n)dx'\right|<\varepsilon/\sum_s^{1\dots r}|c_s|; \qquad s=1, 2,\dots, r; \quad n>n_\varepsilon$$

si avrà per $n>n_\varepsilon$ e qualunque sia x in g

$$\left|\int_a^b f(x')\Phi(x', x, \lambda_n)dx'\right|<3\varepsilon \qquad \text{c. v. d.}$$

TEOREMA 2. - Sia $F(x', x, \lambda_n)$ definita per x' variabile nell'intervallo finito (a, b), x variabile in un aggregato di punti g contenuto in $(a+\mu, b-\mu)$, $0<\mu<(b-a)/2$, e per λ_n variabile in una successione $\{\lambda_n\}$.

Supponiamo che per la funzione $F(x', x, \lambda_n)$ siano verificato le seguenti ipotesi:

a). Esiste un numero positivo d, $\mu\geqslant d>0$, tale che fissata una coppia di valori di x in g e di λ_n in $\{\lambda_n\}$ e per tutti i valori x' di (a, b) con $|x'-x|\geqslant d$, salvo al più un insieme di punti x' di misura nulla, si abbia

$$|F(x', x, \lambda_n)|<k \tag{7}$$

con k costante indipendente da x e da λ_n.

b). Per ogni intervallo (α, β) di (a, b), $a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b$, e per ogni x in g non interno all'intervallo $I'=(\alpha-d, \beta+d)$, la $F(x', x, \lambda_n)$ sia sommabile rispetto ad x' in (α, β) e sia

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta F(x', x, \lambda_n)dx'=0 \tag{8}$$

uniformemente rispetto ai valori di x di g non interni ad I'.

Vogliamo allora dimostrare che se $f(x')$ è sommabile in (a, b) e μ_x e μ_x' sono due funzioni di x tali che $d\leqslant\mu_x\leqslant\mu$, $d\leqslant\mu_x'\leqslant\mu$, e del resto qualsiasi, si ha

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^{x-\mu_x} f(x')F(x', x, \lambda_n)dx'=0; \tag{9_1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x+\mu'_x}^b f(x')F(x', x, \lambda_n)dx'=0, \tag{9_2}$$

e la tendenza al limite zero è uniforme rispetto a tutti i valori x di g.

Dimostrazione. **- Fissata una qualunque coppia di valori di x in g e di λ_n in $\{\lambda_n\}$ poniamo**

$$\Phi(x', x, \lambda_n)=F(x', x, \lambda_n) \quad \text{se} \quad a\leqslant x'\leqslant x-\mu_x \tag{10_1}$$

$$\Phi(x', x, \lambda_n)=0 \quad \text{se} \quad x-\mu_x<x'\leqslant b. \tag{10_2}$$

Per queste posizioni e per la (7), per qualunque coppia x, λ_n, ed eccettuati al più i valori x' appartenenti ad un insieme di misura nulla, si ha

$$|\Phi(x', x, \lambda_n)|<k.$$

Sia (α, β) un intervallo di (a, b) e si consideri l'integrale

$$J = \int_\alpha^\beta \Phi(x', x, \lambda_n) dx'.$$

Se $x < \alpha + \mu_x$ $[x - \mu_x < \alpha \leq x']$ si ha

$$J = 0;$$

se $x > \beta + \mu_x$ $[x' \leq \beta < x - \mu_x]$ si ha

$$J = \int_\alpha^\beta F(x', x, \lambda_n) dx'$$

che per $n \to \infty$ tende (per ipotesi) uniformemente a zero per tutti gli x di g tali che $x > \beta + d$ e perciò anche per $x > \beta + \mu_x$.

Quando $\alpha + \mu_x \leq x \leq \beta + \mu_x$ si ha

$$J = \int_\alpha^{x-\mu_x} F(x', x, \lambda_n) dx'$$

e perciò ancora $[x - (x - \mu_x) = \mu_x \geq d]$ $J \to 0$ quando $n \to \infty$.

Proviamo che anche quando x soddisfa la limitazione

$$\alpha + \mu_x \leq x \leq \beta + \mu_x$$

la convergenza di J a zero è uniforme rispetto ad x.

Scelto infatti $\varepsilon > 0$, si determini l'intero $m > 0$ in modo che sia $(\beta - \alpha)/m < \varepsilon/2k$ e si considerino i punti

$$\alpha_r = \alpha + r(\beta - \alpha)/m, \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots, m).$$

Possiamo per le nostre ipotesi trovare un intero n_ε tale che per $n > n_\varepsilon$ si abbia

$$\left| \int_\alpha^{\alpha_r} F(x', x, \lambda_n) dx' \right| < \varepsilon/2 \quad \text{per } r = 0, 1, 2, \ldots, m; \ x \geq \alpha_r + d; \ n > n_\varepsilon;$$

avremo allora per $\alpha_r \leq x - \mu_x < \alpha_{r+1}$ $[x \geq \alpha_r + \mu_x \geq \alpha_r + d]$

$$|J| \leq \left| \int_\alpha^{\alpha_r} F(x', x, \lambda_n) dx' \right| + \int_{\alpha_r}^{x-\mu_x} |F(x', x, \lambda_n)| dx' < \varepsilon \quad \text{per } n > n_\varepsilon.$$

Concludiamo che per la funzione $\Phi(x', x' \lambda_n)$ sono soddisfatte le condizioni del teorema 1, e perciò

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x') \Phi(x', x, \lambda_n) dx' = \lim_{n\to\infty} \int_a^{x-\mu_x} f(x') F(x', x, \lambda_n) dx' = 0$$

e uniformemente rispetto ad x in g.

Analogo ragionamento vale per l'integrale (9_2).

Definizione. - Un integrale del tipo

$$\int_a^b f(x') F(x', x, \lambda_n) dx'$$

nel quale $f(x')$ è sommabile in (a, b) ed $F(x', x, \lambda_n)$ soddisfa le condizioni dichiarate nel teorema 2 per un $d > 0$, e non le soddisfa per $d = 0$, chiamasi *integrale singolare.*

L'integrale $\int_{-\pi}^{\pi} f(x') \frac{\operatorname{sen} n(x' - x)}{x' - x} dx'$, $-\pi < x < \pi$, è ad esempio un integrale singolare; il comportamento degli integrali singolari come vedremo tra poco, e come abbiamo già visto negli sviluppi in serie trigonometriche, è strettamente legato al problema degli sviluppi di una funzione assegnata in serie di integrali.

§ 12. - Convergenza delle serie di polinomi di Legendre. Teorema di Hobson [1].

1. La somma $S_n(x)$ dei primi n termini della serie di polinomi di LEGENDRE di una funzione sommabile. - 2. Convergenza uniforme a zero di un integrale. - 3. I due limiti $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$, $\lim_{n\to\infty} T_n(x)$. - 4. Espressione di $T_n(\cos\theta)$. - 5. I due limiti $\lim_{n\to\infty} T_n(\cos\theta)$, $\lim_{n\to\infty} U_n(\cos\theta)$. - 6. Il teorema di convergenza di HOBSON per i punti interni a $(-1, 1)$. - 7. Il teorema di convergenza negli estremi dell'intervallo $(-1, 1)$. - 8. Esempio.

1. - Sia $f(x)$ sommabile in $(-1, 1)$ e si abbia

$$(1) \qquad f(x) \sim \sum_n^{0\ldots\infty} a_n P_n(x), \qquad a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x') P_n(x') dx';$$

[1] Cfr. U. DINI [14, *b*), *c*), *d*)], E. W. HOBSON [25, *b*), *c*), *d*)].

la somma $S_n(x)$ dei primi n termini della serie ha l'espressione

$$S_n(x)=\int_{-1}^{1}\sum_{k}^{0\ldots n}\left\{\frac{1}{2}(2k+1)P_k(x)P_k(x')\right\}f(x')dx'$$

e per la formula sommatoria di CHRISTOFFEL [§ 5, (18)]

$$\boxed{S_n(x)=\frac{1}{2}(n+1)\int_{-1}^{1}\frac{P_n(x)P_{n+1}(x')-P_{n+1}(x)P_n(x')}{x'-x}f(x')dx'}. \tag{2}$$

Noi qui *supponiamo che* $f(x)(1-x^2)^{-1/4}$ *sia sommabile in* $(-1,1)$, o ciò che è lo stesso che $f(x)(1-x)^{-1/4}$, $f(x)(1+x)^{-1/4}$ siano rispettivamente sommabili in un intorno sinistro di $+1$ e destro di -1.

Facendo $x=\cos\gamma$, $0\leq\gamma\leq\pi$, *la nostra ipotesi equivale a supporre* $f(\cos\gamma)\,\mathrm{sen}^{1/2}\gamma$ *sommabile in* $(0,\pi)$.

2. - *Sia* s *un numero positivo* <1, *e decomponiamo* s *nella somma di due numeri positivi* μ *ed* ε, $\mu+\varepsilon=s$; *sia* d *un numero positivo,* $0<d\leq\mu$, *e* μ_x *e* μ_x' *due funzioni di* x *definite in* $(-1,1)$ *che soddisfano le limitazioni*

$$d\leq\mu_x\leq\mu;\qquad d\leq\mu_x'\leq\mu.$$

Si consideri la somma dei due integrali

$$I_n(x)=\frac{1}{2}(n+1)\int_{-1}^{x-\mu_x}\frac{P_n(x)P_{n+1}(x')-P_{n+1}(x)P_n(x')}{x'-x}f(x')dx'+$$

$$+\frac{1}{2}(n+1)\int_{x+\mu'_x}^{1}\frac{P_n(x)P_{n+1}(x')-P_{n+1}(x)P_n(x')}{x'-x}f(x')dx'$$

per tutti i valori di x *dell'intervallo* $(-1+s,1-s)$; *vogliamo dimostrare che scelto un numero* σ *positivo arbitrario, è possibile trovare un intero positivo* n_σ *tale, che per* $n>n_\sigma$ *risulti*

$$|I_n(x)|<\sigma\quad\text{per } n>n_\sigma,\ \text{e}\ -1+s\leq x\leq 1-s.$$

a). Cominciamo dal provare che esiste un numero ε_1 positivo e minore di ε tale che

$$\left|\frac{1}{2}(n+1)\int_{-1}^{-1+\varepsilon_1}\frac{P_n(x)P_{n+1}(x')-P_{n+1}(x)P_n(x')}{x'-x}f(x')dx'\right|<\frac{\sigma}{4} \tag{3_1}$$

$$\left|\frac{1}{2}(n+1)\int_{1-\varepsilon_1}^{1}\frac{P_n(x)P_{n+1}(x')-P_{n+1}(x)P_n(x')}{x'-x}f(x')dx'\right|<\frac{\sigma}{4} \tag{3_2}$$

per

$$n=0,\,1,\,2,\ldots;\qquad -1+\varepsilon+\mu\leq x\leq 1-\varepsilon-\mu;\qquad \varepsilon_1<\varepsilon.$$

Proveremo la (3_1), ugualmente si ragiona sulla (3_2).

Abbiamo [§ 8, (14)]:

1). $|\sqrt{n+1}\sqrt[4]{1-x^2}P_n(x)|=|\sqrt{n}\sqrt[4]{1-x^2}P_n(x)\sqrt{1+1/n}|<8/\sqrt{\pi}$,
$-1\leq x\leq 1,\quad n=0,\,1,\,2,\ldots$

2). $|\sqrt{n+1}\sqrt[4]{1-x'^2}P_{n+1}(x')|<4\sqrt{2}/\sqrt{\pi}$,
$-1\leq x'\leq 1,\quad n=0,\,1,\,2,\ldots$

3). Per

$$0<\varepsilon_1<\varepsilon,\qquad -1\leq x'\leq -1+\varepsilon_1<-1+\varepsilon,\qquad -1+\varepsilon+\mu\leq x$$

si ha

$$1/|x'-x|<1/\mu;$$

4). Per

$$-1+\varepsilon+\mu\leq x\leq 1-\varepsilon-\mu$$

si ha

$$1/\sqrt[4]{1-x^2}\leq 1/\sqrt[4]{1-(1-\varepsilon-\mu)^2}<1/\sqrt[4]{1-(1-\mu)^2};$$

quindi

$$\left|\frac{1}{2}(n+1)\int_{-1}^{-1+\varepsilon_1}\frac{P_n(x)P_{n+1}(x')}{x'-x}f(x')dx'\right|<\frac{16\sqrt{2}}{\pi\mu\sqrt[4]{1-(1-\mu)^2}}\int_{-1}^{-1+\varepsilon_1}\frac{|f(x')|}{\sqrt[4]{1-x'^2}}dx',$$

e per la sommabilità di $f(x')/\sqrt[4]{1-x'^2}$ in $(-1,1)$ si può trovare un ε_1 positivo $<\varepsilon$ tale che risulti

$$\left|\frac{1}{2}(n+1)\int_{-1}^{-1+\varepsilon_1}\frac{P_n(x)P_{n+1}(x')}{x'-x}f(x')dx'\right|<\frac{\sigma}{8},$$

e impiccolendo se occorre ε_1 si può supporre similmente che si abbia

$$\left|\frac{1}{2}(n+1)\int_{-1}^{-1+\varepsilon_1}\frac{P_{n+1}(x)P_n(x')}{x'-x}f(x')dx'\right|<\frac{\sigma}{8}$$

e ne risulta allora la (3_1).

b). Andiamo ora a provare che si può determinare un intero positivo n_σ tale che per $n>n_\sigma$, quando

$$-1+\varepsilon+\mu\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon-\mu,\qquad 0<d\leqslant\mu_x\leqslant\mu,\qquad 0<d\leqslant\mu_x'\leqslant\mu$$

si ha

$$(4_1)\qquad \left|\frac{1}{2}(n+1)\int_{-1+\varepsilon_1}^{x-\mu_x}\frac{P_n(x)P_{n+1}(x')-P_n(x')P_{n+1}(x)}{x'-x}f(x')dx'\right|<\frac{\sigma}{4},$$

$$(4_2)\qquad \left|\frac{1}{2}(n+1)\int_{x+\mu'_x}^{1-\varepsilon_1}\frac{P_n(x)P_{n+1}(x')-P_{n+1}(x)P_n(x')}{x'-x}f(x')dx'\right|<\frac{\sigma}{4}.$$

Definiamo per questo una funzione $F(x', x, n)$ con la seguente legge:

Fissato x in $(-1+\varepsilon_1+\mu, 1-\varepsilon_1-\mu)$ e l'intero positivo n si ponga

$$F(x', x, n)=\frac{1}{2}(n+1)\frac{P_n(x)P_{n+1}(x')-P_{n+1}(x)P_n(x')}{x'-x}$$

per

$$-1+\varepsilon_1\leqslant x'\leqslant x-\mu_x;$$

$$F(x', x, n)=0\quad\text{per}\quad -1\leqslant x'<1+\varepsilon_1,$$

oppure

$$x-\mu_x<x'\leqslant 1,$$

e dimostriamo che la funzione $F(x', x, n)$ quando x' varia in $(-1, 1)$, x in $(-1+\varepsilon_1+\mu, 1-\varepsilon_1-\mu)$ gode le proprietà della $F(x', x, n)$ del teorema 2 del § 11.

Esiste infatti una costante λ tale che per $-1+\varepsilon_1\leqslant x'\leqslant 1-\varepsilon_1$ si ha $|P_n(x')|<\lambda n^{-1/2}$ [§ 8, (8)], e avendosi $-1+\varepsilon_1+\mu\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon_1-\mu$ è anche $|P_n(x)|<\lambda n^{-1/2}$; ma quando $F(x', x, n)$ non è nulla abbiamo $|x'-x|\geqslant d$, si ha quindi in ogni caso

$$|F(x', x, n)|<\frac{1}{2}(n+1)\frac{2\lambda^2}{dn^{1/2}(n+1)^{1/2}}\leqslant\frac{\sqrt{2}\lambda^2}{d},$$

cioè fissati ε_1, μ, la $|F(x', x, n)|$ è minore di una costante indipendente da x', x, n.

Sia (α_1, β_1) un intervallo di $(-1+\varepsilon_1, 1-\varepsilon_1)$ e proviamo che

$$(5)\qquad \lim_{n\to\infty}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}F(x', x, n)dx'=0$$

uniformemente rispetto ai valori x di $g=(-1+\varepsilon_1+\mu, 1-\varepsilon_1-\mu)$ non interni a $(\alpha'-d, \beta'+d)$.

Possiamo evidentemente supporre nell'integrale

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1}F(x', x, n)dx',\qquad \beta_1\leqslant x-\mu_x,$$

e se osserviamo allora che $1/(x'-x)$ è monotona (decrescente) per x' in $(-1+\varepsilon_1, x-\mu_x)$ e applichiamo il secondo teorema della media, abbiamo

$$(6)\qquad \int_{\alpha_1}^{\beta_1}F(x', x, n)dx'=$$
$$=\frac{n+1}{2}\left\{P_n(x)\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\frac{P_{n+1}(x')}{x'-x}dx'-P_{n+1}(x)\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\frac{P_n(x')}{x'-x}dx'\right\}=$$
$$=\frac{n+1}{2}\left[\frac{P_n(x)}{\alpha_1-x}\int_{\alpha_1}^{\xi_1}P_{n+1}(x')dx'+\frac{P_n(x)}{\beta_1-x}\int_{\xi_1}^{\beta_1}P_{n+1}(x')dx'\right]-$$
$$-\frac{n+1}{2}\left[\frac{P_{n+1}(x)}{\alpha_1-x}\int_{\alpha_1}^{\xi_2}P_n(x')dx'+\frac{P_{n+1}(x)}{\beta_1-x}\int_{\xi_2}^{\beta_1}P_n(x')dx'\right]$$

con $\alpha_1<\xi_1$, $\xi_2<\beta_1$.

Ma se (γ_1, γ_2) è un intervallo di $(-1, 1)$ abbiamo [§ 8, (17)]

$$\left|\int_{\gamma_1}^{\gamma_2}P_n(x')dx'\right|<\frac{4}{\sqrt{\pi n}\sqrt{n}},\qquad \left|\int_{\gamma_1}^{\gamma_2}P_{n+1}(x')dx'\right|<\frac{4}{\sqrt{\pi n}\sqrt{n}};$$

si ha anche per tutti i punti x non interni a (α_1-d, β_1+d) simultaneamente $|\alpha_1-x|\geqslant d$, $|\beta_1-x|\geqslant d$, e poichè per x in $(-1+\varepsilon_1, 1-\varepsilon_1)$ è

$$|P_n(x)|<\lambda n^{-1/2},\qquad |P_{n+1}(x)|<\lambda n^{-1/2}$$

dalla (6) viene

$$\left| \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F(x', x, n)\, dx' \right| < \frac{16\lambda}{\sqrt{\pi d}} \frac{1}{n}$$

quindi vale la (5) e uniformemente per i valori di x in g non interni a $(\alpha_1 - d, \beta_1 + d)$.

Applicando allora il teorema 2 del § precedente ne risulta la (4_1) [e in modo analogo la (4_2)] per tutti i valori di x dell'intervallo $(-1+\varepsilon_1+\mu, 1-\varepsilon_1-\mu)$ il quale contiene nel suo interno l'intervallo $(-1+\varepsilon+\mu, 1-\varepsilon-\mu) = (-1+s, 1-s)$.

Sommando le (3_1), (3_2), (4_1), (4_2) ne risulta il teorema da dimostrare.

3. - Dalle cose dette in 2. segue che fissato un punto x interno a $(-1, 1)$ e posto

$$T_n(x) = \frac{1}{2}(n+1) \int_{x-\mu_x}^{x+\mu'_x} \frac{P_n(x)P_{n+1}(x') - P_{n+1}(x)P_n(x')}{x'-x} f(x')\, dx' \tag{7}$$

con

$$0 < \mu_x \leq \mu, \qquad 0 \leq \mu_x' \leq \mu, \qquad -1 < x-\mu < x+\mu < 1,$$

abbiamo

$$S_n(x) = I_n(x) + T_n(x),$$

e fissato $\sigma > 0$ si può trovare un n_σ tale che per $n > n_\sigma$ risulti

$$|S_n(x) - T_n(x)| < \sigma \quad \text{per } n > n_\sigma,$$

quindi $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$ *e* $\lim_{n\to\infty} T_n(x)$ *hanno uguale comportamento, e se uno converge anche l'altro converge allo stesso valore.*

Se poi si fa variare x in $(-1+s, 1-s)$ e μ e d sono due numeri positivi, $0 < d \leq \mu < s$, e μ_x e μ_x' sono definite in $(-1+s, 1-s)$ in modo che $d \leq \mu_x \leq \mu$, $d \leq \mu_x' \leq \mu$, se si ha $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = S(x)$ uniformemente rispetto ad x variabile in $(-1+s, 1-s)$ è anche $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$ uniformemente in $(-1+s, 1-s)$, e inversamente.

4. - Per studiare $\lim_{n\to\infty} T_n(x)$ converrà porre $x = \cos\gamma$ e sostituire a P_n e P_n' le loro espressioni assintotiche.

Vari x in $(-1+s, 1-s)$, si fissi un numero positivo $\mu < s$, e del resto qualsiasi, e si ponga

$$s = \mu + \varepsilon, \qquad 0 < d \leq \mu_x \leq \mu, \qquad 0 < d \leq \mu_x' \leq \mu$$

con μ ed ε positivi, e si consideri l'espressione (7) di $T_n(x)$.

Poniamo anche

$$\gamma = \text{arc cos}\, x,$$
$$\eta_x' = \text{arc cos}\, x - \text{arc cos}\,(x+\mu),$$
$$\eta_x = \text{arc cos}\,(x-\mu) - \text{arc cos}\, x,$$
$$x = \cos\gamma, \qquad x+\mu = \cos(\gamma - \eta_x'), \qquad x-\mu = \cos(\gamma+\eta_x)$$

dove γ, η_x', η_x sono archi positivi e minori di π.

Le funzioni η_x', η_x sono funzioni continue positive di x in $(-1+s, 1-s)$, e se indichiamo con η $(\eta > 0)$ il minimo di $\text{arc cos}\, u - \text{arc cos}\,(u+\mu)$ per u in $(-1, 1-\mu)$ si avrà

$$\gamma > \gamma - \eta \geq \gamma - \eta_x', \qquad \gamma < \gamma + \eta \leq \gamma + \eta_x$$
$$x < \cos(\gamma - \eta) \leq x + \mu, \qquad x > \cos(\gamma+\eta) \geq x - \mu.$$

Posto

$$(8_1) \qquad \begin{cases} \mu_x' = \cos(\gamma-\eta) - x = \cos[\text{arc cos}\, x - \eta] - x, \\ \mu_x = x - \cos(\gamma+\eta) = x - \cos[\text{arc cos}\, x + \eta] \end{cases}$$

$$(8_2) \qquad x + \mu_x' = \cos(\gamma - \eta), \qquad x - \mu_x = \cos(\gamma+\eta)$$

μ_x' e μ_x risultano due funzioni continue positive di x in $(-1+s, 1-s)$ ed hanno un minimo positivo $d > 0$, perciò

$$0 < d \leq \mu_x' \leq \mu, \qquad 0 < d \leq \mu_x \leq \mu.$$

Nell'espressione (7) di $T_n(x)$ è lecito supporre che μ_x e μ_x' abbiamo l'espressione (8_1), posto allora

$$x = \cos\gamma, \qquad x' = \cos\gamma', \qquad 0 < \gamma < \pi, \qquad 0 < \gamma' < \pi$$
$$1 - \varepsilon = \cos\varrho, \qquad 1 - (\varepsilon + \mu) = 1 - s = \cos(\varrho + \tau),$$
$$0 < \varrho < \pi/2, \qquad 0 < \tau, \qquad \varrho + \tau < \pi/2$$

l'espressione (7) di $T_n(\cos\gamma)$ diventa

$$(9)\quad T_n(\cos\gamma)=$$
$$=\frac{1}{2}(n+1)\int_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta}\frac{P_n(\cos\gamma)P_{n+1}(\cos\gamma')-P_{n+1}(\cos\gamma)P_n(\cos\gamma')}{\cos\gamma'-\cos\gamma}\operatorname{sen}\gamma' f(\cos\gamma')d\gamma',$$
$$\varrho>0,\qquad \tau>0,\qquad \varrho+\tau\leq\gamma\leq\pi-(\varrho+\tau),\qquad [0<\eta\leq\tau],$$

e per le cose dette in 3, *i due limiti* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(\cos\gamma)$, $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(\cos\gamma)$ *hanno uguale comportamento, cioè se uno di essi converge per un valore di γ interno a $(0,\pi)$, anche l'altro converge allo stesso limite; e ancora se la convergenza al limite di $T_n(\cos\gamma)$ per $n\to\infty$ è uniforme quando γ varia in un intervallo $(\varrho+\tau,\pi-\varrho-\tau)$, la convergenza di $S_n(\cos\gamma)$ per $n\to\infty$, allo stesso limite, è uniforme nello stesso intervallo e inversamente.*

5. - Ci converrà ora introdurre nella (9) le espressioni assintotiche di P_n e P_{n+1}.

Ricordiamo che in $(\varrho,\pi-\varrho)$ [e quindi in $(\varrho+\tau,\pi-\varrho-\tau)$] si ha [§ 10; (4), (5)]

$$(10)\qquad P_n(\cos\gamma)=\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2n+1)a_n}\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma-\frac{\pi}{4}\right]}{(2\operatorname{sen}\gamma)^{1/2}}+p_{n,1}(\gamma)$$

con

$$(11_1)\qquad p_{n,1}(\gamma)=\frac{2}{\pi}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)a_n}\frac{\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\gamma-\frac{3\pi}{4}\right]}{(2\operatorname{sen}\gamma)^{3/2}}+p_{n,2}(\gamma)$$

$$(11_2)\qquad p_{n,2}(\gamma)=\frac{\alpha(n,\gamma)}{n^{5/2}},\qquad \frac{dp_{n,2}}{d\gamma}=\frac{\beta(n,\gamma)}{n^{3/2}}$$

e con $\alpha(n,\gamma)$, $\beta(n,\gamma)$ in valore assoluto minori di una costante indipendente da n e da γ. Effettuando nella (9) le sostituzioni indicate, ed osservando che

$$\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma-\frac{\pi}{4}\right]\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\gamma'-\frac{\pi}{4}\right]-\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\gamma-\frac{\pi}{4}\right]\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma'-\frac{\pi}{4}\right]=$$
$$=\operatorname{sen}[(n+1)(\gamma-\gamma')]\operatorname{sen}\frac{\gamma+\gamma'}{2}-\cos[(n+1)(\gamma+\gamma')]\operatorname{sen}\frac{\gamma-\gamma'}{2}$$

troviamo che

$$(12)\qquad T_n(\cos\gamma)=U_n(\gamma)-A_n(\gamma)+B_n(\gamma)+C_n(\gamma)+D_n(\gamma)$$

con

$$(13)\quad U_n(\gamma)=$$
$$=\frac{2}{\pi^2}\frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)a_na_{n+1}}\frac{1}{(\operatorname{sen}\gamma)^{1/2}}\int_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta}\frac{\operatorname{sen}[(n+1)(\gamma-\gamma')]}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\gamma-\gamma')}\operatorname{sen}^{1/2}\gamma' f(\cos\gamma')d\gamma',$$

$$(13_1)\quad A_n(\gamma)=$$
$$=\frac{2}{\pi^2}\frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)a_na_{n+1}}\frac{1}{(\operatorname{sen}\gamma)^{1/2}}\int_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta}\frac{\cos[(n+1)(\gamma+\gamma')]}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\gamma+\gamma')}\operatorname{sen}^{1/2}\gamma' f(\cos\gamma')d\gamma',$$

$$(13_2)\quad B_n(\gamma)=\frac{2}{\pi}\frac{n+1}{(2n+1)a_n}\int_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta}\frac{1}{\cos\gamma'-\cos\gamma}\left[\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma-\frac{\pi}{4}\right]}{(2\operatorname{sen}\gamma)^{1/2}}p_{n+1,1}(\gamma')-\right.$$
$$\left.-\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma'-\frac{\pi}{4}\right]}{(2\operatorname{sen}\gamma')^{1/2}}p_{n+1,1}(\gamma)\right]\operatorname{sen}\gamma' f(\cos\gamma')d\gamma',$$

$$(13_3)\quad C_n(\gamma)=\frac{2}{\pi}\frac{n+1}{(2n+3)a_{n+1}}\int_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta}\frac{1}{\cos\gamma'-\cos\gamma}\left[\frac{\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\gamma'-\frac{\pi}{4}\right]}{(2\operatorname{sen}\gamma')^{1/2}}p_{n,1}(\gamma)-\right.$$
$$\left.-\frac{\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\gamma-\frac{\pi}{4}\right]}{(2\operatorname{sen}\gamma)^{1/2}}p_{n,1}(\gamma')\right]\operatorname{sen}\gamma' f(\cos\gamma')d\gamma',$$

$$(13_4)\quad D_n(\gamma)=\frac{1}{2}(n+1)\int_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta}\frac{1}{\cos\gamma'-\cos\gamma}[p_{n,1}(\gamma)p_{n+1,1}(\gamma')-$$
$$-p_{n+1,1}(\gamma)p_{n,1}(\gamma')]\operatorname{sen}\gamma' f(\cos\gamma')d\gamma'.$$

Proveremo che

$$(14)\qquad \lim_{n\to\infty}A_n(\gamma)=\lim_{n\to\infty}B_n(\gamma)=\lim_{n\to\infty}C_n(\gamma)=\lim_{n\to\infty}D_n(\gamma)=0$$

e la convergenza a zero è uniforme quando γ varia in $[\varrho+\tau,\pi-\varrho-\tau]$.

a). Convergenza uniforme a zero di $A_n(\gamma)$ in $(\varrho+\tau,\pi-\varrho-\tau)$.

Ricordando che [§ 8, (12)]

$$a_k=\sqrt{2}/\sqrt{\pi(2k+\theta)},\qquad 0<\theta<1$$

per il coefficiente numerico che figura nel secondo membro della (13_1) abbiamo:

$$\frac{2}{\pi^2}\frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)a_na_{n+1}}=\frac{2}{\pi^2}\frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)}\frac{\pi}{2}\sqrt{(2n+\theta)(2n+2+\theta_1)},$$
$$0<\theta,\quad \theta_1<1$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi^2} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)\alpha_n\alpha_{n+1}} = \frac{1}{2\pi}. \tag{15}$$

Proviamo ora che quando $n \to \infty$

$$\int_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta} \frac{\cos[(n+1)(\gamma+\gamma')]}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\gamma+\gamma')} \operatorname{sen}^{1/2}\gamma' f(\cos\gamma')d\gamma'$$

converge uniformemente a zero per γ variabile in $(\varrho+\tau, \pi-\varrho-\tau)$.

Fissato infatti γ in $(\varrho+\tau, \pi-\varrho-\tau)$ si ponga

$$F(\gamma', \gamma, n) = \frac{\cos[(n+1)(\gamma+\gamma')]}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\gamma+\gamma')} \quad \text{per } \gamma-\eta \leqq \gamma' \leqq \gamma+\eta, \ [0<\eta\leqq\tau] \tag{16$_1$}$$

$$F(\gamma', \gamma, n) = 0, \quad \text{per } \varrho \leqq \gamma' < \gamma-\eta, \quad \text{oppure } \gamma+\eta < \gamma' \leqq \pi-\varrho. \tag{16$_2$}$$

Si ha

$$\varrho + \frac{\tau}{2} = \frac{1}{2}(\varrho+\tau+\varrho) \leqq \frac{1}{2}(\gamma+\gamma') \leqq \frac{1}{2}(\pi-\varrho-\tau+\pi-\varrho) = (\pi-\varrho) - \frac{\tau}{2}$$

esiste quindi una costante $\delta>0$ tale che $\left|\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\gamma+\gamma')\right| \geqq \delta$, e perciò in ogni caso

$$|F(\gamma', \gamma, n)| < 1/\delta$$

con δ indipendente da θ', θ, n.

Fissato γ in $(\varrho+\tau, \pi-\varrho-\tau)$, si consideri l'integrale

$$J_n(\gamma) = \int_\alpha^\beta F(\gamma', \gamma, n)d\gamma'$$

esteso ad un intervallo qualunque (α, β) di $(\varrho, \pi-\varrho)$; questo, tenuto conto delle (16_1), (16_2) si può pensare esteso ad un intervallo (α_1, β_1) di $(\gamma-\eta, \gamma+\eta)$, abbiamo quindi

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} F(\gamma', \gamma, n)d\gamma' = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{\cos[(n+1)(\gamma+\gamma')]}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\gamma+\gamma')} d\gamma'.$$

Se quando γ' varia in (α_1, β_1), $\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\gamma+\gamma')$ non è monotona, possiamo scomporre l'integrale nella somma di due integrali in

cui $\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\gamma+\gamma')$ si mantiene monotona e supposto per semplicità $\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\gamma+\gamma')$ monotona in (α_1, β_1) si ha per il secondo teorema della media $[a_1<\xi<a_2]$

$$\left|\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{\cos[(n+1)(\gamma+\gamma')]}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\gamma+\gamma')} d\gamma'\right| = \left|\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\gamma+\alpha_1)} \int_{\alpha_1}^{\xi} \cos[(n+1)(\gamma+\gamma')]d\gamma' + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\gamma+\beta_1)} \int_{\xi}^{\beta_1} \cos[(n+1)(\gamma+\gamma')]d\gamma'\right| <$$

$$< 4/(n+1)\delta,$$

e quindi $\lim_{n\to\infty} J_n(\gamma) = 0$ uniformemente rispetto a γ variabile in $(\varrho+\tau, \pi-\varrho-\tau)$.

Per il teorema 1 del § 11 si ha allora

$$\lim_{n\to\infty} \int_\varrho^{\pi-\varrho} F(\gamma', \gamma, n) \operatorname{sen}^{1/2}\gamma' f(\cos\gamma')d\gamma' =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta} \frac{\cos[(n+1)(\gamma+\gamma')]}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\gamma+\gamma')} \operatorname{sen}^{1/2}\gamma' f(\cos\gamma')d\gamma' = 0$$

e uniformemente rispetto a γ variabile in $(\varrho+\tau, \pi-\varrho-\tau)$.

b). Convergenza uniforme a zero di $B_n(\gamma)$, $C_n(\gamma)$ in $(\varrho+\tau, \pi-\varrho-\tau)$.

Se nell'espressione (13_2) di $B_n(\gamma)$ sostituiamo a $p_{n+1,1}(\gamma)$, $p_{n+1,1}(\gamma')$ le espressioni date dalla (11_1) otteniamo

$$B_n(\gamma) = B_n'(\gamma) + B_n''(\gamma), \tag{17}$$

con

$$B_n'(\gamma) = \frac{4}{\pi^2} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)\alpha_n\alpha_{n+1}} \times \tag{18$_1$}$$

$$\times \int_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta} \left[\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma - \frac{\pi}{4}\right] \cos\left[\left(n+\frac{5}{2}\right)\gamma' - \frac{3\pi}{4}\right]}{(2\operatorname{sen}\gamma)^{1/2}(2\operatorname{sen}\gamma')^{3/2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma' - \frac{\pi}{4}\right] \cos\left[\left(n+\frac{5}{2}\right)\gamma - \frac{3\pi}{4}\right]}{(2\operatorname{sen}\gamma')^{1/2}(2\operatorname{sen}\gamma)^{3/2}} \right] \frac{\operatorname{sen}\gamma' f(\cos\gamma')}{\cos\gamma' - \cos\gamma} d\gamma',$$

$$(18_2)\qquad B_n''(\gamma)=\frac{2}{\pi}\frac{n+1}{(2n+1)a_n}\int\limits_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta}\left[\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma-\frac{\pi}{4}\right]}{(2\,\mathrm{sen}\,\gamma)^{1/2}}\,p_{n+1,\,2}(\gamma')-\right.$$
$$\left.-\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma'-\frac{\pi}{4}\right]}{(2\,\mathrm{sen}\,\gamma')^{1/2}}\,p_{n+1,\,2}(\gamma)\right]\frac{\mathrm{sen}\,\gamma' f(\cos\gamma')}{\cos\gamma'-\cos\gamma}\,d\gamma'.$$

Per il fattore numerico che figura in $B_n'(\gamma)$ abbiamo

$$\frac{4}{\pi^2}\frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)a_n a_{n+1}}=$$
$$=\frac{4}{\pi^2}\frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}\,O(\sqrt{n})\,O(\sqrt{n})=O\left(\frac{1}{n+1}\right),$$

e si ha pure

$$\frac{1}{n+1}\,\frac{1}{\cos\gamma'-\cos\gamma}\,\frac{1}{(2\,\mathrm{sen}\,\gamma)^{3/2}(2\,\mathrm{sen}\,\gamma')^{3/2}}\left\{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma-\frac{\pi}{4}\right]\cos\left[\left(n+\frac{5}{2}\right)\gamma'-\right.\right.$$
$$\left.-\frac{3\pi}{4}\right]2\,\mathrm{sen}\,\gamma-\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma'-\frac{\pi}{4}\right]\cos\left[\left(n+\frac{5}{2}\right)\gamma-\frac{3\pi}{4}\right]2\,\mathrm{sen}\,\gamma'\right\}=$$
$$=\frac{1}{n+1}\,\frac{(2\,\mathrm{sen}\,\gamma)^{-3/2}(2\,\mathrm{sen}\,\gamma')^{-3/2}}{2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(\gamma-\gamma')\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(\gamma+\gamma')}\left\{\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(\gamma-\gamma')\cos[(n+2)(\gamma+\gamma')]-\right.$$
$$-\mathrm{sen}\,\frac{3}{2}(\gamma-\gamma')\cos[(n+1)(\gamma+\gamma')]+$$
$$+\mathrm{sen}\,(\gamma-\gamma')\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(\gamma+\gamma')\cos[(n+1)(\gamma-\gamma')]+$$
$$\left.+\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(\gamma+\gamma')[3\,\mathrm{sen}\,\gamma\,\mathrm{sen}\,\gamma'-\cos\gamma\cos\gamma'-1]\,\mathrm{sen}\,[(n+1)(\gamma-\gamma')]\right\}.$$

Quando si effettui la divisione dei primi tre termini in parentesi graffe per il divisore $\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(\gamma-\gamma')$ si vede subito che il loro contributo in B_n' per $n\to\infty$ è nullo e uniformemente rispetto a γ variabile in $(\varrho+\tau,\,\pi-\varrho-\tau)$, resta quindi da considerare il limite per $n\to\infty$ di:

$$\bar{B}_n'(\gamma)=\frac{1}{2^4\,\mathrm{sen}^{3/2}\,\gamma}\,\frac{1}{n+1}\int\limits_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta}\frac{\mathrm{sen}\,[(n+1)(\gamma-\gamma')]}{\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(\gamma-\gamma')}\,\frac{3\,\mathrm{sen}\,\gamma\,\mathrm{sen}\,\gamma'-\cos\gamma\cos\gamma'-1}{\mathrm{sen}^{1/2}\,\gamma'}\,f(\cos\gamma')\,d\gamma'.$$

Siccome

$$\varrho\leqslant\varrho+\tau-\eta\leqslant\gamma-\eta\leqslant\gamma'\leqslant\gamma+\eta\leqslant\pi-\varrho-\tau+\eta\leqslant\pi-\varrho$$

si ha $|\mathrm{sen}\,\gamma'|\geqslant\mathrm{sen}\,\varrho$; si ha pure

$$|3\,\mathrm{sen}\,\gamma\,\mathrm{sen}\,\gamma'-\cos\gamma\cos\gamma'-1|=|\cos(\gamma-\gamma')-2\cos(\gamma+\gamma')-1|\leqslant 4,$$

quind

$$\left|\frac{3\,\mathrm{sen}\,\gamma\,\mathrm{sen}\,\gamma'-\cos\gamma\cos\gamma'-1}{\mathrm{sen}^{1/2}\,\gamma'}\,f(\cos\gamma')\right|\leqslant\frac{4}{\mathrm{sen}^{1/2}\,\varrho}\,|f(\cos\gamma')|;$$

avendosi d'altra parte $|(\gamma-\gamma')/2|\leqslant\eta/2<\pi/2$ si ha

$$\left|\frac{\mathrm{sen}\,[(n+1)(\gamma-\gamma')]}{(n+1)\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(\gamma-\gamma')}\right|=\left|\frac{\mathrm{sen}\,(n+1)(\gamma-\gamma')}{(n+1)(\gamma-\gamma')}\,\frac{(\gamma-\gamma')/2}{\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(\gamma-\gamma')}\right|<\frac{\pi}{2}$$

e perciò, qualunque sia il numero positivo $\omega<\eta$ si ha

$$|\bar{B}_n'(\gamma)|\leqslant\frac{\pi}{2^3\,\mathrm{sen}^2\,\varrho}\int\limits_{\gamma-\omega}^{\gamma+\omega}|f(\cos\gamma')|\,d\gamma'+$$
$$+\frac{1}{n+1}\,\frac{1}{2^2\,\mathrm{sen}^2\,\varrho\,\mathrm{sen}\,\frac{\omega}{2}}\left[\int\limits_{\gamma-\eta}^{\gamma-\omega}|f(\cos\gamma')|\,d\gamma'+\int\limits_{\gamma+\omega}^{\gamma+\eta}|f(\cos\gamma')|\,d\gamma'\right],$$

e per la sommabilità di $f(\cos\gamma')$ in $(\varrho,\,\pi-\varrho)$ segue $\lim\limits_{n\to\infty}\bar{B}_n'(\cos\gamma)=0$, uniformemente per γ in $(\varrho+\tau,\,\pi-\varrho-\tau)$.

Studiamo ora il $\lim\limits_{n\to\infty}B_n''(\gamma)$; per il suo coefficiente numerico abbiamo

$$\frac{2}{\pi}\frac{n+1}{(2n+1)a_n}=\frac{2}{\pi}\frac{n+1}{2n+1}\,O(n^{1/2})=O(n^{1/2}).$$

Nella funzione integranda figura come fattore

$$\frac{1}{\cos\gamma'-\cos\gamma}\left[\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma-\frac{\pi}{4}\right]p_{n+1,2}(\gamma')}{(2\,\mathrm{sen}\,\gamma)^{1/2}}-\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma'-\frac{\pi}{4}\right]p_{n+1,2}(\gamma)}{(2\,\mathrm{sen}\,\gamma')^{1/2}}\right]$$

e questa espressione applicando il teorema della media di CAUCHY diventa

$$-\frac{1}{\mathrm{sen}\,\xi}\left[\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma-\frac{\pi}{4}\right]}{(2\,\mathrm{sen}\,\gamma)^{1/2}}\,p'_{n+1,\,2}(\xi)-\frac{d}{d\xi}\,\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi-\frac{\pi}{4}\right]}{(2\,\mathrm{sen}\,\xi)^{1/2}}\,p_{n+1,\,2}(\gamma)\right]$$

dove $\gamma-\eta<\xi<\gamma+\eta$.

Ma si ha $p'_{n+1,2}(\xi)=O(n^{-3/2})$, $p_{n+1,2}(\gamma)=O(n^{-5/2})$, e perciò

$$\frac{2}{\pi}\frac{n+1}{(2n+1)a_n}\frac{1}{\cos\gamma'-\cos\gamma}\left[\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma-\frac{\pi}{4}\right]}{(2\,\mathrm{sen}\,\gamma)^{1/2}}\,p_{n+1,2}(\gamma')-\right.$$
$$\left.-\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma'-\frac{\pi}{4}\right]}{(2\,\mathrm{sen}\,\gamma')^{1/2}}\,p_{n+1,2}(\gamma)\right]=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

uniformemente per γ' in $(\varrho,\pi-\varrho)$ e γ in $(\varrho+\tau,\pi-\varrho-\tau)$, e allora tenuto conto della sommabilità di $f(\cos\gamma')\,\mathrm{sen}\,\gamma'$ in $(\varrho,\pi-\varrho)$ ne viene $\lim\limits_{n\to\infty} B_n''(\gamma)=0$ uniformemente per γ in $(\varrho+\tau,\pi-\varrho-\tau)$.

Conclusioni analoghe valgono per $C_n(\gamma)$.

c). Convergenza uniforme a zero di $D_n(\gamma)$ in $(\varrho+\tau,\pi-\varrho-\tau)$.

Dal teorema di CAUCHY ricordato in *b*) si ha

$$\frac{1}{2}\frac{n+1}{\cos\gamma'-\cos\gamma}\left[p_{n,1}(\gamma)p_{n+1,1}(\gamma')-p_{n+1,1}(\gamma)p_{n,1}(\gamma')\right]=$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{n+1}{\mathrm{sen}\,\xi}\left[p_{n,1}(\gamma)p'_{n+1,1}(\xi)-p_{n+1,1}(\gamma)p'_{n,1}(\xi)\right]$$

con $\gamma-\eta<\xi<\gamma+\eta$, ma è $p_{n,1}(\gamma)=O(n^{-3/2})$, $p'_{n,1}(\gamma)=O(n^{-1/2})$, si ha quindi

$$\frac{1}{2}\frac{n+1}{\cos\gamma'-\cos\gamma}\left[p_{n,1}(\gamma)p_{n+1,1}(\gamma')-p_{n+1,1}(\gamma)p_{n,1}(\gamma')\right]=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

uniformemente per γ' in $(\varrho,\pi-\varrho)$ e γ in $(\varrho+\tau,\pi-\varrho-\tau)$, e perciò $\lim\limits_{n\to\infty} D_n(\gamma)=0$ uniformemente per γ in $(\varrho+\tau,\pi-\varrho-\tau)$.

6. - Teorema di Hobson.

a). Da quanto abbiamo detto nei n.[i] 1. a 5. segue che se γ appartiene all'intervallo $(\varrho+\tau,\pi-\varrho-\tau)$, comunque si fissi il numero positivo σ è possibile determinare un intero positivo n_σ tale che per $n>n_\sigma$ risulti

$$(19)\qquad |S_n(\cos\gamma)-U_n(\cos\gamma)|=\Big|S_n(\cos\gamma)-$$
$$-\frac{2}{\pi^2}\frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)a_na_{n+1}}\frac{1}{(\mathrm{sen}\,\gamma)^{1/2}}\int_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta}\frac{\mathrm{sen}\,[(n+1)(\gamma-\gamma')]}{\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(\gamma-\gamma')}\,\mathrm{sen}^{1/2}\,\gamma' f(\cos\gamma')d\gamma'\Big|<\sigma$$

dove η è costante positiva non superiore a τ e indipendente da σ, e la (19) vale uniformemente per γ variabile in $(\varrho+\tau,\pi-\varrho-\tau)$.

Ma se teniamo conto della (15) e osserviamo anche che l'esistenza di

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta}\frac{\mathrm{sen}\,[(n+1)(\gamma-\gamma')]}{\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(\gamma-\gamma')}\,\mathrm{sen}^{1/2}\,\gamma' f(\cos\gamma')d\gamma'$$

esprime la condizione necessaria e sufficiente perchè la serie di FOURIER di $f(\cos\gamma)\,\mathrm{sen}^{1/2}\,\gamma$ converga nel punto γ [1], abbiamo che *se $f(x)(1-x^2)^{-1/4}$ è sommabile in $(-1,1)$, condizione necessaria e sufficiente perchè la serie di polinomi di Legendre di $f(x)$ converga in un punto x interno all'intervallo $(-1,1)$ è che la serie di Fourier di $f(\cos\gamma)\,\mathrm{sen}^{1/2}\gamma$ risulti convergente nel punto* $\gamma=\mathrm{arc}\cos x$, $[0<\gamma<\pi]$.

b). Osserviamo che

$$f(\cos\gamma_1)\,\mathrm{sen}^{1/2}\,\gamma_1-f(\cos\gamma_2)\,\mathrm{sen}^{1/2}\,\gamma_2=$$
$$=\mathrm{sen}^{1/2}\,\gamma_1[f(\cos\gamma_1)-f(\cos\gamma_2)]+f(\cos\gamma_2)[\mathrm{sen}^{1/2}\,\gamma_1-\mathrm{sen}^{1/2}\,\gamma_2]=$$
$$=(1-x_1^2)^{1/4}[f(x_1)-f(x_2)]+f(x_2)[(1-x_1^2)^{1/4}-(1-x_2^2)^{1/4}]$$

e perciò se $f(x)$ è a variazione limitata in un intervallo di $(-1,1)$, $f(\cos\gamma)\,\mathrm{sen}^{1/2}\,\gamma$ è a variazione limitata nel corrispondente intervallo di $(0,\pi)$.

Così pure se in un punto x_1 interno a $(-1,1)$ $f(x)$ soddisfa ad una condizione di LIPSCHITZ di ordine α,

$$0<\alpha\leqslant 1,\qquad |f(x_1)-f(x_2)|<L|x_1-x_2|^\alpha,$$

tenuto conto che la funzione $(1-x^2)^{1/4}$ ha derivata finita in un intervallo interno a $(-1,1)$ ed è perciò lipschitziana del primo ordine, ne viene che anche $f(\cos\gamma)\,\mathrm{sen}^{1/2}\,\gamma$ soddisfa nel punto γ_1 corrispondente ad x_1 ad una condizione di LIPSCHITZ di ordine $\beta>0$.

Ricordando allora i resultati del Cap. II abbiamo così dimostrato il teorema di HOBSON:

Se $f(x)/(1-x^2)^{1/4}$ è sommabile nell'intervallo $(-1,1)$, condizione necessaria e sufficiente perchè la sua serie di polinomi di Legendre

$$(20)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)P_n(x)\int_{-1}^{1}f(x')P_n(x')dx'$$

---

[1] Cfr. Cap. II, § 4, n.° 4.

sia convergente in un punto x interno a $(-1, 1)$, è che la serie (trigonometrica) di Fourier di $f(\cos\gamma)\operatorname{sen}^{1/2}\gamma$ sia convergente nel punto $\gamma = \operatorname{arc}\cos x$, $0 < \gamma < \pi$, e quando ciò avvenga se la somma della prima serie è S, la somma della seconda serie è $S\operatorname{sen}^{1/2}\gamma$.

In particolare:

1). *La serie (20) converge verso $[f(x+)+f(x-)]/2$ se in un intorno di x, $f(x)$ è a variazione limitata.*

2). *La serie (20) converge verso $f(x)$, se in quel punto x la $f(x)$ soddisfa una condizione di Lipschitz di ordine $\alpha > 0$.*

Si ha ancora, sempre nell'ipotesi che $f(x)/(1-x^2)^{1/4}$ sia sommabile in $(-1, 1)$.

Se la serie (20) è uniformemente convergente in un intervallo I interno a $(-1, 1)$ la serie di Fourier di $f(\cos\gamma)\operatorname{sen}^{1/2}\gamma$ è uniformemente convergente nell'intervallo I' di $(0, \pi)$ corrispondente ad I nella trasformazione $x = \cos\gamma$, e inversamente.

In particolare se $f(x)/(1-x^2)^{1/4}$ è sommabile in $(-1, 1)$ e se $f(x)$ è continua e a variazione limitata in un intervallo I_1 di $(-1, 1)$, la serie (20) è uniformemente convergente verso $f(x)$ in qualunque intervallo interno ad I_1.

7. - Occupandoci infine della convergenza delle serie

$$(1)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_n^{0\ldots\infty} a_n P_n(x), \\ \displaystyle a_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x')P_n(x')dx' \end{cases}$$

nei punti -1 e $+1$ vogliamo dimostrare che *se $f(x)$ è a variazione limitata nell'intervallo $(-1, 1)$, la sua serie di polinomi di Legendre converge nei punti -1 e $+1$ rispettivamente verso $f(-1+)$, $f(1-)$.*

Dalla formula (2) per la somma $S_n(1)$ dei primi n termini della (1) si ha

$$(21)\qquad S_n(1) = \frac{1}{2}(n+1)\int_{-1}^{1}\frac{P_{n+1}(x') - P_n(x')}{x'-1}f(x')dx' = I_{1,n} + I_{2,n} + I_{3,n}$$

con

$$I_{1,n} = \frac{1}{2}(n+1)\int_{-1}^{-1+\varepsilon}\frac{P_n(x') - P_{n+1}(x')}{1-x'}f(x')dx',$$

$$I_{2,n} = \frac{1}{2}(n+1)\int_{1-\varepsilon}^{1}\frac{P_n(x') - P_{n+1}(x')}{1-x'}f(x')dx',$$

$$I_{3,n} = \frac{1}{2}(n+1)\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{P_n(x') - P_{n+1}(x')}{1-x'}f(x')dx'.$$

Effettuiamo in $I_{3,n}$ la sostituzione $x' = \cos\gamma'$, $0 \leqslant \gamma' \leqslant \pi$; se poniamo $1-\varepsilon = \cos\varrho$, e teniamo conto della (10) e che

$$\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma' - \frac{\pi}{4}\right] - \cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\gamma' - \frac{\pi}{4}\right] = 2\operatorname{sen}\left[(n+1)\gamma' - \frac{\pi}{4}\right]\operatorname{sen}\frac{1}{2}\gamma'$$

otteniamo:

$$I_{3,n} = \frac{2}{\pi}\frac{n+1}{2n+1}\frac{1}{a_n}\int_{\varrho}^{\pi-\varrho}\operatorname{sen}\left[(n+1)\gamma' - \frac{\pi}{4}\right]\operatorname{ctg}^{1/2}\left(\frac{1}{2}\gamma'\right)f(\cos\gamma')d\gamma' +$$

$$+\frac{n+1}{\pi}\left[\frac{1}{(2n+1)a_n} - \frac{1}{(2n+3)a_{n+1}}\right]\int_{\varrho}^{\pi-\varrho}\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\gamma' - \frac{\pi}{4}\right]\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma'}{\left(\operatorname{sen}\frac{1}{2}\gamma'\right)^{3/2}}f(\cos\gamma')d\gamma'$$

$$+\frac{1}{2}(n+1)\int_{\varrho}^{\pi-\varrho}[p_{n,1}(\gamma') - p_{n+1,1}(\gamma')]\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\gamma' f(\cos\gamma')d\gamma'.$$

Poichè

$$\frac{n+1}{\pi}\left[\frac{1}{(2n+1)a_n} - \frac{1}{(2n+3)a_{n+1}}\right] = O(n^{-1/2});$$

$$\frac{1}{2}(n+1)[p_{n,1}(\gamma') - p_{n+1,1}(\gamma')] = O(n^{-1/2})$$

per γ' in $(\varrho, \pi-\varrho)$, il secondo e il terzo termine di $I_{3,n}$ tendono a zero per $n \to \infty$; si ha poi $\frac{2}{\pi}\frac{n+1}{2n+1}\frac{1}{a_n} = (O\sqrt{n})$, di guisa che posto $F(\gamma') = \operatorname{ctg}^{1/2}\left(\frac{1}{2}\gamma'\right)f(\cos\gamma')$ basterà occuparci di studiare il limite per $n \to \infty$ di

$$\sqrt{n}\int_{\varrho}^{\pi-\varrho}\operatorname{sen}\left[(n+1)\gamma' - \frac{\pi}{4}\right]F(\gamma')d\gamma'.$$

Noi abbiamo supposto $f(x)$ a variazione limitata in $(-1, 1)$, $F(\gamma')$ risulta quindi a variazione limitata in $(\varrho, \pi-\varrho)$, avremo perciò

$F(\gamma')=F_1(\gamma')-F_2(\gamma')$ con $F_1(\gamma')$, $F_2(\gamma')$ monotone in $(\varrho, \pi-\varrho)$. Abbiamo

$$\sqrt{n}\int_{\varrho}^{\pi-\varrho} \operatorname{sen}\left[(n+1)\gamma'-\frac{\pi}{4}\right] F_1(\gamma')d\gamma'=$$
$$=\sqrt{n}\left[F_1(\varrho)\int_{\varrho}^{\xi} \operatorname{sen}\left[(n+1)\gamma'-\frac{\pi}{4}\right]d\gamma'+F_1(\pi-\varrho)\int_{\xi}^{\pi-\varrho} \operatorname{sen}\left[(n+1)\gamma'-\frac{\pi}{4}\right]d\gamma'\right]$$

con $\varrho<\xi<\pi-\varrho$; ne viene che l'integrale considerato è in valore assoluto minore di $2\sqrt{n}[|F_1(\varrho)|+|F_1(\pi-\varrho)|]/(n+1)$, ed esso tende a zero quando $n\to\infty$. La stessa conclusione resta sostituendo a $F_1(\gamma')$, $F_2(\gamma')$, quindi $\lim\limits_{n\to\infty} I_{3,n}=0$, e perciò fissati i numeri positivi ε, σ, $(0<\varepsilon<1)$ si può determinare un intero positivo n_1 tale che per $n>n_1$ risulti

$$(22) \qquad |I_{3,n}|<\frac{\sigma}{5} \quad \text{per } n>n_1.$$

Consideriamo ora gli integrali $I_{1,n}$, $I_{2,n}$. Ricordiamo che [§ 5, (18')]

$$(n+1)\frac{P_n(x')-P_{n+1}(x')}{1-x'}=\frac{dP_n(x')}{dx'}+\frac{dP_{n+1}(x')}{dx'},$$

abbiamo perciò

$$I_{1,n}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{-1+\varepsilon}\left[\frac{dP_n(x')}{dx'}+\frac{dP_{n+1}(x')}{dx'}\right]f(x')dx';$$
$$I_{2,n}=\frac{1}{2}\int_{1-\varepsilon}^{1}\left[\frac{dP_n(x')}{dx'}+\frac{dP_{n+1}(x')}{dx'}\right]f(x')dx',$$

e se supponiamo per semplicità che $f(x')$ sia monotona in $(-1,-1+\varepsilon)$, $(1-\varepsilon,1)$ [in caso contrario sostituiremo ad $f(x)$ la differenza di due si fatte funzioni] ed osserviamo che in $(-1,-1+\varepsilon)$ $f(x')$ è compresa tra $f(-1+)$ e $f(-1+\varepsilon)$, e in $(1-\varepsilon,1)$ tra $f(1-\varepsilon)$ e $f(1-)$ abbiamo

$$\begin{aligned}2[I_{1,n}+I_{2,n}]&=f(-1+)[P_n(-1+\xi_1)+P_{n+1}(-1+\xi_1)]+\\&+f(-1+\varepsilon)[P_n(-1+\varepsilon)+P_{n+1}(-1+\varepsilon)-P_n(-1+\xi_1)-P_{n+1}(-1+\xi_1)]+\\&+f(1-\varepsilon)[P_n(1-\xi_2)+P_{n+1}(1-\xi_2)-P_n(1-\varepsilon)-P_{n+1}(1-\varepsilon)]+\\&+2f(1-)-f(1-)[P_n(1-\xi_2)+P_{n+1}(1-\xi_2)],\end{aligned}$$

ovvero

$$(23) \quad \begin{aligned}I_{1,n}+I_{2,n}&=f(1-)+\frac{1}{2}[f(-1+)-f(-1+\varepsilon)][P_n(-1+\xi_1)+\\&+P_{n+1}(-1+\xi_1)]+\frac{1}{2}f(-1+\varepsilon)[P_n(-1+\varepsilon)+P_{n+1}(-1+\varepsilon)]+\\&+\frac{1}{2}[f(1-\varepsilon)-f(1-)][P_n(1-\xi_2)+\\&+P_{n+1}(1-\xi_2)]-\frac{1}{2}f(1-\varepsilon)[P_n(1-\varepsilon)+P_{n+1}(1-\varepsilon)]\end{aligned}$$

con $-1<\xi_1<-1+\varepsilon$; $1-\varepsilon<\xi_2<1$.

Fissato σ, si determini ε in modo che

$$|f(-1+)-f(-1+\varepsilon)|<\sigma/5, \qquad |f(1-\varepsilon)-f(1-)|<\sigma/5$$

e supposto $|f(x)|<L$ in $(-1,1)$, e preso ε come abbiamo ora dichiarato si determini l'intero positivo n_2 in modo che per $n>n_2$ sia

$$|P_n(1-\varepsilon)|<\sigma/5L, \qquad [|P_n(-1+\varepsilon)|<\sigma/5L] \quad \text{per } n>n_2,$$

allora se n_0 è il maggiore dei due numeri interi n_1, n_2 dalle (21), (22) e (23) risulta che per $n>n_0$ è

$$|S_n(1)-f(1-)|<\sigma \quad \text{per } n>n_0$$

e il teorema è dimostrato.

Analogo ragionamento può ripetersi nel punto -1.

8. - Per illustrare le cose dette diamo un esempio.

Si voglia sviluppare in serie di polinomi di LEGENDRE la funzione $f(x)$ così definita.

$$f(0)=0; \quad f(x)=1 \quad \text{per } 0<x\leq 1; \quad f(x)=-1 \quad \text{per } -1\leq x<0.$$

La $f(x)$ è dispari (e a variazione limitata), perciò i coefficienti

$$a_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx$$

con n pari sono nulli. Per $n=2m+1$ si ha

$$a_{2m+1}=\frac{4m+3}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_{2m+1}(x)dx=(4m+3)\int_{0}^{1} P_{2m+1}(x)dx;$$

ma è [§ 4, (12)]

$$(n+1)\int_0^1 P_n(x)dx = \int_0^1 P'_{n+1}(x)dx - \int_0^1 xP_n'(x)dx =$$
$$= 1 - P_{n+1}(0) - [xP_n(x)]_0^1 + \int_0^1 P_n(x)dx$$

quindi per $n=2m+1$

$$\int_0^1 P_{2m+1}(x)dx = -\frac{P_{2m+2}(0)}{2m+1} = -\frac{1}{2m+1}\binom{-\frac{1}{2}}{m+1}$$

e ne viene

$$a_{2m+1} = -\frac{4m+3}{2m+1}\binom{-\frac{1}{2}}{m+1} = (-1)^m \frac{4m+3}{m+1}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2m-1)}{2^{m+1}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot m},$$

e perciò per $0<x\leq 1$

$$1 = -\sum_{m}^{0\ldots\infty} \frac{4m+3}{2m+1}\binom{-\frac{1}{2}}{m+1} P_{2m+1}(x).$$

La serie è uniformemente convergente in qualunque intervallo interno a $(0,1)$ (¹).

§ 13. - La serie di polinomi di Legendre per un intervallo finito [Picone, [45, a)] p. 265].

Nelle applicazioni occorre talvolta, assegnata una funzione $f(t)$ nell'intervallo finito (a, b), effettuarne lo sviluppo in serie di polinomi ortogonali in questo intervallo. Osserviamo che la sostituzione

$$(1) \qquad x = \frac{2}{b-a}\left[t - \frac{b+a}{2}\right], \qquad a<b, \qquad \left[t = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}\right]$$

muta l'intervallo (a, b) dell'asse t nell'intervallo $(-1, 1)$ dell'asse x;

(¹) Il lettore desideroso di conoscere l'applicazione dei procedimenti di sommazione (C, k) e di Poisson alle serie di polinomi di Legendre, consulti il trattato di E. W. Hobson [25, b)]: *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*, (Cambridge, 1931), pp. 335-359.

basterà quindi considerare lo sviluppo in serie di polinomi di Legendre di

$$f\left[\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}\right] \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x),$$

$$a_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f\left[\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}\right]P_n(x)dx$$

e in questo sviluppo effettuare la sostituzione (1).

Si evitano le sostituzioni con le seguenti considerazioni.

Se in

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n(x+1)^n(x-1)^n}{dx^n} \qquad [§ 1, (8)]$$

effettuiamo la sostituzione (1), posto

$$X_n(t) = P_n\left[\frac{2}{b-a}\left(t - \frac{b+a}{2}\right)\right]$$

otteniamo

$$(2) \qquad \boxed{X_n(t) = \frac{1}{n!\,(b-a)^n}\,\frac{d^n(t-a)^n(t-b)^n}{dt^n}}$$

e le relazioni (23_1), (23_2) del § 7 diventano

$$(3_1) \qquad \int_a^b X_n(t)X_m(t)dt = 0 \quad \text{per } n \neq m;$$

$$(3_2) \qquad \int_a^b X_n^2(t)dt = \frac{b-a}{2n+1}.$$

Si ha

$$(4_1) \qquad X_0 = 1, \qquad X_1(t) = \frac{2t}{b-a} - \frac{b+a}{b-a}$$

e la relazione ricorrente (13) del § 4 diventa

$$(4_2) \qquad (n+1)X_{n+1}(t) = (2n+1)X_1(t)X_n(t) - nX_{n-1}(t).$$

Diremo i polinomi $X_n(t)$ i *polinomi di Legendre* relativi all'intervallo (a, b).

Abbiamo allora che se $f(t)$ è sommabile in (a, b) e consideriamo il suo sviluppo in serie di polinomi di LEGENDRE relativo all'intervallo (a, b)

$$(5) \qquad f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n X_n(t), \qquad a_n = \frac{2n+1}{b-a} \int_a^b f(t) X_n(t) dt,$$

valgono per la serie ottenuta i criteri enunciati nei §§ 9 e 12; è quasi superfluo avvertire che nel teorema del § 12 si dovrà supporre $f(t)/\sqrt[4]{(t-a)(b-t)}$ sommabile in (a, b).

CAPITOLO IV.

Sviluppi in serie di Tchebychef-Laguerre e di Tchebychef-Hermite.

§ 1. - I polinomi di Tchebychef-Laguerre.

1. - Si consideri la funzione $(1-z)^{-(\alpha+1)}e^{-\frac{xz}{1-z}}$, e supposto $|z|<1$ si voglia trovare il suo sviluppo in serie di potenze di z. Abbiamo

$$(1-z)^{-(\alpha+1)}e^{-\frac{xz}{1-z}}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k!}\,\frac{z^k}{(1-z)^{\alpha+k+1}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k!}\left[\sum_{m}^{0\dots\infty}(-1)^m\binom{-\alpha-k-1}{m}z^{m+k}\right].$$

La serie doppia così ottenuta è assolutamente convergente, è lecito allora associare i termini che contengono la stessa potenza z^n e così otteniamo

$$(1)\qquad \boxed{(1-z)^{-(\alpha+1)}e^{-\frac{xz}{1-z}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}z^nL_n^{(\alpha)}(x)}$$

con

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\sum_{m}^{0\dots n}(-1)^{n-m}\frac{1}{(n-m)!}(-1)^m\binom{-\alpha-n+m-1}{m}x^{n-m},$$

ovvero

$$(2)\qquad (-1)^nL_n^{(\alpha)}(x)=\frac{x^n}{n!}+\sum_{m}^{1\dots n}(-1)^m\frac{(\alpha+n)(\alpha+n-1)\dots(\alpha+n-m+1)}{(n-m)!\,m!}x^{n-m},$$

$$(3_1)\qquad \boxed{(-1)^nL_n^{(\alpha)}(x)=\sum_{m}^{0\dots n}(-1)^m\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{m!\,(n-m)!\,\Gamma(\alpha+n-m+1)}x^{n-m}}\qquad (^1)$$

$$(n=1,2,3,\dots)$$

e per simmetria poniamo

$$(3_2)\qquad L_0^{(\alpha)}(x)=1.$$

a). Per $x=0$ si ha

$$(3_3)\qquad L_n^{(\alpha)}(0)=\frac{(\alpha+n)(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\dots(\alpha+1)}{n!}$$

b). Se $\alpha=0$ per i polinomi $L_n^{(0)}(x)$ si usa la notazione $L_n(x)$; abbiamo quindi

$$L_n(x)=\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n-m}\frac{n!}{m!\,[(n-m)!]^2}x^{n-m}$$

$$(4)\qquad \boxed{L_n(x)=\sum_{k}^{0\dots n}(-1)^k\frac{1}{k!}\binom{n}{k}x^k}\qquad (n=1,2,\dots).$$

c). I polinomi $L_n^{(\alpha)}(x)$ chiamansi polinomi di TCHEBYCHEF [[59], anno 1859] LAGUERRE [[33], anno 1879]; essi trovansi anche in un manoscritto inedito di ABEL [[1]]. Noi ci serviremo di questa classe di polinomi per lo sviluppo di una funzione asse-

(1) $\Gamma(\alpha)$ indica la funzione *Gamma euleriana di seconda specie* definita per $\alpha>0$ dalla relazione

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

Si ha subito $\Gamma(1)=1$; abbiamo pure

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha}e^{-x}dx=[-x^{\alpha}e^{-x}]_0^{+\infty}+\alpha\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\alpha\Gamma(\alpha)$$

gnata in serie di polinomi ortogonali in un intervallo con un estremo infinito.

d). Diamo qui, per comodità del lettore, l'espressione dei primi polinomi $L_n^{(a)}$. Si ha

$$L_0^{(a)}(x) = 1$$

$$-L_1^{(a)}(x) = \frac{x}{1!} - \frac{a+1}{1!}$$

$$L_2^{(a)}(x) = \frac{x^2}{2!} - \frac{a+2}{1!\,1!}x + \frac{(a+2)(a+1)}{2!}$$

$$-L_3^{(a)}(x) = \frac{x^3}{3!} - \frac{a+3}{2!\,1!}x^2 + \frac{(a+3)(a+2)}{1!\,2!}x - \frac{(a+3)(a+2)(a+1)}{3!}$$

$$L_4^{(a)}(x) = \frac{x^4}{4!} - \frac{a+4}{3!\,1!}x^3 + \frac{(a+4)(a+3)}{2!\,2!}x^2 - \\ - \frac{(a+4)(a+3)(a+2)}{1!\,3!}x - \frac{(a+4)(a+3)(a+2)(a+1)}{4!}.$$

2. - Dalla (3_1) si ha

$$x^a e^{-x} L_n^{(a)}(x) = \frac{1}{n!}\sum_m^{0\dots n}(-1)^{n-m}\frac{n!\,\Gamma(a+n+1)}{m!\,(n-m)!\,\Gamma(a+n-m+1)}x^{n+a-m}e^{-x} =$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_m^{0\dots n}\binom{n}{m}(a+n)\dots(a+n-m+1)x^{n+a-m}[(-1)^{n-m}e^{-x}] =$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_m^{0\dots n}\binom{n}{m}\frac{d^m}{dx^m}x^{n+a}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}e^{-x} = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}[x^{n+a}e^{-x}]$$

quindi

(5) $$\boxed{L_n^{(a)}(x) = \frac{x^{-a}e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}[x^{n+a}e^{-x}]} \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

---

cioè la formula di riduzione $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ e da questa

$$\Gamma(a+n+1) = (a+n)\Gamma(a+n) = (a+n)(a+n-1)\Gamma(a+n-1) = \\ = (a+n)\dots(a+n-m+1)\Gamma(a+n-m+1),$$

e in particolare per n intero non negativo $\Gamma(n+1) = n!$.

Abbiamo pure

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{-1/2}e^{-x}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}.$$

3. - Posto

(6) $$\varphi(x, z) = (1-z)^{-(a+1)}e^{-\frac{xz}{1-z}}$$

si ha

$$(1-z)^2\frac{\partial\varphi}{\partial z} = [(a+1)(1-z) - x]\varphi$$

e per la (1)

$$(1-z)^2\sum_n^{1\dots\infty} nz^{n-1}L_n^{(a)}(x) = [(a+1-x) - (a+1)z]\sum_n^{0\dots\infty} z^n L_n^{(a)}(x)$$

dalla quale effettuando i prodotti e identificando i coefficienti di z^n nei due membri

(7) $$\boxed{(n+1)L_{n+1}^{(a)}(x) - [2n+a+1-x]L_n^{(a)}(x) + (n+a)L_{n-1}^{(a)}(x) = 0}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

con la convenzione

(7') $$\boxed{L_{-1}^{(a)}(x) = 0}.$$

4. - Dalla (7) moltiplicando per $L_n^{(a)}(y)/\Gamma(a+1)\binom{n+a}{n}$ si ha

$$(2n+a+1-x)\frac{L_n^{(a)}(x)L_n^{(a)}(y)}{\Gamma(a+1)\binom{n+a}{n}} =$$

$$= \frac{n+1}{\Gamma(a+1)\binom{n+a}{n}}L_{n+1}^{(a)}(x)L_n^{(a)}(y) + \frac{n+a}{\Gamma(a+1)\binom{n+a}{n}}L_{n-1}^{(a)}(x)L_n^{(a)}(y) = 0;$$

cambiando x con y e sottraendo, e tenuto conto che

$$(n+1)/\Gamma(a+1)\binom{n+a}{n} = \Gamma(n+2)/\Gamma(n+a+1),$$

$$(n+a)/\Gamma(a+1)\binom{n+a}{n} = \Gamma(n+1)/\Gamma(n+a)$$

abbiamo

$$(y-x)\frac{L_n^{(a)}(x)L_n^{(a)}(y)}{\Gamma(a+1)\binom{n+a}{n}} = \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+a+1)}[L_{n+1}^{(a)}(x)L_n^{(a)}(y) - L_{n+1}^{(a)}(y)L_n^{(a)}(x)] + \\ + \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+a)}[L_{n-1}^{(a)}(x)L_n^{(a)}(y) - L_{n-1}^{(a)}(y)L_n^{(a)}(x)]$$

dalla quale facendo $n=0, 1, 2,\dots, n$ e sommando si ha

$$(8)\qquad \boxed{\sum_{k}^{0\dots n} \frac{L_k^{(\alpha)}(x)L_k^{(\alpha)}(y)}{\Gamma(\alpha+1)\binom{k+\alpha}{k}} = \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \frac{L_{n+1}^{(n)}(x)L_n^{(\alpha)}(y) - L_{n+1}^{(\alpha)}(y)L_n^{(\alpha)}(x)}{y-x}}\,.$$

5. - a). Si ha dalla (3_1)

$$(9)\qquad (-1)^n \frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{m}^{0\dots(n-1)} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{m!\,(n-m-1)!\,\Gamma(\alpha+n-m+1)} x^{n-m-1}$$

$$(-1)^{n-1} \frac{d}{dx} L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = \sum_{m}^{0\dots(n-2)} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+n)}{m!\,(n-m-2)!\,\Gamma(\alpha+n-m)} x^{n-m-2}$$

si ha pure

$$\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{m!\,(n-m-1)!\,\Gamma(\alpha+n-m+1)} - \frac{\Gamma(\alpha+n)}{(m-1)!\,(n-m-1)!\,\Gamma(\alpha+n-m+1)} = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{m!\,(n-m-1)!\,\Gamma(\alpha+n-m)}$$

e sommando le due relazioni precedenti si ottiene allora

$$(-1)^n \frac{d}{dx}\left[L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x)\right] = \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+n)}{m!\,(n-m-1)!\,\Gamma(\alpha+n-m)} x^{n-m-1}$$

cioè

$$(10)\qquad \boxed{L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = \frac{d}{dx}\left[L_{n-1}^{(\alpha)}(x) - L_n^{(\alpha)}(x)\right]} \qquad (n=0, 1, 2,\dots).$$

b). Dalla (9), osservando che il secondo membro rappresenta $(-1)^{n-1}L_{n-1}^{(\alpha+1)}$ si ha

$$(11)\qquad \boxed{\frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x) = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)} \qquad (n=0, 1, 2,\dots).$$

c). Derivando la (7) e tenuto conto che per la (10) si ha

$$L'_{n+1} = L_n' - L_n, \qquad L'_{n-1} = L_n' + L_{n-1}$$

otteniamo

$$(12)\qquad \boxed{x \frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x) = nL_n^{(\alpha)}(x) - (n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x)}\,.$$

d). Dalle (10) e (12) abbiamo

$$(n+\alpha)\frac{d}{dx}\left[L_{n-1}^{(\alpha)}(x) - L_n^{(\alpha)}(x)\right] = (n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = nL_n^{(\alpha)}(x) - x\frac{d}{dx}L_n^{(\alpha)}(x)$$

cioè

$$(13)\qquad (n+\alpha)\frac{d}{dx}L_{n-1}^{(\alpha)} = nL_n^{(\alpha)}(x) + (n+\alpha-x)\frac{d}{dx}L_n^{(\alpha)}(x),$$

ma derivando la (12) si ha

$$x\frac{d^2}{dx^2}L_n^{(\alpha)}(x) + \frac{d}{dx}L_n^{(\alpha)}(x) = n\frac{d}{dx}L_n^{(\alpha)}(x) - (n+\alpha)\frac{dL_{n-1}^{(\alpha)}}{dx}$$

e per la (13) otteniamo infine l'*equazione differenziale dei polinomi* $L_n^{(\alpha)}(x)$

$$(14_1)\qquad \boxed{x\frac{d^2L_n^{(\alpha)}(x)}{dx^2} + (\alpha-x+1)\frac{dL_n^{(\alpha)}(x)}{dx} + nL_n^{(\alpha)}(x) = 0} \qquad (n=0, 1, 2,\dots),$$

che può anche scriversi

$$(14_2)\qquad \boxed{\frac{d}{dx}\left[x^{\alpha+1}e^{-x}\frac{dL_n^{(\alpha)}(x)}{dx}\right] + ne^{-x}x^{\alpha}L_n^{(\alpha)}(x) = 0}\,.$$

6. - Vogliamo dimostrare la seguente relazione integrale di KOGBETLIANTZ [30, b], p. 156] tra i polinomi $L_n^{(\alpha)}(x)$, $L_n^{(\beta)}(x)$, quando sia $\alpha>\beta$:

$$(15)\qquad \boxed{L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta)} x^{-\alpha}\int_0^x (x-u)^{\alpha-\beta-1}u^{\beta}L_n^{(\beta)}(u)\,du}$$

per $\alpha>\beta$.

Infatti tenuto conto della (3_1), ed effettuando nell'integrale il cambiamento di variabile $u=xt$ si ha

$$\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta)} x^{-\alpha}\int_0^x (x-u)^{\alpha-\beta-1}u^{\beta}L_n^{(\beta)}(u)\,du =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n-m}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)x^{-\alpha}}{m!\,(n-m)!\,\Gamma(\beta+n-m+1)}\int_0^x (x-u)^{\alpha-\beta-1}u^{\beta+n-m}\,du =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)} \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)x^{n-m}}{m!\,(n-m)!\,\Gamma(\beta+n-m+1)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-\beta-1} t^{\beta+n-m} dt = \quad (^1)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)} \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{m!\,(n-m)!\,\Gamma(\beta+n-m+1)} \frac{\Gamma(\alpha-\beta)\Gamma(\beta+n-m+1)}{\Gamma(\alpha+n-m+1)} x^{n-m}$$

c. v. d.

7. - a). Vogliamo ora dimostrare l'ortogonalità dei polinomi $L_n^{(\alpha)}(x)$. Dalla (14_2) moltiplicando per $L_m^{(\alpha)}(x)$ si ha

$$L_m^{(\alpha)} \frac{d}{dx}\left[x^{\alpha+1}e^{-x}\frac{dL_n^{(\alpha)}}{dx}\right] + e^{-x}x^{\alpha} n L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) = 0,$$

(1) Qui applichiamo la proprietà della funzione *Bèta euleriana di prima specie*

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \qquad (a>0,\ b>0)$$

che si dimostra brevemente in questo modo.

Si ha

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{a-1}dx \int_0^{+\infty} e^{-y}y^{b-1}dy = 4\int_0^{+\infty} e^{-t^2}t^{2a-1}dt \int_0^{+\infty} e^{-u^2}u^{2b-1}du =$$

$$= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(t^2+u^2)}t^{2a-1}u^{2b-1}\,dtdu;$$

col cambiamento di coordinate cartesiane in coordinate polari $t = \varrho\cos\theta$, $u = \varrho \operatorname{sen}\theta$ otteniamo

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = 4\int_0^{+\infty} d\varrho \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\varrho^2}\varrho^{2a+2b-1}\cos^{2a-1}\theta \operatorname{sen}^{2b-1}\theta d\theta;$$

ma è

$$\Gamma(a+b) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{a+b-1}dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-\varrho^2}\varrho^{2a+2b-1}d\varrho$$

perciò

$$\Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2a-1}\theta \operatorname{sen}^{2b-1}\theta d\theta$$

che col cambiamento di variabile $\cos^2\theta = x$ diventa $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$.

e cambiando n con m e sottraendo

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\alpha+1}e^{-x}\left\{L_m^{(\alpha)}\frac{dL_n^{(\alpha)}}{dx} - L_n^{(\alpha)}\frac{dL_m^{(\alpha)}}{dx}\right\}\right] + e^{-x}x^{\alpha}(n-m)L_n^{(\alpha)}L_m^{(\alpha)} = 0,$$

e supposto $\alpha > -1$ e integrando tra 0 e $+\infty$ abbiamo

$$(n-m)\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha}L_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x)dx = 0,$$

e per $n \neq m$ otteniamo la relazione di ortogonalità cercata

$$(16_1) \qquad \boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha}L_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x)dx = 0} \quad (n \neq m,\ \alpha > -1).$$

b). Dimostriamo ora che

$$(16_2) \qquad \boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha}[L_n^{(\alpha)}(x)]^2dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots);\ \alpha > -1$$

relazione che ci permetterà subito di trovare il fattore di normalizzazione dei polinomi $L_n^{(\alpha)}(x)$.

Dalla (7) moltiplicando per $e^{-x}x^{\alpha}L_{n-1}^{(\alpha)}(x)dx$, integrando tra 0 e $+\infty$, e tenuto conto della (16_1) abbiamo

$$(17_1) \qquad \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha+1}L_n^{(\alpha)}L_{n-1}^{(\alpha)}dx + (n+\alpha)\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha}[L_{n-1}^{(\alpha)}(x)]^2dx = 0;$$

cambiando nella (7) n in $n-1$, moltiplicando per $e^{-x}x^{\alpha}L_n(x)dx$, integrando tra 0 e $+\infty$, e tenuto conto della (16_1) abbiamo

$$(17_2) \qquad \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha+1}L_n^{(\alpha)}L_{n-1}^{(\alpha)}dx + n\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha}[L_n^{(\alpha)}(x)]^2dx = 0,$$

e confrontando le (17_1), (17_2) otteniamo la formula ricorrente

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha}[L_n^{(\alpha)}(x)]^2dx = \frac{n+\alpha}{n}\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha}[L_{n-1}^{(\alpha)}(x)]^2dx.$$

Facendo in questa $n=1, 2, \dots, n$, tenuto conto che

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}x^a[L_0^{(a)}(x)]^2 dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^a dx = \Gamma(a+1),$$

e moltiplicando le relazioni ottenute si trova

$$(18) \qquad \int_0^{+\infty} e^{-x}x^a[L_n^{(a)}(x)]^2 dx = \frac{(n+a)(n+a-1)\dots(a+1)\Gamma(a+1)}{n!}$$

cioè appunto la (16_2)

c). Dalle cose dette segue che *il sistema*

$$\left\{ \Gamma^{\frac{1}{2}}(n+1)\Gamma^{-\frac{1}{2}}(n+a+1)e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{a}{2}}L_n^{(a)}(x) \right\}$$

è ortogonale e normale in $(0, +\infty)$. Nel § 5 dimostreremo la chiusura di questo sistema in $(0, +\infty)$ rispetto alle funzioni di quadrato sommabile.

§ 2. - I polinomi di Tchebychef-Hermite e i polinomi ortogonali di Tchebychef.

1. I polinomi di Tchebychef-Hermite. - 2. Relazioni differenziali e relazioni ricorrenti tra i polinomi H_n. - 3. I coefficienti dei polinomi H_n. - 4. Formula sommatoria di Christoffel. - 5. Teorema di addizione per i polinomi H_n. - 6. Ortogonalità dei polinomi H_n. - 7. I polinomi ortogonali di Tchebychef.

1. - Si voglia determinare lo sviluppo in serie di potenze di z della funzione e^{-z^2-2xz}; abbiamo

$$e^{-z^2-2xz} = e^{x^2}e^{-(z+x)^2} = e^{x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{d^n e^{-(z+x)^2}}{dz^n}\right]_{z=0}\frac{z^n}{n!}$$

quindi

$$e^{-z^2-2xz} = e^{x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}\frac{z^n}{n!},$$

posto perciò

$$(1) \qquad \boxed{H_n(x) = e^{x^2}\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}}, \qquad n=1, 2, \dots; \qquad H_0(x)=1$$

si ha

$$(2) \qquad \psi(x, z) = e^{-z^2-2xz} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}z^n,$$

e la serie ottenuta è convergente qualunque siano x e z.

Dalla (1) si ha subito

$$(3) \qquad \boxed{H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)}$$

cioè i polinomi $H_n(x)$ sono pari o dispari secondochè l'indice n è pari o dispari.

I polinomi (1) chiamansi polinomi di Tchebychef [[59], anno 1859], Hermite [[24], anno 1864]; ma essi trovansi già nel Trattato di meccanica celeste [anno 1805] e nella Teoria analitica delle probabilità di Laplace [anno 1820] [35, *a*), *d*)]. Essi ci occorreranno nei §§ 7 e 8, nello studio degli sviluppi di una funzione assegnata in serie di polinomi ortogonali, nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$.

2. - *a*). Consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n'(x)}{n!}z^n$$

ottenuta dalla (2) derivando termine a termine rispetto ad x; tale serie sostituendo ai termini di $H_n'(x)$ e a z^n i loro moduli rappresenta lo sviluppo in serie di $2|z|e^{|z|^2+2|x||z|}$ ed essa, considerando i suoi termini come funzioni di x, è perciò uniformemente convergente, abbiamo quindi

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -2ze^{-z^2-2xz} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n'(x)}{n!}z^n$$

ovvero

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n'(x)}{n!}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left[-2\frac{H_n(x)}{n!}\right]z^{n+1}$$

da cui

$$(4) \qquad \boxed{H'_{n+1}(x) = -2(n+1)H_n(x)}.$$

b). Dalla (2) derivando rispetto a z si ha

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = -2(x+z)\psi,$$

quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{(n-1)!} z^{n-1} = -2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} z^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} z^{n+1}$$

da cui

$$H_{n+1}/n! + 2xH_n/n! + 2H_{n-1}/(n-1)! = 0$$

e perciò la formula ricorrente

$$\boxed{H_{n+1}(x) + 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0}\,. \tag{5}$$

c). Derivando la (5) e tenuto conto della (4) si ha

$$H'_{n+1} + 2H_n + 2xH_n' + 2nH'_{n-1} = 0$$
$$-2(n+1)H_n + 2H_n + 2xH_n' - H_n'' = 0$$

ed infine l'equazione differenziale dei polinomi H_n

$$\boxed{H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0}\,. \tag{6}$$

3. - Dalla (1) si ha

$$\left\{\begin{array}{llll} H_0 = 1, & H_1 = -2x, & H_2 = 4x^2 - 2, & H_3 = -8x^3 + 12x, \\ H_4 = 16x^4 - 48x^2 + 12, & & H_5 = -32x^5 + 160x^3 - 120x, & \end{array}\right. \tag{7}$$

e per determinare la forma esplicita dei coefficienti dei polinomi $H_n(x)$ procediamo in questo modo.

Posto

$$H_n(x) = \sum_k^{0\ldots n} a_k x^{n-k},$$

si ha

$$H_n' = \sum_k^{0\ldots(n-1)} (n-k)a_k x^{n-k-1}, \qquad H_n'' = \sum_k^{0\ldots(n-2)} (n-k)(n-k-1)a_k x^{n-k-2},$$

e perciò sostituendo nella (6)

$$\sum_{k=0}^{n-2} (n-k)(n-k-1)a_k x^{n-k-2} - \\ -2\sum_{k=0}^{n-1} (n-k)a_k x^{n-k} + 2\sum_{k=0}^{n} n a_k x^{n-k} = 0,$$

da cui

$$(n-k+2)(n-k+1)a_{k-2} - 2(n-k)a_k + 2na_k = 0$$

e

$$a_k = -(n-k+2)(n-k+1)a_{k-2}/2k. \tag{8}$$

Dalla (1) si ha $a_0 = (-1)^n 2^n$, e allora dalla (8) otteniamo

$$a_2 = \frac{n(n-1)}{1!}(-1)^{n-1}2^{n-2},$$
$$a_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(-1)^{n-2}2^{n-4},$$
$$a_6 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{3!}(-1)^{n-3}2^{n-6};\ldots;$$
$$a_{2k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-2k+1)}{k!}(-1)^{n-k}2^{n-2k},$$

e siccome per la (3) le a_k di indice dispari sono nulle, abbiamo

$$\boxed{H_n(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-2k+1)}{k!}(2x)^{n-2k}} \tag{9$_1$}$$

od anche

$$\boxed{H_n(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-2k+1)}(2x)^{n-2k}} \tag{9$_2$}$$

dove il simbolo $[n/2]$ indica il *massimo intero contenuto in* $n/2$.

Si osservi che per $x=0$ si ha [cfr. (4)]

$$\boxed{\begin{array}{ll} H_{2n}(0) = (-1)^n \dfrac{(2n)!}{n!}; & H_{2n+1}(0) = 0; \\ H'_{2n}(0) = 0; & H'_{2n+1}(0) = 2(-1)^{n+1}\dfrac{(2n)!}{n!}(2n+1) \end{array}}\,. \tag{10}$$

4. - Passiamo a stabilire la formula sommatoria di Christoffel che ci occorrerà nei §§ 7 e 8 a proposito degli sviluppi in serie di polinomi $H_n(x)$.

Dalla (5) moltiplicando per $H_n(y)/2^{n+1}n!$ si ottiene

$$\frac{H_{n+1}(x)H_n(y)}{2^{n+1}n!} + x\frac{H_n(x)H_n(y)}{2^n n!} + \frac{H_{n-1}(x)H_n(y)}{2^n(n-1)!} = 0$$

e cambiando x con y e sottraendo le relazioni ottenute si trova

$$(y-x)\,\frac{H_n(x)H_n(y)}{2^n n!}=$$
$$=\frac{H_{n+1}(x)H_n(y)-H_{n+1}(y)H_n(x)}{2^{n+1}n!}+\frac{H_{n-1}(x)H_n(y)-H_{n-1}(y)H_n(x)}{2^n(n-1)!}$$

e facendo in questa $n=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n$ e sommando si ha la formula cercata

$$\text{(11)}\qquad \boxed{\sum_k^{0\ldots n}\frac{H_k(x)H_k(y)}{2^k k!}=\frac{H_{n+1}(x)H_n(y)-H_{n+1}(y)H_n(x)}{2^{n+1}n!\,(y-x)}}\,.$$

5. - Una *formula di addizione* [di Runge [52]] per i polinomi $H_n(x)$ si ottiene facilmente come appresso. Avendosi

$$e^{-(z\sqrt{2})^2-2\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)(z\sqrt{2})}=e^{-z^2-2xz}e^{-z^2-2yz}$$

ne viene dalla (2)

$$\sum_n^{0\ldots\infty}\frac{2^{n/2}}{n!}H_n\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)z^n=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{H_r(x)}{r!}z^r\sum_{s=0}^{\infty}\frac{H_s(x)}{s!}z^s$$

e moltiplicando nel secondo membro le due serie al modo di Cauchy e identificando i coefficienti delle varie potenze di z si ha

$$\frac{1}{n!}\,2^{n/2}H_n\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)=\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!\,(n-r)!}\,H_r(x)H_{n-r}(y)$$

ossia

$$\text{(12)}\qquad \boxed{2^{n/2}H_n\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}H_r(x)H_{n-r}(y)}\,.$$

6. - *a*). Con il solito procedimento si trova la relazione di ortogonalità tra i polinomi $H_n(x)$. Moltiplicando la (6) per e^{-x^2} si ha

$$\frac{d}{dx}\,[e^{-x^2}H_n'(x)]+2ne^{-x^2}H_n(x)=0,$$
$$\frac{d}{dx}\,[e^{-x^2}H'_m(x)]+2me^{-x^2}H_m(x)=0$$

e moltiplicando la prima per H_m la seconda per H_n e sottraendo

$$\frac{d}{dx}\,[e^{-x^2}(H_mH_n'-H_nH'_m)]+2(n-m)e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)=0$$

e integrando tra $-\infty$ e $+\infty$

$$2(n-m)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)\,dx=0$$

dalla quale per $n\neq m$

$$\text{(13)}\qquad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)\,dx=0}\qquad (n\neq m).$$

b). Vogliamo ora dimostrare che

$$\text{(14)}\qquad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}H_n^2(x)\,dx=2^n n!\,\sqrt{\pi}}\qquad (n=0,\,1,\,2,\ldots).$$

Si ha infatti dalla (5) cambiando n in $n-1$,

$$H_n+2xH_{n-1}+2(n-1)H_{n-2}=0,$$

e moltiplicando per $e^{-x^2}H_n(x)dx$, integrando tra $-\infty$ e $+\infty$, e tenuto conto della (13)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}H_n^2(x)\,dx+2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}xH_n(x)H_{n-1}(x)\,dx=0\,;$$

si ha analogamente, moltiplicando la (5) per $H_{n-1}dx$ e integrando tra $-\infty$ e $+\infty$

$$2n\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}H_{n-1}^2(x)\,dx+2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}xH_n(x)H_{n-1}(x)\,dx=0$$

quindi la formula ricorrente

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}H_n^2(x)\,dx=2n\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}H_{n-1}^2(x)\,dx,$$

e facendo $n=1, 2, \ldots, n$, tenuto conto che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_0^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

e moltiplicando le relazioni ottenute, si ottiene appunto la (14).

c). Dalle cose dette segue che *il sistema* $\{e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)/\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}\}$ *è ortogonale e normale in* $(-\infty, +\infty)$; proveremo nel § 5 che esso è chiuso rispetto alle funzioni di quadrato sommabile.

7. - I polinomi $P_n(x)$ [di LEGENDRE], $L_n^{(\alpha)}(x)$, $H_n(x)$ sono particolari classi di polinomi che si presentano nel problema generale dell'approssimazione in media di una funzione $f(x)$ definita in un intervallo (a, b), finito o infinito, mediante una serie di polinomi ortogonali e la cui esistenza è assicurata dal seguente

TEOREMA. - Sia $p(x)$ una funzione [*peso*] definita in (a, b)

$$p(x) \geqslant 0, \quad \text{per } a \leqslant x \leqslant b$$

ed esistano e siano finiti gli integrali [i suoi *momenti*].

$$a_n = \int_a^b p(x) x^n dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

[degli *ordini* $n = 0, 1, 2, \ldots$] e sia $a_0 > 0$. Si può allora costruire in uno e in un sol modo una successione di polinomi [di TCHEBYCHEF] $\{\varphi_n(x)\}$ con $\varphi_n(x)$ polinomio di grado n in x, ortogonale e normale rispetto a $p(x)$ in (a, b), tale cioè che

$$\int_a^b p(x) \varphi_r(x) \varphi_s(x) dx = \varepsilon_{r,s}, \qquad \varepsilon_{r,s} = 0 \quad \text{per } r \neq s, \qquad \varepsilon_{r,r} = 1.$$

Dimostrazione. - Posto infatti

$$\Phi_n(x) = \varphi_n(x)/a_n = x^n - S_n x^{n-1} + \ldots,$$

abbiamo

$$\Phi_0(x) = 1; \qquad 1 = \int_a^b p(x) a_0^2 dx, \qquad 1/a_0^2 = a_0;$$

$$\Phi_1(x) = x - S_1; \qquad \int_a^b p(x)[x - S_1] dx = 0,$$

$$S_1 = a_1/a_0; \qquad 1/a_1^2 = \int_a^b p(x) \Phi_1^2(x) dx.$$

Per costruire i successivi polinomi $\Phi_2, \Phi_3, \ldots$ osserviamo che qualunque siano le costanti c_n, λ_n il polinomio

$$\Phi_n(x) = (x - c_n) \Phi_{n-1} - \lambda_n \Phi_{n-2} \qquad (n \geqslant 2) \tag{15}$$

risulta col primo coefficiente uguale all'unità e ortogonale a Φ_0, $\Phi_1, \ldots, \Phi_{n-3}$; l'ortogonalità a Φ_{n-2} rispetto a $p(x)$ importa

$$\int_a^b x p(x) \Phi_{n-1}(x) \Phi_{n-2}(x) dx = \lambda_n \int_a^b p(x) \Phi_{n-2}^2(x) dx \tag{16_1}$$

l'ortogonalità a Φ_{n-1} rispetto a $p(x)$ importa

$$\int_a^b x p(x) \Phi_{n-1}^2(x) dx = c_n \int_a^b p(x) \Phi_{n-1}^2(x) dx \tag{16_2}$$

e la normalizzazione di $a_n p^{\frac{1}{2}}(x) \Phi_n(x)$ in (a, b) importa

$$1 = a_n^2 \int_a^b p(x) \Phi_n^2(x) dx. \tag{16_3}$$

Le (16_1), (16_2), (16_3) determinano rispettivamente λ_n, c_n, a_n.

L'univocità segue dal fatto che se $\omega(x)$ è un polinomio di grado n, col primo coefficiente uguale all'unità, ortogonale a ψ_0, $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ la differenza $\omega - \psi_n$ è un polinomio di grado $n-1$, esprimibile perciò come combinazione lineare a coefficienti costanti di $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$

$$\omega(x) - \psi_n(x) = l_0 \psi_0(x) + l_1 \psi_1(x) + \ldots + l_{n-1} \psi_{n-1}(x)$$

ortogonale a $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ e ciò porta $l_0 = l_1 = \ldots = l_{n-1} = 0$ ossia $\omega(x) \equiv \psi_n(x)$.

Particolarizzando a, b, $p(x)$ si ottengono diverse classi di polinomi; così se a e b sono finiti e $p(x) = (x-a)^{\alpha-1}(b-x)^{\beta-1}$ con $\alpha > 0$, $\beta > 0$ si hanno i polinomi di JACOBI [28]; per $a = -1$, $b = 1$, $\alpha = \beta = 1$ si hanno i polinomi di LEGENDRE [Cap. II] e per $a = -1$, $b = 1$, $\alpha = \beta = 1/2$ posto $x = \cos\varphi$ si ottiene il sistema 1, $\cos\varphi$, $\cos 2\varphi, \ldots, \cos n\varphi, \ldots$; per $a = 0$, $b = +\infty$, $p(x) = x^\alpha e^{-x}$, $\alpha > -1$ si hanno i polinomi $L_n^{(\alpha)}(x)$; per $a = -\infty$, $b = +\infty$, $p(x) = e^{-x^2}$ i polinomi $H_n(x)$.

In complesso gli studi da noi fatti nei Cap. II, III rientrano nel problema più generale dello sviluppo di una funzione $f(x)$ in serie di polinomi di TCHEBYCHEF.

§ 3. - Relazioni tra i polinomi $L_n^{(\alpha)}(x)$ e $H_n(x)$.

1. - Espressione dei polinomi $H_n(x)$ per $L_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(x^2)$, $L_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x^2)$. - 2. Espressione integrale di $L_n^{(\alpha)}(x)$ [$\alpha > -1/2$] per $H_n(x)$.

1. - Dalla formula [§ 1, (3_1)]

$$(-1)^n L_n^{(\alpha)}(u) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{k!\,(n-k)!\,\Gamma(n-k+\alpha+1)}\, u^{n-k}$$

facendo $\alpha = -1/2$, $u = x^2$, e osservando che

$$\frac{n!\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)2^{2k}}{k!\,(n-k)!\,\Gamma\left(n-k+\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{n!\,2^{2k}\left(n-\frac{1}{2}\right)\dots\left(n-k+\frac{1}{2}\right)}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!\;2^k(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2k+1)}{k!\,(n-k)!} =$$

$$= \frac{2n(2-1)(2n-2)\dots(2n-2k+1)}{k!} = \frac{(2n)!}{k!\,(2n-2k)!}$$

otteniamo

$$(-1)^n 2^{2n} n!\, L_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(x^2) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!\,\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)2^{2k}}{k!\,(n-k)!\,\Gamma\left(n-k+\frac{1}{2}\right)}(2x)^{2(n-k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(2n)!}{k!\,(2n-2k)!}(2x)^{2(n-k)} = H_{2n}(x)$$

e perciò

$$(1_1) \qquad \boxed{H_{2n}(x) = (-1)^n 2^{2n} n!\, L_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(x^2)}\,,$$

e analogamente

$$(1_2) \qquad \boxed{H_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} 2^{2n+1} n!\, x L_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x^2)}\,.$$

2. - Vogliamo ora trovare un'espressione integrale dei polinomi $L_n^{(\alpha)}(x)$ [$\alpha > -1/2$] per i polinomi $H_n(x)$.

Nella relazione integrale (15) del § 1 facciamo $\beta = -1/2$, $u = t^2$, si ha

$$L_n^{(\alpha)}(x) = 2\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\, x^{-\alpha}\int_0^{\sqrt{x}} (x-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} L_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(t^2)\,dt,$$

$$x > 0, \qquad \sqrt{x} > 0, \qquad \alpha > -\frac{1}{2};$$

e per la (1_1)

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\,\frac{(-1)^n x^{-\alpha}}{2^{2n} n!}\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} (x-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} H_{2n}(t)\,dt,$$

ma si ha

$$2^{2n} n!\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = 2^{2n} n!\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\dots\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2^n n!\,(2n-1)(2n-3)\dots 1\sqrt{\pi} = (2n)!\sqrt{\pi}$$

perciò

$$(2_1) \qquad \boxed{L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(n+\alpha+1) x^{-\alpha}}{\sqrt{\pi}(2n)!\,\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} (x-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} H_{2n}(t)\,dt}\,,$$

$$\alpha > -1/2$$

od anche cambiando t in $\sqrt{x}\cos\varphi$ si ottiene la formula di J. V. USPENSKY [[62], p. 604]

$$(2_2) \qquad \boxed{L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(n+\alpha+1)}{\sqrt{\pi}(2n)!\,\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\pi} H_{2n}(\sqrt{x}\cos\varphi)\,\mathrm{sen}^{2\alpha}\varphi\,d\varphi}\,,$$

$$\alpha > -1/2.$$

§ 4. - Formula di approssimazione assintotica dei polinomi $H_n(x)$, e limitazione dei polinomi $L_n^{(\alpha)}(x)$.

1. Formula di approssimazione assintotica dei polinomi $H_n(x)$. - 2. Limitazione dei polinomi $L_n^{(\alpha)}(x)$ per $\alpha > -1/2$. - 3. La limitazione di FEJÉR-KOGBETLIANTZ.

1. - Vogliamo qui esporre il procedimento di STONE [57] e KOWALLIK [32] per la determinazione della formula di approssi-

mazione assintotica dei polinomi $H_n(x)$, procedimento simile a quello usato da BONNET [4] per i polinomi di LEGENDRE.

Consideriamo la successione $\{f_n(x)\}$

$$f_n(x)=\pi^{-\frac{1}{4}}(2^n n!)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x^2} H_n(x) \tag{1}$$

ortogonale e normale in $(-\infty, +\infty)$ [§ 2, n.° 6]; le funzioni f_n soddisfano l'equazione differenziale [§ 2, n.° 2]

$$\boxed{f_n''+(-x^2+2n+1)f_n=0}, \tag{2_1}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_n^2(x)dx=1}. \tag{2_2}$$

Posto

$$s_n=\operatorname{sen}(\sqrt{2n+1}\,x), \qquad c_n=\cos(\sqrt{2n+1}\,x)$$

abbiamo

$$s_n''+(2n+1)s_n=0 \tag{3_1}$$

$$c_n''+(2n+1)c_n=0, \tag{3_2}$$

e moltiplicando la (2_1) per s_n $[c_n]$, la (3_1) $[(3_2)]$ per f_n e sottraendo si ha

$$(f_n's_n-f_ns_n')'=x^2f_ns_n, \qquad (f_n'c_n-f_nc_n')'=x^2f_nc_n$$

dalle quali integrando tra 0 ed x

$$[f_n'(\alpha)s_n(\alpha)-f_n(\alpha)s_n'(\alpha)]_{\alpha=0}^{\alpha=x}=\int_0^x \alpha^2 f_n(\alpha)s_n(\alpha)d\alpha \tag{4_1}$$

$$[f_n'(\alpha)c_n(\alpha)-f_n(\alpha)c_n'(\alpha)]_{\alpha=0}^{\alpha=x}=\int_0^x \alpha^2 f_n(\alpha)c_n(\alpha)d\alpha, \tag{4_2}$$

ma è

$$s_n(0)=0, \qquad s_n'(0)=\sqrt{2n+1}; \qquad c_n(0)=1, \qquad c_n'(0)=0$$

e le (4) dànno

$$\left\{\begin{aligned} &f_n'(x)s_n(x)-s_n'(x)f_n(x)=-\sqrt{2n+1}f_n(0)+\int_0^x \alpha^2 f_n(\alpha)s_n(\alpha)d\alpha \\ &f_n'(x)c_n(x)-c_n'(x)f_n(x)=f_n'(0)+\int_0^x \alpha^2 f_n(\alpha)c_n(\alpha)d\alpha, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

ma si ha

$$-s_nc_n'+s_n'c_n=\sqrt{2n+1},$$

e perciò il sistema (5) dà

$$\boxed{\begin{aligned} f_n(x)=f_n(0)\cos[\sqrt{2n+1}\,x]+f_n'(0)\frac{\operatorname{sen}[\sqrt{2n+1}\,x]}{\sqrt{2n+1}}-\\ -\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\int_0^x \alpha^2 f_n(\alpha)\operatorname{sen}[\sqrt{2n+1}(\alpha-x)]d\alpha \end{aligned}} \tag{6}$$

a). Sia *n pari*; abbiamo per la (1), e per le (10) del § 2,

$$f_{2n}(0)=\frac{H_{2n}(0)}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{2^{2n}(2n)!}}=(-1)^n\frac{(2n)!}{n!}\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{2^{2n}(2n)!}}=\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{\pi}}\sqrt{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}$$

$$f'_{2n}(0)=0,$$

ma dalla formula di WALLIS ([1]) si ha

$$\sqrt{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}=\sqrt[4]{\frac{1}{\pi n}}\left(1-\frac{\varepsilon_1}{8n}\right), \qquad 0<\varepsilon_1<1$$

quindi dalla (6)

$$f_{2n}(x)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}}\sqrt[4]{\frac{1}{n}}\left(1-\frac{\varepsilon_1}{8n}\right)\cos[x\sqrt{4n+1}]-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{4n+1}}\int_0^x \alpha^2 f_{2n}(\alpha)\operatorname{sen}[\sqrt{4n+1}(\alpha-x)]d\alpha.$$

([1]) Per comodità del lettore ricordiamo qui la formula di J. WALLIS [*Opera Mathematica*, Oxoniae (1695), T. I, p. 469].

Si ha con n intero e positivo, $0\leqslant x\leqslant \pi/2$,

$$\operatorname{sen}^{2n+1}x\leqslant\operatorname{sen}^{2n}x\leqslant\operatorname{sen}^{2n-1}x,$$

e integrando tra 0 e $\pi/2$

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}<\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},$$

e moltiplicando per $(2n)!!/(2n-1)!!$

$$[(2n)!!/(2n-1)!!]^2/(2n+1)<\pi/2<[(2n)!!/(2n-1)!!]^2/(2n)$$

Per la limitazione di BUNIKOWSKY-SCHWARZ si ha

$$\left|\int_0^x a^2 f_{2n}(a)\,\mathrm{sen}\,[\sqrt{4n+1}(a-x)]da\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left[\int_0^x a^4\,\mathrm{sen}^2\sqrt{4n+1}(a-x)da\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^x f_{2n}^2(a)da\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant \left[\int_0^x a^4 da\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^{+\infty} f_{2n}^2(a)da\right]^{\frac{1}{2}} < |x|^{\frac{5}{2}}$$

posto quindi

$$(7)\qquad \boxed{h(n,x)=\int_0^x a^2 f_n(a)\,\mathrm{sen}\,[\sqrt{2n+1}(a-x)]da}$$

abbiamo

$$(8_1)\qquad \boxed{f_{2n}(x)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{n^{1/4}}\left(1-\frac{\varepsilon_1}{8n}\right)\cos\,[x\sqrt{4n+1}]-\frac{h(2n,x)}{\sqrt{4n+1}}},$$

$$(8_2)\qquad 0<\varepsilon_1<1, \qquad |h(2n,x)|<|x|^{\frac{5}{2}}.$$

b). Sia n *dispari*; abbiamo

$$f_{2n+1}(0)=0;$$

e per la (1), e le (10) del § 2,

$$f'_{2n+1}(0)=\frac{H'_{2n+1}(0)}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{2^{2n+1}(2n+1)!}}=2\,\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{\pi}}\,\frac{(2n)!}{n!}\,\frac{2n+1}{\sqrt{2^{2n+1}(2n+1)!}}=$$
$$=(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{2(2n+1)}}{\sqrt[4]{\pi}}\sqrt{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}$$

---

quindi la formula di WALLIS

$$\frac{\pi}{2}=\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+\theta} \qquad \text{con } 0<\theta<1.$$

Si ha da essa

$$\sqrt{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}=\sqrt[4]{\frac{2}{\pi(2n+\theta)}}=\sqrt[4]{\frac{1}{\pi n}}\sqrt[4]{\frac{2n}{2n+\theta}}=\sqrt[4]{\frac{1}{\pi n}}\left(1-\frac{\varepsilon_1}{8n}\right),$$
$$0<\varepsilon_1<1;$$

infatti

$$1>\sqrt[4]{\frac{2n}{2n+\theta}}>\sqrt[4]{\frac{2n}{2n+1}}>1-\frac{1}{8n}.$$

quindi

$$\frac{1}{\sqrt{4n+3}}f'_{2n+1}(0)=(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{\pi}n^{1/4}}\sqrt{\frac{4n+2}{4n+3}}\sqrt[4]{\frac{2n}{2n+\theta}}=$$
$$=\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{\pi}n^{1/4}}\left(1-\frac{\varepsilon_2}{8n}\right)\ (^1), \qquad 0<\varepsilon_2<2$$

e perciò dalla (6)

$$(9_1)\qquad \boxed{f_{2n+1}(x)=\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{n^{1/4}}\left(1-\frac{\varepsilon_2}{8n}\right)\mathrm{sen}\,[x\sqrt{4n+3}]-\frac{h(2n+1,x)}{\sqrt{4n+3}}}$$

$$(9_2)\qquad 0<\varepsilon_2<2, \qquad |h(2n+1,x)|<|x|^{\frac{5}{2}}.$$

c). Dalle formule (1), (8), (9) otteniamo infine

$$(10)\qquad \boxed{\begin{aligned} H_{2n}(x)&=e^{\frac{x^2}{2}}\sqrt{2^{2n}(2n)!}\,\pi^{-\frac{1}{4}}n^{-\frac{1}{4}}\Big[(-1)^n\left(1-\frac{\varepsilon_1}{8n}\right)\cos\,[x\sqrt{4n+1}]-\\ &\qquad -\frac{\pi^{1/4}n^{1/4}}{\sqrt{4n+1}}h(2n,x)\Big]\\ H_{2n+1}(x)&=e^{\frac{x^2}{2}}\sqrt{2^{2n+1}(2n+1)!}\,\pi^{-\frac{1}{4}}n^{-\frac{1}{4}}\Big[(-1)^{n+1}\left(1-\frac{\varepsilon_2}{8n}\right)\mathrm{sen}[x\sqrt{4n+3}]-\\ &\qquad -\frac{\pi^{1/4}n^{1/4}}{\sqrt{4n+3}}h(2n+1,x)\Big]\end{aligned}}$$

con

$$(10')\qquad 0<\varepsilon_1<1, \qquad 0<\varepsilon_2<2;$$

e qualunque sia n,

$$|h(n,x)|<|x|^{\frac{5}{2}}.$$

Avvertiamo il lettore che H. CRAMER [11], partendo dall'espressione di $H_n(x)$ mediante un integrale di CAUCHY ha dato per i polinomi $H_n(x)$ la seguente limitazione

$$\boxed{|H_n(x)|<k\sqrt{n!}\,2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{x^2}{2}}}.$$

Il valore della costante k è precisato da C. V. L. CHARLIER [9] con

$$\boxed{k=1{,}086435}.$$

---

(1) $1>\sqrt{\frac{4n+2}{4n+3}}\sqrt[4]{\frac{2n}{2n+\theta}}>\sqrt{\frac{4n+2}{4n+3}}\left(1-\frac{1}{8n}\right)>1-\frac{1}{4n}.$

2. - *a*). Possiamo determinare una limitazione per $L_n^{(\alpha)}(x)$ per $\alpha > -1/2$.

Nella (2_1) del § 3 poniamo $t = \sqrt{x}u$, otteniamo

$$(11) \qquad L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(n+\alpha+1)}{\sqrt{\pi}(2n)!\,\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} (1-u^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} H_{2n}(\sqrt{x}u)\,du$$

$$\alpha > -1/2$$

ma dalle (10) si ha

$$(12) \quad H_{2n}(\sqrt{x}u) = \\ = e^{\frac{1}{2}xu^2} \sqrt{2^{2n}(2n)!} \left[(-1)^n \pi^{-\frac{1}{4}} n^{-\frac{1}{4}} \cos\sqrt{(4n+1)x}\,u + \frac{B(n,x)}{\sqrt{n}}\right]$$

con $B(n, x)$ in valore assoluto uniformemente limitato rispetto ad n quando x varia in un intervallo finito, e poichè dalla formula di DE MOIVRE-STIRLING ([1]) abbiamo

$$\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\sqrt{(2n)!}} \frac{2^n}{n^{1/4}} = \frac{\sqrt{2\pi(n+\alpha)}}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt[4]{n}\sqrt[4]{4\pi n}} \left(\frac{n+\alpha}{e}\right)^{n+\alpha} \left(\frac{e}{2n}\right)^n 2^n e^{\frac{\theta_1}{12n}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2(n+\alpha)}{2n}} \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{n+\alpha} n^\alpha e^{\frac{\theta_1}{12n}} = O(n^\alpha)$$

([1]) La formula di STIRLING [J. STIRLING: *Methodus differentialis; sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum* (Londini, 1730), p. 137] è la seguente

$$(a) \qquad \Gamma(n+1) = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

Precedentemente DE-MOIVRE [A. DE-MOIVRE: *Miscellanea analitica de Seriebus et Quadraturis* (Londini, 1730)] aveva data la formula $n^n e^{-n}\sqrt{n}\chi$, ma l'espressione del fattore χ è di STIRLING.

La dimostrazione della formula (*a*) trovasi nei più importanti trattati di Analisi [Cfr., ad esempio, U. DINI: *Lezioni di Analisi Infinitesimale*, II, parte 1ª (Pisa, 1909), pp. 409-411]; qui, per comodità del lettore, dimostriamo direttamente che per $n > 0$ si ha

$$(a') \qquad \Gamma(n+1) = \sqrt{2\pi n}(n/e)^n[1 + \varepsilon/\sqrt{2\pi n}] \qquad \text{con } 0 < \varepsilon < 1.$$

Abbiamo $(x^n e^{-x})' = e^{-x}x^{n-1}(n-x)$, quindi se x varia tra 0 ed n, $x^n e^{-x}$ cresce da 0 a $n^n e^{-n}$, se x varia da n a $+\infty$, $x^n e^{-x}$ descresce da $n^n e^{-n}$ a 0. La funzione $n^n e^{-n} e^{-t^2}$ quando t cresce da $-\infty$ a 0 cresce da 0 ad $n^n e^{-n}$, e

ne viene che quando x varia in un intervallo finito $0 \leq x \leq h$, esiste una costante T tale che

$$(13) \qquad |L_n^{(\alpha)}(x)| < Tn^\alpha, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots; \qquad \alpha > -1/2.$$

b). Dalla (13) segue che per $-1/2 < \alpha < 0$ è $\lim\limits_{n\to\infty} L_n^{(\alpha)}(x) = 0$, ma è subito visto che si ha anche per $x > 0$ e $\alpha > -1/2$

$$(14) \qquad \lim_{n\to\infty} L_n^{(\alpha)}(x)/n^\alpha = 0, \qquad x > 0, \qquad \alpha > -1/2.$$

Infatti per $\alpha = 0$, $x > 0$ si ha [Cap. II, § 4, teor. 12]

$$\lim_{n\to\infty} L_n^{(0)}(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} e^{\frac{1}{2}xu^2} (1-u^2)^{-\frac{1}{2}} \cos[\sqrt{(4n+1)x}\,u]\,du = 0;$$

---

decresce da $n^n e^{-n}$ a 0 quando t cresce da 0 a $+\infty$; possiamo allora effettuare il cambiamento di variabile

$$(b) \qquad x^n e^{-x} = n^n e^{-n} e^{-t^2}$$

facendo corrispondere i valori di x e t in modo che quando t varia da $-\infty$ a $+\infty$, x cresca da 0 a $+\infty$. Dalla (*b*) si ha

$$(c) \qquad t^2 = x - n + n\log n - n\log x = x - n - n\log(x/n),$$

quindi con $0 \leq x < n$ si ha $t = -\sqrt{n\log[n/x] - (n-x)}$, per $x = n$ si ha $t = 0$, per $x > n$, $t = \sqrt{x - n - n\log[x/n]}$. Posto $x = n + z$, t ha il segno di z e la (*c*) diventa

$$t^2 = z - n\log(1 + z/n),$$

e applicando a $\log(1 + z/n)$ la formula di MAC-LAURIN arrestata alle derivate seconde abbiamo

$$t^2 = z - n\left[\frac{z}{n} - \frac{z^2}{2n^2}\frac{1}{[1+\theta z/n]^2}\right] = \frac{nz^2}{2(n+\theta z)^2}, \qquad 0 < \theta < 1$$

quindi

$$t = z\sqrt{n}/\sqrt{2}(n+\theta z)$$

e

$$(d) \qquad \frac{n}{z} + \theta = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{n}{2}}.$$

Dalla (*c*) derivando rispetto a t abbiamo

$$2t = \frac{dx}{dt}\left[1 - \frac{n}{x}\right], \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{2tx}{x-n} = \frac{2t(n+z)}{z} = 2\left[\sqrt{\frac{n}{2}} + (1-\theta)t\right];$$

per $a>0$, $x>0$, si ha [§ 1, (15), $\beta=0$]

$$L_n^{(a)}(x)=\frac{\Gamma(n+a+1)}{n!\,\Gamma(a)}\,x^{-a}\int_0^x (x-u)^{a-1}L_n^{(0)}(u)du,$$

ma è

$$\frac{\Gamma(a+n+1)}{n!}\Big/n^a=O(1),$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x (x-u)^{a-1}L_n^{(0)}(u)du=0$$

e perciò ancora la (14).

---

si ha allora

$$(e)\qquad \Gamma(n+1)=\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx=2\int_{-\infty}^{+\infty} n^n e^{-n}e^{-t^2}\left[\sqrt{\frac{n}{2}}+(1-\theta)t\right]dt=$$

$$=2\sqrt{\frac{n}{2}}\,n^n e^{-n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt+2n^n e^{-n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}(1-\theta)tdt=$$

$$=\sqrt{2n\pi}\,n^n e^{-n}+2n^n e^{-n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}(1-\theta)tdt.$$

L'ultimo integrale non possiamo determinarlo esattamente non avendo l'espressione di θ rispetto a t, si ha però

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}(1-\theta)tdt=\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}(1-\theta)tdt+\int_0^{+\infty} e^{-t^2}(1-\theta)tdt$$

e siccome il primo di questi integrali ha tutti i suoi elementi negativi ed è minore in valore assoluto di $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}tdt=1/2$, e il secondo è positivo e minore di $1/2$ è

$$\left|2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}(1-\theta)tdt\right|<1$$

dalla (e) si ottiene appunto la (a').

3. - Sussiste per i polinomi $L_n^{(a)}(x)$ la limitazione di Fejér [17, b)]

$$(15)\qquad \boxed{L_n^{(a)}(x)=x^{-\frac{a}{2}-\frac{1}{4}}e^{\frac{x}{2}}n^{\frac{a}{2}-\frac{1}{4}}\left[\pi^{-\frac{1}{2}}\cos\left(2\sqrt{nx}-\frac{a\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n}}\right)\right]}$$

uniformemente in ogni intervallo *finito* (a, b), $0<a\leqslant x\leqslant b$.

Perron [44] ha dimostrato la (15) per $|x|\leqslant n^{\frac{1}{3}-\varepsilon}$, $\varepsilon>0$ e perciò per $|x|\leqslant n^{\frac{1}{3}-\varepsilon}$, $\varepsilon>0$ vale la limitazione

$$(16)\qquad \boxed{L_n^{(a)}(x)=O\left[\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}\left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{a}{2}-\frac{1}{4}}\right]}.$$

Recentemente Kogbetliantz [[30, b)], pp. 149-158] ha dimostrato la (16) per $|x|\leqslant kn$ dove k è un numero positivo qualsiasi; noi qui, per brevità, ci limitiamo a ricordare al lettore questi importanti resultati.

§ 5. - Chiusura dei polinomi $L_n^{(a)}(x)$ e $H_n(x)$ rispetto alle funzioni di quadrato sommabile.

1. Chiusura dei polinomi $L_n(x)$. - 2. Chiusura dei polinomi $L_n^{(a)}(x)$. 3. Chiusura dei polinomi $H_n(x)$ (¹).

1. - a). Cominciamo col dimostrare la chiusura del sistema $\{e^{-\frac{x}{2}}L_n(x)\}$, e per questo osserviamo che posto

$$(1)\qquad I_n(x)=\int_0^x e^{-\frac{x}{2}}L_n(x)dx \qquad (n=0, 1, 2,....)$$

l'equazione di chiusura di Vitali [Cap. I, teor. 26] diventa

$$(2)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} I_n^2(x)=x \quad \text{per } x\geqslant 0.$$

(¹) Per tutto quanto riguarda il § 5, cfr. G. Sansone [54, b)]. Cfr. anche R. Caccioppoli [5].

Per la limitazione di BESSEL [Cap. I, teor. 12] abbiamo

$$(2') \qquad \sum_{n=0}^{\infty} I_n^2(x) \leq x$$

e ci occorre far vedere che vale il segno uguale. Ci sarà utile a questo scopo esprimere gli integrali $I_n(x)$ e la somma $S_n(x)$ dei primi n termini della serie (2) in funzione dei polinomi $L_n(x)$.

b). Si verifica facilmente che tra $I_n(x)$ e $L_n(x)$ sussiste la relazione

$$(3) \qquad I_n(x)+I_{n-1}(x) = -2e^{-\frac{x}{2}}[L_n(x)-L_{n-1}(x)].$$

Essa è vera infatti per $x=0$; per derivazione si ottiene poi

$$e^{-\frac{x}{2}}[L_n(x)+L_{n-1}(x)] = e^{-\frac{x}{2}}[L_n(x)-L_{n-1}(x)] - 2e^{-\frac{x}{2}}[L_n'(x)-L'_{n-1}(x)]$$

che per la (10) del § 1 si riduce all'identità

$$e^{-\frac{x}{2}}[L_n(x)+L_{n-1}(x)] = e^{-\frac{x}{2}}[L_n(x)-L_{n-1}(x)] + 2e^{-\frac{x}{2}}L_{n-1}(x).$$

Dalla (3) otteniamo la formula ricorrente

$$(-1)^n\frac{1}{2}I_n(x) = (-1)^{n-1}\frac{1}{2}I_{n-1}(x) - e^{-\frac{x}{2}}[(-1)^nL_n(x)+(-1)^{n-1}L_{n-1}(x)]$$

e perciò

$$(4) \qquad (-1)^n\frac{1}{2}I_n(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}}\Big[(-1)^nL_n(x)+2\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^rL_r(x)\Big]$$

$$(5) \qquad 2e^{-\frac{x}{2}}\sum_{r=0}^{n}(-1)^rL_r(x) = 1-(-1)^n\Big[\frac{1}{2}I_n(x)-e^{-\frac{x}{2}}L_n(x)\Big].$$

c). Si ha ora

$$S_n(x) = \sum_{r=0}^{n} I_r^2(x) = \sum_{r=0}^{n}\int_0^x\Big[\frac{d}{dx}I_r^2(x)\Big]dx = 4\int_0^x e^{-\frac{x}{2}}\Big(\frac{1}{2}I_r(x)\Big)L_r(x)dx =$$

$$=4\int_0^x e^{-\frac{x}{2}}\sum_{r=0}^{n}\Big[(-1)^r - e^{-\frac{x}{2}}\Big\{L_r(x)+2\sum_{s=0}^{r-1}(-1)^{r+s}L_s(x)\Big\}\Big]L_r(x)dx =$$

$$=4\int_0^x e^{-\frac{x}{2}}\Big[\sum_{r=0}^{n}(-1)^rL_r(x) - e^{-\frac{x}{2}}\Big\{\sum_{r=0}^{n}(-1)^rL_r(x)\Big\}^2\Big]dx =$$

$$=\int_0^x 2e^{-\frac{x}{2}}\sum_{r=0}^{n}(-1)^rL_r(x)\Big[2-2e^{-\frac{x}{2}}\sum_{s=0}^{n}(-1)^sL_s(x)\Big]dx$$

dalla quale, per la (5), si ha

$$S_n(x) = \int_0^x\Big\{1-\Big[\frac{1}{2}I_n(x)-e^{-\frac{x}{2}}L_n(x)\Big]^2\Big\}dx$$

ed infine l'identità

$$(6) \qquad S_n(x) = \sum_{r=0}^{n} I_r^2(x) = x - \int_0^x\Big[\frac{1}{2}I_n(t)-e^{-\frac{t}{2}}L_n(t)\Big]^2dt.$$

d). Per la (13) del § 4 si ha in $(0, x)$, $|L_n(t)|<T$; per la (14), per $t>0$ è $\lim\limits_{n\to\infty} L_n(t)=0$, $[\alpha=0]$; la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} I_n^2(x)$ converge in $(0, x)$ e perciò $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(t)=0$; viene allora dalla (6), passando al limite sotto il segno integrale $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)=x$, cioè la (2), c. v. d.

2. - La chiusura del sistema

$$\{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n+1)\Gamma^{-\frac{1}{2}}(n+\alpha+1)e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{\alpha}{2}}L_n^{(\alpha)}(x)\} \qquad \alpha>-1,$$

rispetto alle funzioni di quadrato sommabile si riduce al caso precedente con le seguenti considerazioni. Supponiamo che esista una $f(x)$ di quadrato sommabile che soddisfi le equazioni

$$\int_0^{+\infty} f(x)e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{\alpha}{2}}L_n^{(\alpha)}dx=0 \quad (n=0, 1, 2,....;\ \alpha>-1);$$

da esse si ricava

$$\int_0^{+\infty} f(x)e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{\alpha}{2}}x^n dx=0 \qquad (n=0, 1, 2,....)$$

e con la sostituzione $x=2t$

$$\int_0^{+\infty} f(2t)e^{-t}t^{\frac{\alpha}{2}}t^n dt=0 \qquad (n=0, 1, 2,....)$$

e posto

$$F(t)=f(2t)t^{1+\frac{\alpha}{2}}e^{-\frac{t}{2}}$$

$$\int_0^{+\infty} F(t)e^{-\frac{t}{2}}t^{n-1}dt=0 \qquad (n=1, 2,....)$$

quindi

$$\int_0^{+\infty} F(t)[e^{-\frac{t}{2}} L_n(t)]dt = 0 \qquad (n=0,1,2,....).$$

Ora la funzione $F(t)$ è di quadrato sommabile in $(0, +\infty)$ [il fattore $t^{1+\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{t}{2}}$ è limitato in $(0, +\infty)$] quindi $F(t)$ e perciò $f(t)$ è generalmente nulla $(0, +\infty)$.

3. - *a*). Vogliamo ora dimostrare la chiusura del sistema $\{e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)/\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}\}$ rispetto alle funzioni di quadrato sommabile.

Posto

$$J_n(x) = \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)dx \tag{7}$$

l'equazione di chiusura del VITALI diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} J_n^2(x) = \sqrt{\pi}\, x, \tag{8}$$

per ogni x non negativo, e poichè per la limitazione di BESSEL il primo membro della (8) è convergente qualunque sia x, ci basterà dimostrare che indicando con $S_{2n}(x)$ la somma dei primi $2n$ termini della (8) è

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n}(x) = \sqrt{\pi}\, x. \tag{9}$$

b). Cominciamo col trovare una conveniente espressione di $S_{2n}(x)$.

Sussistono tra le funzioni $H_n(x)$ e $J_n(x)$ le due relazioni

$$-2e^{-\frac{x^2}{2}} H_{2n-1}(x) = -J_{2n}(x) + 2(2n-1)J_{2n-2}(x) \tag{10$_1$}$$

$$-2e^{-\frac{x^2}{2}} H_{2n}(x) = -J_{2n+1}(x) + 2(2n)J_{2n-1}(x) - 2(-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \tag{10$_2$}$$

$$(n=1,2,....).$$

Infatti per le (10) del § 2 queste sono vere per $x=0$; derivandole, e tenuto conto delle (4) e (5) del § 2, si ottengono due identità.

Dalle (7) e (10_1) si ha

$$J_{2n-1}^2(x) = \int_0^x \left[\frac{d}{dx} J_{2n-1}^2(x)\right] dx = 2\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} J_{2n-1}(x) H_{2n}(x)dx =$$

$$= \int_0^x J_{2n-1}(x)[J_{2n}(x) - 2(2n-1)J_{2n-2}(x)]dx,$$

e perciò

$$\frac{J_{2n-1}^2(x)}{2^{2n-1}(2n-1)!} = \int_0^x \left[\frac{1}{2^{2n-1}(2n-1)!} J_{2n}(x)J_{2n-1}(x) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2^{2n-2}(2n-2)!} J_{2n-1}(x)J_{2n-2}(x)\right] dx \qquad (n=1,2,....).$$

Analogamente dalla (10_2) si ricava $[H_{-1}=0,\ J_{-1}=0]$

$$\frac{J_{2n}^2(x)}{2^{2n}(2n)!} = \int_0^x \left[\frac{1}{2^{2n}(2n)!} J_{2n+1}(x)J_{2n}(x) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2^{2n-1}(2n-1)!} J_{2n}(x)J_{2n-1}(x)\right] dx + (-1)^n \frac{1}{2^{2n-1}(n!)} \int_0^x J_{2n}(x)dx,$$

$$(n=0,1,2,....),$$

e da queste otteniamo allora

$$S_{2n}(x) = \sum_{r=0}^{2n} \frac{1}{2^r r!} J_r^2(x) = \tag{11}$$

$$= 2\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{1}{2^{2r} r!} \int_0^x J_{2r}(u)du + \frac{1}{2^{2n}(2n)!} \int_0^x J_{2n+1}(u)J_{2n}(u)du.$$

Dalla formula (5) del § 2 abbiamo

$$(-1)^r \frac{H_{2r}(t)}{2^{2r} r!} = \frac{1}{t}\left[(-1)^{r+1} \frac{H_{2r+1}(t)}{2^{2r+1} r!} - (-1)^r \frac{H_{2r-1}(t)}{2^{2r-1}(r-1)!}\right]$$

$$(r=0,1,2,....)$$

perciò

$$2\int_0^x \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{2^{2r} r!} J_{2r}(u)du = 2\int_0^x du \int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{H_{2r}(t)}{2^{2r} r!} dt =$$

$$= \int_0^x du \int_0^u \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n} n!} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{H_{2n+1}(t)}{t} dt$$

e la (11) diventa infine

(12) $$S_{2n}(x)=\int_0^x du\int_0^u \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}n!}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, \frac{H_{2n+1}(t)}{t}\,dt+ \\ +\frac{1}{2^{2n}(2n)!}\int_0^x J_{2n+1}(u)J_{2n}(u)du.$$

c). Se teniamo conto delle (10), (10′) del § 4, e della formula di WALLIS abbiamo

$$\int_0^u \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}n!}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\,\frac{H_{2n+1}(t)}{t}\,dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]\int_0^u\frac{\operatorname{sen} t\sqrt{4n+3}}{t}\,dt+O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)$$

uniformemente per u variabile in $(0,x)$ e perciò il primo integrale che figura nel secondo membro della (12) è limitato rispetto ad u variabile in $(0,x)$ e uniformemente rispetto ad n; si ha inoltre

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^u \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}n!}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\,\frac{H_{2n+1}(t)}{t}\,dt=2\pi^{-\frac{1}{2}}\lim_{n\to\infty}\int_0^u\frac{\operatorname{sen} t\sqrt{4n+3}}{t}\,dt=\sqrt{\pi}$$

quindi

(13) $$\lim_{n\to\infty}\int_0^x du\int_0^u \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}n!}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\,\frac{H_{2n+1}}{t}\,dt=\sqrt{\pi}\, x.$$

Si vede che il limite per $n\to\infty$ del secondo integrale che figura nel membro della (12) è zero, cioè

(14) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{2n}(2n)!}\int_0^x J_{2n+1}(u)J_{2n}(u)du=0.$$

Infatti abbiamo [§ 4, (10)]

$$J_{2n}(u)=\int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}}H_{2n}(t)dt= \\ =2^n\sqrt{(2n)!}\int_0^u\left[(-1)^n(n\pi)^{-\frac{1}{4}}\left(1-\frac{\varepsilon_1}{8n}\right)\cos\,[t\sqrt{4n+1}]-\frac{h(2n,t)}{\sqrt{4n+1}}\right]dt,$$

dalla quale eseguendo l'integrazione si ha che per u variabile in $(0,x)$ è uniformemente

$$J_{2n}(u)=O(2^n\sqrt{(2n)!}\,n^{-\frac{1}{2}})$$

e analogamente [§ 4, (10)]

$$J_{2n+1}(u)=O(2^n\sqrt{(2n+1)!}\,n^{-\frac{1}{2}}),$$

e ne viene

$$\frac{1}{2^{2n}(2n)!}\int_0^x J_{2n}(u)J_{2n+1}(u)du=O(n^{-\frac{1}{2}}),$$

e perciò la (14).

Dalle (12), (13), (14) segue appunto la (8).

d). Il teorema dimostrato equivale al seguente: *se $f(x)$ è di quadrato sommabile tra $-\infty$ e $+\infty$, e sono nulli tutti i momenti di $f(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$*

(15) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-\frac{x^2}{2}}x^n dx \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

$f(x)$ è generalmente nulla in $(-\infty,+\infty)$.

Se osserviamo che supposto $k>0$ con la sostituzione $x=t/\sqrt{2k}$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)e^{-kx^2}dx=(2k)^{-\frac{n+1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{\sqrt{2k}}\right)e^{-\frac{t^2}{2}}t^n dt,$$

possiamo anche dire: *se $k>0$, ed $f(x)$ è di quadrato sommabile tra $-\infty$ e $+\infty$, ed esistono e sono nulli tutti i momenti di $f(x)e^{-kx^2}$*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)e^{-kx^2}dx=0 \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

allora $f(x)$ è generalmente nulla in $(-\infty,+\infty)$.

§ 6. - L'uguaglianza di Bessel per intervalli infiniti.

1. - L'uguaglianza di BESSEL per gli sviluppi in serie in intervalli infiniti e per i sistemi ortogonali che soddisfano l'equazione di chiusura di VITALI. - 2. L'uguaglianza di BESSEL per gli sviluppi in serie di funzioni $\{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n+1)\Gamma^{-\frac{1}{2}}(n+\alpha+1)e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{\alpha}{2}}L_n^{(\alpha)}(x)\}$, $\{e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)/\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}\}$.

1. - TEOREMA. - Se $\{\varphi_n(t)\}$ è una successione di funzioni ortogonale e normale nell'intervallo infinito I, e per esso è soddisfatta l'equazione di chiusura di VITALI

$$|\alpha-a|=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_a^{\alpha}\varphi_n(t)dt\right]^2, \tag{1}$$

dove a è un punto fisso di I, ed α variabile in I, allora se $f(t)$ è una funzione a quadrato sommabile in I, e consideriamo la successione $\{a_n\}$ delle sue costanti di FOURIER

$$a_n=\int_I f(t)\varphi_n(t)dt,$$

sussiste l'uguaglianza di BESSEL

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\int_I f^2dt \quad (^1). \tag{2}$$

Dimostrazione. - Quando l'intervallo I è finito la (2) è conseguenza del teorema 22 del Cap. I; noi supponiamo qui $I=(a, +\infty)$; ugualmente si ragiona per $I=(-\infty, +\infty)$ [2].

Per dimostrare la (2), basterà provare che fissato $\sigma>0$, si può determinare una combinazione lineare a coefficienti costanti di φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$, con n sufficientemente grande

$$F_n(t)=\gamma_1\varphi_1(t)+\gamma_2\varphi_2(t)+\ldots+\gamma_n\varphi_n(t) \tag{3}$$

---

(1) G. SANSONE [54, c)].

(2) Può omettersi il teorema del testo ove si ammetta che il teorema 22 del Cap. I sussiste anche per aggregati g di misura infinita.

tale che

$$\int_I|f-F_n|^2dt<\sigma. \tag{4}$$

Da questa consegue infatti per il teorema 11 del Cap. I

$$0\leq\int_I f^2dt-\sum_{k=1}^{n}a_k^2=\int_I[f-\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k]^2dt\leq\int_I|f-F_n|^2dt<\sigma$$

e perciò la (2).

Per dimostrare la (4) procederemo per gradi.

a). Sia $f(t)=c=$costante quando $a\leq t<\alpha$, ed $f(t)=0$ per $t\geq\alpha$. Si ha

$$a_n=c\int_a^{\alpha}\varphi_n(t)dt, \qquad \int_I f^2dt=c^2(\alpha-a)$$

e se nella (3) facciamo $\gamma_k=a_k$, cioè prendiamo

$$F_n(t)=a_1\varphi_1(t)+a_2\varphi_2(t)+\ldots+a_n\varphi_n(t)$$

si ha

$$\int_I|f-F_n|^2dt=\int_I f^2dt-\sum_{k=1}^{n}a_k^2=c^2[(\alpha-a)-\sum_{k=1}^{n}a_k^2]$$

e allora la (4) è conseguenza della (1) che per ipotesi è soddisfatta.

b). Sia $f(t)=c$ per $\alpha<t<\beta$ e $f(t)=0$ per $a\leq t\leq\alpha$, oppure $\beta\leq t$. Poniamo

$$f_1(t)=c \quad \text{per } a\leq t<\beta \quad \text{e} \quad f_1(t)=0 \quad \text{per } \beta\leq t,$$
$$f_2(t)=c \quad \text{per } a\leq t\leq\alpha \quad \text{e} \quad f_2(t)=0 \quad \text{per } \alpha<t,$$

e determiniamo come in *a*) due combinazioni lineari F_{n_1}, F_{n_2} delle $\{\varphi_n\}$ tali che

$$\int_I|f_1-F_{n_1}|^2dt<\frac{\sigma}{4}, \qquad \int_I|f_2-F_{n_2}|^2dt<\frac{\sigma}{4}.$$

Si ha allora $[f(t)=f_1(t)-f_2(t)]$

$$\int_I[f-(F_{n_1}-F_{n_2})]^2dt=\int_I[(f_1-F_{n_1})-(f_2-F_{n_2})]^2dt<$$
$$<2\int_I|f_1-F_{n_1}|^2dt+2\int_I|f_2-F_{n_2}|^2dt<\sigma,$$

e perciò con $F(t)=F_{n_1}(t)-F_{n_2}(t)$ si soddisfa la (4).

c). Sia $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_s$ e si abbia

$$f(t) = c_k \quad \text{per} \quad a_{k-1} < t < a_k \qquad (k = 1, 2, \dots, s)$$

ed $f(t)$ nulla in $a, a_1, a_2, \dots, a_s$ e per $t > a_s$.

Consideriamo allora la funzione $f_k(t) = c_k$ per $a_{k-1} < t < a_k$ e nulla per $t \leq a_{k-1}$ e $t \geq a_k$, e determiniamo come in *b*) s combinazioni lineari $F_{n_k}(t)$ $[k = 1, 2, \dots, s]$ delle $\{\varphi_n\}$ tali che

$$\int_I |f_k - F_{n_k}|^2 dt < \frac{\sigma}{s}, \qquad (k = 1, 2, \dots, s).$$

Si ha allora $[f = f_1 + f_2 + \dots + f_s]$

$$\int_I \left[f - \sum_{k=1}^{s} F_{n_k}\right]^2 dt = \int_I \left[\sum_{k=1}^{s} (f_k - F_{n_k})\right]^2 dt \leq s \sum_{k=1}^{s} \int_I |f_k - F_{n_k}|^2 dt < \sigma.$$

d). Sia $f(t)$ continua in (a, α) e si abbia $f(t) = 0$ per $t > \alpha$. Si divida l'intervallo (a, α) con i punti $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_s$ in modo che in ciascun intervallo (a_{k-1}, a_k) l'oscillazione di $f(t)$ sia inferiore a $\sigma^{1/2}/2\sqrt{|\alpha - a|}$, e posto $c_k = f[(a_{k-1} + a_k)/2]$ si consideri la funzione $F(t)$ nulla in $a_0, a_1, a_2, \dots, a_s$ e per $t > a_s$, e uguale a c_k per t interno ad (a_{k-1}, a_k); si determini poi per *c*) una combinazione lineare $F_n(t)$ delle $\{\varphi_n\}$ tale che

$$\int_I |F - F_n|^2 dt < \frac{\sigma}{4};$$

abbiamo allora

$$\int_I |f - F_n|^2 dt \leq 2 \int_I |f - F|^2 dt + 2 \int_I |F - F_n|^2 dt \leq$$

$$\leq 2 \sum_{k=1}^{s} \int_{a_{k-1}}^{a_k} |f - F|^2 dt + \frac{\sigma}{2} < 2 \sum_{k=1}^{s} \frac{\sigma}{4|\alpha - a|} \int_{a_{k-1}}^{a_k} dt + \frac{\sigma}{2} = \sigma.$$

e). Sia infine $f(t)$ di quadrato sommabile in $(a, +\infty)$ e si determini α così grande che

$$\int_\alpha^{+\infty} f^2 dt < \frac{\sigma}{6}.$$

Siccome la $f(t)$ è di quadrato sommabile nell'intervallo finito (a, α) si può determinare una funzione $F(t)$ continua in (a, α) tale che sia

$$\int_a^\alpha |f(t) - F(t)|^2 dt < \frac{\sigma}{6},$$

basterà ad esempio prendere per $F(t)$ una somma parziale della serie di **Legendre** di $f(t)$ relativa ad (a, α) [Cap. III, § 7, n.° 3, e § 13].

Si faccia $F(t)$ nulla per $t > \alpha$ e si determini come in *d*) una combinazione lineare F_n delle $\{\varphi_n\}$ tale che

$$\int_a^{+\infty} |F - F_n|^2 dt < \frac{\sigma}{6}.$$

Si ha allora

$$\int_a^{+\infty} (f - F_n)^2 dt \leq 2 \int_a^{+\infty} |f - F|^2 dt + 2 \int_a^{+\infty} |F - F_n|^2 dt \leq$$

$$\leq 2 \int_a^{\alpha} |f - F|^2 dt + 2 \int_\alpha^{+\infty} f^2 dt + 2 \int_a^{+\infty} |F - F_n|^2 dt < \sigma.$$

Il teorema è così dimostrato.

2. - Per i particolari sistemi ortogonali di **Tchebychef-Laguerre** e di **Tchebychef-Hermite** possiamo ora estendere il teorema 22 del Cap. I.

Teorema. - Sia $f(x)$ di quadrato sommabile in $(0, +\infty)$ e si consideri la successione $\{a_n\}$ dei suoi coefficienti di **Fourier**

$$a_n = \frac{\Gamma^{1/2}(n+1)}{\Gamma^{1/2}(n+\alpha+1)} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{(\alpha)}(x) f(x) dx \qquad (\alpha > -1) \tag{5}$$

rispetto al sistema ortogonale e normale

$$\{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{(\alpha)}(x) \Gamma^{1/2}(n+1) \Gamma^{-1/2}(n+\alpha+1)\};$$

vale allora l'uguaglianza di **Bessel**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = \int_0^{+\infty} f^2(x) dx. \tag{6}$$

a). Se $\alpha=0$, la (6) è conseguenza della (2) del § 5 e del teorema prima dimostrato.

b). Sia $\alpha\neq 0$, $\alpha>-1$; per provare la (6), tenuto conto dell'osservazione preliminare del teorema precedente, basterà far vedere che fissato $\sigma>0$ si può trovare un polinomio $P(x)$ tale che

$$\int_0^{+\infty} |f(x)-e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{\alpha}{2}}P(x)|^2dx<\sigma. \tag{7}$$

Sia $\alpha>0$ ed s un intero tale che $\alpha/2=s/4+\varrho$ con $0\leqq\varrho<1/4$; indicando con $P(x)$, $P_0(x)$, $P_1(x)$,...., $P_s(x)$ dei polinomi, per il momento qualsiansi, abbiamo

$$\begin{aligned}
(8)\quad \int_0^{+\infty} |f(x)-e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{\alpha}{2}}P(x)|^2dx= & \int_0^{+\infty}\Big|[f(x)-e^{-\frac{x}{2}}P_0(x)]+\\
&+\sum_{k=1}^{s} e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{k-1}{4}}[P_{k-1}-x^{\frac{1}{4}}P_k]+e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{s}{4}}[P_s-x^{\varrho}P]\Big|^2dx\leqq\\
&\leqq(s+2)\Big[\int_0^{+\infty}[f(x)-e^{-\frac{x}{2}}P_0(x)]^2dx+\\
&+\sum_{k=1}^{s}\int_0^{+\infty}[e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{k-1}{4}}P_{k-1}(x)-e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{k}{4}}P_k(x)]^2dx+\\
&+\int_0^{+\infty}[e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{s}{4}}P_s(x)-e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{s}{4}+\varrho}P(x)]^2dx\Big].
\end{aligned}$$

Per a) si può determinare un polinomio $P_0(x)$ tale che

$$\int_0^{+\infty} |f(x)-e^{-\frac{x}{2}}P_0(x)|^2dx<\frac{\sigma}{s+2}.$$

Scelto P_0 in questo modo, si osservi che si ha

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}|e^{-\frac{x}{2}}P_0(x)-e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{1}{4}}P_1(x)|^2dx= & \\
&=2\int_0^{+\infty}|e^{-t}P_0(2t)-e^{-t}t^{\frac{1}{4}}2^{\frac{1}{4}}P_1(2t)|^2dt=\\
&=2\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{\frac{1}{2}}|e^{-\frac{t}{2}}t^{-\frac{1}{4}}P_0(2t)-2^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{t}{2}}P_1(2t)|^2dt.
\end{aligned}$$

Esiste una costante M tale che $|e^{-t}t^{\frac{1}{2}}|<M$ in $(0,+\infty)$ quindi

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}|e^{-\frac{x}{2}}P_0(x)-e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{1}{4}}P_1(x)|^2dx< & \\
&<2M\int_0^{+\infty}|e^{-\frac{t}{2}}t^{-\frac{1}{4}}P_0(2t)-2^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{t}{2}}P_1(2t)|^2dt,
\end{aligned}$$

e siccome la funzione $e^{-\frac{t}{2}}t^{-\frac{1}{4}}P_0(2t)$ è di quadrato sommabile in $(0,+\infty)$ si può trovare per a) un polinomio $P_1(2t)$ tale che

$$\int_0^{+\infty}|e^{-\frac{t}{2}}t^{-\frac{1}{4}}P_0(2t)-2^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{t}{2}}P_1(2t)|^2dt<\sigma/2M(s+2)$$

e perciò

$$\int_0^{+\infty}|e^{-\frac{x}{2}}P_0(x)-e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{1}{4}}P_1(x)|^2dx<\frac{\sigma}{s+2}.$$

Determinato $P_1(x)$ si determinerà successivamente $P_2(x)$,...., $P_s(x)$, $P(x)$ in guisa che ciascuno dei termini che figura in parentesi quadra nel secondo membro della (8), sia minore di $\sigma/(s+2)$, e la (7) è perciò verificata.

c). Sia infine $-1<\alpha<0$; se determiniamo per b) un polinomio $P(x)$ tale che

$$\int_0^{+\infty}|f(x)-e^{-\frac{x}{2}}x^{1+\alpha}P(x)|^2dx<\sigma$$

è anche

$$\int_0^{+\infty}|f(x)-e^{-\frac{x}{2}}x^{\alpha}[xP(x)]|^2dx<\sigma,$$

e il teorema è così dimostrato.

TEOREMA. - Sia $f(x)$ una funzione di quadrato sommabile in $(-\infty,+\infty)$, e consideriamo la successione $\{a_n\}$ dei suoi coefficienti di FOURIER

$$a_n=\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{2^n n!}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}f(x)H_n(x)dx,$$

rispetto al sistema ortogonale e normale $\{e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)/\sqrt{\sqrt{\pi}2^n n!}\}$; vale allora l'uguaglianza di BESSEL

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx.$$

Dimostrazione. - Il teorema segue dalla (8) del § 5 e dal teorema del numero precedente.

§ 7. - Criteri di convergenza uniforme per le serie di polinomi $L_n^{(\alpha)}(x)$ e $H_n(x)$.

1. Criterio di NASAROW e PICONE per le serie di polinomi $L_n^{(\alpha)}(x)$. - 2. Convergenza nell'origine per le serie di polinomi $L_n^{(0)}(x)$. - 3. Criterio di convergenza uniforme di STONE per le serie di polinomi $H_n(x)$.

1. - TEOREMA [di NASAROW [42] e PICONE [45], *c*)]. - Sia

$$F(x) = F(0) + \int_0^x f(x)\,dx \tag{1}$$

con $f(x)$ definita per $x \geqslant 0$ e sommabile in qualunque intervallo finito, e siano di quadrato sommabile in $(0, +\infty)$ le funzioni

$$e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} F(x), \qquad e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha+1}{2}} f(x), \qquad \alpha > -1,$$

risultino cioè convergenti i due integrali $[A > 0,\ G \geqslant 0]$

$$A^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha} F^2(x)\,dx, \qquad G^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha+1} f^2(x)\,dx.$$

Posto

$$l_k^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma^{1/2}(k+1)}{\Gamma^{1/2}(k+\alpha+1)} L_k^{(\alpha)}(x), \qquad k = 0, 1, 2, \dots; \qquad p(x) = e^{-x} x^{\alpha}$$

e

$$a_k = \int_0^{+\infty} p(x) F(x) l_k^{(\alpha)}(x)\,dx, \qquad k = 0, 1, 2, \dots; \qquad \alpha > -1$$

vogliamo dimostrare che la serie di FOURIER di $p^{\frac{1}{2}}(x)F(x)$ rispetto al sistema $\{p^{\frac{1}{2}}(x) l_k^{(\alpha)}(x)\}$

$$p^{\frac{1}{2}}(x)F(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} p^{\frac{1}{2}}(x) a_k l_k^{(\alpha)}(x)$$

converge uniformemente e assolutamente verso $p^{\frac{1}{2}}(x)F(x)$ in qualunque intervallo $(c, +\infty)$ con $c > 0$, e perciò in qualunque intervallo (c, d) interno a $(0, \infty)$ si ha uniformemente

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k l_k^{(\alpha)}(x). \tag{2}$$

Dimostrazione. - Si ha dalla (1), qualunque siano i punti a e b, $a > 0$, $b > 0$

$$F(b) = F(a) + \int_a^b f(x)\,dx,$$

quindi

$$|F(b)| \leqslant |F(a)| + \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = |F(a)| + \left|\int_a^b e^{\frac{x}{2}} x^{-\frac{\alpha+1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha+1}{2}} f(x)\,dx\right|$$

e perciò

$$|F(b)| \leqslant |F(a)| + G\left|\int_a^b e^x x^{-(\alpha+1)}\,dx\right|^{\frac{1}{2}}.$$

Si ha da qui per $x \geqslant 1$

$$|F(x)| \leqslant |F(1)| + G\left[\int_1^x e^x\,dx\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant |F(1)| + Ge^{\frac{x}{2}},$$

da cui

$$|F(x)| \leqslant e^{\frac{x}{2}}[|F(1)| + G].$$

Per $-1 < \alpha < 0$, e $0 < x < 1$ si ha

$$|F(x)| \leqslant |F(0)| + G\left[\int_0^x \frac{e^x}{x^{1+\alpha}}\,dx\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant |F(0)| + Ge^{\frac{x}{2}}\left[\int_0^x \frac{1}{x^{1+\alpha}}\,dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$|F(x)| \leqslant |F(0)| + Ge^{\frac{x}{2}}|\alpha|^{-\frac{1}{2}} \leqslant e^{\frac{x}{2}}[|F(0)| + G|\alpha|^{-\frac{1}{2}}],$$

e perciò per $-1<\alpha<0$ e qualunque sia x esiste una costante positiva k tale che

$$(3_1)\qquad |F(x)|<ke^{\frac{x}{2}}.$$

Per $\alpha=0$, e $0<x<1$ si ha

$$|F(x)|\leqslant|F(1)|+G\left|\int_x^1\frac{e^x}{x}dx\right|^{\frac{1}{2}}\leqslant|F(1)|+Ge^{\frac{1}{2}}|\lg x|^{\frac{1}{2}}$$

quindi per $\alpha=0$ esiste una costante positiva k tale che

$$(3_2)\qquad \begin{cases} |F(x)|<k[1+|\lg x|^{\frac{1}{2}}] & \text{per } 0<x<1 \\ |F(x)|<ke^{\frac{x}{2}} & \text{per } x\geqslant 1. \end{cases}$$

Infine per $\alpha>0$ e $0<x<1$ si ha

$$|F(x)|\leqslant|F(1)|+Ge^{\frac{1}{2}}\left[\int_x^1 x^{-(\alpha+1)}dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$|F(x)|\leqslant F(1)+Ge^{\frac{1}{2}}|\alpha|^{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{\alpha}{2}}$$

e perciò esiste una costante positiva k tale che

$$(3_3)\qquad \begin{cases} |F(x)|<kx^{-\frac{\alpha}{2}} & \text{per } x<1 \\ |F(x)|<ke^{\frac{x}{2}} & \text{per } x\geqslant 1. \end{cases}$$

Poniamo [§ 1, (11)]

$$l_k^{(\alpha+1)}(x)=\frac{\Gamma^{1/2}(k+1)}{\Gamma^{1/2}(k+\alpha+2)}L_k^{(\alpha+1)}(x)=-\frac{\Gamma^{1/2}(k+1)}{\Gamma^{1/2}(k+\alpha+2)}\frac{d}{dx}L_{k+1}^{(\alpha)}$$

e

$$a_k'=\int_0^{+\infty}xp\,l_k^{(\alpha+1)}f\,dx,$$

perciò

$$f(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}a_k'l_k^{(\alpha+1)}(x).$$

Abbiamo integrando per parti e tenuto conto delle (3_1), (3_2), (3_3) e della (14_1) del § 1

$$a_k'=-\frac{\Gamma^{1/2}(k+1)}{\Gamma^{1/2}(k+\alpha+2)}\int_0^{+\infty}\left[xp\frac{d}{dx}L_{k+1}^{(\alpha)}(x)\right]f(x)dx=$$

$$=\frac{\Gamma^{1/2}(k+1)}{\Gamma^{1/2}(k+\alpha+2)}\int_0^{+\infty}F(x)\Big[p(\alpha-x)\frac{d}{dx}L_{k+1}^{(\alpha)}(x)+$$

$$+p\frac{d}{dx}L_{k+1}^{(\alpha)}(x)+px\frac{d^2}{dx^2}L_{k+1}^{(\alpha)}\Big]dx=$$

$$=-\frac{(k+1)\Gamma^{1/2}(k+1)}{\Gamma^{1/2}(k+\alpha+2)}\int_0^{+\infty}pF(x)L_{k+1}^{(\alpha)}dx\qquad[xp'=p(\alpha-x)]$$

quindi

$$(4)\qquad a_k'l_k^{(\alpha+1)}(x)=\frac{\Gamma(k+2)}{\Gamma(\alpha+k+2)}\left[\int_0^{+\infty}pF(x)L_{k+1}^{(\alpha)}(x)dx\right]\frac{d}{dx}L_{k+1}^{(\alpha)}(x)=$$

$$=a_{k+1}\frac{d}{dx}l_{k+1}^{(\alpha)}(x),$$

e perciò

$$(4')\qquad F(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}a_kl_k^{(\alpha)}(x),\qquad f(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+1}\frac{d}{dx}l_{k+1}^{(\alpha)}(x).$$

Dalla (4′) ricordando il teorema 32 del Cap. I segue, per $x\geqslant c>0$

$$-\int_x^{+\infty}F(\xi)e^{-\xi}d\xi=-a_0\int_x^{+\infty}e^{-\xi}l_0^{(\alpha)}(\xi)d\xi-\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+1}\int_x^{+\infty}e^{-\xi}l_{k+1}^{(\alpha)}(\xi)d\xi\quad(^1)$$

$$(5_1)\qquad -\int_x^{+\infty}F(\xi)e^{-\xi}d\xi=-a_0e^{-x}l_0^{(\alpha)}-\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+1}\int_x^{+\infty}e^{-\xi}l_{k+1}^{(\alpha)}(\xi)d\xi$$

$$(5_2)\qquad \int_x^{+\infty}f(\xi)e^{-\xi}d\xi=\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+1}\int_x^{+\infty}e^{-\xi}\frac{d}{d\xi}l_{k+1}^{(\alpha)}(\xi)d\xi\quad(^2)$$

---

(1) Teorema 32, osservazione 1; si faccia $f_1=F$; $f_2=e^{-\xi}$, $\theta(\xi)=e^{-\xi}\xi^{\alpha}$, $\theta_1=e^{-\xi}$, $\theta_2=\xi^{\alpha}$, $\xi^{\alpha}>\varrho$ per $\xi\geqslant c>0$.

(2) Teorema 32, osservazione 1; si faccia $f_1=f$; $f_2=e^{-\xi}$, $\theta(\xi)=e^{-\xi}\xi^{\alpha+1}$, $\theta_1=e^{-\xi}$, $\theta_2=\xi^{\alpha+1}$ e si tenga conto della (4).

e le serie del secondo membro sono entrambe assolutamente e uniformemente convergenti in $(c, +\infty)$. Osservando che

$$-\int_x^{+\infty} F(\xi)e^{-\xi}d\xi = [e^{-\xi}F(\xi)]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} e^{-\xi}f(\xi)d\xi = -e^{-x}F(x) - \int_x^{+\infty} e^{-\xi}f(\xi)d\xi$$

$$-\int_x^{+\infty} e^{-\xi}l_{k+1}^{(\alpha)}(\xi)d\xi + \int_x^{+\infty} e^{-\xi}\frac{d}{d\xi}l_{k+1}^{(\alpha)}(\xi)d\xi = [e^{-\xi}l_{k+1}^{(\alpha)}(\xi)]_x^{+\infty} = -e^{-x}l_{k+1}^{(\alpha)}(x)$$

sommando membro a membro le (5_1), (5_2) si ottiene

$$-e^{-x}F(x) = -e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty} a_k l_k^{(\alpha)}(x)$$

e perciò uniformemente in qualunque intervallo (c, d) interno a $(0, \infty)$

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k l_k^{(\alpha)}(x) \qquad \text{c. v. d.}$$

2. - Un criterio di convergenza nel punto 0 ci è assicurato dal seguente

TEOREMA. - Se

$$F(x) = F(0) + \int_0^x f(x)dx, \qquad x \geqslant 0$$

con $f(x)$ sommabile in qualunque intervallo finito, se $F(x) = O(e^{\frac{1}{2}kx})$ con $k<1$, se, posto $p(x) = e^{-x}$, $[\alpha = 0]$, l'integrale $\int_0^{+\infty} p(x)f^2(x)dx = A^2$ è convergente, si ha allora

$$F(0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k l_k(0), \qquad a_k = \int_0^{+\infty} p(x)F(x)l_k(x)dx; \qquad l_k(x) = L_k^{(0)}(x).$$

Dimostrazione. - Poniamo

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k l_k(x) + \varrho_{n+1}(x) \tag{6}$$

e stabiliamo una limitazione per $\varrho_{n+1}(x)$.

Si ha generalmente in $(0, \infty)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k l_k'(x) + \varrho'_{n+1}(x). \tag{7}$$

Avendosi $F(x) = O(e^{\frac{1}{2}kx})$ con $k<1$ l'integrale $\int_0^{+\infty} pF^2(x)dx$ è convergente e se poniamo

$$S_n = \int_0^{+\infty} p(x)F^2(x)dx - \sum_{k=0}^{n} a_k^2 \tag{8}$$

e ricordiamo il primo teorema del § 6, n.° 2, abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 0. \tag{8'}$$

Per la (6) abbiamo anche

$$S_n = \int_0^{+\infty} p(x)\Big[F(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k l_k(x)\Big]^2 dx = \int_0^{+\infty} p(x)\varrho_{n+1}^2(x)dx. \tag{9}$$

Conviene notare che se $P(x)$ è un polinomio di grado non superiore ad n risulta

$$\int_0^{+\infty} p(x)P(x)\varrho_{n+1}(x)dx = 0; \tag{10}$$

infatti $P(x)$ si esprime linearmente per $l_0(x)$, $l_1(x)$,...., $l_n(x)$ e

$$\int_0^{+\infty} p(x)l_k(x)\varrho_{n+1}(x)dx = 0 \quad \text{per } k = 0, 1, 2, ..., n.$$

Abbiamo ora

$$\int_0^{+\infty} p(x)\varrho_{n+1}^2(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\varrho_{n+1}^2(x) =$$
$$= -[e^{-x}\varrho_{n+1}^2(x)]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} e^{-x}\varrho_{n+1}(x)\varrho'_{n+1}(x)dx$$

da cui

$$\varrho_{n+1}^2(0) = -2\int_0^{+\infty} e^{-x}\varrho_{n+1}(x)\varrho'_{n+1}(x)dx + \int_0^{+\infty} e^{-x}\varrho_{n+1}^2(x)dx.$$

Dalla (7) moltiplicando per $e^{-x}\varrho_{n+1}(x)dx$, integrando tra 0 e $+\infty$, e tenuto conto della (10) si ha

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\varrho_{n+1}(x)f(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\varrho'_{n+1}(x)\varrho_{n+1}(x)dx$$

quindi

$$\varrho_{n+1}^2(0) = -2\int_0^{+\infty} e^{-x}\varrho_{n+1}(x)f(x)dx + \int_0^{+\infty} e^{-x}\varrho_{n+1}^2(x)dx$$

$$\varrho_{n+1}^2(0) \leqslant 2\left[\int_0^{+\infty} e^{-x}f^2(x)dx\right]^{1/2}\left[\int_0^{+\infty} e^{-x}\varrho_{n+1}^2(x)dx\right]^{1/2} +$$

$$+\int_0^{+\infty} e^{-x}\varrho_{n+1}^2(x)dx = 2|A|S_n^{\frac{1}{2}} + S_n$$

e per la (8′) $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho_{n+1}(0) = 0$.

3. - Prima di studiare la sviluppabilità di una funzione in serie di polinomi $H_n(x)$ vogliamo esporre un criterio di Stone [57] che in casi molto generali assicura la convergenza uniforme della serie di polinomi $H_n(x)$ relativa ad una funzione $F(x)$; sussiste infatti il seguente

Teorema. - *Sia $f(x)$ una funzione definita per qualunque valore finito di x e sommabile in qualunque intervallo finito, e posto*

$$F(x) = F(0) + \int_0^x f(x)dx, \qquad -\infty < x < +\infty \tag{11}$$

risulti

$$F(x) = O(e^{kx^2}), \quad \textit{con } k < 1. \tag{12}$$

Se posto

$$G(x) = -2xF(x) + f(x) \tag{13}$$

risulta convergente l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}G^2(x)dx, \tag{14}$$

allora la serie

$$\sum_0^\infty c_n e^{-x^2}H_n(x), \tag{15₁}$$

$$c_n = \frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}F(x)H_n(x)dx \tag{15₂}$$

converge uniformemente verso $e^{-x^2}F(x)$ in $(-\infty, +\infty)$, e la serie

$$c_0H_0(x) + c_1H_1(x) + \dots + c_nH_n(x) + \dots \tag{16}$$

converge uniformemente verso $F(x)$ in qualunque intervallo finito (¹).

Dimostrazione. - Si ha infatti con l'integrazione per parti e tenuto conto della (4) del § 2 e dell'ipotesi (12)

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}F(x)H_n(x)dx = \\ &= -\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}F(x)H'_{n+1}(x)dx = \\ &= \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} H_{n+1}(x)\left[\frac{d}{dx}(e^{-x^2}F(x))\right]dx = \\ &= \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}G(x)H_{n+1}(x)dx = C_{n+1}. \end{aligned}$$

(¹) Le serie (15) e (16) chiamansi rispettivamente di *tipo A* e di *tipo H* [Cfr. C. V. L. Charlier [9], p. 57]. Avvertiamo il lettore che se poniamo

$$\varphi_n(x) = e^{-x^2}H_n(x), \qquad f_n(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}$$

data una funzione $f(x)$, le serie

$$\sum_{n=0}^\infty a_nH_n(x), \qquad \sum_{n=0}^\infty \beta_n f_n(x), \qquad e^{\sum\limits_n^{0\dots\infty}\gamma_nH_n(x)}, \qquad \sum_{n=0}^\infty \delta_n\varphi_n(x)$$

con

$$a_n = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-x^2}H_n(x)f(x)}{2^n n!\sqrt{\pi}}dx, \qquad \beta_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)f(x)dx,$$

$$\gamma_n = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-x^2}H_n(x)\log f(x)}{2^n n!\sqrt{\pi}}dx, \qquad \delta_n = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{H_n(x)f(x)}{2^n n!\sqrt{\pi}}dx$$

chiamansi secondo Charlier rispettivamente di *tipo H, h, C, A.*

Avendosi dalle (10) del § 4, qualunque sia x

$$|H_n(x)| < k e^{\frac{x^2}{2}} 2^{\frac{n}{2}} (n!)^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{4}} (1+|x|^{\frac{5}{2}}), \qquad k \text{ costante,}$$

ne viene

$$|c_n e^{-x^2} H_n(x)| < k e^{-\frac{x^2}{2}} 2^{\frac{n}{2}} (n!)^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{4}} (1+|x|^{\frac{5}{2}}) |C_{n+1}|$$

$$< k' e^{-l\frac{x^2}{2}} 2^{\frac{n+1}{2}} [(n+1)!]^{\frac{1}{2}} (n+1)^{-\frac{3}{4}} |C_{n+1}|$$

$$< k' e^{-l\frac{x^2}{2}} \{2^{n+1}(n+1)!\, C_{n+1}^2 + (n+1)^{-\frac{3}{2}}\} = e^{-l\frac{x^2}{2}} T_n$$

dove $0 < l < 1$, k' è una costante positiva indipendente da n, e

$$T_n = 2^{n+1}(n+1)!\, C_{n+1}^2 + (n+1)^{-\frac{3}{2}}.$$

La supposta convergenza di $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} G^2(x)\,dx$ porta per la limitazione di BESSEL la convergenza della serie formata dalla somma dei quadrati dei coefficienti di FOURIER di $e^{-\frac{x^2}{2}} G$ rispetto al sistema normalizzato $\{e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)/\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}\}$, cioè della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) G(x)\,dx\right]^2 = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n n!\sqrt{\pi}\, C_n^2,$$

ne viene che la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} T_n$ (¹) è convergente e perciò la serie $\sum_{n}^{0\dots\infty} c_n e^{-x^2} H_n(x)$ è uniformemente convergente in $(-\infty, +\infty)$ e la sua somma è una funzione continua $F^*(x)$,

$$(17_1) \qquad F^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-x^2} H_n(x)$$

(¹) Come è ben noto la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-\frac{3}{2}}$ è convergente.

con

$$(17_2) \qquad F^*(x) = O(e^{-l\frac{x^2}{2}}).$$

Abbiamo ora per $N \geqslant m$, tenuto conto della convergenza della serie $\sum_{0}^{\infty} T_n$

$$\left|\frac{1}{2^m m!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(x) H_m(x)\,dx - c_m\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2^m m!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [F^*(x) - \sum_{n=0}^{N} c_n H_n(x) e^{-x^2}] H_m(x)\,dx\right| =$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) \sum_{N+1}^{\infty} c_n e^{-x^2} H_n(x)\,dx\right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-l\frac{x^2}{2}} |H_m(x)| \sum_{N+1}^{\infty} T_n\,dx =$$

$$= o(1)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-l\frac{x^2}{2}} |H_m(x)|\,dx\right) = o(1)$$

perciò

$$c_m = \frac{1}{2^m m!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(x) H_m(x)\,dx.$$

Confrontando con la (15_2) abbiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [F^*(x) e^{\frac{l}{p}x^2} - e^{-\left(1-\frac{l}{p}\right)x^2} F(x)] e^{-\frac{l}{p}x^2} H_n(x)\,dx = 0,$$

dove con p abbiamo indicato un intero positivo >2, tale che

$$k + \frac{l}{p} - 1 < 0.$$

Essendo la differenza $F^*(x) e^{\frac{l}{p}x^2} - e^{-\left(1-\frac{l}{p}\right)x^2} F(x)$ di quadrato sommabile in $(-\infty, +\infty)$ ne viene per quanto abbiamo visto nel § 5, n.° 3, *d*) che la funzione $e^{\frac{l}{p}x^2}(F^*(x) - e^{-x^2}F(x))$ è generalmente nulla, e per la continuità di F e F^*, $F^*(x) = e^{-x^2}F(x)$, e perciò uniformemente in $(-\infty, +\infty)$

$$e^{-x^2} F(x) = \sum_{n}^{0\dots\infty} c_n e^{-x^2} H_n(x),$$

e si ha quindi uniformemente in qualunque intervallo *finito*

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x) \qquad \text{c. v. d.}$$

Osservazione. - Dalla (17_2) si ha $F(x)=e^{x^2}F^*(x)=O(e^{\left(1-\frac{l}{2}\right)x^2})$ che è conseguenza della (12), quando sia $k\leqslant 1/2$ (1).

§ 8. - Convergenza puntuale delle serie di tipo h e criterio sufficiente di convergenza di Uspensky [62].

1. Seconda approssimazione delle funzioni $f_n(x)$. - 2. La somma dei primi n termini di una serie di tipo h. - 3. Un'equazione funzionale per $k_n(x,\alpha)=[f_{n+1}(x)f_n(\alpha)-f_{n+1}(\alpha)f_n(x)]/(\alpha-x)$. - 4. Espressione assintotica di $k_n(x,\alpha)$. - 5. Limitazione degli integrali $\int_g^{+\infty}[k_n(x,\alpha)]^2d\alpha$, $\int_{-\infty}^{-g}[k_n(x,\alpha)]^2d\alpha$. - 6. Criterio di convergenza di USPENSKY.

1. - Abbiamo definito nel § 4 le funzioni $f_n(x)$ con la relazione

$$f_n(x)=\pi^{-\frac{1}{4}}(2^n n!)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x^2}H_n(x) \tag{1}$$

e abbiamo trovato che per n *pari* si ha [§ 4, (8_1), (9_1)]

$$f_n(x)=A_n\left(1-\frac{\varepsilon_1}{8n}\right)\frac{1}{n^{1/4}}\cos[x\sqrt{2n+1}]-\frac{h(n,x)}{\sqrt{2n+1}} \tag{2_1}$$

$$f_{n+1}(x)=-A_n\left(1-\frac{\varepsilon_2}{8n}\right)\frac{1}{n^{1/4}}\operatorname{sen}[x\sqrt{2n+3}]-\frac{h(n+1,x)}{\sqrt{2n+3}} \tag{2_2}$$

con

$$A_n=(-1)^{\frac{n}{2}}2^{\frac{1}{4}}\pi^{-\frac{1}{2}} \tag{3}$$

e

$$h(n,x)=\int_0^x \alpha^2 f_n(\alpha)\operatorname{sen}[\sqrt{2n+1}(\alpha-x)]d\alpha, \quad 0<\varepsilon_1<2, \quad 0<\varepsilon_2<4,$$

$$|h(n,x)|<|x|^{\frac{5}{2}}.$$

(1) Per un'estensione di questo teorema al caso che F possegga derivate di ordine k, cfr. C. V. L. CHARLIER, op. cit. [9], pp. 71-73.

Sostituendo in quest'ultima ad $f_n(x)$ l'espressione (2_1) otteniamo per n *pari*

$$h(n,x)=A_n\left(1-\frac{\varepsilon_1}{8n}\right)\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\int_0^x \alpha^2\cos[\alpha\sqrt{2n+1}]\operatorname{sen}[(\alpha-x)\sqrt{2n+1}]d\alpha- \tag{4_1}$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\int_0^x \alpha^2\operatorname{sen}[\sqrt{2n+1}(\alpha-x)]h(n,\alpha)d\alpha$$

$$h(n+1,x)= \tag{4_2}$$
$$=-A_n\left(1-\frac{\varepsilon_2}{8n}\right)\frac{1}{n^{1/4}}\int_0^x \alpha^2\operatorname{sen}[\alpha\sqrt{2n+3}]\operatorname{sen}[(\alpha-x)\sqrt{2n+3}]d\alpha-$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2n+3}}\int_0^x \alpha^2\operatorname{sen}[\sqrt{2n+3}(\alpha-x)]h(n+1,\alpha)d\alpha$$

talchè posto

$$s(n,x)=\int_0^x \alpha^2\cos[\alpha\sqrt{2n+1}]\operatorname{sen}[(\alpha-x)\sqrt{2n+1}]d\alpha \tag{5_1}$$

$$\sigma(n,x)=\int_0^x \alpha^2\operatorname{sen}[\alpha\sqrt{2n+1}]\operatorname{sen}[(\alpha-x)\sqrt{2n+1}]d\alpha \tag{5_2}$$

$$t(n,x)=\int_0^x \alpha^2\operatorname{sen}[(\alpha-x)\sqrt{2n+1}]h(n,\alpha)d\alpha \tag{5_3}$$

otteniamo per n *pari*

$$f_n(x)=A_n\left(1-\frac{\varepsilon_1}{8n}\right)\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\left\{\cos[x\sqrt{2n+1}]-\frac{s(n,x)}{\sqrt{2n+1}}\right\}+\frac{t(n,x)}{2n+1} \tag{6_1}$$

$$f_{n+1}(x)=-A_n\left(1-\frac{\varepsilon_2}{8n}\right)\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\left\{\operatorname{sen}[x\sqrt{2n+3}]-\frac{\sigma(n+1,x)}{\sqrt{2n+3}}\right\}+\frac{t(n+1,x)}{2n+3}. \tag{6_2}$$

Dalle (5_1) e (5_2) seguono per qualunque n le limitazioni

$$|s(n,x)|<|x|^3, \qquad |\sigma(n,x)|<|x|^3, \tag{7_1}$$

$$\left|\frac{\partial s}{\partial x}\right|<\sqrt{2n+1}\,|x|^3, \qquad \left|\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right|<\sqrt{2n+1}\,|x|^3, \tag{7_2}$$

e se nell'espressione (5_3) di $t(n,x)$ per $h(n,\alpha)$ sostituiamo le (4) otteniamo

$$\left\{\begin{aligned}&|t(n,x)|=[|x|^6+|x|^{\frac{17}{2}}]O(n^{-\frac{1}{4}})\\&\left|\frac{\partial t(n,x)}{\partial x}\right|=[|x|^6+|x|^{\frac{17}{2}}]O(n^{\frac{1}{4}}).\end{aligned}\right. \tag{7_3}$$

Delle formule (5), (6), (7) avremo bisogno tra poco nello studio degli sviluppi in serie rispetto al sistema ortogonale e normale $\{f_n(x)\}$.

2. - Sia $f(x)$ sommabile in qualunque intervallo finito e ad integrale convergente in $(-\infty, +\infty)$, e si consideri la sua serie di FOURIER di tipo h

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x) \tag{8_1}$$

con

$$c_n=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f_n(x)dx\,; \quad (^1) \tag{8_2}$$

di questa serie vogliamo studiare la convergenza puntuale.

La formula di CHRISTOFFEL del § 2 [n.° 4, (11)] può scriversi

$$\sum_{k=0}^{n} f_k(x)f_k(y)=\sqrt{\frac{n+1}{2}}\,\frac{f_{n+1}(x)f_n(y)-f_{n+1}(y)f_n(x)}{y-x}$$

talchè per la somma $S_n(x)$ dei primi n termini della serie (8_1) si ha

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k f_k(x)=\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\int_{-\infty}^{+\infty} f(a)f_k(a)\,da=\int_{-\infty}^{+\infty} f(a)\left[\sum_{k=0}^{n} f_k(x)f_k(a)\right]da$$

e perciò

$$S_n(x)=\sqrt{\frac{n+1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(a)\,\frac{f_{n+1}(x)f_n(a)-f_{n+1}(a)f_n(x)}{a-x}\,da,$$

---

(1) La convergenza dell'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ porta di conseguenza la convergenza degli integrali $\int_{-\infty}^{+\infty} ff_n dx$; infatti $e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)$ in $(a, +\infty)$ per a sufficientemente grande, è monotona e tendente a zero quando $n\to\infty$, quindi per $a<k$ e per il secondo teorema della media

$$\int_a^k ff_n dx=f_n(a)\int_a^{k_1} f dx+f_n(k)\int_{k_1}^{k} f dx, \qquad a<k_1<k$$

e da questa si deduce subito la convergenza di $\int_{-\infty}^{+\infty} ff_n dx$.

od anche posto

$$\boxed{k_n(x, a)=[f_{n+1}(x)f_n(a)-f_{n+1}(a)f_n(x)]/(a-x)} \tag{9}$$

è

$$\boxed{S_n(x)=\sqrt{\frac{n+1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} k_n(x, a)f(a)\,da}\,. \tag{10}$$

3. - Per studiare il comportamento dell'integrale (10) quando $n\to\infty$ converrà prendere in esame la funzione $k_n(x, a)$ per la quale troveremo subito una notevole relazione funzionale.

Si osservi che se $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}P(x)$ con $P(x)$ polinomio di grado n, abbiamo $S_n(x)=f(x)$, talchè se prendiamo per $f(x)$

$$f(x)=\frac{f_{n+1}(\xi)f_n(x)-f_{n+1}(x)f_n(\xi)}{x-\xi}=k_n(\xi, x)$$

dove ξ è un parametro, la (10) diventa

$$\frac{f_{n+1}(\xi)f_n(x)-f_{n+1}(x)f_n(\xi)}{x-\xi}=\sqrt{\frac{n+1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} k_n(x, a)k_n(\xi, a)\,da$$

dalla quale passando al limite per $\xi\to x$ otteniamo la relazione cercata

$$\boxed{f_{n+1}(x)f_n'(x)-f'_{n+1}(x)f_n(x)=\sqrt{\frac{n+1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}[k_n(x, a)]^2 da}\,. \tag{11}$$

4. - Passiamo ora a determinare l'espressione assintotica di $k_n(x, a)$.

Tenuto conto delle (6_1) e (6_2) di 1 abbiamo

$$\sqrt{\frac{n+1}{2}}\,[-f_{n+1}(x)f_n(a)+f_{n+1}(a)f_n(x)]=$$
$$=C_1^{(n)}M_1^{(n)}+C_2^{(n)}M_2^{(n)}+C_3^{(n)}M_3^{(n)}+M_4^{(n)} \tag{12}$$

con

$$M_1^{(n)}=\text{sen}\,[x\sqrt{2n+3}]\cos[a\sqrt{2n+1}]-$$
$$-\text{sen}\,[a\sqrt{2n+3}]\cos[x\sqrt{2n+1}] \tag{13_1}$$

$$M_2^{(n)}=\text{sen}\,[a\sqrt{2n+3}]s(n, x)-\text{sen}\,[x\sqrt{2n+3}]s(n, a) \tag{13_2}$$

$$M_3^{(n)}=\cos[x\sqrt{2n+1}]\sigma(n+1, a)-\cos[a\sqrt{2n+1}]\sigma(n+1, x) \tag{13_3}$$

$$M_4^{(n)}=\frac{1}{n}\,\psi(a, x, n) \tag{13_4}$$

e

$$(14)\qquad \begin{cases} C_1^{(n)}=\sqrt{\dfrac{2}{\pi^2}}\left(1-\dfrac{\varepsilon_1}{8n}\right)\left(1-\dfrac{\varepsilon_2}{8n}\right)\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{n+1}{2}}, \\ C_2^{(n)}=C_1^{(n)}\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}, \qquad C_3^{(n)}=C_1^{(n)}\dfrac{1}{\sqrt{2n+3}}, \end{cases}$$

$$(15)\qquad \psi(x,a,n)=\frac{n}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}C_1^{(n)}[\sigma(n+1,x)s(n,a)-\sigma(n+1,a)s(n,x)]+$$

$$+\frac{n}{2n+3}A_n\left(1-\frac{\varepsilon_1}{8n}\right)\sqrt{\frac{n+1}{2}}\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\left\{\left[\cos x\sqrt{2n+1}-\frac{s(n,x)}{\sqrt{2n+1}}\right]t(n+1,a)-\right.$$

$$\left.-\left[\cos a\sqrt{2n+1}-\frac{s(n,a)}{\sqrt{2n+1}}\right]t(n+1,x)\right\}+$$

$$+\frac{n}{2n+1}A_n\left(1-\frac{\varepsilon_2}{8n}\right)\sqrt{\frac{n+1}{2}}\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\left\{\left[\operatorname{sen} x\sqrt{2n+3}-\frac{\sigma(n+1,x)}{\sqrt{2n+3}}\right]t(n,a)-\right.$$

$$\left.-\left[\operatorname{sen} a\sqrt{2n+3}-\frac{\sigma(n+1,a)}{\sqrt{2n+3}}\right]t(n,x)\right\}+$$

$$+\frac{n}{(2n+1)(2n+3)}\sqrt{\frac{n+1}{2}}[t(n+1,a)t(n,x)-t(n+1,x)t(n,a)].$$

a). Posto

$$(16)\qquad N=\frac{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1}}$$

si ha

$$M_1^{(n)}=\frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x\sqrt{2n+3}+a\sqrt{2n+1})+\operatorname{sen}(x\sqrt{2n+3}-a\sqrt{2n+1})-$$

$$-\operatorname{sen}(a\sqrt{2n+3}+x\sqrt{2n+1})-\operatorname{sen}(a\sqrt{2n+3}-x\sqrt{2n+1})]=$$

$$=\cos(x+a)\frac{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}}{2}\operatorname{sen}(x-a)\frac{\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1}}{2}+$$

$$+\cos(x+a)\frac{\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1}}{2}\operatorname{sen}(x-a)\frac{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}}{2}=$$

$$=\cos[N(x+a)]\operatorname{sen}\frac{x-a}{2N}+\cos\frac{x+a}{2N}\operatorname{sen}[N(x-a)]$$

quindi

$$M_1^{(n)}=\cos[N(x+a)]\operatorname{sen}\frac{x-a}{2N}-$$

$$-2\operatorname{sen}^2\frac{x+a}{4N}\operatorname{sen}[N(x-a)]+\operatorname{sen}[N(x-a)]$$

e perciò

$$(17_1)\qquad \boxed{M_1^{(n)}=\operatorname{sen}[N(x-a)]+\frac{(x-a)T_1^{(n)}(x,a)}{N}}$$

dove, essendo

$$T_1^{(n)}(x,a)=\frac{1}{2}\cos[N(x+a)]\frac{\operatorname{sen}\frac{x-a}{2N}}{(x-a)/2N}-\frac{1}{8}\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x+a}{4N}}{[(x+a)/4N]^2}\frac{\operatorname{sen}[N(x-a)]}{N(x-a)}(x+a)^2$$

si ha per x ed a variabili in intervalli finiti

$$(17_2)\qquad |T_1^{(n)}(x,a)|<L_1,$$

con L_1 costante indipendente da n.

b). Tenuto conto delle (5), (7), (15) si trova

$$\frac{\partial}{\partial a}\psi(a,x,n)=\sqrt{n}\,\psi_1(a,x,n)$$

dove $\psi_1(a,x,n)$ è minore in valore assoluto di una costante indipendente da n quando x e a variano in intervalli finiti; e poichè $\psi(x,x,n)=0$ ne viene per il teorema della media, e per la (16)

$$(18_1)\qquad \frac{1}{n}\psi(a,x,n)=(x-a)\frac{T_4^{(n)}(x,a)}{N}$$

$$(18_2)\qquad |T_4^{(n)}(x,a)|<L_4$$

essendo L_4 una costante indipendente da n, quando x ed a variano in intervalli finiti.

c). Dalla (5_1) si ha

$$s(n,x)=\frac{1}{2}\int_0^x \alpha^2[\operatorname{sen}(2\alpha-x)\sqrt{2n+1}-\operatorname{sen}x\sqrt{2n+1}]d\alpha=$$

$$=-\frac{1}{6}x^3\operatorname{sen}[x\sqrt{2n+1}]+\frac{R(n,x)}{\sqrt{2n+1}}$$

con

$$R(n,x)=-\frac{1}{4}x^2\cos[x\sqrt{2n+1}]+\frac{1}{2}\int_0^x \alpha\cos\sqrt{2n+1}(2\alpha-x)d\alpha;$$

abbiamo allora per la (13_2)

$$M_2^{(n)}=\frac{a^3}{6}\operatorname{sen}[a\sqrt{2n+1}]\operatorname{sen}[x\sqrt{2n+3}]-$$

$$-\frac{x^3}{6}\operatorname{sen}[x\sqrt{2n+1}]\operatorname{sen}[a\sqrt{2n+3}]-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}[\operatorname{sen}(x\sqrt{2n+3})R(n,a)-\operatorname{sen}(a\sqrt{2n+3})R(n,x)].$$

Ma è

$$\frac{a^3}{6}\,\mathrm{sen}\,[a\sqrt{2n+1}]\,\mathrm{sen}\,[x\sqrt{2n+3}]-\frac{x^3}{6}\,\mathrm{sen}\,[x\sqrt{2n+1}]\,\mathrm{sen}\,[a\sqrt{2n+3}]=$$
$$=\frac{a^3-x^3}{6}\,\mathrm{sen}\,[x\sqrt{2n+1}]\,\mathrm{sen}\,[a\sqrt{2n+3}]+$$
$$+\frac{a^3}{6}\,[\mathrm{sen}\,(a\sqrt{2n+1})\,\mathrm{sen}\,(x\sqrt{2n+3})-$$
$$-\mathrm{sen}\,(x\sqrt{2n+1})\,\mathrm{sen}\,(a\sqrt{2n+3})]=$$
$$=\frac{a^3-x^3}{6}\,\mathrm{sen}\,[x\sqrt{2n+1}]\,\mathrm{sen}\,[a\sqrt{2n+3}]+$$
$$+\frac{a^3}{6}\left[\mathrm{sen}\,\frac{x-a}{2N}\,\mathrm{sen}\,[N(x+a)]-\mathrm{sen}\,\frac{x+a}{2N}\,\mathrm{sen}\,[N(x-a)]\right],$$

e se teniamo conto che $\frac{\partial R(n,x)}{\partial x}=\sqrt{2n+1}R_1$ con $|R_1|\leq x^2$ troviamo

$$\frac{|M_2^{(n)}|}{|x-a|}<|x^2+ax+a^2|+$$
$$+\frac{|a|^3}{6}\left|\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{sen}\,\frac{x-a}{2N}}{\frac{x-a}{2N}}\,\frac{\mathrm{sen}\,N(x+a)}{N(x+a)}\,(x+a)-\frac{\mathrm{sen}\,\frac{x+a}{2N}}{\frac{x+a}{2N}}\,\frac{x+a}{2}\,\frac{\mathrm{sen}\,N(x-a)}{N(x-a)}\right|+$$
$$+|R_1|<|x^2+xa+a^2|+\frac{a^3}{6}|x+a|+|R_1|$$

quindi

(19₁) $$M_2^{(n)}=(x-a)T_2^{(n)}(x,a)$$

(19₂) $$|T_2^{(n)}(x,a)|<L_2,$$

essendo L_2 una costante indipendente da n, quando x ed a variano in intervalli finiti.

Si avrà analogamente

(20₁) $$M_3^{(n)}=(x-a)T_3^{(n)}(x,a)$$

(20₂) $$|T_3^{(n)}(x,a)|<L_3,$$

con L_3 costante indipendente da n quando x ed a variano in intervalli finiti, e dalle (12), (13), (14), (15), (17), (18), (19), (20), tenuto conto che

$$C_1^{(n)}=\frac{1}{\pi}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right],\qquad C_2^{(n)}=\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{N}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$
$$C_3^{(n)}=\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{N}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

si ricava

(21₁) $$\sqrt{\frac{n+1}{2}}\,[-f_{n+1}(x)f_n(a)+f_{n+1}(a)f_n(x)]=\frac{1}{\pi}\left[\mathrm{sen}\,[N(x-a)]+\frac{(x-a)T^{(n)}(x,a)}{N}\right]$$

con

(21₂) $$|T^{(n)}(x,a)|<L$$

essendo L una costante indipendente da n quando x ed a variano in intervalli finiti, e perciò per la (9)

(22) $$\boxed{\sqrt{\frac{n+1}{2}}\,k_n(x,a)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\mathrm{sen}\,N(x-a)}{x-a}+\frac{T^{(n)}(x,a)}{N}\right]}$$

dove N ha l'espressione (16), e $T^{(n)}(x,a)$ soddisfa la (21₂).

Si ha ancora dalla (21₁), dividendo per $x-a$ e passando al limite per $a\to x$

$$\sqrt{\frac{n+1}{2}}\,[f_{n+1}(x)f_n'(x)-f'_{n+1}(x)f_n(x)]=\frac{N}{\pi}+\frac{T^{(n)}(x,x)}{N}$$

e per la (11)

$$\sqrt{\frac{n+1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}[k_n(x,a)]^2da=\sqrt{\frac{2}{n+1}}\left[\frac{N}{\pi}+\frac{T^{(n)}(x,x)}{N}\right];$$

ma si ha

$$N\sqrt{\frac{2}{n+1}}=2+O\left(\frac{1}{n}\right),\qquad \frac{1}{N}=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

quindi

(23) $$\sqrt{\frac{n+1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}[k_n(x,a)]^2da=\frac{2}{\pi}+\frac{E(x)}{\sqrt{n}}$$

con $E(x)$ in valore assoluto inferiore ad una quantità finita quando x varia in un intervallo finito.

5. - Facciamo variare a in un intervallo finito $(-g,g)$ ed x in un intervallo (a,b) *interno* a $(-g,g)$; si ha

(24) $$\sqrt{\frac{n+1}{2}}\int_{-g}^{g}[k_n(x,a)]^2da=\frac{2}{\pi^2}\,\frac{1}{\sqrt{2n+2}}\int_{-g}^{g}\left[\frac{\mathrm{sen}\,N(x-a)}{x-a}+\frac{T^{(n)}(x,a)}{N}\right]^2da.$$

Abbiamo

$$\frac{1}{\sqrt{2n+2}}\int_{-g}^{g}\frac{\operatorname{sen}^2 N(x-a)}{(x-a)^2}\,da=\frac{N}{\sqrt{2n+2}}\int_{-g}^{g}\frac{\operatorname{sen}^2 N(x-a)}{N^2(x-a)^2}\,Nda$$

ma è

$$\frac{N}{\sqrt{2n+2}}=1+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\int_{-g}^{g}\frac{\operatorname{sen}^2 N(x-a)}{N^2(x-a)^2}\,Nda=\int_{-N(g+x)}^{N(g-x)}\frac{\operatorname{sen}^2 v}{v^2}\,dv=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}^2 v}{v^2}\,dv-$$

$$-\int_{-\infty}^{-N(g+x)}\frac{\operatorname{sen}^2 v}{v^2}\,dv-\int_{N(g-x)}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}^2 v}{v^2}\,dv=\pi+O\left(\frac{1}{N}\right)$$

uniformemente per x variabile in (a, b), (¹)

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2n+2}}\int_{-g}^{g}\frac{\operatorname{sen} N(x-a)}{N(x-a)}\,T^{(n)}(x,a)\,da\right|<\frac{1}{\sqrt{2n+2}}\int_{-g}^{g}\left|T^{(n)}(x,a)\right|da=O\left(\frac{1}{N}\right),$$

e si ha perciò dalla (24)

$$\sqrt{\frac{n+1}{2}}\int_{-g}^{g}[k_n(x,a)]^2\,da=\frac{2}{\pi}+O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Confrontando con la (23) abbiamo allora

$$\sqrt{\frac{n+1}{2}}\int_{+g}^{+\infty}[k_n(x,a)]^2\,da=O\left(\frac{1}{N}\right),$$

$$\sqrt{\frac{n+1}{2}}\int_{-\infty}^{-g}[k_n(x,a)]^2\,da=O\left(\frac{1}{N}\right),$$

(¹) Si noti che

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}^2 v}{v^2}\,dv=2\int_{0}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}^2 v}{v^2}\,dv=2\left[-\frac{1}{v}\operatorname{sen}^2 v\right]_0^{+\infty}+$$

$$+4\int_{0}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} v\cos v}{v}\,dv=2\int_{0}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} 2v}{2v}\,d2v=\pi;$$

$$\left|\int_{N(g-x)}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}^2 v}{v^2}\,dv\right|<\int_{N(g-x)}^{+\infty}\frac{1}{v^2}\,dv=\left[-\frac{1}{v}\right]_{N(g-x)}^{+\infty}=\frac{1}{N(g-x)}.$$

e ne segue che fissato un intervallo (a, b) *interno* a $(-g, g)$ esiste una costante positiva Γ tale che per qualunque n e per x variabile in (a, b) si ha

$$\boxed{\int_{-\infty}^{-g}[k_n(x,a)]^2\,da<\frac{2\Gamma^2}{n+1},\qquad \int_{g}^{+\infty}[k_n(x,a)]^2\,da<\frac{2\Gamma^2}{n+1}}\,. \tag{25}$$

Evidentemente quest'ultime sussistono per qualunque $g_1>g$.

6. - Siamo ora in grado di dimostrare il criterio di convergenza puntuale di USPENSKY.

Supponiamo che x vari in un intervallo *finito* (a, b) e sia $(-g, g)$ un intervallo che contenga nel suo *interno* (a, b).

Facciamo l'ipotesi che sia convergente l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(x)\,dx$$

e fissato $\sigma>0$ si determini $g_1>g$ in modo che

$$\int_{-\infty}^{-g_1}f^2(x)\,dx<\sigma^2,\qquad \int_{g_1}^{+\infty}f^2(x)\,dx<\sigma^2.$$

Ricordando la formula (10) che dà la somma dei primi n termini della serie (8_1) si ha

$$S_n(x)=\sqrt{\frac{n+1}{2}}\int_{-g_1}^{g_1}k_n(x,a)f(a)\,da+ \tag{26}$$

$$+\sqrt{\frac{n+1}{2}}\int_{-\infty}^{-g_1}k_n(x,a)f(a)\,da+\sqrt{\frac{n+1}{2}}\int_{g_1}^{+\infty}k_n(x,a)f(a)\,da,$$

e per la limitazione di BUNIKOWSKY-SCHWARZ si hanno per il secondo e terzo integrale le limitazioni

$$\left|\sqrt{\frac{n+1}{2}}\int_{-\infty}^{-g_1}k_n(x,a)f(a)\,da\right|\leqq\sqrt{\frac{n+1}{2}}\left[\int_{-\infty}^{-g_1}k_n^2(x,a)\,da\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_{-\infty}^{-g_1}f^2(a)\,da\right]^{\frac{1}{2}}<\Gamma\sigma \tag{27_1}$$

$$\left|\sqrt{\frac{n+1}{2}}\int_{g_1}^{+\infty}k_n(x,a)f(a)\,da\right|\leqq\sqrt{\frac{n+1}{2}}\left[\int_{g_1}^{+\infty}k_n^2(x,a)\,da\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_{g_1}^{+\infty}f^2(a)\,da\right]^{\frac{1}{2}}<\Gamma\sigma \tag{27_2}$$

qualunque sia n e qualunque sia x in (a, b).

Si ha d'altra parte per la (22)

$$(28)\qquad \sqrt{\frac{n+1}{2}}\int_{-g_1}^{g_1} k_n(x, a)f(a)da = \frac{1}{\pi}\int_{-g_1}^{g_1} f(a)\frac{\operatorname{sen} N(x-a)}{x-a}da + \frac{1}{\pi N}\int_{-g_1}^{g_1} T^{(n)}(x, a)f(a)da$$

e per la (21_2) un intero n_0 può determinarsi tale che per $n > n_0$ risulti [per $n \to \infty$ anche $N \to \infty$]

$$(27_3)\qquad \frac{1}{\pi N}\left|\int_{-g_1}^{g_1} T^{(n)}(x, a)f(a)da\right| < \sigma,$$

e dalle (26), (27_1), (27_2), (27_3), (28) risulta per $n > n_0$ e qualunque sia x in (a, b)

$$\left|S_n(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-g_1}^{g_1} f(a)\frac{\operatorname{sen} N(x-a)}{x-a}da\right| < \sigma(1+2\Gamma).$$

Ricordando allora i risultati del Cap. II, § 4, abbiamo dimostrato il seguente teorema di USPENSKY [62]:

Se $f(x)$ è una funzione definita in $(-\infty, +\infty)$ sommabile in qualunque intervallo finito, e se i due integrali

$$(29)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)dx$$

sono convergenti, allora la serie

$$(30_1)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x),$$

$$(30_2)\qquad c_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f_n dx,$$

$$(30_3)\qquad f_n(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2} H_n(x)}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}$$

si comporta in un punto x_0, a distanza finita, come la serie trigonometrica di Fourier di una funzione che coincide con $f(x)$ in un intorno comunque piccolo (x_0-h, x_0+h) di x_0.

In particolare se $f(x)$ è a variazione limitata in un intorno (x_0-h, x_0+h) di x_0 si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0+) + f(x_0-)],$$

ed ancora se $f(x)$ è continua e a variazione limitata in (a, b), la serie (30_1) converge uniformemente verso $f(x)$ in qualunque intervallo *interno* ad (a, b) (1).

(1) Per l'applicazione del procedimento di sommazione (C, δ) alla serie (30_1) il lettore consulti la memoria di KOGBETLIANTZ [30 *b*)], la quale contiene anche un'ampia bibliografia sugli sviluppi in serie di polinomi $H_n(x)$.

CAPITOLO V.

Integrale di Stieltjes.

§ 1. - Definizione di integrale di Stieltjes.

1. - Sia $f(t)$ una funzione definita nei punti t di un tratto $I=(a, b)$; con i simboli

$$M(f;\ I), \qquad m(f;\ I)$$

indichiamo rispettivamente il limite superiore e il limite inferiore dei valori di $f(t)$ in I, e con $\omega(f;\ I)$ la differenza $M(f;\ I)-m(f;\ I)$, cioè l'*oscillazione* di $f(t)$ in I.

Se $I'=(a', b')$, $a'<b'$, è un tratto di I, coi simboli $f(I')$, $[f(t)]_{a'}^{b'}$ indicheremo l'incremento di $f(t)$ relativo ad I', cioè

$$f(I')=[f(t)]_{a'}^{b'}=f(b')-f(a'), \qquad I'=(a', b'), \qquad a'<b'.$$

Se $f(t)$ è a variazione limitata in I, indicheremo la sua variazione totale in I col simbolo

$$V(f;\ I).$$

Dato un tratto finito I, se i tratti $I_1, I_2, \dots, I_n$ rappresentano una decomposizione di I in tratti senza punti interni comuni due a due, supposto cioè $I=I_1+I_2+\dots+I_n$, diremo che $D=\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ è una divisione di I, e col simbolo $\delta(D)$ indicheremo la massima ampiezza dei tratti $I_1, I_2, \dots, I_n$.

Definizione 1. - Se $f(t)$ e $\varphi(t)$ sono due funzioni limitate in I, chiamiamo limite superiore e limite inferiore di $f(t)$ relativi alla fun-

zione $\varphi(t)$ e al tratto $I'=(a', b')$ di I i numeri $N_{\varphi}(f;\ I')$, $n_{\varphi}(f;\ I')$ così definiti

$$\left.\begin{aligned} N_{\varphi}(f;\ I')&=M(f;\ I') \\ n_{\varphi}(f;\ I')&=m(f;\ I') \end{aligned}\right\} \text{ se } \varphi(I')=\varphi(b')-\varphi(a')\geqq 0,$$

$$\left.\begin{aligned} N_{\varphi}(f;\ I')&=m(f;\ I') \\ n_{\varphi}(f;\ I')&=M(f;\ I') \end{aligned}\right\} \text{ se } \varphi(I')=\varphi(b')-\varphi(a')< 0.$$

Definizione 2. - Se $f(t)$ e $\varphi(t)$ sono due funzioni limitate in un tratto finito $I=(a, b)$ [1] chiameremo ***somme approssimate superiori*** (per eccesso) ***e inferiori*** (per difetto) di $f(t)$ relative alla funzione $\varphi(t)$ e alla divisione $D=\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ di I, e le indicheremo con i simboli

$$S_{\varphi}(f;\ D), \qquad s_{\varphi}(f;\ D),$$

le due somme

$$(1_1) \qquad S_{\varphi}(f;\ D)=\sum_k^{1\dots n} N_{\varphi}(f;\ I_k)\varphi(I_k),$$

$$(1_2) \qquad s_{\varphi}(f;\ D)=\sum_k^{1\dots n} n_{\varphi}(f;\ I_k)\varphi(I_k).$$

Per ogni divisione D di I si ha

$$(2) \qquad S_{\varphi}(f;\ D)\geqq s_{\varphi}(f;\ D)$$

e se la $\varphi(t)$ è a variazione limitata in I

$$(3) \quad M(|f|;\ I)\,V(\varphi;\ I)\geqq S_{\varphi}(f;\ D)\geqq s_{\varphi}(f;\ D)\geqq -M(|f|;\ I)\,V(\varphi;\ I).$$

2. - TEOREMA 1. - Sia $f(t)$ una funzione limitata nel tratto I, $\varphi(t)$ una funzione a variazione limitata in I, e si consideri una successione $\{D_n\}$ di divisioni di I

$$D_1, \quad D_2, \dots, \quad D_n, \dots$$

la quale abbia le due proprietà:

$$a) \qquad \lim_{n\to\infty}\delta(D_n)=0,$$

---

[1] In tutto questo capitolo salvo che nei §§ 7 a 9 intendiamo riferirci a tratti finiti. Per la materia dei §§ 1-6 cfr. HOBSON [25, *a*), pp. 538-561]; LEBESGUE [37, *b*)]; SAKS [53]; NALLI [41] e ANDREOLI [2].

b) per ogni punto t_0 di discontinuità di $\varphi(t)$ [1] esista un intero n_0 tale che per $n \geqslant n_0$ il punto t_0 è un estremo di almeno un tratto appartenente a D_n [2];

vogliamo allora dimostrare che esistono i due limiti

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} S_\varphi(f;\ D_n)$, (5) $\lim\limits_{n\to\infty} s_\varphi(f;\ D_n)$

e questi limiti sono indipendenti dalla particolare successione $\{D_n\}$ considerata.

Dimostrazione. - Supponiamo dapprima $\varphi(t)$ monotona in I, per esempio non decrescente, e proviamo l'esistenza del limite (4); in modo analogo si ragionerà per il limite (5).

Si consideri una successione $\{\bar{D}_m\}$ di divisioni di I che abbia le proprietà (*a*) e (*b*), coincidente tutta o in parte con $\{D_n\}$, e sia $\bar{D}_m = \{I_1, I_2, \ldots, I_p\}$ una qualunque divisione di $\{\bar{D}_m\}$. Gli estremi dei tratti di $\bar{D}_m$ interni ad I sono in numero di $p-1$ e fra essi, quelli che sono eventualmente punti di discontinuità di $\varphi(t)$ appartengono tutti come estremi dei tratti di D_n quando n è sufficientemente grande; ciò avvenga per $n \geqslant n_0$. Possiamo inoltre crescere n_0 in modo che $\delta(D_n)$ per $n \geqslant n_0$ sia minore della più piccola lunghezza degli intervalli $I_1, I_2, \ldots, I_p$, e allora ognuno dei tratti di D_n per $n \geqslant n_0$ può contenere nel suo interno al più uno solo degli estremi dei tratti di $\bar{D}_m$, e quando questa circostanza si verifica, *tale estremo è un punto di continuità per* $\varphi(t)$. Scelto n_0 come abbiamo ora dichiarato, indichiamo con $I'_{i,1}, I'_{i,2}, \ldots, I'_{i,k_i}$ gli intervalli della divisione D_n contenuti in I_i, e con $I_1', I_2', \ldots, I_l'$ $(l \leqslant p-1)$ gli intervalli di D_n che contengono nel loro interno qualche estremo dei tratti di $\bar{D}_m$. Si avrà:

$$S_\varphi(f;\ D_n) = \sum_i^{1\ldots p} \sum_k^{1\ldots k_i} M(f;\ I'_{i,k})\varphi(I'_{i,k}) + \sum_k^{1\ldots l} M(f;\ I_k')\varphi(I_k'),$$

$$S_\varphi(f;\ D_n) \leqslant \sum_i^{1\ldots p} M(f;\ I_i)\varphi(I_i) + M(|f|;\ I)\sum_k^{1\ldots l}\varphi(I_k')$$

$$S_\varphi(f;\ D_n) \leqslant S_\varphi(f;\ \bar{D}_m) + M(|f|;\ I)\sum_k^{1\ldots l}\varphi(I_k'). \tag{6}$$

[1] Essendo $\varphi(t)$ a variazione limitata, i suoi punti di discontinuità (di prima specie) sono in numero finito, o formano un'infinità numerabile. (Cap. III, teor. 25).

[2] Nel seguito indicheremo queste due proprietà con (*a*) e (*b*).

Siccome gli intervalli I_k' (in numero finito) contengono nel loro interno punti di continuità di $\varphi(t)$ e $\lim\limits_{n\to\infty}\delta(D_n)=0$, possiamo se occorre crescere n_0 in modo che per $n \geqslant n_0$ sia

$$M(|f|;\ I)\sum_k^{1\ldots l}\varphi(I_k') < \varepsilon \tag{7}$$

ove ε è un numero positivo prefissato, e dalla (6) e (7) segue

$$S_\varphi(f;\ D_n) < S_\varphi(f;\ \bar{D}_m) + \varepsilon \qquad (n \geqslant n_0),$$

quindi

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, S_\varphi(f;\ D_n) \leqslant S_\varphi(f;\ \bar{D}_m) + \varepsilon$$

[I, Cap. III, § 1, def. 3] e siccome ε è arbitrario

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, S_\varphi(f;\ D_n) \leqslant S_\varphi(f;\ \bar{D}_m).$$

Si ha da questa

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, S_\varphi(f;\ D_n) \leqslant \underline{\lim_{m\to\infty}}\, S_\varphi(f;\ \bar{D}_m) \tag{8}$$

e perciò se la successione $\{D_n\}$ e la successione $\{\bar{D}_m\}$ coincidono

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, S_\varphi(f;\ D_n) = \underline{\lim_{m\to\infty}}\, S_\varphi(f;\ D_m)$$

ossia $\lim\limits_{m\to\infty} S_\varphi(f;\ D_m)$ esiste, ed ancora per la (8)

$$\lim_{n\to\infty} S_\varphi(f;\ D_n) = \lim_{m\to\infty} S_\varphi(f;\ \bar{D}_m).$$

Supponiamo ora $\varphi(t)$ a variazione limitata; se $P(t)$, $N(t)$, $V(t)$ indicano rispettivamente la variazione totale positiva, la variazione totale negativa, la variazione totale di $\varphi(t)$ in (a, t), $P(t)$, $N(t)$, $V(t)$ sono funzioni non negative non decrescenti, e si ha

$$\varphi(t) = [\varphi(a) + P(t)] - N(t), \tag{9_1}$$
$$V(t) = P(t) + N(t) \tag{9_2}$$

[I, Cap. III; § 4; n.° 4], e noi proveremo che

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_\varphi(f;\ D_n) = \lim_{n\to\infty} S_P(f;\ D_n) - \lim_{n\to\infty} s_N(f;\ D_n)}\,, \tag{10_1}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} s_\varphi(f;\ D_n) = \lim_{n\to\infty} s_P(f;\ D_n) - \lim_{n\to\infty} S_N(f;\ D_n)}\,. \tag{10_2}$$

Infatti se I_k è un qualsiasi tratto di I abbiamo

$$[\varphi(I_k)=P(I_k)-N(I_k)]$$

$$m(f;\,I_k)P(I_k)-M(f;\,I_k)N(I_k)\leq\left\{\begin{matrix}M(f;\,I_k)[P(I_k)-N(I_k)]\\ m(f;\,I_k)[P(I_k)-N(I_k)]\end{matrix}\right\}\leq$$
$$\leq M(f;\,I_k)P(I_k)-m(f;\,I_k)N(I_k)$$

dalla quale sommando rispetto ai tratti I_k di una divisione

$$D_n=\{I_1,\,I_2,\ldots,\,I_{k_n}\}$$

della successione data $\{D_n\}$

$$s_P(f;\,D_n)-S_N(f;\,D_n)\leq s_\varphi(f;\,D_n)\leq S_\varphi(f;\,D_n)\leq S_P(f;\,D_n)-s_N(f;\,D_n),$$

ovvero posto

$$(11)\qquad\left\{\begin{aligned}A_n&=S_P(f;\,D_n)-s_N(f;\,D_n),\\ B_n&=s_P(f;\,D_n)-S_N(f;\,D_n)\end{aligned}\right.$$

$$(12)\qquad\left\{\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}A_n=A,\\ &\lim_{n\to\infty}B_n=B\end{aligned}\right.$$

si ha

$$B_n\leq s_\varphi(f;\,D_n)\leq S_\varphi(f;\,D_n)\leq A_n$$

$$(13)\qquad B\leq\underline{\lim}_{n\to\infty}s_\varphi(f;\,D_n)\leq\overline{\lim}_{n\to\infty}S_\varphi(f;\,D_n)\leq A.$$

Abbiamo d'altra parte

$$S_\varphi(f;\,D_n)-s_\varphi(f;\,D_n)=\sum_k^{1\ldots k_n}\omega(f;\,I_k)\,|\,\varphi(I_k)\,|\,;$$

$$A_n-B_n=\sum_k^{1\ldots k_n}\omega(f;\,I_k)[P(I_k)+N(I_k)]=\sum_k^{1\ldots k_n}\omega(f;\,I_k)\,V(I_k)$$

quindi

$$(14)\quad 0\leq(A_n-B_n)-[S_\varphi(f;\,D_n)-s_\varphi(f;\,D_n)]=$$
$$=\sum_k^{1\ldots k_n}\omega(f;\,I_k)[V(I_k)-|\,\varphi(I_k)\,|]\leq\omega(f;\,I)[V-\sum_k^{1\ldots k_n}|\,\varphi(I_k)\,|].$$

Siccome la successione $\{D_n\}$ soddisfa le condizioni (a) e (b) si ha [I, Cap. III; teor. 27]

$$\lim_{n\to\infty}[V-\sum_k^{1\ldots k_n}|\,\varphi(I_k)\,|]=0$$

e dalle (14) e (12) segue quindi

$$\lim_{n\to\infty}[S_\varphi(f;\,D_n)-s_\varphi(f;\,D_n)]=A-B,$$

dalla quale

$$(15)\qquad\overline{\lim}_{n\to\infty}S_\varphi(f;\,D_n)-\underline{\lim}_{n\to\infty}s_\varphi(f;\,D_n)\geq A-B$$

$$(16)\qquad\left\{\begin{aligned}&\overline{\lim}_{n\to\infty}S_\varphi(f;\,D_n)-\overline{\lim}_{n\to\infty}s_\varphi(f;\,D_n)=A-B;\\ &\underline{\lim}_{n\to\infty}S_\varphi(f;\,D_n)-\underline{\lim}_{n\to\infty}s_\varphi(f;\,D_n)=A-B.\end{aligned}\right.$$

Dal confronto delle (13) e (15) segue

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}S_\varphi(f;\,D_n)=A,\qquad\underline{\lim}_{n\to\infty}s_\varphi(f;\,D_n)=B$$

e per le (16), (12), (11)

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}S_\varphi(f;\,D_n)=\overline{\lim}_{n\to\infty}S_\varphi(f;\,D_n)=A=\lim_{n\to\infty}S_P(f;\,D_n)-\lim_{n\to\infty}s_N(f;\,D_n)$$
$$\underline{\lim}_{n\to\infty}s_\varphi(f;\,D_n)=\overline{\lim}_{n\to\infty}s_\varphi(f;\,D_n)=B=\lim_{n\to\infty}s_P(f;\,D_n)-\lim_{n\to\infty}S_N(f;\,D_n),$$

ossia le (10_1) e (10_2); il teorema enunciato è così dimostrato.

3\. - *Definizione* 3. - Se $f(t)$ è una funzione limitata in $I=(a,\,b)$ e $\varphi(t)$ è una funzione a variazione limitata in I, se $\{D_n\}$ è una qualunque successione che soddisfa alle due condizioni

a) $$\lim_{n\to\infty}\delta(D_n)=0,$$

b) per ogni punto t_0 di discontinuità di $\varphi(t)$ esiste un intero $n_0>0$ tale che per $n\geq n_0$ il punto t_0 è un estremo degli intervalli appartenenti alla divisione D_n,

i due limiti

$$\lim_{n\to\infty}S_\varphi(f;\,D_n),\qquad\lim_{n\to\infty}s_\varphi(f;\,D_n)$$

chiamansi rispettivamente l'*integrale superiore* (o per eccesso), *inferiore* (o per difetto) di $f(t)$ nel senso di STIELTJES relativi alla funzione $\varphi(t)$ e al tratto I.

Indicheremo tali limiti con i simboli

$$(S)\int_a^{\overline{b}}fd\varphi,\qquad(S)\int_{\underline{a}}^{b}fd\varphi$$

od anche

$$(S)\overline{\int_I} f\,d\varphi, \qquad (S)\underline{\int_I} f\,d\varphi$$

e diremo che la funzione φ è la *funzione determinante* dell'integrazione.

Quando non vi sia luogo ad equivoco, ometteremo il segno (S) avanti il segno $\int$.

Dalla (3) del n.° 1 segue

$$(17)\quad M(|f|;\, I)\,V(\varphi;\, I) \geqslant (S)\overline{\int_a^b} f\,d\varphi \geqslant (S)\underline{\int_a^b} f\,d\varphi \geqslant -M(|f|;\, I)\,V(\varphi;\, I)$$

ed inoltre che se $P(t)$ e $N(t)$ sono la variazione totale positiva e la variazione totale negativa di $\varphi(t)$ in (a, t) [teor. 1]

$$(18)\qquad \overline{\int_a^b} f\,d\varphi = \overline{\int_a^b} f\,dP - \underline{\int_a^b} f\,dN; \qquad \underline{\int_a^b} f\,d\varphi = \underline{\int_a^b} f\,dP - \overline{\int_a^b} f\,dN.$$

Dalle definizioni poste segue subito che se c è costante

$$(19_1)\qquad \overline{\int_a^b} cf\,d\varphi = c\overline{\int_a^b} f\,d\varphi, \qquad \overline{\int_a^b} f\,d(c\varphi) = c\overline{\int_a^b} f\,d\varphi, \qquad c>0,$$

$$(19_2)\qquad \overline{\int_a^b} cf\,d\varphi = c\underline{\int_a^b} f\,d\varphi, \qquad \overline{\int_a^b} f\,d(c\varphi) = c\underline{\int_a^b} f\,d\varphi, \qquad c<0$$

e le analoghe, quando nei due membri ogni integrale per eccesso si muti in un integrale per difetto e viceversa.

TEOREMA 2. - Se $f(t)$ è limitata in $I=(a, b)$ e $\varphi(t)$ è monotona in I, l'insieme numerico formato dalle somme $S_\varphi(f;\, D)$ $[s_\varphi(f;\, D)]$ relative a tutte le divisioni D di I, ha per estremo inferiore [superiore]

$$\overline{\int_a^b} f\,d\varphi, \qquad \left[\underline{\int_a^b} f\,d\varphi\right].$$

Dimostrazione. - Fissata una divisione D, consideriamo la divisione D_1 ottenuta da D aggiungendo ai suoi punti di divisione i punti medi dei tratti di D e un punto di discontinuità di φ, poi la divisione D_2 ottenuta da D_1 aggiungendo ai punti di divisione

di D_1 i punti medi dei suoi tratti e un secondo punto di discontinuità di φ, e così di seguito; otteniamo una successione di divisioni $\{D_m\}$ di I la quale gode le proprietà (a) e (b) dichiarate nel teorema 1, perciò scelto un numero positivo ε si può trovare un intero m così grande tale che

$$S_\varphi(f;\, D_m) > \overline{\int_a^b} f\,d\varphi - \varepsilon.$$

E se osserviamo che se un tratto I_k si scompone nella somma $I_1' + I_2' + \dots + I_r'$, per φ non decrescente si ha

$$M(f;\, I_k)\varphi(I_k) \geqslant \sum_s^{1\dots r} M(f;\, I_s')\varphi(I_s')$$

e per φ non crescente

$$m(f;\, I_k)\varphi(I_k) \geqslant \sum_s^{1\dots r} m(f;\, I_s')\varphi(I_s')$$

ne viene

$$S_\varphi(f;\, D) \geqslant S_\varphi(f;\, D_1) \geqslant \dots \geqslant S_\varphi(f;\, D_m) \geqslant \dots$$

quindi

$$S_\varphi(f;\, D) > \overline{\int_a^b} f\,d\varphi - \varepsilon$$

ed essendo ε arbitrario

$$S_\varphi(f;\, D) \geqslant \overline{\int_a^b} f\,d\varphi.$$

Analoga dimostrazione vale per le somme $s_\varphi(f;\, D)$.

Dalle cose dette segue che se la funzione determinante dell'integrazione $\varphi(t)$ è uguale a t, allora gli integrali

$$(S)\overline{\int_a^b} f\,dt, \qquad (S)\underline{\int_a^b} f\,dt$$

sono gli integrali superiori e inferiori di [MENGOLI-CAUCHY]-RIEMANN di $f(t)$ in I, o come si scrive

$$(S)\overline{\int_a^b} f\,dt = (R)\overline{\int_a^b} f\,dt, \qquad (S)\underline{\int_a^b} f\,dt = (R)\underline{\int_a^b} f\,dt.$$

4. - *Definizione* 4. - Sia $f(t)$ una funzione limitata in $I=(a, b)$ e $\varphi(t)$ a variazione limitata in I, se i due integrali per eccesso e per difetto nel senso di STIELTJES relativi alla funzione $\varphi(t)$ e al tratto I sono uguali, il loro valore comune sarà indicato con

$$(S)\int_a^b f d\varphi, \qquad \left[=\int_a^{\overline{b}} f d\varphi=\int_{\underline{a}}^{b} f d\varphi\right]$$

e diremo che *la funzione $f(t)$ è integrabile nel senso di Stieltjes rispetto alla funzione $\varphi(t)$ e nel tratto $I=(a, b)$.*

Dalla (17) si ha

$$M(|f|\,;\,I)\,V(\varphi\,;\,I)\geqslant\int_a^b f d\varphi\geqslant -M(|f|\,;\,I)\,V(\varphi\,;\,I). \tag{20}$$

Evidentemente se l'integrale $(S)\int_a^b f(t)dt$ esiste, esso è anche l'integrale di [MENGOLI-CAUCHY]-RIEMANN della $f(t)$ in I, cioè

$$(S)\int_a^b f(t)dt=(R)\int_a^b f(t)dt.$$

TEOREMA 3. - Se $f(t)$ è limitata in $I=(a, b)$ e $\varphi(t)$ a variazione limitata in I, condizione necessaria e sufficiente perchè $f(t)$ sia integrabile nel senso di STIELTJES rispetto alla funzione $\varphi(t)$ nel tratto I, è che $f(t)$ sia integrabile nel senso di STIELTJES rispetto alla variazione positiva e alla variazione negativa di $\varphi(t)$.

Dimostrazione. - Se $P(t)$, $N(t)$ indicano la variazione positiva e la variazione negativa di $\varphi(t)$ in (a, t) l'uguaglianza

$$\int_a^{\overline{b}} f d\varphi=\int_{\underline{a}}^{b} f d\varphi$$

porta per le (18)

$$\int_a^{\overline{b}} f dP-\int_{\underline{a}}^{b} f dN=\int_{\underline{a}}^{b} f dP-\int_a^{\overline{b}} f dN \tag{21}$$

e inversamente.

Dalle (21) si ha

$$\int_a^{\overline{b}} f dP-\int_{\underline{a}}^{b} f dP=\int_{\underline{a}}^{b} f dN-\int_a^{\overline{b}} f dN,$$

e siccome il primo membro è positivo o nullo e il secondo negativo o nullo ne viene

$$\int_a^{\overline{b}} f dP=\int_{\underline{a}}^{b} f dP\,; \qquad \int_{\underline{a}}^{b} f dN=\int_a^{\overline{b}} f dN$$

che è appunto quello che volevasi dimostrare.

Segue il

Corollario. - Se $f(t)$ è limitata in (a, b) e $\varphi(t)$ a variazione limitata in I, se $P(t)$ e $N(t)$ sono rispettivamente la variazione totale positiva e la variazione totale negativa di $\varphi(t)$ in (a, t) e se $f(t)$ è integrabile nel senso di STIELTJES rispetto alla funzione $\varphi(t)$ nel tratto (a, b), si ha allora

$$\boxed{\int_a^b f d\varphi=\int_a^b f dP-\int_a^b f dN}\,. \tag{22}$$

Vogliamo esprimere la condizione necessaria e sufficiente perchè $f(t)$ risulti integrabile rispetto a $\varphi(t)$ sotto un'altra forma che ci permetterà di studiare il comportamento di $f(t)$ in un punto di discontinuità per $\varphi(t)$.

TEOREMA 4. - Condizione necessaria e sufficiente perchè l'integrale di STIELTJES di una funzione limitata $f(t)$ in $I=(a, b)$ esista rispetto ad una funzione a variazione limitata $\varphi(t)$ è che indicando con $\{D_n\}$, $D_n=\{I_1^{(n)}, I_2^{(n)},\ldots, I_{k_n}^{(n)}\}$, una successione di divisioni di I che abbia le proprietà (a) e (b) dichiarate nel teorema 1, e con $V(t)$ la variazione totale di $\varphi(t)$ in (a, t), si abbia

$$\lim_{n\to\infty}\sum_k^{1\ldots k_n}\omega(f\,;\,I_k^{(n)})\,V(I_k^{(n)})=0. \tag{23}$$

Dimostrazione. - Per definizione l'esistenza dell'integrale $\int_a^b f d\varphi$ porta l'uguaglianza dei due limiti (10_1), (10_2) e inversamente.

Ora l'uguaglianza dei due limiti (10_1), (10_2) porta

$$0=\lim_{n\to\infty}\{[S_P(f\,;\,D_n)-s_P(f\,;\,D_n)]+[S_N(f\,;\,D_n)-s_N(f\,;\,D_n)]\}$$

$$0=\lim_{n\to\infty}\sum_k^{1\ldots k_n}[M(f\,;\,I_k^{(n)})-m(f\,;\,I_k^{(n)})]\,[P(I_k^{(n)})+N(I_k^{(n)})]$$

che equivale appunto alla (23).

Si ha dal teorema dimostrato che se $\int_a^b f d\varphi$ esiste e $\varphi(t)$ ha a destra (sinistra) di un punto t_0 una discontinuità, la $f(t)$ deve essere continua a destra (sinistra) di t_0. Infatti il termine $V(I_k^{(n)})$, dove $I_k^{(n)}$ indica un intervallo a destra di t_0 e con l'estremo sinistro in t_0 si mantiene maggiore di una quantità maggiore di zero, e perchè $\omega(f;\, I_k^{(n)})\, V(I_k^{(n)}) \to 0$ quando $n \to \infty$ occorre che $\lim_{n\to\infty} \omega(f;\, I_k^{(n)}) = 0$, cioè la $f(t)$ sia continua a destra di t_0.

5. - Teorema 5. - Se l'integrale $\int_a^b f d\varphi$ esiste, fissata una qualunque successione $\{D_n\}$

$$D_n = \{I_1^{(n)}, I_2^{(n)}, \ldots, I_{k_n}^{(n)}\}, \qquad I_k^{(n)} = (a_k^{(n)}, b_k^{(n)})$$

la quale abbia le proprietà (*a*) e (*b*) dichiarate nel teorema 1, per ogni $\varepsilon > 0$ si può determinare un intero $n_0 > 0$ tale che per qualunque $n \geqslant n_0$, la somma

$$\sum_k^{1\ldots k_n} f_k^{(n)}[\varphi(b_k^{(n)}) - \varphi(a_k^{(n)})]$$

dove $f_k^{(n)}$ è un qualsiasi numero compreso tra $m(f;\, I_k^{(n)})$, $M(f;\, I_k^{(n)})$

$$m(f;\, I_k^{(n)}) \leqslant f_k^{(n)} \leqslant M(f;\, I_k^{(n)}) \tag{24}$$

differisca da $\int_a^b f d\varphi$ in valore assoluto meno di ε, sia cioè:

$$\left| \int_a^b f d\varphi - \sum_k^{1\ldots k_n} f_k^{(n)} \varphi(I_k^{(n)}) \right| < \varepsilon, \qquad (n \geqslant n_0). \tag{25}$$

Dimostrazione. - Siccome l'integrale $\int_a^b f d\varphi$ esiste, fissato $\varepsilon > 0$ si può determinare un n_0 tale che per $n \geqslant n_0$ risulti per la divisione D_n della data successione $\{D_n\}$

$$\int_a^b f d\varphi - \varepsilon < s_\varphi(f;\, D_n) \leqslant S_\varphi(f;\, D_n) < \int_a^b f d\varphi + \varepsilon, \qquad (n \geqslant n_0).$$

Ma dalla (24) si ha

$$s_\varphi(f;\, D_n) \leqslant \sum_k^{1\ldots k_n} f_k^{(n)}[\varphi(b_k^{(n)}) - \varphi(a_k^{(n)})] \leqslant S_\varphi(f;\, D_n)$$

e perciò

$$\int_a^b f d\varphi - \varepsilon < \sum_k^{1\ldots k_n} f_k^{(n)}[\varphi(b_k^{(n)}) - \varphi(a_k^{(n)})] < \int_a^b f d\varphi + \varepsilon \qquad (n \geqslant n_0),$$

dalla quale segue appunto la (25).

Il teorema dimostrato si esprime dicendo che $\int_a^b f d\varphi$ è il limite della somma $\sum_k^{1\ldots k_n} f_k^{(n)} \varphi(I_k^{(n)})$ quando $\delta(D_n) \to 0$.

§ 2. - Distributività e additività degli integrali di Stieltjes.

1. Distributività. - 2. Additività.

1. - Teorema 6. - Se f_1, f_2 sono due funzioni limitate in $I = (a, b)$ e φ_1, φ_2 a variazione limitata in I, si ha

$$\overline{\int_a^b} (f_1 + f_2) d(\varphi_1 + \varphi_2) \leqslant \sum_{i,k}^{1,2} \overline{\int_a^b} f_i d\varphi_k; \tag{1}$$

$$\underline{\int_a^b} (f_1 + f_2) d(\varphi_1 + \varphi_2) \geqslant \sum_{i,k}^{1,2} \underline{\int_a^b} f_i d\varphi_k. \tag{2}$$

Dimostrazione. - Cominciamo col provare la (1).

Sia $I_l = (a_l, b_l)$ un tratto di I, si ha:

$$[\varphi_1 + \varphi_2]_{a_l}^{b_l} = \varphi_1(I_l) + \varphi_2(I_l)$$

perciò se $[\varphi_1 + \varphi_2]_{a_l}^{b_l} \geqslant 0$, da

$$M(f_1 + f_2;\, I_l) \leqslant M(f_1;\, I_l) + M(f_2;\, I_l)$$

viene

$$N_{\varphi_1+\varphi_2}(f_1 + f_2;\, I_l)[\varphi_1 + \varphi_2]_{b_l}^{a_l} \leqslant$$

$$\leqslant [M(f_1;\, I_l) + M(f_2;\, I_l)][\varphi_1(I_l) + \varphi_2(I_l)] = \sum_{i,k}^{1,2} M(f_i;\, I_l) \varphi_k(I_l).$$

Ora se $\varphi_k(I_l) \geqslant 0$ è

$$M(f_i;\, I_l) \varphi_k(I_l) = N_{\varphi_k}(f_i;\, I_l) \varphi_k(I_l)$$

se $\varphi_k(I_l)<0$ è

$$M(f_i\,;\,I_l)\varphi_k(I_l)\leq m(f_i\,;\,I_l)\varphi_k(I_l)=N_{\varphi_k}(f_i\,;\,I_l)\varphi_k(I_l)$$

perciò

$$N_{\varphi_1+\varphi_2}(f_1+f_2\,;\,I_l)[\varphi_1+\varphi_2]_{a_l}^{b_l}\leq\sum_{i,k}^{1,2}N_{\varphi_k}(f_i\,;\,I_l)\varphi_k(I_l).$$

Questa stessa relazione sussiste anche se $[\varphi_1+\varphi_2]_{a_l}^{b_l}<0$, e sommandola rispetto ai tratti I_l di una divisione D si ricava

$$S_{\varphi_1+\varphi_2}(f_1+f_2\,;\,D)\leq\sum_{i,k}^{1,2}S_{\varphi_k}(f_i\,;\,D)$$

e perciò la (1).

Da questa cambiando φ_1, φ_2 in $-\varphi_1$, $-\varphi_2$ si ottiene la (2) [§ 1, (19_1), (19_2)].

Dalle (1) e (2) segue il

Corollario. - Se due funzioni f_1 e f_2 limitate in I sono integrabili nel senso di STIELTJES nel tratto I, l'una e l'altra rispetto alle funzioni a variazione limitata φ_1 e φ_2 e se α_1, α_2, β_1, β_2 sono delle costanti si ha

$$\int_a^b(\alpha_1f_1+\alpha_2f_2)d(\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2)=\sum_{i,k}^{1,2}\alpha_i\beta_k\int_a^b f_i d\varphi_k.$$

2. - TEOREMA 7. - Siano I', I'' due tratti finiti consecutivi, f una funzione limitata in $I=I'+I''$, $\varphi(t)$ a variazione limitata in I; si ha allora

$$(3_1)\qquad \overline{\int_{I'+I''}}fd\varphi=\overline{\int_{I'}}fd\varphi+\overline{\int_{I''}}fd\varphi\,;$$

$$(3_2)\qquad \underline{\int_{I'+I''}}fd\varphi=\underline{\int_{I'}}fd\varphi+\underline{\int_{I''}}fd\varphi.$$

Dimostrazione. - Se infatti $\{D_n'\}$, $\{D_n''\}$ sono rispettivamente due successioni di divisioni di I', I'' aventi le proprietà (*a*), (*b*) dichiarate nel teorema 1, anche $\{D_n'+D_n''\}$ è una successione di divisioni di $I'+I''$ avente le stesse proprietà, e poichè

$$S_\varphi(f\,;\,D_n'+D_n'')=S_\varphi(f\,;\,D_n')+S_\varphi(f\,;\,D_n'')$$

passando al limite per $n\to\infty$ si ha la (3_1).

Cambiando f in $-f$, dalla (3_1) si ha la (3_2).

Dalle (3_1), (3_2) segue il

Corollario. - Se una funzione $f(t)$ limitata nel tratto I è integrabile nel senso di STIELTJES nel tratto I rispetto alla funzione a variazione limitata $\varphi(t)$, essa lo è ugualmente in ogni tratto I' contenuto in I, e se $I=I'+I''$ si ha

$$(4)\qquad \int_I fd\varphi=\int_{I'}fd\varphi+\int_{I''}fd\varphi.$$

§ 3. - Integrabilità delle funzioni continue rispetto alle funzioni a variazione limitata.

TEOREMA 8. - Se $f(t)$ è continua in $I=(a,b)$ e $\varphi(t)$ a variazione limitata in (a,b), allora esiste l'integrale

$$(S)\int_a^b fd\varphi$$

ed inoltre per ogni $\varepsilon>0$ è possibile determinare un corrispondente numero positivo δ_0 tale che per *qualsiasi* divisione $D=\{I_1, I_2,\ldots, I_n\}$, di I, $I_k=(a_k, b_k)$, per la quale $\delta(D)\leq\delta_0$, risulti

$$(1)\qquad \left|(S)\int_a^b fd\varphi-\sum_k^{1\ldots n}f_k[\varphi(b_k)-\varphi(a_k)]\right|<\varepsilon,$$

ove i numeri f_1, $f_2,\ldots$, f_n sono soggetti alla sola condizione

$$(2)\qquad m(f;\,I_k)\leq f_k\leq M(f;\,I_k)\qquad (k=1,2,\ldots,n).$$

Dimostrazione. - L'integrabilità della funzione f rispetto alla funzione φ risulta immediatamente dal teorema 4 e dall'uniforme continuità di $f(t)$ in I; infatti sia $\{D_n'\}$ una successione di divisioni di I che abbia le proprietà (*a*) e (*b*) e scelto $\varepsilon>0$ si determini un $\delta_0>0$ in guisa che in ogni tratto I_k' di I di lunghezza $\leq\delta_0$ risulti $0\leq\omega(f;\,I_k')<\varepsilon/V$ ove V è la variazione totale di φ in I; quando $\delta(D_n')\leq\delta_0$ si avrà allora

$$\left|\sum_k^{1\ldots k_n}\omega(f;\,I_k^{(n)})\,V(I_k^{(n)})\right|<\varepsilon,$$

ossia è verificata la (23) del § 1.

Per completare la dimostrazione occorre far vedere che fissato $\varepsilon>0$, può in corrispondenza determinarsi $\delta_0>0$ in modo che per *qualunque* divisione D di I, con $\delta(D)\leq\delta_0$ risulti verificata la (2).

A motivo del teorema 3 e della (22) del § 1 possiamo supporre che la φ sia non decrescente, e basterà allora verificare che per qualunque divisione D, $\delta(D)\leq\delta_0$, risultano simultaneamente verificate le relazioni

$$(3_1)\qquad \left|\int_a^b f d\varphi - S_\varphi(f;\, D)\right| < \varepsilon,$$

$$(3_2)\qquad \left|\int_a^b f d\varphi - s_\varphi(f;\, D)\right| < \varepsilon.$$

Dimostriamo la (3_1), in modo analogo si prova la (3_2).

Per l'uniforme continuità di $f(t)$ in I, fissato ε si può determinare un numero $2\delta_0>0$ tale, che in ogni intervallo I' di I di ampiezza $\leq 2\delta_0$ sia $\omega(f;\, I')<\varepsilon/4V$, ove V è la variazione totale di φ in I.

In una successione $\{D'_m\}$ che abbia le proprietà (a) e (b) una divisione D'_m con $\delta(D'_m)\leq\delta_0$ può considerarsi tale che

$$(4)\qquad \int_a^b f d\varphi - \varepsilon/2 < S_\varphi(f;\, D'_m) < \int_a^b f d\varphi + \varepsilon/2.$$

Consideriamo ora una *qualunque divisione* $D=\{I_1, I_2,\ldots, I_n\}$ di I con $\delta(D)\leq\delta_0$ e sia D'' la divisione di I formata con gli estremi dei tratti di D'_m e D e si abbia $D''=\{I_1'', I_2'',\ldots, I_p''\}$; se l'intervallo I_r'' appartiene all'intervallo I_k di D e all'intervallo I_l' di D'_m si avrà

$$|S_\varphi(f;\, D) - S_\varphi(f;\, D'_m)| = \left|\sum_r^{1..p} [M(f;\, I_k) - M(f;\, I_l')]\varphi(I_r'')\right|,$$

e poichè l'intervallo I_k+I_l' ha misura non superiore a $2\delta_0$ si ha

$$|M(f;\, I_k) - M(f;\, I_l')| \leq 2\varepsilon/4V$$

quindi

$$|S_\varphi(f;\, D) - S_\varphi(f;\, D'_m)| \leq (\varepsilon/2V)\sum_r^{1\ldots p}\varphi(I_r'') = \varepsilon/2$$

da cui

$$S_\varphi(f;\, D'_m) - \varepsilon/2 \leq S_\varphi(f;\, D) \leq S_\varphi(f;\, D'_m) + \varepsilon/2$$

e per la (4)

$$\int_a^b f d\varphi - \varepsilon < S_\varphi(f;\, D) < \int_a^b f d\varphi + \varepsilon$$

cioè la (3_1).

§ 4. - Applicazioni dell'integrale di Stieltjes.

1. Momento di una massa distribuita sopra un tratto rettilineo (STIELTJES). - 2. Assicurazione temporanea in caso di morte con capitale variabile. - 3. I funzionali lineari e il teorema di F. RIESZ (enunciato).

1. - Sul segmento $(0, a)$ dell'asse x sia distribuita una massa e indichiamo con $\varphi(x)$ la massa totale del tratto $(0, x)$ [$\varphi(x)$ è una funzione non decrescente]. Per calcolare il momento della massa rispetto all'origine consideriamo una divisione D del tratto $(0, a)$ con i punti $0=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$; la massa del tratto (x_i, x_{i+1}) è data da $\varphi(x_{i+1})-\varphi(x_i)$, e supposta concentrata nel punto x_i il suo momento totale è $x_i\,[\varphi(x_{i+1})-\varphi(x_i)]$; per momento approssimato della massa rispetto all'origine possiamo assumere $\sum_i^{0\ldots(n-1)} x_i[\varphi(x_{i+1})-\varphi(x_i)]$ e perciò [teor. 8] il momento della massa del tratto $(0, a)$ rispetto all'origine è espresso da

$$\lim_{\delta(D)\to 0}\sum_i^{0\ldots(n-1)} x_i[\varphi(x_{i+1})-\varphi(x_i)] = \int_0^a x d\varphi(x).$$

[STIELTJES, [56, c)], p. 469].

2. - Sia l_y il numero di un gruppo di viventi aventi l'età y, l_{y+t} il numero dei sopravviventi all'età $y+t$, U_t il capitale assicurato a ciascun individuo in caso di morte all'età $y+t$, v il fattore di sconto [$v=1/(1+i)$, i saggio unitario dell'interesse]. Il numero

$$l_{y+t-1} - l_{y+t} = d_{y+t}$$

indica il numero dei morti tra il tempo $y+t-1$ e il tempo $y+t$, e ammesso che tutti i casi di morte si concentrino alla fine dell'anno, il valore attuale del capitale da pagare da parte dell'ente assicuratore alla fine del t^{esimo} anno è $U_t v^t d_{y+t}$, e perciò se la durata del contratto è per n anni il valore $_{|n}A_y$ dell'assicurazione mediata, temporanea per n anni è dato da

$$_{|n}A_y = \sum_{t=1}^{n} U_t v^t d_{y+t} / l_y .$$

Poniamo

$$\varphi(t) = l_y - l_{y+r-1} \quad \text{per } r-1 \leq t < r\,;\; r=1,\, 2,\ldots,\, n$$
$$\varphi(t) = l_y - l_{y+n} \quad \text{per } t = n,$$

e sia $f(t)$ una funzione limitata in $(0, n)$ che sia continua per i valori interi di t, e che in questi punti assuma il valore $U_t v^t$.

Si consideri una divisione D_m del tratto $(0, n)$ con $m \geq n$, e tra gli estremi dei tratti di D_m siano compresi i punti $1, 2,\ldots, n-1$; nelle somme $S_\varphi(f;\, D_m)$, $s_\varphi(f;\, D_m)$ gli unici termini non nulli sono quelli che corrispondono a tratti della divisione D_m con l'estremo destro nei punti $1, 2,\ldots, n$ e si avrà perciò se $\delta(D_m) \to 0$ per $m \to \infty$

$$\lim_{m\to\infty} S_\varphi(f;\, D_m) = \lim_{m\to\infty} s_\varphi(f;\, D_m) = \sum_{t}^{1\ldots n} U_t v^t d_{y+t}$$

quindi

$$_{|n}A_y = \frac{1}{l_y} \int_0^n f(t)\, d\varphi(t)$$

dove il secondo membro è un integrale di STIELTJES. [M. JACOB, [26, p. 168]].

3. - Un'applicazione dell'integrale di STIELTJES si ha nel seguente capitale teorema di F. RIESZ [51, b)] del quale ci limitiamo a dare l'enunciato.

Sia $A[f(x)]$ un funzionale lineare che opera su tutte le funzioni continue $f(x)$ definite su un tratto (a, b), cioè $A[f(x)]$ per ogni $f(x)$ continua in (a, b) abbia un valore ben determinato e soddisfi le seguenti proprietà: .

1°). Se c_1 e c_2 sono costanti ed $f_1(x)$, $f_2(x)$ sono continue in (a, b) è

$$A[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] = c_1 A[f_1(x)] + c_2 A[f_2(x)]\,;$$

2°). Esista una costante M tale che per qualunque $f(x)$ continua in (a, b) si abbia

$$|A[f(x)]| < M \times \max. |f(x)|\,;$$

esiste allora una funzione a variazione limitata $\varphi(x)$ tale che per tutte le funzioni $f(x)$ continue in (a, b) l'operazione $A[f(x)]$ è rappresentata da

$$(S) \int_a^b f(x)\, d\varphi(x).$$

§ 5. - Teoremi sull'integrale di Stieltjes.

1. Teorema della media. - 2. Integrale indefinito di $f(t)$ rispetto a $\varphi(t)$. - 3. Integrazione per parti. - 4. L'operazione ϱ.

1. - TEOREMA 9 (della media). - Se $f(t)$ è limitata in $I=(a, b)$ e integrabile rispetto a una funzione $\varphi(t)$ monotona, esiste un numero $\bar{f}$ compreso tra l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f in I tale che

$$\int_a^b f\, d\varphi = \bar{f}[\varphi(b) - \varphi(a)]. \tag{1}$$

Dimostrazione. - Supponiamo $\varphi(t)$ non decrescente; se la divisione D coincide con l'intervallo I stesso si ha per il teorema 2

$$m(f;\, I)\varphi(I) \leq \int_a^b f\, d\varphi \leq M(f;\, I)\varphi(I)$$

e da questa appunto segue la (1).

2. - *Definizione* 5. - La funzione $f(t)$ sia limitata in $I=(a, b)$ e integrabile nel senso di STIELTJES rispetto alla funzione a variazione limitata $\varphi(t)$; la funzione

$$F(t) = c + \int_a^t f(t)\, d\varphi(t), \qquad c = \text{costante}, \qquad a \leq t \leq b \tag{2}$$

chiamasi *integrale indefinito* nel senso di STIELTJES di $f(t)$ rispetto a $\varphi(t)$.

TEOREMA 10. - L'integrale indefinito è una funzione a variazione limitata.

Dimostrazione. - Sia $V(t)$ la variazione totale di $\varphi(t)$ in (a, t) e si ponga $M(|f|, I) = M$, e si consideri una divisione

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

di I; si ha per la (20) del § 1

$$\sum_i^{1\dots n} |F(t_i) - F(t_{i-1})| = \sum_i^{1\dots n} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} f d\varphi \right| \leq M \sum_i^{1\dots n} [V(t_i) - V(t_{i-1})] = MV(b).$$

TEOREMA 11. - Se $f(t)$ è una funzione continua e a variazione limitata in $I = (a, b)$ e $\varphi(t)$ continua [1] e a variazione limitata in I l'integrale indefinito $F(t)$ di $f(t)$ rispetto a $\varphi(t)$ ha generalmente derivata in I e si ha

$$F'(t) = f(t)\varphi'(t). \tag{3}$$

Dimostrazione. - Per la (22) del § 1 possiamo limitarci al caso che la $\varphi(t)$ sia monotona in I. Si ha per il teorema 9

$$\frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(t) d\varphi(t) = \bar{f}\,\frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}$$

ove $\bar{f}$ è un valore che assume $f(t)$ nell'intervallo $(t, t+h)$; passando al limite per $h \to 0$ si ha $\bar{f} \to f(t)$, e poichè generalmente in I il limite $\lim_{h \to 0} [\varphi(t+h) - \varphi(t)]/h$ esiste [I, Cap. V; § 3, n.° 21], si ottiene la (3).

3. - TEOREMA 12. - Se $f(t)$ è monotona in $I = (a, b)$ e integrabile secondo STIELTJES rispetto alla funzione a variazione limitata $\varphi(t)$, anche $\varphi(t)$ è integrabile in I secondo STIELTJES rispetto alla funzione $f(t)$ e si ha

$$\int_a^b \varphi df = -\int_a^b f d\varphi + [f\varphi]_a^b. \tag{4}$$

(1) La condizione che $\varphi(t)$ sia *continua* in I può omettersi; Cfr. H. LEBESGUE, [[37, *b*)], p. 185], S. SAKS, [[53], p. 49].

Dimostrazione. - Se $P(t)$ e $N(t)$ indicano la variazione totale positiva e negativa di $\varphi(t)$ in (a, t) basterà provare che

$$\int_a^b (P+a) df = -\int_a^b f dP + [(P+a)f]_a^b; \qquad \int_a^b N df = -\int_a^b f dN + [Nf]_a^b$$

perchè da queste, sottraendo, e tenuto conto della (22) del § 1 segue il teorema da dimostrare; possiamo quindi limitarci a provare la (4) nel caso che $f(t)$, $\varphi(t)$ siano monotone in I e nell'ipotesi che $\int_a^b f d\varphi$ esista, e senza alterare le generalità possiamo supporre f e φ non decrescenti.

I punti di discontinuità di f e φ formano un'infinità numerabile, e una successione di divisioni $\{D_m\}$ di I può definirsi in modo che abbia le proprietà (a) e (b) dichiarate nel teorema 1 rispetto ai punti di discontinuità di f e φ.

Siano $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n_m} = b$ gli estremi dei tratti di una divisione D_m, si ha

$$S_f(\varphi; D_m) = \sum_{i=0}^{n_m - 1} \varphi(a_{i+1})[f(a_{i+1}) - f(a_i)]$$

$$S_f(\varphi; D_m) = -\sum_{i=0}^{n_{m-1}} f(a_i)[\varphi(a_{i+1}) - \varphi(a_i)] + f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a)$$

$$S_f(\varphi; D_m) = -s_\varphi(f; D_m) + [f\varphi]_a^b, \tag{5}$$

ma per ipotesi

$$\lim_{m \to \infty} s_\varphi(f; D_m = \int_a^b f d\varphi,$$

passando quindi nella (5) al limite per $m \to \infty$ viene appunto la (4).

Corollario. - Se f è continua e a variazione limitata in $I = (a, b)$, e φ a variazione limitata in I si ha

$$\int_a^b \varphi df = -\int_a^b f d\varphi + [f\varphi]_a^b. \tag{6}$$

Dimostrazione. - Si può porre infatti $f = f_1 - f_2$ con f_1, f_2 funzioni continue non decrescenti, e poichè gli integrali

$$\int_I f_1 d\varphi, \qquad \int_I f_2 d\varphi$$

esistono [teor. 8] per il teorema precedente si ha

$$\int_a^b \varphi df_1 = -\int_a^b f_1 d\varphi + [f_1\varphi]_a^b, \qquad \int_a^b \varphi df_2 = -\int_a^b f_2 d\varphi + [f_2\varphi]_a^b$$

e sottraendo si ottiene la (6).

4. - TEOREMA 13. - Sia $\varrho(t)$ una funzione continua in $I = (a, b)$, $F(t)$ l'integrale indefinito nel senso di STIELTJES della funzione continua $f(t)$ rispetto alla funzione a variazione limitata $\varphi(t)$, abbia cioè $F(t)$ l'espressione (2), vale allora la formula, che esprime la così detta « operazione ϱ »

$$\int_a^b \varrho(t) dF(t) = \int_a^b \varrho(t) f(t) d\varphi(t). \tag{7}$$

[A. LOEWY, [40] p. 77], M. JACOB, [[26], p. 167].

Dimostrazione. - Possiamo limitarci al solito a dimostrare il teorema nel caso di $\varphi(t)$ non decrescente in I.

Essendo le funzioni $\varphi(t)$ e $F(t)$ a variazione limitata in I (teor. 10), si può considerare una successione di divisioni $\{D_n\}$, $D_n = \{I_1^{(n)}, I_2^{(n)}, \ldots, I_{k_n}^{(n)}\}$, $I_k^{(n)} = (x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)})$ di I che abbia le proprietà (a) e (b) dichiarate nel teorema 1 rispetto ai punti di discontinuità di $\varphi(t)$ e $F(t)$. Fissato $\varepsilon > 0$ esiste un n_0 tale che per $n \geqslant n_0$ sia [teor. 5; ϱf è continua]

$$\sum_k^{1\ldots k_n} \varrho(x_{k-1}^{(n)}) f(x_{k-1}^{(n)}) [\varphi(x_k^{(n)}) - \varphi(x_{k-1}^{(n)})] = \int_a^b \varrho f d\varphi + \theta_n \varepsilon, \qquad |\theta_n| < 1.$$

Ma $\varphi(x)$ è non decrescente in I ed $f(x)$ continua, per il teorema della media si ha allora

$$F(x_k^{(n)}) - F(x_{k-1}^{(n)}) = \int_{x_{k-1}^{(n)}}^{x_k^{(n)}} f d\varphi = f(\xi_{k-1}^{(n)}) [\varphi(x_k^{(n)}) - \varphi(x_{k-1}^{(n)})]$$

dove $\xi_{k-1}^{(n)}$ è un punto di $(x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)})$, quindi

$$\begin{aligned}
\sum_k^{1\ldots k_n} \varrho(x_{k-1}^{(n)}) [F(x_k^{(n)}) - F(x_{k-1}^{(n)})] &= \sum_k^{1\ldots k_n} \varrho(x_{k-1}^{(n)}) f(\xi_{k-1}^{(n)}) [\varphi(x_k^{(n)}) - \varphi(x_{k-1}^{(n)})] = \\
&= \sum_k^{1\ldots k_n} \varrho(x_{k-1}^{(n)}) f(x_{k-1}^{(n)}) [\varphi(x_k^{(n)}) - \varphi(x_{k-1}^{(n)})] + \\
&+ \sum_k^{1\ldots k_n} \varrho(x_{k-1}^{(n)}) [f(\xi_{k-1}^{(n)}) - f(x_{k-1}^{(n)})] [\varphi(x_k^{(n)}) - \varphi(x_{k-1}^{(n)})] = \\
&= \int_a^b \varrho f d\varphi + \theta_n \varepsilon + \theta_n' M \sum_k^{1\ldots k_n} |f(\xi_{k-1}^{(n)}) - f(x_{k-1}^{(n)})| \, |\varphi(x_k^{(n)}) - \varphi(x_{k-1}^{(n)})|
\end{aligned} \tag{8}$$

con $|\theta_n'| < 1$ ed $M = M(|\varrho|, I)$.

Per l'uniforme continuità di $f(x)$ in I, può accrescersi se necessario n_0 in modo che per $n \geqslant n_0$ risulti $\omega(f; I_k^{(n)}) < \varepsilon / MV$, ove V è la variazione totale di $\varphi(t)$ in I, e poichè per $n \geqslant n_0$ si ha

$$\sum_k^{1\ldots k_n} |f(x_{k-1}^{(n)}) - f(\xi_{k-1}^{(n)})| \, |\varphi(x_k^{(n)}) - \varphi(x_{k-1}^{(n)})| < \frac{\varepsilon}{MV} \sum_k^{1\ldots k_n} |\varphi(x_{k-1}^{(n)}) - \varphi(x_{k-1}^{(n)})| = \frac{\varepsilon}{M}$$

dalla (8) viene

$$\sum_k^{1\ldots k_n} \varrho(x_{k-1}^{(n)}) [F(x_k^{(n)}) - F(x_{k-1}^{(n)})] = \int_a^b \varrho f d\varphi + \theta_n \varepsilon + \theta_n'' \varepsilon, \tag{9}$$

$$|\theta_n|, \ |\theta_n''| < 1, \qquad n \geqslant n_0;$$

ma il primo membro, tenuto conto della continuità di ϱ e del teor. 8, quando $n \to \infty$ ha per limite $\int_a^b \varrho dF$, passando quindi nella (9) al limite per $n \to \infty$ si ha appunto la (7).

§ 6. - Espressione degli integrali di Stieltjes per integrali di Lebesgue nel caso che la funzione determinante dell'integrazione sia assolutamente continua.

1. Espressione degli integrali di STIELTJES per integrali di LEBESGUE. - 2. Condizione necessaria e sufficiente di integrabilità quando la funzione determinante dell'integrazione è assolutamente continua.

1. - *Definizione* 6. - Sia $f(t)$ definita nel tratto $I=(a, b)$ e ivi limitata; t_0 un punto di I, e si consideri un tratto I_δ di ampiezza δ con centro in t_0 [se t_0 coincide con a o con b prenderemo un tratto di ampiezza δ con un estremo in t_0] e sia

$$L(\delta)=M(f;\ I_\delta), \qquad l(\delta)=m(f;\ I_\delta).$$

Le funzioni $L(\delta)$, $l(\delta)$ sono funzioni di δ limitate e monotone, e i due limiti

$$\lim_{\delta\to 0} L(\delta)=L_{t_0}, \qquad \lim_{\delta\to 0} l(\delta)=l_{t_0}, \qquad [L_{t_0}\geqq l_{t_0}]$$

chiamansi rispettivamente l'*estremo superiore* e l'*estremo inferiore di $f(t)$ in t_0*.

È subito visto che se $\{I_n\}$ è una successione di intervalli I_n ciascuno contenente nel suo *interno* il punto t, e $\lim\limits_{n\to\infty} \text{mis.}\, I_n=0$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} M(f;\ I_n)=L_t, \qquad \lim_{n\to\infty} m(f;\ I_n)=l_t.$$

Se $f(t)$ è continua in t_0 è $L_{t_0}=l_{t_0}[=f(t_0)]$, e inversamente.

Definizione 7. - Sia $f(t)$ limitata in $I=(a, b)$ e $\varphi(t)$ assolutamente continua in I; in ogni punto t di I, salvo un insieme di misura nulla, $\varphi(t)$ ammette derivata finita [I, Cap. V, Teor. 13], e se L_t, l_t indicano gli estremi superiore e inferiore di $f(t)$ in t, chiameremo ***estremo superiore e estremo inferiore di $f(t)$ in t rispetto alla funzione $\varphi(t)$*** i due numeri $N(f;\ t)$, $n(f;\ t)$ definiti con la seguente legge:

$$(1)\qquad N(f;\ t)=L_t \quad \text{se} \quad \varphi'(t)\geqq 0, \qquad N(f;\ t)=l_t \quad \text{se} \quad \varphi'(t)<0;$$

$$(2)\qquad n(f;\ t)=l_t \quad \text{se} \quad \varphi'(t)\geqq 0, \qquad n(f;\ t)=L_t \quad \text{se} \quad \varphi'(t)<0.$$

$N(f;\ t)$, $n(f;\ t)$ sono definiti in tutti i punti t di I, salvo un

insieme di misura nulla, e rappresentano quindi due funzioni di t, generalmente definite in I, limitate

$$[|N(f;\ t)|\leqq M(|f|;\ I); \qquad |n(f;\ t)|\leqq M(|f|;\ I)].$$

Noi vogliamo dimostrare il

Teorema 14. - Se $f(t)$ è una funzione limitata in I e $\varphi(t)$ assolutamente continua in I, valgono le formule

$$(3_1)\qquad (S)\overline{\int_a^b} f d\varphi=(\mathfrak{L})\int_I N(f;\ t)\varphi'(t)dt,$$

$$(3_2)\qquad (S)\underline{\int_a^b} f d\varphi=(\mathfrak{L})\int_I n(f;\ t)\varphi'(t)dt,$$

dove nei secondi membri gli integrali sono presi nel senso di LEBESGUE.

Dimostrazione. - Proveremo dapprima il teorema nel caso di $\varphi(t)$ monotona, ad esempio non decrescente.

Sia $\{D_n\}$ una successione di divisioni di I soddisfacente alle condizioni (a) e (b) dichiarate nel teorema 1, e sia $D_n=\{I_1^{(n)}, I_2^{(n)},\ldots, I_{k_n}^{(n)}\}$; per ogni intero positivo n definiamo una funzione $M_t^{(n)}$ di t in I con la seguente legge: se t è *interno* ad uno dei tratti di D_n, ad esempio a $I_r^{(n)}$, poniamo

$$M_t^{(n)}=M(f;\ I_r^{(n)}) \qquad (r=1, 2,\ldots, k_n);$$

se t è un estremo dei tratti di D_n porremo $M_t^{(n)}=0$.

Ne viene che se t non appartiene come estremo ad alcuno degli intervalli delle divisioni $\{D_n\}$, estremi i quali formano un'infinità numerabile, si ha

$$(4)\qquad \lim_{n\to\infty} M_t^{(n)}=L_t=N(f;\ t)$$

ed è inoltre

$$(5)\qquad |M_t^{(n)}|\leqq M(|f|;\ I).$$

Si ha pure

$$S_\varphi(f;\ D_n)=\sum_r^{1\ldots k_n} M(f;\ I_r^{(n)})\varphi(I_r^{(n)})=\sum_r^{1\ldots k_n} M(f;\ I_r^{(n)})\Big[(\mathfrak{L})\int_{I_r^{(n)}}\varphi'(t)dt\Big]=$$

$$=\sum_r^{1\ldots k_n}\Big[(\mathfrak{L})\int_{I_r^{(n)}} M(f;\ I_r^{(n)})\varphi'(t)dt\Big]=(\mathfrak{L})\int_I M_t^{(n)}\varphi'(t)dt$$

e passando al limite per $n \to \infty$, e osservando che le integral-funzioni dei termini della successione $\{M_t^{(n)}\varphi'(t)\}$ sono equi-assolutamente-continue in I

$$\left[\left|\int_{I'} M_t^{(n)}\varphi'(t)dt\right| \leqslant M(|f|;\, I)\int_{I'}|\varphi'(t)|\,dt\right]$$

si ha [I, Cap. IV, teor. 37]

$$\lim_{n\to\infty} S_\varphi(f;\, D_n) = \lim_{n\to\infty}(\mathfrak{L})\int_I M_t^{(n)}\varphi'(t)dt = (\mathfrak{L})\int_I N(f;\, t)\varphi'(t)dt$$

cioè la (3_1).

Cambiando f in $-f$ dalla (3_1) si passa alla (3_2).

Supponiamo ora $\varphi(t)$ a variazione limitata in I e $P(t)$, $N(t)$ siano la variazione totale positiva e la variazione totale negativa di $\varphi(t)$ in (a, t). La funzione $\varphi'(t)$ è generalmente definita in I e costruiamo come in I, Cap. V, § 2 n.° 9 due funzioni $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ con la seguente legge:

$$\begin{array}{llll} \varphi_1(t) = \varphi'(t) & \text{se } \varphi'(t) \geqslant 0, & \varphi_1(t) = 0 & \text{se } \varphi'(t) < 0; \\ \varphi_2(t) = \varphi'(t) & \text{se } \varphi'(t) < 0, & \varphi_2(t) = 0 & \text{se } \varphi'(t) \geqslant 0, \end{array}$$

e perciò con le nostre notazioni

$$L_t\varphi_1(t) + l_t\varphi_2(t) = N(f;\, t)\varphi'(t). \tag{6}$$

Poichè

$$\varphi(t) = \varphi(a) + \int_a^t \varphi'(t)dt$$

si ha [I, Cap. V, § 2, n°. 9, (5_1), (5_2)]

$$0 \leqslant P'(t) = \varphi_1(t), \qquad 0 \leqslant N'(t) = -\varphi_2(t),$$

ma tenuto conto delle (18) del § 1 e della prima parte della nostra dimostrazione si ha

$$\overline{\int_a^b} fd\varphi = \overline{\int_a^b} fdP - \underline{\int_a^b} fdN = (\mathfrak{L})\int_a^b L_tP_t'dt - (\mathfrak{L})\int_a^b l_tN_t'dt =$$
$$= (\mathfrak{L})\int_a^b [L_t\varphi_1(t) + l_t\varphi_2(t)]dt$$

e per la (6) si ottiene la (3_1).

2. - Teorema 15. - Se $f(t)$ è limitata in I e $\varphi(t)$ assolutamente continua in I, condizione necessaria e sufficiente perchè $f(t)$ sia integrabile secondo Stieltjes rispetto a $\varphi(t)$ in I è che $f(t)$ sia generalmente continua nell'aggregato dei punti t ove $\varphi'(t) \neq 0$.

Dimostrazione. - Dalle (3_1), (3_2) si ha infatti

$$(S)\overline{\int_I} fd\varphi - (S)\underline{\int_I} fd\varphi = (\mathfrak{L})\int_I [N(f;\, t) - n(f;\, t)]\varphi'(t)dt =$$
$$= (\mathfrak{L})\int_I (L_t - l_t)|\varphi'(t)|\,dt,$$

e poichè $L_t - l_t \geqslant 0$, ne viene che $(L_t - l_t)\varphi'(t)$ deve essere generalmente nulla in I, e perciò $L_t - l_t = 0$ generalmente ove $\varphi'(t) \neq 0$.

Dal teorema dimostrato si deduce il

Corollario. - Se $f(t)$ è limitata in (a, b), condizione necessaria e sufficiente perchè esista l'integrale di [Mengoli-Cauchy]-Riemann

$$(R)\int_a^b fdt$$

è che $f(t)$ sia generalmente continua in (a, b), e quando questa condizione è soddisfatta si ha

$$(R)\int_a^b fdt = (\mathfrak{L})\int_a^b fdt \quad \text{[Cfr. I, Cap. IV, teor. 31].}$$

§ 7. - L'integrale di Stieltjes tra limiti infiniti.

1. Integrali di Stieltjes tra limiti infiniti. - 2. Una formula di inversione di Lévy.

1. - Sia (a, b) un tratto infinito in uno o in entrambi i sensi, ed $f(t)$ e $\varphi(t)$ siano definite per ogni valore finito di t, $f(t)$ limitata e $\varphi(t)$ a variazione limitata in (a, b); [Cfr. Cap. II, § 7, n.° 1].

Supposto ad esempio a finito $b = +\infty$ si dirà che $f(t)$ *ha integrale di Stieltjes convergente rispetto alla funzione determinante* $\varphi(t)$ *e al tratto* $(a, +\infty)$, se

$$\lim_{k\to+\infty}\int_a^k fd\varphi$$

esiste ed è un numero finito; indicheremo tale limite con $\int_a^{+\infty} fd\varphi$, porremo cioè per definizione

$$\int_a^{+\infty} fd\varphi = \lim_{k\to+\infty} \int_a^k fd\varphi.$$

Analoghe definizioni valgono per gli integrali $\int_{-\infty}^b fd\varphi$, $\int_{-\infty}^{+\infty} fd\varphi$, e per il valore principale secondo CAUCHY dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} fd\varphi \left[= \lim_{k\to+\infty} \int_{-k}^{+k} fd\varphi \right].$$

Infine se i due integrali $\int_a^{+\infty} f_1 d\varphi$, $\int_a^{+\infty} f_2 d\varphi$ esistono, porremo per definizione

$$\int_a^{+\infty} (f_1 + if_2) d\varphi = \int_a^{+\infty} f_1 d\varphi + i \int_a^{+\infty} f_2 d\varphi,$$

(i unità immaginaria).

Sussistono i seguenti teoremi.

TEOREMA 16. - Sia $f(t)$ limitata in $(a, +\infty)$, $|f(t)| \leq M$; $\varphi(t)$ una funzione non decrescente e limitata in $(a, +\infty)$, $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = \varphi(\infty)$; se $f(t)$ è ad integrale convergente rispetto alla funzione determinante $\varphi(t)$, allora per $a \leq A \leq B$ si ha

$$\left| \int_A^B fd\varphi \right| \leq M[\varphi(\infty) - \varphi(A)]. \tag{1}$$

Dimostrazione. - Si ha [Teor. 9] $\left| \int_A^B fd\varphi \right| \leq M[\varphi(B) - \varphi(A)]$, ma è $\varphi(B) \leq \varphi(\infty)$.

TEOREMA 17. - Sia $f(t)$ monotona e limitata in $(a, +\infty)$ e ad integrale convergente rispetto alla funzione a variazione limitata $\varphi(t)$, posto $\lim_{t\to+\infty} f(t) = f(\infty)$, $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = \varphi(\infty)$ sussiste la formula di integrazioni per parti

$$\int_a^{+\infty} \varphi df = -\int_a^{+\infty} fd\varphi + f(\infty)\varphi(\infty) - f(a)\varphi(a). \tag{2}$$

Dimostrazione. - Si ha infatti per il teorema 12

$$\int_a^k \varphi df = -\int_a^k fd\varphi + f(k)\varphi(k) - f(a)\varphi(a)$$

e passando al limite per $k \to +\infty$, e tenuto conto delle nostre ipotesi, segue la (2).

2. - TEOREMA 18. - Se $\varphi(t)$ è una funzione limitata in $(-\infty, +\infty)$, non decrescente, qualunque sia il numero reale x, l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\varphi(t)$$

è convergente.

Dimostrazione. - Occorre provare l'esistenza degli integrali

$$\int_a^{+\infty} \cos tx \, d\varphi(t), \qquad \int_a^{+\infty} \operatorname{sen} tx \, d\varphi(t)$$

e degli analoghi tra $-\infty$ e a.

Per la nostra ipotesi, fissato $\varepsilon > 0$ si può determinare un k_0 così grande tale che $0 \leq \varphi(\infty) - \varphi(k_0) < \varepsilon$, e si ha allora per $k_2 > k_1 \geq k_0$ e per la (1)

$$\left| \int_{k_1}^{k_2} \cos tx \, d\varphi(t) \right| \leq \varphi(\infty) - \varphi(k_0) < \varepsilon,$$

e quindi per il teorema di CAUCHY il

$$\lim_{k\to+\infty} \int_a^k \cos tx \, d\varphi(t)$$

esiste ed è un numero finito.

TEOREMA 19. - Sia $\varphi(t)$ una funzione definita per qualunque valore finito di t, limitata, non decrescente, regolare in ogni punto t.

Se poniamo

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\varphi(t) \tag{3}$$

vale la formula di inversione di LÉVY [BOCHNER [3], pp. 66-67; LÉVY [39], *b*)]

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi(\varrho)-\varphi(0)&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n} f(x)\,\frac{e^{-i\varrho x}-1}{-ix}\,dx=\\ &=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\frac{e^{-i\varrho x}-1}{-ix}\,dx\end{aligned}} \quad (4) \quad (^1).$$

Dimostrazione. - Osserviamo preliminarmente che si ha per ϱ reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}d\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t+\varrho)x}d\varphi(t+\varrho)$$

e perciò

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t-\varrho)x}\,d\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}d\varphi(t+\varrho). \tag{5}$$

Consideriamo ora la funzione

$$\Phi(t)=\varphi(t+\varrho)-\varphi(t), \tag{6}$$

poichè i due limiti $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)$, $\lim_{t\to-\infty}\varphi(t)$ sono finiti si ha $\lim_{t\to\pm\infty}\Phi(t)=0$.

Abbiamo poi, supposto ad esempio $\varrho>0$, e per $k_1<k_2$

$$\begin{aligned}\int_{k_1}^{k_2}|\Phi(t)|\,dt&=\int_{k_1}^{k_2}\Phi(t)dt=\int_{k_1}^{k_2}\varphi(t+\varrho)dt-\int_{k_1}^{k_2}\varphi(t)dt=\\ &=\int_{k_1}^{k_2}\varphi(t+\varrho)dt-\int_{k_1-\varrho}^{k_2-\varrho}\varphi(t+\varrho)dt=\int_{k_2-\varrho}^{k_2}\varphi(t+\varrho)dt-\int_{k_1-\varrho}^{k_1}\varphi(t+\varrho)dt\end{aligned}$$

cioè

$$\int_{k_1}^{k_2}|\Phi(t)|\,dt=\int_{0}^{\varrho}[\varphi(k_2+t)-\varphi(k_1+t)]dt,$$

ma fissato $\varepsilon>0$, possiamo determinare k_0 in modo che per $k_2\geqslant k_1\geqslant k_0$

(1) Dell'ultimo integrale della (4) intendiamo prendere il valore principale.

sia $0\leqslant\varphi(k_2+t)-\varphi(k_1+t)<\varepsilon/\varrho$, perciò $\int_{k_1}^{k_2}|\Phi(t)|\,dt<\varepsilon$, e questo prova per il teorema di CAUCHY che la $\Phi(t)$ è ad integrale assolutamente convergente in $(a,+\infty)$.

Ragionando analogamente per l'intervallo $(-\infty, a)$ ne viene che la $\Phi(t)$ è ad integrale assolutamente convergente in $(-\infty,+\infty)$.

Dalla (3) si ha

$$\begin{aligned}[e^{-i\varrho x}-1]f(x)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{-i\varrho x}-1)e^{itx}d\varphi(t)=\\ &=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(t-\varrho)x}\,d\varphi(t)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}d\varphi(t)\end{aligned}$$

e tenuto conto delle (5) e (6)

$$\begin{aligned}[e^{-i\varrho x}-1]f(x)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}d\varphi(t+\varrho)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}d\varphi(t)=\\ &=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n}e^{itx}d\Phi(t).\end{aligned}$$

Per il corollario del teorema 12, all'integrale $\int_{-n}^{n}e^{itx}d\Phi(t)$ possiamo applicare l'integrazione per parti e otteniamo

$$[e^{-i\varrho x}-1]f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\Phi(n)e^{inx}-\Phi(-n)e^{-inx}-\int_{-n}^{n}ixe^{itx}\Phi(t)dt\right]$$

ma $\lim_{n\to+\infty}|\Phi(n)e^{inx}-\Phi(-n)e^{-inx}|=0$, quindi

$$f(x)\,\frac{e^{-i\varrho x}-1}{-ix}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\Phi(t)dt, \tag{7}$$

dove nel secondo membro dell'integrale intendiamo prendere il valore principale.

La funzione $\frac{e^{-i\varrho x}-1}{-ix}f(x)$ è per la (7) una trasformata di FOURIER di $\Phi(t)$ e questa è ad integrale assolutamente convergente in $(-\infty,+\infty)$, (a variazione limitata), regolare, è lecito quindi applicare alla (7) la formula di inversione di FOURIER [Cfr. Cap. II, § 7, (33), (34)] e si avrà

$$\Phi(0)=\varphi(\varrho)-\varphi(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\varrho x}-1}{-ix}f(x)dx \qquad \text{c. v. d.}$$

§ 8. - Successioni di funzioni di ripartizione [BOCHNER [3], pp. 68-74].

1. Funzioni di ripartizione. - 2. Successioni di funzioni di ripartizione convergenti. - 3. Successioni convergenti estratte da una successione di funzioni di ripartizione, limitata. - 4. Successioni convergenti verso una funzione continua e teorema di POLYA.

1. - *Definizione* 8. - Una funzione $V(\alpha)$ definita per qualunque valore finito di α chiamasi una *funzione di ripartizione* quando è limitata, monotona e non decrescente, e regolare in ogni suo punto

$$2V(\alpha)=V(\alpha+)+V(\alpha-) \quad (^1).$$

2. - Sia data una successione di funzioni di ripartizione

$$(1) \qquad V_1(\alpha), \quad V_2(\alpha),...., \quad V_n(\alpha),....$$

complessivamente limitate

$$(2) \qquad |V_n(\alpha)|\leqslant M \qquad (n=1, 2,....)$$

e la successione $\{V_n(\alpha)\}$ sia convergente in ciascuno dei punti di una successione

$$(3) \qquad \alpha_1, \quad \alpha_2,...., \quad \alpha_\nu,....$$

ovunque densa sulla retta r. Si ponga

$$(4) \qquad \lim_{n\to\infty} V_n(\alpha_\nu)=\tau_\nu \qquad (\nu=1, 2,....),$$

(1) Nel Calcolo delle Probabilità $V(\alpha)$, quando soddisfa le condizioni $V(-\infty)=0$, $V(+\infty)=1$ rappresenta la probabilità che una variabile casuale X assuma un valore $\leqslant\alpha$. Cfr., ad esempio, G. CASTELNUOVO [7], Vol. II, p. 149. Avvertiamo il lettore che da ora in avanti i simboli $V(-\infty)$ e $V(+\infty)$ indicano rispettivamente $\lim_{t\to-\infty} V(t)$, $\lim_{t\to+\infty} V(t)$.

si ha subito che se $\alpha_\mu<\alpha_\nu$ è $\tau_\mu\leqslant\tau_\nu$; infatti è $V_n(\alpha_\mu)\leqslant V_n(\alpha_\nu)$ e basta passare al limite per $n\to\infty$.

Per la (2) è anche

$$(5) \qquad |\tau_\nu|\leqslant M.$$

Ciò premesso, per ogni punto α di r definiamo il numero $V(\alpha+)$ $[V(\alpha-)]$ con la seguente legge: $V(\alpha+)$ $[V(\alpha-)]$ *è l'estremo inferiore [superiore] di tutti i* τ_ν *corrispondenti ai numeri* α_ν *che seguono [precedono]* α, e definiamo la funzione $V(\alpha)$ con la relazione

$$(6) \qquad V(\alpha)=[V(\alpha+)+V(\alpha-)]/2.$$

Dalla (5) si ha $|V(\alpha-)|\leqslant M$, $|V(\alpha+)|\leqslant M$, perciò $|V(\alpha)|\leqslant M$, ossia $V(\alpha)$ è limitata.

La $V(\alpha)$ è una funzione non decrescente.

Infatti sia $\alpha<\beta$ e consideriamo un punto α_ν di $\{\alpha_\nu\}$ tale che $\alpha<\alpha_\nu<\beta$, si ha

$$V(\alpha-)\leqslant V(\alpha+)\leqslant\tau_\nu\leqslant V(\beta-)\leqslant V(\beta+); \qquad V(\alpha)\leqslant\tau_\nu\leqslant V(\beta).$$

La $V(\alpha)$ è una funzione regolare in ogni punto α.

Siano infatti

$$\alpha_{r_1}<\alpha_{r_2}<....<\alpha_{r_\nu}<...., \qquad \alpha_{s_1}>\alpha_{s_2}>....>\alpha_{s_\nu}>....$$

due successioni che abbiano rispettivamente per estremo superiore e inferiore α; si ha

$$V(\alpha_{r_1}-)\leqslant\tau_{r_1}\leqslant V(\alpha_{r_1}+)\leqslant V(\alpha_{r_2}-)\leqslant\tau_{r_2}\leqslant$$
$$\leqslant V(\alpha_{r_2}+)\leqslant V(\alpha_{r_3}-)\leqslant\tau_{r_3}\leqslant V(\alpha_{r_3}+)\leqslant....$$

quindi

$$\frac{V(\alpha_{r_1}-)+V(\alpha_{r_1}+)}{2}\leqslant\tau_{r_2}\leqslant\frac{V(\alpha_{r_3}-)+V(\alpha_{r_3}+)}{2}\leqslant\tau_{r_4}\leqslant....$$

$$V(\alpha_{r_1})\leqslant\tau_{r_2}\leqslant V(\alpha_{r_3})\leqslant\tau_{r_4}\leqslant....$$

e perciò $V(\alpha-)$ $[V(\alpha+)]$ è l'estremo superiore [inferiore] della successione $V(\alpha_{r_1})$, $V(\alpha_{r_3})$,.... $[V(\alpha_{s_1}), V(\alpha_{s_3}),....]$.

La funzione $V(\alpha)$ *definita con la* (6) *è quindi una funzione di ripartizione.*

Vogliamo provare che *in tutti i punti di continuità di* $V(\alpha)$ *si ha*

$$\lim_{n\to\infty} V_n(\alpha)=V(\alpha).$$

Si ha infatti con le notazioni precedenti

$$a_{r_\nu} < a < a_{s_\nu}$$

quindi $V_n(a_{r_\nu}) \leq V_n(a) \leq V_n(a_{s_\nu})$ e passando al limite per $n \to \infty$

$$\tau_{r_\nu} \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} V_n(a) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} V_n(a) \leq \tau_{s_\nu},$$

ma si ha $\lim_{\nu\to\infty} \tau_{r_\nu} = V(a-) = V(a)$, $\lim_{\nu\to\infty} \tau_{s_\nu} = V(a+) = V(a)$, quindi

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} V_n(a) = \overline{\lim}_{n\to\infty} V_n(a) = V(a) \qquad \text{c. v. d.}$$

Siccome i punti di discontinuità di $V(a)$ formano un insieme di misura nulla concludiamo che si ha *generalmente* sulla retta r

$$\lim_{n\to\infty} V_n(a) = V(a).$$

Osserviamo che se $\overline{V}(a)$ è una funzione di ripartizione tale che in ogni suo punto di continuità è soddisfatta la relazione

$$\lim_{n\to\infty} V_n(a) = \overline{V}(a),$$

si ha qualunque sia a, $\overline{V}(a) = V(a)$. Infatti le funzioni di ripartizione $\overline{V}(a)$ e $V(a)$ coincidono in tutti i punti di continuità di $\overline{V}(a)$, cioè in un insieme ovunque denso sulla retta r e perciò in qualsiasi punto.

Le cose dette giustificano per le successioni di funzioni di ripartizione la seguente

Definizione 9. - Data una successione di funzioni di ripartizione $\{V_n(a)\}$ complessivamente limitate, se esiste una funzione di ripartizione $V(a)$ tale che in tutti i suoi punti di continuità si abbia $\lim_{n\to\infty} V_n(a) = V(a)$, diremo che la successione $\{V_n(a)\}$ è convergente, e che il suo limite è $V(a)$.

Due funzioni di ripartizione che siano limite della successione $\{V_n(a)\}$ coincidono, e notiamo anche che *condizione necessaria e sufficiente perchè una successione di funzioni di ripartizione, complessivamente limitate, sia convergente verso una funzione di ripartizione è che essa risulti convergente in tutti i punti di un insieme ovunque denso sulla retta r.*

Un tale insieme può essere ad esempio l'insieme di tutti i punti razionali [ovunque denso sulla retta r, numerabile, e di misura nulla].

3. - **Teorema** 20. - Se $\{V_n(a)\}$ è una successione di funzioni di ripartizione complessivamente limitate, da essa può estrarsi una successione convergente verso una funzione di ripartizione.

Dimostrazione. - Rappresenti

$$(7) \qquad a_1, \quad a_2, \ldots, \quad a_\nu, \ldots$$

l'insieme di tutti i punti razionali della retta r. Consideriamo l'insieme numerico

$$(8) \qquad V_1(a_1), \quad V_2(a_1), \ldots, \quad V_n(a_1), \ldots,$$

esso è limitato e ammetterà almeno un valore limite; sia esso τ_1; dalla successione (8) possiamo estrarre allora una successione

$$(8_1) \qquad V_{1,1}(a_1), \quad V_{1,2}(a_1), \ldots, \quad V_{1,n}(a_1), \ldots$$

tale che

$$\lim_{n\to\infty} V_{1,n}(a_1) = \tau_1.$$

Consideriamo la successione $\{V_{1,n}(a_2)\}$, essa ammetterà almeno un valore limite τ_2 e da questa può estrarsi una successione

$$(8_2) \qquad V_{2,1}(a_2), \quad V_{2,2}(a_2), \ldots, \quad V_{2,n}(a_2), \ldots$$

tale che

$$\lim V_{2,n}(a_2) = \tau_2.$$

Così continuando troveremo una successione $\{V_{r,n}(a)\}$ contenuta nella precedente $\{V_{r-1,n}(a)\}$ e tale che

$$(8_r) \qquad \lim_{n\to\infty} V_{r,n}(a_r) = \tau_r.$$

Consideriamo allora la successione

$$V_{1,1}(a), \quad V_{2,2}(a), \ldots, \quad V_{s,s}(a), \ldots$$

si ha per essa

$$\lim_{s\to\infty} V_{s,s}(a_\nu) = \tau_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

e la $\{V_{s,s}(a)\}$ converge quindi verso una funzione di ripartizione $V(a)$ tale che in tutti i punti a di continuità di $V(a)$ si ha $\lim_{s\to\infty} V_{s,s}(a) = V(a)$.

4. - TEOREMA 21 (di POLYA) [[48], p. 173]. - Se una successione di funzioni di ripartizione $\{V_n(a)\}$ converge verso una funzione *continua* $V(a)$,

$$\lim_{n\to\infty} V_n(a) = V(a)$$

e se

$$(9_1)\qquad \lim_{n\to\infty} V_n(-\infty) = V(-\infty),$$

$$(9_2)\qquad \lim_{n\to\infty} V_n(+\infty) = V(+\infty),$$

allora la convergenza di $V_n(a)$ verso $V(a)$ è uniforme in $(-\infty, +\infty)$.

Dimostrazione. - Dobbiamo provare che scelto $\sigma > 0$, può determinarsi un intero positivo n_0 tale che per $n > n_0$ sia

$$|V_n(a) - V(a)| < \sigma \quad \text{per} \quad n > n_0$$

e a qualunque.

Cominciamo col determinare due punti a e b, $a < b$, tali che

$$(10_1)\qquad V(a) - V(-\infty) < \sigma/8,$$

$$(10_2)\qquad V(+\infty) - V(b) < \sigma/8;$$

per la continuità di $V(a)$ in (a, b), si può dividere (a, b) con un numero finito di punti $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_m = b$ in guisa che

$$(11)\qquad 0 < V(a_{i+1}) - V(a_i) < \sigma/4 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m-1).$$

Si può ora determinare un intero n_0 tale che per $n > n_0$ risulti in $a_0, a_1, \dots, a_m$

$$(12)\qquad |V_n(a_i) - V(a_i)| < \sigma/4 \quad \text{per} \quad n > n_0, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m),$$

e ancora per $n > n_0$

$$(13)\qquad |V_n(-\infty) - V(-\infty)| < \sigma/8, \qquad |V_n(+\infty) - V(+\infty)| < \sigma/8.$$

Si ha allora

$$0 \leq V_n(a_0) - V_n(-\infty) \leq |V_n(a_0) - V(a_0)| + \\ + |V(a_0) - V(-\infty)| + |V(-\infty) - V_n(-\infty)| < \sigma/2,$$

$$0 \leq V_n(+\infty) - V_n(a_m) < \sigma/2.$$

Le funzioni $V_n(a) - V_n(-\infty)$, $V(a) - V(-\infty)$ sono l'una e l'altra non negative e crescenti in $(-\infty, a_0)$, ma in a_0 entrambe per $n > n_0$ sono minori di $\sigma/2$, si ha perciò per $a \leq a_0$,

$$|[V_n(a) - V_n(-\infty)] - [V(a) - V(-\infty)]| < \sigma/2$$

$$|V_n(a) - V(a)| < |V_n(-\infty) - V(-\infty)| + \sigma/2 < \sigma \quad \text{per} \quad n > n_0.$$

Similmente per $a_m < a$ si ha

$$|V_n(a) - V(a)| < \sigma \quad \text{per} \quad n > n_0.$$

Sia infine $a_i \leq a \leq a_{i+1}$, si ha

$$(14)\qquad V_n(a_i) - V(a_{i+1}) \leq V_n(a) - V(a) \leq V_n(a_{i+1}) - V(a_i),$$

ma è

$$V_n(a_i) - V(a_{i+1}) = [V_n(a_i) - V(a_i)] + \\ + [V(a_i) - V(a_{i+1})] > -\sigma$$

$$V_n(a_{i+1}) - V(a_i) = [V_n(a_{i+1}) - V(a_{i+1})] + [V(a_{i+1}) - V(a_i)] < \sigma$$

quindi dalla (14)

$$|V_n(a) - V(a)| < \sigma \quad \text{per} \quad n > n_0 \quad \text{e} \quad a_i \leq a \leq a_{i+1} \qquad \text{c. v. d.}$$

§ 9. - Successioni di funzioni di ripartizione e successioni di funzioni caratteristiche.

1. Funzione caratteristica di una funzione di ripartizione. Esempio. - 2. Continuità della funzione caratteristica di una funzione di ripartizione continua. - 3. Convergenza della successione di funzioni caratteristiche di una successione di funzioni di ripartizione convergente. - 4. La convergenza condizionata della successione di funzioni di ripartizione corrispondenti ad una successione di funzioni caratteristiche convergente verso una funzione continua. - 5. Teorema dei momenti. Dimostrazione nell'ipotesi di CANTELLI. - 6. Limite di una distribuzione di masse dipendente da un parametro, disposte su una retta.

1. - *Definizione* 10. - Se $V(a)$ è una funzione di ripartizione, la funzione $f(x)$ definita dall'integrale

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} d\,V(a)$$

chiamasi secondo POINCARÉ, la funzione caratteristica relativa alla funzione di ripartizione $V(a)$ [POINCARÉ [46]; LÉVY [39, a)]].

Diremo *equivalenti* due funzioni di ripartizione che differiscono per una costante; evidentemente due funzioni di ripartizione equivalenti hanno la medesima funzione caratteristica.

Si voglia ad esempio costruire la funzione caratteristica di

$$V(a)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-a^2}da.$$

Si ha $V(-\infty)=0$, e come è ben noto

$$V(+\infty)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2}da=1 \quad (^1), \tag{1}$$

posto quindi

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}e^{-a^2}da \tag{2}$$

---

[1] La (1) si prova brevemente in questo modo. Posto

$$I_k=\int_{-k}^{k} e^{-x^2}dx$$

si ha

$$I_k^2=\int_{-k}^{k}\int_{-k}^{k} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

e se $c_{1,k}$, $c_{2,k}$ indicano i due cerchi con centro nell'origine rispettivamente di raggio k e $k\sqrt{2}$ si ha

$$\iint_{c_{1,k}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy<I_k^2<\iint_{c_{2,k}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

Col cambiamento di variabili $x=\varrho\cos\theta$, $y=\varrho\operatorname{sen}\theta$ si trova

$$\iint_{c_{1,k}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{k} e^{-\varrho^2}\varrho\, d\varrho=\pi(1-e^{-k^2});$$

$$\iint_{c_{2,k}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\pi(1-e^{-2k^2})$$

quindi

$$1-e^{-k^2}<I_k^2/\pi<1-e^{-2k^2}$$

e perciò

$$\lim_{k\to+\infty} I_k^2/\pi=1,$$

da cui la (1) del testo.

ne viene

$$f(0)=1. \tag{3}$$

Dalla (2) si ha

$$f'(x)=\frac{i}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}ae^{-a^2}da=\frac{i}{\sqrt{\pi}}\left[-\frac{1}{2}e^{-a^2}e^{iax}\right]_{a=-\infty}^{a=+\infty}-\frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}e^{-a^2}da$$

perciò

$$f'(x)=-\frac{x}{2}f(x), \qquad \frac{d}{dx}\left[f(x)e^{\frac{x^2}{4}}\right]=0$$

da cui tenuto conto della (3)

$$f(x)=e^{-\frac{x^2}{4}}.$$

2. - Teorema 22. - **La funzione caratteristica di una funzione di ripartizione è continua.**

Dimostrazione. - Fissato $\sigma>0$ si determini $a>0$ in modo che si abbia

$$2[V(-a)-V(-\infty)]<\sigma/3, \qquad 2[V(+\infty)-V(a)]<\sigma/3,$$

si fissi poi un $h_0>0$ in modo che si abbia

$$h_0 a\,|V(a)-V(-a)|<\sigma/3.$$

Abbiamo

$$f(x+h)-f(x)=\int_{-\infty}^{-a}(e^{ia(x+h)}-e^{iax})dV(a)+$$
$$+\int_{a}^{+\infty}(e^{ia(x+h)}-e^{iax})dV(a)+\int_{-a}^{a}(e^{ia(x+h)}-e^{iax})dV(a);$$

ma è

$$\left|\int_{-\infty}^{-a}(e^{ia(x+h)}-e^{iax})dV(a)\right|\leq 2[V(-a)-V(-\infty)]<\sigma/3$$

$$\left|\int_{a}^{+\infty}(e^{ia(x+h)}-e^{iax})dV(a)\right|\leq 2[V(+\infty)-V(a)]<\sigma/3,$$

si ha pure

$$e^{ia(x+h)}-e^{iax}=e^{ia\left(x+\frac{h}{2}\right)}\left[e^{ia\frac{h}{2}}-e^{-ia\frac{h}{2}}\right]=2i\operatorname{sen}\frac{ah}{2}\,e^{ia\left(x+\frac{h}{2}\right)}$$

e per $|h|<h_0$

$$\left|\int_{-a}^{a}[e^{i\alpha(x+h)}-e^{i\alpha x}]\,dV(\alpha)\right|=|h|\left|\int_{-a}^{a}\frac{\text{sen}\,(\alpha h/2)}{\alpha h/2}\,\alpha e^{i\alpha\left(x+\frac{h}{2}\right)}dV(\alpha)\right|\leqslant$$
$$\leqslant|h|\,|a|\,[V(+a)-V(-a)]<\sigma/3,$$

perciò per $|h|<h_0$

$$|f(x+h)-f(x)|<\sigma \qquad \text{c. v. d.}$$

3. - Teorema 23. - La successione di funzioni di ripartizione $\{V_n(\alpha)\}$ converga verso una funzione di ripartizione $V_0(\alpha)$, si abbia cioè in tutti i punti di continuità α di $V(\alpha)$

$$\lim_{n\to\infty} V_n(\alpha)=V_0(\alpha) \tag{4}$$

e sia anche

$$\lim_{n\to\infty} V_n(-\infty)=V_0(-\infty), \tag{5_1}$$

$$\lim_{n\to\infty} V_n(+\infty)=V_0(+\infty). \tag{5_2}$$

Consideriamo le corrispondenti funzioni caratteristiche

$$f_n(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\alpha x}dV_n(\alpha), \qquad f_0(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\alpha x}dV_0(\alpha); \tag{6}$$

vogliamo dimostrare:

a). In ogni punto x è

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f_0(x). \tag{7}$$

b). Se $V_0(\alpha)$ è continua in $(-\infty,+\infty)$ allora la (7) vale uniformemente in qualunque intervallo finito.

Dimostrazione. - Se per $a>0$ e $n=0,1,2,\ldots$ poniamo

$$\begin{cases} f_n(x,a)=\displaystyle\int_{-a}^{a}e^{i\alpha x}dV_n(\alpha), \\ P_n(x,a)=\displaystyle\int_{a}^{+\infty}e^{i\alpha x}dV_n(\alpha), \qquad Q_n(x,a)=\displaystyle\int_{-\infty}^{-a}e^{i\alpha x}dV_n(\alpha), \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} A_n(x,a)=f_n(x,a)-f_0(x,a), \qquad B_n(x,a)=P_n(x,a)-P_0(x,a), \\ C_n(x,a)=Q_n(x,a)-Q_0(x,a), \end{cases} \tag{9}$$

abbiamo

$$f_n(x)-f_0(x)=A_n(x,a)+B_n(x,a)+C_n(x,a). \tag{10}$$

Si ha $|P_n(x,a)|<V_n(+\infty)-V_n(a)$ e perciò

$$|B_n(x,a)|<[V_n(+\infty)-V_n(a)]+[V_0(+\infty)-V_0(a)] \tag{11_1}$$

e analogamente

$$|C_n(x,a)|<[V_n(-a)-V_n(-\infty)]+[V_0(-a)-V_0(-\infty)]. \tag{11_2}$$

Sia ora $\sigma>0$ e si determini $a>0$ tale che $+a$ e $-a$ siano punti di continuità di $V_0(\alpha)$ e sia

$$[V_0(+\infty)-V_0(a)]<\sigma/6, \qquad [V_0(-a)-V_0(-\infty)]<\sigma/6.$$

A motivo delle (4), (5_1), (5_2) può determinarsi un intero positivo n_0 tale che per $n>n_0$ risulti

$$0\leqslant V_n(+\infty)-V_n(a)<V_0(+\infty)-V_0(a)+\sigma/6<\sigma/3 \quad [n>n_0]$$

e analogamente

$$0\leqslant V_n(-a)-V_n(-\infty)<\sigma/3,$$

e allora le (11_1), (11_2) dànno con a sufficientemente grande

$$\left.\begin{array}{l} |B_n(x,a)|<\sigma/2, \\ |C_n(x,a)|<\sigma/2 \end{array}\right\} \quad [n>n_0 \text{ e } x \text{ qualunque}] \tag{12}$$

e dalla (10)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|f_n(x)-f_0(x)|\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|A_n(x,a)|+\sigma. \tag{13}$$

Si ha poi [cfr. § 5, n.° 3]

$$A_n(x,a)=\int_{-a}^{a}e^{i\alpha x}d[V_n(\alpha)-V_0(\alpha)]=e^{iax}[V_n(a)-V_0(a)]- \tag{14}$$
$$-e^{-iax}[V_n(-a)-V_0(-a)]-ix\int_{-a}^{a}e^{i\alpha x}[V_n(\alpha)-V_0(\alpha)]d\alpha.$$

Essendo a, $-a$ punti di continuità di $V_0(\alpha)$ è

$$\lim_{n\to\infty}[V_n(\pm a)-V_0(\pm a)]=0,$$

ma $\{V_n(\alpha)-V_0(\alpha)\}$ è limitata e si ha generalmente in $(-a, a)$

$$\lim_{n\to\infty}[V_n(\alpha)-V_0(\alpha)]=0,$$

ne viene

$$\lim_{n\to\infty} A_n(x, a)=0$$

e dalla (13)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|f_n(x)-f_0(x)|\leq\sigma$$

ma σ è arbitrario, perciò

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f_0(x).$$

Supponiamo ora $V_0(\alpha)$ continua, e proviamo che se x varia in un intervallo finito $(-L, L)$ si ha uniformemente [in $(-L, L)$]

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f_0(x).$$

Infatti fissato $\sigma>0$, si può determinare un $a>0$ così grande, che per $n>n_0$ e qualunque sia x valgono le (12), e cresciamo se è necessario L in modo che sia $aL>1$. Cresciamo ancora, se è necessario n_0, in modo che per $n>n_0$ si abbia qualunque sia α [cfr. § 8, n.° 4]

$$|V_n(\alpha)-V_0(\alpha)|<\sigma/2aL.$$

Dalla (14) per $|x|\leq L$ si ottiene

$$\begin{aligned}(15)\qquad |A_n(x, a)|&<\sigma/2aL+\sigma/2aL+\\&+[\sigma/2aL]2a|x|<\sigma/2+\sigma/2+\sigma=2\sigma\end{aligned}$$

e perciò dalle (10), (12), (15)

$$|f_n(x)-f_0(x)|<3\sigma \quad \text{per} \quad n>n_0$$

e qualunque sia x in $(-L, L)$. c. v. d.

Osservazione. - Le condizioni (5_1), (5_2) sono necessarie ai fini del teorema [Cfr. I, Cap. IV, § 4, n.° 4]. Consideriamo ad esempio la successione $\{V_n(\alpha)\}$ così definita:

$$V_n(\alpha)=0 \quad \text{per} \quad \alpha<n, \qquad V_n(n)=1/2, \qquad V_n(\alpha)=1 \quad \text{per} \quad \alpha>n.$$

Si ha

$$V_0(\alpha)=0, \qquad f_0(x)=0, \qquad f_n(x)=e^{inx}$$

e non è

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x).$$

4. - Teorema 24. - Se le funzioni di ripartizione della successione $\{V_n(\alpha)\}$ sono complessivamente limitate e convergono verso una funzione di ripartizione $V_0(\alpha)$

$$(16_1)\qquad |V_n(\alpha)|\leq M \qquad (n=0, 1, 2,....),$$

$$(16_2)\qquad \lim_{n\to\infty} V_n(\alpha)=V_0(\alpha)$$

e se la successione delle funzioni caratteristiche corrispondenti alla $\{V_n(\alpha)\}$

$$(17)\qquad f_n(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x}d\,V_n(\alpha) \qquad (n=1, 2,....)$$

converge verso una funzione *continua* $F(x)$

$$(18)\qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x)=F(x),$$

si ha allora

$$(19)\qquad F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x}d\,V_0(\alpha).$$

Dimostrazione. - Sia ϱ un numero positivo, e poniamo

$$(20)\qquad W_n(\alpha)=\int_0^{\alpha}[V_n(\beta+\varrho)-V_n(\beta)]d\beta \qquad (n=0, 1, 2,....);$$

le $W_n(\alpha)$ sono funzioni continue, monotone, complessivamente limitate [1], e per quanto abbiamo visto nella dimostrazione del teo-

---

[1] $$0\leq|W_n(\alpha)|=\int_0^{\varrho}[V_n(\alpha+\beta)-V_n(\beta)]d\beta\leq 2M\varrho.$$

rema di inversione di LÉVY [Cfr. § 7, n.° 2] si ha:

$$f_n(x)\,\frac{e^{-i\varrho x}-1}{-ix}=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}\,[V_n(a+\varrho)-V_n(a)]\,da$$

ovvero

$$f_n(x)\,\frac{e^{-i\varrho x}-1}{-ix}=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}\,dW_n(a). \tag{21}$$

Se poniamo

$$W_n(a+\varrho)-W_n(a)=E_n(a)\qquad (n=0,1,2,....) \tag{22}$$

le $E_n(a)$ sono non negative, complessivamente limitate, assolutamente integrabili in $(-\infty, +\infty)$ [Cfr. § 7, n.° 2]. Siccome è generalmente

$$\lim_{n\to\infty}[V_n(\beta+\varrho)-V_n(\beta)]=V_0(\beta+\varrho)-V_0(\beta),$$

e

$$\{V_n(\beta+\varrho)-V_n(\beta)\}$$

è limitata, nella (20) è lecito, quando $n\to\infty$, passare al limite sotto il segno integrale, e si ha

$$\lim_{n\to\infty} W_n(a)=W_0(a),$$

perciò

$$\lim_{n\to\infty} E_n(a)=E_0(a). \tag{23}$$

Operando sulla (21) così come abbiamo operato sulla (17) si ha

$$g_n(x)=f_n(x)\left(\frac{e^{-i\varrho x}-1}{-ix}\right)^2=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}E_n(a)\,da \tag{21'}$$

e per l'assoluta integrabilità di $E_n(a)$

$$E_n(a)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iax}g_n(x)\,dx\quad \text{[Cap. II, § 7, n.° 11]}. \tag{24}$$

Si ha $|V_n(a)|\leqslant M$, perciò, dalla (17)

$$|f_n(x)|\leqslant V_n(+\infty)-V_n(-\infty)\leqslant 2M,$$

e dalla (19) $|F(x)|\leqslant 2M$.

Si ha poi

$$\left|(e^{-i\varrho x}-1)/-ix\right|=\left|\varrho e^{-i\varrho\frac{x}{2}}\left[e^{-i\varrho\frac{x}{2}}-e^{+i\varrho\frac{x}{2}}\right]/\varrho x\right|=\left|\varrho \operatorname{sen}\frac{\varrho}{2}x\Big/\frac{\varrho}{2}x\right|\leqslant\varrho$$

e perciò dalla (21')

$$|g_n(x)|\leqslant 2M\varrho^2, \tag{25$_1$}$$

e poichè $|e^{-i\varrho x}-1|\leqslant 2$ si ha anche

$$|g_n(x)|\leqslant 4M/x^2. \tag{25$_2$}$$

Posto

$$G(x)=F(x)\left(\frac{e^{-i\varrho x}-1}{-ix}\right)^2 \tag{21''}$$

si ha

$$|G(x)|\leqslant 2M\varrho^2 \tag{26$_1$}$$

$$|G(x)|\leqslant 4M/x^2 \tag{26$_2$}$$

ed anche

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x)=G(x). \tag{27}$$

Le (25$_1$), (26$_1$) ci avvertono che la successione $\{g_n(x)-G(x)\}$ è limitata in qualunque intervallo finito, e perciò qualunque sia a si ha

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-a}^{a}|g_n(x)-G(x)|\,dx=0$$

Ma per le limitazioni (25$_2$), (26$_2$) fissato $\sigma>0$ si può determinare un a così grande che sia

$$\int_{a}^{+\infty}|g_n(x)-G(x)|\,dx+\int_{-\infty}^{a}|g_n(x)-G(x)|\,dx<\sigma,$$

e abbiamo quindi

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|g_n(x)-G(x)|\,dx=0. \tag{28}$$

Poichè $|e^{-iax}G(x)|\leqslant 4M/x^2$ la funzione $e^{-iax}G(x)$ è ad integrale assolutamente convergente in $(-\infty, +\infty)$, e se poniamo

$$\Phi(a)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iax}G(x)\,dx \tag{29}$$

e teniamo conto che per la (21″), $G(x)$ è continua, abbiamo [Cap. II, § 7, n.° 11]

$$G(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}\Phi(a)da. \tag{30}$$

Si ha ora

$$E_n(a)-\Phi(a)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iax}[g_n(x)-G(x)]dx,$$

$$|E_n(a)-\Phi(a)|\leq\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|g_n(x)-G(x)|\,dx$$

e per la (28)

$$\lim_{n\to\infty} E_n(a)=\Phi(a)$$

ovvero per la (23)

$$E_0(a)=\Phi(a).$$

Si ha da qui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}E_0(a)da=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}\Phi(a)da$$

e per le (21′) e (30)

$$g_0(x)=G(x)$$

ovvero

$$f_0(x)\left(\frac{e^{-i\varrho x}-1}{-ix}\right)^2=F(x)\left(\frac{e^{-i\varrho x}-1}{-ix}\right)^2,$$

e

$$F(x)=f_0(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}d\,V_0(a) \qquad \text{c. v. d.}$$

Definizione 11. - Data una successione di funzioni di ripartizione $\{V_n(a)\}$, se esiste una successione di costanti $\{a_n\}$ tale che la successione $\{V_n(a)-a_n\}$ risulti convergente verso una funzione di ripartizione, la successione $\{V_n(a)\}$ chiamasi *condizionatamente convergente.*

Rendere regolare una successione di funzioni di ripartizione

condizionatamente convergente significa sottrarre da essa una successione di costanti tale che la successione ottenuta converga verso una funzione di ripartizione.

Teorema 25. - Sia $\{V_n(a)\}$ una successione di funzioni di ripartizione, e si considerino le corrispondenti funzioni caratteristiche

$$f_n(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}d\,V_n(a) \qquad (n=1,2,....). \tag{31}$$

La successione $\{f_n(x)\}$ sia limitata

$$|f_n(x)|\leq M$$

e converga verso una funzione *continua* $f(x)$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x). \qquad (n=1,2,....)$$

Vogliamo allora dimostrare che la $\{V_n(a)\}$ è condizionatamente convergente, e quando essa sia resa convergente, essa converge verso funzioni di ripartizione equivalenti, aventi per funzione caratteristica $f(x)$.

Dimostrazione. - *a*). Cominciamo col provare che esiste una funzione di ripartizione $V(a)$ di cui $f(x)$ è la funzione caratteristica.

Si ha

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} d\,V_n(a)\right|=|f_n(0)|\leq M, \qquad V_n(+\infty)-V_n(-\infty)\leq M,$$

$$0\leq V_n(a)-V_n(-\infty)\leq V_n(+\infty)-V_n(-\infty)\leq M$$

quindi

$$0\leq V_n(a)-V_n(-\infty)\leq M$$

perciò la successione $\{V_n(a)-V_n(-\infty)\}$ è limitata, e siccome variando le $V_n(a)$ per costanti additive le $f_n(x)$ restano invariate, supporremo senz'altro che la successione data $\{V_n(a)\}$ soddisfi la condizione $|V_n(a)|\leq N$.

Per il teorema 20, dalla successione $\{V_n(a)\}$ può estrarsi una successione

$$V_{n_1}(a), \quad V_{n_2}(a),...., \quad V_{n_k}(a),....$$

convergente verso una funzione di ripartizione $V(\alpha)$, tale cioè che in ogni punto di continuità di $V(\alpha)$ si abbia

$$\lim_{k\to\infty} V_{n_k}(\alpha)=V(\alpha),$$

ed essendo $f(x)$ continua, per il teorema precedente abbiamo anche

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} d\,V(\alpha). \tag{32}$$

b). Dimostriamo ora che la successione $\{V_n(\alpha)\}$ è condizionatamente convergente, e può rendersi regolare in modo che la successione ottenuta converga verso $V(\alpha)$.

Consideriamo infatti un punto fisso α_0 nel quale $V(\alpha)$ sia continua; abbiamo

$$\lim_{k\to\infty} V_{n_k}(\alpha_0)=V(\alpha_0).$$

Ove non sia

$$\lim_{n\to\infty} V_n(\alpha_0)=V(\alpha_0),$$

sostituiamo alla successione $\{V_n(\alpha)\}$ una nuova successione $\{\overline{V}_n(\alpha)\}$ convergente in α_0, ad esempio quella definita con la seguente legge:

se $V_n(\alpha)$ appartiene a $\{V_{n_k}(\alpha)\}$ porremo

$$\overline{V}_n(\alpha)=V_n(\alpha),$$

se $V_n(\alpha)$ non appartiene a $\{V_{n_k}(\alpha)\}$ porremo

$$\overline{V}_n(\alpha)=V_n(\alpha)-\{V_n(\alpha_0)-V(\alpha_0)\}.$$

Vogliamo provare che $\{\overline{V}_n(\alpha)\}$ converge verso $V(\alpha)$, cioè che in ogni punto β di continuità per $V(\alpha)$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \overline{V}_n(\beta)=V(\beta).$$

Infatti per il teorema 20 da $\{\overline{V}_n(\alpha)\}$ possiamo estrarre una successione $\{\overline{V}_{m_k}(\alpha)\}$ convergente nel punto β considerato, e convergente anche verso una funzione di ripartizione $U(\alpha)$. Per il teorema precedente, data la continuità di $f(x)$, si ha

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} d\,U(\alpha) \tag{33}$$

e invertendo le (32) e (33) con la formula di LÉVY [teor. 19]

$$U(\alpha)-U(0)=V(\alpha)-V(0)$$

e posto

$$U(0)-V(0)=c \text{ [costante]}$$

$$U(\alpha)=V(\alpha)+c.$$

Ma $V(\alpha)$ è continua in α_0, perciò $U(\alpha)$ è continua nello stesso punto, quindi

$$U(\alpha_0)=\lim_{k\to\infty} \overline{V}_{m_k}(\alpha_0)=V(\alpha_0),$$

ossia $c=0$, e per qualunque α,

$$U(\alpha)=V(\alpha),$$

e in particolare

$$U(\beta)=V(\beta).$$

Abbiamo allora che qualunque successione estratta da $\{\overline{V}_n(\alpha)\}$, convergente nel punto β, ha per valore limite $V(\beta)$, e allora

$$\lim_{n\to\infty} \overline{V}_n(\beta)=V(\beta) \qquad \text{c. v. d.}$$

c). In qualunque modo si renda regolare la successione $\{V_n(\alpha)\}$ la successione ottenuta converge verso una funzione di ripartizione equivalente a $V(\alpha)$.

Dalle (32) e (33) segue infatti $U(\alpha)=V(\alpha)+c$ con c costante.

5. - Per analogia a quanto abbiamo detto nel § 4 n.° 1 porremo la seguente

Definizione 12. - Data una funzione di ripartizione $V(\alpha)$, se l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^m d\,V(\alpha) \qquad (m=0, 1, 2, \ldots)$$

è finito, o infinito e determinato di segno, diremo che esso rappresenta il *momento di ordine m di V(α) rispetto all'origine.*

Teorema 26. - La funzione di ripartizione $V(\alpha)$ sia *continua*, siano finiti i momenti di $V(\alpha)$ di qualunque ordine

$$(34) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^m d\,V(\alpha) = S_m \qquad (m=0, 1, 2, \ldots),$$

e sia finito il massimo limite della successione $\{\sqrt[2m]{S_{2m}}/m\}$.

Sia $\{V_n(\alpha)\}$ una successione di funzioni di ripartizione tale che

$$(35) \qquad \lim_{n\to\infty} V_n(-\infty) = V(-\infty), \qquad \lim_{n\to\infty} V_n(+\infty) = V(+\infty) \quad (^1),$$

che abbia finiti tutti i suoi momenti dei diversi ordini

$$(36) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^m d\,V_n(\alpha) = S_m^{(n)} \quad (n=1, 2, \ldots;\ m=0, 1, 2, \ldots)$$

ed inoltre sia

$$(37) \qquad \lim_{n\to\infty} S_m^{(n)} = S_m.$$

Vogliamo allora dimostrare che

$$(38) \qquad \lim_{n\to\infty} V_n(\alpha) = V(\alpha)$$

ed uniformemente rispetto ad α.

Dimostrazione. - Per brevità sostituiremo all'ipotesi $\overline{\lim_{m\to\infty}}\,[\sqrt[2m]{S_{2m}}/m]$ finito, l'ipotesi di Cantelli: esiste una funzione $\psi(2m)$ dell'argomento intero e positivo m, divergente a $+\infty$ con m e per la quale si possa assegnare un intero positivo m_1 tale che per ogni $m > m_1$ risulti

$$(39) \qquad [\psi(2m)]^{2m} S_{2m}/(2m)! < 1.$$

In questa ipotesi il Cantelli è stato il primo a dimostrare il teorema per via elementare, noi lo ritroveremo applicando il teorema precedente (²).

(¹) Questa circostanza si verifica quando si abbia, come nel Calcolo delle Probabilità:

$$V(-\infty)=0, \qquad V(+\infty)=1; \qquad V_n(-\infty)=0, \qquad V_n(+\infty)=1.$$

(²) Cfr. F. P. Cantelli [[6], *a*), *b*)]; per la dimostrazione del teorema con $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,[\sqrt[2m]{S_{2m}}/m]$ finito cfr. Polya [[48], p. 177].

Abbiamo

$$\cos\alpha x = 1 - \frac{x^2}{2!}\alpha^2 + \frac{x^4}{4!}\alpha^4 - \ldots + (-1)^{r-1}\frac{x^{2r-2}}{(2r-2)!}\alpha^{2r-2} + \eta\frac{x^{2r}}{(2r)!}\alpha^{2r}$$

con $|\eta| < 1$, quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\alpha x\, d\,V(\alpha) = S_0 - \frac{x^2}{2!}S_2 + \frac{x^4}{4!}S_4 - \ldots + (-1)^{r-1}\frac{x^{2r-2}}{(2r-2)!}S_{2r-2} + \theta\frac{x^{2r}}{(2r)!}S_{2r}$$

con $|\theta| < 1$, e analogamente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\alpha x\, d\,V_n(\alpha) = S_0^{(n)} - \frac{x^2}{2!}S_2^{(n)} + \frac{x^4}{4!}S_4^{(n)} - \ldots + (-1)^{r-1}\frac{x^{2r-2}}{(2r-2)!}S_{2r-2}^{(n)} + \theta_n\frac{x^{2r}}{(2r)!}S_{2r}^{(n)}$$

con $|\theta_n| < 1$, e perciò

$$(40) \qquad \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\alpha x\, d\,V_n(\alpha) - \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\alpha x\, d\,V(\alpha)\right| \leq$$
$$\leq |S_0^{(n)} - S_0| + \frac{x^2}{2!}|S_2^{(n)} - S_2| + \frac{x^4}{4!}|S_4^{(n)} - S_4| + \ldots + \frac{x^{2r-2}}{(2r-2)!}|S_{2r-2}^{(n)} - S_{2r-2}| + \frac{x^{2r}}{(2r)!}[S_{2r}^{(n)} + S_{2r}].$$

Si fissi un punto x, e scelto $\sigma > 0$ si determini r_1 in modo che per $r > r_1$ sia

$$[x/\psi(2r)]^{2r} < \sigma/4 \quad \text{per} \quad r > r_1,$$

e aumentiamo se è necessario r_1 in modo che per $r > r_1$ sia

$$\psi(2r)^{2r} S_{2r}/(2r)! < 1 \quad \text{per} \quad r > r_1.$$

Fissato un $r > r_1$, siccome $\lim_{n\to\infty} S_{2r}^{(n)} = S_{2r}$, possiamo determinare un n_0 tale che per $n > n_0$ risulti anche

$$\psi(2r)^{2r} S_{2r}^{(n)}/(2r)! < 1,$$

si avrà quindi per $n > n_0$

$$0 \leq \frac{x^{2r}}{(2r)!}[S_{2r}^{(n)} + S_{2r}] < \frac{\sigma}{2}.$$

Accrescendo se occorre n_0 si può supporre anche che per $n > n_0$ sia

$$0 \leqq |S_0^{(n)} - S_0| + \frac{x^2}{2!}|S_2^{(n)} - S_2| + \frac{x^4}{4!}|S_4^{(n)} - S_4| + \dots + \\ + \frac{x^{2r-2}}{(2r-2)!}|S_{2r-2}^{(n)} - S_{2r-2}| < \frac{\sigma}{2}$$

e perciò dalla (40)

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \cos \alpha x \, d\,V_n(\alpha) - \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \alpha x \, d\,V(\alpha)\right| < \sigma \quad \text{per} \quad n > n_0.$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \alpha x \, d\,V_n(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \alpha x \, d\,V(\alpha)$$

e analogamente

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} \alpha x \, d\,V_n(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} \alpha x \, d\,V(\alpha),$$

perciò posto

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} d\,V_n(\alpha), \qquad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} d\,V(\alpha)$$

si ha

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Osserviamo ora che $f(x)$ è continua [cfr. teor. 22]; le (35) portano che la successione $\{V_n(\alpha)\}$ è limitata, possiamo quindi determinare per il teorema precedente una successione di costanti $\{a_n\}$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} [V_n(\alpha) - a_n] = V(\alpha),$$

per qualunque α ed uniformemente in virtù del teorema 21 [di Polya]; ma si ha per ipotesi $\lim\limits_{n\to\infty} V_n(+\infty) = V(+\infty)$, perciò $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, e allora

$$\lim_{n\to\infty} V_n(\alpha) = V(\alpha) \qquad \text{c. v. d.}$$

6. - Se ad esempio

$$V(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\alpha^2} d\alpha$$

si ha

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^{2m} e^{-\alpha^2} d\alpha = S_{2m} = \frac{(2m-1)!!}{2^m} \quad (^1),$$

e se poniamo $\psi(2m) = \log(2m)$ la condizione di Cantelli è soddisfatta, si ha infatti

$$\lim_{m\to\infty} \psi(2m)^{2m} S_{2m}/(2m)! = 0;$$

il teorema 26 può quindi applicarsi.

Così se abbiamo una successione di funzioni di ripartizione $\{V_n(\alpha)\}$ con $V_n(-\infty) = 0$, $V_n(+\infty) = 1$, e $V_n(\alpha)$ rappresenta una distribuzione di materia su una retta, precisamente la massa del tratto $(-\infty, \alpha)$, otteniamo allora il

Teorema 27. - Data su una retta una distribuzione di materia dipendente da un parametro n, se per ogni valore di n sono finiti i suoi momenti

$$S_0^{(n)}, \quad S_1^{(n)}, \dots, \quad S_r^{(n)}, \dots$$

ed essi per $n \to \infty$ tendono rispettivamente ai limiti

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha, \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2} d\alpha, \dots, \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^r e^{-\alpha^2} d\alpha, \dots$$

---

(1) Si osservi che da

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = 1 \qquad [\S\ 9,\ \text{n.}^\circ\ 1]$$

cambiando α in $\alpha\sqrt{x}$, con $x > 0$, si ha

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 x} d\alpha = x^{-\frac{1}{2}},$$

e derivando m volte ambo i membri rispetto ad x

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^{2m} e^{-\alpha^2 x} d\alpha = \frac{(2m-1)!!}{2^m} x^{-(m+\frac{1}{2})}$$

e per $x = 1$ si ottiene la formula del testo.

allora la massa complessiva che in quella distribuzione è compresa tra $-\infty$ ed a, quando $n \to \infty$ ha per limite

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\alpha^2} d\alpha$$

e in conseguenza la massa dell'intervallo (a, b) ha per limite

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{a}^{b} e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

Da questo teorema è ben noto che può dedursi il teorema di LAPLACE-TCHEBYCHEF del Calcolo delle Probabilità (1).

(1) Cfr. G. CASTELNUOVO [7], pp. 185-187; oppure F. P. CANTELLI [[6], a), p. 153].

BIBLIOGRAFIA

OPERE E MEMORIE CITATE

[1]. N. H. Abel: *Oeuvres complètes*, II (Christiania, 1881), [A; I, manoscritti], p. 284; « Sur une espèce particulière de fonctions entières nées du développement de la fonction $(1-v)^{-1}e^{-\frac{xv}{1-v}}$ suivant les puissances de v ».

[2]. G. Andreoli e P. Nalli: *Sui processi integrali di Stieltjes*, Annali di Matematica (4), VII (1929), pp. 47-59.

[3]. S. Bochner: *Vorlesungen über Fouriersche integrale* (Leipzig, 1932), pp. 66-67; 68-74.

[4]. O. Bonnet: *Sur le développement des Fonctions en Séries ordonnées suivant les Fonctions X_n, Y_n*, Journ. de Math. (2), XVII (1852), pp. 265-310.

[5]. R. Caccioppoli: *Sull'approssimazione per polinomi delle funzioni definite in campi illimitati*, Giorn. Ist. It. degli Attuari, III (1932), pp. 364-375.

[6]. F. P. Cantelli: *a*). *Una nuova dimostrazione del secondo teorema limite del calcolo delle probabilità*, Rend. Circ. Mat. di Palermo, LII (1928), pp. 151-174;

b). *Un nuovo teorema a proposito del secondo teorema limite del calcolo delle probabilità*, ibidem, pp. 416-424.

[7]. G. Castelnuovo: *Calcolo delle Probabilità* (Bologna, 1928, 2ª ed.), II, p. 149; pp. 185-187.

[8]. E. Cesaro: *Sur la multiplication des séries*, Bull. des Sc. Math. (2), 14 (1890), pp. 114-120.

[9]. C. V. L. Charlier: *Les applications de la théorie des probalités aux sciences mathématiques et aux sciences physiques; Application de la théorie des probabilités à l'astronomie* (Paris, 1930), *a*) p. 52, *b*) p. 57.

[10]. E. B. Christoffel: *Über die Gaussische Quadratur und eine gemeinerung derselben*, Journ. v. Crelle, LV (1858), (pp. 61-82), p. 73.

[11]. H. Cramer: *Valeurs Maxima des Polinomes d'Hermite*, in C. V. L. Charlier [[9], pp. 50-53].

[12]. G. Darboux: *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très-grands nombres, et sur une classe étendue de développements en séries*, Jour. de Math. (3), IV (1878), (pp. 5-56), p. 39.

[13]. Ch. J. de La Vallée-Poussin: *a*). *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle* (Paris, 1919), pp. 7-9;

b). *Un nouveau cas de convergence des séries de Fourier*, Rend. Cir. Mat. di Palermo, XXXI (1911), pp. 296-299;

c). *Sur l'Intégrale de Lebesgue*, Trans. of the American Math. Soc., XVI (1915), [pp. 435-501], p. 446.

[14]. U. Dini: *a*). *Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale* (Pisa, 1880);

b). *Lezioni sulla teoria delle funzioni sferiche e delle funzioni di Bessel* (Pisa, 1912), (lez. lit.), pp. 113-128;

c). *Sulle serie di funzioni sferiche*, Ann. di Mat. (2), VI (1874), pp. 112-140;

d). *Sulla unicità degli sviluppi delle funzioni di una variabile in serie di funzioni X_n*, Ann. di Mat. (2), VI (1874), pp. 216-225.

[15]. P. G. Lejeune-Dirichlet: *Über eine neue methode zur bestimmung vielfacher integrale*, K. Preuss. Ak. di Wiss. (1839), pp. 18-25.

[16]. L. Eulero: *Opera Omnia*, *a*) (1), XIV, p. 584; *b*) (1), XIX, p. 227.

[17]. L. Féjer: *a*). *Untersuchungen ueber Fouriersche Reihen*, Math. Annalen, 58 (1904), pp. 51-69;

b). *Über die Bestimmung asymptotischer Werte*, Mathematikai és természettudományi értesitö, 27 (1909), pp. 1-33;

c). *Abschätzungen für die Legendreschen und verwandte Polynome*, Math. Zeitschrift, Bd. 24, (1925), pp. 285-298.

[18]. E. Fischer: *Sur la convergence en moyenne*, Comptes Rend. Acc. des Sc., T. 144 (1907), pp. 1022-24.

[19]. J. B. Fourier: *Oeuvres* (Paris, 1888); I; *Théorie Analytique de la Chaleur* (1822), *a*) p. 495, n.° 415; *b*) p. 475, n.° 404.

[20]. G. Frobenius: *Ueber die Leibnitzsche Reihe*, Journ. f. Math., 89 (1880), pp. 262-264.

[21]. J. P. Gram: *Ueber die Entwickelung reeller Functionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate*, Journ f. Math., 94 (1883), pp. 41-73.

[22]. G. H. Hardy: *Theorems relating to the summability and convergence of slowly oscillating series*, Proc. of the Lond. Math. Soc. (2), VIII (1910), pp. 301-320.

[23]. H. E. HEINE: *Handbuch der Kugelfunktionen* (Berlin, 1878, zweite auflage), pp. 171-187.

[24]. CH. HERMITE: *Oeuvres complètes*, II (Paris, 1908), pp. 293-308; *Sur un nouveau développement en série de fonctions* [Comp. Rend. Acc. des Sc., LVIII (1864), pp. 93-100; 266-273].

[25]. E. W. HOBSON: *a*). *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's series* [Cambridge], I (3ª ed., 1927), pp. 538-561; II (2ª ed., 1926), p. 422;

b). *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics* (Cambridge, 1931), pp. 318-329;

c). *On a general convergence theorem, and the theory of the representation of a function by series of normal functions*, Proc. of the Lond. Math. Soc., VI (1908), (pp. 349-395), p. 388;

d). *On the representation of a function by a series of Legendre's functions*, ibidem, VII (1909), pp. 24-39.

[26]. M. JACOB: *Sugli integrali di Stieltjes e sulla loro applicazione nella matematica attuariale*, Giorn. dell'Ist. It. degli Attuari, III (1932), pp. 160-181.

[27]. D. JACKSON: *The Theory of Approximation*, Am. Math. Coll., XI (New-York, 1930), p. 73, p. 76.

[28]. C. G. J. JACOBI: *Ges. Werke*, VI, pp. 184-202; *Untersuchungen über die differentialgleichung der Hypergeometrischen Reihe* [Journ. f. Math., 56 (1859), pp. 149-165].

[29]. C. JORDAN: *Sur la série de Fourier*, Comptes Rend. Acc. des Sc., T. 92 (1881), pp. 228-230.

[30]. E. KOGBETLIANTZ: *a*). *Sommation des séries et intégrales divergentes par les moyennes arithmétiques et typiques*, Mémorial des Sciences Math., LI (Paris, 1931);

b). *Sur la sommabilité des séries d'Hermite*, Ann. Scient. de l'Éc. Norm. Sup. (3), 49 (1932), pp. 137-221. [Questa memoria contiene un'ampia bibliografia sugli sviluppi in serie di polinomi $L_n^{(\alpha)}(x)$, $H_n(x)$].

[31]. G. KOWALEWSKI: *Einfürung in die Determinantentheorie....* (Leipzig, 1909), pp. 320-337.

[32]. U. KOWALLIK: *Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach Hermitschen Orthogonalfunktionen*, Math. Zeitsch., 31 (1930), pp. 498-520.

[33]. E. DE LAGUERRE: *Oeuvres*, I (Paris, 1898), pp. 428-437; *Sur l'intégrale* $\int_x^{+\infty} x^{-1}e^{-x}dx$. [Bull. de la Soc. math. de France, VII (1879), pp. 72-81].

[34]. E. LANDAU: *Über die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze der Herren Hardy und Axer*, Prace Math. Fiz. (Warszawa, 1910), XXI (pp. 97-177), p. 107.

[35]. P. S. LAPLACE: *Oeuvres*, *a*). IV [*Mécanique Céleste*, 1805], livre X, p. 257;

b). V [*Mécanique Céleste*, 1825], livre XI, Cap. II, p. 41;

c). V [*Mécanique Céleste*, 1825], livre XI, supplément 1, p. 473;

d). VII [*Théorie analytique des probabilités* (3ª ed., 1820)], p. 105;

e). XII, p. 368 [*Mémoire sur les intégrales définies*, Acc. Sc. (1), XI; (1ª p.), (1810-1811)].

[36] G. LAURICELLA: *Sulla chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali*, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei (5), XXI (1912, 1° sem.), pp. 675-685.

[37]. H. LEBESGUE: *a*). *Leçons sur les séries trigonometriques* (Paris, 1906);

b). *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* [Paris, 1928, 2ª ed.], pp. 252-313;

c). *Recherches sur la convergence des séries de Fourier*, Math. Ann., 61 (1905), pp. 251-280;

d). *Sur les intégrales singulières*, Ann. de Toulouse (3), I (1909); [pp. 25-117], p. 44.

[38]. A. M. LEGENDRE: *Sur l'attraction des Sphéroïdes*, Mémoires de Math. et de Phys. présentés à l'Ac. r. des sc. par divers savants, X (Paris, 1785).

[39]. P. LÉVY: *Calcul des probabilités* (Paris, 1925); *a*) p. 161; *b*) p. 167.

[40]. A. LOEWY: *Der Stieltjessche Integralbegriff und seine Verwendung in der Versicherungsmathematik*, Blätter für Vers. Math. unverwandte Gebiete, II (1931), pp. 3-18; pp. 74-82.

[41]. P. NALLI, vedi G. ANDREOLI [2].

[42]. N. NASAROW: *Über die entwicklung einer beliebigen Funktion nach Laguerreschen Polynomen*, Math. Zeitsch., 33 (1931), pp. 481-487.

[43]. A. PARSEVAL: *Intégration générale et complète de deux équations importantes dans la mécaniques des fluides*, Mémoire présentés à l'Institut des Sciences, I (1805), pp. 524-545.

[44]. O. PERRON: *Über das verhalten einer ausgearteten hipergeometrischen Reihe bei unbegrenztem Wachstum eines Parameters*, Journ. v. Crelle, 151 (1921), pp. 63-78.

[45]. M. PICONE: *a*). *Appunti di Analisi Superiore* (Napoli, in corso di pubblicazione), p. 259, p. 260, p. 265;

b). *Sul determinante di Gram*, Boll. Un. Mat. It., V (1926), pp. 81-84;

c). *Trattazione elementare dell'approssimazione lineare in insiemi non limitati*. Giorn. dell'Ist. It. degli Attuari, V (1934), pp. 155-195.

[46]. H. POINCARÉ: *Calcul des probabilités* (Paris, 1912), p. 206.

[47]. S. D. POISSON: *a*). *Mémoire sur la manière d'exprimer les fonctions par les séries de quantités périodiques*, Journ. de l'Éc. Polyt., XVIII Cahier (T. XI), (1820), pp. 417-489;

b). *Addition au Mémoire precédent et au Mémoire sur la manière d'exprimer....*, ibidem, XIX Cahier (T. XII) (1823), pp. 145-162.

[48]. G. POLYA: *Ueber den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Math. Zeitschrift, Bd. 8 (1920), [pp. 171-181], p. 173, p. 177.

[49]. B. RIEMANN: *Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique*, Oeuvre Math. (trad. franc., Paris, 1896), p. 258.

[50]. O. RODRIGUES: *Mémoire sur l'attraction des spheroïdes*, Corr. de l'Éc. Roy. Polytec., III (1816).

[51]. F. RIESZ: *a*). *Sur les systèmes orthogonaux des fonctions*, Comp. Rend. Acad. des Sc., T. 144 (1907), pp. 615-619;

b). *Démonstration nouvelle d'un théorème concernant les opérations fonctionnelles linéaires*, Ann. Scient. de l'Éc. Norm. Sup. (3), XXXI (1914), pp. 9-14.

[52]. C. RUNGE: *Über eine besonder Art von Integralgleichungen*, Math. Ann., 75 (1914), pp. 130-132.

[53]. S. SAKS: *Théorie de l'Intégrale* [Warszawa, 1933], pp. 91-98.

[54]. G. SANSONE: *a*). *Lezioni di Analisi Matematica* (Padova, 1934), 2ª ed., I, p. 513;

b). *La chiusura dei sistemi ortogonali di Legendre, di Laguerre e di Hermite rispetto alle funzioni di quadrato sommabile*, Giorn. dell'Ist. It. degli Attuari, IV (1933), pp. 71-82.

c). *Sul teorema di Parseval in intervalli infiniti*, Ann. R. Sc. Norm. Sup. di Pisa (2), IV (1935), pp. 35-41.

[55]. L. SCHLÄFLI: *Ueber die zwei Heine'schen Kugelfunktionen* (Bern, 1881).

[56]. T. J. STIELTJES: *Oeuvres complètes* [Groningen, 1918]; *a*) II, p. 241, *b*) II, pp. 234-252; *c*) II, p. 469.

[57]. M. H. STONE: *Developments in Hermite polynomials*, Ann. of Math. (2), 29 (1927), pp. 1-13.

[58]. G. SZEGÖ: *Über einige asymptotische entwichlungen der Legendreschen Funktionen*, Proc. of the Lond. Math. Soc. (2), 36 (1933), pp. 427-450.

[59]. P. L. TCHEBYCHEF: *Oeuvres*, I (1899), pp. 499-508; *Sur le développement des fonctions à une seule variable* [Bull. ph.-math. de l'Ac. Imp. des Sc. de St. Pétersbourg, I (1859), pp. 193-200].

[60]. L. TONELLI: *a*). *Serie Trigonometriche* (Bologna, 1928);

b). *Sulla convergenza delle serie di Fourier*, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei (6), II (1925), pp. 85-91.

[61]. A. TONOLO: *Sulla chiusura del sistema* $1/\sqrt{2\pi}$, $\cos kx/\sqrt{\pi}$, $\text{sen}\, kx/\sqrt{\pi}$, Boll. Un. Mat. It., VI (1927), pp. 121-122.

[62[. J. V. USPENSKY: *On the development of arbitrary functions in series of Hermite's and Laguerre's polynomials*, Ann. of Math. (2), 28 (1927), pp. 593-619.

[63]. G. VITALI: *a*). *Geometria nello spazio Hilbertiano* (Bologna, 1929);

b). *Sulla condizione di chiusura di un sistema di funzioni ortogonali*, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei (5), XXX (1921) p. 498.

OPERE E MEMORIE
PUBBLICATE DOPO LA REDAZIONE DELLA MONOGRAFIA

S. KACZMARZ und H. STEINHAUS: *Theorie der Orthogonalreihen* (Warszawa, 1935), pp. VI + 298.

E. KOGBETLIANTZ: *a*). *Sur les moyennes arithmétiques des séries-noyaux des développements en séries d'Hermite et de Laguerre et sur celles de ces séries-noyaux derivées terme a terme*, Journ. of Math. and Physics, XIV (1935), pp. 37-99:

b). *Contribution à l'étude du saut d'une fonction donnée par son développement en série d'Hermite ou de Laguerre*, Transactions of the Am. Math. Soc., 38 (1935), pp. 10-47.

E. MOECKLIN: *Asymptotische Entwicklungen der Laguerreschen Polynome*, Comm. Math. Helvetici, 7 (1934), pp. 24-46.

G. SANSONE: *I più recenti risultati sulla teoria degli sviluppi in serie di polinomi ortogonali*, Atti Soc. It. Progr. Scienze, XXIII Riunione, II (1935), pp. 150-164.

J. A. SHOHAT: *a*). *Théorie générale des polynomes orthogonaux de Tchebichef*, Mémorial des Sc. Math. (Paris, 1934), pp. 1-68;

b). *On the development of functions in series of orthogonal polynomials*, Bull. of the Am. Math. Soc., XLI (1935), pp. 49-84.

F. TRICOMI: *Trasformazioni di Laplace e polinomi di Laguerre*, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei (6), XXI (1935), pp. 332-335.

A. ZYGMUND: *Trigonometrical Series* (Warszawa, 1935), pp. 1-331.

INDICE DELLA MATERIA