Conti Roberto 1942

LUIGI BIANCHI

LEZIONI SULLA TEORIA DELLE FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA E DELLE FUNZIONI ELLITTICHE

PARTE PRIMA

FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA

TERZA EDIZIONE

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
MCMXXVIII

Firenze, Tipografia Ariani - X-1928

PARTE PRIMA

TEORIA DELLE FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA

CAPITOLO I.

Funzioni di variabile complessa secondo Cauchy-Riemann. — Serie di potenze e loro proprietà. — Rappresentazioni conformi.

§ 1. — Piano complesso. - Sfera complessa.

La teoria delle funzioni di variabile complessa si può svolgere seguendo due metodi diversi, l'uno dovuto a Cauchy-Riemann, l'altro a Weierstrass.

Il primo metodo si fonda sulle proprietà degli integrali della così detta equazione di Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

l'altro costruisce l'intera teoria in modo puramente aritmetico operando colle serie di potenze (serie di Taylor) come elementi. I due metodi si completano a vicenda e, per non rinunziare ai particolari vantaggi dell'uno e dell'altro, conviene ormai in questi studi svolgerli parallelamente. Questo ci proponiamo appunto di fare nella prima parte del presente corso, ove partiremo dalle definizioni di Cauchy-Riemann per arrivare all'importantissimo concetto di *funzione analitica* secondo Weierstrass e svilupparne le conseguenze.

Consideriamo una variabile complessa

$$z = x + i y$$

i cui valori distendiamo, secondo la consueta rappresentazione geometrica, sul piano complesso di Gauss, sicchè ad ogni valore di z corrisponde un punto del piano complesso, *il suo indice*, cioè

il punto che ha le coordinate cartesiane ortogonali (x, y); e viceversa ad ogni punto del piano corrisponde un valore della variabile z. A causa di questa corrispondenza biunivoca fra il valore di z e il punto rappresentativo, è lecito designare, come faremo, un punto qualsiasi del piano mediante il valore z_0 che vi ha la variabile z. E poichè riguardiamo il valore ∞ (infinito) di z come un unico valore, così il piano complesso si riguarderà, in questi studi, come una superficie chiusa con un unico punto all'infinito. Questo modo di considerare i punti all'infinito del piano come raccolti in un unico punto, contrariamente alle ordinarie *convenzioni* della geometria proiettiva ed analitica, non può produrre difficoltà, quando si pensi che qui il piano interviene soltanto come immagine geometrica della variabilità complessa e ci potremmo servire egualmente di qualunque altra superficie chiusa, ai punti della quale possano farsi corrispondere in modo biunivoco e continuo i valori della variabile complessa. Ed appunto spesse volte ci converrà adoperare, in luogo del piano complesso, la *sfera complessa*, riportando i punti del piano sulla sfera mediante la proiezione stereografica polare. Per fissare completamente il modo di rappresentazione, prendiamo la sfera di raggio $= 1$ col centro nell'origine O sicchè, indicando con ξ, η, ζ le coordinate correnti di punto, l'equazione della sfera sarà

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

e dal punto $P \equiv (0, 0, 1)$ della sfera (polo) proiettiamo ogni punto $M \equiv (x, y)$ del piano complesso (piano $\xi\,\eta$) in M' sulla sfera.

Per le coordinate ξ, η, ζ di questo punto M' troviamo subito

$$\text{(1)} \qquad \xi = \frac{2x}{x^2+y^2+1}, \quad \eta = \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \quad \zeta = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1},$$

formole che, note le coordinate di un punto (x, y) del piano, fanno conoscere le coordinate ξ, η, ζ del punto corrispondente sulla sfera. Inversamente, mediante le formole

$$\text{(2)} \qquad x = \frac{\xi}{1-\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta},$$

determiniamo il punto del piano, che corrisponde ad un punto assegnato sulla sfera. In ogni punto (ξ, η, ζ) della sfera abbiamo così per la variabile complessa z il valore

$$\boxed{z = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta}}\,.$$

I punti all' infinito del piano vengono a raccogliersi sulla sfera nell' unico punto $(0, 0, 1)$ cioè nel polo, ove ha luogo il valore $z = \infty$ della variabile complessa.

Ricordiamo che la rappresentazione stereografica della sfera sul piano gode di due proprietà fondamentali, che si possono dimostrare elementarmente, od anche dedurre dalle formole (1), (2) di rappresentazione e cioè :

1) la rappresentazione conserva gli angoli ; vale a dire ogni angolo di una figura sferica è eguale a quello della figura piana corrispondente (rappresentazione conforme) ;

2) ad ogni circolo (o retta) del piano corrisponde un circolo sulla sfera ed inversamente.

Diciamo ancora che, in seguito, per intorno di un punto z del piano complesso (o della sfera complessa) intenderemo un campo comunque piccolo, ma di ampiezza diversa da zero, che contenga nel *suo interno* il punto. Per intorno del punto $z = \infty$ del piano complesso s' intenderà quindi la parte del piano esterna ad un campo finito comunque grande, ciò che equivale appunto, per la sfera complessa, a considerare un intorno comunque piccolo del polo.

§ 2. — Funzioni di variabile complessa.

Consideriamo un campo C a due dimensioni del piano o della sfera complessa, nel cui interno si muova l'indice della variabile complessa z. Sia

$$w = u + i v$$

una seconda variabile complessa *dipendente da z* in guisa che, per ogni valore di z appartenente a C, la w abbia un valore perfettamente determinato, cioè la parte reale u e il coefficiente v dell' im-

maginario in w siano nel campo C funzioni, nel senso ordinario, delle due variabili reali x, y.

Ove, seguendo i concetti generali di Dirichlet, considerassimo w come funzione della variabile complessa z, lo studio delle funzioni di variabile complessa non verrebbe a differire da quello delle ordinarie coppie di funzioni di due variabili reali. Ma nel concetto odierno di funzione di variabile complessa sono incluse alcune limitazioni, riguardanti la continuità e la esistenza della derivata, delle quali ora appunto andiamo a trattare.

In primo luogo supponiamo che la w, considerata come funzione delle due variabili reali x, y, sia continua *superficialmente* nel campo C, cioè che tali siano le due funzioni reali u, v nell' intorno di ogni punto di C. Si vedrà subito che la continuità di w in un punto z_0 del campo si può anche definire dicendo che, preso un numero ε positivo piccolo a piacere, deve esistere un intorno σ sufficientemente piccolo di z_0 [1]) tale che, per qualsiasi punto z appartenente a questo intorno, si abbia

tale $|z - z_0| < \delta$

$$| w_z - w_{z_0} | < \varepsilon\,,$$

ove con w_z indichiamo il valore di w in z e il simbolo $| w_z - w_{z_0} |$ significa, secondo Weierstrass, il modulo di $w_z - w_{z_0}$ [2]). (1)

In secondo luogo supponiamo che la w possegga derivate parziali prime

$$\frac{\partial w}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial w}{\partial y}$$

pure *finite e continue* in C, onde segue che, se consideriamo una linea L qualunque [3]) del piano complesso uscente da un suo punto $M \equiv z_0$ e, spostandoci lungo L da M_0 ad un punto vicino $M \equiv z_0 + \Delta z$, calcoliamo il rapporto incrementale

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}\,,$$

[1]) S' intende che, se z_0 è interno al campo, l' intorno σ deve contenere z_0 nel suo interno, laddove se z_0 è sul contorno di C, l' intorno σ confinerà ad un tratto del contorno di C, che contenga nell' interno z_0.

[2]) In generale essendo A una quantità complessa, col simbolo $| A |$ denotiamo, con Weierstrass, il modulo di A.

[3]) Supponiamo che tale linea sia una curva ordinaria dotata di tangente, che varia con continuità al variare in modo continuo del punto di contatto.

(1) Se w è funzione continua di z, essa è anche, per il principio di Pincherle Borel, uniformemente continua (Pincherle 25)

questo, al convergere di M verso M_0, convergerà verso un limite determinato e finito. E invero, indicando con s l'arco della curva L, quando z si muove lungo L, potremo riguardare z e w come funzioni di s ed avremo

$$\lim \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim \frac{\left(\dfrac{\Delta w}{\Delta s}\right)}{\left(\dfrac{\Delta z}{\Delta s}\right)}$$

e però

$$\boxed{\lim \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{dx}{ds} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{dy}{ds}}{\dfrac{dx}{ds} + i\,\dfrac{dy}{ds}}}. \tag{3}$$

derivata di w rispetto a z secondo la direzione in M_0

Questo limite, che dipende unicamente dalla direzione della tangente in M_0 alla curva, dicesi la derivata di w secondo quella direzione. In particolare le derivate di w prese nel senso dell'asse Ox e dell'asse Oy saranno

$$\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{1}{i}\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{4}$$

Ora l' ulteriore limitazione che dobbiamo porre per arrivare al concetto di funzione di variabile complessa consiste in ciò che *la derivata di w sia indipendente dalla direzione secondo cui è calcolata*. In particolare le derivate (4), calcolate nel senso degli assi, dovranno essere eguali, cioè dovrà essere soddisfatta la condizione :

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial w}{\partial y}.} \tag{I}$$

Ma viceversa, se questa condizione è soddisfatta, la (3) può scriversi

$$\lim \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{dx}{ds} + i\,\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{dy}{ds}}{\dfrac{dx}{ds} + i\,\dfrac{dy}{ds}} = \frac{\partial w}{\partial x}$$

e ci dimostra che la derivata sarà sempre la stessa in qualunque direzione si calcoli.

La condizione (I) si suole anche citare come condizione di *monogeneità* giacchè, supposte soddisfatte tutte le condizioni precedenti, Cauchy chiamava w funzione *monogena* di z. Oggidì, quando si parla di una *funzione w della variabile complessa z*, s' intende senz'altro che tutte le indicate condizioni, compresa la condizione (I) di monogeneità, debbono essere soddisfatte o per tutti i punti del campo o almeno *generalmente*, cioè fatta eccezione da un numero finito di punti o di linee del campo, dove qualcuna delle precedenti condizioni od anche tutte potranno cessare di verificarsi. E così dunque porremo la seguente definizione fondamentale :

Def.

Diremo w funzione della variabile complessa z nel campo C quando ad ogni valore di z in C corrisponde un valore determinato e **generalmente** *finito per w ; e w, considerata come funzione delle variabili reali x, y, sia continua e possegga derivate parziali del primo ordine $\dfrac{\partial w}{\partial x}$, $\dfrac{\partial w}{\partial y}$ pure* **generalmente** *finite e continue e legate dalla relazione di monogeneità*

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{I}$$

Nelle presenti lezioni ci occuperemo principalmente del caso in cui per ogni punto z in C si abbia *un solo* valore di w. In tal caso, se partendo da un punto qualunque M_0 in C descriviamo una curva chiusa qualunque σ, tutta compresa entro C, incontreremo per w una catena continua di valori, che parte dal valore iniziale w_0 in M_0 e vi ritorna. Allora la funzione w di z si dice *monodroma* in C per significare appunto che, descrivendo qualunque cammino chiuso in C, si ristabilisce con continuità per la funzione il valore iniziale. Ma si possono egualmente considerare, e si considerano, funzioni di variabile complessa a più valori, ed anche con numero infinito (discreto) di valori in ogni punto ; soltanto, quando si consideri un intorno sufficientemente piccolo di un punto *generico* di C, deve essere possibile di scindere le diverse determinazioni di w in altrettante funzioni *monodrome* nell' intorno.

Def. di monodromia

Quando nel campo completo C, partendo da un punto M_0, si descrive una curva chiusa scegliendo i valori di w colla legge di continuità, si ritornerà in M_0 o col valore w_0 scelto inizialmente, o con uno degli altri valori che w ha in M_0. E se effettivamente, per certi cammini chiusi, si ritornerà con un valore di w diverso dall'iniziale, la w si dirà funzione *polidroma* nel campo. Più tardi, quando parleremo delle funzioni *analitiche*, ritorneremo sui concetti di *monodromia* e *polidromia* delle funzioni che verranno allora meglio precisati.

Se nella condizione (I) di monogeneità scindiamo la parte reale e l'immaginaria ponendo

$$w = u + i\,v\,,$$

vediamo che le funzioni reali u, v delle variabili reali x, y dovranno possedere derivate parziali prime, generalmente finite e continue nel campo, e legate dalle relazioni fondamentali

$$\text{(II)} \qquad \boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}}$$

In seguito dimostreremo che per una funzione di variabile complessa, l'ipotesi (inclusa nella definizione) di una derivata prima generalmente finita, continua e indipendente dalla direzione, trae seco, come conseguenza, l'esistenza e la continuità di tutte le derivate degli ordini superiori. E così le due funzioni reali u, v possederanno pure le derivate parziali di tutti gli ordini, generalmente finite e continue. Ammettendo per un momento la cosa, in particolare per le derivate seconde, deduciamo subito dalle (II) le equazioni del 2º ordine

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \end{cases}}$$

Così adunque la parte reale u ed il coefficiente v dell'immaginario di una funzione w di variabile complessa sono soluzioni dell'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0.$$

Il primo membro di questa equazione si indica spesso brevemente col simbolo $\Delta^2\theta$ e l'equazione stessa con $\Delta^2\theta = 0$.

Viceversa ad ogni soluzione u di questa equazione ne corrisponde una coniugata v definita, a meno di una costante additiva, secondo le (II), dal suo differenziale totale

$$dv = \frac{\partial u}{\partial x}\,dy - \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\,;$$

e in $w = u + i\,v$ si ha così una funzione della variabile complessa z. Lo studio delle funzioni di variabile complessa può riguardarsi quindi anche, da un punto di vista del tutto reale, come lo studio delle coppie coniugate (u, v) di soluzioni dell'equazione di Laplace.

§ 3. — Serie di potenze. – Cerchio di convergenza.

Stabilito nel paragrafo precedente il concetto di funzione di variabile complessa, andiamo subito a considerare nelle serie di potenze il più importante esempio di tali funzioni. Per serie di potenze di una variabile complessa z intendiamo una serie

Def

$$(5) \qquad a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots = \sum_0^\infty a_n z^n$$

che procede per le potenze ascendenti intere e positive di z. L'importanza delle serie di potenze nella nostra teoria è affatto fondamentale, poichè esse sono gli elementi coi quali può costruirsi ogni funzione di variabile complessa (Cauchy-Weierstrass).

Cominciamo dunque dal ricordare e precisare le proprietà riguardanti la convergenza delle serie di potenze. Innanzi tutto è chiaro che una serie (5) ha almeno un punto ove converge, il punto $z = 0$, ove si riduce al suo primo termine a_0; ma noi supponiamo che essa converga anche in qualche altro punto z_0 del piano. Allora dimostriamo il teorema fondamentale:

Se in un punto z_0 del piano complesso, diverso dall'origine O, la serie di potenze (5) converge e descriviamo col centro in O un cerchio che lasci il punto z_0 all'esterno, per quanto prossimo alla peri-

feria, in tutta l'area del cerchio e sul contorno la serie (5) *converge assolutamente ed in egual grado* [1]).

Il teorema sarà dimostrato se proviamo la convergenza in egual grado della serie dei moduli

$$(a) \quad \sum_{0}^{\infty} |a_n| \; |z|^n ,$$

cioè se dimostriamo che, dato un numero ε piccolo a piacere, possiamo trovare un numero m tanto grande che il resto della serie

$$R_m = |a_m| \; |z|^m + |a_{m+1}| \; |z|^{m+1} + \dots.$$

per tutti i valori di z i cui indici cadono nella detta area circolare, sia $< \varepsilon$. Ora poichè la serie

$$\sum a_n z_0^n$$

converge per ipotesi, avremo certamente

$$\lim_{n=\infty} (a_n z_0^n) = 0 ,$$

quindi anche

$$\lim_{n=\infty} |a^n| \; |z_0|^n = 0 .$$

Possiamo dunque fissare una quantità positiva finita g, tale che, per tutti i valori di n, si abbia

$$(6) \qquad |a_n| |z_0|^n < g.$$

Ora possiamo scrivere

$$R_m = |a_m| \; |z_0|^m \cdot \zeta^m + |a_{m+1}| \; |z_0|^{m+1} \zeta^{m+1} + \dots$$

[1]) L'ipotesi che in z_0 la serie converga, può sostituirsi, nell'enunciato del teorema, coll'altra meno restrittiva che in z_0 i moduli dei termini della serie rimangano tutti inferiori ad una quantità fissa g, poichè allora, valendo la diseguaglianza (6) del testo, la dimostrazione seguente resta inalterata.

avendo posto

$$\zeta = \frac{|z|}{|z_0|}$$

e però, a causa della diseguaglianza (6), abbiamo

$$(7) \qquad R_m < g\,(\zeta^m + \zeta^{m+1} + \zeta^{m+2} + \dots).$$

Se indichiamo con r il raggio del nostro cerchio e poniamo

$$\frac{r}{|z_0|} = q,$$

sarà evidentemente

$$\zeta \leq q < 1 ,$$

e la (7) ci darà

$$R_m < g \frac{\zeta^m}{1 - \zeta}$$

e a più forte ragione

$$R_m < g \frac{q^m}{1 - q} .$$

Basta dunque prendere m tanto grande che si abbia

$$g \frac{q^m}{1 - q} \leq \varepsilon ,$$

ciò che è sempre possibile essendo $q < 1$, ed avremo che per tutti i punti dell'area circolare e della periferia risulterà, come si voleva :

$$R_m < \varepsilon.$$

Dal teorema dimostrato risulta come corollario che *se in un punto* z_1 *la serie di potenze* (5) *non converge, a più forte ragione non convergerà in qualsiasi punto distante dall'origine più di* z_1.

Dalle considerazioni precedenti facilmente deduciamo l'esistenza del così detto *cerchio di convergenza* delle serie di potenze. Perciò distribuiamo tutti i circoli col centro in O (o i loro raggi)

in due classi A B; diremo un cerchio della prima classe A se *in tutto l' interno* del cerchio la serie converge, della seconda classe B quando *in tutto l'esterno* del cerchio la serie non converge.
1° cond. Ogni cerchio apparterrà necessariamente all' una o all' altra classe, poichè se non è della classe A ciò significa che in qualche punto interno al cerchio la serie non converge ed allora, pel corollario sopra notato, essa diverge a più forte ragione in tutto l'esterno del cerchio, il quale appartiene dunque a B. Similmente se un cerchio non è della classe B, esso appartiene necessariamente alla classe A.

2° cond. Di più è chiaro che se un cerchio è della classe A, qualunque cerchio concentrico e più piccolo vi appartiene egualmente, e se un cerchio appartiene a B, lo stesso accade di qualunque cerchio concentrico più grande. In fine non vi può essere al massimo che *un solo* cerchio appartenente insieme alle due classi. 3° cond.

La ripartizione dei circoli di centro O nelle due classi A B soddisfa quindi alle condizioni fondamentali che ci assicurano dell'esistenza di un cerchio C limite delle due classi [1]), dotato cioè della proprietà che ogni circolo col centro in O appartiene alla classe A se è interno a C, alla classe B se è esterno. Così adunque: *In ogni punto interno a C la serie di potenze converge, in ogni punto esterno la serie non converge (anzi crescono all' infinito i moduli dei suoi termini).* Quanto a ciò che accade sui punti della periferia di C, nulla si può dire *in generale*, potendosi avere in tali punti convergenza o divergenza secondo la natura particolare della serie (vedi più oltre § 7).

Il cerchio C di cui abbiamo così dimostrato l'esistenza, e che può del resto estendersi talora a tutto il piano [2]), dicesi il *cerchio di convergenza* della serie.

Dalle nostre considerazioni risulta altresì l'importante risultato:

In qualunque campo tutto interno al cerchio C di convergenza la serie di potenze converge assolutamente ed in egual grado.

Per noti teoremi sulla convergenza in egual grado delle serie [3]), si ha quindi anche:

La somma $w = \Sigma\, a_n z^n$ della serie di potenze, in qualunque campo tutto interno al cerchio di convergenza, rappresenta una funzione

1) Vedi Dini, *Fondamenti ecc.*, § 9, pag. 11.
2) Ogni circolo appartiene allora alla classe A.
3) Dini, *Fondamenti ecc.*, § 97, pag. 109.

(1) Infatti da $\frac{z'^m - z^m}{z'-z} = z'^{m-1} + z'^{m-2} z + \ldots$ passando al limite per $z' \to z$ con z a dist. finita ed ogni $m>0$ intero risulta $\lim_{z' \to z} \frac{z'^m - z^m}{z'-z} = m z^{m-1}$

finita e continua delle due variabili reali x, y. Che la w sia una funzione della variabile complessa z risulterà poi dai paragrafi seguenti.

Notiamo infine che il cerchio C di convergenza della serie di potenze $\Sigma\, a_n z^n$ è perfettamente caratterizzato dalle proprietà seguenti:

1ª *In ogni punto interno a C la serie dei moduli $\Sigma |a_n| \, |z^n|$ della proposta è convergente*; 2ª *in ogni punto esterno a C la medesima serie $\Sigma |a_n| \; z^n$ è divergente.*

E infatti se z è interno a C, in ogni punto z_0 ancora interno a C, ma più prossimo alla periferia, la serie converge, onde (pel teorema fondamentale) in z converge assolutamente. La seconda proprietà è già contenuta nell'altra che all'esterno di C la serie non converge, nemmeno condizionatamente.

§ 4. — Serie derivata.

rivedere

Il termine generale $a_n z^n$ della serie di potenze è una funzione della variabile complessa z ed ha per derivata

$$n a_n z^{n-1}. \quad (1)$$

Consideriamo la serie delle derivate

$$\sum_1^\infty n a_n z^{n-1}$$

e dimostriamo che questa serie di potenze ha il medesimo cerchio C di convergenza della serie primitiva. Perciò basterà provare, secondo quanto abbiamo notato alla fine del paragrafo precedente:

1) che in qualunque punto interno a C la serie dei moduli:

$$\sum n\, |a^n| \; |z|^{n-1} \tag{8}$$

è convergente;

2) che in qualunque punto esterno a C la serie (8) diverge.

Sia z_0 un punto interno a C sicchè, detto R il raggio di C, sarà

$$|z_0| < R;$$

dimostriamo la convergenza della serie dei moduli

$$\sum n \, | a_n | \, | z_0 |^{n-1}.$$

Prendiamo un punto z_1 interno a C, ma più prossimo alla periferia di z_0, sicchè

$$| z_1 | > | z_0 |$$

e scriviamo

$$\sum n \, | a_n | \, | z_0 |^{n-1} = \sum n \, | a_n | \, | z_1 |^{n-1} \left(\frac{| z_0 |}{| z_1 |} \right)^{n-1}.$$

Posto $q = \frac{| z_0 |}{| z_1 |}$, è $q < 1$, e i termini della serie

$$\sum n \, | a_n | \, | z_0 |^{n-1} = \sum n \, | a_n | \, | z_1 |^{n-1} \cdot q^{n-1}$$

si deducono da quelli della serie convergente

$$\sum n q^{n-1} \text{ 1)}$$

moltiplicandoli per quantità positive

$$| a_n | \, | z_1 |^{n-1},$$

che non solo si mantengono finite ma vanno indefinitamente decrescendo, a causa della convergenza in z_1 della serie primitiva. Dunque anche la serie $\Sigma \, n \, | a_n | \, | z_0 |^{n-1}$ è convergente; *c. d. d.*

Sia ora z_1 un punto esterno a C: dico che la serie $\Sigma \, n \, | a_n | \, | z_1 |^{n-1}$ è divergente. E invero, se fosse convergente, tale sarebbe pure la serie

$$\sum n \, | a_n | \, | z_1 |^n$$

1) Che questa serie sia convergente risulta dall'applicare i primi criteri di convergenza delle serie a termini positivi. Qui abbiamo

$$u_n = n \, q^{n-1}, \quad u_{n+1} = (n+1) \, q^n$$

indi

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q < 1.$$

e a più forte ragione l'altra

$$\sum | a_n | \, | z_1 |^n,$$

ciò che è assurdo, essendo z_1 esterno al cerchio di convergenza della serie primitiva.

Dunque: *La serie derivata $\Sigma \, n \, a_n \, z^{n-1}$ ha lo stesso cerchio di convergenza della serie primitiva.* Ne segue che, in qualunque campo tutto interno al cerchio C, la serie derivata converge in egual grado. In un tale campo è adunque legittima la derivazione per serie 1) e posto

$$w = \sum a_n \, z^n,$$

la w ammetterà derivate parziali prime pure finite e continue, date dalle formole

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \sum n \, a_n \, z^{n-1} \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= i \sum n \, a_n \, z^{n-1}, \end{aligned} \right.$$

onde sarà soddisfatta la condizione di monogeneità

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Abbiamo dunque il teorema:

Una serie di potenze $w = \Sigma \, a_n \, z^n$ rappresenta, nell' interno del cerchio di convergenza, una funzione finita, continua e monodroma della variabile complessa z.

È chiaro poi che una tale funzione possiede non solo la derivata prima, ma anche derivate di tutti gli ordini, rappresentate dalle serie delle corrispondenti derivate prime, seconde ecc., le quali tutte hanno il medesimo cerchio di convergenza della primitiva, e per ciò le successive derivate di w sono tutte funzioni finite, continue e monodrome della variabile complessa z entro il cerchio di convergenza.

1) Dini, *Fondamenti ecc.*, § 105, pag. 115.

§ 5. — Teorema di Cauchy-Hadamard.

Le considerazioni del § 3 ci hanno dimostrata l'*esistenza* del cerchio di convergenza per una serie di potenze. Ora andiamo a stabilire un criterio, col quale si riesce a precisare il valore del raggio R del cerchio di convergenza. Questa proposizione, già contenuta nelle ricerche di Cauchy, fu ritrovata nuovamente ed in tempo recente da Hadamard e si cita comunemente come *teorema di Hadamard*. Colla sua dimostrazione si viene nuovamente a provare l'esistenza ed a stabilire le proprietà del cerchio di convergenza.

Partiamo dall' ipotesi che la serie

$$\sum a_n z^n$$

converga in qualche punto z_0 fuori dell'origine; allora, perchè

Cond nec

$$\lim_{n=\infty} |a_n|\,|z_0|^n = 0,$$

potremo prendere m tanto grande che si abbia sempre

$$|a_n|\,|z_0|^n < 1 \quad \text{per} \quad n \geq m,$$

cioè:

$$|a_n| < \frac{1}{|z_0|^n}\,(n \geq m).$$

Estraendo, nel senso aritmetico, la radice n^{ma} dai due membri avremo quindi

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{|z_0|}\,(n \geq m).$$

Ne risulta che per una serie di potenze, convergente in qualche punto fuori dell' origine $z = 0$, nella serie dei numeri positivi

(9) $$|a_1|,\ \sqrt{|a_2|},\ \sqrt[3]{|a_3|} \ldots,\ \sqrt[n]{|a_n|} \ldots$$

massimo limite dell'insieme (9)

tutti i termini si debbono mantenere inferiori ad una quantità finita g. Ora ripartiamo i numeri positivi $< g$ in due classi A B, ponendo nella prima classe A ogni numero a tale che nella serie (9), *in là quanto si vuole*, vi siano sempre dei termini $> a$, e attribuendo un numero b alla seconda classe B quando nella serie (9), *da un certo punto in poi*, tutti i termini sono $\leq b$. Questa ripartizione dei numeri fra 0 e g in due classi soddisfa, come subito si vede, alle condizioni fondamentali già citate al § 3 [1]), che assicurano l'esistenza di un numero limite α che separa le due classi, tale cioè che qualunque numero $< \alpha$ appartiene alla classe A, qualunque numero $> \alpha$ appartiene a B. Ciò posto, il teorema di Cauchy-Hadamard consiste nella proposizione seguente: *Il raggio R del cerchio di convergenza è precisamente eguale all' inversa di questo numero α*:

$$R = \frac{1}{\alpha}.$$

E infatti sia dapprima

$$|z| < \frac{1}{\alpha}$$

$\alpha|z| < 1$

e prendiamo ε positivo e così piccolo che sia

$$(\alpha + \varepsilon)\,|z| = q < 1.$$

Poichè il numero $\alpha + \varepsilon$ appartiene a B, da un certo valore di n in poi, è sempre

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \alpha + \varepsilon,$$

indi

$$\sqrt[n]{|a_n|}\cdot|z| \leq q,$$

$$|a_n|\,|z|^n \leq q^n;$$

dunque la serie

$$\sum |a^n|\,|z|^n$$

[1]) Dini, *Fondamenti ecc.*, pag. 19.

ha, da un certo punto in poi, i suoi termini minori di quelli della progressione geometrica $\Sigma\, q^n$, di ragione $q < 1$, ed è per ciò convergente.

Sia ora invece

$$|z| > \frac{1}{a}$$

e poniamo

$$\varepsilon = a - \frac{1}{|z|}\,.$$

Il numero

$$a - \varepsilon = \frac{1}{|z|}$$

appartiene alla classe A, quindi vi sono sempre dei valori di n, tanto grandi quanto si vuole, e tali che

$$\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{|z|}\,,$$

cioè

$$|\,a_n\,|\;|\,z\,|^n > 1\,,$$

onde deduciamo che la serie $\Sigma\,|\,a^n\,|\;|\,z\,|^n$ è in tal caso divergente.

Da questo teorema seguono diversi corollari notevoli. In primo luogo questo, che il raggio del cerchio di convergenza di una serie di potenze dipende unicamente dai moduli dei coefficienti, ciò che del resto segue anche subito dal fatto che la serie dei moduli è convergente nell'interno, divergente all'esterno del cerchio. In secondo luogo si vede che la serie sarà convergente in tutto il piano quando sia $a = 0$, ossia quando

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0.$$

E infatti se $a = 0$, un numero positivo ε comunque piccolo appartiene alla classe B e perciò, da un certo valore di n in poi, si ha

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \varepsilon\,.$$

Viceversa, se $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, sarà $a = 0$; dunque: *La condizione necessaria e sufficiente perchè la serie di potenze $\Sigma\, a_n\, z^n$ sia convergente in tutto il piano è che si abbia:*

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0.$$

§ 6. — Funzioni elementari e^z, sen z, cos z, log z, z^a.

Esempî di serie convergenti in tutto il piano si hanno nelle serie:

$$\sum_0^\infty \frac{z^n}{\pi(n)} = 1 + z + \frac{z^2}{1\,.\,2} + \frac{z^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots.$$

$$\sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{\pi(2n+1)} = z - \frac{z^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{z^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} \ldots.$$

$$\sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^{2n}}{\pi(2n)} = 1 - \frac{z^2}{1\,.\,2} + \frac{z^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} \ldots.\,,$$

che per z reale, $z = x$, rappresentano rispettivamente le funzioni esponenziali e circolari: e^x, sen x, cos x. Ma anche per valori complessi di z le serie hanno un significato e rappresentano funzioni finite, continue e monodrome della variabile complessa in tutto il piano, che si indicano ancora coi simboli

$$e^z = \sum_0^\infty \frac{z^n}{\pi(n)}\,,$$

$$\text{sen}\, z = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{\pi(2n+1)}\,,$$

$$\cos z = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^{2n}}{\pi(2n)}\,,$$

e queste formole, per z qualunque, servono appunto di definizione alle funzioni stesse. In sostanza queste funzioni si riducono unicamente alla esponenziale, mediante le celebri formole d' Eulero :

$$\boxed{\begin{cases} e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z \\ e^{-iz} = \cos z - i \operatorname{sen} z. \end{cases}} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

La proprietà fondamentale della funzione esponenziale è espressa dal teorema d'addizione

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2},$$

che si verifica facilmente eseguendo la moltiplicazione delle due serie. Ne segue che in $e^z = e^{x+iy}$ si può subito separare la parte reale ed immaginaria colla formola

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Di qui si trae che si ha $e^{z_1} = e^{z_2}$ allora soltanto quando la differenza $z_1 - z_2$ eguaglia un multiplo intero di $2\pi i$, ossia :

La funzione esponenziale e^z è una funzione semplicemente periodica col periodo fondamentale $2\pi i$.

Dalle formole d' Eulero segue poi che sen z, cos z *sono semplicemente periodiche col periodo fondamentale* 2π.

In fine notiamo che il teorema d'addizione della funzione esponenziale porta ad estendere i teoremi d'addizione delle funzioni circolari a valori complessi dell'argomento colle formole :

$$\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 + \operatorname{sen} z_2 \cos z_1$$
$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2.$$

Oltre le funzioni elementari precedenti, consideriamo anche le funzioni

$$\log z, \quad z^a,$$

con ~~a costante complessa qualunque,~~ le quali, benchè in certi campi non siano più monodrome, sono di natura così elementare che conviene osservarne subito le proprietà.

Per definire la funzione log z ricordiamo che (a causa delle citate formole d'Eulero) si può esprimere z per mezzo del suo modulo r e dell'argomento θ colla formola

$$z = re^{i\theta};$$

ma ricordiamo altresì che, mentre il modulo $\sqrt{x^2 + y^2}$ è perfettamente determinato, l' argomento $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ lo è soltanto a meno di multipli di 2π. Prendiamo allora come definizione di log z la formola :

$$\boxed{\log z = \log r + i\theta.} \qquad \text{definizione}$$

Prescindendo da ciò che log z ha in ogni punto infiniti valori, differenti per multipli di $2\pi i$, vediamo che le parti reale ed immaginaria di log z :

$$u = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2), \quad v = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

soddisfano alle condizioni di monogeneità

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Ora osserviamo che, se in un punto del piano scegliamo per l'argomento θ uno dei suoi valori, e facciamo descrivere a z, partendo dal punto, una linea qualunque continua, in ogni punto del cammino sarà fissato dalla legge di continuità il valore che dovremo prendere per θ e in particolare, se descriveremo una linea chiusa σ *che non giri intorno all'origine*, ritorneremo al punto di partenza col medesimo valore di θ. Se consideriamo adunque per esempio un circolo di raggio grande quanto si vuole, ma che non contenga nell' interno il punto $z = 0$, basterà fissare il valore log z in un punto del campo e la funzione log z sarà in quel campo circolare finita, continua e monodroma. Così potremo dire (§ 2) che in qualunque campo la funzione log z sarà funzione della variabile complessa z e soltanto, se il campo sarà tale che si possano descrivervi curve chiuse avvolgenti l'origine, la funzione log z sarà poli-

$z^\alpha = e^{\alpha(\log r - \alpha(i\theta + 2n\pi i))}$

droma (infinitiforme) ed avrà in ogni punto infiniti valori, differenti per multipli di $2\pi i$.

Descritte così le proprietà della funzione $\log z$, definiremo la potenza z^a di z, con a costante complessa qualunque, assumendo

$$\boxed{z^a = e^{a \log z}}.$$

Essa sarà anche una funzione della variabile complessa z e i suoi valori in un punto risulteranno da uno di essi, moltiplicando questo particolare valore per potenze di $e^{2\pi i a}$. Il numero di questi valori sarà finito solo quando a sia un numero reale frazionario; in tutti gli altri casi infinito. La polidromia di z^a, come quella di $\log z$, dipende dal poter girare intorno al punto (singolare) $z = 0$; ma le varie determinazioni di z^a costituiscono altrettante funzioni monodrome in ogni campo, ove tali giri attorno all'origine siano impossibili.

§ 7. — Esempi di serie di potenze considerate sulla periferia del cerchio di convergenza.

Vediamo ora in effettivi esempi come una serie di potenze possa offrire sulla periferia del cerchio di convergenza le circostanze più svariate. Per cominciare da un esempio semplicissimo, consideriamo la progressione geometrica

$$\sum_0^\infty z^n = \frac{1}{1-z},$$

che ha un cerchio di convergenza di raggio $= 1$.

Sulla circonferenza essa non converge in alcun punto; e invero per $z = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, si riduce a

$$\sum (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

e non converge perchè il modulo del termine generale, anzichè convergere a zero, è sempre $= 1$. Eguali circostanze offrirà la serie

$$\sum a_n z^n,$$

quando i moduli dei coefficienti a_n non tendono a zero e si abbia

$$\lim_{n=\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1;$$

il cerchio di convergenza della serie è di raggio $= 1$ e la serie non converge in nessun punto della periferia.

3°

Al contrario consideriamo una serie

$$\sum a_n z^n,$$

in cui i coefficienti a_n siano quantità reali, tutte positive decrescenti (da un certo punto in poi) e tali che

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1.$$

Sulla circonferenza del cerchio di convergenza, di raggio $= 1$, la serie convergerà dappertutto (salvo eventualmente nel punto $z = 1$, le condizioni imposte alle a_n non assicurando la convergenza della serie $\Sigma\, a_n$. Proveremo la nostra asserzione dimostrando che le serie

$$\sum a_n \cos n\theta, \quad \sum a_n \operatorname{sen} n\theta$$

convergono ogni qualvolta θ non è multiplo di 2π. Consideriamo per esempio la somma

$$S_n = a_1 \cos\theta + a_2 \cos 2\theta + \dots + a_n \cos n\theta$$

dei primi n termini della prima serie. Ne deduciamo

$$2 S_n \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = a_1\left(\operatorname{sen}\frac{3\theta}{2} - \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right) + a_2\left(\operatorname{sen}\frac{5\theta}{2} - \operatorname{sen}\frac{3\theta}{2}\right) + \dots$$

$$+ a_n\left(\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\theta}{2} - \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\theta}{2}\right)$$

che possiamo scrivere

$$2\,S_n \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = -\,a_1 \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + \operatorname{sen}\frac{3\,\theta}{2}\,(a_1 - a_2) + \operatorname{sen}\frac{5\,\theta}{2}\,(a_2 - a_3) + \dots$$

$$+ \operatorname{sen}\frac{(2\,n-1)\,\theta}{2}\,(a_{n-1} - a_n) + a_n \operatorname{sen}\frac{(2\,n+1)\,\theta}{2}\,.$$

Poichè $\lim a_n = 0$, e la serie

$$(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_{n-1} - a_n) + \dots\,,$$

che ha, almeno da un certo punto in poi, termini tutti positivi, è una serie convergente, convergerà pure verso un limite determinato e finito

$$2\,S_n \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\,,$$

quindi anche S_n, essendo $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \neq 0$. Considerazioni analoghe valgono per la seconda serie $\Sigma\, a_n \operatorname{sen} n\,\theta$.

Come esempio del caso ora considerato, adduciamo la serie logaritmica

$$z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots + \frac{z^n}{n} + \dots\,,$$

che converge su tutta la periferia del cerchio di convergenza, salvo che in $z = 1$.

In fine, essendo m un numero intiero qualunque > 1, consideriamo la serie

$$z + z^m + z^{m^2} + \dots + z^{m^n} + \dots\,,$$

che ha un cerchio di convergenza di raggio $= 1$. Se consideriamo un punto della periferia ove un termine z^{m^r} della serie sia eguale alla unità, anche tutti i termini seguenti saranno $= 1$ e la serie sarà ivi *divergente*. Questi punti della periferia corrispondono ad anomalie θ date da

$$\theta = \frac{2k\pi}{m^r} \quad (k,\, r \text{ interi qualunque}),$$

e formano sulla circonferenza un gruppo di punti dovunque condensato.

§ 8. — Rappresentazioni conformi.

Della teoria delle funzioni di variabile complessa si può dare una interpretazione geometrica *reale* che importa conoscere.

Supponiamo che sia w funzione della variabile complessa z in un certo campo C. Scindendo w nella sua parte reale ed immaginaria

$$w = u + i\,v\,,$$

distendiamo i valori di w in un altro piano complesso π', ove gli assi delle quantità reali ed immaginarie si diranno gli assi $O'u$, $O'v$. Ad ogni punto z di C corrisponderà un punto w di π' e mentre z percorre tutta l'area C, w percorrerà nel suo piano un campo C' a due dimensioni [1]), che sarà finito se w è dovunque finita. Si avrà così una *rappresentazione* dell'area piana C sull'area piana C', tale che ad ogni punto di C corrisponderà un solo punto di C' e ad ogni punto di C' uno o più punti di C, con legge di continuità. Se z descrive in C una curva ordinaria γ, w descriverà in C' una curva corrispondente γ' e in generale ogni figura in C avrà in C' la sua figura (immagine) corrispondente. Ora la proprietà essenziale di una siffatta rappresentazione è data dal teorema: *Ogni angolo di una figura nel piano z eguaglia l'angolo corrispondente della figura immagine nel piano w (salvo in punti eccezionali)* [2]). Una rappre-

[1]) Che il campo C' descritto dal punto (u, v) sia realmente a due dimensioni risulta subito dalla teoria delle funzioni implicite di variabili reali ove si osservi che il determinante funzionale:

$$\frac{\partial\,(u,\,v)}{\partial\,(x,\,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

è generalmente diverso da zero. Esso si annulla invero solo nei punti ove è nulla la derivata $w'(z)$.

[2]) I punti eccezionali sono, come si vedrà, quelli ove la derivata $\frac{dw}{dz}$ è zero o infinita.

sentazione che goda della proprietà di conservare gli angoli dicesi *conforme*, talchè ogni funzione di variabile complessa dà luogo ad una rappresentazione conforme. E noi dimostreremo ora, insieme al teorema enunciato, anche il suo inverso, che cioè ogni rappresentazione conforme di un'area piana sopra un'altra area piana si ottiene in siffatta guisa e preciseremo inoltre se vi ha conservazione *diretta o inversa* degli angoli.

Consideriamo dunque due piani π, π' sui quali scegliamo due rispettivi sistemi di assi cartesiani ortogonali Ox, Oy ; $O'x'$, $O'y'$ e fissando le pagine positive dei due piani, supponiamo le coppie di assi *egualmente orientate* [1]). Consideriamo poi una rappresentazione del piano π sul piano π', analiticamente espressa dalle formole

$$x' = x'(x, y), \quad y' = y'(x, y),$$

le funzioni $x'(x, y)$, $y'(x, y)$ di x, y essendo supposte, entro un certo campo C, ad un sol valore, finite e continue insieme alle derivate parziali prime. Se consideriamo un punto $P \equiv (x, y)$ ed una curva γ uscente da esso, indicando con θ l'angolo di cui deve rotare nel verso positivo (da destra verso sinistra) la direzione positiva dell'asse delle x per assumere la direzione della tangente a γ in P, avremo

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{dy}{dx},$$

i differenziali essendo presi lungo la curva [2]).

Al punto $P \equiv (x, y)$ corrisponderà in π' il punto $P' \equiv (x', y')$ e alla curva γ una curva γ', uscente da P' con una direzione corrispondente alla formola

$$\operatorname{tang} \theta' = \frac{dy'}{dx'} = \frac{\dfrac{\partial y'}{\partial x} dx + \dfrac{\partial y'}{\partial y} dy}{\dfrac{\partial x'}{\partial x} dx + \dfrac{\partial x'}{\partial y} dy}.$$

[1]) Fissiamo per es., che per un osservatore collocato sulla pagina positiva e che guardi verso la direzione positiva Ox (Ox') la direzione positiva Oy ($O'y'$) giaccia alla sinistra.

[2]) Quale delle due direzioni della tangente si assuma come positiva è evidentemente indifferente per la formula del testo.

Ne risulta la formola

$$\operatorname{tang} \theta' = \frac{\dfrac{\partial y'}{\partial x} + \dfrac{\partial y'}{\partial y} \operatorname{tang} \theta}{\dfrac{\partial x'}{\partial x} + \dfrac{\partial x'}{\partial y} \operatorname{tang} \theta}, \tag{10}$$

sostituz. lineari fratte

la quale mostra come ad ogni direzione uscente da P ne corrisponde, biunivocamente, una uscente da P' ed anzi i due fasci di direzioni corrispondenti sono sempre fra loro proiettivi, qualunque sia la corrispondenza fra i due piani. Si osservi che, ponendo $\dfrac{\partial x'}{\partial x} = \alpha$, $\dfrac{\partial x'}{\partial y} = \beta$, $\dfrac{\partial y'}{\partial x} = \gamma$, $\dfrac{\partial y'}{\partial y} = \delta$, e inoltre $m = \operatorname{tang} \theta$ $m' = \operatorname{tang} \theta'$ si ha : $m' = \dfrac{\delta m + \gamma}{\beta m + \alpha}$, ed m' è crescente o decrescente per m crescente, secondo che il *determinante funzionale* $\alpha\delta - \beta\gamma = \dfrac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)}$ è positivo o negativo. Ciò significa che se un punto $M \equiv (x, y)$ descrive una piccola curva chiusa attorno a P circolando nel senso diretto, il punto corrispondente $M' \equiv (x', y')$ circolerà attorno a P' in senso concordante ovvero nell' opposto, a seconda che il segno del detto determinante sarà positivo o negativo.

Ma supponiamo ora che la rappresentazione sia conforme, cioè gli angoli siano conservati e distinguiamo due casi, secondo che anche il senso degli angoli viene conservato, ovvero invertito. Nel primo caso, se facciamo ruotare la direzione uscente da P in un certo senso, p. es. nel senso positivo, di altrettanto dovrà ruotare, e nel medesimo verso, la direzione corrispondente per P', cioè la differenza $\theta' - \theta$ dovrà rimanere costante al variare di θ. Nel secondo caso invece rimarrà costante la somma $\theta' + \theta$. Avremo quindi

$$\theta' = \pm \theta + a,$$

il doppio segno corrispondendo ai due casi ed a essendo costante al variare di θ ma, in generale, funzione di x, y.

Ponendo

$$\operatorname{tg} a = m,$$

ne segue

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{m \pm \operatorname{tg}\theta}{1 \mp m \operatorname{tg}\theta}$$

e, paragonando colla (10), ne deduciamo

$$(11) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial x} = \pm \dfrac{\partial y'}{\partial y} \\ \dfrac{\partial x'}{\partial y} = \mp \dfrac{\partial y'}{\partial x}. \end{cases} \quad {}^{1)}$$

Viceversa, se le condizioni (11) sono soddisfatte, vediamo subito che sarà $\theta' - \theta$ o $\theta' + \theta$ costante e la rappresentazione sarà conforme diretta o conforme inversa. Nel primo caso le (11) mostrano che $x' + i y'$ deve essere funzione della variabile complessa $x + i y$, nel secondo invece della coniugata $x - i y$. Per altro qui è supposto implicitamente che non siano simultaneamente zero le derivate parziali di x', y', cioè che non sia nulla la derivata $\dfrac{dz'}{dz}$.

Dunque: *La più generale rappresentazione conforme diretta o inversa di un piano sopra un altro si ottiene ponendo la variabile complessa dell' un piano eguale ad una funzione della variabile complessa dell'altro, o della coniugata. Punti eccezionali della rappresentazione sono quelli, ove la derivata è nulla (o infinita).*

Spesso si dice di una rappresentazione conforme che essa conserva la similitudine delle parti infinitesime, ciò che è una conseguenza geometrica della conservazione degli angoli. Analiticamente constatiamo il fatto osservando che se ds è l'elemento d'arco di una curva γ, ds' quello corrispondente della curva γ', abbiamo

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

$$ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 = \left(\frac{\partial x'}{\partial x} dx + \frac{\partial x'}{\partial y} dy\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial x} dx + \frac{\partial y'}{\partial y} dy\right)^2,$$

1) Le stesse formole si deducono anche subito dall'osservare che, se la rappresentazione è conforme diretta, le due direzioni cicliche debbono essere singolarmente conservate, e per la rappresentazione conforme inversa debbono venire invece permutate fra loro. Nel primo caso per $\operatorname{tang}\theta = \pm i$ deve risultare dalla (10) $\operatorname{tang}\theta' = \pm i$, e nel secondo invece $\operatorname{tang}\theta' = \mp i$, ciò che dà nuovamente le (11).

indi per le (11)

$$ds'^2 = \left[\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2\right] \cdot ds^2.$$

Se valgono nelle (11) i segni superiori, abbiamo dunque

$$\frac{ds'}{ds} = \left|\frac{dz'}{dz}\right|.$$

Ciò dimostra che tutti gli elementi lineari spiccati da un punto P subiscono nella rappresentazione il medesimo allungamento, la cui grandezza è misurata dal modulo della derivata.

§ 9. — Esempi diversi.

a) Consideriamo la rappresentazione conforme stabilita fra i due piani complessi π, π', assumendo

$$z' = z^n,$$

ove n è un numero intero positivo. Qui abbiamo $\dfrac{dz'}{dz} = n z^{n-1}$ e perciò la rappresentazione riuscirà conforme in tutti i punti, salvo che in $z = 0$. E se introduciamo coordinate polari ponendo

$$z = \varrho\, e^{i\theta}, \qquad z' = \varrho'\, e^{i\theta'},$$

avremo le formole di rappresentazione

$$\varrho' = \varrho^n, \qquad \theta' = n\,\theta.$$

Queste dimostrano che nell'intorno dell'origine $z = 0$ gli angoli non sono conservati nella rappresentazione, ma invece n-uplicati. Così p. es. se consideriamo nel piano z il settore $O\,A\,B$ del circolo di raggio $= 1$ racchiuso dalle rette $\theta = 0$, $\theta = \dfrac{\pi}{n}$, la figura immagine in z' sarà un semicerchio, pure di raggio $= 1$, ai due raggi estremi $O\,A$, $O\,B$ corrispondendo i raggi per diritto $O'\,A'$, $O'\,B'$. In generale, se indichiamo con a una costante reale > 1, la formola

$$z' = z^a$$

ci rappresenterà conformemente un settore d'ampiezza angolare $\dfrac{\pi}{a}$ sopra un semicerchio ; e similmente l'angolo indefinito d'ampiezza $\dfrac{\pi}{a}$ sul semipiano.

b) Se prendiamo

$$z' = \frac{z - i}{z + i}\,,$$

vediamo che per z reale il modulo di z' è $= 1$ e, percorrendo z tutto l'asse reale da $-\infty$ a $+\infty$, z' percorre la circonferenza

$$x'^2 + y'^2 = 1$$

in verso positivo cominciando da $z' = 1$ e ritornandovi. Ai punti del semipiano positivo z (del semipiano in cui $y > 0$), corrispondono biunivocamente i punti interni al detto cerchio. La formola precedente fornisce quindi la rappresentazione conforme del semipiano sul cerchio. Non si ha alcun punto eccezionale perchè l'unico punto $z = -i$, ove diventano infinite z' e $\dfrac{dz'}{dz}$, non appartiene al semipiano positivo.

c) Consideriamo la funzione

$$z' = z^2 - 1 = (z - 1)\;(z + 1).$$

Poichè i moduli di $z - 1$, $z + 1$ sono rispettivamente le distanze di z dai punti $+1$, -1, alla circonferenza di centro $z' = 0$ e di raggio $= 1$ corrisponderà una lemniscata di Bernoulli coi fuochi in $z = 1$, $z = -1$, e più in generale ad ogni circonferenza concentrica in z' corrisponderà in z una *cassinoide* coi fuochi nei detti punti. L'interno della foglia a destra della lemniscata verrà

rappresentato nell'interno del detto cerchio, al fuoco della lemniscata corrispondendo il centro del cerchio e la rappresentazione sarà dappertutto biunivoca e conforme tranne al nodo $z = 0$ della lemniscata ove $\dfrac{dz'}{dz} = 0$ [1]). Notiamo che alle circonferenze di centro O' corrispondendo cassinoidi confocali, alle rette uscenti da O' corrisponderanno curve che taglieranno ad angolo retto tutte le cassinoidi. Scrivendo che lungo queste curve l'argomento di z' è costante, troviamo subito che esse hanno per equazione

$$x^2 - y^2 - 1 - 2\,k\,x\,y = 0 \quad (k \text{ parametro})\;;$$

esse sono dunque iperbole equilatere col centro in $z = 0$ e passanti pei due punti fissi $x = +1$, $x = -1$ sull'asse delle x [2]).

d) Prendiamo la funzione

$$\boxed{z' = \cos z,}$$

cioè

$$x' + i\,y' = \cos\,(x + i\,y) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y,$$

da cui

$$x' = \cos x \cosh y\,,\; y' = -\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y,$$

e però

$$\left\{\begin{aligned} \frac{x'^2}{\cosh^2 y} + \frac{y'^2}{\operatorname{senh}^2 y} &= 1 \\ \frac{x'^2}{\cos^2 x} - \frac{y'^2}{\operatorname{sen}^2 x} &= 1. \end{aligned}\right.$$

Vediamo quindi che alle rette $y =$ costante corrispondono le ellissi coi fuochi in $x' = \pm 1$, $y' = 0$ e alle rette $x =$ costante le

1) Ivi in effetto l'angolo piatto alla circonferenza viene trasformato in un angolo metà.

2) Evidentemente si può anche dire che si ha un fascio di coniche i cui punti base, oltre i due ora detti, sono i punti immaginari

$$x = 0 \quad y = \pm i.$$

iperbole confocali. Segue di qui che ellissi ed iperbole confocali formano un doppio sistema ortogonale (isotermo).

e) Si consideri la funzione

$$z' = \operatorname{tang} z.$$

Separando in

$$z' = x' + iy' = \frac{\operatorname{sen}(x+iy)}{\cos(x+iy)} = \frac{\operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y}{\cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y}$$

il reale dall' immaginario otteniamo subito le formole

$$x' = \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{senh}^2 y + \cos^2 x}, \qquad y' = \frac{\operatorname{senh} y \cosh y}{\operatorname{senh}^2 y + \cos^2 x},$$

e d'altra parte calcolando il modulo di z' abbiamo

$$|z'| = \frac{\sqrt{\operatorname{senh}^2 y + \operatorname{sen}^2 x}}{\sqrt{\operatorname{senh}^2 y + \cos^2 x}},$$

onde risulta che $|z'| < 1$ finchè $\operatorname{sen}^2 x < \cos^2 x$.

Si consideri allora nel piano z la striscia indefinita compresa fra le due rette parallele $x = \pm \frac{\pi}{4}$: ad ogni punto z entro questa striscia corrisponderà nel piano z' uno ed un sol punto del disco circolare col centro in $z' = 0$ e di raggio $= 1$, e viceversa, come subito si vede, ad un punto interno al disco uno ed un sol punto entro la striscia. La corrispondenza è anche biunivoca pei punti del contorno, e precisamente alla retta $x = -\frac{\pi}{4}$ corrisponde la semicirconferenza a sinistra dell'asse $O'y'$, all' altra retta $x = +\frac{\pi}{4}$ la semicirconferenza a destra. Colla funzione $z' = \operatorname{tang} z$ è dunque risoluto il problema di rappresentare conformemente una striscia di piano fra due parallele sopra un disco circolare.

f) In fine, per addurre un semplicissimo esempio di rappresentazione conforme inversa, assumiamo

$$z' = \frac{1}{z_0} = \frac{1}{x - iy},$$

onde

$$x' = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad y' = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Queste sono le formole d' *inversione per raggi vettori reciproci* rispetto al cerchio

$$x^2 + y^2 = 1.$$

CAPITOLO II [1]).

Sostituzioni lineari. — Gruppi discontinui di sostituzioni lineari e loro rappresentazione geometrica.

§ 10. — Sostituzioni lineari come rappresentanti affinità circolari.

Consideriamo la rappresentazione biunivoca conforme che si stabilisce fra due piani, ponendo la variabile complessa z' dell' un piano eguale ad una funzione lineare della variabile complessa z dell'altro:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \tag{1}$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono costanti complesse qualunque, tali soltanto che il determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ non si annulli, condizione necessaria perchè il secondo membro della (1) dipenda effettivamente da z.

Moltiplicando simultaneamente i coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ per un fattore k, ciò che non altera la *sostituzione lineare* (1), potremo dare al determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$, o modulo della sostituzione, il valore che più ci piace, e noi fisseremo di assumere

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1 \tag{2}$$

[1]) Il presente capitolo viene qui inserito in vista delle applicazioni che delle teorie in esso esposte dovremo fare nella seconda parte del corso, e della importanza fondamentale delle teorie stesse nel campo più vasto delle funzioni automorfe.

e chiameremo *unimodulari* le sostituzioni (1), per le quali questa condizione è verificata. I coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ di una data sostituzione unimodulare saranno così perfettamente fissati, a meno di un cangiamento simultaneo di segno.

La rappresentazione conforme fra i due piani z, z' stabilita dalla (1) gode della seguente importante proprietà: *Essa trasforma i circoli (o rette) del piano z in circoli (o rette) del piano z'*. Come trasformazione biunivoca dei due piani essa coincide con quella speciale corrispondenza quadratica che da Möbius prende il nome di *affinità circolare* (diretta).

Per dimostrare l'enunciata proprietà osserviamo che, indicando con U_0, come faremo costantemente in seguito, la quantità coniugata di una quantità complessa qualsiasi U, l'equazione di ogni circolo (o retta) del piano si potrà scrivere

$$A z z_0 + B z + B_0 z_0 + C = 0,$$

ove i coefficienti A, C sono reali e B, B_0 sono complessi coniugati. È chiaro che per $A = 0$ avremo una retta, per $A \neq 0$ un circolo, ed il circolo sarà reale se

$$B B_0 - A C > 0,$$

immaginario se

$$B B_0 - A C < 0,$$

mentre si ridurrà alla coppia di rette cicliche uscenti dal centro quando sia

$$B B_0 - A C = 0.$$

Ora, poichè z si esprime linearmente per z' colla sostituzione (inversa)

$$z = \frac{\delta z' - \beta}{-\gamma z' + \alpha},$$

basterà evidentemente al nostro oggetto dimostrare che, quando z' descrive un circolo (o retta), anche z descrive un circolo (o retta).

Ad un circolo del piano z' di equazione

$$A z' z'_0 + B z' + B_0 z'_0 + C = 0$$

corrisponderà nel piano z la linea di equazione:

$$A(\alpha z + \beta)(\alpha_0 z_0 + \beta_0) + B(\alpha z + \beta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0) + B_0(\alpha_0 z_0 + \beta_0)(\gamma z + \delta) + $$
$$+ C(\gamma z + \delta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0) = 0,$$

che possiamo scrivere

$$A' z z_0 + B' z + B'_0 z_0 + C' = 0, \tag{3}$$

dove si ponga

$$\begin{cases} A' = A\,\alpha\,\alpha_0 + B\,\alpha\,\gamma_0 + B_0 \alpha_0 \gamma + C \gamma\,\gamma_0 \\ B' = A\,\alpha\,\beta_0 + B\,\alpha\,\delta_0 + B_0 \beta_0 \gamma + C \gamma\,\delta_0 \\ B'_0 = A\,\alpha_0 \beta + B_0 \alpha_0\,\delta + B\,\beta\,\gamma_0 + C \gamma_0 \delta \\ C' = A\,\beta\,\beta_0 + B\,\beta\,\delta_0 + B_0 \beta_0 \delta + C \delta\,\delta_0 . \end{cases}$$

Poichè con queste formole A', C' risultano reali e B', B'_0 complessi coniugati, ne segue appunto che la linea (3) è un circolo. Osserviamo ancora che, essendo A', B', B'_0, C' composti linearmente ed omogeneamente con A, B, B_0, C: *ad ogni sistema lineare di circoli del piano z corrisponderà nel piano z' un sistema lineare di circoli di eguale dimensione, cioè ad un fascio un fascio, ad una rete una rete.*

Insieme alle rappresentazioni conformi *dirette* date dalla (1), ci occorrerà anche considerare quelle *inverse*, date dalla formola

$$z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta}. \tag{1*}$$

Anche in questa rappresentazione i circoli si trasformano in circoli e gli angoli si conservano; ma il senso degli angoli viene invertito. La corrispondenza fra i due piani è *un'affinità circolare inversa* di Möbius. Distingueremo le sostituzioni lineari corrispondenti (1), (1*), dicendo che le (1) sono di *prima specie*, le (1*) di *seconda specie*.

Notiamo che, con una conveniente sostituzione lineare di prima specie, si possono portare tre punti arbitrari

$$z_1\,,\ z_2\,,\ z_3$$

del piano z rispettivamente in tre punti arbitrari

$$z_1'\,,\ z_2'\,,\ z_3'$$

del piano z', e la corrispondente sostituzione è perfettamente determinata dalla formola:

$$\frac{z'-z'_1}{z'-z'_2}\cdot\frac{z'_3-z'_2}{z'_3-z'_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}.$$

Ma se si vuole che un quarto punto z_4 venga trasportato in un quarto punto z'_4, sarà per ciò necessario e sufficiente che risultino eguali i due rapporti anarmonici

$$(z'_1\, z'_2\, z'_3\, z'_4)\,, \qquad (z_1\, z_2\, z_3\, z_4).$$

Di qui risulta: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè i quattro punti $z_1\,,\,z_2\,,\,z_3\,,\,z_4$ stiano sopra un circolo, è che il rapporto anarmonico $(z_1\,z_2\,z_3\,z_4)$ sia reale.*

E infatti se $z_1\,,\,z_2\,,\,z_3\,,\,z_4$ sono sopra un circolo, potremo con una sostituzione lineare trasportarli in quattro punti $z'_1,\,z'_2\,,\,z'_3,\,z'_4$ dell'asse reale sul piano z', onde

$$(z_1\, z_2\, z_3\, z_4) = (z'_1\, z'_2\, z'_3\, z'_4)$$

è reale. L'inversa risulta pure evidente.

§ 11. — Composizione delle sostituzioni.

Se eseguiamo successivamente due sostituzioni lineari di prima specie

$$z' = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\,, \qquad z'' = \frac{\alpha' z' + \beta'}{\gamma' z' + \delta'}\,,$$

il risultato è una nuova sostituzione lineare:

$$z'' = \frac{(\alpha\alpha' + \gamma\beta')\,z + (\beta\alpha' + \delta\beta')}{(\alpha\gamma' + \gamma\delta')\,z + (\beta\gamma' + \delta\delta')}\,. \tag{4}$$

Spesso indicheremo la sostituzione lineare (1) scrivendo i coefficienti nel quadro

$$\begin{pmatrix}\alpha\,, & \beta\\ \gamma\,, & \delta\end{pmatrix},$$

la denominazione data alle variabili essendo naturalmente indifferente. La sostituzione (4), che risulta dalle due successive

$$\begin{pmatrix}\alpha\,, & \beta\\ \gamma\,, & \delta\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}\alpha'\,, & \beta'\\ \gamma'\,, & \delta'\end{pmatrix},$$

dicesi la sostituzione *composta* e il *prodotto* delle due, nell'ordine assegnato, e si scrive simbolicamente

$$\begin{pmatrix}\alpha\,, & \beta\\ \gamma\,, & \delta\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\alpha'\,, & \beta'\\ \gamma'\,, & \delta'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\alpha' + \gamma\beta'\,, & \beta\alpha' + \delta\beta'\\ \alpha\gamma' + \gamma\delta'\,, & \beta\gamma' + \delta\delta'\end{pmatrix}, \tag{5}$$

ponendo a sinistra la sostituzione eseguita prima [1]). La designazione dell'ordine è evidentemente necessaria perchè, invertendo l'ordine delle sostituzioni componenti, cambia (in generale) la sostituzione composta.

Talora indicheremo anche, simbolicamente, una sostituzione lineare con una sola lettera e così, denotando con $S_1\,,\,S_2$ le due successive sostituzioni componenti, con S_3 la composta, scriveremo

$$S_1\,S_2 = S_3\,.$$

[1]) Si osservi che la legge (5) di composizione di due sostituzioni è quella stessa della moltiplicazione dei determinanti $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{vmatrix}$ e precisamente, nella notazione adottata, il 1° e 2° coefficiente della sostituzione composta si ottengono moltiplicando successivamente le due colonne di $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ per la prima linea di $\begin{pmatrix}\alpha', & \beta'\\ \gamma', & \delta',\end{pmatrix}$, ed il 3° e 4° moltiplicando le colonne della prima per la seconda linea della seconda.

Definito il prodotto di due sostituzioni, riesce altresì definito il prodotto di tre o più sostituzioni

$$S_1 S_2 \ldots. S_n,$$

intendendo con ciò la sostituzione che nasce componendo prima S_1 con S_2, poi la sostituzione composta con S_3 e così via fino ad S_n [1]). È importante osservare che, mentre in un prodotto di sostituzioni non è lecito invertire l'ordine dei fattori, non vale cioè la legge *commutativa*, vale però la legge *associativa*. Per vederlo basta dimostrarlo pel caso elementare di tre fattori, cioè provare che si ha:

$$(S_1 S_2) S_3 = S_1 (S_2 S_3),$$

ciò che si può constatare direttamente colla formola (5) di composizione, o dedurre anche *a priori* dal significato della composizione [2]).

Se in un prodotto di n sostituzioni i singoli fattori sono tutti eguali fra loro e ad una medesima sostituzione S, il prodotto stesso si dice la potenza n^{ma} di S e si indica con S^n. A causa della legge associativa, vale evidentemente la formola

$$S^m \cdot S^n = S^{m+n}, \tag{6}$$

essendo m, n numeri interi positivi.

Insieme ad una sostituzione

$$S = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

si può considerare la sua inversa

$$\begin{pmatrix} \delta, & -\beta \\ -\gamma, & \alpha \end{pmatrix},$$

1) Dovremmo scrivere propriamente

$$(\ldots. ((S_1 S_2) \cdot S_3) \cdot \ldots.) S_n.$$

2) La S_1 porta z in z', la S_2 z' in z'', la S_3 z'' in z'''. La sostituzione $S_1 S_2$ porta z in z'' e la $S_2 S_3$ porta z' in z''', quindi ambedue le sostituzioni $(S_1 S_2) S_3$, $S_1 (S_2 S_3)$ portano z in z''' e sono identiche.

che composta con S produce la sostituzione identica $\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta, & -\beta \\ -\gamma, & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Questa sostituzione inversa si indica con

$$S^{-1},$$

sicchè, indicando col simbolo 1 la sostituzione identica, si ha $SS^{-1} = 1$; la sua introduzione ci permette di definire le potenze di S con esponente negativo, convenendo che sia

$$S^{-n} = (S^{-1})^n.$$

Dopo ciò si vedrà subito che la formola (6) vale per esponenti interi qualunque, positivi o negativi.

E perchè la medesima formola (6) valga senza eccezione, converremo di considerare anche la potenza S^0 di S con esponente zero, ponendo $S^0 = 1$.

Essendo S, T due qualunque sostituzioni, la sostituzione

$$S_1 = T^{-1} S T$$

dicesi la *trasformata della* S per mezzo della T e si ha inversamente

$$S = T S_1 T^{-1} = (T^{-1})^{-1} S_1 T^{-1},$$

talchè S è la trasformata della S_1 per mezzo della T^{-1}. Due tali sostituzioni S, S_1 si diranno *simili*. È importante osservare il teorema: *In due sostituzioni simili la somma* $\alpha + \delta$ del 1° e 4° *coefficiente è la stessa*. Il calcolo effettivo dimostra subito la proprietà enunciata, che potremo anche esprimere sotto altra forma dicendo: *La somma* $j = \alpha + \delta$ *non cangia trasformando comunque la sostituzione*. Per ciò diremo $j = \alpha + \delta$ l'*invariante* della sostituzione. Si osservi che l'invariante j di una sostituzione lineare è determinato soltanto a meno di un cambiamento di segno.

Può darsi che una sostituzione lineare S, ripetuta un numero sufficiente n di volte, riproduca l'identità, in simboli

$$S^n = 1 ;$$

allora la sostituzione si dice *periodica* ed il più piccolo esponente positivo n pel quale $S^n = 1$ dicesi il suo *periodo* [1]).

Ma può anche accadere che nella serie indefinita (nei due sensi) delle potenze di S

$$\ldots.\ S^{-3},\ S^{-2},\ S^{-1},\ 1,\ S^1,\ S^2,\ S^3,\ \ldots.$$

i termini non si riproducano mai, e allora la sostituzione si dirà *aperiodica*. Due sostituzioni simili sono sempre insieme *aperiodiche* o *periodiche* e, in quest' ultimo caso, hanno il medesimo periodo [2]).

§ 12. — Classificazione delle sostituzioni di prima specie.

Interpreteremo d'ora innanzi la variabile z e la sua trasformata lineare z' nel medesimo piano complesso. Per ogni sostituzione lineare (1) vi sono allora due punti, distinti o coincidenti, che rimangono fissi, quelli che corrispondono alle radici della equazione

$$\gamma z^2 + (\delta - \alpha) z - \beta = 0 . \tag{7}$$

Osserviamo che se la sostituzione S lascia fissi i punti A, B, e la T trasporta A, B rispettivamente in A', B', la trasformata $T^{-1} S T$ avrà per punti fissi A', B'.

[1]) Si vedrà subito che in tal caso, essendo α, β due numeri interi qualunque, sarà

$$S^\alpha = S^\beta ,$$

quando e solo quando $\alpha \equiv \beta \pmod{n}$.

[2]) Ciò risulta facilmente dall'osservare che si ha

$$(T^{-1} S T)\ (T^{-1} U T) = T^{-1}\ (S U)\ T ;$$

quindi

$$(T^{-1} S T)^n = T^{-1} S^n T .$$

Il discriminante della (7) essendo

$$(\alpha - \delta)^2 + 4 \beta \gamma = (\alpha + \delta)^2 - 4\ (\alpha\delta - \beta\gamma) = (\alpha + \delta)^2 - 4 ,$$

i due punti fissi coincideranno quando

$$\alpha + \delta = \pm 2 .$$

In tal caso la sostituzione dicesi *parabolica*.

Ad ogni sostituzione parabolica possiamo sostituirne una simile che lasci fisso il punto $z = \infty$; questa avrà necessariamente la forma

$$z' = z + \beta \text{ [1])}$$

e rappresenterà nel piano complesso una traslazione. Una sostituzione parabolica è quindi necessariamente *aperiodica*.

Supponiamo ora che la sostituzione S lasci fissi due punti distinti. Potremo sostituirvi una trasformata che lasci fissi i due punti $z = 0$, $z = \infty$, che avrà quindi la forma :

$$z' = \frac{\alpha}{\delta} z, \quad \alpha\delta = 1$$

e che scriveremo semplicemente

$$z' = k z .$$

Per l' invariante $j = \alpha + \delta$ avremo

$$j = \frac{k+1}{\sqrt{k}} .$$

Ora distinguiamo tre casi :

1° k reale positivo ; la sostituzione in tal caso si dice *iperbolica* e l' invariante j è *reale ed in valore assoluto* > 2.

[1]) Propriamente otteniamo dapprima

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\delta} ;$$

ma siccome $\alpha\delta = 1$ e inoltre (§ 11) $\alpha + \delta = \pm 2$, ne risulta $\alpha = \delta = \pm 1$.

2° k immaginario di modulo $= 1$,

$$k = e^{i\varphi}, \quad j = 2 \cos \frac{\varphi}{2} \cdot$$

La sostituzione si dice *ellittica* e l' invariante j è reale ed in valore assoluto < 2.

3° k immaginario, ovvero reale e negativo.

Allora l' invariante j è immaginario e la sostituzione si dice *lossodromica*.

Una sostituzione *normale* iperbolica

$$z' = k\, z \quad (k \text{ reale positivo})$$

è un'omotetia diretta del piano. Per essa tutte le rette uscenti dalla origine restano fisse.

Una sostituzione *normale* ellittica

$$z' = e^{i\varphi}\, z$$

è una rotazione del piano complesso attorno all' origine, d'ampiezza φ. Per essa rimangono fissi tutti i circoli col centro nell'origine [1]).

In fine una sostituzione lossodromica è una combinazione di una ellittica e di una iperbolica coi medesimi punti fissi.

Riepilogando, abbiamo il resultato:

La specie di una sostituzione

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

dipende dall' invariante $j = \alpha + \delta$. Se questo è reale, la sostituzione è ellittica, parabolica od iperbolica secondo che $|\, j \,| \lesseqgtr 2$. Quando l' invariante j è immaginario, la sostituzione è lossodromica.

[1]) In generale in una sostituzione iperbolica qualunque rimangono fissi tutti i circoli di un fascio con due punti base reali; in una ellittica quelli di un fascio coi punti base immaginari.

È chiaro che fra le sostituzioni lineari solo quelle ellittiche possono essere periodiche; ciò avviene quando l'ampiezza φ (che dipende unicamente dall' invariante j) è in rapporto commensurabile con 2π.

§ 13. — **Sostituzioni di seconda specie. - Riflessioni.**

Una sostituzione S di seconda specie

$$z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta}, \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

dà luogo, ripetuta, alla sostituzione di prima specie

$$S^2 = \begin{pmatrix} \alpha\alpha_0 + \beta\gamma_0, & \alpha\beta_0 + \beta\delta_0 \\ \gamma\alpha_0 + \delta\gamma_0, & \gamma\beta_0 + \delta\delta_0 \end{pmatrix},$$

che può anche ridursi all'identità. Consideriamo dapprima il caso generale, in cui S^2 non è l' identità. Poichè il suo invariante

$$j = \alpha\alpha_0 + \beta\gamma_0 + \beta_0\gamma + \delta\delta_0$$

è reale, essa non può essere lossodromica, ma è necessariamente ellittica, parabolica od iperbolica. Ricerchiamo quali punti fissi può avere la S. Essi debbono pure rimanere fissi per S^2 e saranno quindi al massimo due, quelli della S^2. D'altra parte se z_1, z_2 sono i due punti fissi di S^2, la S dovrà o lasciarli singolarmente invariati, o permutarli fra loro [1]). Dunque intanto, se la S^2 è parabolica, anche la S avrà un unico punto fisso. Nel caso ellittico od iperbolico,

[1]) Invero se z_1 per S va in z'_1, ciò che indichiamo simbolicamente con

$$z'_1 \equiv S(z_1)$$

avremo

$$S^2(z'_1) = S^3(z_1) = S(S^2(z_1)) = S(z_1) = z'_1,$$

cioè z'_1 sarà anche un punto fisso di S^2 e però coinciderà o con z_1 o con z_2.

prendendo per punti fissi di S^2 : $z = 0$, $z = \infty$, diamo ad S la forma

$$z' = k z_0 \quad \text{o} \quad z' = \frac{k}{z_0},$$

secondo che la nostra sostituzione lascia fissi singolarmente i due punti, 0, ∞, ovvero li scambia fra loro. La S^2 sarà rispettivamente nei due casi

$$z' = k k_0 z \quad \text{o} \quad z' = \frac{k}{k_0} z,$$

quindi iperbolica nel primo, ellittica nel secondo caso. Dopo di ciò, possiamo classificare le sostituzioni S di seconda specie, *che non sono a periodo* 2, come paraboliche, iperboliche od ellittiche, secondo la specie di S^2. Le sostituzioni di seconda specie ellitti che non hanno alcun punto fisso, quelle paraboliche uno, le iperboliche due.

Veniamo ora al caso, particolarmente interessante, che la S sia a periodo 2. Osservando i coefficienti di S^2 nella (8), vediamo che, essendo $= 1$ il determinante della S^2, dovranno aver luogo o le formole

$$\begin{cases} \alpha\alpha_0 + \beta\gamma_0 = 1, & \alpha\beta_0 + \beta\delta_0 = 0 \\ \gamma\alpha_0 + \delta\gamma_0 = 0, & \gamma\beta_0 + \delta\delta_0 = 1, \end{cases}$$

o le altre

$$\begin{cases} \alpha\alpha_0 + \beta\gamma_0 = -1, & \alpha\beta_0 + \beta\delta_0 = 0 \\ \gamma\alpha_0 + \delta\gamma_0 = 0, & \gamma\beta_0 + \delta\delta_0 = -1. \end{cases}$$

Poichè $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, ciò equivale a dire che nel primo caso sarà

$$\alpha_0 = \delta, \quad \gamma_0 = -\gamma, \quad \beta_0 = -\beta, \quad \delta_0 = \alpha$$

e nel secondo

$$\alpha_0 = -\delta, \quad \gamma_0 = \gamma, \quad \beta_0 = \beta, \quad \delta_0 = -\alpha.$$

Ponendo in evidenza le parti reali ed immaginarie dei coefficienti, avremo quindi nel primo caso

$$(9) \qquad z' = \frac{(a_1 + i a_2) z_0 + i\beta_1}{i\gamma_1 z_0 + (a_1 - i a_2)}, \quad \text{con } a_1^2 + a_2^2 + \beta_1\gamma_1 = 1,$$

indicando a_1, a_2, β_1, γ_1 quantità reali, e nel secondo caso

$$(9^*) \qquad z' = \frac{(a_1 + i a_2) z + \beta_1}{\gamma_1 z_0 - (a_1 + i a_2)}, \quad \text{con } a_1^2 + a_2^2 + \beta_1\gamma_1 = -1.$$

Domandiamo ora se qualche punto del piano rimane fisso per la nostra sostituzione. Ponendo $z' = z$, vediamo che nel caso attuale restano fissi tutti i punti di un circolo, che ha rispettivamente per equazione

$$(10) \qquad \gamma_1 (x^2 + y^2) - 2 a_2 x + 2 a_1 y - \beta_1 = 0, \quad \text{nel caso (9)}$$

e invece

$$(10^*) \qquad \gamma_1 (x^2 + y^2) - 2 a_1 x - 2 a_2 y - \beta_1 = 0, \quad \text{nel caso } (9^*).$$

Il primo circolo è reale a causa di

$$a_1^2 + a_2^2 + \beta_1\gamma_1 = 1,$$

e la sostituzione è un' inversione per raggi vettori reciproci rispetto a questo cerchio; si dirà brevemente una *riflessione* su questo circolo. Nel secondo caso il circolo di riflessione (10*) è immaginario e la sostituzione si dirà una *riflessione impropria*. È facile vedere che una riflessione impropria si può comporre con una riflessione propria ed una rotazione di π attorno al centro di riflessione [1]).

[1]) Ad ogni riflessione si può sostituire una riflessione simile che scambi fra loro i punti $0, \infty$; questa ha allora la forma normale

$$z' = \frac{k}{z_0}$$

con k reale. Essa è propria od impropria, secondo che k è positivo o negativo. Ne risulta subito dimostrata l'asserzione del testo.

§ 14. — Gruppi discontinui di sostituzioni lineari.

Le sostituzioni lineari sopra una variabile essendo operazioni suscettibili di composizione e valendo la legge associativa (§ 11), possiamo applicare ai sistemi di sostituzioni lineari i concetti generali della teoria dei gruppi di operazioni. Così diremo che: *un sistema di un numero finito od infinito di sostituzioni lineari forma un gruppo, quando componendo fra loro due qualunque sostituzioni, differenti od eguali, del sistema, la sostituzione composta appartiene pure al sistema.*

In particolare quindi un gruppo, insieme ad ogni sua sostituzione S, ne conterrà anche tutte le potenze con esponente intero e positivo. Se il gruppo è finito [1]), vi figureranno altresì le potenze con esponente negativo e l'identità, ciò che, stando alla data definizione, non accadrà sempre necessariamente nel caso di un gruppo infinito. In questo caso però noi aggiungeremo esplicitamente la condizione che *il gruppo contenga, insieme ad ogni sostituzione S, anche la sua inversa S^{-1} e però tutte le potenze positive e negative di S, e l'identità.*

Una prima divisione dei gruppi di sostituzioni lineari in due classi si fa distinguendo i gruppi *continui* dai gruppi *discontinui*. Il gruppo dicesi continuo (gruppo di Lie) se nei coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ entrano parametri suscettibili di prendere una serie *continua* di valori, discontinuo invece quando i coefficienti variano solo per valori discreti.

Un' altra importante distinzione è da farsi nei gruppi discontinui, *in quanto consideriamo l'effetto delle loro operazioni sui punti del piano complesso.* Applicando ad un punto z_1 del piano le sostituzioni di un gruppo discontinuo G, si otterrà una serie infinita di punti, che diciamo *equivalenti* rispetto al gruppo. Ora si dirà che il gruppo G è *propriamente* discontinuo nell' intorno di un punto P del piano complesso, quando un intorno sufficientemente piccolo di P non contenga alcuna coppia di punti equivalenti ri-

[1]) Si sa che i gruppi finiti di sostituzioni lineari sopra una variabile sono tutti noti e si riducono a cinque tipi distinti, che portano il nome di gruppi dei poliedri regolari, della piramide e della doppia piramide regolare (Cfr. KLEIN, *Ikosaeder*).

spetto a G; in caso contrario diremo che G è *impropriamente* discontinuo nell' intorno di P. Più brevemente diremo anche che nel primo caso G è propriamente discontinuo, nel secondo impropriamente discontinuo *nel punto P*. Si vede subito che se un gruppo è propriamente discontinuo in un punto P, esso è altresì propriamente discontinuo in tutti i punti di un intorno sufficientemente piccolo di P, onde segue che per un tale gruppo l' insieme dei punti, nell' intorno dei quali il gruppo opera in modo propriamente discontinuo, costituisce un campo a due dimensioni.

I gruppi che dovunque, nel piano complesso, sono impropriamente discontinui non hanno per lo scopo nostro (per la teoria delle funzioni) importanza alcuna. Ora vi è un caso in cui dalla natura stessa delle sostituzioni del gruppo si conclude immediatamente che il gruppo è dovunque impropriamente discontinuo; ciò accade quando nel gruppo si presentano *sostituzioni infinitesimali*, cioè sostituzioni vicine quanto si vuole alla identità. Precisiamo questo concetto dicendo: *Un gruppo G di sostituzioni lineari $\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ contiene sostituzioni infinitesimali quando, preso un numero ε reale, positivo e piccolo a piacere, esistono sempre nel gruppo sostituzioni, diverse dall'identità, per le quali si ha*

$$|\beta| < \varepsilon \quad |\gamma| < \varepsilon \quad |\alpha - \delta| < \varepsilon \quad ^{1)}.$$

Che il gruppo sia allora impropriamente discontinuo risulta dalle considerazioni seguenti. Suppongasi al contrario che si possa trovare ad esempio un'area circolare di raggio R, priva di coppie di punti equivalenti. Variando z comunque in quest'area, potremo sempre scegliere nel gruppo una tale sostituzione (non identica) $\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$, per la quale si abbia

$$\left|\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} - z\right| < \frac{R}{2}$$

[1]) Se le sostituzioni si riducono unimodulari, si potrà anche dire che i moduli di

$$\beta, \quad \gamma, \quad \alpha \pm 1, \quad \delta \pm 1$$

debbono essere inferiori ad ε.

e allora ogni punto che disti dal centro meno di $\frac{R}{2}$ e non coincida con uno dei due punti fissi di $\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$ avrà almeno un punto equivalente entro l'area circolare, contro l' ipotesi.

Così adunque: *Un gruppo discontinuo, contenente sostituzioni infinitesimali, è sempre impropriamente discontinuo in ogni regione del piano.*

Come primo esempio consideriamo una sostituzione ellittica *aperiodica*, che possiamo ridurre alla forma normale

$$z' = e^{i\varphi} z,$$

dove φ sarà incommensurabile con π. Le potenze di S formano un gruppo con sostituzioni infinitesimali e per ciò dovunque impropriamente discontinuo. Ne deduciamo come corollario: *Ciascuna sostituzione ellittica di un gruppo propriamente discontinuo deve avere un periodo finito.*

La discontinuità propria di un gruppo è incompatibile, come si è visto, coll'esistenza di sostituzioni infinitesimali. Ma diciamo subito che sarebbe, in generale, erroneo il concludere dall'assenza di sostituzioni infinitesimali nel gruppo alla sua discontinuità propria; l'esempio che studieremo alla fine del presente capitolo lo dimostrerà chiaramente. Vi ha però un caso molto importante, nel quale tale conclusione è legittima, ed è quando le sostituzioni del gruppo sono tutte a coefficienti reali, o tali si possono ridurre con una conveniente trasformazione, quando cioè vi ha un circolo del piano complesso che da tutte le sostituzioni del gruppo è trasformato in sè medesimo (*Hauptkreisgruppen*). Sussiste infatti il teorema, dovuto a Poincaré [1]), che noi qui ci limitiamo a citare:

Un gruppo di sostituzioni lineari a coefficienti reali, e privo di sostituzioni infinitesimali, è sempre propriamente discontinuo nel piano complesso.

[1]) *Acta Math.*, Bd. 3. — Vedi anche FRICKE, *Automorphe Functionen*, Bd. I, pag. 99.

§ 15. — **Sottogruppi.**

Prima di procedere allo studio di alcuni gruppi particolari, facciamo ancora qualche osservazione d' indole generale. I concetti e la terminologia dei gruppi finiti di operazioni si trasportano senz'altro nella teoria dei gruppi discontinui infiniti.

Un gruppo Γ di sostituzioni lineari si dirà un *sottogruppo* di un gruppo G, se tutte le sostituzioni di Γ appartengono a G. Si dirà poi che è Γ *invariante* in G quando qualunque sostituzione di Γ, trasformata con una sostituzione arbitraria di G, dà una sostituzione di Γ stesso, quando cioè Γ è permutabile con qualunque sostituzione di G.

Se G è un gruppo e Γ un suo sottogruppo, si potranno distribuire le sostituzioni di G rispetto a Γ in un quadro:

$$\begin{array}{llll} \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3 & \cdots\cdots \\ g\gamma_1, & g\gamma_2, & g\gamma_3 & \cdots\cdots \\ g'\gamma_1, & g'\gamma_2, & g'\gamma_3 & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \end{array}$$

che contiene una ed una sola volta tutte le sostituzioni di G, ponendo nella prima orizzontale tutte le sostituzioni (in numero infinito) di Γ, nella seconda quelle di Γ moltiplicate da una medesima parte (p. es. a sinistra) per una sostituzione g di G fuori di Γ, nella terza ancora le sostituzioni di Γ moltiplicate, sempre dalla medesima parte, per una sostituzione g' di G presa fuori delle due prime orizzontali e così proseguendo finchè esistano sempre nuove sostituzioni di G. Due casi potranno darsi: o il numero delle orizzontali è finito e questo numero prende allora il nome di *indice* del sottogruppo Γ in G; ovvero il numero delle orizzontali è infinito e in tal caso diciamo che Γ è sottogruppo d' indice infinito in G. Così p. es. se S è una sostituzione lineare aperiodica, nel gruppo (ciclico) G generato dalle potenze di S formano un sottogruppo Γ d' indice finito le potenze di S^p, essendo p un numero intero positivo; in tal caso, siccome l'esponente m di ogni potenza S^m di S si può porre sotto la forma

$$m = k p + r,$$

dove r è uno dei numeri $0, 1, 2 \ldots p-1$ e k è un intero positivo o negativo, il quadro consterà di p orizzontali e l'indice di Γ in G sarà finito $= p$.

Fino ad ora abbiamo supposto di considerare gruppi contenenti soltanto sostituzioni di prima specie. Ma possiamo egualmente considerare gruppi G, contenenti sostituzioni di ambedue le specie. In tal caso si vede subito che: *le sostituzioni di prima specie di G costituiscono un sottogruppo Γ invariante in G e di indice finito* $= 2$. Ciò risulta dall'osservare che se g è una sostituzione fissa di seconda specie in G e g' un'altra tale sostituzione qualunque in G, la $g^{-1} g'$ è di prima specie ed è quindi una sostituzione γ di Γ, onde

$$g' = g \gamma ,$$

ciò che dimostra essere $= 2$ l'indice di Γ in G. Poichè inoltre, trasformando con una sostituzione di prima o seconda specie una di prima specie, la trasformata appartiene sempre alla prima specie, vediamo che Γ è invariante in G.

§ 16. — Gruppi ciclici e loro campo fondamentale.

Veniamo ora a studiare alcuni gruppi particolari di natura molto semplice, che ci daranno una facile illustrazione delle considerazioni generali esposte al § 14 e ci serviranno inoltre a fissare l'importante nozione del *campo fondamentale* di un gruppo propriamente discontinuo.

Cominciamo dai gruppi *ciclici*, dai gruppi cioè che sono generati dalle potenze di un'unica sostituzione S. Siccome però escludiamo dalle nostre considerazioni i gruppi contenenti sostituzioni infinitesimali (poichè allora sappiamo già che il gruppo è dovunque impropriamente discontinuo), così supporremo che, se la sostituzione S è ellittica, essa abbia periodo finito.

Consideriamo allora i vari casi che possono presentarsi:

a) La sostituzione S è ellittica di periodo finito n; allora il gruppo generato dalle potenze di S è un gruppo finito e, riducendo S alla forma normale, potremo assumere per S l'espressione analitica

$$z' = \varepsilon z ,$$

dove ε è una radice primitiva n^{ma} della unità. Sostituendo ad S una sua potenza, potremo supporre

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

e la S rappresenterà nel piano complesso una rotazione d'amplitudine $\dfrac{2\pi}{n}$ attorno all'origine. Si consideri ora nel piano complesso il settore infinito limitato da due raggi che escono da O e formano fra loro l'angolo $\dfrac{2\pi}{n}$. Applicando a tutta l'area settoriale le sostituzioni del gruppo, veniamo evidentemente a dividere il piano in n tali settori congruenti, che ricoprono una ed una sola volta il piano complesso. Uno qualunque di questi settori gode della proprietà che un punto qualunque del piano è equivalente ad un punto dell'area settoriale, ed in generale ad uno solo. Soltanto quando questo punto cade sul contorno, esso ne ha un secondo equivalente sull'altro lato del contorno, ad eguale distanza dall'origine. Per queste proprietà si dice che il settore considerato è un *campo fondamentale* del gruppo, poichè in esso trovasi un punto, ed in generale uno solo, equivalente a qualsiasi punto del piano.

b) La S sia una sostituzione iperbolica, che potremo ridurre alla forma normale

$$z' = k z ,$$

con k reale e positivo (§ 12). Essa ci darà nel piano complesso una omotetia col centro nell'origine, di costante k. Si tracci ora un circolo qualunque C di centro O e scelgasi p. es., per fissare le idee, il suo raggio $= 1$. I circoli trasformati di C per mezzo del gruppo delle potenze di S avranno tutti il centro in O ed i raggi

$$\ldots\ k^{-3},\ k^{-2},\ k^{-1},\quad 1,\ k,\ k^2,\ k^3\ \ldots ;$$

essi divideranno il piano in una serie di anelli circolari limitati da due cerchi consecutivi nella serie. Uno qualunque di questi anelli può assumersi come campo fondamentale del gruppo, poichè infatti un punto qualunque del piano può trasportarsi, applicandovi una conveniente potenza di S, in uno ed in un sol punto dell'anello. Soltanto se questo punto cadrà sul contorno dell'anello, ne avremo un secondo equivalente sull'altro circolo del contorno.

c) La S sia lossodromica e, ridotta alla forma normale, abbia dunque la forma (§ 12)

$$z' = k\, e^{i\varphi}\, z\,.$$

Anche in questo caso potremo costruire una serie di anelli circolari come nel caso precedente ed in uno di essi avremo ancora un *campo fondamentale* del gruppo.

d) Supponiamo in fine che la S sia parabolica e riduciamola alla forma normale

$$z' = z + \beta.$$

Essa ci rappresenterà nel piano complesso una traslazione e se per due punti del piano, che nascono l'uno dall'altro per la traslazione, conduciamo due rette qualsiasi parallele fra loro, ma non nel senso della traslazione, limiteremo una striscia del piano, che sarà un campo fondamentale del nostro gruppo. Applicando infatti alla intera striscia la S e le sue potenze, otterremo una serie di striscie consecutive congruenti, che ricoprono una ed una sola volta il piano.

Colla dimostrazione dell'esistenza del campo fondamentale per ogni gruppo ciclico, privo di sostituzioni infinitesimali, è dimostrata in particolare la discontinuità propria di questi gruppi in tutto il piano. Per questi gruppi adunque, come pei gruppi a coefficienti reali secondo il teorema di Poincaré, la mancanza di sostituzioni infinitesimali è non solo necessaria ma anche sufficiente ad assicurare la discontinuità propria del gruppo. La stessa cosa vedremo accadere pei gruppi che andiamo ora a considerare.

§ 17. — Gruppi di sostituzioni paraboliche.

Ci proponiamo ora di studiare i gruppi che sono esclusivamente composti di sostituzioni paraboliche, e fra questi di riconoscere quelli che sono privi di sostituzioni infinitesimali.

In primo luogo osserviamo che se un gruppo è composto di sole sostituzioni paraboliche, queste dovranno avere tutte il medesimo punto fisso. E infatti riduciamo una di queste, sia S, alla forma normale

$$S)\ z' = z + \beta$$

e sia U un'altra sostituzione (unimodulare) del gruppo, coll'espressione analitica :

$$U)\ z' = \frac{az+b}{cz+d}\,,\quad ad - bc = 1\,,$$

ove, essendo U parabolica, avremo

$$a + d = \pm 2.$$

Indicando con n un intiero qualunque, avremo nel gruppo anche la sostituzione $U\,S^n$, la cui espressione analitica sarà

$$z' = \frac{(a + cn\beta)\,z + b + dn\beta}{cz + d}$$

e, per essere anche questa parabolica, dovremo avere, per qualunque n :

$$a + d + cn\beta = \pm 2\,,$$

onde $c = 0$; quindi U ha il medesimo punto fisso $z = \infty$ di S.

Ciò premesso, potremo considerare in luogo del nostro gruppo un suo trasformato, nel quale tutte le sostituzioni, avendo la forma

$$(11)\qquad z' = z + \beta\,,$$

rappresenteranno traslazioni del piano complesso. Per abbreviare, chiameremo β l'*amplitudine* della sostituzione parabolica (11). È evidente che i gruppi ora considerati constano di sostituzioni due a due permutabili, sono cioè gruppi Abeliani.

Se scegliamo nel gruppo G, ad arbitrio, un certo numero n di sostituzioni

$$S_1\,,\ S_2\,,\ \ldots\,,\ S_n\,,$$

combinando fra loro queste sostituzioni e le loro potenze, si ottiene un sottogruppo Γ di G (che può anche coincidere con G), di cui tutte le sostituzioni sono comprese nella formola

$$\gamma = S_1^{m_1}\, S_2^{m_2} \ldots S_n^{m_n}\,,$$

dove gli esponenti m percorrono tutti i valori interi positivi, negativi o nulli; indicheremo brevemente questo sottogruppo Γ colla notazione:

$$\Gamma = [S_1, S_2, \ldots, S_n].$$

Ora se è possibile determinare degli esponenti r interi, positivi o negativi, ma non tutti nulli, tali che sia

$$S_1^{r_1} S_2^{r_2} \ldots S_n^{r_n} = 1, \tag{12}$$

diremo che le n sostituzioni $S_1, S_2 \ldots, S_n$ sono fra loro *dipendenti* e se nessuna relazione della forma (12) sussiste, le diremo invece indipendenti. Si osservi che, rispetto alle amplitudini $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$ di queste sostituzioni, la (12) si traduce nella relazione lineare omogenea a coefficienti interi:

$$r_1 \beta_1 + r_2 \beta_2 + \ldots + r_n \beta_n = 0, \tag{12*}$$

e per ciò i numeri r si potranno supporre privi di un divisore comune.

Cominciamo dal dimostrare che, se

$$S_1, S_2, \ldots, S_n$$

sono fra loro dipendenti, potremo generare il gruppo Γ con un numero minore di sostituzioni fondamentali. Per semplificare la dimostrazione, possiamo supporre che nella (12) gli esponenti r non nulli siano tutti positivi, bastando nel caso contrario sostituire ad una corrispondente S la sua inversa. Due almeno degli esponenti r saranno evidentemente non nulli, siano p. es.

$$r_1, \quad r_2,$$

e supponiamo, per fissare le idee,

$$r_1 \leq r_2.$$

Ponendo

$$S'_1 = S_1 S_2^q,$$

con q intero qualunque, potremo assumere come generatrici di Γ

$$S'_1, S_2, S_3 \ldots, S_n,$$

dopo di che la (12) diverrà:

$$S'^{r_1}_1 \cdot S_2^{r_2 - q r_1} \cdot S_3^{r_3} \cdot \ldots S_n^{r_n} = 1.$$

Se prendiamo adunque q in guisa che sia

$$0 \leq r_2 - q r_1 < r_1,$$

avremo abbassato uno degli esponenti r, lasciando gli altri inalterati. Applicando ripetutamente il processo, verremo ad ottenere un sistema di n sostituzioni generatrici

$$s_1, \quad s_2, \quad \ldots, \quad s_n$$

per le quali la relazione (12) conterrà un solo esponente non nullo e allora la corrispondente sostituzione s sarà l'identità, onde potremo prendere per sostituzioni generatrici di Γ le rimanenti $n - 1$, *c. d. d.*

Dimostriamo ora l'altro teorema: *Se le amplitudini β_1, β_2, di due sostituzioni S_1, S_2 del gruppo hanno un rapporto reale, o le due sostituzioni saranno fra loro dipendenti, o il gruppo conterrà sostituzioni infinitesimali.*

E invero, se il rapporto $\frac{\beta_1}{\beta_2}$ è reale e commensurabile, poniamo

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{p}{q},$$

essendo p, q numeri interi primi fra loro; avremo $q\,\beta_1 = p\,\beta_2$, cioè

$$S_1^q = S_2^p,$$

che è appunto una relazione fra S_1, S_2.

Se poi $\frac{\beta_1}{\beta_2}$ è un numero reale incommensurabile a, avremo

$\beta_1 = \alpha\beta_2$ ed essendo r, s numeri interi qualunque, il gruppo conterrà la sostituzione

$$S_1^r \; S_2^s$$

d'amplitudine $(r\alpha + s)\beta_2$. Ma, poichè α è incommensurabile, potremo prendere r, s in guisa che $r\alpha + s$, che non è mai nullo, sia piccolo quanto si vuole; onde avremo nel gruppo sostituzioni infinitesimali.

Ciò premesso, se consideriamo dapprima un gruppo Γ generato da una sola sostituzione S:

$$z' = z + \beta ,$$

in esso, per quanto si è visto al paragrafo precedente, avremo sempre un gruppo propriamente discontinuo.

Si abbia ora un gruppo $\Gamma = [S_1, S_2]$ generato da due sostituzioni indipendenti

$$S_1) \; z' = z + \omega_1 , \qquad S_2 = z' = z + \omega_2 ,$$

e privo di sostituzioni infinitesimali. Le amplitudini ω_1, ω_2 delle due sostituzioni fondamentali saranno quindi in rapporto complesso. Preso un punto qualunque a del piano, consideriamo i quattro punti

$$a, \; a + \omega_1 , \; a + \omega_2 , \; a + \omega_1 + \omega_2 ,$$

che sono i vertici di un parallelogrammo.

Qualunque punto del piano complesso è equivalente, rispetto a Γ, ad un punto dell'area parallelogrammica e ad uno solo, eccetto pei punti del contorno, due a due equivalenti. Possiamo quindi assumere questo parallelogrammo come campo fondamentale del gruppo. Applicando a questo campo le infinite sostituzioni del gruppo, il piano ne risulta diviso in una rete di parallelogrammi congruenti, che ricopre una ed una sola volta tutto il piano.

Il nostro gruppo è ancora propriamente discontinuo.

Si osservi però che nella scelta del parallelogrammo fondamentale sussiste ancora molta arbitrarietà, non solo perchè uno dei vertici si può collocare dovunque nel piano, ma anche per-

chè, in luogo di S_1, S_2 potremmo egualmente assumere due altre sostituzioni *fondamentali*

$$s_1 = S_1^\alpha \, S_2^\beta , \quad s_2 = S_1^\gamma \, S_2^\delta$$

del gruppo. Queste due nuove sostituzioni s_1, s_2 saranno fondamentali, cioè genereranno tutto il gruppo, solo quando il determinante

$$\alpha\delta - \beta\gamma$$

dei numeri interi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sia $= \pm 1$ [1]).

Coi due esempi ora trattati sono esauriti tutti i casi in cui un gruppo di traslazioni del piano è propriamente discontinuo. In ogni altro caso infatti il gruppo contiene, come ora dimostreremo, traslazioni infinitesimali. Supponiamo in effetto che un gruppo Γ possieda tre (o più) traslazioni indipendenti

$$S_1 , \quad S_2 , \quad S_3 ,$$

di amplitudini

$$\omega_1 , \quad \omega_2 , \quad \omega_3 .$$

Se per es. ω_1; ω_2 fossero in rapporto reale, questo rapporto sarebbe incommensurabile (poichè S_1, S_2 sono indipendenti per ipotesi) e Γ conterrebbe appunto sostituzioni infinitesimali. Supponiamo ora che $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ sia complesso e costruiamo il parallelogrammo fondamentale $[a, \; a + \omega_1 , \; a + \omega_2 , \; a + \omega_1 + \omega_2]$ del sottogruppo

$$\Gamma' = [S_1 , \; S_2] ,$$

1) E invero, perchè s_1, s_{2n} siano fondamentali, occorre che si possano trovare quattro interi α', β', γ', δ', tali che sia inversamente

$$S_1 = s_1^{\alpha'} \, s_2^{\beta'} , \; S = s_1^{\gamma'} \, s_2^{\delta'} ,$$

onde

$$\alpha\alpha' + \gamma\beta' = 1 , \qquad \alpha\gamma' + \gamma\delta' = 0$$
$$\beta\alpha' + \delta\beta' = 0 , \qquad \beta\gamma' + \delta\delta' = 1 ,$$

e però

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = 1 .$$

indi, considerando un sistema di punti

$$z, \; z + \omega_3, \quad z + 2\,\omega_3, \; \dots$$

equivalenti rispetto a S_3 e alle sue potenze, troviamo nel parallelogrammo i loro punti equivalenti

$$z_1, \quad z_2, \quad z_3, \; \dots \tag{13}$$

rispetto a Γ'. Tutti questi punti sono distinti, perchè altrimenti fra ω_1, ω_2, ω_3 sussisterebbe una relazione lineare omogenea a coefficienti interi, contro l'ipotesi. Il gruppo infinito di punti (13), addensandosi in un'area finita, avrà almeno un punto limite, nell'intorno del quale le differenze $z'_i - z'_k$ risulteranno di modulo piccolo quanto si vuole; e, poichè ciascuna di queste differenze rappresenta l'amplitudine di una traslazione di Γ, vediamo che Γ contiene traslazioni infinitesime, *c. d. d.*

Così vediamo che anche per i gruppi di sostituzioni paraboliche la mancanza di sostituzioni infinitesimali assicura la discontinuità propria del gruppo.

In fine osserviamo che il processo tenuto nel presente paragrafo è pure applicabile allo studio dei gruppi discontinui di traslazioni nello spazio a tre dimensioni o ad un numero qualunque di dimensioni. In particolare tutti i gruppi di traslazioni dello spazio a n dimensioni, che contengono più di n traslazioni indipendenti, hanno traslazioni infinitesime. Ogni altro gruppo di traslazioni è propriamente discontinuo nel rispettivo spazio.

§ 18. — Gruppo modulare. Circoli e rette di riflessione del gruppo ampliato.

Passiamo ora a studiare il gruppo di sostituzioni lineari unimodulari

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1) \tag{14}$$

con coefficienti interi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Questo gruppo è evidentemente infinito, discontinuo e privo di sostituzioni infinitesimali. Esso

prende il nome di *gruppo modulare*. Noi ne stabiliremo direttamente la discontinuità propria (che risulta anche dal teorema di Poincaré), assegnando il campo fondamentale del gruppo. Ponendo

$$z = x + iy, \qquad z' = x' + iy',$$

e separando in $\dfrac{\alpha(x+iy)+\beta}{\gamma(x+iy)+\delta}$ il reale dall'immaginario, troviamo subito

$$y' = \frac{y}{(\gamma x + \delta)^2 + y^2},$$

il che dimostra che y, y' hanno sempre lo stesso segno. Il gruppo opera quindi separatamente sulle due parti in cui l'asse reale divide il piano e noi ci limiteremo a considerare il *semipiano positivo* $y > 0$.

Osserviamo subito che tutti i punti *razionali* dell'asse reale sono fra loro equivalenti rispetto al gruppo modulare Γ ed equivalenti p. es. a $z = 0$. Per $z = 0$ infatti la (14) dà $z' = \dfrac{\beta}{\delta}$ e i numeri β, δ possono essere due numeri *qualunque*, primi fra loro. Si vede quindi che nell'intorno di qualsiasi punto dell'asse reale il gruppo modulare Γ è impropriamente discontinuo. Al contrario, nell'intorno di ogni punto del semipiano positivo, esso è, come si vedrà, propriamente discontinuo.

Per lo studio del gruppo modulare Γ, come per quello di molti altri gruppi, è importantissimo procedere ad un *ampliamento* del gruppo, che si ottiene qui associando alle sostituzioni del gruppo la riflessione sull'asse immaginario

$$z' = -z_0,$$

che trasforma ancora il semipiano positivo in sè medesimo.

Il nuovo gruppo, che così risulta, contiene, oltre le sostituzioni di prima specie (14), le altre di seconda specie

$$z' = \frac{\alpha z_0 - \beta}{\gamma z_0 - \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1; \tag{14*}$$

lo diremo il *gruppo modulare ampliato* e lo indicheremo con Γ_0. Esso contiene il gruppo modulare Γ come sottogruppo invariante d'indice 2 (cfr. § 15 alla fine).

Particolarmente importante per lo studio di Γ_0 è il determinare le riflessioni (§ 13) in esso contenute. Esse si otterranno, secondo la formola (9) pag. 46, sempre e solo quando $\delta = \alpha$ [1]), cioè avranno la forma

$$z' = \frac{\alpha z_0 - \beta}{\gamma z_0 - \alpha}, \quad \alpha^2 - \beta\gamma = 1$$

e saranno per ciò riflessioni proprie (con circolo reale). Distinguiamo per altro secondo che $\gamma = 0$, ovvero $\gamma \neq 0$. Se $\gamma = 0$, allora è $\alpha = \pm 1$ e si ha una retta di riflessione di equazione

$$2x = \beta,$$

essendo β un intero qualunque. Abbiamo dunque nel gruppo infinite rette di riflessione

$$x = 0, \quad x = \pm\frac{1}{2}, \quad x = \pm 1, \quad x = \pm\frac{3}{2} \ldots$$

tutte parallele all'asse immaginario e distanti ciascuna dalla successiva di $\frac{1}{2}$.

Quando poi $\gamma \neq 0$, abbiamo il circolo di riflessione

$$\gamma(x^2 + y^2) - 2\alpha x + \beta = 0,$$

ovvero

$$\left(x - \frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 + y^2 = \frac{\alpha^2 - \beta\gamma}{\gamma^2} = \frac{1}{\gamma^2}.$$

Vi sono dunque infiniti circoli di riflessione di raggio eguale all'inversa γ di un numero intero qualunque e coi centri in tutti

1) Per fare il confronto colle formole del § 13, bisogna dare alla (14*) il determinante + 1 scrivendo:

$$z' = \frac{i\alpha z_0 - i\beta}{i\gamma z_0 - i\delta}.$$

quei punti razionali dell'asse reale $\frac{\alpha}{\gamma}$, pei quali il numeratore α soddisfa alla condizione

$$\alpha^2 \equiv 1 \pmod{\gamma},$$

e così p. es. circoli di raggio = 1 col centro in tutti i punti interi dell'asse reale, circolo di raggio $\frac{1}{2}$ coi centri nei punti

$$\pm\frac{1}{2}, \quad \pm\frac{3}{2}, \quad \pm\frac{5}{2} \ldots$$

circoli di raggio $\frac{1}{3}$ coi centri nei punti

$$\pm\frac{1}{3}, \quad \pm\frac{2}{3}, \quad \pm\frac{4}{3} \text{ ecc.}$$

Per il seguito delle nostre considerazioni è necessario premettere le due osservazioni seguenti:

1ª *L'area indefinita racchiusa nel semipiano positivo da due rette $x = a$, $x = b$ parallele all'asse immaginario e da una retta $y = k$ $(k > 0)$ parallela all' asse reale non è solcata che da un numero* **finito** *di rette e circoli di riflessione.* Per le rette è evidente, poichè si succedono coll' intervallo costante di $\frac{1}{2}$. Quanto ai circoli, potranno solcare l'area solo quelli che hanno un raggio $\frac{1}{\gamma} > k$, ciò che dà un numero finito di valori per γ; ma per ogni valore di γ i centri dei circoli si succedono sull'asse reale ad intervalli finiti e però solo un numero finito di questi circoli solcherà la striscia compresa fra le parallele $x = a$, $x = b$.

2ª *Applicando alla totalità dei circoli e delle rette di riflessione un'operazione qualunque del gruppo Γ_0, i circoli e le rette si scambieranno fra loro.* Ciò risulta subito dall'osservare che, se U è una riflessione del gruppo sul circolo C, e T una sostituzione di Γ_0 che porti il circolo C nel circolo C_1, la trasformata $T^{-1}UT$ sarà una riflessione sul circolo C_1.

§ 19. — Il triangolo fondamentale del gruppo ampliato.

Consideriamo nel piano complesso le due rette di riflessione

$$x = 0\,, \quad x = -\frac{1}{2}$$

ed il circolo di riflessione

$$x^2 + y^2 = 1\,.$$

La regione indefinita del semipiano positivo, compresa entro la striscia limitata da queste due rette, all'esterno del circolo, si dirà *il triangolo fondamentale* T ; e in effetto, come ora dimostreremo, nel triangolo T abbiamo il campo fondamentale del gruppo ampliato Γ_0. I tre vertici di questo triangolo sono nei punti

$$z = e^{\frac{\pi i}{2}} = i\,, \quad z = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \varepsilon\,, \quad z = \infty$$

e i rispettivi angoli a questi vertici hanno le ampiezze

$$\frac{\pi}{2}\,, \ \frac{\pi}{3}\,, \ 0.$$

Osserviamo poi che *il nostro triangolo* T (fig. 1) *non è attraversato da alcun altro circolo o retta di riflessione.*

Se applichiamo al triangolo T una sostituzione qualunque di Γ_0, avremo un nuovo triangolo T' limitato da tre archi di circoli di riflessione (o rette), coi medesimi angoli di $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 0$ e il triangolo T', come T da cui deriva, non sarà attraversato da alcun circolo di riflessione. Vogliamo ora dimostrare che : *tutti questi triangoli formano una rete, la quale ricopre una ed una sola volta tutto il semipiano positivo.* E infatti prendiamo dovunque nel semipiano positivo (l'asse reale escluso) un punto A e prendiamo anche un punto qualsiasi B nell' interno di T ; indi descriviamo una linea continua L che vada nel semipiano positivo da B ad A senza mai toccare l'asse reale (p. es. il segmento rettilineo $B\,A$).

La nostra linea L, mantenendosi i suoi punti sempre a distanza finita dall' asse reale, non potrà traversare che un numero finito di rette o circoli di riflessione (§ 16) e risulterà quindi divisa in un numero finito di tratti l_1, l_2, ..., l_ν, avendo luogo ogni volta fra un tratto e l'altro l'attraversamento di un circolo di riflessione.

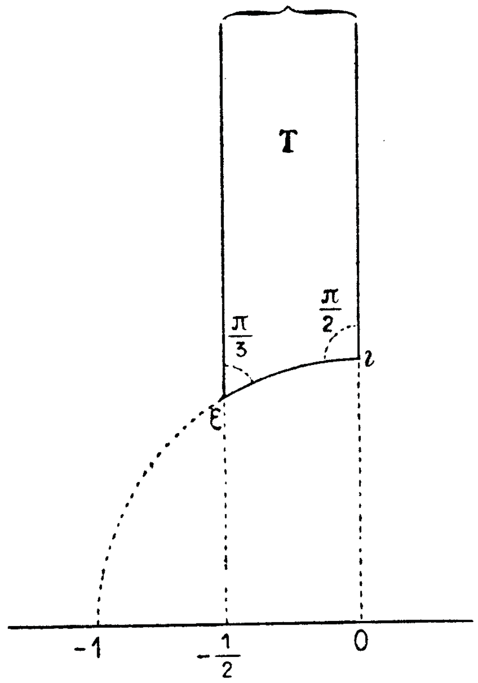


Fig. 1.

Il primo tratto l_1 è nel triangolo T e nell' estremo fra l_1, l_2 la linea L traversa un lato di T, sicchè se consideriamo quel triangolo T_1 della rete che nasce da T per riflessione su quel lato, il secondo tratto l_2 resterà entro T_1. Poi la linea L traversa un lato di T_1 ed entra per il tratto l_3 in un terzo triangolo T_2 aderente a T_1 pel detto lato. Così continuando, è chiaro che costruiremo una serie successiva di ν triangoli della rete

$$T\,, \quad T_1\,, \quad T_2\,, \quad T_{\nu-1}\,,$$

ciascuno aderente al precedente per un lato e nel triangolo $T_{\nu-1}$ sarà il punto A. Dunque *la rete si estende in qualunque regione del semipiano positivo.*

In secondo luogo due triangoli T_r, T_s della rete non possono mai in parte sovrapporsi (avere una regione a comune); altrimenti p. es. T_r, sarebbe attraversato da qualche circolo di riflessione (un lato di T_s).

Così è dimostrato quanto volevamo e possiamo ora facilmente vedere che: *Ogni punto del semipiano positivo è equivalente, rispetto al gruppo ampliato Γ_0, ad uno e ad un solo punto del triangolo T, il quale è adunque il triangolo fondamentale di Γ_0.*

E invero se A è un punto qualunque del semipiano positivo, esiste, come si è visto, un triangolo T' della rete che contiene A, e la sostituzione di Γ_0 che porta T' in T porterà A in un punto di T.

Osserviamo poi che la sostituzione di Γ_0, che porta T in T', è unica e determinata perchè, se ve ne fossero due differenti S_1, S_2, la sostituzione (non identica) $S_1 S_2^{-1}$ trasformerebbe T in sè stesso.

Ora ciò è impossibile; e in vero, il triangolo T avendo i tre angoli diseguali, non esiste non solo in Γ_0, *ma nemmeno fuori di* Γ_0, alcuna sostituzione, nè di prima nè di seconda specie, che trasformi T in sè stesso, essendo che ciascuno dei tre vertici dovrebbe rimanere fisso [1]).

Risulta di qui che due punti P, Q del triangolo T non possono essere equivalenti. E infatti se P, Q sono ambedue interni a T, la sostituzione che cangia P in Q dovrebbe trasformare T in sè medesimo. Se P è sul contorno e Q nell' interno, quella sostituzione cangerebbe il lato su cui si trova P in un circolo di riflessione attraversante T. Se poi P e Q sono sul contorno, quella sostituzione dovrebbe cangiare T in un triangolo aderente e sarebbe quindi una riflessione sopra il lato contenente Q e lascerebbe fisso Q, nè potrebbe trasportarvi P.

[1]) Questa considerazione dimostra che: *Non vi ha alcun gruppo più ampio di Γ_0, che contenga Γ_0 come sottogruppo invariante.* Le sostituzioni U di un tale gruppo dovrebbero infatti trasformare le riflessioni di Γ_0 in nuove riflessioni di Γ_0, e però il triangolo T in un altro T' della rete. Se con γ indichiamo la sostituzione di Γ_0 che porta T in T', la $U\gamma^{-1}$ lascia fisso T e però $U\gamma^{-1} = 1$, cioè $U = \gamma$.

§ 20. — La rete modulare e le riflessioni generatrici A, B, C.

Tutta la rete dei triangoli T, che ricopre una ed una sola volta il semipiano positivo, si può generare riflettendo il triangolo fondamentale sui suoi tre lati, i nuovi triangoli ottenuti sui loro lati liberi e così via di seguito. Per figurare con chiarezza la rete, tratteggiamo tutti i triangoli della rete che nascono da T, nel

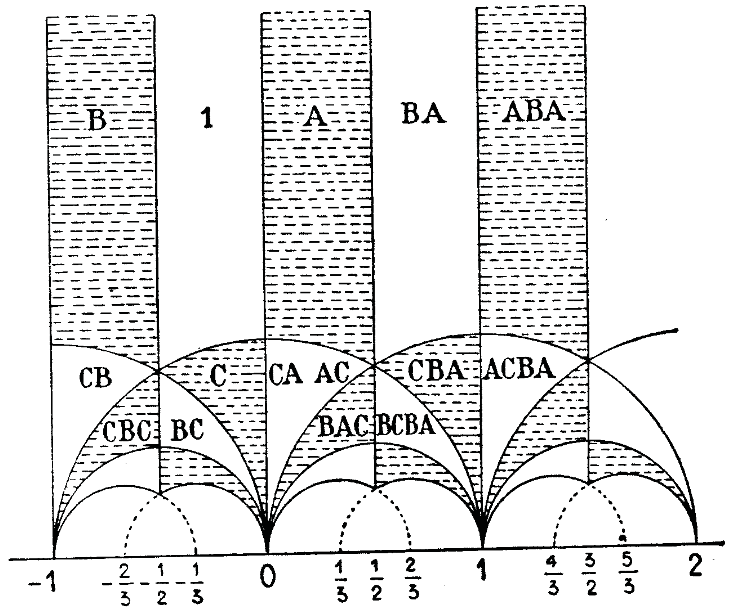


Fig. 2.

modo descritto, con un numero dispari di riflessioni, lasciando gli altri non tratteggiati; otteniamo così la figura 2 che ci rappresenta la *rete modulare*. Ogni triangolo della rete sarà quindi tratteggiato o no, secondo che nasce dal fondamentale per una sostituzione di seconda o di prima specie. Possiamo indicare senza ambiguità ogni triangolo della rete per mezzo della sostituzione V che lo fa derivare dal triangolo fondamentale, il quale sarà adunque indicato col simbolo 1. Indichiamo rispettivamente con

$$A, B, C$$

le tre riflessioni sui lati

$$x = 0, \quad x = -\frac{1}{2}, \quad x^2 + y^2 = 1$$

del triangolo fondamentale T e cogli stessi simboli dovremo indicare i tre triangoli aderenti al fondamentale 1 pei rispettivi lati. Ora osserviamo che, se V è una sostituzione qualunque di Γ_0, applicandola p. es. ai due triangoli aderenti

$$1, \quad A,$$

otterremo due triangoli pure aderenti

$$V, \quad AV.$$

Così adunque al triangolo V saranno aderenti i tre triangoli

$$AV, \quad BV, \quad CV$$

e precisamente AV lungo il lato che sottende gli angoli di $\frac{\pi}{2}$, 0 ecc. E poichè si può passare dal triangolo fondamentale ad uno qualunque della rete per una serie di triangoli aderenti, ne deduciamo: *L' intero gruppo modulare ampliato Γ_0 si genera colle tre riflessioni elementari A, B, C.* L'espressione analitica di queste tre riflessioni è data rispettivamente da

$$A) \quad z' = -z_0$$

$$B) \quad z' = -z_0 - 1$$

$$C) \quad z' = \frac{1}{z_0}.$$

I vertici della rete modulare si distinguono in tre specie, secondo che gli angoli corrispondenti sono $0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$. In ciascuna

specie tutti i vertici sono equivalenti e non solo rispetto al gruppo ampliato Γ_0, *ma anche rispetto al gruppo modulare Γ*, come si rileva dall' osservare che per ciascuno dei tre vertici di un triangolo della rete esiste una sostituzione di 2ª specie che lo lascia fisso (una riflessione). I vertici della 1ª specie, sono tutti equivalenti al vertice $z = \infty$ e sono i punti *razionali* dell'asse reale; quelli della seconda specie sono equivalenti al vertice $z = i$ e quelli della 3ª specie al vertice $z = \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

Intorno a ciascun vertice della prima specie si distribuiscono infiniti triangoli della rete che diventano sempre più piccoli, avvicinandosi all'asse reale. Intorno a ciascun vertice equivalente a $z = i$ si riuniscono *quattro* triangoli della rete alternatamente tratteggiati o no, e similmente intorno ai vertici equivalenti a $z = \varepsilon$ *sei* triangoli.

§ 21. — Il triangolo fondamentale del gruppo modulare e le sostituzioni generatrici S, T.

Per ottenere il campo fondamentale del gruppo modulare Γ basta che associamo due triangoli aderenti della rete modulare, p. es. il fondamentale 1 e il suo simmetrico A rispetto all'asse immaginario. Otteniamo così il triangolo, che indicheremo con T, limitato fra le due parallele

$$x = -\frac{1}{2}, \quad x = +\frac{1}{2}$$

all'esterno del circolo $x^2 + y^2 = 1$, con angoli eguali a $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, 0$; le ricerche precedenti ci fanno subito riconoscere che: *Ogni punto del semipiano è equivalente, rispetto a Γ, ad un punto di questo triangolo; due punti di esso triangolo non sono mai equivalenti, a meno che non si trovino sul contorno, simmetricamente disposti rispetto all'asse immaginario.*

E invero un punto P qualunque del semipiano positivo si può portare con una sostituzione V di Γ_0 nella metà a sinistra del detto triangolo. Se V è di 1ª specie, lo scopo è raggiunto; altrimenti eseguendo dopo V la riflessione A, la sostituzione VA di Γ porterà P nella seconda metà del nostro triangolo T. In secondo luogo, se due punti P, Q di T sono equivalenti rispetto a Γ lo saranno, a più forte ragione, rispetto a Γ_0 e dovranno quindi trovarsi l'uno nella prima, l'altro nella seconda metà di T ed essere simmetrici rispetto all'asse immaginario. Ora, se V è la supposta sostituzione di 1ª specie che porta P in Q, la VA di 2ª specie lascerà fermo P, che dovrà dunque essere sul contorno rettilineo o circolare. Nel primo caso la VA dovrà coincidere colla riflessione B, nel secondo colla C e la sostituzione supposta sarà o la

$$S = BA\,,$$

o la

$$T = CA\,.$$

Effettivamente la sostituzione

$$S = BA = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad z' = z + 1$$

porta un punto della retta $x = -\frac{1}{2}$ nel simmetrico dell'altra $x = +\frac{1}{2}$ e la sostituzione

$$T = CA = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}, \quad z' = -\frac{1}{z}$$

porta un punto del circolo $x^2 + y^2 = 1$ nel simmetrico (rispetto all'asse immaginario). Dimostriamo ora che: *Le due sostituzioni*

$$S = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}$$

bastano già a generare l'intero gruppo modulare.

Cominciamo dall'osservare che se applichiamo al triangolo T tutte le sostituzioni di Γ otteniamo una rete di triangoli con angoli di $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, 0$, ciascuno dei quali non è che l'insieme di due triangoli aderenti della rete primitiva. Potremo indicare questi

triangoli col simbolo della sostituzione stessa, che li fa derivare dal fondamentale T. Ma al triangolo T, che ora indichiamo con 1 (fig. 3), sono aderenti i triangoli

$$S\,, \quad S^{-1}\,, \quad T$$

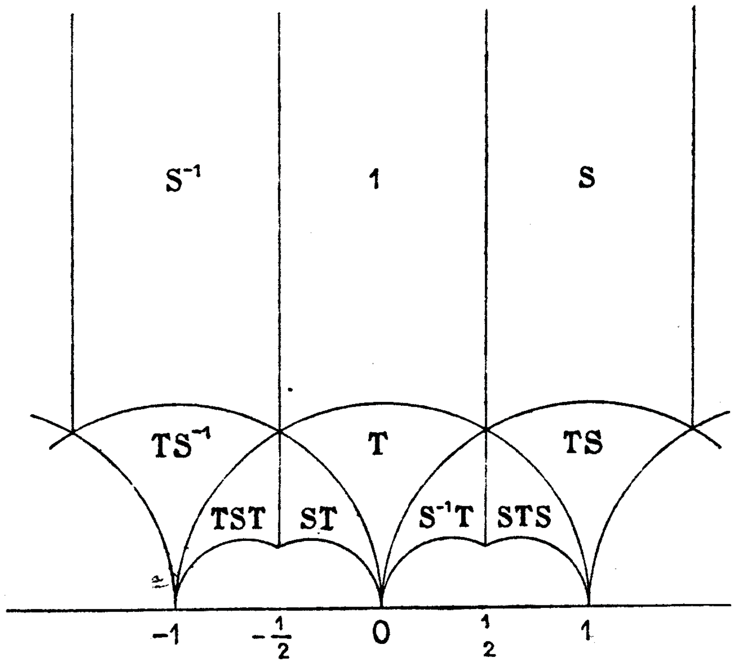


Fig. 3.

e però ogni altro triangolo V della nuova rete ha per triangoli aderenti

$$SV\,, \quad S^{-1}V\,, \quad TV\,.$$

Se ne conclude, come al § 18, che combinando le sostituzioni S, T e le loro potenze si genera tutto il gruppo modulare.

§ 22. — Sostituzioni ellittiche del gruppo modulare.

Le sostituzioni $z' = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ del gruppo modulare sono ellittiche quando l'invariante $j = \alpha + \delta$ è inferiore in valore assoluto al 2 e, poichè nel caso attuale j è un numero intero, dovremo avere

$$\alpha + \delta = 0, \qquad \text{o} \qquad \alpha + \delta = \pm 1 .$$

A causa della formola (§ 12)

$$j = 2 \cos \frac{\varphi}{2},$$

avremo nel primo caso $\cos \dfrac{\varphi}{2} = 0$ e nel secondo $\cos \dfrac{\varphi}{2} = \pm \dfrac{1}{2}$, onde vediamo intanto che le sostituzioni ellittiche del nostro gruppo sono a periodo 2, o a periodo 3. Al medesimo risultato possiamo arrivare colle considerazioni geometriche seguenti, che ci fanno inoltre riconoscere quali sono le sostituzioni ellittiche *affini* [1]). Ogni sostituzione ellittica deve lasciar fisso un punto del semipiano positivo (fuori dell'asse reale), che deve essere dunque un vertice della rete modulare e però (§ 40) o equivalente al vertice $z = i$ o all'altro $z = \varepsilon$. Qualunque sostituzione ellittica del gruppo modulare sarà dunque affine ad una sostituzione (ellittica) che lasci fisso il punto $z = i$, o il punto $z = \varepsilon$. Ma le prime si determinano subito dalla relazione

$$i = \frac{\alpha i + \beta}{\gamma i + \delta},$$

da cui

$$\gamma = -\beta, \qquad \alpha = \delta,$$

[1]) In generale chiamiamo affini due sostituzioni in un gruppo, quando l'una si ottiene dall'altra trasformando questa *con una sostituzione del gruppo stesso.*

onde a causa di $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, cioè $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, otteniamo (escludendo l'identità) l'unica sostituzione

$$T = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}.$$

Nel secondo caso troviamo le due sostituzioni

$$\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}.$$

ossia

$$z' = -\frac{z+1}{z}, \qquad z' = -\frac{1}{z+1},$$

delle quali la seconda è il quadrato della prima e che, nell'intorno del punto $z = \varepsilon$, producono una rotazione del piano di $\dfrac{2\pi}{3}$, la prima nel senso positivo, la seconda nel negativo. Dunque: *Le sostituzioni ellittiche del gruppo modulare sono a periodo* 2, *ovvero a periodo* 3*; le prime sono tutte affini alla sostituzione elementare* $\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}$, *quelle a periodo* 3 *si ripartiscono in due classi di sostituzioni, affini rispettivamente alle due* $\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & -1 \end{pmatrix}$.

§ 23. — Forme binarie quadratiche a determinante negativo.

Mediante la rappresentazione geometrica del gruppo modulare, stabilita nei paragrafi precedenti, si può dare un'elegante interpretazione a quel capitolo della teoria dei numeri che tratta delle forme binarie quadratiche, della loro riduzione, della risoluzione dell'equazione di Pell ecc., come si può vedere diffusamente esposto nel primo volume della *Theorie der elliptischen Modulfunctionen* di Klein-Fricke (3[es] Kap., pp. 244 sgg.).

Noi qui ci limiteremo al caso che ha maggiore interesse per la teoria delle funzioni ellittiche (moltiplicazione complessa), al caso cioè di una forma quadratica

(15) $$a x^2 + 2 b x y + c y^2$$

a determinante $D = b^2 - ac$ negativo, i coefficienti a, b, c essendo supposti numeri interi. Manifestamente i coefficienti estremi a, c hanno lo stesso segno e li supporremo sempre positivi, bastando nel caso opposto cangiare di segno tutti i coefficienti. Ricordiamo che la forma (15) si dice *equivalente* alla forma :

$$a' x'^2 + 2 b' x' y' + c' y'^2 \tag{15*}$$

quando la prima si traduce nella seconda mediante una sostituzione lineare sulle variabili

$$\begin{cases} x = \alpha x' + \beta y' \\ y = \gamma x' + \delta y', \end{cases}$$

a coefficienti interi e a determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Le infinite forme equivalenti ad una data costituiscono ciò che si dice una *classe* di forme ; esse hanno tutte egual determinante. Tutte le forme di eguale determinante si distribuiscono in altrettante classi ed uno dei principali risultati della teoria, che ci proponiamo qui di stabilire, consiste in questo che il numero delle classi, corrispondenti ad un dato determinante, è sempre un numero finito.

Si dicono radici della forma (15) le due radici della equazione

$$a\omega^2 + 2b\omega + c = 0\,,$$

che nel caso nostro, essendo $D = -\Delta = b^2 - ac$ negativo, sono coniugate immaginarie ed hanno i valori

$$\omega_1 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{a}\,, \qquad \omega_2 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{a}\,.$$

L' indice della prima radice ω_1 è situato nel semipiano positivo e si dirà l' *indice della forma*. È importante osservare che *una forma (a, b, c) a determinante negativo è pienamente determinata quando sia dato il suo determinante ed il suo indice.*

Ciò posto, consideriamo due forme (15), (15*) equivalenti e i loro rispettivi indici ω_1, ω'_1, che per le (16) e, per essere $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$, saranno legati dalla relazione

$$\omega_1 = \frac{\alpha\omega'_1 + \beta}{\gamma\omega'_1 + \delta}\,,$$

onde vediamo che due forme equivalenti hanno indici equivalenti rispetto al gruppo modulare. Viceversa, dall' osservazione fatta sopra, risulta che due forme di egual determinante saranno equivalenti se hanno indici equivalenti. Ora, con una sostituzione del gruppo modulare, possiamo trasportare l' indice di una forma nel triangolo fondamentale

$$-\frac{1}{2} \leq x \leq +\frac{1}{2} \qquad x^2 + y^2 \geq 1\,. \tag{17}$$

Se chiamiamo dunque *ridotta* una forma quando il suo indice giace nel triangolo fondamentale, abbiamo il teorema :

Ogni forma a determinante negativo è equivalente ad una forma ridotta.

A quali condizioni debbono soddisfare i coefficienti di una forma ridotta (a, b, c) ? Poichè l' indice è dato da

$$\omega_1 = x + iy = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{a}\,,$$

le diseguaglianze (17) si traducono nelle altre pei coefficienti

$$2\,|\,b\,| \leq a \leq c\,. \tag{17*}$$

Queste sono appunto le condizioni cui deve soddisfare una forma ridotta secondo Gauss.

Dalle diseguaglianze (17*) segue subito che esiste soltanto un numero finito di forme ridotte di assegnato determinante, poichè dalle (17*) abbiamo

$$4b^2 \leq ac\,, \qquad 3b^2 \leq \Delta\,,$$

quindi $|\,b\,| \leq \sqrt{\frac{\Delta}{3}}$. Il coefficiente medio b, assegnato Δ, non può dunque avere che un numero finito di valori e per ciascuno di essi, a causa di $\Delta = ac - b^2$, i coefficienti estremi a, c debbono corrispondere ad una decomposizione del numero

$$\Delta + b^2 = ac$$

nel prodotto di due fattori. Poichè adunque ogni forma è equivalente ad una ridotta, e le forme ridotte di egual determinante sono in numero finito, risulta dimostrato il teorema fondamentale:

Le forme di egual determinante negativo si distribuiscono in un numero finito di classi.

Per risolvere il problema fondamentale della teoria dell' equivalenza, che consiste nel riconoscere se due forme di egual determinante appartengono o no alla medesima classe, resta a vedere se due forme ridotte possono essere equivalenti. Siccome i loro indici appartengono al triangolo fondamentale, ciò avverrà soltanto quando si trovino sul contorno, simmetricamente disposti rispetto all' asse immaginario. Se appartengono al contorno rettilineo, le due forme ridotte equivalenti presenteranno i coefficienti

$$\left(a, \quad \frac{1}{2} a, \quad c\right) \qquad \left(a, \quad -\frac{1}{2} a, \quad c\right)$$

e se appartengono al contorno circolare, saranno

$$(a \,.\, b \,,\, a) \qquad (a \,.\, -b \,,\, a)$$ [1].

§ 24. — L'affinità circolare trasportata nello spazio e le formole di Poincaré.

Il metodo dell' ampliamento per riflessione, che abbiamo adoperato per lo studio del gruppo modulare, riesce per molte altre classi di gruppi propriamente discontinui nel piano complesso. Ma vi sono, come già abbiamo detto al § 14, dei gruppi che, senza contenere sostituzioni infinitesimali, sono in tutto il piano impropriamente discontinui.

Nonostante possiamo estendere anche a questi gruppi la nozione di *campo fondamentale*, passando con un ingegnoso artifizio dovuto a Poincaré (*Acta Mathematica*, tomo III), dalla rappresentazione geometrica nel piano ad una rappresentazione nello spazio.

[1] Cfr. DIRICHLET-DEDEKIND, *Zahlentheorie*, § 65.

Per intendere come si effettua questo passaggio, ricordiamo che la sostituzione lineare

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

cangia i circoli in circoli e di più un fascio od una rete di circoli egualmente in un fascio od una rete. Ora se consideriamo una rete di circoli, essa è determinata da tre dei suoi circoli e consta di tutti i circoli normali ad un cerchio fisso, che ha per centro il centro radicale dei tre circoli ed ha per quadrato del raggio la potenza di questo centro rispetto a ciascun circolo della rete. Il cerchio fisso è quindi reale od immaginario, secondo che questa potenza è positiva o negativa. Nel secondo caso, che è quello ora importante per noi, possiamo anche dire che la rete consta dei circoli che tagliano in punti diametralmente opposti un cerchio reale fisso. Ora noi osserviamo che tutte le sfere descritte sopra i circoli di una tale rete come circoli massimi passano per due punti fissi reali simmetrici rispetto al piano della rete, che sono i due estremi di quel diametro della sfera, avente per cerchio massimo il cerchio fisso, che è perpendicolare nel centro al piano della figura [1].

[1] Tutte le proprietà qui accennate possono dimostrarsi elementarmente, o dedursi analiticamente così. Prendiamo per origine delle coordinate il centro radicale dei circoli della rete: questi avranno le equazioni:

$$\left\{\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2\,a_1\,x + 2\,b_1\,y + c = 0\,, \\ x^2 + y^2 + 2\,a_2\,x + 2\,b_2\,y + c = 0\,, \\ x^2 + y^2 + 2\,a_3\,x + 2\,b_3\,y + c = 0\,, \end{aligned}\right.$$

e taglieranno ortogonalmente il cerchio

$$x^2 + y^2 = c\,,$$

che è però immaginario se $c < 0$. In tal caso si consideri invece il circolo

$$x^2 + y^2 + c = 0\,,$$

che i tre circoli fondamentali (e tutti quelli della rete) taglieranno in punti diametralmente opposti.

In fine la sfera che ha per circolo massimo p. es. il primo di quei tre circoli ha per equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\,a_1\,x + 2\,b_1\,y + c = 0$$

e taglia l'asse z nei due punti $z = \pm\sqrt{-c}$.

Ciò premesso, consideriamo l'intero spazio, o meglio il semispazio $\zeta > 0$, associando ai due assi ortogonali $O\xi$, $O\eta$ nel piano z un terzo asse $O\zeta$ ortogonale ad ambedue. Prendiamo un punto qualunque P in questo semispazio (di ordinata $\zeta > 0$; le sfere che passano per P ed hanno il centro sul piano $\zeta = 0$ tagliano questo piano in una rete di circoli della specie ora considerata. Questa è cangiata dalla sostituzione lineare $z' = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ in una rete omologa che definisce nel semispazio un punto P' pel quale vengono a passare tutte le sfere descritte sui circoli della nuova rete come circoli massimi. Così rispetto alla detta sostituzione lineare *ogni punto* $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ *del semispazio ne individua un altro* $P' \equiv (\xi', \eta', \zeta')$ *e noi estendiamo, con Poincaré, la trasformazione a tutto il semispazio facendo corrispondere al punto P il punto P'.*

Quali saranno le formole di trasformazione? Per trovarle basta tradurre analiticamente la definizione geometrica della trasformazione. Sia (§ 10):

$$A z' z'_0 + B z' + B_0 z'_0 + C = 0 \tag{18}$$

l'equazione di un circolo della seconda rete, dove A, B, C sono parametri arbitrari (i due estremi reali). Ponendo

$$\varrho'^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2,$$

sarà

$$A \varrho'^2 + B z' + B_0 z'_0 + C = 0 \tag{18*}$$

l'equazione della sfera corrispondente.

Il circolo (18) si muta, per la sostituzione lineare

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

nell'altro

$$(A\alpha\alpha_0 + B\alpha\gamma_0 + B_0\alpha_0\gamma + C\gamma\gamma_0)zz_0 + (A\alpha\beta_0 + B\alpha\delta_0 + B_0\beta_0\gamma + C\gamma\delta_0)z +$$
$$(A\alpha_0\beta + B_0\alpha_0\delta + B\beta\gamma_0 + C\gamma_0\delta)z_0 + A\beta\beta_0 + B\beta\delta_0 + B_0\beta_0\delta + C\delta\delta_0 = 0;$$

la sfera che lo ha per circolo massimo ha quindi per equazione:

$$A(\alpha\alpha_0\varrho^2 + \alpha\beta_0 z + \alpha_0\beta z_0 + \beta\beta_0) + B(\alpha\gamma_0\varrho^2 + \alpha\delta_0 z + \beta\gamma_0 z_0 + \beta\delta_0) +$$
$$B_0(\alpha_0\gamma\varrho^2 + \alpha_0\delta z_0 + \beta_0\gamma z + \beta_0\delta) + C(\gamma\gamma_0\varrho^2 + \gamma\delta_0 z + \gamma_0\delta z_0 + \delta\delta_0) = 0$$

e deve contenere il punto $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$. Paragonando quest'ultima equazione colla (18*), ne deduciamo per le formole richieste:

$$\left\{\begin{aligned} \varrho'^2 &= \frac{\alpha\alpha_0\varrho^2 + \alpha\beta_0 z + \alpha_0\beta z_0 + \beta\beta_0}{\gamma\gamma_0\varrho^2 + \gamma\delta_0 z + \gamma_0\delta z_0 + \delta\delta_0} \\ z' &= \frac{\alpha\gamma_0\varrho^2 + \alpha\delta_0 z + \beta\gamma_0 z_0 + \beta\delta_0}{\gamma\gamma_0\varrho^2 + \gamma\delta_0 z + \gamma_0\delta z_0 + \delta\delta_0} \\ z'_0 &= \frac{\alpha_0\gamma\varrho^2 + \alpha_0\delta z_0 + \beta_0\gamma z + \beta_0\delta_0}{\gamma\gamma_0\varrho^2 + \gamma\delta_0 z + \gamma_0\delta z_0 + \delta\delta_0} \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Queste possono anche scriversi sotto la forma equivalente

$$\left\{\begin{aligned} \varrho'^2 &= \frac{\alpha_0\alpha\zeta^2 + (\alpha z + \beta)(\alpha_0 z_0 + \beta_0)}{\gamma\gamma_0\zeta^2 + (\gamma z + \delta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0)} \\ z' &= \frac{\alpha\gamma_0\zeta^2 + (\alpha z + \beta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0)}{\gamma\gamma_0\zeta^2 + (\gamma z + \delta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0)} \\ z'_0 &= \frac{\alpha_0\gamma\zeta^2 + (\alpha_0 z_0 + \beta_0)(\gamma z + \delta)}{\gamma\gamma_0\zeta^2 + (\gamma z + \delta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0)} \end{aligned}\right. \tag{19'}$$

e se di qui calcoliamo $\zeta'^2 = \varrho'^2 - z' z'_0$, ne deduciamo dapprima

$$\zeta'^2 = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha_0\delta_0 - \beta_0\gamma_0)\zeta^2}{\{\gamma\gamma_0\zeta^2 + (\gamma z + \delta)(\gamma_0 z_0 + \delta)\}^2},$$

e supponendo come al solito $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, estraendo la radice e ricordando che ζ', ζ sono insieme positive avremo:

$$\zeta' = \frac{\zeta}{\gamma\gamma_0\varrho^2 + \gamma\delta_0 z + \gamma_0\delta z + \delta\delta_0}. \tag{19*}$$

Questa trasformazione dello spazio conserva gli angoli e cangia le sfere in sfere e di più il piano $\xi\eta$ in sè stesso, quindi i circoli normali a questo piano in altrettali circoli [1]). Se consideriamo

[1]) Si può dimostrare facilmente la cosa, osservando che ciò ha luogo per le trasformazioni corrispondenti alle sostituzioni lineari elementari

$$z' = z + a, \qquad z' = kz, \qquad z' = \frac{1}{z},$$

colle quali ogni altra può comporsi.

la totalità delle sostituzioni lineari, esse formano un gruppo *continuo*, al quale, colle formole (19), (19*), facciamo corrispondere un gruppo *isomorfo* di trasformazioni conformi dello spazio.

Osserviamo che la sostituzione

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

se non è parabolica, avrà sul piano $\xi\eta$ due punti distinti fissi A, B ed il circolo condotto per A, B normalmente al piano si cangerà in sè medesimo. In particolare quando la sostituzione è ellittica, tutti i punti del circolo rimarranno fissi [1]).

È manifesto che le nostre deduzioni restano invariate se, in luogo di una sostituzione di 1ª specie, ne consideriamo una di 2ª

$$z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta},$$

soltanto dovremo nelle formole di Poincaré scambiare z con z_0. In particolare, se consideriamo una riflessione e sul circolo di riflessione come circolo massimo descriviamo una sfera, la trasformazione corrispondente dello spazio sarà un' inversione per raggi vettori reciproci rispetto a questa sfera. Noi la diremo una riflessione su questa sfera, che si chiamerà perciò *sfera di riflessione*.

Consideriamo ora un gruppo discontinuo di sostituzioni lineari ed il gruppo corrispondente di trasformazioni conformi dello spazio. Possiamo trasportare nello spazio la nozione di punti equi-

[1]) Ciò si vede nel modo più semplice riducendo la sostituzione (ellittica) alla forma normale

$$z' = \frac{\alpha}{\delta} z,$$

con $\alpha\delta = 1$, $|\alpha| = |\delta|$, dopo di che le formole di Poincaré dànno

$$z' = \frac{\alpha}{\delta} z \qquad \zeta' = \zeta$$

e rappresentano semplicemente una rotazione dello spazio attorno all' asse $O\zeta$.

valenti rispetto al gruppo e di *campo fondamentale*, che sarà ora un campo a tre dimensioni. Diremo dunque che un gruppo discontinuo di sostituzioni lineari è propriamente discontinuo nello spazio se tale è il gruppo corrispondente di trasformazioni dello spazio. È chiaro che un gruppo con sostituzioni infinitesimali è sempre impropriamente discontinuo anche nello spazio; ma nel caso opposto abbiamo l' importante teorema di Poincaré che anche qui ci limitiamo a citare: *Ogni gruppo discontinuo di sostituzioni lineari, privo di sostituzioni infinitesimali, è sempre propriamente discontinuo nello spazio.*

§ 25. — Il gruppo delle sostituzioni unimodulari a coefficienti interi complessi.

Come applicazione del metodo di Poincaré, esposto nel paragrafo precedente, tratteremo il gruppo delle sostituzioni unimodulari

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

i cui coefficienti sono numeri *interi complessi* di Gauss, cioè della forma

$$a + bi,$$

essendo a, b interi reali. Questo gruppo è impropriamente discontinuo in tutto il piano, come risulta subito dall'osservare che rispetto al gruppo attuale sono equivalenti al punto $z = 0$ e fra loro tutti i punti $z = \frac{a + bi}{c + di}$ e questi formano un gruppo di punti ovunque condensato nel piano [1]). Ma se passiamo dal piano allo

[1]) Questa proposizione, che risulta dalle proprietà elementari degli interi complessi di Gauss, può dimostrarsi anche così. Prendasi per δ uno degli *infiniti* numeri primi reali p della forma $4n + 3$ e per β_1, β_2 due

spazio, il gruppo sarà propriamente discontinuo e noi ci proponiamo di determinarne il campo (poliedro) fondamentale.

In luogo però di considerare solo le sostituzioni $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, qui ammettiamo che il determinante possa essere una qualunque delle quattro unità del campo complesso

$$1\,, \quad -1, \quad i\,, \quad -i$$

e poichè, moltiplicando i quattro coefficienti per i, il determinante cambia segno, possiamo limitarci a considerare le sostituzioni

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\,, \tag{20}$$

con coefficienti interi complessi e determinante

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1\,, \quad \text{o} \quad = i\,.$$

numeri qualunque (reali) non simultaneamente divisibili per p. Possiamo sempre trovare due interi complessi

$$\alpha = a_1 + i\,a_2\,, \qquad \gamma = \gamma_1 + i\,\gamma_2\,,$$

tali che sia

$$\alpha\delta - \beta\gamma = (a_1 + i\,a_2)\,p - (\beta_1 + i\,\beta_2)\,(\gamma_1 + i\,\gamma_2) = 1\,.$$

Basta per ciò determinare due interi reali γ_1, γ_2, che soddisfino le congruenze

$$\left.\begin{aligned} \beta_2\gamma_2 - \beta_1\gamma_1 &\equiv 1 \\ \beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1 &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \ (\text{Mod } p)\,,$$

ciò che è sempre possibile, il determinante del sistema $\begin{vmatrix} \beta_2 & -\beta_1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \beta_1^2 + \beta_2^2$ non essendo divisibile per p. Dunque tutti i punti razionali di coordinate $\frac{\beta_1}{p}$, $\frac{\beta_2}{p}$ sono equivalenti e, poichè p può essere grande quanto si vuole, ne risulta il teorema.

Osservazione. — Che vi siano infiniti numeri primi della forma $4\,n + 3$ risulta da un teorema generale di Dirichlet; ma si può dimostrare elementarmente, seguendo un procedimento di Euclide, così: Consideriamo i numeri primi della forma $4\,n + 3$ fino ad uno qualunque di essi, p, e siano

$$3\,, \ 7, \ 11\,, \ \ldots.\,, \ p\,.$$

Il numero $N = 3^2.\,7^2.\,11^2 \ldots.\, p^2 + 2$ è $\equiv 3$ (mod 4) ed ammette quindi qualche fattore primo della forma $4\,n + 3$, che è al di là di quelli considerati.

Questo gruppo, che indicheremo con G, contiene il precedente come sottogruppo invariante d' indice 2.

Per lo studio del nostro gruppo G è importante un ampliamento per riflessione, che si ottiene associando alle sostituzioni (20) di 1ª specie le altre di 2ª specie

$$z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta}\,, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1\,, \quad i\,. \tag{20*}$$

Le (20), (20*) insieme formano un gruppo G_0, in cui G è invariante d' indice 2.

Per determinare il campo fondamentale del gruppo ampliato G_0, seguiremo un metodo perfettamente analogo a quello tenuto pel gruppo modulare e cominceremo dal trovare le riflessioni (proprie) contenute in G_0. Queste ci saranno date dalla formola (9) pag. 44, quando si sia reso $= 1$ il determinante della sostituzione. Fra le sostituzioni di 2ª specie (20*), a determinante $= 1$ le riflessioni saranno quindi date dalla formola

$$z' = \frac{(a_1 + i\,a_2)\,z_0 + i\,\beta_1}{i\,\gamma_1\,z_0 + (a_1 - i\,a_2)}\,, \tag{21}$$

numeri interi a_1, a_2, β_1, γ_1 soddisfacendo l'equazione

$$a_1^2 + a_2^2 + \beta_1\,\gamma_1 = 1\,. \tag{22}$$

Le sostituzioni (20*) a determinante i si riducono a determinante 1 moltiplicando i quattro coefficienti per $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ e, se applichiamo ancora la citata formola (9), troviamo le nuove riflessioni

$$z' = \frac{(a_1 + i\,a_2)\,z_0 + (1 - i)\,b_1}{(1 - i)\,c_1\,z_0 + (a_2 + i\,a_1)}\,, \tag{21*}$$

i numeri interi reali a_1, a_2, b_1, c_1 essendo assoggettati alla condizione

$$a_1^2 + a_2^2 + 2\,b_1\,c_1 = 1\,. \tag{22*}$$

Fra le riflessioni (21), (21*) ve ne hanno di quelle che avvengono sopra piani e sono quelle che corrispondono rispettivamente a $\gamma_1 = 0$, $c_1 = 0$. Otteniamo così i piani di riflessione:

$$\text{(A)} \qquad 2\xi = b, \quad 2\eta = b, \quad \xi - \eta = b, \quad \xi + \eta = b,$$

essendo b un intero reale qualunque.

Per γ_1 o c_1 differenti da zero, abbiamo poi le due specie di sfere di riflessione:

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \left(\xi - \dfrac{a_2}{\gamma_1}\right)^2 + \left(\eta + \dfrac{a_1}{\gamma_1}\right)^2 + \zeta^2 = \dfrac{1}{\gamma_1^2} \\ a_1^2 + a_2^2 \equiv 1 \pmod{\gamma_1} \end{cases}$$

$$\text{(B*)} \qquad \begin{cases} \left(\xi - \dfrac{a_1 - a_2}{2c_1}\right)^2 + \left(\eta - \dfrac{a_1 + a_2}{2c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \dfrac{1}{2c_1^2} \\ a_1^2 + a_2^2 \equiv 1 \pmod{2c_1}. \end{cases}$$

Le formole (A), (B), (B*) danno tutte le sfere di riflessione di G_0.

Come al § 18, così ora si vede che se si considera nel semispazio positivo la regione compresa fra quattro piani paralleli ai piani coordinati $\xi\zeta$, $\eta\zeta$:

$$\xi = A, \quad \xi = B, \quad \eta = C, \quad \eta = D,$$

al di sopra del piano

$$\zeta = k \quad (k > 0),$$

questa non è solcata che da un numero finito di sfere e piani di riflessione. In secondo luogo ogni sostituzione di G_0, applicata alle sfere di riflessione, le scambierà fra loro.

Ciò premesso, possiamo facilmente determinare un poliedro fondamentale pel gruppo G_0. Si considerino invero i tre piani di riflessione

$$\xi = \frac{1}{2}, \quad \eta = 0, \quad \xi - \eta = 0;$$

questi limitano nel semispazio positivo un prisma triangolare (isoscele) aperto, che non è più attraversato da alcun piano di riflessione. Consideriamo poi la sfera di riflessione del tipo (B)

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

che taglia tutte tre le facce del prisma.

La regione del prisma esterna a questa sfera è una piramide con un vertice all' infinito e coi tre vertici al finito

$$V_1 \equiv (0, 0, 1), \quad V_2 \equiv \left(\frac{1}{2}, \ 0, \ \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad V_3 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Dimostreremo che questa è una *piramide fondamentale* di G_0. Per ciò basta osservare: 1° che nessuna sfera di riflessione attraversa la piramide; 2° che nessuna sostituzione di G_0 trasforma la piramide in sè stessa. La prima cosa risulta da ciò che nessuna sfera di riflessione può contenere nel suo interno un vertice V_1, o V_2, o V_3. E invero il raggio di una tale sfera dovrebbe essere $> \frac{1}{\sqrt{2}}$, quindi $= 1$; ma le sfere di raggio $= 1$ hanno i centri nei punti interi del piano $z = a_1 + i\,a_2$ e non attraversano il poliedro. In secondo luogo una sostituzione di G_0, che cangiasse la piramide in sè stessa, dovrebbe lasciar fisso il vertice $\zeta = \infty$ quindi anche gli altri tre, di cui lascerebbe fissa l'ordinata. Dopo queste osservazioni, il ragionamento procederà come pel gruppo modulare e si vedrà che, applicando alla piramide tutte le sostituzioni di G_0, si riempirà il semispazio positivo con altrettante piramidi equivalenti. Ne risulta: *Ogni punto del semispazio positivo è equivalente rispetto a G_0 ad uno e ad un solo punto della piramide fondamentale.*

Per avere il poliedro fondamentale del gruppo G, basterà p. es. associare alla piramide la sua simmetrica rispetto al piano $\xi - \eta = 0$. I punti di questo poliedro sono caratterizzati dalle diseguaglianze

$$\text{(23)} \qquad \begin{cases} 0 \leq \xi \leq \dfrac{1}{2}, \quad 0 \leq \eta \leq \dfrac{1}{2} \\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq 1. \end{cases}$$

Osservazione. — Il metodo che qui abbiamo tenuto per lo studio del gruppo G potrebbe egualmente applicarsi ai gruppi di sostituzioni lineari unimodulari

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

nelle quali i numeri $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ percorrono gli interi della forma

$$a + ib\sqrt{D},$$

dove D indica un numero intero positivo ed a, b interi ordinari [1]).

§ 26. — Decomposizione di un numero nella somma di quattro quadrati.

I risultati ottenuti nel paragrafo precedente consentono importanti applicazioni aritmetiche alla teoria delle forme quadratiche, per le quali rimandiamo al primo volume delle *Automorphe Functionen* del Fricke. Qui ci limiteremo a dedurne il teorema: *Ogni numero intero è la somma di quattro quadrati (interi).*

Se m è un numero intero qualunque, possiamo sempre trovare (e in diversi modi) due numeri interi r, s tali che $r^2 + s^2 + 1$ sia divisibile per m, cioè:

$$r^2 + s^2 + 1 \equiv 0 \pmod{m} \text{ [2]}).$$

[1]) Cfr. le memorie dell'autore nei voll. 38, 40 dei *Mathematische Annalen.*

[2]) Nel caso di m numero primo, si dimostra subito l'asserzione osservando che, se r percorre un sistema completo di resti (mod m), non può il numero $-(r^2+1)$ essere sempre non residuo (mod m), altrimenti per tutti i valori di r sarebbe

$$\left[-(r^2+1)\right]^{\frac{m-1}{2}} \equiv -1 \pmod{m}$$

e la congruenza, che è di grado $m-1$, avrebbe m radici, ciò che è assurdo. Dal caso di un modulo primo si risale al caso di un modulo com-

Consideriamo ora il punto

$$\left(\frac{r}{m}, \frac{s}{m}, \frac{1}{m}\right)$$

dello spazio e troviamo, rispetto al gruppo del paragrafo precedente, il suo equivalente nella piramide fondamentale. Applicando le formole di Poincaré (19), (19*) col fare

$$z = \frac{r+is}{m}, \quad \varrho^2 = \frac{r^2+s^2+1}{m^2},$$

vediamo subito che le coordinate del punto equivalente saranno della forma

$$\frac{r'}{m'}, \quad \frac{s'}{m'}, \quad \frac{1}{m'}.$$

Ma dalle diseguaglianze (23) deduciamo che si avrà

$$r' = 0, \quad s' = 0, \quad m' = 1;$$

cioè il punto $\left(\frac{r}{m}, \frac{s}{m}, \frac{1}{m}\right)$ sarà equivalente al vertice (0, 0, 1) della piramide fondamentale. Sia ora $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ la sostituzione che

posto in modo noto. E del resto basta dimostrare il teorema del testo per un numero primo ricordando che, per l'identità (d'Eulero)

$$\begin{vmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p+iq & r+is \\ -r+is & p-iq \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (a+ib)(p+iq)+(c+id)(r+is), & (a+ib)(-r+is)+(c+id)(p-iq) \\ (a-ib)(r+is)+(-c+id)(p+iq), & (a-ib)(p-iq)+(c-id)(r-is) \end{vmatrix},$$

un prodotto di due somme di quattro quadrati è ancora la somma di quattro quadrati.

porta (0, 0, 1) in $\left(\frac{r}{m}, \frac{s}{m}, \frac{1}{m}\right)$. La formola (19*), pag. 78, ci dà subito

$$m = \gamma\gamma_0 + \delta\delta_0,$$

cioè

$$m = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2,$$

il che dimostra il teorema enunciato.

CAPITOLO III.

Trasformazioni di integrali doppi in integrali semplici. — Funzioni armoniche e loro proprietà fondamentali. — Problema di Dirichlet e sua risoluzione nel caso del campo circolare.

§ 27. — Integrali curvilinei. - Integrali doppi.

Riprendendo ora lo studio generale delle funzioni di variabile complessa, dobbiamo innanzi tutto far conoscere alcune formole fondamentali di trasformazioni di integrali doppi, estesi ad aree piane, in integrali semplici estesi al contorno dell'area, che ci serviranno a dimostrare le più importanti proprietà delle soluzioni dell'equazione di Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

e più tardi a stabilire la nozione e le proprietà degli *integrali di funzione di variabile complessa*, il cui studio è essenziale per tutta la teoria.

Cominciamo dal ricordare alcune nozioni di calcolo integrale. Supponiamo di avere nel piano xy un'area A connessa [1]) racchiusa da uno o più contorni e siano $f(x, y)$, $\varphi(x,y)$ due funzioni

[1]) Un'area si dice connessa (o di un solo pezzo) quando, presi due punti qualunque a, b dell'area, si può andare da a a b per linee appartenenti interamente all'area.

dei punti dell'area, per le quali supponiamo verificate le condizioni seguenti: *tanto la f che la φ siano finite e continue in tutta l'area e inoltre la φ ammetta derivate parziali prime $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ pure finite e continue*. Tracciamo nell'area un arco di curva ordinaria qualunque $m\,n$, che percorriamo da m ad n. *Che cosa intenderemo per*

$$\int_{\text{arc } m\,n} f\,d\varphi\ ?$$

Lungo l'arco $m\,n$ le coordinate x, y di un punto variabile sono funzioni di una variabile, per es. dell'arco s della curva, che contiamo per semplicità dall'estremo m, ed esistono le derivate $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ finite e continue. La f e la φ sono pure, lungo $m\,n$, funzioni finite e continue di s e inoltre, per le ipotesi fatte, esiste ed è finita e continua la derivata $\frac{d\varphi}{ds}$. Ciò posto, se con S indichiamo la lunghezza dell'arco totale da m ad n, intenderemo che

$$\int_{\text{arc } m\,n} f\,d\varphi$$

significhi l'integrale definito ordinario

$$\int_{\text{arc } m\,n} f\,d\varphi = \int_0^S f\,\frac{d\varphi}{ds}\,ds.$$

È chiaro che, se invertiamo il senso d'integrazione, l'integrale cangia segno, cioè

$$\int_{\text{arc } m\,n} = -\int_{\text{arc } n\,m}.$$

Ma possiamo anche dare una definizione diretta di

$$\int_{\text{arc } m\,n} f\,d\varphi,$$

come limite di una somma, che è un'estensione di quella degli ordinari integrali definiti. Dividiamo per ciò l'arco $m\,n$ in intervalli parziali di lunghezze

$$\delta_1\,,\quad \delta_2\,,\quad \ldots\,,\quad \delta_r\,,$$

il cui numero r faremo poi crescere all' infinito, mentre ciascuno di essi dovrà tendere a zero, e formiamo la somma

$$\sum f_i\,\Delta\varphi_i\,,$$

dove f_i è uno qualunque dei valori che f assume nell' intervallo φ_i e $\Delta\varphi_i$ l'accrescimento che subisce φ nel passare dal primo al secondo estremo di δ_i. Se facciamo impiccolire indefinitamente, con una legge qualsiasi, i singoli intervalli δ_i, ingrandendo il loro numero all' infinito, la detta somma converge verso un limite determinato, indipendente dalla legge di divisione in intervalli e dai valori intermedi f_i scelti per la f, e questo limite coinciderà appunto coll' integrale sopra definito. La coincidenza delle due definizioni si riconosce facilmente osservando che, per una formola fondamentale di calcolo differenziale, si ha $\Delta\varphi_i = \delta_i\varphi'_i$, indicando φ'_i un *conveniente* valore intermedio della derivata $\dfrac{d\varphi}{ds}$ nell' intervallo δ_i, ed è quindi

$$\sum f_i\,\Delta\varphi_i = \sum \delta_i\,f_i\,\varphi'_i\,.$$

Ma, se indichiamo con $\bar{f}_i$ il valore di f nello stesso punto di δ_i in cui è preso il valore φ'_i, si ha

$$\lim \sum \delta_i\,\bar{f}_i\,\varphi'_i = \int_0^S f\,\frac{d\varphi}{ds}\,ds$$

e d'altra parte la differenza

$$\sum \delta_i\,f_i\,\varphi'_i - \sum \delta_i\,\bar{f}_i\,\varphi'_i = \sum \delta_i\,(\bar{f}_i - f_i)\,\varphi'_i$$

tende, come subito si vede, a zero, onde segue

2ª definizione

$$\lim \sum \delta_i\,f_i\,\varphi'_i = \int_0^S f\,\frac{d\varphi}{ds}\,ds\,.$$

In particolare intendiamo il significato di integrale curvilineo $\int f\,dx$; ma, a scanso di equivoci, conviene bene osservare che mentre nell' integrale definito ordinario il dx è sempre positivo, qui invece sarà dx positivo o negativo secondo che $\dfrac{dx}{ds}$ è positivo o negativo, cioè secondo che la curva d' integrazione, nel suo verso positivo, si allontana o si avvicina nel punto considerato all'asse delle y.

Supponiamo ora che sia $F(x, y)$ una funzione *limitata* [1]) in tutta l'area A e dividiamo l'area A in un certo numero di aree parziali

$$\sigma_1\,,\quad \sigma_2\,,\quad \ldots\,,\quad \sigma_n\,,$$

il cui numero facciamo poi crescere all' infinito, impiccolendo indefinitamente in ogni senso ciascuna area parziale (in modo cioè che preso un numero ε piccolo a piacere, da un certo punto in poi ciascuna area parziale σ_i possa essere contenuta in un cerchio di raggio ε), e costruiamo la somma

$$\sum F_i\,\sigma_i\,,$$

indicando con F_i uno qualunque dei valori che la F ha nell'area σ_i, od anche un valore semplicemente compreso fra il limite superiore e l' inferiore di F in σ_i. Se questa somma ha un limite, indipendente dalla legge di divisione in aree parziali e dai valori F_i scelti, questo limite si dice l' *integrale d'area*

$$\int F\,d\sigma\,.$$

[1]) Diciamo limitata la funzione quando tutti i suoi valori restano, in valore assoluto, minori di una quantità fissa.

È noto che, analogamente come per gli integrali definiti semplici, perchè si verifichino tutte le condizioni ora enunciate, basta che la somma

$$\sum D_i \, \sigma_i \, ,$$

dove D_i sta a significare l'oscillazione della funzione F nell'area σ_i, *per una particolare legge di divisione in aree parziali, abbia per limite zero.* Allora la funzione F si dice *integrabile superficialmente* nell'area. (Tutte le funzioni continue nell'area sono certo anche integrabili.)

Il modo più usuale di divisione in aree parziali è quello che adopera rettangoli coi lati paralleli agli assi coordinati, conducendo all'asse delle y e delle x parallele distanti l'una dalla successiva di Δx, Δy, dove Δx, Δy possono essere costanti od anche variabili, ma debbono tendere poi *simultaneamente* a zero. Allora la somma $\Sigma \, F_i \, \sigma_i$ diventa la somma doppia

$$\sum \sum F \, \Delta x \, \Delta y \, ,$$

che s'intende estesa non solo a tutti i rettangoli appartenenti interamente all'area, ma anche a quelli che solo in parte vi appartengono, essendochè, per l'alterazione così prodotta nella somma, non cangia, come si dimostra, il limite. L'integrale d'area si suole scrivere per ciò anche come integrale doppio

$$\int \int F \, (x, y) \, dx \, dy \, ;$$

e quando la funzione $F(x, y)$ sia integrabile linearmente sopra ogni parallela all'asse delle x (o delle y), l'integrale stesso si potrà riguardare come risultato di due integrazioni successive e scrivere

$$\int \int F \, (x, y) \, dx \, dy = \int dy \left(\int F \, (x, y) \, dx \right) . \tag{1}$$

Quanto ai limiti delle due successive integrazioni semplici rispetto ad x ed y, è da osservarsi che, eseguendo la integrazione rispetto ad x, la y resta fissa, cioè ci muoviamo lungo una parallela all'asse delle x, e l'integrale $\int F \, (x, y) \, d\, x$ dovrà decomporsi

in tante parti (integrali definiti ordinari) in quante parti la detta parallela risulta decomposta dai contorni dell'area.

Il risultato di questa integrazione, che è una certa funzione di y, deve poi integrarsi rispetto ad y fra i limiti estremi delle ordinate dell'area.

§ 28. — **Formola di Gauss.**

Nell'area piana connessa A, limitata da una o più curve chiuse, sia data la funzione $X \, (x, y)$ per la quale ammettiamo che siano soddisfatte le condizioni seguenti: la X sia in tutta l'area A, il contorno incluso, finita, continua e ad un sol valore e ammetta una derivata parziale rispetto a x, $\dfrac{\partial X}{\partial x}$ finita e continua in A come la X. Ammettiamo poi che le curve contorno dell'area siano curve ordinarie, dotate in ogni punto di una tangente, che varia con continuità al variare del punto di contatto, o tutto al più ammettano un numero finito di punti eccezionali, ove, pure esistendo una tangente a destra ed una a sinistra, queste non coincidono fra loro (punti angolari - vertici). Prendiamo allora a trasformare l'integrale doppio

$$\int \int \frac{\partial X}{\partial x} \, dx \, dy \, ,$$

esteso all'area A, in un integrale semplice, esteso al contorno. Per semplificare la dimostrazione, supponiamo dapprima che il contorno di A sia formato da un'unica curva chiusa tale che tutte le parallele all'asse delle x, solcanti l'area A, incontrino il contorno in due soli punti, uno d'entrata, che indicheremo con 1, e l'altro d'uscita 2 (fig. 4). Per la citata formola (1), abbiamo

$$\int\int_A \frac{\partial X}{\partial x} \, dx \, dy = \int dy \left(\int \frac{\partial X}{dx} \, dx \right)$$

e l' integrale semplice $\int \frac{\partial X}{\partial x}\, d\,x$ è esteso al tratto di retta parallela all' asse y

$$Y = y\,,$$

compreso fra i due punti 1, 2, sicchè

$$\int \frac{\partial X}{\partial x}\, dx = X_2 - X_1\,,$$

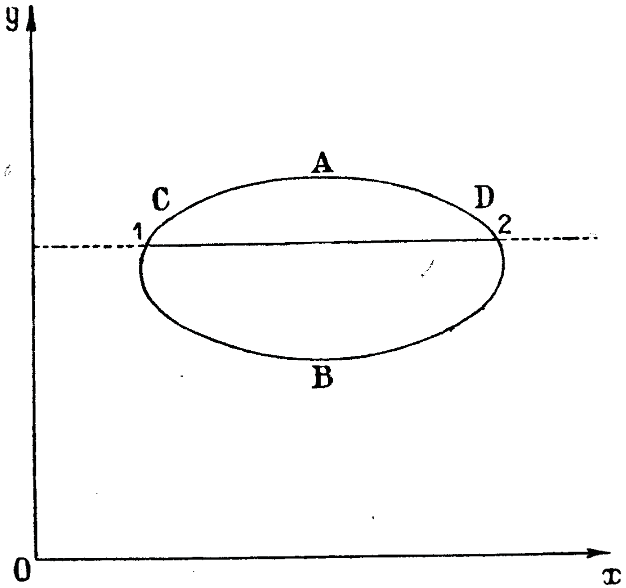


Fig. 4.

indicando X_1, X_2 i valori di X rispettivamente nei punti 1, 2 del contorno. Avremo dunque

$$\int\int_A \frac{\partial X}{\partial x}\, dx\, dy = \int (X_2 - X_1)\, dy = \int X_2\, dy - \int X_1\, dy\,.$$

I due integrali del secondo membro vanno estesi fra i valori estremi $y = b$, $y = a$ delle ordinate del campo corrispondenti ai

due punti B, A del contorno, nei quali la tangente è parallela all'asse delle x. Questi due punti dividono il contorno in due archi (ACB, ADB nella figura), il primo dei quali contiene tutti i punti d' ingresso nell'area, l'altro i punti di egresso. Ora, se indichiamo con ds l' elemento (positivo) d'arco del contorno corrispondente all' incremento *positivo* $d\,y$ dell' ordinata y, e con ξ denotiamo l'angolo che la normale al contorno, rivolta verso l' interno dell' area, forma colla direzione positiva dell'asse delle x, abbiamo

$$dy = \pm \cos \xi\, ds\,,$$

dovendosi adottare il segno superiore ove ξ è acuto, l' inferiore ove ξ è ottuso. Ora ξ è acuto nei punti 1 d' ingresso, ottuso nei punti 2 d'egresso ; possiamo quindi considerare i due integrali del secondo membro della (2) come integrali curvilinei estesi rispettivamente agli archi ADB, BCA ed abbiamo

$$\int X_1\, dy = \int_{BCA} X \cos \xi\, ds$$

$$\int X_2\, dy = -\int_{ADB} X \cos \xi\, ds$$

onde la (2) diventa

$$\boxed{\int\int_A \frac{\partial X}{\partial x}\, dx\, dy = -\int_s X \cos \xi\, ds\,,} \tag{1}$$

l' integrale del secondo membro essendo esteso al contorno completo dell'area. È bene osservare che in questa formola è affatto indifferente il senso secondo cui si percorre il contorno.

Dimostrata così la *formola fondamentale di Gauss* (1), per un' area che soddisfi alle condizioni restrittive imposte, facilmente la dimostriamo per un'area qualunque, il cui contorno offra inoltre eventualmente punti angolari. Sia dapprima un'area qualunque A, racchiusa da una o più curve $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots.$; potremo decomporre l'area A, coll'aggiunta di nuovi tratti di contorno, in tante aree parziali (come le aree da A_1 ad A_9 della fig. 5) tali che, per ciascuna di esse, ogni parallela all'asse delle x che la solca abbia un solo punto d'entrata ed un solo punto di uscita. Per ciascuna di queste aree varrà adunque la formola (1). Pensiamo scritte

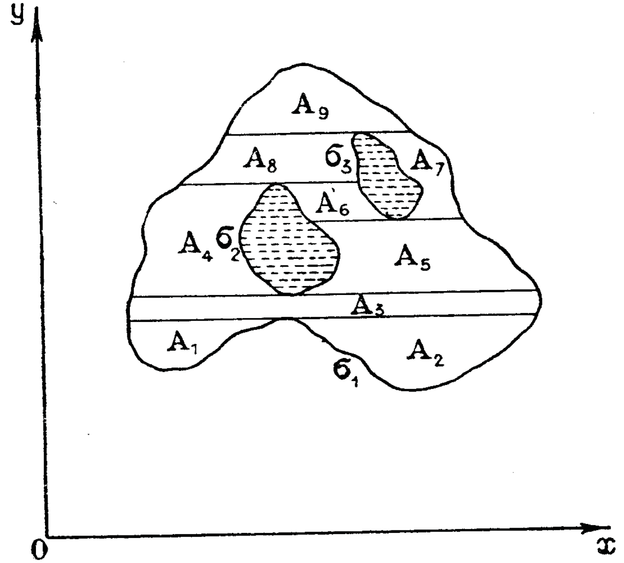


Fig. 5.

tutte queste formole e sommiamole, con che otteniamo nel primo membro l'integrale doppio

$$\int_A\int \frac{\partial X}{\partial x}\, dx\, dy\,,$$

esteso a tutta l'area A. Nel secondo membro ogni integrale $\int X \cos \xi\, ds$, esteso ad un tratto di contorno aggiunto, figura due volte con segno opposto, perchè ogni tale tratto separa due aree contigue, per le quali le normali nello stesso punto del contorno hanno verso opposto; d'altronde il contorno primitivo risulta diviso in tratti, ciascuno dei quali figura una ed una sola

volta, onde otteniamo la formola (1) di Gauss, estesa ad un'area qualunque.

In ciò che precede abbiamo fatto astrazione dagli eventuali punti angolari, che può offrire il contorno. La presenza di un numero finito di tali punti non modifica però affatto i risultati, come risulta dalle proprietà elementari della integrazione, potendosi eseguire la decomposizione del campo in striscie in guisa che da ogni punto angolare parta una retta del contorno di una striscia.

§ 29. — Altre formole di trasformazione.

Sia $Y(x, y)$ una funzione di x, y finita e continua nell'area A, incluso il contorno, che ammetta la derivata parziale $\frac{\partial Y}{\partial y}$ pure finita e continua. Indicando con η l'angolo che la normale positiva al contorno fa colla direzione positiva dell'asse y, avremo manifestamente, per la formola di Gauss:

$$(\mathrm{I}^*) \qquad \int_A\int \frac{\partial Y}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_s Y \cos \eta\, ds\,,$$

e sommando con (1):

$$(\mathrm{II}) \qquad \int_A\int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dx\, dy = -\int_s (X \cos \xi + Y \cos \eta)\, ds.$$

In queste formole (I), (I*), (II), il senso secondo con cui si percorre il contorno è, come già si è detto, del tutto indifferente.

Andiamo ora a fissare, con opportune convenzioni, il senso positivo del contorno, e potremo dare a queste formole fondamentali un diverso aspetto. Fissiamo per ciò che in ogni punto del contorno si riguardi come direzione positiva della tangente quella che giace, rispetto alla direzione positiva della normale (già fissata come volgente nell'interno dell'area), come la direzione positiva dell'asse delle x rispetto a quella dell'asse delle y. Nel modo ordinario d'orientazione degli assi, avremo dunque che per un osservatore collocato sul piano e che guardi, da un punto del contorno, verso la direzione positiva della tangente, l'area interna resterà alla sinistra. Riguarderemo allora come senso positivo del contorno quello concordante colla direzione positiva della tangente; il senso positivo di percorso sul contorno sarà per ciò quello che lascia l'area interna alla sinistra. Ne risulta che se l'area ha più contorni, uno esterno gli altri interni, l'esterno sarà percorso nel senso positivo delle rotazioni, gli interni nel senso opposto.

Da queste convenzioni segue che, se indichiamo con

$$\frac{dx}{ds}, \ \frac{dy}{ds}$$

le derivate di x, y prese nel senso positivo della tangente al contorno [1]) e con

$$\frac{dx}{dp}, \ \frac{dy}{dp}$$

[1]) Ricordiamo che, se U è una funzione di x, y, finita e continua colle sue derivate parziali $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, per derivata di U in un punto M e nella direzione segnata da una retta uscente da M, s' intende il limite del rapporto

$$\frac{U_{M'} - U_M}{\overline{M M'}}$$

che si ottiene spostando M in M' sulla retta e nel verso fissato e dividendo l' incremento subìto dalla funzione U, nel passaggio da M a M', per la lunghezza $M M'$ del tratto percorso, limite preso per il convergere di M' verso M. Se indichiamo con r la detta direzione, e con

$$\widehat{xr}, \quad \widehat{yr}$$

gli angoli (misurati nel verso positivo delle rotazioni) delle direzioni positive Ox, Oy colla r, per le derivate di x, y nella direzione di r, che indichiamo con $\frac{dx}{dr}$, $\frac{dy}{dr}$, abbiamo

$$\frac{dx}{dr} = \cos \widehat{(xr)}, \qquad \frac{dy}{dr} = \cos \widehat{(yr)}.$$

Per la derivata della funzione U, nella direzione r, abbiamo poi

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dr} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dr}.$$

quelle prese nel senso della normale interna, avremo

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{dy}{dp} \\ \frac{dx}{dp} &= -\frac{dy}{ds}. \end{aligned} \right.$$

E invero, indicando con t la direzione positiva della tangente, abbiamo

$$\frac{dx}{ds} = \cos \widehat{(xt)}, \qquad \frac{dy}{ds} = \cos \widehat{(yt)} = \operatorname{sen} \widehat{(xt)}.$$

$$\frac{dx}{dp} = \cos \widehat{(xp)} = -\operatorname{sen} \widehat{(xt)}, \qquad \frac{dy}{dp} = \cos \widehat{(yp)} = \cos \widehat{(xt)}.$$

Ciò posto, potremo scrivere la (II) anche così:

$$(\text{II}^*) \qquad \int_A\!\!\int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dx\, dy = -\int_s \left(X \frac{dx}{dp} + Y \frac{dy}{dp} \right) ds,$$

ovvero per le (3):

$$(\text{III}) \qquad \int_A\!\!\int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dx\, dy = \int_s (X\, dy - Y\, dx),$$

l' integrale curvilineo del secondo membro dovendo essere calcolato col percorrere il contorno nel verso positivo.

Supponiamo ora che per le funzioni X, Y, oltre all'esser soddisfatte le condizioni precedenti, sia soddisfatta in tutta l' area anche l'altra:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0,$$

la quale, come si sa, esprime che il binomio

$$X\, dy - Y\, dx$$

è un differenziale esatto. La formola (III), essendo nullo il primo membro, ci dà il teorema: *Se in un'area connessa A l'espressione*

$$X\,d\,y - Y\,d\,x$$

è un differenziale esatto, le funzioni X, Y essendo finite e continue in tutta l'area (incluso il contorno) e possedendo derivate parziali $\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial y}$ *pure finite e continue, l'integrale del differenziale esatto* $\int_s (X\,dy - Y\,dx)$, *esteso a tutto il contorno nel verso positivo* [1]), *è identicamente nullo.*

§ 30. — Ordine di connessione delle aree piane.

Per maggiore chiarezza delle considerazioni seguenti è utile che diamo alcune nozioni sulla *connessione* delle aree, limitandoci al caso semplice delle aree piane. In un'area piana connessa consideriamo una linea L, che non intersechi sè stessa (priva di nodi), e che vada da un punto A del contorno ad un altro punto B del contorno stesso, rimanendo in tutto il suo corso nell' interno dell'area, salvo che agli estremi A, B, ed immaginiamo eseguito nel piano un *taglio* lungo questa linea L; diremo che si è eseguito nell'area un *taglio semplice*. Nella nuova area che si ottiene, la quale potrà essere connessa o no, figureranno come nuove parti del contorno i due lembi del taglio L.

Diremo *semplicemente connessa* un' area piana quando qualunque taglio semplice, in essa eseguito, toglie la connessione dell'area. Se invece possono eseguirsi dei tagli senza rompere la connessione dell'area, diremo che l' area possiede una connessione multipla e l'*ordine* della connessione si valuterà per mezzo delle considerazioni seguenti.

È chiaro che in qualunque area piana con un contorno unico non si può eseguire alcun taglio senza rompere la connessione, e perciò una tale area è semplicemente connessa.

L' inversa è pur vera, giacchè se del contorno fanno parte due diverse curve chiuse a, b, un taglio eseguito da un punto di a

[1]) Se l'area ha un solo contorno, il senso del percorso può essere naturalmente qualunque.

Postulato

ad un punto di b non toglie la connessione. E invero i due lembi del taglio t si congiungono colle curve chiuse a, b in un unico nuovo contorno, seguendo il quale si può andare da un punto dell' un lembo di t al punto opposto sull'altro lembo. Per ciò, eseguito il

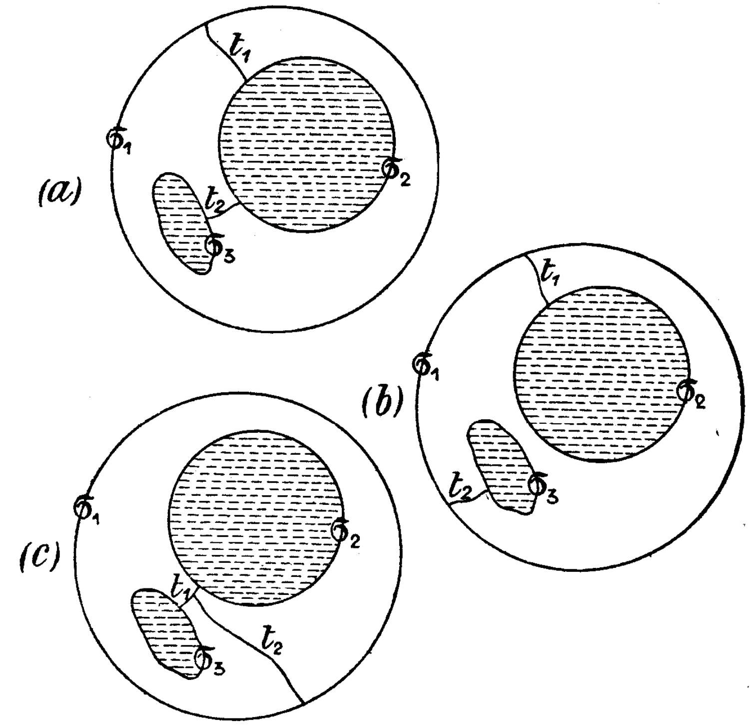


Fig. 6.

taglio t, non viene tolta la connessione fra le due regioni dell'area aderenti ai lembi di t; vediamo adunque che: *Ogni area piana a contorno unico è semplicemente connessa e viceversa*; ed inoltre: *in un'area pluriconnessa ogni taglio che abbia gli estremi su due contorni diversi non toglie la connessione e fa diminuire di uno il numero dei contorni.*

Ciò premesso, abbiasi un'area piana connessa (fig. 6), il cui contorno sia formato da n curve chiuse distinte $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. Se eseguiamo nell'area un taglio, p. es. da σ_1, a σ_2, l'area nuova è ancora connessa ed ha $n - 1$ contorni. In questa nuova area eseguiamo un secondo taglio fra due punti di contorni diversi e così di seguito. Dopo $n - 1$ tagli, la superficie che si ottiene avrà un solo contorno e sarà quindi semplicemente connessa. Dunque : *Un' area piana connessa con n contorni si può ridurre con $n - 1$ tagli, che non ne rompano la connessione, semplicemente connessa.* Una tale area si dice per ciò n volte connessa o *di ordine n di connessione*, valutando come 1 l'ordine di connessione per le aree semplicemente connesse.

È chiaro che agli $n - 1$ tagli, che rendono l'area semplicemente connessa, si potranno dare disposizioni diverse. Così per l'area triplamente connessa della figura, si potrà dare ai tagli t_1, t_2 la disposizione a), o la b), o la c).

Osserviamo poi che, descrivendo in un'area semplicemente connessa una curva chiusa σ priva di nodi, questa forma da sè stessa il contorno completo di un' area parziale (semplicemente connessa). Invece per le aree pluriconnesse, se descriviamo una curva chiusa σ avvolgente uno o più contorni interni, la curva σ non limita più, da sè sola, una regione dell'area.

§ 31. — Integrali di differenziali esatti.

Premesse queste brevi nozioni, ritorniamo al teorema alla fine del § 29. Se l'area A, in cui è dato il differenziale esatto

$$X\,dy - Y\,dx\,,$$

è semplicemente connessa, e descriviamo una curva σ chiusa *che dapprima non intersechi sè stessa*, la σ formerà il contorno completo di un'area parziale A' e si avrà perciò :

$$\int_\sigma (X\,dy - Y\,dx) = 0\,.$$

È facile vedere che il medesimo risultato vale anche se la curva chiusa σ interseca, quante volte si vuole, sè stessa. E infatti seguiamo la curva chiusa σ che parte da un punto M e vi ritorna, comunque intrecciandosi, e sia K il primo punto ove interseca sè stessa ; arrivati da M in K verremo a descrivere, muovendoci

sopra σ, a partire da K, una parte chiusa σ_1 di σ che non si interseca, e sarà dunque di per sè :

$$\int_{\sigma_1} (X\,dy - Y\,dx) = 0\,.$$

Possiamo dunque sopprimere questa parte e procedere sulla rimanente nel medesimo modo. Si ha quindi il teorema : *Nell' interno di un'area semplicemente connessa se si eseguisce lungo una curva chiusa σ, comunque intrecciata, l' integrale*

$$\int_\sigma (X\,dy - Y\,dx)$$

di un differenziale esatto (pel quale si suppongono soddisfatte le condizioni della fine del § 29), il risultato sarà sempre identicamente nullo.

Consideriamo ora invece una linea aperta $a\,c\,b$, che nell'area semplicemente connessa A vada da un punto a ad un punto b, comunque intrecciandosi ; facilmente vediamo che l' integrale

$$\int_{acb} (X\,dy - Y\,dx)$$

del nostro differenziale esatto dipende unicamente dai due punti estremi a, b del cammino d' integrazione. Consideriamo infatti un altro cammino d' integrazione $a\,c'\,b$, che riunisce i medesimi estremi e sia comunque foggiato. Percorrendo prima $a\,c\,b$ poi il cammino $b\,c'\,a$, rovesciato di $a\,c'\,b$, abbiamo una curva chiusa σ e perciò

$$\int_{acb} (X\,dy - Y\,dx) + \int_{bc'a} (X\,dy - Y\,dx) = 0\,,$$

cioè :

$$\int_{acb} (X\,dy - Y\,dx) = \int_{ac'b} (X\,dy - Y\,dx)\,.$$

il che appunto si voleva provare.

Poichè adunque l' integrale di $X\,dy - Y\,dx$, esteso ad un cammino che vada da a in b, dipende solo dagli estremi, potremo indicarlo senza ambiguità con

$$\int_a^b (X\,dy - Y\,dx)\,,$$

ovvero anche con

$$\int_{(x_1,\,y_1)}^{(x_2,\,y_2)} (X\,dy - Y\,dx)\,,$$

ponendo in evidenza le coordinate x_1, y_1; x_2, y_2, dei due estremi a, b.

Pensiamo ora fisso il primo estremo (x_1, y_1) e mobile il secondo, le cui coordinate indicheremo con x, y. L'integrale

$$\varphi\,(x,\,y) = \int_{(x_1,\,y_1)}^{(x,\,y)} (X\,dy - Y\,dx)$$

sarà una funzione di x, y ad un sol valore, finita e continua in tutta l'area, come subito si vede. Inoltre ammetterà le derivate parziali prime $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ pure finite e continue e date da

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\,Y\,, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = X\,,$$

sicchè il differenziale totale $d\,\varphi$ sarà appunto $d\,\varphi = X\,dy - Y\,dx.$

E invero abbiamo

$$\varphi\,(x + \Delta\,x, y) - \varphi\,(x, y) = \int_{x,\,y}^{x+\Delta x,\,y} (X\,dy - Y\,dx)$$

e possiamo seguire, per andare da x, y a $x + \Delta\,x$, y, il cammino parallelo all'asse x, almeno quando $\Delta\,x$ sia già sufficientemente piccolo. Avremo allora $d\,y = 0$ e

$$\varphi\,(x + \Delta x, y) - \varphi\,(x, y) = -\int_x^{x+\Delta x} Y\,(x, y)\,dx\,,$$

conveniente

onde, indicando con $\overline{Y}$ un valore di Y intermedio nel tratto, sarà

$$\frac{\varphi\,(x + \Delta\,x,\,y) - \varphi\,(x,\,y)}{\Delta\,x} = -\,\overline{Y}$$

e, passando al limite per $\Delta\,x = 0$, otterremo, a causa della continuità di Y:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\,Y\,(x,\,y)$$

e similmente

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = X\,(x,\,y).$$

Se l'area in cui si considera il differenziale esatto è più volte connessa, i risultati precedenti subiscono una modificazione, che è facile riconoscere. Nell'area n volte connessa eseguiamo per ciò $n - 1$ tagli t_1, t_2, ... t_{n-1} sì da renderla un'area A' semplicemente connessa e, per fissare le idee, supponiamo che i tagli t non si intersechino fra loro, ma p. es. riuniscano il contorno esterno σ_1 ai rispettivi contorni interni σ_2, σ_3, ..., σ_n. Nell'area tagliata A' l'integrale

$$\varphi\,(x,\,y) = \int_{(x_1,\,y_1)}^{(x,\,y)} (X\,dy - Y\,dx)$$

è una funzione ad un solo valore. Se confrontiamo i valori di φ in due punti opposti m, m' sui due lembi di un medesimo taglio t, valori che indichiamo con

$$\varphi_m\,,\quad \varphi_{m'}$$

vediamo che la differenza

$$\varphi_m - \varphi_{m'}$$

è costante lungo tutto il taglio. E invero, se n, n' sono due altri punti di fronte sui lembi di t, si ha

$$\varphi_m - \varphi_n = \int_n^m (X\,dy - Y\,dx),$$

$$\varphi_{m'} - \varphi_{n'} = \int_{n'}^{m'} (X\,dy - Y\,dx)\,;$$

questi due integrali

$$\int_n^m \, , \quad \int_{n'}^{m'}$$

possono calcolarsi lungo i lembi del taglio ed è perciò

$$\int_n^m = \int_{n'}^{m'} ,$$

cioè

$$\psi_m - \psi_n = \psi_{m'} - \psi_{n'} ;$$

ossia

modulo di periodicità

$$\psi_m - \psi_{m'} = \psi_n - \psi_{n'} \qquad c. \, d. \, d.$$

Questa differenza costante che passa tra i valori di ψ ai due lembi di t dicesi la *costante* o il *modulo di periodicità* relativo al taglio t. Esso è eguale all' integrale $\int (X\,dy - Y\,dx)$, esteso ad una curva chiusa che in A' vada da un punto di t all'opposto traversando una sola volta t [1]). Corrispondentemente agli $n-1$ tagli, avremo $n-1$ moduli di periodicità

$$\omega_1 , \quad \omega_2 , \quad \ldots , \quad \omega_{n-1} .$$

Vediamo ora quello che accade considerando l'area primitiva A e lasciandovi muovere liberamente il cammino d' integrazione. Ogni qualvolta il cammino attraversa un taglio, per es. da m ad m', il suo valore, confrontato con quello che avrebbe in m' se per andare da m in m' non si fossero attraversati tagli, cresce o diminuisce del corrispondente modulo di periodicità ω, secondo il senso dell'attraversamento. Se ne conclude che, se in un punto (x, y) si ottiene il valore ψ per l' integrale, seguendo un certo cammino, variando comunque il cammino si otterranno valori tutti della forma

$$\psi' = \psi + r_1\,\omega_1 + r_2\,\omega_2 + \ldots + r_{n-1}\,\omega_{n-1} ,$$

[1]) Se un taglio t viene attraversato da tagli successivi, ne risulterà diviso in tante parti, a ciascuna delle quali apparterrà un proprio modulo di periodicità.

dove le r sono numeri interi positivi o negativi. Aggiungiamo che, variando convenientemente il cammino, si possono fare acquistare ai numeri r_i valori affatto arbitrari.

In generale adunque, in un'area più volte connessa, l' integrale di un differenziale esatto ha infiniti valori, tutti differenti fra loro per multipli interi di periodi $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$. Se questi periodi sono fra loro indipendenti, nel senso del § 15, e sono in numero > 1, l' integrale avrà in ogni punto infiniti valori vicini fra loro quanto si vuole. Naturalmente però può accadere, che, nonostante la connessione multipla, l' integrale $\varphi(x, y)$ sia ancora una funzione ad un sol valore; ciò accadrà quando i moduli di periodicità siano tutti nulli.

Osserviamo in fine, che cangiando il sistema di tagli, cangeranno anche i moduli di periodicità, che diventeranno

$$\omega'_1 , \quad \omega'_2 , \quad \ldots , \quad \omega'_{n-1} ;$$

ma questi dovranno essere combinazioni lineari a coefficienti interi di

$$\omega_1 , \quad \omega_2 , \quad \ldots , \quad \omega_{n-1}$$

ed inversamente, onde segue che il determinante della corrispondente sostituzione lineare sarà l' unità.

§ 32. — **Nuove formole di trasformazione. – Formola di Green.**

Indichiamo con U, V due funzioni finite e continue nell'area A (incluso il contorno) che soddisfino inoltre alle condizioni seguenti, sempre beninteso il contorno incluso: 1ª U possegga derivate parziali del primo ordine finite e continue in A; 2ª la V possegga derivate parziali del primo e del secondo ordine finite e continue. Se poniamo allora

$$X = U \frac{\partial V}{\partial x} , \qquad Y = U \frac{\partial V}{\partial y} ,$$

saranno soddisfatte le condizioni del § 27, sotto le quali vale la formola (II*)

$$\int_A\int \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dx\,dy=-\int_s\left(X\frac{dx}{dp}+Y\frac{dy}{dp}\right)ds\,.$$

Questa, per le sostituzioni precedenti, diventa

$$\text{(IV)}\qquad \int_A\int U\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right\}dx\,dy+$$

$$\int_A\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}\,\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\,\frac{\partial V}{\partial y}\right)dx\,dy=-\int_s U\frac{\partial V}{\partial p}\,ds\,,$$

che adottando i simboli

$$\Delta_2 V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2},$$

$$\Delta\,(U,\,V)=\frac{\partial U}{\partial x}\,\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\,\frac{\partial V}{\partial y},$$

si scriverà anche

$$\text{(IV*)}\qquad \int_A\int U\Delta_2 V\,dx\,dy+\int_A\int\Delta(U,\,V)\,dx\,dy=-\int_s U\frac{\partial V}{\partial p}\,ds.$$

Ponendo in questa, come è lecito, $U=1$, otteniamo la formola notevole

$$\text{(V)}\qquad \int_A\int\Delta_2 V\,dx\,dy=-\int_s\frac{\partial V}{\partial p}\,ds$$

onde risulta in particolare il teorema: *Se la funzione $V\,(x,\,y)$ è nell'area A, incluso il contorno, finita e continua insieme alle derivate parziali prime e seconde che soddisfano all'equazione $\Delta_2 V=0$, sarà nullo l'integrale esteso al contorno dell'area della derivata della V rispetto alla normale al contorno.*

Si aggiunga che, se l'area è semplicemente connessa, e σ una curva chiusa qualunque nell'area, sarà sempre

$$\int_\sigma\frac{\partial V}{\partial p}\,d\sigma=0\,.$$

Viceversa si vede subito dalla (V) che se per una funzione V, l'integrale precedente esteso a qualunque curva chiusa σ è nullo, la V soddisferà in tutta l'area all'equazione

$$\Delta_2 V=0,$$

supposto naturalmente che la V sia finita e continua nell'area colle derivate parziali prime e seconde.

Supposto nuovamente che V soddisfi a tutte le condizioni del teorema precedente, facciamo nella (IV*) $U=V$, con che le condizioni imposte ad U saranno a più forte ragione soddisfatte, e otterremo la formola importante:

$$\text{(VI)}\qquad \int_A\int\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy=-\int_s V\frac{\partial V}{\partial p}\,ds\,.$$

Questa formola, giova ripeterlo, vale per ogni soluzione dell'equazione

$$\Delta_2 V=0,$$

che nell'area A, incluso il contorno, sia finita e continua insieme alle derivate prime e seconde.

In fine deduciamo dalla (IV*) una nuova formola, detta *formola di Green*, scambiando in essa U, V e sottraendo le due formole, il che dà:

$$\text{(VII)}\qquad \int_A\int(U\,\Delta_2 V-V\,\Delta_2 U)\,dx\,dy=\int_s\left(V\frac{\partial U}{\partial p}-U\frac{\partial V}{\partial p}\right)ds\,.$$

Green

Per la validità di questa formola occorre naturalmente che anche per U si verifichino le condizioni già enunciate per V, fino alle derivate seconde. In particolare se U, V, oltre al soddisfare queste condizioni, saranno soluzioni dell'equazione $\Delta_2 = 0$, avremo

$$\text{(VIII)} \qquad \int_s \left(V \frac{\partial U}{\partial p} - U \frac{\partial V}{\partial p} \right) ds = 0 .$$

§ 33. — Funzioni armoniche con derivate regolari al contorno.

Applicheremo le formole precedenti alla ricerca delle proprietà fondamentali delle soluzioni dell'equazione

$$\Delta_2 U = 0 ;$$

ma, per brevità di linguaggio, introdurremo le seguenti denominazioni. Se in un'area A la funzione U è ad un sol valore, finita e continua, incluso il contorno, e *nell' interno dell'area* possiede derivate prime e seconde finite e continue, e legate dalla relazione

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 ,$$

diremo che la U è una funzione *armonica* nell'area. Quando le condizioni per le derivate sono soddisfatte non solo all' interno ma anche sul contorno, diremo che la U possiede derivate regolari anche al contorno. Le formole (VI), (VIII) del paragrafo precedente saranno appunto applicabili nel caso di funzioni U, V armoniche nell'area, con derivate regolari al contorno.

Supponiamo che una funzione armonica V in un'area A, con derivate regolari al contorno, sia nulla su tutto il contorno dell'area. Applicando la (VI), coll'osservare che l' integrale del secondo membro è nullo, ne deduciamo

$V = 0$ sul contorno

$$\int_A \int \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right\} dx\, dy = 0 ,$$

onde segue che sarà in tutta l'area

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 , \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0 ,$$

e però V costante in tutta l'area. Ma, essendo V nulla al contorno, avremo a causa della continuità :

$$\boxed{V = 0}$$

in tutta l'area. Segue di qui l' importante teorema : *Due funzioni V_1, V_2 armoniche in un'area, con derivate regolari sul contorno, che coincidono sul contorno coincidono anche nell' interno.* E invero la differenza $V_1 - V_2$ è una funzione armonica nulla al contorno, e però nulla anche nell' interno.

Fra breve estenderemo questo teorema, togliendo la condizione delle derivate regolari al contorno.

Il risultato precedente può enunciarsi sotto altra forma dicendo : *I valori di una funzione armonica in un'area, con derivate regolari al contorno, sono pienamente determinati nell' interno, quando siano fissati i valori della funzione al contorno.*

Nasce quindi il problema di esprimere, per una tale funzione armonica, i valori nell' interno per mezzo dei valori sul contorno. Per preparare le formole a tale oggetto, premettiamo le osservazioni seguenti. Sia $M' \equiv (x', y')$ un punto fisso del piano ed $M \equiv (x, y)$ un punto variabile ; indichiamo con r la distanza, contata positivamente, del punto variabile dal punto fisso :

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} .$$

Se poniamo

$$V = \log r ,$$

intendendo il logaritmo preso nel senso aritmetico, in qualunque area piana, che non contenga il punto M', sarà $V = \log r$ una funzione armonica con derivate regolari al contorno, come si verifica immediatamente [1]).

Ciò premesso, consideriamo una funzione armonica U in un'area A, con derivate regolari al contorno, e proponiamoci di

[1]) Posto $z' = x' + i y'$, $z = x + i y$ la funzione V è la parte reale di $\log (z - z')$.

calcolarne il valore U' in un punto $M' \equiv (x'\ y')$ interno all'area. Fatto centro in M' descriviamo, internamente all'area, un cerchio di raggio ϱ, che faremo poi impiccolire indefinitamente e il cui contorno indichiamo con σ. Se togliamo dall'area A questo disco circolare, otteniamo un'area A', il cui contorno si compone del contorno primitivo s e della periferia σ del cerchio. In questa area A' le due funzioni

$$U\,,\ V = \log r$$

sono armoniche ed hanno derivate regolari al contorno. Potremo quindi applicare la formola (VIII) di Green ed avremo

$$\int_s \left(\log r\,\frac{\partial U}{\partial p} - U\,\frac{\partial \log r}{\partial p}\right) ds + \int_\sigma \left(\log r\,\frac{\partial U}{\partial p} - U\,\frac{\partial \log r}{\partial p}\right) d\sigma = 0.$$

Ma nell'ultimo integrale il primo termine è identicamente nullo, perchè durante l'integrazione $\log r$ è costante $= \log \varrho$ e, per una proprietà delle funzioni armoniche osservata al § 32:

$$\int_\sigma \frac{\partial U}{\partial p}\, d\sigma = 0$$ [1];

resta quindi

$$\int_s \left(\log r\,\frac{\partial U}{\partial p} - U\,\frac{\partial \log r}{\partial p}\right) ds = \int_\sigma U\,\frac{\partial \log r}{\partial p}\, d\sigma\,.$$

Nel secondo membro la derivata $\dfrac{\partial \log r}{\partial p}$ è presa nel senso crescente dei raggi vettori, rispetto al punto fisso M', e il suo valore sul contorno σ è dato da

$$\left(\frac{\partial \log r}{\partial p}\right)_\sigma = \frac{1}{\varrho}\,.$$

[1] Propriamente qui la derivata $\dfrac{\partial U}{\partial p}$ è presa secondo la normale esterna a σ, ma non differisce che per il segno dalla derivata secondo la normale interna.

D'altronde, indicando con θ l'anomalia di un punto variabile sopra σ, abbiamo

$$d\sigma = \varrho\, d\theta$$

e quindi la formola precedente può scriversi

$$\int_s \left(\log r\,\frac{\partial U}{\partial p} - U\,\frac{\partial \log r}{\partial p}\right) ds = \int_0^{2\pi} U_\sigma\, d\theta\,, \tag{4}$$

intendendo che U_σ denotino i valori di U sulla periferia σ. La formola (4) vale comunque piccolo si prenda il raggio ϱ del cerchio; ma notiamo che il primo membro è evidentemente indipendente da ϱ, e tale dovrà quindi essere anche il secondo membro. Per calcolarne il valore osserviamo che, essendo U' il valore di U nel centro, possiamo scrivere

$$\int_0^{2\pi} U_\sigma\, d\theta = 2\pi U' + \int_0^{2\pi} (U_\sigma - U')\, d\theta\,. \tag{5}$$

Facendo impiccolire il raggio ϱ del cerchio, possiamo rendere, a causa della continuità di U in M', piccolo quanto si vuole il valore assoluto di $U_\sigma - U'$ su tutta la periferia σ e però anche quello dell'integrale

$$\int_0^{2\pi} (U_\sigma - U')\, d\theta\,.$$

Se ne conclude che questo integrale, essendo indipendente per la (4) da ϱ, è necessariamente nullo, onde risulta

$$\int_0^{2\pi} U_\sigma\, d\theta = 2\pi U'. \tag{6}$$

Dopo di ciò la formola (4) diventa:

$$\boxed{U' = U(x',\, y') = \frac{1}{2\pi}\int_s \left(\log r\,\frac{\partial U}{\partial p} - U\,\frac{\partial \log r}{\partial p}\right) ds\,.} \tag{IX}$$

e dà U nel punto M' interno all'area, noto il valore di U sul contorno

§ 34. — Funzione di Green.

La (IX) ci dà i valori U nell' interno, espressi per i valori che prendono sul contorno la funzione U *e la sua derivata normale* $\frac{\partial U}{\partial p}$. Come si vede, lo scopo che ci eravamo proposti non è del tutto raggiunto, ma restano ancora da eliminare, se è possibile, dalla (IX) i valori al contorno di $\frac{\partial U}{\partial p}$. Ciò si potrà fare, come ora ci proponiamo di mostrare, quando si sappia risolvere il problema che ci occupa in un certo caso particolare. Si indichi con φ una funzione armonica in tutta l'area con derivate regolari al contorno; si avrà per la (VIII):

funzione di Green

$$\int_s \left(\varphi \frac{\partial U}{\partial p} - U \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right) ds = 0$$

e la (IX) potrà scriversi anche:

$$U' = \frac{1}{2\pi} \int_s \left\{ (\varphi + \log r) \frac{\partial U}{\partial p} - U \frac{\partial (\log r + \varphi)}{\partial p} \right\} ds .$$

Se la funzione armonica φ è dunque tale che si abbia su tutto il contorno dell'area

$$(\varphi + \log r)_s = 0 ,$$

resterà

$$U' = -\frac{1}{2\pi} \int_s U \frac{\partial (\log r + \varphi)}{\partial p} ds ,$$

formola che risolve il problema proposto. Una tale funzione φ, se esiste, è unica pei teoremi sopra dimostrati; essa dicesi la *funzione di Green* relativa al punto M'. Le condizioni che la determinano sono: 1° *di essere una funzione armonica nell'area, con derivate regolari al contorno*; 2° *di assumere sul contorno i valori* $-\log r$,

essendo r la distanza di un punto mobile sul contorno da un punto fisso M' nell' interno.

Quando per tutti i punti dell'area A esista e si sappia determinare la funzione di Green, la formola (X) serve a calcolare i valori, nell' interno, di ogni funzione U armonica, con derivate regolari al contorno, per mezzo dei valori U_s al contorno.

Un caso semplice, in cui riesce subito la determinazione della funzione di Green, è quello di un'area circolare. Se il punto M' è nel centro, la funzione di Green si riduce alla costante $-\log R$ (R raggio). Quando M' non è nel centro si consideri il suo coniugato armonico M'', che è esterno al cerchio, e si indichi con r' la distanza di un punto mobile da M''. Il rapporto $\frac{r}{r'}$ è una costante k lungo la periferia del cerchio e la funzione di Green sarà data da

$$\varphi = -\log r' - \log k .$$

Invero essa è armonica con derivate regolari anche sul contorno, giacchè il punto M'' da cui sono contate le distanze r' è esterno; di più sulla circonferenza si riduce a $-\log r$.

§ 35. — Massimi e minimi delle funzioni armoniche.

Teorema della media

Togliendo ora le condizioni relative alle derivate al contorno, supporremo soltanto che la funzione U sia armonica nell' area A che si considera e cominceremo dal dimostrare il teorema: *In ogni disco circolare, tutto interno all'area, il valore che la funzione armonica U ha nel centro è la media dei valori che la funzione stessa assume sul contorno del disco.*

In un tale disco la funzione armonica U ha derivate regolari sul contorno e possiamo applicare la formola (IX), situando il punto M' nel centro. Ma sul contorno del disco $\log r$ è costante, onde, come già sopra si è osservato, il primo integrale nel secondo membro della (IX) è nullo; e poichè inoltre

$$\left(\frac{\partial \log r}{\partial p}\right) = -\frac{1}{R},$$

essendo R il raggio del cerchio, otteniamo

$$U' = \frac{1}{2\pi R}\int_s U_s\, ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_s\, d\theta\,,$$

il che dimostra il teorema [1]).

La funzione U essendo continua in tutta l'area A, incluso il contorno, avrà ivi un massimo M ed un minimo m, e vi sarà almeno un punto nell' interno, o sul contorno, nel quale assumerà

[1]) Si può osservare che la notevole proprietà espressa da questo teorema è caratteristica delle funzioni armoniche e propriamente sussiste la proposizione seguente: *Se una funzione U (x, y) è finita e continua, insieme alle derivate parziali prime e seconde in un' area A, e di più gode della proprietà di assumere nel centro di ogni disco circolare C, tutto interno all'area, la media dei valori che ha sul contorno del disco, si avrà necessariamente in tutta l'area $\Delta_2 U = 0$.*

Si consideri infatti un tale disco circolare C di raggio R, il cui contorno indichiamo con σ, e sia U' il valore della funzione nel centro; avremo per ipotesi:

$$U' = \frac{1}{2\pi R}\int_\sigma U_\sigma\, d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_\sigma\, d\,\theta\,.$$

Descriviamo un circolo C_1, di contorno σ_1, concentrico ed interno a C, il cui raggio indichiamo con $R - h$, essendo h una quantità positiva piccola ad arbitrio; avremo ancora

$$U' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_{\sigma_1}\, d\theta\,.$$

onde

$$\int_0^{2\pi}(U_\sigma - U_{\sigma_1})\, d\theta = 0.$$

Dividendo per h e passando al limite per $h \Rightarrow 0$, coll'osservare che la U possiede derivate prime continue, ne deduciamo $\int_\sigma \frac{\partial U}{\partial \nu}\, d\sigma = 0$, dopo di che, dalla formola (5), § 32, discende subito la verità della proposizione enunciata.

effettivamente il valore massimo M ed uno almeno nel quale assumerà il valore minimo m. Ora dimostriamo che: *Il massimo ed il minimo di una funzione armonica, non costante, non possono mai aver luogo nell' interno dell'area e sono quindi presi dalla funzione sul contorno dell' area.*

Suppongasi al contrario che in un punto P *interno* al campo la U assuma il valore massimo M (od il minimo m). Descriviamo col centro in P un disco circolare tutto interno all'area. Il valore M (ovvero m) che ha luogo nel centro, è, pel teorema sopra dimostrato, la media dei valori sulla periferia e poichè tutti questi valori sono $\leq M$ (ovvero $\geq m$), se ne conclude che dovrà sempre verificarsi il segno d' uguaglianza [1]), cioè su tutta la periferia, e però anche nell' interno del disco, la funzione U sarà costante ed eguale al valore massimo M (o al minimo m). Ma allora è facile vedere che in qualunque punto Q interno all'area la U sarà sempre eguale a M (o ad m). E infatti congiungiamo P con Q, mediante una linea L *tutta interna* all'area, e prendiamo un cerchio di raggio r così piccolo che, ovunque si ponga il centro del disco sulla linea L, il disco rimanga tutto interno all'area [2]).

Potremo descrivere un numero finito di questi dischi, di cui il primo e l' ultimo abbiano i centri rispettivamente in P, Q e ciascuno abbia il centro entro il precedente. Applicando successivamente il risultato ora ottenuto, vediamo che nel primo disco la U è sempre eguale a M e quindi, avendo il valore M nel centro del secondo disco, serba in tutto il secondo disco il medesimo

[1]) La formola

$$U' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_s\, d\theta\,,$$

applicata al nostro disco, può scriversi infatti

$$\int_0^{2\pi}(M - U_s)\, d\theta = 0$$

e poichè la differenza $M - U_s$ è sempre positiva o nulla, se ne conclude che dovrà sempre esser nulla.

[2]) Basta prendere r più piccolo della minima distanza dei punti di L dal contorno dell'area.

valore M, medesimamente pel terzo, quarto ecc. onde avrà il valore M anche nel punto finale Q, *c. d. d.*

Dal teorema fondamentale così dimostrato risulta: *Se con M, m si indicano il massimo ed il minimo valore che una funzione armonica assume sul contorno dell'area, questi saranno pure il massimo ed il minimo della funzione in tutta l'area, ed anzi ogni valore nell' interno sarà compreso fra M e m, gli estremi esclusi.*

§ 36. — Problema di Dirichlet.

Le proprietà ora dimostrate per le funzioni armoniche conducono ad estendere i teoremi d' unicità del § 33, togliendo le condizioni per le derivate al contorno. E infatti supponiamo che una funzione U armonica in un'area sia costante sul contorno; allora il massimo ed il minimo al contorno coincidono in questo unico valore e però la funzione assumerà in tutto l' interno dell'area il medesimo valore costante.

Ne risulta quindi il teorema: *Due funzioni armoniche in un'area, che coincidono sul contorno, coincidono anche nell' interno dell'area.*

In altre parole: i valori che una funzione armonica ha sul contorno di un'area determinano univocamente i valori della funzione nell' interno. Di qui nasce la questione se tali valori al contorno possano darsi arbitrariamente. Enunciamo sotto forma più precisa la questione, che costituisce il così detto *problema di Dirichlet*, così:

Sul contorno di un'area piana connessa sono assegnati valori arbitrari, costituenti per ciascuna curva del contorno una catena finita e continua di valori. Si domanda di costruire una funzione armonica nell'area che sul contorno assuma i valori assegnati.

Riemann dimostrò che il problema di Dirichlet ammette sempre una soluzione [1]) e questo risultato pose a fondamento della sua *Teoria delle funzioni Abeliane* [2]).

Ma la dimostrazione data da Riemann, che parte da considerazioni di minimo di integrali doppi, manca di rigore, come Weier-

[1]) Che la soluzione, se esiste, debba essere unica si è già sopra dimostrato.

[2]) RIEMANN'S WERKE, *Theorie der Abel'schen Functionen*, § 3.

strass osservò, in un punto fondamentale. Soltanto una lunga serie di ricerche posteriori, dovute principalmente a Neumann ed a Schwarz, ha posto fuori di dubbio che, almeno sotto certe limitazioni rispetto alla natura del campo, si possono effettivamente dare ad arbitrio i valori di una funzione armonica sul contorno dell' area e così l' intera teoria, edificata da Riemann, ha acquistato solide fondamenta.

Noi non possiamo qui addentrarci nello studio del problema generale di Dirichlet e solo ci limiteremo a risolverlo nel caso di un campo circolare, caso che riesce relativamente facile. Potremmo servirci a tale scopo della funzione di Green, di cui al paragrafo precedente abbiamo già dimostrata l'esistenza e trovata l'espressione per l'area circolare; ma preferiamo esporre un altro metodo, dovuto a Neumann, i cui principî hanno il vantaggio di applicarsi a casi molto più estesi.

§ 37. — Formole di Gauss relative all' integrale $\frac{1}{2\pi}\int_s \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} ds$.

Supponiamo dapprima un' area qualunque A, ed indicando con r la distanza di un punto mobile da un punto M' *fisso nell' interno*, proponiamoci di calcolare il valore dell' integrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_s \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} ds,$$

esteso al contorno dell'area. Basta perciò fare nella formola (IX) a pagina precedente, che vale per ogni funzione armonica U con derivate regolari al contorno,

$$U = 1.$$

Ne deduciamo la formola di Gauss

$$\frac{1}{2\pi}\int_s \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} ds = 1. \tag{7}$$

Supponiamo ora invece che il punto M', da cui si contano le distanze r, sia *esterno* all'area. Allora $\log\left(\frac{1}{r}\right)$ è una funzione armonica nell'area, con derivate regolari al contorno, e si ha per ciò

$$\frac{1}{2\pi}\int_s \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} = 0 \,. \tag{8}$$

Prima di procedere alla deduzione di una terza formola importante per il seguito, osserviamo un significato geometrico semplice della funzione $\frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial p}$ al contorno. Per ciò dalla formola

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$$

deduciamo

$$r\frac{\partial r}{\partial p} = (x - x')\frac{\partial x}{\partial p} + (y - y')\frac{\partial y}{\partial p} \,,$$

indi

$$\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} = \frac{1}{r}\left\{\frac{x' - x}{r}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{y' - y}{r}\frac{\partial y}{\partial p}\right\}.$$

La quantità fra parentesi è il coseno dell'angolo che la direzione $M M'$, nel verso dal punto mobile al punto fisso, fa colla direzione della normale interna; indicando quest'angolo con $\widehat{rp}$, abbiamo dunque:

$$\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} = \frac{\cos(\widehat{rp})}{r} \,. \tag{9}$$

Se pel punto M del contorno, e tangenzialmente a questo, si conduce il circolo che passa per M' e se ne indica con R il raggio, si avrà

$$\frac{\cos(\widehat{rp})}{r} = \pm\frac{1}{2R} \,,$$

secondo che l'angolo $\widehat{rp}$ è acuto od ottuso.

Ciò premesso, domandiamo quale valore avrà il solito integrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_s \frac{\partial \log \frac{1}{r_0}}{\partial p}\, ds$$

quando il punto M_0, da cui si contano le distanze, che ora indicheremo con r_0, si trovi sul contorno. In primo luogo si osservi che la formola (9) ci dà

$$\frac{\partial \log \frac{1}{r_0}}{\partial p} = \frac{\cos(\widehat{r_0 p})}{r_0}$$

e la funzione da integrarsi lungo il contorno è ancora dappertutto finita e continua salvo ai punti angolari del contorno, dove avrà discontinuità di prima specie e salvo inoltre *eventualmente* al punto M_0 ove potrà presentarsi qualche singolarità se in M_0 la curva non ha circolo osculatore. In ogni caso il nostro integrale

$$\int_s \frac{\partial \log \frac{1}{r_0}}{\partial p}\, ds$$

potrà essere calcolato come limite dell'integrale esteso a tutto il contorno, asportando un piccolo intorno di M_0. Supponiamo, per maggiore generalità, che il punto M_0 sia un punto angolare del contorno e le tangenti a destra e sinistra formino l'angolo $\alpha\pi$, sicchè sarà $\alpha = 1$ se M_0 è un punto ordinario. Fatto centro in M_0 con un raggio piccolissimo ϱ, descriviamo un cerchio σ e togliamo dall'area A la parte interna al cerchio; avremo così un'area A' limitata dalla parte s' di contorno s esterna al cerchio e da un piccolo arco σ di questo cerchio. Ora, poichè M_0 è esterno all'area A', si avrà per la (8):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{s'} \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p}\, ds + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p}\, d\sigma = 0 \,.$$

Ma il secondo integrale, come già altra volta abbiamo visto, può scriversi

$$-\frac{1}{2\pi}\int_\sigma d\theta\,,$$

e all' impiccolire indefinito di ϱ converge verso

$$-\frac{1}{2\pi}\,a\pi = -\frac{a}{2}\,,$$

quindi avremo

$$\lim \frac{1}{2\pi}\int_{s'} \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p}\,ds = \frac{a}{2}\,,$$

ossia

(10) $$\frac{1}{2\pi}\int_{s} \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p}\,ds = \frac{a}{2}\,.$$

È questa la terza formola che volevamo stabilire. Si osserverà che se M_0 è un punto ordinario, cioè $a = 1$, l' integrale ha il valore $\frac{1}{2}$ che è la media dei valori relativi al caso di un punto M' interno ed al caso di M' esterno.

§ 38. — Studio dell' integrale $\frac{1}{\pi}\int_s U\,\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p}\,ds$.

Il metodo che ora passiamo ad esporre per la risoluzione del problema di Dirichlet nel caso del cerchio si fonda sullo studio di quella parte dell' integrale esteso al contorno, nel secondo membro della formola (IX), pag. 112, che contiene i valori prescritti della funzione al contorno. Le formole che stabiliremo nel presente paragrafo valgono non solo nel caso del cerchio, ma anche per qualunque area semplicemente connessa, il cui contorno

volga costantemente la sua concavità verso l' interno (contorno di Neumann) e servono appunto di fondamento alla risoluzione del problema di Dirichlet per ogni tale area.

Supponiamo data sul contorno del cerchio una successione U di valori, che assoggettiamo alla sola condizione di formare una catena *finita e continua*, e indicando con r le distanze dei punti del contorno da un punto $M' \equiv (x'\ y')$ interno dell'area, studiamo il modo di comportarsi della funzione

$$\psi(x', y') = \frac{1}{\pi}\int_s U\,\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p}\,ds\,.$$

Intanto, se consideriamo un'area A' tutta interna al cerchio, ed in questa facciamo muovere il punto M', la funzione sotto il segno integrale

$$\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p}$$

è una funzione di x', y' sempre finita e continua che ammette, rispetto ad x', y', le derivate parziali di ordine tanto elevato quanto si vuole e soddisfa all'equazione

$$\Delta'_2 = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} = 0.$$

Per le note proprietà degli integrali definiti, e per le regole di derivazione sotto il segno, abbiamo dunque: *In qualunque area A' tutta interna al cerchio la funzione $\psi(x', y')$ è finita e continua, colle sue derivate parziali di tutti gli ordini, e soddisfa all'equazione*

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2} = 0.$$

Vogliamo ora esaminare (ed è questo il punto essenziale della ricerca) quello che accade della funzione armonica $\psi(x', y')$, quando il punto $M' = (x', y')$, dall' interno del cerchio, si accosta indefinitamente ad un punto M_0 della periferia. Perciò, indicando con U_0

Occorre dimostrare che $\psi(x',y') \to \psi(x_0,y_0)$

il valore di U in M_0, e sottraendo da $\psi(x', y')$ la costante $2\,U_0$, osserviamo che per la formola (7) di Gauss (pag. 118) si ha

$$\psi(x', y') - 2\,U_0 = \frac{1}{\pi}\int_s (U - U_0) \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} ds$$

e prendiamo a studiare il modo di comportarsi dell' integrale del secondo membro quando il punto M' si accosta indefinitamente verso M_0. Se con r_0 denotiamo le distanze dei punti dell'area dal punto M_0 fisso sulla periferia, la funzione

$$(U - U_0) \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p}$$

sarà finita e continua su tutto il contorno, anche in M_0 (§ 37) e potremo considerare l' integrale definito

$$\frac{1}{\pi}\int_s (U - U_0) \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p} ds.$$

Sarà questo, come ora dimostreremo, il valor limite verso cui convergerà l' integrale

$$\frac{1}{\pi}\int_s (U - U_0) \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} ds,$$

quando M' si muoverà verso M_0; si avrà cioè, come scriveremo:

$$\lim \frac{1}{\pi}\int_s (U - U_0) \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} ds = \tag{11}$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_s (U - U_0) \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p} ds.$$

Dimostreremo anzi di più che questa convergenza ha luogo *superficialmente in egual grado*, che cioè, preso un numero positivo ε piccolo a piacere, si può fare un intorno superficiale di M_0 così piccolo che, muovendosi M' comunque in quest' intorno, la differenza dei due integrali

$$\frac{1}{\pi}\int_s (U - U_0) \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} ds - \frac{1}{\pi}\int_s (U - U_0) \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p} ds$$

si serbi sempre, in valore assoluto, minore di ε.

Per questo cominciamo dal ricordare che, per la formola (9) del paragrafo precedente, pag. 119, la quantità

$$\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} = \frac{\cos\,(\widehat{rp})}{r} \quad > 0$$

è sempre positiva, perchè nel caso del cerchio, e più in generale di un contorno qualunque di Neumann, l'angolo $\widehat{r\,p}$ è sempre acuto e lo stesso vale manifestamente dell'altra

$$\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p} \quad > 0$$

Ora cominciamo dal prendere sulla periferia un intorno s' di M_0 tanto piccolo che, essendo ε_1 una quantità positiva prefissata, piccola quanto si vuole, si abbia in tutto s'

$$|\,U - U_0\,| < \varepsilon_1,$$

ciò che è sempre possibile, a causa della supposta continuità dei valori U al contorno. Indicando poi con s'' tutta la parte rimanente della periferia, decomponiamo i nostri due integrali così:

$$
(12)\quad
\begin{cases}
\displaystyle \frac{1}{\pi}\int_s (U - U_0) \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} ds = \\
\displaystyle = \frac{1}{\pi}\int_{s'} (U - U_0) \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} ds + \\
\displaystyle + \frac{1}{\pi}\int_{s''} (U - U_0) \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} ds \\
\\
\displaystyle \frac{1}{\pi}\int_s (U - U_0) \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p} ds = \\
\displaystyle = \frac{1}{\pi}\int_{s'} (U - U_0) \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p} ds + \\
\displaystyle + \frac{1}{\pi}\int_{s''} (U - U_0) \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p} ds .
\end{cases}
$$

Pei due primi integrali dei secondi membri, essendo come si è detto

$$
\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p}, \quad \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p}
$$

sempre positivi, si ha:

$$
\left| \frac{1}{\pi}\int_{s'} (U - U_0) \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} ds \right| <
$$

$$
< \frac{\varepsilon_1}{\pi}\int_{s'} \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} ds < \frac{\varepsilon_1}{\pi}\int_{s} \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} ds
$$

e per la formola (7) di Gauss

$$
\left| \frac{1}{\pi}\int_s (U - U_0) \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} ds \right| < 2\,\varepsilon_1 .
$$

Similmente si troverà per la (10)

$$
\left| \frac{1}{\pi}\int_{s'} (U - U_0) \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p} ds \right| < \varepsilon_1 .
$$

ammesso che M_0 sia ordinario)

Dalle (12) deduciamo quindi per sottrazione

$$
(13)\quad
\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{\pi}\int_s (U - U_0) \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} ds - \right. \\
&\left. - \frac{1}{\pi}\int_s (U - U_0) \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p} ds \right| < 3\,\varepsilon_1 + \\
&+ \left| \frac{1}{\pi}\int_{s''} (U - U_0) \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} ds - \right. \\
&\left. - \frac{1}{\pi}\int_{s''} (U - U_0) \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p} ds \right| ,
\end{aligned}
$$

la quale formola vale ancora dovunque sia M' nell' interno.

Ma ora facciamo un piccolo intorno superficiale di M_0 in guisa che la parte del suo contorno appartenente alla periferia del cerchio sia *tutta interna* a s'. Allora, muovendosi M' in quest' intorno, le sue distanze dai punti dell'arco s'' d' integrazione si mantengono sempre superiori a una quantità fissa e, se impiccoliamo sufficientemente quest' intorno, la differenza

$$
\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} - \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p} = \frac{\cos\,(\widehat{rp})}{r} - \frac{\cos\,(\widehat{r_0 p})}{r_0}
$$

potrà rendersi *lungo tutto l'arco s''* piccola quanto si vuole. Ne segue che, serbandosi $U - U_0$ sempre finita, anche la differenza di integrali nel secondo membro della (13) può rendersi inferiore alla quantità che più ci piace, per es. ad ε_1; il secondo membro della (13) sarà allora inferiore a $4\varepsilon_1$, e posto $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{4}$ avremo, come si voleva

$$\left| \frac{1}{\pi}\int_s (U - U_0) \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} ds - \frac{1}{\pi}\int_s (U - U_0) \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p} ds \right| < \varepsilon .$$

§ 39. — **Risoluzione del problema di Dirichlet pel campo circolare.**

Applichiamo al caso del cerchio la formola (11), che abbiamo dimostrata nel caso generale di un contorno di Neumann. Essa può scriversi anche così:

$$\lim \frac{1}{\pi}\int_s U \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} ds = U_0 + \frac{1}{\pi}\int_s U \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p} ds ;$$

ma nel caso attuale, se indichiamo con R il raggio del cerchio, abbiamo

$$\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p} = \frac{\cos\,(\widehat{r_0\, p})}{r_0} = \frac{1}{2R} ,$$

indi

$$\frac{1}{\pi}\int_s U \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p} ds = \frac{1}{2\pi R}\int_s U\, ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U\, d\theta ,$$

$ds = R\,d\theta$

per cui risulta

$$\lim \left\{ \frac{1}{\pi}\int_s U \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} ds - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U\, d\theta \right\} = U_0 .$$

La funzione

$$\text{(14)} \qquad \boxed{u\,(x',\ y') = \frac{1}{\pi}\int_s U \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} ds - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U\, d\theta}$$

è quindi armonica nell'area circolare, ed avvicinandosi al contorno, tende ai valori prefissati.

La formola (14) *risolve adunque, per un campo circolare, il problema di Dirichlet.*

Possiamo dare a questa formola un altro aspetto, introducendo coordinate polari. Siano $(\varrho',\ \theta')$ le coordinate polari di M' e (ϱ, θ) quelle di un punto M mobile nell'area. Avremo

$$r^2 = \varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho' \cos\,(\theta - \theta') ,$$

quindi

$$- r\frac{\partial r}{\partial p} = \varrho - \varrho' \cos\,(\theta - \theta') ,$$

onde

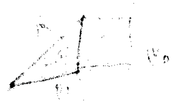
$$\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} = \frac{\varrho - \varrho' \cos\,(\theta - \theta')}{\varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho' \cos\,(\theta - \theta')}$$

e sostituendo nella (14) il valore di questa derivata al contorno, avremo:

$$u(\varrho', \theta') = \frac{1}{\pi}\int_s U \frac{R - \varrho' \cos\,(\theta - \theta')}{R^2 + \varrho'^2 - 2R\varrho' \cos\,(\theta - \theta')} ds - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U\, d\theta ,$$

che possiamo scrivere anche

$$(14^*) \qquad \boxed{u\,(\varrho'\ \theta') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U \frac{R^2 - \varrho'^2}{R^2 + \varrho'^2 - 2R\varrho' \cos\,(\theta - \theta')} d\theta} \quad \text{Poisson}$$



numerabile?

In tutto quello che si è detto fin qui si è supposto che i valori U, assegnati al contorno, formino una catena finita e continua. Ma possiamo ora facilmente spingere più in là la ricerca e considerare il caso in cui i valori U dati al contorno, pur mantenendosi sempre inferiori ad una quantità fissa, presentano discontinuità di prima o seconda specie in un numero finito di punti, ovvero anche in un gruppo infinito di punti, purchè sia *di prima specie* [1]). Domandiamo allora se si può costruire nell' area circolare una funzione u, *i cui valori si serbino tutti inferiori a un numero fisso*, che sia armonica in ogni area interna al cerchio, ed avvicinandosi al contorno verso i punti di continuità della catena U, tenda con continuità verso questi valori, mentre nessuna condizione imponiamo per l'avvicinarsi dall'interno verso i punti di discontinuità. In tali condizioni dimostriamo anzi tutto che, se la funzione u esiste, essa è unica [2]) ed è ancora data dalla formola (14), o (14*). Descriviamo infatti un cerchio s_1 concentrico, con raggio $R_1 < R$, ma vicino ad R quanto si vuole sì da includere il punto (ϱ', θ'). Indicando con U_{s_1} i valori di u sul contorno s_1, potremo applicare al cerchio minore la formola (14*) ed avremo

$$u(\varrho', \theta') = \frac{1}{2\pi} \int_s U_{s_1} \frac{R_1^2 - \varrho'^2}{R_1^2 + \varrho'^2 - 2 R_1 \varrho' \cos(\theta - \theta')} d\theta .$$

Questa formola vale comunque R_1 sia vicino ad R, e il valore dell' integrale del secondo membro è indipendente da R_1. Ma, nelle ipotesi ammesse, si vedrà subito che, prendendo R_1 sufficientemente vicino ad R, la differenza fra questo integrale e l' integrale limite

$$\frac{1}{2\pi} \int_s U \frac{R^2 - \varrho'^2}{R^2 + \varrho'^2 - 2 R \varrho' \cos(\theta - \theta')} d\theta .$$

[1]) Dini, *Fondamenti*, pag. 17.

[2]) Per l' unicità della funzione è essenziale l' ipotesi fatta che i valori dati sul contorno e i valori nell' interno si serbino tutti inferiori ad un numero fisso, come lo dimostra il seguente esempio. Prendasi la parte reale $\frac{2x}{x^2+y^2} - 1$ della funzione di variabile complessa $\frac{2}{z} - 1$. Nell' interno del cerchio $x^2 + y^2 = 2x$ la u è armonica e si annulla sul contorno.

è piccola quanto si vuole, onde essa è assolutamente nulla e sussiste ancora la (14*).

Con ciò è dimostrato che, se la funzione u esiste, essa è unica ed è data dalla (14*). Ma ora, se rammentiamo le considerazioni del § 38, vediamo che effettivamente questa funzione $u(\varrho', \theta')$, che è armonica in ogni area interna al cerchio, avvicinandosi ai punti del contorno ove la U è continua, si comporta ancora in modo continuo.

Quanto al modo di comportarsi della u avvicinandosi ad un punto M_0 di discontinuità al contorno, nulla possiamo dire in generale, quando la discontinuità della U in M_0 sia di seconda specie. Ma se il punto M_0 è un punto di discontinuità di prima specie, sicchè esista un limite dei valori a destra di M_0, sia U_0^+, ed un limite a sinistra U_0^-, possiamo determinare colle considerazioni seguenti, dovute a Schwarz, come si comporterà la funzione nelle vicinanze di M_0. Essendo M un punto qualunque del cerchio, indichiamo per ciò con θ l'angolo che la direzione positiva della tangente in M_0 fa colla direzione $M_0 M$ e con Θ i valori di θ al contorno. La funzione θ è dentro al cerchio una funzione ad un sol valore, finita e continua insieme alle sue derivate parziali, in là quanto si vuole, e soddisfa al

$$\Delta_2 \theta = 0 \text{ [1]}).$$

I valori Θ al contorno formano una funzione dovunque continua, salvo in M_0 dove hanno, precisamente come U, una discontinuità di prima specie, tale che

$$\Theta_0^+ = 0, \quad \Theta_0^- = \pi .$$

Se alla catena U di valori al contorno sostituiamo l'altra

$$V = U + \frac{U_0^+ - U_0^-}{\pi} \Theta,$$

questa avrà le medesime discontinuità di U eccetto in M_0, dove sarà ristabilita la continuità, se intendiamo che pel valore di V in M_0 si prenda il limite comune U_0^+ dei valori a destra e a sinistra.

[1]) Invero θ è il coefficiente dell' immaginario nella funzione $\log(z - z_0)$.

Con questi valori V costruiamo, colla formola (14*), la corrispondente funzione armonica v che coinciderà necessariamente, pel teorema d' unicità, con

$$v = u + \frac{U_0^+ - U_0^-}{\pi}\,\theta .$$

La v, avvicinandosi dall' interno a M_0, si comporterà in modo continuo, convergendo equabilmente verso U_0^+, e però la u si comporterà come

$$U_0^+ - \frac{U_0^+ - U_0^-}{\pi}\,\Theta .$$

Se muoviamo dunque verso M_0 lungo una retta inclinata dell'angolo Θ_0 sulla tangente (positiva), avremo

$$\lim u = U_0^+ + \frac{U_0^- - U_0^+}{\pi}\,\Theta ,$$

la quale formola ci fa conoscere appunto quello che si domandava. In particolare, se andiamo verso M_0 lungo il raggio del cerchio, avremo $\Theta_0 = \frac{\pi}{2}$ ed u convergerà verso la media

$$\frac{U_0^+ + U_0^-}{2}$$

dei valori limiti a destra e sinistra.

CAPITOLO IV.

Integrali di funzioni di variabile complessa. — Teorema fondamentale di Cauchy e sue conseguenze. — Sviluppi in serie di Taylor. — Sviluppo di Laurent. — Concetto di funzione analitica secondo Weierstrass. — Serie di funzioni analitiche.

§ 40. — Integrali definiti di funzioni di variabile complessa.

In un'area A connessa sia data una funzione w della variabile complessa z finita, continua e monodroma. Consideriamo un arco acb di curva nell' interno di A e dividiamolo, secondo una legge arbitraria, in tratti

$$\delta_1, \quad \delta_2, \quad \ldots., \quad \delta_n ;$$

formiamo la somma

$$\text{(1)} \qquad \sum_{r=1}^{r=n} w_r\, \Delta_r\, z ,$$

dove con w_r indichiamo uno qualunque dei valori di w nel tratto δ_r e con $\Delta_r z$ l' incremento della variabile z nel passaggio dal primo al secondo estremo del tratto. Facciamo ora crescere all' infinito il numero dei tratti, mentre ciascuno di essi impiccolisce oltre ogni limite. Facilmente dimostriamo che la somma (1) convergerà verso un limite determinato e finito, indipendente dalla legge di divisione e dai valori intermedi scelti w_r. Scindendo il reale dall' immaginario, poniamo

$$w_r = u_r + iv_r , \quad \Delta_r z = \Delta_r x + i\,\Delta_r y$$

ed avremo

$$\sum w_r \Delta_r z = \sum (u_r \Delta_r x - v_r \Delta_r y) + i \sum (v_r \Delta_r x + u_r \Delta_r y) .$$

Ora si ha (§ 27) :

$$\lim \sum (u_r\, \Delta_r\, x - v_r\, \Delta_r\, y) = \int_{acb} (u\,dx - v\,dy)$$

$$\lim \sum (v_r \Delta_r\, x + u_r \Delta_r\, y) = \int_{acb} (v\,dx + u\,dy)$$

quindi

$$\lim \sum w_r\, \Delta_r\, z = \int_{acb} (u\,dx - v\,dy) + i \int_{acb} (v\,dx + u\,dy) .$$

Questo limite si chiama l' integrale di w, esteso all'arco $a\,c\,b$, e si scrive :

definizione

$$\boxed{\int_{acb} w\,dz = \int_{acb} (u\,dx - v\,dy) + i \int_{acb} (v\,dx + u\,dy) .}$$

Dalla definizione stessa di integrale definito possiamo subito ottenere un teorema semplice, ma molto utile, dovuto a Darboux, che assegna un limite superiore pel modulo dell' integrale e si enuncia : *Il modulo dell' integrale $\int_{acb} w\,dz$ non può superare il prodotto del massimo modulo della funzione durante il corso d' integrazione, per la lunghezza dell'arco $a\,c\,b$*. Indicando con M questo massimo modulo, e con L il perimetro dell'arco d' integrazione, avremo cioè :

$$\left|\int_{acb} w\,dz\right| \leq ML. \tag{3}$$

Darboux

M = max $\sqrt{u^2+v^2}$ in acb

E infatti

$$\int_{acb} w\,dz = \lim \sum w\,\Delta z;$$

ora

$$\left|\sum w\,\Delta z\right| \leq M \sum \left|\Delta z\right| \leq M \sum \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

e il limite della somma $\sum \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ è appunto L, onde segue la (3). Qualche volta si dà alla (3) anche un'altra forma. Indicando con $\overline{w}$ il valore di w in un punto di massimo modulo, si ha

$$\overline{w} = M e^{i\omega},$$

e d'altra parte

$$\int_{acb} w\,dz = \left|\int_{acb} w\,dz\right| e^{i\Omega},$$

onde avremo

$$\int_{acb} w\,dz = \lambda L \overline{w}, \tag{3*}$$

Darboux

dove λ è un fattore di modulo ≤ 1 e $\overline{w}$ è un valore intermedio di w sull'arco d' integrazione $a\,c\,b$.

§ 41. — Teorema di Cauchy. - Integrali indefiniti.

Le due espressioni

$$u\,dx - v\,dy, \qquad v\,dx + u\,dy,$$

che figurano nel secondo membro della (2), a causa delle condizioni di monogeneità

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

sono differenziali esatti. Se dunque supponiamo che w sia finita, continua e monodroma nell'area A e le derivate $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ si serbino finite anche sul contorno, sarà applicabile il teorema alla fine del § 29, cioè gli integrali

$$\int_s (u\,dx - v\,dy), \qquad \int_s (v\,dx + u\,dy),$$

estesi al contorno completo dell'area saranno identicamente nulli. Ne risulta, per la (2), il teorema fondamentale di Cauchy : *Se nell'area A, incluso il contorno la w è funzione finita, continua e monodroma della variabile complessa z, e la derivata $w'(z)$ si serba limitata anche al contorno, l' integrale*

Anche

$$\int_s w\,dz,$$

esteso al contorno completo dell'area, è identicamente nullo.

La condizione relativa alla derivata al contorno si può anche togliere nei casi ordinari quando l' area A possa riguardarsi come limite di un' area interna variabile A' il cui contorno s' converga uniformemente verso il contorno s, in guisa che ogni punto di s' si accosti indefinitamente ad un punto determinato di s. E infatti allora, per ogni configurazione di s', si avrà

$$\int_{s'} w(z)\,dz = 0$$

e l' integrale $\int_s w\,dz$, essendo il limite verso cui converge $\int_{s'} w\,dz$, sarà pure nullo.

Senza ripetere per gli integrali di funzioni di variabile complessa le deduzioni del § 31, relative agli integrali curvilinei di differenziali esatti basterà enunciare i corrispondenti teoremi:

1° *Indicando con σ una curva chiusa qualunque tracciata nell' interno di un'area A, supposta semplicemente connessa, nella quale la funzione $w\,(z)$ è finita, continua e monodroma, si avrà*

$$\int_\sigma w\,dz = 0\ ^{1)}\,.$$

2° *Nell'area semplicemente connessa A l' integrale $\int w\,dz$, esteso da un punto a ad un punto b lungo un cammino qualunque nell' interno dell'area, dipende solo dagli estremi a, b e nulla affatto dal cammino percorso.*

Questo integrale si può quindi indicare opportunamente con

$$\int_a^b w\,dz\,.$$

Supponiamo ora fisso l'estremo inferiore e mobile l' estremo superiore, che indicheremo con z, e consideriamo l' integrale

$$W = \int_a^z w\,dz\,,$$

È facile vedere che W sarà, come w stessa, una funzione finita, continua e monodroma della variabile complessa z e sarà inoltre $\dfrac{dW}{dz} = w$. Si ha invero:

$$W = \int_a^z w\,dz = \int_a^{(x,\,y)} (u\,dx - v\,dy) + i \int_a^{(x,\,y)} (v\,dx + u\,dy)$$

[1] Qui le condizioni al contorno sono manifestamente superflue.

Cosicché W risulta continua fun. finita monodroma della variabile complessa z

e basta applicare i risultati del § 31, osservando che ne risulta

$$\frac{\partial W}{\partial x} = u + iv = w\,, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = -v + iu = i\,\frac{\partial W}{\partial x}\,. \qquad \frac{dW}{dz} = w$$

Se l'area A ha una connessione d'ordine n, l' integrale indefinito $\int w\,dz$, esteso da un punto fisso ad un punto mobile z, sarà ancora una funzione W finita e continua della variabile complessa z, ma invece di essere monodroma sarà ora, in generale, polidroma. La sua polidromia consisterà in ciò che se in un punto z, per un dato cammino, acquista il valore W, variando ad arbitrio il cammino, acquisterà tutti i valori della forma

$$W + r_1\,\omega_1 + r_2\,\omega_2 + \ldots. + r_{n-1}\,\omega_{n-1}\,,$$

dove ω_1, ω_2, ..., ω_{n-1} sono $n - 1$ quantità complesse (moduli di periodicità) fisse, mentre r_1, r_2, ..., r_{n-1} prendono tutti i valori interi positivi e negativi. l'argomento segue al § 55

§ 42. — Formola di Cauchy. - Teorema di Morera.

Dal teorema di Cauchy si può facilmente dedurre una formola, pure dovuta a Cauchy, che ha un' importanza fondamentale. Essa serve a calcolare i valori nell' interno dell'area di una funzione finita, continua e monodroma, per mezzo dei valori che la funzione ha al contorno. Che i valori al contorno determinino pienamente i valori nell' interno sappiamo già; ed anzi sappiamo di più che basta dare i valori al contorno della parte reale u perchè questa venga individuata nell'area, e siccome della parte immaginaria v si conosce allora il differenziale totale, basterà fissare inoltre in un punto il valore di v perchè la w risulti individuata [1].

Per trovare la formola di Cauchy, prendiamo un punto z' *interno* dell'area, e fatto centro in z', descriviamo un piccolo cerchio tutto interno all'area e indichiamo con σ il contorno di questo cer-

[1] Si osservi che, se l'area è più volte connessa, non si potranno nemmeno dare ad arbitrio i valori della parte reale al contorno, pèrchè la parte immaginaria risulterà (in generale) non ad un solo valore, ma ad infiniti valori.

problema di Dirichlet: ricordare che a causa delle cond. di monogeneità u, v sono soluzioni dell'equazione di Laplace $\Delta_2 u = 0$ $\Delta_2 v = 0$

chio. Se togliamo dall'area A il disco circolare, otteniamo un'area A' il cui contorno si compone del contorno primitivo s e del contorno σ del cerchio. In quest'area A' la funzione

$$\frac{w(z)}{z - z'}$$

è finita, continua e monodroma e il teorema fondamentale di Cauchy dà quindi:

$$\int_s \frac{w(z)\,dz}{z - z'} + \int_\sigma \frac{w(z)\,dz}{z - z'} = 0 .$$

Qui il contorno σ, come contorno interno, è percorso nel verso negativo; se lo intendiamo percorso nel senso diretto, avremo dunque

$$\int_s \frac{w(z)\,dz}{z - z'} = \int_\sigma \frac{w(z)\,dz}{z - z'} . \tag{4}$$

L'integrale del secondo membro ha un valore che è facile calcolare, sia direttamente, sia ricorrendo alla proprietà già dimostrata (Cap. III, § 35) per le funzioni armoniche, di assumere cioè nel centro di un cerchio la media dei valori al contorno. Servendoci di questo teorema, osserviamo che indicando con ϱ il raggio del cerchio, con θ l'anomalia di un punto z variabile sulla circonferenza avremo sopra σ:

$$z - z' = \varrho\, e^{i\theta} ,$$

indi

$$dz = i \varrho\, e^{\theta i}\, d\theta , \quad \frac{dz}{z - z'} = i\, d\theta ,$$

e però

$$\int_\sigma \frac{w(z)\,dz}{z - z'} = i \int_0^{2\pi} (u + i v)\, d\theta .$$

Ma indicando con $w(z') = u' + iv'$ il valore di w in z' si ha, pel citato teorema:

$$\int_0^{2\pi} u\, d\theta = 2\pi u' , \quad \int_0^{2\pi} v\, d\theta = 2\pi v' ,$$

onde

$$\int_\sigma \frac{w(z)\,dz}{z - z'} = 2\pi i\, w(z').$$

La (4) ci dà adunque

$$\boxed{w(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{w(z)\,dz}{z - z'}} , \tag{I}$$

che è la *formola di Cauchy* [1]).

Si osservi che la (I) rimane valida (per contorni ordinari), anche togliendo al contorno le condizioni relative alla derivata $w'(z)$ (Cfr. § 41).

Dalla formola (I) di Cauchy così stabilita deduciamo subito importanti conseguenze. Immaginiamo di far muovere z' in un'area A' tutta interna all'area A, ma del resto qualunque. Mentre z nel secondo membro della (I) percorre il contorno s, la $z - z'$ rimane col modulo discosto da zero più di una quantità fissa, e perciò la funzione sotto il segno

$$\frac{w(z)}{z - z'}$$

rimane sempre finita. Essa è funzione finita e continua dei parametri x', y', coordinate di z', e possiede, rispetto a questi parametri, derivate sempre finite e continue, in là quanto si vuole, e soddisfacenti alla condizione di monogeneità

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y'} .$$

[1]) Questa formola si potrebbe anche dedurre dalla (IX), § 33, applicandola alla parte reale u ed al coefficiente v dell' immaginario (Cfr. PICARD, *Traité d'Analyse*, tomo II, pag. 109).

Per le regole di derivazione sotto il segno integrale, se ne conclude quindi che, nell'area A' esistono le derivate rispetto a z' di $w\,(z')$ in là quanto si vuole e soddisfacenti alla condizione di monogeneità; in generale avremo

$$\text{(II)} \qquad w^{(n)}\,(z') = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . n}{2\pi i} \int_s \frac{w\,(z)\,dz}{(z - z')^{n+1}} \cdot$$

Abbiamo dunque il teorema: *Se una funzione w di variabile complessa è finita, continua e monodroma in un'area A, nell' interno dell'area essa ammetterà non solo la derivata prima finita, continua e monodroma (ciò che è conseguenza della definizione), ma anche le derivate successive di tutti gli ordini, che saranno entro l'area A tutte funzioni finite continue e monodrome della variabile complessa z.*

A queste conseguenze, dedotte dalla formola di Cauchy, si connette un' importante osservazione, dovuta a Morera, che inverte il teorema fondamentale di Cauchy (§ 41) col seguente teorema di Morera:

Se la variabile complessa w è legata alla variabile indipendente z per modo che, movendosi z in una certa area connessa A, la w sia sempre finita, continua e ad un sol valore e l' integrale $\int w\,dz$ esteso all' intero contorno di qualunque area parziale contenuta in A sia sempre nullo, sarà w funzione della variabile complessa z in A (avrà derivata indipendente della direzione). Morera

Se l'area A è più volte connessa, sostituiamovi un'area $\bar{A}$ semplicemente connessa eseguendo in A un conveniente numero di tagli (§ 30). In questa $\bar{A}$ consideriamo come al § 41 l' integrale indefinito

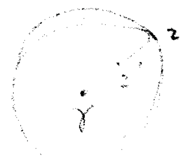
$$W = \int_a^z w\,d\,z$$

esteso lungo un qualunque cammino che, restando entro $\bar{A}$, vada dall'estremo fisso inferiore a al superiore variabile z. Le considerazioni stesse del § 41 provano che W è in $\bar{A}$ funzione finita continua e monodroma di z ed ha per derivata, indipendente dalla

direzione, w. Questa derivata prima possiede dunque essa stessa una derivata indipendente dalla direzione, vale a dire è funzione della variabile complessa z. È ovvio poi che mentre nell'area primitiva A la funzione W è in generale polidroma (con moduli di periodicità) ai tagli, la w è monodroma anche in A.

§ 43. — Sviluppi in serie di potenze.

Dalla formola (I) Cauchy ha dedotto una conseguenza notevolissima, applicandola al caso di un campo circolare. Sia $z = \gamma$ il centro del circolo; siccome, mentre z percorre il contorno del circolo, si ha



$$|\,z' - \gamma\,| < |\,z - \gamma\,|\,,$$

cioè

$$\left|\frac{z' - \gamma}{z - \gamma}\right| < 1\,,$$

potremo sviluppare

$$\frac{1}{z - z'} = \frac{1}{z - \gamma} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z' - \gamma}{z - \gamma}}$$

in serie di potenze della variabile

$$\zeta = \frac{z' - \gamma}{z - \gamma}\,,$$

secondo la progressione geometrica

$$\frac{1}{1 - \zeta} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \zeta^n.$$

Avremo quindi

$$\frac{1}{z - z'} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(z' - \gamma)^n}{(z - \gamma)^{n+1}}$$

e questa serie, per ogni punto z' interno al circolo, muovendosi z sulla circonferenza, sarà convergente in egual grado.

Sostituendo nella formola di Cauchy

$$w(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{w(z)\, dz}{z - z'}$$

il valore superiore di $\frac{1}{z - z'}$, potremo eseguire l'integrazione termine a termine e scrivere

$$w(z') = \sum_{n=0}^{n=\infty} (z' - \gamma)^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{w(z)\, dz}{(z - \gamma)^{n+1}} .$$

Poniamo

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{w(z)\, dz}{(z - \gamma)^{n+1}} \tag{5}$$

ed avremo

$$w(z') = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n (z' - \gamma)^n .$$

Si osservi che, per la formola (II), il valore (5) del coefficiente a_n è dato da

$$a_n = \frac{w^{(n)}(\gamma)}{\pi(n)} ,$$

e ponendo z in luogo di z', potremo dire che, in ogni punto z interno al circolo, si avrà

$$\boxed{w(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{w^{(n)}(\gamma)}{\pi(n)} (z - \gamma)^n .}$$

Questa non è altro, come si vede, che la serie di Taylor, estesa ai valori complessi della variabile. E poichè attualmente figurano soltanto i valori della funzione e delle derivate nel centro del cir-

La somma di una serie di potenze nell'interno del cerchio di convergenza rappresenta una funz. finita continua e monodroma della variabile complessa z

colo, è chiaro che, per la validità della formola, basterà che la funzione $w(z)$ sia finita, continua e monodroma in ogni area *interna* al circolo, senza porre alcuna condizione al contorno. E infatti, se z è interno al circolo, basterà descrivere un circolo concentrico interno di raggio $> |z|$ ed applicare le nostre considerazioni a questo circolo. Se ricordiamo poi i risultati ottenuti al Cap. I, riguardo alle serie di potenze, potremo enunciare l'importante teorema:

Affinchè una funzione $w(z)$ di variabile complessa sia sviluppabile in serie di potenze di $z - \gamma$, è necessario e sufficiente che nell'interno di un circolo di centro γ essa sia finita, continua e monodroma, insieme alla derivata $w'(z)$.

unicità dello sviluppo

Osserviamo poi, ciò che ancora non risulta dalle ricerche precedenti, che lo sviluppo è unico e coincide quindi necessariamente collo sviluppo di Taylor.

E infatti se due serie ordinate per le potenze di $z - \gamma$ rappresentano la medesima funzione, la loro differenza che è pure una serie di potenze

$$c_0 + c_1 (z - \gamma) + c_2 (z - \gamma)^2 + \ldots ,$$

sarebbe identicamente nulla per ogni valore di z nell'area considerata. Ora poniamo che il primo coefficiente non nullo della serie sia c_n, sicchè la serie si scriva

$$(z - \gamma)^n \{ c_n + c_{n+1} (z - \gamma) + \ldots \} .$$

Il primo fattore $(z - \gamma)^n$ si annulla solo in γ, quindi la serie fra parentesi

$$c_n + c_{n+1} (z - \gamma) + \ldots$$

dovrà annullarsi, salvo al più in γ, in ogni altro punto dell'area e però, a causa della continuità, anche in γ. Ne risulterebbe dunque, contro l'ipotesi, $c_n = 0$. Tutti i coefficienti c sono dunque nulli e quindi le due serie coincidono assolutamente.

I risultati precedenti pongono in piena luce le condizioni di sviluppabilità di una funzione in serie di potenze (serie di Taylor) di $z - \gamma$. Lo sviluppo resta valido finchè nel cerchio descritto col centro γ la funzione resta finita, continua e monodroma colla derivata, ed il *vero cerchio di convergenza* per la serie è il massimo

il cui raggio non supera quello determinato col teorema di Cauchy Hadamard che si possa descrivere soddisfacendo a queste condizioni. Così p. es. se prendiamo le funzioni

$$\log(1+z) \quad , \quad (1+z)^m,$$

dove m non sia un intero positivo, queste sono finite, continue e monodrome colle derivate entro il cerchio di centro $z = 0$ e di raggio $= 1$, ma nel punto $z = -1$ hanno un punto singolare, talchè il raggio del cerchio di convergenza delle corrispondenti serie (logaritmica e binomiale)

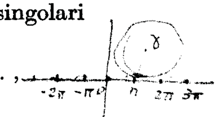
$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots.$$

$$(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \ldots$$

è precisamente l' unità.

Così la funzione $\frac{1}{\operatorname{sen} z}$ è finita, continua e monodroma colla derivata in ogni area che non contenga alcuno dei punti singolari

$$\ldots - 3\pi, \quad -2\pi, \quad -\pi, \quad 0, \quad \pi, \quad 2\pi, \quad 3\pi, \quad \ldots,$$



e se γ è un punto qualunque del piano distinto dai punti singolari, potremo sviluppare $\frac{1}{\operatorname{sen} z}$ in serie di potenze di $z - \gamma$ e il raggio di convergenza della serie sarà la minima distanza di γ dai punti singolari.

S' intende altresì come, limitandosi a considerare le condizioni di sviluppabilità in serie di Taylor per le funzioni $f(x)$ di variabile reale, queste non possono apparire che incompletamente. E invero, per le proprietà delle serie di potenze (§ 3), una tale funzione è necessariamente estendibile al piano complesso e dalla distribuzione delle singolarità, *non soltanto sull'asse reale*, ma in tutto il piano complesso dipendono, come si è visto, le condizioni di sviluppabilità. Così p. es. le funzioni

$$\frac{1}{x^2+1}, \quad \frac{1}{\cosh x}$$

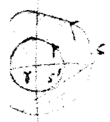
Mentre nel campo complesso l'esistenza delle derivate di tutti gli ordini include la sviluppabilità in serie di Taylor, ciò non è cond. suff. nel campo reale, ove cond. suff. è che le $f^{(r)}$ siano limitate (v. vol. Tonelli)

sono sempre finite e continue *sull'asse reale*, insieme con tutte le loro derivate, in là quanto si vuole. Ma sviluppandole ad esempio per le potenze di x, il raggio del cerchio di convergenza per la prima è $= 1$, per la seconda è $= \frac{\pi}{2}$. Ciò dipende da che, estendendola ai valori complessi, la funzione $\frac{1}{z^2+1}$ ha i punti singolari $z = \pm i$ distanti di 1 dall'origine, e la funzione $\frac{1}{\cosh z}$ ha i punti singolari

$$z = (2n+1)\frac{\pi i}{2} \quad (n \text{ intero})$$

sull'asse immaginario, e di questi i più prossimi a $z = 0$ sono $z = \pm \frac{\pi i}{2}$ che distano di $\frac{\pi}{2}$ dall'origine.

§ 44. — Sviluppo di Laurent.



Passiamo ora ad applicare un metodo analogo per sviluppi in serie, anzichè ad un campo circolare, *ad un anello circolare*, cioè allo spazio compreso fra due circonferenze concentriche C, C'. Supponiamo che in questo spazio (il contorno incluso) la funzione $w(z)$ sia finita, continua e monodroma colla derivata $w'(z)$. Se z' è un punto interno all'anello, e con s indichiamo il contorno del cerchio esterno C, con s' quello dell' interno C', e li intendiamo tutti e due percorsi nel senso positivo delle rotazioni, avremo per la formola di Cauchy:

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{w(z)\,dz}{z - z'} - \frac{1}{2\pi i}\int_{s'} \frac{w(z)\,dz}{z - z'}.$$

Il primo integrale si potrà ancora sviluppare, come al paragrafo precedente, per potenze di $z' - \gamma$, indicando γ il centro dell'anello, e si avrà

$$\frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{w(z)\,dz}{z - z'} = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n (z' - \gamma)^n,$$

avendo posto

$$(6) \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{w(z)\,dz}{(z-\gamma)^{n+1}} .$$

Quanto al secondo integrale si osservi che, mentre z percorre C', si ha

$$|z-\gamma| < |z'-\gamma| , \qquad \left|\frac{z-\gamma}{z'-\gamma}\right| < 1$$

e perciò potremo sviluppare

$$-\frac{1}{z-z'} = \frac{1}{z'-z} = \frac{1}{z'-\gamma} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z-\gamma}{z'-\gamma}}$$

per potenze intere e positive di $\dfrac{z-\gamma}{z'-\gamma}$ colla formola

$$-\frac{1}{z-z'} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(z-\gamma)^{n-1}}{(z'-\gamma)^n}$$

e, a causa della convergenza in egual grado di questa serie, avremo

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{w(z)\,dz}{z-z'} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{b_n}{(z'-\gamma)^n} ,$$

posto

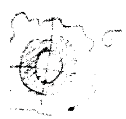
$$(7) \qquad b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_s w(z)\,(z-\gamma)^{n-1}\,dz .$$

La funzione $w(z')$ risulterà dunque, per l' interno dell'anello, sviluppata nella serie

$$w(z') = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n\,(z'-\gamma)^n + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{b_n}{(z'-\gamma)^n} ,$$

che procede insieme per le potenze ascendenti e discendenti di $z'-\gamma$. Osserviamo poi che i coefficienti (6), (7) risultano calcolati con integrali definiti estesi rispettivamente alle circonferenze C, C'; ma siccome le funzioni sotto il segno in tutto l'anello sono finite, continue e monodrome, potremo estendere anche gli integrali stessi ad una curva chiusa σ qualunque per es. ad una circonferenza concentrica che giri una sola volta attorno all' anello, sicchè avremo:

$$(8) \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{w(z)\,dz}{(z-\gamma)^{n+1}} , \qquad b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma w(z)\,(z-\gamma)^{n-1}\,dz .$$



Dopo ciò si vedrà subito che le condizioni al contorno dell'anello si possono senz'altro togliere e si ha quindi il teorema di Laurent:

Laurent

Se nell' interno di un anello circolare la funzione $w(z)$ è finita, continua e monodroma colla derivata, si potrà sviluppare, in tutto l' interno dell'anello, nella serie

$$w(z) = \sum_0^\infty a_n\,(z-\gamma)^n + \sum_1^\infty \frac{b_n}{(z-\gamma)^n} ,$$

procedente per le potenze intere ascendenti e discendenti di $z-\gamma$, e i valori dei coefficienti a_n, b_n saranno dati dalle (8).

Si osservi che, se anche nell' interno di C' la $w(z)$ si mantiene finita, continua e monodroma, pel teorema fondamentale di Cauchy sono allora nulli tutti i coefficienti b_n, e si ritorna allo sviluppo di Taylor.

§ 45. — Funzioni analitiche.

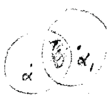
Arriviamo ora all' importante nozione di *funzione analitica* secondo Weierstrass. Questo concetto è fondato sulle proprietà delle serie di potenze, la cui importanza fondamentale nella teoria delle funzioni di variabile complessa risulta già dai teoremi di Cauchy, esposti nel § 43. In virtù di questi teoremi infatti qualunque funzione di variabile complessa, sia ad uno, sia a più valori, è sempre sviluppabile, in campi sufficientemente piccoli, in serie di potenze.

Per designare una serie di Taylor, che proceda per le potenze di $z - \gamma$, ci serviremo con Weierstrass del simbolo

$$P(z - \gamma)$$

ed innanzi tutto dimostreremo un lemma che ci servirà a stabilire la nozione di *prolungamento analitico*.

Suppongasi che i due cerchi di convergenza C, C_1 delle due serie di potenze $P(z - a)$, $P_1(z - a_1)$ abbiano una parte superficiale (una lunula) a comune, e suppongasi inoltre che in tutti i punti di un'area σ interna alla lunula le due serie abbiano la stessa somma. Dimostriamo allora il lemma: *Le due funzioni finite, continue e monodrome* $w(z) = P(z - a)$, $w_1 = P_1(z - a_1)$, *rappresentate dalle due serie di potenze, coincidono in tutta la lunula.*



lemma

Si tratta di provare che la funzione $\omega(z) = w(z) - w_1(z)$, nulla per ipotesi in tutta l'area σ, è nulla anche in qualunque punto B interno alla lunula. Supponiamo al contrario $\omega(B) \neq 0$ e uniamo un punto A *interno a* σ al punto B con una linea semplice L tutta interna alla lunula. Lungo la linea L la funzione continua $\omega(z)$ è nulla in A ed in tutto il tratto di L interno a σ, mentre invece in B è, per ipotesi, diversa da zero. Esiste dunque su L un determinato punto C di separazione fra A e B, tale che nel tratto da A in C (C incluso) la $\omega(z)$ è sempre nulla, e sono quindi nulle anche tutte le sue derivate (che possono sempre calcolarsi nel senso della linea L); invece al di là di C ed in qualunque vicinanza di C la $\omega(z)$ assumerebbe anche valori non nulli. Questo porta subito ad una contraddizione, poichè se descriviamo col centro in C un cerchio tutto interno alla lunula, ivi $\omega(z)$ è sviluppabile in serie di potenze di $z - c$ (denotando con c il valore di z in C) e i coefficienti di questa serie sono tutti nulli perchè in C si annulla $\omega(z)$, e si annullano tutte le derivate. Dunque $\omega(z)$ è ancora nulla entro quel cerchio, e però per un tratto di L oltre C, contro l'ipotesi. Il lemma è così dimostrato ed è chiaro ora che nell'area formata dalla riunione dei due dischi circolari C, C_1 le due funzioni $w(z)$, $w_1(z)$ formano *un'unica funzione, finita, continua e monodroma*, che nella lunula comune può rappresentarsi indifferentemente coll'una o coll'altra serie di potenze, le quali sono quindi da riguardarsi come una continuazione analitica l'una dell'altra.

Ciò premesso, partiamo da una serie di potenze $P(z - a)$ che abbia un cerchio C di convergenza, di raggio R non nullo, sicchè entro C la $w(z) = P(z - a)$ è funzione finita, continua e monodroma. Prendiamo ora entro C un punto qualunque b, diverso dal centro a, e descriviamo con centro in b il cerchio C' tangente internamente a c, il cui raggio sarà dato per ciò da $R - |a - b|$. Entro al cerchio C' la $w(z)$ è sviluppabile in serie di potenze $P_1(z - b)$ che convergerà *almeno* entro C', ma può darsi che l'effettivo cerchio C_1 di convergenza di questa serie sia più ampio di C'.

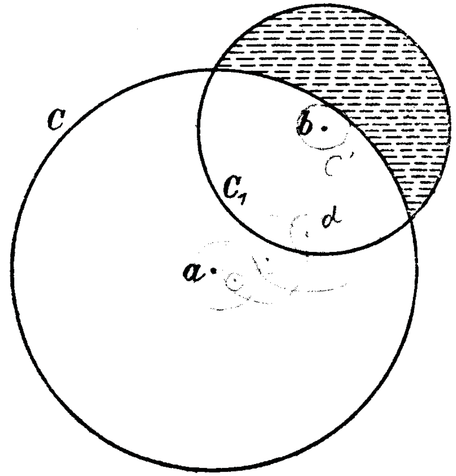


Fig. 7.

Supponendo che ciò sia, le due serie $P(z - a)$, $P_1(z - b)$ si trovano coi loro cerchi C, C_1 di convergenza nelle condizioni del lemma, ed allora la seconda serie $P_1(z - b)$, che nella lunula comune rappresenta la funzione $w(z)$, conserva un significato anche fuori di C, nell'area tratteggiata della figura 7. Diremo allora con Weierstrass che la serie $P_1(z - b)$ dà un *prolungamento analitico immediato* della serie $P(z - a)$, od anche che la funzione $w(z)$ è stata prolungata analiticamente nella parte ombreggiata della figura.

Più in generale, se consideriamo una successione finita di serie di potenze

$$(1) \quad P(z - a), \quad P_1(z - a_1), \quad P_2(z - a_2) \ldots, \quad P_n(z - a_n),$$

ciascuna delle quali sia dedotta per prolungamento analitico immediato dalla precedente, diremo ancora che l' ultima $P_n(z-a_n)$ è dedotta per prolungamento analitico (non immediato) dalla prima $P(z-a)$. È facile allora vedere che inversamente si può passare dall' ultima serie alla prima in 1) con una successione finita di prolungamenti analitici immediati, per la qual cosa basterà far vedere che ciò accade nel passaggio da una delle serie 1) alla precedente, p. es. da $P_1(z-a_1)$, a $P(z-a)$ perchè allora lo stesso accadrà da $P_2(z-a_2)$ a $P_1(z-a)$ ecc. Ora se il cerchio C_1 di $P_1(z-a_1)$ contenesse nel suo interno il centro del cerchio C per la serie $P(z-a)$, questa sarebbe già un prolungamento analitico immediato di $P_1(z-a_1)$. In ogni caso nell' area costituita dai due cerchi riuniti C, C_1 la funzione $w(z)=P(z-a)=P_1(z-a_1)$ è finita, continua e monodroma, e per ciò, preso un punto d qualunque interno a quest'area, la funzione $w(z)$ è sviluppabile in serie di potenze $P(z-d)$, convergente *almeno* entro un cerchio di centro d e di raggio eguale alla minima distanza di d dai punti del contorno. È chiaro allora geometricamente che possiamo prendere, p. es. sulla congiungente i centri a, a_1, una serie finita di punti

$$d_1, \quad d_2, \quad \ldots, \quad d_n$$

tale che, detti $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ i relativi cerchi di convergenza per le serie di potenze

$$P(z-d_1), \quad P(z-d_2), \quad \ldots, \quad P(z-d_n)$$

secondo le quali è sviluppabile la $w(z)$, ciascun cerchio Γ contenga nel suo interno il centro del precedente, Γ_1 contenga il centro a di C, e C_1 contenga il centro d_n di Γ_n. In queste condizioni è chiaro che la successione di prolungamenti analitici immediati

$$P_1(z-a_1), \quad P(z-d_n), \quad P(z-d_{n-1}), \quad \ldots, \quad P(z-d_1), \quad P(z-a)$$

conduce da $P_1(z-a)$ a $P(z-a)$, come si voleva.

La dimostrazione stessa prova che se due serie di potenze $P(z-a)$, $P'(z-a')$ si trovano nelle condizioni del lemma, avendo i loro due cerchi di convergenza una lunula comune, entro la

(1) Le funzioni di var. compl. secondo la def. di Cauchy, Riemann coincidono con le serie di potenze e pertanto sono elementi di funz. analitiche secondo Weierstrass

quale le due serie abbiano la stessa somma, le due serie nascono per prolungamento analitico l' una dall'altra. In generale segue:

transitività *Due serie di potenze, dedotte per prolungamento analitico da una medesima terza serie di potenze, nascono anche per prolungamento analitico l' una dall'altra.*

Premesse queste osservazioni, consideriamo *l' insieme* di tutte le serie di potenze che derivano per prolungamento analitico da una serie iniziale $P(z-a)$. Per quanto si è dimostrato, questo è un insieme *concatenato* in guisa che da una qualunque delle serie dell' insieme si ottengono, per prolungamento analitico, tutte le altre. *La totalità di queste serie costituisce, secondo la definizione di Weierstrass, una funzione analitica, di cui ogni serie della totalità dicesi un elemento.*

Una funzione analitica è individuata e riconoscibile da uno qualunque dei suoi elementi.

§ 46. — Campo di esistenza di una funzione analitica.

Nelle considerazioni precedenti, relative al prolungamento analitico di una serie di potenze $P(z-a)$, abbiamo supposto che il prolungamento possa in realtà effettuarsi. Ma può darsi invece (ed un esempio ce lo proverà subito) che per *qualunque* punto b, preso nell' interno del cerchio di convergenza C di $P(z-a)$, il cerchio di convergenza della serie dedotta $P(z-b)$ non si estenda mai al di là del primitivo, nel qual caso sarà ad esso tangente internamente. Allora la circonferenza C è il limite naturale d'esistenza per la funzione analitica, che viene ad essere rappresentata interamente dall' unico elemento $P(z-a)$. Si dice anche in tal caso che lo spazio esterno a C è uno spazio *lacunare* per la funzione analitica, uno spazio cioè in cui la funzione non esiste. Per accertarsi della verità di quanto sopra si è asserito, basta per es. ricorrere ai risultati ottenuti nella risoluzione del problema di Dirichlet per un cerchio C (§ 39). Distribuiamo sul contorno una catena finita e continua U di valori, ma che sia priva di derivata in tutti i punti, ovvero anche soltanto in un gruppo di punti dovunque condensato [1]), e costruiamo la corrispondente funzione armonica u

[1]) Dini, *Fondamenti*, pagg. 135 e 163.

nel cerchio C. La u individua, a meno di una costante additiva, la coniugata v che, nell'area semplicemente connessa C, è ad un sol valore. La funzione di variabile complessa $w = u + i\,v$ è finita, continua e monodroma nell'interno di C e sviluppabile quindi in una serie di potenze, che ha il cerchio C per cerchio di convergenza, ma non ammette alcun prolungamento analitico.

Un esempio anche più semplice di quelli ora considerati ci è fornito dalla funzione (§ 7)

$$F(z) = z + z^m + z^{m^2} + \dots + z^{m^n} + \dots,$$

Esempio di funzione non prolungabile

dove m è un intero ≥ 2. La serie del secondo membro ha per cerchio di convergenza quello di raggio $= 1$, ma non è prolungabile analiticamente al di là. Si consideri infatti un valore di z di modulo $\varrho < 1$ e di argomento $\theta = \dfrac{2k\pi i}{m^r}$ (k, r interi qualunque); a cominciare dal termine z^{m^r} la serie diventa

Infatti $z^{m^r} = \rho^{m^r} e^{i\frac{2k\pi}{m^r} m^r} = \rho^{m^r} e^{-2k\pi} = \rho^{m^r}$

$$\varrho^{m^r} + \varrho^{m^{r+1}} + \varrho^{m^{r+2}} + \dots$$

e, al convergere di ϱ verso 1 cresce all'infinito [1]). La $F(z)$ avvicinandosi dall'interno, lungo il raggio, verso tutti i punti di anomalia $\theta = \dfrac{2k\pi i}{m^r}$, punti che formano un insieme condensato su tutta la circonferenza, cresce dunque all'infinito, ciò che rende evidente l'impossibilità di un prolungamento analitico.

Constatato cogli esempi precedenti che una funzione analitica può ammettere nel piano degli spazi lacunari, s'intenderà meglio ciò che ora vogliamo esporre in generale sul *campo d'esistenza* di una funzione analitica. Sia dunque dato un elemento $P(z - a)$, che definisce la nostra funzione analitica. Dobbiamo allora distin-

[1]) Se M è una quantità positiva, grande quanto si vuole, e q una quantità fissa compresa fra 0 e 1, possiamo prendere un numero intero n tanto grande che sia $n\,q > M$ e prendere poi $r > 1$ così prossimo a 1, che sia

$$\varrho^{m^{r+n-1}} > q.$$

Allora nella serie del testo la somma dei primi n termini è già maggiore di $nq > M$.

L'insieme dei punti del piano che sono interni ad almeno un cerchio di convergenza della funzione analitica, è un continuo.

guere i punti del piano, rispetto alla funzione analitica, in due classi; diremo della prima classe un punto del piano quando esista qualche elemento della funzione, cioè una serie dedotta per prolungamento analitico da $P(z - a)$, il cui cerchio di convergenza contenga *nel suo interno* il punto. La totalità di questi punti costituisce un *continuo*, un campo a due dimensioni connesso, poichè è chiaro che, se A, B sono due tali punti, esisterà una serie di cerchi concatenati, che saranno cerchi di convergenza di elementi della funzione analitica, il primo dei quali conterrà A, l'ultimo B e potremo tracciare da A a B una linea continua, tutta costituita da punti della prima classe. Il campo così definito è il *campo d'esistenza* della nostra funzione analitica. Fra i punti dell'altra classe distingueremo i punti al limite del campo dai punti *esterni* al campo. Un punto sarà esterno al campo quando un intorno sufficientemente piccolo del punto non è solcato da alcun cerchio di convergenza di elementi della funzione; apparterrà invece al limite del campo quando, per quanto piccolo intorno si prenda del punto, esisteranno sempre dei cerchi di convergenza che attraversano l'intorno (senza contenere nell'interno il punto).

Ogni punto al limite del campo si dirà un *punto singolare* della funzione; in un tale punto, stando alla definizione di Weierstrass, la funzione non ha propriamente valore alcuno. Questi punti al limite del campo possono essere in numero finito o infinito, ed anche riempire tutta una linea (contorno) del campo. In generale costituiscono un *insieme*, un *gruppo* di punti, al quale si riconosce subito la proprietà seguente: *I punti dell'insieme derivato appartengono all'insieme stesso* [1]). E infatti un tale punto non può essere nè interno, nè esterno al campo; non interno perchè allora un intorno sufficientemente piccolo del punto non conterrebbe che punti interni e nessun punto al limite, non esterno perchè qualsiasi interno del punto è solcato da cerchi di convergenza.

la frontiera è un insieme chiuso;

Indichiamo con L l'insieme dei punti singolari, con L' l'insieme derivato. Come si è detto, L' è tutto contenuto in L; ma può darsi che non lo esaurisca interamente ed allora ogni punto P di L, non appartenente a L', è un *punto singolare isolato*, cioè

[1]) Secondo CANTOR, dicesi insieme derivato l'insieme di tutti i punti *limiti* dell'insieme primitivo, di quei punti cioè nell'intorno dei quali si addensano infiniti punti del gruppo primitivo.

in un intorno sufficientemente piccolo di P non esiste altro punto singolare che P stesso.

Una funzione analitica, considerata in tutto il suo campo d'esistenza, può essere *monodroma* (uniforme) o *polidroma* (multiforme). Si dice monodroma quando in ogni punto del campo si trova sempre per la funzione il medesimo valore, in qualunque modo vi si arrivi per prolungamento analitico dall'elemento iniziale $P(z - a)$, polidroma nel caso contrario. In altre parole, se la funzione è monodroma, due elementi qualunque di essa $P(z - b)$, $P(z - c)$, ove abbiano un campo di convergenza comune, ivi coincidono ; nel caso della polidromia invece vi sono elementi $P(z - b)$, $P(z - c)$, che nel campo comune di convergenza non dànno per la funzione i medesimi valori. [illegible]

Se invece di considerare tutto il campo d'esistenza di una funzione analitica, si considera un'area parziale A, tutta contenuta nel campo d'esistenza, può darsi che partendo da un elemento $P(z - a)$ della funzione contenuto in A e prolungando analiticamente la funzione, senza uscire dall'area A, si ottenga una funzione *monodroma nell'area* A, quantunque la funzione analitica completa sia polidroma.

Viceversa se in un'area A abbiamo una funzione finita, continua e monodroma di variabile complessa z (nel senso di Cauchy-Riemann), questa è una porzione di una funzione analitica, che può esistere anche fuori dell'area ed essere monodroma, o polidroma.

§ 47. — Serie di funzioni analitiche.

In un'area connessa A del piano complesso si abbia una serie

$$\sum_1^\infty u_n(z),$$

i cui singoli termini siano funzioni finite, continue e monodrome della variabile complessa z nell'interno dell'area. Dimostriamo l'importante teorema :

Se la serie $\sum_1^\infty u_n(z)$ *è convergente in egual grado in ogni area tutta interna alla primitiva, la somma di questa serie sarà una fun-*

Una serie equiconvergente di funzioni complesse finite continue monodrome è derivabile termine a termine [illegible] aggiungere che la serie delle derivate sia anch'essa equiconvergente

zione $w(z)$ della variabile complessa pure finita, continua e monodroma e le successive derivate di w, di ordine comunque elevato, si otterranno derivando termine a termine la serie.

Questo teorema estende, come si vede, ad ogni serie convergente in egual grado, i cui termini siano funzioni finite, continue e monodrome di variabile complessa, le proprietà dimostrate nel Cap. I, per le serie di potenze.

La dimostrazione della prima parte di questo teorema si fa nel modo più semplice ricorrendo al teorema di Morera (§ 42). Indichiamo con

$$w = \sum_1^\infty u_n(z)$$

la somma della nostra serie e prendiamo un'area A' tutta interna ad A (contorno incluso), sicchè in A' la serie sarà convergente in egual grado. Indicando con s il contorno completo di A', avremo quindi :

$$\int_s w\,dz = \int_s \left(\sum_1^\infty u_n(z)\right) dz,$$

e poichè su s la serie converge in egual grado, potremo scrivere

$$\int_s w\,dz = \sum_1^\infty \left(\int_s u_n(z)\,dz\right).$$

essendo u_n funz. di var. complessa finita cont. e monodroma

Pel teorema di Cauchy si ha per ogni valore dell'indice n

$$\int_s u_n(z)\,dz = 0,$$

e per ciò anche

$$\int_s w\,dz = 0,$$

ed ora dal teorema di Morera segue la prima parte del teorema enunciato. Dopo ciò, essendo w in A' funzione finita, continua e

cioè w è funz. di var. complessa finita continua e monodroma

monodroma di z, se denotiamo con z' un punto qualunque interno ad A', potremo scrivere secondo la formola di Cauchy

$$w(z') = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{w(z)\,dz}{z - z'}, \tag{9}$$

ma inoltre per la formola (II) § 42, avremo

$$w^{(r)}(z') = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots. r}{2\pi i}\int_s \frac{w(z)\,dz}{(z - z')^{r+1}}, \tag{10}$$

ed anche

$$u_n^{(r)}(z') = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots. r}{2\pi i}\int_s \frac{u_n(z)\,dz}{(z - z')^{r+1}}. \tag{11}$$

Sostituiamo nel secondo membro della (10) per $w(z)$ la serie

$$\sum_1^\infty u_n(z),$$

ed osserviamo che anche la serie

$$\sum_1^\infty \frac{u_n(z)}{(z - z')^{r+1}},$$

ove è la distanza di z' dai punti di s

è lungo s convergente in egual grado, perchè mentre z percorre il contorno s, il modulo di $z - z'$ non scende al disotto di un certo limite. L' integrazione si può dunque eseguire termine a termine, ciò che dà

$$w^{(r)}(z') = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots. r}{2\pi i}\sum_{n=1}^{n=\infty}\int \frac{u_n(z)\,dz}{(z - z')^{r+1}};$$

ossia per la (11)

$$\boxed{w^{(r)}(z') = \sum_{n=1}^{n=\infty} u_n^{(r)}(z'),}$$

e questo dimostra appunto la seconda parte del teorema.

§ 48. — Serie di serie di potenze.

Dal teorema così dimostrato risulta che, se consideriamo un cerchio C tutto interno ad A, e con γ ne indichiamo il centro, la funzione

$$w(z) = \sum_1^\infty u_n(z) \tag{*}$$

la quale è una funzione della variabile complessa z, fin. cont, mono

sarà sviluppabile in una serie $P(z - \gamma)$ convergente in C:

$$w(z) = \sum_{m=0}^{m=\infty} a_m (z - \gamma)^m.$$

Come si calcoleranno i coefficienti a_m dello sviluppo? Dico che basterà sviluppare in serie $P(z - \gamma)$ ciascun termine $u_n(z)$ della serie

$$\sum_1^\infty u_n(z)$$

e raggruppare tutti i termini che contengono la medesima potenza di $z - \gamma$. Poniamo invero

$$u_n(z) = \sum_{m=0}^{m=\infty} a_{m,n}(z - \gamma)^m;$$

avremo (Cauchy)

$$a_{m,n} = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{u_n(z)\,dz}{(z - \gamma)^{m+1}},$$

formula (5) di pag 141

$$a_m = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{w(z)\,dz}{(z - \gamma)^{m+1}},$$

gli integrali essendo estesi al contorno σ del cerchio C. Ora si ha per la (.)

$$a_m = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n(z)}{(z-\gamma)^{m+1}}\,dz,$$

quindi, a causa della convergenza in egual grado della serie sotto il segno:

$$a_m = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{u_n(z)\,dz}{(z-\gamma)^{m+1}} = \sum_{n=1}^{m=\infty} a_{m,n},$$

ciò che dimostra appunto la proprietà enunciata.

Es

Come esempio, si consideri la *serie di Lambert*

Serie di Lambert

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \frac{z}{1-z} + \frac{z^2}{1-z^2} + \frac{z^3}{1-z^3} + \ldots,$$

la quale in ogni cerchio di centro O e di raggio $R < 1$ è convergente in egual grado, poichè se

$$|z| \leq R < 1,$$

si ha

$$\left|\frac{1}{1-z^n}\right| \leq \frac{1}{1-R^n} < \frac{1}{1-R}$$

e la serie $\Sigma\,|z^n|$ è convergente in egual grado.

Potremo dunque, entro il cerchio di raggio $= 1$, trasformarla in serie di potenze di z così:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{m=\infty} z^n \left(\sum_{m=0}^{m=\infty} z^{m,n}\right) = \sum_{N=1}^{N=\infty} \theta(N)\cdot z^N.$$

La potenza z^N comparirà tante volte quante volte il numero N si può decomporre nel prodotto di due fattori

$$N = n\,(m+1),$$

sicchè $\theta(N)$ sarà precisamente *il numero dei divisori di* N.

Le considerazioni precedenti ci conducono a parlare delle funzioni di funzioni. Sia

$$w = f(z)$$

una funzione analitica di z e

$$W = F(w)$$

una funzione analitica di w. Quando potremo considerare W come funzione analitica di z? Per non considerare qui che il caso più semplice, supponiamo che z varii in un'area in cui $f(z)$ è finita, continua e monodroma e w varii conseguentemente in un'altra area in cui $F(w)$ è pure finita, continua e monodroma. Allora il segno

$$F(f(z))$$

avrà un significato preciso e rappresenterà una funzione finita, continua e monodroma di z. Ciò si può vedere sia ricorrendo alla definizione di Cauchy-Riemann, sia a quella di Weierstrass. Per dire di quest' ultimo modo, basterà evidentemente sviluppare W in serie di potenze di $w - w_0$ e ciascuna di queste potenze in serie di potenze di $z - z_0$. Così p. es. le funzioni

$$e^{e^z}, \quad \text{sen}(e^z), \quad e^{\text{sen}\,z}, \quad \text{sen}(\text{sen}\,z) \text{ ecc.}$$

saranno funzioni analitiche (monodrome) esistenti in tutto il piano.

Quando le funzioni componenti $f(z)$, $F(w)$ hanno un campo limitato d'esistenza, o sono polidrome, si possono presentare le più svariate circostanze. In particolare può accadere che il segno $F(f(z))$ non definisca una sola funzione analitica, ma più od anche infinite funzioni analitiche distinte, ed anche può accadere, al contrario, che il segno $F(f(z))$ non dia tutto il corso di una funzione analitica. Come esempi del primo caso citiamo

$$\sqrt{z^2} = \pm z, \quad \log(z^a) = a\log z + 2r\pi i,$$

con a costante *non* reale e frazionaria, e r intero qualunque, che si scindono la prima in due, la seconda in infinite funzioni analitiche distinte.

Come esempio della seconda circostanza, basta citare quello in cui $w = \varphi(z)$ sia una funzione a spazio lacunare e $W = F(w)$ ne sia l'inversa; allora $F[\varphi(z)] = z$ prende solo quei valori di z che appartengono al campo di esistenza di φ.

CAPITOLO V.

Punti singolari delle funzioni monodrome. — Poli e punti singolari essenziali. — Residui. — Indicatore logaritmico. — Inversione delle serie di potenze.

§ 49. — Punti regolari.

I nostri studi saranno nel seguito quasi esclusivamente rivolti alle funzioni analitiche monodrome, ovvero a porzioni di funzioni analitiche, monodrome nell'area in cui si considerano. Per abbreviare, quando non si dica esplicitamente il contrario, intenderemo semplicemente per funzione una funzione analitica che soddisfi a queste condizioni.

Si consideri in un'area connessa A una funzione $w(z)$, per la quale ogni punto dell'area A e del suo contorno sia o un punto interno al campo d'esistenza di $w(z)$ o un punto al limite del campo (punto singolare) (§ 44). Nell'intorno di un punto γ in A, interno al campo d'esistenza, la funzione $w(z)$ è sviluppabile in serie di potenze

$$w(z) = P(z - \gamma);$$

diremo anche, con Weierstrass, che la $w(z)$ è *regolare* nel punto γ, ovvero che γ è un punto regolare per $w(z)$. Ogni punto non regolare di A è un punto singolare per w.

Cominciamo dal dimostrare il seguente teorema fondamentale: *Nell'intorno di un punto regolare γ la funzione $w(z)$ non può annullarsi infinite volte.* Ciò risulta, con leggiera modificazione, da considerazioni già svolte al § 43, pag. 142. Suppongasi che la serie di potenze

$$w(z) = P(z - \gamma) = a_0 + a_1(z - \gamma) + \ldots.$$

si annulli in infiniti punti dell'intorno di γ. A causa della continuità, si annullerà anche in γ e il primo coefficiente della serie a_0 sarà certamente nullo. Il teorema sarà dimostrato quando si provi che *tutti* i coefficienti della serie sono nulli. Suppongasi che il primo coefficiente non nullo sia a_n; potremo scrivere

$$w(z) = (z - \gamma)^n \left\{ a_n + a_{n+1}(z - \gamma) + \ldots \right\} = (z - \gamma)^n P_1(z - \gamma),$$

dove la serie $P_1(z - \gamma)$, essendo il suo primo coefficiente $a_n \neq 0$, non si annullerà in γ.

Essendo $P_1(z - \gamma)$ continua in γ, potremo fare un intorno di γ così piccolo, che in esso la serie $P_1(z - \gamma)$ non si annulli mai, e allora la funzione

$$w(z) = (z - \gamma)^n P_1(z - \gamma)$$

non si annulla più in quell'intorno, salvo che in γ, ove è zero il primo fattore. Ciò è contrario all'ipotesi fatta, la quale è adunque assurda.

Come corollario del teorema, abbiamo l'importante risultato:

unicità di tutta la funzione analitica

Due funzioni $w(z)$, $w_1(z)$, che assumano i medesimi valori in infiniti punti addensantisi attorno ad un punto regolare per ambedue le funzioni, coincidono in tutta la loro estensione.

E infatti la differenza $w(z) - w_1(z)$ è regolare in γ e si annulla in infiniti punti dell'intorno, quindi in tutto l'intorno, onde il suo prolungamento analitico è sempre zero.

In particolare si vede che se due funzioni coincidono per un tratto lineare (o superficiale), del loro campo d'esistenza, per quanto piccolo sia, coincidono sempre.

L'area A può eventualmente contenere nel suo interno il punto $z = \infty$.

Lo studio delle funzioni $w(z)$ nell'intorno di $z = \infty$, cioè all'esterno di un cerchio di raggio sufficientemente grande nel piano, si riporta a quello di una funzione nell'intorno di un punto a distanza finita colla sostituzione

$$z' = \frac{1}{z},$$

che è un'inversione per raggi vettori reciproci, congiunta con un ribaltamento. I punti z a distanza grandissima dall'origine sono così riportati in punti z' vicinissimi all'origine e la distribuzione dei valori di $w(z)$ attorno a $z = \infty$ è la stessa di quella dei valori di

$$w_1(z') = w\left(\frac{1}{z'}\right)$$

nell'intorno di $z' = 0$. E perciò se $w_1(z')$ è regolare in quest'intorno, diremo che $w(z)$ è regolare nell'intorno di $z = \infty$; essa sarà allora sviluppabile in quest'intorno in una serie

$$w(z) = P\left(\frac{1}{z}\right) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_n}{z^n} + \dots$$

procedente per le potenze intere e positive di $\frac{1}{z}$.

§ 50. — **Infinitesimi.**

Se la funzione $w(z)$, regolare in γ, vi si annulla, si dice che ha ivi uno *zero*, ovvero un *infinitesimo*. In tal caso nella serie

$$w(z) = P(z-\gamma) = a_0 + a_1(z-\gamma) + \dots$$

son nulli alcuni dei coefficienti, a cominciare dal primo a_0. Se supponiamo che il primo coefficiente non nullo sia a_n, avremo

$$(1) \quad w(z) = (z-\gamma)^n P_1(z-\gamma) = (z-\gamma)^n \{ \alpha_0 + \alpha_1(z-\gamma) + \dots \}$$

dove il primo coefficiente α_0 della serie $P_1(z-\gamma)$ non è nullo. Ora, se formiamo il rapporto

$$\frac{w(z)}{(z-\gamma)^n} = P_1(z-\gamma)$$

e facciamo tendere z verso γ, vediamo che il rapporto converge verso la quantità finita e diversa da zero α_0. Le due quantità $w(z)$, $(z-\gamma)^n$, che diventano infinitesime insieme, avvicinandosi

z a γ, sono dunque da reputarsi del medesimo ordine. E poichè valutiamo $z-\gamma$ come infinitesimo del primo ordine, quindi $(z-\gamma)^n$ come infinitesimo d'ordine n, abbiamo il teorema: *Una funzione $w(z)$ regolare in un punto, e che ivi si annulli, vi diventa infinitesima d'ordine intero.*

Se il punto γ è all'infinito, dobbiamo, per quanto si è detto sopra, sostituire a $z-\gamma$ l'inversa $\frac{1}{z}$ della variabile, quindi se la funzione $w(z)$ sarà regolare all'infinito ed avrà ivi un infinitesimo, questo sarà d'ordine intero n e si avrà

$$w(z) = \frac{1}{z^n}\left\{ \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + \dots \right\} = \frac{1}{z^n} P_1\left(\frac{1}{z}\right),$$

con $\alpha_0 \neq 0$.

Osserviamo che *se una funzione $w(z)$ è regolare in un punto $z = \gamma$ ed ivi non si annulla, anche l'inversa $\frac{1}{w(z)}$ sarà regolare in γ.* E infatti facciamo un intorno di γ così piccolo che in esso $w(z)$ non si annulli mai; in questo intorno $\frac{1}{w(z)}$ è finita, continua e monodroma e quindi regolare in γ. Conoscendo lo sviluppo di $w(z)$:

$$w(z) = a_0 + a_1(z-\gamma) + a_2(z-\gamma)^2 + \dots,$$

si potrà calcolare razionalmente quello di

$$\frac{1}{w(z)} = \alpha_0 + \alpha_1(z-\gamma) + \alpha_2(z-\gamma)^2 + \dots$$

col metodo dei coefficienti indeterminati. Moltiplicando le due serie, otteniamo infatti le relazioni ricorrenti

$$\begin{cases} a_0\,\alpha_0 = 1 \\ a_1\,\alpha_0 + a_0\,\alpha_1 = 0 \\ a_2\,\alpha_0 + a_1\,\alpha_1 + a_0\,\alpha_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_n\,\alpha_0 + a_{n-1}\,\alpha_1 + \dots + a_1\,\alpha_{n-1} + a_0\,\alpha_n = 0, \end{cases}$$

dalle quali deduciamo

$$\alpha_0 = \frac{1}{a_0}, \quad \alpha_n = \frac{(-1)^{n-1}}{a_0^n} \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 \end{vmatrix}.$$

Il raggio del cerchio di convergenza della seconda serie sarà, in generale, differente da quello della primitiva.

È bene osservare come si comportano le derivate di una funzione nell' intorno di un suo punto d' infinitesimo d'ordine n. Si vedrà subito che: *Se l' infinitesimo d'ordine n è a distanza finita, ad ogni derivazione diminuisce di un' unità il suo ordine, talchè la derivata n^{ma} $w^{(n)}(z)$ non vi diventa più nulla; al contrario se l'infinitesimo è in $z = \infty$, ad ogni derivazione cresce di un' unità il suo ordine.*

§ 51. — Punti singolari. - Poli.

Cominciamo ora lo studio dei punti singolari delle funzioni, ed esaminiamo dapprima il caso dei punti singolari *isolati*. Sia $z = \gamma$ un punto singolare isolato; potremo descrivere, col centro in γ, un cerchio C così piccolo che sulla periferia di C e internamente a C non vi sia alcun altro punto singolare *all' infuori di γ*. Allora se, con un raggio *piccolo quanto si vuole*, si descrive un secondo cerchio C' concentrico a C, nell'anello fra C, C' la $w(z)$ è finita, continua e monodroma e, pel teorema di Laurent (§ 44), è quindi sviluppabile in una serie:

$$w(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n (z-\gamma)^n + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{b_n}{(z-\gamma)^n},$$

che procede insieme per le potenze intere ascendenti e discendenti di $z - \gamma$. Di queste due parti la prima converge entro tutto C, la seconda converge in tutto il piano, eccetto che in $z = \gamma$.

Ora possono darsi due casi ben distinti, e cioè: 1° *la serie discendente si riduce ad un polinomio*

$$\frac{b_1}{z-\gamma} + \frac{b_2}{(z-\gamma)^2} + \dots + \frac{b_n}{(z-\gamma)^n};$$

2° *la parte procedente per le potenze negative è un'effettiva serie.*

singolarità polari ed essenziali

Nel primo caso la singolarità si dice *polare* o un *polo* od anche, per una ragione che subito vedremo, un *infinito* della funzione; nel secondo caso la singolarità si chiama *essenziale*. (isolata)

Studiamo dapprima una singolarità polare $z = \gamma$. Nell' intorno di essa, salvo che in γ, ove la funzione analitica non è, propriamente parlando, definita, si ha:

$$(2) \qquad w(z) = \frac{b_1}{z-\gamma} + \frac{b_2}{(z-\gamma)^2} + \dots + \frac{b_n}{(z-\gamma)^n} + P(z-\gamma)$$

sviluppo intorno ad un polo al finito

Avvicinandosi con z a γ, tutti i valori della funzione risultano di modulo più grande di qualunque quantità assegnabile, ossia, per esprimersi con maggiore esattezza, se prendiamo una quantità positiva M grande a piacere, possiamo fare un intorno così piccolo del polo che in tutto l' intorno sia

$$|w(z)| > M.$$

I valori della funzione, avvicinandosi al polo, convergono dunque equabilmente verso ∞, sicchè se conveniamo di prendere per valore di $w(z)$ nel polo l' infinito, possiamo dire che *un polo è ancora un punto di continuità* della funzione. Si osservi poi che il prodotto

$$(z-\gamma)^n\, w(z),$$

convergendo z a γ, converge verso la quantità b_n finita e diversa da zero. Per ciò, quando attorno al polo vale lo sviluppo (2), con $b_n \neq 0$, si dice che il punto $z = \gamma$ è un infinito d'ordine n della $w(z)$. Dunque: *Gli infiniti, come gli infinitesimi, di una funzione analitica uniforme sono sempre di ordine intero.*

Osserviamo come si comporta l' inversa $\frac{1}{w(z)}$ nell' intorno del polo $z = \gamma$ di $w(z)$. Abbiamo per la (2)

$$w(z)(z-\gamma)^n = \overset{*}{P}(z-\gamma) = \alpha_0 + \alpha_1(z-\gamma) + \dots$$

$\alpha_{n-1} = a_{n-1} + b_1$

ove $P(z-\gamma)$ non si annulla in $z=\gamma$; per ciò

$$P_1(z-\gamma)=\frac{1}{P(z-\gamma)}$$

è pure regolare in $z=\gamma$ e non nulla. Ne risulta

$$\frac{1}{w(z)}=(z-\gamma)^n P_1(z-\gamma),$$

il che dimostra che *un polo d'ordine n della funzione $w(z)$ è, per la funzione inversa $\frac{1}{w(z)}$, un punto regolare e precisamente un infinitesimo d'ordine n.*

Questa proprietà di sparire, come singolarità, nell' inversa è caratteristica delle singolarità polari. E infatti, se il punto $z=\gamma$ è singolare per $w(z)$ e non per l' inversa $\frac{1}{w(z)}$, dovrà essere necessariamente un infinitesimo per $\frac{1}{w(z)}$, altrimenti, per quanto si è visto al paragrafo precedente, non sarebbe singolare per w. Ora, supposto che sia un infinitesimo d'ordine n per $\frac{1}{w(z)}$, avremo nell' intorno di γ:

$$\frac{1}{w(z)}=(z-\gamma)^n P(z-\gamma), \quad P(0)\neq 0,$$

onde ricaviamo per $w(z)$ uno sviluppo della forma (2). Si può dunque assumere come definizione della singolarità polare anche la seguente: *Un punto di singolarità di una funzione dicesi un polo, quando è singolare per la funzione, senza esserlo per l' inversa.*

Fino ad ora abbiamo supposto il polo a distanza finita. Se il polo è in $z=\infty$, si studierà in modo perfettamente analogo, come al precedente abbiamo trattato il caso di un infinitesimo all' infinito, e così avremo: *Se in $z=\infty$ la $w(z)$ ha un polo di ordine n, nell' intorno di $z=\infty$ si svilupperà colla formola*

$$w(z)=b_1 z+b_2 z^2+\ldots.+b_n z^n+P\left(\frac{1}{z}\right). \tag{2*}$$

Si osserverà che questo sviluppo si ottiene semplicemente da quello (2) relativo ad un polo a distanza finita cangiando $z-\gamma$

in $\frac{1}{z}$. La medesima osservazione, senza che sia necessario ripeterla, si applicherà nel seguito.

Dagli sviluppi (2), (2*) si rileva subito come si comportano le derivate di una funzione $w(z)$ nell' intorno di un polo e si vede che: *Per ogni derivazione, cresce di un' unità l'ordine d' infinito, se questo trovasi a distanza finita, e diminuisce invece di un' unità se è all' infinito.*

§ 52. — Esempi di singolarità essenziali.

Un punto singolare, che non sia un polo, si dirà un punto *singolare essenziale*, sia che si tratti di una singolarità isolata, ovvero di una singolarità limite d' infinite altre singolarità. Per far subito comprendere la differenza capitale fra una singolarità polare ed una singolarità essenziale adduciamo qualche esempio, riservandoci a dare nel seguito i teoremi generali. In vicinanza di un punto regolare, ovvero di un polo, una funzione $w(z)$ non può, pel teorema fondamentale del § 49, riprendere infinite volte il medesimo valore; sicchè *se una funzione $w(z)$ prende un medesimo valore in tutti i punti di un gruppo infinito, ogni punto limite del gruppo è una singolarità essenziale.* Negli esempi che ora andiamo ad addurre si vedrà inversamente che le funzioni considerate, in vicinanza della singolarità essenziale, riprendono infinite volte un medesimo valore fissato ad arbitrio.

Prendiamo le funzioni

$$e^z, \quad \operatorname{sen} z,$$

che hanno in $z=\infty$ una singolarità essenziale isolata, come risulta dalla loro rappresentazione per serie $P(z)$ convergenti in tutto il piano, od anche dalla loro periodicità, per cui riprendono il medesimo valore in punti che si addensano nell' intorno di $z=\infty$. Sia $A=\varrho\, e^{i\omega}$ una costante qualunque *finita* prefissata; avremo $e^z=A$ tutte le volte che sia

$$x=\log\varrho, \quad y=\omega+2n\pi$$

Teorema di Casorati

con n intero qualunque. Dunque nell' intorno di $z = \infty$ la funzione e^z prende infinite volte il valore fissato A. Lo stesso vale naturalmente di

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Se si vuole trasportare la singolarità essenziale a distanza finita, basterà considerare le funzioni

$$e^{\frac{1}{z}}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right),$$

che avranno in $z = 0$ una singolarità essenziale (isolata) e in vicinanza di $z = 0$ riprenderanno infinite volte ogni valore, eccettuati i valori 0, ∞ per la prima, e il valore ∞ per la seconda.

Gli esempi ora addotti sono relativi al caso più semplice di singolarità essenziali isolate. Un esempio di singolarità essenziale *d'ordine superiore* sarebbe il punto $z = 0$ per la funzione

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)}\right).$$

Qui tutti i punti singolari (essenziali) sono i punti

$$z = \frac{1}{n\pi}$$

e queste singolarità isolate si addensano attorno a $z = 0$. A più forte ragione, come è chiaro, si presenterà ora, nelle vicinanze di $z = 0$, la circostanza osservata pel caso della singolarità isolata. E se, ripetendo n volte il nostro processo, consideriamo p. es. la *catena sinusoidale*:

$$\operatorname{sen}\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\cdot}{\cdot\,\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{1}{z}}}}}$$

Tra l'altro ciò offre un modo di costruire insieme che hanno i derivati di ordine n qualunque -

questa funzione avrà un gruppo di 1ª specie di singolarità essenziali il cui $(n-1)^{mo}$ gruppo derivato consterà del solo punto $z = 0$; una tale singolarità essenziale si potrà dire dell'ordine n.

Generalmente però, nel seguito, considereremo soltanto singolarità essenziali del 1º ordine, cioè isolate.

§ 53. — Residui.

Consideriamo un punto $z = \gamma$, singolare o no per la funzione $w(z)$, e supponiamo, che, se è singolare, sia isolato.

Preso un intorno di γ, che non contenga alcun punto singolare, salvo eventualmente γ, descriviamo una piccola curva chiusa σ, p. es. un cerchio col centro in γ, che giri una ed una sola volta attorno a γ nel senso diretto. L'integrale:

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma w(z)\,dz = b_1} \qquad \text{Residuo}$$

che sarà zero, se γ sarà un punto regolare a distanza finita, avrà in generale un valore indipendente dalla curva σ descritta, come risulta dal teorema fondamentale di Cauchy; questo valore si chiama, secondo Cauchy, *residuo integrale* od anche semplicemente *residuo* della funzione in γ. Si può dare del residuo anche un'altra definizione, che importa molto osservare. Supponiamo dapprima γ a distanza finita; avremo nell' intorno del punto:

$$(3) \qquad w(z) = P(z-\gamma) + \frac{b_1}{z-\gamma} + \frac{b_2}{(z-\gamma)^2} + \dots,$$

Sviluppo intorno ad una funzione essenziale al punto

Residuo b_1

dove la serie discendente si arresterà ad un polinomio, se la singolarità è polare. Dico che in ogni caso: *Il residuo è eguale al coefficiente b_1 della potenza $(z-\gamma)^{-1}$.*

Per dimostrarlo, osserviamo che se calcoliamo l' integrale

$$\int_\sigma (z-\gamma)^n dz,$$

esteso ad un cerchietto di centro γ, dove si suppone n intero, positivo o negativo, troveremo il valore *zero* se $n \neq -1$, ed invece

$2\pi i$ per $\int_\sigma \frac{dz}{z-\gamma}$. E invero se n è positivo o nullo, ciò risulta subito dal teorema stesso di Cauchy. Per n qualunque, osserviamo che lungo il cerchio si ha

$$z-\gamma=\varrho e^{i\theta}, \quad dz = i\varrho e^{i\theta}\, d\theta \quad (\varrho \text{ costante}),$$

indi

$$\int_\sigma (z-\gamma)^n\, dz = i\varrho^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{(n+1)i\theta}\, d\theta\,;$$

questo integrale è zero per $n+1 \neq 0$ ed $=2\pi i$ per $n=-1$, *c. d. d.*

Ciò posto, sostituendo in

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma w(z)\, dz$$

per $w(z)$ il valore (3), ed osservando che, a causa della convergenza in egual grado della serie del secondo membro (posto pure che si tratti di una singolarità essenziale), si può integrare termine a termine, si avrà :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma w(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma P(z-\gamma)\, dz + \frac{b_1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{dz}{z-\gamma} + \frac{b_2}{2\pi i}\int_\sigma \frac{dz}{(z-\gamma)^2} + \dots$$

Ora, pel teorema di Cauchy, il primo integrale del secondo membro è nullo e nulli sono pure, per l'osservazione superiore, tutti gli altri, eccetto

$$\frac{b_1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{dz}{z-\gamma} = b_1,$$

ciò che dimostra appunto il teorema enunciato.

Poniamo ora che il punto $z=\gamma$ sia in $z=\infty$; avremo allora in questo intorno

$$(3^*) \qquad w(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n z^n + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots$$

dove questa volta avremo in $z=\infty$ una singolarità polare od essenziale, secondo che la serie *ascendente* si riduce ad un polinomio o no, mentre $z=\infty$ sarà regolare se il polinomio si riduce ad una costante. In ogni caso dico che : *Il residuo della funzione in $z=\infty$ sarà il coefficiente $-b_1$ della potenza z^{-1}, cangiato di segno.*

Osserviamo subito che, in virtù di questo teorema, contrariamente a quello che accade a distanza finita, il residuo non sarà nullo in generale per una funzione regolare nell' intorno di $z=\infty$.

Se descriviamo un cerchio grandissimo s col centro nell'origine, potremo considerarne la parte esterna come intorno di $z=\infty$, e volendo allora percorrere la circonferenza in guisa che l' intorno resti alla sinistra, verremo a percorrerla nel senso inverso delle rotazioni. Avremo dunque pel residuo il valore

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_s w(z)\, dz, \quad -b_1$$

intendendo ora che s sia percorso nel verso positivo degli angoli. Sostituendo a $w(z)$ il valore (3*) e integrando per serie, ne risulta subito la verità della proposizione enunciata.

Facciamo ancora un'osservazione sul calcolo dei residui in un caso semplice, che è utile spesso applicare. Supponiamo che il punto singolare sia un polo del 1° ordine ; allora diciamo che *il residuo è eguale al valore dell' inversa della derivata della funzione inversa $\frac{1}{w(z)}$ in quel punto.*

E infatti si ha nel caso supposto

$$w(z) = \frac{b_1}{z-\gamma} + P(z-\gamma),$$

indi

$$\frac{1}{w(z)} = \frac{z-\gamma}{b_1} + (z-\gamma)^2 P_1(z-\gamma),$$

onde per valore della derivata di $\frac{1}{w(z)}$ in $z=\gamma$ troviamo appunto

$$\left(\frac{1}{w(z)}\right)'_{z=\gamma} = \frac{1}{b_1}.$$

§ 54. — L'integrale $\int_s w(z)\,dz$ nel caso di punti singolari interni.

Consideriamo un'area piana connessa finita, od anche estendentesi all'infinito, ma in questo caso però colla condizione che il punto $z = \infty$ non si trovi sul contorno (che cioè il contorno sia finito), e supponiamo che la funzione $w(z)$ sia, in tutta l'area e sul contorno, regolare, salvo in un numero *finito* di punti singolari

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots., \quad a_n$$

interni all'area. Proponiamoci di calcolare il valore dell'integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_s w(z)\,dz,$$

esteso al contorno completo dell'area, integrale che sarebbe certamente nullo se l'area fosse finita e non contenesse punti singolari. Indicando con

$$R_1, \quad R_2, \quad \ldots., \quad R_n$$

i residui della funzione in $a_1, a_2, \ldots., a_n$ e con R_∞ il residuo in $z = \infty$, se l'area si estenderà all'infinito, dimostriamo la formola di Cauchy

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_s w(z)\,dz = R_1 + R_2 + \ldots. + R_n + (R_\infty),}$$

Cauchy

dove il termine fra parentesi (R_∞) è da sopprimersi se l'area è finita.

In parole, abbiamo il teorema: *Il valore dell'integrale*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_s w(z)\,dz,$$

esteso al contorno completo dell'area, è eguale alla somma dei residui nei punti singolari interni, se l'area è finita, e a questa somma aumentata del residuo del punto ∞, *se l'area è infinita.*

Se infatti escludiamo con piccoli cerchi $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ i punti singolari dall'area ed anche il punto all'infinito, se l'area è infinita, togliendo dall'area la regione esterna ad un cerchio grandissimo Σ, la nuova area ottenuta sarà finita ed in essa $w(z)$ sarà finita, continua e monodroma, il contorno incluso. Pel teorema fondamentale, avremo quindi

$$\int_s w(z)\,dz + \int_{\sigma_1} w(z)\,dz + \ldots. + \int_{\sigma_n} w(z)\,dz + \left(\int_\Sigma w(z)dz\right) = 0,$$

dove i circoli σ sono percorsi in verso negativo e il cerchio Σ in verso positivo. Percorrendoli tutti in verso positivo, avremo

$$\int_s w(z)\,dz = \int_{\sigma_1} w(z)dz + \int_{\sigma_2} w(z)dz + \ldots. + \int_{\sigma_n} w(z)dz - \left(\int_\Sigma w(z)dz\right),$$

la quale formola, per la definizione stessa dei residui, coincide colla formola da dimostrarsi.

Una conseguenza di questa formola merita di essere subito notata. Supponiamo che la funzione analitica uniforme $w(z)$ esista in tutto il piano complesso (su tutta la sfera complessa) ed abbia un numero finito di punti singolari e dimostriamo: *La somma dei residui di* $w(z)$ *nei punti singolari e nel punto* $z = \infty$ *è nulla.* Descriviamo infatti un cerchio di raggio grandissimo includente tutti i punti singolari a distanza finita; l'integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_s w(z)\,dz,$$

esteso al cerchio in senso diretto, è eguale alla somma dei residui dei punti singolari interni e d'altra parte al residuo, cangiato di segno, del punto $z = \infty$, ciò che dimostra la nostra proposizione.

§ 55. — Polidromia dell'integrale $W(z) = \int_a^z w(z)\,dz$.

Stabilita la nozione di residuo, possiamo riprendere le ricerche del § 41 intorno alla polidromia degli integrali indefiniti. In un'area *semplicemente connessa* la funzione $w(z)$ sia dappertutto regolare, eccettuato in un numero finito di punti, i cui rispettivi residui siano

$$R_1, \quad R_2, \quad \ldots., \quad R_n;$$

e, se l'area si intende all' infinito, aggiungiamo ancora il residuo del punto all' infinito. Se escludiamo dall'area i punti singolari (ed eventualmente il punto $z = \infty$), mediante piccoli cerchi $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, la nuova area ottenuta sarà più volte connessa; se la rendiamo semplicemente connessa mediante tagli semplici fra i contorni aggiunti ed il primitivo, vediamo subito, applicando i risultati del citato § 41, che i moduli di periodicità dell' integrale indefinito $\int^z w(z)\,dz$ ai tagli saranno

$$\boxed{2\pi i R_1, \quad 2\pi i R_2, \quad \ldots., \quad 2\pi i R_n;}$$ moduli di periodicità

onde, se $\int_a^z w(z)\,dz$ è un particolare valore dell'integrale in z, tutti gli altri valori saranno

$$\int_a^z w(z)\,dz + 2\pi i\,(m_1 R_1 + m_2 R_2 + \ldots. m_n R_n);$$

i numeri m_i essendo interi positivi, o negativi arbitrari.

Nonostante la presenza dei punti singolari, l' integrale potrà essere monodromo; ciò accadrà manifestamente allora e allora soltanto quando tutti i residui siano nulli. Così, p. es., gli integrali

$$\int_a^z \frac{dz}{z^2}, \quad \int_a^z \frac{dz}{z^3}, \quad \ldots., \quad \int_a^z \frac{dz}{\operatorname{sen}^2 z}$$

sono monodromi anche nelle aree racchiudenti punti singolari, perchè ivi sono nulli i residui delle funzioni sotto il segno. Ma consideriamo invece l' integrale $\int_1^z \frac{dz}{z}$ che, senza presupporre qui la nozione della funzione logaritmica, indichiamo con

$$\log z = \int_1^z \frac{dz}{z}.$$

Il residuo di $\frac{1}{z}$ in $z = 0$ è $= 1$ e perciò la polidromia dell' integrale consiste nell'ammettere il modulo di periodicità $2\pi i$.

Ancora consideriamo l' integrale

$$\int_0^z \frac{dz}{z^2+1} = \operatorname{arc\,tang} z;$$

la funzione sotto il segno ha i due poli del primo ordine $z = i$, $z = -i$, e poichè

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right),$$

vediamo che i residui sono rispettivamente

$$\frac{1}{2i}, \quad -\frac{1}{2i},$$

onde avremo per l' integrale un unico modulo di periodicità $= \pi$, come risulta anche dalla definizione diretta della funzione arc tang z.

In fine consideriamo le funzioni

$$\frac{1}{\operatorname{sen} z}, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z},$$

che hanno poli del 1° ordine in tutti i punti $z = n\pi$, la prima col residuo $(-1)^n$ la seconda col residuo $+1$, come si rileva subito dalla regola pel calcolo dei residui data alla fine del § 53. Se ne conclude che le funzioni

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^z \frac{dz}{\operatorname{sen} z}, \qquad \int_{\frac{\pi}{2}}^z \cot z\,dz$$

hanno un unico modulo di periodicità $= 2\pi i$, ciò che risulta anche dalle loro espressioni effettive

$$\log \operatorname{tang} \frac{z}{2}, \qquad \log \operatorname{sen} z.$$

Negli esempi addotti fin qui non si avevano moduli di periodicità infinitesimi. Un esempio di tali funzioni si ha, p. es., nell' integrale

$$\int_0^z \left(\frac{1}{z-1} + \frac{\sqrt{2}}{z-2}\right) dz ,$$

con moduli di periodicità $2\pi i$, $2\pi i\sqrt{2}$ in rapporto reale incommensurabile.

§ 56. — Indicatore logaritmico.

Consideriamo una funzione $w(z)$ che sia uniforme in un' area A, incluso il contorno, ed abbia ivi soltanto singolarità polari. Ricerchiamo se il rapporto

$$\frac{1}{w}\,\frac{dw}{dz} = \frac{w'}{w}$$

che si dice la *derivata logaritmica* della $w(z)$, avrà punti singolari e quali. In ogni punto regolare di w, che non ne sia un infinitesimo, è pure regolare $\frac{w'}{w}$, onde le singolarità di $\frac{w'}{w}$ possono essere soltanto negli infinitesimi e negli infiniti di w. Vediamo se $\frac{w'}{w}$ avrà effettivamente in ogni tale punto una singolarità e di quale specie.

Supponiamo dapprima che $z = \gamma$ sia un infinitesimo d'ordine n di $w(z)$, talchè nell' intorno di γ avremo

(1) $$w(z) = (z-\gamma)^n P(z-\gamma), \quad \text{con } P(0) \neq 0 .$$

Derivando logaritmicamente, risulta

$$\frac{w'(z)}{w\,z} = \frac{n}{z-\gamma} + \frac{P'(z-\gamma)}{P(z-\gamma)};$$

ma la seconda parte $\frac{P'(z-\gamma)}{P(z-\gamma)}$ è regolare nell' intorno di $z = \gamma$, poichè $P(0) \neq 0$, onde in $z = \gamma$ la $\frac{w'}{w}$ ha un polo del 1° ordine col residuo n, eguale all'ordine di infinitesimo di $z = \gamma$ per $w(z)$. Per

un infinito d'ordine n il calcolo è perfettamente analogo, bastando solo cangiare nella (4) n in $-n$. Ne concludiamo: *Se nell'area che si considera la funzione $w(z)$ non ha singolarità essenziali, la sua derivata logaritmica $\frac{w'(z)}{w(z)}$ vi ha soltanto singolarità polari del primo ordine; queste sono situate negli infinitesimi e negli infiniti di w e i loro residui sono dati da $+n$ o da $-n$, secondo che per $w(z)$ il punto considerato è un infinitesimo, ovvero un infinito d'ordine n.*

Questo teorema, per quanto riguarda il valore del residuo, sussiste ancora quando il punto $z = \gamma$ sia in $z = \infty$, ma allora la derivata logaritmica, in luogo di un polo, ha in $z = \infty$ un infinitesimo del 1° ordine. E invero se in $z = \infty$ la $w(z)$ ha un infinitesimo, si ha nel suo intorno

$$w(z) = \frac{1}{z^n}\left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots\right), \quad \text{con } a_0 \neq 0 ,$$

onde

$$\frac{w'(z)}{w(z)} = -\frac{n}{z} - \frac{\frac{a_1}{z^2} + \frac{2a_2}{z^3} + \dots}{a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots} = -\frac{n}{z} + \frac{a_0}{z^2} + \frac{a_1}{z^3} \dots$$

e il residuo di $\frac{w'}{w}$ in $z = \infty$ (che è un infinitesimo del primo ordine per $\frac{w'}{w}$) è ancora $+n$. Similmente, se $z = \infty$ è un polo d'ordine n per w, avremo nell' intorno:

$$w(z) = z^n\left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots\right), \quad a_0 \neq 0$$

onde

$$\frac{w'(z)}{w(z)} = \frac{n}{z} + \frac{a_0}{z^2} + \frac{a_1}{z^3} + \dots,$$

formola che pone in evidenza per $\frac{w'(z)}{w(z)}$ in $z = \infty$ un infinitesimo del primo ordine col residuo $-n$.

Ciò premesso, si abbia in un' area connessa A, finita o infinita (ma con contorno finito), una funzione $w(z)$, uniforme nell' area, che sul contorno non diventi mai nè zero, nè infinita, e non abbia alcuna singolarità essenziale nell' interno o sul contorno dell' area, I suoi infinitesimi ed infiniti nell' interno dell' area saranno certamente in numero finito, altrimenti (§ 52) la $w(z)$ avrebbe singolarità essenziali. Supponiamo che gli infinitesimi di $w(z)$ siano nei punti

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots., \quad a_r,$$

coi rispettivi ordini

$$m_1, \quad m_2, \quad \ldots., \quad m_r,$$

e i poli nei punti

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots., \quad b_s,$$

con ordini dati da

$$n_1, \quad n_2, \quad \ldots., \quad n_s.$$

La derivata logaritmica $\dfrac{w'(z)}{w(z)}$ non ha alcuna singolarità sul contorno, mentre nell' interno dell' area ha poli del primo ordine solo nei punti a, b con residui $+m$ nei primi, $-n$ nei secondi.

Se estendiamo al contorno completo s dell' area l' integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{w'(z)\,dz}{w(z)},$$

otterremo dunque (§ 54):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{w'(z)\,dz}{w(z)} = \sum_{k=1}^{h=r} m_k - \sum_{h=1}^{h=s} n_h .$$

Se computiamo ciascun infinitesimo e ciascun polo tante volte quante unità sono nel suo ordine, e poniamo

$$\sum m_k = N_0, \quad \sum n_h = N_\infty,$$

sarà evidentemente N_0 il numero totale degli infinitesimi, N_∞ quello dei poli, e risulterà la formola notevolissima, dovuta a Cauchy:

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_s d\log w = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{w'(z)\,dz}{w(z)} = N_0 - N_\infty .}$$ Cauchy

indicatore logaritmico

L' integrale del primo membro prende anche il nome di *indicatore logaritmico* di Cauchy; il suo computo fa conoscere la differenza fra il numero delle radici e il numero dei poli di $w(z)$ nell'area, *supposto che non vi siano nè radici nè poli sul contorno.*

Supponiamo in particolare che la $w(z)$ sia uniforme su tutta la sfera complessa e non abbia ivi che singolarità polari [1]), le quali saranno quindi in numero finito. La sua derivata logaritmica avrà un numero finito di poli del primo ordine e la somma di tutti i suoi residui sarà nulla (§ 54). Dunque: *Se una funzione $w(z)$ è uniforme su tutta la sfera complessa e non ha che singolarità polari, essa diventa tante volte zero quante volte infinita.*

Se applichiamo questo teorema al caso di una funzione razionale intera

$$w(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots. + a_{m-1} z + a_m,$$

D'Alembert

siccome essa ha una sola singolarità polare in $z = \infty$ e questa d'ordine m, ne deduciamo il teorema fondamentale dell' algebra: *Ogni equazione di grado m ha precisamente m radici.*

§ 57. — Formola $\Omega_1 - \Omega_0 = 2\pi(N_0 - N_\infty)$.

Alla formola di Cauchy per l' indicatore logaritmico si può dare un'altra forma, che è utile osservare.

Supponiamo per un momento che il contorno sia unico, cioè l' area semplicemente connessa. Percorrendo il contorno, $w(z)$ ha in ogni punto un modulo ϱ (non nullo nè infinito) perfettamente determinato ed un argomento Ω, determinato a meno di multipli di 2π. Ma se in un punto iniziale M_0 del contorno, scegliamo un determinato Ω_0 fra i valori possibili dell' argomento, lungo tutto il percorso sarà Ω perfettamente determinato dalla legge di continuità, sicchè dopo percorso il contorno a partire da M_0 (in senso positivo), al ritorno in M_0, Ω avrà acquistato un valore Ω_1 differente da Ω_0 per multipli di 2π; ora dico che si avrà precisamente

$$\Omega_1 - \Omega_0 = 2\pi(N_0 - N_\infty). \tag{5}$$

[1]) Si vedrà fra breve che una tale funzione è necessariamente razionale in z (vedi § 61).

E infatti abbiamo

$$w(z) = \varrho e^{i\Omega},$$

$$d \log w(z) = d \log \varrho + i\, d\Omega,$$

onde

$$\frac{1}{2\pi i}\int_s d \log w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_s d \log \varrho + \frac{1}{2\pi}\int_s d\Omega .$$

Ora il primo integrale è nullo perchè $\log \varrho$, essendo preso nel senso aritmetico, riprende al ritorno il valore iniziale ed il secondo è eguale appunto a $\frac{1}{2\pi}(\Omega_1 - \Omega_0)$, ciò che dimostra la formola.

Manifestamente, se l'area fosse a più contorni, avremmo per risultato d'integrazione una somma di tante differenze come $\Omega_1 - \Omega_0$, cioè

$$\sum (\Omega_1 - \Omega_0) = 2\pi(N_0 - N_\infty),$$

In particolare si consideri un infinitesimo $z = a$ d'ordine n per $w(z)$ e se ne prenda un intorno abbastanza piccolo, descrivendo ad esempio un cerchietto col centro in a, perchè in esso e sul contorno non vi siano altri infinitesimi nè infiniti della funzione. Se con z percorriamo il contorno s del cerchio, l'argomento di w crescerà di $2\pi n$, ossia nel piano w la congiungente l'origine coll'indice di w compirà n giri, in senso positivo, attorno all'origine, mentre z ne compie uno solo. Lo stesso vale evidentemente se $z = a$ è invece un polo d'ordine n; soltanto gli n giri si compirebbero allora in senso negativo. Di qui si intende facilmente che nel detto intorno di $z = a$ la funzione $w(z)$ riprenderà precisamente n volte ogni valore abbastanza prossimo a zero (o ad infinito).

Per precisare la cosa e dimostrarla rigorosamente, ritorniamo alla formola generale di Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{w'(z)}{w(z)}\, dz = N_0 - N_\infty,$$

supponendo naturalmente soddisfatte le condizioni del § 56 per la validità della formola. Poichè il modulo di w sul contorno non

si annulla, ammetterà un minimo $m > 0$, talchè su tutto il contorno sarà

$$[w_s] \geq m .$$

Sia w_1 una costante qualunque di modulo

$$|w_1| < m ;$$

la differenza

$$w(z) - w_1$$

non è nulla (nè infinita) al contorno, e nell'interno ha evidentemente lo stesso numero di poli di $w(z)$ cioè N_∞. Sia N'_0 il numero degli infinitesimi di questa differenza nel campo; avremo per la formola di Cauchy:

$N'_\infty = N_\infty$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{w'(z)}{w(z) - w_1}\, dz = N'_0 - N_\infty . \tag{6}$$

Facciamo variare w_1 con continuità, sempre supponendo $|w_1| < m$. Il primo membro della (6) è una funzione continua di w_1, poichè la funzione sotto il segno integrale è funzione *finita* e continua di w_1, la differenza $w(z) - w_1$ non annullandosi mai; d'altra parte, essendo il suo valore un numero intero, non potrebbe variare che in modo discontinuo. Se ne conclude che per tutti i valori di w_1 con $|w_1| < m$ l'indicatore logaritmico serba sempre lo stesso valore, onde si ha

$N'_0 = N_0$

$$N'_0 = N_0 .$$

Abbiamo dunque il teorema: *Se la funzione $w(z)$ è regolare in tutti i punti di un'area connessa A, incluso il contorno, eccetto in un numero finito di poli nell'interno, e sul contorno il suo modulo si serba sempre superiore od eguale ad un minimo positivo m, nell'interno prenderà ogni valore di modulo $< m$ precisamente tante volte quante volte si annulla.*

Se si applica il teorema stesso alla funzione inversa $\frac{1}{w(z)}$, si vede che, indicando con M il massimo modulo di $w(z)$ sul contorno: *la $w(z)$ prenderà nell'interno tante volte ogni valore di modulo $> M$ quante volte diviene infinita.* Se dunque $w(z)$ non ha infiniti nell'area (se è regolare nell'area), ed M per $w(z)$ è il massimo modulo sul contorno, non vi sarà mai nell'interno un modulo per $w(z)$ che sia $> M$: *Per una funzione regolare nel campo il massimo modulo ha luogo sul contorno.*

Si aggiunga che, fatta eccezione al più da un numero finito di valori, la $w(z)$ prenderà ogni valore w di modulo $|w| < m$ precisamente N_0 volte *distinte*, ed ogni valore di modulo $> M$ precisamente N_∞ volte *distinte*. E invero se la differenza $w(z) - w_1$ diventa in qualche punto infinitesima d'ordine superiore al primo, ivi si annulla la derivata $w'(z)$; ma gli infinitesimi della derivata nell'area sono in numero finito.

Come caso particolare del risultato superiore, abbiamo il teorema: *Nell' intorno di un infinitesimo (o di un infinito) di ordine n la $w(z)$ prende ogni valore di modulo sufficientemente piccolo (o sufficientemente grande) precisamente n volte distinte.*

(·)

§ 58. — Inversione delle serie.

I risultati ultimamente conseguiti ci conducono a parlare della inversione delle funzioni o delle serie di potenze. Sia $w = f(z)$ una funzione analitica di z; domandiamo se si potrà considerare inversamente z come funzione analitica di w. Essendo $z = \gamma$ un punto regolare per $w(z)$, si abbia

$$w = P(z - \gamma) = a_0 + a_1 (z - \gamma) + a_2 (z - \gamma)^2 + \ldots.$$

e supponiamo dapprima che in γ non si annulli $f'(z)$, che sia cioè

$$a_1 \neq 0.$$

Cangiando $z - \gamma$ in z e $w - a_0$ in w, scriviamo

$$w = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots, \quad \text{con} \quad a_1 \neq 0 \tag{7}$$

Facciamo un intorno così piccolo di $z = 0$, descrivendo un cerchio C col centro in 0, che in C e sul contorno w non diventi nè zero, nè infinita. Se m è il minimo modulo di w sul contorno s, la $f(z)$ prenderà entro C ogni valore w_1 di modulo $|w_1| < m$ una ed una sola volta in un punto z_1. Descrivendo nel piano w, col centro in $w = 0$, un cerchio C' di raggio m, ad ogni punto w_1

(·) v. più in generale § 73 in cui si risolve l'equazione $f(w,z)=0$

entro C' corrisponderà un solo punto z_1 entro C; dimostreremo che z_1 è funzione analitica di w_1, regolare nell' intorno di $w = 0$. La funzione:

$$z \frac{f'(z)}{f(z) - w_1}$$

diventa entro C infinita del primo ordine solo in $z = z_1$ col residuo z_1 [1]), onde avremo

$$z_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{z f'(z)}{f(z) - w_1} dz. \tag{8}$$

Mentre z percorre il contorno è

$$|f(z)|_s \geq m, \qquad |w_1| < m,$$

onde $\left| \dfrac{w_1}{f(z)} \right| < 1$ e possiamo sviluppare

$$\frac{1}{f(z) - w_1} = \frac{1}{f(z)} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{w_1}{f(z)}}$$

nella serie $\sum_{n=0}^{n=\infty} \dfrac{w_1^n}{f^{n+1}(z)}$. Sostituendo nella (8), e integrando termine a termine la serie convergente in egual grado, risulterà

$$z_1 = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n w_1^n,$$

avendo posto

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{z f'(z)}{f^{n+1}(z)} dz, \tag{9}$$

[1]) In generale, se in un prodotto

$$\varphi(z)\, \psi(z)$$

il primo fattore è regolare in un punto $z = a$, ed il secondo vi ha un polo del 1° ordine col residuo R, il residuo del prodotto sarà $R\,\varphi(a)$, poichè esso è dato da

$$\lim_{z=a} \{ (z - a)\, \varphi(z)\, \psi(z) \} = \varphi(a) \lim_{z=a} \{ (z - a)\, \psi(z) \}$$

ove si osserverà che il primo coefficiente α_0 è nullo. Abbiamo dunque il teorema: *Se w è sviluppabile per una serie* (7) *di potenze $P(z)$ col primo coefficiente $a_1 \neq 0$, si può inversamente esprimere, in un intorno di $w = 0$, la z come una serie di potenze di w*:

$$z = \alpha_1 w + \alpha_2 w^2 + \alpha_3 w^3 + \dots \tag{10}$$

I coefficienti α_n sono definiti dalle (9), ma possono anche calcolarsi algebricamente sostituendo nel secondo membro della (10) per w la serie (7) e sviluppando, secondo il teorema del § 48, in serie di potenze di z. Identificando la serie del secondo membro con z, si ottiene una serie di equazioni lineari ricorrenti nelle α:

$$\begin{aligned} a_1 \alpha_1 &= 1 \\ a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_1^2 &= 0 \\ a_1 \alpha_3 + 2 a_2 \alpha_1 \alpha_2 + a_3 \alpha_1^3 &= 0 \\ \dots\dots&\dots\dots \\ \dots\dots&\dots\dots \end{aligned}$$

che determinano successivamente i coefficienti α.

Supponiamo ora il caso più generale che

$$w = f(z)$$

abbia in $z = 0$ un infinitesimo d'ordine n, onde avremo

$$w = z^n (a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \dots), \quad \text{con} \quad a_1 \neq 0. \tag{11}$$

Poniamo $w = t^n$ e, estraendo la radice n^{ma}, avremo

$$t = z \sqrt[n]{a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \dots}.$$

Nell'intorno di $z = 0$ il radicale, che è funzione *regolare* di z perchè la funzione sotto il segno non si annulla per $z = 0$, si può convertire in una serie di potenze, onde scriviamo

$$t = z\,P(a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \dots), \quad a_1 \neq 0.$$

Pel risultato precedente, se consideriamo z come funzione di t, assumendo $z = 0$ per $t = 0$, la z è funzione regolare di t:

$$z = \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 \dots;$$

0 per log z da l'esempio di un punto critico non algebrico

sostituendo per t il suo valore $w^{\frac{1}{n}}$, abbiamo z espressa per w colla serie

$$z = \beta_1 w^{\frac{1}{n}} + \beta_2 w^{\frac{2}{n}} + \dots \tag{12}$$

Per ogni valore di w, interno al cerchio di convergenza di questa serie, abbiamo n valori distinti per z, che girando attorno a $z = 0$ si permutano ciclicamente fra loro e costituiscono *n rami* di una medesima funzione analitica di w [1]). Il punto $w = 0$ è un punto *critico algebrico* per z (punto di diramazione). Se indichiamo con

$$z_1, \quad z_2, \quad \dots, \quad z_n$$

gli n rami di z, corrispondenti ad un valore di w, ogni funzione razionale intera e simmetrica di $z_1, z_2, \dots, z_n$ sarà una funzione di w regolare in $w = 0$. Ciò si può vedere anche direttamente, dimostrando la cosa per le funzioni simmetriche elementari (somme delle potenze simili):

$$z_1^r + z_2^r + \dots + z_n^r \quad (r \text{ intero positivo}).$$

E invero la funzione

$$\frac{z^r f'(z)}{f(z) - w},$$

entro il cerchio C, ha poli del 1º ordine in $z_1, z_2, \dots, z_n$, coi residui $z_1^r, z_2^r, \dots, z_n^r$, onde risulta

$$z_1^r + z_2^r + \dots + z_r^r = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{z^r f'(z)}{f(z) - w} dz.$$

Il secondo membro è evidentemente una funzione regolare di w nell'interno di $w = 0$.

[1]) Essendo $a \neq 0$ un punto qualsiasi nell'intorno considerato di w, si può sviluppare

$$t = \{(w - a) + a\}^{\frac{1}{n}}$$

per potenze intere e positive di $w - a$, quindi anche per z si ha nell'intorno di $w = a$ una serie di potenze: $z = P(w - a)$.

CAPITOLO VI.

Funzioni uniformi in tutto il piano complesso. — Loro sviluppi in serie di frazioni parziali secondo Cauchy. — Teorema di Mittag-Leffler. — Sviluppi in prodotti infiniti per le trascendenti intere.

§ 59. — Trascendenti intere.

Procediamo ora allo studio ed alla classificazione delle funzioni analitiche uniformi esistenti in tutto il piano (su tutta la sfera complessa), e dimostriamo in primo luogo il teorema fondamentale: *Ogni funzione analitica, uniforme e non costante su tutta la sfera complessa, deve avere almeno un punto singolare.*

Nel caso contrario il suo modulo si manterrebbe su tutta la sfera inferiore ad una quantità fissa M. Descriviamo in tale ipotesi nel piano complesso, col centro nell'origine, un cerchio C di raggio R grande ad arbitrio; la nostra funzione $w(z)$ è quivi finita, continua e monodroma e però sviluppabile in una serie di potenze

$$w(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots,$$

convergente in tutto il piano. Il coefficiente a_n è dato, per le formole (5) del § 43, pag. 141, dall' integrale

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{w(z)\,dz}{z^{n+1}},$$

esteso al contorno s del cerchio. Ora, per ipotesi, si ha sempre $|w|_s < M$ e, applicando la formola di Darboux, ne deduciamo

$$|a_n| < \frac{M}{R^n},$$

e siccome, se $n > 0$, all' ingrandire di R il secondo membro tende a zero, mentre il primo ha un valore fisso, ne deduciamo

$$a_n = 0 \quad \text{per} \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

e però $w(z) = a_0$, cioè costante contro l' ipotesi.

Le funzioni uniformi in tutto il piano, avendo necessariamente qualche singolarità, potranno classificarsi a seconda del numero e della specie delle loro singolarità. Il caso più semplice sarà quello in cui si abbia una sola singolarità e questa sia in $z = \infty$, talchè in qualunque campo finito del piano la funzione sarà sempre finita, continua e monodroma. Allora $w(z)$ è sviluppabile in una serie

$$w(z) = \sum a_n z^n$$

convergente in tutto il piano, e la singolarità in $z = \infty$ sarà polare od essenziale, secondo che la serie si arresterà o no ad un polinomio. Nel secondo caso la funzione dicesi una *trascendente intera* e si indica, con Weierstrass, col simbolo $G(z)$.

Abbiamo dunque il risultato: *Una funzione uniforme in tutto il piano, con un solo punto singolare in $z = \infty$, è un polinomio razionale intero in z, ovvero una trascendente intera $G(z)$, secondo che la singolarità è polare od essenziale.*

Notiamo che dalla dimostrazione data del teorema fondamentale risulta che, fissato un numero positivo M grande a piacere, in qualunque intorno di $z = \infty$ una trascendente intera $G(z)$ assume anche dei valori di modulo $> M$. Nel caso particolare di un polinomio si può fare anzi l' intorno in guisa che tutti i valori della funzione abbiano modulo $> M$.

Fra le trascendenti intere ve ne sono alcune, come

$$e^z, \quad e^{\operatorname{sen} z},$$

che non solo non diventano mai infinite a distanza finita, ma nemmeno si annullano. È facile vedere che l'espressione generale di una siffatta trascendente intera $G(z)$ sarà:

$$G(z) = e^{G_1(z)}, \tag{1}$$

non si annullano né diventano ∞ a distanza finita

dove $G_1(z)$ è, essa stessa, una trascendente intera. E infatti, se $G(z)$ non si annulla mai, la sua derivata logaritmica

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = G_2(z)$$

è una trascendente intera $G_2(z)$, e però integrando si ha

$$\log G(z)\,^{1)} = \int G_2(z)\,dz = G_1(z)\,,$$

e passando dai logaritmi ai numeri, risulta appunto la (1).

§ 60. — Punti singolari essenziali.

Se la funzione $w(z)$ uniforme (in una certa area) ha nel punto $z = a$ una singolarità essenziale isolata, essa può porsi, come sappiamo, nell' intorno del punto, sotto la forma

$$w(z) = P(z - a) + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{b_n}{(z-a)^n}$$

La serie discendente converge in tutto il piano, salvo in $z = a$, ed è quindi una trascendente intera *dell'argomento* $\frac{1}{z-a}$, che inoltre si annulla pel valore 0 dell' argomento, cioè $z = \infty$. Indicando una tale trascendente intera col simbolo

$$g\left(\frac{1}{z-a}\right),$$

avremo dunque

$$w(z) = P(z-a) + g\left(\frac{1}{z-a}\right). \tag{2}$$

Da questa osservazione, e da quanto abbiamo detto al paragrafo precedente relativamente alle trascendenti intere, facilmente possiamo trarre una dimostrazione del teorema di Weierstrass: *In vicinanza di un punto singolare essenziale isolato, e per quanto piccolo intorno si prenda di esso, la funzione assume anche valori di modulo tanto grande quanto si vuole, ed anche valori prossimi* Weierstr Casorati

1) La polidromia proveniente dal segno logaritmico è qui soltanto apparente, perchè $G(z)$ non diventa mai nè zero, nè infinita.

di tanto poco quanto si vuole ad una quantità finita A, prefissata ad arbitrio.

Che la $w(z)$ assuma, in qualunque prossimità di $z = a$, anche valori di modulo più grande di qualunque quantità assegnata risulta subito dall'osservare che nel secondo membro della (2), per z prossimo ad a, il primo termine $P(z - a)$ assume valori prossimi al termine iniziale della serie, mentre $g\left(\frac{1}{z-a}\right)$ assume (§ 59) anche valori di modulo grande quanto si vuole. Per dimostrare poi la cosa anche pei valori finiti A, si consideri la funzione

$$\frac{1}{w(z) - A}, \tag{3}$$

che avrà in $z = a$ certamente una singolarità essenziale, la quale sarà inoltre isolata, se in prossimità di $z = a$ non si annullerà infinite volte la differenza $w(z) - A$. Ma in questo secondo caso sarebbe già provata la nostra asserzione; anzi non solo $w(z)$ si approssimerebbe quanto si vuole ad A, ma assumerebbe effettivamente infinite volte il valore A. Nel primo caso poi, la singolarità essenziale $z = a$ per la funzione (3) essendo isolata, la funzione stessa deve prendere in qualsiasi intorno di a valori di modulo grande ad arbitrio o, ciò che è lo stesso, deve $w(z)$ accostarsi ad A di tanto poco quanto si vuole.

Questo teorema di Weierstrass fa già comprendere la profonda differenza che esiste fra una singolarità polare ed una essenziale. Picard ha precisato vieppiù questo risultato, dimostrando che: *In vicinanza di un punto singolare la funzione non solo si accosta, ma prende effettivamente infinite volte tutti i valori possibili, fatta eccezione da due speciali valori al massimo* 1). Picard

Ritorneremo più tardi su questo teorema, che per ora enunciamo soltanto. Qui osserviamo ancora che il teorema di Weierstrass sussiste non solo per singolarità essenziali isolate, ma anche (ed a più forte ragione) per singolarità limiti di infinite altre singolarità (cfr. § 52).

§ 61. — Funzioni uniformi con un numero finito di singolarità.

Continuando nella classificazione delle funzioni uniformi in tutto il piano, consideriamo ora quelle che hanno in tutto il piano

1) Cfr. gli esempi discussi al § 52.

complesso un numero finito di singolarità. Le singolarità a distanza finita siano nei punti

$$a_1\,,\quad a_2\,,\quad \ldots\,,\quad a_n\,;$$

potrà aversi ancora eventualmente nella funzione $w(z)$ una singolarità all' infinito. Nell' intorno di $z = a_1$ la funzione $w(z)$ si pone sotto la forma

$$w(z) = P(z - a_1) + g_1\left(\frac{1}{z - a_1}\right),$$

la $g_1(t)$ indicando una trascendente intera di t annullantesi per $t = 0$, ovvero un polinomio, secondo che la singolarità in $z = a_1$ è essenziale, o polare. Se poniamo

$$w(z) - g_1\left(\frac{1}{z - a_1}\right) = w_1(z)\,,$$

la $w_1(z)$ sarà regolare in $z = a_1$ ed avrà le rimanenti singolarità di $w(z)$. Procedendo nel medesimo modo sopra $w_1(z)$, avremo

$$w_1(z) = w_2(z) + g_2\left(\frac{1}{z - a_2}\right),$$

e la $w_2(z)$ non avrà singolarità che in

$$z = a_3\,,\quad a_4\,,\quad \ldots\,,\quad a_n\,,\quad (\infty)\,.$$

Così procedendo, troveremo

$$w(z) = g_1\left(\frac{1}{z - a_1}\right) + g_2\left(\frac{1}{z - a_2}\right) + \ldots + g_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right) + f(z)\,,$$

dove la $f(z)$ non avrà altra singolarità che in $z = \infty$, se pure esisteva in $w(z)$. La $f(z)$ si ridurrà quindi ad una costante, ovvero ad un polinomio, o infine ad una trascendente intera $G(z)$. Includendo in quest' ultimo caso generale gli altri due, scriveremo

$$(4)\qquad \boxed{w(z) = g_1\left(\frac{1}{z - a_1}\right) + g_2\left(\frac{1}{z - a_2}\right) + \ldots + g_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right) + G(z)\,.}$$

decomposizione delle funzioni razionali se G(z) è razionale —

Se le singolarità saranno soltanto polari, le funzioni $g_1, g_2, \ldots, g_n$, G saranno altrettanti polinomî interi nei loro argomenti. E poichè una funzione uniforme su tutta la sfera, e che non ha singolarità essenziali, non può avere un numero *infinito* di singolarità polari ne concludiamo : *Una funzione uniforme su tutta la sfera complessa, e dotata soltanto di singolarità polari, è una funzione razionale di z.* L' inversa è evidente [1].

G(x) razion

Si osservi poi che la formola (4), applicata al caso attuale, dà precisamente quella decomposizione di una funzione razionale in frazioni parziali che si considera nell'algebra e si utilizza nel calcolo per l' integrazione delle funzioni razionali.

È evidente, che dati ad arbitrio i punti in numero finito $a_1\,,\ a_2\,,\ \ldots\,,\ a_n$, ed assegnate ad arbitrio le trascendenti intere

$$g_1\,,\quad g_2\,,\quad \ldots\,,\quad g_n\,,$$

si può costruire colla (4) una funzione uniforme in tutto il piano coi soli punti singolari $a_1\,,\ a_2\,,\ \ldots,\ a_n$, nei quali si comporterà rispettivamente come le trascendenti intere

$$g_1\left(\frac{1}{z - a_n}\right),\qquad g_2\left(\frac{1}{z - a_2}\right)\qquad \ldots\qquad g_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right).$$

Osserviamo in fine che, applicando i ragionamenti superiori ad una funzione $w(z)$ uniforme non in tutto il piano ma solo in un'area data A, con un numero finito di punti singolari

$$a_1\,,\quad a_2\,,\quad \ldots\,,\quad a_n\,,$$

nell' interno dell'area la $w(z)$ potrà porsi sotto la forma

$$(5)\qquad w(z) = g_1\left(\frac{1}{z - a_1}\right) + g_2\left(\frac{1}{z - a_2}\right) + \ldots + g_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right) + f(z)\,,$$

la $f(z)$ essendo una funzione uniforme e regolare in tutta l'area.

[1]) Si noti come dalla espressione effettiva di una funzione razionale espressa pel quoziente di due polinomî si verifichi subito il teorema, già dimostrato al § 56, che una tale funzione diventa tante volte zero quante volte infinita.

§ 62. — Metodo di Cauchy per gli sviluppi in serie di funzioni con infinite singolarità.

Sing. essenziale

Passiamo ora a considerare le funzioni uniformi in tutto il piano e con un numero *infinito* di singolarità, le quali abbiano però come unico punto limite il punto $z = \infty$, tali cioè che in qualunque campo tutto situato a distanza finita capiti soltanto un numero finito di punti singolari (essenziali o polari) e soltanto cresca all' infinito questo numero, ingrandendo all' infinito il campo. (funzioni meromorfe se gli a_r sono pol.)

Consideriamo un tale campo finito (racchiuso da un solo contorno, ossia semplicemente connesso) supponendo per altro che *sul contorno non vi sia alcun punto singolare* della nostra funzione $w(z)$. Nell' interno di C cadrà un numero finito di punti singolari

$$a_1, \quad a_2, \quad \dots, \quad a_n$$

e in tutto C potremo porre, secondo la (5), la $w(z)$ sotto la forma

$$w(z) = \sum_{r=1}^{r=n} g_r\left(\frac{1}{z - a_r}\right) + f(z), \tag{6}$$

ove $f(z)$ è regolare nei punti di C (contorno incluso). Prendiamo un punto z' interno a C, ma distinto dai punti singolari, e cerchiamo di calcolare il valore di w in z' per mezzo dei valori di w al contorno s del campo, estendendo così la formola di Cauchy al caso attuale, ove si hanno internamente al campo singolarità. Alla $f(z)$, che è regolare in C, possiamo applicare la formola di Cauchy

$$f(z') = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{f(z)\,dz}{z - z'},$$

che per la (6) diventa

$$w(z') - \sum_{r=1}^{r=n} g_r\left(\frac{1}{z' - a_r}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{w(z)\,dz}{z - z'} - \frac{1}{2\pi i}\sum_{r=1}^{r=n}\int_s \frac{1}{z - z'}\, g_r\left(\frac{1}{z - a_r}\right)dz.$$

Ora facilmente vediamo che ciascun integrale della somma del secondo membro

$$\int_s \frac{1}{z - z'}\, g_r\left(\frac{1}{z - a_r}\right)dz$$

è nullo, poichè nella regione del piano esterna ad s la funzione sotto il segno

$$\frac{1}{z - z'}\, g_r\left(\frac{1}{z - a_r}\right)$$

è dappertutto regolare e in $z = \infty$ è infinitesima del 2° ordine almeno [1]), onde il suo residuo è nullo. La formola precedente diventa quindi semplicemente

$$\boxed{w(z') = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{w(z)\,dz}{z - z'} + \sum_{r=1}^{r=n} g_r\left(\frac{1}{z' - a_r}\right)} \tag{7}$$

e non differisce dall' ordinaria formola di Cauchy che per la parte relativa alle singolarità.

Immaginiamo ora che il campo C ingrandisca all' infinito, passando per una serie *discreta* di configurazioni in guisa che, per ogni speciale configurazione, il contorno s di C non contenga mai alcun punto singolare, ma del resto con legge arbitraria.

La formola (7) rimarrà sempre applicabile, purchè z' non coincida con un punto singolare a; soltanto il numero dei punti a che cadranno entro il campo, cioè il numero dei termini nella somma del secondo membro della (7), andrà sempre più crescendo.

Ora se la legge d'accrescimento del contorno è tale che, mantenendo z' entro un'area A finita arbitraria, l' integrale

$$\int_s \frac{w(z)\,dz}{z - z'}$$

converga equabilmente (in egual grado) verso zero, dalla (7), con passaggio al limite, otterremo la formola

$$\boxed{w(z') = \sum_{1}^{\infty} g_r\left(\frac{1}{z' - a_r}\right)} \tag{8}$$

cf. sotto (4)

[1]) Si ricordi che la trascendente intera $g_r\left(\frac{1}{z - a_r}\right)$ si annulla in $z = \infty$.

e la serie del secondo membro sarà, in ogni area finita A, convergente in egual grado, quando ne siano esclusi con piccoli intorni i punti singolari a. Così otteniamo per la funzione $w(z)$ uno sviluppo che vale in tutto il piano, a qualunque distanza finita, e ne pone in evidenza le singolarità, analogamente alla decomposizione in frazioni parziali di una funzione razionale. Si noti però che la convergenza della serie (8) sarà in generale subordinata all'ordine dei termini, i quali dovranno essere raggruppati al modo stesso come entrano i punti singolari nel campo C crescente secondo la legge assegnata.

Criteri per la sviluppabilità in serie di funzioni trascendenti (8)

§ 63. — Due casi particolari.

in cui vale la (10) ma la (8)

Per le applicazioni, che dovremo fare nel seguito, di questo processo generale, sono particolarmente importanti due casi, in cui si riscontra effettivamente che si ha

$$\text{(10)} \qquad \lim_{s\to\infty} \int_s \frac{w(z)\,dz}{z-z'} = 0 \text{ [1]}.$$

1° caso

1° Supponiamo che l'ingrandimento del contorno s proceda in guisa che tutti i suoi punti si allontanino all'infinito dall'origine, e sul contorno via via crescente si mantenga sempre

$$|\,w(z)\,|_s < Q,$$

essendo Q una quantità finita. Diciamo che allora *basterà dimostrare che si ha*

$$\lim \int_s \frac{w(z)\,dz}{z} = 0,$$

[1]) Scrivendo questa formola sottintendiamo che, variando z' in un' area qualunque finita, il limite deve essere preso per l' ingrandire infinito del contorno s e la convergenza a zero dell' integrale deve aver luogo equabilmente.

per essere sicuri che sussisterà la (10), *e varrà quindi lo sviluppo in serie* (8).

Prendiamo ora un' area A comunque grande, ma finita, nella quale manterremo z', talchè $|\,z'\,|$ si manterrà inferiore ad una quantità finita K:

$$|\,z'\,| < K.$$

Da un certo punto in poi, movendosi z sul contorno s, risulterà per le ipotesi fatte

$$|\,z\,| > |\,z'\,|, \quad \text{cioè} \quad \frac{|\,z'\,|}{|\,z\,|} < 1,$$

onde potremo sviluppare in serie $\dfrac{w(z)}{z-z'}$ colla formola:

$$\frac{w(z)}{z-z'} = \frac{w(z)}{z} + \sum_{n=1}^{n=\infty} z'^n \frac{w(z)}{z^{n+1}}$$

ed avremo, a causa della convergenza in egual grado:

$$\int_s \frac{w(z)\,dz}{z-z'} = \int_s \frac{w(z)\,dz}{z} + \sum_{n=1}^{n=\infty} z'^n \int_s \frac{w(z)\,dz}{z^{n+1}}.$$

Se dimostriamo che ingrandendo il contorno s, possiamo rendere

$$\text{(11)} \qquad \left|\sum_{n=1}^{n=\infty} z'^n \int_s \frac{w(z)\,dz}{z^{n+1}}\right| < \varepsilon,$$

essendo ε una quantità comunque piccola, sarà provata la nostra asserzione.

Ora si ha

$$\text{(12)} \quad \left|\sum_{n=1}^{n=\infty} z'^n \int_s \frac{w(z)\,dz}{z^{n+1}}\right| \leq \sum_{n=1}^{n=\infty} \left|z'^n \int_s \frac{w(z)\,dz}{z^{n+1}}\right| \leq \sum_{n=1}^{n=\infty} K^n \left|\int_s \frac{w(z)\,dz}{z^{n+1}}\right|.$$

Calcoliamo un limite superiore del modulo dell' integrale

$$\int_s \frac{w(z)\,dz}{z^{n+1}}$$

riportando colla sostituzione

$$z = \frac{1}{\zeta}$$

il contorno grandissimo s ad un contorno piccolissimo σ attorno all'origine, ed applicando la formola di Darboux. Abbiamo

$$\int_s \frac{w(z)\,dz}{z^{n+1}} = -\int_\sigma w\left(\frac{1}{\zeta}\right)\zeta^{n-1}\,d\zeta$$

e, indicando con ϱ la massima distanza dell'origine dai punti di σ e con γ il perimetro di σ, risulta

$$\left|\int_s \frac{w(z)\,dz}{z^{n+1}}\right| \leq Q\varrho^{n-1}\gamma,$$

onde la (12) diventa

$$\left|\sum_{n=1}^{n=\infty} z'^n \int_s \frac{w(z)\,dz}{z^{n+1}}\right| \leq KQ\gamma\frac{1}{1-K\varrho}.$$

Siccome tanto ϱ quanto γ convergono verso zero, risulterà, da un certo punto in poi, soddisfatta la (11), *c. d. d.*

1° Caso

2° Supponiamo che : *il contorno s ingrandisca per forme circolari, col centro nell'origine, e sul contorno crescente del cerchio non solo* $|w(z)|$ *si mantenga finito ma diventi, da un certo punto in poi, minore di qualunque quantità assegnabile. Dico che sarà allora soddisfatta la* (10).

Per quanto abbiamo visto sopra basta provare che si ha

$$\lim \int_s \frac{w(z)\,dz}{z} = 0,$$

ciò che è un' immediata conseguenza della formola di Darboux e della nostra ipotesi.

Quest' ultimo risultato conduce ad applicare, con una conveniente modificazione, il processo di sviluppo in serie anche nel caso in cui il modulo di $w(z)$ sul contorno crescente del cerchio, anzichè diminuire, cresce all' infinito comparabilmente ad una potenza del raggio R, in guisa che, per un valore sufficientemente grande del numero intero n, risulti da un certo punto in poi $\left|\frac{w(z)}{z^n}\right|$ piccolo a piacere. Potremo allora applicare lo sviluppo alla funzione $\frac{w(z)}{z^n}$ e risulterà

$$w(z) = z^n \sum_1^\infty g_r\left(\frac{1}{z-a_r}\right).$$

Se sviluppiamo

$$z^n = [(z-a_r)+a_r]^n$$

per potenze di $z-a_r$, col binomio di Newton, vediamo che il prodotto

$$z^n g_r\left(\frac{1}{z-a_r}\right)$$

si converte in una nuova trascendente intera

$$g'_r\left(\frac{1}{z-a_r}\right)$$

aumentata di un polinomio $P_{a_r}(z)$ di grado $n-1$ in z, onde avremo per $w(z)$, lo sviluppo

$$w(z) = \sum_1^\infty \left\{ g'_r\left(\frac{1}{z-a_r}\right) + P_{a_r}(z) \right\}.$$

L'aggiunta dei polinomi $P_{a_r}(z)$ nei singoli termini della serie a destra ha per effetto di assicurarne la convergenza, artificio che ritroveremo fra breve per stabilire il teorema di Mittag-Leffler (§ 65).

§ 64. — Sviluppi in serie delle funzioni $\frac{1}{\operatorname{sen} z}$, $\cot z$.

Applichiamo il processo generale descritto alle due funzioni

$$\frac{1}{\operatorname{sen} z}, \quad \cot z,$$

i cui punti singolari sono nei punti

$$z = n\pi,$$

percorrendo n i numeri interi, positivi e negativi; per l'una e per l'altra funzione la singolarità è polare del 1° ordine col residuo

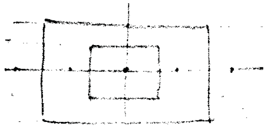
$$(-1)^n \text{ per } \frac{1}{\operatorname{sen} z}, \qquad +1 \text{ per } \cot z,$$

come risulta dalla regola alla fine del § 53. La trascendente intera g_n si riduce qui rispettivamente a

$$\frac{(-1)^n}{z - n\pi}, \quad \frac{1}{z - n\pi}.$$

Per campo C, che dovremo poi fare ingrandire all'infinito, prendiamo il rettangolo racchiuso dalle rette

$$x = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad y = \pm k,$$



dove m è un numero intero positivo e k una costante qualunque; facendo crescere all'infinito sì m che k, il contorno s si allontanerà, in ogni senso, all'infinito.

D'altra parte, posto

$$z = x + iy$$

si ha

$$\left|\frac{1}{\operatorname{sen} z}\right| = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y}}, \quad |\cot z| = \frac{\sqrt{\cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y}}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y}},$$

e si vede subito che i moduli delle due funzioni rimangono sempre inferiori ad una quantità fissa sul contorno crescente. Basterà dunque verificare (§ 63) che gli integrali

$$\int \frac{dz}{z \operatorname{sen} z}, \quad \int \frac{\cot z \, dz}{z},$$

estesi al contorno del rettangolo, hanno per limite lo zero. Ora questi due integrali, a causa della simmetria del contorno rispetto all'origine, e delle formole:

$$\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z, \quad \cot(-z) = -\cot z,$$

sono assolutamente nulli, il che prova quanto volevamo [1]). Sono quindi applicabili i risultati del primo caso discusso al paragrafo precedente e poichè, all'ingrandire del contorno, i poli entrano due a due, associandosi ad ogni polo il suo simmetrico, avremo le formole:

$$\frac{1}{\operatorname{sen} z} = \lim_{n=\infty} \sum_{-n}^{n} \frac{(-1)^r}{z - r\pi}$$

$$\cot z = \lim_{n=\infty} \sum_{-n}^{n} \frac{1}{z - r\pi}.$$

ovvero

$$\text{(14)} \qquad \frac{1}{\operatorname{sen} z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \left\{ \frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right\} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \, 2z}{z^2 - n^2\pi^2}$$

$$\text{(15)} \qquad \cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ \frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right\} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}$$

1) Allo stesso risultato si arriva anche subito, calcolando la somma dei residui delle due funzioni sotto il segno nell'interno del rettangolo.

e le serie del secondo membro, in qualunque campo a distanza finita, da cui siano esclusi i poli, sono convergenti in egual grado. Derivando la (15) termine a termine, come è lecito (§ 47), abbiamo l'altro sviluppo per $\frac{1}{\operatorname{sen}^2 z}$:

$$\boxed{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 z} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ \frac{1}{(z - n\pi)^2} + \frac{1}{(z + n\pi)^2} \right\}} \tag{16}$$

Dalla (16), facendo $z = \frac{\pi}{2}$, si ottiene

$$\frac{\pi^2}{4} = 1 + \sum_{1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2} \right\},$$

che si può scrivere

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots,$$

serie dei quadrati

formola che ci dà la somma delle inverse dei quadrati dei numeri dispari. D'altronde si ha

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

e la precedente si può anche scrivere

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \tag{17}$$

Serie armonica con α = 2

risultato che dovremo applicare in seguito.

Questa non è del resto che un caso particolare delle formole che dimostrano come il valore della serie

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \dots + \frac{1}{m^{2n}} + \dots$$

sta in rapporto commensurabile con π^{2n}, dipendente dai così detti *numeri di Bernoulli*.

Stabiliremo rapidamente queste formole ricorrendo alla (15), che scriviamo

$$z \cot z = 1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{2z^2}{z^2 - n^2\pi^2} = 1 - \sum_{1}^{\infty} \frac{2z^2}{n^2\pi^2} \frac{1}{1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}}$$

Per $|z| < \pi$ possiamo sviluppare il secondo membro in serie di potenze per z, applicando la formola (progressione geometrica di ragione < 1)

$$\frac{1}{1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}} = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{z^{2r}}{n^{2r}\pi^{2r}},$$

Serie di serie

e ricordando i risultati generali del § 48. Otteniamo così

$$z \cot z = 1 - 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{S_{2n}}{\pi^{2n}} z^{2n},$$

e ponendo

$$B_n = \frac{2 S_{2n} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (2n)}{(2\pi)^{2n}}, \quad = \frac{2n!\, 2 S_{2n}}{(2\pi)^{2n}}$$

potremo scrivere

$$z \cot z = 1 - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{B_n (2z)^{2n}}{2 \cdot 3 \cdot \dots (2n)} = 1 - \sum \frac{B_n (2z)^{2n}}{(2n)!}$$

Dall' identità che ne deriva

$$z\left(1 - \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots\right) =$$

$$= \left(z - \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{z^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \dots\right)\left(1 - \frac{B_1 (2z)^2}{2} - \frac{B_2 (2z)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \dots\right),$$

paragonando dall' una parte e dall'altra i coefficienti delle medesime potenze di z, si calcolano per via ricorrente i *numeri di Bernoulli*

$$B_1, \quad B_2, \quad B_3, \quad \dots,$$

che sono tutti numeri razionali; i primi valori sono

$$\boxed{B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30} \dots,}$$

§ 65. — Teorema di Mittag-Leffler.

Nei paragrafi precedenti abbiamo supposto *data* la funzione $w(z)$, uniforme in tutto il piano e con un numero finito di singolarità in ogni campo finito, e ne abbiamo cercato uno sviluppo in serie, che ne ponesse in evidenza le singolarità. Ora ci proponiamo il problema inverso e cioè vogliamo costruire una funzione con assegnate singolarità in punti prefissati. Supponiamo dato un insieme di punti isolato nel piano complesso; un tale insieme, per un teorema di Cantor, è sempre numerabile, cioè si possono ordinare i punti, distribuendo loro per indici i numeri 1, 2, 3, ..., n .... Per ciascuno di questi punti

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots., \quad a_n, \quad \ldots.$$

supponiamo inoltre assegnata una trascendente intera corrispondente

$$g_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right), \quad g_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right), \quad \ldots. \quad g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) \quad \ldots.$$

affatto ad arbitrio e domandiamo di *costruire una funzione uniforme $w(z)$ in tutto il piano che nell' intorno di ciascun punto a_n dell' insieme si comporti come la trascendente intera assegnata $g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$* [1] *e non abbia alcun'altra singolarità, salvo nei punti dell' insieme derivato.*

problema di Mittag Leffler

La soluzione generale di questo problema è stata data da Mittag-Leffler [2], il quale l'ha risoluto affermativamente per ogni insieme isolato, costruendo effettivamente la funzione domandata. Questo risultato porta il nome di *teorema di Mittag-Leffler*. Noi non ne studieremo qui che un caso particolare, il caso cioè che

[1] In modo cioè che la differenza

$$w(z) - g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$$

sia regolare in a_n.

[2] *Sur la représentation analitique des fonctions uniformes* (« Acta Math. », tomo 4°.

vi sia un unico punto limite del gruppo delle singolarità assegnate, e, senza alterare la generalità, potremo supporre che quest' unico punto limite sia il punto $z = \infty$, cioè che in ogni campo finito cada un numero finito di punti a, ma questo numero vada crescendo oltre ogni limite all' ingrandire del campo. Numereremo allora i punti a, distribuendoli per ordine di modulo crescente, e quelli che abbiano eventualmente lo stesso modulo per ordine d'argomento crescente, talchè

$$|a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \ldots.$$

Supponiamo dapprima $|a_1| > 0$, cioè che il primo punto non cada nell'origine e quindi anche nessuno dei seguenti. La trascendente intera $g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$ dell'argomento $\frac{1}{z-a_n}$, nell'interno del cerchio C_n col centro nell'origine e di raggio $= |a_n|$, è finita, continua e monodroma e però sviluppabile in serie di Taylor.

$$g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) = \sum_{r=0}^{r=\infty} B_{n,r}\, z^r, \tag{18}$$

avente il cerchio C_n per cerchio di convergenza. Ora prendiamo ad arbitrio una ~~serie~~ successione di numeri reali e positivi

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots. \quad \varepsilon_n, \quad \ldots.,$$

che assoggettiamo alla sola condizione di dar luogo ad una serie convergente

$$\sum \varepsilon_n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots. + \varepsilon_n + \ldots.$$

e fissiamo inoltre arbitrariamente una quantità positiva $\delta < |a_1|$. Nel cerchio C'_n concentrico ed interno a C_n e distante da C_n di δ la serie del secondo membro nella (18) è convergente in egual grado, e però si può trovare un numero intero m_n tanto grande che per tutti i punti z in C'_n risulti

$$\left| g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) - \sum_{r=0}^{r=m_n} B_{n,r}\, z^r \right| < \varepsilon_n .$$

Se poniamo

$$-\sum_{r=0}^{r=m_n} B_{n,\,r}\; z^r = P_{m_n}(z)\,,$$

sarà $P_{m_n}(z)$ un polinomio di grado m_n in z, e per ogni z interno a C'_n avremo

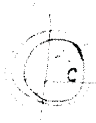
$$\left| g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) + P_{m_n}(z) \right| < \varepsilon_n\,. \tag{19}$$

per ogni n

Fissati così i numeri interi $m_1,\ m_2,\ \dots,\ m_n,\ \dots$, prendiamo a considerare la serie

$$\boxed{\sum_{n=0}^{n=\infty} \Big\{ g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) + P_{m_n}(z) \Big\}}$$

e dimostriamo che in qualunque campo a distanza finita, dal quale siano esclusi i punti a che vi capitano, essa è convergente in egual grado e rappresenta la funzione cercata. Basta evidentemente considerare il caso di un campo circolare, grande quanto si vuole, col centro nell'origine. Sia C^* un tale cerchio di raggio R e siano



$$a_1,\ a_2\ \ \dots,\ a_r$$

quei punti a (in numero finito) che distano dall'origine meno di $R + \delta$; scindiamo allora la nostra serie nella somma dei primi r termini e nella parte residua

$$\sum_{n=r+1}^{n=\infty} \Big\{ g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) + P_{m_n}(z) \Big\}, \tag{20}$$

della quale basterà mostrare la convergenza in egual grado in C. Poichè i punti

$$a_{r+1},\ a_{r+2},\ \dots,\ a_n,\ \dots$$

distano esternamente da C almeno di δ, a tutti i termini della (20) è applicabile la diseguaglianza (19), e quindi la serie dei moduli della (20) ha i termini inferiori a quelli della serie

$$\sum_{r+1}^{\infty} \varepsilon_n\,,$$

che per ipotesi è convergente. Così è provata la convergenza in egual grado della serie (a) in qualunque campo finito (esclusi i punti a). Se poniamo

$$w(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \Big\{ g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) + P_{m_n}(z) \Big\}, \tag{21}$$

sarà dunque $w(z)$ funzione finita, continua e monodroma della variabile complessa z in tutto il piano, esclusi i punti a (cfr. § 47). In questi punti si comporterà nel modo voluto poichè, se dalla serie del secondo membro in (21) togliamo il termine corrispondente a $z = a_r$, la serie rimanente è una funzione regolare nell' intorno di a_r ed in questo intorno si ha per ciò

$$w(z) = g_r\left(\frac{1}{z-a_r}\right) + P(z-a_r)\,.$$

Osserviamo poi che se avesse luogo il caso escluso, che cioè fra i punti singolari figurasse l'origine colla trascendente $g\left(\frac{1}{z}\right)$, basterebbe aggiungere questo termine nel secondo membro della (21), la quale possiamo dunque ritenere valga in tutti i casi.

Abbiamo così dimostrato il teorema di Mittag-Leffler, costruendo una funzione uniforme $w(z)$ con tutte e sole le singolarità volute. Ma evidentemente di tali funzioni ne esistono infinite, differenti fra loro per trascendenti intere dell'argomento z. L'espressione più generale della funzione richiesta sarà dunque:

$$w(z) = G(z) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \Big\{ g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) + P_{m_n}(z) \Big\},$$

Soluzione generale del teorema di Mittag-Leffler

designando $G(z)$ una trascendente intera arbitraria.

§ 66. — Costruzione di una trascendente intera per prodotti infiniti.

Una questione, che si collega a quella risoluta nel paragrafo precedente col teorema di Mittag-Leffler, e di non minore importanza, è quella di costruire una trascendente intera, noti che ne siano i punti e gli ordini di infinitesimo. Ci proponiamo di stabilire il teorema fondamentale dovuto a Weierstrass:

Weierstrass

Dati ad arbitrio nel piano un numero infinito [1]) *di punti, che abbiano per unico punto limite il punto* $z = \infty$, *si può sempre costruire una trascendente intera, che si annulli soltanto nei punti dati*

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots,$$

con ordini corrispondenti assegnati pure ad arbitrio:

$$p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_n, \quad \ldots,$$

Ricondurremo la costruzione della trascendente intera cercata al problema già risoluto nel paragrafo precedente, mediante le seguenti considerazioni. Supponiamo che $G(z)$ sia una trascendente intera, che soddisfi alle condizioni volute. La sua derivata logaritmica

$$w(z) = \frac{G'(z)}{G(z)}$$

la derivata e il quoz. di due ~~tras~~ int. è intera

sarà una funzione uniforme in tutto il piano, che in tutti e soli i punti a_n avrà singolarità, e precisamente poli di 1° ordine coi termini corrispondenti d'infinito

$$\frac{p_n}{z - a_n}.$$

Una tale funzione $w(z)$ esiste, pel teorema di Mittag-Leffler, ed ha per espressione analitica

$$w(z) = G_1(z) + \sum_1^{\infty} \left\{ \frac{p_n}{z - a_n} + P_{m_n}(z) \right\}, \tag{23}$$

dove P_{m_n} è un polinomio in z di grado conveniente m_n. La trascendente intera cercata, se esiste, dovrà dedursi per integrazione da $w(z)$. Moltiplicando i due membri della (23) per dz e integrando da 0 a z per un medesimo cammino che eviti i punti a_n,

[1]) Il caso di un numero finito di infinitesimi offre immediata risoluzione per mezzo di una funzione razionale intera.

potremo eseguire nel secondo membro, a causa della convergenza in egual grado, l'integrazione termine a termine ed otterremo

$$\int_0^z w(z)\,dz = G_2(z) + \sum_1^{\infty} \left\{ p_n \log\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + Q_{m_n}(z) \right\},$$

dove $Q_{m_n}(z)$ è il polinomio di grado $m_n + 1$ in z, che nasce integrando $P_{m_n}(z)$. Passando dai logaritmi ai numeri, si ottiene

$$e^{\int_0^z w(z)\,dz} = e^{G_2(z)}\, e^{\sum_1^{\infty} \left\{ \log\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^{p_n} + Q_{m_n}(z) \right\}},$$

ovvero:

$$e^{\int_0^z w(z)\,dz} = e^{G_2(z)} \prod_{n=1}^{n=\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^{p_n} e^{Q_{m_n}(z)} \right\}.$$

La polidromia è sparita dai due membri e il prodotto infinito essendo convergente in egual grado in qualunque campo a distanza finita, inclusi ora anche i punti a_n, ove si annulla dell'ordine p_n, vediamo che la trascendente cercata esiste ed è data dalla formola

$$\boxed{G(z) = e^{G_1(z)} \prod_{n=1}^{n=\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^{p_n} e^{Q_{m_n}(z)} \right\},} \tag{24}$$

trascendente intera cercata

restando la trascendente intera $G_1(z)$ affatto arbitraria. Inversamente ogni trascendente intera che abbia gli infinitesimi nei punti a_n, cogli ordini p_n, è data dalla (24). Questo importantissimo risultato è dovuto a Weierstrass, il quale diede il nome di *fattori primari* ai fattori

$$\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^{p_n} e^{Q_{m_n}(z)},$$

l'aggiunta dell'esponenziale $e^{Q_{m_n}(z)}$ avendo per effetto di assicurare la convergenza assoluta ed in egual grado del prodotto infinito.

Nella formola (24) è supposto che l'origine non debba essere

analogamente a quello che avviene per il teorema di Mittag Leffler un infinitesimo per $G(z)$; ma evidentemente, se vogliamo che $G(z)$ abbia in $z = 0$ un infinitesimo d'ordine r, basterà far precedere nella (24) al prodotto infinito il fattore z^r.

Dall'esistenza di una trascendente intera con infinitesimi assegnati ad arbitrio si può trarre, con Weierstrass, un' importante conseguenza. Sia $w(z)$ una funzione uniforme in tutto il piano e senza singolarità essenziali a distanza finita. Le sue singolarità polari formeranno un gruppo di punti coll' unico punto limite $z = \infty$; siano

$$a_1, \quad a_2, \quad \dots, \quad a_n, \quad \dots$$

questi poli e

$$p_1, \quad p_2, \quad \dots, \quad p_n, \quad \dots$$

i loro rispettivi ordini. Costruiamo la trascendente intera $G(z)$ che diventa infinitesima nei punti a_i dei medesimi ordini p_i. Il prodotto $w(z) \cdot G(z)$ è uniforme e senza singolarità nè essenziali, nè polari a distanza finita, e però è una trascendente intera $G_1(z)$. Abbiamo dunque il teorema:

Ogni funzione uniforme in tutto il piano, che non abbia singolarità essenziali a distanza finita, è il quoziente di due trascendenti intere. [illegible]

Come corollario, ne segue che una tale funzione può sempre esprimersi analiticamente per mezzo del quoziente di due prodotti infiniti della forma (24).

§ 67. — **Forma degli esponenti $Q_{m_n}(z)$.**

Consideriamo ora più da vicino il modo di formazione dei polinomî $Q_{m_n}(z)$, che figurano come esponenti nei fattori della (24). Il polinomio derivato $P_{m_n}(z)$ consta, secondo il § 65, dei primi $m_n + 1$ termini dello sviluppo per potenze di z dell'espressione

$$-\frac{p_n}{z - a_n} = p_n \left\{ \frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \frac{z^2}{a_n^3} + \dots \right\},$$

si ha cioè

$$P_{m_n}(z) = p_n \left\{ \frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \frac{z^2}{a_n^3} + \dots + \frac{z^{m_n}}{a_n^{m_n+1}} \right\},$$

dove i numeri m_n debbono essere fissati in guisa che la serie

$$\sum \left\{ \frac{p_n}{z - a_n} + P_{m_n}(z) \right\} = \sum_n \frac{p_n z^{m_n+1}}{a_n^{m_n+2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{a_n}}$$

in ogni campo finito, dal quale siano esclusi i punti a, converga in egual grado.

Poniamo per abbreviare

$$m_n + 2 = r_n$$

e risulterà

$$Q_{m_n}(z) = p_n \left\{ \frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \frac{z^3}{3a_n^3} + \dots + \frac{z^{r_n-1}}{(r_n - 1)\, a_n^{r_n-1}} \right\},$$

dove i numeri r_n debbono essere determinati in guisa da assicurare la convergenza in egual grado della serie

$$\sum \frac{p_n z^{r_n-1}}{a_n^{r_n}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{a_n}}; \tag{25}$$

e la formola (24) si scrive allora così:

$$G(z) = e^{G_1(z)} \prod_{n=1}^{n=\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \dots + \frac{z^{r_n-1}}{(r_n-1)\, a_n^{r_n-1}}} \right\}^{p_n}. \tag{26}$$

Che i numeri r_n siano sempre determinabili nel modo richiesto risulta dalla dimostrazione, data al § 65, del teorema di Mittag-Leffler. Questi numeri r_n saranno in generale variabili coll' indice n, e nulla sappiamo in generale della loro determinazione effettiva. Però vi ha un caso molto importante, e ancora di grande generalità, nel quale si possono prendere tutti i numeri r_n eguali ad un numero fisso r, talchè l'esponente di e nei fattori primarii (26) ha il grado fisso $r - 1$. Ciò avviene quando sono soddisfatte le condizioni seguenti:

caso notevole

1º Gli ordini $p_1, p_2, \dots, p_n \dots$ d'infinitesimo rimangono tutti inferiori ad un numero fisso.

2º La serie $\frac{1}{|a_n|^r}$ risulti convergente [1]).

[1]) Si noti che la prima condizione *necessaria* per la convergenza: $\lim \frac{1}{|a_n|} = 0$ è soddisfatta (con qualunque r positivo).

In tal caso infatti se prendiamo $r_n = r$, e facciamo variare z in un campo finito, dal quale siano esclusi i punti a_n, la serie dei moduli della (25):

$$\sum \frac{p_n \, |z|^{r-1}}{\left| 1 - \frac{z}{a_n} \right|} \cdot \frac{1}{|a_n|^r}$$

si ottiene dalla serie $\sum \frac{1}{|a_n|^r}$, convergente per ipotesi, moltiplicando i termini di questa per quantità che si mantengono inferiori ad una quantità fissa. *ed è [illegible]*

Abbiamo dunque il teorema:

Se la trascendente $G(z)$ ha gli infinitesimi

$$a_1 \,, \quad a_2 \,, \quad \ldots. \,, \quad a_n \,, \quad \ldots. \,,$$

di ordini

$$p_1 \,, \quad p_2 \,, \quad \ldots. \,, \quad p_n \,, \quad \ldots. \,,$$

che rimangono inferiori ad un numero fisso e la serie

$$\sum \frac{1}{|a_n|^r} \,,$$

per un conveniente valore intero positivo di r, converge, la $G(z)$ si può sviluppare in prodotto infinito, convergente assolutamente ed in egual grado, colla formola

$$(27) \quad G(z) = e^{G_1(z)} \prod_{n=1}^{n=\infty} \left\{ \left[1 - \frac{z}{a_n} \right] e^{\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2 a_n^2} + \ldots + \frac{z^{r-1}}{(r-1) a_n^{r-1}}} \right\}^{p_n} .$$

§ 68. — Genere delle trascendenti intere. – Esempî. – Γ Euleriana.

Le trascendenti intere che soddisfano alle condizioni del teorema precedente si classificano, secondo Laguerre, *in generi* dipendentemente dal minimo esponente intero r che rende la serie

$$\sum \frac{1}{|a_n|^r}$$

convergente; una tale trascendente intera si dice di genere $r - 1$.

Prendiamo per es. la funzione

$$\frac{sen \; \pi z}{\pi z} \,,$$

che ha infinitesimi di 1° ordine nei punti

$$z = \pm 1 \,, \; \pm 2 \,, \; \pm 3 \,, \ldots.$$

Siccome la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ è convergente, qui abbiamo $r = 2$ e la trascendente intera è quindi di primo genere. Il suo sviluppo in prodotto infinito sarà dato per la (27) da:

$$\frac{\text{sen}\, \pi z}{\pi z} = e^{G_1(z)} \prod_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left(1 - \frac{z}{n} \right) e^{\frac{z}{n}} \,,$$

dove nel prodotto infinito n percorre tutti gli interi positivi e negativi, zero escluso.

Riunendo i fattori corrispondenti a valori opposti di n, si può scrivere

$$\frac{\text{sen}\, \pi z}{\pi z} = e^{G_1(z)} \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right) e^{\frac{z}{n}} e^{-\frac{z}{n}}$$

Per trovare qui l'effettivo valore di $G_1(z)$, basta derivare logaritmicamente questa formola e confrontarla colla (15) § 64, ove si cangi z in πz; si ottiene così $G'_1 = 0$, cioè $G_1 =$ costante, e la formola precedente dimostra subito che $G_1 = 0$; ne risulta la formola d'Eulero:

$$(27^*) \qquad \text{sen}\, \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right) .$$ *Eulero*

Come esempio di costruzione di una nuova trascendente intera, cerchiamo una tale trascendente che abbia i suoi infinitesimi del 1° ordine nei punti

$$z = 0 \,, \quad -1 \,, \quad -2 \,, \quad -3 \,, \quad \ldots. \quad -n \,, \quad \ldots.$$

Poichè la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ è convergente, avremo immediatamente l'espressione analitica di una tale funzione nel prodotto infinito:

$$G(z) = e^{G_1(z)} z \cdot \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}.$$

Prendiamo $G_1(z) = cz$, dove c indica una costante, ed avremo

$$G(z) = e^{cz} z \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}.$$

Fissiamo anche la costante c, determinandola in guisa che sia reale e renda $G(1) = 1$. L'inversa della funzione $G(z)$ è la funzione *gamma* Euleriana $\Gamma(z)$, sicchè

$$\boxed{\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{cz} z \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}};} \tag{28}$$

Inversa di Γ Euleriana

essa è uniforme in tutto il piano ed ha soltanto singolarità polari del 1º ordine nei punti $z = 0, -1, -3 \ldots\ldots -n, \ldots\ldots$

La costante c prende il nome di *costante di Mascheroni*. Dalla condizione

$$e^{-c} = \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}} \quad ^{1)}$$

risulta per c anche la definizione

$$\boxed{c = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} - \log n\right);}$$

c di Mascheron

il valore approssimato di c è

$$\boxed{c = 0,577\,215\,664\,901}.$$

1) Tutti i fattori di questo prodotto sono positivi e ≤ 1 perchè $e^{\frac{1}{n}} > 1 + \frac{1}{n}$ e il valore P del prodotto è certo < 1, onde si vede che c è positiva. Anche è manifesto che $\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} - \log(n+1)\right\}$, e a più forte ragione $\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{n} - \log n\right\}$ è sempre positiva e decresce al crescere di n.

Possiamo scrivere la (28) così

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n=\infty} \left\{ e^{z\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} - \log n\right)} \cdot z \cdot \prod_{k=1}^{k=n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} \right\}$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n=\infty} \left\{ \frac{z(1+z)\left(1 + \frac{z}{2}\right) \ldots\ldots \left(1 + \frac{z}{n}\right)}{n^z} \right\} \tag{29}$$

e si ha la formola di Gauss

$$\boxed{\Gamma(z) = \lim \frac{n^z}{z(1+z)\left(1 + \frac{z}{2}\right) \ldots\ldots \left(1 + \frac{z}{n}\right)}.} \quad ^{1)}$$

Gauss

Da questa espressione di $\Gamma(z)$ risulta subito dimostrata la *prima* proprietà fondamentale di $\Gamma(z)$, espressa dalla formola

$$\boxed{\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z).} \tag{30}$$

1ª proprietà di Γ

Da questa, e dall'essere $\Gamma(1) = 1$, segue che per un valore intero e positivo m dell'argomento la Γ euleriana assume il valore

$$\boxed{\Gamma(m) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (m-1).}$$

Dalla (30) e dalla (28) risulta

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = e^{cz} \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}},$$

e cangiando z in $-z$

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = e^{-cz} \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}},$$

da cui, moltiplicando, si ottiene per la formola (27*) d'Eulero:

$$\Gamma(1+z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi z}{\operatorname{sen} \pi z},$$

1) Pel simbolo n^z s'intende, senza ambiguità, $e^{z \log n}$ ($\log n$ in senso aritmetico).

ossia per la (30)

$$(31) \qquad \boxed{\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}} \qquad 2^a \text{ proprietà di } \Gamma$$

formola che ci esprime la *seconda* proprietà fondamentale della Γ euleriana.

[illegible] dal Betti

§ 69. — Caso in cui le distanze fra i punti d'infinitesimo si mantengono superiori a una quantità fissa.

Ritorniamo ora al teorema in fine al § 67 per segnalarne un caso particolare notevole, il caso in cui la distanza fra due punti qualunque d'infinitesimo

$$a_1, a_2, \ldots\ a_n \ldots$$

si mantiene sempre superiore ad una quantità fissa d. *In tal caso dimostriamo che la serie*

$$(32) \qquad \sum \frac{1}{|a_n|^3}$$

è convergente. Se sarà quindi soddisfatta l'altra condizione che gli ordini d'infinitesimo non vadano crescendo oltre ogni limite, il prodotto infinito

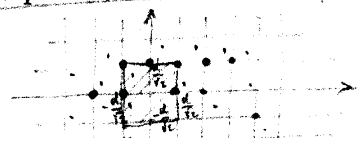
$$\prod_1^\infty \left\{ \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2}} \right\}^{p_n}$$

convergerà e rappresenterà la funzione cercata.

La convergenza della serie (32) si prova facilmente colle considerazioni seguenti. Mediante le rette, parallele agli assi, di equazioni

$$x = m\frac{d}{\sqrt{2}}, \qquad y = n\frac{d}{\sqrt{2}},$$

dove m, n percorrono tutti i valori interi positivi e negativi, dividiamo il piano in una rete di quadrati di diagonale $= d$, di modo che in uno dei quadrati cadrà al massimo uno dei punti a.



Dalla serie (32) togliamo quei termini, in numero di quattro al più, che corrispondono a punti a situati in uno dei quattro quadrati attorno all'origine, e cangiamo tutti gli altri termini in termini più grandi sostituendo ad ogni punto a_r il vertice più prossimo all'origine del quadrato in cui si trova. Provata la convergenza della nuova serie, sarà, a più forte ragione, dimostrata per la (32). Tutto si riduce quindi a dimostrare la convergenza della serie doppia

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{\left\{(m^2+n^2)\frac{d^2}{2}\right\}^{\frac{3}{2}}},$$

ossia la convergenza della serie

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{3}{2}}},$$

dove nella sommazione s'intende esclusa la combinazione $m = 0$, $n = 0$. Ora in questa serie la somma dei termini in cui $m = \pm n$ forma la serie convergente (armonica generalizzata $\alpha = 3 > 1$)

$$4\sum_1^\infty \frac{1}{(2n^2)^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{2}\sum_1^\infty \frac{1}{n^3},$$

e gli altri si riuniscono nella serie doppia

$$S = 4\sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{3}{2}}},$$

escluse le combinazioni $m = n$. Ma questa può scriversi anche

$$S = 8\sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=m-1} \frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{3}{2}}},$$

e perchè, essendo

$$\frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{3}{2}}} < \frac{1}{m^3} \qquad (n = 1, 2, \ldots\ m-1),$$

si ha

$$\sum_{n=0}^{n=m-1} \frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{3}{2}}} < \frac{1}{m^2},$$

risulterà

$$S < 8 \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m^2} .$$

Dunque S è convergente, come si era asserito. e a maggior ragione [illegible]

CAPITOLO VII.

Funzioni analitiche di più variabili complesse. — Funzioni implicite. — Proprietà fondamentali delle funzioni algebriche.

§ 70. — Funzioni regolari di due variabili complesse.

I princìpi della teoria delle funzioni di una variabile complessa, in particolare il concetto di funzione analitica, si possono estendere al caso di funzioni di più variabili complesse, come ci proponiamo ora di dimostrare in tutta brevità. Per semplicità di linguaggio ci limitiamo al caso di due variabili complesse; ma si vedrà immediatamente che le considerazioni si applicano al caso generale di n variabili complesse.

Siano

$$z_1 = x_1 + i\,y_1 , \quad z_2 = x_2 + i\,y_2$$

due variabili complesse, i cui indici si muovono nel rispettivo piano complesso illimitatamente, ovvero entro campi finiti corrispondenti C_1, C_2. Supponiamo che la variabile complessa *w dipenda* da z_1, z_2 in guisa che, per qualsiasi coppia di valori (z_1, z_2) appartenente ai campi (C_1, C_2), la w assuma un valore e, considerata come funzione delle quattro variabili reali

$$x_1 , y_1 ; \quad x_2 , y_2 ,$$

sia una funzione finita, continua (e ad un sol valore), e possegga derivate prime pure finite e continue e soddisfacenti alle condizioni di monogeneità

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{1}{i}\frac{\partial w}{\partial y_1}, \qquad \frac{\partial w}{\partial x_2} = \frac{1}{i}\frac{\partial w}{\partial y_2}\ ^{1)}.$$

Def In tal caso diremo che la w è nel campo (C_1, C_2) una funzione regolare delle due variabili complesse z_1, z_2, e scriveremo

$$w = f(z_1, z_2) .$$

È chiaro che per ogni valore fissato di z_1, interno a C_2, la w sarà in C_1 una funzione dappertutto regolare di z_1, e analogamente scambiando z_1 con z_2.

Sia ora (z'_1, z'_2) una coppia di valori per z_1, z_2 interna al campo (C_1, C_2). Col centro in z'_1 descriviamo, nel piano complesso z_1, un cerchio Γ_1 tutto interno a C_1 e similmente nel piano complesso z_2, col centro in z'_2, un cerchio Γ_2 interno a C_2. Se con $(\overline{z_1}, \overline{z_2})$ indichiamo una coppia variabile entro (Γ_1, Γ_2), la funzione

$$f(\overline{z_1}, \overline{z_2})$$

tenendo fisso $\overline{z_2}$ e considerata come funzione della variabile $\overline{z_1}$ è, dentro Γ_2, una funzione finita, continua e monodroma e però sviluppabile in serie di potenze di $\overline{z_1} - z'_1$; si avrà:

$$(1) \qquad f(\overline{z_1}, \overline{z_2}) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b_n (\overline{z_1} - z'_1)^n ,$$

1) Scindendo w nella sua parte reale ed immaginaria: $w = u + iv$, si hanno le relazioni

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \dfrac{\partial v}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y_1} = -\dfrac{\partial v}{\partial x_1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = \dfrac{\partial v}{\partial y_2}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y_2} = -\dfrac{\partial v}{\partial x_2}, \end{cases}$$

dalle quali si trae che u deve verificare simultaneamente le quattro equazioni

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} = 0 , \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial y_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial y_1}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_2} = 0.$$

dove

(2) $$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{s_1} \frac{f(z_1, \overline{z}_2)\, dz_1}{(z_1 - z'_1)^{n+1}},$$

avendo indicato con s_1 il contorno di Γ_1.

D'altronde, pel modo con cui $\overline{z}_2$ figura in b_n, si vede che b_n è funzione finita, continua e monodroma di $\overline{z}_2$ entro C_2, e quindi si potrà sviluppare in serie di potenze di $\overline{z}_2 - z'_2$ colla formola

(3) $$b_n = \sum_{m=0}^{m=\infty} a_{m,n} (\overline{z}_2 - z'_2)^m,$$

dove sarà

(4) $$a_{m,n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{s_2} \frac{b_n\, dz_2}{(z_2 - z'_2)^{m+1}},$$

ovvero per la (2)

(5) $$a_{m,n} = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{s_2} \frac{dz_2}{(z_2 - z'_2)^{m+1}}\int_{s_1} \frac{f(z_1, z_2)\, dz_1}{(z_1 - z'_1)^{n+1}}$$

Sostituendo nella (1) per b_n il valore dato dalla (3), ed osservando che, la convergenza delle nostre serie essendo assoluta, si possono ordinare i termini della serie doppia risultante come si vuole, si potrà scrivere:

(6) $$f(\overline{z}_1, \overline{z}_2) = \sum_m \sum_n a_{m,n} (\overline{z}_1 - z'_1)^m (\overline{z}_2 - z'_2)^n$$

Abbiamo dunque il teorema: *Se, variando z_1, z_2 entro i rispettivi cerchi Γ_1, Γ_2 di centri z'_1, z'_2, la funzione $f(z_1, z_2)$ è funzione finita, continua e ad un sol valore delle variabili complesse z_1, z_2, essa è sviluppabile in una serie doppia di potenze intere e positive dei binomî*

$$z_1 - z'_1, \qquad z_2 - z'_2,$$

convergente assolutamente in tutto il campo.

valendo cioè la proprietà commutativa

§ 71. — Serie di potenze. in due variabili

L' inversione del teorema precedente si fa con somma facilità, ricorrendo alle proprietà delle serie di potenze di più variabili, che sono affatto analoghe a quelle dimostrate nel Cap. I (§§ 3, 4, pag. 10 sgg.) per le serie di potenze di una variabile. Per semplicità, facendo $z'_1 = z'_2 = 0$, consideriamo una serie di potenze di due variabili z_1, z_2:

(7) $$P(z_1, z_2) = \sum\sum a_{m,n} z_1^m z_2^n,$$

e supponiamo che per una coppia di valori

$$z_1 = z_1^{(0)}, \quad z_2 = z_2^{(0)},$$

nessuno dei quali sia nullo, la serie converga *assolutamente*, oppure supponiamo soltanto che per $z_1 = z_1^{(0)}$, $z_2 = z_2^{(0)}$ i moduli della serie si mantengano tutti minori di una quantità fissa g, talchè per tutte le coppie m, n si abbia

(α) $$|a_{m,n}|\, |z_1^{(0)}|^m\, |z_2^{(0)}|^n < g.$$

Fissiamo due valori positivi r_1, r_2, tali che

$$r_1 < |z_1^{(0)}|, \quad r_2 < |z_2^{(0)}|,$$

ma che siano del resto prossimi a $|z_1^{(0)}|$, $|z_2^{(0)}|$ rispettivamente tanto poco quanto si vuole. Sussiste allora il teorema fondamentale (cfr. pag. 10): *La serie $\Sigma\Sigma\, a_{m,n} z_1^m z_2^n$, per tutti i valori di z_1, z_2 che soddisfano le condizioni*

$$|z_1| \leq r_1, \quad |z_2| \leq r_2,$$

è convergente assolutamente ed in egual grado.

La serie dei moduli della proposta (7)

(β) $$\sum\sum |a_{m,n}|\, |z_1|^m\, |z_2|^n$$

si può scrivere

$$\sum\sum |a_{m,n}|\,|z_1^{(0)}|^m\,|z_2^{(0)}|^n \left|\frac{z_1}{z_1^{(0)}}\right|^m \left|\frac{z_2}{z_2^{(0)}}\right|^n$$

e, per la supposta diseguaglianza (α), essa ha i termini rispettivamente minori della serie

$$(\gamma) \qquad g\sum\sum \left|\frac{z_1}{z_1^{(0)}}\right|^m \left|\frac{z_2}{z_2^{(0)}}\right|^n,$$

la quale è dunque maggiorante rispetto alla serie (β). Ora le quantità positive $\left|\frac{z_1}{z_1^{(0)}}\right|$, $\left|\frac{z_2}{z_1^{(0)}}\right|$ si mantengono, per ipotesi, minori rispettivamente delle due quantità *fisse*

$$q_1 = \frac{r_1}{|z_1^{(0)}|}, \qquad q_2 = \frac{r_2}{|z_2^{(0)}|}$$

ciascuna delle quali è minore dell' unità. Dunque la serie a termini *fissi* positivi

$$(\delta) \qquad g\sum\sum q_1^m\, q_2^n$$

è ancora maggiorante rispetto alla (β). Quest' ultima, essendo $q_1 < 1$, $q_2 < 1$, è certamente convergente risultando dal moltiplicare per g i termini della doppia progressione geometrica

$$\sum\sum q_1^m\, q_2^n = \frac{1}{1-q_1}\cdot\frac{1}{1-q_2},$$

onde risulta la convergenza in egual grado della serie (β), *c. d. d.*

Da questo teorema fondamentale si traggono, come è chiaro, conseguenze affatto simili a quelle del Cap. I per le funzioni di una sola variabile, in particolare il teorema: *Se la serie di potenze $P(z_1, z_2)$ converge assolutamente per una coppia di valori $z_1^{(0)}, z_2^{(0)}$ delle variabili di moduli $|z_1^{(0)}| > 0$, $|z_2^{(0)}| > 0$, tracciando nei rispettivi piani z_1, z_2 due circoli C_1, C_2 coi centri in $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, in guisa che lascino all'esterno i punti $z_1^{(0)}, z_2^{(0)}$, la serie $P(z_1, z_2)$, movendosi z_1, z_2 entro C_1, C_2, convergerà in egual grado e rappresenterà nel campo (C_1, C_2) una funzione finita, continua e monodroma delle due variabili complesse z_1, z_2.*

§ 72. — Campo ristretto di convergenza. - Prolungamento analitico.

La delimitazione del vero campo di convergenza di una serie di potenze a più variabili dipende, come Weierstrass ha dimostrato [1]), da una diseguaglianza

$$F(\varrho_1, \varrho_2) < 0,$$

cui debbono soddisfare i moduli

$$\varrho_1 = |z_1|, \quad \varrho_2 = |z_2|$$

delle variabili. Senza entrare in queste ricerche generali, che non occorrono al nostro scopo, ci basterà qui definire quello che Weierstrass chiama il *campo ristretto di convergenza* di una serie di potenze $P(z_1, z_2)$ nel modo seguente. Distinguiamo i numeri positivi ϱ in due classi e diciamo della prima classe A) ogni numero ϱ tale che per

$$|z_1| < \varrho, \quad |z_2| < \varrho$$

la serie dei moduli della proposta converga, della seconda classe B ogni numero ϱ tale che per

$$|z_1| > \varrho, \quad |z_2| > \varrho$$

la serie dei moduli diverga. Come al § 3 (pag. 10), risulta che esiste un numero limite R che separa le due classi, sicchè la serie $P(z_1, z_2)$ converge assolutamente per valori che siano *simultaneamente* di modulo $< R$ e diverge per valori i cui moduli superino *simultaneamente* R. Ma naturalmente può la serie convergere anche per valori z_1, z_2 tali che sia $|z_1| > R$, $|z_2| < R$ e divergere per $|z_1| < R$ con $|z_2| > R$. Allora se nei piani z_1, z_2, coi centri nelle origini, tracciamo due circoli C_1, C_2 di raggio R, per ogni coppia

R

[1]) *Einleitung in die Theorie der analytischen Functionen* (Lezioni manoscritte).

v. Teorema di Cauchy-Hadamard

R

$|z_1|$ $|z_2|$ Σ diverge

Σ converge nel campo ristretto

Σ può convergere

$(z_1 z_2)$ i cui indici cadano simultaneamente nell' interno dei circoli, la serie converge assolutamente e diverge se tutti due gli indici cadono all' esterno. Il campo (C_1, C_2) è quello che Weierstrass chiama il campo ristretto di convergenza.

Diciamo ora brevemente del *prolungamento analitico* di una serie di potenze $P(z_1, z_2)$.

Prendiamo una coppia di punti (a_1, a_2) nell' interno del campo di convergenza, e sia r la più piccola delle due distanze di a_1, a_2 dal rispettivo contorno. Se descriviamo coi centri in a_1, a_2 due circoli Γ_1, Γ_2 di raggio $= r$, questi rimangono nell' interno rispettivamente di (C_1, C_2) e possiamo quindi (§ 70) convertire la serie $P(z_1, z_2)$ in una nuova serie

$$P(z_1 - a_1, \; z_2 - a_2)\,;$$

il raggio del campo ristretto di convergenza per questa nuova serie è *almeno* $= r$, ma può anche essere maggiore. In quest' ultimo caso può darsi che la funzione risulti così prolungata analiticamente al di là del primitivo campo di convergenza. Dopo ciò s' intende subito come il concetto di *funzione analitica*, che abbiamo sviluppato al § 45 pel caso di una sola variabile, sia estendibile anche nel campo di più variabili complesse.

§ 73. — Radici di un' equazione $f(w, z) = 0$.

Sia

$$f(w, z) = \sum \sum a_{m,n} w^m z^n$$

una serie di potenze delle due variabili w, z, di cui indichiamo con R il raggio del campo ristretto C di convergenza. Poniamo fra w e z la relazione

$$f(w, z) = 0\,, \tag{8}$$

e domandiamo se, ed in quale senso, potremo dire che w viene così definita come funzione analitica *implicita* della z. Un caso particolare è già stato risoluto al § 58 coll' inversione delle serie, e con un metodo analogo possiamo ora risolvere la questione generale.

Supponiamo di conoscere una coppia particolare w_0, z_0 di valori, che soddisfino la (8), e facciamo senz'altro, come è lecito:

$f(w_0 z_0) = 0$

$$w_0 = 0\,, \quad z_0 = 0\,,$$

sicchè per ipotesi

$$f(0, 0) = 0\,.$$

La funzione $f(w, 0)$ è una funzione regolare di w entro C e s' annulla per $z = 0$; ma noi supponiamo naturalmente che non sia identicamente $f(w, 0) = 0$ [1]. Questa funzione

$$P(w) = f(w, 0)$$

avrà dunque in $w = 0$ un infinitesimo, il cui ordine diciamo n; allora per $z = 0$ l'equazione $f(w, z) = 0$ ha una radice nulla $w = 0$, multipla dell'ordine n. Ora ci proponiamo di dimostrare che: *per z prossima a zero l'equazione $f(w, z) = 0$ avrà n radici*

$$w_1, \; w_2, \; \ldots, \; w_n$$

prossime a zero.

Dimostreremo il nostro teorema, e ne preciseremo il senso, colle considerazioni seguenti. Cominciamo dal descrivere nel piano w un circolo C' di raggio ϱ, concentrico a C, e più piccolo in guisa che $P(w) = f(w, 0)$ non si annulli nell'area circolare C' nè sul suo contorno s, eccetto naturalmente che in $w = 0$. Su tutto il contorno s la funzione $f(w_s, 0)$ avrà il modulo discosto da zero; supponiamo che sia sempre

$$|\,f(w_s, 0)\,| > g\,, \tag{9}$$

essendo g una quantità positiva. Mostriamo in primo luogo che si può descrivere nel piano z, col centro in $z = 0$, un cerchio Γ di raggio r abbastanza piccolo perchè si abbia sempre

$$|\,f(w_s, z) - f(w_s, 0)\,| < g \tag{10}$$

[1] In tal caso in tutti i termini di $f(w, z)$ comparirebbe una potenza di z, che si potrebbe sopprimere in precedenza.

per $|z| \leq r$ e w_s essendo dovunque sul contorno s. Variando w, z colle limitazioni

$$|w| \leq \varrho, \quad |z| \leq r,$$

la serie $f(w, z)$ è convergente in egual grado e però possiamo decomporla in una parte finita $P(w, z)$ (un polinomio) ed un resto $R(w, z)$:

$$f(w, z) = P(w, z) + R(w, z),$$

tale che sia per tutti i valori di w, z, di modulo non superiore a ϱ:

$$|R(w, z)| < \frac{1}{3} g.$$

Ora

$$\begin{cases} f(w_s, z) = P(w_s, z) + R(w_s, z), \\ f(w_s, 0) = P(w_s, 0) + R(w_s, 0), \end{cases}$$

e perciò

$$|f(w_s, z) - f(w_s, 0)| < |P(w_s, z) - P w_s, 0)| + \frac{2}{3} g.$$

La differenza

$$P(w_s, z) - P(w_s, 0)$$

è un polinomio in z, che si annulla per $z = 0$ e i coefficienti, pur variando w_s sul contorno di C', non superano col modulo una quantità fissa. Possiamo dunque prendere r così piccolo che sia sempre

$$|P(w_s, z) - P(w_s, 0)| < \frac{1}{3} g \quad \text{per } |z| \leq r$$

e troveremo così sempre verificata la (10), come si voleva.

Ciò premesso, dimostriamo che: *fissato un valore $\bar{z}$ di modulo $|\bar{z}| \leq r$, l'equazione $f(w, \bar{z}) = 0$ avrà precisamente n radici w_1, w_2, ..., w_n entro il circolo C', cioè di modulo $< \varrho$.*

Intanto la $f(w, \bar{z})$ non si annulla certo sul contorno s di C', poichè se fosse

$$f(w_s, z) = 0,$$

per la (10) ne risulterebbe $|f(w_s, 0)| < g$, che contraddice la (9). Se indichiamo adunque con N il numero delle radici di

$$f(w_s, \bar{z}) = 0,$$

entro C', e poniamo $f'_w(w, z) = \dfrac{\partial f(w, z)}{\partial w}$ avremo, secondo la formola dell' indicatore logaritmico:

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{f'_w(w_s, \bar{z})}{f(w_s, \bar{z})} dw.$$

L' integrale del secondo membro, se facciamo variare $\bar{z}$ entro Γ, è una funzione continua di $\bar{z}$ ed essendo un numero intero, dalla considerazione stessa fatta al § 58, risulta che esso serberà sempre lo stesso valore. Ma poichè per $\bar{z} = 0$ si ha $N = n$, avremo sempre

$$\boxed{N = n} \qquad c. d. d.$$

§ 74. — Teorema di Weierstrass.

valido solamente per z piccoli

Siano $w_1, w_2, ..., w_n$ i valori di w entro C', radici dell'equazione

$$f(w, z) = 0 \quad \text{per} \quad z \leq r.$$

Se consideriamo l' integrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_s w^k \frac{\partial \log f(w, z)}{\partial w} dw,$$

essendo k un intero positivo qualunque, il suo valore sarà la somma dei residui nell' interno, onde:

$$w_1^k + w_2^k + ... + w_n^k = \frac{1}{2\pi i} \int_s w^k \frac{\partial \log f(w, z)}{\partial w} dw,$$

ed il secondo membro è evidentemente una funzione regolare di z entro Γ, che di più si annulla per $z = 0$. Se poniamo

$$\varphi(w, z) = (w - w_1)(w - w_2) \dots (w - w_n) =$$
$$= w^n + a_1 w^{n+1} + a_2 w^{n+2} + \dots + a^n,$$

saranno quindi le a serie di potenze di z convergenti entro Γ.

Preso ora un punto qualunque z entro Γ, ed un punto $\overline{w}$ entro C, distinto da $w_1, w_2, \dots, w_n$, si consideri la funzione di w

$$\frac{1}{w - \overline{w}} \frac{\partial \log f(w, z)}{\partial w}.$$

Questa, ha entro C, solo singolarità in

$$w_1, w_2, \dots, w_n \quad \text{e in } \overline{w},$$

e precisamente singolarità polari del primo ordine, coi residui

$$\frac{1}{w_1 - \overline{w}}, \quad \frac{1}{w_2 - \overline{w}}, \quad \dots, \quad \frac{1}{w_n - \overline{w}}$$

nei primi punti, e col residuo

$$\left(\frac{\partial \log f(w, z)}{\partial w}\right)_{w = \overline{w}}$$

in $\overline{w}$. Avremo quindi

$$\frac{1}{w_1 - \overline{w}} + \frac{1}{w_2 - \overline{w}} + \dots + \frac{1}{w_n - \overline{w}} + \left(\frac{\partial \log f(w, z)}{\partial w}\right)_{\overline{w}} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{1}{w - \overline{w}} \frac{\partial \log f(w, z)}{\partial w} dw.$$

Il secondo membro è una funzione regolare di z e $\overline{w}$, diciamo $P(\overline{w}, z)$ e, cangiando $\overline{w}$ in w, potremo scrivere la formola precedente anche così:

$$\frac{\partial \log f(w, z)}{\partial w} - \frac{\partial \log \varphi(w, z)}{\partial w} = P(w, z),$$

da cui, integrando rispetto a w e passando dai logaritmi ai numeri, otteniamo:

$$f(w, z) = \psi(z) \cdot \varphi(w, z) \, e^{P_1(w, z)},$$

ove $\psi(z)$, che è una funzione regolare di z e non s'annulla per $z = 0$ (altrimenti s'annullerebbe identicamente $f(w, 0)$), si può includere nell'esponenziale.

Otteniamo così la formola:

$$f(w, z) = \varphi(w, z) \, e^{P_1(w, z)} = \{ w^n + a_1 w^{n-1} + \dots + a_n \} \, e^{P_1(w, z)},$$

che ci esprime il teorema di Weierstrass: *Se la funzione regolare $f(w, z)$ delle due variabili complesse w, z si annulla per $w = 0$, $z = 0$, e non è identicamente $f(w, 0) = 0$, in un intorno sufficientemente piccolo di $w = 0$, $z = 0$, si può porre sotto la forma*

$$f(w, z) = (w^n + a_1 w^{n-1} + \dots + a_n) \cdot e^{P_1(w, z)},$$

dove il primo fattore, che pone in evidenza il modo di annullarsi della funzione, è un polinomio di grado finito in w con coefficienti funzioni regolari di z e nulle per $z = 0$, mentre il secondo fattore (esponenziale) non si annulla più nell'intorno.

§ 75. — Funzioni implicite.

Il teorema di Weierstrass ci dimostra che, volendo studiare come dipendono da z nell'intorno di $z = 0$ le radici $w_1, w_2, \dots, w_n$ prossime a zero dell'equazione

$$f(w, z) = 0,$$

si può sostituire a questa l'altra più semplice

$$\varphi(w, z) = w^n + a_1 w^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

che è del grado n in w. Se supponiamo dapprima $n = 1$, l'equazione precedente ci dà senz'altro w in serie di potenze per z e ci dimostra il teorema fondamentale:

Se l'equazione $f(w, z) = 0$ è soddisfatta per $z = a$ $w = b$ ed è

$$\left(\frac{\partial f(w, z)}{\partial w}\right)_{a, b} \neq 0,$$

Cf. col teorema del Dini su le funzioni implicite reali *per ogni valore di z prossimo ad a l' equazione ha una sola radice w prossima a b e questo valore w è una funzione regolare di z nell' intorno di z = a.*

Quando invece si annulli per $z = a$, $w = b$ un certo numero di derivate

$$\frac{\partial f}{\partial w}, \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}, \ldots, \frac{\partial^{n-1} f}{\partial w^{n-1}},$$

ma sia

$$\left(\frac{\partial^n f}{\partial w^n}\right)_{a,b} \neq 0,$$

allora per $z = a$ avremo n valori $w_1, w_2, \ldots, w_n$ prossimi a b, dati da un' equazione della forma

$$\varphi(w, z) = (w - b)^n + a_1 (w - b)^{n-1} \ldots + a_n = 0, \tag{11}$$

dove le a sono funzioni regolari di z nell' intorno di $z = a$ e quivi nulle. Questi n valori di w, restringendo convenientemente l' intorno di $z = a$, si potranno supporre tutti distinti, altrimenti dovrebbe annullarsi anche il discriminante $D(z)$ della (11) rispetto a w; ma questo discriminante è regolare nell' intorno di a, e restringendo l' intorno si può far sì che non abbia altra radice che in $z = a$.

Se z_0 è un punto di questo intorno distinto da a, ciascuno degli n valori $w_1, w_2, \ldots, w_n$, per es. w_1, sarà sviluppabile in serie di potenze di $z - z_0$, essendo

$$\left(\frac{\partial f(w, z)}{\partial w}\right)_{w=w_0,\, z=z_0} \neq 0.$$

Vediamo dunque che in ogni caso, ponendo fra w, z il legame espresso dall'equazione

$$f(w, z) = 0,$$

veniamo a definire una o più funzioni analitiche w della variabile complessa z.

§ 76. — Funzioni algebriche.

Applichiamo questi risultati generali al caso importante in cui la $f(w, z)$ sia una funzione razionale intera degli argomenti w, z, e si abbia quindi l'equazione:

$$f(w, z) = \varphi_0(z)\, w^n + \varphi_1(z)\, w^{n-1} + \ldots + \varphi_{n-1}(z)\, w + \varphi_n(z) = 0, \tag{12}$$

i cui coefficienti $\varphi_i(z)$ sono polinomî razionali interi in z. Supponiamo di più che il polinomio $f(w, z)$ sia *irriducibile*, cioè non si possa decomporre in prodotti di altri tali polinomî; altrimenti la (12) si decomporrebbe in altrettante equazioni. La w, definita da una tale equazione come funzione implicita di z, dicesi una *funzione algebrica* di z. Per ogni valore di z abbiamo n valori di w:

$$w_1, w_2, \ldots, w_n,$$

che sono in generale distinti e finiti. Eccezione si ha soltanto per un numero finito di valori di z, i cui indici diconsi *punti critici*. Questi punti critici sono di due specie. Essi provengono in primo luogo da quei valori di z che annullano il primo coefficiente $\varphi_0(z)$, e per questi valori di z uno o più dei valori di w diventano infiniti; uno solo se quel valore di z annulla il primo coefficiente $\varphi_0(z)$ e nessuno dei seguenti, più se accade il contrario.

In secondo luogo, per valori speciali di z, possono due o più valori di w coincidere; ciò avviene quando insieme a $f(w, z)$ si annulla anche $\dfrac{\partial f(w, z)}{\partial w}$ e però il discriminante $D(z)$ della (12) rispetto a w, il quale non è certo identicamente nullo, essendo la (12) irriducibile.

Gli indici delle radici delle due equazioni

$$\varphi_0(z) = 0, \qquad D(z) = 0$$

sono dunque i punti critici della (12).

Se $z = a$ è un punto *non* critico, le radici

$$w_1, w_2, \ldots, w_n$$

sono finite e tutte diseguali per $z = a$, onde

$$f(w_i,\ a) = 0\,, \left(\frac{\partial f(w,a)}{\partial w}\right)_{w_i} \neq 0$$

e dal teorema fondamentale del paragrafo precedente risulta:

Ciascuno degli n rami

$$w_1\,,\ w_2\,,\ \ldots,\ w_n$$

è nell' intorno di un punto non critico $z = a$ una funzione regolare di z, cioè sviluppabile in serie di potenze

$$w_i = P_i(z - a)\,. \tag{13}$$

È facile vedere che se prolunghiamo analiticamente un ramo $w_1 = P_1(z - a)$, il suo prolungamento soddisfarà ancora alla (12) e sarà quindi sempre uno degli n rami.

È invero se $\overline{P}_1(z - b)$ è un prolungamento analitico immediato di $P_1(z - a)$, nel campo comune di convergenza si ha

$$f(\overline{P}_1(z - b),\ \ z) = 0\,,$$

e questa relazione vale quindi anche in tutto il campo di convergenza di $\overline{P}_1(z - b)$.

§ 77. — Teorema fondamentale.

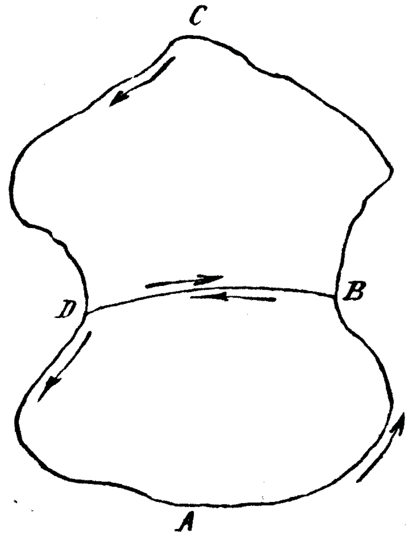
Consideriamo nel piano complesso z una curva chiusa σ, che parta da un punto non critico A e vi ritorni, senza passare per alcun punto critico. Per ogni punto b di σ gli n rami saranno sviluppabili in serie di potenze $P(z - b)$ il cui raggio R del cerchio di convergenza è certamente > 0, ed ha un limite inferiore $r > 0$ [1]) allorquando b percorre σ; questo raggio r potrà servire come rag-

[1]) Esiste certamente un limite inferiore di R, sia r; basta provare che $r > 0$. Per un teorema di Weierstrass, esiste sulla curva almeno un punto L tale che in qualunque intorno di esso, comunque piccolo, il limite inferiore dei valori di R è ancora r; e siccome, per questo punto limite, R ha un valore $R_0 > 0$, in un intorno sufficientemente piccolo di L tutti i valori di R saranno per es. superiori a $\frac{R_0}{2}$ onde è certamente $r > 0$.

gio di convergenza per tutti i punti di σ. Fissiamo in A un ramo di partenza w_i e prolunghiamolo analiticamente lungo il cammino σ per mezzo di cerchi di convergenza di raggio r, ciascuno dei quali abbia una parte superficiale a comune col precedente. Al ritorno in A il ramo w_i o ritornerà col valore iniziale, o con uno degli altri $n - 1$ valori che w ha in A. Se si osserva che due rami diversi w_i, w_k, descritto il cammino chiuso, si mutano necessariamente in due rami diversi, si vede che l'effetto prodotto sugli n rami w_1, w_2, ..., w_n dal descrivere il cammino chiuso σ sarà di permutarli fra loro in un certo modo, di produrre cioè una corrispondente *sostituzione* sui rami

$$S = \begin{pmatrix} w_{i_1} & w_{i_2} & \ldots & w_{i_n} \\ w_1 & w_2 & \ldots & w_n \end{pmatrix}$$

gli indici i_1, i_2, ..., i_n coincidendo, salvo l'ordine, con 1, 2, ..., n. Si vede poi subito che la sostituzione S sugli indici rimane la stessa



piano Z

Fig. 8.

spostando sopra σ il punto A di partenza. Questa sostituzione S può anche essere l'identità, cioè può ogni ramo ritornare col proprio valore. Ciò avviene effettivamente se il cammino chiuso σ è tutto contenuto in un'area *semplicemente connessa* e priva di punti critici. Per dimostrarlo, supponiamo dapprima che σ non intersechi sè stessa, nel qual caso formerà il contorno di un'area semplice, priva nell'interno e sul contorno di punti critici, e per ogni punto z_0 dell'area (contorno incluso) potremo servirci per le corrispondenti serie $P(z - z_0)$ di un raggio fisso r cerchio di convergenza.

Descriviamo il cammino chiuso

$$\sigma = A\,B\,C\,D\,A$$

della figura, partendo da A col ramo w_1, e supponiamo si ritorni in A con un valore diverso w_2, sicchè la sostituzione prodotta sui rami dal cammino chiuso $A\,B\,C\,D\,A$ non è l'identità. Per mezzo di una linea semplice $B\,D$, che riunisca due punti del contorno σ, dividiamo l'area in due regioni coi contorni $A\,B\,D\,A$, $B\,C\,D\,B$. Dico che uno almeno di questi due cammini chiusi deve produrre sui rami una sostituzione non identica. assurd

È in vero, se invece di descrivere σ descriviamo l'altro cammino chiuso

diramazione

$$A\,B\,C\,D\,B\,D\,A\,,$$

inserendo due volte il tratto $B\,D$, percorso in verso contrario, l'effetto prodotto sui rami è evidentemente lo stesso. Se dunque il cammino chiuso $B\,C\,D\,B$ non produce sostituzione non identica sui rami, l'effetto prodotto da σ sarà il medesimo che quello del cammino chiuso $A\,B\,D\,A$, il quale produrrà un'effettiva sostituzione. Possiamo ora ragionare sul cammino chiuso $A\,B\,D\,A$ come prima sopra $A\,B\,C\,D\,A$, spezzando l'area racchiusa in due aree parziali più piccole. Così procedendo, arriveremo ad un contorno chiuso, producente sostituzione sui rami, tutto contenuto in un cerchio del raggio fissato r, ciò che è assurdo.

È chiaro poi che se il cammino chiuso σ intersecasse sè stesso, basterebbe applicare considerazioni analoghe a quelle del § 31 per arrivare alla medesima conclusione.

Abbiamo così dimostrato il teorema: *In qualunque area semplicemente connessa, priva di punti critici, ogni ramo della funzione algebrica è una funzione finita, continua e monodroma di z.*

In particolare se, fatto centro in un punto a non critico, descriviamo un cerchio che lasci all'esterno o sulla periferia tutti i punti critici, in questo disco circolare ogni ramo della funzione

algebrica è finito, continuo e monodromo e quindi sviluppabile in serie di potenze (13) convergente in tutto l'interno del disco. Dunque: *La serie di potenze* (13), *che rappresenta uno qualunque dei rami nell'intorno di un punto a non critico, ha un cerchio di convergenza che si estende almeno fino al più prossimo punto critico.*

§ 78. — Punti di diramazione.

Andiamo ora a studiare il modo di comportarsi di una funzione algebrica nell'intorno di un punto critico $z = b$ (a distanza finita) e supponiamo dapprima che in b coincidano due o più rami, senza che alcun ramo vi diventi infinito; supponiamo cioè che b sia una radice del discriminante $D(z)$ e non del primo coefficiente $\varphi_0(z)$ (§ 76). Prendiamo un intorno, per es. circolare, così piccolo del punto critico b che non contenga alcun altro punto critico. Per un giro attorno a $z = b$ gli n rami $w_1, w_2, \dots, w_n$ subiranno una sostituzione S (che potrà anche eventualmente ridursi all'identità); decomponiamo questa sostituzione in cicli e sia

$$(w_1, w_2, \dots, w_p)$$

uno dei cicli contenente il ramo w_1. Per vedere la specie di singolarità che hanno in $z = b$ i p rami $w_1, w_2, \dots, w_n$, che si permutano ciclicamente fra loro girando attorno a b, facciamo la sostituzione

$$z - b = t^p \tag{14}$$

e consideriamo $w_1, w_2, \dots, w_p$ come funzioni di t. Se nell'intorno considerato di $z = b$ prendiamo un punto z_0 e col centro in z_0 descriviamo un cerchio che escluda b, i rami $w_1, w_2, \dots, w_p$ sono sviluppabili in serie di potenze di $z - z_0$. Considerati come funzioni di t in un intorno di $t = 0$, essi sono quindi funzioni regolari in ogni punto, *salvo al massimo in* $t = 0$. Ma ora vediamo subito che essi sono regolari anche in $t = 0$, per la qual cosa basta dimostrare che, facendo compiere a t un giro attorno a $t = 0$, ciascun ramo, per es. w_1, ritorna col proprio valore. E invero, per la (14), se t gira una volta attorno a $t = 0$, la z gira p volte attorno a $z = b$ e, sui rami di w producendosi la sostituzione S^p, si vede appunto che $w_1, w_2, \ldots, w_p$ ritornano ciascuno col medesimo valore. Avremo dunque

$$w_1 = P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots,$$

cioè

$$w_1 = a_0 + a_1 (z-b)^{\frac{1}{p}} + a_2 (z-b)^{\frac{2}{p}} + \ldots \tag{15}$$

Sviluppo di un ramo intorno ad un punto critico in cui i valori coincidono

È chiaro che gli sviluppi per $w_2, w_3, \ldots, w_p$ si ottengono da quello di w_1 cangiando t in $\varepsilon t, \varepsilon^2 t, \ldots, \varepsilon^{p-1} t$ rispettivamente, ove si ponga

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{p}},$$

giacchè per un giro di z attorno a b, che muta w_1 in w_2, w_2 in $w_3 \ldots$, la $(z-b)^{\frac{1}{p}}$ acquista appunto il fattore ε.

Come si vede, nell' intorno di un punto critico $z = b$, ove più rami coincidono, questi si sviluppano in generale per *potenze frazionarie* di $z - b$, i cui esponenti hanno il medesimo denominatore.

Serie di potenze [illegible]

Può anche darsi che il punto critico sia soltanto *apparente* e ciò avviene se la sostituzione S è l' identità. Allora nell' intorno di esso tutti i rami si comportano regolarmente.

Se la S non è l' identità, il punto $z = b$ si dice un punto critico algebrico o di *diramazione* per significare che, girando attorno ad un tale punto, i rami si permutano fra loro.

§ 79. — **Singolarità polari.**

Supponiamo ora che il valore critico $z = b$ annulli il 1º coefficiente $\varphi_0(z)$. Se facciamo la sostituzione

$\varphi_0(b) = 0$

$$w = \frac{1}{w'},$$

l'equazione (12) diventa

$$\varphi_n(z)\, w'^n + \varphi_{n-1}(z)\, w'^{n-1} + \ldots + \varphi_1(z)\, w' + \varphi_0(z) = 0. \tag{16}$$

Se il valore $z = b$ annulla φ_0 senza annullare φ_1, la (16) ha per $z = b$ una sola radice nulla $w'_1 = 0$, talchè w'_1 è una serie di potenze di $z - b$ annullantesi per $z = b$. Supposto che vi si annulli dell'ordine n, avremo

$$w'_1 = (z-b)^n \{ a_1 + a_2 (z-b) + \ldots \}, \quad \text{con } a_1 \neq 0,$$

e quindi pel ramo corrispondente w_1 della primitiva

$$w_1 = \frac{A}{(z-b)^n} + \frac{A_2}{(z-b)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{z-b} + P(z-b).$$

Quel ramo w_1, che diventa infinito per $z = b$, ha dunque semplicemente in $z = b$ una singolarità polare.

Supponiamo ora che per $z = b$ siano nulli, oltre φ_0, anche $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{r-1}$ e sia

$$\varphi_r(b) \neq 0.$$

Allora la (16) ha per $z = b$ precisamente r radici nulle. Una di esse, per es. w'_1, si svilupperà nell' intorno di $z = b$ per potenze intere e positive di $(z-b)^{\frac{1}{p}}$, supposto che il ciclo contenente w'_1 consti di p rami. Se lo sviluppo comincia colla potenza $(z-b)^{\frac{q}{p}}$, avremo

$$w'_1 = (z-b)^{\frac{q}{p}} \left\{ a_1 + a_2 (z-b)^{\frac{1}{p}} + \ldots \right\}, \quad a_1 \neq 0,$$

indi

$$w_1 = (z-b)^{-\frac{q}{p}} \left\{ a_1 + a_2 (z-b)^{\frac{1}{p}} + \ldots \right\}, \quad a \neq 0,$$

ossia

$$w_1 = \frac{a_1}{(z-b)^{\frac{q}{p}}} + \frac{a_2}{(z-b)^{\frac{q-1}{p}}} + \ldots + \frac{a_q}{(z-b)^{\frac{1}{p}}} + P\left((z-b)^{\frac{1}{p}}\right). \tag{17}$$

In tal caso w_1 si sviluppa adunque per potenze intere, positive e negative, di

$$(z-b)^{\frac{1}{p}};$$

ma la parte che contiene potenze negative ha sempre un numero finito di termini. È evidente che una tale singolarità si può riguardare come proveniente dal sovrapporsi di una singolarità polare e di un punto di diramazione.

Abbiamo così esaminato il modo di comportarsi dei rami di una funzione algebrica nell' intorno di ogni punto $z = b$ a distanza finita. Resta soltanto che esaminiamo ciò che accade nell' intorno di $z = \infty$. Colla sostituzione $z = \frac{1}{z'}$ riporteremo l'esame all' intorno del punto $z' = 0$, e diremo quindi che in $z = \infty$ si ha pel ramo w_1 in considerazione un punto regolare, un punto di diramazione, ovvero un polo, corrispondentemente a quello che accade per w_1 in $z' = 0$.

Gli sviluppi dei rami nell' intorno di $z = \infty$, nel caso che questo punto sia singolare pel ramo, si otterranno quindi semplicemente dagli sviluppi (15) o (17), cangiandovi $z - b$ in $\frac{1}{z}$.

Riepilogando, abbiamo il risultato : *Una funzione algebrica ha su tutta la sfera complessa un numero finito di punti singolari, che possono essere o poli, o punti di diramazione, o singolarità composte di queste due specie.*

§ 80. — Le funzioni algebriche come funzioni analitiche.

Ciascun ramo di una funzione algebrica di z è altresì un ramo di una funzione analitica e, come si è detto già al § 76, la funzione analitica prolungata dà sempre un ramo della funzione algebrica. Ci rimane da risolvere l' importante questione : *Gli n rami $w_1, w_2, \ldots, w_n$ della funzione algebrica w costituiscono una sola funzione analitica, ovvero l' insieme di più funzioni analitiche?*

Dimostreremo che: *Nella nostra ipotesi che l'equazione $f(w, z) = 0$ sia irriducibile, gli n rami della funzione algebrica w costituiscono un' unica funzione analitica.* Per questo basterà dimostrare che da un ramo w_1 si può passare, per prolungamento analitico, descrivendo convenienti cammini chiusi, ad uno qualunque degli altri. Supponiamo al contrario che da w_1 si possa così passare soltanto a

$$w_1, w_2, \ldots, w_p \quad \text{con } p < n.$$

Si vede subito che i p rami $w_1, w_2, \ldots, w_p$ formano un ciclo chiuso in guisa che da uno qualunque di essi si può passare per prolungamento analitico soltanto ad uno degli altri. Consideriamo allora le funzioni simmetriche elementari dei p rami del ciclo

$$F_k(z) = w_1^k + w_2^k + \ldots + w_p^k,$$

ove k è un intero positivo. Questa funzione analitica di z è uniforme su tutta la sfera complessa, poichè per ogni cammino chiuso descritto da z i p rami $w_1, w_2, \ldots, w_p$ si permutano fra loro e $F_k(z)$ ritorna quindi col medesimo valore. Inoltre la $F_k(z)$ possiede soltanto un numero finito di singolarità, e queste sono necessariamente singolarità polari; infatti, applicando ai singoli termini w_i^k gli sviluppi (15), (17), le potenze frazionarie debbono necessariamente sparire nella somma monodroma $F_k(z)$.

Questa funzione $F_k(z)$ è dunque una *funzione razionale* di z (§ 61). Ne risulta che il prodotto

$$(w - w_1)(w - w_2) \ldots (w - w_p) = w^p + a_1 w^{p-1} + a_2 w^{p-2} + \ldots + a_p$$

ha i suoi coefficienti funzioni razionali di z. Questo polinomio è d'altronde un fattore di

$$f(w, z) = \varphi_0(z)(w - w_1)(w - w_2) \ldots (w - w_n),$$

onde seguirebbe che $f(w, z)$ è riducibile contro l' ipotesi.

Dimostriamo ora che le proprietà caratteristiche delle funzioni analitiche algebriche consistono in ciò: 1° esse hanno un numero finito di determinazioni o rami; 2° su tutta la sfera complessa non hanno che un numero finito di singolarità, che sono o poli o punti di diramazione.

E invero se w è una funzione analitica di z con n rami

$$w_1, w_2, \ldots, w_n$$

ed ha un numero finito di punti singolari, nell' intorno dei quali possiede sviluppi della forma (15), (17), il ragionamento testè applicato dimostra che nel polinomio

$$w^n + a_1 w^{n-1} + \ldots + a_n = (w - w_1)(w - w_2) \ldots (w - w_n)$$

i coefficienti a sono funzioni razionali di z.

§ 81. — Gruppo di monodromia.

Consideriamo un'equazione algebrica

$$\varphi_0 (z)\, w^n + \varphi_1 (z)\, w^{n-1} + \ldots + \varphi_n (z) = 0 .$$

Fissando un punto non critico A nel piano, ad ogni cammino chiuso σ descritto da z, che parta da A e vi ritorni senza passare per alcun punto critico, corrisponde (§ 77) una sostituzione S sugli n rami. Se consideriamo due cammini chiusi σ_1, σ_2, che producano rispettivamente le sostituzioni S_1, S_2, il cammino chiuso $\sigma_1\, \sigma_2$, che risulta dal percorrere prima σ_1 poi σ_2, produce evidentemente la sostituzione prodotto

$$S_1 \,.\, S_2 \,.$$

In particolare il cammino σ_1^{-1}, che si ottiene percorrendo σ_1 in senso inverso, produrrà la sostituzione inversa S_1^{-1}.

Ciò premesso, consideriamo la totalità dei cammini chiusi; avremo corrispondentemente un insieme di sostituzioni sui rami che saranno necessariamente in numero finito, al massimo $= \pi(n)$. Queste sostituzioni

$$S_1 ,\ S_2 ,\ \ldots ,\ S_m , \tag{18}$$

fra le quali si trova certamente l'identità, formano un *gruppo* poichè, per le osservazioni premesse, se S_i, S_k sono due sostituzioni qualunque della serie (18), anche il prodotto $S_i\, S_k$ trovasi nella serie stessa. Questo gruppo Γ dicesi il *gruppo di monodromia* dell'equazione. Facilmente si vede che il gruppo stesso è indipendente dal punto iniziale scelto A.

Poichè inoltre l'equazione è supposta irriducibile, vi sono in Γ sostituzioni che portano un ramo qualunque in un altro qualunque, cioè: *il gruppo di monodromia Γ è transitivo.*

Il gruppo di monodromia Γ possiede le proprietà caratteristiche date dai teoremi seguenti:

1° *Se una funzione razionale*

$$y = F(w_1 ,\ w_2 ,\ \ldots ,\ w_n ,\ z)$$

degli n rami della funzione algebrica, e di z, rimane invariata eseguendo sugli n rami una sostituzione qualunque del gruppo Γ di monodromia, essa è una funzione razionale di z.

E infatti, pei principî della teoria delle equazioni, la y è certamente legata a z da un'equazione algebrica (risolvente della data), cioè è una funzione algebrica di z:

$$F(w_1 ,\ w_2 ,\ \ldots ,\ w_n, z) = \psi(z) . \tag{19}$$

Ma, descrivendo un qualunque cammino chiuso, $\psi(z)$ ritorna, per ipotesi, col medesimo valore ed è perciò una funzione razionale di z.

2° *Inversamente, se una funzione razionale $F(w_1 , w_2 , \ldots, w_n, z)$ si può esprimere razionalmente per z, essa deve rimanere invariata per qualunque sostituzione del gruppo di monodromia.*

E infatti nella (19), ove si supponga $\psi(z)$ razionale in z, facciamo percorrere a z il cammino chiuso σ_1, che produce la sostituzione

$$S_i = \begin{pmatrix} w_{i_1} & w_{i_2} & \ldots & w_{i_n} \\ w_1 & w_2 & \ldots & w_n \end{pmatrix}$$

del gruppo di monodromia. Per le proprietà del prolungamento analitico, la (19) rimarrà sempre soddisfatta e perchè $\psi(z)$ ritorna col proprio valore avremo

$$F(w_{i_1} ,\ w_{i_2} ,\ \ldots ,\ w_{i_n} ,\ z) = F(w_1 ,\ w_2 ,\ \ldots ,\ w_n ,\ z) , \qquad \textit{d. d. c.}$$

In generale distinto dal gruppo di monodromia è il *gruppo algebrico* G dell'equazione, pel quale intendiamo il *gruppo di Galois* per l'equazione nel campo di razionalità formato dalle quantità costanti (coefficienti) che vi figurano, aggiunto al campo stesso il parametro indeterminato z. Pel gruppo algebrico dell'equazione valgono i due teoremi sopra enunciati pel gruppo di monodromia, soltanto modificati in questo che le funzioni razionali di z ivi considerate hanno di più *coefficienti razionali*. Si dimostra che in ogni caso: *Il gruppo di monodromia Γ è un sottogruppo invariante del gruppo algebrico G; l'aggiunta di una sola irrazionalità numerica abbassa il gruppo di Galois per l'equazione da G a Γ* [1]).

[1]) Vedi *Teoria dei gruppi e delle equazioni algebriche.*

§ 82. — Sostituzioni elementari del gruppo di monodromia.

Consideriamo sulla sfera complessa i punti di diramazione in numero finito

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_N,$$

incluso il punto ∞, se è di diramazione, e fissiamo il punto A origine dei cammini chiusi che descriviamo per calcolare le sostituzioni del gruppo di monodromia. Diciamo *cammino elementare* o *cappio* un cammino chiuso foggiato nel modo seguente. Andiamo da A ad un punto A_1 vicinissimo al punto critico a_1 per un arco l_1 di curva semplice, giriamo poi intorno ad a_1, nel verso positivo, sopra una piccola circonferenza σ_1 avente il centro in a_1 indi, percorrendo l_1 in senso inverso, torniamo in A. Il cammino chiuso

$$l_1\ \sigma_1\ l_1^{-1}$$

sarà il cappio relativo ad a_1. Così per ciascun punto critico a_i costruiremo un cappio corrispondente $l_i\ \sigma_i\ l_i^{-1}$, in guisa che i tratti l_1, l_2, ..., l_N non s'intersechino fra loro. Corrispondentemente ad ogni cappio $l_i \sigma_i l_i^{-1}$, avremo una sostituzione s_i del gruppo di monodromia e facilmente vediamo che: *L'intero gruppo di monodromia si genera, componendo le sostituzioni elementari*

$$s_i,\ s_2,\ \ldots,\ s_N$$

e le loro potenze fra loro. E invero qualunque cammino chiuso si può ridurre, per deformazione continua, senza attraversare punti critici, ad una successione di cappi.

Naturalmente fra le sostituzioni generatrici s_1, s_2, ..., s_N può esservene un certo numero di superflue, che risultino cioè da combinazioni delle altre. Anzi ciò avviene necessariamente se nella serie

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_N$$

sono inclusi tutti i punti di diramazione, giacchè un cammino chiuso che avvolga *tutti* i punti critici produce la sostituzione identica.

Per calcolare le sostituzioni elementari s_i, prodotte dai cappi, la ricerca fondamentale da farsi consiste nell'esaminare come si permutano fra loro i rami girando sul piccolo contorno σ_i, avvolgente il punto critico a_i. Questo insegna il metodo di Puiseux, che permette di calcolare dello sviluppo in serie per potenze frazionarie di $z - a_i$, per ogni ramo, tanti termini quanti occor-

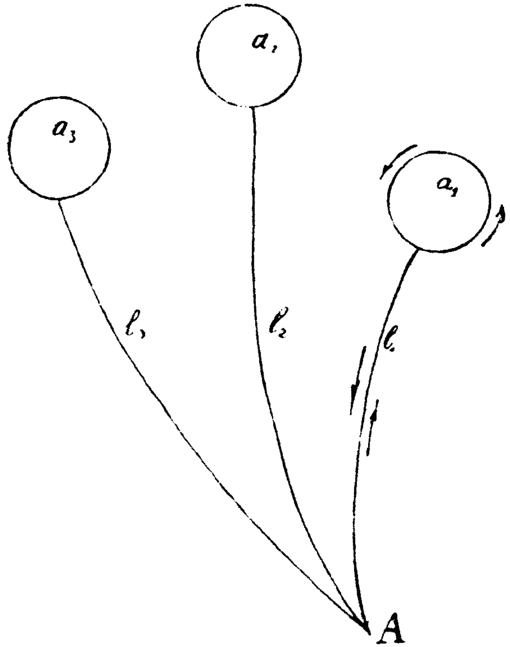


Fig. 9.

rono per differenziare il ramo stesso da tutti gli altri. Ma noi non ci addentreremo qui in tali studi e solo faremo l'osservazione seguente che, calcolato il discriminante $D(z)$, permette di riconoscere se una sostituzione elementare s_i è pari o dispari, se consta cioè di un numero pari o dispari di trasposizioni.

Diciamo che: *La sostituzione elementare s_i sarà pari o dispari, secondo che il punto critico $z = a_i$ sarà pel discriminante $D(z)$ un infinitesimo (od un polo) di ordine pari o di ordine dispari.*

E infatti la radice quadrata del discriminante

$$\sqrt{D(z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ w_1 & w_2 & \dots & w_n \\ w_1^2 & w_2^2 & \dots & w_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_1^{n-1} & w_2^{n-1} & \dots & w_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Vandermonde

per il cammino chiuso σ_i non cangia se s_i è pari e muta invece di segno se s_i è dispari. Ma se l'infinitesimo (o polo) è dell'ordine r l'argomento di $D(z)$ aumenta (o diminuisce) dopo il giro σ_i di $2\pi r$ e quello di $\sqrt{D(z)}$ di πr, onde avverrà il primo caso se r è pari, il secondo se r è dispari.

CAPITOLO VIII.

Prime nozioni sulle superficie di Riemann e sugli integrali Abeliani.

§ 83. — Concetto generale della superficie Riemanniana.

Per lo studio delle funzioni algebriche e dei loro integrali (integrali Abeliani) Riemann ha introdotta un'utile e feconda rappresentazione geometrica colle superficie che portano il suo nome. Ci proponiamo di esporre nel presente capitolo i primi concetti della teoria Riemanniana, nella brevità che ci viene imposta dalla natura del presente corso. Se, proseguendo lo studio delle funzioni algebriche, si adopera, come negli ultimi paragrafi del Capitolo precedente, la consueta rappresentazione geometrica nella quale i valori della variabile indipendente z vengono distesi sul piano complesso di Gauss (o sulla sfera complessa), si presenta l'inconveniente che in ogni punto z la funzione algebrica w non ha più un solo valore, ma un certo numero m di valori distinti; e per seguire la variazione della w, allorquando il punto rappresentativo si muove nel piano complesso, occorre sempre tener

conto del cammino seguìto dal punto per giungere dalla posizione iniziale alla finale, poichè insomma la w non è più una funzione monodroma della posizione del punto rappresentativo. L'introduzione delle superficie di Riemann ha appunto per iscopo di ristabilire la monodromia nella rappresentazione.

Def. superficie di Riemann

Chiameremo superficie di Riemann per una data equazione algebrica [1]:

$$(1) \qquad f(w, z) = 0$$

una superficie chiusa così costituita che ad ogni suo punto possa associarsi o, come diremo, pensare ivi deposta, una ed una sola coppia di valori w, z, soddisfacenti alla (1), ed inversamente ad ogni tale coppia corrisponda uno ed un solo punto della superficie, in guisa che la corrispondenza *biunivoca* fra le coppie (w, z) ed i punti della superficie sia una corrispondenza *continua*.

Ammessa per un momento la possibilità di costruire una tale superficie Riemanniana R, possibilità che fra breve dimostreremo, è chiaro, che se il punto rappresentativo P descriverà sulla superficie R un cammino chiuso qualsiasi, la coppia iniziale (w, z) sarà ricondotta, attraverso ad una catena continua di valori, alla coppia primitiva stessa, ed avremo così perfettamente ristabilita la monodromia. Osserviamo che sulla superficie Riemanniana R ogni valore z della variabile indipendente dovrà manifestamente trovarsi disteso tante volte quanti sono i valori di w corrispondenti ad un medesimo valore di z e cioè precisamente m volte, se la (1) è di grado m in w; similmente ogni valore di w si troverà sulla R ripetuto n volte, se n è il grado della (1) in z.

La definizione stessa che abbiamo dato della superficie R di Riemann rende evidente che potremo sostituire ad R qualunque altra superficie chiusa R', tale che fra i punti di R e quelli di R' possa stabilirsi una corrispondenza biunivoca e continua, bastando per ciò immaginare deposta ogni coppia di valori w, z, soddisfacenti alla (1), anzichè in un punto P di R, nel corrispondente punto P' di R'. In questi studi adunque la forma e la grandezza delle

[1]) Qui ci occupiamo soltanto delle superficie di RIEMANN corrispondenti ad una relazione algebrica fra w, z; ma si possono egualmente considerare superficie Riemanniane per relazioni funzionali di specie qualunque. Queste superficie di monodromia possono alla loro volta prestare utili servigi nelle ricerche analitiche.

varie parti della superficie rappresentativa non hanno per sè importanza alcuna e solo essenziale è la relazione di contiguità fra le parti stesse. Conviene per ciò immaginare la superficie come formata da un velo *perfettamente flessibile ed estendibile*, e le infinite forme che possono darsi alla superficie deformandola in modo continuo, senza rottura nè duplicatura, saranno perfettamente sostituibili, pel nostro scopo, alla superficie primitiva. Anzi potremo più in generale ammettere di spezzare la superficie in un numero qualsiasi di parti e, dopo di avere deformata in modo arbitrario ciascuna delle parti, di riunire ancora i varî pezzi, solo che si facciano alla fine coincidere nuovamente i punti, che si trovano riuniti sulla superficie primitiva. Ammetteremo ancora che il velo ideale, da cui la superficie è costituita, possa liberamente attraversare sè stesso e fra due regioni che mutuamente si attraversano penseremo non aver luogo, lungo la linea di passaggio, connessione alcuna, se non ha luogo la coincidenza dei valori di w, z che nelle due regioni immaginiamo deposti in un medesimo punto di questa linea [1]). Del resto si può in ogni caso, con deformazione continua, ridurre una superficie Riemanniana ad una superficie libera nello spazio che non attraversi mai sè medesima, evitando così anche la leggiera difficoltà che questo modo di concepire le cose suole presentare da principio.

§ 84. — La superficie Riemanniana a due fogli per le funzioni $w = \sqrt{z}$, $w = \sqrt{P}(z)$.

Esposto il concetto generale di superficie Riemanniana, andiamo ora a dimostrare come, per una data equazione algebrica (1), si costruisca effettivamente una tale superficie nella forma ordinaria di m fogli o strati sovrapposti. Per maggior chiarezza cominceremo da alcuni casi semplici, per elevarci poi alle considerazioni generali.

Prendiamo a considerare dapprima la semplicissima funzione algebrica

$$w = \sqrt{z}\,.$$

[1]) Un tale punto rappresenta dunque due punti distinti della superficie, secondo che si pensa della prima o della seconda regione.

La polidromia di questa funzione nell'ordinario piano complesso (sfera complessa) nasce dal girare *isolatamente* attorno al punto di diramazione $z = 0$, ovvero attorno all'altro $z = \infty$, poichè per un tale giro un ramo del radicale si cangia con continuità nell'opposto. Immaginiamo il piano tagliato lungo una linea che dal punto $z = 0$ vada, senza intersecare sè stessa, all'infinito, per es. pensiamo, per fissare l'idee, eseguito un tale taglio lungo la parte negativa dell'asse reale da 0 a $-\infty$. Scelto in un punto z, per es. in $z = 1$, uno dei valori del radicale, diciamo $w = +1$, quel ramo sarà nel piano così tagliato una funzione monodroma della z. In due punti di fronte sui due orli del taglio i valori di w saranno eguali e di segno contrario e precisamente, supposto il taglio eseguito come sopra, i valori di w sull'orlo superiore (o destro) saranno puramente immaginari col coefficiente dell'immaginario positivo, quelli sull'orlo inferiore (sinistro) i coniugati. Così abbiamo la rappresentazione geometrica per uno solo dei rami della nostra funzione algebrica.

Ma immaginiamo di prendere un secondo piano complesso, o come diciamo un secondo foglio, che tagliamo precisamente come il primo e sovrapponiamo a questo. Su questo secondo foglio distendiamo i valori del secondo ramo, partendo ad esempio dal medesimo punto $z = 1$, ove questa volta prenderemo il valore opposto $w = -1$ del radicale. Così in due punti collocati l'uno sull'altro dei due fogli F_1, F_2 i valori ivi deposti per w saranno sempre uguali e di segno contrario, e per ciò i valori di w sull'orlo destro del taglio in F_1 coincideranno ordinatamente con quelli dell'orlo sinistro in F_2 e quelli dell'orlo sinistro su F_1 con quelli dell'orlo destro su F_2. E allora se immaginiamo connessi o saldati l'uno all'altro l'orlo destro di F_1 col sinistro di F_2 e quello sinistro di F_1 col destro di F_2, verremo appunto a formare un'unica superficie a due fogli o strati che si connettono, intrecciandosi fra loro, lungo la linea primitiva del taglio (sezione di diramazione). Ad ogni coppia distinta di valori di w, z, soddisfacenti all'equazione $w^2 = z$, corrisponderà così uno ed un solo punto della nostra superficie, e questa corrispondenza sarà evidentemente biunivoca e continua; abbiamo così costruita la superficie Riemanniana a due fogli per l'equazione $w^2 - z = 0$.

Prendiamo ora a considerare più in generale la equazione algebrica

$$w^2 = P(z)$$

dove $P(z)$ indica un polinomio razionale intero in z a radici tutte semplici e cerchiamo di costruire la superficie Riemanniana corrispondente. I punti di diramazione a distanza finita della funzione $w = \sqrt{P(z)}$ sono qui tutti e soli gli infinitesimi di $P(z)$, e il punto $z = \infty$ sarà un punto di diramazione o no secondo che il grado del polinomio è impari o pari. In ogni caso adunque il numero totale dei punti di diramazione sarà pari e noi lo indicheremo con $2p + 2$, dove adunque il grado del polinomio sarà $2p + 1$ se dispari, e $2p + 2$ se pari. Indichiamo con

$$e_1, e_2; \quad e_3, e_4; \quad \dots, \quad e_{2p+1}, e_{2p+2}$$

i punti di diramazione, distribuiti arbitrariamente in coppie, e nel piano complesso z immaginiamo congiunto ciascun punto di diramazione e_{2r-1} col successivo, e_{2r} con una linea che non intersechi sè medesima nè le altre precedenti e lungo queste $p + 1$ linee eseguiamo altrettanti tagli. Se nel piano complesso così tagliato fissiamo in un punto O, diverso dai punti di diramazione, il valore che assumiamo per $\sqrt{P(z)}$, indi prolunghiamo analiticamente il ramo, otterremo distesi su questo primo foglio F_1 i valori di un ramo del nostro radicale, che costituiranno una funzione monodroma, poichè in esso foglio sono resi impossibili i giri attorno ad un numero dispari di punti di diramazione. Prendasi ora un secondo foglio F_2, tagliato precisamente come F_1, e sovrapposto a questo, sul quale deponiamo in ogni punto quel valore di $\sqrt{P(z)}$ che è l'opposto del valore che il radicale ha nel punto sottostante di F_1: così anche in F_2 avremo una distribuzione monodroma dei valori del secondo ramo. Ora lungo ogni taglio i valori di $\sqrt{P(z)}$ all'orlo destro (o sinistro) di F_1 coincidono con quelli all'orlo sinistro (destro) di F_2 e perciò, se immaginiamo nuovamente di connettere questi quattro orli nel modo di prima, otterremo un'unica superficie a due fogli che si connettono intrecciandosi lungo le $p + 1$ sezioni di diramazione, e in essa avremo evidentemente la superficie Riemanniana cercata.

Osserviamo che in luogo di costruire la nostra superficie adoperando fogli piani, sovrapposti all'ordinario piano complesso, potremmo egualmente operare sulla sfera complessa con fogli sferici, nel qual caso parleremo della sfera Riemanniana a più strati.

§ 85. — Deformazione della superficie Riemanniana in quella di una sfera, di un anello ecc.

Possiamo assoggettare la superficie Riemanniana costruita ad una qualunque deformazione continua, secondo le osservazioni generali del § 83; in particolare vogliamo qui mostrare come si può dedurne una superficie libera nello spazio, che non attraversi sè medesima.

Riprendiamo per ciò la costruzione della prima superficie Riemanniana per $w = \sqrt{z}$ prima della connessione stabilita fra gli orli dei tagli di F_1, F_2. Supposti sempre i tagli eseguiti lungo la parte negativa dell'asse reale, ribaltiamo ad esempio il foglio F_1 attorno all'asse reale, sicchè i valori di un ramo del radicale risulteranno distribuiti sulla pagina superiore [1]) del foglio F_2 e quelli del secondo ramo sulla pagina inferiore di F_1. Attualmente lungo gli orli dei tagli in F_1, F_2 coincideranno i valori di $\sqrt{w(z)}$ immediatamente sovrapposti, sicchè connettendo gli orli corrispondenti avremo in sostanza l'ordinario piano rivestito nella sua pagina superiore ed inferiore di un doppio velo continuo che si piega attraverso la fenditura praticata lungo il semiasse reale. Deformando in modo continuo questo velo, possiamo dargli la forma omologa sferica, ed anche, continuando la deformazione, foggiare in modo arbitrario, scostandoli, gli orli della fenditura, così per es. da farne un circolo della sfera diviso in due semicerchi, ciascuno dei quali corrisponde ad uno degli antichi orli. Così avremo una calotta sferica rivestita internamente ed esternamente di un unico velo, che potremo deformare ancora in guisa da dargli la forma di una superficie chiusa, dappertutto convessa verso l'esterno, per es. di nuovo la forma sferica. Per tal modo, da ultimo, avremo trasformata la superficie Riemanniana primitiva in una sfera ordinaria [2]).

Consideriamo ora il caso della superficie Riemanniana a due fogli per la funzione $w = \sqrt{P(z)}$, quando il polinomio $P(z)$ è di terzo o quarto grado in z e quindi, nelle notazioni del § 84, ab-

[1]) Immaginiamo, per fissare le idee, i fogli collocati sopra un piano orizzontale.

[2]) Naturalmente su questa sfera trovansi distesi *due* volte i valori di z ed una sola volta quelli di w.

biamo $p = 1$ e conseguentemente 2 sezioni di diramazione. Immaginiamo che la nostra superficie sia una sfera Riemanniana a due fogli e, per fissare le idee, le due sezioni di diramazione siano praticate in un meridiano verticale e simmetricamente disposte rispetto al diametro verticale. Tolta la connessione fra i due fogli lungo le sezioni di diramazione, si deformi con continuità l' uno e l'altro foglio sì da foggiarli per es. a cilindri circolari coassiali nei quali le circonferenze delle basi rappresentano le sezioni di diramazione, divisa ciascuna da un diametro in due metà corrispondenti agli orli destro e sinistro del primitivo taglio. Si estragga, parallelamente all'asse, il foglio cilindrico interno e, dopo averlo ribaltato attorno al detto diametro di una delle circonferenze basi, si riavvicinino nuovamente i due cilindri sì da riunirli per le due circonferenze basi di fronte, con che appunto verremo a riunire, per una delle sezioni di diramazione, i punti congiunti primitivamente sulla superficie Riemanniana.

Nell' unico cilindro così risultante i punti delle due basi sopra una medesima generatrice rappresentano ancora un solo e medesimo punto della superficie Riemanniana. Per unire effettivamente anche questi, basta immaginare di deformare in modo continuo il cilindro, incurvando per es. a forma di archi circolari, vieppiù vicini ad una circonferenza completa, le generatrici, ed alla fine, saldando insieme le circonferenze basi dell'anello aperto, otterremo la superficie chiusa dell'anello completo o toro, che potremo adoperare come superficie Riemanniana nel caso considerato.

Se consideriamo ora il caso più generale della sfera Riemanniana a due fogli per la funzione $w = \sqrt{P(z)}$, il polinomio $P(z)$ avendo il grado $2p + 1$ o $2p + 2$, potremo procedere in modo analogo togliendo la connessione dei due fogli lungo le $p + 1$ sezioni di diramazione, ed estratto il foglio interno, potremo deformare i due fogli in guisa da conservare per es. ad ambedue la forma sferica e da ridurre ciascuna fenditura alla forma di un circolo minore completo. I due fogli porteranno così $p + 1$ aperture circolari ciascuno, che due a due si corrispondono e i cui orli corrispondenti debbono nuovamente congiungersi fra loro. Per una coppia di questi contorni possiamo operare direttamente il congiungimento dei due fogli e deformare poi l' unica superficie risultante, riducendola, per es., ad una sfera con $2p$ aperture circolari che si dividono in p coppie, i cui orli corrispondenti sono ancora da congiungersi fra loro. La deformazione che resta da eseguire può immaginarsi compiuta in guisa che la riunione di un contorno circolare col corrispondente abbia luogo per mezzo di un anello esterno alla sfera. Da ultimo avremo così ridotta la nostra superficie Riemanniana ad una sfera con p anelli o manichi.

§ 86. — La superficie Riemanniana a m fogli per l'equazione $f(w, z) = 0$.

Le considerazioni relative ai casi particolari sopra trattati renderanno ora più chiaro il procedimento da seguirsi pel caso generale. Data un'equazione algebrica qualunque

$$f(w, z) = 0,$$

il cui grado in w indicheremo con m, segniamo sul piano complesso z gli *effettivi* punti di diramazione, che indicheremo con

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_N$$

comprendendovi naturalmente il punto $z = \infty$, se questo sarà un punto di diramazione; e fissato nel medesimo piano un punto O, distinto dai punti di diramazione, riuniamolo ai punti $a_1, a_2, \ldots, a_N$ mediante N linee semplici $l_1, l_2, \ldots, l_N$, che non intersechino sè stesse, nè si intersechino fra loro. Prendiamo ora m fogli F_1, $F_2, \ldots, F_m$, che sovrapponiamo tutti al piano complesso, e in ciascuno di essi, sia F_i, segniamo il punto O_i sovrapposto ad O e le linee $l_1^{(i)}, l_2^{(i)}, \ldots, l_N^{(i)}$ sovrapposte a $l_1, l_2, \ldots, l_N$, e lungo queste linee $l_1^{(i)}, l_2^{(i)}, \ldots, l_N^{(i)}$, eseguiamo nel foglio F_i altrettanti tagli. Nel punto O gli m valori di w sono distinti e siano

$$w_1, w_2, \ldots, w_m,$$

ciascuno dei quali attribuiremo ordinatamente in $O_1, O_2, \ldots, O_m$ ai fogli $F_1, F_2, \ldots, F_m$. Se nel foglio F_i così tagliato, partendo dal valore w_i di w in O_i, seguiamo il prolungamento analitico di questo ramo di w, verremo a deporre in ogni punto di F_i un unico e determinato valore di w e questi valori costituiranno, sopra il foglio tagliato F_i, una funzione monodroma. Se consideriamo gli m punti $p_1, p_2, \ldots, p_m$, sovrapposti in $F_1, F_2, \ldots, F_m$ ad un medesimo punto qualsiasi p del piano complesso (distinto naturalmente dai punti di diramazione), i corrispondenti valori di w, che indicheremo senza ambiguità con

$$w_{p_1},\ w_{p_2},\ \ldots,\ w_{p_m},$$

vi saranno manifestamente tutti distinti e daranno gli m valori di w corrispondenti al valore di z nel punto p. Consideriamo in particolare ciò che accade in punti sovrapposti ai due orli di m tagli $l_s^{(1)}, l_s^{(2)}, \ldots, l_s^{(m)}$ corrispondenti sopra $F_1, F_2, \ldots, F_m$. Distinguendo i due orli di un taglio in destro e sinistro, siano $p_1, p_2, \ldots, p_m$ gli m punti sovrapposti sull'orlo destro e $q_1, q_2, \ldots, q_m$ gli m punti di fronte sull'orlo sinistro, punti che corrispondono tutti ad un solo e medesimo valore di z, sia $z = a$. Tanto i valori

$$w_{p_1},\ w_{p_2},\ \ldots,\ w_{p_m},$$

quanto gli altri

$$w_{q_1},\ w_{q_2},\ \ldots,\ w_{q_m},$$

dànno tutte e sole le radici della nostra equazione algebrica per $z = a$ e per ciò, prescindendo dall'ordine, sono i medesimi; supponiamo dunque che si abbia

$$w_{p_1} = w_{q_{i_1}},\ w_{p_2} = w_{q_{i_2}},\ \ldots,\ w_{p_m} = w_{q_{i_m}},$$

ove $i_1, i_2, \ldots, i_m$ sono i numeri $1, 2, \ldots, m$ in altro ordine. Se spostiamo p_1 lungo l'orlo destro del taglio considerato sopra F_1 e contemporaneamente q_{i_1}, nel medesimo modo, lungo l'orlo sinistro del taglio in F_{i_1}, avremo manifestamente sempre $w_{p_1} = w_{q_{i_1}}$, e similmente $w_{p_2} = w_{q_{i_2}}, \ldots, w_{p_m} = w_{q_{i_m}}$, talchè dappertutto, lungo quegli m tagli sovrapposti, i valori di w deposti sull'orlo destro in $F_1, F_2, \ldots, F_m$ coincideranno ordinatamente con quelli dell'orlo sinistro in $F_{i_1}, F_{i_2}, \ldots, F_{i_m}$. Per ciò lungo questi tagli l'orlo destro in $F_1, F_2, \ldots, F_m$ si connetterà rispettivamente col sinistro in $F_{i_1}, F_{i_2}, \ldots, F_{i_m}$ ed eseguita questa operazione per tutti i sistemi di tagli, avremo costruita una superficie i cui punti corrispondono biunivocamente ed in modo continuo alle coppie di valori w, z,

che soddisfano all'equazione algebrica proposta. Questa superficie ad m fogli o strati è adunque la superficie Riemanniana cercata; essa risulterà connessa allora ed allora soltanto quando la equazione proposta sia irriducibile.

Alla costruzione della superficie Riemanniana generale facciamo seguire alcune considerazioni esplicative. Il congiungimento dei fogli lungo una sezione di diramazione, che parte da un punto di diramazione, avviene precisamente nel modo stesso come gli m rami si permutano per un giro nel piano semplice attorno a questo punto $z = a_i$. Se decomponiamo la sostituzione corrispondente in un prodotto di sostituzioni circolari, gli m fogli si decomporranno in altrettanti gruppi, e se uno di essi è composto dei fogli $F_1, F_2, \ldots, F_r$, questi r fogli saranno congiunti ciclicamente fra loro, sicchè girando attorno al punto di diramazione si passerà dal foglio F_1 a F_2, da F_2 a $F_3, \ldots$, da F_{r-1} a F_r e in fine da F_r si ritornerà sopra F_1. Il punto di diramazione nel quale gli r fogli sono congiunti ciclicamente fra loro è un unico punto della superficie Riemanniana R e dicesi un punto di diramazione *dell'ordine* $r - 1$. Al punto di diramazione $z = a_i$ del piano semplice corrispondono dunque, sulla superficie Riemanniana, tanti punti distinti quante sono le sostituzioni circolari, nelle quali si decompone la sostituzione sui rami per un giro attorno a $z = a_i$.

Ciò premesso, è facile definire l'*intorno* di un punto qualsiasi della superficie Riemanniana. Se il punto che si considera non è di diramazione, una piccola curva chiusa che giri una volta attorno al punto, p. es. un circolo col centro nel punto, descritta nel foglio a cui il punto appartiene, limiterà il detto intorno [1]). Se il nostro punto è un punto di diramazione d'ordine $r - 1$ e congiunge ciclicamente i fogli $F_1, F_2, \ldots, F_r$, la curva chiusa che limita l'intorno farà un giro sul primo foglio F_1, un secondo giro su F_2 ecc. un r^{mo} giro sopra F_r, e soltanto dopo compiuti questi r giri si chiuderà. In tal caso l'intorno del punto è assimilabile all'insieme di r spire di una superficie elicoidale di passo infinitesimo.

[1]) Può anche darsi che il punto in considerazione appartenga a più fogli della superficie Riemanniana, senza che ivi abbia luogo diramazione. Ciò avviene se più rami della funzione algebrica w coincidono in quel punto senza diramarsi; ed in tal caso saranno da considerarsi tanti intorni del punto quanti sono i fogli a cui appartiene.

§ 87. — Funzioni uniformi sulla superficie Riemanniana.

Data un'equazione algebrica

$$f(w, z) = 0,$$

abbiamo visto come si può costruire una superficie Riemanniana ad m fogli che rappresenta geometricamente il modo di diramazione della funzione algebrica.

Ma il concetto più importante e fecondo della teoria Riemanniana consiste appunto nella inversione di quest'ordine di considerazioni, nel supporre cioè data *a priori* una superficie a m fogli, distesi sull'ordinario piano complesso, connessi fra loro mediante sezioni di diramazione, comunque assegnate. Una tale superficie definisce sempre, secondo Riemann, una classe di corrispondenti funzioni algebriche. Questo importante risultato che Riemann deduceva, in modo non rigoroso, applicando il così detto principio di Dirichlet, venne posto fuori di dubbio dalle ricerche di Neumann e Schwarz.

Noi ci limiteremo all'avere così accennato a questo punto più elevato di vista, e nelle ricerche ulteriori del presente capitolo supporremo sempre data un'equazione algebrica fondamentale

$$f(w, z) = 0, \tag{1}$$

e costruita la corrispondente superficie R di Riemann, alla quale applicheremo le nostre considerazioni.

Sopra una superficie Riemanniana R si possono studiare le funzioni di variabile complessa precisamente come sull'ordinario piano semplice, ed è appunto di questo studio che vogliamo ora occuparci. Ma in primo luogo, per maggiore chiarezza e brevità dell'esposizione, definiamo ciò che intenderemo per *variabile principale* in un punto della superficie di Riemann. Se il punto $z = a$ che si considera è un punto ordinario (non di diramazione) a distanza finita, chiameremo variabile principale il binomio $z - a$ e, ove il punto ordinario in considerazione sia all'infinito, la variabile principale nel punto sarà $\frac{1}{z}$.

Quando il punto $z = a$ sia un punto di diramazione a distanza finita d'ordine $r - 1$, la sostituzione

$$z - a = t^r$$

darà la rappresentazione *conforme* dell'intorno del punto in considerazione sopra un disco circolare semplice del piano t e si assumerà allora

$$t = (z - a)^{\frac{1}{r}}$$

come variabile principale. In fine se il punto di diramazione d'ordine $r - 1$ è all'infinito, prenderemo corrispondentemente per variabile principale

$$t = z^{-\frac{1}{r}}.$$

Una funzione v di variabile complessa sulla superficie R si dirà *regolare* in un punto se essa è sviluppabile nell'intorno del punto in serie di potenze intere e positive della *variabile principale*, per il che sarà necessario e sufficiente, secondo il teorema di Cauchy, che essa sia finita, continua e monodroma nell'intorno del punto. Similmente nell'intorno di un punto singolare *isolato* la v, supposta monodroma nell'intorno, sarà sviluppabile in serie di Laurent per le potenze intere ascendenti e discendenti della variabile principale t e, se la seconda parte sarà una serie infinita, la singolarità si dirà essenziale, polare nel caso opposto.

In quest'ultimo caso si dirà ordine della singolarità polare o d'infinito l'esponente della massima potenza negativa di t, che figura nello sviluppo. In modo del tutto simile si definirà l'ordine di infinitesimo in un punto $z = a$, ove la funzione v si annulli, comportandovisi regolarmente; l'infinitesimo di 1° ordine in qualsiasi punto della superficie Riemanniana è dunque dato dalla prima potenza t della variabile principale.

Particolarmente importanti sono le funzioni v che esistono su tutta la superficie Riemanniana e sono ivi *monodrome*, cioè le funzioni uniformi della superficie Riemanniana. Formiamo subito di tali funzioni, considerando un polinomio razionale intero in w, i cui coefficienti siano funzioni uniformi di z in tutto il piano complesso. Il grado di questo polinomio si potrà abbassare ad $m - 1$, tenendo conto dell'equazione (1) di grado m in w, cui w soddisfa, e si avrà così

$$v = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \dots + a_{m-1} w^{m-1} \tag{2}$$

la più generale funzione monodroma su R

dove le a sono funzioni uniformi di z in tutto il piano complesso. È evidente che una tale funzione v è uniforme sulla superficie Riemanniana; i suoi punti singolari si trovano unicamente fra i punti singolari (poli) della funzione algebrica w ed i punti singolari dei coefficienti a.

Dimostriamo ora inversamente che la (2) ci dà la più generale espressione di una funzione uniforme sulla superficie Riemanniana. Per ciò osserviamo che una funzione *monodroma* v sulla superficie Riemanniana, considerata come funzione analitica sul piano semplice z, avrà in ogni punto m ed m determinazioni soltanto distinte (m rami), che indicheremo con

$$v_1, v_2, \ldots, v_m,$$

corrispondentemente ai valori

$$w_1, w_2, \ldots, w_m,$$

che hanno luogo per w nei punti sovrapposti degli m fogli. La monodromia di v sulla superficie Riemanniana si tradurrà nel piano semplice z in ciò che per qualunque cammino chiuso tracciato in questo piano le $v_1, v_2, \ldots, v_m$ subiranno la medesima sostituzione di $w_1, w_2, \ldots, w_m$. Ciò posto, se dalle m equazioni lineari:

$$\left\{\begin{aligned} v_1 &= a_0 + a_1 w_1 + a_2 w_1^2 + \ldots + a_{m-1} w_1^{m-1} \\ v_2 &= a_0 + a_1 w_2 + a_2 w_2^2 + \ldots + a_{m-2} w_2^{m-1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_m &= a_0 + a_1 w_m + a_2 w_m^2 + \ldots + a_{m-1} w_m^{m-1} \end{aligned}\right.$$

ricaviamo i valori delle a, troviamo per una qualunque di esse:

$$(3) \qquad a_r(z) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & w_1 & \ldots & w_1^{r-1} & v_1 & w_1^{r+1} & \ldots & w_1^{m-1} \\ 1 & w_2 & \ldots & w_2^{r-1} & v_2 & w_2^{r+1} & \ldots & w_2^{m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & w_m & \ldots & w_m^{r-1} & v_m & w_m^{r+1} & \ldots & w_m^{m-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & w_1 & \ldots & w_1^{r-1} & w_1^r & w_1^{r+1} & \ldots & w_1^{m-1} \\ 1 & w_2 & \ldots & w_2^{r-1} & w_2^r & w_2^{r+1} & \ldots & w_2^{m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & w_m & \ldots & w_m^{r-1} & w_m^r & w_m^{r+1} & \ldots & w_m^{m-1} \end{vmatrix}}$$

dove il determinante denominatore, come prodotto delle differenze di $w_1, w_2, \ldots, w_m$ è certamente diverso da zero (salvo che nei punti di diramazione). Un giro qualunque nel piano semplice z, producendo la medesima sostituzione sopra $v_1, v_2, \ldots, v_m$ come sopra $w_1, w_2, \ldots, w_m$, non altera il secondo membro della (3), e perciò $a_r(z)$ è una funzione uniforme di z nel piano semplice z. Così adunque: *Qualunque funzione uniforme v sulla superficie Riemanniana può porsi sotto la forma* (2), *dove le a sono funzioni uniformi di z nel piano semplice.*

§ 88. — **Teorema di Cauchy, residui e indicatore logaritmico.**

Alle funzioni uniformi sulla superficie Riemanniana possono estendersi i teoremi fondamentali relativi alle funzioni uniformi sul piano semplice, come ora vogliamo brevemente dimostrare. In primo luogo supponiamo che in un'area connessa della superficie Riemanniana la nostra funzione uniforme sia dappertutto regolare e dimostriamo che sussisterà ancora il teorema fondamentale di Cauchy:

$$\int_s v\, dz = 0,$$

l'integrale essendo esteso al contorno completo dell'area. Se quest'area occupa col suo contorno un solo strato della superficie Riemanniana, la cosa è evidente, non differendo allora il teorema dall'ordinario.

Se al contrario essa occupa più strati, basterà decomporre l'area in tante aree parziali, ciascuna delle quali si trovi tutta in un solo foglio, ciò che si può sempre fare aggiungendo convenienti contorni. Gli integrali estesi al contorno completo di ciascuna area parziale saranno nulli ciascuno per sè e per ciò anche la loro somma, nella quale gli integrali estesi ai contorni aggiunti si distruggeranno due a due, perchè percorsi ciascuno due volte in senso contrario, e rimarrà appunto

$$\int_s v\, dz = 0. \quad \text{Cauchy}$$

Al teorema di Cauchy si lega la considerazione dei *residui*. Per residuo in un punto della superficie Riemanniana di una funzione v, che ivi abbia al più una singolarità isolata, intendiamo, in analogia colla definizione data pel piano semplice, il valore dell' integrale $\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma v\,dz$ esteso, nel senso positivo, ad una curva chiusa σ che limiti l' intorno del punto. Come al § 53, si vedrà che se il punto $z = a$ è un punto ordinario della superficie Riemanniana a distanza finita, il residuo di v in $z = a$ sarà il coefficiente di $\frac{1}{z-a}$ nello sviluppo di v; e se si tratta di un punto (ordinario per la superficie Riemanniana) all' infinito, il residuo sarà il coefficiente di $\frac{1}{z}$ cangiato in segno.

Sia ora $z = a$ un punto di diramazione a distanza finita, d'ordine $r - 1$. Per calcolare il residuo, cioè il valore dell' integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma v\,dz,$$

converrà in questo caso introdurre la variabile principale t (§ 87), ponendo

$$z - a = t^r,$$

e risulterà

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma v\,dz = r\,.\,\frac{1}{2\pi i}\int_s v\,t^{r-1}\,dt,$$

l' integrale del secondo membro essendo esteso ad una piccola curva chiusa s, che nel piano semplice t giri una volta attorno a $t = 0$. Se supponiamo adunque che nello sviluppo di v nell' intorno di $z = a$ per potenze di $(z-a)^{\frac{1}{r}}$ sia B il coefficiente di $\frac{1}{z-a}$, pel valore del residuo avremo precisamente

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma v\,dz = r\,B.$$

Affatto similmente si vedrà che, se il punto di cui si tratta è all' infinito ed è nello stesso tempo un punto di diramazione

dell'ordine $r - 1$, il residuo sarà dato da $-rB$, indicando nuovamente B il coefficiente di $\frac{1}{z}$ nello sviluppo di v nell' intorno di quel punto.

Dopo queste considerazioni è manifesto che se in un'area della superficie Riemanniana avremo una funzione monodroma dappertutto regolare, salvo che in un numero finito di punti singolari, l' integrale $\frac{1}{2\pi i}\int_s v\,dz$, esteso al contorno dell' area, sarà eguale alla somma dei residui nell' interno.

Si può facilmente estendere anche il teorema sull' indicatore logaritmico di Cauchy (§ 56), supponendo di considerare un'area della superficie Riemanniana ove la funzione uniforme non abbia nell' interno che singolarità polari (e per ciò in numero finito) e sul contorno non diventi nè zero nè infinita. Se consideriamo infatti il modo di comportarsi della derivata logaritmica $\frac{v'}{v}$, facilmente vediamo che essa ha singolarità polari del 1° ordine dove la v diventa infinitesima o infinita, e precisamente con residuo eguale all'ordine di infinitesimo di v o a quello dell' infinito, preso questa seconda volta col segno contrario. E infatti supponiamo per es. che in $z = a$ la v diventi infinitesima d'ordine q e, per maggiore generalità, supponiamo che questo punto sia di diramazione dell'ordine $r - 1$; avremo nell' intorno di a per v uno sviluppo della forma

$$v = (z-a)^{\frac{q}{r}}\left\{a_0 + a_1(z-a)^{\frac{1}{r}} + \ldots\right\},$$

con $a_0 \neq 0$, e perciò

$$\frac{v'}{v} = \frac{q}{r(z-a)} + P\left((z-a)^{\frac{1}{r}}\right).$$

Il residuo di $\frac{v'}{v}$ in $z = a$ è adunque

$$r\frac{q}{r} = q,$$

come si è asserito. Affatto analogamente si procederà nel caso di un infinito e nel caso in cui l' infinitesimo o il polo di v sia all' infinito.

Ma qui è da notarsi che, a differenza delle funzioni uniformi sul piano semplice, la derivata logaritmica può avere singolarità polari anche in punti dove la funzione è regolare e non infinitesima; in tal caso però il residuo di $\frac{v'}{v}$ sarà ivi *nullo*. E infatti la circostanza notata può verificarsi solo in un punto di diramazione, sia per es. $z = a$, a distanza finita; se esso è dell'ordine $r - 1$, avremo nell' intorno

$$v = a_0 + a_1 (z - a)^{\frac{1}{r}} + a_2 (z - a)^{\frac{2}{r}} + \dots$$

con $a_0 \neq 0$, e perciò

$$\frac{v'}{v} = (z - a)^{\frac{1}{r} - 1} P\left((z - a)^{\frac{1}{r}}\right).$$

Come si vede, nello sviluppo di $\frac{v'}{v}$ vi sono anche, in generale, potenze negative di $(z - a)^{\frac{1}{r}}$, ma con esponente non eccedente $r - 1$ e per ciò il residuo è certamente nullo, *c. d. d.*

Dopo ciò è evidente che la formola dell' indicatore logaritmico:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{v'}{v}\, dz = N_0 - N_\infty$$

sarà applicabile anche sulla superficie Riemanniana.

§ 89. — **Funzioni razionali sulla superficie Riemanniana.**

Fra le funzioni uniformi sopra la sfera Riemanniana particolarmente notevoli sono quelle che offrono soltanto singolarità polari, e diconsi *funzioni razionali* sulla superficie Riemanniana perchè, come ora dimostreremo, *esse sono in ogni caso funzioni razionali delle due variabili w, z, legate fra loro dalla equazione fondamentale* (1). Ad una tale funzione razionale, tenendo conto della (1) stessa, si potrà sempre dare la forma

$$v = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \dots + a_{m-1} w^{m-1}, \tag{4}$$

dove le a sono funzioni razionali di z. Che una funzione data dalla (4) sia uniforme sulla sfera Riemanniana ed abbia soltanto singolarità polari, risulta chiaramente da ciò che i punti singolari della funzione algebrica w sulla sfera Riemanniana sono appunto di natura polare (§ 79), e d'altronde le a, come funzioni razionali di z, hanno già soltanto singolarità polari nel piano z.

Ma la proposizione inversa enunciata risulta pure facilmente da quanto si è visto al § 87. Supposto infatti la v uniforme su tutta la sfera Riemanniana, potremo scrivere la (4) e le a saranno funzioni uniformi di z nel piano z. Ora, se la v ha soltanto singolarità polari, nello sviluppo in serie degli m rami della v per potenze della variabile principale il numero delle potenze negative sarà in ogni caso finito, e la formola (3) § 87 per la a_r dimostra che nello sviluppo in serie di a_r per potenze di $z - c$ o di $\frac{1}{z}$, nell' intorno di un punto singolare $z = c$ o $z = \infty$, le potenze negative saranno sempre in numero finito. Dunque le a, essendo uniformi in tutto il piano complesso z e con sole singolarità polari, saranno appunto funzioni razionali di z, *c. d. d.*

Una funzione razionale v sulla superficie Riemanniana non può mancare affatto di poli, a meno che non si riduca ad una costante. In caso contrario infatti, se indichiamo con $v_1, v_2, \dots, v_m$ le m determinazioni di v, le loro funzioni simmetriche elementari

$$\sum v_i, \quad \sum v_i v_k, \quad \sum v_i v_k v_l \dots$$

sarebbero funzioni razionali di z prive di poli e per ciò costanti, onde v stessa sarebbe costante. Una funzione razionale v sulla superficie Riemanniana ha quindi un certo numero (finito) di poli, e se applichiamo le considerazioni stesse del § 54 troviamo: *La somma di tutti i residui di una funzione razionale sulla superficie Riemanniana è nulla.*

Se si osserva ora che la derivata logaritmica di una funzione razionale è ancora una funzione razionale e si applica alla derivata logaritmica il teorema precedente, ricordando le proprietà osservate al § 88, si trova il teorema:

Ogni funzione razionale sulla superficie Riemanniana diventa tante volte zero quante volte infinita.

Più in generale se, indicando con k una costante qualunque, consideriamo in luogo della v la funzione $v - k$ vediamo che: *Una funzione razionale sulla superficie Riemanniana riprende il medesimo numero di volte qualunque valore prefissato.*

Questo numero costante dicesi l'ordine od anche la *valenza* della funzione razionale v. Così, in particolare, se l'equazione fondamentale (1) sarà di grado m in w e di grado n in z, la funzione razionale w sarà di valenza n e la z di valenza m.

Si osservi che dalle osservazioni generali precedenti seguono le due proposizioni:

1ª *Due funzioni razionali sulla superficie Riemanniana, che abbiano a comune gli infinitesimi e gli infiniti, non possono differire che per un fattore costante;*

2ª *Due funzioni razionali, che abbiano a comune gli infiniti ed i termini d'infinito, non possono differire che per una costante additiva.*

Le proprietà delle funzioni razionali sopra una superficie Riemanniana fin qui sviluppate, offrono, come si vede, la più completa analogia con quelle delle ordinarie funzioni razionali. Ma diciamo subito che, proseguendo questi studi, si manifestano altresì profonde differenze. Un fatto nuovo fondamentale si presenta allorquando, cercando di invertire le due proposizioni precedenti, si proponga di costruire una funzione razionale della superficie Riemanniana che abbia assegnati infinitesimi ed infiniti, ovvero infiniti assegnati con prescritti termini d'infinito. Come nel caso delle ordinarie funzioni razionali, la funzione cercata, *se esiste*, sarà determinata a meno di un fattore costante nel primo caso e a meno di una costante additiva nel secondo. Ma mentre per le ordinarie funzioni razionali quegli elementi possono darsi affatto ad arbitrio ed esiste sempre la corrispondente funzione, per una superficie Riemanniana al contrario fra questi elementi dovrà sussistere un certo numero di relazioni (dipendenti dalla connessione multipla della superficie) affinchè la funzione cercata esista. Così fra le posizioni dei poli e quelle degli infinitesimi di una funzione razionale debbono sussistere relazioni, che sono fornite da un celebre teorema d'Abel.

§ 90. — Notizie sugli integrali Abeliani.

Diconsi *integrali Abeliani* gli integrali delle funzioni razionali sopra una superficie Riemanniana. Siccome ogni tale funzione razionale è alla sua volta una funzione algebrica di z, si possono

anche definire gli integrali Abeliani come gli *integrali delle funzioni algebriche*. Nel presente paragrafo ci proponiamo di dare le primissime nozioni su questi integrali considerati come funzioni (multiformi) sulla superficie Riemanniana, limitandoci a riconoscere la natura dei loro punti singolari e la loro classificazione in tre specie.

Essendo

$$f(w, z) = 0 \tag{1}$$

l'equazione fondamentale e

$$v = \varphi(w, z)$$

una funzione razionale qualsiasi di w, z, che potremo sempre ridurre alla forma (4) § 89, l'espressione più generale di un integrale Abeliano corrispondente sarà

$$J = \int v\, dz .$$

Esaminiamo il modo di comportarsi di un integrale Abeliano nell'intorno di un punto qualsiasi della superficie Riemanniana. Sia dapprima $z = c$ un punto ordinario a distanza finita. La funzione razionale v sarà regolare in $z = c$, o al massimo vi avrà un polo di un certo ordine n, sicchè nell'intorno di $z = c$ avremo

$$v = \frac{A_0}{(z-c)^n} + \frac{A_1}{(z-c)^{n-1}} + \dots + \frac{A_{n-1}}{z-c} + P(z-c)$$

ed integrando avremo

$$J = \frac{A_0}{(1-n)\,(z-c)^{n-1}} + \frac{A_1}{(2-n)\,(z-c)^{n-2}} + \dots - \frac{A_{n-2}}{z-c} +$$
$$+ A_{n-1} \log(z-c) + P_1(z-c).$$

Se manca il residuo A_{n-1}, l'integrale J sarà monodromo nell'intorno di $z = c$ e vi avrà un polo dell'ordine $n-1$. Quando sia $A_{n-1} \neq 0$, l'integrale J avrà inoltre in $z = c$ una *singolarità logaritmica* e sarà polidromo nell'intorno di $z = c$, col modulo di periodicità $2\pi i A_{n-1}$. Una conclusione affatto analoga si trae quando il punto ordinario $z = c$ è all' infinito. Avremo infatti allora nell' intorno di $z = \infty$:

$$v = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n + \frac{A}{z} + \frac{1}{z^2} P\left(\frac{1}{z}\right)$$

e però

$$J = \frac{A_0}{n+1} z^{n+1} + \frac{a_1}{n} z^n + \dots + \frac{a_{n-1}}{2} z^2 + a_n z + C + A \log z + P_1\left(\frac{1}{z}\right).$$

Anche qui adunque la singolarità dell' integrale in $z = \infty$ consiste in una singolarità polare (dell'ordine $n + 1$) sovrapposta ad una singolarità logaritmica, la quale ultima manca se è nullo il residuo dell' integrando v.

Consideriamo ora un punto $z = c$, a distanza finita, che sia di diramazione dell'ordine $r - 1$; avremo nell' intorno di esso

$$v = \frac{A_0}{(z-c)^{\frac{n}{r}}} + \frac{A_1}{(z-c)^{\frac{n-1}{r}}} + \dots + \frac{A_n}{(z-c)^{\frac{1}{r}}} + P\left((z-c)^{\frac{1}{r}}\right),$$

e quindi integrando otterremo per J un'espressione della forma

$$J = R \log (z-c) + (z-c)^{-\frac{q}{r}} P_1\left((z-c)^{\frac{1}{r}}\right),$$

dove il termine col logaritmo, che rende l' integrale polidromo nell' intorno di $z = c$, si presenterà soltanto quando non sia nullo il residuo R di v. Quanto alle potenze negative di $(z-c)^{\frac{1}{r}}$, esse mancheranno affatto se si ha $n < r$, se cioè l'ordine d' infinito dell' integrando non supera l'ordine del punto di diramazione. In questo caso la singolarità dell' integrando sparisce nell' integrazione.

Se in fine il punto di diramazione dell'ordine r è all' infinito, avremo

$$v = a_0 z^{\frac{m}{r}} + a_1 z^{\frac{m-1}{r}} + \dots + a_{m-1} z^{\frac{1}{r}} + a_m + \frac{b_1}{z^{\frac{1}{r}}} + \frac{b_2}{z^{\frac{2}{r}}} + \dots$$

e nell' integrale avremo un termine col logaritmo se il residuo b_r non sarà nullo, ed inoltre un certo numero di potenze positive

di $z^{\frac{1}{r}}$, per effetto delle quali l' integrale avrà inoltre una singolarità polare.

Mancherà nell' integrale ogni singolarità allora soltanto quando l' integrando si annulli nel punto $z = \infty$ considerato almeno di ordine $r + 1$.

Riassumendo, vediamo che ogni integrale Abeliano ha sulla superficie Riemanniana un numero finito di singolarità polari o logaritmiche. Queste ultime mancano solo quando sono nulli tutti i residui della funzione razionale integranda. Una prima classificazione degli integrali Abeliani, corrispondente a queste proprietà generali, li divide in due categorie, assegnando alla *prima categoria* quelli che non hanno alcuna singolarità logaritmica, che hanno cioè soltanto singolarità polari, ed invece alla *seconda categoria*, od anche alla terza specie, quelli che presentano singolarità logaritmiche.

Un integrale di prima categoria nell' intorno di qualsiasi punto della superficie Riemanniana è monodromo ; ma sarebbe erroneo il concluderne la monodromia sull' intera superficie Riemanniana. Tale conclusione è legittima soltanto quando la superficie Riemanniana, come più avanti diremo, è semplicemente connessa ossia di *genere zero.*

Gli integrali di prima categoria si distinguono poi in integrali di *prima specie* e integrali di *seconda specie.* Diconsi di prima specie quelli che non hanno singolarità alcuna, di seconda quelli che hanno qualche singolarità (polare). Perchè un integrale

$$J = \int v \, dz$$

sia di prima specie è necessario e sufficiente, per quanto sopra abbiamo osservato, che siano soddisfatte le condizioni seguenti :

1º *La funzione razionale v deve avere i suoi poli soltanto nei punti di diramazione, e in ogni tale punto l'ordine del polo non deve superare l'ordine del punto di diramazione.*

2º *In ogni punto all' infinito della superficie Riemanniana la v deve diventare infinitesima e precisamente almeno dell'ordine $r+1$, se in quel punto sono congiunti ciclicamente r fogli.*

Osserviamo che se

$$J_1,\ J_2,\ \dots,\ J_s$$

sono altrettanti integrali di prima specie, anche qualunque loro combinazione lineare a coefficienti costanti è un integrale di prima specie. Per ogni superficie Riemanniana il numero degli integrali linearmente *distinti* di prima specie è sempre un numero finito p. Questo numero dicesi il *genere* della superficie Riemanniana ed ha la massima importanza nella teorica generale di Riemann. Di altre definizioni del genere parleremo più avanti.

Osserviamo in fine di quale natura sarà la polidromia di un integrale Abeliano qualunque sulla superficie Riemanniana.

Poichè la derivata di un integrale Abeliano è una funzione monodroma (razionale), due diversi rami del medesimo integrale non possono differire che per una costante. Queste costanti, di cui aumenta un integrale Abeliano per un giro chiuso sulla R, diconsi i suoi *moduli di periodicità*. Un integrale di prima categoria ha precisamente $2p$ moduli di periodicità distinti, essendo p il genere. Per un integrale di seconda categoria (o terza specie) vi si aggiungono altrettanti nuovi moduli di periodicità quante sono le singolarità logaritmiche.

§ 91. — **Caso iperellittico.**

Per alcune delle proprietà considerate nei due paragrafi precedenti, come per le condizioni d'esistenza di una funzione razionale sulla R con assegnati elementi e per l'esistenza ed il numero degli integrali di prima specie, abbiamo dovuto limitarci al semplice enunciato, nè possiamo addentrarci in un tale studio generale. Vogliamo però in un caso particolare semplice, nel caso *iperellittico*, confermare ed illustrare le proposizioni enunciate. Prendiamo per ciò la superficie Riemanniana a due fogli del § 84, costruita per l'equazione algebrica

$$w^2 = P(z),$$

dove $P(z)$ è un polinomio razionale intero in z di grado $2p+2$ o $2p+1$, e cerchiamo di costruire una funzione razionale sulla superficie Riemanniana che diventi infinita in un solo punto di questa superficie. Per fissare le idee, supponiamo che il grado del polinomio $P(z)$ sia $2p+2$, talchè all'infinito non avremo diramazione, cioè i due fogli correranno isolati; ma si vedrà poi subito che considerazioni affatto analoghe valgono per l'altro caso.

Distingueremo due punti sovrapposti sui due fogli per mezzo dei valori $w_1 = \sqrt{P(z)}$, $w_2 = -\sqrt{P(z)}$ che vi ha il radicale. Ogni funzione razionale φ sulla superficie Riemanniana ha, secondo il § 89, l'espressione:

$$\varphi = \frac{A(z) + B(z)\sqrt{P(z)}}{C(z)} \tag{5}$$

dove A, B, C sono tre polinomî razionali interi di z, privi di un fattore comune.

Ora osserviamo che se z_0 è una radice di $C(z)$, nell'uno o nell'altro dei due punti sovrapposti della superficie Riemanniana

$$(\sqrt{P(z_0)}\,,\ z_0), \qquad (-\sqrt{P(z_0)}\,,\ z_0)$$

la nostra funzione φ avrà necessariamente un polo. E infatti, perchè ciò non accadesse, bisognerebbe che si avesse simultaneamente

$$\left\{\begin{aligned} A(z_0) + B(z_0)\sqrt{P(z_0)} &= 0 \\ A(z_0) - B(z_0)\sqrt{P(z_0)} &= 0\,; \end{aligned}\right. \tag{6}$$

ora ciò è assurdo se non è $P(z_0) = 0$, perchè si avrebbe allora

$$A(z_0) = 0, \qquad B(z_0) = 0$$

e i tre polinomî $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$, avrebbero un fattore comune. Se poi $P(z_0) = 0$, se cioè z_0 è un punto di diramazione, i due punti considerati coinciderebbero e coinciderebbero pure le due equazioni (6) nell'unica $A(z_0) = 0$. Ma, pure supposta questa soddisfatta, non cesserebbe di sussistere la proprietà enunciata poichè, soppresso il fattore $\sqrt{z - z_0}$ comune al numeratore ed al denominatore φ, il numeratore non si annullerebbe più per $z = z_0$ e perciò φ diventerebbe ivi in ogni caso infinita.

Se vogliamo adunque che la funzione φ diventi infinita in un solo punto $(w_0 z_0)$, che supponiamo dapprima a distanza finita e distinto da un punto di diramazione, dovrà manifestamente $C(z)$ differire da una potenza di $z - z_0$ solo per un fattore costante, sicchè potremo porre senz'altro

$$C(z) = (z - z_0)^r$$

e dovrà inoltre il numeratore annullarsi in $(-w_0, z_0)$ almeno dell'ordine r, dopo di che la φ avrà in (w_0, z_0) un polo d'ordine r. Poichè inoltre la φ deve serbarsi finita all'infinito sopra ambedue i fogli della superficie Riemanniana, cioè nelle sue determinazioni

$$\frac{A(z) + B(z)\sqrt{P(z)}}{(z-z_0)^r}, \qquad \frac{A(z) - B(z)\sqrt{P(z)}}{(z-z_0)^r},$$

lo stesso dovrà avvenire delle frazioni

$$\frac{A(z)}{(z-z_0)^r}, \quad \frac{B(z)\sqrt{P(z)}}{(z-z_0)^r}$$

e per ciò, indicando con m, n i rispettivi gradi di A, B, dovremo avere

$$m \leq r, \quad n+p+1 \leq r,$$

quindi in ogni caso sarà

$$r \geq p+1.$$

Abbiamo dunque il risultato:

Se una funzione razionale φ sulla nostra superficie Riemanniana ha un solo polo, distinto da un punto di diramazione, l'ordine di questo polo (cioè la valenza della funzione) non può essere inferiore a $p+1$.

Alla medesima conclusione si arriva se si suppone che l'unico polo di φ sia all'infinito. Allora la φ ha manifestamente la forma

$$\varphi = A(z) + B(z)\sqrt{P(z)},$$

la C essendo una costante, e se una delle determinazioni della φ all'infinito si serba finita, l'altra vi diventa infinita almeno dell'ordine di $\sqrt{P(z)}$ cioè dell'ordine $p+1$.

Possiamo dunque dire che fra le funzioni che diventano infinite in un solo punto della superficie, distinto da un punto di diramazione, mancano quelle degli ordini

$$1, 2, 3, \ldots, p.$$

Esistono invece quelle di tutti gli altri ordini, poichè le condizioni a ciò necessarie si traducono pei coefficienti dei polinomî

$A(z)$, $B(z)$ in equazioni lineari ed omogenee in numero inferiore al numero dei coefficienti disponibili.

Vediamo ora facilmente che, anche nel caso in cui z_0 sia in un punto di diramazione, vi sono sempre p ordini mancanti; soltanto non sono più gli ordini precedenti, ma invece i p ordini dispari

$$1, 3, 5, \ldots, 2p-1.$$

Che tutti gli ordini pari $2r$ siano in questo caso ordini di funzioni effettivamente esistenti, con un solo polo in un punto di diramazione $z = e$, si vede immediatamente considerando la funzione razionale

$$\frac{1}{(z-e)^r}.$$

Ma se vogliamo costruire una funzione φ che diventi in $z = e_1$ infinita d'ordine impari $2r-1$, dovremo porre

$$\varphi = \frac{A(z) + B(z)\sqrt{P(z)}}{(z-e_1)^r}$$

colla condizione $A(e_1) = 0$. Però, affinchè all'infinito la φ possa serbarsi finita, dovremo avere come prima $r \geq p+1$ e per ciò

$$2r-1 \geq 2p+1,$$

il che dimostra appunto che in tal caso gli ordini mancanti sono

$$1, 3, \ldots, 2p-1.$$

La circostanza qui ritrovata pel caso iperellittico si presenta affatto generalmente per una qualunque superficie Riemanniana e dà la definizione del *genere* p secondo Weierstrass. Fra gli ordini delle funzioni razionali, che diventano infinite in un solo e medesimo punto della superficie Riemanniana, vi è sempre un numero costante di lacune (onde il nome di *Lückensatz* di Weierstrass) e questo numero costante p è quello che dicesi il genere della superficie [1]).

[1]) Per un punto *generico* della superficie gli ordini mancanti sono sempre 1, 2, 3, ... p. Solo per punti speciali della superficie (punti di Weierstrass) le p lacune sono rappresentate da altri numeri.

Così adunque vediamo in particolare che *il genere della superficie Riemanniana corrispondente alla equazione algebrica*

$$w^2 = P(z)$$

dove $P(z)$ *è un polinomio di grado* $2p+2$ o $2p+1$ *in* z, *è appunto* $= p$.

Abbiamo già notato al paragrafo precedente un'altra definizione del genere, come numero degli integrali di 1ª specie linearmente indipendenti, e vogliamo qui verificare la coincidenza delle due definizioni pel caso iperellittico, costruendo l'espressione generale di un integrale di 1ª specie. L'integrale iperellittico

$$J = \int \frac{A(z) + B(z)\sqrt{P(z)}}{C(z)}\, dz \text{ [1]}$$

sarà di 1ª specie allora e allora soltanto che siano soddisfatte le condizioni seguenti (§ 90):

1º La funzione razionale φ sotto il segno abbia i suoi poli solo nei punti di diramazione, ed al massimo del 1º ordine.

2º In ciascuno dei due punti all'infinito, la φ si annulli del 2º ordine almeno.

Per quanto si è visto sopra, $C(z)$ non potrà annullarsi che nei punti di diramazione

$$e_1, \quad e_2, \quad \ldots, \quad e_{2p+2}$$

e se in $z = e_i$ si annulla effettivamente $C(z)$ d'ordine r, la φ vi avrà un polo d'ordine $2r$ se $A(e_i) \neq 0$, e d'ordine $2r-1$ se $A(e_i) = 0$.

Dunque avremo necessariamente $r = 1$, $A(e_i) = 0$; e poichè, per la condizione imposta nei punti all'infinito, deve $\dfrac{A(z)}{C(z)}$ annullarsi almeno del 2º ordine per $z = \infty$, ne concludiamo che sarà identicamente $A(z) = 0$ e quindi, essendo $P(z)$ divisibile per $C(z)$, avremo:

$$J = \int \frac{Q(z)\, dz}{\sqrt{P(z)}}.$$

[1]) Supponiamo anche qui, per fissare le idee, che $P(z)$ sia d'ordine pari $2p+2$ e non vi sia quindi diramazione all'infinito.

dove $Q(z)$ è un polinomio razionale intero in z, il cui grado non supererà $p-1$. L'espressione più generale di un integrale di 1ª specie è adunque nel nostro caso

$$J = \int \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots. a_{p-1} z^{p-1}}{\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)\ldots.(z-e_{2p+2})}}\, dz;$$

come si vede, esso contiene linearmente p costanti arbitrarie $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$, componendosi coi p integrali

$$J_1 = \int \frac{dz}{\sqrt{P(z)}}, \; J_2 = \int \frac{z\, dz}{\sqrt{P(z)}}, \; J_3 = \int \frac{z^2\, dz}{\sqrt{P(z)}} \quad \ldots. J_p = \int \frac{z_{p-1}\, dz}{\sqrt{P(z)}},$$

i quali sono evidentemente indipendenti.

§ 92. — **Il genere p secondo Riemann.**

Abbiamo già osservato due diverse definizioni del genere p, l'una come numero delle lacune negli ordini delle funzioni razionali con un unico polo in un punto fisso, l'altra come numero degli integrali distinti di prima specie. Vi ha ancora una terza definizione del genere, che è la prima in ordine storico, quella stabilita da Riemann e dipendente dall'*ordine di connessione* della superficie Riemanniana [1]). Noi non possiamo qui esporre la teoria della connessione, ma ci limiteremo ad enunciarne il concetto fondamentale e a far conoscere la formola Riemanniana colla quale si calcola il genere p, conoscendo il numero dei fogli della superficie R e la somma degli ordini dei suoi punti di diramazione.

Si perviene al concetto di *ordine di connessione* di una superficie nel modo seguente. Consideriamo dapprima una superficie qualunque [2]) *dotata di contorno* e che sia connessa, cioè tale che

[1]) È noto come il concetto di genere di un' equazione algebrica $f(w, z) = 0$, stabilito da Riemann, fu poi trasportato felicemente da Clebsch al campo geometrico, nella teoria delle curve algebriche.

[2]) Per la validità dei teoremi relativi alla connessione è necessario imporre alle superficie che si considerano alcune condizioni restrittive, per le quali vedasi Neumann, *Theorie der Abel'schen Integrale*, Siebentes Capitel.

due punti qualunque A, B di essa possano congiungersi con una linea tutta appartenente alla superficie. Se lungo una linea semplice, priva di nodi, che vada da un punto A del contorno ad un altro punto B del contorno, si taglia la superficie, si dice che si è eseguito un *taglio semplice* (*Querschnitt* di Riemann). Eseguito il taglio, i due orli di esso vengono ad aggiungersi al primitivo contorno, della qual cosa è da tenersi conto nell'eseguire i tagli successivi.

Diciamo semplicemente connessa una superficie quando qualunque taglio ne distrugga la connessione, ed invece *pluriconnessa*, nel caso contrario. Il grado, o l'ordine, di connessione si valuta nel modo seguente.

Supponiamo che $N-1$ tagli semplici, successivamente eseguiti, non tolgano la connessione ma rendano la superficie semplicemente connessa, talchè sia impossibile eseguire un N^{mo} taglio senza rompere la connessione. Si dimostra che questo numero $N-1$ è un *invariante*; cioè se altri $N'-1$ tagli, eseguiti sulla superficie primitiva, non ne rompono la connessione, ma la rendono semplicemente connessa, si ha necessariamente $N' = N$. Questo numero N dicesi l'ordine di connessione della superficie, cioè: *Una superficie connessa dotata di contorno, dicesi d'ordine N di connessione, se si possono eseguire sulla superficie $N-1$ tagli semplici, che non tolgono la connessione alla superficie, ma la rendono semplicemente connessa.*

In una superficie semplicemente connessa il contorno consta necessariamente di una sola linea chiusa [1]) e, poichè per ogni taglio semplice il numero dei contorni di una superficie cresce o diminuisce di un' unità, ne segue che se una superficie con n contorni si rende semplicemente connessa con $N-1$ tagli, si ha necessariamente

$$N-1 \equiv n+1 \pmod 2$$

ossia: *L'ordine di connessione di una superficie connessa è pari o dispari, secondo che il numero dei suoi contorni è pari o dispari.*

Fino ad ora abbiamo supposto la superficie dotata di contorno. Se essa è chiusa, si immagina di darle *un* contorno asportandone

[1]) Si avverta che tale condizione necessaria per la connessione semplice è ben lungi dall'essere sufficiente, così per es. la superficie di un anello (toro), alla quale sia dato un contorno asportandone l' intorno di un punto, è triplamente connessa.

(perchè è dispari (2) il numero dei contorni

l' intorno di un punto; la piccola curva chiusa che delimitava l' intorno forma allora il contorno (unico). L'ordine di connessione di questa superficie, necessariamente dispari, dicesi anche l'ordine di connessione della superficie chiusa. Indicandolo con $2p+1$, il numero p prende il nome di genere della superficie, cioè: *Una superficie chiusa connessa, d'ordine $2p+1$ di connessione, dicesi di genere p.* Si vede subito che il genere di una superficie chiusa non muta per deformazione continua (§ 83) della superficie.

Si può dimostrare d'altronde che esso è l' unico invariante, cioè: *Fra i punti di due superficie chiuse connesse del medesimo genere può sempre stabilirsi una corrispondenza biunivoca e continua.*

Si può anche, come osserva il Klein, definire direttamente il genere p di una superficie chiusa, senza ridurla prima ad una superficie con contorno. Per questo si immagini di tracciare sulla superficie una curva chiusa che non intersechi sè medesima e lungo la linea si tagli la superficie; un tale taglio dicesi *taglio rientrante* (*Ruckerschnitt*). Una superficie chiusa connessa è semplicemente connessa o di genere *zero*, se qualunque taglio rientrante ne distrugge la connessione. La definizione diretta del genere p è allora la seguente: *Il genere p di una superficie chiusa connessa è il massimo numero di tagli rientranti, che possono farsi sulla superficie senza romperne la connessione.* A fondamento di questa definizione del genere sta il teorema che tale numero massimo è un invariante, che cioè se due diversi sistemi di tagli rientranti, in rispettivo numero di p, p', non tolgono, ciascuno per sè, la connessione ma ogni volta un ulteriore taglio rientrante distruggerebbe la connessione, si ha necessariamente $p = p'$.

Venendo ora al calcolo del genere p di una superficie Riemanniana, dimostra Riemann che esso dipende unicamente dal numero m dei fogli e dalla somma degli ordini

$$r_1-1, \quad r_2-1, \quad \ldots, \quad r_n-1$$

dei rispettivi punti di diramazione, secondo la formola

$$\text{(A)} \qquad p = \frac{\Sigma(r-1)}{2} - m + 1 \;{}^{1}).$$

[1]) Si osservi che la somma $\Sigma(r-1)$ è sempre necessariamente pari, perchè un giro attorno a *tutti* i punti di diramazione produce la sostitu-

Così per es. per la superficie Riemanniana a due fogli del caso iperellittico con $2p + 2$ punti di diramazione del 1° ordine, la formola (A) fa subito riconoscere che il genere è $= p$, come già abbiamo constatato al § 91, riferendoci alle altre definizioni del genere. Al medesimo risultato si arriva riducendo la superficie con deformazione continua, secondo il § 85, alla sfera con p anelli ed osservando che se si eseguiscono p tagli rientranti, uno per ciascuno anello, lungo per es. un meridiano dell'anello, la superficie rimane ancora connessa; ma ogni altro $(p+1)^{mo}$ taglio rientrante rompe la connessione.

Insieme alla formola Riemanniana (A) pel calcolo del genere p, torna spesse volte utile nelle applicazioni la così detta formola d' Eulero generalizzata, che serve a calcolare il genere p di una qualunque superficie chiusa, sulla quale sia tracciata una rete poligonale, che ricopra l' intera superficie, e così formata che ciascun poligono della rete rappresenti un'area semplicemente connessa.

Se si indica allora con F il numero delle facce, con V il numero dei vertici e con C il numero delle costole della rete, si ha:

$$F + V - C = 2 - 2p, \tag{B}$$

essendo p il genere della superficie chiusa.

zione identica; e decomponendosi questa d'altronde nel prodotto delle singole sostituzioni circolari d'ordini

$$r_1, \quad r_2, \ldots, r_n$$

attorno ai punti di diramazione, le quali equivalgono rispettivamente a

$$r_1 - 1 \cdot r_2 - 1, \ldots, r_n - 1$$

trasposizioni il numero totale $\Sigma(r-1)$ di queste trasposizioni deve essere necessariamente pari.

INDICE

CAPITOLO I.

Funzioni di variabile complessa secondo Cauchy-Riemann. — Serie di potenze e loro proprietà. — Rappresentazioni conformi.

CAPITOLO II.

Sostituzioni lineari. — Gruppi discontinui di sostituzioni lineari e loro rappresentazione geometrica.

CAPITOLO III.

Trasformazioni di integrali doppi in integrali semplici. — Funzioni armoniche e le loro proprietà fondamentali. — Problema di Dirichlet e sua risoluzione nel caso del campo circolare.

CAPITOLO IV.

Integrali di funzioni di variabile complessa. — Teorema fondamentale di Cauchy e sue conseguenze. — Sviluppi in serie di Taylor. — Sviluppo di Laurent. — Concetto di funzione analitica secondo Weierstrass. — Serie di funzioni analitiche.

CAPITOLO V.

Punti singolari delle funzioni monodrome. — Poli e punti singolari essenziali. — Residui. — Indicatore logaritmico. — Inversione delle serie di potenze.

CAPITOLO VI.

Funzioni uniformi in tutto il piano complesso. — Loro sviluppi in serie di frazioni parziali secondo Cauchy. — Teorema di Mittag-Leffler. — Sviluppi in prodotti infiniti per le trascendenti intere.

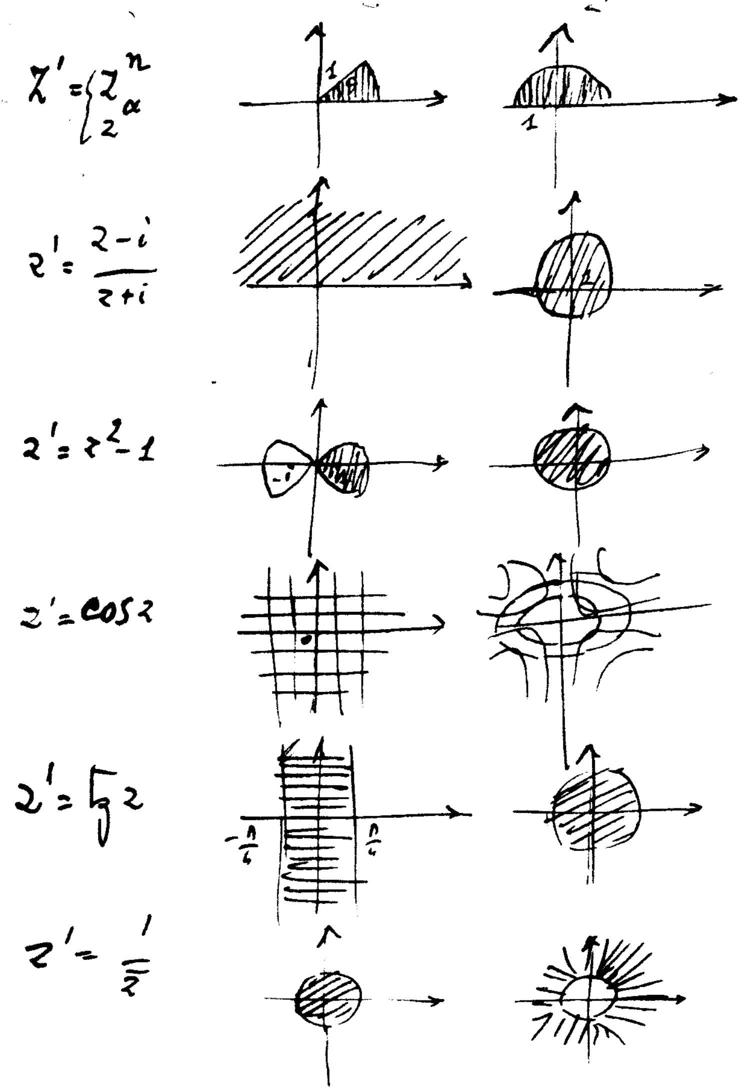
CAPITOLO VII.

Funzioni analitiche di più variabili complesse. — Funzioni implicite. — Proprietà fondamentali delle funzioni algebriche.

CAPITOLO VIII.

Prime nozioni sulle superficie di Riemann e sugli integrali Abeliani.

FINITO DI STAMPARE A FIRENZE
NELLA TIPOGRAFIA « ENRICO ARIANI »
IL III SETTEMBRE MCMXXVIII



Rappresentaz. conformi –