CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE
MONOGRAFIE DI MATEMATICA APPLICATA

G. VITALI E G. SANSONE

MODERNA TEORIA
DELLE
FUNZIONI DI VARIABILE REALE

PARTE I

GIUSEPPE VITALI

AGGREGATI - ANALISI DELLE FUNZIONI - INTEGRAZIONE - DERIVAZIONE

NICOLA ZANICHELLI EDITORE
BOLOGNA 1935 - XIII

Bologna, Società Tipografica già Compositori - 1935 - XIII

Col presente volume s'inizia una Collezione di Monografie curata dal Sottocomitato per la Matematica applicata con la collaborazione dell'Istituto per le applicazioni del Calcolo del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Le applicazioni continuamente crescenti della Matematica a vari rami della Scienza e della tecnica esigono l'uso di mezzi sempre più alti di Matematica anche da parte di chi non si dedica ad essa ex-professo.

Di qui la necessità di porre i risultati della ricerca matematica a disposizione di chi deve servirsene, in forma rapidamente accessibile.

A soddisfare questa necessità è stata pensata la Collezione di Monografie, alcune delle quali avranno carattere prevalentemente introduttivo, altre saranno più specificatamente dedicate alle applicazioni; senza rinunciare affatto all'elevatezza scientifica, che permette anche al tecnico di valore di ripensare il processo di cui si serve, esse muovono agilmente verso un fine determinato. Ispirandosi ugualmente alla Scienza e alle sue applicazioni esse concretano parte del programma tracciato dal Duce al Consiglio Nazionale delle Ricerche.

PREFAZIONE

La presente Monografia del Vitali era pressochè compiuta quando venne a mancare l'eminente Analista.

Incaricato dal Consiglio Nazionale delle Ricerche di portarne a termine la pubblicazione e di far seguire ad essa un'altra Monografia «Sviluppi in serie di funzioni ortogonali», mi sono imposto il massimo rispetto alla trattazione del Vitali; ho solo dovuto aggiungere qualche complemento (1) *richiesto dalla seconda Monografia.*

Il Vitali con poche pagine ha voluto portare il lettore alla comprensione dei più correnti concetti dell'analisi moderna, ed Egli vi è riuscito. Ho segnalato in nota i risultati del Nostro, a ragione considerati fondamentali nella teoria delle funzioni di variabile reale.

R. Università, Firenze.

GIOVANNI SANSONE

---

(1) Cap. III, teor. 27; IV, par. 3, n.° 3; V, teoremi 14, 15, 16.

MODERNA TEORIA

DELLE

FUNZIONI DI VARIABILE REALE

CAPITOLO I.

Aggregati in generale e numeri transfiniti.

§ 1. - Preliminari.

1. Enti od elementi. - 2. Aggregati. - 3. Il paradosso di RUSSELL. - 4. Corrispondenza. - 5. Operazioni sugli aggregati.

1. - Colle parole equivalenti *ente* od *elemento* si esprime un concetto *primitivo*, cioè tale che non ritengo necessario di ridurre ad altri più semplici e che mi limito a ridestare con degli esempi.

Può essere considerato come ente: *un oggetto materiale, un numero, un punto, un colore, la virtù,....*

Un ente è tale in quanto come tale lo si vuol considerare. Un oggetto può essere considerato come il *medesimo* ente in ogni istante, o come ente *diverso* (1) da istante ad istante. Un punto dello spazio può essere considerato come ente ben determinato, o come ente variabile in quanto si pensi come appartenente a una retta variabile passante per esso.

Si ha dunque libertà nell'assegnare il titolo di ente, ma le considerazioni e i ragionamenti che si svolgono devono riferirsi ad enti già riconosciuti.

Gli enti riconosciuti si possono considerare nella loro totalità, ma non si può parlare di *totalità degli enti in senso assoluto.*

2. - Anche la nozione di *aggregato* o *riunione* o *insieme* o *gruppo* di enti è primitiva.

Pensati i numeri reali come enti distinti (o diversi), si può considerare il loro aggregato. Indichiamo questo aggregato con a. Ogni numero reale è un elemento di a e ogni elemento di a è un numero reale.

(1) Anche le nozioni rappresentate dalle parole *medesimo* e *diverso*, le quali concorrono a completare quella di ente, sono *primitive.*

Si può pure considerare l'aggregato dei numeri razionali, l'aggregato dei numeri interi, l'aggregato dei punti di una retta, ecc.

Talvolta giova considerare l'*assenza di elementi* come un aggregato che si chiamerà l'*aggregato nullo.*

Definizione 1. - Un aggregato di cui ogni elemento è anche elemento di un aggregato a si chiama un *sub-aggregato* o *sottoinsieme* di a. L'aggregato nullo si considera come *sub-aggregato* di qualsiasi aggregato.

Risulta: *Ogni aggregato è sub-aggregato di se stesso.*

Quando si vorrà escludere dalle considerazioni che un subaggregato di a possa essere a stesso, lo si dirà in modo esplicito.

L'aggregato dei numeri razionali è un sub-aggregato dell'aggregato dei numeri reali.

Discende dalla natura delle cose il seguente

Postulato. - Ogni aggregato può essere considerato come ente.

3. - Nella teoria degli aggregati si sono presentati dei *paradossi*, aventi tutti una medesima causa che è eliminata dalle poche considerazioni del n.° 1.

Ecco come viene presentato uno di questi:

« Un aggregato può essere considerato come ente (n.° 2, post.). Questo ente può essere, oppure no, un elemento dell'aggregato stesso. Esiste certamente qualche aggregato che non contiene se stesso come elemento (vedi in fine di questo numero). Sia a l'aggregato di tutti gli aggregati di questa specie considerati come enti. Se a contenesse se stesso come elemento, a dovrebbe, come elemento di a, essere un aggregato che non contiene se stesso come elemento, e ciò è assurdo. Se a non contenesse se stesso come elemento, appunto per questa proprietà, a dovrebbe essere uno degli elementi di a, e ciò è pure assurdo » (paradosso di RUSSELL).

L'assurdo proviene dal fatto che si considera la totalità degli aggregati che non contengono se stessi come elementi, senza precisare gli enti con i quali si intendono formati. In altri termini nelle considerazioni precedenti viene introdotta la nozione della totalità assoluta degli enti, il che non ha senso.

Si potrebbe invece ragionare nel modo seguente:

« Sia b un aggregato. Ogni sub-aggregato di b può essere considerato come ente. Questo ente può essere un elemento di b, oppure no, e può essere, oppure no, un elemento di se stesso. *Supponiamo che esista qualche sub-aggregato di b che non contenga se stesso come elemento.* Sia a l'aggregato di tutti gli aggregati di questa specie considerati come enti. Non è possibile che ogni elemento di a sia elemento di b, perchè allora a sarebbe un sub-aggregato di b, e se a considerato come ente non appartenesse ad a, dovrebbe, come sub-aggregato di b che non contiene se stesso come elemento, essere un elemento di a, il che è assurdo; mentre se a, considerato come ente, appartenesse ad a, allora per questo fatto dovrebbe essere un sub-aggregato di b che non contiene se stesso come elemento, il che è pure assurdo. Dunque a contiene qualche elemento che non appartiene a b, ossia esistono dei sub-aggregati di b che, considerati come enti, non appartengono a b », e si ha il

TEOREMA 1. - Se un aggregato b è tale che esista qualche suo sub-aggregato che non contenga se stesso come elemento, esiste qualche sub-aggregato di b che, considerato come ente, non è elemento di b.

Quando non sia detto qualche cosa in contrario noi supporremo che valga la seguente:

Convenzione 1. - Due aggregati devono essere considerati come enti distinti se non avviene che ogni elemento del primo appartenga al secondo e viceversa.

Dopo questa convenzione il teor. 1 può essere completato colle seguenti considerazioni.

Sia b un aggregato che ha almeno due elementi. Siano α e β due elementi distinti di b. I tre sub-aggregati di b che sono formati: il primo col solo elemento α, il secondo col solo elemento β, il terzo con entrambi gli elementi α e β, costituiscono tre enti distinti che indicheremo con (α), (β), (α, β) e di cui uno almeno è diverso da (α) e da (β). Consegue che uno almeno di questi tre sub-aggregati di b non contiene se stesso come elemento. Dunque *se b è un aggregato che contiene almeno due elementi, esiste almeno un sub-aggregato di b che non contiene se stesso come elemento*, e si ha il

TEOREMA 1'. - Se b è un aggregato che contiene almeno due elementi, esiste almeno un sub-aggregato di b che non è contenuto in b come elemento.

Questo teorema apparirà sotto altra luce al § 4 di questo Capitolo (teor. 38).

4. - È infine una nozione primitiva e per noi molto importante quella di *corrispondenza*.

Corrispondenza è un criterio per cui, dati due aggregati a e b, ad ogni elemento di uno qualunque di questi aggregati vengono associati uno o più elementi dell'altro, con l'intesa che se α è un elemento di a e se β è un elemento di b, l'essere α corrispondente a β trascini l'essere β corrispondente ad α.

Una corrispondenza fra due aggregati a e b è evidentemente individuata quando si conoscono per ogni elemento di a tutti gli elementi di b che gli corrispondono, poichè allora risultano noti tutti gli elementi di a corrispondenti ad un medesimo elemento di b. Perchè si tratti di una corrispondenza fra a e b e non soltanto fra a e un sub-aggregato di b diverso da b, bisogna nell'assegnare ad ogni elemento di a i suoi corrispondenti in b, aver cura che ogni elemento di b risulti corrispondente ad almeno un elemento di a.

Definizione 2. - Una corrispondenza fra due aggregati a e b si dice *biunivoca* quando ad ogni elemento di a corrisponde uno ed un solo elemento di b e ad ogni elemento di b uno ed un solo elemento di a.

Naturalmente, se fra a e b è stabilita una corrispondenza biunivoca, ad elementi diversi di a corrisponderanno elementi diversi di b e viceversa.

Una corrispondenza biunivoca molto nota è quella che si stabilisce fra i punti di una retta ed i numeri reali, fissando sulla retta il punto origine, il segmento unità e il verso positivo, ed associando ad ogni punto P della retta quel numero reale che ha per valore assoluto la misura della distanza di P dall'origine e segno $+$ o $-$ secondo che dall'origine si va a P in senso positivo o negativo.

Definizione 3. - Se σ è una corrispondenza biunivoca fra due aggregati a e b, agli elementi di un sub-aggregato a' di a corrispondono degli elementi di b che formano un suo sub-aggregato b'. Se ad ogni elemento α di a' facciamo corrispondere in b' quell'elemento che (considerato α come appartenente ad a) gli corrisponde in b nella σ, otteniamo una corrispondenza biunivoca σ'

fra a' e b'. La corrispondenza σ' si dice *subordinata* della σ. Si dice inoltre che a' e b' sono *corrispondenti* in σ.

5. - *Definizione* 4. - Se $a, b, c,....$ sono degli aggregati che possono avere o no degli elementi comuni a qualcuno di essi e anche a tutti, si chiama *somma* di tali aggregati l'aggregato di tutti gli elementi che appartengono ad uno almeno dei detti aggregati.

La somma di due aggregati a e b si indica con $a+b$, di tre aggregati a, b, c con $a+b+c$, etc.; la somma di una successione di aggregati $a_1, a_2,...., a_n,....$ col simbolo $a_1+a_2+....+a_n+....$

Definizione 5. - Se a è un aggregato qualunque e se b è un sub-aggregato di a, l'aggregato degli elementi di a che non appartengono a b si chiama *differenza* fra a e b e si indica con $a-b$.

Se b è lo stesso aggregato a, la *differenza* fra a e b è l'aggregato nullo.

Evidentemente se b è un sub-aggregato di a e se d è la differenza fra a e b, si ha $b+d=a$.

Definizione 6. - Se $a, b, c,....$ sono degli aggregati, si dice loro *prodotto* l'aggregato degli elementi comuni a tutti gli aggregati dati. Se questi non hanno elementi comuni a tutti, il loro *prodotto* sarà l'aggregato nullo.

Il prodotto di due aggregati a e b si indica con $a \cdot b$, di tre aggregati a, b, c con $a \cdot b \cdot c$, etc.; il prodotto di una successione di aggregati $a_1, a_2,...., a_n,....$ col simbolo $a_1 \cdot a_2 \cdot .... \cdot a_n \cdot ....$

È evidente il

TEOREMA 2. - Se a e b sono due aggregati, se s è la loro somma e se p è il loro prodotto, si ha

$$s-a=b-p,$$

e quindi

$$p=b-(s-a).$$

§ 2. - Aggregati bene-ordinati.

1. Uguaglianza e disuguaglianza fra enti. Relazioni di posizione. - **2.** Aggregati ordinati. - **3.** Similitudine fra aggregati ordinati. - **4.** Minore e resto di un aggregato ordinato relativi ad un suo elemento. - **5.** Aggregati bene-ordinati.

1. - Per indicare che α e β rappresentano il *medesimo ente*, si scrive

$$\alpha=\beta,$$

e si dice che α è *uguale* a β.

Per indicare che α e β rappresentano *enti diversi*, si scrive

$$\alpha \neq \beta,$$

e si dice che α è *disuguale* da β, o *diverso* da β, o *differente* da β.

Qualunque siano gli elementi α e β, esiste una ed una sola delle relazioni

$$\alpha=\beta \quad \text{ed} \quad \alpha \neq \beta.$$

Talvolta giova stabilire fra due elementi α e β di un medesimo aggregato delle *relazioni di posizione* che si esprimono dicendo che α *precede* β oppure che α *segue* β.

La relazione α *precede* β si rappresenta scrivendo

$$\alpha < \beta$$

e la relazione α *segue* β scrivendo

$$\alpha > \beta.$$

Conveniamo che le relazioni

$$\alpha < \beta \quad \text{e} \quad \beta > \alpha$$

si equivalgono, e che le relazioni

$$\alpha < \beta \quad \text{e} \quad \alpha > \beta$$

non possano coesistere, e che perchè ne sussista una sia necessariamente $\alpha \neq \beta$.

2. - *Definizione* 7. - Un aggregato si dice *ordinato* quando per ogni coppia α e β di suoi elementi distinti è stabilita una (e quindi una sola) delle relazioni

$$\alpha < \beta, \qquad \alpha > \beta,$$

e quando per ogni terna α, β, γ di suoi elementi soddisfacenti alle relazioni

$$\alpha < \beta \quad \text{e} \quad \beta < \gamma$$

si abbia

$$\alpha < \gamma.$$

Anche l'aggregato nullo e un aggregato che contenga un solo elemento, sebbene non vi sia luogo di considerare in essi una coppia di elementi, si possono ritenere come ordinati, e anche un aggregato di due elementi α e β per i quali sia stabilita una (ed una sola) delle relazioni

$$\alpha < \beta, \qquad \alpha > \beta,$$

si considera come ordinato, sebbene non vi sia luogo di considerare una terna di elementi.

È manifestamente un aggregato ordinato qualunque sub-aggregato dell'aggregato dei numeri reali, quando si stabilisca che $<$ significhi *è minore* ($<$) e $>$ significhi *è maggiore* ($>$).

Quando non sia detto qualche cosa in contrario noi supporremo che valga la seguente

Convenzione 2. - Se a è un aggregato ordinato e se b è un qualunque suo sub-aggregato, converremo che fra due qualunque elementi di b interceda la stessa relazione di posizione che passa fra di essi quando sono considerati come elementi di a.

In virtù di questa convenzione si ha il

TEOREMA 3. - Ogni sub-aggregato di un aggregato ordinato è pure un aggregato ordinato.

3. - *Definizione* 8. - Due aggregati ordinati a e b si dicono *simili* quando si può fare intercedere fra essi una corrispondenza biunivoca tale che se α_1 e α_2 sono due qualunque elementi di a e se β_1 e β_2 sono i loro corrispondenti in b, secondo che si abbia

$$\alpha_1 < \alpha_2 \quad \text{o} \quad \alpha_1 > \alpha_2$$

si abbia anche

$$\beta_1 < \beta_2 \quad \text{o} \quad \beta_1 > \beta_2$$

e la corrispondenza che così intercede fra a e b si chiama *similitudine*.

Può darsi che fra due aggregati ordinati simili si possano fare intercedere parecchie similitudini.

Sono evidenti i seguenti:

TEOREMA 4. - Un aggregato ordinato è simile a se stesso.

TEOREMA 5. - Due aggregati ordinati simili ad un terzo sono simili fra loro.

TEOREMA 6. - Se due aggregati ordinati a e b si corrispondono in una similitudine σ, due loro sub-aggregati corrispondenti in σ sono pure simili.

Definizione 9. - Se fra gli elementi di un aggregato ordinato a ne esiste uno α che precede ogni altro elemento di a, si dice che a ammette un *1º elemento* e che α è il *1º elemento* di a.

Definizione 10. - Se fra gli elementi di un aggregato ordinato a ne esiste uno α che segue ogni altro elemento di a, si dice che a ha un *ultimo elemento* e che α è l'*ultimo elemento* di a.

Identificando il segno $<$ con $<$ e il segno $>$ con $>$, si ha che l'aggregato dei numeri reali finiti è ordinato, ma non ha nè primo nè ultimo elemento, mentre ha un 1º elemento l'aggregato dei numeri interi maggiori di zero; ha un ultimo elemento l'aggregato dei numeri interi minori di zero, ed ha un primo ed un ultimo elemento ogni aggregato che contenga un numero finito di numeri reali.

TEOREMA 7. - Se a e b sono due aggregati ordinati simili fra loro e se a ammette un 1º elemento, anche b ammette un 1º elemento, ed ogni similitudine fra a e b fa corrispondere al 1º elemento di a il 1º elemento di b.

Dimostrazione. - Infatti se σ è una similitudine fra a e b, se α è il 1º elemento di a, se β è il corrispondente di α in b, per la σ, ogni altro elemento di b ha per σ un corrispondente in a che segue α e quindi ogni altro elemento di b segue β.

È così dimostrato che b ammette un 1º elemento β, e che in ogni similitudine fra a e b al 1º elemento di a corrisponde il 1º elemento di b.

4. - *Definizione* 11. - Se a è un aggregato ordinato non nullo e se α è un elemento, risultano determinati due aggregati, uno dei quali, che indicherò con a_1, è l'aggregato degli elementi di a che precedono α (ed eventualmente l'aggregato nullo se α è il 1º elemento di a), l'altro è l'aggregato $a - a_1$.

Noi diremo che a_1 è il *minore* o il *segmento* di a *relativo* ad a e che $a - a_1$ è il *resto* di a *relativo* ad α. Diremo che il minore a_1 ed il resto $a - a_1$ sono *relativi* l'uno all'altro. Evidentemente il resto non può essere l'aggregato nullo, perchè esso contiene almeno l'elemento α.

Sono evidenti i seguenti:

TEOREMA 8. - Un resto di un aggregato ordinato non nullo ha per 1° elemento l'elemento a cui è relativo.

TEOREMA 9. - Un minore di un minore non nullo di un aggregato ordinato a è pure un minore di a.

TEOREMA 10. - Se due minori di un aggregato ordinato a sono relativi a elementi diversi, uno di essi è minore dell'altro e precisamente è tale il relativo a quello dei due elementi che precede l'altro.

Convenzione 3. - Ai minori considerati come enti di un aggregato ordinato si attribuiscono le stesse relazioni di posizione che passano fra gli elementi relativi.

Dalla precedente convenzione risulta il

TEOREMA 11. - L'aggregato che ha per elementi i minori di un aggregato ordinato a è ordinato ed è simile ad a.

È poi evidente il

TEOREMA 12. - Una similitudine fra due aggregati ordinati simili fa corrispondere ad ogni minore dell'uno un minore dell'altro e viceversa, e precisamente fa corrispondere i minori relativi ad elementi corrispondenti.

5. - *Definizione* 12. - Un aggregato ordinato a si dice *bene-ordinato* se ogni suo sub-aggregato non nullo ammette un 1° elemento. Anche l'aggregato nullo è da considerarsi *bene-ordinato*.

Se si conviene che $\prec$ significhi $<$ e che $\succ$ significhi $>$, sono evidentemente bene-ordinati tutti gli aggregati di un numero finito di numeri reali e l'aggregato dei numeri interi >0.

L'aggregato dei numeri interi >0 è pure bene-ordinato se si intende che di due numeri pari preceda il minore, che di due numeri dispari preceda pure il minore e che ogni numero dispari preceda ogni numero pari, o in altri termini se i detti numeri si ordinano come segue:

$$1 \prec 3 \prec 5 \prec \ldots \prec 2 \prec 4 \prec 6 \prec \ldots$$

È evidente il

TEOREMA 13. - Ogni sub-aggregato di un aggregato bene-ordinato è un aggregato bene-ordinato.

TEOREMA 14. - Se a e b sono due aggregati ordinati simili e se a è bene-ordinato, anche b è bene-ordinato.

Dimostrazione. - Infatti se σ è una similitudine fra a e b, se b' è un qualunque sub-aggregato di b e se a' è il sub-aggregato di a che la σ fa corrispondere a b', gli aggregati a' e b' sono simili (teor. 6) e poichè a' ha un 1° elemento anche b' ha un 1° elemento (teor. 7). Dunque ogni sub-aggregato di b ammette un 1° elemento e quindi b è bene-ordinato.

TEOREMA 15. - Se tutti i minori di un aggregato ordinato a sono bene-ordinati, anche l'aggregato a è bene-ordinato.

Dimostrazione. - Basta provare che ogni sub-aggregato di a ammette un 1° elemento. Ora sia b un sub-aggregato di a e sia β un elemento di b. Se β è il 1° elemento di b, è già provato che b ha un 1° elemento. Se β non è il 1° elemento di b e se a' è il minore di a relativo a β, il prodotto di b ed a' è un sub-aggregato di a' e quindi per ipotesi ha un 1° elemento α. Questo elemento α è anche il 1° elemento di b. c. d. d.

Dai teor. 11 e 14 consegue il

TEOREMA 16. - L'aggregato che ha per elementi i minori di un aggregato bene-ordinato è pure bene-ordinato.

TEOREMA 17. - Un aggregato bene-ordinato non può essere simile ad un suo minore.

Dimostrazione. - Se a è un aggregato bene-ordinato e se b è un suo minore e se σ è una similitudine fra a e b, la σ fa corrispondere ad ogni minore di a un minore di b (teor. 12). In questa corrispondenza esistono certamente dei minori di a che corrispondono a proprii minori. Tale è per esempio il minore b di a. Per il teorema 16 è lecito considerare il 1° minore a' di a che corrisponde a un proprio minore. Indichiamo con b' il minore di b corrispondente ad a'. La similitudine σ subordina una similitudine σ' fra a' ed il suo minore b'. Esiste allora, per la stessa ragione di prima, un minore a'' di a' che in σ' e quindi in σ corrisponde a un proprio minore, ed allora non è vero che a' è il 1° minore di a che gode di questa proprietà.

Si deve concludere che a non può essere simile ad un suo minore.

Corollario. - Due minori diversi a' e a'' di un medesimo aggregato bene-ordinato non possono essere simili fra loro.

Dimostrazione. - Infatti uno di essi per esempio a' è un minore dell'altro a'' (teor. 10) e l'aggregato bene-ordinato a'' non può essere simile al suo minore a' (teor. 17).

TEOREMA 18. - In una similitudine σ fra un aggregato bene-ordinato a e se stesso, ogni elemento di a corrisponde a se stesso.

Dimostrazione. - Infatti se a' e a'' sono due elementi di a corrispondenti in σ i minori ad essi relativi sono simili (teor. 12) e ciò non può avvenire altro che se questi minori sono uguali (cor. prec.); dunque a' ed a'' sono eguali.

Corollario. - Se due aggregati bene-ordinati sono simili, non si può stabilire fra di essi che una sola similitudine.

TEOREMA 19. - Se due aggregati bene-ordinati a e b sono simili, ogni minore di uno qualsiasi di essi è simile a uno e ad un solo minore dell'altro.

Dimostrazione. - Indichiamo con σ la similitudine, evidentemente unica (cor. prec.), fra a e b. Per il teor. 12 la σ fa corrispondere ad ogni minore di a un minore di b e viceversa ad ogni minore di b un minore di a. È poi evidente che non vi possono essere due minori distinti di b simili ad un medesimo minore di a, perchè essi sarebbero simili fra loro (teor. 5) e ciò è impossibile (cor. del teor. 17). Analogamente non vi possono essere due minori distinti di a simili ad un medesimo minore di b.

Inversamente:

TEOREMA 20. - Se due aggregati bene-ordinati a e b sono tali che ogni minore di uno qualsiasi di essi sia simile a uno (e quindi a uno solo) dei minori dell'altro, i due aggregati sono simili fra loro.

Dimostrazione. - Intanto, poichè ad ogni minore di a corrisponde un minore determinato di b simile ad esso e viceversa, si ha una corrispondenza biunivoca σ fra l'aggregato a' dei minori di a e l'aggregato b' dei minori di b, ed evidentemente questa corrispondenza biunivoca è una similitudine (infatti se a_1 e a_2 sono due minori di a e $a_1 < a_2$, se inoltre b_1 e b_2 sono i loro corrispondenti, essendo a_2 simile a b_2, il minore a_1 di a_2 sarà simile ad un minore di b_2, e poichè non può essere simile a due minori di b, l'aggregato b_1 deve essere uguale a detto minore

di b_2 e quindi deve essere $b_1 < b_2$). Ma gli aggregati a e b sono simili rispettivamente agli aggregati a' e b' (teor. 11), dunque a e b sono simili fra loro (teor. 5).

TEOREMA 21. - Se due aggregati a e b sono bene-ordinati uno almeno di essi ha ogni minore simile a un minore dell'altro.

Dimostrazione. - Infatti se ciò non fosse, essendo i due aggregati formati con i minori di a e b, bene-ordinati (teor. 16), esisterebbe *un* 1° *minore* a' di a non simile ad alcun minore di b, ed esisterebbe *un 1° minore* b' di b non simile ad alcun minore di a. Ogni minore di a' è simile ad un minore b'' di b, e b' non può essere nè uguale a b'' nè ad un minore di b'', perchè altrimenti b' sarebbe simile a un minore di a' e quindi ad un minore di a. Dunque b'' è un minore di b' e si conclude che ogni minore di a' è simile a un minore di b'. Allo stesso modo si prova che ogni minore di b' è simile ad un minore di a'. Si conclude (teor. 20) che a' e b' sono simili fra loro e ciò contrariamente all'ipotesi.

TEOREMA FONDAMENTALE 1. - Due aggregati bene-ordinati o sono simili o uno e uno solo di essi è simile ad un minore dell'altro.

Dimostrazione. - Infatti se a e b sono due aggregati bene-ordinati, o ogni minore di ciascuno di essi è simile ad un minore dell'altro, ed allora (teor. 20) sono simili fra loro; o uno di essi, per esempio a, ha ogni minore simile ad un minore dell'altro, ma non viceversa (teor. 21). In tal caso a è simile ad un minore di b. Invero sia b' *il 1° minore di* b non simile ad alcun minore di a. Allora ogni minore di a è simile ad un minore di b' e viceversa, dunque a è simile a b' (teor. 20).

TEOREMA 22. - Ogni sub-aggregato di un aggregato bene-ordinato a è simile ad a o ad un minore di a.

Dimostrazione. - Infatti se b è un sub-aggregato di a, b è un aggregato bene-ordinato e quindi, per il teor. fond. 1, o b è simile ad a, o b è simile ad un minore di a, o a è simile ad un minore di b. Dico che questo ultimo caso non si può presentare. E invero, se c fosse un minore di b simile ad a, nella similitudine fra a e c vi sarebbero degli elementi di a che seguono il loro corrispondente in c. Tale sarebbe per esempio quell'elemento di a che coincide con l'elemento di b di cui c è il minore relativo. Sia α il 1° elemento di a che segue il proprio corrispondente in c. Tutti gli elementi di a che precedono α (e fra questi vi è certamente il

1° elemento di a) hanno in c degli elementi corrispondenti che non li precedono. Lo stesso dovrebbe allora accadere per α, perchè il corrispondente di α in c dovrebbe seguire tutti gli elementi di c che corrispondono agli elementi di a precedenti α, e quindi dovrebbe seguire tutti gli elementi di a che precedono α e perciò non potrebbe precedere α. Ciò è assurdo. Dunque vale il teorema.

Definizione 13. - L'aggregato bene-ordinato

$$1 \prec 2 \prec 3 \prec \ldots$$

si chiamerà l'aggregato I. Evidentemente *ogni minore di I contiene un numero finito di elementi.*

Dal teorema fondamentale 1 segue il

TEOREMA 23. - Ogni aggregato bene-ordinato con un numero infinito di elementi è simile ad I o ha un minore simile ad I.

Definizione 14. - Di due elementi α e β di un aggregato bene-ordinato a, tali che $\alpha \prec \beta$ si dice che β è il *successivo* di α od anche che α è l'*antecedente* di β, se β è il 1° degli elementi di a che seguono α, o in altri termini se α è l'ultimo degli elementi di a che precedono β.

Evidentemente se a è un aggregato bene-ordinato, se α è un elemento di a e se α non è l'ultimo elemento di a, esiste un successivo di α; però non si può dire che se β è un elemento di a diverso dal 1° elemento di a debba esistere un antecedente di β, perchè non sempre il minore di a relativo a β ha un ultimo elemento.

TEOREMA 24. - Ogni aggregato bene-ordinato a che contiene infiniti elementi è simile al sub-aggregato a' di a che si ottiene da esso sopprimendo il suo 1° elemento.

Dimostrazione. - Il teorema è evidente se a è simile ad I, perchè in tal caso la corrispondenza che fa corrispondere ad ogni elemento di a il suo successivo è una similitudine fra a ed a'. Se invece esiste un minore b di a simile ad I, allora, facendo corrispondere ad ogni elemento di b il suo successivo e ad ogni elemento rimanente lo stesso elemento, si ha una corrispondenza biunivoca fra a ed a' che è ancora una similitudine. Dunque anche in tal caso a ed a' sono simili.

Questo teorema enuncia una proprietà caratteristica degli aggregati bene-ordinati con infiniti elementi.

Osservazione. - Ne consegue che se a è un aggregato bene-ordinato con infiniti elementi e se α è il suo 1° elemento, e se b è l'aggregato (evidentemente bene-ordinato) che si ottiene conservando fra tutti gli elementi di a, escluso α, tutte le relazioni di posizione e facendo seguire a tutti questi elementi l'elemento α, l'aggregato a risulta simile al minore di b relativo all'elemento α.

§ 3. - Numeri ordinali.

1. Aggregati bene-ordinabili. - 2. Numeri ordinali e aggregati (a). - 3. Relazioni di posizione fra gli elementi di (a). - 4. Bene-ordinabilità di ogni aggregato. - 5. Il principio della libera scelta. - 6. Paradosso di BURALI-FORTI.

1. - *Definizione* 15. - Un aggregato si dice *bene-ordinabile* quando è possibile stabilire fra ciascuna coppia di suoi elementi una relazione di posizione in modo che l'aggregato risulti bene-ordinato.

È evidente il

TEOREMA 25. - Un aggregato bene-ordinato è bene-ordinabile.

E poichè un sub-aggregato di un aggregato bene-ordinato, quando si osservi la conv. 2 (pag. 7) è pure bene-ordinato, è anche evidente il

TEOREMA 26. - Ogni sub-aggregato di un aggregato bene-ordinabile è bene-ordinabile.

Si può facilmente vedere che un aggregato bene-ordinabile che contenga almeno due elementi si può rendere bene-ordinato in più di una maniera.

TEOREMA 27. - Se a e b sono due aggregati fra i quali passa una corrispondenza biunivoca σ e se a è bene-ordinabile, anche b è bene-ordinabile.

Definizione 16. - Un aggregato bene-ordinato si dice *appartenente* ad un aggregato a, se si ottiene rendendo bene-ordinato (nella maniera detta nella def. 15) un sub-aggregato (bene-ordinabile) di a. Anche l'aggregato nullo si deve considerare come un aggregato bene-ordinato (def. 12) appartenente ad a.

2. - *Definizione* 17. - Sia a un aggregato dato. Consideriamo tutti gli aggregati bene-ordinati appartenenti ad a. Quelli di questi che sono simili ad un medesimo hanno un carattere comune che

è individuato da uno qualsiasi di essi e che chiameremo il loro ***numero ordinale*** [1]. Noi indicheremo con (a) l'aggregato di *tutti* i numeri ordinali distinti degli aggregati bene-ordinati appartenenti ad a. ***Fra gli elementi di*** (a) ***vi è anche il numero ordinale dell'aggregato nullo.***

Ad ogni aggregato bene-ordinato appartenente ad a corrisponde un solo elemento di (a) (il suo numero ordinale), però ad un elemento di (a) corrisponderanno in generale più aggregati bene-ordinati appartenenti ad a.

3. - *Definizione* 18. - Se a è un aggregato dato e se μ e ν sono due elementi di (a), esiste almeno un aggregato m bene-ordinato appartenente ad a avente per numero ordinale μ, ed esiste almeno un aggregato n bene-ordinato appartenente ad a avente per numero ordinale ν. Se m ed n sono simili, evidentemente $\mu=\nu$. Se m ed n non sono simili, uno ed uno solo di essi è simile ad un minore dell'altro (teor. fond. 1) e se m è simile ad un minore di n diremo che $\mu<\nu$. È evidente che la relazione di posizione che così si viene ad attribuire ai numeri μ e ν non dipende dagli aggregati m ed n che abbiamo considerato. È anche evidente che *il numero ordinale dell'aggregato nullo è il 1° elemento di* (a).

TEOREMA 28. - Osservando la conv. 2 (pag. 7), il numero ordinale di un sub-aggregato di un aggregato bene-ordinato appartenente ad a precede o è uguale al numero ordinale di tale aggregato bene-ordinato (teor. 22).

TEOREMA 29. - L'aggregato (a) è bene-ordinato.

Dimostrazione. - Intanto si dimostra facilmente che se μ, ν e ϱ sono elementi di (a) e se $\mu<\nu$ e $\nu<\varrho$, risulta che $\mu<\varrho$, e quindi che (a) è ordinato. Inoltre si vede pure facilmente che, se μ è un elemento di (a) e se m è un aggregato bene-ordinato appartenente ad a avente il numero ordinale μ, ogni elemento di (a) che precede μ è numero ordinale di un minore di m e viceversa, e quindi risulta (teor. 16) che l'aggregato degli elementi di (a) che precedono μ [o in altri termini il minore di (a) relativo all'elemento μ] è bene-ordinato, e che infine (teor. 15) l'aggregato (a) è bene-ordinato.

---

[1] Tale carattere si potrebbe rappresentare con l'aggregato di tutti questi aggregati simili ad un medesimo.

Consegue:

TEOREMA 30. - Se m è un aggregato bene-ordinato appartenente ad a, e se μ è il suo numero ordinale, l'aggregato m è simile al minore di (a) relativo a μ. In particolare l'aggregato nullo è simile al minore di (a) relativo al suo 1° elemento, cioè all'elemento di (a) che è il numero ordinale dell'aggregato nullo.

TEOREMA 31. - Ogni minore di (a) è simile ad un aggregato bene-ordinato appartenente ad a.

TEOREMA 32. - Non esiste un aggregato bene-ordinato appartenente ad a che sia simile ad (a).

***Dimostrazione.* - Infatti un aggregato bene-ordinato appartenente ad a è simile ad un minore di (a) (teor. 30) e quindi non può essere simile ad (a), altrimenti (a) sarebbe simile al proprio minore (teor. 5) e ciò è impossibile (teor. 17).**

4. - Sia a un aggregato bene-ordinato non nullo. Sia a_1 il 1° elemento di a. Se a non è costituito dal solo elemento a_1, sia a_2 il 1° dei restanti elementi di a. Se a contiene altri elementi oltre a_1 ed a_2, sia a_3 il 1° degli elementi rimanenti di a, e così via di seguito. Se a contiene solo un numero finito di elementi e se n è questo numero, l'aggregato a è

$$a_1 < a_2 < a_3 < .... < a_n.$$

Se a contiene infiniti elementi, l'aggregato

$$a_1 < a_2 < a_3 < .... < a_n < ....$$

simile all'aggregato I (teor. 23), o è l'aggregato a o è un minore di a. In questo ultimo caso sia β_1 il 1° dei rimanenti elementi di a, e se oltre a questo ve ne sono altri, sia β_2 il 1° di essi e così via di seguito. Allora o esiste un numero intero n per cui a è l'aggregato

$$a_1 < a_2 < a_3 < .... < a_n < .... < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < .... < \beta_n,$$

oppure si ottiene un aggregato

$$a_1 < a_2 < a_3 < .... < a_n < .... < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < .... < \beta_n < ....$$

(dove $\beta_1, \beta_2,...., \beta_n,....$ indica ancora un aggregato I), che è l'aggregato a o un suo minore. In questo ultimo caso sia γ_1 il 1° dei rimanenti elementi di a, ecc. In questa maniera noi veniamo a pas-

sare in rassegna successivamente gli elementi di a nell'ordine in cui si susseguono. Considerati tutti gli elementi di un minore di a, noi passiamo a considerare l'elemento ad esso relativo, cioè il 1° degli elementi rimanenti di a. Si capisce allora come con questi atti si possa giungere a qualunque elemento di a, perchè, se ciò non fosse, vi sarebbe un 1° elemento non raggiungibile. Sia ϱ questo elemento. Tutti gli elementi del minore r di a relativo a ϱ sono raggiungibili, e allora, passati in rassegna tutti gli elementi di r, si può considerare l'elemento ϱ come 1° dei rimanenti elementi di a, e non è più vero che ϱ non è raggiungibile.

Dunque vale il

TEOREMA 33. - Se a è un aggregato bene-ordinato, si possono passare in rassegna tutti i suoi elementi nell'ordine in cui si succedono.

5. - *Assioma della scelta di Zermelo.* - Dato un aggregato a i cui elementi siano aggregati b non nulli e senza elementi comuni due a due, esiste almeno un aggregato c il quale contiene un elemento ed uno soltanto di ogni aggregato b appartenente ad a [1].

Principio generale della scelta di Zermelo (principio della libera scelta).

Dato un aggregato a i cui elementi siano aggregati b non nulli, con o senza elementi comuni, esiste sempre una corrispondenza nella quale ad ogni aggregato b appartenente ad a corrisponde un elemento β di b.

Dimostrazione. - Consideriamo tutti gli aggregati (b, β) formati con due elementi b e β ove b è un aggregato qualunque di a e β un elemento qualunque di b. Per ogni aggregato b di a indichiamo con b^* l'aggregato di tutti gli aggregati (b, β) ove β è, come abbiamo dichiarato un elemento qualunque di b, e sia a^* l'aggregato di tutti gli aggregati b^*.

Gli aggregati b^* sono senza elementi comuni ed esiste quindi

(1) Sulle critiche all'assioma di ZERMELO cfr. W. SIERPIŃSKI: *Leçons sur les Nombres Transfinis* (Paris, 1928, Gauthier-Villars), p. 103 e seguenti. Cfr. anche B. LEVI: *Riflessioni sopra alcuni principi della teoria degli aggregati e delle funzioni* (in « Scritti matematici » offerti ad Enrico D'Ovidio, Torino, Bocca, 1918), pp. 305-324.

per l'assioma di ZERMELO un insieme c contenente un elemento ed uno solo di ogni aggregato b^*, e se per ogni aggregato b^* è (b, β_b) il suo elemento corrispondente, facendo corrispondere all'aggregato b il suo elemento β_b avremo la corrispondenza cercata.

Dal principio generale della scelta segue che *esiste una legge la quale ad ogni sub-aggregato non nullo b di un aggregato a fa corrispondere un elemento $\varphi(b)$ di b.*

TEOREMA DI ZERMELO. - *Ogni aggregato è bene-ordinabile.*

Dimostrazione. - Sia a un aggregato. Per quanto abbiamo visto è possibile passare in rassegna ordinatamente tutti gli elementi di (a). Se φ è la corrispondenza avanti indicata relativa ai sub-aggregati dell'aggregato a, al primo elemento di (a) si faccia corrispondere l'elemento $\varphi(a)$ che chiameremo a_1, al secondo elemento di (a) faremo corrispondere l'elemento di a, $\varphi(a-a_1)=a_2$; al terzo elemento di (a) faremo corrispondere l'elemento di a, $\varphi(a-a_2)=a_3$, dove a_2 indica l'aggregato che ha per elementi a_1 e a_2 e così di seguito. Gli elementi $a_1, a_2, a_3,....$ sono elementi distinti di a e non è possibile che così si possa far corrispondere ad ogni elemento di (a) un elemento di a, perchè altrimenti vi sarebbe un aggregato bene-ordinato appartenente ad a e simile ad (a), il che è impossibile (teor. 32). Si deve concludere che vi è un primo elemento α di (a) cui non si può far corrispondere un elemento di a. Ciò significa che l'aggregato a' degli elementi di a che si sono fatti corrispondere agli elementi del minore di (a) relativo ad α contiene tutti gli elementi di a, perchè altrimenti si potrebbe far corrispondere ad α l'elemento di a, $\varphi(a-a')$ [distinto da tutti gli elementi di a'] contrariamente all'ipotesi. Dunque l'aggregato a viene a corrispondere biunivocamente al minore di (a) relativo ad α, e quindi a è bene-ordinabile (teor. 27).

6. - Come abbiamo visto, dato un aggregato a ogni aggregato bene-ordinato che gli appartiene corrisponde ad un certo numero ordinale contenuto in (a). Se noi consideriamo due aggregati a e b, può darsi che si trovi un aggregato bene-ordinato appartenente ad a, simile ad un aggregato bene-ordinato appartenente a b, e i numeri ordinali di questi sono rispettivamente elementi di (a) e (b). *Due tali numeri si possono considerare come uguali.* Così si

perviene a una nozione di numero ordinale indipendente dall'aggregato ambiente. Ma nell'usare di questa nozione bisogna andare cauti, e in particolare si dovrà evitare la considerazione della totalità dei numeri ordinali, perchè ciò equivarrebbe a considerare la totalità degli elementi, il che non ha senso.

Del resto facendo ciò si perviene ad un nuovo paradosso (paradosso di BURALI-FORTI) *perchè l'aggregato dei numeri ordinali dovrebbe formare ancora un aggregato bene-ordinato e dovrebbe avere un numero ordinale che segue tutti i numeri e quindi diverso da ciascuno di essi.*

§ 4. - Numeri cardinali.

1. Potenza degli aggregati. - 2. Numeri cardinali. - 3. Gli aggregati a^x.

1. - *Definizione* 19. - Si dice che due aggregati a e b hanno *uguale potenza* o che uno di essi ha la *stessa potenza* dell'altro quando è possibile stabilire fra loro una corrispondenza biunivoca. Se ciò non è possibile si dirà che a e b hanno *potenza diversa.*

Così si dirà che l'aggregato dei numeri interi >0

$$1, \quad 2, \quad 3, \ldots$$

e l'aggregato dei numeri interi pari e >0

$$2, \quad 4, \quad 6, \ldots$$

hanno potenza uguale, perchè quella corrispondenza che fa corrispondere ad ogni elemento del primo quell'elemento del secondo che è il suo doppio è una corrispondenza biunivoca fra i due aggregati.

Hanno invece potenza diversa due aggregati di un numero finito di elementi, quando il numero degli elementi del primo è diverso dal numero degli elementi del secondo.

TEOREMA 35. - Due aggregati ordinati simili hanno la stessa potenza.

Corollario 1. - Due aggregati bene-ordinati aventi lo stesso numero ordinale hanno la stessa potenza.

Corollario 2. - Due aggregati che si possono rendere bene-ordinati in modo da ottenere due aggregati con lo stesso numero ordinale hanno la stessa potenza.

TEOREMA 36. - Se due aggregati b e c hanno potenza diversa, esiste uno ed uno solo di essi che ha potenza uguale a quella di un sub-aggregato dell'altro diverso da questo.

Dimostrazione. - Indichiamo con a la somma di b e c. Sia β il *primo* elemento di (a) che è numero ordinale di uno degli aggregati bene-ordinati ottenuti bene-ordinando b, e sia γ il *primo* elemento di (a) che è numero ordinale di uno degli aggregati bene-ordinati ottenuti bene-ordinando c. Non può essere $\beta=\gamma$, perchè b e c avrebbero la stessa potenza (precedente cor. 2). Sarà dunque $\beta \neq \gamma$. Supponiamo $\beta<\gamma$. Siano b' e c' i minori di (a) relativi agli elementi β e γ. Evidentemente b' è un minore di c'. L'aggregato b si può mettere in corrispondenza biunivoca con b' (teor. 30) e l'aggregato c con c'. In questa ultima corrispondenza biunivoca vi è un sub-aggregato c^0 di c diverso da c che è in corrispondenza biunivoca con b' e quindi con b. È così dimostrato che esiste un sub-aggregato di c, diverso da c, che ha la stessa potenza di b. Non può poi esistere un sub-aggregato b^0 di b, diverso da b, avente la stessa potenza di c, perchè allora c si potrebbe mettere in corrispondenza biunivoca con b^0 e questo con un sub-aggregato di b', il quale sarà simile a b' o ad un suo minore (teor. 22), e quindi c si potrebbe ordinare in modo da ottenere un aggregato bene-ordinato con numero ordinale che non segue β, il che è assurdo.

Definizione 20. - Se a e b sono due aggregati che non hanno la stessa potenza e se a ha la potenza di un sub-aggregato di b diverso da b, diremo che la potenza di a *è minore* $(<)$ di quella di b, o che la potenza di b *è maggiore* $(>)$ di quella di a.

TEOREMA FONDAMENTALE 2. - Due aggregati o hanno ugual potenza, o uno ed uno solo di essi ha potenza minore di quella dell'altro.

2. - *Definizione* 21. - Gli aggregati che hanno la stessa potenza di un medesimo hanno un carattere comune che si dice *numero cardinale.*

Definizione 22. - Siano α e β due numeri cardinali, sia a un aggregato di numero cardinale α, e sia b un aggregato di numero cardinale β. Se a e b hanno la stessa potenza scriveremo $\alpha=\beta$, se a e b hanno potenza diversa e se, per esempio, la potenza di a è $<$ di quella di b, scriveremo $\alpha<\beta$, oppure $\beta>\alpha$ e diremo che α *precede* β e β *segue* α.

TEOREMA 37. - Se a è un numero cardinale, esiste un numero cardinale che lo segue.

Dimostrazione. - Infatti, se a è un aggregato di numero cardinale a, a non si può mettere in corrispondenza biunivoca con (a) (teor. 32) e quindi la potenza di a è diversa da quella di (a). D'altra parte (teor. 30 e teorema di ZERMELO) a si può mettere in corrispondenza biunivoca con un minore di (a), dunque la potenza di (a) è $>$ di quella di a, o in altri termini il numero cardinale di (a) segue a.

L'esistenza di un aggregato che ha potenza $>$ di quella di un dato aggregato a risulta anche dal

TEOREMA 38. - L'aggregato b dei sub-aggregati di un aggregato a non nullo (l'insieme nullo incluso) ha potenza maggiore di quella di a.

Dimostrazione. - Supponiamo che si possa stabilire una corrispondenza biunivoca fra a e b. Se ogni elemento di a appartiene al sub-aggregato corrispondente in b, dalla biunivocità della corrispondenza tra a e b seguirebbe, come facilmente si vede, che b coincide con a, mentre b contiene l'aggregato nullo. Consideriamo allora gli elementi di a che non appartengono al sub-aggregato corrispondente. Questi formano un sub-aggregato c di a.

L'aggregato c non può corrispondere ad un elemento di c, perchè un elemento di c non è contenuto nel sub-aggregato corrispondente. Inoltre c non può corrispondere ad un elemento che non appartenga a c perchè, per tale ragione, questo elemento dovrebbe appartenere a c. Dunque non esiste una corrispondenza biunivoca fra a e b. D'altra parte a ha la potenza di quel sub-aggregato di b che è costituito dai sub-aggregati di a formati ciascuno con un solo elemento di a, dunque b ha potenza $>$ di quella di a.

3. - *Definizione* 23. - L'aggregato dei numeri cardinali dei sub-aggregati *non nulli* di un aggregato a (non nullo) si indicherà con a^*. Se a è nullo, a^* indicherà l'aggregato nullo.

TEOREMA 39. - Se a non è nullo, l'aggregato a^* ha un ultimo elemento ν (il numero cardinale di a) e contiene tutti e soli i numeri cardinali che non seguono ν.

TEOREMA 40. - Ogni aggregato a^* è bene-ordinato. (Cfr. def. 12).

Dimostrazione. - Intanto è evidente che a^* è ordinato. Inoltre ogni sub-aggregato di a si può render bene-ordinato in modo che risulti simile ad un minore di (a) (teor. 30 e teorema di ZERMELO). Consegue che ogni elemento di a^* è numero cardinale di minori di (a). Facciamo corrispondere ad ogni elemento di a^* il 1° minore di (a) che lo ha per numero cardinale, e quindi l'elemento di (a) relativo a tale minore. Allora a^* viene a corrispondere in una similitudine σ ad un sub-aggregato di (a), ma questo sub-aggregato è bene-ordinato. Dunque anche a^* è bene-ordinato (teor. 14).

Corollario. - Ogni aggregato di numeri cardinali è bene-ordinato.

Esso è infatti un sub-aggregato dell'aggregato a^* corrispondente all'aggregato somma degli aggregati che hanno per numeri cardinali i numeri assegnati.

TEOREMA 41. - L'aggregato a^* è simile ad un minore di (a).

Dimostrazione. - Se a è nullo, anche a^* è nullo ed (a) ha un solo elemento, e quindi a^* è simile al minore nullo di (a).

Il teorema è vero se a ha un numero finito di elementi; supponiamo allora che a abbia infiniti elementi, ed indichiamo con ν l'ultimo elemento di a^* (teor. 39) e sia α l'elemento di (a) che gli corrisponde nella similitudine σ considerata nella dimostrazione del teor. 40. Ora α non può essere l'ultimo elemento di (a), perchè, se a' indica l'aggregato a reso bene-ordinato in modo da avere per numero ordinale α, l'aggregato a'' che si ottiene da a' portando il 1° elemento di a' a seguire tutti gli altri ha un numero ordinale β che segue α (teor. 24, osservazione). Dunque la σ è una similitudine fra a^* ed un sub-aggregato del minore a^0 di (a) relativo all'elemento β, e quindi a^* è simile ad a^0 o ad un suo minore ed in tutti i casi è simile ad un minore di (a).

Corollario. - Ad ogni numero cardinale ν corrisponde un numero ordinale μ tale che l'aggregato dei numeri cardinali che non seguono ν e quello dei numeri ordinali che non seguono μ sono simili.

TEOREMA 42. - Ad ogni numero ordinale μ corrisponde un numero cardinale ν tale che l'aggregato dei numeri cardinali che non seguono ν e quello dei numeri ordinali che non seguono μ sono simili.

Dimostrazione. - Supponiamo che il teorema non sia vero. Vi sarà allora un 1° numero ordinale μ^0 per cui esso non vale. Indichiamo con b l'aggregato dei numeri ordinali che precedono μ^0, e con c l'aggregato dei numeri cardinali che corrispondono, secondo il teorema, agli elementi di b. Basta evidentemente provare che esiste qualche numero cardinale seguente tutti gli elementi di c per concludere che necessariamente anche μ^0 soddisfa al teorema. Ora può darsi che c abbia un ultimo elemento ν e in tal caso sappiamo che esiste un numero cardinale che segue ν (teor. 37) e che quindi segue ogni elemento di c. Se poi c non ha ultimo elemento, considerando per ogni elemento di c un aggregato che lo ha per numero cardinale, e sommando questi aggregati si ha un aggregato s che ha numero cardinale che non precede alcun elemento di c e che quindi segue ogni elemento di c (se fosse uguale ad un elemento di c, precederebbe tutti gli elementi di c che seguono questo).

§ 5. - **Numeri transfiniti.**

1. - *Definizione* 24. - Un numero ordinale μ ed un numero cardinale ν tali che l'aggregato dei numeri ordinali che non seguono μ e quello dei numeri cardinali che non seguono ν sono simili si dicono *corrispondenti.*

Il corollario del teor. 41 ed il teor. 42 si possono riassumere nel

TEOREMA 43. - Per ogni numero ordinale esiste un numero cardinale ad esso *corrispondente* e viceversa per ogni numero cardinale esiste un numero ordinale ad esso corrispondente.

Definizione 25. - Il numero ordinale dell'aggregato (bene-ordinato) nullo si indica con 0.

Il numero ordinale dell'aggregato che contiene il solo elemento 1 si indica con 1; se n è intero >1, si indica con n il numero ordinale dell'aggregato bene-ordinato

$$1 < 2 < 3 < \dots < n.$$

I corrispondenti numeri cardinali si indicano con gli stessi simboli.

Si indica con ω il numero ordinale dell'aggregato I (def. 13, pag. 13).

Il numero ordinale ω e tutti quelli che lo seguono prendono il nome di *numeri ordinali transfiniti.*

Definizione 26. - Siano α e β due numeri ordinali ed a e b due insieme bene-ordinati, senza elementi comuni, aventi per numeri ordinali rispettivamente α e β.

Poniamo $c = a + b$ e ordiniamo l'insieme c con la seguente legge: due elementi di c che appartengono ad a oppure a b conservano la stessa relazione d'ordine che tra essi intercede in a o in b; di due elementi di c, uno appartenente ad a l'altro a b diremo che quello appartenente ad a precede l'elemento appartenente a b. Si vede facilmente che l'insieme c risulta bene-ordinato e il suo numero ordinale si indica con $\alpha + \beta$.

È facile dimostrare il

TEOREMA 44. - Se $\gamma > \alpha$ esiste uno e un solo numero ordinale $\beta > 0$ tale che $\gamma = \alpha + \beta$.

Definizione 27. - Qualunque numero ordinale che segue ω ha la forma $\omega + \varphi$ con φ numero ordinale. Il numero cardinale corrispondente ad $\omega + \varphi$ lo indicheremo con

$$\aleph_\varphi \qquad \text{(aleph-}\varphi\text{)};$$

in particolare $\aleph_0$ indica il numero cardinale corrispondente al numero ω, o ciò che è lo stesso il numero cardinale dell'aggregato I (def. 13, pag. 13).

I numeri $\aleph_0$, $\aleph_1$,.... prendono il nome di *numeri cardinali transfiniti.*

Definizione 28. - Se α è un numero ordinale, indicheremo con $C(\alpha)$ il numero cardinale di un aggregato bene-ordinato che ha per numero ordinale α.

Risulta il

TEOREMA 45. - $C(\alpha)$ è il numero cardinale dei numeri ordinali che precedono α.

Dimostrazione. - Infatti l'aggregato dei numeri ordinali che precedono α ha per numero ordinale lo stesso numero α (teor. 30).

Definizione 29. - Se a è un numero cardinale indicheremo con $O(a)$ il *primo* numero ordinale di aggregati bene-ordinati aventi per numero cardinale a. Evidentemente vi possono essere diversi numeri ordinali α per cui $C(\alpha)$ è lo stesso numero cardinale, ma non possono esistere due numeri cardinali a e β diversi tra loro per cui $O(a) = O(\beta)$.

È evidente il

Teorema 46. - Se a è un numero cardinale, e se $\beta = O(a)$ è $a = C(\beta)$.

Definizione 30. - $O(\aleph_1)$ si indica con Ω, perciò $\Omega = O(\aleph_1)$ e $\aleph_1 = C(\Omega)$ cioè Ω è il primo numero ordinale per il quale $C(\Omega) = \aleph_1$.

Teorema 47. - Se α è un numero ordinale transfinito, è $C(\alpha) \leq \aleph_\alpha$.

Dimostrazione. - Poniamo $C(\alpha) = \aleph_\beta$, occorre dimostrare che $\aleph_\beta \leq \aleph_\alpha$.

Sia $\boldsymbol{a}$ l'aggregato dei numeri ordinali > 0, che non seguono α

$$1, \quad 2, \dots, \quad \omega, \quad \omega + 1, \dots, \quad \alpha$$

e $\boldsymbol{b}$ l'aggregato dei numeri cardinali > 0 che non seguono $\aleph_\beta$

$$1, \quad 2, \dots, \quad \aleph_0, \quad \aleph_1, \dots, \quad \aleph_\beta.$$

Essendo $C(\alpha) = \aleph_\beta$, si ha $O(\aleph_\beta) \leq \alpha$ e perciò l'ordinale di qualunque elemento ν dell'aggregato $\boldsymbol{b}$ appartiene ad $\boldsymbol{a}$. La corrispondenza tra gli elementi ν di $\boldsymbol{b}$ e gli $O(\nu)$ è una corrispondenza biunivoca fra l'aggregato $\boldsymbol{b}$ e un sub-aggregato di $\boldsymbol{a}$. Consegue che $\boldsymbol{b}$ è simile ad $\boldsymbol{a}$ o ad un suo minore (teor. 22) e siccome i due aggregati $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{a}$ hanno rispettivamente per numeri ordinali $\omega + \beta$ e α si avrà $\omega + \beta \leq \alpha$, $\beta \leq \alpha$ e perciò $\aleph_\beta \leq \aleph_\alpha$.

Corollario. - Si ha $O(\aleph_\alpha) \geq \alpha$.

Se $O(\aleph_\alpha) = \beta$ si avrà $\aleph_\alpha = C(\beta) \leq \aleph_\beta$, quindi $\aleph_\alpha \leq \aleph_\beta$ e perciò $\alpha \leq \beta = O(\aleph_\alpha)$.

2\. - *Definizione* 31. - Se α è un numero ordinale transfinito, e se $C(\alpha) = \aleph_\alpha$ il numero α si dirà *eccezionale*.

Teorema 48. - Esistono numeri ordinali eccezionali.

Dimostrazione. - Sia α_1 un numero cardinale $\geq \aleph_0$. Poniamo

$$\alpha_2 = O(\alpha_1), \quad \alpha_3 = O(\aleph_{\alpha_2}), \dots, \quad \alpha_{n+1} = O(\aleph_{\alpha_n}), \dots$$

È certamente per ogni intero $n > 0$ (corollario del teor. 47)

$$\alpha_{n+1} \geq \alpha_n,$$

e quindi, per ogni $n > 0$, è $\alpha_n \geq \aleph_0$.

Se esistesse un n per cui

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n,$$

ossia

$$\alpha_n = O(\aleph_{\alpha_n})$$

e quindi (teor. 46)

$$\aleph_{\alpha_n} = C(\alpha_n)$$

il numero ordinale α_n sarebbe un numero eccezionale e sarebbe $\alpha_n \geq \aleph_0$.

Se poi è

(1) $$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha_{n+1} < \dots,$$

esisterà un primo numero trasfinito ζ che segue tutti i numeri (1). Ora è per ogni intero $n > 0$, $\zeta > \alpha_{n+2}$ e quindi (teor. 46)

$$C(\zeta) \geq C(\alpha_{n+2}) = \aleph_{\alpha_{n+1}} > \aleph_{\alpha_n}$$

e infine

$$C(\zeta) \geq \aleph_\zeta.$$

Ma (teor. 47)

$$C(\zeta) \leq \aleph_\zeta$$

dunque

$$C(\zeta) = \aleph_\zeta.$$

Allora ζ è un numero ordinale eccezionale.

Definizione 32. - Il primo numero ordinale eccezionale che segue ω si indica con Z.

3\. - *Definizione* 33. - Un aggregato che ha un numero finito di elementi si chiama un *aggregato finito*.

Teorema 49. - Il numero cardinale di un aggregato finito precede $\aleph_0$.

Definizione 34. - Un aggregato che ha $\aleph_0$ per numero cardinale si dice *numerabile*.

Evidentemente se $\boldsymbol{a}$ è un aggregato numerabile, poichè i suoi elementi si possono mettere in corrispondenza biunivoca cogli elementi di I, i suoi elementi si possono disporre in una successione

(1) $$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \dots$$

e inversamente. Quindi *un aggregato* $\boldsymbol{a}$ *è numerabile se e soltanto se i suoi elementi si possono disporre in modo da formare una successione del tipo* (1).

TEOREMA 50. - La somma di un numero finito di aggregati finiti è un aggregato finito.

TEOREMA 51. - La somma di un aggregato finito e di un aggregato numerabile è un aggregato numerabile.

TEOREMA 52. - La somma di due aggregati numerabili è un aggregato numerabile.

Dimostrazione. - Mi limito a considerare il caso in cui i due aggregati non hanno elementi comuni.

Sia a l'aggregato degli elementi

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \dots$$

e sia b l'aggregato degli elementi

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \beta_3, \dots$$

L'aggregato $a+b$ ha allora gli elementi

$$\alpha_1, \quad \beta_1, \quad \alpha_2, \quad \beta_2, \quad \alpha_3, \quad \beta_3, \dots$$

e poichè questi formano una successione del tipo (1), l'aggregato $a+b$ è numerabile.

TEOREMA 53. - Se a e b sono due aggregati, se a è finito o numerabile e se $a+b$ ha numero cardinale $>\aleph_0$, anche b ha numero cardinale $\aleph_0$.

Dimostrazione. - Se b fosse finito o numerabile, anche $a+b$ sarebbe finito o numerabile (teor. 50, 51, 52).

TEOREMA 54. - La somma di un aggregato numerabile di aggregati finiti è numerabile, se essa contiene infiniti elementi distinti.

TEOREMA 55. - La somma di un aggregato numerabile di aggregati numerabili è un aggregato numerabile.

Dimostrazione. - Basta evidentemente trattare il caso in cui gli aggregati non abbiano elementi comuni ad alcuni di essi. In tale ipotesi se indichiamo con a_n $(n=1, 2, 3, \dots)$ l'aggregato degli elementi

$$a_{n,1}, \quad a_{n,2}, \quad a_{n,3}, \dots$$

e con b_r l'aggregato

$$a_{1,r}, \quad a_{2,r-1}, \quad a_{3,r-2}, \dots, \quad a_{r,1},$$

vediamo che la somma a degli a_n coincide con la somma degli aggregati finiti

$$b_r \qquad (r=1, 2, 3, \dots).$$

Ma questa è numerabile (teor. 54) poichè contiene gli infiniti elementi di a_1, dunque è numerabile anche la somma degli a_n.

Corollario. - Se

$$g_1, \quad g_2, \quad g_3, \dots$$

è una successione numerabile di aggregati finiti o numerabili, e se ciascuno di essi è sub-aggregato del seguente la loro somma g è finita o numerabile.

Osservazione. - Supponiamo che gli aggregati

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \dots$$

considerati nella dimostrazione del teor. 55 siano tali che due qualunque di essi non abbiano elementi comuni.

Ogni elemento dell'aggregato

$$a = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

è indicato in un modo unico con la lettera a affetta da due indici che sono due numeri interi >0.

Viceversa se m ed n sono due numeri interi >0 qualsiansi, il simbolo $a_{m,n}$ indica un elemento di a ed uno solo. Si ha così una corrispondenza biunivoca fra gli elementi di a e le coppie di numeri interi, e poichè a è numerabile si ha il

TEOREMA 56. - L'aggregato di tutte le coppie dei numeri interi >0 [1], e quindi anche di tutte le coppie di elementi di un aggregato numerabile, è numerabile.

Con analoghe considerazioni si può dimostrare il

TEOREMA 57. - L'aggregato di tutte le n-uple [2] di elementi di un aggregato numerabile è numerabile.

Da questo e dal teor. 55 si ha il

TEOREMA 58. - L'aggregato dei sub-aggregati finiti di un aggregato numerabile è numerabile.

Ma pel teor. 38 l'aggregato dei sub-aggregati di un aggregato numerabile ha potenza maggiore del numerabile, e pei teor. 53 e 58, si ha il

---

(1) Sarebbe meglio dire: « *di tutte le disposizioni con ripetizione a due a due* ».

(2) O meglio: « *di tutte le disposizioni con ripetizione ad n ad n* ».

TEOREMA 59. - L'aggregato dei sub-aggregati numerabili di un aggregato numerabile ha potenza maggiore del numerabile.

TEOREMA 60. - Un sub-aggregato con infiniti elementi di un aggregato numerabile è pure numerabile.

Dimostrazione. - Infatti se a è un aggregato numerabile e se a' è un suo sub-aggregato, il numero cardinale di a' precede o è uguale a quello di a: e quindi è $\leq \aleph_0$. Se poi a' non è finito il suo numero cardinale non può precedere $\aleph_0$, dunque se a' non è finito il suo numero cardinale è $\aleph_0$.

TEOREMA 61. - Se a è finito o numerabile e se b è un aggregato con infiniti elementi, l'aggregato $a+b$ ha la stessa potenza di b.

Dimostrazione. - Infatti non riesce difficile spezzare l'aggregato b in una somma di due aggregati b' e b'', il primo dei quali b' sia numerabile. Allora

$$b = b' + b''$$

ed

$$a + b = (a + b') + b''.$$

Ma $a+b'$ è numerabile (teor. 51 e 52), e allora b ed $a+b$ sono somma di aggregati che hanno ugual potenza e quindi hanno evidentemente ugual potenza.

4. - *Definizione* 35. - Si chiama *algebrico* un numero reale o complesso che sia radice di un'equazione

$$(1) \qquad a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0, \qquad n \geqslant 1$$

dove le a_i sono dei numeri reali razionali. Ne consegue che un numero algebrico è anche radice di un'equazione (1) in cui le a_i sono dei numeri *interi*.

TEOREMA 62. - L'aggregato di tutti i numeri algebrici è numerabile.

Dimostrazione. - Qualunque sia l'equazione (1) con coefficienti interi il numero

$$\nu = n + |a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}| + |a_n|$$

è un intero >1, che diremo l'*indice* dell'equazione.

Le equazioni che hanno il medesimo indice sono evidentemente in numero finito.

Ognuna di queste ha poi un numero finito di radici, e quindi dato un intero $\nu > 1$ è finito l'aggregato b_ν dei numeri algebrici che sono radici di equazioni di indice ν. L'aggregato dei numeri algebrici è la somma dei b_ν e quindi (teor. 54) è numerabile.

TEOREMA 63. - L'aggregato di tutti i numeri razionali reali è numerabile.

Dimostrazione. - Difatti esso forma un sub-aggregato infinito dell'aggregato dei numeri algebrici, e quindi è numerabile (teor. 60 e 62).

5. - *Definizione* 36. - Il numero cardinale dell'aggregato che ha per elementi i sub-aggregati numerabili dell'aggregato I, si indica con c, e quando un aggregato ha numero cardinale c si dice che è *continuo*.

Dal teor. 59 si ha il

TEOREMA 64. - Il numero transfinito c segue $\aleph_0$, perciò $\aleph_1 \leqslant c$.

Però si ignora ancora quale posto abbia c fra i numeri transfiniti che seguono $\aleph_0$.

TEOREMA 65. - L'aggregato dei numeri reali >0 e $\leqslant 1$ è continuo.

Dimostrazione. - Ogni numero reale >0 e $\leqslant 1$, scritto nel sistema duale (a base 2) di numerazione può essere messo in uno ed in un sol modo sotto la forma

$$0,\ a_1 a_2 a_3 \dots$$

dove le a_n sono delle cifre uguali a 0 o ad 1, e quelle uguali ad 1 sono in numero infinito.

Gli indici delle a_n uguali ad 1 formano un sub-aggregato infinito dell'aggregato I. Si ha così una corrispondenza biunivoca fra i numeri reali >0 e $\leqslant 1$ ed i sub-aggregati numerabili (teor. 60) di I, e quindi l'aggregato dei numeri reali >0 e $\leqslant 1$ è continuo (def. 36).

Da questo e dai teor. 61 e 63 consegue il

Corollario. - L'aggregato di tutti i numeri irrazionali compresi fra 0 ed 1 è continuo.

Siccome i numeri reali >0 e $\leqslant 1$ si possono mettere in corrispondenza biunivoca coi punti di un segmento, ed inoltre si può dimostrare facilmente che l'aggregato dei punti di una retta si può mettere in corrispondenza biunivoca con l'aggregato dei punti di un qualsiasi segmento o di una qualsiasi semiretta, estremi compresi o no, si ha il

TEOREMA 66. - L'aggregato dei punti di una retta e quello dei punti di un segmento o di una semiretta, estremi compresi o no (teor. 61), sono continui.

Inoltre i numeri reali si possono mettere in corrispondenza biunivoca coi punti di una retta, quindi si ha il

TEOREMA 67. - L'aggregato di tutti i numeri reali è continuo.

6. - *Definizione* 37. - Se a è un aggregato, indico con $\nu(a)$ l'aggregato che ha per elementi tutte le successioni distinte

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \dots$$

formate con una infinità numerabile di elementi, non necessariamente diversi, dell'aggregato a, intendendo che due tali successioni

$$\begin{matrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, \dots \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, \dots \end{matrix}$$

sono da considerarsi come distinte se e solo se esiste un indice n per cui gli elementi α_n e β_n sono diversi

TEOREMA 68. - Se a è un aggregato continuo anche $\nu(a)$ è continuo.

Dimostrazione. - Poichè evidentemente basterà che il teorema sia provato per un particolare aggregato continuo a, assumo per a l'aggregato dei numeri reali >0 e $\leqslant 1$. Allora se

(1) $$b_1, \quad b_2, \quad b_3, \dots$$

è uno degli aggregati numerabili che costituiscono uno degli elementi di $\nu(a)$, scrivendo i numeri b_n nel sistema duale di numerazione, si avrà

$$b_n = 0,\ a_{n,1} a_{n,2} a_{n,3} \dots$$

con le $a_{n,r}$ uguali a 0 o ad 1, quelle uguali ad 1 essendo in numero infinito.

Il numero

(2) $$0,\ a_{1,1} a_{1,2} a_{2,1} a_{1,3} a_{2,2} a_{3,1}, \dots,\ a_{1,r} a_{2,r-1}, \dots,\ a_{r,1} \dots$$

è un numero di a, ed evidentemente con tale processo non è possibile che partendo da due diversi aggregati (1) si possa giungere ad un medesimo numero (2) di a. Si ottiene così una corrispondenza biunivoca fra $\nu(a)$ ed un sub-aggregato di a, e quindi il numero cardinale di $\nu(a)$ è $\leq c$. Ma fra gli elementi di $\nu(a)$ vi sono quelli costituiti da una infinità numerabile di elementi tutti uguali ad un medesimo elemento di a, e questi formano un sub-aggregato di $\nu(a)$ che ha la potenza di a, perciò $\nu(a) \geq c$. Se ne conclude che il numero cardinale di $\nu(a)$ è $= c$.

Corollario. - Se a è l'aggregato dei numeri reali, il numero cardinale di $\nu(a)$ è $= c$.

Ma se a è l'aggregato dei numeri reali, i sistemi delle coordinate, rispetto ad un cartesiano ortogonale [1], dei punti dello spazio hilbertiano, formano un sub-aggregato [2] di $\nu(a)$, e quindi l'aggregato H dei punti di questo spazio ha numero cardinale $\leq c$. Inoltre H contiene almeno tutti i punti di una retta, e quindi si ha il

TEOREMA 69. - L'aggregato H dei punti dello spazio hilbertiano è continuo.

Se poi si pensa che ogni spazio euclideo appartiene allo spazio hilbertiano [3] e contiene almeno una retta, si ha il

Corollario. - L'aggregato dei punti di un qualunque spazio euclideo è continuo.

Consideriamo ora un piano e tutte le sue rette parallele ad una medesima direzione data. La somma degli aggregati dei punti di queste rette è l'aggregato dei punti del piano. Ed allora si deduce che se si ha un aggregato continuo di aggregati continui, la somma di questi aggregati è un aggregato continuo. Se ne deduce il

TEOREMA 70. - Se si ha un aggregato di numero cardinale $\leq c$ di aggregati aventi numero cardinale $\leq c$, la somma di questi aggregati ha numero cardinale $\leq c$.

---

[1] Vedi G. VITALI: *Geometria nello spazio hilbertiano* (N. Zanichelli, 1929), p. 72.

[2] *Sub-aggregato*, perchè le coordinate di un punto dello spazio hilbertiano non possono acquistare qualunque sistema di valori, ma devono sottostare alla condizione che la serie dei loro quadrati sia convergente.

[3] Vedi G. VITALI, l. c., p. 85.

Teorema 71. - Se a è un aggregato continuo, l'aggregato b che ha per elementi i sub-aggregati numerabili di a è pure continuo.

Dimostrazione. - Intanto b contiene tutti i sub-aggregati numerabili di un sub-aggregato numerabile di a, e quindi b ha numero cardinale $\geq c$ (def. 36). Inoltre se imaginiamo ogni sub-aggregato numerabile di a ordinato, in modo determinato, secondo una successione, vediamo che b è un sub-aggregato di $\nu(a)$ e che quindi il numero cardinale di b non può seguire c. Dunque il numero cardinale di b è $=c$.

7. - Teorema 72. - L'aggregato che ha per elementi le funzioni reali definite in un dato segmento ha numero cardinale $>c$.

Dimostrazione. - Infatti indicando con a l'aggregato dei punti del segmento in cui sono definite le funzioni, l'aggregato a è continuo. I valori distinti che le varie funzioni acquistano nei punti di a possono costituire un qualunque sub-aggregato dell'aggregato R dei numeri reali, e quindi l'aggregato delle funzioni ha numero cardinale che non precede quello dell'aggregato dei sub-aggregati di R. Ma il numero cardinale dell'aggregato dei sub-aggregati di R è $>c$ (teor. 38), dunque l'aggregato delle nostre funzioni ha numero cardinale $>c$.

8. - Teorema 73. - L'aggregato delle funzioni continue in un segmento dato è un aggregato continuo.

Dimostrazione. - Intanto, poichè questo aggregato contiene tutte le funzioni costanti, si vede che il numero cardinale dell'aggregato delle funzioni continue in un dato segmento non può precedere c. Inoltre, se noi fissiamo sulla retta della variabile l'origine ed il segmento unità, vediamo, a causa della continuità delle funzioni, che queste sono determinate quando si conoscono i valori che esse assumono nei punti razionali. Questi punti formano un aggregato numerabile (teor. 63) che possiamo ordinare in una successione. Allora i valori che in questi punti acquista una funzione continua costituiscono un elemento di $\nu(a)$ dove a è l'aggregato dei numeri reali. In tal modo l'aggregato delle nostre funzioni continue si trova in corrispondenza biunivoca con un sub-aggregato di $\nu(a)$ e quindi il numero cardinale dell'aggregato delle nostre funzioni continue non può seguire c. Esso è dunque $=c$.

Osservazione. - L'aggregato $\nu(a)$ si potrebbe considerare come l'aggregato di tutte le disposizioni con ripetizione ad ω ad ω degli elementi di a. Mentre i sub-aggregati numerabili di cui si parla nella definizione 36 e al teor. 71 sono gli aggregati di tutte le combinazioni senza ripetizione ad ω ad ω rispettivamente degli elementi di I e di a.

CAPITOLO II.

Teoria della misura degli aggregati di punti di una retta.

§ 1. - Preliminari.

1. Tratti di una retta. - 2. Boreliani di una retta. - 3. Sostegno di un boreliano. - 4. Lemma di BOREL. - 5. Relazione fra la lunghezza di un boreliano e quella del suo sostegno.

1. - Consideriamo una retta r, alla quale noi attribuiamo due punti all'infinito corrispondenti ai suoi due versi.

Fissiamo, una volta per sempre, sulla r un'origine, un verso positivo ed un segmento unità.

Si ha allora una corrispondenza biunivoca fra i punti di r ed i numeri reali, includendo nell'aggregato di questi anche i numeri $+\infty$ e $-\infty$.

Dopo ciò noi possiamo identificare, nel nostro linguaggio, ogni punto di r col numero reale che gli corrisponde.

Definizione 1. - Siano p e q due punti di r con $p \leq q$. Si dirà *tratto* o *intervallo* di r, e si indicherà con (p, q), l'aggregato dei punti x per i quali si ha $p \leq x \leq q$, e p e q si diranno gli *estremi* di (p, q) e più specialmente p si dirà *estremo sinistro* e q *estremo destro*. Ogni tratto non nullo si dice *intorno destro* del suo estremo sinistro ed *intorno sinistro* del suo estremo destro.

Consegue che ogni punto diverso da $+\infty$ ha infiniti intorni destri, che ogni punto diverso da $-\infty$ ha infiniti intorni sinistri, ma che $+\infty$ non ha intorni destri e $-\infty$ non ha intorni sinistri.

Definizione 2. - Chiameremo *lunghezza* del tratto (p, q) il numero $q-p$, intendendo che $q-p=+\infty$ (o meglio $q-p=\infty$), se i due numeri p e q sono diversi ed uno almeno infinito, e che $q-p=0$ tutte le volte che p e q sono uguali.

Definizione 3. - I punti di un tratto diversi dai suoi estremi si dicono *interni* al tratto.

Definizione 4. - Due tratti si dicono *diversi* se non hanno gli stessi estremi, e *distinti* se non hanno un punto comune che sia interno ad almeno uno di essi.

TEOREMA 1. - Un aggregato a di tratti a due a due distinti non nulli è finito o numerabile.

Dimostrazione. - Ciò è vero se a cade in un tratto σ di lunghezza finita s, ed infatti in tal caso, se n è un numero intero >0 e se a_n è l'aggregato dei tratti di a di lunghezza $>\frac{1}{n}$, a_n è finito e, essendo a la somma degli a_n, a è finito o numerabile. Se a non cade in un tratto di lunghezza finita, diciamo Ω_n l'aggregato dei suoi tratti che cadono in $(-n, n)$ e non appartengono ad Ω_{n-1}. Ω_n è finito o numerabile, ed a è la somma degli Ω_n e dell'aggregato dei tratti di a aventi lunghezza infinita. Dunque ancora a è finito o numerabile.

2. - *Definizione* 5. - Un aggregato *finito* o *numerabile* di tratti di r, diversi o no, si dice un *boreliano* di r.

Definizione 6. - La somma delle lunghezze dei tratti di un boreliano B si dice *lunghezza* del boreliano e si indica con $\lambda(B)$.

Sarà $\lambda(B)=+\infty$ quando qualcuno dei tratti del boreliano ha lunghezza infinita oppure la serie formata con le lunghezze dei tratti del boreliano è divergente a $+\infty$.

Definizione 7. - I punti che appartengono a tratti di un boreliano si dicono *punti* del boreliano o che *appartengono* al boreliano. I punti interni ad un tratto di un boreliano si dicono *interni* al boreliano.

Definizione 8. - Un boreliano coi tratti a due a due distinti si dice *semplice*.

Definizione 9. - Si dice *somma* di un numero finito o di una infinità numerabile di boreliani il boreliano che ha per tratti tutti i tratti dei boreliani dati.

È evidente il

TEOREMA 2. - La lunghezza della somma di dati boreliani è uguale alla somma delle lunghezze di questi boreliani.

3. - *Definizione* 10. - Se B è un boreliano ed a è un suo punto, se p è il limite inferiore dei punti x tali che tutti i punti di (x, a) appartengono a B, e se q è il limite superiore dei punti y

tali che tutti i punti di (a, y) appartengono a B, si dice che (p, q) è un tratto *congiunto* a B. Può anche essere $p=q$.

È evidente il

TEOREMA 3. - I punti interni ad un tratto congiunto ad un boreliano B appartengono a B;

ed il

TEOREMA 3'. - Due tratti diversi congiunti ad un medesimo boreliano sono distinti (possono avere solo un estremo comune se questo estremo non appartiene a B).

Definizione 11. - I *diversi* tratti congiunti ad un medesimo boreliano B formano un boreliano (teor. 1) che si dirà il *sostegno* di B e si indicherà con $S(B)$.

Evidentemente *al sostegno di un boreliano B appartiene ogni punto di B.*

Dal teor. 3' consegue il

TEOREMA 3''. - Il sostegno di un boreliano è un boreliano semplice.

Definizione 12. - Un boreliano il cui sostegno contiene un solo tratto si dice *elementare*, e due boreliani elementari si dicono *distinti* se i loro sostegni sono tratti distinti.

TEOREMA 4. - Ogni boreliano è somma di boreliani elementari a due a due distinti.

Dimostrazione. - Sia B un boreliano e siano

$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \sigma_3, \ldots$$

i tratti di $S(B)$. Evidentemente ogni tratto di B è contenuto in uno, e in uno solo, di questi tratti. I tratti di B contenuti in σ_n formano un boreliano B_n che ha per sostegno σ_n e quindi è un boreliano elementare. I boreliani

$$B_1, \quad B_2, \quad B_3, \ldots$$

sono poi a due a due distinti e B è la loro somma.

4. - LEMMA DI BOREL. - Se (p, q) è un tratto di lunghezza finita e se B è un boreliano avente la proprietà che ogni punto di (p, q) è interno a B, esiste un boreliano B' formato con un numero finito di tratti di B che ha la stessa proprietà.

Dimostrazione. - Se t è un punto di (p, q), per ogni tratto

di B che contenga come punto interno il punto t è determinata la minima distanza di t dai suoi estremi.

Sia $f(t)$ il limite superiore di detta minima distanza. Evidentemente è $f(t)>0$. Io dico, inoltre, che $f(t)$ è una funzione continua. Infatti, se a è un punto di (p, q) e se h è un numero reale >0 e $<\frac{f(a)}{2}$, per ogni t di (p, q) compreso fra $a-h$ ed $a+h$ si ha $f(t) \geqslant f(a)-h$ ed ugualmente $f(a) \geqslant f(t)-h$, da cui si deduce che $|f(t)-f(a)|<h$ e quindi che la $f(t)$ è continua per $t=a$.

Sia ora $2d$ il limite inferiore di $f(t)$ in (p, q). È evidentemente $d>0$. Dividiamo il tratto (p, q) in un numero finito di parti di lunghezza $<d$. È facile vedere che ad ognuna di queste parti si può associare un tratto di B che la contenga completamente nel suo interno. Questi tratti di B formano un boreliano, evidentemente con un numero finito di tratti, avente la proprietà che ogni punto di (p, q) è interno ad esso.

Corollario. - Se (p, q) è un tratto di lunghezza finita e se B è un boreliano che contiene ogni punto di (p, q) nel suo interno, la lunghezza di B è $\geqslant$ di quella di (p, q).

Dimostrazione. - Basta osservare che il corollario è evidente quando B ha un numero finito di tratti.

5. - TEOREMA 5. - La lunghezza di un boreliano B è $\geqslant$ di quella del suo sostegno.

Dimostrazione. - A causa del teor. 4 basta dimostrare questo teorema solo nel caso in cui B è elementare.

Supposto B elementare, il teorema è evidente se la lunghezza di B è infinita.

Supponiamo ora che B sia elementare ed abbia una lunghezza finita b. Il sostegno di B sarà un tratto σ. I punti finiti di σ che non sono interni a tratti di B sono estremi di tratti di B, e quindi sono un numero finito o una infinità numerabile. Indichiamoli con

$$p_1, \quad p_2, \quad p_3, \ldots$$

Sia ε un qualunque numero reale >0, e fissiamo per ogni intero $n>0$ un tratto τ_n di lunghezza $<\varepsilon/2^n$ di cui p_n sia un punto interno. I tratti di B ed i tratti τ_n formano un boreliano B' la cui lunghezza è $<b+\varepsilon$. Ogni tratto di lunghezza finita conte-

nuto in σ ha tutti i punti interni a B' e quindi ha, pel corollario del lemma di BOREL, lunghezza $<b+\varepsilon$.

Ne consegue che σ è finito e che la lunghezza di σ è $<b+\varepsilon$. Ma ε può essere piccolo a piacere e quindi la lunghezza di σ è $\leq b$. c. d. d.

§ 2. - Estensione di un aggregato di punti di una retta.

1. Copertura di un aggregato di punti di una retta. - 2. Estensione di un aggregato di punti di una retta.

1. - *Definizione* 13. - Se a è un aggregato di punti di r, si chiama *copertura* di a ogni boreliano B tale che ogni punto di a sia anche punto di B. Se B è semplice si dice che B è una *copertura semplice* di a.

In particolare, se a è un aggregato finito o numerabile, è una copertura di a il boreliano formato coi tratti di lunghezza nulla che hanno i loro due estremi coincidenti con un medesimo punto di a, e, poichè questo boreliano ha lunghezza nulla, si ha il

TEOREMA 6. - Un aggregato finito o numerabile di punti ammette una copertura di lunghezza nulla.

2. - *Definizione* 14. - Il limite inferiore delle lunghezze delle coperture di un aggregato a di punti di r si chiama l'*estensione* di a e si indica con $E(a)$.

Ma se B è una copertura di a, $S(B)$ è copertura semplice di a la cui lunghezza è $\leq$ della lunghezza di B, ed allora: *L'estensione di un aggregato è uguale al limite inferiore delle lunghezze delle sue coperture semplici.*

Osservazione. - Dalla precedente definizione consegue che, se a è un aggregato di estensione finita e se ε è un numero reale >0 scelto a piacere, è possibile trovare una copertura B di a per cui

$$\lambda(B)<E(a)+\varepsilon/2.$$

Se poi

$$\sigma_n=(p_n,\ q_n) \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

sono i tratti di B, i tratti

$$s_n=(p_n-\varepsilon/4\cdot 2^n,\ q_n+\varepsilon/4\cdot 2^n) \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

formano un boreliano B' per cui

$$\lambda(B')<\lambda(B)+\varepsilon\sum_{1}^{\infty}{}_n 1/2^{n+1}$$

$$\lambda(B')<E(a)+\varepsilon/2+\varepsilon/2=E(a)+\varepsilon$$

e B' è una copertura di a della quale i punti di a sono tutti interni.

Si può dunque concludere che, *se a è un aggregato di estensione finita e se ε è un numero reale >0, esiste una copertura B' di a della quale tutti i punti di a sono punti interni e la cui lunghezza è $<E(a)+\varepsilon$.*

Dal teor. 6 consegue il

TEOREMA 6'. - Se a è un aggregato finito o numerabile di punti, è $E(a)=0$.

TEOREMA 7. - Se a' è un sub-aggregato di un aggregato a di punti di r, è $E(a')\leq E(a)$.

Dimostrazione. - Infatti ogni copertura di a è anche una copertura di a' e quindi il limite inferiore delle coperture di a' è $\leq$ del limite inferiore delle coperture di a.

TEOREMA 8. - La somma a di un numero finito o di una infinità numerabile di aggregati di punti di r

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\ldots$$

ha estensione $\leq$ della somma delle estensioni dei singoli aggregati addendi.

Dimostrazione. - Sia ε un qualunque numero reale >0. Esiste, per ogni intero $n>0$, una copertura B_n di a_n per la cui lunghezza b_n si ha

$$b_n<E(a_n)+\varepsilon/2^n.$$

La somma delle B_n è una copertura di a la cui lunghezza è $=\sum_n b_n$ e quindi minore di

$$\sum_n E(a_n)+\varepsilon.$$

Allora è

$$E(a)<\sum_n E(a_n)+\varepsilon.$$

Ma ε può essere piccolo a piacere, dunque è

$$E(a)\leq\sum_n E(a_n).$$

TEOREMA 9. - Se a e b sono due aggregati di punti di r e se b è numerabile, è

$$E(a+b)=E(a).$$

Dimostrazione. - Infatti poichè a è un sub-aggregato di $a+b$ è (teor. 7)

$$E(a+b)\geqslant E(a).$$

Poi (teor. 8)

$$E(a+b)\leqslant E(a)+E(b)=E(a)$$

(teor. 6'). Dunque è proprio

$$E(a+b)=E(a).$$

TEOREMA 10. - L'estensione dell'aggregato dei punti di un boreliano B è $\leqslant$ della lunghezza di B.

Dimostrazione. - Infatti B è una copertura di detto aggregato.

§ 3. - Aggregati misurabili.

1. Anomalia di un aggregato. Aggregati misurabili. - 2. Teoremi sugli aggregati misurabili. - 3. Complemento di un aggregato. - 4. Teoremi sulla misura degli aggregati misurabili.

1\. - *Definizione* 15. - Si chiama *anomalia* di un aggregato a di punti di r e si indica con $\alpha(a)$ il limite inferiore delle $E(B-a)$, dove B sta ad indicare l'aggregato dei punti di una copertura B di a.

Ma se B è una copertura di a, $S(B)$ è una copertura semplice di a, ed essendo numerabile l'aggregato di punti $S(B)-B$ (1), e quindi $E(S(B)-B)=0$ (teor. 6'), si ha (teor. 9)

$$E(S(B)-a)=E(B-a),$$

si conclude che l'*anomalia di a è il limite inferiore delle $E(B-a)$, dove B è una copertura semplice di a.*

Definizione 16. - Un aggregato di punti di r si dice misurabile (secondo LEBESQUE) se ha anomalia nulla.

Definizione 17. - L'estensione di un aggregato a misurabile si chiama *misura* di a e si indicherà con $\mu(a)$.

(1) Poichè ogni punto di $S(B)-B$ è estremo di un tratto di $S(B)$.

2\. - TEOREMA 11. - Se a è un aggregato di punti di r e se $E(a)=0$, l'aggregato a è misurabile.

Dimostrazione. - Infatti, se B è una copertura di a, è

$$\begin{aligned} E(B-a) &\leqslant E(B) \quad \text{(teor. 7)} \\ &\leqslant \lambda(B) \quad \text{(def. 14)} \end{aligned}$$

e, poichè il limite inferiore delle $\lambda(B)$ è $=0$, sarà $=0$ anche quello delle $E(B-a)$.

TEOREMA 12. - La somma a di un numero finito o di una infinità numerabile di aggregati misurabili

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\ldots$$

è un aggregato misurabile.

Dimostrazione. - Prefissato un numero reale $\varepsilon>0$, si può per ogni intero n trovare una copertura B_n di a_n in modo che

$$E(B_n-a_n)<\varepsilon/2^n.$$

La somma B dei boreliani B_n è una copertura di a, e l'aggregato dei punti di $B-a$ è un sub-aggregato della somma degli aggregati di punti B_n-a_n, e quindi (teor. 7 e 8)

$$E(B-a)\leqslant E[\textstyle\sum_n (B_n-a_n)]\leqslant\sum_n E(B_n-a_n)<\varepsilon,$$

ed infine $\alpha(a)<\varepsilon$ e, per l'arbitrarietà di ε,

$$\alpha(a)=0.$$

TEOREMA 13. - Condizione necessaria e sufficiente perchè un aggregato a di punti di r sia misurabile è che tale sia ogni suo sub-aggregato formato con tutti i suoi punti contenuti in un tratto di lunghezza finita.

Dimostrazione. - La condizione è necessaria. Se a è misurabile, se σ è un tratto di r (finito o no) e se a' è l'aggregato dei punti di a che cadono in σ, consideriamo per ogni copertura B di a il boreliano B' formato colle porzioni dei tratti di B che cadono in σ. È chiaro che B' è una copertura di a', che $B'-a'$ è un sub-aggregato di $B-a$ e quindi che

$$E(B'-a')\leqslant E(B-a).$$

Ma il limite inferiore delle $E(B-a)$ è $=0$, dunque è $=0$ anche il limite inferiore delle $E(B'-a')$, ossia è $\alpha(a')=0$ ed a' è misurabile. Ciò vale per ogni tratto σ e quindi anche per ogni tratto *finito.*

La condizione è sufficiente, perchè la retta r si può spezzare in una successione numerabile di tratti

$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \sigma_3, \ldots$$

di lunghezza finita e, detto a_n l'aggregato dei punti di a contenuti in σ_n, si ha, per ipotesi, che gli a_n sono misurabili e quindi a, che è la loro somma, è misurabile (teor. 12).

Dalla 1ª parte della dimostrazione precedente risulta che *se a è un aggregato misurabile di punti di r, è misurabile anche l'aggregato dei suoi punti che cadono in un dato tratto σ.*

Si può concludere che vale il

Corollario. - Se a è un aggregato misurabile di punti di r, se t è un punto di r, è misurabile anche l'aggregato a_t dei punti di a che precedono t.

3. - *Definizione* 18. - Se a è un aggregato di punti di r, si chiama *complemento* di a l'aggregato dei punti di r che non appartengono ad a.

TEOREMA 14. - Il complemento di un aggregato misurabile è pure misurabile.

Dimostrazione. - Sia a un aggregato misurabile e sia b il suo complemento. Per provare che b è misurabile basta provare che è tale ogni aggregato formato coi punti di b contenuti in un tratto di lunghezza finita (teor. 13).

Consideriamo allora un tratto σ di lunghezza finita s ed indichiamo con a' e b' i sub-aggregati di a e b formati da tutti i loro punti che cadono in σ. L'aggregato a' è misurabile (teor. 13).

Sia ε un numero reale qualunque >0. Esiste una copertura *semplice* B di a' (che possiamo pensare contenuta in σ) per cui

$$E(B-a')<\varepsilon.$$

Evidentemente, poichè i tratti di B sono a due a due distinti, la lunghezza di B è *finita* ($\leq$ della lunghezza di σ). Allora si potrà spezzare B nella somma di due boreliani B' e B'', il primo costituito da un numero finito di tratti e l'altro di lunghezza $<\varepsilon$, e quindi tale che (def. 14)

$$(1) \qquad E(B'')<\varepsilon.$$

Gli estremi di B' dividono σ in un numero finito di tratti, di cui alcuni formano il boreliano B' e gli altri un nuovo boreliano C. Indichiamo poi con C' una copertura di $B-a'$ avente lunghezza $<\varepsilon$, cosicchè sia (def. 14)

$$(2) \qquad E(C')<\varepsilon.$$

Il boreliano $C+C'$ è una copertura di b', perchè un punto di $b'=\sigma-a'$ che appartiene a B appartiene a $B-a'$ e perciò a C', e se non appartiene a B e quindi non appartiene a B' deve appartenere a C. Ora i punti di $C+C'-b'$ o appartengono a C e quindi essendo punti di a' appartengono come estremi ai tratti B' (in numero finito) o sono in B'', oppure appartengono a C', dunque (teor. 8 e 6'):

$$E(C+C'-b')\leq E(B'')+E(C')$$

e per le (1) e (2)

$$E(C+C'-b')<2\varepsilon.$$

Allora

$$\alpha(b')<2\varepsilon$$

e, per l'arbitrarietà di ε,

$$\alpha(b')=0, \qquad \text{c. d. d.}$$

Dalla dimostrazione precedente consegue che

$$\mu(a')\leq\lambda(B')+\lambda(B''),$$
$$\mu(b')\leq\lambda(C)+\lambda(C')$$

e quindi, per (1) e (2),

$$\mu(a')+\mu(b')\leq\lambda(B')+\lambda(C)+2\varepsilon=s+2\varepsilon$$

e, per l'arbitrarietà di ε,

$$\mu(a')+\mu(b')\leq s.$$

Ora se c è un sub-aggregato misurabile di b' è

$$\mu(c)\leq\mu(b'),$$

e quindi

$$\mu(a')+\mu(c)\leq s.$$

Ma a' può essere un qualunque aggregato misurabile contenuto in σ, c può essere un altro qualunque aggregato misurabile contenuto in σ e non avente punti in comune con a', ed allora si ha il

TEOREMA 15. - La somma delle misure di due aggregati misurabili distinti fra loro e contenuti in un medesimo tratto σ è $\leqq$ della lunghezza di σ (se la lunghezza di σ è ∞, il teorema è subito evidente).

TEOREMA 16. - Se a e b sono due aggregati misurabili e se b è sub-aggregato di a, la differenza $a-b$ è misurabile.

Dimostrazione. - Infatti se a' è il complemento di a, a' è misurabile (teor. 14) e quindi lo è anche $a'+b$ (teor. 12).

Ma $a-b$ è il complemento di $a'+b$, quindi $a-b$ è misurabile.

Dal teor. 2 del Cap. I e dal teorema precedente consegue il

TEOREMA 17. - Il prodotto di due aggregati misurabili è misurabile.

Applicando ripetutamente questo teorema si ha anche il

TEOREMA 18. - Il prodotto di un numero finito di aggregati misurabili è misurabile.

Infine si ha il

TEOREMA 19. - Il prodotto p di una infinità numerabile di aggregati misurabili

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \dots$$

è misurabile.

Dimostrazione. - Infatti, indicando con p_n il prodotto dei primi n aggregati dati, si ha subito

$$p = p_1 - \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - p_{n+1}). \tag{3}$$

Ma i p_n sono misurabili (teor. 18) e quindi lo sono i

$$p_n - p_{n+1}$$

(teor. 16), e lo è anche

$$\sum_n (p_n - p_{n+1})$$

(teor. 12), ed infine lo è p (teor. 16).

4. - TEOREMA 20. - Se a e b sono due aggregati distinti misurabili, è

$$\mu(a+b) = \mu(a) + \mu(b).$$

Dimostrazione. - Sia B una copertura semplice di $a+b$ e siano

$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \sigma_3, \dots$$

i tratti di B. Siano a_n e b_n i sub-aggregati di a e b costituiti da tutti i loro punti contenuti in σ_n. Si ha (teor. 15)

$$\mu(a_n) + \mu(b_n) \leqq \text{lunghezza di } \sigma_n.$$

Ma (teor. 8)

$$\mu(a) + \mu(b) \leqq \sum_n \mu(a_n) + \sum_n \mu(b_n),$$

dunque

$$\mu(a) + \mu(b) \leqq \text{lunghezza di } B$$

e, poichè B è una qualunque copertura semplice di $a+b$, è

$$\mu(a) + \mu(b) \leqq \mu(a+b).$$

Inoltre (teor. 8)

$$\mu(a+b) \leqq \mu(a) + \mu(b),$$

dunque

$$\mu(a+b) = \mu(a) + \mu(b).$$

Applicando ripetutamente il teorema precedente si ha il

TEOREMA 21. - La somma di un numero finito di aggregati misurabili, a due a due distinti, ha per misura la somma delle misure degli aggregati addendi.

TEOREMA 22. - Se

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \dots$$

sono una infinità numerabile di aggregati misurabili a due a due distinti e se a è la loro somma, è

$$\mu(a) = \sum_n \mu(a_n).$$

Dimostrazione. - Infatti (teor. 7)

$$\mu(a) \geqq \mu(a_1 + a_2 + \dots + a_r) = \mu(a_1) + \mu(a_2) + \dots + \mu(a_r)$$

(teorema precedente), e ciò per ogni r, e quindi

$$\mu(a) \geqq \sum_n \mu(a_n).$$

Inoltre (teor. 8)

$$\mu(a) \leqq \sum_n \mu(a_n),$$

dunque

$$\mu(a) = \sum_n \mu(a_n).$$

È immediata conseguenza dei teor. 16 e 20 il

TEOREMA 23. - Se a e b sono due aggregati misurabili, e se b è un sub-aggregato di a si ha $\mu(a-b) = \mu(a) - \mu(b)$.

TEOREMA 24. - Il prodotto p di una successione numerabile

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots$$

di aggregati misurabili, ciascuno contenuto nel precedente, ha per misura il limite per $n=\infty$ di $\mu(a_n)$.

Dimostrazione. - Infatti, nelle nostre ipotesi, dalla (3) si ottiene:

$$p = a_1 - \sum_{1}^{\infty}{}_n (a_n - a_{n+1})$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\mu(p) &= \mu(a_1) - \mu[\textstyle\sum_n (a_n - a_{n+1})] && \text{(teor. 12 e 23)}\\
&= \mu(a_1) - \textstyle\sum_n \mu(a_n - a_{n+1}) && \text{(teor. 22)}\\
&= \mu(a_1) - \textstyle\sum_n [\mu(a_n) - \mu(a_{n+1})] && \text{(teor. 23)}\\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(a_n).
\end{aligned}$$

§ 4. - Particolari aggregati misurabili.

1. Aggregato dei punti di un tratto. - 2. Aggregato dei punti di un boreliano. - 3. Aggregati chiusi e perfetti. - 4. Boreliano semplice associato ad un aggregato chiuso. Un aggregato chiuso è misurabile. - 5. Potenza di un aggregato perfetto. - 6. Aggregato perfetto con misura nulla. Potenza dell'aggregato che ha per elementi gli aggregati misurabili. - 7. Aggregati di BOREL o misurabili B. - 8. Teorema geometrico.

1. - TEOREMA 25. - L'aggregato a dei punti di un tratto σ è misurabile ed ha per misura la lunghezza s di σ.

Dimostrazione. - Infatti, essendo σ una copertura di a per cui $E(\sigma - a) = 0$, è $\alpha(a) = 0$, quindi a è misurabile. Inoltre è per la stessa ragione $\mu(a) \leqslant s$. Ora, il sostegno di una copertura B di a contiene almeno come porzione di uno dei suoi tratti il tratto σ, e quindi la lunghezza di B è $\geqslant s$ (teor. 5). Dunque s è il limite inferiore delle lunghezze delle coperture di a, ossia è

$$\mu(a) = s.$$

Osservazione. - Si ha ora una nuova dimostrazione del teorema: *La potenza del continuo è maggiore di quella del numerabile.* Ed infatti l'aggregato dei punti di un tratto non può essere numerabile, perchè avrebbe misura nulla (teor. 6' e 11; Cap. I, teor. 65).

2. - Sia B un boreliano e siano

$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \sigma_3, \ldots$$

i suoi tratti.

Indichiamo con a_n l'aggregato dei punti di σ_n. Ogni aggregato a_n è misurabile (teorema precedente) ed ha per misura la lunghezza s_n di σ_n. Ne consegue che l'aggregato somma degli a_n, ossia l'aggregato dei punti di B, è misurabile. Se poi B è semplice, gli a_n sono a due a due distinti ed allora (teor. 22)

$$\mu(a) = \sum_n s_n,$$

o in altri termini la misura dell'aggregato dei punti di B è uguale alla lunghezza di B.

Si ha così il

TEOREMA 26. - L'aggregato dei punti di un boreliano è misurabile, e la misura dell'aggregato dei punti di un boreliano semplice è uguale alla lunghezza del boreliano.

3. - *Definizione* 19. - Essendo a un aggregato di punti di r e p un punto finito di r, si dice che p è un *punto limite* (o di *accumulazione*) di a se in ogni tratto non nullo che contiene p come punto interno cade qualche punto di a diverso da p. Si dirà poi che $+\infty$ o $-\infty$ è pure *punto limite* (o di *accumulazione*) di a se in ogni tratto non nullo che ha questo punto come estremo cadono punti finiti di a. L'aggregato dei punti limiti di un aggregato a di punti di r si dice il *derivato* di a.

Definizione 20. - Un aggregato di punti di r si dice *chiuso* se contiene il suo derivato.

Definizione 21. - Un aggregato di punti di r si dice *perfetto* se coincide col suo derivato.

Corollario. - Un aggregato perfetto è chiuso.

4. - *Definizione* 22. - Se a è un aggregato *chiuso* e se p è un punto *finito* di r non appartenente ad a, esistono evidentemente dei tratti che non contengono punti di a e dei quali p è un punto interno (altrimenti p sarebbe un punto limite di a ed apparterrebbe ad a). Detto m il limite inferiore degli estremi si-

nistri e detto n il limite superiore degli estremi destri di tali tratti, si vede che gli estremi di (m, n) possono appartenere ad a [1], ma che nessun altro punto di (m, n) appartiene ad a. Due tratti diversi di questa specie sono distinti e non nulli e quindi il loro aggregato è finito o numerabile (teor. 1). Essi formano dunque un boreliano B semplice che diremo *associato* ad a.

Si vede pure che *due tratti di un boreliano associato ad un aggregato perfetto non possono avere un estremo comune, e che soli gli estremi finiti dei tratti del boreliano associato appartengono all'aggregato perfetto.*

TEOREMA 27. - Un aggregato chiuso è misurabile.

Dimostrazione. - Difatti, se a è un aggregato chiuso, l'aggregato dei punti del boreliano B associato ad a è misurabile (teor. 26) e quindi è tale il suo complementare a'. L'aggregato a'' dei punti di a che sono estremi di tratti di B è finito o numerabile e quindi misurabile (teor. 6' e 11), ma $a = a' + a''$, dunque a è misurabile.

Definizione 23. - I punti di un aggregato *chiuso* a che non appartengono al boreliano associato, ossia non sono estremi di un tratto di questo boreliano, si dicono *interni* ad a, i rimanenti punti di a si dicono *estremi* di a.

5. - TEOREMA 28. - Un aggregato perfetto g ha numero cardinale uguale a c.

Dimostrazione. - Intanto, se g contiene tutti i punti di un tratto, il teorema è evidente. Basterà inoltre dimostrare il teorema nei soli casi in cui g è contenuto in un tratto finito. Supponiamo ora che l'aggregato g sia contenuto in un tratto finito e che non contenga nessun tratto, ed indichiamo con B il boreliano associato a g.

Siano

$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \sigma_3, \ldots$$

i tratti finiti di B. Siccome l'aggregato g non contiene nessun tratto, fissato un qualunque σ_m nella successione $\{\sigma_n\}$ vi sono sulla retta r infiniti tratti σ_n a destra e a sinistra di σ_m; così pure fissato un

[1] Appartiene ad a ogni estremo finito.

punto t interno a g e un tratto σ_m esistono infiniti tratti della successione $\{\sigma_n\}$ compresi tra t e σ_m. Siano

$$(1) \qquad \varrho_1, \quad \varrho_2, \quad \varrho_3, \ldots$$

gli elementi di un aggregato γ numerabile di punti interni al tratto $(0, 1)$, tale che in ogni tratto parziale di $(0, 1)$ ve ne sia qualcuno, o, come diremo, che sia *denso* dappertutto in $(0, 1)$.

Facciamo corrispondere al segmento σ_1 il numero ϱ_1, a σ_2 il primo numero di (1) che è $<$ oppure $>$ di ϱ_1 secondo che σ_2 è a sinistra o a destra di σ_1, al segmento σ_3 il primo termine della successione (1) che ha in $(0, 1)$ coi corrispondenti di σ_1 e σ_2 la stessa relazione di posizione che σ_3 ha in r con σ_1 e σ_2, e così via di seguito. In questa maniera ad ogni σ_n viene a corrispondere in modo unico un numero di (1).

Indichiamo con τ_n il termine di (1) che viene in tal modo a corrispondere a σ_n. Allora, se $n \neq m$, τ_n sarà $<$ oppure $>$ di τ_m secondo che σ_n precede o segue sulla r il tratto σ_m.

Se t è un punto interno a g, esso divide i tratti di B in due classi, la prima costituita dai tratti che precedono t e l'altra dai rimanenti. Corrispondentemente i numeri (1) risultano divisi in due classi contigue, che comprendono un numero y di $(0, 1)$. Il numero y non può coincidere con alcun τ_m; infatti se $y = \tau_m$ e τ_m è nella prima delle due classi contigue ora definite, si consideri un tratto σ_n che segua sulla r σ_m e preceda t, il corrispondente τ_n è $> \tau_m$ e $\leqq \tau_m$ e ciò è assurdo. La corrispondenza ottenuta tra i punti t e i numeri y è una corrispondenza biunivoca fra i punti interni a g e quelli dell'aggregato γ' dei punti di $(0, 1)$ che non appartengono a γ. Ma l'aggregato γ' è continuo (Cap. I, teor. 61), dunque il numero cardinale di g è $\geqq c$, d'altra parte esso deve essere $\leqq c$, poichè g è un sub-aggregato dell'aggregato dei numeri reali. Consegue che il numero cardinale di g è $= c$.

6. - TEOREMA 29. - Esistono aggregati perfetti di misura nulla.

Dimostrazione. - Infatti, se σ è un tratto di lunghezza finita s, si può estrarre da σ un tratto σ_1 interno a σ (cioè tale che gli estremi di σ_1 siano interni a σ) la cui lunghezza sia $= s/2$. Anche da ciascuno dei due tratti di σ che rimangono si può estrarre un tratto interno di lunghezza uguale alla metà di quella del segmento da cui si estrae. Detti σ_2 e σ_3 i tratti che si estraggono, restano ancora 4 tratti di σ dai quali con analoga operazione estragghiamo altri 4 tratti di σ che diremo $\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7$, e così via. I tratti

(2) $$\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \sigma_3, \dots$$

formano un boreliano semplice B tale che due suoi tratti non hanno estremi comuni. La lunghezza di B è uguale a

$$s/2+s/2^2+s/2^3+\dots=s.$$

L'aggregato g dei punti di σ che non sono interni a qualcuno dei tratti (2) è un aggregato chiuso. E infatti, se p, punto di σ, è interno a qualcuno dei tratti (2), esso non può essere punto limite per g, il quale deve perciò contenere tutti i suoi punti limiti.

È evidente (teor. 27, 23) che la misura di g è $s-s=0$.

L'aggregato g non può quindi contenere tratti non nulli ed è facile provare che g è un aggregato perfetto. Infatti qualunque punto q di g è punto limite degli estremi degli infiniti tratti della successione (2) che lo precedono e lo seguono, e siccome tali estremi appartengono a g, e g è chiuso, q appartiene a g.

Osservazione. - Si consideri l'aggregato a dei punti di ascissa razionale contenuti in σ, esso è numerabile e di misura nulla (Cap. I, teor. 63; Cap. II, teor. 6' e 11); l'aggregato $a+g$ è ovunque denso in σ, ha la potenza del continuo (Cap. I, teor. 61, Cap. II, teor. 28) ed è di misura nulla.

TEOREMA 30. - L'aggregato che ha per elementi gli aggregati misurabili di punti di una retta ha numero cardinale $>c$.

Dimostrazione. - Infatti, se a è un aggregato perfetto di misura $=0$, i sub-aggregati di a sono misurabili, poichè hanno estensione $=0$ (teor. 7 e 11), ma a è continuo (teor. 28), quindi i suoi sub-aggregati, considerati come elementi, formano un aggregato di numero cardinale $>c$ (Cap. I, teor. 38). Si conclude che anche l'aggregato che ha per elementi tutti gli aggregati misurabili ha numero cardinale $>c$.

Osservazione. - L'aggregato a considerato nella dimostrazione precedente ha la stessa potenza dell'aggregato b dei punti della retta r, quindi l'aggregato a' che ha per elementi i sub-aggregati di a e l'aggregato b' che ha per elementi i sub-aggregati di b hanno la stessa potenza. Si può allora concludere che *l'aggregato*

che ha per elementi gli aggregati misurabili ha la stessa potenza dell'aggregato che ha per elementi tutti gli aggregati di punti della retta.

7. - Consideriamo le operazioni:

A) Fare la somma o il prodotto di un numero finito o di una infinità numerabile di aggregati. Trovare la differenza di due aggregati.

Definizione 24. - Gli aggregati costituiti da tutti i punti di un tratto si diranno *primitivi.*

Definizione 25. - Gli aggregati primitivi e tutti quelli che si ottengono con una delle operazioni *A*) su aggregati primitivi e su quelli che così successivamente si ottengono si dicono *aggregati di Borel.*

Dai teor. 6', 11, 12, 16, 17, 19, 25 consegue il

TEOREMA 31. - Gli aggregati di BOREL sono misurabili.

Per questo fatto gli aggregati di BOREL si dicono anche *misurabili B.*

Gli aggregati di BOREL si distribuiscono in varie classi corrispondenti ai numeri transfiniti che precedono Ω (Cap. I, def. 30).

Si mettono nella classe 0 tutti gli aggregati primitivi, e se α è un numero transfinito $<\Omega$, si chiama aggregato di *classe* α ogni aggregato che non appartiene ad una classe precedente e che si ottiene eseguendo un'operazione *A*) su aggregati di classi precedenti [1].

Si ha subito il

TEOREMA 32. - L'aggregato dei punti di un boreliano è un aggregato di BOREL di classe 0 od 1.

Infatti esso è o un aggregato primitivo o la somma di aggregati primitivi.

TEOREMA 33. - Ogni aggregato misurabile è uguale alla differenza di un aggregato di BOREL delle classi 0, 1, 2 e di un aggregato di misura nulla.

Dimostrazione. - Sia a un aggregato misurabile. Si può costruire una successione di coperture B_n di a tali che il limite per $n\to\infty$ di $\lambda(B_n)$ sia uguale a $\mu(a)$. Il prodotto b degli aggre-

[1] Sulla condizione $\alpha<\Omega$ cfr. W. SIERPIŃSKI (op. cit. a p. 17), Cap. XI.

gati B_n è un aggregato di BOREL di una delle classi 0, 1, 2 che ha certamente misura $\leqslant \mu(a)$. Ma a è un sub-aggregato di b, dunque a e b hanno ugual misura, ossia $b-a$ ha misura nulla. Inoltre è

$$a=b-(b-a).$$

Dalla def. 25 consegue il

TEOREMA 34. - Eseguendo una operazione A) su aggregati di BOREL si ottiene un aggregato di BOREL.

Vedremo (Cap. III; teor. 16) che l'aggregato avente per elementi gli aggregati di BOREL ha numero cardinale $=c$, e che quindi gli aggregati di BOREL sono solo una piccola parte degli aggregati misurabili (teor. 30).

Se a è un aggregato chiuso, se b è l'aggregato dei punti del boreliano ad esso associato (def. 22), se c è l'aggregato dei punti di r, se d è l'aggregato degli estremi di tratti di b che appartengono ad a, è

$$a=c-b+d,$$

ma c, b e d sono aggregati di BOREL (teor. 32) ed allora si ha (teor. 34):

TEOREMA 35. - Un aggregato chiuso è un aggregato di BOREL.

TEOREMA 36. - Se a è un aggregato chiuso, a contiene il suo limite inferiore ed il suo limite superiore.

Dimostrazione. - Infatti, se α è il limite inferiore di a, o α è punto limite di a ed allora appartiene ad a, o non è punto limite di a ed allora apparterrebbe ad a anche se a non fosse chiuso.

Analogamente si ragiona per il limite superiore.

TEOREMA 37. - Se a è un aggregato misurabile di misura finita $m>0$, è possibile, per ogni numero reale $\varepsilon>0$, trovare un sub-aggregato a' di a che sia chiuso ed abbia una misura $>m-\varepsilon$.

Dimostrazione. - Intanto noi possiamo trovare una copertura semplice B di a tale che, essendo b l'aggregato dei suoi punti, sia

$$\mu(b-a)<\varepsilon/2.$$

Essendo $\lambda(B)\geqslant m$, da B si può estrarre un numero finito di tratti formanti un boreliano (semplice) B' con

$$\lambda(B')>m-\varepsilon/2.$$

I punti di $b-a$ che cadono in B' formano un aggregato c di misura $<\varepsilon/2$. Sarà allora possibile (def. 14, osservazione) trovare una copertura B'' di c che contenga nel suo interno tutti i punti di c e che sia di lunghezza $<\varepsilon/2$. L'aggregato a' dei punti di B' non interni a B'' è evidentemente un sub-aggregato di a; a' è chiuso perchè se p è interno a un tratto di B'', p non può essere punto limite di a', e la misura di a' è $>m-\varepsilon$.

8. - TEOREMA GEOMETRICO. - Se a è un aggregato di misura finita m e se ad ogni punto di a corrisponde almeno un suo intorno destro (def. 1), è possibile, per ogni numero reale $\varepsilon>0$, trovare un numero finito di tali intorni, a due a due distinti, le cui lunghezze abbiano una somma $>m-\varepsilon$ (oppure uno di tali intorni la cui lunghezza sia $>m-\varepsilon$) (1).

Dimostrazione. - A causa dell'ipotesi bisogna supporre che a non contenga il punto $+\infty$ (vedi def. 1). Indichiamo con Δ l'aggregato degli intorni che corrispondono ai vari punti di a.

Supponiamo dapprima che a sia chiuso ed indichiamo con α il suo limite inferiore e con β il suo limite superiore. Necessariamente, poichè β appartiene ad a (teor. 36), β è finito.

Siano t un punto di r maggiore di α, a_t l'aggregato dei punti di a che cadono in (α, t) ed m_t la sua misura. Indichiamo con c l'aggregato dei punti t tali che per ogni numero reale $\varepsilon>0$ esiste un numero finito di tratti di Δ che cadono in (α, t), che sono a due a due distinti e le cui lunghezze hanno una somma $>m_t-\varepsilon$ [oppure uno di tali tratti che cade in (α, t) e la cui lunghezza è $>m_t-\varepsilon$].

Il punto α appartiene ad a (teor. 36). Sia (α, α') un tratto di Δ che corrisponde ad α. Il punto α' appartiene evidentemente a c. Dunque esistono dei punti appartenenti a c. Essi avranno un limite superiore τ.

Io dico che $\tau=+\infty$.

Intanto se τ è finito, τ deve appartenere a c. Infatti, nel caso contrario, per ogni numero reale $\varepsilon>0$ esisterebbe un punto θ di c $(\theta<\tau)$ per cui $\tau-\theta<\varepsilon/2$. Esiste allora un numero finito di tratti di Δ, a due a due distinti, che cadono in (α, θ) e quindi

(1) Questo notevole teorema è del VITALI. (Cfr. Atti R. Acc. Scienze di Torino, 43 (1907-1908); pp. 229-246). (Nota di G. S.).

in (a, τ) le cui lunghezze hanno una somma $> m_\theta - \varepsilon/2$, ossia $> m_\tau - \varepsilon$ e τ apparterrebbe a c.

Consegue subito che non può essere $\tau < \beta$. Infatti se fosse $\tau < \beta$, e se z è il limite inferiore dei punti di a che sono $\geqq \tau$, se (z, u) è un tratto di Δ che corrisponde al punto z (z appartiene ad a), poichè per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ esiste un numero finito di tratti di Δ che cadono in (a, τ), a due a due distinti, le cui lunghezze hanno una somma $> m_\tau - \varepsilon$, l'aggregato di tali tratti e di (z, u) è pure un insieme di un numero finito di tratti di Δ che sono a due a due distinti, che cadono in (a, u) e le cui lunghezze hanno somma $> m_\tau + (z, u) - \varepsilon \geqq m_u - \varepsilon$ quindi u appartiene a c contro l'ipotesi che τ sia il limite superiore dei punti di c.

Dunque $\tau \geqq \beta$. Di qui si può dedurre che $\tau = +\infty$, ma a noi basta sapere che $\tau \geqq \beta$ per concludere che esiste in c un punto $t \geqq \beta$. Per esso esiste, qualunque sia il numero reale $\varepsilon > 0$, un numero finito di tratti di Δ (che cadono in (a, t)), a due a due distinti, le cui lunghezze hanno una somma $> m_t - \varepsilon$ ossia $> m - \varepsilon$, poichè per un $t \geqq \beta$ è $m_t = m$.

Così il teorema è dimostrato se a è un aggregato chiuso.

Se a non è chiuso, per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ sarà possibile trovare un sub-aggregato chiuso a' di a di misura $m' > m - \varepsilon/2$ (teor. 37) e quindi trovare un numero finito di tratti, a due a due distinti, corrispondenti ai punti di a' le cui lunghezze abbiano una somma $> m' - \varepsilon/2$ ossia $> m - \varepsilon$. E così il teorema è dimostrato in generale.

Corollario. - Se a è un aggregato di punti di una retta r avente misura finita m, se Δ è un aggregato di tratti non nulli (non necessariamente un boreliano) tale che ogni punto di a appartiene, o come interno o come estremo, a qualche tratto di Δ, è possibile, qualunque sia il numero reale $\varepsilon > 0$, trovare un numero finito di porzioni, a due a due distinte, di tratti di Δ, le lunghezze delle quali abbiano una somma $> m - \varepsilon$.

Dimostrazione. - Indico con a'' l'aggregato dei punti di a che sono nè interni nè estremi sinistri di qualche tratto di a. Se z è un punto di a'', esiste un tratto di Δ di cui z è estremo destro, quindi esiste qualche punto $t < z$ tale che in (t, z) non possono cadere altri punti di a''. Sia u il limite inferiore di tali t. Allora (u, z) è un tratto ben determinato della retta r che risulta

associato a z e dentro il quale non esistono altri punti di a''. I tratti di r che così risultano associati ai vari punti di a'' sono a due a due distinti, e quindi sono in numero finito o in una infinità numerabile (teor. 1), quindi anche i punti di a'' sono in numero finito o in una infinità numerabile. Si conclude che a'' ha misura nulla (teor. 6' e 11).

Pongo

$$a' = a - a''.$$

Allora a' ha misura m. Se y è un punto di a' e se (h, k) è un tratto di Δ che contiene y o come punto interno o come estremo sinistro, noi possiamo far corrispondere al punto y il tratto (y, k). I tratti che così vengono a corrispondere ai vari punti di a' sono intorni destri di tali punti. Questi tratti formano un insieme Δ', dal quale, in virtù del teorema geometrico, si può estrarre un numero finito di tratti, a due a due distinti, le cui lunghezze abbiano una somma $> m - \varepsilon$. c. d. d.

§ 5. - Il problema della misura degli aggregati dei punti di una retta.

1. Il problema generale della misura. - 2. Questo problema non ha soluzione per la classe di tutti gli aggregati di punti di una retta. - 3. Enunciati di problemi della misura in senso più largo.

1. - Abbiamo visto (teor. 30, osservazione) che l'aggregato che ha per elementi gli aggregati misurabili di punti di una retta r ha la stessa potenza dell'aggregato che ha per elementi tutti gli aggregati di punti di quella retta. Ma ciò non vuol dire che ogni aggregato di punti della retta sia misurabile.

Noi vedremo che ciò non è.

Intanto, siano o non siano la totalità degli aggregati di punti della retta, gli aggregati che noi abbiamo definiti come misurabili formano una classe M di aggregati che gode evidentemente delle seguenti proprietà:

A) Se σ è un tratto di r, l'aggregato dei punti di σ appartiene ad M.

B) Se g è un aggregato della classe M, appartengono ad M anche tutti gli aggregati congruenti a g, ossia tali che si ottengono da g con un movimento (traslazione).

C) La somma di un numero finito o di un'infinità numerabile di aggregati della classe M è un aggregato della classe M.

Noi, avendo fissata l'unità di lunghezza, abbiamo saputo associare a ciascun aggregato della classe M un numero che abbiamo chiamato la sua misura e che soddisfa alle seguenti condizioni:

1) L'aggregato dei punti di un tratto σ ha per misura la lunghezza di σ.

2) Due aggregati congruenti hanno la stessa misura.

3) La somma di un numero finito o di una infinità numerabile di aggregati distinti della classe M ha per misura la somma delle misure degli aggregati addendi.

La classe di tutti gli aggregati di r ha anch'essa le proprietà *A*), *B*) e *C*), ma sarà possibile, avendo fissata l'unità di lunghezza, associare ad ognuno di questi aggregati una misura che soddisfi alle condizioni 1), 2) e 3)?

È questo il *problema generale della misura* per gli aggregati di punti di una retta r. Come ho già avvertito e come vedremo al seguente numero, questo problema non ha soluzione.

2. - Supponiamo che il predetto problema abbia soluzione per la classe di tutti gli aggregati di punti di r.

Sia t un punto di r. I punti di r che differiscono da t per un numero razionale qualsiasi formano un aggregato γ_t numerabile. Se γ_{t_1} e γ_{t_2} sono due tali aggregati, o essi sono senza punti in comune o coincidono.

Consideriamo i diversi aggregati γ_t.

Essi, considerati come elementi, formano un aggregato H. Se t è un punto qualunque di r, esisterà un elemento ed uno solo di H che lo contiene.

Consideriamo, per ogni elemento a di H, un punto t_a dell'intervallo $(0, 1/2)$ che appartenga ad a [1], ed indichiamo con g l'aggregato dei punti t_a.

Se poi ϱ è un numero razionale qualsiasi indichiamo con g_ϱ il gruppo dei punti $t_a+\varrho$.

[1] Per ogni a esistono infiniti punti t_a dell'intervallo $(0, 1/2)$ appartenenti ad a, la considerazione di uno di essi implica quindi l'*Assioma della scelta di Zermelo* (Cap. I, § 3, 5).

I g_ϱ, corrispondenti ai diversi valori razionali di ϱ, sono a due a due senza punti comuni, inoltre sono congruenti e devono avere la stessa misura.

Tra gli aggregati g_ϱ consideriamo in particolare

$$g_0, \quad g_{\frac{1}{2}}, \quad g_{\frac{1}{3}}, \quad g_{\frac{1}{4}}, \ldots$$

essi cadono tutti in $(0, 1)$, quindi la loro somma deve avere una misura $m \leq 1$.

Ma deve essere

$$m=\mu(g_0)+\sum_{2}^{\infty}{}_{n}\,\mu(g_{\frac{1}{n}})=\lim_{n\to\infty} n\cdot\mu(g_0)$$

e quindi

$$\mu(g_0)=0.$$

Allora la somma di tutti i g_ϱ corrispondenti ai diversi valori razionali di ϱ deve essa pure avere misura nulla. Però questa somma è l'aggregato di tutti i punti di r, e quindi dovrebbe avere misura infinita. Ciò basta per concludere che l'ipotesi fatta è assurda e che si ha il

TEOREMA 38. - Il problema generale della misura degli aggregati di punti di una retta è impossibile [1].

3. - Non essendo possibile risolvere il problema della misura degli aggregati di punti di una retta così come noi lo abbiamo impostato, si è pensato di impostarlo in modo più largo abbandonando qualcuna delle condizioni 1), 2) e 3) richieste per la misura.

Così si potrebbe sostituire la condizione 3) colla condizione meno restrittiva:

3') La somma di un numero finito di aggregati ha per misura la somma delle misure di questi,

e quindi rinunziando alla condizione analoga per le somme di una infinità numerabile di aggregati.

Si potrebbe invece rinunziare alla condizione 2), ecc.

[1] La prima dimostrazione è del VITALI. (Cfr. G. VITALI: *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*, Bologna, 1905). (Nota di G. S.).

§ 6. - Aggregati lineari automorfi.

1. Definizione. - 2. Divisione della retta in due aggregati automorfi fra loro uguali.

1. - *Definizione* 26. - Un aggregato a di punti della retta r si dice *automorfo*, se, qualunque sia un punto A di a e qualunque sia un tratto non nullo σ di r, esiste in σ un punto A' di a tale che la traslazione che porta A in A' porti completamente a in a, ossia ogni punto di a in un punto di a, ed in ogni punto di a un punto di a.

La definizione precedente implica che se a è automorfo in ogni tratto σ non nullo di r vi sia qualche punto di a e quindi che in ogni tratto σ non nullo di a vi siano infiniti punti di a. Ciò si può esprimere dicendo che *un aggregato automorfo è dappertutto denso in* r.

2. - Se t è un punto di r, indichiamo con A_t l'insieme dei punti

$$t+\frac{p}{3^n}$$

e con B_t l'insieme dei punti

$$t+\frac{2p+1}{2\cdot 3^n}$$

dove p è un intero qualunque $\gtreqless 0$ ed n è un intero qualunque $\geqslant 0$.

Gli aggregati A_t e B_t sono distinti, perchè per essere

$$t+\frac{p}{3^n}=t+\frac{2q+1}{2\cdot 3^m}$$

dovrebbe essere

$$2\cdot 3^m\cdot p=(2q+1)\cdot 3^n$$

e quindi un numero pari uguale ad un numero dispari.

Chiamiamo di 1ª classe le traslazioni della retta r di ampiezza

$$\frac{q}{3^m},$$

e di 2ª classe quelle di ampiezza

$$\frac{2q+1}{2\cdot 3^m},$$

dove q è un qualunque intero $\gtreqless 0$ ed m è un qualunque intero $\geqslant 0$.

Una traslazione di 1ª classe trasporta ogni punto di A_t in un punto di A_t ed ogni punto di B_t in un punto di B_t. Infatti, si ha

$$\left(t+\frac{p}{3^n}\right)+\frac{q}{3^m}=t+\frac{3^m p+3^n q}{3^{n+m}},$$

$$\left(t+\frac{2p+1}{2\cdot 3^n}\right)+\frac{q}{3^m}=t+\frac{2(3^m p+3^n q+k)+1}{2\cdot 3^{n+m}}$$

dove $k=(3^m-1)/2$.

Analogamente una traslazione di 2ª classe trasporta ogni punto di A_t in un punto di B_t ed ogni punto di B_t in un punto di A_t. Infatti, si ha

$$\left(t+\frac{p}{3^n}\right)+\frac{2q+1}{2\cdot 3^m}=t+\frac{2(3^m p+3^n q+k)+1}{2\cdot 3^{n+m}}$$

dove $k=(3^n-1)/2$, ed infine

$$\left(t+\frac{2p+1}{2\cdot 3^n}\right)+\frac{2q+1}{2\cdot 3^m}=t+\frac{2(3^m p+3^n q+k)}{2\cdot 3^{n+m}}=t+\frac{3^m p+3^n q+k}{3^{n+m}}$$

dove $k=(3^m+3^n)/2$.

Poniamo $C_t=A_t+B_t$. Due aggregati C_t o coincidono o non hanno punti in comune. Consideriamo l'insieme degli aggregati C_t distinti ed in ciascuno scegliamo un punto ([1]). Tutti questi punti formano un aggregato H.

Sia A la somma di tutti gli A_t corrispondenti ai vari punti t di H, e sia B la somma di tutti i B_t corrispondenti pure ai vari punti t di H. L'aggregato $A+B$ è l'insieme di tutti i punti di r.

Ogni traslazione di 1ª classe porta A completamente in A e B completamente in B. Ogni traslazione di 2ª classe porta completamente A in B e B in A.

Evidentemente, se t è un punto di A e se σ è un tratto non nullo di r esiste una traslazione di 1ª classe che porta t in un punto di A contenuto in σ. Si può allora concludere che A è automorfo, e che infine l'*aggregato dei punti di r è diviso in due aggregati automorfi A e B uguali fra loro.*

([1]) Anche qui si fa uso dell'*Assioma della scelta di Zermelo.*

CAPITOLO III.

Analisi delle funzioni.

§ 1. - Funzioni misurabili.

1. - *Definizione* 1. - Se g è un aggregato e se una proprietà sussiste per tutti i punti di g, all'infuori di quelli che appartengono ad un suo sub-aggregato di misura nulla, si dice che la proprietà sussiste *generalmente in* g, o *quasi dappertutto in* g.

Sia $f(t)$ una funzione reale generalmente definita in un aggregato g misurabile di punti di r. (Dicendo che f è *definita* in un punto di g intendiamo che in quel punto essa abbia un valore finito o infinito con segno determinato). Indichiamo con g' il sub-aggregato dei punti di g in cui la f è definita. Naturalmente g' è un aggregato misurabile.

TEOREMA 1. - Le condizioni:

A) Per ogni numero a reale e finito è misurabile l'aggregato A_a dei punti di g' in cui $f > a$,

B) Per ogni numero a reale e finito è misurabile l'aggregato B_a dei punti di g' in cui $f \geqq a$,

C) Per ogni numero a reale e finito è misurabile l'aggregato C_a dei punti di g' in cui $f < a$,

D) Per ogni numero a reale e finito è misurabile l'aggregato D_a dei punti di g' in cui $f \leqq a$,

sono equivalenti.

Dimostrazione. - Infatti, essendo

$$A_a + D_a = B_a + C_a = g'$$

si vede che la misurabilità di uno degli aggregati A_a e D_a trascina quella dell'altro, e che quella di uno degli aggregati B_a e C_a trascina pure quella dell'altro, e che quindi le condizioni A) e D) sono equivalenti e sono pure equivalenti fra loro le B) e C).

Per dimostrare completamente il teorema basterà allora provare l'equivalenza delle condizioni A) e B).

Ora A_a è la somma degli aggregati

$$B_{a+\frac{1}{n}} \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

e quindi dalla condizione B) consegue la A).

Analogamente B_a è il prodotto degli aggregati

$$A_{a-\frac{1}{n}} \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

e quindi dalla condizione A) consegue la B).

Definizione 2. - Una funzione reale definita generalmente in un aggregato g misurabile che soddisfa ad una delle condizioni A), B), C), D), e quindi a tutte le altre, si dice che è *misurabile.*

Corollario 1. - Se $f(t)$ è una funzione misurabile, l'aggregato dei punti in cui $f = +\infty$ è misurabile.

Dimostrazione. - Infatti tale aggregato è prodotto degli aggregati

$$A_a \qquad (a = 1, 2, 3, ...)$$

i quali sono misurabili.

Corollario 2. - Se $f(t)$ è misurabile, l'aggregato dei punti in cui $f(t) = -\infty$ è misurabile.

Dimostrazione. - Analoga alla precedente.

2. - TEOREMA 2. - La somma, se è generalmente definita [1], di un numero finito di funzioni misurabili è una funzione misurabile.

Dimostrazione. - Evidentemente basta dimostrare il teorema per la somma di due funzioni.

---

[1] Si può notare che, essendo di misura nulla gli aggregati dei punti in cui le singole funzioni addende non sono definite, è di misura nulla anche la somma di questi aggregati, ossia l'aggregato g^0 dei punti in cui qualcuna delle funzioni addende non è definita. La somma delle date funzioni sarà definita certamente in quei punti in cui le funzioni addende sono tutte finite, ed in quei punti in cui le funzioni addende che hanno valore infinito lo hanno tutte dello stesso segno (nel qual caso si conviene che la somma

Siano adunque f_1 ed f_2 due funzioni misurabili. Se r è un numero razionale, indicando con H_r l'aggregato dei punti in cui

$$f_1 > r \quad \text{ed} \quad f_2 > a - r \qquad (a \text{ reale})$$

si vede che H_r è misurabile, perchè prodotto di due aggregati misurabili. La somma H degli H_r è quindi pure misurabile (Cap. I, teor. 63 e Cap. II, teor. 12).

È pure misurabile l'aggregato K_1 dei punti in cui è $f_1 = +\infty$ ed $f_2 > -\infty$ [1], e l'aggregato K_2 dei punti in cui è $f_1 > -\infty$ ed $f_2 = +\infty$, e quindi è misurabile l'aggregato

$$S = H + K_1 + K_2.$$

Nei punti di questo aggregato è $f_1 + f_2 > a$. Viceversa ogni punto in cui $f_1 + f_2 > a$ appartiene ad S.

Infatti se in un punto è $f_1 + f_2 > a$ ed è $f_1 = +\infty$, esso punto appartiene a K_1, se in un punto è $f_1 + f_2 > a$ ed è $f_2 = +\infty$, esso punto appartiene a K_2. Se infine in un punto è $f_1 + f_2 > a$ e nessuna delle funzioni ha il valore $+\infty$, entrambe le funzioni hanno in quel punto valore finito. Sarà inoltre

$$f_1 + f_2 > a + \varepsilon,$$

dove ε è un numero > 0 sufficientemente piccolo. Esisterà allora un numero razionale r per cui

$$f_1 > r > f_1 - \varepsilon,$$

da cui

$$f_1 > r \quad \text{ed} \quad f_2 + r > f_2 + (f_1 - \varepsilon) = f_1 + f_2 - \varepsilon > a$$

ossia

$$f_2 > a - r,$$

ed il punto appartiene ad H.

Si conclude che per ogni a l'aggregato A_a relativo ad $f_1 + f_2$ è misurabile.

---

abbia valore infinito e di quel segno). Nei punti rimanenti la somma non è definita. Solo se l'aggregato di questi punti ha misura nulla, la somma è generalmente definita.

(1) Il simbolo $a > -\infty$ $(a < +\infty)$ significa che a è reale finito oppure uguale a $+\infty$ $(-\infty)$.

Teorema 3. - Se f è una funzione misurabile, anche $-f$ è misurabile.

Dimostrazione. - Infatti se a è un numero reale, l'aggregato dei punti in cui $-f > a$ coincide con quello in cui $f < -a$, e quindi è un aggregato misurabile, e la $-f$ soddisfa alla condizione A).

Teorema 4. - La differenza, se è generalmente definita, di due funzioni f_1 ed f_2 misurabili è una funzione misurabile.

Dimostrazione. - Infatti $f_1 - f_2 = f_1 + (-f_2)$.

Teorema 5. - Il prodotto, se è generalmente definito [1], di un numero finito di funzioni misurabili è una funzione misurabile.

Dimostrazione. - Evidentemente basta dimostrare il teorema per il prodotto di due funzioni.

Siano f_1 ed f_2 due funzioni misurabili e dapprima supponiamo che esse siano $\geqq 0$ dovunque sono definite. Allora, se r è un numero razionale > 0, indicando con H_r l'aggregato dei punti in cui

$$f_1 > r \quad \text{ed} \quad f_2 > a : r \qquad (a \text{ reale e } > 0)$$

si vede che H_r è misurabile perchè prodotto di due aggregati misurabili.

La somma H degli H_r è quindi pure misurabile.

È pure misurabile l'aggregato K_1 dei punti in cui $f_1 = +\infty$ ed $f_2 > 0$, e l'aggregato K_2 dei punti in cui è $f_1 > 0$ ed $f_2 = +\infty$, e quindi è misurabile l'aggregato

$$S = H + K_1 + K_2.$$

Nei punti di questo aggregato è $f_1 \cdot f_2 > a$. Viceversa ogni punto in cui $f_1 \cdot f_2 > a$ appartiene ad S.

Infatti se in un punto è $f_1 \cdot f_2 > a$ ed è $f_1 = +\infty$, esso punto appartiene a K_1, se in un punto è $f_1 \cdot f_2 > a$ ed è $f_2 = +\infty$ esso punto appartiene a K_2. Se, infine, in un punto è $f_1 \cdot f_2 > a$ $(a > 0)$ ed entrambe le funzioni sono finite, sarà inoltre

$$f_1 \cdot f_2 > a \cdot \varrho$$

---

(1) È bene notare che il prodotto di più funzioni è definito in tutti i punti in cui sono definite tutte queste funzioni, eccetto quelli in cui alcune funzioni acquistano valore infinito ed altre valore nullo.

con $\varrho > 1$ e sufficientemente vicino ad 1. Esisterà allora un numero razionale r per cui

$$f_1 > r > f_1 : \varrho$$

da cui

$$f_1 > r \quad \text{ed} \quad r \cdot f_2 > f_2(f_1 : \varrho) > (f_1 \cdot f_2) : \varrho > a.$$

Dunque

$$f_2 > a : r$$

ed il punto appartiene ad H.

Si conclude che per ogni $a > 0$ (ed evidentemente per tutti i rimanenti a) l'aggregato A_a relativo ad $f_1 \cdot f_2$ è misurabile e che quindi nelle ipotesi fatte la $f_1 \cdot f_2$ è misurabile.

Avendosi poi

$$f_1 \cdot f_2 = (-f_1)(-f_2) = -[(-f_1) \cdot f_2] = -[f_1 \cdot (-f_2)]$$

si conclude che, essendo f_1 ed f_2 misurabili, la $f_1 \cdot f_2$ è misurabile tutte le volte che ognuna delle f_1 ed f_2 ha segno costante.

Supponiamo ora che le due funzioni f_1 ed f_2 misurabili siano qualunque ed indichiamo con

$$f_n' \qquad (n = 1, 2)$$

la funzione che coincide con f_n dove questa è $\geqq 0$, ed è nulla negli altri punti, e si ponga

$$f_n'' = f_n - f_n'.$$

Evidentemente le f_n' ed f_n'' sono misurabili ed hanno segno costante e poichè

$$f_1 \cdot f_2 = (f_1' + f_1'')(f_2' + f_2'') = f_1' \cdot f_2' + f_1' \cdot f_2'' + f_1'' \cdot f_2' + f_1'' \cdot f_2''$$

risulta che $f_1 \cdot f_2$ è misurabile.

TEOREMA 6. - Se f è una funzione misurabile che si annulla solo in un aggregato di misura nulla, la $1 : f$ [1] è pure misurabile.

Dimostrazione. - Infatti, se a è un numero reale, l'aggregato dei punti in cui $1 : f > a$, se $a > 0$, è quello dei punti in cui $0 < f < 1 : a$,

[1] È chiaro che in queste condizioni la $1 : f$ è generalmente definita, perchè è definita in tutti i punti in cui $f \neq 0$, purchè si intenda che dove f ha valore infinito (qualunque sia il suo segno) la $1 : f$ abbia il valore 0.

e se $a < 0$ è quello dei punti in cui $f > 0$ o $f < 1 : a$, e se $a = 0$ è quello dei punti in cui $f > 0$ ed in tutti i casi è misurabile.

Consegue il

TEOREMA 7. - Se f_1 ed f_2 sono due funzioni misurabili ed è di misura nulla l'aggregato dei punti in cui $f_2 = 0$, la $f_1 : f_2$ è misurabile.

Dimostrazione. - Infatti, $f_1 : f_2 = f_1 \cdot (1 : f_2)$.

3. - TEOREMA 8. - Se

$$f_1, \quad f_2, \quad f_3, \ldots$$

è una successione numerabile di funzioni misurabili e se esiste generalmente il $\lim\limits_{n \to \infty} f_n$, questo limite è una funzione misurabile.

Dimostrazione. - Pongasi $f = \lim\limits_{n \to \infty} f_n$.

Se a è un numero reale, l'aggregato H dei punti in cui $f > a$ è la somma di quegli aggregati $H_{n,p}$ in cui $f_r > a + \frac{1}{p}$ per ogni $r > n$, e dove p ed n sono numeri interi > 0. Infatti, se $f > a$ esiste un intero p per cui $f > a + \frac{1}{p}$, e quindi esiste un intero $n > 0$ tale che per ogni $r > n$ è $f_r > a + \frac{1}{p}$ e viceversa, quando questo avviene è $f > a$.

Ora $H_{n,p}$ è il prodotto degli aggregati $K_{r,p}$ $(r > n)$ in cui $f_r > a + \frac{1}{p}$. Ma i $K_{r,p}$ sono misurabili, dunque gli $H_{n,p}$ sono misurabili ed è misurabile anche la somma H di questi ultimi aggregati. Si conclude che la f è misurabile.

Definizione 3. - Se $\{a_n\}$ è una successione di costanti e L_n $[l_n]$ è il limite superiore [inferiore] dell'insieme numerico $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$, $\{L_n\}$ $[\{l_n\}]$ è una successione non crescente [non decrescente] e quindi tende verso un limite finito o infinito L $[l]$ che è il limite inferiore [superiore] degli L_n $[l_n]$. Diremo L $[l]$ il *limite superiore (inferiore) di indeterminazione* od anche il *massimo (minimo) limite della successione* $\{a_n\}$ e scriveremo

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, a_n = L, \qquad \underline{\lim_{n \to \infty}}\, a_n = l.$$

È facile dimostrare

1). Se $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}}\, a_n = +\infty$ $[\underline{\lim\limits_{n \to \infty}}\, a_n = -\infty]$, scelto un numero k

positivo arbitrario, comunque si fissi $n_0 > 0$, esistono dei termini della successione di indice $n > n_0$ tali che $a_n > k$ $[a_n < -k]$.

2). Se $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = -\infty$ $[\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = +\infty]$ la successione $\{a_n\}$ è regolare e si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \qquad [\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty].$$

3). Se $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = L$ $[\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = l]$ comunque si fissi il numero positivo σ è possibile determinare un indice n_0 tale che per qualunque $n > n_0$ risulti $a_n < L + \sigma$, $[l - \sigma < a_n]$ ed inoltre comunque grande si prenda l'indice n_0 esistono dei termini della successione di indice $n > n_0$ per i quali si ha $L - \sigma < a_n$ $[a_n < l + \sigma]$.

4). Se $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = A$ è anche $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ e inversamente.

Se

(1) $$f_1(t),\quad f_2(t),\quad f_3(t),\ldots$$

sono delle funzioni definite in tutto un aggregato g, le funzioni $L(t)$, $l(t)$ che in ogni punto t rappresentano il limite superiore di indeterminazione e il limite inferiore di indeterminazione della successione $\{f_n(t)\}$ prendono il nome di *limite superiore* e *limite inferiore di indeterminazione della successione* (1) [od anche *massimo e minimo limite della successione* (1)] e si scriverà

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(t) = L(t), \qquad \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(t) = l(t) \quad [1].$$

TEOREMA 9. - I limiti superiore ed inferiore di indeterminazione di una successione (1) di funzioni definite in tutto un aggregato g misurabile e tutte misurabili, sono delle funzioni (definite in tutto g) misurabili.

Dimostrazione. - Intanto $L_n(t)$ è misurabile. Infatti, se α è un numero reale, l'aggregato dei punti in cui $L_n(t) > \alpha$ è la somma di quelli in cui $f_r(t) > \alpha$ $[r > n]$, poichè se $L_n(t) > \alpha$, una almeno delle $f_r(t)$ $[r > n]$ è $> \alpha$ e viceversa. Ma, essendo le $L_n(t)$ misurabili, lo è anche il loro limite $L(t)$ (teorema precedente). In modo analogo si dimostra che $l(t)$ è misurabile.

---

[1] Cfr. Cap. V, § 1, osservazione.

4. - *Definizione* 4. - Se g è un aggregato di BOREL e se $f(t)$ è definita in tutto g, la $f(t)$ si dirà *funzione di Borel* o ***misurabile B*** se per ogni numero reale α è un aggregato di BOREL l'aggregato dei punti in cui $f > \alpha$ (o $f \geqq \alpha$, o $f < \alpha$, o $f \leqq \alpha$).

Con ragionamenti analoghi ai precedenti si dimostra che:

I). La somma di un numero finito di funzioni di BOREL in un aggregato g, se è definita in tutto l'aggregato g, è una funzione di BOREL.

II). La contraria di una funzione di BOREL è una funzione di BOREL.

III). La differenza di due funzioni di BOREL in un aggregato g, se è definita in tutto g, è una funzione di BOREL.

IV). Il prodotto di un numero finito di funzioni di BOREL in un aggregato g, se è definito in tutto g, è una funzione di BOREL.

V). Il limite di una successione di funzioni di BOREL in un aggregato g, se esiste in tutti i punti di g, è una funzione di BOREL.

VI). I limiti di indeterminazione di una successione di funzioni di BOREL sono funzioni di BOREL.

§ 2. - Le funzioni di Baire.

1. Le funzioni di BAIRE. - 2. Le funzioni di BAIRE sono funzioni di BOREL. - 3. Le funzioni di BOREL (in r) finite sono funzioni di BAIRE.

1. - *Definizione* 5. - Sia $f(t)$ una funzione reale definita in tutti i punti di r e finita (cioè tale che in ogni punto ha valore finito). Noi diremo che $f(t)$ è ***continua*** in r se in ogni punto finito t_0 si ha

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = f(t_0).$$

Secondo il BAIRE le funzioni continue di r si dicono di *classe 0*; si dicono di *classe 1* le funzioni definite e finite in r che non sono continue, ma che sono limite di una successione numerabile di funzioni continue; se poi α è un numero transfinito $< \Omega$, si chiamano funzioni di *classe* α quelle funzioni definite e *finite* in r che non appartengono a classi precedenti e che si ottengono come limite di una successione numerabile di funzioni di classi precedenti [1].

---

[1] Sulla condizione $\alpha < \Omega$ cfr. W. SIERPIŃSKI (op. cit. a p. 17), p. 212.

Definizione 6. - Tutte queste funzioni si dicono funzioni di BAIRE.

È evidente il

TEOREMA 10. - Il limite, se esiste ed è finito, di una successione numerabile di funzioni di BAIRE è una funzione di BAIRE.

TEOREMA 11. - La somma, la differenza, il prodotto di due funzioni di BAIRE sono funzioni di BAIRE.

Dimostrazione. - Intanto la somma, la differenza, il prodotto di due funzioni continue sono funzioni continue, e quindi il teorema vale se le due funzioni sono di classe 0. La dimostrazione generale si fa provando che nell'ipotesi che il teorema valga per due funzioni di classe $<\alpha$ (α essendo un numero transfinito $<\Omega$) vale anche se le due funzioni sono di classe $\leq \alpha$ [1].

2\. - TEOREMA 12. - Le funzioni di BAIRE sono funzioni di BOREL.

Dimostrazione. - Basta dimostrare che sono funzioni di BOREL le sole funzioni di classe 0, ossia le sole funzioni continue, perchè per tutte le altre funzioni di BAIRE il teorema consegue dalla prop. V del n.° 4 del paragrafo precedente.

Sia $f(t)$ una funzione continua definita in r. Dico che essa è una funzione di BOREL. Infatti, se α è un numero reale finito, l'aggregato B_α dei punti in cui $f(t) \geqq \alpha$ è chiuso, poichè ogni punto limite di B_α è un punto in cui $f(t) \geqq \alpha$. Dunque $f(t)$ è una funzione di BOREL (Cap. II, teor. 35).

3\. - Se (m, n) è un tratto finito non nullo, chiamo *raccordo destro* in (m, n) la funzione definita in (m, n) e che per ogni punto t di (m, n) ha il valore $\frac{n-t}{n-m}$ e *raccordo sinistro* in (m, n) la funzione definita in (m, n) che per ogni punto t di (m, n) ha il valore $\frac{t-m}{n-m}$.

Se $\sigma=(p, q)$ è un tratto di r e se ε è un numero >0, indico con $\varphi_{\sigma,\varepsilon}$ la funzione che in σ ha il valore 1, che, se p è finito, in $(p-\varepsilon, p)$ coincide col raccordo sinistro in questo tratto, che, se q è finito, in $(q, q+\varepsilon)$ coincide col raccordo destro in questo tratto e che nei punti rimanenti è nulla.

[1] Si applica il *principio d'induzione transfinita*. (Cfr. W. SIERPIŃSKI, (op. cit. a p. 17), p. 165.

Le $\varphi_{\sigma,\varepsilon}$ sono funzioni continue e quindi sono funzioni di BAIRE. Ne segue che il limite per $n=\infty$ delle

$$\varphi_{\sigma,\frac{1}{n}} \qquad (n=1, 2, 3,....)$$

è una funzione di BAIRE. Ma questo limite è la funzione che nei punti di σ è $=1$ e nei rimanenti ha il valore 0. Indicheremo una tale funzione con F_σ. Dunque le F_σ sono funzioni di BAIRE.

Nel seguito, se g è un aggregato di punti di r, indicherò con F_g la funzione $=1$ nei punti di g e nulla nei rimanenti.

Si ha il

TEOREMA 13. - Se g è un aggregato di BOREL la F_g è una funzione di BAIRE.

Dimostrazione. - Il teorema è già dimostrato se g è un aggregato di classe 0 (Cap. II, § 4, n.° 7). Per dimostrarlo in generale basterà dimostrare che se esso vale per gli aggregati di classe $<\alpha$ (α essendo un numero transfinito $<\Omega$) vale anche se g è di classe α. Ora siano g_1 e g_2 due aggregati di BOREL di classe $<\alpha$, le F_{g_1} ed F_{g_2} sono funzioni di BAIRE e quindi lo è il loro prodotto che è la F_γ, dove γ è il prodotto di g_1 e g_2 e quindi lo è la $F_{g_1}+F_{g_2}-F_\gamma$ che è la $F_{g_1+g_2}$, e, se g_2 è sub-aggregato di g_1, lo è la $F_{g_1}-F_{g_2}=F_{g_1-g_2}$. Si conclude che se il teorema vale per tutti i g di classe $<\alpha$, il teorema vale per le somme e prodotti di un numero finito di questi e per la differenza di due di questi.

Supponiamo ora che g sia la somma di una successione di aggregati di classe $<\alpha$

(1) $$g_1, \quad g_2, \quad g_3,....$$

e poniamo

$$\gamma_n=g_1+g_2+ .... +g_n.$$

Evidentemente è

$$F_g=\lim_{n\to\infty} F_{\gamma_n}$$

e quindi F_g è funzione di BAIRE.

Infine, se g è il prodotto di una successione di aggregati (1), è

$$F_g=\lim_{n\to\infty} F_{\delta_n}$$

dove

$$\delta_n=g_1 \cdot g_2 \cdot .... \cdot g_n,$$

ed ancora F_g è funzione di BAIRE. Così è dimostrato il teorema.

Teorema 14. - Una funzione di **Borel** definita in r e finita è una funzione di **Baire**.

Dimostrazione. - Sia f una funzione di **Borel** definita in r e finita. Sia λ un numero reale finito e maggiore di zero. Indico con n un numero intero di segno qualunque e con g_n l'aggregato dei punti in cui

$$n\lambda < f \leq (n+1)\lambda\,;$$

g_n è un aggregato di **Borel**, e quindi la F_{g_n} è una funzione di **Baire** (teor. 13), e poichè la costante $n\lambda$ come funzione continua è funzione di **Baire**, lo è anche $n\lambda F_{g_n}$, e quindi lo è

$$\sum_n n\lambda F_{g_n} = \lim_{r\to\infty} \sum_{n=-r}^{r} n\lambda F_{g_n} \qquad \text{(teor. 11 e 10).}$$

Indichiamo questa funzione con Δ_λ.

Se

$$\lambda_1,\quad \lambda_2,\quad \lambda_3,\ldots.$$

è una successione di numeri reali finiti >0 per cui $\lim_{s\to\infty} \lambda_s = 0$, è evidentemente

$$f = \lim_{s\to\infty} \Delta_{\lambda_s}$$

e quindi f è una funzione di **Baire**. c. d. d.

§ 3. - Potenza dell'aggregato delle funzioni di Baire.

1. L'aggregato delle funzioni di Baire è continuo. - 2. L'aggregato che ha per elementi gli aggregati di Borel è continuo.

1\. - Sia α un numero transfinito $< \Omega$ ed indichiamo con E_α l'aggregato delle funzioni di **Baire** di classe α, e con ν_α il numero cardinale di questo aggregato.

Si ha, per ogni α, $\nu_\alpha \leq c$.

Intanto E_0 è l'aggregato delle funzioni continue e quindi $\nu_0 = c$ (Cap. I, teor. 73). Per provare che la disuguaglianza vale per ogni α, supponiamo che, essendo β un numero transfinito, la disuguaglianza valga per gli $\alpha < \beta$, e proviamo allora che il numero cardinale della somma S_β di tutti gli E_α con $\alpha < \beta$ è c. Infatti l'insieme bene-ordinato di tutti i numeri ordinali $\alpha < \beta$ è simile all'aggregato bene-ordinato che ha per numero ordinale β, ma è $\beta < \Omega$ quindi $C(\beta) = \aleph_0$ (Cap. I, def. 30), e la somma S_β si compone quindi di un'infinità

numerabile di insiemi E_α con $\nu_\alpha \leq c$, e allora il numero cardinale di S_β (il quale contiene E_0) è c (Cap. I, teor. 70). Inoltre ogni funzione di E_β è limite di una successione numerabile di funzioni di detta somma e quindi corrisponde ad un'infinità numerabile di elementi di S_β. Ma l'aggregato di queste infinità è continuo (Cap. I, teor. 68), dunque è $\nu_\beta \leq c$.

L'aggregato delle funzioni di **Baire** è la somma di tutti gli E_α con $\alpha < \Omega$, ossia la somma di un aggregato di numero cardinale $C(\Omega) = \aleph_1 \leq c$ (Cap. I, teor. 64) di aggregati di numeri cardinali $\leq c$, quindi deve avere numero cardinale $\leq c$ (Cap. I, teor. 70), ma esso contiene un aggregato continuo (l'aggregato E_0), dunque si ha il

Teorema 15. - L'aggregato delle funzioni di **Baire** è continuo.

2\. - Ad ogni aggregato g di **Borel** corrisponde la funzione di **Baire** (teor. 13) che in g ha il valore 1 e che nei rimanenti punti è $=0$. Se ne deduce che la potenza dell'aggregato che ha per elementi gli aggregati di **Borel** è $\leq$ di quella dell'aggregato delle funzioni di **Baire**. Inoltre l'aggregato degli aggregati primitivi costituiti da un tratto nullo (che sono aggregati di **Borel**) è continuo [1], quindi:

Teorema 16. - L'aggregato che ha per elementi gli aggregati di **Borel** è continuo.

§ 4. - Variazioni di una funzione.

1. Le variazioni di una funzione finita definita in un tratto finito. - 2. Funzioni a variazione limitata. - 3. Proprietà delle variazioni delle funzioni continue. - 4. Le funzioni $P(t)$, $N(t)$, $V(t)$ relative ad una funzione $f(t)$. - 5. Caso in cui la $f(t)$ è continua. - 6. Discontinuità di una funzione a variazione limitata. - 7. La funzione dei salti. La variazione totale come limite. - 8.-9. Teoremi sulle funzioni continue. - 10. Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione continua sia a variazione limitata.

1\. - Sia $f(t)$ una funzione finita definita in un tratto finito $\sigma = (a, b)$. La differenza $f(b) - f(a)$ si chiama *incremento* di $f(t)$ relativo a σ.

[1] Perchè è continuo l'aggregato dei punti di r.

Se $f(t)$ è una funzione finita definita in un tratto non nullo σ e se B è un boreliano semplice costituito da tratti finiti e contenuto in σ, si chiama *norma totale* o, semplicemente, *norma* di $f(t)$ in B la somma dei moduli degli incrementi di $f(t)$ relativi ai tratti di B. Indichiamo con B' il boreliano (semplice) costituito dai tratti di B pei quali il relativo incremento di $f(t)$ è $\geqslant 0$, e con B'' il boreliano (semplice) formato coi rimanenti tratti di B. Le norme di $f(t)$ in B' e B'' si diranno rispettivamente la *norma positiva* e la *norma negativa* di $f(t)$ in B.

Supponiamo che σ sia finito e dividiamolo in un numero *finito* di tratti parziali, i quali, formeranno un boreliano B. Indichiamo con p, n, v la norma positiva, la norma negativa e la norma (totale) di $f(t)$ in B.

Allora, se $\sigma=(a, b)$, sarà

$$v=p+n,$$
$$p-n=f(b)-f(a).$$

Col variare di questa divisione di σ varieranno generalmente anche i numeri p, n, v ad essa relativi, ed i valori che p, n, v acquistano per le varie divisioni avranno dei limiti superiori che indicherò con P, N, V.

Definizione 7. - I numeri P, N si chiamano rispettivamente *variazione positiva* e *variazione negativa* ed il numero V si chiama *variazione totale* o, semplicemente, *variazione* della $f(t)$ in σ.

Quando si parla di variazione ci si riferisce sempre ad una funzione finita definita in tutto un tratto finito σ.

Evidentemente si ha

$$V=P+N.$$

2. - *Definizione* 8. - Se la variazione (totale) di una funzione è un numero finito, si dice che la funzione è a *variazione limitata*.

Evidentemente, se $f(t)$ è a variazione limitata in un tratto finito $\sigma=(a, b)$ tutti i numeri P, N, V ad essa relativi sono finiti e si ha la relazione

$$P-N=f(b)-f(a).$$

Si ha inoltre:

TEOREMA 17. - Se $f(t)$ è una funzione a variazione limitata in un tratto σ, lo è anche in ogni tratto parziale di σ.

TEOREMA 18. - Se c è un punto interno di $\sigma=(a, b)$, se $\sigma'=(a, c)$ e $\sigma''=(c, b)$, se P', N', V' e P'', N'', V'' sono le variazioni della $f(t)$ in σ' e σ'', si ha:

$$P=P'+P'',$$
$$N=N'+N'',$$
$$V=V'+V''.$$

3. - TEOREMA 19. - La norma (totale) di una funzione continua relativa ad una divisione qualunque di σ in un numero finito di tratti tende alla variazione (totale) col tendere a *zero* della massima lunghezza dei tratti della divisione.

Dimostrazione. - Dimostro il teorema nell'ipotesi che la variazione (totale) sia finita. Nel caso in cui sia infinita il teorema si dimostrerebbe in modo analogo.

Supponiamo, adunque, che $f(t)$ sia una funzione continua in un tratto finito $\sigma=(a, b)$ e che la sua variazione V sia finita. Sia ε un numero reale >0 piccolo a piacere. Esiste una divisione di σ, in un numero finito di tratti, per cui la norma v ad essa relativa sia $>V-\varepsilon$. Sia n il numero dei punti di divisione che indicheremo con

(2) $$a_1, a_2, \ldots, a_n.$$

È possibile trovare, a causa della continuità di $f(t)$ un segmento δ tale che in ogni tratto parziale di σ di lunghezza $<\delta$ il modulo dell'incremento della $f(t)$ ad esso relativo sia $<\varepsilon:(2n)$ (¹). Consideriamo una qualunque divisione S' di σ in un numero finito di tratti tutti di lunghezza $<\delta$ ed indichiamo con v' la norma relativa a S'. Indichiamo poi con Σ'' la divisione che si ottiene da S' aggiungendo i punti di divisione (2), ed indichiamo con v'' la norma relativa a Σ''. Sarà

$$v''\geqslant v>V-\varepsilon.$$

Inoltre, indicando con v^* ciò che rimane di v'' sopprimendo gli incrementi relativi ai tratti di Σ'' che hanno un estremo nei punti (2) si ha

$$v^*>v''-2n[\varepsilon:(2n)]=v''-\varepsilon>V-2\varepsilon,$$

(¹) Vedi il noto teorema di CANTOR sulle funzioni continue.

appunto perchè i tratti di Σ'' con termini nei punti (2) sono in numero $\leqslant 2n$ e ciascuno è di lunghezza $<\delta$.

Ma evidentemente

$$v' \geqslant v^*$$

perchè v' contiene tutti gli addendi di v^*, quindi

$$V \geqslant v' > V - 2\varepsilon.$$

Si vede così che, col tendere a zero della massima lunghezza dei tratti di una divisione di σ, la norma ad essa relativa tende alla variazione.

4. - Consideriamo un tratto $\sigma=(a, b)$ di lunghezza finita, ed in esso una funzione $f(t)$ a variazione limitata.

Se t è un punto di σ, la $f(t)$ ha in (a, t) delle variazioni finite (teor. 17)

$$P(t), \quad N(t), \quad V(t) \tag{3}$$

che risultano funzioni di t, e si avranno le relazioni

$$\begin{cases} P(t)+N(t)=V(t), \\ P(t)-N(t)=f(t)-f(a), \end{cases} \tag{4}$$

da cui

$$\begin{cases} P(t)=[V(t)+f(t)-f(a)]:2, \\ N(t)=[V(t)+f(a)-f(t)]:2. \end{cases} \tag{5}$$

Si dimostra facilmente il

TEOREMA 20. - Le tre funzioni (3) sono funzioni non decrescenti (teor. 18).

Quindi dalla

$$f(t)=[f(a)+P(t)]-N(t),$$

che deriva dalla seconda delle (4), si ha il

TEOREMA 21. - Una funzione a variazione limitata è differenza di due funzioni non decrescenti.

Inoltre si ha il

TEOREMA 22. - Una funzione non decrescente $f(t)$ è a variazione limitata e per essa si ha

$$V(t)=f(t)-f(a).$$

5. - TEOREMA 23. - Le variazioni di una funzione continua a variazione limitata sono funzioni continue.

Dimostrazione. - Evidentemente, a causa delle (5), basterà dimostrare soltanto che è continua la variazione (totale).

Sia dunque $f(t)$ una funzione continua a variazione limitata in un tratto $\sigma=(a, b)$. Combinando il classico teorema di CANTOR sulle funzioni continue ed il teor. 19 si può affermare che, essendo ε un qualunque numero reale >0, esiste un segmento δ tale che in ogni tratto parziale di σ di lunghezza $<\delta$ il modulo dell'incremento di $f(t)$ relativo ad esso sia $<\varepsilon/3$, e che la norma v relativa ad una divisione di σ in un numero finito di tratti di lunghezza $<\delta$ sia maggiore di $V-\varepsilon/3$. Naturalmente, se t è un punto interno di σ e se $v(t)$ è la norma di f relativa ad una divisione di (a, t) in un numero finito di tratti di lunghezza $<\delta$, sarà

$$v(t) > V(t) - \varepsilon/3.$$

Sia ora h un numero reale di modulo $<\delta$, dividiamo il più grande dei tratti (a, t) ed $(a, t+h)$ in un numero finito di tratti di lunghezza $<\delta$, in modo che t e $t+h$ siano gli estremi di un medesimo tratto, e indichiamo con $v(t)$ e $v(t+h)$ le norme di f in (a, t) ed $(a, t+h)$ relative a questa divisione. Si ha subito

$$\begin{gathered} |v(t+h)-v(t)|=|f(t+h)-f(t)|<\varepsilon/3, \\ V(t+h)-v(t+h)<\varepsilon/3, \\ V(t)-v(t)<\varepsilon/3 \end{gathered}$$

e se ne deduce

$$\begin{aligned} |V(t+h)-V(t)| \leqslant\ & |V(t+h)-v(t+h)| + \\ & + |v(t+h)-v(t)| + |V(t)-v(t)| < \varepsilon \end{aligned}$$

ossia, per l'arbitrarietà di ε,

$$\lim_{h \to 0} V(t+h) = V(t).$$

6. - Se $f(t)$ è una funzione finita e definita in tutto un tratto finito $\sigma=(a, b)$, e se t_0 è un punto di σ, quando $t_0 \neq a$, si indica con $f(t_0-)$ il *limite sinistro*, se esiste, di $f(t)$ per $t \to t_0$ e, quando $t_0 \neq b$, si indica con $f(t_0+)$ il *limite destro*, se esiste, di $f(t)$, per $t \to t_0$.

Evidentemente se t_0 è interno a σ e se in t_0 la $f(t)$ è continua, esistono i limiti $f(t_0-)$, $f(t_0+)$ e sono entrambi uguali a $f(t_0)$.

Se t_0 è interno a σ, se in t_0 la $f(t)$ è discontinua, ma esistono $f(t_0-)$ e $f(t_0+)$, si dice che t_0 è un *punto di discontinuità di prima specie* della $f(t)$.

Una funzione $f(t)$ definita in un tratto σ si dirà che è *regolare in un punto t_0 interno a σ* quando t_0 è un punto di continuità per $f(t)$ o se avendo $f(t)$ in t_0 un punto di discontinuità di prima specie è verificata la relazione

$$f(t_0-)+f(t_0+)=2f(t_0).$$

È noto, da teoremi elementari, che *una funzione $f(t)$ non decrescente ammette in ogni punto $t_0 \neq a$ il limite sinistro ed in ogni punto $t_0 \neq b$ il limite destro* e si ha in ogni punto t_0 interno ad (a, b)

$$f(t_0-)\leq f(t_0)\leq f(t_0+).$$

E poichè una funzione a variazione limitata è la differenza di due funzioni non decrescenti, ogni funzione a variazione limitata ammette in ogni punto $\neq a$ il limite sinistro ed in ogni punto $\neq b$ il limite destro. In altri termini si ha il

TEOREMA 24. - I punti di discontinuità di una funzione a variazione limitata sono tutti di *prima specie*.

7. - *Definizione* 9. - Se $f(t)$ è una funzione a variazione limitata nel tratto finito $\sigma=(a, b)$ e se t_0 è un suo punto di discontinuità, può essere $f(t_0-)\neq f(t_0)$, ed allora il tratto che ha per estremi i numeri $f(t_0-)$ e $f(t_0)$ si dice *lacuna sinistra*, e la differenza $f(t_0)-f(t_0-)$ si dice *salto sinistro* di $f(t)$, e, se è $f(t_0)\neq f(t_0+)$, il tratto che ha per estremi i numeri $f(t_0)$ ed $f(t_0+)$ si dice *lacuna destra* e la differenza $f(t_0+)-f(t_0)$ si dice *salto destro* di $f(t)$.

TEOREMA 25. - I punti di discontinuità di una funzione a variazione limitata di un tratto finito $\sigma=(a, b)$ sono in numero finito od una infinità numerabile.

Dimostrazione. - Poichè una funzione a variazione limitata è differenza di due funzioni non decrescenti, basta dimostrare il teorema per le funzioni non decrescenti. Sia $f(t)$ una funzione non decrescente, se $a'=f(a)$ e $b'=f(b)$, le lacune di $f(t)$ sono tratti parziali del tratto (a', b') a due a due distinti, ed allora, per il teor. 1 del Cap. II, queste lacune sono in numero finito od una infinità numerabile. Si conclude che anche i punti di discontinuità di $f(t)$ sono in numero finito od una infinità numerabile.

Dalle considerazioni precedenti consegue subito che *la serie avente per termini i salti di una funzione non decrescente è convergente*, e che quindi *è convergente assolutamente la serie dei salti di una qualunque funzione a variazione limitata.*

Definizione 10. - Se $f(t)$ è una funzione a variazione limitata in un tratto finito $\sigma=(a, b)$ e se $s(t)$ è la somma dei salti relativi ai punti di discontinuità che cadono in (a, t), escluso l'eventuale salto destro di $f(t)$ in t, la funzione $s(t)$ si chiama la *funzione dei salti* della $f(t)$.

Si vede facilmente che $s(t)$ è a variazione limitata e che

$$\varphi(t)=f(t)-s(t)$$

è una funzione continua pure a variazione limitata. E si ha il

TEOREMA 26. - Ogni funzione a variazione limitata vale la somma della sua funzione dei salti e di una funzione continua a variazione limitata.

Indichiamo con D_m una divisione del tratto σ in m tratti non nulli e con $\delta(D_m)$ la massima ampiezza dei D_m. Ragionando come nel teorema 19 possiamo dimostrare il seguente

TEOREMA 27. - Sia $f(t)$ una funzione a variazione limitata nel tratto $\sigma=(a, b)$ e $\{D_m\}$ una successione di divisioni del tratto σ la quale goda le seguenti proprietà:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(D_n)=0$;

b) fissato un punto t_0 di discontinuità di $f(t)$, esiste un intero m_0 tale che per $m\geqslant m_0$ il punto t_0 appartiene come estremo ad uno dei tratti della divisione D_m;

allora se V è la variazione totale di $f(t)$ in σ e v_m indica la norma di $f(t)$ relativa alla divisione D_m si ha

$$V=\lim_{m\to\infty} v_m.$$

Dimostrazione. - Sia $\varepsilon>0$ e i punti

$$a=a_0<a_1<a_2<\dots<a_{n-1}<a_n=b \tag{1}$$

individuino una divisione D di σ per cui la norma v di $f(t)$ relativa a D sia $> V-\varepsilon$, e fra i punti (1)

(2) $$c_1, \quad c_2, \ldots, \quad c_r$$

siano punti di continuità di $f(t)$

(3) $$d_1, \quad d_2, \ldots, \quad d_s,$$

$(r+s=n+1)$ punti di discontinuità.

Per l'ipotesi $b)$ è possibile trovare un intero m_0 tale che per $m \geqslant m_0$ i punti (3) siano tutti estremi di tratti di D_m; inoltre se con δ_0 indichiamo un numero positivo tale che per ogni intervallo di ampiezza non superiore a δ_0, che contenga nel suo interno uno dei punti (2), l'oscillazione di $f(t)$ sia $<\varepsilon/2r$, possiamo crescere, per $a)$, se occorre m_0, in modo che per $m \geqslant m_0$ sia anche $\delta(D_m) \leqslant \delta_0$.

Se indichiamo con v'' la norma di $f(t)$ relativa alla divisione D'' ottenuta da D_m aggiungendo ai suoi punti di divisione i punti (2), la D'' ha tra gli estremi dei suoi tratti tutti i punti della divisione D e perciò

$$v_m > v'' - 2r(\varepsilon/2r) = v'' - \varepsilon; \qquad v'' \geqslant v > V - \varepsilon$$

quindi

$$v_m > v'' - \varepsilon > V - 2\varepsilon$$
$$V \geqslant v_m > V - 2\varepsilon \quad \text{per} \quad m \geqslant m_0$$

e il teorema è dimostrato.

8. - Sia $y=f(t)$ una funzione finita, definita in tutto un tratto finito $\sigma=(a, b)$ e continua in tutti i punti di σ. Siano c e d il minimo ed il massimo di $f(t)$ in σ. I valori di $y=f(t)$ cadono tutti nel tratto $\theta=(c, d)$ ed ogni valore che cade in θ è assunto da $y=f(t)$ almeno una volta. Così ad ogni punto di σ corrisponde uno ed un sol punto di θ, e ad ogni punto di θ deve corrispondere almeno un punto di σ, ma ne possono corrispondere parecchi ed anche infiniti.

Indico con G_∞ l'aggregato dei punti di θ cui corrispondono infiniti punti di σ, e, per ogni numero interno $n>0$, indico con G_n l'aggregato dei punti di θ cui corrispondono esattamente n punti di σ. Gli aggregati

$$G_\infty, \quad G_1, \quad G_2, \quad G_3, \ldots, \quad G_n, \ldots$$

sono a due a due distinti ed hanno per somma l'aggregato dei punti di θ.

Per ogni numero intero $n>0$, indico con Δ_n l'aggregato dei punti di θ cui corrispondono almeno n punti di σ, o, in altri termini, pongo

$$\Delta_n = G_\infty + G_n + G_{n+1} + G_{n+2} + \ldots.$$

Risulta

(1) $$G_n = \Delta_n - \Delta_{n+1},$$

(2) $$G_\infty = \Delta_n - (G_n + G_{n+1} + G_{n+2} + \ldots).$$

Definizione 11. - Chiamo *eccezionale* ogni punto di G_∞ i cui corrispondenti in σ formano un aggregato contenente tutti i punti di un tratto non nullo.

TEOREMA 28. - L'aggregato dei punti eccezionali ha un numero cardinale $\leq \aleph_0$.

Dimostrazione. - Sia p un punto eccezionale e sia K l'aggregato dei punti di σ che corrispondono a p. Un punto q di K lo dirò interno a K se è interno ad un tratto non nullo i cui punti appartengono tutti a K. Naturalmente K contiene punti interni. Se q è un punto interno a K, indichiamo con q' il limite inferiore dei numeri $x \leqslant q$ per cui tutti i punti di (x, q) appartengono a K, e con q'' il limite superiore dei numeri $z \geqslant q$ per cui tutti i punti di (q, z) appartengono a K. A causa della continuità della $y=f(t)$ anche q' e q'' appartengono a K. Inoltre (q', q'') è un tratto non nullo. Questo tratto ha la proprietà che tutti i suoi punti appartengono a K, ma che qualunque tratto maggiore che lo contiene possiede dei punti che non appartengono a K. Un tratto come (q', q'') si può dire associato al punto eccezionale p. È evidente che due tratti associati ad un medesimo punto eccezionale p o coincidono o sono distinti. Si ha inoltre che due tratti associati a due punti eccezionali diversi sono distinti (se avessero, infatti, un punto comune, a quel puntò di σ corrisponderebbero due punti diversi di θ). Consegue che i segmenti associati ai vari punti eccezionali sono in numero finito o in una infinità numerabile (Cap. II, teor. 1) e quindi che i punti eccezionali sono in numero finito o in una infinità numerabile. c. d. d.

Indichiamo con E l'aggregato costituito dai punti eccezionali, e da $f(a)$ e da $f(b)$. Evidentemente anche il numero cardinale di E è $\leq \aleph_0$.

Teorema 29. - Gli aggregati Δ_n sono misurabili.

Dimostrazione. - Sia p un punto di Δ_n che non appartenga ad E. A p corrispondono in (a, b) almeno n punti,

$$a_1 < a_2 < .... < a_n,$$

tutti interni ad (a, b), perchè p non appartenendo ad E non può corrispondere ad alcuno degli estremi di (a, b).

Sia h un numero >0, ma minore di ciascuno dei numeri

$$a_1 - a, \quad (a_2 - a_1)/2, \quad (a_3 - a_2)/2,...., \quad (a_n - a_{n-1})/2, \quad b - a_n.$$

Consideriamo i $2n$ tratti:

$$(3) \qquad \begin{cases} (a_1 - h, a_1), & (a_2 - h, a_2),...., & (a_n - h, a_n), \\ (a_1, a_1 + h), & (a_2, a_2 + h),...., & (a_n, a_n + h), \end{cases}$$

che sono evidentemente a due a due distinti. In ciascuno di questi o il massimo o il minimo di $f(t)$ è diverso da p, perchè p non è punto eccezionale e quindi non può corrispondere a tutti i punti di un tale intervallo. Vi sono dunque almeno n tratti (3) in cui i massimi di $f(t)$ sono diversi da p, od almeno n tratti (3) in cui i minimi di $f(t)$ sono diversi da p.

Supponiamo, per esempio, che vi siano n tratti (3) in cui i massimi di $f(t)$ siano diversi da p, e quindi maggiori di p, ed indichiamo con p' il più piccolo di questi massimi. È certo $p' > p$. Per la continuità di $y = f(t)$, i valori di y che soddisfano alle limitazioni

$$p \leq y \leq p'$$

sono assunti dalla $f(t)$ in ciascuno di detti tratti almeno una volta e quindi sono punti di Δ_n. Allora ogni punto di Δ_n che non appartiene ad E, appartiene o come punto interno o come estremo ad un tratto di (c, d) che appartiene completamente a Δ_n. Associamo ad ogni p di Δ_n che non appartiene ad E il massimo tratto di θ contenente p come punto interno o come estremo e di cui almeno tutti i punti interni appartengono a Δ_n. Due qualunque tratti così ottenuti o coincidono o sono distinti. I tratti diversi di tale specie sono adunque (Cap. II, teor. 1) un numero finito o una infinità numerabile. Essi formano adunque un boreliano B (Cap. II, def. 5). Sia γ l'aggregato dei punti interni a B. Tutti i punti di γ appartengono a Δ_n. I punti di $\Delta_n - \gamma$ o sono estremi di tratti di B o sono punti di E e quindi sono in numero finito o in una infinità

numerabile. Ne consegue che Δ_n è un aggregato misurabile (anzi misurabile B) (Cap. II, teor. 31).

Corollario. - Gli aggregati G_n e G_∞ sono misurabili (misurabili B).

Consegue dalle (1) e (2).

9. - Abbiamo visto che se p è un punto di Δ_n che non appartenga ad E, esistono, in σ, n tratti distinti non nulli

$$(4) \qquad (a_i, b_i) \qquad (i = 1, 2,...., n)$$

in ciascuno dei quali la $y = f(t)$ acquista almeno una volta ciascuno dei valori di un determinato tratto *non nullo* (p_0, p_1) contenente p (¹).

Ogni tratto (q_0, q_1) contenuto in (p_0, p_1) soddisfa pure alla condizione che in ciascuno dei tratti (4) la $y = f(t)$ acquista ogni valore del tratto (q_0, q_1) almeno una volta. Diremo che un tratto come (q_0, q_1) è *congiunto* a Δ_n. Dunque, un tratto congiunto a Δ_n è un tratto non nullo (q_0, q_1) contenuto in θ tale che in σ esistono n tratti distinti (4) in ciascuno dei quali è assunto almeno una volta da $y = f(t)$ ogni valore del tratto (q_0, q_1) estremi q_0 e q_1 compresi.

Evidentemente *ogni punto di Δ_n che non appartiene ad E appartiene, almeno come estremo, ad un tratto congiunto a Δ_n.*

Sia (q_0, q_1) un tratto congiunto a Δ_n. Siano inoltre (4) n tratti distinti di σ in ciascuno dei quali la $y = f(t)$ acquista almeno una volta ciascuno dei valori del tratto (q_0, q_1) estremi compresi.

Consideriamo uno qualunque dei tratti (4). Sia desso (a_i, b_i). Esiste in (a_i, b_i) un punto $\bar{a}_i$ in cui la $y = f(t)$ ha il valore q_0. In una almeno delle parti $(a_i, \bar{a}_i)$, $(\bar{a}_i, b_i)$ la $y = f(t)$ acquista il valore q_1. Ciò avvenga, per esempio, in $(\bar{a}_i, b_i)$. Sia β_i il primo punto di $(\bar{a}_i, b_i)$ in cui la $y = f(t)$ acquista il valore q_1. Un tal primo punto esiste a causa della continuità della $f(t)$ ed è diverso da $\bar{a}_i$ e quindi maggiore di $\bar{a}_i$. Sia α_i l'ultimo punto di $(\bar{a}_i, \beta_i)$ in cui $y = f(t)$ acquista il valore q_0. Anche questo esiste per la continuità di $f(t)$ ed è minore di β_i.

(¹) Infatti abbiamo visto esistere n tratti (3) nei quali la $y = f(t)$ acquista tutti i valori soddisfacenti alle limitazioni $p \leq y \leq p'$ o alle $p \geq y \geq p'$ con p' numero conveniente diverso da p.

Il tratto (α_i, β_i) ha la proprietà che in nessun punto interno la $f(t)$ acquista i valori q_0, q_1, mentre $f(\alpha_i)=q_0$ ed $f(\beta_i)=q_1$. Allora (α_i, β_i), che fa parte di (a_i, b_i), è tale che in esso la $f(t)$ acquista ogni valore di (q_0, q_1), estremi compresi, almeno una volta ma in esso non acquista alcun valore esterno al tratto (q_0, q_1).

Consegue che ad ogni tratto (q_0, q_1) congiunto a Δ_n si possono associare n tratti distinti

(5) $$(\alpha_i, \beta_i) \qquad (i=1, 2,...., n)$$

di σ, in ciascuno dei quali la $f(t)$ acquista almeno una volta ogni valore di (q_0, q_1), ma non alcun valore esterno a (q_0, q_1), ed acquista i valori q_0 e q_1 soltanto negli estremi.

Dei tratti come (5) si diranno *tratti puri associati a* (q_0, q_1). Dunque *per ogni tratto congiunto a* Δ_n *esistono* n *tratti puri associati ad esso e a due a due distinti.*

TEOREMA 30. - Tratti puri associati a tratti distinti congiunti a Δ_n sono pure distinti.

Dimostrazione. - Infatti se (p_0, p_1), (q_0, q_1) sono due tratti distinti congiunti a Δ_n, se (α, β) è un tratto puro associato a (p_0, p_1) e se (γ, δ) è un tratto puro associato a (q_0, q_1), non può darsi che i tratti (α, β), (γ, δ) abbiano un punto interno in comune, perchè in esso la $f(t)$ dovrebbe avere un valore che sarebbe interno a ciascuno dei tratti (p_0, p_1) e (q_0, q_1), e questi tratti sono distinti come si è supposto.

Indichiamo con Δ_n' l'aggregato dei punti di Δ_n che non appartengono ad E e con $\overline{K}$ l'aggregato dei tratti congiunti a Δ_n. Ogni punto di Δ_n' appartiene ad un tratto di $\overline{K}$. Poichè E è di misura nulla, Δ_n' ha la stessa misura m_n di Δ_n.

Qualunque sia il numero reale $\varepsilon>0$ esisterà, allora, un numero finito di porzioni a due a due distinte di tratti di $\overline{K}$ le lunghezze delle quali abbiano una somma $>m_n-\varepsilon$ (Cap. II, § 4, corollario del teorema geometrico). Indico con $\overline{K}'$ l'insieme di queste porzioni. Ogni tratto appartenente a $\overline{K}'$ è pure un tratto congiunto a Δ_n. Siano

(6) $$(p_i, q_i) \qquad (i=1, 2,...., s)$$

i tratti di $\overline{K}'$. A ciascuno di questi noi possiamo associare, in σ, n tratti puri distinti.

Gli ns tratti che così si ottengono sono ancora a due a due distinti. Siano dessi

(7) $$(\alpha_i, \beta_i) \qquad (i=1, 2,...., ns).$$

È evidente che

$$\sum_{1}^{ns}{}_i\, |f(\beta_i)-f(\alpha_i)|=n\sum_{1}^{s}{}_i\, |q_i-p_i|>n(m_n-\varepsilon).$$

Questo prova che la variazione V di $f(t)$ in σ è $>n(m_n-\varepsilon)$ qualunque sia ε, e quindi $\geqq n\cdot m_n$.

10. - Se la variazione V di $y=f(t)$ in σ è finita, dalla relazione

$$V\geqq n\cdot m_n$$

risulta

$$m_n\leqq V/n,$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} m_n=0.$$

Ma G_∞ è contenuto in ogni Δ_n [vedi (2)] e quindi si ha il

TEOREMA 31. - Se $y=f(t)$ è una funzione continua e a variazione limitata, la misura di G_∞ è nulla.

Si potrebbe sospettare che la condizione precedente (la misura di G_∞ è nulla) debba essere soddisfatta da tutte le funzioni continue, invece esistono funzioni continue per cui la misura di G_∞ è diversa da zero.

Tale è, per esempio, la $y=f(t)$ definita nel tratto $(0, 1)$ che per ogni punto

(1) $$t=\sum_{1}^{\infty}{}_n\, a_n/3^n,$$

dove le a_n hanno solo i valori 0 e 2, ha il valore

$$f(t)=\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}{}_n\, a_{2n-1}/2^n$$

e che nei punti rimanenti è definita nel modo seguente:

I punti in cui è fin qui definita la $f(t)$ formano un aggregato Z. Questo aggregato è perfetto [1].

[1] Infatti, se t è un punto di Z, o esso ha nella forma (1) infinite cifre $=2$ ed allora è punto limite dei punti di Z

$$t_s=\sum_{1}^{s}{}_n\, a_n/3^n \qquad (s=1, 2,....),$$

Se t è un punto di σ non appartenente a Z, t è interno ad un tratto (t_0, t_1) del boreliano associato a Z. I punti t_0 e t_1 appartengono a Z (Cap. II, def. 22). Per tale t noi poniamo

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}(t - t_0).$$

La funzione così definita è continua. Basta evidentemente dimostrare ciò per i punti t che appartengono a Z.

Ora, se t appartiene a Z e se t' è un altro punto di Z, scrivendo t e t' nella forma (1), ed essendo m il più grande numero intero per cui le prime $2m$ cifre di t e di t' coincidono, si vede che m diventerà grande quanto si vuole purchè si prenda t' abbastanza vicino a t. Allora $f(t)$ ed $f(t_0)$ hanno le prime m cifre uguali e quindi differiscono di abbastanza poco.

Dunque, come dicevo, la $f(t)$ sopra definita è continua. Essa assume ogni valore del tratto $(0, 1)$ infinite volte, perchè ogni numero y di $(0, 1)$ si può mettere, almeno in un modo [1], sotto la forma

$$y = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}/2^n$$

o esso ha solo un numero finito di cifre $=2$ ed a_s è l'ultima di queste cifre ed allora è punto limite dei punti di Z

$$t_p = t + 2/3^p \qquad (p = s+1, s+2, \ldots).$$

Inoltre, se t è un punto qualunque di $(0, 1)$, esso si può scrivere nel sistema ternario sotto la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n/3^n$$

dove le β_n hanno solo i valori 0, 1, 2, e se β_s è la sua prima cifra $=1$, e tutte le seguenti sono $=2$ allora è anche

$$t = \beta_1/3 + \beta_2/3^2 + \ldots + \beta_{s-1}/3^{s-1} + 2/3^s$$

e t appartiene a Z, o non tutte le cifre che seguono β_s sono uguali a 2, ed allora ogni numero di Z differisce da t per non meno di t_0 o di $1/3^s - t_0$, dove

$$t_0 = \beta_{s+1}/3^{s+1} + \beta_{s+2}/3^{s+2} + \ldots$$

e quindi t non può essere punto limite di Z. Dunque ogni punto limite di Z appartiene a Z. Ed infine Z è perfetto.

[1] Vi sono numeri che possono essere messi in due modi sotto la forma

$$\sum_n \beta_n/2^n$$

dove le a_n hanno solo i valori 0 e 2, e quindi corrisponde a tutti i punti di Z che si ottengono da

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n/3^n$$

mettendo per

$$a_1, \quad a_3, \quad a_5, \ldots$$

i valori che figurano in y e per

$$a_2, \quad a_4, \quad a_6, \ldots$$

un sistema qualunque di valori 0 e 2.

Per la $f(t)$ che noi studiamo l'aggregato G_∞ è costituito da tutti i punti del tratto $(0, 1)$ e ha quindi misura non nulla.

Abbiamo visto che *affinchè una funzione $y = f(t)$ continua, definita in un tratto finito $\sigma = (a, b)$, sia a variazione limitata è necessario che la misura dell'aggregato G_∞ ad essa relativo sia nulla.*

Questa condizione *non è sufficiente.*

Infatti, se indichiamo con T_1 l'aggregato dei punti

$$1, \quad 1/3, \quad 1/5, \ldots, \quad 1/(2n+1), \ldots$$

con T_2 l'aggregato dei punti

$$1/2, \quad 1/4, \quad 1/6, \ldots, \quad 1/2n, \ldots$$

e poniamo $T = T_1 + T_2$, se noi poniamo, per ogni punto t di T_1, $f(t) = 0$ e, per ogni punto t di T_2, $f(t) = t$ e, per ogni altro punto di $(0, 1)$,

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}(t - t_0),$$

essendo t_0 il maggiore dei valori di T che sono $< t$, e t_1 il minore dei valori di T che sono $> t$, se infine poniamo $f(0) = 0$, vediamo che la $f(t)$ così definita in $(0, 1)$ è una funzione continua per

con le β_n uguali a 0 o ad 1, e sono i numeri che, nel sistema binario di numerazione, si possono scrivere anche con un numero finito di cifre. Così $1/2$ si può scrivere anche

$$\sum_{n=2}^{\infty} 1/2^n.$$

cui G_∞ è costituito dal solo punto $y=0$ e quindi è di misura nulla. Ma questa $f(t)$ non è a variazione limitata [1].

TEOREMA 32. - Se $y=f(t)$ è una funzione continua in un tratto finito $\sigma=(a, b)$, condizione necessaria e sufficiente perchè sia a variazione limitata è che la serie

$$\sum_{1}^{\infty}{}_n\, m_n,$$

dove m_n indica la misura dell'aggregato Δ_n, sia convergente. In tutti i casi la variazione totale assoluta di $f(t)$ è uguale alla somma della serie

$$\sum_{1}^{\infty}{}_n\, m_n.$$

Dimostrazione. - Sia ε un numero reale >0. Per quanto si è visto (teor. 30) noi possiamo trovare per ogni n un sistema Ω_n di un numero finito di tratti congiunti a Δ_n a due a due distinti le cui lunghezze abbiano una somma $>m_n-\varepsilon/2^n$.

Consideriamo i sistemi

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \ldots, \quad \Omega_s.$$

I tratti di Ω_1 saranno in generale divisi dagli estremi dei tratti di $\Omega_2, \Omega_3, \ldots, \Omega_s$ in un numero finito di tratti congiunti essi pure a Δ_1, i quali formeranno un nuovo sistema Ω_1' di tratti congiunti a Δ_1. Analogamente i tratti di Ω_2 saranno divisi dagli estremi dei tratti di $\Omega_1, \Omega_3, \ldots, \Omega_s$ in un numero finito di tratti più piccoli che formeranno un nuovo sistema Ω_2' di tratti congiunti a Δ_2 e così via.

Evidentemente i tratti che appartengono ad un medesimo dei sistemi

$$(2) \qquad \Omega_1', \quad \Omega_2', \ldots, \quad \Omega_s'$$

sono distinti nel senso che due qualunque di essi non hanno punti

[1] Infatti la norma di $f(t)$ relativa al boreliano B formato dai tratti

$$\left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right), \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right), \left(\frac{1}{2n-1}, \frac{1}{2n-2}\right), \left(\frac{1}{2n-2}, \frac{1}{2n-3}\right), \ldots, \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

è uguale a

$$\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n-2}+\frac{1}{2n-2}+\ldots+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\sum_{1}^{n}{}_m \frac{1}{m}.$$

interni comuni, e due tratti che appartengono a due diversi dei sistemi (2) o sono distinti o coincidono, potendo un tratto appartenere a due o più sistemi (2).

Indichiamo con Ω_1'' l'insieme dei tratti di Ω_1' che non appartengono ad alcuno dei tratti dei sistemi $\Omega_2', \Omega_3', \ldots, \Omega_s'$. Indichiamo con Ω_2'' l'insieme dei tratti di Ω_2' che non appartengono ad alcuno dei sistemi $\Omega_3', \ldots, \Omega_s'$ e così via di seguito.

Evidentemente ogni tratto che appartiene ad uno dei sistemi (2) appartiene ad uno ed uno solo dei sistemi

$$\Omega_1'', \quad \Omega_2'', \ldots, \quad \Omega_s''$$

e quindi il sistema

$$\Omega_1''+\Omega_2''+\ldots+\Omega_s''$$

è formato da tratti a due a due distinti. Poniamo

$$H_n=\Omega_n''+\Omega_{n+1}''+\ldots+\Omega_s'' \qquad (n=1, 2, \ldots, s).$$

Evidentemente la somma delle lunghezze dei tratti di H_n è $\geqslant$ della somma delle lunghezze dei tratti di Ω_n (poichè contiene almeno tutti i tratti di Ω_n') e quindi è $\geqslant m_n-\varepsilon/2^n$.

I tratti di Ω_n'' sono congiunti a Δ_n, e quindi è possibile associare a ciascuno di essi n tratti puri di σ a due a due distinti. Si ottiene così un sistema ω_n di tratti di σ a due a due distinti. Se δ è un tratto di Ω_n'' e se (α, β) è uno degli n tratti puri associati a δ, è

$$|f(\beta)-f(\alpha)| = \text{lunghezza di } \delta,$$

e quindi, indicando con l_n la somma delle lunghezze dei tratti di Ω_n'', si ha

$$\sum_{\omega_n} |f(\beta)-f(\alpha)| = n l_n,$$

dove il 1° membro indica la sommatoria estesa a tutti i termini

$$|f(\beta)-f(\alpha)|$$

corrispondenti ai vari tratti di ω_n. Consegue che è

$$(3) \qquad \sum_{1}^{s}{}_n \sum_{\omega_n} |f(\beta)-f(\alpha)| = \sum_{1}^{s}{}_n\, n l_n = \sum_{1}^{s}{}_n \left[\sum_{n}^{s}{}_i\, l_i\right].$$

Ma $\sum_{n}^{s}{}_i\, l_i$ è uguale alla somma delle lunghezze dei tratti di H_n e quindi è $\geqslant m_n - \varepsilon/2^n$, inoltre il primo membro di (3) è $\leqslant$ della variazione V di $f(t)$ in σ, dunque

$$V > \sum_{1}^{s}{}_n (m_n - \varepsilon/2^n) > \sum_{1}^{s}{}_n m_n - \varepsilon,$$

e poichè ε può essere scelto piccolo a piacere

$$V \geqslant \sum_{1}^{s}{}_n m_n.$$

Questa limitazione vale qualunque sia l'intero s, dunque se V è finito la serie

$$\sum_{1}^{\infty}{}_n m_n$$

deve essere convergente.

La disuguaglianza precedente ci dice che sarà sempre

$$V \geqslant \sum_{1}^{\infty}{}_n m_n. \tag{4}$$

È dunque intanto provato che la convergenza della serie

$$\sum_{1}^{\infty}{}_n m_n$$

è necessaria perchè $f(t)$ sia a variazione limitata. Dico ora che essa è anche sufficiente.

Infatti, qualunque sia V (finito o infinito) e qualunque sia il numero reale M finito e $< V$, è possibile dividere σ in parti in modo che la norma di $f(t)$ relativa a questa divisione sia $> M$.

Indicando con

$$a_1, \quad a_2, \ldots, \quad a_{n-1}$$

i punti di divisione, e ponendo

$$a_0 = a \quad \text{e} \quad a_n = b$$

si ha

$$\sum_{1}^{n}{}_i \left| f(a_i) - f(a_{i-1}) \right| > M.$$

Allora, posto

$$p_i = f(a_i) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

si considerino i tratti

$$\theta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

che hanno per estremi i punti p_{i-1} e p_i del tratto $\theta = (c, d)$ dove c

e d sono il minimo e il massimo di $f(t)$ in σ. Questi tratti possono essere distinti od in parte sovrapposti. In generale qualcuno di questi tratti risulterà diviso dagli estremi degli altri in parti più piccole. Si otterranno così dei tratti distinti

$$\theta_i' \qquad (i = 1, 2, \ldots, s \geqslant n) \tag{6}$$

in numero finito, tali che ogni tratto (5) risulterà la somma di alcuni di essi. Un tratto (6) può appartenere ad uno o a più tratti (5).

Indico con T_s l'insieme dei tratti (6) che appartengono ad almeno s tratti (5). Naturalmente T_1 è l'insieme di tutti i tratti (6). È evidente poi che la somma τ_s delle lunghezze dei tratti di T_s è $\leqslant m_s$, perchè tutti i punti interni dei tratti di T_s appartengono a $\varDelta_s$ [un valore interno ad un tratto (6) appartenente ad s tratti (5) è assunto da $f(t)$ almeno una volta in ciascuno dei corrispondenti tratti (a_{i-1}, a_i)]. Ma si ha

$$\sum_{1}^{n}{}_i \left| f(a_i) - f(a_{i-1}) \right| = \sum \left| p_i - p_{i-1} \right| = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \ldots$$
$$\leqslant \sum_{1}^{\infty}{}_i m_i$$

e inoltre

$$M < \sum_{1}^{n}{}_i \left| f(a_i) - f(a_{i-1}) \right|,$$

dunque

$$M < \sum_{1}^{\infty}{}_i m_i.$$

Ciò per qualunque numero $M < V$, quindi

$$V \leqslant \sum_{1}^{\infty}{}_i m_i. \tag{7}$$

Consegue che, se V è infinita, la serie $\sum_{1}^{\infty}{}_i m_i$ è divergente. Così è provato che se la serie $\sum_{1}^{\infty}{}_i m_i$ converge la $f(t)$ è a variazione limitata.

Dalle limitazioni (4) e (7) consegue poi

$$V = \sum_{1}^{\infty}{}_i m_i$$

ed il teorema è dimostrato completamente.

Indicando con m_n' la misura dell'aggregato G_n e supposto che G_∞ abbia misura nulla si ha, per la (2) del precedente n.° 8,

$$m_n = \sum_n^\infty {}_i\, m_i'$$

e quindi

$$\sum_1^\infty {}_n\, m_n = \sum_1^\infty {}_n\, n m_n'$$

e si può concludere col

TEOREMA 33. - Condizione necessaria e sufficiente perchè la $y=f(t)$ continua in un tratto finito sia ivi a variazione limitata è che G_∞ abbia misura nulla e che la serie $\sum_1^\infty {}_n\, n m_n'$ converga. Quando queste condizioni sono soddisfatte la variazione di $f(t)$ è uguale alla somma della serie $\sum_1^\infty {}_n\, n m_n'$.

§ 5. - Funzioni assolutamente continue.

1. Funzioni assolutamente continue e loro proprietà. - 2. Esempio di funzioni continue e a variazione limitata non assolutamente continue. Corrispondenza di CANTOR (modulo g). - 3. Le variazioni totali di una funzione assolutamente continua. - 4. Operazioni sulle funzioni assolutamente continue.

1. - *Definizione* 12. - Se $f(t)$ è una funzione finita in tutti i punti finiti di un tratto $\sigma=(a,b)$, si dirà che $f(t)$ è *assolutamente continua* in σ se, per ogni numero reale $\varepsilon>0$, esiste un numero reale $\mu>0$ tale che per ogni boreliano semplice B contenuto in σ e di lunghezza $<\mu$, la norma di $f(t)$ in B risulti $<\varepsilon$ (1). Consegue che, se t_0 è un punto finito di σ, per ogni t di σ tale che $|t-t_0|<\mu$ è $|f(t)-f(t_0)|<\varepsilon$, e quindi vale il

TEOREMA 34. - Ogni funzione assolutamente continua in un tratto σ è continua in ogni punto finito di σ.

(1) La denominazione di *funzione assolutamente continua* e il primo studio di queste funzioni è del VITALI. (Atti R. Acc. delle Scienze di Torino, **40**, **1905**). (Nota di G. S.).

TEOREMA 35. - Una funzione assolutamente continua in un tratto finito σ è a variazione limitata.

Dimostrazione. - La dimostrazione si fa per assurdo. Se la funzione non fosse a variazione limitata, per ogni numero $\mu>0$ si potrebbe trovare un tratto di lunghezza $<\mu$ in cui la variazione totale è infinita, e allora esisterebbe in tal tratto un boreliano semplice B (di lunghezza evidentemente $<\mu$) tale che la norma della funzione in B sia grande quanto si vuole (teor. 19), e la funzione non sarebbe assolutamente continua.

2. - Sia g un aggregato perfetto contenuto in un tratto finito e non contenente alcun tratto finito. Consideriamo poi un aggregato numerabile γ di punti interni al tratto $(0,1)$ denso dappertutto in $(0,1)$ e la corrispondenza biunivoca descritta nella dimostrazione del teor. 28 del Cap. II fra l'aggregato g' dei punti interni a g e l'aggregato γ' dei punti interni a $(0,1)$ e non appartenenti a γ. Questa corrispondenza, che indicherò con C, deriva, come si sa, da una particolare corrispondenza biunivoca, che indicherò con C', fra i tratti finiti del boreliano B associato a g e i punti di γ.

Sia a il limite inferiore e sia b il limite superiore dei punti di g.

Nel seguito noi chiameremo *corrispondenza di Cantor* (modulo g) la corrispondenza univoca fra i punti di (a,b) e quelli di $(0,1)$ che fa corrispondere ad ogni punto di g' il punto di γ' che gli corrisponde in C, ad ogni altro punto t interno ad (a,b) il punto di γ che corrisponde in C' al tratto finito di B cui appartiene il punto t, ed infine fa corrispondere al punto a lo 0 ed al punto b il punto 1.

Se indichiamo con y il punto di $(0,1)$ che in tale corrispondenza corrisponde ad un punto t di (a,b) la y risulta funzione di t. Sia dessa $f(t)$.

La $f(t)$ è evidentemente una funzione continua. Inoltre è non decrescente e quindi è a variazione limitata.

Supponiamo ora che g sia di misura nulla (Cap. II, teor. 29). In tal caso la $f(t)$ non può essere assolutamente continua.

Infatti, per quanto piccolo sia un numero reale $\mu>0$, io posso trovare una copertura semplice B' di g contenuta in (a,b) di lunghezza $<\mu$. Ma la norma di $f(t)$ in B' è $=1$.

Si conclude che *una funzione può essere continua e a variazione limitata senza essere ~~assolutamente~~ continua* [1].

3. - TEOREMA 36. - Le variazioni di una funzione assolutamente continua sono assolutamente continue.

Dimostrazione. - Dimostrerò il teorema per la variazione positiva. Allo stesso modo si potrà dimostrare per quella negativa. Consegue allora che è vero per la variazione totale.

Sia $f(t)$ una funzione assolutamente continua e sia $P(t)$ la sua variazione positiva. Sia ε un numero reale >0 e sia μ un numero reale tale che per ogni boreliano semplice B di lunghezza $<\mu$ la norma di $f(t)$ in B risulti $<\varepsilon$.

Siano

$$\sigma_r = (p_r, q_r) \qquad (r=1, 2, \ldots)$$

i tratti di uno di tali boreliani B. La variazione positiva in σ_r della $f(t)$ è $=P(q_r)-P(p_r)$.

Fissato un numero reale $\eta>0$ piccolo a piacere, io posso trovare in σ_r un numero finito di tratti distinti in cui gli incrementi di $f(t)$ sono $\geqslant 0$ e in modo che la somma S_r degli incrementi corrispondenti a tutti questi tratti differisca da $P(q_r)-P(p_r)$ in valore assoluto per meno di $\eta : 2^r$. La somma

$$S_1+S_2+S_3+\ldots \tag{1}$$

differisce allora da

$$\sum\nolimits_r [P(q_r)-P(p_r)] \tag{2}$$

per meno di η. Ma la somma (1) è la norma di $f(t)$ in un boreliano semplice la cui lunghezza è $\leqslant$ di quella di B e quindi $<\mu$. Dunque la somma (1) è $<\varepsilon$. Consegue che la somma (2) è $<\varepsilon+\eta$. Ma η può essere piccolo a piacere, quindi la somma (2) è $\leqslant\varepsilon$. Si conclude che se B è un qualunque boreliano semplice, di lunghezza $<\mu$, la norma di $P(t)$ in B è $\leqslant\varepsilon$. Ciò basta per concludere che $P(t)$ è assolutamente continua.

Si ha allora, ragionando come pel teor. 21, il

[1] Questo primo esempio di funzione continua a variazione limitata non assolutamente continua fu dato dal VITALI. [Cfr. G. VITALI (loc. cit. a p. 91)]. (Nota di G. S.).

TEOREMA 37. - Una funzione assolutamente continua è la differenza di due funzioni assolutamente continue non decrescenti.

4. - È poi evidente il

TEOREMA 38. - La somma e la differenza di due funzioni assolutamente continue sono funzioni assolutamente continue.

TEOREMA 39. - Il prodotto di due funzioni assolutamente continue in un tratto finito è una funzione assolutamente continua in quel tratto.

Dimostrazione. - Siano $f(t)$ e $g(t)$ due funzioni assolutamente continue in un tratto finito σ; esiste una costante M tale che qualunque sia t in σ si abbia $|f(t)|<M$, $|g(t)|<M$, quindi se α e β sono due punti di σ

$$|f(\beta)g(\beta)-f(\alpha)g(\alpha)| = |g(\beta)[f(\beta)-f(\alpha)]+f(\alpha)[g(\beta)-g(\alpha)]| < \\ < M[\,|f(\beta)-f(\alpha)|+|g(\beta)-g(\alpha)|\,]$$

perciò la norma di $f(t)g(t)$ relativa a qualunque boreliano semplice B contenuto in σ è minore del prodotto di M per la somma delle norme di f e g relative a B e da ciò segue subito il teorema.

CAPITOLO IV.

Integrazione delle funzioni misurabili.

§ 1. - Funzioni quasi-costanti sommabili e loro integrazione.

1. Funzioni quasi-costanti. - 2. Funzioni quasi-costanti sommabili. - 3. Integrale di una funzione quasi-costante. - 4. Proprietà di detti integrali.

1. - *Definizione* 1. - Se g è un aggregato misurabile di punti di una retta, se $f(t)$ è una funzione generalmente definita in g (Cap. III, def. 1), che all'infuori di un aggregato di misura nulla acquista solo un numero finito od una infinità numerabile di valori *finiti* diversi, e se ogni aggregato in cui assume lo stesso valore è misurabile, si dice che $f(t)$ è *quasi-costante* in g.

Si ha subito il

TEOREMA 1. - Una funzione quasi-costante è misurabile.

2. - *Definizione* 2. - Se $f(t)$ è una funzione quasi-costante in g, se

(1) $$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \ldots$$

sono i diversi valori che essa assume, se γ_n è l'aggregato dei punti in cui $f(t)=\lambda_n$, si dice che la $f(t)$, e quindi anche $|f(t)|$, è ***sommabile*** in g, se e soltanto se la somma

(2) $$\sum_n \lambda_n \mu(\gamma_n),$$

(in cui si intenda che un termine $\lambda_n\mu(\gamma_n)$ sia *zero* se il fattore λ_n è $=0$, anche se l'altro fattore $\mu(\gamma_n)$ è infinito) ha termini finiti ed in numero finito, od è una serie assolutamente convergente.

È evidente che se $f(t)$ è una quasi-costante, e se g è diviso in un numero finito od in una infinità numerabile di aggregati misurabili

(3) $$g_1, \quad g_2, \quad g_3, \ldots$$

tali che in ciascuno di essi la $f(t)$ abbia generalmente un mede-

simo valore l_n, anche se i valori delle varie l_n non sono diversi fra loro, condizione necessaria e sufficiente perchè la $f(t)$ sia sommabile in g è che la somma

(4) $$\sum_n l_n \mu(g_n)$$

abbia tutti i termini finiti ed in numero finito, oppure sia una serie assolutamente convergente.

3. - *Definizione* 3. - Se una funzione quasi-costante è sommabile in g, se (1) sono i diversi valori che essa assume, se γ_n è l'aggregato dei punti in cui $f(t)=\lambda_n$, la somma della serie (2) (somma che è indipendente dall'ordine dei termini) si chiama l'***integrale*** (lebesgiano) della $f(t)$ esteso a g, e si indica con

$$\int_g f(t) \cdot dt.$$

È evidente che se $f(t)$ è una quasi-costante sommabile in g, e se g è diviso in un numero finito o in una infinità numerabile di aggregati misurabili (3), tali che in ciascuno di essi la $f(t)$ abbia generalmente un medesimo valore l_n, anche se i valori l_n non sono diversi fra loro, l'$\int_g f(t) \cdot dt$ è dato anche dalla somma della (4) (somma che è indipendente dall'ordine dei termini).

4. - Risulta subito il [1]

TEOREMA 2. - Se $f(t)$ e $\varphi(t)$ sono due funzioni quasi-costanti e sommabili in g, e se generalmente in g è $f(t) \geqq \varphi(t)$, si ha

$$\int_g f(t) \cdot dt \geqq \int_g \varphi(t) \cdot dt$$

dal quale consegue il

Corollario. - Se $f(t)$ è una funzione quasi-costante sommabile in g, si ha
$$\int_g |f(t)| \cdot dt \geqq \int_g f(t) \cdot dt.$$

[1] Per le dimostrazioni di molti teoremi enunciati in questo Capitolo, cfr. G. VITALI: *Geometria nello Spazio Hilbertiano* (Bologna, Zanichelli, 1929). Parte 1ª.

Si hanno pure subito i seguenti teoremi:

Teorema 3. - La somma di due funzioni $f(t)$ e $\varphi(t)$ quasi-costanti e sommabili in g (la quale è evidentemente anch'essa una quasi-costante) è essa pure sommabile in g, e si ha

$$\int_g [f(t)+\varphi(t)]\cdot dt=\int_g f(t)\cdot dt+\int_g \varphi(t)\cdot dt.$$

Teorema 4. - Una quasi-costante sommabile in un aggregato g è anche sommabile in ogni sub-aggregato misurabile di g.

Teorema 5. - Se (3) sono degli aggregati misurabili a due a due distinti, se g è la loro somma, e se $f(t)$ è una quasi-costante sommabile in g, si ha

$$\int_g f(t)\cdot dt=\sum_n \int_{g_n} f(t)\cdot dt.$$

Teorema 6. - Se (3) sono degli aggregati misurabili a due a due distinti, se g è la loro somma, e se $f(t)$ è una quasi-costante sommabile in ciascuno degli aggregati (3), e se è convergente la serie

$$\sum_n \int_{g_n} |f(t)|\cdot dt$$

la $f(t)$ è sommabile in g (e quindi si può applicare il teorema precedente).

Dimostrazione. - Siano (1) i valori di $f(t)$ in g, sia γ_n l'aggregato di punti di g in cui $f(t)=\lambda_n$, e sia $\gamma_{r,s}$ il prodotto di g_r e γ_s. Sarà

$$\int_{g_n} |f(t)|\,dt=\sum_s |\lambda_s\mu(\gamma_{n,s})|$$

e, per l'ipotesi fatta, convergerà la serie

$$\sum_n \int_{g_n} |f(t)|\,dt=\sum_{n,s} |\lambda_s\mu(\gamma_{n,s})|=\sum_s |\lambda_s\mu(\gamma_s)|,$$

e quindi la $f(t)$ è sommabile in g.

Teorema 7. - Se $f(t)$ è una quasi-costante sommabile in g, anche $C\cdot f(t)$, dove C è una costante, è una quasi-costante sommabile in g, ed è

$$\int_g C\cdot f(t)\cdot dt=C\cdot\int_g f(t)\cdot dt.$$

Teorema 8. - Se $f(t)$ è una funzione generalmente costante ed uguale a C (e quindi quasi-costante) in g, se $\mu(g)$ è un numero finito, la $f(t)$ è sommabile in g, ed è

$$\int_g f(t)\cdot dt=C\cdot\mu(g) \quad \text{ossia} \quad \int_g C\cdot dt=C\cdot\mu(g)$$

ed in particolare si ha

$$\int_g dt=\mu(g).$$

§ 2. - Funzioni misurabili sommabili e loro integrazione.

1. Maggioranti e minoranti di una funzione misurabile. - 2. Funzioni sommabili e loro integrale. - 3. Proprietà di detti integrali. - 4. Teorema del valor medio.

1. - *Definizione* 4. - Si chiama *maggiorante* di una funzione $f(t)$ misurabile in g, ogni funzione $\varphi(t)$ quasi-costante in g, per la quale è generalmente soddisfatta la relazione $\varphi(t)\geqq f(t)$; e si chiama *minorante* di $f(t)$ ogni funzione $\psi(t)$ quasi-costante in g, per la quale è generalmente soddisfatta la relazione $\psi(t)\leqq f(t)$.

Segue che se una funzione $f(t)$ definita generalmente in g e ivi misurabile ammette una funzione maggiorante e una funzione minorante sommabili, gli insiemi dei punti ove essa assume rispettivamente i valori $+\infty$ e $-\infty$ hanno misura nulla.

Evidentemente, se $\varphi(t)$ è una maggiorante, e se $\psi(t)$ è una minorante di una funzione $f(t)$ misurabile, è generalmente $\varphi(t)\geqq\psi(t)$, e se poi le $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ sono sommabili in g, si ha (teor. 2)

$$\int_g \varphi(t)\cdot dt\geqq\int_g \psi(t)\cdot dt.$$

Teorema 9. - Se una funzione $f(t)$ misurabile in g ha una maggiorante $\varphi(t)$ ed una minorante $\psi(t)$ sommabili in g, allora per ogni numero reale $\varepsilon>0$ esistono due siffatte funzioni per cui

$$\int_g \varphi(t)\cdot dt-\int_g \psi(t)\cdot dt<\varepsilon. \quad (1)$$

Dimostrazione. - Intanto, se fosse, generalmente in g, $\varphi(t)=\psi(t)$, avendosi per queste funzioni

$$\int_g \varphi(t)\cdot dt=\int_g \psi(t)\cdot dt,$$

per queste stesse funzioni la (1) sarebbe soddisfatta.

Supponiamo che non sia generalmente $\varphi(t)=\psi(t)$. Dividiamo la retta r su cui giace g in tratti di lunghezza 1 (evidentemente questi tratti risultano una infinità numerabile, e possono essere i tratti che hanno per estremi due numeri interi $\gtreqless 0$ consecutivi). In ciascuno di questi tratti è contenuto un sub-aggregato di g misurabile e di misura $\leqslant 1$.

Siano

$$g_1,\quad g_2,\quad g_3,\dots$$

questi sub-aggregati. Allora g è la somma di questi, e sarà $\mu(g_n)\leqslant 1$. In g_n le $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ sono quasi-costanti sommabili (teor. 4).

Siano

$$l_1,\quad l_2,\quad l_3,\dots$$

i valori di $\varphi(t)$ in g, e

$$\lambda_1,\quad \lambda_2,\quad \lambda_3,\dots$$

quelli di $\psi(t)$ in g.

Sia $g_{n,r,s}$ l'aggregato di punti di g_n in cui $\varphi(t)=l_r$ e $\psi(t)=\lambda_s$. Sarà

$$\sum_{r,s}\mu(g_{n,r,s})=\mu(g_n).$$

Per noi avranno solo importanza le coppie

$$l_r,\quad \lambda_s$$

per cui $l_r\geqslant\lambda_s$, perchè per tutte le altre è $\mu(g_{n,r,s})=0$. Dividiamo il tratto (λ_s, l_r) in un numero finito di parti di lunghezza $<\varepsilon:2^n$, ε essendo un qualunque numero reale >0 prefissato. L'aggregato $g_{n,r,s}$ resterà diviso in un numero finito di sub-aggregati $g_{n,r,s,q}$ in ciascuno dei quali la $f(t)$ è sempre compresa in una medesima di dette parti di (λ_s, l_r), i cui estremi noi indicheremo con $l_{n,r,s,q}$ e $\lambda_{n,r,s,q}$ $(l_{n,r,s,q}\geqslant\lambda_{n,r,s,q})$.

Poichè

$$l_r\geqslant l_{n,r,s,q}\geqslant\lambda_{n,r,s,q}\geqslant\lambda_s,$$

essendo assolutamente convergenti le serie

$$\sum_{n,r,s,q} l_r\mu(g_{n,r,s,q}),\quad \sum_{n,r,s,q}\lambda_s\mu(g_{n,r,s,q})$$

lo sono anche le serie

$$\sum_{n,r,s,q} l_{n,r,s,q}\mu(g_{n,r,s,q}),\quad \sum_{n,r,s,q}\lambda_{n,r,s,q}\mu(g_{n,r,s,q})$$

e quindi la funzione $\varphi_1(t)$ che in $g_{n,r,s,q}$ ha il valore $l_{n,r,s,q}$, e la funzione $\psi_1(t)$ che in ogni $g_{n,r,s,q}$ ha il valore $\lambda_{n,r,s,q}$ sono due quasi-costanti sommabili in g, la $\varphi_1(t)$ è una maggiorante di $f(t)$ e la $\psi_1(t)$ è una minorante di $f(t)$.

Si ha subito

$$\begin{aligned}\int_g \varphi_1(t)\cdot dt-\int_g \psi_1(t)\cdot dt&=\sum_{n,r,s,q}(l_{n,r,s,q}-\lambda_{n,r,s,q})\mu(g_{n,r,s,q})\\&\leqslant\sum_n(\varepsilon:2^n)\sum_{r,s,q}\mu(g_{n,r,s,q})\\&=\sum_n(\varepsilon:2^n)\sum_{r,s}\mu(g_{n,r,s})=\sum_n(\varepsilon:2^n)\mu(g_n)\\&\leqslant\sum_n(\varepsilon:2^n)\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

2. - *Definizione* 5. - Una funzione misurabile si dice *sommabile* se ammette una maggiorante ed una minorante sommabili.

Dal teorema precedente consegue che se $f(t)$ è una funzione sommabile gli integrali delle sue maggioranti e delle sue minoranti sommabili formano due classi contigue.

Definizione 6. - Se $f(t)$ è una funzione sommabile, il numero di separazione delle classi degli integrali delle sue maggioranti e delle sue minoranti sommabili si chiama l'*integrale* (lebesguiano) di $f(t)$ e si indica con

$$\int_g f(t)\cdot dt.$$

Evidentemente due funzioni sommabili e generalmente uguali hanno integrali uguali.

3. - Teorema 10. - Se $f(t)$ è una funzione misurabile in g, ed è, generalmente in g, $f(t)\geqslant 0$, condizione necessaria e sufficiente perchè $f(t)$ sia sommabile in g è che $f(t)$ abbia una maggiorante sommabile.

Dimostrazione. - Infatti la $f(t)$ ha già una minorante sommabile, la funzione nulla in g.

TEOREMA 11. - Se $f(t)$ è una funzione sommabile in g, ed è in tutto g generalmente $f(t) \geqslant 0$, si ha

$$\int_g f(t) \cdot dt \geqslant 0.$$

Dimostrazione. - Infatti l'integrale della minorante nulla è $=0$.

TEOREMA 12. - Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $f(t)$ misurabile in g sia sommabile è che lo sia il suo modulo $|f(t)|$.

Dimostrazione. - Intanto, se $|f(t)|$ è sommabile in g, e se $\varphi(t)$ è una sua maggiorante sommabile, la $\varphi(t)$ è pure maggiorante di $f(t)$ e la $-\varphi(t)$ è una minorante di $f(t)$ (evidentemente sommabile (teor. 7)), e quindi la $f(t)$ è sommabile. Inversamente se $f(t)$ è sommabile, e se $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ sono una sua maggiorante ed una sua minorante sommabili, dalle

$$\varphi(t) \geqslant f(t) \geqslant \psi(t)$$

consegue

$$|f(t)| \leqslant |\varphi(t)| + |\psi(t)|.$$

Inoltre $|\varphi(t)|$ e $|\psi(t)|$ sono sommabili (def. 2) e quindi $|\varphi(t)|+|\psi(t)|$ lo è pure (teor. 3), ed infine $|f(t)|$ è sommabile (teor. 10).

Corollario. - Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione misurabile $f(t)$ sia sommabile è che il suo modulo ammetta una maggiorante sommabile.

TEOREMA 13. - Se $f(t)$ è sommabile in g, e se g' è un aggregato misurabile distinto da g, la funzione $f_1(t)$ che in g coincide colla $f(t)$ e che è nulla in g', è sommabile in $\gamma = g + g'$, ed è

$$\int_\gamma f_1(t) \cdot dt = \int_g f(t) \cdot dt.$$

Dimostrazione. - Basta considerare le maggioranti e le minoranti di $f_1(t)$ che sono nulle in g'.

Dai teor. 2,...., 7 sulle funzioni quasi-costanti conseguono i seguenti teoremi:

TEOREMA 14. - La somma di un numero finito di funzioni

sommabili in un aggregato g è pure sommabile in g, e l'integrale della somma è uguale alla somma degli integrali.

TEOREMA 15. - Una funzione sommabile in g è anche sommabile in qualunque sub-aggregato g' misurabile di g.

TEOREMA 16. - Se

$$g_1, \quad g_2, \quad g_3, \ldots \tag{1}$$

sono degli aggregati misurabili di punti di una stessa retta, a due a due distinti, in numero finito o in una infinità numerabile, se g è la loro somma, se infine $f(t)$ è una funzione sommabile in g, si ha

$$\int_g f(t) \cdot dt = \sum_n \int_{g_n} f(t) \cdot dt.$$

Corollario. - Se $f(t)$ è una funzione sommabile in g, se g' è un sub-aggregato misurabile in g, se infine $\delta = g - g'$, si ha

$$\int_\delta f(t) \cdot dt = \int_g f(t) \cdot dt - \int_{g'} f(t) \cdot dt.$$

TEOREMA 17. - Se (1) sono degli aggregati misurabili, a due a due distinti, in numero finito od in una infinità numerabile, se g è la loro somma, se $f(t)$ è una funzione sommabile in ciascuno degli aggregati (1), e se è convergente la serie

$$\sum_n \int_{g_n} |f(t)| \cdot dt, \tag{2}$$

(questa ultima condizione è verificata se gli aggregati (1) sono in numero finito); la $f(t)$ è sommabile in g, e quindi si può applicare il precedente teorema 16.

Evidentemente se gli aggregati (1) sono una infinità numerabile, e se esiste un n_1 tale che $f(t)$ sia $\geqslant 0$ in tutto l'aggregato

$$g - (g_1 + g_2 + \ldots + g_{n_1})$$

la convergenza della serie (2) consegue dalla convergenza della serie

$$\sum_n \int_{g_n} f(t) \cdot dt \tag{3}$$

e si hanno subito i corollari:

Corollario 1. - Se (1) è una infinità numerabile di aggregati misurabili di punti di una medesima retta, a due a due distinti, se g è la loro somma, se $f(t)$ è una funzione sommabile in ciascuno degli aggregati (1), se esiste un n_1 tale che in

$$g-(g_1+g_2+....+g_{n_1})$$

sia $f(t)\geqslant 0$, e se è convergente la serie (3) la $f(t)$ è sommabile in g, e quindi è applicabile il teor. 16.

Corollario 2. - Se

$$\gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \gamma_3,....$$

è una infinità di aggregati misurabili ciascuno contenuto nel successivo, e se g è la loro somma, se $f(t)$ è una funzione sommabile in ciascuno di questi aggregati, se esiste un n_1 tale che in $g-\gamma_{n_1}$ sia $f(t)\geqslant 0$, se inoltre esiste ed è finito il

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\gamma_n} f(t)\cdot dt,$$

la $f(t)$ è sommabile in g, ed è

$$\int_g f(t)\cdot dt=\lim_{n\to\infty}\int_{\gamma_n} f(t)\cdot dt.$$

Questo corollario si riduce al precedente se si pone

$$g_1=\gamma_1, \quad g_2=\gamma_2-\gamma_1, \quad g_3=\gamma_3-\gamma_2,....$$

TEOREMA 18. - Se $f(t)$ è sommabile in g, anche $C\cdot f(t)$, dove C è una costante, è sommabile in g, ed è

$$\int_g C\cdot f(t)\cdot dt=C\cdot\int_g f(t)\cdot dt.$$

Corollario. - Se $f(t)$ è sommabile in g, anche $-f(t)$ è sommabile in g, ed è

$$\int_g [-f(t)]\cdot dt=-\int_g f(t)\cdot dt.$$

TEOREMA 19. - Se $f(t)$ e $\varphi(t)$ sono due funzioni sommabili in g, anche $f(t)-\varphi(t)$ è sommabile in g, ed è

$$\int_g [f(t)-\varphi(t)]\cdot dt=\int_g f(t)\cdot dt-\int_g \varphi(t)\cdot dt.$$

Dimostrazione. - Basta osservare che

$$f(t)-\varphi(t)=f(t)+[-\varphi(t)].$$

TEOREMA 20. - Se $f(t)$ e $\varphi(t)$ sono due funzioni sommabili in g, e se si ha, generalmente in g, $f(t)-\varphi(t)\geqslant 0$, è

$$\int_g f(t)\cdot dt\geqslant\int_g \varphi(t)\cdot dt.$$

Dimostrazione. - Basta osservare che (teor. 11) si ha

$$\int_g [f(t)-\varphi(t)]\cdot dt\geqslant 0.$$

TEOREMA 21. - Se $f(t)$ è sommabile in g, si ha

$$\left|\int_g f(t)\cdot dt\right|\leqslant\int_g |f(t)|\cdot dt.$$

Dimostrazione. - Intanto si ha

$$-|f(t)|\leqslant f(t)\leqslant|f(t)|$$

e quindi (teor. 20 e corollario del teor. 18)

$$-\int_g |f(t)|\cdot dt\leqslant\int_g f(t)\cdot dt\leqslant\int_g |f(t)|\cdot dt$$

da cui

$$\left|\int f(t)\cdot dt\right|\leqslant\int |f(t)|\cdot dt.$$

TEOREMA 22. - Se

$$\gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \gamma_3,....$$

è una infinità numerabile di aggregati misurabili ciascuno contenuto nel precedente, se g è il loro prodotto, e se $f(t)$ è una funzione sommabile in γ_1, si ha

$$\int_g f(t)\cdot dt=\lim_{n\to\infty}\int_{\gamma_n} f(t)\cdot dt.$$

Dimostrazione. - Infatti, se

$$g_1=\gamma_1-\gamma_2, \quad g_2=\gamma_2-\gamma_3,....$$

si ha

$$\gamma_1=g+g_1+g_2+g_3+....$$

e quindi (teor. 16),

$$\int_{\gamma_1} f(t) \cdot dt = \int_g f(t) \cdot dt + \sum_n \int_{g_n} f(t) \cdot dt$$

da cui

$$\int_g f(t) \cdot dt = \lim_{r\to\infty} \left[\int_{\gamma_1} f(t) \cdot dt - \sum_1^r {}_n \int_{g_n} f(t) \cdot dt \right]$$

$$= \lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(t) \cdot dt$$

poichè evidentemente

$$\gamma_r = \gamma_1 - \sum_1^r {}_n g_n .$$

4. - Teorema 23 (teorema del valor medio). - Se $f(t)$ è una funzione sommabile in un aggregato g di misura *finita* è

$$\int_g f(t) \cdot dt = M \cdot \mu(g),$$

dove M è un numero compreso fra il limite inferiore l ed il limite superiore L di $f(t)$ in g.

Dimostrazione. - Infatti se l è finito, la funzione che in tutti in punti di g ha il valore l è una minorante sommabile di $f(t)$, il cui integrale in g vale $l \cdot \mu(g)$ (teor. 8).

Si conclude che

$$l \cdot \mu(g) \leqslant \int_g f(t) \cdot dt.$$

Analogamente, se L è finito si ha

$$L \cdot \mu(g) \geqslant \int_g f(t) \cdot dt.$$

Basta questo per provare che, quando uno dei due numeri l ed L è finito, vale il teorema.

Se poi l ed L sono entrambi infiniti, il teorema è evidente, perchè allora sarà $l = -\infty$ ed $L = +\infty$.

Teorema 24. - Se $f(t)$ è una funzione misurabile in un aggregato g di misura finita m, condizione necessaria e sufficiente

affinchè $f(t)$ sia sommabile in g è che, essendo, per ogni numero intero $n > 0$, g_n l'aggregato dei punti di g in cui

$$n > |f(t)| \geqslant n-1,$$

la serie $\sum_n n \cdot \mu(g_n)$ sia convergente.

Dimostrazione. - La condizione è sufficiente, perchè se $\varphi(t)$ è la funzione che in ogni g_n ha il valore n, la $\varphi(t)$ è una maggiorante sommabile di $|f(t)|$, e quindi (corollario del teor. 12) la $f(t)$ è sommabile.

Per dimostrare che la condizione è necessaria, supponiamo che $f(t)$ e quindi $|f(t)|$ sia sommabile in g. La funzione $\psi(t) = \varphi(t) - 1$ è una minorante di $|f(t)|$. In tutto g è $\psi(t) \geqslant 0$, ed ogni maggiorante sommabile di $|f(t)|$ è anche maggiorante sommabile di $\psi(t)$ e quindi $\psi(t)$ è sommabile, ossia è convergente la serie $\sum_n (n-1)\mu(g_n)$. Ma poichè è convergente anche la serie $\sum_n \mu(g_n)$ è anche convergente la somma delle due serie, ossia la serie $\sum_n n \cdot \mu(g_n)$.

§ 3. - Particolari funzioni sommabili.

1. - Sia $f(t)$ una funzione sommabile in un aggregato misurabile g. Se t è un numero reale, e se g_t è l'aggregato dei punti di g che precedono t, l'aggregato g_t è misurabile (corollario del teor. 13 del Cap. II) e la $f(t)$ è sommabile in g_t (teor. 15).

L'$\int_{g_t} f(t) \cdot dt$ risulta allora una funzione della variabile t definita e finita per ogni valore reale della variabile.

Definizione 7. - La funzione $\int_{g_t} f(t) \cdot dt$ si dirà la *integralfunzione* di $f(t)$.

2. - Sia $f(t)$ una funzione sommabile e generalmente $\geqslant 0$, in un aggregato misurabile g ed, essendo n un qualunque numero intero >0, indichiamo con g_n l'aggregato dei punti di g in

cui $f(t) \leq n$. Poniamo poi $\gamma_n = g - g_n$. Il prodotto degli aggregati γ_n è di misura nulla, e quindi (teor. 22),

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} f(t)dt = 0.$$

Allora, prefissato un numero reale $\varepsilon > 0$ è possibile trovare un intero n per cui

$$\int_{\gamma_n} f(t)dt < \varepsilon : 2.$$

Se ora si pone

$$m < \varepsilon : 2n,$$

si vede che se γ è un qualunque sub-aggregato misurabile di g, per cui $\mu(\gamma) < m$, se γ' è il prodotto di γ con g_n, e se γ'' è il prodotto di γ con γ_n, è $\gamma = \gamma' + \gamma''$, ed inoltre

$$\int_{\gamma'} f(t) \cdot dt < n \cdot m < n \cdot (\varepsilon : 2n) = \varepsilon : 2$$

e

$$\int_{\gamma''} f(t) \cdot dt < \int_{\gamma_n} f(t)dt < \varepsilon : 2$$

ed infine

$$\int_{\gamma} f(t) \cdot dt = \int_{\gamma'} f(t) \cdot dt + \int_{\gamma''} f(t) \cdot dt < \varepsilon : 2 + \varepsilon : 2 = \varepsilon.$$

Si conclude che, se $f(t)$ è una funzione sommabile e generalmente $\geqslant 0$ in g, è possibile, prefissato un numero reale $\varepsilon > 0$, trovare un numero reale $m > 0$ tale, che per ogni sub-aggregato misurabile γ di g di misura $< m$ si abbia $\int_{\gamma} f(t) \cdot dt < \varepsilon$.

Ne consegue che, se $f(t)$ è una qualunque funzione sommabile in g, prefissato un numero reale $\varepsilon > 0$, è possibile trovare un numero reale $m > 0$, tale che per ogni sub-aggregato misurabile γ di g, di misura $< m$, si abbia

$$\int_{\gamma} |f(t)| dt < \varepsilon$$

(teor. 12). Si ha dunque il

TEOREMA 25. - Se $f(t)$ è una funzione sommabile in g, è possibile, per ogni numero reale $\varepsilon > 0$, trovare un numero reale $m > 0$

tale che per ogni sub-aggregato misurabile γ di g, con $\mu(\gamma) < m$, si abbia

$$\int_{\gamma} |f(t)| dt < \varepsilon.$$

Se $f(t)$ è una funzione sommabile in g, e se $F(t) = \int_{g_t} f(t) \cdot dt$ si vede subito che se $\sigma = (p, q)$ è un intervallo finito, e se g' è l'aggregato dei punti di g che cadono in σ si ha

$$\int_{g'} f(t) \cdot dt = F(q) - F(p)$$

e quindi (teor. 21)

$$|F(q) - F(p)| \leq \int_{g'} |f(t)| dt.$$

Consideriamo ora un boreliano semplice B di lunghezza finita. Siano

$$\sigma_n = (p_n, q_n) \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

i tratti (evidentemente di lunghezza finita) che lo compongono. Se γ_n è l'aggregato dei punti di g che cadono in σ_n, e se γ è la loro somma si ha

$$\sum_n |F(q_n) - F(p_n)| \leq \sum_n \int_{\gamma_n} |f(t)| dt = \int_{\gamma} |f(t)| dt.$$

Inoltre si ha $\mu(\gamma) \leq \lambda(B)$, e si può rapidamente concludere che per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ esiste un numero $m > 0$ tale che per ogni boreliano semplice B di lunghezza $< m$, la norma di $F(t)$ in B risulta $< \varepsilon$.

Si ha allora il

TEOREMA 26. - Ogni integralfunzione è assolutamente continua.

Ne consegue il

Corollario. - Una integralfunzione è continua in tutti i punti finiti (Cap. III, teor. 34).

3. - *Secondo teorema della media* (di O. BONNET [1]). - Il tratto (a, b) sia finito, $a < b$, e in esso sia definita una funzione $f(t)$

---

[1] O. BONNET: *Remarques sur quelques intégrales définies*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, XIV (1849), p. 249.

sommabile e una funzione $\varphi(t)$ non negativa, *non decrescente*, limitata; se la costante L è tale che

$$(1) \qquad 0 \leq \varphi(t) \leq L,$$

sussiste allora la relazione

$$(2) \qquad \int_a^b f(t)\varphi(t)dt = L\int_\xi^b f(t)dt \quad (^1),$$

ove ξ è un punto di (a, b).

Dimostrazione. - Si noti preliminarmente che la funzione $f(t)\varphi(t)$ è sommabile, avendosi $|f(t)\varphi(t)| < L|f(t)|$.

Dividiamo il tratto (a, b) con i punti

$$t_0, \quad t_1, \dots, \quad t_{n-1}, \quad t_n; \qquad a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

in n tratti parziali (t_{k-1}, t_k) ciascuno di lunghezza inferiore ad un numero positivo σ, e in ogni tratto (t_{k-1}, t_k) consideriamo un punto ξ_k. Abbiamo

$$\left|\sum_k^{1\dots n}\varphi(\xi_k)\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)dt - \int_a^b f\varphi dt\right| = \left|\sum_k^{1\dots n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}[\varphi(\xi_k) - \varphi(t)]f(t)dt\right|$$

ed avendosi in (t_{k-1}, t_k), $|\varphi(\xi_k) - \varphi(t)| \leq \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})$, abbiamo

$$\left|\sum_k^{1\dots n}\varphi(\xi_k)\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)dt - \int_a^b f\varphi dt\right| \leq \sum_k^{1\dots n}[\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})]\int_{t_{k-1}}^{t_k}|f(t)|\,dt.$$

Siccome $f(t)$ è sommabile in (a, b), scelto un numero positivo ε si può trovare corrispondentemente un numero positivo σ tale che in ogni tratto I di lunghezza minore di σ si abbia

$$\int_I |f|\,dt < \frac{\varepsilon}{L} \qquad \text{[teor. 26]},$$

(1) Avvertiamo che col simbolo $\int_a^b f(x)dx$ con $a < b$ intendiamo l'integrale di Lebesgue di $f(x)$ esteso al tratto (a, b), e quando sia $a > b$ poniamo

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

ne viene che per ogni divisione del tratto (a, b) in un numero finito di tratti parziali in cui il massimo tratto ha la lunghezza minore di σ si ha

$$(3) \qquad \left|\sum_k^{1\dots n}\varphi(\xi_k)\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)dt - \int_a^b f\varphi dt\right| \leq$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{L}\sum_k^{1\dots n}[\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})] = \frac{\varepsilon}{L}[\varphi(b) - \varphi(a)] \leq \varepsilon.$$

Si ha pure

$$\left|[L - \varphi(\xi_n)]\int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t)dt\right| \leq [L - \varphi(\xi_n)]\int_{t_{n-1}}^{b}|f(t)|\,dt < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon,$$

e tenuto conto della (3) si ha allora che per ogni divisione di (a, b) in un numero finito di tratti parziali ciascuno di lunghezza inferiore a σ sussiste la limitazione

$$\left|\sum_k^{1\dots n}\varphi(\xi_k)\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)dt + [L - \varphi(\xi_n)]\int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t)dt - \int_a^b f\varphi dt\right| < 2\varepsilon,$$

e perciò posto

$$(4) \qquad S = \sum_k^{1\dots n}\varphi(\xi_k)\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t) + [L - \varphi(\xi_n)]\int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t)dt$$

ne viene

$$(5) \qquad S - 2\varepsilon < \int_a^b f\varphi dt < S + 2\varepsilon.$$

Posto ora

$$F(t) = \int_t^b f(t)dt$$

abbiamo

$$S = \sum_k^{1\dots n}\varphi(\xi_k)[F(t_{k-1}) - F(t_k)] + [L - \varphi(\xi_n)]F(t_{n-1})$$
$$S = F(t_0)\varphi(\xi_1) + F(t_1)[\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_1)] + \dots +$$
$$+ F(t_{n-1})[\varphi(\xi_n) - \varphi(\xi_{n-1})] + [L - \varphi(\xi_n)]F(t_{n-1})$$

e se $\min_{(a,b)} F$, $\max_{(a,b)} F$ indicano il minimo e il massimo della funzione continua $F(t)$ in (a, b), tenuto conto che è $0 \leq \varphi(\xi_r) - \varphi(\xi_{r-1})$, abbiamo

$$L \min_{(a,b)} F \leq S \leq L \max_{(a,b)} F$$

e per la (5)

$$L \min_{(a,b)} F - 2\varepsilon < \int_a^b f\varphi dt < L \max_{(a,b)} F + 2\varepsilon,$$

ed essendo ε arbitrario

$$L \min_{(a,b)} F \leq \int_a^b f\varphi dt \leq L \max_{(a,b)} F,$$

e posto quindi

$$\int_a^b f\varphi dt = L\bar{F} \tag{6}$$

si ha $L \min_{(a,b)} F \leq L\bar{F} \leq L \max_{(a,b)} F$, $\min_{(a,b)} F \leq \bar{F} \leq \max_{(a,b)} F$, ed $\bar{F}$ è un valore assunto da $F(t)$ quando t varia in (a, b); avremo perciò $\bar{F} = F(\xi)$ e dalla (6) segue allora la (2).

Corollario 1. - Sia $\varphi(t)$ *non decrescente* in (a, b), $a < b$, e siano H e K due costanti tali che

$$H \leq \varphi(t) \leq K;$$

allora se $f(t)$ è una funzione sommabile in (a, b) esiste almeno un punto ξ di (a, b) tale che

$$\int_a^b f\varphi dt = H \int_a^\xi f(t)dt + K \int_\xi^b f(t)dt \quad (1).$$

Dimostrazione. - Si ha infatti $0 \leq \varphi(t) - H \leq K - H$, e siccome $\varphi(t) - H$ è non decrescente in (a, b), per il teorema dimostrato si ha:

$$\int_a^b f[\varphi - H]dt = (K - H) \int_\xi^b fdt$$

(1) Per un'estensione ai tratti infiniti cfr. M. Picone: *Lezioni di Analisi Infinitesimale* (Catania, 1923), p. 509.

quindi

$$\int_a^b f\varphi dt = H \int_a^b fdt - H \int_\xi^b fdt + K \int_\xi^b fdt = H \int_a^\xi fdt + K \int_\xi^b fdt \quad \text{c. v. d.}$$

Con lo stesso procedimento si dimostra il

Corollario 2. - Sia $\varphi(t)$ *non crescente* in (a, b), $a < b$, $H \leq \varphi(t) \leq K$, e sia $f(t)$ sommabile in (a, b), esiste allora un punto ξ di (a, b) tale che

$$\int_a^b f\varphi dt = K \int_a^\xi f(t)dt + H \int_\xi^b f(t)dt.$$

4. - *Definizione* 8. - Una funzione sommabile $f(t)$ la cui integralfunzione sia nulla in tutti i punti si dice ad *integrale nullo.*

A causa della continuità delle integralfunzioni si ha subito il

Teorema 27. - Una funzione è ad integrale nullo se la sua integralfunzione è nulla per tutti i valori razionali della variabile.

Teorema 28. - Se $f(t)$ è una funzione ad integrale nullo, e se γ è un qualunque sub-aggregato misurabile dell'aggregato g in cui la $f(t)$ è definita, si ha

$$\int_\gamma f(t) \cdot dt = 0.$$

Dimostrazione. - A causa del teor. 16 basta evidentemente che la dimostrazione si limiti al caso in cui $\mu(\gamma)$ è finito.

In tale ipotesi, se B è una copertura semplice di γ tale che $\lambda(B)$ sia finita, se c è l'aggregato dei punti di g che cadono nei tratti di B, si ha,

$$\int_c f(t) \cdot dt = 0$$

poichè la integralfunzione di $f(t)$ è nulla. Ne consegue che

$$\int_\gamma f(t) \cdot dt = -\int_{c-\gamma} f(t) \cdot dt.$$

Ma, per la misurabilità di γ la B si può scegliere in modo che $\mu(c-\gamma)$ risulti piccolo a piacere, e quindi in modo (vedi teor. 25 e 21) che

$$\left|\int_{c-\gamma} f(t)\cdot dt\right|$$

risulti piccolo a piacere, dunque

$$\int_{\gamma} f(t)\cdot dt=0,$$

ed il teorema è dimostrato.

TEOREMA 29. - Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione sommabile $f(t)$ sia ad integrale nullo, è che essa sia generalmente nulla.

Dimostrazione. - Intanto è evidente che se $f(t)$ è generalmente nulla essa è ad integrale nullo. Se poi $f(t)$ non è generalmente nulla esisterà almeno un numero positivo p, per cui uno dei due aggregati, quello in cui è $f(t)>p$ e quello in cui è $f(t)<-p$, sia di misura >0. Se γ è tale aggregato si ha

$$\left|\int_{\gamma} f(t)\cdot dt\right|>p\cdot\mu(\gamma)$$

e quindi la $f(t)$ non è ad integrale nullo (vedi teorema precedente).

Corollario. - Una funzione è generalmente nulla se la sua integralfunzione è nulla per tutti i valori razionali della variabile.

5. - *Definizione* 9. - Una funzione $f(t)$, definita generalmente in g, si dice *limitata*, se esiste un numero reale $M>0$ per cui sia, generalmente in g, $|f(t)|<M$.

TEOREMA 30. - Una funzione $f(t)$ misurabile e limitata in un aggregato g di misura finita è sommabile.

Dimostrazione. - Infatti se M è un numero >0, per cui sia, generalmente in g, $|f(t)|<M$, la funzione $\varphi(t)$ che in tutto g è $=M$, e la funzione $\psi(t)=-\varphi(t)$ sono una maggiorante ed una minorante di $f(t)$ sommabili, e quindi $f(t)$ è sommabile.

Se $f(t)$ è una funzione misurabile e limitata in un tratto $\sigma=(a,b)$ di lunghezza finita, si divida σ in un numero finito di tratti che indicheremo, insieme colle loro lunghezze, con

$$h_1,\quad h_2,\ldots,\quad h_n.$$

La funzione $\varphi(t)$ definita in σ che ha per ogni punto di un tratto h_i valore uguale al limite superiore L_i di $f(t)$ in h_i è una maggiorante sommabile di $f(t)$ e la diremo una *maggiorante riemanniana* di $f(t)$, mentre la funzione $\psi(t)$ che ha per ogni punto di h_i valore uguale al limite inferiore l_i ad $f(t)$ in h_i è una minorante sommabile di $f(t)$, e la diremo una *minorante riemanniana* di $f(t)$. Evidentemente, se g indica l'aggregato dei punti di σ si ha

$$\int_g \varphi(t)\cdot dt=\sum_i h_iL_i$$

ed

$$\int_g \psi(t)\cdot dt=\sum_i h_il_i.$$

Noi sappiamo che se $f(t)$ è sommabile, gli integrali delle maggioranti e delle minoranti sommabili di $f(t)$ formano due classi contigue, il cui numero di separazione è l' $\int_g f(t)\cdot dt$.

Ma non è detto che gli integrali delle maggioranti e delle minoranti riemanniane formino anch'essi due classi contigue. Queste due classi sono contenute nelle precedenti, ma in generale non sono contigue. Possiamo solo affermare che se queste classi sono contigue il loro numero di separazione è $\int_g f(t)\cdot dt$.

Evidentemente quando le classi degli integrali delle maggioranti e delle minoranti riemanniane di $f(t)$ sono contigue la $f(t)$ è integrabile nel senso di RIEMANN, e si può concludere col

TEOREMA 31. - Una funzione $f(t)$ misurabile e limitata definita in un tratto finito $\sigma=(a,b)$ ed integrabile in questo secondo RIEMANN, è sommabile nell'aggregato g dei punti di σ, e l'integrale nel senso di RIEMANN della $f(t)$ esteso a σ è $=\int_g f(t)dt$.

6. - Consideriamo una funzione $f(t)$ misurabile e limitata in un aggregato g di misura finita. La $f(t)$ è (teor. 30) sommabile in g.

Supponiamo che in tutto g sia $f(t)\geqslant 0$.

Se y è un numero reale $\geqslant 0$, indichiamo con g_y l'aggregato dei punti di g in cui $f(t)\geqslant y$ e poniamo $m(y)=\mu(g_y)$.

Se L è il limite superiore della $f(t)$ in g, per ogni $y>L$ è $m(y)=0$.

La $m(y)$ è una funzione non crescente, e quindi integrabile secondo RIEMANN in ogni tratto finito.

E se c è un qualunque numero reale $>L$ è

$$\int_0^c m(y)\,dy=\int_0^L m(y)\,dy.$$

Poniamo

$$I=\int_0^L m(y)\,dy.$$

Io dico che

$$I=\int_g f(t)dt \quad (^1).$$

Fissiamo un numero reale $c>L$. Evidentemente è $m(c)=0$. Dividiamo il tratto $(0, c)$ in un numero finito di tratti. Siano

$$0=a_0<a_1<a_2<\ldots.<a_n=c$$

gli estremi di questi tratti.

Poniamo

$$\gamma_r=g_{a_r}-g_{a_{r+1}}$$

ed

$$m_r=m(a_r).$$

In γ_r è

$$a_{r+1}>f(t)\geqslant a_r.$$

Inoltre è

$$g=\sum\nolimits_r \gamma_r.$$

La funzione $\varphi(t)$ che in ogni γ_r ha il valore a_{r+1} è una maggiorante di $f(t)$, e la funzione $\psi(t)$ che in ogni γ_r ha il valore a_r è una minorante di $f(t)$, e si ha

$$\int_g \varphi(t)dt=\sum_{0}^{n-1}{}_r\, a_{r+1}\cdot\mu(\gamma_r)$$

$$\int_g \psi(t)dt=\sum_{0}^{n-1}{}_r\, a_r\cdot\mu(\gamma_r).$$

(1) Per le formule che esprimono gli integrali di RIEMANN delle funzioni limitate per integrali di LEBESGUE cfr. P. II, Cap. V.

E osservando che

$$\mu(\gamma_r)=m_r-m_{r+1},$$

che $m_n=0$ e $a_0=0$ si ha

$$\int_g \varphi(t)dt=a_1m_0+(a_2-a_1)m_1+\ldots.+(a_n-a_{n-1})m_{n-1}$$
$$=\sum_1^n{}_r\, h_rL_r$$

$$\int_g \psi(t)dt=a_1m_1+(a_2-a_1)m_2+\ldots.+(a_n-a_{n-1})m_n$$
$$=\sum_1^n{}_r\, h_rl_r,$$

dove con h_r indico la lunghezza del tratto (a_{r-1}, a_r), L_r ed l_r indicano rispettivamente il limite superiore ed il limite inferiore della $m(y)$ in tale tratto.

E poichè $\int_g f(t)dt$ è compreso fra i primi membri delle due precedenti uguaglianze è compreso anche fra gli ultimi membri, e questo valendo qualunque sia la divisione considerata in $(0, c)$, esso deve coincidere con $\int_0^c m(y)dy$, e quindi con I. c. d. d.

Se ora noi supponiamo che $f(t)$ sia una funzione sommabile (non necessariamente limitata) in un aggregato g (non necessariamente di misura finita), se supponiamo però che in tutto g sia $f(t)\geqslant 0$, e se conserviamo tutte le notazioni precedenti, si prova che la $m(y)$ è, qualunque sia l'intero positivo n, integrabile secondo RIEMANN nel tratto $\left(\frac{1}{n}, n\right)$, che esiste

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{n} m(y)dy,$$

e che questo limite è uguale a $\int_g f(t)dt$.

Se poi $f(t)$ è una funzione qualunque sommabile in g, si indichi con g_1 l'aggregato dei punti di g in cui $f(t)\geqslant 0$ e si ponga $g_2=g-g_1$.

Sarà

$$\int_g f(t)dt=\int_{g_1} f(t)dt+\left\{-\int_{g_2}[-f(t)]dt\right\}.$$

Gli integrali che figurano nel secondo membro sono integrali di funzioni $\geqslant 0$ e quindi si possono calcolare come limiti di integrali di RIEMANN di una funzione non crescente. Riassumendo si può concludere che il calcolo dell'integrale di una qualunque funzione sommabile si può ridurre al calcolo del valore dell'integrale di una funzione positiva $m(y)$ da $-\infty$ a $+\infty$ integrabile nel senso di CAUCHY, non crescente per $y \geqslant 0$ e non decrescente per $y<0$. La $m(y)$ è per $y \geqslant 0$ la misura dell'aggregato dei punti in cui $f(t) \geqslant y$ e per $y<0$ la misura dell'aggregato dei punti in cui $f(t) \leqslant y$.

§ 4. - Integrazione per serie.

1. Funzioni ugualmente limitate. - 2. Successioni convergenti di funzioni ugualmente limitate definite in un aggregato di misura finita. - 3. Successioni completamente convergenti. - 4. Condizione necessaria e sufficiente perchè una successione di funzioni sommabili sia completamente convergente.

1. - *Definizione* 10. - Più funzioni definite generalmente in g, si dicono *ugualmente* o *uniformemente limitate*, se esiste un numero reale $M>0$, per cui il modulo di ognuna di dette funzioni sia, generalmente in g, $<M$.

2. - TEOREMA 32. - Se

(1) $$f_1(t), \quad f_2(t), \quad f_3(t), \ldots$$

è una successione di funzioni misurabili ed ugualmente limitate in un medesimo aggregato g di misura finita m, e se la (1) è generalmente convergente verso una funzione $f(t)$, la $f(t)$ è limitata e misurabile, e si ha

$$\int_g f(t) \cdot dt = \lim_{n \to \infty} \int_g f_n(t) \cdot dt.$$

Dimostrazione. - Intanto, per le ipotesi fatte, esisterà un subaggregato g' di g, con $\mu(g')=m$, ed un numero reale $M>0$ tali che in ogni punto di g' la (1) converga e sia, per qualunque n,

$$|f_n(t)|<M.$$

Allora, da $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(t)=f(t)$ consegue che in ogni punto di g'

è $|f(t)| \leqslant M<2M$, e quindi la $f(t)$ è limitata. Essa inoltre è misurabile (Cap. III, teor. 8) e quindi è sommabile (teor. 30).

Si ha poi

(2) $$|f_n(t)-f(t)|<2M$$

qualunque sia n.

Prefissiamo un numero reale $\varepsilon>0$ e, per ogni intero i, indichiamo con g_i l'aggregato dei punti di g' in cui per ogni $n \geqslant i$ sia

$$|f_n(t)-f(t)|<\varepsilon:(2m).$$

L'aggregato g_i è misurabile, perchè prodotto degli aggregati h_n $(n \geqslant i)$ in cui la funzione misurabile $|f_n(t)-f(t)|$ è $<\varepsilon:(2m)$. Per la convergenza di (1) verso $f(t)$, ogni punto di g' appartiene a qualche g_i. Inoltre ogni aggregato della successione

$$g_1, \quad g_2, \quad g_3, \ldots$$

è contenuto nel successivo, ed allora ogni aggregato della successione

(3) $$\gamma_1=g'-g_1, \quad \gamma_2=g'-g_2, \quad \gamma_3=g'-g_3, \ldots$$

è misurabile e contiene il successivo, ed il prodotto degli aggregati (3) è nullo. È dunque (Cap. II, teor. 24)

$$\lim_{i \to \infty} \mu(\gamma_i)=0$$

e quindi esiste un i' tale che, per ogni $n \geqslant i'$, sia

$$\mu(\gamma_n)<\varepsilon:(4M).$$

Allora, per ogni $n \geqslant i'$, è

$$\int_{g'} [f_n(t)-f(t)]dt = \int_{g_n} [f_n(t)-f(t)]dt + \int_{\gamma_n} [f_n(t)-f(t)]dt.$$

Ma, essendo in g_n

$$|f_n(t)-f(t)|<\varepsilon:(2m),$$

è

$$\left|\int_{g_n} [f_n(t)-f(t)]dt\right| < [\varepsilon:(2m)] \cdot m = \varepsilon:2,$$

ed, essendo la (2), è

$$\left|\int_{\gamma_n} [f_n(t)-f(t)]dt\right| < 2M \cdot [\varepsilon:(4M)] = \varepsilon:2,$$

e si ha
$$\left|\int_{g'} [f_n(t)-f(t)]\,dt\right| < \varepsilon.$$

Questo significa che
$$\lim_{n\to\infty}\int_{g'} [f_n(t)-f(t)]\,dt=0$$
ossia
$$\lim_{n\to\infty}\int_{g'} f_n(t)\,dt=\int_{g'} f(t)\,dt$$
e quindi
$$\lim_{n\to\infty}\int_{g} f_n(t)\,dt=\int_{g} f(t)\,dt.$$

Corollario. - Se
$$\varphi_1(t)+\varphi_2(t)+\varphi_3(t)+\ldots. \tag{4}$$
è una serie convergente di funzioni sommabili definite generalmente in un aggregato misurabile g, di misura finita, e se le somme parziali
$$f_1(t)=\varphi_1(t),\quad f_2(t)=\varphi_1(t)+\varphi_2(t),\ldots. \tag{5}$$
sono ugualmente limitate, la somma $\varphi(t)$ della data serie è sommabile in g e si ha
$$\int_g \varphi(t)\,dt=\sum_n\int_g \varphi_n(t)\,dt.$$

3. - *Definizione* 11. - Sia (1) una successione di funzioni generalmente definite in un aggregato misurabile g e sommabili in ogni sub-aggregato di g misurabile e di misura finita. Se esiste una funzione $f(t)$, generalmente definita in g e sommabile in ogni sub-aggregato di g misurabile e di misura finita, per cui si abbia, qualunque sia il sub-aggregato γ di g con $\mu(\gamma)$ finita,
$$\lim_{n\to\infty}\int_\gamma |f_n(t)-f(t)|\,dt=0,$$
si dice che (1) è *convergente completamente in g verso $f(t)$* e che $f(t)$ è sua *quasi-limite.*

Dalla definizione precedente consegue subito il

TEOREMA 33. - Se (1) è completamente convergente in g verso una funzione $f(t)$, la (1) è completamente convergente verso $f(t)$ in qualunque sub-aggregato misurabile di g.

Si ha inoltre il

TEOREMA 34. - Se (1) è completamente convergente in g verso $f(t)$, e se γ è un sub-aggregato di g misurabile e di misura finita, si ha
$$\lim_{n\to\infty}\int_\gamma f_n(t)\,dt=\int_\gamma f(t)\,dt$$
od in altri termini il

Corollario. - Se (4) è una serie di funzioni misurabili definite generalmente in un aggregato misurabile g, e se la successione (5) delle somme parziali di (4) è completamente convergente in g, se $\varphi(t)$ è una quasi-limite della successione (5) e se γ è un sub-aggregato misurabile di misura finita di g, si ha
$$\int_\gamma \varphi(t)\,dt=\sum_n\int_\gamma \varphi_n(t)\,dt.$$

Risulta poi facilmente il

TEOREMA 35. - Due quasi-limiti di una successione (1) completamente convergente sono generalmente uguali, e ogni funzione generalmente uguale ad una quasi-limite di (1) è pure quasi-limite di (1).

4. - *Definizione* 12. - Più funzioni si dicono *equi-assolutamente-continue*, se per ogni numero reale $\varepsilon>0$ è possibile trovare un numero reale $m>0$ tale che per ogni boreliano semplice B di lunghezza $<m$, la norma di qualunque delle funzioni date in B risulti $<\varepsilon$.

Si può facilmente dimostrare il

TEOREMA 36. - Se più funzioni sommabili in un aggregato g hanno equi-assolutamente-continue le loro integralfunzioni, per ogni numero reale $\varepsilon>0$ è possibile trovare un numero reale m tale che per ogni sub-aggregato misurabile γ di g per cui sia $\mu(\gamma)<m$ risulti $<\varepsilon$ l'integrale esteso a γ del modulo di qualunque delle date funzioni.

TEOREMA 37 [1]. - Se la (1) è una successione di funzioni,

[1] Con qualche ipotesi restrittiva questo teorema e il successivo teor. 38 furono dimostrati la prima volta nella memoria di G. VITALI: *Sull'integrazione per serie*, Rend. del Cir. Mat. di Palermo, T. XXIII (1907), pp. 137-155. (Nota di G. S.).

definite generalmente e sommabili in g, se la (1) converge [1] generalmente in g verso una funzione $f(t)$, e se le integralfunzioni delle (1) sono equi-assolutamente-continue, la (1) converge completamente, e la $f(t)$ è sua quasi-limite.

Dimostrazione. - Intanto la

(1') $$|f_1(t)|, \quad |f_2(t)|, \quad |f_3(t)|, \ldots$$

converge generalmente verso $|f(t)|$.

Sia γ un sub-aggregato di g misurabile e avente misura finita. Sia γ' l'aggregato dei punti di γ in cui la (1') converge. È

$$\mu(\gamma')=\mu(\gamma).$$

Per ogni intero $n>0$ si indichi con γ_n l'aggregato dei punti di γ' in cui qualche funzione (1') è $>2^n$. Evidentemente γ_n è misurabile, e, per ogni n, γ_{n+1} è contenuto in γ_n. Non esiste un punto di γ' che appartenga a tutti i γ_n, perchè in ogni punto di γ' la (1') ha limite finito. Dunque il prodotto di tutti i γ_n è nullo, e si ha

(6) $$\lim_{n\to\infty} \mu(\gamma_n)=0$$

(cap. II, teor. 24).

Poniamo $\delta_n=\gamma'-\gamma_n$. Si ha

$$\int_{\gamma'} |f_r(t)|\,dt=\int_{\gamma_n} |f_r(t)|\,dt+\int_{\delta_n} |f_r(t)|\,dt.$$

Per l'equi-assoluta-continuità delle integralfunzioni delle (1), si può, prefissato un numero reale $\varepsilon>0$, trovare un n' tale che per ogni $n>n'$ sia

$$\int_{\gamma_n} |f_r(t)|\,dt<\varepsilon$$

e ciò a causa della (6) e del teor. 36.

Per tali n è

$$\left|\int_{\gamma'} |f_r(t)|\,dt-\int_{\delta_n} |f_r(t)|\,dt\right|<\varepsilon.$$

Inoltre in δ_n le (1') sono ugualmente limitate, e quindi

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\delta_n} |f_r(t)|\,dt=\int_{\delta_n} |f(t)|\,dt$$

[1] Cioè se ha limite finito.

(teor. 32), cioè, per r abbastanza grande,

$$\left|\int_{\delta_n} |f_r(t)|\,dt-\int_{\delta_n} |f(t)|\,dt\right|<\varepsilon$$

ed infine

(7) $$\left|\int_{\gamma'} |f_r(t)|\,dt-\int_{\delta_n} |f(t)|\,dt\right|<2\varepsilon.$$

Si deduce che per r sufficientemente grande gli

$$\int_{\gamma'} |f_r(t)|\,dt$$

differiscono fra loro per meno di 4ε; ma ε è piccolo a piacere, ed allora per un noto teorema di CAUCHY esiste ed è finito il

(8) $$\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma'} |f_r(t)|\,dt.$$

A causa della (7), per n abbastanza grande, $\int_{\delta_n} |f(t)|\,dt$ differisce abbastanza poco da (8) e quindi esiste il

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\delta_n} |f(t)|\,dt$$

e pel cor. 2 del teor. 17 esiste

$$\int_{\gamma'} |f(t)|\,dt$$

e la $|f(t)|$ è sommabile in γ' e quindi in γ.

Esiste un m' tale che l'integrale di qualsiasi (1') e anche quello della $|f(t)|$ esteso ad un sub-aggregato di γ' di misura $<m'$ sia $<\varepsilon:2$.

Se δ è un tale sub-aggregato è

$$\int_{\delta} |f_n(t)-f(t)|\,dt<\varepsilon.$$

Fissato un r, indichiamo con θ_r l'aggregato dei punti di γ' in cui per ogni $n>r$, sia

$$|f_n(t)-f(t)|<\varepsilon:\mu(\gamma).$$

Esiste poi un $r>0$ per cui

$$\mu(\gamma'-\theta_r)<m'.$$

perchè per la convergenza della (1) verso $f(t)$, ogni punto di γ' appartiene ad un θ_r, e se un punto appartiene ad un θ_r appartiene anche ai successivi.

Per n maggiore di questo r, si ha

$$\int_{\gamma'} |f_n(t)-f(t)|\,dt = \int_{\gamma'-\theta_r} |f_n(t)-f(t)|\,dt + \int_{\theta_r} |f_n(t)-f(t)|\,dt$$
$$< \varepsilon + [\varepsilon : \mu(\gamma)] \cdot \mu(\gamma) = 2\varepsilon$$

e quindi si può concludere che

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma'} |f_n(t)-f(t)|\,dt = 0$$

ed anche che

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma} |f_n(t)-f(t)|\,dt = 0.$$

Dunque la (1) è completamente convergente in g.

Osservazione. - Se (1) è una successione di funzioni completamente convergente in g se $f(t)$ è una sua quasi-limite, e se la misura di g è finita, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_{g} |f_n(t)-f(t)|\,dt = 0 \tag{9}$$

il che è affermato esplicitamente dalla definizione. Però se la misura di g è infinita non si può dire che dalla convergenza completa verso $f(t)$ della (1) in g consegua la (9), e nemmeno si può dire che essendo le (1) sommabili in g e la (1) convergente generalmente verso $f(t)$ ed essendo le integralfunzioni delle (1) equi-assolutamente-continue si abbia la (9). Basta considerare l'aggregato g dei punti $t \geqslant 0$, ed assumere per $f_n(t)$ la funzione che è $=1$ nei punti del tratto $(n, n+1)$ e nulla nei punti rimanenti di g. In tale ipotesi la successione (1) converge in tutto g verso la funzione $f(t)$ che ha il valore 0 in tutti i punti di g, inoltre le integralfunzioni delle (1) sono equi-assolutamente-continue, ma non vale la (9), poichè si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_{g} |f_n(t)-f(t)|\,dt = 1.$$

Se poi sempre assumendo lo stesso g dell'esempio precedente

si prendesse per $f_n(t)$ la funzione che è $=1$ in $(0, n)$ e nulla nei rimanenti punti di g, la (1) convergerebbe verso la $f(t)$ che è $=1$ in tutti i punti di g, le integralfunzioni delle (1) sarebbero ancora equi-assolutamente-continue, ma non si può avere la (9), anche perchè la $f(t)$ non è sommabile in g (essa è solo sommabile nei sub-aggregati di g di misura finita). Però è chiaro che date la successione (1) e la funzione $f(t)$ sommabili in g, se è verificata la (9), la (1) converge completamente in g, ossia sono soddisfatte tutte le condizioni che si richiedono nella def. 11 per la sua completa convergenza.

Teorema 38. - Una successione (1) di funzioni generalmente definite in un aggregato misurabile g e sommabili in ogni sub-aggregato di g misurabile e di misura finita è convergente completamente in g allora e allora soltanto che per ogni sub-aggregato misurabile γ di misura finita di g, si abbia

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} \int_{\gamma} |f_n(t)-f_m(t)|\,dt = 0.$$

Dimostrazione. - La condizione è necessaria. Infatti se f è una quasi-limite di (1) si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma} |f_n - f|\,dt = 0, \qquad \lim_{m\to\infty} \int_{\gamma} |f_m - f|\,dt = 0,$$

quindi

$$0 \leqslant \int_{\gamma} |f_n - f_m|\,dt \leqslant \int_{\gamma} |f_n - f|\,dt + \int_{\gamma} |f_m - f|\,dt$$

e perciò

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} \int_{\gamma} |f_n - f_m|\,dt = 0.$$

La condizione è sufficiente.

Consideriamo un sub-aggregato γ di g misurabile e di misura finita.

Sia poi

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots.$$

una serie convergente di numeri reali >0.

Posto

$$\varrho_i = \varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} + \varepsilon_{i+2} + \ldots.$$

si avrà

$$\lim_{i\to\infty} \varrho_i = 0.$$

Ora si potrà per ogni i trovare un intero $r_i > 0$ tale che, per ogni intero $r > r_i$, si abbia

$$\int_\gamma |f_{r_i}(t) - f_r(t)|\, dt \leq \varepsilon_i^2.$$

Si può inoltre senza difficoltà costruire la successione

$$r_1, \quad r_2, \quad r_3, \dots$$

in modo che ogni termine sia $<$ del successivo.

Indicando con γ_i l'aggregato dei punti di γ in cui

$$|f_{r_i}(t) - f_{r_{i+1}}(t)| > \varepsilon_i$$

si ha

$$\mu(\gamma_i)\varepsilon_i < \int_{\gamma_i} |f_{r_i}(t) - f_{r_{i+1}}(t)|\, dt < \int_\gamma |f_{r_i}(t) - f_{r_{i+1}}(t)|\, dt \leq \varepsilon_i^2$$

e quindi

$$\mu(\gamma_i) < \varepsilon_i.$$

Sia

$$\theta_i = \gamma_i + \gamma_{i+1} + \gamma_{i+2} + \dots$$

Si ha

(10) $$\mu(\theta_i) < \varrho_i,$$

e quindi

$$\lim_{i\to\infty} \mu(\theta_i) = 0.$$

In $\gamma - \theta_i$ è soddisfatta la relazione

$$|f_{r_{i+p}}(t) - f_{r_{i+p+q}}(t)| \leq \sum_0^{q-1}{}_k |f_{r_{i+p+k}}(t) - f_{r_{i+p+k+1}}(t)| \leq$$
$$\leq \varepsilon_{i+p} + \varepsilon_{i+p+1} + \dots + \varepsilon_{i+p+q-1} < \varrho_{i+p}$$

e quindi in $\gamma - \theta_i$ è soddisfatta la condizione di CAUCHY, perchè la successione

(11) $$f_{r_1}, \quad f_{r_2}, \quad f_{r_3}, \dots$$

abbia limite.

Questo sta per ogni i, e quindi, indicando con θ il prodotto di tutti i θ_i, si può concludere che la (11) converge in ogni punto di $\gamma - \theta$, e, poichè θ è di misura nulla [vedi (10)], la (11) converge generalmente in γ.

Resta intanto provato che esiste una successione estratta dalla (1) che converge generalmente in γ.

Io dico che esiste una successione estratta da (1) che converge generalmente in g.

Se $\mu(g)$ è finito basta prendere nelle considerazioni precedenti per γ lo stesso g. Se $\mu(g)$ è infinito si potrà scomporre g nella somma di una infinità numerabile di aggregati misurabili

$$\gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \gamma_3, \dots$$

di misura finita.

Ora esiste una successione (1_1) estratta da (1) che converge generalmente in γ_1.

È evidente che anche (1_1) soddisfa alle stesse ipotesi fatte nell'enunciato per la (1). Esisterà allora una successione (1_2) estratta da (1_1) che converga generalmente in γ_2, poi esisterà una successione (1_3) estratta da (1_2) che converga generalmente in γ_3, e così via.

Sia $f_{s_i}(t)$ la funzione che occupa il posto i-esimo nella successione (1_i). La successione

(12) $$f_{s_1}, \quad f_{s_2}, \quad f_{s_3}, \dots$$

è tale che le sue funzioni dalla i-esima in poi appartengono alla successione (1_i), qualunque sia l'intero i, e quindi essa converge generalmente in ogni γ_i, ed infine converge generalmente in g. Indicheremo con $f(t)$ la funzione verso cui converge.

Sia γ un sub-aggregato misurabile di g di misura finita.

È possibile, per ogni numero reale $\varepsilon > 0$, trovare un intero $k > 0$ tale che per ogni $r > k$, si abbia

$$\int_\gamma |f_r(t) - f_k(t)|\, dt < \varepsilon : 2,$$

e quindi

$$\int_{\gamma'} |f_r(t) - f_k(t)|\, dt < \varepsilon : 2,$$

dove γ' è un qualsiasi sub-aggregato misurabile di γ. È poi possibile trovare un numero reale $m > 0$ tale che, quando $\mu(\gamma') < m$,

$$\int_{\gamma'} |f_k(t)|\, dt < \varepsilon : 2$$

e poichè
$$\int_{\gamma'} |f_r(t)|\,dt \leq \int_{\gamma'} |f_k(t)|\,dt + \int_{\gamma'} |f_r(t) - f_k(t)|\,dt$$
si ha
$$\int_{\gamma'} |f_r(t)|\,dt < \varepsilon.$$

Questo basta per concludere che le integralfunzioni delle (1) considerate definite in γ sono equi-assolutamente-continue. In particolare ciò accadrà anche per le funzioni (12), e si può concludere che la successione (12) converge completamente in γ verso $f(t)$ (teor. 37).

Ora io dico che la (1) converge anch'essa completamente in γ verso $f(t)$. Intanto è

$$\lim_{s_i \to \infty} \int_{\gamma} |f_{s_i}(t) - f(t)|\,dt = 0. \tag{13}$$

Inoltre
$$\int_{\gamma} |f_n(t) - f(t)|\,dt \leq \int_{\gamma} |f_n(t) - f_{s_i}(t)|\,dt + \int_{\gamma} |f_{s_i}(t) - f(t)|\,dt$$
ed essendo
$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ s_i \to \infty}} \int_{\gamma} |f_n(t) - f_{s_i}(t)|\,dt = 0$$
per la (13) si ha
$$\lim_{n \to \infty} \int_{\gamma} |f_n(t) - f(t)|\,dt = 0$$
e poichè γ è un qualunque sub-aggregato misurabile a misura finita di g consegue che la (1) converge completamente in g verso $f(t)$.

Dal contesto della precedente dimostrazione consegue il

Corollario. - Se la successione (1) di funzioni generalmente definite in un aggregato misurabile g e sommabili in ogni sub-aggregato γ di g misurabile e di misura finita è tale che qualunque sia γ si ha
$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} \int_{\gamma} |f_n(t) - f_m(t)|\,dt = 0$$
allora dalla (1) può estrarsi una successione generalmente convergente in g verso una funzione f, e questa f è una quasi-limite

di (1); inversamente se f è una quasi-limite di (1), una successione può estrarsi dalla (1) la quale converge generalmente in g verso la f [teor. 35].

Teorema 39. - Sia $\{f_n(t)\}$ una successione di funzioni sommabili in un aggregato di misura finita g, non negative, e in ogni punto t la successione $\{f_n(t)\}$ non sia decrescente; vogliamo dimostrare che se $\lim_{n \to \infty} \int_g f_n(t)dt$ esiste, allora la successione $f_n(t)$ quando $n \to \infty$ converge verso una funzione $f(t)$ sommabile in g e si ha

$$\lim_{n \to \infty} \int_g f_n(t)dt = \int_g f(t)dt; \tag{14}$$

inversamente se $\lim_{n \to \infty} f_n(t) = f(t)$ ed $f(t)$ è sommabile in g, allora vale la (14).

Dimostrazione. - Supposto che $\lim_{n \to \infty} \int_g f_n(t)dt$ esista, fissato $\sigma > 0$ possiamo per il teorema di Cauchy trovare un intero $n_0 > 0$ tale che per ogni $n \geq n_0$ e qualunque sia l'intero positivo p si abbia
$$0 \leq \left| \int_g f_{n+p}dt - \int_g f_n dt \right| = \int_g |f_{n+p} - f_n|\,dt < \sigma,$$
e ciò porta per il teorema 38 che dalla successione $\{f_n(t)\}$ può estrarsi una successione la quale converge verso una funzione sommabile $f(t)$ che verifica la (14); siccome la $\{f_n(t)\}$ è per ipotesi monotona, si ha evidentemente $\lim_{n \to \infty} f_n(t) = f(t)$.

Inversamente sia $\lim_{n \to \infty} f_n(t) = f(t)$ ed $f(t)$ sommabile in g. Qualunque sia il sub-aggregato γ' di g, misurabile, si ha
$$0 \leq \int_{\gamma'} |f_n(t)|\,dt \leq \int_{\gamma} f(t)dt;$$
le integral-funzioni dei valori assoluti dei termini della successione $\{f_n(t)\}$ sono perciò equiassolutamente continue, e per il teorema 37 ne consegue la (14).

CAPITOLO V.

Derivazione.

§ 1. - Numeri derivati. Derivate.

1. - *Definizione* 1. - Sia $f(h)$ una funzione della variabile h in un aggregato γ e supponiamo che h_0 sia un punto limite di γ.

Indichiamo con γ_1 l'aggregato dei punti di γ che seguono h_0 e con γ_2 l'aggregato dei punti di γ che precedono h_0.

Se h_0 è anche punto limite di γ_1, in un intorno destro σ di h_0 cadono infiniti punti di γ. Indichiamo con l_σ e L_σ il limite inferiore ed il limite superiore dei valori di $f(h)$ in questo intorno.

l_σ non decresce col tendere a zero della lunghezza di σ ed L_σ non cresce col tendere a zero della lunghezza di σ.

Allora l_σ ed L_σ hanno un limite col tendere a zero della lunghezza di σ (1). Siano l ed L questi limiti. Noi diremo che l è il *limite di indeterminazione inferiore destro* di $f(t)$, e che L è il *limite di indeterminazione superiore destro* di $f(t)$ per $h \to h_0+$ (2).

È certamente
$$l \leq L.$$

Se poi h_0 è punto limite di γ_2, si potranno definire in modo ana-

(1) Che sono evidentemente il limite superiore di l_σ ed il limite inferiore di L_σ.

(2) Si dice anche che l e L sono il *minimo limite destro* e il *massimo limite destro* di $f(h)$ per $h \to h_0+$ e si scrive
$$\underline{\lim}_{h \to h_0+} f(h) = l, \qquad \overline{\lim}_{h \to h_0+} f(h) = L.$$

logo i *limiti di indeterminazione inferiore* e *superiore sinistro* di $f(h)$ per $h \to h_0-$ (1).

Se $f'(h) = -f(h)$, stabilito che l'_σ, L'_σ, l' ed L' abbiano per la f' lo stesso significato che l_σ, L_σ, l ed L hanno per f, si ha subito
$$l'_\sigma = -L_\sigma, \quad L'_\sigma = -l_\sigma$$
e quindi
$$l' = -L, \quad L' = -l,$$
e si ha il

TEOREMA 1. - Se $f(h)$ ed $f'(h)$ sono due funzioni contrarie in γ, e se h_0 è un punto limite di γ, il limite di indeterminazione superiore destro (sinistro) in h_0 di una qualunque di esse è contrario del limite di indeterminazione inferiore destro (sinistro) in h_0 dell'altra.

Se poi $f(h)$ e $f'(h)$ sono due qualunque funzioni in γ, conservando per esse tutte le notazioni precedentemente usate, ponendo $f''(h) = f(h) + f'(h)$ e al solito indicando per f'' con l''_σ, L''_σ, l'' L'' ciò che per f si indicava con l_σ, L_σ, l, L, si ha
$$l''_\sigma \leq l_\sigma + L'_\sigma.$$

Infatti se ε è un numero reale >0, in σ esisterà un punto in cui $f < l_\sigma + \varepsilon$ in esso è $f' \leq L'_\sigma$ e quindi $f + f' < l_\sigma + L'_\sigma + \varepsilon$, ed ε è piccolo a piacere.

In modo analogo si ha
$$L''_\sigma \geq l_\sigma + L'_\sigma$$
e si deduce che
$$l'' \leq l + L' \leq L''.$$

Inoltre si vede che
$$l'' \geq l + l', \qquad L'' \leq L + L'$$
perciò
$$l + l' \leq l'' \leq \left\{ \begin{matrix} l + L' \\ L + l' \end{matrix} \right\} \leq L'' \leq L + L',$$
e si ha il

TEOREMA 2. - I limiti di indeterminazione destri (sinistri) della somma di due funzioni comprendono la somma del limite di inde-

(1) I limiti di indeterminazione inferiore e superiore sinistro (*minimo limite sinistro, massimo limite sinistro*) si indicano con i simboli
$$\underline{\lim}_{h \to h_0-} f(h), \qquad \overline{\lim}_{h \to h_0-} f(h).$$

terminazione inferiore destro (sinistro) di una qualunque di esse e del limite di indeterminazione superiore destro (sinistro) dell'altra e sono compresi fra la somma dei limiti di indeterminazione inferiori destri (sinistri) e la somma dei limiti superiori di indeterminazione destri (sinistri) delle due funzioni.

Se $f(t, h)$ è una funzione delle due variabili t ed h, definita per ogni coppia di valori di t ed h, il primo scelto in un aggregato g ed il secondo in un aggregato γ, se, come precedentemente, h_0 è un punto limite di γ, se γ_1 è l'aggregato dei punti di γ che seguono h_0 e se $\gamma_2 = \gamma - \gamma_1$, tutte le volte che h_0 è un punto limite di γ_1, esiste per ogni t un limite di indeterminazione inferiore destro $l_d(t)$ ed un limite di indeterminazione superiore destro $L_d(t)$ della $f(t, h)$ in h_0 che col variare di t risultano due funzioni di t in g. Analogamente se h_0 è punto limite di γ_2 si otterranno altre due funzioni di t, $l_s(t)$ ed $L_s(t)$ che per ogni valore di t sono uguali rispettivamente al limite di indeterminazione inferiore sinistro ed al limite di indeterminazione superiore sinistro di $f(t, h)$ in h_0.

Osservazione. - Se $f(t, h)$ è una funzione definita per il variare della t in un aggregato g, e per il variare della h nell'aggregato γ dei valori

$$h = 1, \quad h = 2, \quad h = 3, \ldots$$

l'aggregato γ ha un solo punto limite $h = +\infty$ e quindi ammette i soli limiti di indeterminazione sinistri per $h = +\infty$. Essi sono i limiti di indeterminazione definiti al Cap. III, def. 3 per la successione

$$f_1(t), \quad f_2(t), \quad f_3(t), \ldots$$

dove $f_n(t) = f(t, n)$.

2. - Teorema 3. - Se $f(t, h)$ è una funzione delle due variabili t ed h, la prima variante in un aggregato misurabile g, la seconda variante in un tratto (p, q), se per ogni h di (p, q) la $f(t, h)$ è una funzione misurabile di t in g, se h_0 è un punto di (p, q) e se per ogni t la $f(t, h)$ è una funzione continua di h in ogni punto di (p, q) eccettuato al più h_0, i limiti di indeterminazione di $f(t, h)$ per $h \to h_0$ [1] sono funzioni misurabili in g.

[1] Se $h_0 = p$, si potrà parlare solo di limiti di indeterminazione destri,

Dimostrazione. - Supposto $h_0 \neq q$, indico per ogni t con $L_{h'}(t)$ il limite superiore di $f(t, h)$ per h variante in $(h_0; h')$; $h' \geqslant h > h_0$.

Sia α un numero reale. Se, per un particolare t, $L_{h'}(t) > \alpha$, esiste un h in (h_0, h') per cui $f(t, h) > \alpha$ e viceversa, e per la continuità della $f(t, h)$ rispetto ad h, esiste un numero razionale ϱ $(h' \geqslant \varrho > h_0)$ per cui $f(t, \varrho) > \alpha$. Indicando con δ_ϱ l'aggregato dei punti di g in cui $f(t, \varrho) > \alpha$, δ_ϱ è, per l'ipotesi, misurabile.

La somma di tutti i δ_ϱ con ϱ razionale contenuto in (h_0, h') $(h' \geqslant \varrho > h_0)$ è misurabile ed è l'aggregato dei punti in cui $L_{h'}(t) > \alpha$. Si conclude che $L_{h'}(t)$ è misurabile.

Sia ora

$$h_1, \quad h_2, \quad h_3, \ldots$$

una successione di punti di (h_0, q), $h_n > h_0$, decrescente e tendente ad h_0. Evidentemente il limite di indeterminazione superiore destro $L(t)$ di $f(t, h)$ per $h \to h_0$ è $\lim_{n \to \infty} L_{h_n}(t)$, e quindi (Cap. III, teor. 8) $L(t)$ è misurabile.

In modo analogo si dimostra la misurabilità di tutti gli altri limiti di indeterminazione che la $f(t, h)$ può ammettere per $h = h_0$.

Osservazione. - Questo teorema deve essere confrontato col teor. 9 del Cap. III quando in esso si ponga $n = h$ ed $f_h(t) = f(t, h)$. In entrambi i teoremi si fa l'ipotesi che per ogni valore di h la $f(t, h)$ risulti una funzione misurabile della t in un aggregato misurabile g, ma mentre nel teor. 9 del Cap. III si conclude per la misurabilità dei limiti di indeterminazione senza aggiungere altra ipotesi, nel precedente teorema per conseguire la stessa tesi si è dovuto aggiungere una ipotesi ulteriore, cioè la continuità della $f(t, h)$ rispetto ad h. La differenza ha la sua ragione nel fatto che nel teor. 9 del Cap. III l'aggregato γ in cui varia h è numerabile e nel teorema precedente è continuo.

Che nelle condizioni del teorema precedente sia necessaria qualche altra ipotesi oltre quella della misurabilità della $f(t, h)$ come funzione di t, lo si vede nel modo seguente.

Sia g' un sub-aggregato *non misurabile* di g, ed avente la

se $h_0 = q$, solo di limiti di indeterminazione sinistri, per ogni altro h_0 si avranno 4 limiti di indeterminazione.

potenza del continuo [1]. Nell'ipotesi che sia $h_0 \neq q$, si consideri una successione di punti di (p, q)

$$h_1, \quad h_2, \quad h_3, \ldots$$

$h_n > h_0$, decrescente e tendente ad h_0.

Si indichi con γ_n l'aggregato dei punti h per cui $h_n > h \geqq h_{n+1}$. Si stabilisca una corrispondenza biunivoca fra γ_n e g'. Risulta allora una corrispondenza fra g' e l'aggregato γ' dei punti interni ad (h_0, h_1). In questa corrispondenza ad ogni punto di γ' corrisponde un sol punto di g' e ad ogni punto di g' una infinità numerabile di punti di γ' avente per unico punto limite il punto h_0.

Ora se noi, per ogni h di γ' facciamo

$$f(t, h) = 1$$

se t è il punto di g' che corrisponde ad h, ed

$$f(t, h) = 0$$

nei rimanenti punti di g, vediamo che mentre la $f(t, h)$ risulta misurabile in g per ogni h, il limite di indeterminazione superiore destro per $h = h_0$ è uguale a 1 in g' ed uguale a 0 in $g - g'$ e quindi non è misurabile.

3. - Se $f(t)$ è una funzione continua della variabile t in un tratto $\sigma = (a, b)$, il rapporto

$$\varphi(t, h) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

è una funzione continua e quindi misurabile della t in σ (Cap. III, teor. 12) ed è pure continua della variabile h in un intorno destro di $h = 0$ se $t \neq b$ ed in un intorno sinistro di $h = 0$ se $t \neq a$.

Esistono adunque in tutti i punti interni a σ quattro limiti di indeterminazione della $\varphi(t, h)$, e questi limiti sono funzioni misurabili.

Definizione 2. - Se $f(t)$ è una funzione continua della variabile t in un tratto σ, i limiti di indeterminazione superiore destro, inferiore destro, superiore sinistro, inferiore sinistro della

$$\varphi(t, h) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

[1] Cfr. Cap. II, § 5, n.° 2.

per $h \to 0$ si chiamano rispettivamente i ***numeri derivati, superiore destro, inferiore destro, superiore sinistro, inferiore sinistro*** della $f(t)$ o i numeri derivati del DINI [1], e si ha il

TEOREMA 4. - I numeri derivati di una funzione continua in un tratto sono funzioni misurabili.

Consegue il

Corollario. - L'aggregato dei punti in cui un numero derivato di una funzione continua è infinito è misurabile.

Dai teor. 1 e 2 conseguono poi i seguenti corollari:

Corollario 1. - Se due funzioni sono continue e contrarie in un tratto, il numero derivato superiore destro (sinistro) di una qualsiasi di esse è contrario del numero derivato inferiore destro (sinistro) dell'altra.

Corollario 2. - I numeri derivati destri (sinistri) della somma di due funzioni continue comprendono la somma del numero derivato inferiore destro (sinistro) di una qualunque di esse e del numero derivato superiore destro (sinistro) dell'altra.

Dai quali consegue il

Corollario 3. - Se due funzioni continue $f(t)$ e $\varphi(t)$ hanno generalmente uguali i numeri derivati superiori destri (sinistri), i numeri derivati destri (sinistri) di $f(t) - \varphi(t)$ comprendono lo zero.

4. - *Definizione* 3. - Se una funzione continua in un tratto $\sigma = (a, b)$ ha in un punto t di σ uguali tutti i numeri derivati destri (sinistri) si dice che la funzione ha ***derivata destra*** (***sinistra***) in t, ed il valore comune di detti numeri derivati si chiama la ***derivata destra*** (***sinistra***) della funzione nel punto t.

Se la derivata destra e la derivata sinistra coincidono in un punto t si dice che la funzione ha ***derivata*** in t e il valore comune della derivata destra e sinistra chiamansi la ***derivata*** della funzione nel punto t.

Dalla misurabilità dei numeri derivati consegue il

TEOREMA 5. - L'aggregato dei punti in cui una funzione continua ha derivata è misurabile.

Dimostrazione. - Infatti se f_1, f_2, f_3, f_4 sono i quattro numeri

[1] U. DINI: *Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali* (Pisa, 1878), p. 192. Il DINI usa il termine « *estremi oscillatori* ».

derivati della funzione, risulta che sono misurabili gli aggregati in cui si annulla una delle funzioni f_2-f_1, f_3-f_1, f_4-f_1, e quindi è misurabile il loro prodotto che è appunto l'aggregato in cui la funzione ha derivata.

§ 2. - Derivabilità delle integralfunzioni.

1. Aggregato dei punti in cui è infinito un numero derivato di funzione a variazione limitata. - 2. Mensurale di un aggregato di misura finita. - 3. Numeri derivati di una mensurale. - 4. Condizione sufficiente perchè una funzione assolutamente continua sia costante. Corollari. - 5. Criterio di separazione di aggregati misurabili distinti. - 6. Sommabilità dei numeri derivati delle funzioni a variazione limitata. - 7. Derivabilità delle integralfunzioni. - 8. Derivabilità delle funzioni assolutamente continue. - 9. La variazione totale di una funzione assolutamente continua. - 10. Integrazione per parti.

1. - TEOREMA 6. - L'aggregato in cui un numero derivato di una funzione continua e a variazione limitata è infinito è un aggregato di misura nulla.

Dimostrazione. - Mi limito a dimostrare il teorema per il numero derivato superiore destro.

Per gli altri numeri derivati la dimostrazione si conduce in modo analogo.

Sia adunque $f(t)$ una funzione continua e a variazione limitata in un tratto finito $\sigma=(a, b)$, e sia $L(t)$ il suo numero derivato superiore destro.

Sia g l'aggregato dei punti in cui $L(t)$ è infinito.

Indichiamo con g' l'aggregato dei punti di g diversi da b. Sarà $\mu(g)=\mu(g')$.

Fisso un numero reale M maggiore di zero. Se t è un punto di g', essendo in esso infinito il valore di $L(t)$, esisteranno degli intorni destri di t cadenti in σ, e quindi del tipo (t, t') con $t<t'\leqq b$, per cui

$$\left|\frac{f(t')-f(t)}{t'-t}\right|>M,$$

ossia

$$|f(t')-f(t)|>M(t-t').$$

Allora ad ogni punto di g' viene a corrispondere almeno uno di tali intorni, e se $\mu(g)>0$ si potrà pel teorema geometrico (Cap. II, § 4, n.° 8) trovare un numero finito di tali intorni a due a due distinti, le cui lunghezze abbiano una somma $\mu(g)/2$.

Siano essi

$$(t_i, t_i') \qquad (i=1, 2, 3,\dots, n).$$

Poichè

$$|f(t_i')-f(t_i)|>M(t_i'-t_i)$$

si ha anche

$$\sum_i |f(t_i')-f(t_i)|>M\sum_i(t_i'-t_i)>M\cdot\mu(g)/2.$$

Ma M può essere grande a piacere e ne conseguirebbe che la variazione totale di $f(t)$ sarebbe infinita contrariamente all'ipotesi. È dunque $\mu(g)=0$.

2. - *Definizione* 4. - Se g è un aggregato misurabile di misura finita, la funzione uguale a 1 in tutti i punti di g è sommabile in g (Cap. IV, teor. 8) e la sua integralfunzione è una funzione $m(t)$ che per ogni t è uguale alla misura dell'aggregato g_t dei punti di g che precedono t. Diremo che $m(t)$ è la *mensurale* di g.

TEOREMA 7. - Se B è un boreliano semplice di lunghezza finita, se g è l'aggregato dei punti di B, la mensurale di g ha derivata uguale a 1 in tutti i punti di g, interni a B (e ciò è molto evidente) ed ha derivata generalmente uguale a zero nell'aggregato g' dei rimanenti punti della retta.

Dimostrazione. - Sia $m(t)$ la mensurale di g. Siccome è chiaro che ogni rapporto incrementale di $m(t)$ è $\geqq 0$, basterà provare che sono generalmente nulli in g' i suoi numeri derivati superiori. Provo che il numero derivato superiore destro di $m(t)$ è generalmente nullo in g'. Sia $L(t)$ tale numero derivato. Supposto che esso sia >0 in un sub-aggregato di g' di misura >0, esisterà un numero reale $\eta>0$ tale che il sub-aggregato g'' di g' in cui $L(t)>\eta$ sia di misura $\mu>0$.

È possibile, prefissato un numero reale $\varepsilon>0$, spezzare B in due boreliani B' e B'', il primo costituito di un numero finito di tratti, ed il secondo di lunghezza $<\varepsilon$.

Gli estremi dei tratti di B' dividono la retta in un numero finito di tratti, di cui alcuni formano il boreliano B', e i rimanenti formano un boreliano B^0 che è costituito anch'esso di un numero finito di tratti.

I punti di g che cadono in B^0 sono quelli che cadono in B'' e quindi formano un aggregato di misura $<\varepsilon$.

I punti di g' e quindi anche quelli di g'' cadono in B^0.

Indichiamo con g^0 l'aggregato dei punti di g'' che non sono estremi destri di tratti di B^0. Sarà $\mu(g^0)=\mu$.

A ciascun punto di g^0 sono associati infiniti intorni destri cadenti in uno dei tratti di B^0 tali che se (t, t') è uno di essi si abbia

$$\frac{m(t')-m(t)}{t'-t}>\eta$$

e quindi

$$m(t')-m(t)>\eta(t'-t).$$

Per il teorema geometrico (Cap. II, § 4, n.° 8) esiste un numero finito di questi intorni a due a due distinti, le cui lunghezze hanno una somma maggiore di $\mu/2$.

Siano essi

$$(t_i,\ t_i') \qquad (i=1, 2, 3,\ldots, n).$$

Per ciascuno di essi si ha

$$m(t_i')-m(t_i)>\eta(t_i'-t_i)$$

e sommando

$$\sum_i [m(t_i')-m(t_i)]>\eta\cdot\mu/2.$$

Ma i tratti (t_i, t_i') sono interni ai tratti di B^0 e quindi il sub-aggregato di g che contengono è di misura $<\varepsilon$. Dunque, deve essere

$$\sum_i [m(t_i')-m(t_i)]<\varepsilon,$$

e quindi

$$\eta\cdot\mu/2<\varepsilon.$$

Ma ε può essere piccolo a piacere, e quindi deve essere $\mu=0$ ed $L(t)$ è generalmente nullo in g'.

In modo analogo si dimostra che il numero derivato superiore sinistro di $m(t)$ è generalmente nullo in g'.

3. - TEOREMA 8. - Se g è un aggregato misurabile di punti di una retta r, se γ è l'aggregato dei punti di r che non appartengono a g, se infine g ha misura finita, la mensurale $m(t)$ di g ha derivata generalmente su r, e questa derivata è generalmente uguale ad 1 in g e generalmente uguale a zero in γ.

Dimostrazione. - Sia B una copertura semplice di g e avente lunghezza $<\mu(g)+\varepsilon$, dove ε è un numero reale >0 prefissato.

Sia $M(t)$ la mensurale dell'aggregato G dei punti di B.

Se $\sigma=(t, t')$ è un tratto finito qualunque, $m(t')-m(t)$ è la misura del sub-aggregato g_0 di g che cade in σ ed $M(t')-M(t)$ è la misura del sub-aggregato G_0 di G che cade in σ. Ma evidentemente g_0 è sub-aggregato di G_0. Sarà quindi

$$m(t')-m(t)\leq M(t')-M(t)$$

ed infine

$$\frac{m(t')-m(t)}{t'-t}\leq\frac{M(t')-M(t)}{t'-t}.$$

Ogni rapporto incrementale di $m(t)$ è $\leq$ del corrispondente di $M(t)$, inoltre esso è sempre ≥ 0 e quindi, poichè la $M(t)$ ha derivata generalmente nulla nell'aggregato G' dei punti di r che non appartengono a G, anche $m(t)$ avrà derivata generalmente nulla in G'. In altri termini, se g' è l'aggregato dei punti di r che non appartengono a g, l'aggregato dei punti di g' in cui la $m(t)$ non ha derivata nulla deve avere estensione $<\varepsilon$, e poichè ε può essere piccolo a piacere, la $m(t)$ ha derivata generalmente nulla in g'.

Consideriamo ora un tratto finito (a, b), indichiamo con γ' il sub-aggregato di g' che cade in (a, b). L'aggregato γ' ha misura finita e la sua mensurale è una funzione $k(t)$ nulla per $t<a$, uguale a $t-m(t)+C$ dove $C=m(a)-a$ per t contenuto in (a, b), uguale a $b-m(b)+C$ per $t>b$. La $k(t)$ ha derivata generalmente nulla nell'aggregato dei punti di r che non appartengono a γ' e quindi ha derivata generalmente nulla nel sub-aggregato g^0 dei punti di g che cadono in (a, b). Consegue che $m(t)$ ha generalmente derivata nei punti di g^0 e che generalmente in essa è

$$1-m'(t)=0$$

dove $m'(t)$ indica la derivata di $m(t)$.

Allora la $m(t)$ ha generalmente derivata uguale ad 1 in g^0 e immaginando di far tendere a a $-\infty$ e b a $+\infty$ si può concludere che la $m(t)$ ha derivata generalmente uguale ad 1 in g ed il teorema è dimostrato.

4. - TEOREMA 9. - Se una funzione $f(t)$ è assolutamente continua in un tratto $\sigma=(p, q)$, se $L(t)$ ed $l(t)$ sono il numero derivato superiore destro ed il numero derivato inferiore destro di $f(t)$, e se l'aggregato γ dei punti di σ in cui non è $L(t)\geqslant 0 \geqslant l(t)$ ha misura nulla, la $f(t)$ è costante.

Dimostrazione. - Intanto, prefissato un numero reale $\varepsilon>0$, si può determinare un $m>0$ per cui per ogni boreliano semplice B contenuto in σ di lunghezza $<m$ la norma di $f(t)$ in B sia $<\varepsilon$.

Siano a e b $(a<b)$ due punti finiti di σ, e si ponga $\mu=b-a$. L'aggregato g dei punti di (a, b) che non appartengono a γ ha misura uguale a μ. Ad ogni punto t di g diverso da b si può far corrispondere almeno un intorno destro (t, t') contenuto in (a, b) per cui

$$\left|\frac{f(t')-f(t)}{t'-t}\right|<\varepsilon \quad (^1)$$

e quindi

$$|f(t')-f(t)|<\varepsilon(t'-t).$$

Esiste allora pel teorema geometrico un numero finito di tali tratti a due a due distinti, le cui lunghezze abbiano una somma $>\mu-m$.

Essi formano un boreliano B contenente un numero finito di tratti distinti, tale che la norma in esso della $f(t)$ risulta $<\varepsilon\cdot\mu$. Le porzioni rimanenti di (a, b) costituiscono un boreliano B'' (anch'esso evidentemente costituito da un numero finito di tratti distinti) di lunghezza $<m$, e quindi tale che la norma di $f(t)$ in esso è $<\varepsilon$.

Consegue che la norma di $f(t)$ in $B'+B''$ è $<(\mu+1)\varepsilon$.

Ora $f(b)-f(a)$ è uguale evidentemente alla somma degli incrementi di $f(t)$ relativi ai tratti di $B'+B''$ e quindi il suo modulo è $\leqslant$ della norma di $f(t)$ in $B'+B''$.

Dunque

$$|f(b)-f(a)|\leqslant(\mu+1)\varepsilon.$$

(1) Infatti se si avesse, qualunque sia t',

$$|[f(t')-f(t)]/(t'-t)|\geqslant\varepsilon,$$

siccome t non è in γ, si possono considerare due punti t_1 e t_2 a destra di t per i quali si ha

$$[f(t_1)-f(t)]/(t_1-t)\leqslant-\varepsilon, \qquad [f(t_2)-f(t)]/(t_2-t)\geqslant\varepsilon$$

e per la continuità di $f(t)$ esiste un punto t' compreso tra t_1 e t_2 per il quale

$$[f(t')-f(t)/(t'-t)=0.$$

Ma ε può essere preso piccolo a piacere, quindi

$$f(b)=f(a)$$

e si conclude che la $f(t)$ è costante.

Corollario 1. - Se $f(t)$ e $\varphi(t)$ sono due funzioni continue in un tratto σ, che hanno generalmente uguali i loro numeri derivati superiori destri, e se la loro differenza è assolutamente continua, questa differenza è una costante.

Dimostrazione. - Infatti se $L(t)$ ed $L'(t)$ sono i numeri derivati superiori destri di $f(t)$ e $\varphi(t)$, la $L(t)-L'(t)$ è generalmente nulla, ed è compresa fra i numeri derivati destri di $f(t)-\varphi(t)$ (teor. 4, cor. 3). Allora essendo $f(t)-\varphi(t)$ assolutamente continua, la $f(t)-\varphi(t)$ è costante.

Corollario 2. - Due funzioni assolutamente continue che hanno uguali generalmente i loro numeri derivati superiori destri differiscono per una costante.

5. - TEOREMA 10. - Se

$$g_i \qquad (i=1, 2, 3,\ldots, n)$$

sono n aggregati misurabili e a due a due distinti di punti di una retta r, è possibile trovare n boreliani semplici

$$B_i \qquad (i=1, 2, 3,\ldots, n)$$

ciascuno costituito da un numero finito di tratti finiti, tali che la loro somma sia pure un boreliano semplice (e quindi tali che ognuno di essi cada completamente all'esterno di qualsiasi altro) in guisa che il sub-aggregato di g_i che cade in B_i sia di misura $>\mu(g_i):2$.

Dimostrazione. - Pongo per brevità $m_i=\mu(g_i)$ ed indico con q un numero reale positivo minore di ciascuno degli n numeri

$$m_i:(2n) \qquad (i=1, 2, 3,\ldots, n).$$

Sia B_1' una copertura semplice di g_1, la cui lunghezza sia $<m_1+q$. Da questa copertura si può estrarre un numero finito di tratti che contenga un sub-aggregato g_1' di g_1 la cui misura sia $>m_1:2$. Essi formano un boreliano B_1. I punti di B_1 che non appartengono a g_1 (essendo parte di quelli di B_1' che non appartengono a g_1) formano un aggregato di misura $<q$.

Allora il sub-aggregato di g_2 formato coi suoi punti non contenuti in B_1 ha misura $m_2' > m_2 - q$, e quindi $> m_2 : 2$.

Esiste una copertura semplice B_2' di questo sub-aggregato formata con segmenti tutti esterni a B_1, la cui lunghezza sia minore di $m_2' + q$. Da questa potremo estrarre un boreliano semplice B_2 formato con un numero finito di tratti, tale che il sub-aggregato g_2' di g_2 che cade in esso sia di misura $> m_2 : 2$. I punti di B_2 che non appartengono a g_2 formano un aggregato di misura minore di q.

Il sub-aggregato di g_3, formato coi suoi punti non appartenenti nè a B_1 nè a B_2, ha misura $> m_3 - 2q$ e quindi maggiore di $m_3 : 2$. Con procedimento analogo al precedente si troverà un boreliano semplice B_3 costituito da un numero finito di tratti esterni ai tratti di B_1 e di B_2, contenente un sub-aggregato g_3' di g_3 di misura maggiore di $m_3 : 2$ e così via continuando. Il teorema è dunque dimostrato.

Se fra gli aggregati g_i ve ne fosse qualcuno di misura nulla, corrispondentemente ad esso, si prenderà un boreliano nullo.

Il fatto enunciato nel precedente teorema si potrà richiamare col nome di **criterio di separazione di aggregati misurabili distinti.**

6. - TEOREMA 11. - Un numero derivato di una funzione continua e a variazione limitata in un tratto finito è sommabile in questo tratto.

Dimostrazione. - Consideriamo una funzione continua e a variazione limitata $f(t)$ e un suo numero derivato destro $\varphi(t)$. Per ogni numero intero $r > 0$, indichiamo con g_r l'aggregato dei punti in cui il modulo di $\varphi(t)$ sia $\geqslant r-1$ e $< r$. Poniamo $m_r = \mu(g_r)$.

Consideriamo gli aggregati

$$g_r \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Per il precedente criterio noi possiamo associare a ciascun g_r un boreliano semplice B_r costituito di un numero finito di tratti, in modo che la somma di tutti gli n B_r sia un boreliano semplice ed in modo che in ogni B_r cada un sub-aggregato g_r' di g_r avente misura $> m_r/2$.

Indichiamo con g_r'' l'aggregato dei punti di g_r' che non sono estremi destri di tratti di B_r.

Se t appartiene a g_r'' si ha in esso $r-1 \leqslant |\varphi(t)| < r$ e possiamo associare a t un suo intorno destro (t, t') appartenente ad ad un tratto di B_r per cui

$$\left|\frac{f(t') - f(t)}{t' - t}\right| > r - 2.$$

Di questi se ne può trovare un numero finito di distinti la cui lunghezza superi $m_r/3$ (Cap. II, § 4, n.° 8). Essi formeranno un boreliano semplice C_r, e

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_n$$

è un boreliano semplice C, tale che la norma di $f(t)$ in esso è maggiore di $\sum_{1}^{n}{}_r (r-2) m_r/3$. Ma certamente questa norma è $\leqslant$ della variazione totale V della $f(t)$, e quindi

$$\sum_{1}^{n}{}_r (r-2) \cdot m_r < 3V.$$

il che prova che la serie

$$\sum\nolimits_r (r-2) m_r$$

e quindi anche la serie

$$\sum\nolimits_r r \cdot m_r$$

converge. La funzione uguale ad r in g_r è una maggiorante di $|\varphi(t)|$ ed è, per la convergenza della $\sum_r r \cdot m_r$ sommabile, dunque anche $\varphi(t)$ è sommabile.

In modo analogo si dimostra che ogni numero derivato sinistro di $f(t)$ è sommabile.

Corollario. - I numeri derivati di una funzione assolutamente continua sono sommabili in ogni tratto finito (Cap. III, teor. 35).

7. - TEOREMA 12. - La integralfunzione $F(t)$ di una funzione $f(t)$ sommabile in un aggregato g di punti di una retta r, ha generalmente derivata su r, e questa derivata è generalmente uguale ad $f(t)$ sui punti di g e generalmente nulla nell'aggregato g' dei punti rimanenti di r.

Dimostrazione. - Supponiamo che la $f(t)$ abbia generalmente in g un solo numero finito di valori diversi

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \ldots, \quad \lambda_n.$$

Indichiamo con g_i l'aggregato dei punti di g in cui $f(t)=\lambda_i$, e con $m_i(t)$ la mensurale di g_i.

Si ha allora (Cap. IV, teor. 16)

$$F(t)=\sum_{1}^{n}{}_i \lambda_i m_i(t).$$

Ma $m_i(t)$ ha generalmente derivata su r, generalmente uguale ad 1 su g_i, ed uguale a zero nell'aggregato dei rimanenti punti di r (teor. 8).

Allora $F(t)$ ha generalmente derivata su r, generalmente uguale ad $f(t)$ su g, e generalmente nulla su g'.

Supponiamo ora che $f(t)$, pur non essendo nelle semplici condizioni precedenti, sia limitata in g. Indichiamone con l ed L il limite inferiore ed il limite superiore.

Sia ε un qualunque numero reale >0.

Dividiamo il tratto (l, L) in un numero finito di parti di lunghezza $<\varepsilon$ con dei punti

$$l=\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3< \ldots <\lambda_n=L$$

ed indichiamo con g_i l'aggregato dei punti in cui

$$\lambda_{i-1} \leqslant f(t) < \lambda_i,$$

con $\varphi(t)$ la quasi-costante che in ogni g_i è uguale a λ_i, e con $\psi(t)$ la quasi-costante che in ogni g_i ha il valore λ_{i-1}.

La $\varphi(t)$ è una maggiorante di $f(t)$ e la $\psi(t)$ è una minorante di $f(t)$.

Siano $P(t)$ e $Q(t)$ le integralfunzioni di $\varphi(t)$ e $\psi(t)$.

È evidente che per ogni tratto finito (t, t') è

$$P(t')-P(t) \geqslant F(t')-F(t) \geqslant Q(t')-Q(t)$$

e che quindi ogni rapporto incrementale della $F(t)$ è compreso fra i corrispondenti rapporti incrementali delle $P(t)$ e $Q(t)$.

Ma questi in un punto generico [1] di g_i tendono rispettivamente a λ_i e a λ_{i-1}, dunque per intorni sufficientemente piccoli di un punto generico di g_i il rapporto incrementale di $F(t)$ resta compreso fra $\lambda_i+\varepsilon$ e $\lambda_{i-1}-\varepsilon$, e quindi differisce da $f(t)$ per meno di 2ε.

Si conclude che preso un $\varepsilon>0$ piccolo a piacere, per un punto generico di g e per suoi intorni sufficientemente piccoli il rapporto incrementale di $F(t)$ differisce da $f(t)$ per meno di 2ε, e che quindi la $F(t)$ ha generalmente derivata in g, e che questa derivata è generalmente in g uguale ad $f(t)$.

In modo analogo si vede che la $F(t)$ ha generalmente derivata in g' e che questa è generalmente nulla in g'.

Resta a considerare il caso in cui la $f(t)$ non è limitata.

Poichè ogni funzione sommabile si può considerare come la differenza di due funzioni sommabili positive, si possono limitare le considerazioni al caso in cui in tutto g è $f(t) \geqslant 0$.

Sia adunque tale la $f(t)$.

Per ogni numero intero $n>0$ indico con g_n l'aggregato dei punti in cui $f(t) \leqslant n$, con $f_1(t)$ la $f(t)$ considerata in $g-g_n$, con $f_2(t)$ la $f(t)$ considerata in g_n, con $F_i(t)$ la integralfunzione di $f_i(t)$ $(i=1,2)$ ed infine con $\varphi(t)$ la funzione definita in tutta la r, che in g coincide colla $f(t)$ e che nei punti di g' è uguale a zero.

Si ha

$$F(t)=F_1(t)+F_2(t).$$

Pel teor. 2 i numeri derivati destri di $F(t)$ sono $\geqslant$ della somma dei numeri derivati inferiori destri delle $F_1(t)$ e $F_2(t)$, ma la $F_2(t)$ ha generalmente in g_n derivata uguale a $f(t)$, e il numero derivato inferiore destro di $F_1(t)$ è non negativo, quindi i numeri derivati destri di $F(t)$ sono in g_n, $\geqslant f(t)$, e poichè ogni punto di g appartiene a qualche g_n la $F(t)$ ha generalmente in g numeri derivati destri $\geqslant f(t)$. Nei rimanenti punti i numeri derivati destri di $F(t)$ sono $\geqslant 0$, e quindi si può affermare che generalmente su r la $F(t)$ ha numeri derivati destri $\geqslant \varphi(t)$.

Io dico che essi sono generalmente su r uguali a $\varphi(t)$.

Intanto se ciò non fosse esisterebbe un numero reale $k>0$ tale che l'aggregato γ dei punti in cui il numero derivato superiore

[1] Punto generico di g_i indica un punto dell'aggregato g_i' ottenuto da g_i sopprimendo da questo un aggregato di misura nulla.

destro di $F(t)$ è $>\varphi(t)+k$ avrebbe misura $m>0$. Sia γ' il subaggregato di γ in cui la derivata di $F_2(t)$ esiste [nulla o uguale a $\varphi(t)$.] È $\mu(\gamma')=m$, e in ogni punto t di γ' il numero derivato superiore destro di $F_1(t)$ è $>k$.

Ora ad ogni punto t di γ' si può associare un intorno destro (t, t') in cui

$$\frac{F_1(t')-F_1(t)}{t'-t}>k/2.$$

Si può trovare un numero finito di tali intorni a due a due distinti le cui lunghezze hanno una somma $>m/2$. Essi formano un boreliano B in cui la norma di $F_1(t)$ è $>km/4$.

Ma questa norma deve essere

$$\leqslant \int_{g-g_n} f(t)dt,$$

quindi

$$\int_{g-g_n} f(t)dt>km/4.$$

Ora k ed m sono indipendenti da n, e

$$\lim_{n\to\infty}\int_{g-g_n} f(t)dt=0$$

dunque si deve concludere che $m=0$, e che $F(t)$ ha derivata destra generalmente uguale a $\varphi(t)$.

In modo analogo si prova che $F(t)$ ha generalmente derivata sinistra uguale a $\varphi(t)$, ed il teorema è dimostrato.

8. - Teorema 13. - Una funzione assolutamente continua ha generalmente derivata [1].

Dimostrazione. - Sia $F(t)$ una funzione assolutamente continua, e sia $\sigma=(a, b)$ un tratto finito. La $F(t)$ è in σ a variazione limitata, e quindi il suo numero derivato superiore destro $L(t)$ è sommabile (teor. 11). La integralfunzione $F_1(t)$ di $L(t)$ ha generalmente derivata in σ e questa derivata è generalmente uguale ad $L(t)$. Ne consegue che $F(t)$ e $F_1(t)$ hanno in σ generalmente uguali i numeri derivati superiori destri e che quindi, essendo

[1] Nel § 3, n.° 21 estenderemo questo teorema alle funzioni continue a variazione limitata.

entrambe assolutamente continue, differiscono fra loro per una costante (cor. 2 del teor. 9).

Dunque $F(t)$ ha come $F_1(t)$ generalmente derivata in σ. Ma σ può essere preso a piacere e risulta che $F(t)$ ha generalmente derivata.

Dalla dimostrazione precedente consegue il

Corollario. - Una funzione assolutamente continua differisce per una costante in ogni tratto finito da una particolare integralfunzione (la integralfunzione della sua derivata in quel tratto) [1].

Se poi la derivata di una funzione assolutamente continua è integrabile sull'intero aggregato dei punti della retta, la integralfunzione di questa derivata differisce dalla data funzione per una costante, ed allora la funzione assolutamente continua che si considera differisce per una costante additiva da una integralfunzione.

Osserviamo che se la funzione $f(t)$ è sommabile nel tratto finito (a, b), la sua integralfunzione $F(t)$ quando t varia tra a e t è uguale a $\int_a^t f(t)dt$. La funzione

$$F(t)=c+\int_a^t f(t)dt \qquad a\leqslant t\leqslant b$$

dove c è una costante, chiamasi *integrale indefinito* di $f(t)dt$ in (a, b).

Per le cose dette si ha generalmente in (a, b), $F'(t)=f(t)$; noi in vista delle future applicazioni estenderemo questa proprietà dimostrando il

Teorema 14. - Se $f(t)$ è sommabile in un tratto finito $g=(a, b)$ ed a è una costante qualunque, la funzione $|f(t)-a|$ è la derivata del suo integrale indefinito in (a, b) eccettuato al più un insieme di punti di misura nulla indipendente da a.

Dimostrazione. - Sia

$$F(t)=c+\int_a^t |f(t)-a|\,dt;$$

[1] L'assoluta continuità dell'integralfunzione di una funzione sommabile è di Lebesgue: *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (1904, Paris, Gauthier-Villars), p. 129, la proposizione inversa, enunciata nel corollario, è di G. Vitali, Atti R. Acc. delle Scienze di Torino, 40, 1905. (Nota di G. S.).

per ogni valore razionale di a l'insieme $g(a)$ dei punti t ove non è $F'(t)=|f(t)-a|$ ha misura nulla (teor. 12), la somma g' di tutti gli insiemi $g(a)$ è quindi un insieme di misura nulla, e per ogni punto t_0 dell'insieme $g-g'$, quando a è razionale, si ha

$$F'(t_0)=|f(t_0)-a|.$$

Per dimostrare il teorema basterà far vedere che se β è irrazionale e t_0 appartiene a $g-g'$ si ha ancora $F'(t_0)=|f(t_0)-\beta|$ cioè

$$\lim_{t\to t_0}\left[\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t}|f(t)-\beta|-|f(t_0)-\beta|\right]=0. \tag{1}$$

Sia ε un numero positivo e si determini un numero razionale a tale che sia

$$\varepsilon>|\beta-a|$$

si avrà anche

$$\varepsilon>|\beta-a|=|(f(t)-a)-(f(t)-\beta)|\geqslant||f(t)-a|-|f(t)-\beta||$$
$$\varepsilon>\left|\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t}|f(t)-a|\,dt-\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t}|f(t)-\beta|\,dt\right|.$$

Abbiamo quindi

$$\left|\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t}|f(t)-\beta|\,dt-|f(t)-\beta|\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t}|f(t)-\beta|\,dt-\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t}f(t)-a|\,dt\right|+$$
$$+\left|\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t}|f(t)-a|\,dt-|f(t)-a|\right|+\left||f(t)-a|-|f(t)-\beta|\right|$$

cioè

$$\left|\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t}|f(t)-\beta|\,dt-|f(t)-\beta|\right|<\left|\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t}|f(t)-a|\,dt-|f(t)-a|\right|+2\varepsilon.$$

Siccome a è razionale e t_0 è in $g-g'$, si può determinare un h_0 tale che per t in $(t_0-h_0,\ t_0+h_0)$ si abbia

$$\left|\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t}|f(t)-a|\,dt-|f(t)-a|\right|<\varepsilon$$

e perciò per gli stessi valori di t

$$\left|\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t}|f(t)-\beta|\,dt-|f(t)-\beta|\right|<3\varepsilon$$

e per l'arbitrarietà di ε segue appunto la (1).

9. - Sia $f(t)$ sommabile nel tratto finito $\sigma=(a,b)$ e si ponga

(1) $\quad f_1(t)=f(t)$ se $f(t)\geqslant 0,\qquad f_1(t)=0$ se $f(t)<0$

(2) $\quad f_2(t)=0$ se $f(t)\geqslant 0,\qquad f_2(t)=f(t)$ se $f(t)\leqslant 0;$

si avrà

$$f=f_1+f_2=f_1-|f_2|;\qquad |f|=f_1-f_2=f_1+|f_2|$$

e perciò

$$f_1=[|f|+f]/2, \tag{3_1}$$
$$f_2=-[|f|-f]/2. \tag{3_2}$$

Siccome $f(t)$ è sommabile in σ anche f_1 e f_2 sono sommabili in σ.

Sussiste il

Teorema 15. - Sia $f(t)$ una funzione sommabile in σ e si consideri la funzione

$$F(t)=c+\int_a^t f(t)\,dt,\qquad c=\text{costante}, \tag{4}$$

assolutamente continua in (a,b) [Cap. IV, teor. 26]; se $P(t)$, $N(t)$, $V(t)$ sono la variazione positiva, negativa, totale di $F(t)$ in (a,t) sussistono le formule

$$\int_a^t f_1(t)\,dt=P(t); \tag{5_1}$$
$$\int_a^t f_2(t)\,dt=-N(t); \tag{5_2}$$
$$\int_a^t |f(t)|\,dt=V(t). \tag{5_3}$$

Dimostrazione. - Avendosi [Cap. III, § 4, n.° 4]

$$V(t)=P(t)+N(t)$$

basterà provare le (5_1), (5_2).

Si ha [Cap. III, § 4, n.° 4]

$$F(t)=F(a)+P(t)-N(t), \qquad [P(a)=N(a)=0]$$

dove $P(t)$, $N(t)$ sono funzioni non negative, non decrescenti, assolutamente continue [Cap. III, teor. 36], si ha perciò generalmente in (a, b) [teor. 13]

$$f(t)=F'(t)=P'(t)-N'(t)$$

e per l'osservata non decrescenza di $P(t)$ e $N(t)$

$$P'(t)\geqslant 0, \qquad N'(t)\geqslant 0.$$

Abbiamo che se $f(t)\geqslant 0$ è $f_1(t)=f(t)=P'(t)-N'(t)\leqslant P'(t)$, se $f(t)<0$ è $f_1(t)=0\leqslant P'(t)$, perciò generalmente in (a, b)

$$f_1(t)\leqslant P'(t), \qquad f_2(t)\geqslant -N'(t)$$

quindi [Cap. IV, teor. 20; cor. teor. 13]

$$(6_1) \qquad \int_a^t f_1(t)dt\leqslant \int_a^t P'(t)dt=P(t)$$

$$(6_2) \qquad \int_a^t f_2(t)dt\geqslant -N(t).$$

Fissato $\varepsilon>0$ si può determinare un boreliano semplice B contenuto in (a, t) formato dai tratti $\sigma_1, \sigma_2,\ldots, \sigma_n$; $\sigma_i=(a_i, b_i)$, tale che l'incremento di $F(t)$ relativo a ciascuno dei suoi tratti sia positivo (negativo) e di somma complessiva $>P(t)-\varepsilon$ $[<-N(t)+\varepsilon]$; abbiamo quindi poichè in (a, t) è

$$f(t)\leqslant f_1(t), \qquad f_1(t)\geqslant 0 \qquad [f(t)\geqslant f_2(t),\ f_2(t)\leqslant 0]$$

$$P(t)-\varepsilon<\sum_i^{1\ldots n}[F(b_i)-F(a_i)]=\sum_i^{1\ldots n}\int_{a_i}^{b_i} f(t)dt\leqslant\int_a^t f_1(t)dt$$

$$-N(t)+\varepsilon>\sum_i^{1\ldots n}[F(b_i)-F(a_i)]=\sum_i^{1\ldots n}\int_{a_i}^{b_i} f(t)dt\geqslant\int_a^t f_2(t)dt$$

e per l'arbitrarietà di ε

$$P(t)\leqslant\int_a^t f_1(t)dt, \qquad -N(t)\geqslant\int_a^t f_2(t)dt$$

e confrontando con le (6_1), (6_2) risultano appunto le (5_1), (5_2).

10. - Come applicazione delle cose dette dimostriamo il

Teorema 16. - Se $U(t)$ e $V(t)$ sono sommabili in un tratto finito (a, b) sussiste la formula (di integrazione per parti)

$$\int_a^b U(t)\left\{\int_a^t V(t)dt\right\}dt=\int_a^b U(t)dt\int_a^b V(t)dt-\int_a^b V(t)\left\{\int_a^t U(t)dt\right\}dt.$$

Dimostrazione. - Si ponga $u(t)=\int_a^t U(t)dt$, $v(t)=\int_a^t V(t)dt$, si avrà generalmente in (a, b) [teor. 12] $\frac{du}{dt}=U$, $\frac{dv}{dt}=V$, e perciò generalmente in (a, b)

$$(1) \qquad \frac{d(uv)}{dt}=v\frac{du}{dt}+u\frac{dv}{dt}.$$

Le funzioni $u(t)$, $v(t)$ a motivo della loro assoluta continuità [Cap. IV, teor. 26] sono limitate in (a, b); le funzioni $\frac{du}{dt}=U$, $\frac{dv}{dt}=V$ sono sommabili in (a, b), ne viene che le funzioni $u\frac{dv}{dt}$, $v\frac{du}{dt}$ sono sommabili in (a, b) [Cap. IV, teor. 12, cor.] e perciò dalla (1)

$$(2) \qquad \int_a^b\frac{d(uv)}{dt}dt=\int_a^b v\frac{du}{dt}dt+\int_a^b u\frac{dv}{dt}dt.$$

La $u(t)v(t)$ è assolutamente continua [Cap. III, teor. 39], perciò [teor. 13, cor.]

$$\int_a^b\frac{d(uv)}{dt}dt=[u(t)v(t)]_a^b$$

e la (2) diventa

$$u(b)v(b)=\int_a^b v\frac{du}{dt}dt+\int_a^b u\frac{dv}{dt}dt.$$

dalla quale segue subito la formula da dimostrare.

§ 3. - Analisi delle funzioni a variazione limitata.

1. Scarto di una funzione continua. - 2. Scarto di funzioni assolutamente continue. - 3. Scarto di funzioni a variazione limitata. Funzioni a scarto finito. - 4. Proprietà degli scarti. - 5.-11. Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione sia uno scarto e teoremi preparatori. - 12. Scarto della somma di due funzioni continue non decrescenti. - 13. Differenza fra una funzione continua non decrescente ed il proprio scarto. - 14. Applicazione alle funzioni continue e a variazione limitata. - 15. Funzione che deriva da una corrispondenza di Cantor con modulo di misura nulla. - 16. Nucleo di una funzione continua. - 17. Scarti elementari. - 18.-20. Analisi degli scarti. - 21. Derivazione degli scarti e delle funzioni a variazione limitata.

1. - Per facilitare il linguaggio noi diremo che un boreliano B è un boreliano *contenuto* in un altro boreliano semplice B' se ogni tratto di B è contenuto in un tratto di B'. Diremo poi che un boreliano è *finito* se è costituito da un numero finito di tratti. Infine noi diremo che un boreliano B' è un *derivato* di un altro boreliano B, se si ottiene da B spezzando in un numero finito di tratti uno ed anche un numero finito dei suoi tratti.

Definizione 5. - Sia $f(t)$ una funzione continua in un tratto finito $\sigma=(a, b)$, e B un boreliano semplice contenuto in σ, $\mu(B)=m$. Si considerino tutti i boreliani semplici B' contenuti in B e di misura $\leqslant m'$, ove m' è tale che $0<m'\leqslant m$, e sia $s(m')$ l'estremo superiore delle norme di $f(t)$ relative ai boreliani B'. La $s(m')$ non cresce col decrescere di m'; il $\lim\limits_{m'\to 0} s(m')=s$ chiamasi *scarto* di $f(t)$ in B.

In altri termini, se s è lo scarto di $f(t)$ in B, qualunque sia il numero reale $\varepsilon>0$, esiste un numero η tale che in tutti i boreliani semplici contenuti in B e di lunghezza $<\eta$, la norma di $f(t)$ è $<s+\varepsilon$, ed invece, comunque si pensi piccolo un numero $\eta>0$, esiste un boreliano semplice contenuto in B e di lunghezza $<\eta$, tale che la norma in esso di $f(t)$ sia $>s-\varepsilon$.

Possiamo anche dire lo scarto s di $f(t)$ in B è il limite superiore dei numeri $\omega\geqslant 0$ tali che, per quanto sia piccolo un numero $\eta>0$, esiste un boreliano semplice B' contenuto in B e di lunghezza $<\eta$, nel quale la norma di $f(t)$ è $\geqslant\omega$.

2. - Se $f(t)$ è una funzione continua in un tratto finito $\sigma=(a, b)$, che ha in σ scarto nullo, per ogni numero reale $\varepsilon>0$, è possibile

trovare un numero $\eta>0$ tale che in ogni boreliano semplice contenuto in σ e di lunghezza $<\eta$ la norma di $f(t)$ è $<\varepsilon$, od in altri termini $f(t)$ è assolutamente continua.

Viceversa se $f(t)$ è assolutamente continua in σ, lo scarto di $f(t)$ in σ è nullo.

Si ha così il

Teorema 17. - Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione continua in un tratto finito σ sia a scarto nullo in σ, è che essa sia in σ assolutamente continua.

3. - Se $f(t)$ è una funzione continua in un tratto finito σ, e se è a variazione limitata in σ, detta V la sua variazione totale, qualunque sia un boreliano semplice B contenuto in σ e finito, la norma di $f(t)$ in B è evidentemente $\leqslant V$. Ma la norma di $f(t)$ in un boreliano semplice è il limite di norme di $f(t)$ in boreliani semplici finiti, dunque la norma di $f(t)$ in un qualunque boreliano semplice contenuto in σ è $\leqslant V$.

Ne consegue che se $f(t)$ è a variazione limitata in σ, essa ha in σ scarto finito, e questo scarto è $\leqslant$ della variazione di $f(t)$ in σ.

Se $f(t)$ è una funzione continua in un tratto finito σ, la quale abbia in σ variazione totale infinita $(+\infty)$ comunque si divida σ in un numero finito di parti, in una almeno di queste parti la variazione totale di $f(t)$ deve essere infinita. Ne viene che fissato un numero $\omega>0$, ed un numero $\eta>0$ piccolo quanto si vuole, vi è un tratto in σ di lunghezza $<\eta$ in cui la variazione totale di $f(t)$ è $>\omega$, e quindi tale che in esso esiste un boreliano semplice (finito, Cap. III, teor. 19) in cui la norma di $f(t)$ è $>\omega$. Un tale boreliano ha lunghezza $<\eta$, e si conclude che lo scarto di $f(t)$ in σ è $+\infty$.

Riunendo i due risultati si ha il

Teorema 18. - Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione continua in un tratto finito σ sia a scarto finito in σ, è che essa sia a variazione limitata, ed in tal caso lo scarto di $f(t)$ in σ è $\leqslant$ della sua variazione totale in σ.

4. - Sia $f(t)$ una funzione continua in un tratto finito $\sigma=(a, b)$, e supponiamo che essa sia a scarto *finito* in σ.

Evidentemente la $f(t)$ è a scarto finito in qualunque tratto parziale di σ. Se (α, β) è un qualunque tratto parziale di σ, ed anche se $\alpha=a$ e $\beta=b$, noi indicheremo con $S_\alpha^\beta f$ lo scarto di $f(t)$ in (α, β).

TEOREMA 19. - Se c è un punto del tratto σ, si ha

$$S_a^b f=S_a^c f+S_c^b f.$$

Dimostrazione. - Per ogni numero reale $\varepsilon>0$ piccolo a piacere è possibile, per quanto piccolo si prenda un altro numero $\eta>0$, trovare in (a, c) un boreliano semplice B_1 di lunghezza $<\eta/2$, ed in (c, b) un boreliano semplice B_2 pure di lunghezza $<\eta/2$, tali che in B_1 la norma di $f(t)$ sia maggiore di $S_a^c f-\varepsilon/2$ e che in B_2 la norma di $f(t)$ sia maggiore di $S_c^b f-\varepsilon/2$. Nel boreliano semplice $B=B_1+B_2$ la norma di $f(t)$ è maggiore di $S_a^c f+S_c^b f-\varepsilon$. La lunghezza di B è $<\eta$. Ne consegue che

$$S_b^a f \geqslant S_a^c f+S_c^b f. \tag{1}$$

Ma per ogni $\varepsilon>0$ piccolo a piacere è possibile determinare un $\eta>0$ tale che in ogni boreliano semplice B_1 contenuto in (a, c) di lunghezza $<\eta$ la norma di $f(t)$ sia minore di $S_a^c f+\varepsilon/2$ ed in ogni boreliano semplice B_2 contenuto in (c, b) di lunghezza $<\eta$ la norma di $f(t)$ sia minore di $S_c^b f+\varepsilon/2$.

Sia ora B un boreliano semplice contenuto in σ di lunghezza $<\eta$. Il punto c o è interno ad uno dei tratti di B, oppure no. Nell'ultimo caso B è la somma di due boreliani semplici B_1 e B_2, il 1° contenuto in (a, c) ed il 2° contenuto in (c, b) e ciascuno di lunghezza $<\eta$. Si conclude che la norma di $f(t)$ in B, essendo la somma delle norme di $f(t)$ in B_1 e B_2 è minore di $S_a^c f+S_c^b f+\varepsilon$.

Nel 1° caso, cioè se c è interno ad un tratto δ di B, il punto c dividerà δ in due tratti δ_1 e δ_2, e sostituendo in B a δ i due tratti δ_1 e δ_2, si ha un boreliano semplice B' che è un derivato di B. B' ha lunghezza $<\eta$ ed il punto c non è interno ad alcun suo tratto. Si può allora concludere che la norma di $f(t)$ in B' è minore di $S_a^c f+S_c^b f+\varepsilon$.

Inoltre è evidente che la norma di $f(t)$ in B non supera quella di $f(t)$ in B'. Allora si può concludere che per ogni boreliano semplice B di lunghezza $<\eta$ e contenuto in σ, la norma di $f(t)$ è $<S_a^c f+S_c^b f+\varepsilon$.

Se ne trae che

$$S_a^b f \leqslant S_a^c f+S_c^b f. \tag{2}$$

Da (1) e (2) risulta

$$S_a^b f=S_a^c f+S_c^b f \qquad \text{c. d. d.}$$

5. - Sia $f(t)$ una funzione a variazione limitata in un tratto finito $\sigma=(a, b)$, e sia B un boreliano semplice contenuto in σ.

Siano

$$\delta_1, \quad \delta_2, \quad \delta_3, \ldots$$

i tratti di B e

$$V_1, \quad V_2, \quad V_3, \ldots$$

le variazioni totali di $f(t)$ in questi tratti.

Poichè $\sum_i^n\limits_1 V_i$ non può superare la variazione totale di $f(t)$ in σ la quale variazione è, per ipotesi, finita, la serie $\sum_i V_i$ è convergente, e quindi, preso un $\varepsilon>0$ piccolo a piacere, è possibile trovare un intero $n>0$ per cui

$$\sum_{n+1}^{\infty} V_i<\varepsilon.$$

Indichiamo con B_n il boreliano formato coi tratti $\delta_{n+1}, \delta_{n+2}, \ldots$

$$B_n=\delta_{n+1}+\delta_{n+2}+\ldots$$

e supponiamo che B' sia un qualunque boreliano semplice contenuto in B_n; B' è la somma di boreliani semplici

$$B'_{n+1}, \quad B'_{n+2}, \ldots$$

contenuti rispettivamente in

$$\delta_{n+1}, \quad \delta_{n+2}, \ldots$$

Le norme

$$N_{n+1}, \quad N_{n+2}, \ldots$$

di $f(t)$ in essi sono rispettivamente $\leqslant$ di

$$V_{n+1}, \quad V_{n+2}, \ldots$$

dunque

$$\sum_{n+1}^{\infty}{}_i N_i<\varepsilon$$

ossia la norma di $f(t)$ in B' è $<\varepsilon$.

Concludendo si ha il

Teorema 20. - Se $f(t)$ è una funzione a variazione limitata in un tratto finito $\sigma=(a, b)$, e se B è un boreliano semplice qualunque contenuto in σ, preso un numero reale $\varepsilon>0$, piccolo a piacere, è possibile scomporre B nella somma di due boreliani semplici, di cui il 1° sia finito, e l'altro abbia la proprietà che in ogni boreliano semplice in esso contenuto la norma di $f(t)$ sia minore di ε.

Osservazione. - Sia $f(t)$ una funzione continua in un tratto finito $\sigma=(a, b)$ e supponiamo che essa sia ivi a scarto finito. Fissati i numeri positivi ε, μ si può trovare un boreliano semplice B contenuto in σ di lunghezza $<\mu$ in cui la norma di $f(t)$ è $>S_a^b f-\varepsilon/2$; in virtù del teorema dimostrato B si può scomporre nella somma di due boreliani semplici, uno finito B_1 (di lunghezza $<\mu$) l'altro B_2 in cui la norma di $f(t)$ è $<\varepsilon/2$; ne viene che nel boreliano semplice finito B_1 la norma di $f(t)$ è $>S_a^b f-\varepsilon$.

6. - Dal teor. 19 consegue il

Teorema 21. - Se $f(t)$ è una funzione continua e a variazione limitata in un tratto finito $\sigma=(a, b)$ e se $F(t)=S_a^t f$, se (α, β) è un tratto parziale di σ, l'incremento di $F(t)$ in (α, β) è uguale allo scarto di $f(t)$ in (α, β).

Dimostrazione. - Infatti

$$S_\alpha^\beta f=S_a^\beta f-S_a^\alpha f=F(\beta)-F(\alpha).$$

7. - **Teorema** 22. - Se $f(t)$ è una funzione continua e a variazione limitata in un tratto finito $\sigma=(a, b)$, se B è un boreliano semplice contenuto in σ, lo scarto di $f(t)$ in B è uguale alla norma di $F(t)=S_a^t f$ in B.

Dimostrazione. - Per dimostrare questo teorema basta evidentemente dimostrare che lo scarto di $f(t)$ in B è la somma degli scarti di $f(t)$ nei tratti

$$\delta_1, \quad \delta_2, \quad \delta_3, \ldots$$

che costituiscono B.

Siano

$$S_1, \quad S_2, \quad S_3, \ldots$$

gli scarti di $f(t)$ in questi tratti.

Consideriamo un numero reale $\varepsilon>0$, piccolo a piacere, ed un altro numero $\mu>0$ pure piccolo a piacere, e costruiamo, il che è sempre possibile, due successioni di numeri tutti >0

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3, \ldots$$
$$\mu_1, \quad \mu_2, \quad \mu_3, \ldots$$

per cui

$$\sum_i \varepsilon_i<\varepsilon$$
$$\sum_i \mu_i<\mu.$$

Per ogni i è possibile determinare un boreliano semplice B_i contenuto in δ_i di lunghezza minore di μ_i in cui la norma di $f(t)$ sia maggiore di $S_i-\varepsilon_i$. Se B' è la somma dei boreliani B_i, la lunghezza di B' è $<\mu$, e la norma di $f(t)$ in B' è maggiore di $\sum_i(S_i-\varepsilon_i)$, cioè maggiore di $\sum_i S_i-\varepsilon$.

Consegue subito che lo scarto di $f(t)$ in B è $\geqslant\sum_i S_i$.

Supponiamo che lo scarto di $f(t)$ in B sia un numero S maggiore di $\sum_i S_i$, e poniamo

$$S-\sum_{i=1}^{\infty} S_i=d.$$

È possibile scomporre il boreliano B nella somma di due boreliani B' e B'' di cui B' è finito e B'' ha la proprietà che in ogni boreliano in esso contenuto la norma di $f(t)$ è $<\frac{d}{4}$ (teor. 20).

Siano

$$\delta_1, \quad \delta_2, \ldots, \quad \delta_n$$

i tratti di B'. È possibile trovare un numero reale $\mu>0$ tale che, per ogni i scelto fra i numeri

$$1, \quad 2, \ldots, \quad n$$

la norma di $f(t)$ in ogni boreliano semplice contenuto in δ_i e di lunghezza $<\mu$ sia $<S_i+\frac{d}{4n}$.

Ora, nell'ipotesi fatta, qualunque sia $\mu>0$, e quindi pel μ particolare ora trovato, è possibile trovare un boreliano semplice B^0 contenuto in B e di lunghezza minore di questo μ, in cui la norma di $f(t)$ è maggiore di $\sum_{i=1}^{\infty} S_i+\frac{d}{2}$.

Il boreliano B^0 si può scomporre nella somma di $n+1$ boreliani

$$B_1^0, \quad B_2^0, \dots, \quad B_n^0, \quad B_{n+1}^0$$

contenuti rispettivamente in

$$\delta_1, \quad \delta_2, \dots, \quad \delta_n, \quad B''$$

tutti di lunghezza naturalmente $<\mu$.

Nei primi n la norma di $f(t)$ è rispettivamente minore di

$$S_1+\frac{d}{4n}, \quad S_2+\frac{d}{4n}, \dots, \quad S_n+\frac{d}{4n}$$

e nell'ultimo è minore di $\frac{d}{4}$, quindi in B^0 la norma di $f(t)$ è minore di

$$\left(S_1+\frac{d}{4n}\right)+\left(S_2+\frac{d}{4n}\right)+\dots+\left(S_n+\frac{d}{4n}\right)+\frac{d}{4}$$

cioè di

$$\sum_1^n {}_i S_i+\frac{d}{2},$$

e, a maggior ragione, minore di

$$\sum_1^\infty {}_i S_i+\frac{d}{2},$$

Ciò è assurdo, dunque lo scarto di $f(t)$ in B è proprio uguale a $\sum_i S_i$.

8. - Per la definizione lo scarto di una funzione continua in un tratto è sempre non negativo.

Da ciò e dal teor. 19 consegue il

Teorema 23. - Se $f(t)$ è una funzione continua e a variazione limitata in un tratto finito $\sigma=(a, b)$, la funzione $F(t)=S_a^t f$ è una funzione non decrescente in σ e nulla per $t=a$.

9. - Sempre nella ipotesi che $f(t)$ sia una funzione continua e a variazione limitata nel tratto finito $\sigma=(a, b)$, supposto che (α, β) sia un tratto parziale di σ, indichiamo con $V_\alpha^\beta f$ la variazione totale assoluta di $f(t)$ in (α, β).

Abbiamo visto (Cap. III, teor. 18) che se c è un punto interno a σ,

$$V_a^c f+V_c^b f=V_a^b f$$

e se ne deduce che anche la $V(t)=V_a^t f$ è una funzione non decre-

scente, e poichè in ogni tratto la variazione totale è $\geqslant$ del corrispondente scarto (teor. 18), consegue che anche la funzione

$$\Delta(t)=V(t)-F(t)$$

è una funzione positiva non decrescente. È infatti per $h>0$

$$\Delta(t+h)-\Delta t=[V(t+h)-V(t)]-[F(t+h)-F(t)]= \\ =V_t^{t+h}f-S_t^{t+h}f\geqslant 0.$$

Si osservi inoltre che la $F(t)$, come la $V(t)$, è una funzione continua di t (Cap. III, teor. 23).

Si ha infatti per $h>0$

$$0\leqslant F(t+h)-F(t)=S_t^{t+h}f\leqslant V_t^{t+h}f.$$

10. - Teorema 24. - Se $f(t)$ è una funzione continua e a variazione limitata in un tratto finito $\sigma=(a, b)$, la funzione $F(t)=S_a^t f$ ha in σ uno scarto uguale ad $F(b)$.

Dimostrazione. - Infatti, se $k=F(b)=S_a^b f$, e se lo scarto di $F(t)$ in σ è un numero $k'=S_a^b F$ diverso da k, è certamente $k'<k$, perchè $F(t)$ essendo continua e non decrescente ha per variazione totale

$$F(b)-F(a)=F(b)=k$$

e la variazione totale assoluta è $\geqslant$ del corrispondente scarto (teor. 18).

Poniamo

$$d=k-k'.$$

Esiste un numero reale $\mu>0$ tale che in ogni boreliano semplice di σ di lunghezza $<\mu$ la norma di $F(t)$ sia $<k'+d/2$.

Consideriamo ora una successione di numeri reali >0

$$\mu_1, \quad \mu_2, \quad \mu_3, \dots$$

per cui sia

$$\sum_i \mu_i<\mu.$$

Per ogni i esiste un boreliano semplice B_i contenuto in σ di lunghezza $<\mu_i$ in cui la norma di $f(t)$ è $>k'+d/2$.

Il sostegno della somma dei boreliani B_i è un boreliano semplice B di lunghezza $<\mu$ tale che comunque piccolo sia η esiste un boreliano semplice B_i contenuto in B di misura $\mu_i<\eta$ nel quale la norma di $f(t)\geqslant k'+d/2$, ne viene che in B lo scarto di $f(t)$

è $\geqslant k'+d/2$, e quindi in B la norma (teor. 22) di $F(t)$ è $\geqslant k'+d/2$, contrariamente a quanto si è prima detto.

11. - *Definizione* 6. - Una funzione $F(t)$ definita in un tratto $\sigma=(a, b)$ si dice che è uno *scarto* se esiste una funzione continua a variazione limitata $f(t)$ tale che per t variabile in (a, b) si abbia $F(t)=S_a^t f(t)$.

Abbiamo visto che se $f(t)$ è una funzione continua e a variazione limitata in un tratto finito $\sigma=(a, b)$ la funzione $F(t)=S_a^t f$ è una funzione non decrescente, nulla per $t=a$, ed inoltre si ha, pel teorema precedente,

$$S_a^t F=F(t)$$

o, come si può dire, la $F(t)$ è uno scarto.

Queste proprietà caratterizzano gli scarti, ossia si ha il

TEOREMA 25. - Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione continua $F(t)$ in un tratto finito $\sigma=(a, b)$ sia uno scarto è che $F(t)$ sia una funzione non decrescente, nulla per $t=a$, e che sia $S_a^t F=F(t)$.

12. - TEOREMA 26. - Se $f(t)$ e $\varphi(t)$ sono due funzioni continue *non decrescenti* in un tratto finito $\sigma=(a, b)$, e se

$$\psi(t)=f(t)+\varphi(t)$$

si ha

$$S_a^b\psi=S_a^b f+S_a^b\varphi.$$

Dimostrazione. - Intanto se ε è un numero reale >0 piccolo a piacere, e se μ è un altro numero reale >0 pure piccolo a piacere, esiste un boreliano semplice *finito* B_1 di lunghezza $<\mu/2$ in cui la norma di $f(t)$ è $>S_a^b f-\varepsilon/2$ (n.° 5, osservazione), ed un boreliano semplice *finito* B_2, di lunghezza minore di $\mu/2$ in cui la norma di $\varphi(t)$ è maggiore di $S_a^b\varphi-\varepsilon/2$.

Gli estremi dei tratti di B_1 e B_2 sono in numero finito e li possiamo ordinare secondo la loro grandezza. Siano essi

$$a_1<a_2<a_3<\ldots.<a_{\nu-1}<a_\nu.$$

Quelli fra i tratti

$$(a_1, a_2),\quad (a_2, a_3),\ldots,\quad (a_{\nu-1}, a_\nu)$$

che sono contenuti in un tratto di B_1 o in un tratto di B_2 formano un boreliano semplice e finito che indicheremo con B. B contiene evidentemente un derivato di B_1 ed un derivato di B_2 e allora la norma di $f(t)$ in B è maggiore di $S_a^b f-\varepsilon/2$ e quella di $\varphi(t)$ è maggiore di $S_a^b\varphi-\varepsilon/2$. Ma in B la norma di $\psi(t)$ è la somma delle norme di $f(t)$ e di $\varphi(t)$, dunque la norma di $\psi(t)$ in B è maggiore di $S_a^b f+S_a^b\varphi-\varepsilon$, ed inoltre B è di lunghezza $<\mu$.

Si conclude che

$$S_a^b\psi\geqslant S_a^b f+S_a^b\varphi.$$

Ma d'altra parte per ogni $\varepsilon>0$ è possibile determinare un numero reale $\mu>0$ per cui in ogni boreliano semplice contenuto in σ di lunghezza $<\mu$, la norma di $f(t)$ sia minore di $S_a^b f+\varepsilon/2$ e quella di $\varphi(t)$ sia minore di $S_a^b\varphi+\varepsilon/2$, dunque per ogni boreliano semplice di lunghezza $<\mu$ la norma di $\psi(t)$ è minore di $S_a^b f+S_a^b\varphi+\varepsilon$, e quindi

$$S_a^b\psi\leqslant S_a^b f+S_a^b\varphi.$$

Si conclude che è proprio

$$S_a^b\psi=S_a^b f+S_a^b\varphi, \qquad \text{c. d. d.}$$

Corollario 1. - Se $f(t)$ e $\varphi(t)$ sono due funzioni continue *non decrescenti* in un tratto finito $\sigma=(a, b)$, e se la

$$\psi(t)=f(t)-\varphi(t)$$

è pure *non decrescente*, si ha

$$S_a^b\psi=S_a^b f-S_a^b\varphi.$$

Corollario 2. - Se $F_1(t)$ e $F_2(t)$ sono due scarti nel tratto finito $\sigma=(a, b)$ anche la loro somma $F(t)=F_1(t)+F_2(t)$ è uno scarto in σ.

Si ha infatti

$$S_a^t F(t)=S_a^t F_1(t)+S_a^t F_2(t)=F_1(t)+F_2(t)=F(t).$$

13. - Se $f(t)$ è una funzione continua *non decrescente* in un tratto finito $\sigma=(a, b)$, ponendo al solito:

$F(t)=$ scarto di $f(t)$ in (a, t);
$V(t)=$ variazione totale di $f(t)$ in (a, t);

ed infine

$$\Delta(t) = V(t) - F(t),$$

si ha

$$V(t) = f(t) - f(a)$$

e per il corollario 1 precedente

$$S_a^t V = S_a^t f = F(t)$$

poichè evidentemente lo scarto della costante $f(a)$ è nullo.

Ma

$$V(t) = \Delta(t) + F(t)$$

e pel teorema precedente (vedi il n.° 9),

$$S_a^t V = S_a^t \Delta + S_a^t F.$$

Inoltre

$$S_a^t F = F(t)$$

dunque

$$S_a^t \Delta = 0,$$

ossia la funzione $\Delta(t)$ è assolutamente continua.

E poichè

$$f(t) - f(a) = V(t) = \Delta(t) + F(t)$$

e quindi

$$f(t) = [f(a) + \Delta(t)] + F(t)$$

si ha il

TEOREMA 27. - Ogni funzione continua *non decrescente* in un tratto finito σ è uguale alla somma del suo scarto e di una funzione assolutamente continua.

14. - Se $f(t)$ è una funzione continua a variazione limitata in un tratto finito σ essa è la differenza di due funzioni continue e non decrescenti in σ (Cap. III, teor. 21 e 23), e poichè, pel teorema precedente, ognuna di queste è la somma di una funzione assolutamente continua e del proprio scarto, si può dire che ogni funzione continua e a variazione limitata in un tratto finito σ, si può porre uguale ad una espressione della forma

$$a(t) + s_1(t) - s_2(t)$$

dove $a(t)$ è una funzione assolutamente continua, ed $s_1(t)$ e $s_2(t)$ sono scarti di funzioni continue e non decrescenti.

15. - Consideriamo un aggregato perfetto g contenuto in un tratto finito e non contenente alcun tratto, e supponiamo che a sia il suo limite inferiore e che b sia il suo limite superiore.

Consideriamo poi una *corrispondenza di Cantor* (modulo g) (Cap. III, § 5, n.° 2) fra l'aggregato dei punti di (a, b) e quello dei punti $(0, 1)$.

Indichiamo al solito con t la variabile in (a, b) e con y la variabile in $(0, 1)$.

La corrispondenza di cui parlo fa corrispondere ad ogni t in (a, b) un y in $(0, 1)$ e y risulta funzione di t. Sia $y = f(t)$ tale funzione. Questa funzione è continua e non decrescente. Diremo che questa funzione *deriva da una corrispondenza di Cantor* (modulo g).

TEOREMA 28. - Se g è un aggregato perfetto di *misura nulla* (Cap. II, teor. 29), e se $y = f(t)$ è una funzione che deriva da una corrispondenza di CANTOR (modulo g), la $f(t)$ è uno scarto.

Dimostrazione. - Siano al solito a e b il limite inferiore ed il limite superiore di g. Intanto si ha $f(a) = 0$. Inoltre la variazione totale (a, t) di $f(t)$ è uguale ad $f(t)$ perciò $S_a^t f \leqq f(t)$; per quanto piccolo si pensi un numero reale $\mu > 0$ è possibile includere il sub-aggregato di g che cade in (a, t) in un boreliano semplice di lunghezza $< \mu$, e in questo boreliano la norma di $f(t)$ è uguale ad $f(t)$ quindi $S_a^t f \geqq f(t)$; ne viene $S_a^t f = f(t)$ e allora la $f(t)$ è uno scarto.

16. - *Definizione* 7. - Sia $f(t)$ una funzione continua in un tratto finito $\sigma = (a, b)$. Chiamiamo *punti di invarianza* di $f(t)$ i punti interni a qualche tratto (non nullo) in cui $f(t)$ è costante; l'estremo a (b) si dice punto di invarianza se esso è estremo sinistro (destro) di un tratto non nullo in cui $f(t)$ è costante; i punti t di (a, b) distinti dai punti di invarianza li chiamiamo *punti di varianza* di $f(t)$.

TEOREMA 29. - Se $f(t)$ è una funzione continua in un tratto finito σ, l'aggregato g dei punti di varianza di $f(t)$ è perfetto.

Dimostrazione. - Infatti g è chiuso, perchè se t_0 è un suo punto limite, in ogni intorno di t_0 cade qualche punto di g e quindi in nessuno di tali intorni la $f(t)$ può essere costante. Dunque t_0 appartiene a g. Inoltre g non contiene punti isolati, perchè se t_1 fosse un punto isolato di g, esso sarebbe estremo comune di due tratti del boreliano associato a g, in ciascuno dei quali la $f(t)$ sarebbe evidentemente costante. La $f(t)$ essendo continua in t_1 dovrebbe avere lo stesso valore in entrambi i tratti, e t_1 sarebbe punto di invarianza contrariamente al supposto.

Definizione 8. - Il gruppo dei punti di varianza di $f(t)$ si dirà il *nucleo* di $f(t)$.

Teorema 30. - Se $f(t)$ è una funzione continua non decrescente definita in un tratto finito (a, b), per cui $f(a)=0$, $f(b)=1$, se il nucleo g di $f(t)$ non contiene nessun tratto non nullo e contiene i punti a e b, la $f(t)$ deriva da una corrispondenza di Cantor (modulo g).

Dimostrazione. - Siano

$$s_1, \quad s_2, \quad s_3, \ldots$$

i tratti finiti del boreliano associato a g. Facciamo corrispondere ad s_n il valore y_n che $f(t)$ acquista in tutti i punti di s_n.

I punti

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \ldots$$

sono tutti interni al tratto $(0, 1)$.

La corrispondenza C' che così si ha fra i tratti s_n ed i numeri y_n caratterizza una corrispondenza di Cantor (modulo g) da cui deriva la $f(t)$.

Corollario. - Una funzione continua non decrescente in un tratto finito (a, b), per cui sia $f(a)=0$, $f(b)=1$, ed il cui nucleo sia di *misura nulla* è uno scarto (teor. 28). Evidentemente se α è il limite inferiore del nucleo, e se β è il suo limite superiore (necessariamente $a \leqq \alpha$, $\beta \leqq b$) in tutto il tratto (a, α) è $f(t)=0$, e in tutto (β, b) è $f(t)=1$.

17. - *Definizione* 9. - Una funzione $f(t)$ continua e non decrescente in un tratto finito (a, b), per cui sia $f(a)=0$, $f(b)=1$, ed il cui nucleo sia di misura nulla, si dice uno *scarto elementare* in (a, b).

18. - Se

$$\varphi_1(t), \quad \varphi_2(t), \quad \varphi_3(t), \ldots$$

è una successione di scarti elementari in un medesimo tratto finito $\sigma=(a, b)$, e se

$$k_1 + k_2 + k_3 + \ldots$$

è una serie convergente a termini positivi, la serie

$$\sum_n k_n \varphi_n(t)$$

è totalmente convergente e converge verso una funzione continua non decrescente.

Sia

$$\psi(t) = \sum_n k_n \varphi_n(t).$$

La $\psi(t)$ è, come abbiamo detto, continua e non decrescente, inoltre è $\psi(a)=0$.

Io dico che $\psi(t)$ è uno scarto.

Intanto, poichè $\varphi_n(t)$ è uno scarto, evidentemente anche $k_n\varphi_n(t)$ è uno scarto.

Se i termini di

$$\sum_n k_n \varphi_n(t)$$

sono in numero finito allora (teor. 26, cor. 2) la $\psi(t)$ è uno scarto. Se i termini di

$$\sum_n k_n \varphi_n(t)$$

sono in numero infinito, si ha certamente

$$S'_a\psi \geqq \sum_{n=1}^{m} k_n \cdot S'_a\varphi_n = \sum_{n=1}^{m} k_n\varphi_n(t)$$

qualunque sia m, e quindi

$$S'_a\psi \geqq \sum_{n=1}^{\infty} k_n\varphi_n(t) = \psi(t).$$

Ma non può essere

$$S'_a\psi > \psi(t),$$

perchè

$$S'_a\psi \leqq V'_a\psi = \psi(t),$$

dunque

$$S'_a\psi = \psi(t),$$

e quindi $\psi(t)$ è uno scarto.

19. - Teorema 31. - Se $\psi(t)$ è uno scarto in un tratto finito $\sigma=(a, b)$, la $\psi(t)$ è uguale ad una somma del tipo $\sum_n k_n\varphi_n(t)$ con un numero finito o infinito di termini, in cui le $\varphi_n(t)$ sono scarti elementari in σ, e le k_n sono delle costanti positive, per cui $\sum_n k_n$ è convergente.

Dimostrazione. - Infatti, preso un numero reale $\varepsilon>0$ e piccolo a piacere ed in ogni caso $<\psi(b)$ ed un altro numero reale $\mu>0$, è possibile trovare in σ un boreliano semplice B_1 di lunghezza $<\mu$, in cui la norma di $\psi(t)$ è $>\psi(b)-\varepsilon/2$, e quindi in cui lo scarto di $\psi(t)$ è $>\psi(b)-\varepsilon/2$ (teor. 22).

È poi possibile trovare in B_1 un boreliano semplice *finito* B_2 di lunghezza $<\mu/2$ in cui la norma di $\psi(t)$ e quindi lo scarto di $\psi(t)$ è $>\psi(b)-\varepsilon/2-\varepsilon/4$ (n.º 5, osservazione). In B_2 esiste un boreliano semplice *finito* B_3 di lunghezza $<\mu/4$ in cui la norma e quindi lo scarto di $\psi(t)$ è $>\psi(b)-\varepsilon/2-\varepsilon/4-\varepsilon/8$ e così via.

I punti comuni a tutti i boreliani

$$B_1,\quad B_2,\quad B_3,\dots$$

che possiamo supporre formati ciascuno da tratti non nulli, formano un aggregato g di misura nulla. Questo aggregato è chiuso, perchè se t_0 è un suo punto limite esso è punto limite di punti di ogni B_n e quindi appartiene ad ogni B_n, ossia è un punto di g.

Consideriamo un boreliano semplice finito B che contenga tutti i punti di g nel suo interno. Io dico che da un punto in poi tutti i boreliani

$$B_1,\quad B_2,\quad B_3,\dots$$

sono contenuti in B.

Invero, se ciò non fosse, per ogni B_n, inserendo gli estremi interni a B_n, di tratti di B, si avrebbe un derivato di B_n che consterebbe di un boreliano finito B_n'' contenuto in B e di un altro boreliano B_n' a tratti non nulli non contenuto in B.

I boreliani semplici

$$B_1',\quad B_2',\quad B_3',\dots$$

sarebbero ciascuno contenuto nel precedente e quindi avrebbero dei punti comuni.

Questi punti non sarebbero interni a B e quindi non apparterrebbero a g, il che è impossibile.

Allora qualunque sia un boreliano semplice finito che contenga tutti i punti di g vi sono infiniti boreliani della successione

$$B_1,\quad B_2,\quad B_3,\dots$$

che cadono in B.

Lo scarto di $\psi(t)$ in B è allora $\geqslant$ di

$$\psi(b)-\varepsilon/2-\varepsilon/4-\varepsilon/8-\dots$$

cioè di

$$\psi(b)-\varepsilon.$$

Consideriamo ora il sub-aggregato g_t di g che cade in (a, t). In tutti i boreliani semplici finiti che racchiudono g_t lo scarto di $\psi(t)$ è maggiore di $\psi(t)-\varepsilon$. Il limite inferiore di tali valori dello scarto è una funzione $\geqslant\psi(t)-\varepsilon$. Indichiamo questa funzione con $f_1(t)$, e posto

$$k_1=f_1(b)>0$$
$$\varphi_1(t)=f_1(t)/k_1,$$

proviamo chè la $\varphi_1(t)$ è uno scarto elementare.

Sia $t<t'$; ogni copertura semplice finita di $g_{t'}$ è anche una copertura (semplice finita) di g_t; ne viene $f_1(t)\leqslant f_1(t')$, e la $f_1(t)$ è quindi non decrescente. Si ha pure

$$f_1(t)+S_t^{t'}\psi(t)\geqslant f_1(t')$$

perciò

$$0\leqslant f_1(t')-f_1(t)\leqslant S_t^{t'}\psi(t)$$

e la $f_1(t)$ è quindi continua. Essa e inoltre costante in tutti i tratti finiti del boreliano associato a g, e poichè g è di misura nulla, il nucleo di $f_1(t)$ è g od un suo sub-aggregato perfetto (di misura nulla). Si ha $\varphi_1(t)=f_1(t)/k_1$, $\varphi_1(a)=0$, $\varphi_1(b)=1$, perciò $\varphi_1(t)$ è uno scarto elementare (n.º 17).

È $f_1(t)=k_1\varphi_1(t)$, e, posto

$$\psi_1(t)=\psi(t)-f_1(t)=\psi(t)-k_1\varphi_1(t)$$

si vede che $\psi_1(t)$ è uno scarto; infatti se $t'>t$ si ha

$$\psi_1(t')-\psi_1(t)=[\psi(t')-\psi(t)]-[f_1(t')-f_1(t)]=S_t^{t'}\psi-[f_1(t')-f_1(t)]\geqslant 0,$$

ed essendo $\psi_1(t)$ non decrescente essa è uno scarto (n.º 12, cor. 1).

Si ha $\psi_1(b) \leq \varepsilon$, e se $\psi_1(b) = 0$, è

$$\psi(t) = k_1\varphi_1(t)$$

ed il teorema è dimostrato.

Se $\psi_1(b) > 0$, indicando con ε_1 un numero reale minore di $\psi_1(b)$ e di $\varepsilon/2$, ma >0, si potrà trovare uno scarto elementare $\varphi_2(t)$ ed una costante $k_2 > 0$ per cui

$$\psi_2(t) = \psi_1(t) - k_2\varphi_2(t)$$

sia uno scarto con $\psi_2(b) \leq \varepsilon_1$.

Se $\psi_2(b) = 0$, è

$$\psi(t) = k_1\varphi_1(t) + k_2\varphi_2(t)$$

ed il teorema è dimostrato.

Se $\psi_2(b) > 0$, indico con ε_2 un numero >0 e minore di $\psi_2(b)$ e di $\varepsilon/4$, e trovo uno scarto elementare $\varphi_3(t)$ e una costante $k_3 > 0$ per cui

$$\psi_3(t) = \psi_2(t) - k_3\varphi_3(t)$$

sia pure uno scarto con $\psi_3(b) \leq \varepsilon_2$.

Se così procedendo trovo una $\psi_n(t)$ per cui $\psi_n(b) = 0$, allora

$$\psi(t) = k_1\varphi_1(t) + k_2\varphi_2(t) + \dots + k_n\varphi_n(t)$$

ed il teorema è dimostrato.

Se per ogni n è $\psi_n(b) > 0$, essendo per ogni n

$$\psi_n(b) < \varepsilon_{n-1} < \varepsilon : 2^{n-1},$$

è

$$\lim_{n \to \infty} \psi_n(b) = 0$$

e quindi anche

$$\lim_{n \to \infty} \psi_n(t) = 0.$$

Ma

$$\psi_n(t) = \psi(t) - \sum_{i=1}^{n} k_i\varphi_i(t),$$

dunque

$$\psi(t) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i\varphi_i(t)$$

ed il teorema è dimostrato.

20. - Consegue dal risultato del n.° 14 e dall'ultimo teorema il

Teorema 32. - Ogni funzione $f(t)$ continua a variazione limitata in un tratto finito σ si può mettere sotto la forma

$$a(t) + \sum_n k_n\varphi_n(t),$$

dove $a(t)$ è una funzione assolutamente continua, le $\varphi_n(t)$ sono scarti elementari e le k_n sono delle costanti con la serie $\sum_n k_n$ assolutamente convergente.

Osservazione. - La somma dei nuclei delle $\varphi_n(t)$ che figurano nella espressione precedente, è un aggregato di misura nulla, ma esso può essere denso in tutto σ. Si vede così che la causa per cui una funzione continua e a variazione limitata si scosta dall'essere assolutamente continua è localizzata in un aggregato di misura nulla che può essere denso in tutto σ.

21. - Sia $\psi(t)$ uno scarto in un tratto finito $\sigma = (a, b)$.

Per il teor. 31, si ha

$$\psi(t) = \sum_n k_n\varphi_n(t)$$

dove le φ_n sono scarti elementari e le k_n sono costanti positive per cui la serie $\sum_n k_n$ è convergente.

Io dico che $\psi(t)$ è a derivata generalmente nulla in σ.

Intanto è evidente che ogni $\varphi_n(t)$, essendo costante in ogni tratto finito del boreliano associato al suo nucleo g_n, ha derivata nulla in tutti i punti interni a questi tratti, e, poichè la misura di g_n è uguale a zero, ogni φ_n ha derivata generalmente nulla. Ha allora derivata generalmente nulla la funzione

$$\theta_m(t) = \sum_{n=1}^{m} k_n\varphi_n(t).$$

È poi possibile, avendo prefissato un numero reale $\varepsilon > 0$, piccolo a piacere, determinare un m tale che la somma

$$\sum_{n > m+1} k_n\varphi_n(t) = \psi_m(t) = \psi(t) - \theta_m(t)$$

abbia in b un valore $< \varepsilon$.

La funzione non decrescente $\psi_m(t)$ è uno scarto (n.° 18).

Fissiamo un numero reale $\eta > 0$, ed indichiamo con γ l'aggregato dei punti in cui il numero derivato superiore destro di $\psi_m(t)$ è $>\eta$.

Sia μ la misura di γ. Ad ogni punto di γ si può associare un intorno destro che cade in σ ed in cui il rapporto incrementale di $\psi_m(t)$ è $>\eta$. Se $\mu > 0$, di questi intorni se ne può trovare un numero finito a due a due distinti le cui lunghezze abbiano una somma $>\mu/2$.

Essi formano allora un boreliano semplice in cui la norma di $\psi_m(t)$ è $>\eta\mu/2$.

Ma questa norma non può superare $\psi_m(b)$ e deve quindi essere $<\varepsilon$, dunque sarà

$$\eta\mu/2 < \varepsilon$$

ed infine

$$\mu < 2\varepsilon/\eta.$$

Tenendo poi conto del fatto che $\theta_m(t)$ ha derivata generalmente nulla, si deduce che, prefissato un numero reale $\eta < 0$, la misura dell'aggregato dei punti in cui il numero derivato superiore destro di $\psi(t)$ è $>\eta$, è di misura $<2\varepsilon/\eta$; ma ε può essere piccolo quanto si vuole, e si conclude che l'aggregato dei punti in cui il numero derivato superiore destro della $\psi(t)$ è $>\eta$ è di misura nulla.

Ma ciò sta per ogni η, e quindi si può concludere (osservando che i numeri derivati destri della funzione non decrescente $\psi(t)$ devono essere $\geqslant 0$) che la $\psi(t)$ ha generalmente nulli i suoi numeri derivati destri. In modo analogo si prova che essa ha generalmente nulla i numeri derivati sinistri, e si conclude che la $\psi(t)$ ha generalmente derivata nulla.

Dunque:

Ogni scarto ha generalmente derivata nulla, e poichè ogni funzione assolutamente continua ha generalmente derivata (teor. 13), si può concludere che (n.° 14):

Ogni funzione continua a variazione limitata ha generalmente derivata [1].

---

[1] Il teorema è vero anche per le funzioni a variazione limitata. [Cfr. H. Lebesgue: *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (Paris, 1928, 2a ed.), p. 185, oppure S. Saks: *Théorie de l'intégrale* (Varsavia, 1933), p. 49].

Ed il teor. 32 si può enunciare dicendo che:

Una funzione continua a variazione limitata è la somma di una funzione assolutamente continua e di una funzione a derivata generalmente nulla.

Inoltre se ne trae che *la derivata di una funzione continua e a variazione limitata è generalmente uguale alla derivata di una funzione assolutamente continua.*

TABELLA DEI SIMBOLI

BIBLIOGRAFIA

OPERE CITATE

U. Dini: *Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali* (Pisa, 1878), [p. 134].

H. Lebesgue: *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, a)* 1ª ed., 1904 (Paris); *b)* 2ª ed., 1928 (Paris), [p. 146, 169].

S. Saks: *Théorie de l'intégrale* (Warszawa, 1933), [p. 169].

W. Sierpiński: *Leçons sur les nombres transfinis* (Paris, 1828), [p. 17, 52].

G. Vitali: *Geometria dello Spazio Hilbertiano* (Bologna, 1929), [p. 32, 96].

MEMORIE CITATE

O. Bonnet: *Remarques sur quelques intégrales définies*, Journ. de Math. pures et appl., XIV (1849), p. 249, [p. 108].

B. Levi: *Riflessioni sopra alcuni principi della teoria degli aggregati e delle funzioni*, in « Scritti matematici » offerti ad Enrico D'Ovidio (Torino, 1918), pp. 305-324, [p. 17].

G. Vitali:

[1] *Sulle funzioni integrali*, Atti R. Acc. Scienze Torino, **40**, pp. 1021-1034 (1905), [p. 146].

[2] *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*, Bologna (1905), [p. 58].

[3] *Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali*, Atti R. Acc. Scienze Torino, **43**, pp. 229-246 (1907-1908), [p. 54].

[4] *Sull'integrazione per serie*, Rend. Circ. Mat. di Palermo, XXIII, pp. 137-155 (1907), [p. 120].

INDICE TERMINOLOGICO

INDICE DELLA MATERIA

CAPITOLO V.

Derivazione.

§ 1. - Numeri derivati. Derivate.

§ 2. - Derivabilità delle integralfunzioni.

§ 3. - Analisi delle funzioni a variazione limitata.