BOLOGNA: TIPI DELLA DITTA ZANICHELLI, 1901.

LE OPERAZIONI DISTRIBUTIVE

E LE LORO

APPLICAZIONI ALL'ANALISI

DI

SALVATORE PINCHERLE

PROFESSORE ORD. NELLA R. UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

IN COLLABORAZIONE

CON

UGO AMALDI

DOTTORE IN MATEMATICA

BOLOGNA

DITTA NICOLA ZANICHELLI

1901

PREFAZIONE

> Le rapprochement des méthodes sert à les éclairer mutuellement, et ce qu'elles ont de commun renferme le plus souvent leur vraie métaphysique.
>
> (Lettera di LAPLACE à LACROIX, gennaio 1792).

L'argomento che forma oggetto del presente libro non può al certo dirsi nuovo, poichè, dal LEIBNIZ fino a noi, è stato trattato in numerosi scritti. Fino dai primordî del calcolo differenziale si era osservato come il simbolo della differenza finita, quello della derivazione ed altri simili, fossero soggetti a regole di trasformazione analoghe, e talvolta identiche, a quelle del calcolo algebrico ordinario. Da questa osservazione nacque quel calcolo, detto simbolico, alla cui teoria e alle cui applicazioni vari autori, in Germania e in Francia sul finire del secolo XVIII e principio del XIX, in Inghilterra nel periodo che va dal 1830 al 1870, hanno dedicato sia speciali memorie, sia particolari capitoli in trattati d'argomento più generale, e al quale anche opere più recenti, come quella del FORSYTH sulle equazioni differenziali, o l'analisi algebrica del CESÀRO, dedicano non poche pagine (1).

Da questo calcolo, però, le tendenze che oggi prevalgono nelle ricerche matematiche accennavano ad allontanarsi. Contenuto nei limiti di un valore puramente formale, il suo interesse sembrava presentarsi scarso, e ridursi, in sostanza, a notare coincidenze algoritmitiche quasi fortuite e buone, tutto al più, a compendiare in forma più concisa ed espressiva risultati sempre raggiungibili per altra via. D'altra parte, la scoperta di quel meraviglioso strumento analitico che è il teorema di CAUCHY, e le applicazioni che i suoi discepoli e quelli del RIEMANN ne andarono facendo con tanto successo, contribuirono certamente a distogliere gli analisti del nostro tempo da speculazioni il cui carattere poteva sembrare prevalentemente algoritmico.

Ciò non ostante, nei progressi che, nei suoi varî rami, andava così rapidamente facendo la matematica, certi procedimenti e certi risultati venivano tratto tratto a ricordare quelli, quasi dimenticati, del calcolo simbolico, in campi a prima vista bene discosti da quelli dove quel calcolo si era già sviluppato. Così accadeva nelle teorie vettoriali del GRASSMANN, riprese poi da LAGUERRE, da PEANO, da CARVALLO ed altri; così nelle ricerche sulle forme bilineari quali le formulava il FROBENIUS, così in altre parti: lasciando pertanto sorgere il dubbio che a quel ramo della scienza del calcolo non fosse mancata per sempre la linfa vitale, e che questa vi avrebbe potuto nuovamente circolare, quando lo si fosse trasportato in terreno più propizio.

Questo fu il dubbio che nacque in me quando, una dozzina d'anni or sono, mi venne fatto di occuparmi di due questioni: del problema dell'inversione degli integrali definiti, che tanto interessò gli analisti dall'ABEL al VOL-

(1) Per la bibliografia, v. Nota I alla fine del volume.

non è escluso, mediante l'aggiunzione del concetto di passaggio al limite, che queste operazioni si possano ripetere un numero infinito di volte, dando così luogo ai noti algoritmi convergenti e alla ricerca dei quozienti differenziali. Ma nei problemi d'indole **funzionale**, in cui l'ente incognito o variabile non è più un numero, bensì una funzione, la derivazione si presenta non più come una ricerca di limite, ma invece come un'operazione che si viene ad **aggiungere**, come elemento fondamentale di calcolo, a quelli già menzionati. Questi, in unione alla derivazione applicata un numero finito od infinito numerabile di volte, bastano alla costruzione di tutte le operazioni distributive che, applicate a funzioni analitiche, generano funzioni del pari analitiche: operazioni studiate già, ma ordinariamente sotto la forma di integrali definiti curvilinei. Forma, a dir vero, sommamente efficace e suggestiva, ma quasi divinata, non discendente dall'organismo del calcolo e non in tutto logicamente dipendente dai soli postulati fondamentali della scienza dei numeri: ragioni che forse indussero il WEIERSTRASS a privarsi sistematicamente del suo potente ausilio nelle sue lezioni sulla teoria delle funzioni analitiche.

A conferma delle vedute, or ora esposte, sull'importanza dell'ufficio del simbolo di derivazione come elemento fondamentale del calcolo funzionale, sta una formula ch'io feci conoscere in una comunicazione alla R. Accademia dei Lincei nel 1895, e che si può riguardare come avente, in quel calcolo, lo stesso posto che occupa nell'ordinaria teoria delle funzioni la formula di MACLAURIN; questa formula conduce a considerare, come espressione generale di un'operazione distributiva, una

serie ordinata per le potenze del simbolo D di derivazione, nello stesso modo che dalla formula di MACLAURIN consegue lo sviluppo in serie di potenze della variabile, caratteristico delle funzioni analitiche.

Questo secondo concetto del calcolo funzionale, di considerare cioè l'operazione D come suo elemento fondamentale, e la conseguente formula dianzi accennata, si presentarono pure ad un matematico francese, il BOURLET, che ne faceva l'oggetto di una nota presentata all'Accademia delle Scienze di Parigi nel febbraio del 1897 e di una memoria pubblicata l'anno stesso, nel T. XIV della serie terza degli Annali di quella Scuola Normale superiore. Il BOURLET si discosta però da me in quanto, come aveva fatto già il VOLTERRA in uno studio su operazioni funzionali più generali considerate però sotto un tutt'altro punto di vista (1), ha dovuto introdurre un concetto analogo a quello della continuità nelle funzioni, e che io non ho avuto bisogno di invocare fin qui.

La presente opera non presuppone nel lettore se non la conoscenza dei principî fondamentali della teoria delle funzioni. Essa si propone di sviluppare i due concetti più sopra accennati e di mostrarne le applicazioni. É sembrato anzitutto conveniente di riassumere, nei primi capitoli, la teoria degli spazî lineari ad n dimensioni e delle operazioni distributive che si possono eseguire sui vettori di questi spazî, almeno in quelle parti di cui la successiva teoria delle operazioni distributive applicabili a funzioni analitiche si presenta come una ovvia estensione. Il quarto capitolo contiene considerazioni, in forma sintetica,

(1) V. la Nota V alla fine del presente volume.

sulle omografie che lasciano invariato un dato spazio ad n dimensioni e sugli spazî invarianti ad un numero minore di dimensioni in esso contenuti; considerazioni che sono in stretta relazione colla teoria dei divisori elementari del WEIERSTRASS [1] e che danno luogo a risultati che servono utilmente in altre parti del libro. Il quinto capitolo introduce le successioni di infiniti elementi, o le funzioni analitiche univocamente corrispondenti ad esse successioni, come elementi o vettori di uno spazio lineare ad un numero infinito numerabile di dimensioni; quindi vengono definite le operazioni elementari in questo spazio. Le operazioni più generali, che si trovano essere gli sviluppi in serie di potenze del simbolo D, le loro principali proprietà, il loro calcolo, alcune loro forme speciali più notevoli, formano oggetto dei tre capitoli successivi. Il Cap. IX è dedicato ad ogni operazione che si presenta come associata in modo necessario ad ogni operazione data e di cui l'equazione aggiunta, considerata dal LAGRANGE, di una data equazione differenziale lineare, fornisce il primo esempio. Coi capitoli seguenti si dà principio alle applicazioni. Il Cap. X contiene gli elementi della teoria analitica delle equazioni lineari alle differenze finite, partendo dalla considerazione dell'operazione definita dal primo membro di una simile equazione. Questa teoria, ordinariamente negletta nei trattati, è stata qui sviluppata con una certa ampiezza, sia per l'interesse che presenta in sè, sia per le applicazioni cui si presta nella teoria generale delle operazioni, sia infine per il raffronto cui dà luogo, prima colla teoria delle equazioni differenziali lineari, trattata in modo

(1) V. la nota III.

chè si potrebbe dire parallelo nel Cap. XI e completata nel Cap. XII, poi colla teoria delle equazioni lineari alle sostituzioni quale è dovuta al KOENIGS e al GRÉVY, e che si trova sviluppata nel Cap. XIV. Questo raffronto, assai istruttivo, viene messo anche maggiormente in luce nel successivo Cap. XV. Il Cap. XIII è dedicato allo studio generale delle trasformazioni nelle operazioni, e a certe trasformazioni particolari, come quella di LAPLACE e l'analoga di BOREL, e quella di EULERO, che per le loro singolari proprietà e per le applicazioni che se ne sono fatte, presentano una speciale importanza. Infine, l'ultimo Capitolo è dedicato ad introdurre l'omogeneità ed insieme il concetto dualistico di punto e piano nello spazio delle funzioni analitiche, fino a quel punto considerato come spazio di vettori, cioè non omogeneo; vi si collegano i concetti di curva, di superficie, di varietà d'ordine superiore in questo spazio e per ultimo quello di gruppo finito continuo di operazioni.

Non è senza qualche titubanza che sottopongo al giudizio dei matematici questa opera che, per qualche apparenza di novità e per le imperfezioni in parte inseparabili di un primo tentativo, richiede la loro indulgenza. Confido che questa indulgenza non sia per mancare, se non ai suoi autori, almeno alla via che in essa viene indicata; poichè questa via non è arbitraria, non tracciata a capriccio; essa appare come naturalmente insita nelle questioni che le hanno dato origine, e, forse, percorsa da chi sia dotato di maggior lena, potrà condurre a meta feconda.

Nel terminare, non devo tacere come buona parte della redazione definitiva del presente volume sia dovuta alla collaborazione intelligente, assidua ed efficace del dott. UGO AMALDI, già mio discepolo. In questa collaborazione, che egli ha accettato con singolare abnegazione, ha incontrato difficoltà non sempre lievi, e le ha saputo vincere: voglio ricordare in modo speciale i Cap. X e XIV come quelli la cui redazione, lunga e laboriosa, gli appartiene principalmente, ed in cui tali difficoltà, felicemente superate, sono state più rilevanti. Nè la sua abnegazione è venuta meno nell' aiuto che mi ha prestato durante il lavoro ingrato della revisione delle bozze di stampa. È pertanto un gradito dovere per me di esprimergli qui la mia vivissima riconoscenza.

Bologna, marzo 1901.

S. PINCHERLE.

INDICE

CAPITOLO PRIMO.

L' insieme lineare generale ad n dimensioni

1. [1] Indichiamo con $\mathfrak{S}$ una classe od *insieme* di enti per i quali ci basterà, in questi primi capitoli, di ammettere le proprietà enumerate in ciò che segue, senza che sia necessario, per ora, di definirli in modo più determinato. Designiamo gli enti di $\mathfrak{S}$ col nome di *elementi* e li rappresentiamo con lettere greche minuscole: con lettere latine minuscole rappresentiamo, invece, numeri (reali o complessi).

2. Ammetteremo dapprima che, dati due elementi α e β di $\mathfrak{S}$, si possa riconoscere se fra essi passa o no una relazione, che sarà detta *uguaglianza*, caratterizzata dalle seguenti proprietà:

I. Se α è *uguale* a β, anche β è *uguale* ad α.

II. Se α è *uguale* a β e β è *uguale* a γ, α è *uguale* a γ.

Per esprimere che α è *uguale* a β si scriverà $\alpha = \beta$ e le proprietà sopra enunciate si scriveranno perciò:

I. Se $\alpha = \beta$, è $\beta = \alpha$;

II. Se $\alpha = \beta$ e $\beta = \gamma$, è $\alpha = \gamma$.

---

[1] V. Laguerre, *Sur le calcul des systèmes linéaires; Oeuvres*, T. I, p. 221 (Paris, Gauthier Villars, 1898). Per i §§. 1-7, v. Peano, *Calcolo geometrico*, cap. IX (Torino, Bocca, 1888).

Risulta da queste definizioni che:

Un ente è uguale a sè stesso.

3. Ammetteremo poi che, dati due elementi qualsivogliano α, β di $\mathcal{S}$, si possa sempre dedurre da essi un terzo elemento determinato, il quale verrà indicato con $\alpha + \beta$. L'operazione con cui da α e β si deduce il terzo elemento $\alpha + \beta$ è caratterizzata dalle seguenti uguaglianze:

$$\text{I.} \qquad \alpha + \beta = \beta + \alpha,$$

$$\text{II.} \qquad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma),$$

dove $\alpha + (\beta + \gamma)$, $(\alpha + \beta) + \gamma$ rappresentano gli elementi dedotti da α e $\beta + \gamma$, da $\alpha + \beta$ e γ rispettivamente, come $\alpha + \beta$ è dedotto da α e β. Gli elementi *uguali* $\alpha + (\beta + \gamma)$ e $(\alpha + \beta)\gamma$ si indicano indifferentemente con $\alpha + \beta + \gamma$. L'operazione così definita dicesi *addizione*, ed $\alpha + \beta$ è detto *somma* di α e β.

Le uguaglianze I e II si dicono *leggi* o *proprietà* dell'addizione; la prima è detta *legge commutativa*, la seconda *legge associativa* dell'addizione. In una somma di quanti addendi si vogliono sarà lecito, in forza delle leggi I e II, aggruppare gli addendi e permutarne l'ordine come più piacerà.

4. Nell'insieme $\mathcal{S}$ ammetteremo l'esistenza di un elemento ω, che noi diremo *elemento zero*, o semplicemente *zero*, il quale, per qualsivoglia elemento α, soddisfa all'eguaglianza

$$\alpha + \omega = \alpha.$$

Designeremo senz'altro l'elemento ω col simbolo 0; ma sarà conveniente non confondere questo elemento con lo *zero* dell'insieme dei numeri.

5. Le somme

$$\alpha + \alpha, \; \alpha + \alpha + \alpha, \ldots .$$

saranno indicate rispettivamente con 2α, 3α, ...; così, se m è un numero intero positivo, $m\alpha$ rappresenterà la somma di m addendi uguali ad α. Dalle leggi dell'addizione seguono immediatamente le seguenti uguaglianze:

$$\text{I.} \qquad m\,(\alpha + \beta) = m\alpha + m\beta,$$

$$\text{II.} \qquad m\alpha + n\alpha = (m + n)\,\alpha,$$

$$\text{III.} \qquad m\,(n\alpha) = (mn)\,\alpha = (nm)\,\alpha.$$

Generalizzando ora queste proprietà, ammetteremo che dato un numero a ed un qualsivoglia elemento α, esista nell'insieme $\mathcal{S}$ un elemento, che noi designeremo con $a\alpha$ e diremo *prodotto* dell'elemento α pel numero a; l'operazione con cui da α si deduce $a\alpha$ dicesi *moltiplicazione* dell'elemento α per il numero a.

Questa operazione è caratterizzata dalle seguenti proprietà. Per a numero intero e positivo, $a\alpha$ sia la somma $\alpha + \alpha + \ldots + \alpha$ di a elementi uguali ad α; per a e b numeri qualsivogliano, rimangano valide le proprietà precedenti, cioè:

$$\text{I.} \qquad a\,(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta,$$

$$\text{II.} \qquad (a + b)\,\alpha = a\alpha + b\alpha,$$

$$\text{III.} \qquad a\,(b\alpha) = (ab)\,\alpha,$$

alle quali aggiungiamo l'altra:

$$\text{IV.} \qquad 0\alpha = 0.$$

Si noti che nell'ultima uguaglianza il simbolo 0 rappresenta al primo membro il *numero zero*, al secondo l'*elemento zero*.

A seconda dei casi i numeri, di cui si è parlato in questo § si potranno intendere sia razionali, sia affatto liberi (reali complessi). Nel seguito, quando non sia avvertito il contrario, parlando di numeri ci riferiremo ai numeri complessi.

6. Ad ogni elemento α corrisponde l'elemento $(-1)\,\alpha$

che, addizionato col primo, dà per somma lo zero in forza delle leggi II e IV del § precedente. Questo elemento si rappresenta con $-\alpha$ e si ha:

$$\alpha + (-\alpha) = 0.$$

Dati gli elementi α e β, l'elemento $\beta + (-\alpha)$ ha la proprietà, che addizionato con α dà per somma β, come segue immediatamente dalle leggi dell'addizione. L'elemento $\beta + (-\alpha)$ si indica più semplicemente con $\beta - \alpha$ e si dice *differenza* fra β ed α; si dice poi *sottrazione* l'operazione con cui $\beta - \alpha$ si deduce da α e β.

Un insieme S che abbia le proprietà ammesse nei §§ 2, 3, 4 e 5 dicosi *insieme* o *spazio lineare.*

7. Prima di procedere nello studio generale di tali sistemi di enti, sarà opportuno dare qualche esempio di sistemi particolari aventi le proprietà enunciate.

Un primo esempio di sistema lineare è dato dall'insieme dei numeri (reali e complessi).

8. Un'altro esempio, per noi assai istruttivo perchè vale a rendere intuitive le considerazioni dei sistemi lineari generali, è il seguente:

Come è noto, dicesi *vettore* nello spazio un segmento rettilineo, considerato in quanto ha una determinata *lunghezza,* una determinata *direzione* e un determinato *verso.*

Esaminiamo l'insieme di tutti i vettori dello spazio ordinario.

Diconsi *uguali* due vettori rappresentati da segmenti di ugual lunghezza, di ugual direzione e di ugual verso. Di qui risulta che a partire da ogni punto dello spazio si può condurre un segmento ed uno solo, il quale rappresenti un qualsivoglia vettore α determinato; quindi, tutti i vettori *non uguali* dello spazio sono rappresentati dall'insieme dei segmenti che escono da un punto qualsiasi.

Dati due vettori α e β, consideriamo a partire da un punto determinato O il segmento OP che rappresenta il vettore α e, a partire da P, il segmente PQ che rappresenta il vettore β. Dicesi *somma* $\alpha + \beta$ dei vettori α e β il vettore rappresentato dal segmento OQ. Così, se il segmento OP rappresenta il vettore α e il segmento OQ' rappresenta il vettore β, il vettore rappresentato dal segmento PQ' dicesi *differenza* $\beta - \alpha$ di α e β.

Per ultimo, fissata una unità di misura, e dato un vettore α, che sia rappresentabile per mezzo di un segmento OP, dicesi *prodotto* del vettore α per un numero *reale* qualsivoglia c il vettore rappresentato da un segmento parallelo ad OP, considerato nel verso di OP o nell'opposto secondochè c è positivo o negativo, e avente, infine, come lunghezza il prodotto della lunghezza di OP pel valore assoluto di c.

È chiaro che l'*uguaglianza,* la *addizione,* la *sottrazione* dei vettori, e il *prodotto* di vettori per numeri reali, così definiti, godono delle proprietà indicate nei §§ precedenti per l'*uguaglianza,* l'*addizione,* la *sottrazione,* e il prodotto di *elementi* per numeri qualsivogliano. Possiamo, quindi, affermare che l'insieme dei vettori dello spazio è un insieme lineare.

9. Se all'insieme lineare S appartengono quanti si vogliono elementi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, vi appartiene anche ogni elemento

$$\alpha = a_1\,\alpha_1 + a_2\,\alpha_2 + \ldots + a_n\,\alpha_n,$$

dove $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono numeri arbitrari (§§ 5, 3). L'elemento α dicesi *combinazione lineare* degli elementi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$. Se per i numeri $a_1, a_2 \ldots, a_n$ esistono n valori non tutti nulli, e tali che l'elemento α corrispondente coincida con l'elemento *zero*, si dice che gli elementi α_1,

$\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sono *linearmente dipendenti.* Ciò equivale ad ammettere fra di essi la relazione lineare

$$a_1\,\alpha_1 + a_2\,\alpha_2 + \ldots + a_n\,\alpha_n = 0.$$

Se, all'infuori dei valori $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, non esistono n valori, per i quali sussista la uguaglianza suindicata, si dice che gli elementi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sono ***linearmente indipendenti.***

10. Abbiansi n elementi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ linearmente dipendenti: esistono allora n numeri $c_1, c_2, \ldots, c_n$, coi quali si stabilisce tra $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ la relazione lineare

$$c_1\,\alpha_1 + c_2\,\alpha_2 + \ldots + c_n\,\alpha_n = 0.$$

Essendo h un numero qualsivoglia, anche coi numeri $c_1h, c_2h, \ldots c_nh$ si stabilisce evidentemente tra $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ una relazione lineare, la quale per altro non si considera come distinta dalla precedente.

In generale, se tra gli n elementi dati sussistono r relazioni lineari

$$a_{j1}\,\alpha_1 + a_{j2}\,\alpha_2 + \ldots + a_{jn}\,\alpha_n = 0$$
$$(j = 1, 2, \ldots, r)$$

queste relazioni si dicono ***indipendenti*** o ***distinte***, se non esistono r numeri $c_1, c_2, \ldots, c_r$, non tutti nulli e tali che sia

$$c_1\,a_{1i} + c_2\,a_{2i} + \ldots + c_r\,a_{ri} = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Indicando con $F_j = 0$ le ammesse relazioni lineari fra gli α_i, per le proprietà dell'insieme lineare (§§ 2-6), a queste combinazioni lineari di elementi si può applicare la nota teoria delle forme lineari, quale viene ordinariamente data per l'insieme dei numeri (§ 7).

Se ne conclude subito, che il numero delle relazioni distinte, che sono contenute nel sistema $F_j = 0$, è dato dalla *caratteristica* della matrice dei coefficienti a_{ij} [1].

11. Un insieme lineare di elementi dicesi *ad n dimensioni*, se in esso esistono n elementi linearmente indipendenti e non più. Ciò significa che nell'insieme si possono trovare n elementi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ linearmente indipendenti, ma presi in esso $n+1$ elementi in qualsivoglia modo, fra questi sussiste una relazione lineare (almeno).

Supposto di avere n elementi dell'insieme S

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$$

linearmente indipendenti, l'insieme (contenuto in S) degli elementi rappresentati da

$$(1) \qquad \beta = b_1\,\beta_1 + b_2\,\beta_2 + \ldots + b_n\,\beta_n,$$

dove a ciascun coefficiente b_i si attribuiscono tutti i possibili valori (non infiniti), costituisce, secondo la definizione precedente, un insieme lineare ad n dimensioni.

Infatti, se alle costanti $b_1, b_2, \ldots, b_n$ si danno rispettivamente i valori:

$$\begin{array}{l} 1,\ 0,\ 0, \ldots\ 0, \\ 0,\ 1,\ 0, \ldots\ 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0,\ 0,\ 0, \ldots\ 1, \end{array}$$

si ottengono precisamente gli n elementi $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, appartenenti all'insieme, ed essi sono per ipotesi linearmente indipendenti. Presi, invece, $n+1$ elementi rappresentati dall'espressione (1), come:

$$\beta^{(i)} = b_{i1}\,\beta_1 + b_{i2}\beta_2 + \ldots + b_{in}\,\beta_n$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n+1),$$

---

[1] V. p. es. Capelli, *Lezioni di Algebra complementare*, p. 153 (Napoli, Pellerano, 1898).

sarà sempre possibile trovare $n+1$ numeri $k_1, k_2, \ldots, k_{n+1}$ che rendano soddisfatto il sistema

$$k_1 b_{1j} + k_2 b_{2j} + \ldots + k_{n+1} b_{n+1j} = 0$$
$$(j = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

di n equazioni lineari omogenee ad $n+1$ incognite, e quei numeri stabiliranno fra gli $n+1$ elementi $\beta^{(i)}$ la relazione lineare

$$k_1 \beta^{(1)} + k_2 \beta^{(2)} + \ldots + k_{n+1} \beta^{(n+1)} = 0.$$

12. Un insieme lineare ad n dimensioni verrà indicato con S_n. Sia S_n un insieme lineare ad n dimensioni contenuto in S; per la stessa definizione (§ 11), esistono in esso n elementi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ linearmente indipendenti: ma se α è un qualsivoglia elemento di S_n, diverso da $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, tra gli $n+1$ elementi $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ sussiste una relazione lineare che si può scrivere

$$\alpha = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + \ldots + a_n \alpha_n.$$

Poichè ad S_n, insieme con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, deve appartenere ogni elemento $a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + \ldots + a_n \alpha_n$ (§§ 5, 3), possiamo concludere che l'insieme S_n è costituito da tutti e soli gli elementi, che si ottengono per mezzo di combinazioni lineari di $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

13. Ogni sistema di n elementi linearmente indipendenti di un insieme lineare S_n ad n dimensioni dicesi *sistema fondamentale* dell'insieme. Fissato nell'insieme un sistema fondamentale $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, ogni elemento α di S_n si potrà, come si è visto, rappresentare sotto la forma

$$\alpha = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + \ldots + a_n \alpha_n;$$

all'elemento α *corrispondono* i numeri $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Questi numeri determinano l'elemento α nell'insieme S_n.

Reciprocamente, dato l'elemento α, i numeri $a_1, a_2, \ldots a_n$ sono perfettamente determinati. Se infatti si avesse per lo stesso elemento α la seconda espressione

$$\alpha = a'_1 \alpha_1 + a'_2 \alpha_2 + \ldots + a'_n \alpha_n$$

ne verrebbe

$$(a_1 - a'_1)\alpha_1 + (a_2 - a'_2)\alpha_2 + \ldots + (a_n - a'_n)\alpha_n = 0$$

e quindi, per la indipendenza lineare di $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$,

$$a_i = a'_i$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ad indicare un S_n, di cui $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sia un sistema fondamentale, useremo la notazione $S_n [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$.

14. Dati gli elementi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, se fra essi passano r relazioni lineari indipendenti e non più ($r < n$), l'insieme degli elementi $\alpha = a_1 \alpha_1 + a_2 + \ldots a_n \alpha_n$ conterrà $n - r$ elementi e non più linearmente indipendenti, e sarà pertanto ad $n - r$ dimensioni.

15. Nello studio degli insiemi lineari di elementi torna spesso comodo il linguaggio geometrico, al quale siamo condotti mediante le seguenti considerazioni. Nel caso di $n = 2$ o 3, ci possiamo rappresentare l'insieme lineare coi vettori di un piano, o dello spazio ordinario, aventi un estremo comune in un punto fisso (*origine*). Ognuno di questi vettori è allora individuato dall'altro suo estremo; l'insieme di punti si può quindi, in questo senso, sostituire all'insieme dei vettori. Per analogia, gli elementi di S si potranno pensare come *vettori* aventi una estremità comune; ogni S_n, come un insieme (o *spazio*) lineare di *vettori*, o anche di *punti*, ad n dimensioni. Ogni vettore (o punto) α di S_n è esprimibile mediante i vettori (o punti) di un sistema fondamentale, nella forma

$$\alpha = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + \ldots + a_n \alpha_n;$$

i numeri $a_1, a_2, \ldots, a_n$ si potranno dire *coordinate* del vettore (o punto) α rispetto al sistema fondamentale $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Il vettore α_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, cioè l' i^{simo} vettore del sistema fondamentale, ha evidentemente tutte le coordinate nulle, fuorchè la i^{ma}, che è eguale ad 1.

L'elemento *zero* (§ 4, § 9) ha tutte ed n le sue coordinate nulle; esso è *l'origine* comune ai vettori α di S_n.

16. In ogni insieme lineare ad n dimensioni esistono infiniti sistemi fondamentali. Infatti, se, essendo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ i vettori di un sistema fondamentale, poniamo

$$\beta_i = a_{i1}\,\alpha_1 + a_{i2}\,\alpha_2 + \ldots + a_{in}\,\alpha_n \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n), \tag{2}$$

avremo, per un noto teorema sulle forme lineari, che condizione necessaria e sufficiente affinchè i punti $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ siano linearmente indipendenti e, quindi, costituiscano un sistema fondamentale, si è che la matrice

$$\left\lVert \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{matrix} \right\rVert$$

abbia la caratteristica n, o, in altre parole, che il relativo determinante, che verrà rappresentato brevemente con $|a_{ij}|$, sia diverso da zero.

17. Consideriamo un qualsiasi elemento (vettore) γ dell'insieme S_n. Esso ammetterà rispetto al sistema fondamentale $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, certe coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Se assumiamo poi come sistema fondamentale il sistema $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, dove gli elementi β_i sono legati agli α_i dalle relazioni (2), a determinante diverso da zero, lo stesso vettore γ ammetterà rispetto al nuovo sistema certe altre coordinate $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Per

avere le relazioni che legano queste a quelle basta osservare che la espressione di γ mediante le β_i

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} y_i\,\beta_i$$

si trasforma mediante le (2) in

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} y_i\,(a_{i1}\,\alpha_1 + a_{i2}\,\alpha_2 + \ldots a_{in}\,\alpha_n)$$

ovvero

$$\gamma = \sum_{j=1}^{n} (y_1\,a_{1j} + y_2\,a_{2j} + \ldots y_n\,a_{nj})\,\alpha_j.$$

Poichè le $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sono linearmente indipendenti, se ne conclude (§ 14)

$$x_j = y_1\,a_{1j} + y_2\,a_{2j} + \ldots + y_n\,a_{nj} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Queste equazioni lineari permettono di dedurre dalle coordinate di un vettore qualsiasi di S_n, riferito al sistema $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, le coordinate del medesimo vettore riferito al sistema $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; esse definiscono una *trasformazione di coordinate* (che conserva l'origine).

Poichè il determinante $|a_{ij}|$ è diverso da zero, le (3) si possono risolvere rispetto ad $y_1, y_2, \ldots, y_n$, e si ottiene

$$y_i = \bar{a}_{i1}\,x_1 + \bar{a}_{i2}\,x_2 + \ldots, \bar{a}_{in}\,x_n \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n). \tag{3'}$$

Queste equazioni definiscono la trasformazione di coordinate *inversa* della primitiva.

18. Dati, entro S_n, r vettori linearmente indipendenti $(r < n)$, essi si possono assumere come sistema fondamentale di un insieme lineare S_r ad r dimensioni, ciascun elemento del quale appartiene allo S_n primitivo: un tale insieme $\mathfrak{S}_r$ $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p]$ si dirà *contenuto* nello insieme $\mathfrak{S}_n$.

a) In particolare un elemento α_1 definirà un insieme lineare $\mathfrak{S}_1$ ad una dimensione, che si può pensare come l'insieme dei vettori aventi un estremo comune nell'origine, e disposti secondo una stessa *retta*.

I punti della retta saranno rappresentati da

$$\alpha = x_1 \alpha_1,$$

dove alla coordinata x_1 si diano tutti i possibili valori.

b) Due elementi α_1, α_2 definiscono uno spazio lineare $\mathfrak{S}_2$ a due dimensioni; esso ci è rappresentato geometricamente dall'insieme dei vettori aventi un estremo comune nell'origine, e contenuti nel *piano* individuato da α_1, α_2. Gli elementi di $\mathfrak{S}_2$ saranno della forma

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2.$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un vettore α_3 appartenga ad $\mathfrak{S}_2$, è che esistano tre numeri c_1, c_2, c_3 tali che sia

$$c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + c_3 \alpha_3 = o.$$

Si noti che l'elemento *zero* (*origine*), il quale (§ 15) ha tutte le sue coordinate nulle, appartiene tanto allo $\mathfrak{S}_n$ primitivo, quanto ad ogni $\mathfrak{S}_r$ $(r < n)$ contenuto in $\mathfrak{S}_n$. Ciò si esprime dicendo che l'insieme $\mathfrak{S}_r$ *passa per l'origine*. [1]

19. Un'insieme lineare ad $n - 1$ dimensioni $\mathfrak{S}_{n-1}$ contenuto nell'insieme $\mathfrak{S}_n$ è, secondo il linguaggio dell'ipergeometria, *un iperpiano passante per l'origine* in esso spazio $\mathfrak{S}_n$. Sia $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ un sistema fondamentale di $\mathfrak{S}_n$; un $\mathfrak{S}_{n-1}$ di $\mathfrak{S}_n$ sarà determinato da $n - 1$ suoi vettori linearmente indipendenti $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$. Questi si potranno riferire al

[1] **Si ommetterà, quindi innanzi, di ricordare che ogni $\mathfrak{S}_r$ di vettori contenuto in $\mathfrak{S}_n$ ha, con $\mathfrak{S}_n$, l'origine in comune.**

sistema fondamentale $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ di $\mathfrak{S}_n$ per mezzo di relazioni della forma

$$\beta_i = a_{i1} \alpha_1 + a_{i2} + \ldots + a_{in} \alpha_n$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots, n - 1).$$

Per la supposta indipendenza dei punti β_i, la matrice dei coefficienti a_{ij} avrà la caratteristica $n - 1$, e reciprocamente, se entro $\mathfrak{S}_n$ sono dati $n - 1$ elementi $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ qualsivogliano, purchè rendano soddisfatta quest'ultima condizione, essi definiranno un $\mathfrak{S}_{n-1}$ di $\mathfrak{S}_n$. I rapporti dei determinanti di ordine $n - 1$ della matrice (non tutti nulli), presi ordinatamente con segni alternati, si dicono *coordinate* dello $\mathfrak{S}_{n-1}$ considerato.

20. Abbiasi un iperpiano $\mathfrak{S}_{n-1}$, e si indichino con $u_1, u_2, \ldots, u_n$, le sue coordinate. Se un vettore di $\mathfrak{S}_n$

$$\lambda = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \ldots + x_n \alpha_n$$

si trova in $\mathfrak{S}_{n-1}$, sarà soddisfatta la relazione

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_n x_n = 0. \tag{5}$$

Difatti, se λ è un vettore che appartenga ad $\mathfrak{S}_{n-1}$ sarà:

$$\lambda = y_1 \beta_1 + y_2 \beta_2 + \ldots + y_{n-1} \beta_{n-1},$$

e quindi:

$$\lambda = \Sigma\, (y_1 a_{1i} + y_2 a_{2i} + \ldots + y_{n-1} a_{n-1 \cdot i})\, \alpha_i.$$

Ne risulta (§ 14)

$$x_i = a_{1i} y_1 + a_{2i} y_2 + \ldots + a_{n-1 \cdot i}\, y_{n-1}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

onde il determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1 \cdot 1} & a_{n-1 \cdot 2} & a_{n-1 \cdot 3} & \ldots & a_{n-1 \cdot n} \end{vmatrix}, \tag{6}$$

nel quale gli elementi di ciascuna delle colonne soddisfanno ad una relazione lineare che non varia da colonna a colonna, è identicamente nullo. Sviluppando questo determinante rispetto agli elementi della prima linea ed uguagliando a zero lo sviluppo, otteniamo la uguaglianza (5).

Reciprocamente, se le coordinate del vettore λ soddisfanno alla relazione (5), il determinante (6) è nullo: quindi fra gli elementi di ciascuna colonna passa una medesima relazione lineare

$$x_i = k_1\, a_{1i} + k_2\, a_{2i} + \ldots + k_{n-1}\, a_{n-1, i};$$

ne risulta pel vettore λ l'espressione

$$\lambda = k_1\, \beta_1 + k_2\, \beta_2 + \ldots + k_{n-1}\, \beta_{n-1},$$

la quale dice che λ appartiene allo $\mathcal{S}_{n-1}$ determinato dai vettori $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$.

Un $\mathcal{S}_{n-1}$ è determinato quando ne sono dati i rapporti delle coordinate $u_1 : u_2 : \ldots : u_n$, poichè si potranno determinare $n - 1$ punti linearmente indipendenti, e non più, le cui coordinate

$$x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in} \quad (i = 1, 2, \ldots n - 1)$$

soddisfino alle relazioni

$$(5) \qquad u_1\, x_{i1} + u_2\, x_{i2} + \ldots u_n\, x_{in} = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots n - 1).$$

Le (5) esprimono la condizione sotto cui un vettore di coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_n$, appartiene allo $\mathcal{S}_{n-1}$ di coordinate $u_1, u_2, \ldots, u_n$; date che siano queste ultime, essa si può dire *equazione dello* $\mathcal{S}_{n-1}$. (1)

(1) Non entra nel piano del nostro lavoro di dilungarci negli sviluppi che si presenterebbero naturali a questo punto, sulla geometria delle forme lineari nell'insieme o spazio lineare ora definito. Introducendo l'omogeneità, che per lo scopo della presente opera non si presentava opportuna, il lettore troverà questi sviluppi nei §§ I-VI della Memoria del D'Ovidio, *Le funzioni metriche fondamentali, ecc.* (Memorie della R. Accademia dei Lincei, S. III, T. I, 1877).

21. Abbiansi l'insieme lineare $\mathcal{S}_p\,[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p]$ a p dimensioni, e l'insieme lineare $\mathcal{S}_q\,[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q]$ a q dimensioni, entrambi contenuti in $\mathcal{S}$. Possono allora darsi due casi:

a) Fra le $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ non passa alcuna relazione lineare. Non vi è allora alcun elemento di $\mathcal{S}_p$ che appartenga ad $\mathcal{S}_q$; $\mathcal{S}_p$ ed $\mathcal{S}_q$ non hanno elementi comuni. Di più, l'insieme contenente tutti gli elementi di $\mathcal{S}_p$ ed $\mathcal{S}_q$ ed avente il minimo numero di dimensioni, è quello che ha per sistema fondamentale $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$, ed è quindi a $p + q$ dimensioni. Questo insieme si dice *somma* degli insiemi $\mathcal{S}_p$ ed $\mathcal{S}_q$.

b) Fra gli elementi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ passano r relazioni lineari indipendenti. Queste relazioni si potranno porre sotto la forma

$$(7) \qquad a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{ip}\alpha_p = b_{i1}\beta_1 + b_{i2}\beta_2 + \ldots + b_{iq}\beta_q. \qquad (i = 1, 2, \ldots, r);$$

esse esprimono che vi sono r elementi linearmente indipendenti comuni ad $\mathcal{S}_p$ ed $\mathcal{S}_q$. Siano $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$ questi elementi comuni; ogni elemento dell'insieme $\mathcal{S}_p\,[\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r]$ sarà comune ad $\mathcal{S}_p$, $\mathcal{S}_q$, e nessun elemento non appartenente ad $\mathcal{S}_r\,[\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r]$ potrà essere comune, poichè in tal caso vi sarebbero, contro il supposto, più di r relazioni indipendenti della forma (7). Ne consegue che $\mathcal{S}_r$ è l'insieme, avente il massimo numero di dimensioni, contenuto ad un tempo in $\mathcal{S}_p$ ed $\mathcal{S}_q$.

Si consideri ora in $\mathcal{S}_p$ ed $\mathcal{S}_q$ rispettivamente, un sistema fondamentale che contenga $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$: scriviamo cioè:

$$\mathcal{S}_p\,[\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{p-r}, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r],$$
$$\mathcal{S}_q\,[\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_{q-r}, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r].$$

L'insieme

$$\mathcal{S}_{p+q-r}\,[\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{p-r}, \beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_{q-r}, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r]$$

contiene tanto $\mathcal{S}_p$ quanto $\mathcal{S}_q$; ed è manifestamente l'insieme del minimo numero di dimensioni che ha questa proprietà. È $\mathcal{S}_{p+q-r}$ che si dirà allora *somma* dei due insiemi $\mathcal{S}_p$ ed $\mathcal{S}_q$.

CAPITOLO SECONDO.

Generalità delle operazioni

A. LE OPERAZIONI IN GENERALE.

22. Tra gli elementi di due sistemi $\mathcal{S}$ ed $\mathcal{S}'$ sia stabilita una *corrispondenza* che coordini uno o più elementi di $\mathcal{S}$ ad ogni elemento di $\mathcal{S}'$. Questa corrispondenza può riguardarsi come l'effetto di un *operazione* che, eseguita sugli elementi di $\mathcal{S}$, produce gli elementi corrispondenti di $\mathcal{S}'$. Si dirà che l'operazione così considerata *trasforma* $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}'$.

Può darsi che ad un elemento di $\mathcal{S}$ corrisponda un solo elemento di $\mathcal{S}'$; allora la corrispondenza si suole dire *univoca*. Si dirà pure *univoca*, o *a determinazione unica*, l'operazione di cui questa corrispondenza è l'effetto. L'operazione si dice *a determinazione multipla* quando essa fa corrispondere ad un elemento di $\mathcal{S}$ più di un elemento di $\mathcal{S}'$.

23. Indicheremo d'ora innanzi le operazioni colle lettere maiuscole dell'alfabeto romano. Se all'elemento α di $\mathcal{S}$ l'operazione A fa corrispondere l'elemento unico α' di $\mathcal{S}'$, scriveremo:

$$\mathrm{A}(\alpha) = \alpha'.$$

Se invece all'elemento α di $\mathcal{S}$ l'operazione A fa corrispondere più elementi $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots\ldots$ di $\mathcal{S}'$, scriveremo:

$$\mathrm{A}(\alpha) = (\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots\ldots).$$

Ognuno dei diversi elementi α'_1, α'_2, ..., che corrispondono allo stesso elemento α si dirà una diversa *determinazione* di $A(\alpha)$.

Quando accadrà di considerare più operazioni A, B, C, ... si supporrà, ove non si enunci esplicitamente il contrario, che ognuna di esse trasformi l'insieme $\mathcal{S}$ in uno stesso insieme $\mathcal{S}'$.

24. Siano A, B due operazioni a determinazione unica che trasformino $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}'$. Diremo che l'operazione A è uguale all'operazione B se, qualunque sia α in $\mathcal{S}$, è

$$A(\alpha) = B(\alpha).$$

Siano invece A e B due operazioni a determinazione multipla che trasformino $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}'$; si dirà che A è uguale a B se, qualunque sia α in $\mathcal{S}$, gli elementi $A(\alpha)$ sono uguali, ciascuno a ciascuno, agli elementi $B(\alpha)$. Da questa definizione, e dalle proprietà (§ 2) dell'uguaglianza fra elementi, risultano verificate, per l'uguaglianza fra operazioni, le leggi caratteristiche (ibid.):

$$\text{se } A = B, \text{ è } B = A:$$
$$\text{se } A = B \text{ e } B = C, \text{ è } A = C.$$

25. Dati i due spazi lineari $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, chiameremo *operazione nulla in* $\mathcal{S}$, ed indicheremo con O, l'operazione univoca che fa corrispondere ad ogni elemento α di $\mathcal{S}$ l'elemento zero in $\mathcal{S}'$:

$$O(\alpha) = o.$$

Non è escluso che $\mathcal{S}'$ possa coincidere con $\mathcal{S}$.

Dato l'insieme lineare $\mathcal{S}$, chiameremo *operazione identica* od *operazione unità* l'operazione univoca che fa corrispondere ad ogni elemento α di $\mathcal{S}$ l'elemento stesso α. Indicandola con I, avremo:

$$I(\alpha) = \alpha.$$

26. Siano A, B due operazioni univoche che trasformino entrambe $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}'$: diremo *somma* di A e B ed indicheremo con A + B l'operazione che fa corrispondere ad ogni elemento α di $\mathcal{S}$ l'elemento $A(\alpha) + B(\alpha)$ di $\mathcal{S}'$.

Siano A e B due operazioni a determinazione multipla che trasformino $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}'$; si dirà somma di A e B e si indicherà con A + B l'operazione che fa corrispondere ad ogni elemento α di $\mathcal{S}$ tutti gli elementi che risultano dalle somme di una qualsivoglia delle determinazioni $A(\alpha)$ di A con una qualunque delle determinazioni $B(\alpha)$ di B. Da questa definizione, e dalle proprietà delle somme di elementi (§ 3), segue che la somma delle operazioni gode delle proprietà caratteristiche dell'addizione (ibid.), cioè

$$A + B = B + A,$$
$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

Si ha inoltre manifestamente

$$A + O = A.$$

27. Essendo a un numero qualunque reale o complesso, diremo *prodotto* di A per a, ed indicheremo con aA, l'operazione che ad ogni elemento α di $\mathcal{S}$ fa corrispondere l'elemento (o gli elementi) $aA(\alpha)$ di $\mathcal{S}'$. Da questa definizione, e dalle proprietà date al § 5 per il prodotto di elementi per numeri, seguono le uguaglianze:

$$a(A + B) = aA + aB,$$
$$(a + b)A = aA + bA,$$
$$a(bA) = (ab)A.$$

28. Date due operazioni univoche A e B, che trasformino entrambe $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}'$, resta con esse definita l'operazione che ad ogni elemento α di $\mathcal{S}$ fa corrispondere l'elemento $B(\alpha) - A(\alpha)$ di S'. Questa operazione si indicherà con B — A: essa si dirà *differenza* di B da A. Si ha evidentemente

$$A - A = O, \quad A + (B - A) = B.$$

29. Da quanto precede discende che l'insieme delle operazioni univoche, le quali, applicate agli enti di uno spazio lineare $\mathcal{S}$, lo trasformano in uno spazio lineare $\mathcal{S}'$, soddisfa alle condizioni indicate ai §§ 2-6; quindi questo insieme di operazioni costituisce alla sua volta un nuovo insieme lineare (§ 7).

Risulta immediatamente, da quanto precede, che cosa si debba intendere con operazioni univoche linearmente dipendenti od indipendenti.

30. Siano A e B due operazioni, la prima delle quali trasformi lo spazio lineare $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}'$, la seconda lo spazio lineare $\mathcal{S}'$ nello spazio lineare $\mathcal{S}''$. Si può allora porre

$$A(\alpha) = \alpha', \quad B(\alpha') = \alpha''$$

e considerare la trasformazione di $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}''$ tale che ad α corrisponda α''. Questa trasformazione è un'operazione che si dice *prodotto* di A per B; essa viene designata con BA.

Date più operazioni A, B, C, ..., tali che A trasformi $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}'$, B trasformi $\mathcal{S}'$ in $\mathcal{S}''$, C trasformi $\mathcal{S}''$ in $\mathcal{S}'''$, ..., è stata definita l'operazione BA che trasforma $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}''$. Analogamente sarà definita l'operazione C(BA), prodotto di BA per C, che trasforma $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}'''$, e così via.

31. Quando un sistema di operazioni A, B, C, ..., è tale che le due operazioni C(BA), (CB)A siano uguali, si dice che il sistema delle operazioni ammette la *proprietà associativa*. Noi stabiliremo che i sistemi di operazioni che considereremo d'ora innanzi, godano sempre della proprietà associativa.

I prodotti uguali C(BA), (CB)A si rappresenteranno d'ora in poi con CBA.

32. Se le operazioni A, B trasformano entrambi lo spazio $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}'$, ed $\mathcal{S}'$ in $\mathcal{S}''$, ambo i prodotti AB, BA trasformeranno $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}''$. In generale però questi due prodotti non saranno uguali. Quando due operazioni A, B sono tali che sia

$$AB = BA,$$

si dice che le operazioni A, B sono *commutabili*, od anche che godono della *proprietà commutativa*.

Non ammetteremo, per le operazioni che avremo da considerare, che sia verificata in generale la proprietà commutativa; essa potrà, per altro, presentarsi in casi particolari.

33. Se A, B, AC, BC sono a determinazione unica, da A = B risulta AC = BC.

Se A, B sono a determinazione unica, da A = B risulta CA = CB.

34. Dati gli spazi lineari $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{S}''$, $\mathcal{S}'''$, ..., l'operazione A trasformi $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}'$, $\mathcal{S}'$ in $\mathcal{S}''$, e così via. Dal § 30 risultano allora definite le operazioni AA, AAA, ... Queste operazioni si indicheranno rispettivamente con A^2, A^3, ..., e si diranno *potenze seconda*, *terza*, ... (o *di esponente* 2, 3, ...) della operazione A.

Dalla proprietà associativa, che come si è avvertito, intendiamo che sia costantemente verificata, risulta per le potenze di un'operazione la *proprietà iterativa*, che è espressa dall'uguaglianza

$$(1) \qquad A^m A^n = A^{m+n}$$

essendo m ed n numeri interi positivi.

La prima potenza (o *d'esponente* 1) dell'operazione A sarà l'operazione A stessa.

35. Accade spesso di considerare il caso in cui gli spazi lineari, che abbiamo indicati con $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, ..., non sono fra loro distinti. In altre parole, l'operazione A può fare corrispondere ad un elemento di $\mathcal{S}$ un elemento pure appartenente ad $\mathcal{S}$, o trasformare, come si dice, lo spazio $\mathcal{S}$ in sè stesso. A questo caso che è già stato considerato al § 25 per l'operazione identica, si applicano senza modificazioni tutte le considerazioni svolte nei §§ precedenti.

Se A è un'operazione che trasforma $\mathcal{S}$ in sè, due potenze qualsivogliano di A sono fra loro commutabili.

36. Se A è una qualsivoglia operazione che trasforma $\mathcal{S}$ in sè, è chiaro che

$$AI = IA = A.$$

Le potenze di I coincidono evidentemente con I.

Per queste proprietà, l'operazione identica o unità verrà rappresentata col simbolo $\mathbf{1}$.

Mantenendo valida la proprietà iterativa, espressa dalla (1), anche nel caso dell'esponente nullo, verrà

$$A^m A^0 = A^0 A^m = A^m;$$

con ciò A^0 non differisce dall'operazione identica, e porremo pertanto

$$A^0 = \mathbf{1}.$$

37. Data un'operazione A, diremo *inversa* di A una operazione A' tale che sia (§§ 30, 36)

$$AA' = \mathbf{1}. \tag{2}$$

Risulta di qui che se A trasforma $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}'$, A' trasforma $\mathcal{S}'$ in $\mathcal{S}$; e se A trasforma $\mathcal{S}$ in sè, lo stesso deve operare A'.

Risulta ancora dalla (2) che, se A' è a determinazione unica,

$$A'AA' = A' \tag{3}$$

e quindi

$$A'A = \mathbf{1};$$

A è dunque l'inversa di A'. Se invece A' è a determinazione multipla, si può dire che una delle determinazione di A' è uguale ad una di quelle di $(A'A)A'$, qualunque sia questa; ed in questo senso (§ 14) si può ritenere valida la (3) anche in tale caso.

38. La (2) si può scrivere ancora (§ 36)

$$AA' = A^0.$$

Convenendo di mantenere valida la legge iterativa anche per gli esponenti interi negativi, siamo condotti a designare col simbolo A^{-1} l'operazione A', inversa di A.

Per la proprietà associativa, si ha pure

$$A^m(A')^m = \mathbf{1},$$

onde $(A')^m$ è l'inversa di A^m. Di più, per la convenzione precedente dell'estensione della validità della (1) al caso di esponenti interi negativi, la $(A')^m$ si potrà indicare con A^{-m}.

39. Siano date due operazioni A, B che trasformino $\mathcal{S}$ in sè, e delle quali la prima ammetta l'inversa A^{-1} a determinazione unica: proponiamoci di determinare un'operazione X tale che sia

$$XA = B.$$

Essendo

$$BA^{-1}A = BI = B,$$

ne viene $X = BA^{-1}$. L'operazione X dicesi *quoziente a destra* di B per A.

Proponiamoci invece di determinare un'operazione Y tale che sia

$$AY = B.$$

Questa operazione sarà data da $Y = A^{-1}B$, perchè

$$AA^{-1}B = IB = B.$$

La Y si dice *quoziente a sinistra* di B per A; in questo caso non è necessaria l'ipotesi che A^{-1} sia a determinazione unica.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè i due quozienti siano uguali, è che A e B siano fra loro commutabili.

40. Date più operazioni A, B, ..., K in numero finito, ogni operazione ottenuta combinando un numero finito di volte queste operazioni per somma, per moltiplicazione per numeri, e per prodotto, si dirà *funzione razionale intera* delle operazioni date.

Così

$$aA^0 + bA + cA^2$$

sarà una funzione razionale intera dell'operazione A;

$$aA^0 + bA + cABA + dA^2BAB + (eA^2 + fA^3)(gB^0 + hB)$$

sarà una funzione razionale intera delle operazioni A e B, ecc.

Combinando le operazioni date, oltrecchè nei modi indicati, anche per quoziente a destra o a sinistra un numero finito di volte, si otterranno *funzioni razionali fratte* delle operazioni date. Così

$$aAB^{-1} + (bBA + cA^2)A^{-1}$$

sarà una funzione razionale fratta di A e B.

41. Abbiasi un sistema di operazioni A, B, C, ..., ciascuna delle quali trasformi $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}'$, $\mathcal{S}'$ in $\mathcal{S}''$, $\mathcal{S}''$ in $\mathcal{S}'''$, ..., gli spazi lineari $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{S}''$, ... essendo distinti o coincidenti. Quando i prodotti delle operazioni del sistema appartengono al sistema stesso, si dice che il sistema *forma un gruppo*.

Come esempio, il sistema

$$A,\ A^2,\ A^3,\ \ldots.$$

delle potenze intere e positive di un'operazione A forma un gruppo.

Come altro esempio, forma pure un gruppo il sistema delle operazioni commutabili con un'operazione data A. Sia infatti B, C, ... questo sistema: se è

$$AB = BA, \quad AC = CA.$$

sarà pure, applicando successivamente la legge associativa,

$$A(BC) = (AB)C = (BA)C = B(AC) = B(CA) = (BC)A,$$

cioè anche BC è commutabile con A.

B. LE OPERAZIONI DISTRIBUTIVE.

42. Dopo di avere date, in ciò che precede, alcune proposizioni sulle operazioni in generale, passiamo ora a studiare quelle, fra le operazioni applicabili agli enti degli spazi lineari, che godono di una speciale proprietà che conferisce loro caratteri di semplicità e di importanza notevolissimi. Questa proprietà viene detta *distributiva;* se α e β sono elementi qualsivogliano dello spazio lineare $\mathcal{S}$, ed A una operazione applicabile a questi enti, si dice che A gode della *proprietà distributiva* quando sia

$$\text{(4)} \qquad A(\alpha + \beta) = A(\alpha) + A(\beta).$$

Risulta da questa che se α, β, γ, ... sono elementi di $\mathcal{S}$, sarà

$$A(\alpha + \beta + \gamma + \ldots.) = A(\alpha) + A(\beta) + A(\gamma) + \ldots.$$

e se n è un numero intero positivo,

$$A(n\alpha) = nA(\alpha);$$

dalla quale ultima risulta subito

$$A\left(\frac{1}{n}\alpha\right) = \frac{1}{n}A(\alpha),$$

e quindi, se c è un numero razionale,

$$\text{(5)} \qquad A(c\alpha) = cA(\alpha).$$

Noi ammetteremo che l'uguaglianza (5) sussista per ogni numero c, reale o complesso, (¹) e:

(¹) L'eguaglianza $A(c\alpha) = cA(\alpha)$, che per c razionale è conseguenza della (4), si potrebbe dedurre dalla (4) per c irrazionale ed anche complesso, ponendo per A delle restrizioni opportune, analoghe alla continuità delle funzioni. Tralasciamo per ora di insistere su ciò; ammetteremo senz'altro che per le operazioni che studieremo sia sempre soddisfatta la (5) insieme alla (4).

Chiameremo operazioni distributive quelle che godono delle proprietà espresse dalle equazioni (4) e (5).

Le operazioni che si considereranno d'ora innanzi in questa opera saranno esclusivamente operazioni distributive.

Come esempio di operazioni distributive già incontrate nei §§ precedenti, citiamo l'operazione identica (§ 25), e l'operazione di moltiplicazione degli elementi di S per un dato numero (§ 5).

43. La somma di due operazioni distributive è pure un'operazione distributiva.

Siano infatti A e B due operazioni distributive che trasformano S in S'. Si ha, per definizione (§ 26):

$$(A + B)(\alpha + \beta) = A(\alpha + \beta) + B(\alpha + \beta);$$

ma

$$A(\alpha + \beta) = A(\alpha) + A(\beta), \quad B(\alpha + \beta) = B(\alpha) + B(\beta),$$

onde

$$(A + B)(\alpha + \beta) = A(\alpha) + A(\beta) + B(\alpha) + B(\beta) = \\ = (A + B)(\alpha) + (A + B)(\beta).$$

Si ha pure:

$$(A + B)(c\alpha) = A(c\alpha) + B(c\alpha) = c(A + B)(\alpha).$$

44. Se A è un'operazione distributiva, è tale anche l'operazione cA.

Essendo poi distributiva l'operazione identica A^0, ne viene che:

Se A è un' operazione distributiva, è tale anche $aA + bA^0$, qualunque siano i numeri a e b.

45. Il prodotto di due operazioni distributive è una operazione distributiva.

Siano A, B due operazioni distributive, che trasformino entrambi lo spazio lineare S in S', e lo spazio lineare S' in S'';

dove non si esclude che questi spazi possano anche coincidere. Poichè si ha

$$AB(\alpha + \beta) = A\big(B(\alpha) + B(\beta)\big) = AB(\alpha) + AB(\beta),$$

ed

$$AB(c\alpha) = A\big(cB(\alpha)\big) = cAB(\alpha),$$

risulta che AB ammette le due proprietà che caratterizzano le operazioni distributive.

Segue da ciò, e dalla definizione del § 41, che:

Le operazioni distributive formano un gruppo.

In particolare, formano un gruppo le operazioni distributive che trasformano in sè uno spazio lineare dato; a questo appartiene l'operazione identica.

46. Sia A un'operazione distributiva, che trasformi in sè stesso lo spazio S. Le potenze

$$A^0(= \mathbf{1}),\ A^1(= A),\ A^2,\ A^3, \dots$$

di A saranno operazioni distributive aventi la stessa proprietà (§ 45), e quindi saranno anche tali le operazioni espresse da

$$c_0A^0 + c_1A + c_2A^2 + \dots + c_mA^m. \tag{6}$$

È chiaro che ogni funzione razionale intera dell'operazione A si riduce, per la proprietà iterativa delle potenze e per le proprietà (4) e (5) cui soddisfa A, alla forma precedente (6), che scriveremo di solito, tralasciando di scrivere i simboli equivalenti di A^0 ed $\mathbf{1}$,

$$c_0 + c_1A + c_2A^2 + \dots + c_mA^m.$$

Una tale espressione si dirà *forma lineare* (a coefficienti numerici) [1] *nell'operazione A*. Il massimo esponente

---

[1] In questo Capitolo, parlando di forme lineari di una o più operazioni, si intenderà sempre « a coefficienti numerici ».

m col quale figura in essa la A, si dice *ordine* della forma. L'operazione $aA + b$, considerata alla fine del § 44, è una forma lineare del primo ordine.

47. Il prodotto di due forme lineari del primo ordine nell'operazione A, ad esempio $a + bA$ ed $a' + b'A$, è dato da

$$(a + bA)(a' + b'A) = a(a' + b'A) + bA(a' + b'A)$$

ed applicando le leggi (4) e (5):

$$(a + bA)(a' + b'A) = aa' + (ab' + ba')A + bb'A^2.$$

Siccome questo risultato è simmetrico nei coefficienti delle due forme, ne segue intanto che le due forme considerate sono operazioni commutabili.

Applicando più generalmente le medesime leggi alle due forme lineari in A, degli ordini rispettivi m ed n:

$$F = a_0 + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_mA^m$$
$$F_1 = b_0 + b_1A + b_2A^2 + \dots + b_nA^n,$$

troviamo che il loro prodotto sarà dato da

$$FF_1 = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)A + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)A^2 + \\ + \dots + a_mb_nA^{m+n}.$$

Da questo risultato, possiamo trarre le seguenti conclusioni:

a) Il prodotto di più forme lineari in A, dove A è un'operazione distributiva, si forma colle stesse regole del prodotto di più polinomi ordinati secondo le potenze di una lettera x.

b) Se le forme date sono degli ordini rispettivi m, n, p, ..., il prodotto è dell'ordine $m + n + p + \dots$

c) Le forme lineari in A sono operazioni fra loro commutabili.

d) Il sistema delle forme lineari in A forma un gruppo.

48. Per la osservazione che il prodotto delle forme lineari in A è soggetto alle medesime regole della ordinaria moltiplicazione di polinomi ordinati secondo le potenze di una lettera ordinatrice (fatta eccezione per la legge di annullamento del prodotto) noi potremo estendere ai prodotti di forme le proprietà che si deducono, nel calcolo letterale, per la detta moltiplicazione dei polinomi ordinati. In particolare: Ogni forma di ordine m:

$$F = a_0 + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_mA^m \tag{7}$$

si può esprimere come prodotto di m forme di prim'ordine

$$F = a_m(A - c_1)^{r_1}(A - c_2)^{r_2} \dots (A - c_s)^{r_s},$$
$$(r_1 + r_2 + \dots + r_s = m).$$

Basta infatti sostituire, nell'espressione (7), al simbolo operativo A e alle sue potenze, una indeterminata x e le rispettive potenze: per la nota scomposizione in fattori del polinomio razionale intero in x, quale è insegnata dall'Algebra, si avrà:

$$a_0 + a_1x + \dots a_mx^m = a_m(x - c_1)^{r_1}(x - c_2)^{r_2} \dots (x - c_s)^{r_s};$$

ora, sostituendo nel secondo membro ad x il simbolo d'operazione A, ed eseguendo il prodotto secondo le leggi (4) e (5) e le loro conseguenze, si ricade sull'espressione (7) di F.

Così, ad esempio, si avrà:

$$A^0 + A^2 = (A^0 + iA)(A^0 - iA).$$

CAPITOLO TERZO.

Radici e spazî di radici di un' operazione distributiva.

A. PRIME PROPRIETÀ DELLE RADICI.

49. Abbiasi l'operazione distributiva univoca che faccia corrispondere allo spazio lineare $\mathfrak{S}$ lo spazio $\mathfrak{S}'$; siano poi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, n elementi linearmente indipendenti in $\mathfrak{S}$, e siano $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ gli elementi che ad essi corrispondono in $\mathfrak{S}'$ mediante A, in guisa che

$$A(\alpha_1) = \beta_1,\ A(\alpha_2) = \beta_2,\ \ldots,\ A(\alpha_n) = \beta_n.$$

Per le proprietà delle operazioni distributive, sarà

$$A(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_n\alpha_n) = c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \ldots + c_n\beta_n.$$

Allo spazio ad n dimensioni $\mathfrak{S}_n\ [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$ la A fa dunque corrispondere lo spazio degli elementi rappresentati da

$$(1) \qquad c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \ldots + c_n\beta_n,$$

i numeri $c_1, c_2, \ldots, c_n$ potendo assumere valori arbitrari.

Qui si possono presentare due casi:

a) Gli elementi $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ sono linearmente indipendenti. Allora allo spazio ad n dimensioni $\mathfrak{S}_n\ [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$ corrisponde lo spazio ad n dimensioni $\mathfrak{S}_n'[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]$; non esiste in $\mathfrak{S}_n$ un elemento ω differente da zero e tale che sia

$A(\omega) = o$. L'operazione A si dice in tale caso *senza radici* in $\mathfrak{S}_n$, o *non degenere* in $\mathfrak{S}_n$.

b) Fra gli elementi $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ passano r relazioni lineari distinte, e non più $(r < n)$ (§ 6). Allora nello spazio (1) vi sono $n - r$ elementi linearmente indipendenti, e non più; lo spazio (1) è ad $n - r$ dimensioni. In questo secondo caso l'operazione A si dice *degenere*.

In ogni caso, resta dimostrato che:

Un' operazione distributiva univoca fa corrispondere ad uno spazio lineare ad n dimensioni, uno spazio lineare ad n' dimensioni $(n' \leq n)$.

50. Nel caso *b*) del § precedente esistono r sistemi linearmente indipendenti di numeri $h_1, h_2, \ldots, h_n$, tali che

$$h_1\beta_1 + h_2\beta_2 + \ldots + h_n\beta_n = o;$$

è quindi:

$$A(h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 + \ldots + h_n\alpha_n) = o.$$

Esistono dunque in $\mathfrak{S}_n$ r elementi linearmente indipendenti, e non più, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$, ai quali la A fa corrispondere lo zero in $\mathfrak{S}'$. Questi elementi si diranno *radici* di A, e l'operazione A si dirà *degenere di specie* r in $\mathfrak{S}_n$.

Se ω è radice di A, anche $c\omega$ sarà radice, qualunque sia il numero c; le radici di un'operazione costituiscono dunque almeno uno spazio ad una dimensione. Se $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ sono r radici di A linearmente indipendenti, tutti gli elementi dello spazio $\mathfrak{S}_r\ [\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r]$ saranno radici di A, e lo spazio stesso si dirà *spazio di radici* di A.

È importante di notare che quando l'operazione A è degenere di specie r in $\mathfrak{S}_n$, si presentano i due fatti concomitanti:

a) esiste in $\mathfrak{S}_n$ uno spazio di radici ad r dimensioni;

b) ad $\mathfrak{S}_n$ corrisponde in $\mathfrak{S}'$ uno spazio ad $n - r$ dimensioni.

51. Lo zero è radice di qualsivoglia operazione distributiva univoca. Se fosse infatti corrispondente dello zero un elemento non nullo λ, cioè se fosse $A(o) = \lambda$, si avrebbe, essendo β l'elemento di S' che corrisponde ad un elemento α di S,

$$A(\alpha) = A(\alpha + o) = A(\alpha) + A(o) = \beta + \lambda;$$

e quindi $A(\alpha)$ ammetterebbe le due determinazioni β e $\beta + \lambda$, cioè non sarebbe univoca.

Onde:

Ogni spazio di radici di un'operazione distributiva univoca contiene lo zero. [1]

52. Data un'operazione distributiva univoca A che trasformi S in S', l'inversa (§ 37) A^{-1} di A trasformerà S' in S. Se ora ω è radice di A ed $A(\alpha) = \beta$, avremo qualunque sia c:

$$A(\alpha + c\omega) = \beta,$$

onde A^{-1} fa corrispondere a β tutti gli elementi rappresentati da $\alpha + c\omega$, per ogni valore di c.

Se dunque A è degenere, A^{-1} è a determinazione multipla.

Reciprocamente, se A non è degenere, A^{-1} è univoca. Se infatti non fosse tale e facesse corrispondere ad un medesimo elemento β di S' due elementi α_1 ed α_2 di S, $\alpha_1 - \alpha_2$ sarebbe radice di A.

Onde, concludendo:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè l'inversa di un'operazione A distributiva univoca sia essa pure univoca, è che A non sia degenere.

[1] Quando, in ciò che segue, si dirà che ω è radice di un'operazione, s'intenderà che ω non sia lo zero.

53. Sia data un'operazione K che trasformi lo spazio S in S', e sia in S a determinazione multipla. Per il § precedente, K^{-1} ammetterà necessariamente radici in S'. Se ora S' non è interamente spazio di radici di K^{-1}, accadrà talvolta che si possa sopprimere da S' lo spazio di radici di K^{-1}, in modo che rimanga dopo ciò uno spazio lineare S''. In S'' la K^{-1} non è più degenere, onde ad S' apparterrà uno solo degli elementi che la K fa corrispondere ad un elemento di S. In questo modo, la K si è resa a determinazione unica, in quanto fa corrispondere S'' ad S.

Questa osservazione, che mostra la possibilità di rendere univoche, mediante una limitazione opportuna dello spazio su cui operano, le operazioni date a determinazione multipla, tornerà utile nelle applicazioni della teoria delle operazioni distributive.

54. Siano A, B due operazioni univoche e degeneri. Il prodotto AB è evidentemente univoco; di più esso è degenere, poichè $A(o)$ non può ammettere altra determinazione che lo zero (§ 51), e quindi ogni radice di B è radice del prodotto AB. Per altro la reciproca non è vera. Inoltre, non è in generale radice del prodotto AB ogni radice di A. [1]

55. Sia ω una radice dell'operazione univoca A che trasforma S in sè stesso. La ω sarà radice di A^2 (§ prec.), ma

[1] Vediamo così che il noto teorema, il quale vale in Analisi per il prodotto di due o più funzioni, che, cioè, « in un intervallo in cui le funzioni sono finite, radici del prodotto sono quei numeri e quelli soli che annullano uno dei fattori », non si estende in generale ai prodotti di operazioni distributive. Vale invece l'analogo dell'altro teorema, che un « prodotto di funzioni è identicamente nullo se è identicamente nullo uno dei fattori ». Se infatti indichiamo con O l'operazione nulla (§ 25), è chiaro che se è uguale ad O sia la A, sia la B, sarà uguale ad O anche il prodotto AB. Non si può però asserire in modo generale che « condizione necessaria a che sia uguale ad O il prodotto AB, è che sia tale od A o B ».

potrà accadere che A^2 ammetta radici che non siano radici di A. Così, se m è un numero intero positivo qualsivoglia, tutte le radici di $A, A^2, \dots, A^{m-1}$ saranno radici di A^m; ma A^m può ammettere radici che non siano radici di A^{m-1}.

Si dirà *radice propria* di A^m una radice di A^m che non è radice di A^{m-1}; una radice di A^r $(r < m)$ si dirà *radice impropria* di A^m.

56. Indicando con $\omega^{(m-1)}$ una radice propria di A^m, si deduce dall'uguaglianza (§ 34)

$$A^m(\omega^{(m-1)}) = A^{m-1}A(\omega^{(m-1)}) = o$$

che $A(\omega^{(m-1)})$ è radice di A^{m-1}, ed inoltre è radice propria; infatti se fosse radice impropria, $\omega^{(m-1)}$ annullerebbe una potenza di A inferiore alla m^a, contro l'ipotesi. Scrivendo:

$$A(\omega^{(m-1)}) = \omega^{(m-2)},$$

si vede similmente che $A(\omega^{(m-2)})$ è radice propria di A^{m-2}; posto

$$A(\omega^{(m-2)}) = \omega^{(m-3)}$$

$A(\omega^{(m-3)})$ è radice propria di A^{m-3}, e così via.

57. Siano $\omega_1^{(m-1)}, \omega_2^{(m-1)}, \dots, \omega_n^{(m-1)}$ radici proprie, indipendenti linearmente, di A^m. Esse definiscono uno spazio di radici (§ 50) di A^m. Non accadrà però necessariamente che ogni elemento di questo spazio sia radice propria di A^m. Ad esempio, se $\omega^{(m-1)}$ è radice propria ed ω' è radice impropria di A^m, gli elementi linearmente indipendenti $\omega^{(m-1)}$ ed $\omega^{(m-1)} + \omega'$ saranno entrambi radici proprie di A^m, ma allo spazio $S_2[\omega^{(m-1)}, \omega^{(m-1)} + \omega']$ apparterrà la radice impropria ω'.

Uno spazio di radici $S_r[\omega_1^{(m-1)}, \omega_2^{(m-1)}, \dots, \omega_r^{(m-1)}]$ tale che non contenga alcuna radice impropria di A^m, si dirà *spazio di radici proprie* di A^m.

Dalla proposizione del § 56 segue che se S_r è spazio di radici proprie di A^m, lo spazio in cui S_r è trasformato da A è spazio di radici proprie di A^{m-1}.

58. Diremo che un elemento α è *invariante* per un'operazione A, a determinazione unica, che trasforma S in sè, quando si abbia

$$A(\alpha) = k\alpha,$$

essendo k un numero (*moltiplicatore*) determinato.

Se α è invariante per A, anche $c\alpha$ è tale, qualunque sia il numero c; gli elementi invarianti per un'operazione costituiscono adunque, quando esistono, almeno uno spazio ad una dimensione.

È chiaro che l'elemento α è radice della forma lineare di prim'ordine in A (§ 46):

$$A - kA^o,$$

e reciprocamente, ogni radice di una forma a coefficienti numerici di prim'ordine in A è invariante per A.

59. Se gli elementi linearmente indipendenti α_1, α_2 sono invarianti per A, ed è

$$A(\alpha_1) = k_1\alpha_1, \quad A(\alpha_2) = k_2\alpha_2,$$

ogni elemento dello spazio S_2 $[\alpha_1,\alpha_2]$ sarà invariante per A, se $k_1 = k_2$. Se invece è $k_1 \neq k_2$, si avrà

$$A(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2) = c_1k_1\alpha_1 + c_2k_2\alpha_2,$$

cioè la A trasforma in sè l'insieme S_2. Perchè un elemento di questo insieme sia invariante dovrà essere

$$k(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2) = c_1k_1\alpha_1 + c_2k_2\alpha_2,$$

onde $c_1 = o$ o $c_2 = o$; soli elementi invarianti sono dunque quelli della forma $c_1\alpha_1$ e $c_2\alpha_2$.

Diremo *spazio invariante* per un' operazione A, uno spazio trasformato in sè da quella operazione.

Potremo dunque dire che S_2 è spazio invariante per A; $c_1\alpha_1$ e $c_2\alpha_2$ sono elementi invarianti in questo spazio, e se $k_1 = k_2$, lo spazio S_2 è formato da soli elementi invarianti.

Più generalmente, siano $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ elementi linearmente indipendenti, ed invarianti per A. Lo spazio $S_r[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r]$ sarà trasformato in sè da A, e sarà quindi uno spazio invariante per A.

Lo spazio S_r sarà formato da soli elementi invarianti, nel caso in cui, posto $A(\alpha_i) = k_i\alpha_i$, $(i = 1, 2, \ldots, r)$, tutti i moltiplicatori k_i siano uguali fra loro.

B. PROPRIETÀ DELLE RADICI DI OPERAZIONI COMMUTABILI.

60. Se A e B sono due operazioni distributive univoche, commutabili e senza radici comuni ed α è radice di A, anche $B(\alpha)$ è radice di A.

Infatti, poichè $B(o) = o$ (§ 51), sarà $BA(\alpha) = o$. Ma $BA = AB$, onde $A\big(B(\alpha)\big) = o$.

61. Essendo A e B due operazioni soggette alle medesime ipotesi del § precedente, se S_n è uno spazio di radici di A, anche lo spazio S'_n trasformato di S_n mediante B, è spazio di radici di A.

Ciò risulta immediatamente dal § precedente. Inoltre, poichè A e B non hanno, per ipotesi, radici comuni, lo spazio di radici nuovo sarà, come il primo, ad n dimensioni.

Se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sono elementi di S_n formanti un sistema fondamentale, gli elementi

$$B(\alpha_1),\ B(\alpha_2),\ \ldots,\ B(\alpha_n)$$

formeranno un sistema fondamentale di S'_n. Se infatti fra questi passasse una relazione lineare

$$a_1B(\alpha_1) + a_2B(\alpha_2) + \ldots + a_nB(\alpha_n) = o,$$

ne risulterebbe

$$B(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n) = o,$$

il che non può essere, perchè A e B non hanno radici comuni, e perchè $a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n$ non è zero.

62. Nello spazio lineare S l' operazione A abbia per radici tutti e soli gli elementi di $S_n[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$. Dal § precedente, risulta immediatamente che S_n è spazio invariante per l' operazione B. Posto allora

$$\alpha'_i = B(\alpha_i),$$

poichè gli $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n$ sono linearmente indipendenti (§ prec.), ogni elemento $\overline{\alpha}$ di S_n si potrà scrivere

$$\overline{\alpha} = a_1\alpha'_1 + a_2\alpha'_2 + \ldots + a_n\alpha_n',$$

ossia

$$\overline{\alpha} = B(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n).$$

Dunque:

Ferme per A e B le ipotesi del § 60, se S_n contiene tutte e sole le radici di A, esiste sempre in S_n un elemento α, ed uno solo, tale da soddisfare all' equazione

$$B(\alpha) = \overline{\alpha},$$

qualunque sia l'elemento $\overline{\alpha}$ di S_n.

63. Siano A , B due operazioni distributive univoche, commutabili, senza radici comuni. Se S_m, S_n sono i rispettivi spazî di radici, l'operazione AB sarà degenere di specie $m + n$ (§ 50) ed avrà per spazio di radici lo spazio $\mathcal{S}_{m+n}$, somma (§ 21) degli spazi $\mathcal{S}_m$ ed $\mathcal{S}_n$.

Essendo infatti $\mathcal{S}_m\,[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m]$ ed $\mathcal{S}_n\,[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]$ rispettivamente gli spazî di radici di A e B, entrambi contenuti nello spazio lineare $\mathcal{S}$ trasformato in sè da A e B, potremo scegliere a sistema fondamentale dello spazio $\mathcal{S}_{m+n}$ il sistema di $m+n$ elementi linearmente indipendenti

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n.$$

Con ciò, ogni elemento γ di $\mathcal{S}_{m+n}$ si può riguardare come somma di un elemento α di $\mathcal{S}_m$ e di un elemento β di $\mathcal{S}_n$. Avremo quindi:

$$\mathrm{AB}(\gamma) = \mathrm{AB}(\alpha + \beta) = \mathrm{AB}(\alpha) + \mathrm{AB}(\beta) = o:$$

cioè ogni elemento di $\mathcal{S}_{m+n}$ è radice di AB.

Reciprocamente, ogni radice di AB appartiene ad $\mathcal{S}_{m+n}$.

Sia infatti γ tale che $\mathrm{AB}(\gamma) = o$. Se γ è radice di B, essa appartiene ad $\mathcal{S}_m$ e quindi ad $\mathcal{S}_{m+n}$; in caso contrario $\mathrm{B}(\gamma)$ sarà radice di A ed apparterrà quindi ad $\mathcal{S}_m$. Scegliamo allora come sistema fondamentale di $\mathcal{S}_m$, gli m elementi linearmente indipendenti (§ 61)

$$\alpha'_1 = \mathrm{B}(\alpha_1), \alpha'_2 = \mathrm{B}(\alpha_2), \ldots, \alpha'_m = \mathrm{B}(\alpha_m);$$

si potrà porre

$$\mathrm{B}(\gamma) = a_1\alpha'_1 + a_2\alpha'_2 + \ldots + a_m\alpha'_m,$$

ossia

$$\mathrm{B}(\gamma) = \mathrm{B}(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_m\alpha_m).$$

Donde risulta

$$\gamma = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_m\alpha_m + \bar{\beta},$$

essendo $\bar{\beta}$ una radice di B; si vede quindi che γ appartiene ad $\mathcal{S}_{m+n}$.

Il teorema che forma l'oggetto del presente § si estende subito al prodotto di quante si vogliano operazioni distributive univoche, commutabili, degeneri di specie finita, e senza radici comuni.

64. Venendo ad un caso più generale, siano A, B due operazioni distributive univoche, degeneri in $\mathcal{S}$, cogli spazî di radici rispettivi $\mathcal{S}_m$ ed $\mathcal{S}_n$; ma questi abbiano in comune un insieme $\mathcal{S}_r$. In tale caso:

Il prodotto AB è degenere in $\mathcal{S}$ dell'ordine $m+n$ al più; ha come spazio di radici lo spazio $\mathcal{S}_{m+n-r}$, somma (§ 21, *b*) di $\mathcal{S}_m$ ed $\mathcal{S}_n$, e fuori di questo ha al più r radici linearmente indipendenti.

Sia infatti $\mathcal{S}_r\,[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r]$ lo spazio avente il numero massimo di dimensioni, contenuto ad un tempo in $\mathcal{S}_m$ ed $\mathcal{S}_n$; assumendo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ a far parte di un sistema fondamentale tanto in $\mathcal{S}_m$ che in $\mathcal{S}_n$, avremo:

$$\mathcal{S}_m[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_m],$$

ed

$$\mathcal{S}_n[\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2, \ldots, \beta_r = \alpha_r, \beta_{r+1}, \ldots, \beta_n].$$

Gli elementi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_m, \beta_{r+1}, \ldots, \beta_n$, i quali, come è chiaro, sono indipendenti linearmente, costituiranno il sistema fondamentale di un $\mathcal{S}_{m+n-r}$. È evidente che ogni elemento γ di questo spazio è radice di AB; inoltre supponiamo, se è possibile, che in $\mathcal{S}$, fuori di $\mathcal{S}_{m+n-r}$, esistano $r+1$ radici di AB linearmente indipendenti

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, \mu.$$

Dovendo essere

$$\mathrm{AB}(\lambda_1) = o, \ldots, \mathrm{AB}(\lambda_r) = o, \mathrm{AB}(\mu) = o,$$

e gli elementi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, \mu$ non appartenendo ad S_{m+n-r} e quindi neppure ad S_n, avremo che

$$B(\lambda_1) = \alpha'_1, \; B(\lambda_2) = \alpha'_2, \ldots, B(\lambda_r) = \alpha'_r, \; B(\mu) = \alpha'$$

sono radici di A. Esse sono di più linearmente indipendenti, perchè se per certi valori numerici $h_1, h_2, \ldots, h_r, h$ fosse

$$h_1 B(\lambda_1) + h_2 B(\lambda_2) + \ldots + h_r B(\lambda_r) + h B(\mu) = o,$$

ne verrebbe

$$B(h_1\lambda_1 + h_2\lambda_2 + \ldots + h_r\lambda_r + h\mu) = o,$$

ossia, per l'indipendenza lineare di $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \mu$, l'elemento $h_1\lambda_1 + h_2\lambda_2 + \ldots + h\mu$ sarebbe radice di B, mentre per ipotesi esso non appartiene ad S_{m+n-r} e quindi nemmeno ad S_n.

Infine si ha (§ 61) che

$$B(\alpha_{r+1}) = \alpha'_{r+1}, \; B(\alpha_{r+2}) = \alpha'_{r+2}, \ldots, B(\alpha_m) = \alpha'_m$$

sono radici linearmente indipendenti di A.

Ciò posto, le radici di A:

$$\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_r, \alpha', \alpha'_{r+1}, \alpha'_{r+2}, \ldots, \alpha'_m$$

sono in numero di $m + 1$, mentre A non ammette in S se non uno spazio di radici ad m dimensioni; esse sono pertanto legate da una certa relazione lineare

$$a_1\alpha'_1 + a_2\alpha'_2 + \ldots + a_r\alpha'_r +$$
$$+ a\alpha' + a_{r+1}\alpha_{r+1} + \ldots + a_m\alpha'_m = o,$$

che si può anche scrivere:

$$B(a_1\lambda_1 + \ldots + a_r\lambda_r + a\mu + a_{r+1}\alpha_{r+1} + \ldots + a_m\alpha_m) = o.$$

Sotto questa forma, viene espresso che l'elemento su cui porta B o è nullo, o è radice di B. Nell'uno e nell'altro caso, resta dimostrato che gli $r + 1$ elementi $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \mu$ sono legati linearmente ad un elemento di S_{m+n-r}. In altri termini, non possono esistere in S, al di fuori di S_{m+n-r}, più di r radici di AB linearmente indipendenti.

Il teorema precedente si estende facilmente al prodotto di quante si vogliono operazioni. Abbiansi ad esempio le operazioni $A_1, A_2, \ldots, A_r$ univoche, commutabili e che trasformano S in sè. Esse ammettano rispettivamente gli spazî di radici $S_{n_1}, S_{n_2}, \ldots, S_{n_r}$, e sia $S_n (n \leq n_1 + n_2 + \ldots + n_r)$ lo spazio comune avente il massimo numero di dimensioni. Applicando ripetutamente il teorema del § precedente si conclude che:

I l   p r o d o t t o $A_1 A_2 \ldots A_r$ h a   c o m e   r a d i c e   o g n i   e l e m e n t o   d i S_n,   e   f u o r i   d i   q u e s t o   h a   a l   p i ù $n_1 + n_2 + \ldots + n_r - n$ r a d i c i   l i n e a r m e n t e   i n d i p e n d e n t i.

65. Sappiamo che, essendo A un'operazione che trasforma S in sè, le potenze di A sono fra loro commutabili. Se dunque A ammette in S uno spazio di radici ad m dimensioni, per il teorema precedente:

A^r a m m e t t e r à   i n S u n o   s p a z i o   d i   r a d i c i   a d mr d i m e n s i o n i   a l   p i ù.

In particolare, se A ammette in S una sola radice (all'infuori del moltiplicatore arbitrario), A^r avrà in S uno spazio di radici ad r dimensioni al più.

66. Abbiasi un'operazione A [1] univoca, che trasformi in sè lo spazio S ed ammetta in S la sola radice α_0. Lo spazio di radici di A è dunque l'S_1 che si ottiene da $c\alpha_0$

[1] Avvertiamo ancora una volta che si intende sempre parlare di operazioni *distributive*. Questa denominazione si ometterà quindi innanzi.

dando a c tutti i valori possibili. Ciò posto, si abbia in $\mathfrak{S}$ una successione di elementi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, tali che sia

$$(2) \quad A(\alpha_1) = \alpha_0,\ A(\alpha_2) = \alpha_1, \ldots, A(\alpha_n) = \alpha_{n-1}, \ldots.$$

Anzitutto $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ saranno radici di A^n; α_{n-1} sarà radice propria (§ 55) di A^n; la radice più generale di A^n avrà la forma

$$c_0\alpha_0 + c_1\alpha_1 + \ldots + c_{n-1}\alpha_{n-1}.$$

Gli elementi $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ sono fra loro linearmente indipendenti; ciò risulta subito dalle posizioni (2).

Sia ora B un'operazione commutabile con A, univoca, senza radici comuni con A. Anche $B(\alpha_0)$ sarà radice di A (§ 60), onde dovrà essere

$$B(\alpha_0) = k_0\alpha_0,$$

dove k_0 è un numero determinato. Per la medesima ragione, $B(\alpha_1)$ sarà radice di A^2, onde

$$B(\alpha_1) = k_1\alpha_0 + c_2\alpha_1,$$

ed applicando l'operazione A ad ambi i membri di questa uguaglianza, otteniamo

$$k_0\alpha_0 = c_2\alpha_0,$$

cioè

$$c_2 = k_0.$$

Sarà quindi

$$B(\alpha_1) = k_1\alpha_0 + k_0\alpha_1.$$

Analogamente $B(\alpha_2)$ è radice di A^3 e si trova

$$B(\alpha_2) = k_2\alpha_0 + k_1\alpha_1 + k_0\alpha_2,$$

e in generale

$$(3) \quad B(\alpha_n) = k_n\alpha_0 + k_{n-1}\alpha_1 + \ldots + k_1\alpha_{n-1} + k_0\alpha_n.$$

Data, dunque, la successione (2) e la operazione B, esiste un sistema perfettamente determinato di coefficienti $k_0, k_1, \ldots, k_n, \ldots$, diversi da zero, per mezzo dei quali si costruisce il sistema delle uguaglianze (3).

67. Si abbia ancora l'operazione A, la quale ammetta in $\mathfrak{S}$ la sola radice α_0 (all'infuori del moltiplicatore arbitrario) e sia B un'operazione, pure univoca, che trasformi $\mathfrak{S}$ in sè stesso ed abbia la medesima radice di A.

È allora possibile determinare una operazione X univoca in $\mathfrak{S}$ e tale che sia

$$B = XA.$$

Infatti sia η un elemento di $\mathfrak{S}$: avremo, indicando con β e γ due elementi ben determinati del medesimo insieme:

$$A(\eta) = \beta,\ B(\eta) = \gamma.$$

L'operazione X è quella che applicata a β dà γ. Poichè A e B sono distributive, avremo che l'operazione X, applicata a $\beta_1 + \beta_2$ dà come risultato $\gamma_1 + \gamma_2$, ed è perciò essa stessa distributiva. Inoltre essa è univoca. Supponiamo infatti che a β corrispondano i due elementi γ e γ'; avremo due elementi η ed η', tali che

$$A(\eta) = A(\eta') = \beta,$$

mentre

$$B(\eta) = \gamma,\ B(\eta') = \gamma'.$$

Si deduce da queste uguaglianze

$$\eta' = \eta + \alpha,$$

dove α è radice di A; essa è quindi, per ipotesi, radice anche di B: ne risulta

$$B(\eta) = B(\eta')$$

e quindi γ non differisce da γ'.

La proposizione precedente vale per due qualsivogliano operazioni distributive, univoche, A e B.

Se A e B si suppongono commutabili, sono pure commutabili A ed X.

Infatti, ritenendo le stesse notazioni, si consideri β come elemento dato: ne verrà

$$AX(\beta) = A(\gamma) = AB(\eta):$$

ma A è commutabile con B: onde

$$AX(\beta) = BA(\eta) = B(\beta),$$

cioè

$$B = AX.$$

68. Riprendiamo due operazioni A e B, soddisfacenti alle condizioni fissate al §. 67. Allora, corrispondentemente agli elementi $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, tali che

$$A(\alpha_0) = o,\ A(\alpha_1) = \alpha_0,\ A(\alpha_2) = \alpha_1, \ldots, A(\alpha_n) = \alpha_{n-1}, \ldots,$$

esistono i numeri $k_0, k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$, per i quali valgono le uguaglianze (3).

Come si è visto, l'operazione $B - k_0$ ammette la radice α_0; essa si trova quindi nelle condizioni del § precedente, di essere cioè univoca, commutabile con A, e di avere le sue radici comuni con A. Pertanto esisterà una operazione distributiva, univoca B_1 tale che, per qualsivoglia elemento η di $\mathfrak{S}$, sia

$$B(\eta) - k_0\eta = B_1A(\eta) = AB_1(\eta). \tag{4}$$

Ponendo in questa uguaglianza $\eta = \alpha_1$, otteniamo

$$B_1(\alpha_0) = k_1\alpha_0,$$

cosicchè l'operazione $B_1 - k_1$ ammetterà la radice α_0; esisterà allora, pel § precedente, una operazione distributiva, univoca B_2, tale che

$$B_1(\eta) - k_1\eta = B_2A(\eta) = AB_2(\eta):$$

di qui risulta, sostituendo in (4)

$$B(\eta) = k_0\eta + k_1A(\eta) + B_2A^2(\eta).$$

Analogamente, sostituendo in quest' ultima uguaglianza α_2 ad η, otteniamo

$$B_2(\alpha_0) = k_2\alpha_0,$$

onde risulta che $B_2 - k_2$ ammette la radice α_0, e così via. Così proseguendo, giungeremo all' uguaglianza:

$$B = k_0 + k_1A + k_2A^2 + \ldots + k_{n-1}A^{n-1} + B_nA^n, \tag{5}$$

dove B_n è una operazione distributiva, univoca, commutabile con A e quindi con A^n.

69. Quando un' operazione B, commutabile con A, è esprimibile mediante la formula (5), diremo che B è *regolare* rispetto ad A.

Nella uguaglianza (5) non è escluso che il numero intero positivo n si possa prendere arbitrariamente grande; questo noi intenderemo, scrivendo *formalmente*

$$B = k_0 + k_1A + k_2A^2 + \ldots + k_nA^n + \ldots.$$

Diremo allora che l' espressione che figura al secondo membro è una *serie* procedente per le potenze intere e positive della operazione A o, più semplicemente, una *serie di potenze di* A. La considerazione di simili serie ha, per adesso, un significato puramente formale; e solo più avanti (Cap. VI) vedremo come tale scrittura abbia anche un significato effettivo.

70. L'operazione identica **1** è commutabile con ogni altra (§ 36); essa sarà pure regolare rispetto ad ogni operazione A, potendosi scrivere

$$\mathbf{1} = A^0;$$

si vede così che per essa il primo coefficiente k_0 è uguale ad uno e tutti i coefficienti seguenti sono nulli.

71. Data l'operazione B commutabile con A e *regolare* rispetto ad A, si può chiedere se sarà tale anche l'operazione B^{-1}, *inversa* di B. Ciò equivale a cercare uno sviluppo della forma (5)

$$c_0 + c_1 A + c_2 A^2 + \dots$$

procedente per le potenze di A, tale che, applicatavi l'operazione B, si ottenga per risultato l'*operazione identica*.

Essendo

$$B = k_0 + k_1 A + k_2 A^2 + \dots + k_m A^m + \dots,$$

e ricordando che per le nostre operazioni commutabili valgono le leggi formali della moltiplicazione, vediamo che dovrà sussistere l'uguaglianza

$$c_0 k_0 + (c_1 k_0 + c_0 k_1) A + (c_2 k_0 + c_1 k_1 + c_0 k_2) A^2 + \dots = \mathbf{1}.$$

A questa uguaglianza soddisfaremo (§ 70) certamente (non si può dire, per altro, esclusivamente) ponendo

$$(6) \qquad c_0 k_0 = 1, \; c_1 k_0 + c_1 k_0 = 0, \; c_2 k_0 + c_1 k_1 + c_0 k_2 = 0, \; \dots$$

Quando k_0 è differente da zero, queste equazioni ci permetteranno di determinare in modo ricorrente i coefficienti $c_0, c_1, c_2, \dots$ dello sviluppo cercato [1].

[1] Questi coefficienti sono evidentemente anche quegli stessi dello sviluppo in serie di potenze di z del quoziente $\dfrac{1}{k_0 + k_1 z + k_2 z^2 + \dots}$.

Se, dunque, B è un'operazione commutabile con A, *regolare* rispetto ad A, col coefficiente di A^0 diverso da zero, si può assegnare, almeno formalmente, una serie di potenze di A, la quale rappresenta l'operazione B^{-1}.

72. Le relazioni (6) contengono al primo membro un numero sempre crescente di termini; ma se l'operazione B è una forma lineare in A d'ordine n

$$B = k_0 + k_1 A + k_1 A^2 + \dots + k_n A^n,$$

è chiaro che dalla $(n+1)^{ma}$ in poi le relazioni del sistema (6) contengono tutte uno stesso numero di termini, e ne contengono precisamente $n + 1$.

La relazione (6) più generale sarà pertanto la *scala di relazione* di una serie ricorrente elementare; inversamente, è facile dedurre di qui che ogni serie di tal natura rappresenta in generale lo sviluppo di una operazione CB^{-1}, dove C e B sono due forme lineari in A.

L'esempio più semplice di simili serie ricorrenti è dato dalla inversa della forma di primo ordine $E_a = A - a$, per la quale avremo

$$(7) \qquad E_a^{-1} = -\frac{1}{a} - \frac{A}{a^2} - \frac{A^2}{a^3} - \dots - \frac{A^n}{a^{n+1}} - \dots.$$

Analogamente per $E_a{}^{-m}$ avremo

$$(8) \qquad E_a^{-m} = \frac{(-1)^m}{a^m}\left(1 + m\frac{A}{a} + \frac{m(m+1)}{1.2}\frac{A^2}{a^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}\frac{A^3}{a^3} + \dots\right) =$$
$$= \frac{(-1)^m}{a^m}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n-1}{n}\frac{A^n}{a^n}.$$

73. Siano infine B e C due forme lineari in A a coefficienti numerici e supponiamo che C sia d'ordine n, B d'ordine non superiore. Decomponendo la C nei suoi fattori lineari, otterremo:

$$C = \left(A - c_1\right)^{r_1}\left(A - c_2\right)^{r_2}\cdots\left(A - c_q\right)^{r_q} =$$
$$= E_{c_1}^{r_1} E_{c_2}^{r_2} \ldots E_{c_q}^{r_q}.$$

Un calcolo semplice e ben noto (¹) ci condurrà a dare di BC^{-1} l'espressione:

$$(5)\quad BC^{-1} = \sum_{i=1}^{q}\left(a_{i1}E_{c_i}^{-1} + a_{i2}\,E_{c_i}^{-2} + \ldots + a_{ir_i}\,E_{c_i}^{-r_i}\right).$$

dove le a_{ij} ci rappresentano valori numerici determinati.

74. Quando un'operazione B commutabile con A non è regolare, diremo che essa è *singolare rispetto ad* A.

Supponiamo che A ammetta in uno spazio $\mathfrak{S}$ una sola radice α (all'infuori del moltiplicatore arbitrario). In tal caso: è impossibile che una B, singolare rispetto ad A, sia univoca.

Si ha infatti:

$$AB(\alpha) = BA(\alpha) = B(o).$$

Se ora $B(o)$ è uguale a zero, ne risulta l'esistenza di un valore determinato k_o, tale che

$$B(\alpha) = k_o\alpha.$$

onde, applicando il procedimento del § 68, B risulterebbe, contro l'ipotesi, regolare rispetto ad A. Per ciò si conclude

(¹) Occorre appena avvertire che il calcolo, cui qui si allude, è quello stesso che in Algebra conduce alla decomposizione di una funzione razionale fratta in funzioni fratte semplici.

che $B(o)$ è diverso da zero; da cui segue (§ 68) che la B non è univoca in $\mathfrak{S}$.

75. Come esempi semplicissimi di operazioni *singolari* rispetto ad A abbiamo in generale le A^{-1} e A^{-m}: è tale anche, in generale, la C^{-1} se è $C = AB$, dove B indica un'operazione regolare rispetto ad A.

L'operazione BC^{-1} dove

$$C = E_{c_1}^{r_1} E_{c_2}^{r_2} \ldots E_{c_q}^{r_q}$$

è, in generale, singolare rispetto a ciascuna delle operazioni $E_{c_1}, E_{c_2}, \ldots, E_{c_q}$; queste singolarità sono poste in evidenza e, per così dire, isolate nell'espressione di BC^{-1} data dalla (5) del § 73.

CAPITOLO QUARTO.

Struttura degli spazi invarianti ad un numero finito di dimensioni

76. Sia A una operazione la quale ammetta uno spazio invariante $S_n\,[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$. Per definizione, gli elementi $A(\alpha_1), A(\alpha_2), \ldots, A(\alpha_n)$ apparterranno allo spazio S_n stesso, e quindi sarà

$$A(\alpha_i) = a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{in}\alpha_n \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n). \tag{1}$$

Di qui risulta che ogni operazione distributiva entro uno spazio ad un numero finito di dimensioni, *invariante* rispetto ad essa, è rappresentabile per mezzo di una sostituzione lineare.

Avvertiamo subito come in uno spazio diverso da S_n, o anche solo più ampio di S_n, la medesima operazione A possa ammettere una rappresentazione affatto differente.

77. Ammettiamo che in S_n la A sia degenere di specie r, cioè che abbia, entro S_n, r radici linearmente indipendenti. Se queste sono

$$\rho_i = b_{i1}\alpha_1 + b_{i2}\alpha_2 + \ldots + b_{in}\alpha_n \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, r),$$

avremo

$$A(\rho_i) = o, \quad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

cioè

$$b_{i1}A(\alpha_1) + b_{i2}A(\alpha_2) + \ldots + b_{in}A(\alpha_n) = o \qquad (i = 1, 2, 3 \ldots, r). \tag{2}$$

Sostituendo in queste relazioni le espressioni date per gli elementi $A(\alpha_i)$ dalle (1), avremo

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + \ldots + a_{jn}\alpha_n) = o,$$

ossia

$$\sum_{j=1}^{n} (b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \ldots + b_{in}a_{nj})\,\alpha_j = o.$$

Ma gli elementi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sono linearmente indipendenti: ne risulta il sistema di uguaglianze

$$b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \ldots + b_{in}a_{nj} = o \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, r). \tag{3}$$

Abbiamo dunque che tra gli elementi di ogni singola linea della matrice dei coefficienti a_{ij} sussistono r relazioni lineari distinte; la matrice è perciò (¹) di caratteristica $n - r$.

Reciprocamente, se la matrice dei coefficienti a_{ij} è di caratteristica $n - r$, si potranno assegnare r relazioni lineari distinte (3) fra gli elementi delle singole linee della matrice: allora dalle (3) potremo risalire alle (2) e concludere che gli r elementi di S_n

$$b_{i1}\alpha_1 + b_{i2}\alpha_2 + \ldots + b_{in}\alpha_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

sono altrettante radici linearmente indipendenti della operazione A.

Dunque, condizione necessaria e sufficiente affinchè un'operazione distributiva, univoca

(¹) Capelli, *Lezioni di Algebra complementare*, pag. 154 e segg. (Napoli, 1898).

entro uno spazio ad n dimensioni *invariante* rispetto ad essa, sia degenere di specie r, si è che la matrice della sostituzione lineare, che la rappresenta in tale spazio, sia di caratteristica $n - r$.

78. Nel seguito di questo capitolo si tratterà esclusivamente di operazioni distributive, univoche, non degeneri, considerate entro spazi lineari ad n dimensioni, invarianti rispetto ad esse.

Ora, essendo A un'operazione che abbia i caratteri or ora indicati, ed S_n uno spazio lineare ad n dimensioni invariante rispetto ad essa, proponiamoci la seguente questione: Esistono in S_n elementi invarianti rispetto ad A?

Ricordando quanto si è detto al § 58 potremo enunciare questa questione sotto l'altra forma: Tra le forme lineari di primo ordine in A, $E_c = A - c$, esistono operazioni degeneri entro S_n?

Posta la questione sotto questa forma, si vede che il problema si riduce alla ricerca dei possibili valori di c, coefficienti di A° nella forma di primo ordine E_o. È poi chiaro che, se esistono valori siffatti, essi, per lo stesso loro significato, sono indipendenti dalla scelta del sistema fondamentale entro S_n. Questo fatto, secondo l'uso, si può esprimere dicendo che tali numeri c hanno carattere invariantivo (o sono invarianti numerici) rispetto ad ogni sostituzione lineare a determinante non nullo che noi possiamo eseguire entro lo spazio S_n.

79. Se

$$\omega = h_1 \alpha_1 + h_2 \alpha_2 + \ldots + h_n \alpha_n$$

è un elemento di S_n invariante rispetto ad A, avremo, per un valore determinato c,

$$A(\omega) = c\omega,$$

da cui per le equazioni (1):

$$\sum_{j=1}^{n} h_j (a_{j1} \alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + \ldots + a_{jn} \alpha_n) = c \sum_{i=1}^{n} h_i \alpha_i,$$

ossia:

$$\sum_{i=1}^{n} (h_1 a_{1i} + h_2 a_{2i} + \ldots\ldots + h_n a_{ni} - ch_i) \alpha_i = o.$$

Ma gli elementi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sono linearmente indipendenti, e perciò questa relazione lineare non può sussistere se non è identicamente nullo ciascun coefficiente: dovrà dunque essere

$$(4) \qquad h_1 a_{1i} + h_2 a_{2i} + \ldots + h_i (a_{ii} - c) + \ldots + h_n a_{ni} = o \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Di qui segue per c la condizione (necessaria e sufficiente) di essere radice della equazione

$$(5) \qquad f(t) = \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - t & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} - t \end{vmatrix} = o.$$

Quest'equazione dicesi *equazione fondamentale* dell'operazione A rispetto allo spazio invariante S_n: e da ciò che precede risulta che se $E = A - c$ ammette in S_n una radice, c è radice della equazione fondamentale, e, reciprocamente, se c è una radice dell'equazione fondamentale, la forma lineare del primo ordine $E = A - c$ sarà degenere in S_n. Infatti, sostituendo c a t nel determinante che ci dà il primo membro dell' equazione fondamentale, otterremo un determinante nullo. Ma esso è, d'altra parte, il determinante del sistema di equazioni lineari (4). Se, dunque, è $n - r$ la sua caratteristica, potremo determinare r soluzioni distinte del sistema (4), e, corrispondentemente, in S_n avremo r elementi linearmente indipendenti, radici di $E_c = A - c$.

80. Abbiamo osservato già (§ 78) come ogni radice della equazione fondamentale sia indipendente dalla scelta, in S_n, del sistema fondamentale. Saranno perciò indipendenti da questa scelta, a meno, tutt'al più, di un fattore costante di proporzionalità, anche i coefficienti dell'equazione fondamentale. Otteniamo così altrettanti numeri a carattere invariativo (invarianti numerici di A in S_n), rispetto ad ogni possibile sostituzione lineare a determinante diverso da zero.

81. Supponiamo dapprima che l'equazione fondamentale ammetta n radici distinte

$$c_1, c_2, \ldots, c_n.$$

Per quanto precede, sappiamo che ciascuna delle forme lineari del primo ordine

$$E_{c_i} = A - c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ammette in S_n una radice ω_i. Mostriamo come, all'infuori di un moltiplicatore h, la radice ω_i sia unica per E_{c_i}. Perciò cominciamo coll'osservare che gli n elementi

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$$

sono linearmente indipendenti. Esista, infatti, se è possibile, una relazione lineare

$$a_1\,\omega_1 + a_2\,\omega_2 + \ldots + a_n\,\omega_n = o.$$

Applicando ad ambo i membri di queste uguaglianze successivamente $n-1$ volte l'operazione A, otterremo le $n-1$ relazioni

$$a_1\,c^i_1\,\omega_1 + a_2\,c^i_2\,\omega_2 + \ldots + a_n\,c^i_n\,\omega_n = o,$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots, n-1)$$

le quali non possono coesistere con la precedente se non è

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_n \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 & \ldots & c_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_1^{n-1} & c_2^{n-1} & c_3^{n-1} & \ldots & c_n^{n-1} \end{vmatrix} = o.$$

Ora quest'uguaglianza è impossibile, se, come abbiamo supposto, i numeri c_i sono fra loro distinti. Se ne conclude che deve essere necessariamente

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = o,$$

e, quindi che gli elementi

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$$

costituiscono un sistema fondamentale di S_n.

Ciò posto, supponiamo, se è possibile, che E_{c_i} ammetta, insieme con ω_i, anche la radice

$$\omega = h_1\,\omega_1 + h_2\,\omega_2 + \ldots + h_n\,\omega_n.$$

Dovremo avere

$$A(\omega) = c_i\,\omega = h_1\,c_i\,\omega_1 + h_2\,c_i\,\omega_2 + \ldots + h_n\,c_i\,\omega_n.$$

Ma, d'altra parte, è

$$A(\omega) = h_1\,A(\omega_1) + h_2\,A(\omega_2) + \ldots + h_n\,A(\omega_n) =$$
$$= h_1\,c_1\,\omega_1 + h_2\,c_2\,\omega_2 + \ldots + h_n\,c_n\,\omega_n.$$

Poichè gli elementi $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ sono linearmente indipendenti, l'uguaglianza, che risulta da quanto precede,

$$h_1\,c_i\,\omega_1 + h_2\,c_i\,\omega_2 + \ldots + h_n\,c_i\,\omega_n =$$
$$= h_1\,c_1\,\omega_1 + h_2\,c_2\,\omega_2 + \ldots + h_n\,c_n\,\omega_n.$$

non può sussistere se non è

$$h_1\,c_i = h_1\,c_1,\ h_2\,c_i = h_2\,c_2, \ldots, h_i\,c_i = h_i\,c_i, \ldots, h_n\,c_i = h_n\,c_n.$$

Di qui risulta che mentre h_1 è un numero qualsivoglia, ciascuno degli altri coefficienti h è nullo: abbiamo dunque che ogni radice di E_{c_1}, non potendo differire da ω_1 se non pel moltiplicatore arbitrario h_1, appartiene alla retta $h\omega_1$.

82. Consideriamo l'operazione

$$B = E_{c_1} E_{c_2} \dots E_{c_n}$$

prodotto delle n forme E_{c_i}. Noi sappiamo che queste sono fra loro commutabili (§ 47). Perciò l'operazione B ammetterà come spazio di radici, lo spazio somma degli spazi di radice delle singole forme E_{c_i} (§ 63), cioè l'intero spazio S_n.

Possiamo perciò dire che l'operazione B è in S_n *totalmente degenere*. In altri termini, se consideriamo l'insieme evidentemente lineare di tutte le operazioni distributive che ammettono S_n come spazio invariante, la B sarà uguale, in S_n, all'operazione nulla dell'insieme considerato.

83. Passiamo ora ad esaminare il caso più generale, in cui l'equazione fondamentale ammette q radici distinte, degli ordini di moltiplicità $r_1, r_2, \dots, r_q$ rispettivamente. Avremo

$$f(t) = (t - c_1)^{r_1} (t - c_2)^{r_2} \dots (t - c_q)^{r_q}.$$

Per studiare questo caso, conviene premettere la seguente osservazione.

Ammettiamo che nello spazio S_n, che abbiamo supposto invariante rispetto ad A, sia contenuto uno spazio S_m $(m < n)$, esso stesso invariante rispetto all'operazione considerata.

Entro S_m, la A sarà rappresentata da una sostituzione lineare; se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ sono gli elementi di un sistema fondamentale di S_m, avremo:

$$A(\alpha_i) = a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{im}\alpha_m \qquad (6)$$
$$(i = 1, 2, \dots, m).$$

L'equazione fondamentale di A rispetto ad S_m è data da

$$g(t) = \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} - t & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} - t \end{vmatrix} = o.$$

Ora in S_n potremo scegliere un sistema fondamentale, di cui faccian parte gli elementi:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m.$$

Sia

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n$$

un sistema fondamentale siffatto.

In S_n l'operazione A sarà ancora rappresentabile per mezzo di una sostituzione lineare: per la scelta particolare da noi fatta del sistema fondamentale, questa sostituzione sarà data dall'insieme delle m equazioni (6) e di altre $n - m$ equazioni

$$A(\alpha_{m+i}) = a_{m+i.1}\alpha_1 + a_{m+i.2}\alpha_2 + \dots + a_{m+i.n}\alpha_n$$
$$(i = 1, 2, \dots, n - m)$$

Di qui risulta che l'equazione fondamentale di A rispetto ad S_n è data da

$$f(t) = \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1m} & o & o & \dots & o \\ a_{21} & a_{22} - t & \dots & a_{2m} & o & o & \dots & o \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} - t & o & o & \dots & o \\ a_{m+1.1} & a_{m+1.2} & \dots & a_{m+1.m} & a_{m+1.m+1} - t & a_{m+1.m+2} & \dots & a_{m+1.n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n.1} & a_{n.2} & \dots & a_{n.m} & a_{n.m+1} & a_{n.m+2} & \dots & a_{nn} - t \end{vmatrix} = o,$$

ossia, se indichiamo con $h(t)$ il complemento algebrico di $g(t)$ nel determinante $f(t)$, da

$$g(t)\, h(t) = o.$$

Ma $g(t) = o$ è l'equazione fondamentale di A rispetto ad S_m. Abbiamo, dunque, che **se uno spazio invariante rispetto ad un'operazione A contiene uno spazio S_m ad un numero minore di dimensioni, esso pure invariante rispetto ad A, il primo membro dell'equazione fondamentale di A rispetto ad S_m ammette come fattore il primo membro dell'equazione fondamentale di A.** Si dimostra nello stesso modo, che **se lo spazio S_n, invariante rispetto ad A, è somma di due spazi S_m $(m < n)$ ed S_{n-m}, senza elementi comuni, entrambi invarianti rispetto ad A, per i quali siano $g(t)$ ed $h(t)$ rispettivamente i primi membri dell'equazione fondamentale, il primo membro $f(t)$ dell'equazione fondamentale di A rispetto ad S_n è uguale al prodotto di $g(t)$ per $h(t)$.**

84. Accanto all'operazione A consideriamo l'operazione

$$B = E_{c_1}^{r_1} E_{c_2}^{r_2} \dots E_{c_q}^{r_q}.$$

Noi sappiamo che il suo spazio di radici è la somma degli spazi di radici di $E_{c_1}^{r_1}$, $E_{c_2}^{r_2}, \dots, E_{c_q}^{r_q}$ (§ 63). Ad esso, dunque, apparterranno tutti gli eventuali elementi di S_n, *invarianti* rispetto ad A: abbiamo infatti veduto (§ 79) come siffatti elementi siano dati da tutte e sole le radici delle forme del primo ordine

$$E_{c_1}, E_{c_2}, \dots\dots, E_{c_q}$$

Ci rimangono dunque da studiare le radici delle forme che nascono dall'innalzamento a potenza delle E_{c_i}.

85. Cominciamo col ricercare le radici di E^p, dove $E = A - c$, e c designa una qualsivoglia delle radici dell'equazione fondamentale: supporremo per fissare le idee che essa sia multipla dell'ordine r di molteplicità.

Osserviamo anzitutto che una operazione $(A-a)^p$, dove p è un intero positivo qualsiasi, non può avere in S_n una radice propria ω, se a non è una radice dell'equazione fondamentale, poichè è chiaro che $(A - a)^{p-1}(\omega)$ è una radice di $A - a$.

Ciò posto, se l'operazione $E^p = (A - c)^p$ ammette in S_n una radice propria $\omega^{(p-1)}$, otterremo da essa, come abbiamo visto al § 56, una radice propria per ciascuna potenza di E ad esponente inferiore. Sarà precisamente $E(\omega^{(p-1)}) = \omega^{(p-2)}$, $E(\omega^{(p-2)}) = \omega^{(p-3)}, \dots, E(\omega^{(1)}) = \omega$, $E(\omega) = o$: di qui si deduce:

$$(7)\quad \begin{cases} A(\omega) = c\omega \\ A(\omega^{(1)}) = c\omega^{(1)} + \omega \\ A(\omega^{(2)}) = c\omega^{(2)} + \omega^{(1)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ A(\omega^{(p-1)}) = c\omega^{(p-1)} + \omega^{(p-2)}. \end{cases}$$

Gli elementi $\omega, \omega^{(1)}, \dots, \omega^{(p-1)}$ così determinati sono linearmente indipendenti.

Supponiamo infatti che per certi numeri $b_0, b_1, \dots, b_{p-1}$, sia

$$b_0\,\omega + b_1\,\omega^{(1)} + b_2\,\omega^{(2)} + \dots + b_{p-1}\,\omega^{(p-1)} = o,$$

e applichiamo ai due membri l'operazione E^{p-1}: viene $b_{p-1} = o$. Applicando, dopo questa riduzione, l'operazione E^{p-2}, viene $b_{p-2} = o$, e così via: da ultimo si conclude

$$b_0 = b_1 = b_2 = \dots = b_{p-1} = o.$$

Se dunque E^p ammette nello spazio S_n una radice propria $\omega^{(p-1)}$, esiste uno spazio S_p a p dimensioni, contenuto in S_n, esso stesso inva-

riante rispetto ad A, e sul quale A opera la sostituzione lineare (7).

Da questo quadro (7) risulta chiaramente che il primo membro dell' equazione fondamentale corrispondente è

$$g(t) = (t - c)^p.$$

Pel teorema del § 83, $g(t)$ deve entrare come fattore nel polinomio $f(t)$. Di qui risulta che c deve essere radice dell' equazione fondamentale, dell' ordine di molteplicità p almeno.

Quindi per ogni operazione E_{c_1}, dove c_1 rappresenta una radice dell' operazione fondamentale, si potrà assegnare un limite superiore finito per gli esponenti delle potenze di E_{c_1}, che ammettono in S_n radici proprie. Per ora possiamo dire che questo limite superiore non supera l' ordine r di molteplicità della radice di $f(t)$ corrispondente.

86. Consideriamo una determinata radice di $f(t) = o$, p. es. la c_1, multipla dell' ordine r_1; consideriamo pure la forma del primo ordine corrispondente

$$E_{c_1} = A - c_1.$$

Sia p il massimo esponente pel quale $E^p_{c_1}$ ammetta radici proprie in S_n: sarà (§ prec.)

$$p \leq r_1.$$

L' operazione $E^p_{c_1}$ ammetterà un certo spazio di radici proprie: sia $\omega_1^{(p-1)}, \omega_2^{(p-1)}, \ldots, \omega_{k_1}^{(p-1)}$ un sistema fondamentale di questo spazio.

Applicando E_{c_1} ad $\omega_1^{(p-1)}, \omega_2^{(p-1)}, \ldots, \omega_{k_1}^{(p-1)}$, otteniamo k_1 elementi linearmente indipendenti

$$\omega_1^{(p-2)}, \omega_2^{(p-2)}, \ldots, \omega_{k_1}^{(p-2)},$$

i quali (§ 57) definiscono uno spazio di radici proprie, a k_1 dimensioni, di $E_{c_1}^{p-1}$. Non è detto per altro che il massimo spazio di radici proprie di $E_{c_1}^{p-1}$ sia precisamente lo S_{k_1} così determinato; si può asserire soltanto, in generale, che S_{k_1} vi è contenuto.

Sia pertanto $k_1 + k_2$ il numero delle dimensioni di questo massimo spazio di radici proprie di $E_{c_1}^{p-1}$; e sia

$$\omega_1^{(p-2)}, \omega_2^{(p-2)}, \ldots, \omega_{k_1}^{(p-2)}, \omega_{k_1+1}^{(p-2)}, \ldots, \omega_{k_1+k_2}^{(p-2)}$$

un suo sistema fondamentale.

Eseguendo E_{c_1} su ciascuno di questi $k_1 + k_2$ elementi otterremo il sistema fondamentale

$$\omega_1^{(p-3)}, \omega_2^{(p-3)}, \ldots, \omega_{k_1+k_2}^{(p-3)}$$

di uno spazio di radici proprie di $E_{c_1}^{p-2}$. Anche qui, per ottenere un sistema fondamentale del massimo spazio di radici proprie di $E_{c_1}^{p-2}$ bisognerà, in generale, aggiungere ai $k_1 + k_2$ elementi suindicati altri k_3 elementi

$$\omega_{k_1+k_2+1}^{(p-3)} \ldots \omega_{k_1+k_2+k_3}^{p(-3)}.$$

Così continuando, e ripetendo altre $p - 3$ volte le precedenti considerazioni, giungeremo ad avere un sistema fondamentale dello spazio di radici (a $k_1 + k_2 + \dots + k_p$ dimensioni) della operazione E_{c_1}.

Riassumendo, noi giungiamo a costruire il quadro seguente:

$$(8)\left\{\begin{array}{rllllllll}
p) & \omega_1^{(p-1)} & \omega_2^{(p-1)} & \dots\dots & \omega_{k_1}^{(p-1)} & & & \\
p-1) & \omega_1^{(p-2)} & \omega_2^{(p-2)} & \dots\dots & \omega_{k_1}^{(p-2)} & \omega_{k_1+1}^{(p-2)} & \dots\dots & \omega_{k_1+k_2}^{(p-2)} \\
p-2) & \omega_1^{(p-3)} & \omega_2^{(p-3)} & \dots\dots & \omega_{k_1}^{(p-3)} & \omega_{k_1+1}^{(p-3)} & \dots\dots & \omega_{k_1+k_2}^{(p-3)} \\
 & & \omega_{k_1+k_2+1}^{(p-3)} & \dots\dots & \omega_{k_1+k_2+k_3}^{(p-3)} & & & \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1) & \omega_1 & \omega_2 & \dots\dots & \omega_{k_1} & \omega_{k_1+1} & \dots\dots & \omega_{k_1+k_2} \quad \omega_{k_1+k_2+1} \\
 & \dots\dots & \omega_{k_1+k_2+k_3} & \dots\dots & \omega_{k_1+k_2+k_3+\dots+k_p}. & & &
\end{array}\right.$$

In questo quadro gli elementi di ogni linea orizzontale definiscono uno spazio di radici proprie della potenze di E_{c_1} il cui esponente è a capo di linea. Ogni colonna verticale definisce, come si è visto al § prec., uno spazio invariante rispetto ad A, e la sostituzione lineare corrispondente è del tipo (7).

87. Gli elementi del quadro (8) sono linearmente indipendenti.

Supponiamo infatti che non siano tali. Allora sussisterà tra gli ω una certa relazione lineare, la quale, ove si isolino in un membro i termini che contengono elementi della prima linea del quadro (8), ci esprimerà linearmente una certa combinazione lineare di $\omega^{(p-1)}$ per mezzo di elementi delle linee successive. Ciò significherebbe che una certa combinazione lineare della $\omega^{(p-1)}$ è radice di $E_{c_1}^{p-1}$.

Ora ciò è impossibile, giacchè gli elementi della prima linea del quadro (8) definiscono lo spazio di radici proprie (massimo) di $E_{c_1}^p$. Ragionando in modo analogo, si giunge ad escludere, successivamente, che possano entrare nella detta relazione lineare elementi della seconda, della terza, ..., della p^{ma} linea del quadro (8). Dunque gli elementi del quadro medesimo sono tutti linearmente indipendenti: essi sono evidentemente in numero di

$$k_1 p + k_2(p-1) + \dots + 2k_{p-1} + k_p.$$

Se quindi indichiamo con m questo numero intero positivo, avremo che gli elementi del quadro (8) formano un sistema fondamentale di uno spazio S_m ad m dimensioni, invariante rispetto ad A, il quale si suddivide in

$$k_1 + k_2 + \dots + k_p$$

spazi, ciascuno dei quali è pure invariante rispetto ad A.

L'equazione fondamentale rispetto ad A dello spazio invariante definito dagli elementi della prima colonna di (8) è data, come risulta dal § 85, da

$$(t - c)^p = o.$$

E questa è pure l'equazione fondamentale di ciascuno degli spazi invarianti definiti dalle altre $k_1 - 1$ prime colonne verticali.

L'equazione fondamentale di ciascuno degli spazi definiti dalle colonne $(k_1+1)^{ma}, \dots, (k_1+k_2)^{ma}$ è

$$(t - c_2)^{p-1} = o,$$

e così via.

Applicando il teorema del § 83, concludiamo pertanto che l'equazione fondamentale dell'operazione A rispetto ad S_m è data da

$$(t - c_1)^m = o;$$

da ciò risulta che nello spazio $\mathfrak{S}_m$ non è contenuto nessun elemento, che possa essere radice di una forma E_c, in cui sia $c \neq c_1$.

In questo § abbiamo studiato la struttura rispetto ad A dello spazio di radici di $E_{c_1}^p$. Notiamo che, per l'ipotesi che $E_{c_1}^p$ sia la potenza di massimo esponente che ammetta radici proprie, ogni potenza di E_{c_1} d'esponente $r > p$ avrà sempre come massimo spazio di radici in $\mathfrak{S}_n$, precisamente lo spazio $\mathfrak{S}_m$.

88. Nello spazio $\mathfrak{S}_m$ assumiamo come sistema fondamentale gli elementi ω del quadro (8), che per ora, non essendo più necessario distinguere i vari spazi invarianti in esso contenuti, contrassegneremo con un solo indice, scrivendo

$$\omega_1, \quad \omega_2, \ldots, \omega_m.$$

Decomponiamo ora l'intero spazio $\mathfrak{S}_n$ nella somma di due:
1.° lo spazio $\mathfrak{S}_m$ $[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m]$;
2.° il rimanente spazio $\mathfrak{S}_{n-m}$, di cui indicheremo con

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-m}$$

un sistema fondamentale.

È chiaro che il sistema

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m, \sigma_1\ \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-m}$$

è un sistema fondamentale di $\mathfrak{S}_n$.

Si vede subito che gli elementi

$$\pi_i = E_{c_1}^p(\sigma_i)\ (i = 1, 2, \ldots, n - m)$$

sono elementi dello stesso spazio $\mathfrak{S}_{n-m}$: basta osservare che non possono essere radici di nessuna potenza $E_{c_1}^q$ di E_{c_1}, poichè, in caso contrario, qualcuno dei σ_i o degli elementi dello spazio $\mathfrak{S}_{n-m}$ da essi definito sarebbe radice di $E_{c_1}^{p+q}$, il che è contraddetto dall'ultima osservazione del § prec.

Ad analoga contraddizione si giunge facilmente, supponendo che gli elementi π_i non siano linearmente indipendenti. Dunque nello spazio $\mathfrak{S}_{n-m}$ possiamo assumere come sistema fondamentale il sistema dei π_i.

Ora dico che lo spazio $\mathfrak{S}_{n-m}$ è uno spazio invariante rispetto ad A. Per vedere questo, consideriamo la sostituzione lineare che subiscono gli elementi σ_i per opera della A: siccome i σ_i e gli ω_i insieme formano un sistema fondamentale di $\mathfrak{S}_n$ e questo spazio è invariante rispetto ad A, avremo

$$A(\sigma_i) = a_{i1}\sigma_1 + a_{i2}\sigma_2 + \ldots + a_{i.n-m}\,\sigma_{n-m} + \\ + h_{i1}\,\omega_1 + h_{i2}\omega_2 + \ldots + h_{im}\omega_m;\ (i = 1, 2, \ldots, n - m).$$

Eseguendo su ambo i membri di queste uguaglianze l'operazione $E_{c_1}^p$ ed osservando che essa è commutabile con A, otteniamo

$$A(\pi_i) = a_{i1}\ \pi_1 + a_{i2}\ \pi_2 + \ldots + a_{i.n-m}\ \pi_{n-m} \\ (i = 1, 2, \ldots, n - m).$$

Essendosi prima assodato che i π_i formano un sistema fondamentale in $\mathfrak{S}_{n-m}$, le uguaglianze precedenti dimostrano effettivamente che $\mathfrak{S}_{n-m}$ è spazio invariante rispetto ad A.

Premesso questo, risulta senz'altro dal § 82 che sarà

$$f(t) = (t - c)^m\ g(t)$$

e che $g(t)$ sarà il primo membro dell'equazione fondamentale di $\mathfrak{S}_{n-m}$.

Siccome $\mathfrak{S}_{n-m}$ non contiene alcuna radice di E_{c_1} (e quindi di nessuna delle potenze di E_{c_1}) $g(t)$ non può ammettere più nessun fattore $(t - c_1)$: ne risulta che m esprime precisamente l'ordine di moltiplicità della radice c_1 nell'equazione $f(t) = o$; cioè

$$m = r_1.$$

Sarà allora

$$g(t) = (t - c_2)^{r_2} \dots (t - c_q)^{r_q}.$$

89. Ora possiamo trattare lo spazio $S_{n-m} = S_{n-r_1}$ come dianzi abbiamo trattato lo spazio S_n. Così proseguendo, troveremo che ciascuna operazione $E_{c_i}^{r_i}$ ammette in S_n uno spazio di radici S_{r_i} ad r_i dimensioni, nel quale si può scegliere un sistema fondamentale avente rispetto ad E_{c_i} le medesime proprietà che il quadro (8) del § 85 ha rispetto all'operazione E_{c_1}.

Due operazioni E_{c_i}, E_{c_j} $(i \gtrless j)$, come pure due qualsivogliano loro potenze, non possono avere radici in comune: dunque non hanno elementi comuni gli spazi corrispondenti S_{r_i}, S_{r_j}. Avendosi $r_1 + r_2 + \dots + r_q = n$, ne risulta anzitutto che la somma degli spazi S_r è l'intero spazio S_n. In secondo luogo, poichè le operazioni $E_{c_i}^{r_i}$ sono fra loro commutabili, si ha che l'operazione

$$B = E_{c_1}^{r_1} E_{c_2}^{r_2} \dots E_{c_q}^{r_q}$$

ammette come spazio di radici lo spazio S_n: essa è dunque, anche in questo caso, un'operazione *totalmente degenere* in S_n (§ 82).

90. I risultati dei precedenti §§ possono essere riassunti nel seguente enunciato: Sia S_n uno spazio lineare ad n dimensioni, *invariante* rispetto ad

un'operazione A a determinazione unica e non degenere in esso spazio, e sia

$$f(t) = (t - c_1)^{r_1} (t - c_2)^{r_2} \dots (t - c_q)^{r_q}$$

il primo membro dell'equazione fondamentale corrispondente.

Lo spazio S_n si scinde nella somma di q spazi

$$S_{r_1}, S_{r_2}, \dots, S_{r_q}$$

ad r_1, r_2, ..., r_q dimensioni rispettivamente, ognuno dei quali è invariante rispetto ad A; lo spazio S_{r_i} contiene tutte e sole le radici di $E_{c_i} = A - c_i$ e delle sue potenze, ed il primo membro della corrispondente equazione fondamentale è $(t - c_i)^{r_i}$.

Ogni spazio S_{r_i} può alla sua volta essere decomposto (quadro (8) del § 86) nella somma di un numero finito di spazi invarianti rispetto ad A, i quali corrispondono alle diverse radici proprie, linearmente indipendenti, delle successive potenze di E_{c_i}. Così, alla radice propria $\omega^{(p-1)}$ di $E_{c_i}^p$ corrisponde, lo spazio, di cui gli elementi

$$\omega^{(p-1)},\ E_{c_i}(\omega^{(p-1)}) = \omega^{(p-2)}, \dots, E_{c_i}(\omega^{(1)}) = \omega$$

costituiscono un sistema fondamentale. Che un tale spazio sia invariante rispetto alla A, è indicato dalle (7) del § 85.

CAPITOLO QUINTO.

L'insieme delle serie di potenze e le operazioni distributive elementari.

A. SUCCESSIONI E SERIE DI POTENZE COME ELEMENTI DI UN INSIEME LINEARE.

91. Una successione di numeri reali o complessi

$$(1) \qquad a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

si dice *data* quando è possibile di assegnare, in modo unico, il numero a_n che corrisponde ad ogni determinato valore dell'indice n. Una successione data si può riguardare come un *ente* od *elemento*, il quale è determinato dai numeri che costituiscono la successione stessa, avuto riguardo al loro ordine. L'insieme di questi elementi, cioè di tutte le possibili successioni, costituirà uno spazio o varietà, che rappresenteremo con $\mathfrak{S}$; i numeri che costituiscono una successione, nell'ordine in cui sono dati, sono le *coordinate* dell'elemento.

Volendo designare le successioni, useremo le lettere minuscole dell'alfabeto greco; quando sia necessario di porre in evidenza le coordinate, esse si metteranno al seguito, fra parentesi. Così la successione (1) si potrà indicare, secondo che tornerà più opportuno, con $\alpha[a_0, a_1, \ldots, a_n]$, con $\alpha[a_n]$, o semplicemente con α.

92. Due elementi di $\mathfrak{S}$ si diranno *uguali* quando siano uguali le rispettive coordinate. Così, avendosi gli elementi

$$(2) \qquad \alpha[a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots], \ \beta[b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots]$$

scriveremo $\alpha = \beta$ qualora sia

$$a_0 = b_0, \ a_1 = b_1, \ a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n, \ldots$$

e soltanto in quel caso. L'uguaglianza così definita ammette manifestamente le proprietà fondamentali dell'uguaglianza enunciate al § 2.

93. *Somma* di due elementi di $\mathfrak{S}$, ad esempio degli elementi (2), sarà l'elemento avente per coordinate

$$a_0 + b_0, \ a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n, \ldots$$

Esso verrà indicato con $\alpha + \beta$. Analogamente si definisce la somma di tre o più elementi. La somma così definita ammette le proprietà caratteristiche dell'addizione, enunciate al § 3.

Elemento *zero* è quello di cui sono nulle tutte le coordinate; esso verrà indicato con o, e si avrà manifestamente, qualunque sia α,

$$\alpha + o = \alpha.$$

94. *Prodotto* di α per un numero m è l'elemento avente per coordinate $ma_0, ma_1, \ldots ma_n, \ldots$; esso verrà indicato con $m\alpha$. In particolare, per $m = -1$, si ha l'elemento $-\alpha$, *contrario* di α, cioè l'elemento che sommato con α dà per risultato l'elemento zero. Ne viene che, dati gli elementi α e β, l'elemento $\beta - \alpha$, che sommato con α dà per risultato β, è la somma $\beta + (-\alpha)$.

Da quanto è detto nei §§ precedenti risulta che l'insieme $\mathfrak{S}$ delle successioni è un insieme lineare.

Dati p elementi in $\mathfrak{S}$

$$(3) \qquad \alpha_i[a_{i0}, a_{i1}, \ldots, a_{in}, \ldots], \ (i = 1, 2, \ldots p, \ldots)$$

un elemento legato linearmente con questi sarà della forma

$$\beta = m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \dots + m_p\alpha_p.$$

Le sue coordinate saranno

$$m_1 a_{1n} + m_2 a_{2n} + \dots + m_p a_{pn}, \ (n = o, 1, 2, \dots \infty).$$

I p elementi (3) saranno, o no, linearmente dipendenti secondo che esisteranno, o no, p numeri $h_1, h_2, \dots, h_p$ tali che sia per ogni valore intero di n da o ad ∞:

$$(4) \qquad h_1 a_{1n} + h_2 a_{2n} + \dots + h_p a_{pn} = o.$$

95. Dati comunque p elementi linearmente indipendenti in $\mathfrak{S}$, è sempre possibile, ed in infiniti modi, di formare un elemento di $\mathfrak{S}$ linearmente indipendente dai precedenti. Infatti, se le (3) ci rappresentano gli elementi dati, sarà sempre possibile (poichè essi sono linearmente indipendenti) di scegliere gli indici $n_1, n_2, \dots n_p$ per modo che il determinante d'ordine p

$$\begin{vmatrix} a_{1n_1} & a_{2n_1} & \dots & a_{pn_1} \\ a_{1n_2} & a_{2n_2} & \dots & a_{pn_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n_p} & a_{2n_p} & \dots & a_{pn_p} \end{vmatrix}$$

sia differente da zero. Presi allora ad arbitrio i numeri $b_1, b_2, \dots, b_p$, basterà dare a b_{p+1} un tal valore che il determinante d'ordine $p + 1$

$$\begin{vmatrix} a_{1n_1} & a_{2n_1} & \dots & a_{pn_1} & b_1 \\ a_{1n_2} & a_{2n_2} & \dots & a_{pn_2} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n_p} & a_{2n_p} & \dots & a_{pn_p} & b_p \\ a_{1n_{p+1}} & a_{2n_{p+1}} & \dots & a_{pn_{p+1}} & b_{p+1} \end{vmatrix}$$

sia differente da zero, perchè ogni elemento β di $\mathfrak{S}$, le cui coordinate $n_1^{\text{sima}}, n_2^{\text{sima}}, \dots, n_{p+1}^{\text{sima}}$ siano $b_1, b_2, \dots, b_{p+1}$, e le altre quali si vogliano, risulti indipendente linearmente da $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$. Segue da ciò (§ 11), che

l' insieme $\mathfrak{S}$ è ad un numero infinito [1] di dimensioni.

96. Nell'insieme $\mathfrak{S}$ sono contenuti (§ 18) infiniti insiemi ad 1, a 2, ..., a p dimensioni, qualunque sia l'intero p. Tale è l'insieme $\mathfrak{S}_p$ rappresentato da

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_p\alpha_p,$$

dove $k_1, k_2, \dots, k_p$ sono variabili indipendenti, ed $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ sono enti di $\mathfrak{S}$ linearmente indipendenti. Ognuno di tali $\mathfrak{S}_p$ contiene l'elemento zero.

97. Tanto per la maggiore determinatezza delle operazioni distributive applicabili agli enti di un insieme ad un'infinità (numerabile) di dimensioni, quanto per le applicazioni che ne dovremo fare alla teoria delle funzioni, è conveniente di sostituire alla considerazione di una successione come la (1), quella di un ente analitico che sia in corrispondenza biunivoca colla successione stessa. Vi è una grande arbitrarietà nella scelta dell'ente analitico da farsi corrispondere alla (1); a noi, per più ragioni, è sembrato conveniente di assumere come tale la serie ordinata per le potenze intere e positive di una variabile x, in cui a_n è il coefficiente di x^n. Questa serie si rappresenterà colla stessa lettera che denotava la successione; pertanto, d'ora innanzi, alla considerazione della successione $\alpha[a_o, a_1, \dots, a_n]$, sostituiremo quella della serie

$$(5) \qquad \alpha(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

[1] Ma *numerabile*.

98. Per le considerazioni di natura puramente formale, non sarà necessario distinguere le convergenza dalla divergenza della serie (5), che avrà semplicemente l'ufficio di unire in un tutto la successione dei numeri $a_o, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ Ma per le applicazioni alla teoria delle funzioni, sarà necessario di tenere conto della convergenza di una serie come la (5). Ora è noto che ogni tale serie ammette un determinato cerchio di convergenza il cui raggio può, a seconda dei casi, essere nullo, finito e diverso da zero, o infinito. Noi indicheremo con S^0 l'insieme delle serie di potenze il cui raggio di convergenza non è nullo; questo insieme è evidentemente lineare: se ora $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sono elementi di S^0, l'uguaglianza, la somma, la moltiplicazione per m e la combinazione lineare di questi elementi non sono altro che l'uguaglianza, la somma, ecc. quali si sono definite ai §§ 92-95.

99. Dagli elementi della teoria delle funzioni analitiche è noto che una serie di potenze

$$\alpha(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + \cdots,$$

il cui raggio di convergenza non sia nullo, serve a definire una funzione analitica, uniforme o multiforme, che si può proseguire in tutto il campo della sua validità mediante il noto metodo dovuto al Weierstrass e detto della *continuazione analitica*. La serie, o, ciò che è lo stesso, i valori della funzione e delle sue successive derivate nel punto $x = o$, bastano alla integrale conoscenza della funzione. Tuttavia, ad evitare considerazioni dovute alla non uniformità della funzione, sarà spesso comodo di sostituire all'intero suo campo di validità quell'area che, col Mittag-Leffler (1), diremo *stella di centro o* o semplicemente *stella* relativa

(1) *Sur la représentation analytique d'une branche uniforme de fonction monogène.* Acta Math., t. XXIII, 1899.

alla funzione stessa. Quest'area viene ottenuta nel seguente modo. Immaginiamo una semiretta p, di estremo o, che si faccia ruotare intorno al punto o in modo da coprire tutto il piano della variabile x; si determini, per ogni posizione r della semiretta, quel punto singolare a_r della funzione che si trova sulla semi-retta stessa alla minima distanza del punto o, distanza che può essere finita od infinita; indi si tagli il piano secondo il prolungamento di oa_r, cioè da a_r all'infinito. Il campo che si ottiene tagliando in questo modo il piano è la *stella* di Mittag-Leffler. È chiaro che se anche la funzione definita dalla serie $\alpha(x)$ non è uniforme, la continuazione analitica della serie entro la stella dà un ramo uniforme della funzione.

100. Data la successione $\alpha[a, a_1, \ldots, a_n, \ldots]$, sono perfettamente determinate la serie di potenze, la stella relativa al punto $x = o$ ed il corrispondente ramo uniforme della funzione. La stella contiene certamente il cerchio di convergenza della serie di potenze, e coincide con esso quando tutti i punti della circonferenza sono punti singolari.

La medesima notazione $\alpha(x)$ servirà a rappresentare, quando non ne possa nascere ambiguità, tanto la serie di potenze quanto il ramo uniforme nella stella.

L'insieme S^0 delle $\alpha(x)$ è un insieme lineare.

101. Ci accadrà di dovere considerare l'insieme delle serie $\alpha(x)$ che convergono in un cerchio di raggio *superiore ad un numero positivo r*. Quest'insieme, manifestamente lineare, verrà indicato con S^r.

Se r e r' sono due numeri positivi ed $r > r'$, è chiaro che $S^{r'}$ contiene S^r.

102. Con notazione analoga, S^∞ sarà l'insieme delle serie il cui raggio di convergenza è infinito. Per queste, la stella ricopre tutto il piano della variabile x. L'insieme S^∞ appartiene ad ogni S^r.

103. Fra gli elementi di S^∞ sono da considerare quelli le cui coordinate sono tutte nulle, da un indice n in poi. Questi $\alpha(x)$ sono i polinomi razionali interi di grado non superiore ad $n-1$; essi formano un insieme S_n ad n dimensioni, di cui un sistema fondamentale è costituito dagli elementi $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$. Per ovvia estensione, il sistema di elementi

$$1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots \tag{6}$$

potrà dirsi sistema fondamentale dell'insieme S.

B. LE OPERAZIONI FUNZIONALI ELEMENTARI.

104. Prima di venire a trattare delle operazioni distributive generali che si possono applicare agli enti dell'insieme S definito nei §§ precedenti o degli insiemi che da esso si deducono, operazioni che chiameremo *funzionali*, vogliamo studiare alcune operazioni assai semplici e che si diranno *fondamentali*, perchè, come si vedrà, esse servono alla costruzione delle altre. Queste operazioni sono la *moltiplicazione*, la *derivazione* e la *sostituzione*.

I. MOLTIPLICAZIONE.

105. Sia $\alpha(x) = \alpha[a_m]$ un elemento di S, arbitrariamente variabile; sia $\mu(x) = \mu[m_n]$ un elemento fisso in S. Considereremo un'operazione che, applicata all'elemento α, genera l'elemento di S definito dalle coordinate

$$\begin{gathered} m_0 a_0,\ m_0 a_1 + m_1 a_0,\ m_0 a_2 + m_1 a_1 + m_2 a_0, \ldots \\ \ldots,\ m_0 a_n + m_1 a_{n-1} + \ldots + m_{n-1} a_1 + m_n a_0, \ldots \end{gathered} \tag{7}$$

Questa operazione verrà detta *moltiplicazione* di moltiplicatore μ; essa si indicherà col simbolo M_μ, e quando non sia necessario di porre in evidenza il moltiplicatore, semplicemente con M. Detto φ l'elemento (7) scriveremo

$$M_\mu(\alpha) = \varphi.$$

La moltiplicazione è manifestamente un'operazione distributiva.

Dalla definizione precedente risulta che se $\alpha(x)$ e $\mu(x)$ appartengono ad S^0, il risultato $M_\mu(\alpha)$ sarà

$$M_\mu(\alpha) = \mu(x)\alpha(x) \tag{8}$$

ed apparterrà pure ad S^0. La relazione (8) vale in tutta l'area comune alle stelle relative a $\mu(x)$ ed $\alpha(x)$.

Si scriverà talvolta la (8) anche se una delle μ, α, od ambedue, non appartengono ad S^0, ma in tale caso questa relazione non sarà, per ora, che un modo simbolico d'esprimere come la successione (7) si sia ottenuta dalle $\alpha[a_n]$ e $\mu[m_n]$.

106. L'operazione M, applicata al sistema (6) di S, dà

$$\begin{aligned} M(1) &= m_0 + m_1 x_1 + m_2 x^2 + \ldots = \xi_0(x), \\ M(x) &= m_0 x + m_1 x^2 + m_2 x^3 + \ldots = \xi_1(x), \\ M(x^2) &= m_0 x^2 + m_1 x^3 + m_2 x^4 + \ldots = \xi_2(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Se μ ed α appartengono ad S^0, si avrà allora, entro il cerchio comune di convergenza:

$$M(\alpha) = \mu(x)\alpha(x) = a_0\xi_0 + a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots,$$

ossia

$$M\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n M(x^n); \tag{9}$$

si incontra dunque un caso in cui la proprietà distributiva dell'operazione è estesa ad una somma di infiniti termini.

107. Avendosi le due operazioni di moltiplicazione M_μ, M_ν, si ha

$$M_\mu M_\nu(\alpha) = M_{\mu\nu}(\alpha) = M_\nu M_\mu(\alpha);$$

talchè:

Le operazioni di moltiplicazione formano un gruppo commutabile.

108. Tutte le operazioni di moltiplicazione si deducono dalla M_x per iterazione, moltiplicazione per costanti e somma: così

$$M_\mu = m_0 + m_1 M_x + m_2 M_x^2 + \ldots$$

L'operazione M_x si può definire, sia come quella che alla successione $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ fa corrispondere $o, a_0, \ldots, a_{n-1} \ldots$; sia come quella per cui

$$\xi_0 = x,\ \xi_1 = x^2,\ \ldots,\ \xi_n = x^{n+1},\ \ldots$$

109. La moltiplicazione M_μ, applicata ad un prodotto di due funzioni α, β, dà

$$M_\mu(\alpha\beta) = M_\mu(\alpha)\beta = \alpha M_\mu(\beta). \tag{10}$$

110. L'operazione di moltiplicazione è a determinazione unica. Essa non ha radici, se non lo zero. La sua inversa, se esiste, è dunque a determinazione unica.

L'inversa di M_μ è l'operazione di moltiplicazione $M_{\frac{1}{\mu}}$ nel caso che μ appartenga ad $S°$ e che il primo coefficiente m_0 di $\mu(x)$ non sia nullo. In questa ipotesi $\frac{1}{\mu}$ appartiene pure ad $S°$. Si considererà più avanti (§ 123) il caso che m_0 sia nullo.

II. Derivazione.

111. Sia $\alpha(x) = \alpha[a_n]$ un elemento arbitrario di S. L'operazione, che applicata all'elemento α, genera l'elemento di S di coordinate:

$$a_1,\ 2a_2,\ 3a_3,\ \ldots,\ (n+1)a_{n+1},\ \ldots,$$

si dirà *derivazione*. Essa verrà rappresentata dal simbolo D.

La derivazione è manifestamente un'operazione distributiva.

Dalla definizione di D, segue formalmente

$$D\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}. \tag{11}$$

Se $\alpha(x)$ è un'elemento di $S°$, $D(\alpha)$ non è altro che la sua derivata (quoziente differenziale $\frac{d\alpha}{dx}$), le cui proprietà sono note dagli elementi della teoria delle funzioni.

112. Applicando l'operazione D al sistema (6) di S, si ha:

$$D(1) = o = \xi_0,\ D(x) = 1 = \xi_1,\ \ldots,\ D(x^n) = nx^{n-1} = \xi_n;$$

la formula (11) equivale dunque a

$$D\left(\sum_0^\infty a_n x^n\right) = \sum_0^\infty a_n \xi_n;$$

l'estensione della proprietà distributiva al caso in cui la somma contiene un numero infinito di termini è lecita per gli elementi di $S°$.

113. L'operazione D applicata ad un prodotto di due elementi α, β, dà

$$D(\alpha\beta) = \alpha D(\beta) + \beta D(\alpha). \tag{12}$$

Dall'operazione D si deducono, per iterazione, le operazioni:

$$D^2 = DD,\ D^3 = DDD, \ldots;$$

per m ed n interi positivi, si ha la proprietà iterativa

$$D^m D^n = D^{m+n}.$$

Per la D^m si ha

$$(13)\quad \xi_n = D^m(x^n) = \begin{cases} o \text{ per } n < m, \\ n(n-1)\ldots(n-m+1)x^{n-m} \text{ per } n \geq m. \end{cases}$$

Tanto l'operazione D quanto le D^m sono a determinazione unica. La D ha per radice 1, e quindi ogni costante: il suo spazio di radici è ad una dimensione. La D^m ha per radice lo spazio ad m dimensioni S_m, contenuto in S^∞, il cui elemento generale è un polinomio razionale intero di grado $m-1$ in x. Radice propria di D^m (§ 55) è x^{m-1}.

114. L'operazione inversa D^{-1} di D è a determinazione multipla, potendosi ad una delle sue determinazioni aggiungere arbitrariamente una radice di D, cioè una costante. Si può però, fra le determinazioni di D^{-1}, fissarne una che si dirà *principale*, e che sarà quella data dalle

$$(14)\qquad \xi_n = D^{-1}(x^n) = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

La determinazione principale di D^{-1} applicata alla successione $a_0, a_1, a_2, \ldots$, genera dunque la successione $o, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{n}, \ldots$

115. In forza della legge iterativa che, fondandosi sul noto principio di permanenza, si estende all'esponente nullo ed intero negativo, D^0 significherà l'operazione identica, D^{-m} l'operazione inversa di D^m o (ciò che è lo stesso) la potenza m^{sima} di D^{-1} (§ 38). La D^{-m} è a determinazione multipla, potendosi aggiungere arbitrariamente ad una sua determinazione una radice di D^m, cioè un polinomio arbitrario di grado $m-1$ in x. Si può fissarne una determinazione, che verrà detta *principale*, mediante le

$$(15)\qquad \xi_n = D^{-m}(x^n) = \frac{x^{n+m}}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}.$$

Non riferendosi alla determinazione principale, ma ad una determinazione qualsivoglia di D^{-m}, è da notare che si avrà:

$$D^{-1}(o) = c_0,\ D^{-2}(o) = c_0 x + \frac{c_1}{1},$$

$$D^{-3}(o) = c_0\frac{x^2}{2} + c_1\frac{x}{1} + \frac{c_2}{2} = \frac{1}{2}(c_0x^2 + 2c_1x + c_2), \ldots$$

$$D^{-m}(o) = \frac{1}{(m-1)!}\Big(c_0x^{m-1} + (m-1)c_1x^{m-2} + + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}c_2x^{m-3} + \ldots + c_{m-1}\Big)\ (^1).$$

116. Un prodotto di operazioni di moltiplicazione e di derivazione in numero qualsivoglia dà una somma i cui termini sono il prodotto di una potenza di D per una moltiplicazione. Una tale somma è della forma

$$\alpha_0 + \alpha_1 D + \alpha_2 D^2 + \ldots \alpha_m D^m$$

e si dirà *forma differenziale lineare* (²). Se le $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ si riducono a costanti, si ha una forma a coefficienti nume-

(¹) I polinomi $\pi_0, \pi_1, \ldots \pi_m, \ldots$ che sono entro le parentesi dei secondi membri, si sono presentati in varie questioni d'analisi. Essi verificano la relazione $\frac{d\pi_m}{dx} = m\pi_{m-1}$. Si possono chiamare polinomi dell'Appell, per lo studio che ne ha fatto questo Autore (Ann. de l'École Normale, S. II, T. IX, 1880); noi ne parleremo diffusamente al cap. VII.

(²) Gli autori tedeschi usano il termine: « Linear Differentialausdruck. » In ciò che segue, si ommetterà spesso l'aggettivo *lineare;* ciò non può dar luogo ad equivoco.

rici (§ 46) e perciò commutabile con D. Il prodotto di più forme differenziali lineari è una forma differenziale lineare; esse formano pertanto un gruppo.

III. Sostituzione.

117. Sia ancora $\alpha(x)$ un elemento arbitrario in $\mathfrak{S}$, $\mu(x)$ un elemento fisso. Diremo s o s t i t u z i o n e relativa a μ ed indicheremo con S_μ l'operazione che consiste nel sostituire al posto di x, nella funzione $\alpha(x)$, la funzione μ. Se dunque $\alpha(x) = \Sigma a_n x^n$, sarà

$$S_\mu\big(\alpha(x)\big) = \Sigma a_n \mu^n(x).$$

Quando non ne venga ambiguità, l'operazione S_μ si indicherà semplicemente con S.

L' o p e r a z i o n e S è d i s t r i b u t i v a.

L'operazione S, applicata al sistema (6), dà

$$S(1) = 1,\ S(x) = \mu(x).\ S(x^2) = \mu^2(x), \ldots\ S(x^n) = \mu^n(x), \ldots$$

118. Applicando la S al prodotto di due funzioni α, β, si ha

(16) $$S(\alpha\beta) = S(\alpha)S(\beta).$$

Ne risulta

$$S\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{S(\alpha)}{S(\beta)},$$

e quindi, se $F(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ è un sistema qualunque di operazioni razionali eseguite sugli elementi $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ di $\mathfrak{S}$, si avrà in generale

$$SF(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = F\big(S(\alpha), S(\beta), S(\gamma), \ldots\big)$$

L' o p e r a z i o n e S s i p u ò d u n q u e d i r e *d i s t r i b u t i v a* n o n s o l o r i s p e t t o a l l a s o m m a, m a r i s p e t t o a d o g n i c o m p l e s s o d i o p e r a z i o n i r a z i o n a l i.

Questa proprietà è caratteristica della sostituzione; se infatti un'operazione A distributiva rispetto alla somma è tale anche rispetto alla moltiplicazione, posto $A(x) = \xi$, si avrà:

$$A(x^2) = A(x)A(x) = \xi^2, \ldots, A(x^n) = \xi^n,$$

e quindi A non differisce da S_ξ.

Si vede di qui, ricordando che una serie di potenze non è identicamente nulla se non sono nulli tutti i suoi coefficienti, che l' o p e r a z i o n e S n o n h a r a d i c i, a l l' i n f u o r i d e l l o z e r o, e d è q u i n d i n o n d e g e n e r e i n $\mathfrak{S}^0$.

119. Si abbiano le due operazioni di sostituzione S_μ, S_ν. Si avrà, dalla definizione

$$S_\mu\big(\alpha(x)\big) = \alpha\big(\mu(x)\big);\ S_\nu S_\mu\big(\alpha(x)\big) = \alpha\Big(\mu\big(\nu(x)\big)\Big),$$

e quindi

$$S_\nu S_\mu = S_{\mu(\nu)}.$$

Risulta da ciò che l e o p e r a z i o n i d i s o s t i t u z i o n e f o r m a n o u n g r u p p o. Esse, per altro, in generale non sono commutabili.

Le potenze successive dell'operazione S danno

$$S(x) = \mu(x),\ S^2(x) = \mu\big(\mu(x)\big), \ldots;$$

e si ottengono così quelle funzioni che si dicono le *iterate* di $\mu(x)$. A queste funzioni si suole attribuire un indice, ponendo

$$\mu_0(x) = x,\ \mu_1(x) = \mu(x), \ldots, \mu_n(x) = S\mu\big(\mu_{n-1}(x)\big).$$

Applicando ora la potenza n^{sima} di S ad un elemento qualunque α di $\mathfrak{S}$, si avrà

$$S^n\big(\alpha(x)\big) = \alpha\big(\mu_n(x)\big).$$

Se $\mu_{-1}(x)$ è la funzione inversa di $\mu(x)$, sarà

$$S_\mu^{-1}(\alpha) = S_{\mu_{-1}}(\alpha),\quad S_\mu^{-n}(\alpha) = S^n_{\mu_{-1}}(\alpha).$$

120. Come caso particolare delle operazioni di sostituzione, è da notare la S_{x+1}, che consiste nel sostituire in un elemento α di $\mathfrak{S}$ la $x+1$ alla x (1). Indicheremo questa operazione col simbolo θ, e porremo

$$\theta\alpha(x) = \alpha(x+1).$$

La *differenza finita*, che indicheremo con Δ, non è altro che la forma lineare in θ a coefficienti numerici $\Delta = \theta - 1$; onde

$$\Delta^n = \theta^n - n\theta^{n-1} + \binom{n}{2}\theta^{n-2} - \ldots + (-1)^n, \tag{17}$$

$$\theta^n = \Delta_n + n\Delta^{n-1} + \binom{n}{2}\Delta^{n-2} + \ldots + 1.$$

È chiaro che posto, per m intero positivo, $S_{x+\frac{1}{m}} = \theta'$, si ha $\theta'^m = \theta$; perciò noi indicheremo θ' con $\theta^{\frac{1}{m}}$. Ne viene che per ogni numero reale e razionale a, si ha dalla legge iterativa $\theta^a\theta^b = \theta^{a+b}$:

$$\theta^a\alpha(x) = \alpha(x+a). \tag{18}$$

Essendo poi a un numero irrazionale definito come limite della successione convergente di numeri razionali $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$, e preso un elemento α nella cui stella si trovino i punti $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots a$, si definisca θ^a come limite di θ^{a_n}, e ne verrà ancora soddisfatta la (18). Infine, per il noto principio di permanenza, la (18) si potrà ritenere valida per ogni numero a, reale o complesso.

---

(1) Questa operazione è stata considerata da lungo tempo. Gli antichi scrittori, nel calcolo delle differenze finite (come *Arbogast*, *Servois*, ed altri) la chiamarono *état varié* della funzione $\alpha(x)$. Il simbolo θ, che noi useremo costantemente a rappresentarla, è stato introdotto dal *Casorati* (Annali di Matematica, S. II, T. X).

121. Per dare un altro esempio di un'operazione di sostituzione, la quale ci servirà anche in seguito, consideriamo la S_{1-e^x}, che qui scriveremo semplicemente S, e che muta, in una funzione analitica, la x nella $1 - e^x$. Si avrà

$$S(x^n) = (1-e^x)^n,\quad SDx^n = n(1-e^x)^{n-1},$$

e poichè si ha

$$DS(x^n) = -ne^x(1-e^x)^{n-1}$$

se ne conclude per la x^n, e quindi per ogni elemento di $\mathfrak{S}$, la relazione:

$$SD = -e^{-x}DS.$$

Da questa risulta

$$SD^2 = -e^{-x}DSD = e^{-x}D(e^{-x}DS)$$

e quindi

$$SD^2 = e^{-2x}(-D + D^2)S.$$

Così continuando, si vede che si ha in generale, per tutti i valori di r interi e positivi

$$SD^r = e^{-rx}F_rS,$$

dove le F_r sono forme lineari differenziali a coefficienti numerici, che si ottengono l'una dall'altra con processo ricorrente; essendo che si ha:

$$F_1 = D,\ F_2 = -D + D^2,\ F_3 = 2D - 3D^2 + D^3, \ldots,$$
$$F_{r+1} = -e^xF_re^{-x}D.$$

Chiamandosi *trasformata* di un'operazione A mediante l'operazione B il prodotto BAB^{-1} (cfr. Cap. tredicesimo), si potrà dire che la trasformata di D^r mediante la S_{1-e^x}, è la forma differenziale lineare $e^{-rx}F_r$.

122. Ogni prodotto di operazioni di moltiplicazione e di potenze di una determinata sostituzione si riduce al prodotto di una moltiplicazione per una potenza della sostituzione. Una somma di tali termini si dirà *forma lineare alle sostituzioni*; essa è della forma

$$\alpha_0 + \alpha_1 S + \alpha_2 S^2 + \ldots + \alpha_m S^m.$$

Un prodotto di forme alle sostituzioni relative alla funzione fissa μ è una forma della medesima specie; tali forme costituiscono dunque un gruppo (cfr. Cap. XIV). Nel caso che sia $\mu(x) = x + 1$, si hanno le *forme lineari alle differenze finite*, del tipo

$$\alpha_0 + \alpha_1 \theta + \alpha_2 \theta + \ldots + \alpha_m \theta^m,$$

che le formule (17) permettono anche di scrivere

$$\beta_0 + \beta_1 \Delta + \beta_2 \Delta^2 + \ldots + \beta_m \Delta^m.$$

Si lascia al lettore la cura di sviluppare le facili relazioni che intercedono fra le α e le β.

123. Fin qui noi abbiamo considerato lo spazio $\mathfrak{S}$ delle serie di potenze: in questo l'insieme $\mathfrak{S}^0$ di quelle aventi un raggio non nullo di convergenza; fra queste, l'insieme di quelle il cui cerchio di convergenza ha un raggio maggiore di r, ed abbiamo indicato questo insieme — il quale costituisce uno spazio lineare — con $\mathfrak{S}^r$. Un tale insieme è tanto meno comprensivo, quanto più r è grande: ogni $\mathfrak{S}^r$ contiene, cioè, $\mathfrak{S}^{r'}$ se è $r' > r$. In ogni insieme $\mathfrak{S}^r$ è compreso l'insieme $\mathfrak{S}^\infty$ delle funzioni intere, razionali o trascendenti; in $\mathfrak{S}^\infty$ stesso possiamo distinguere insiemi lineari di meno in meno comprensivi, assoggettando per esempio le serie che li compongono a condizioni di convergenza sempre più intensa [1]. Ma per quanto uno spazio lineare contenuto in $\mathfrak{S}^0$ si restringa, ciò s'intenderà fatto in modo che vi si trovi sempre l'insieme delle funzioni razionali intere di x, insieme che diremo $\mathfrak{S}^\omega$ ed al quale appartiene il sistema

[1] **Condizioni che, come si avrebbe dalla teoria delle funzioni intere, risulterebbero legate al *genere* delle funzioni stesse: ma non è, per ora, il caso di entrare in particolari su ciò.**

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$$

che al § 103 si è detto *sistema fondamentale* di $\mathfrak{S}$. Per indicare gli insiemi $\mathfrak{S}^\omega, \ldots, \mathfrak{S}^\infty, \ldots, \mathfrak{S}^{r'}, \ldots, \mathfrak{S}^r, \ldots, \mathfrak{S}^0, \ldots$ useremo la parola di *intorni* (di più in più estesi) dell'elemento 1.

124. Ciò ricordato, è possibile di ampliare lo spazio di elementi cui applicheremo le nostre considerazioni; in particolare quello cui sono applicabili le operazioni elementari M, D ed S.

Consideriamo infatti il risultato della moltiplicazione degli elementi di $\mathfrak{S}^0$ per una funzione analitica qualunque μ. L'insieme dei prodotti ottenuti costituirà uno spazio che indicheremo con $\mathfrak{M}^0_\mu$ o semplicemente con $\mathfrak{M}^0$; ed in questo potremo distinguere gli spazi, di meno in meno comprensivi e di cui ciascuno contiene i precedenti

$$\mathfrak{M}^0, \ldots \mathfrak{M}^r, \mathfrak{M}^{r'}, \ldots \mathfrak{M}^\infty, \ldots \mathfrak{M}^\omega$$

ottenuti dalla moltiplicazione di μ per gli elementi di $\mathfrak{S}^0, \ldots \mathfrak{S}^r, \mathfrak{S}^{r'}, \ldots \mathfrak{S}^\infty, \ldots, \mathfrak{S}^\omega$ rispettivamente. Tutti questi contengono il sistema di elementi

$$\mu, \mu x, \mu x^2, \ldots, \mu x^n, \ldots;$$

ed essi si diranno *intorni* (di meno in meno estesi) della funzione μ.

125. *Le operazioni elementari sono applicabili ai nuovi sistemi che abbiamo ora definiti.*

Per l'applicazione di queste operazioni, abbiamo dunque *aggiunto* [1], colla moltiplicazione per μ, nuovi elementi allo spazio $\mathfrak{S}$ primitivo. Notiamo in particolare:

a) lo spazio che si ottiene *aggiungendo* ad $\mathfrak{S}$ quegli elementi che si hanno da successive moltiplicazioni per $\frac{1}{x}$. Esso è lo spazio delle serie di LAURENT [2] e verrà indicato con $\mathfrak{T}$; mentre indicheremo con $\bar{\mathfrak{S}}$ l'insieme delle serie di potenze intere negative di x, con $\bar{\mathfrak{S}}^r$ quello che contiene le serie convergenti fuori di un cerchio di raggio $\frac{1}{r}$;

b) lo spazio che si ottiene *aggiungendo* al precedente quello che se ne deduce colla moltiplicazione per x^a, dove a è un numero qualsivoglia;

c) lo spazio che si ottiene *aggiungendo* al precedente quello che se ne deduce colle moltiplicazioni successive per $logx$.

---

(1) Il lettore avvertirà come il significato di questo vocabolo non è qui senza analogia con quello che gli si dà nella teoria delle equazioni algebriche secondo Galois, e nel concetto di campo di razionalità.

(2) È noto che con questo nome si designano le serie di potenze intere, positive e negative, di una variabile.

CAPITOLO SESTO.

Gli elementi del calcolo funzionale.

A. LE SERIE DI POTENZE DEL SIMBOLO D.

126. Sia $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$, una successione data di funzioni analitiche della variabile x, regolari e ad un valore entro un'area finita **a** del piano di essa variabile. Sia poi φ un elemento di $\mathfrak{S}^0$, ed intendiamo, come si è stabilito al § 100, che la medesima notazione φ rappresenti pure il ramo ad un valore di funzione analitica che si deduce da quell'elemento col metodo della continuazione analitica in tutta la corrispondente stella di MITTAG-LEFFLER. Indicando col simbolo D, come è convenuto al § 111, la derivazione rispetto ad x, consideriamo la serie:

$$(1) \qquad A(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!} D^n \varphi.$$

Questa espressione può avere o no significato, a seconda dell'elemento φ cui essa è applicata. Quando abbia le proprietà:

a) di essere regolare in un'area **a'** contenuta in **a**;

b) di rendere, in questa area, la serie (1) uniformemente convergente,

la $A(\varphi)$ rappresenterà, per un noto teorema del WEIERSTRASS [1], una funzione analitica regolare entro tutta

---

(1) *Zur Functionenlehre.* (Abhandl. aus der Functionenlehre, p. 102). Berlin, 1886.

l' area $\mathbf{a}'$. In tal caso, A è simbolo di un' operazione che, applicata alla funzione analitica φ, dà origine ad una funzione analitica. Inoltre, se φ_1 è una seconda funzione avente rispetto alla (1) le stesse proprietà a) e b) di φ, si avrà:

$$A(\varphi + \varphi_1) = A(\varphi) + A(\varphi_1);$$

infine, è evidente che

$$A(c\varphi) = cA(\varphi).$$

La A, definita dalla serie (1), è dunque un' operazione distributiva.

127. L' insieme degli elementi φ per i quali sono soddisfatte le due condizioni a) e b) precedenti è manifestamente lineare. Questo insieme si dirà *campo* (funzionale) *di validità* dell' operazione (1).

Il campo di validità di (1) è un intorno di 1 (§ 123). Infatti, ad esso appartiene tutto l' insieme S^{ω}, poichè se poniamo nella (1) la x^n al posto di φ, dove n è intero e positivo, i termini dello sviluppo spariscono dall' $(n+2)^{esimo}$ in avanti e lo sviluppo stesso si riduce ad un polinomio. Precisamente, si trova

$$A(1) = \alpha_0,\ A(x) = \alpha_0 x + \alpha_1,\ A(x^2) = \alpha_0 x^2 + 2\alpha_1 x + \alpha_2, \ldots$$

Porremo d' ora in avanti

$$A(1) = \xi_0,\ A(x) = \xi_1, \ldots A(x^n) = \xi_n, \ldots;$$

la successione $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n, \ldots$ è dunque data quando siano date le $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n, \ldots$, ed è costituita da funzioni analitiche ad un valore e regolari nell' area $\mathbf{a}$.

128. La relazione fra le ξ_n e le α_n è per definizione

$$(2) \qquad \xi_n = \alpha_n + nx\alpha_{n-1} + \binom{n}{2}x^2\alpha_{n-2} + \ldots + x^n\alpha_0.$$

È facile di dedurne l' espressione delle α_n in funzione delle ξ_n. Infatti, si osservi che volendo risolvere il sistema di equazioni lineari

$$u_h + hxu_{h-1} + \binom{h}{2}x^2u_{h-2} + \ldots + x^h u_0 = v_h$$
$$(h = 0, 1, 2, \ldots n)$$

rispetto alle u_h, basta moltiplicare rispettivamente le equazioni del sistema per x^n, $-nx^{n-1}$, $\binom{n}{2}x^{n-2}$, $\ldots (-1)^n$; sommando, tenuto conto delle note relazioni fra i coefficienti binomiali, viene immediatamente

$$u_h = v_h - hxv_{h-1} + \binom{h}{2}x^2v_{h-2} - \ldots + (-1)^h x^h v_0$$
$$(h = 0, 1, \ldots n).$$

Applicando codesto procedimento alle (2), si ha

$$(3) \qquad \alpha_n = \xi_n - nx\xi_{n-1} + \binom{n}{2}x^2\xi_{n-2} - \ldots + (-1)^n x^n \xi_0.$$

129. Se un' operazione A definita da una serie (1), ammette come radici tutti gli elementi $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ essa si riduce all' operazione nulla (§ 25) in S.

Infatti, per le formule (3), dall' essere $\xi_0 = o$, $\xi_1 = o, \ldots \xi_n = o, \ldots$ seguirà $\alpha_0 = o$, $\alpha_1 = o, \ldots \alpha_n = o, \ldots$, cioè tutti i coefficienti della serie (1) che rappresenta la A saranno nulli.

130. Se A, B sono due operazioni definite da serie della forma (1), le quali diano per $1, x, \ldots x^n, \ldots$ rispettivamente gli stessi risultati $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n, \ldots$, le serie che definiscono le due operazioni sono identiche.

Infatti le α_n sono espresse univocamente in funzione delle ξ_n mediante le (3).

Da questa proposizione e da quella del § precedente segue la possibilità di applicare il metodo dei coefficienti indeterminati alla ricerca dello sviluppo di un' operazione distributiva, univocamente definita in $\mathfrak{S}$ da una opportuna sua proprietà, in serie della forma (1); lo sviluppo, quando esista, è unico.

131. Abbiamo visto al § 127 che ogni serie della forma (1) ha un campo di validità, costituito per lo meno dall'insieme $\mathfrak{S}^{\omega}$ delle funzioni razionali intere.

Vogliamo ora mostrare come questo campo di validità sia in ogni caso più esteso, in guisa da contenere, oltre agli elementi di $\mathfrak{S}^{\omega}$, anche infinite serie di potenze.

A quest' uopo, osserviamo dapprima che le α_n sono date regolari nell'area $\mathbf{a}$. Ognuna di esse, quindi, considerata in modulo, avrà in $\mathbf{a}$, escludendo il contorno se è necessario, un massimo valore: sia m_n il massimo valore di $|\alpha_n|$. Si potrà allora, in infiniti modi, determinare un sistema di numeri positivi e decrescenti g_n, tali che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n m_n}{n!} z^n$$

rappresenti una funzione intera in z; basterà, ad esempio, prendere le g_n tali che sia $g_n < g_{n-1}$, e $g_n < \frac{1}{m_n}$. Determiniamo poi una successione di numeri positivi k_n tali:

a) da soddisfare alle disuguaglianze $k_n \leq g_n t^n$, dove t è un numero positivo arbitrario,

b) da rendere la serie $\sum \frac{k_n x^n}{n!}$ convergente entro un cerchio che comprenda l'area $\mathbf{a}$ (¹).

(¹) La seconda di queste condizioni può non essere indipendente dalla prima; la disuguaglianza *a*) può avere per effetto che la serie $\sum \frac{k_n x^n}{n!}$ abbia un cerchio di convergenza abbastanza grande per comprendere l'area a, e in particolare che sia una funzione intera.

Dico che l'elemento $\varphi = \sum \frac{k_n x^n}{n!}$ appartiene al campo di validità di A. Infatti, essendo r il massimo modulo di x per i punti dell'area $\mathbf{a}$, si ha entro il cerchio $[r]$ (¹):

$$|\varphi(x)| = |k_0 + \frac{k_1 x}{1} + \frac{k_2 x^2}{2!} + \dots | <$$

$$< g_0 + g_1 \frac{tr}{1} + g_2 \frac{t^2 r^2}{2!} + \dots < g_0 e^{rt};$$

si ha pure

$$|D^n \varphi(x)| = |k_n + \frac{k_{n+1} x}{1} + \frac{k_{n+2} x^2}{2!} + \dots | <$$

$$< t^n \left(g_n + g_{n+1} \frac{tr}{1} + g_{n+2} \frac{t^2 r^2}{2!} + \dots \right) < g_n t^n e^{rt}.$$

Considerando dunque la serie (1) pei valori di x compresi nell'area $\mathbf{a}$, si avrà:

$$\left| \sum \frac{\alpha_n}{n!} D^n \varphi(x) \right| \leq \sum \frac{m_n}{n!} g_n t^n e^{rt},$$

e qui il secondo membro essendo, per costruzione, una funzione intera, ne risulta la convergenza assoluta ed uniforme in $\mathbf{a}$ della serie (1); l'elemento φ i cui coefficienti soddisfanno alle condizioni *a*), *b*) appartiene dunque al campo di validità di A.

Si noti che se due elementi φ, φ_1 soddisfanno alle condizioni *a*), *b*), vi soddisfa anche la loro somma. Infatti, sia

$$\varphi = \sum \frac{k_n x^n}{n!}, \quad \varphi_1 = \sum \frac{k'_n x^n}{n!},$$

con

$$k_n \leq g_n t^n, \quad k'_n \leq g_n t'^n;$$

ne verrà

$$k_n + k'_n \leq g_n (t^n + t'^n) < g_n (t + t')^n.$$

(¹) Con questa notazione rappresenteremo il cerchio di centro nell'origine e di raggio r.

Le serie di potenze, i cui moduli dei coefficienti soddisfano alle condizioni a), b), definiscono dunque uno spazio lineare contenente S^{ω}, cioè un intorno di 1 appartenente certamente al campo di validità di A.

132. Come esempi di serie ordinate per le potenze intere e positive del simbolo D, possiamo citare per prima la serie del TAYLOR. Questa serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} D^n \varphi \tag{4}$$

ammette, come campo di validità nell'intorno di 1, l'insieme di tutte le serie di potenze il cui cerchio di convergenza ha un raggio superiore ad $|h|$, e rappresenta, per queste serie, l'operazione θ^h (§ 120). Se r è il raggio del cerchio di convergenza di φ, l'area del piano x in cui è valida la (4) è il cerchio di centro $x = o$ e di raggio $r - |h|$.

A questo sviluppo si può riavvicinare l'altro

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n x^n}{n!} D^n \varphi, \tag{5}$$

che è valido per tutte le serie di S^o, e per i valori di x soddisfacenti alla condizione

$$(1 + |a|)|x| < r,$$

essendo r il raggio di convergenza della serie φ. Questo sviluppo rappresenta, per codesti valori di x, l'operazione di sostituzione di $(1 + a)x$ ad x.

Per il caso particolare $a = -1$, si ha lo sviluppo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n D^n \varphi, \tag{6}$$

pure valido per ogni elemento $\varphi(x)$ di S^o e per i valori di x il cui modulo è minore della metà del raggio di convergenza di φ. Esso rappresenta $\varphi(o)$, cioè il primo termine della serie $\varphi(x)$, e dà un esempio di una operazione che fa corrispondere una costante ad ogni funzione di un certo insieme ad infinite dimensioni.

133. Introduciamo una notazione di non dubbia utilità. Essendo $q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots$ una successione data, il modo di comportarsi di questa successione per $n = \infty$ (comportamento assintotico) è dato, come prima approssimazione, da quello di r^n, essendo r il raggio di convergenza della serie $\sum \frac{q_n}{z^n}$; il quale raggio, come è noto, è il limite, se esiste, ed in ogni caso il limite superiore dei punti limiti nella successione $\sqrt[n]{|q_n|}$. Ne viene che le serie $\sum a_n q_n x^n$ e $\sum a_n r^n x^n$ hanno lo stesso cerchio di convergenza; questa relazione fra le successioni q_n ed r^n si esprimerà scrivendo:

$$q_n \backsim r^n.$$

La relazione espressa del segno $\backsim$ ammette evidentemente le proprietà caratteristiche dell'uguaglianza (§ 2).

Ciò posto, possiamo fare un'osservazione che, in molti casi, giova a fare riconoscere se una data funzione $\varphi(x)$ appartiene al campo di validità di una serie (1) e, nel caso affermativo, serve a determinare l'area del piano x in cui ha luogo la convergenza. Infatti, consideriamo la $\varphi(x)$ nella sua stella di MITTAG-LEFFLER di vertice o, e siano u i punti singolari, sul contorno della stella. Per ogni valore di x, vi sarà un punto u_x più prossimo ad x di ogni altro u; u_x sarà quindi una funzione, generalmente discontinua, di x. Se ora si forma la serie di Taylor

$$\sum \frac{h^n}{n!} D^n \varphi(x),$$

risulta dai principî elementari della teoria delle funzioni che essa converge per i valori di $|h|$ compresi fra zero ed $|x - u_x|$; talchè si avrà

$$\frac{1}{n!} D^n \varphi(x) \backsim \frac{1}{|x - u_x|^n}$$

Questa relazione, dati che siano i coefficienti della (1), serve a riconoscere se, e per quali valori di x, una funzione $\varphi(x)$ appartiene al campo di validità della (1) stessa.

134. Essendo A un'operazione distributiva univoca, applicabile agli elementi α, β, ... di un certo spazio, la proprietà distributiva espressa da

$$A(\alpha + \beta + \ldots) = A(\alpha) + A(\beta) + \ldots$$

vale finchè la somma $\alpha + \beta + \ldots$ consta di un numero finito di termini. È interessante però di cercare se questa formula si possa estendere al caso di una somma di infiniti termini; in altre parole, se la proprietà distributiva di un'operazione sia applicabile alle serie. Ci proponiamo di mostrare che, data una operazione della forma (1), si può sempre trovare nel campo di validità di questa operazione uno spazio funzionale di serie di potenze cui la legge distributiva è applicabile termine a termine.

Poniamo, all'uopo, nella serie (1), le espressioni (3) delle α_n in funzione delle ξ_n: avremo così

$$(7) \qquad A(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\xi_n - n x \xi_{n-1} + \binom{n}{2} x^2 \xi_{n-2} - \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^n x^n \xi_0 \right) D^n \varphi.$$

Sia q_n il massimo modulo di ξ_n in **a**, e si ponga, essendo ancora r il massimo modulo di x in **a**,

$$p_n = q_n + n r q_{n-1} + \binom{n}{2} r^2 q_{n-2} + \ldots + r^n q_0.$$

Si determini poi un sistema di numeri g_n positivi e decrescenti, tali che la serie

$$\sum \frac{g_n p_n z^n}{n!}$$

sia una funzione intera in z; si ponga infine

$$\psi(x) = \sum \frac{k_n x^n}{n!}$$

dove i numeri k_n sono positivi e soggetti alle condizioni:

a) di soddisfare alle disuguaglianze $k_n \leq g_n t^n$, dove t è un numero positivo arbitrario.

b) di rendere la serie $\psi(x)$ convergente in un cerchio di raggio non minore di $2r$.

Sotto queste ipotesi, la serie a termini positivi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} p_n D^n \psi(r)$$

sarà convergente, come si vede facilmente; e quindi lo sviluppo $A(\psi)$ dato dalla (7), per i valori di x in **a**, sarà convergente anche se tutti i termini che ne compongono il termine generale si riducono ai loro valori assoluti. Sarà quindi lecito di ordinare questi termini nell'ordine che si vuole; in particolare, si potrà scrivere:

$$A(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \left(\frac{1}{n!} D^n \psi - \binom{n+1}{1} \frac{x}{(n+1)!} D^{n+1} \varphi + \right.$$
$$\left. + \binom{n+2}{2} \frac{x^2}{(n+2)!} D^{n+2} \varphi - \ldots \right),$$

ossia

$$(8) \quad A(\psi) = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{n!} \xi^n \left(D^n \psi - x D^{n+1} \psi + \frac{x^2}{2!} D^{n+2} \psi - \ldots \right).$$

Ora, il raggio di convergenza di ψ essendo maggiore di $2r$, e per ogni punto x dell'area **a** il modulo di x essendo inferiore ad r, la parentesi sotto il segno sommatorio del secondo membro della (8) rappresenterà $\left(D^n\psi(x)\right)_{x=o}$, per l'osservazione fatta alla fine del § 132. E poichè

$$\psi(x) = k_0 + k_1 x + \frac{k_2 x^2}{1\cdot 2} + \ldots,$$

si avrà

$$\left(D^n\psi(x)\right)_{x=o} = k_n.$$

Perciò la (8) si scriverà

$$A(\psi) = \sum_0^\infty \frac{k_n}{n!}\xi_n,$$

ossia vale l'uguaglianza:

$$A\left(\sum_{n=o}^\infty \frac{k_n}{n!}x^n\right) = \sum_{n=o}^\infty \frac{k_n}{n!}A(x^n).$$

La proprietà distributiva dell'operazione A è dunque estensibile alle serie di potenze $\psi(x)$; cioè alle serie $\psi(x)$ l'operazione stessa si può applicare termine a termine.

135. Gli elementi ψ di S^o, pei quali vale la proposizione precedente, sono quelli i cui coefficienti soddisfano alle condizioni *a*) e *b*) del § 134, e più generalmente le serie i cui moduli dei coefficienti soddisfano a quelle condizioni. Tali serie formano manifestamente un insieme lineare cui appartiene S^ω (cfr. 132). Possiamo dunque dire che

per ogni operazione A rappresentata da una serie (1) esiste un intorno dell'unità costituito da serie di potenze cui l'operazione A è applicabile termine a termine.

136. Può accadere che l'area **a**, in cui i coefficienti α_n della serie (1) sono regolari, sia un intorno di $x = o$. In tale caso, per ogni elemento φ di S^o appartenente al suo campo di validità, la serie (1) rappresenta una funzione regolare nell'intorno di $x = o$, cioè un elemento di S^o. La (1) è quindi un'operazione che ammette S^o come spazio invariante. Le ξ_n sono funzioni analitiche regolari nello stesso intorno di $x = o$ in cui sono regolari le α_n. Reciprocamente, le (3) dimostrano che, se le ξ_n sono date da serie di potenze di x

$$\xi_n = a_{no} + a_{n1}x + a_{n2}x^2 + \ldots, \; (n = o, 1, 2, \ldots)$$

aventi un cerchio comune di convergenza, saranno regolari nell'intorno di $x = o$ anche le α_n. Nel caso ora considerato l'operazione A viene dunque ad essere definita entro S dal sistema di coefficienti delle ξ_n, cioè dalla matrice ad infinite linee, e generalmente ad infinite colonne

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{llll} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \ldots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \ldots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right.$$

137. Quando un'operazione A è rappresentata da una serie (1), può benissimo accadere che la serie converga uniformemente per funzioni non appartenenti ad S. L'operazione verrà allora ad essere definita per uno spazio più esteso, che si otterrà aggiungendo (§ 125) ad S quelle funzioni per le quali la (1) risulta uniformemente convergente. Questo è il caso, p. es., per le forme differenziali lineari (§ 121) per le quali il campo di validità è costituito dall'insieme di tutte le funzioni analitiche.

138. Le operazioni elementari M, D, S, definite nel Capitolo precedente ammettono uno sviluppo della forma (1).

Infatti la M_μ è $\mu\varphi$, cioè ammette uno sviluppo (1) ridotto al suo primo termine ($\alpha_0 = \mu$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = o$); la D ammette lo sviluppo (1) ridotto al secondo termine ($\alpha_1 = 1$, $\alpha_0 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = o$). L'una e l'altra valgono per tutto l'insieme delle funzioni analitiche. In quanto alla S_μ, si ha per questa operazione (§ 116)

$$\xi_0 = 1,\ \xi_1 = \mu,\ \xi_2 = \mu^2 \ldots \xi_n = \mu^n, \ldots$$

onde si ricava dalle (3)

$$\alpha_n = \left(\mu(x) - x\right)^n$$

e lo sviluppo (1) diviene

$$S_\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu - x)^n}{n!} D^n\varphi. \tag{10}$$

Cotesto sviluppo, che si può dedurre da quello del Taylor, ha significato sotto la condizione seguente. Sia $\delta(x)$ la minima distanza del punto x dai punti singolari sul contorno della stella relativa a $\varphi(x)$: lo sviluppo (10) sarà valido per quelle funzioni $\varphi(x)$ e in quell'area del piano della variabile x, per cui è soddisfatta la disuguaglianza

$$| \mu(x) - x | < \delta(x).$$

Per $\mu = x + 1$, la S_μ si riduce all'operazione θ (§ 120) e lo sviluppo (10) diviene

$$\theta\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} D^n\varphi,$$

valido per tutti gli elementi di S^1. Questo sviluppo, che si può scrivere $\theta = e^D$, è stato notato fino dai primordi del calcolo differenziale.

139. Analoghe alle serie (1) sono quelle della forma

$$A(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!} D^n \frac{\varphi}{\mu}, \tag{11}$$

dove μ rappresenta una funzione data. Anche questa espressione analitica è un'operazione che porta sull'elemento φ; ed in modo simile a quello seguito nei §§ 126 e seguenti si dimostra che, se le α_n sono funzioni analitiche regolari in un'area comune **a** del piano x, questa operazione ammette un campo funzionale di validità. A questo campo appartengono sicuramente gli elementi di $\mathfrak{M}_\mu^\omega$ (§ 124) cioè

$$\mu,\ \mu x,\ \mu x^2,\ \ldots\ \mu x^n, \ldots,$$

ma esso è in ogni caso più esteso; così pure esiste un insieme, pure contenente $\mathfrak{M}^\omega$, costituito da serie $\sum c_n \mu x^n$ cui l'operazione A è applicabile termine a termine (cfr. § 135), cioè per le quali

$$A(\sum c_n \mu x^n) = \sum c_n A(\mu x^n).$$

Se si pone $\varphi = \mu\psi$, si ha

$$A(\mu\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!} D^n\psi,$$

cioè si ricade su di un'operazione della forma (1), la quale equivale al prodotto AM_μ.

Come al § 129, un'operazione A che ammette come radici gli elementi $\mu, \mu x, \mu x^2, \ldots$, si riduce all'operazione nulla in tutto un intorno $\mathfrak{M}$ di μ; μ si dirà allora *elemento singolare* per l'operazione A.

B. DERIVATA DI UN' OPERAZIONE.

140. Supponiamo data un'operazione mediante una serie (1), ed essendo φ un elemento del suo campo di validità, supponiamo che anche $x\varphi$ appartenga a questo campo. Avremo allora

$$A(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!} D^n\varphi, \quad A(x\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!}(xD^n\varphi + nD^{n-1}\varphi)$$

e quindi

$$A(x\varphi) - xA(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(n-1)!} D^{n-1}\varphi. \tag{12}$$

La differenza $A(x\varphi) - xA(\varphi)$ sarà dunque una nuova operazione, che diremo A', della stessa forma di (1); essa ammette lo stesso campo di validità, come si vede facilmente dal § 131; inoltre la serie (12) si può riguardare come ottenuta dalla (1) mediante la regola ordinaria di derivazione, applicata come se il simbolo D fosse la variabile. Per questa ragione, daremo alla A' il nome di *derivata* (1) dell' operazione A.

141. Analogamente, se anche $x^2\varphi$ appartiene al campo di validità di (1), si potrà formare

$$A'(x\varphi) - xA'(\varphi) = A(x^2\varphi) - 2xA(\varphi) + x^2A(\varphi)$$

e questa sarà rappresentata dalla serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(n-2)!} D^{n-2}\varphi.$$

Questa operazione, derivata della A', si indicherà con A'' e si dirà *derivata seconda* di A.

(1) Si potrà dire **derivata funzionale**, per ricordare che la variabile è qui una funzione φ, per opposizione alla **derivata ordinaria** o **puntuale**, dove la variabile è un numero.

Per la derivata A', si ha, posto $A'(x^n) = \xi_n^{(1)}$,

$$\xi_n^{(1)} = \xi_{n+1} - x\xi_n;$$

per la derivata seconda A'', posto $A''(x^n) = \xi_n^{(2)}$, si ha:

$$\xi_n^{(2)} = \xi_{n+2} - 2x\xi_{n+1} + x^2\xi_n,$$

e così via.

142. La derivata di A'' si indicherà con A'''; in generale, quella di $A^{(n-1)}$ si indicherà con $A^{(n)}$ e si dirà derivata (funzionale) n^{sima} di A. Per essa si ha

$$A^{(n)}(\varphi) = A(x^n\varphi) - nxA(x^{n-1}\varphi) + \binom{n}{2}x^2A(x^{n-2}) + \ldots + (-1)^n x^n A(\varphi). \tag{13}$$

Da questa formula si deduce immediatamente che la derivata r^{sima} della derivata s^{sima} di un' operazione coincide colla derivata $(r+s)^{\text{sima}}$ dell' operazione stessa.

143. Indichiamo, in via d' esempio, un caso in cui un' operazione A rappresentata da una serie (1) ammette tutte le successive derivate. Suppongasi che i coefficienti $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ della (1) si mantengano tutti, entro l' area **a**, inferiori in valore assoluto ad un numero m. In tale caso, ogni serie

$$\varphi(x) = \Sigma c_n x^n$$

si trova nel campo di validità della serie (1) purchè, m_1 essendo un numero positivo qualsivoglia e t un numero positivo minore d' uno, sia

$$|c_n| < m_1 \frac{t^n}{n!}:$$

ciò si verifica immediatamente. Ma alla medesima condizione soddisfano le serie $x\varphi(x)$, $x^2\varphi(x)$, ...; pertanto esistono per la serie considerata, nell'accennato campo funzionale, le derivate funzionali di tutti gli ordini.

144. Dalla definizione di derivata di un'operazione, definizione espressa da

$$A'(\varphi) = A(x\varphi) - xA(\varphi),$$

risulta subito che la derivata di una somma di operazioni è uguale alla somma delle derivate delle operazioni stesse.

Così, indicando coll'accento la derivazione funzionale, si ha:

$$(A + B)' = A' + B'.$$

145. Se C è il prodotto AB delle operazioni A, B, si ha:

$$C' = B'A + BA'. \tag{14}$$

Infatti, per definizione

$$C'(\varphi) = C(x\varphi) - xC(\varphi)$$

ossia

$$C'(\varphi) = BA(x\varphi) - xBA(\varphi)$$

ed aggiungendo e togliendo $B\big(xA(\varphi)\big)$,

$$C'(\varphi) = B\big(A(x\varphi) - xA(\varphi)\big) + (Bx - xB)\big(A(\varphi)\big) =$$
$$= BA'(\varphi) + B'A(\varphi).$$

La regola per la derivata di un prodotto di operazioni è dunque perfettamente analoga alla nota regola del Leibniz per la derivazione di un prodotto di funzioni. Se ne deduce, per le derivate successive del prodotto C:

$$C'' = BA'' + 2B'A' + B''A$$

ed in generale, per ogni n intero positivo:

$$C^{(n)} = BA^{(n)} + nB'A^{(n-1)} + \binom{n}{2}B''A^{(n-2)} + \ldots + B^{(n)}A.$$

È appena necessario di ricordare che i fattori che figurano nel secondo membro non sono, in generale, commutabili.

Dalla regola per la derivazione di un prodotto di due operazioni si deduce immediatamente quella relativa alla derivazione di un prodotto di tre o più; se

$$C = A_1A_2A_3,$$

si ha

$$C' = A'_1A_2A_3 + A_1A'_2A_3 + A_1A_2A'_3. \tag{15}$$

Se $C = A^m$, dove m è un esponente intero positivo, si avrà

$$C' = A'A^{m-1} + AA'A^{m-2} + A^2A'A^{m-3} + \ldots + A^{m-1}A'.$$

Nel caso che A' sia commutabile con A, si avrà

$$C' = mA^{m-1}A'.$$

146. Le formule (13) esprimono le $A', A'', \ldots A^{(n)}$ in funzione lineare delle $A(\varphi)$, $A(x\varphi)$, $A(x^2\varphi)$, ... $A(x^n\varphi)$. Inversamente, è facile di esprimere queste in funzione lineare delle derivate: basta infatti osservare che considerando nelle (13) le $A(\varphi)$, $A(x\varphi)$, $A(x^2\varphi)$, ... come incognite, le equazioni stesse ci riconducono al sistema che si è risoluto nel § 128. Se ne ricava dunque

$$A(x^n\varphi) = A^{(n)}(\varphi) + nxA^{(n-1)}(\varphi) + \binom{n}{2}x^2A^{(n-2)}(\varphi) + \ldots + x^nA(\varphi). \tag{16}$$

Riprendiamo ora lo sviluppo dato al § 139:

$$A(\mu\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n!}D^n\varphi. \tag{17}$$

Se in questo si fa $\varphi = x^n$, viene

$$A(\mu x^n) = \alpha_0x^n + n\alpha_1x^{n-1} + \ldots + n\alpha_{n-1}x + \alpha_n;$$

onde, confrontando con le (16), si vede che i coefficienti $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n, \ldots$ della (17) non sono altro se non $A(\mu)$, $A'(\mu)$, $\ldots A^{(n)}(\mu), \ldots$ In particolare, nello sviluppo (1), si ha

$$\alpha_0 = A(1),\ \alpha_1 = A'(1),\ \ldots,\ \alpha_n = A^{(n)}(1),\ \ldots;$$

talchè cotesto sviluppo (1) si potrà scrivere d'ora in avanti

$$A(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^{(n)}(1) D^n \varphi,$$

e lo sviluppo (17):

$$A(\mu\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^{(n)}(\mu) D^n \varphi. \tag{18}$$

147. Si deduce da ciò che se un'operazione è definita univocamente, in qualsivoglia modo, nell'intorno di una funzione μ (§ 124), questa operazione si può rappresentare mediante una serie della forma (1).

Infatti, conoscendosi le $A(\mu)$, $A(x\mu)$, $A(x^2\mu), \ldots$, se ne deducono, per le (13), le $A'(\mu)$, $A''(\mu), \ldots$ Ma queste non sono altro (§ prec.) che i coefficienti dello sviluppo (17); questo sviluppo si può dunque scrivere senz'altro, ed è valido per gli elementi ψ di un intorno di 1: cioè, per gli elementi $\mu\psi$ del corrispondente intorno di μ, esso ci rappresenta la $A(\mu\psi)$.

In questo modo rimane completato quanto si è detto in principio del presente Capitolo [1], essendosi ottenuta la relazione fra un'operazione ed i coefficienti della serie che vale a rappresentarla.

[1] **È appena necessario di far avvertire la grande analogia che passa fra lo sviluppo (18) nella teoria delle operazioni, e la serie del Taylor nella ordinaria teoria delle funzioni.**

148. Veniamo ora a studiare le proprietà delle derivate delle operazioni elementari.

L'operazione di moltiplicazione M_μ ammette come derivata lo zero. Essendo infatti $M_\mu = \mu\varphi$, e

$$M'_\mu(\varphi) = M_\mu(x\varphi) - xM_\mu(\varphi),$$

ne viene senz'altro $M'_\mu = o$. Per il § 145 ne risulta

$$(AM)' = A'M,\quad (MA)' = MA'. \tag{19}$$

In particolare, l'operazione identica essendo un caso speciale della moltiplicazione, ha lo zero per derivata; così pure l'operazione zero.

Sia inversamente A un'operazione definita in $\mathfrak{S}$ e tale che la sua derivata funzionale sia nulla. Saranno nulle di conseguenza le derivate seconda, terza, ecc., e quindi le $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$ (§ 147); ne risulterà

$$\xi_n = \alpha_0 x^n,$$

e la A coincide pertanto coll'operazione di moltiplicazione M_{α_0}.

149. Poichè la proprietà di avere lo zero come derivata è caratteristica dell'operazione di moltiplicazione, se due operazioni A e B hanno la stessa derivata, la loro differenza è un'operazione di moltiplicazione.

Il fatto che la derivata della moltiplicazione è lo zero discende dall'altro, che la moltiplicazione M_μ è commutabile con M_x. Anzi, per la sua definizione, la derivata di un'operazione A indica, per così dire, lo scarto di A dalla commutabilità con M_x.

150. Per l'operazione D di derivazione, si ha

$$D(x\varphi) - xD\varphi = \varphi,$$

che si può scrivere

$$D' = \mathbf{1}. \tag{20}$$

La **derivazione** ammette dunque, come **derivata funzionale**, l'**operazione identica**. Ne viene che le derivate successive di D sono nulle.

Se, inversamente, un' operazione A ammette come derivata l'operazione identica, essa sarà della forma $D + M$, essendo M un'operazione arbitraria di moltiplicazione (§ 149). Ciò si deduce anche dalle (2); se infatti $A'(1) = \alpha_1 = 1$, $A''(x) = A'''(1) = \ldots = o$, cioè $\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = o$, ne viene

$$\xi_n = \alpha_0 x^n + n x^{n-1}$$

e quindi, applicando A ad una serie di potenze φ:

$$A(\varphi) = \alpha_0 \varphi + D\varphi.$$

151. Essendo m un intero positivo, la derivata di $D^m\varphi$ è

$$D^m(x\varphi) - xD^m\varphi = mD^{m-1}$$

cioè

$$(D^m)' = mD^{m-1}. \tag{21}$$ [1]

La medesima formula vale anche se m è un intero negativo. Infatti si ha immediatamente dall'integrazione per parti

$$D^{-1}(x\varphi) - xD^{-1}\varphi = - D^{-2}\varphi,$$

ossia

$$(D^{-1})' = - D^{-2}$$

che coincide colla (21) per $m = -1$; facendo poi l'osservazione che D^{-2} è commutabile con D^{-1}, si ha (§ 146) per n intero positivo

$$\left((D^{-1})^n\right)' = - n(D^{-1})^{n-1}D^{-2} = - nD^{-n-1},$$

che è la (21) per $m = -n$

---

[1] Le formule (19), (20) e (21) e la proprietà $M' = o$ fanno considerare le operazioni M e D come analoghe, nel calcolo delle operazioni distributive, a ciò che sono rispettivamente la **costante** e la **variabile indipendente** nella teoria delle funzioni; analogia confermata dall' osservazione a piè della pagina 104.

152. La derivata di una forma differenziale lineare (§ 121)

$$F = \alpha_m D^m + \alpha_{m-1}D^{m-1} + \ldots + \alpha_1 D + \alpha_0 \tag{22}$$

si ottiene mediante l'applicazione delle regole precedenti, sotto la forma

$$F' = m\alpha_m D^{m-1} + (m-1)\alpha_{m-1}D^{m-2} + \ldots + 2\alpha_2 D + \alpha_1. \tag{23}$$

La derivata di una forma differenziale lineare di ordine m è dunque una forma differenziale lineare di ordine $m - 1$, che si ottiene colla stessa regola con cui si formerebbe la derivata di un polinomio razionale intero in cui D fosse la variabile (cfr. § 140). Applicando la medesima regola ad F', si ottiene la derivata seconda

$$F'' = m(m-1)\alpha_m D^{m-2} + (m-1)(m-2)\alpha_{m-1}D^{m-3} + \\ + \ldots + 1.2\alpha_2,$$

e così via. La m^{sima} derivata di F è data da

$$F^{(m)}(\varphi) = m!\alpha_m\varphi,$$

cioè si riduce ad un'operazione di moltiplicazione; la $(m+1)^{sima}$ derivata è nulla.

È poi facile vedere che l'operazione distributiva più generale, che in S abbia uguale a zero la $(m+1)^{sima}$ derivata, è una forma differenziale lineare d'ordine m.

Se nella F si sostituisce alla funzione φ su cui F opera, il prodotto $\mu\varphi$ e se si eseguisce in ogni termine la derivazione del prodotto, indi si ordina rispetto alle derivate successive di φ, si scorge facilmente che la φ stessa ha per coefficiente $F(\mu)$, che $D\varphi$ ha per coefficiente la $F'(\mu)$ data dalla (23), che $D^2\varphi$ ha per coefficiente $\frac{1}{2}F''(\mu)$ e così via. Si ottiene cioè la formula seguente:

$$F(\mu\varphi) = F(\mu)\varphi + F'(\mu)D\varphi + \frac{1}{1\cdot 2}F''(\mu)D\varphi + \\ + \ldots + \frac{1}{m!}F^m(\mu)D^m\varphi. \tag{24}$$

Questa formula, che è nota da molto tempo, trovandosi già usata nei lavori del D'ALEMBERT, è un caso particolare della (18): ma il suo campo di validità è costituito dall'insieme di tutte le funzioni analitiche.

Alla formula (24) daremo il nome di *formula di D'Alembert*, e perciò la (18) potrà chiamarsi sviluppo di D'Alembert generalizzato.

153. La derivata dell'operazione θ, definita (§ 120) da

$$\theta\varphi(x) = \varphi(x+1),$$

è data da

$$\theta'\varphi = (x+1)\varphi(x+1) - x\varphi(x+1) = \varphi(x+1);$$

essa coincide pertanto coll'operazione θ stessa, per la quale dunque si ha:

$$\theta = \theta' = \theta'' = \ldots$$

Anche l'operazione $M\theta$, essendo M una moltiplicazione qualunque, ha la proprietà di coincidere colla propria derivata. Inversamente, se si cerca l'operazione A più generale che coincida colla propria derivata, si avrà:

$$A(x\varphi) = (x+1)A(\varphi),$$

onde, posto $A(1) = \xi_0$:

$$A(x) = (x+1)\xi_0,\ A(x^2) = (x+1)^2\xi_0, \ldots A(x^n) = (x+1)^n\xi_0.$$

Ne viene, essendo φ un elemento qualunque in $\mathfrak{S}^1$:

$$A(\varphi) = \xi_0\theta\varphi$$

e quindi $A = M_{\xi}\theta$; l'operazione più generale che coincida colla propria derivata è dunque, in $\mathfrak{S}^1$, il prodotto dell'operazione θ per una moltiplicazione.

154. L'operazione di sostituzione S_μ ha per derivata

$$S'_\mu = S_\mu(x\varphi) - xS_\mu(\varphi) = \big(\mu(x) - x\big)S_\mu;$$

la S_μ è dunque il prodotto di una moltiplicazione determinata $M_{\mu-x}$ per la S_μ. Si può pertanto scrivere

$$S'_\mu = M_{\mu-x}S, \text{ ossia } S' = MS,$$

onde

$$S'' = M^2S,\ S''' = M^3S, \ldots S^{(m)} = M^mS.$$

Una derivata d'ordine qualunque dell'operazione S consta dunque del prodotto (a sinistra) di S per una moltiplicazione.

C. LE POTENZE INTERE NEGATIVE DEL SIMBOLO D.

155. Ricordiamo che si è chiamata determinazione principale di D^{-1} (§ 114) applicata ad un elemento di $\mathfrak{S}$, quella definita da

$$D^{-1}(x^n) = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Proponiamoci di cercare se questa determinazione di D^{-1} possa essere rappresentata da una serie della forma (1). A quest'uopo, ricordiamo che se

$$D^{-1}\varphi = \sum \frac{\alpha_n}{n!} D^n\varphi,$$

dovrà essere

$$\alpha_n = \big(D^{-1}\big)^{(n)}(1);$$

ma (§ 151)

$$(D^{-1})' = -D^{-2};\ (D^{-1})'' = (-D^{-2})' = 2D^{-3}, \ldots$$
$$\ldots (D^{-1})^{(n)} = (-1)^n n! D^{-(n+1)},$$

onde, poichè (riferendoci sempre alla determinazione principale) si ha

$$D^{-(n+1)}(1) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

così sarà

$$(25)\qquad D^{-1}\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} D^n\varphi.$$

Questa espressione, che si conferma subito mediante la formula (6) dedotta dal teorema di TAYLOR, ha per campo di validità tutto l'insieme S^0; e se r è il raggio di convergenza di una serie φ di S^0, la (25) è convergente assolutamente ed uniformemente per $|x| < \frac{1}{2}r$.

156. Cambiando, nella (25), φ in $D^{-1}\varphi$, si ottiene facilmente

$$D^{-2}\varphi = \sum(-1)^n \frac{x^{n+2}}{n!(n+2)} D^n\varphi,$$

e così continuando, si trova per ogni m intero e positivo

$$(26)\qquad D^{-m}\varphi = \frac{x^m}{(m-1)} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n!(n+m)} D^n\varphi.$$

La formula (25) era già nota a D. BERNOUILLI; noi daremo pertanto alla (26) il nome di formula di Bernouilli generalizzata. Anche la (26) ha tutto S^0 come campo di validità, colla condizione $|x| < \frac{1}{2} r$ se r è il raggio di convergenza di φ.

157. Essendo φ una serie di potenze di S^0, se μ appartiene ad S^0, vi apparterà anche $\varphi\mu$; la formula (18) sarà dunque applicabile a D^{-1}; ricordando che in questa formula il coefficiente α_n è dato da $A^{(n)}(\mu)$, e che

$$\left(D^{-1}\right)^{(n)}(\mu) = (-1)^n n! D^{-(n+1)}(\mu)$$

si ottiene

$$(27)\qquad D^{-1}(\mu\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n D^{-(n+1)}(\mu) D^n\varphi,$$

ed analogamente

$$(28)\qquad D^{-m}(\mu\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \binom{m+n-1}{n} D^{-(n+m)}(\mu) D^n\varphi.$$

Codesta formula si può dire serie dell' integrazione per parti, perchè essa si può riguardare come l'estensione della formula d'integrazione per parti del Calcolo ordinario:

$$D^{-1}(\mu\varphi) = D^{-1}\mu \cdot \varphi - D^{-1}(D^{-1}\mu \cdot D\varphi) \text{ (}^1\text{)}$$

da cui, applicando nuovamente l'integrazione per parti all'ultimo termine.

$$D^{-1}(\mu\varphi) = D^{-1}\mu \cdot \varphi - D^{-2}\mu \cdot D\varphi + D^{-1}(D^{-2}\mu \cdot D^2\varphi),$$

e così via; finchè dopo n applicazioni dello stesso procedimento si ottiene

$$(29)\qquad D^{-1}(\mu\varphi) = D^{-1}\mu \cdot \varphi - D^{-2}\mu \cdot D\varphi + D^{-3}\mu \cdot D^2\varphi + \dots + (-1)^{n-1}D^{-n}\mu \cdot D^{n-1}\varphi + (-1)^n D^{-1}(D^{-n}\mu \cdot D^n\varphi).$$

Bene inteso, qui va sempre presa la determinazione principale della D^{-n}. Il termine

$$D^{-1}(D^{-n}\mu \cdot D^n\varphi)$$

è il resto dello sviluppo (29), e quando esso tenda a zero, sarà valido lo sviluppo (27).

158. Prima d'indagare le condizioni di validità di questo sviluppo (27), vogliamo dare un limite superiore per $D^{-m}\varphi$, dove $\varphi = \Sigma a_n x^n$ è un elemento di S^0, limite che sarà utile in questa questione ed in altre analoghe. Sia r un numero positivo inferiore al raggio di convergenza della serie φ, e

(1) L'uso del simbolo D^{-1} invece dell'ordinaria notazione degl'integrali non porta evidentemente nessuna differenza.

g il massimo valore assoluto di φ entro il cerchio $[r]$. Si avrà

$$D^{-m}\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+m}}{(n+1)(n+2)\dots(n+m)},$$

onde, se è $|x| = r' < r$, sarà:

$$|D^{-m}\varphi| < \frac{gr'^m}{m!}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 2\dots n}{(m+1)(m+2)\dots(m+n)}\left(\frac{r'}{r}\right)^n;$$

ora, i termini della sommatoria essendo rispettivamente minori di quelli omologhi nella progressione geometrica di ragione $r' : r$, viene

$$|D^{-m}\varphi| < \frac{grr'^m}{m!(r-r')}.$$

In particolare, se si fa $r' \leq \frac{1}{2}r$, si ha

$$(30) \qquad |D^{-m}\varphi| < 2g\frac{r'^m}{m!}.$$

159. Applichiamo il risultato precedente alla serie (27); sia, all'uopo, r un numero positivo maggiore del raggio comune di convergenza di μ e φ, e g il massimo valore assoluto di μ in r; inoltre si faccia $|x| = r' \leq \frac{r}{2}$. Indichiamo con $\overline{\varphi}$ ciò che diviene φ quando ognuno dei suoi coefficienti si sostituisce col rispettivo valore assoluto. Si avrà allora per la (30):

$$|D^{-n}\mu \cdot D^n\varphi| < 2g\frac{r'^n}{n!}D^n\overline{\varphi}(r').$$

Ora, siccome $\overline{\varphi}$ converge in un cerchio maggiore di r ed è $r' < \frac{1}{2}r$, le condizioni di convergenza dello sviluppo del Taylor applicato a $\overline{\varphi}$ dimostrano che il secondo membro della disuguaglianza precedente tende a zero. Il ragionamento del § 158 dimostra che tende a maggior ragione a zero l'espressione $D^{-1}(D^{-n}\mu \cdot D^n\varphi)$, cioè il resto della (29); talchè concludiamo che lo sviluppo (27) è valido per ogni coppia di elementi di S^0, e per i valori di x inferiori in modulo alla metà del minore dei raggi dei due cerchi di convergenza.

Sotto le stesse condizioni è valido anche lo sviluppo (28).

D. LE SERIE DI POTENZE DEL SIMBOLO D^{-1}.

160. Sia $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ una successione di funzioni analitiche, regolari e ad un valore in un'area **a** del piano della variabile x. Sia φ un elemento di S^0, e consideriamo la serie

$$(31) \qquad A(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!} D^{-n}\varphi.$$

Quest'espressione, quando φ sia una funzione analitica regolare in un'area **a'** contenuta in **a** e che rende in quest'area la serie (31) uniformemente convergente, rappresenterà una funzione analitica, che si può riguardare come il risultato dell'operazione A applicata a φ. Codesta operazione è manifestamente distributiva. Rimane sempre ferma la convenzione che della D^{-n} si considera solo la determinazione principale.

L'insieme delle funzioni φ per le quali le condizioni precedenti sono soddisfatte verrà detto campo di validità dell'espressione (31).

161. È facile determinare, per le serie della forma precedente, un campo di validità sotto una condizione che è assai poco restrittiva. Supponga si che il punto $x = o$ appartenga all'area $\mathbf{a}$ [1]; supponga si inoltre, essendo m_n il massimo valore di α_n in $\mathbf{a}$, che si possano determinare due numeri positivi h e c tali che, per ogni n, sia

$$(32) \qquad m_n < hn!c^n.$$

Sotto queste ipotesi, ogni elemento di S^o appartiene al campo di validità della (31).

Sia infatti φ un elemento di S^r, g il suo massimo valore assoluto in $[r]$; sia poi r_1 il raggio di un cerchio di centro $x = o$ e tutto contenuto in $\mathbf{a}$; infine sia r' un numero positivo inferiore ad r, r_1 ed $\frac{1}{c}$. Dal § 158 si avrà, per $|x| < r'$:

$$|D^{-n}\varphi| < \frac{gr r'^n}{n!(r - r')},$$

onde, per la (32):

$$|\alpha_n D^{-n}\varphi| < \frac{ghr}{r - r'} c^n r'^n,$$

il che dimostra il teorema, per essere $cr' < 1$.

162. Sotto le condizioni del § precedente, possiamo ancora dimostrare che se μ e φ sono due elementi di S^o, per valori di x abbastanza piccoli in modulo, è valido per $A(\mu\varphi)$ lo sviluppo di D'ALEMBERT generalizzato (18).

---

[1] Questa prima ipotesi non è essenziale; essendo x_o un punto qualunque di $\mathbf{a}$, se la condizione (32) è soddisfatta, al campo di validità della (31) apparterrà tutto l'insieme delle serie di potenze di $x - x_o$ il cui raggio di convergenza non è nullo.

A quest'effetto, si formi $A(\mu\varphi)$, sostituendo in ogni termine della (31) a $D^{-n}(\mu\varphi)$ lo sviluppo corrispondente dato dalle (27) e (28). Si ottiene così:

$$(33) \qquad A(\mu\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\alpha_n\binom{n+p+1}{p}D^{-(n+p)}(\mu)D^p\varphi.$$

Si prendano ora due numeri positivi r_2, r_3, tali che sia

$$r_2 < r_3 < \frac{1}{2}r';$$

se $\varphi = \Sigma a_s x^s$ e se g_1 è il massimo valore assoluto di φ in $[r]$, si avrà:

$$D^p\varphi = p!\left(a_p + (p+1)a_{p+1}x + \binom{p+2}{2}a_{p+2}x^2 + \ldots\right),$$

onde, per $|x| \leq r_2$

$$|D^p\varphi| < g_1 p!\left(\frac{1}{r^p} + (p+1)\frac{r_3}{r^{p+1}} + \binom{p+2}{2}\frac{r_3^2}{r^{p+2}} + \ldots\right)$$

o infine

$$|D^p\varphi| < \frac{g_1 p!}{(r - r_3)^{p+1}};$$

per l'ipotesi $r_3 < \frac{1}{2}r$, ne viene

$$|D^p\varphi| < \frac{g_1 p!}{r_3^{p+1}}.$$

Essendo ora g il massimo valore assoluto di μ in $[r]$, si ha, in forza del § 158 e per $|x| \leq r$:

$$|D^{-(n+p)}\mu| < 2g\frac{r^{n+p}}{(n+p)!}.$$

Il termine generale dello sviluppo (33) è dunque inferiore a

$$2gg_1m_n\binom{n+p-1}{p}\frac{p!}{(n+p)!}\frac{r_2^{n+p}}{r_3^{p+1}}$$

ossia, per le (32), inferiore a

$$\frac{1}{(n-1)!(n+p)}\frac{2gg_1h}{r_3}(cr_2)^n\left(\frac{r_2}{r_3}\right)^p;$$

e questo è il termine generale d'una serie convergente a termini positivi.

Abbiamo pertanto ottenuto una serie convergente, mediante la sostituzione di numeri positivi, maggiori in valore assoluto, a ciascuno dei termini della serie che forma il secondo membro della (33). Si potrà dunque ordinare la (33) stessa per le potenze di $D\varphi$, e si troverà:

$$\text{(34)}\quad A(\mu\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^p\left(\alpha_1D^{-(p+1)}\mu+\binom{p+1}{1}\alpha_2D^{-(p+2)}\mu+\right.$$
$$\left.+\binom{p+2}{2}\alpha_3D^{-(p+3)}\mu+\dots\right)D^p\varphi.$$

Sotto questa forma, si scorge che lo sviluppo ottenuto è precisamente quello (18), o di D'Alembert generalizzato; in cotesto sviluppo le derivate della serie (31) sono ottenute mediante la derivazione termine a termine, tenute presenti le regole del § 151 per la derivazione delle potenze negative di D.

163. Abbiasi un'operazione data mediante un'espressione della forma (31), di cui si suppongono i coefficienti regolari in un intorno comune di $x=o$; sia cioè:

$$\alpha_n(x)=a_{no}+a_{n1}x+a_{n2}x^2+\dots,$$
$$(n=1,2,3,\dots).$$

Questa operazione contenga nel suo campo di validità un intorno dell'unità, ed abbia per radici tutti gli elementi $1, x, x^2, \dots$ di S^*. Con queste ipotesi, vogliamo dimostrare che tutti i coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ dello sviluppo sono identicamente nulli.

Si ponga infatti $\varphi=x^h$; siccome questa funzione appartiene, per ipotesi, al campo di validità della serie (31), se ne deduce che $A(x^h)$ si potrà sviluppare in una serie di potenze di x; e precisamente

$$A(x^h)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_{no}+a_{n1}x+a_{n2}x^2+\dots)\frac{x^n}{(h+1)(h+2)\dots(h+n)}=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_{on}+\frac{a_{1.n-1}}{h+1}+\right.$$
$$\left.\frac{a_{2.n-2}}{(h+1)(h+2)}+\dots+\frac{a_{n.o}}{(h+1)(h+2)\dots(h+n)}\right)x^n=o,$$

onde segue

$$a_{oo}=o,\ a_{o1}+\frac{a_{1o}}{h+1}=o,$$
$$a_{o2}+\frac{a_{11}}{h+1}+\frac{a_{2o}}{(h+1)(h+2)}=o,\dots$$

Codeste condizioni, le quali devono essere verificate per tutti i valori interi positivi di h, richiedono che tutte le a_{np} siano nulle; infatti, come è facile a vedersi, ciascuna di esse equivale a supporre che un polinomio della forma

$$a_o+a_1z+a_2z(z+1)+\dots+a_nz(z+1)\dots(z-n+1)$$

sia nullo per tutti i valori interi positivi di z: il che porta immediatamente alla conclusione che sono nulli i coefficienti $a_o, a_1, \dots a_n$.

164. L'osservazione precedente permette di dedurre che se due serie della forma (31) danno lo stesso risultato per tutti gli elementi di un intorno dell' unità, e in particolare per gli elementi di S^{ω}, esse coincidono nei loro coefficienti. Onde segue che si può applicare il metodo dei coefficienti indeterminati per il calcolo delle serie di quella forma.

165. Tutto quanto si è detto per le serie della forma (31), compresi i risultati degli ultimi due §§, si può ripetere senza modificazioni per le operazioni distributive rappresentate da serie della forma

$$\sum_{n=-m}^{\infty} \alpha_n D^{-n}\varphi. \tag{35}$$

CAPITOLO SETTIMO.

Prime applicazioni del calcolo funzionale

A. LE OPERAZIONI COMMUTABILI COLLA DERIVAZIONE.

166. Nel capitolo precedente si sono studiate in generale le operazioni rappresentate da serie ordinate per le potenze del simbolo D. Si è desunta l'importanza di tali sviluppi nella teoria delle operazioni distributive dai seguenti due fatti:

a) che ogni tale serie

$$A(\varphi) = \sum \frac{\alpha_n}{n!} D^n \varphi \tag{1}$$

dove le α_n sono funzioni analitiche regolari in un' area comune **a** del piano della variabile, rappresenta un' operazione distributiva applicabile ad ogni elemento φ di S^0, appartenente ad un intorno conveniente dell' unità;

b) che ogni operazione definita in modo qualsivoglia per una funzione μ e per un suo intorno, può venire rappresentata (§ 147) da uno sviluppo della forma (1).

Vogliamo ora considerare il caso particolare in cui i coefficienti α_n si riducono a numeri, che indicheremo con a_n; vogliamo cioè studiare le operazioni rappresentate da sviluppi a coefficienti *numerici*, o costanti, della forma:

$$A(\varphi) = \sum \frac{a_n}{n!} D^n \varphi. \tag{2}$$

Intanto, ogni tale operazione ammetterà, come segue dal § 131, un campo di validità; inoltre, per il § 134, sappiamo che si potrà determinare in questo campo un intorno dell'unità costituito da serie di potenze cui l'operazione A è applicabile termine a termine.

167. A queste proprietà comuni colle serie (1), se ne aggiungono altre; in particolare le seguenti, la cui dimostrazione è immediata:

a) Ogni serie (2) rappresenta un' operazione commutabile con D.

b) La derivata funzionale di A è un'operazione della stessa forma.

c) Il prodotto di due operazioni, rappresentate da serie della forma (2), è rappresentato da una serie che si forma colla regola stessa del prodotto di due serie di potenze; cioè, se

$$A(\varphi) = \Sigma a_n D^n \varphi, \quad B(\varphi) = \Sigma b_n D^n \varphi,$$

sarà

$$AB(\varphi) = \Sigma(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0) D^n \varphi.$$

Da questa osservazione risulta che

d) le operazioni della forma (2) costituiscono un gruppo;

e che

e) due operazioni della forma (2) sono fra loro commutabili.

Come esempio di operazioni della forma (2), citiamo la θ^z (§ 132) che per tutti gli elementi di $\mathfrak{S}^1$ si può scrivere

$$\theta^z = 1 + zD + \frac{z^2}{1 \cdot 2} D^2 + \dots$$

168. Supponiamo che un' operazione rappresentata da una serie della forma (1) debba essere commutabile con D. Si avrà da una parte

$$AD = \alpha_0 D\varphi + \alpha_1 D^2\varphi + \frac{\alpha_2}{1 \cdot 2} D^3\varphi + \dots;$$

dall'altra (indicando le derivate delle funzioni α mediante accenti):

$$DA = \alpha'_0 \varphi + (\alpha_0 + \alpha'_1) D\varphi + \left(\alpha_1 + \frac{\alpha'_2}{1 \cdot 2}\right) D^2\varphi + \dots$$

Dal confronto di questi due risultati, se deve essere AD = DA, si deduce (§ 13)

$$\alpha'_0 = 0, \ \alpha'_1 = 0, \ \alpha'_2 = 0, \dots$$

cioè la serie (1) è a coefficienti costanti. Si è così ottenuta la proposizione inversa di quella del § 167, *a*.

169. Se B è un'operazione univoca che trasforma lo spazio $\mathfrak{S}$ in sè ed ammette in $\mathfrak{S}$ l'unica radice ω, e se A è un'operazione pure univoca in $\mathfrak{S}$, commutabile con B e che non ammette ω come radice, si è visto (cap. III, § 68) che A si può sviluppare nella forma

(3) $$A = k_0 + k_1 B + k_2 B^2 + \dots \text{ (}^1\text{)}$$

dove k_0 è diverso da zero; e l'operazione A si è detta **regolare** rispetto a B. Si è pure visto come sia univocamente determinata la successione dei coefficienti k_0, k_1, k_2, ... Da ciò, e dai risultati dei precedenti §§ 167-168, concludiamo:

a) che ogni operazione della forma (2) è commutabile con D;

b) che ogni operazione della forma (1) commutabile con D, si riduce ad avere i coefficienti costanti;

---

(1) Nel cap. III, lo sviluppo (3) qui ricordato aveva solo un significato formale; non si poteva allora dire nulla di generale circa all'esistenza di enti cui fossero applicabili le operazioni A e B e tali da rendere uguali i due membri della (1). Invece nel caso attuale, al significato formale si aggiunge un valore effettivo per lo sviluppo (3), poichè, fatto B = D, è accertata l'esistenza di un campo di validità per lo sviluppo stesso.

c) che ogni operazione commutabile con D, univoca in S^0 e che non ammette come radice l'unità, è regolare in D e come tale sviluppabile in serie della forma (2).

170. Dell'inversa di un'operazione A, regolare rispetto a D e che non ammetta la costante come radice:

$$A = a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \ldots,$$

si può dare un'espressione pure regolare rispetto a D; infatti, come risulta dal § 71, si avrà:

$$(4) \qquad A^{-1} = b_0 + b_1 D + b_2 D^2 + \ldots,$$

dove le b_n sono determinate da:

$$a_0 b_0 = 1,\ a_0 b_1 + a_1 b_0 = o,\ a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = o \ldots$$

Essendo $a_0 \neq o$, per ipotesi, i coefficienti $b_0, b_1, b_2, \ldots$ sono univocamente determinati; essi non differiscono da quelli dello sviluppo di $\dfrac{1}{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots}$ in serie di potenze di z.

Ad esempio, un'espressione dell'inversa della forma differenziale di prim'ordine

$$E = D - z$$

è data dalla serie

$$(5) \qquad E^{-1} = -\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} D + \frac{1}{z^3} D^2 + \ldots\right);$$

al campo di validità di questa serie appartiene, come si scorge immediatamente, ogni serie di potenze $\varphi(x) = \Sigma c_n x^n$, i cui coefficienti soddisfino alla condizione

$$|c_n| < \frac{t^n}{n!}$$

dove t è un numero positivo minore di $|z|$.

171. Sullo sviluppo (4) della A^{-1} si deve fare un'osservazione importante. Supponiamo che la A ammetta radici nello spazio S, e sia ω una di queste radici. Allora la A^{-1} sarà a determinazione multipla; cioè se $A^{-1}(\varphi) = \psi$, sarà anche $A^{-1}(\varphi) = \psi + c\omega$. essendo c un numero arbitrario. Uno sviluppo di A^{-1}, accanto a (4), sarà dunque

$$(6) \qquad A^{-1}(\varphi) = c\omega + b_0\varphi + b_1 D\varphi + b_2 D^2\varphi + \ldots$$

Ora, l'osservazione cui accennavamo è che questo sviluppo non è più commutabile con D. Ciò si verifica subito; infatti

$$A^{-1}D\varphi = c\omega + b_0 D\varphi + b_1 D^2\varphi + b_2 D^3\varphi + \ldots$$

mentre

$$DA^{-1}\varphi = cD\omega + b_0 D\varphi + b_1 D^2\varphi + b_2 D^3\varphi + \ldots$$

Concludiamo dunque che l'inversa di un'operazione commutabile colla derivazione non è tale in generale, ma se l'operazione A è regolare in D, fra le determinazioni (o, come diremo anche, fra i *rami*) dell'operazione A^{-1} ve n'è una pure regolare in D, e quindi commutabile con D.

172. Alla precedente si collega un'altra osservazione non meno notevole. Consideriamo ancora un'operazione A regolare in D, ed il ramo di A^{-1} pure regolare in D, sviluppabile secondo la serie (4) e che diremo A_1. Vogliamo mostrare che la radice ω di A non può appartenere al campo di validità di questo sviluppo A_1. Infatti, se così fosse, si avrebbe da una parte, per la definizione di A_1

$$AA_1(\omega) = \omega;$$

d'altra parte, essendo manifestamente A_1 commutabile con A:

$$AA_1(\omega) = A_1A(\omega) = A_1(o),$$

e questa, per la forma stessa di A_1, è nulla (¹).

Così, ad esempio, la funzione e^{zx}, radice dell'operazione E considerata al § 170, non appartiene al campo di validità della serie (5); e siccome e^{tx} vi appartiene per ogni $|t|<|z|$, si può dire, in qualche modo, che essa segna il contorno di questo campo. Così pure, la costante è radice di D, e pertanto D^{-1} non può ammettere uno sviluppo della forma (2), poichè questo conterrebbe necessariamente la costante nel suo campo di validità.

173. Riprendiamo lo sviluppo

$$(2)\quad A(\varphi) = a_0\varphi + a_1 D\varphi + \frac{a_2}{1\cdot 2}D^2\varphi + \frac{a_3}{1\cdot 2\cdot 3}D^3\varphi + \ldots,$$

ed indichiamo con $\alpha(z)$ la serie

$$a_0 + a_1 z + \frac{a_2}{1\cdot 2}z^2 + \frac{a_3}{3!}z^3 + \ldots,$$

e con $\alpha'(z)$, $\alpha''(z)$, ... le sue derivate: supponendosi che z si trovi entro il cerchio di convergenza di cotesta serie. Ponendo, come dianzi, $E = D - z$, ne viene

$$D = E + z, \quad D^2 + 2zE + z^2, \ldots$$

e sostituendo in (2) ed ordinando per le potenze di E la serie che ne viene, per quel campo funzionale in cui essa converge assolutamente, si trova senza difficoltà essere:

$$(7)\qquad A(\varphi) = \alpha(z)\varphi + \alpha'(z)E\varphi + \frac{\alpha''(z)}{1\cdot 2}E^2\varphi + \ldots$$

(¹) **Questa osservazione si generalizza facilmente, estendendosi ad ogni operazione A regolare rispetto ad un'operazione B ad essa commutabile, com'è considerato al cap. III. Esiste per A^{-1} un ramo regolare rispetto a B; ma lo sviluppo di cotesto ramo non può contenere, nel suo campo di validità, alcuna radice di B.**

Questo sviluppo è valido per l'intorno di e^{zx}, che annulla E; esso può, in certi casi, servire a dare una espressione di A anche in campi funzionali in cui la serie di definizione (2) non sia valida.

174. Notiamo che il passaggio della (2) alla (7) dipende dal fatto che le potenze di A in funzione di E si formano colle regole della moltiplicazione ordinaria. Ora lo stesso accade nel caso più generale, in cui si abbia una operazione A regolare rispetto ad un'operazione B ad essa commutabile. Dallo sviluppo

$$A = a + a_1 B + \frac{a_2}{2!}B^2 + \frac{a_3}{3!}B^3 + \ldots$$

si deduce formalmente, posto $E = B - z$ ed $\alpha(z) = \sum\frac{a_n z^n}{n!}$:

$$A = \alpha(z) + \alpha'(z)E + \frac{\alpha''(z)}{1\cdot 2}E^2 + \ldots,$$

la cui validità sarà sempre effettiva nel caso che $\alpha(z)$ si riduca ad un polinomio.

B. RADICI DI UNA FORMA LINEARE A COEFFICIENTI NUMERICI IN UNA OPERAZIONE DATA.

175. Ci proponiamo ora di cercare le radici di un'operazione regolare in D, e più particolarmente di una forma differenziale lineare a coefficienti costanti; ma siccome questo problema richiede, per la sua soluzione, quelli stessi principî che servono alla soluzione del problema più generale, della ricerca delle radici di un'operazione regolare rispetto ad un'operazione B ad essa commutabile, ed in particolare di una forma lineare a coefficienti numerici in

B (§ 66), così noi ci occuperemo di tale questione più generale.

176. Abbiasi pertanto un' operazione B, definita univocamente in uno spazio $\mathfrak{S}$ di funzioni analitiche, e si faccia l' ipotesi che l' operazione

$$E_z = B - z$$

ammetta in $\mathfrak{S}$ una sola radice $\omega(z)$ [1], funzione analitica, oltrecchè di x, anche del parametro z e regolare e diversa da zero nell' intorno di un punto z_0 del piano z.

Si può, senza restrizione, supporre $z_0 = o$; pertanto, scriveremo, essendo ω_0, ω'_0, ω''_0, ... funzioni analitiche di x

$$(8) \qquad \omega(z) = \omega_0 + \omega'_0 z + \omega''_0 \frac{z^2}{1\cdot 2} + \dots$$

Sotto queste ipotesi, vogliamo mostrare che

l' operazione E_z^m ammette come radice propria la $\frac{d^{m-1}\omega(z)}{dz^{m-1}}$.

A dimostrare ciò, notiamo che essendo z un punto qualsivoglia dell' intorno indicato di $z = o$, si ha per ipotesi:

$$E_z\omega(z) = o,$$

cioè

$$B\omega(z) = z\omega(z),$$

Ne viene, applicando ripetutamente l' operazione B ai due membri di questa ultima uguaglianza:

$$B^2\omega(z) = z^2\omega(z), \dots B^n\omega(z) = z^n\omega(z)$$

e quindi

$$\Sigma k_n B^n\omega(z) = \omega(z)\Sigma k_n z^n.$$

(1) Astrazione fatta, bene inteso (§ 50), da un moltiplicatore costante arbitrario.

In particolare, se z_1 è un secondo punto dell' anzidetto intorno di $z = o$, sarà:

$$(9) \qquad \sum_{n=0}^{m}(-1)^n\binom{m}{n}z_1^n B^{m-n}\omega(z) = E_{z_1}^m\omega(z) = (z - z_1)^m\omega(z).$$

Si sviluppi ora la $\omega(z)$ per le potenze di $z - z_1$:

$$\omega(z) = \omega(z_1) + \frac{d\omega}{dz_1}(z - z_1) + \frac{1}{2}\frac{d^2\omega}{dz_1^2}(z - z_1)^2 + \dots,$$

e si applichi ai due membri l' operazione $E_{z_1}^m$, tenendo conto della relazione (9). Lo sviluppo mancherà di tutti i termini contenenti potenze di $z - z_1$ di esponente inferiore ad m, e perciò si avrà:

$$(10) \qquad E_{z_1}^m\omega(z_1) = o, \quad E_{z_1}^m\frac{d\omega}{dz_1} = o, \dots, \quad E_{z_1}^m\frac{d^{m-1}\omega}{dz_1^{m-1}} = o,$$

ed inoltre

$$(11) \qquad E_{z_1}^m\frac{d^m\omega}{dz^m} = m!\omega(z_1), \quad E_{z_1}^m\frac{d^{m+r}\omega}{dz_1^{m+r}} = \frac{(m+r)!}{r!}\frac{d^r\omega}{dz_1^r}$$

Dalle (10) ed (11) consegue che $\frac{d^{m-1}\omega}{dz_1^{m-1}}$ è radice di $E_{z_1}^m$ ma non di $E_{z_1}^{m-1}$, ed è pertanto dimostrato l'asserto, che cioè $\frac{d^{m-1}\omega}{dz_1^{m-1}}$ è radice propria di $E_{z_1}^m$. Inoltre, risulta chiaramente che essa è l' unica radice propria di $E_{z_1}^m$, perchè nell' ipotesi contraria si concluderebbe subito che E_{z_1} avrebbe una radice diversa da $\omega(z_1)$, il che è contrario al supposto.

177. Data un' operazione regolare in B

$$A = a_0 + a_1 B + a_2 B^2 + \dots$$

se la serie $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$ ammette il divisore $(t-z)^m$, la A si potrà scindere identicamente nel prodotto

$$A = E^m_z\, A_1,$$

dove A_1 è un'operazione della stessa forma di A. Risulta dal teorema del § precedente che le radici di E^m_z linearmente indipendenti fra loro, sono

$$\omega(z),\ \frac{d\omega}{dz},\ \frac{d^2\omega}{dz^2},\ \dots,\ \frac{d^{m-1}\omega}{dz^{m-1}},$$

e queste sono radici di A.

178. Il teorema del § 176 permette ancora di t r o v a r e l o s p a z i o d i r a d i c i d i u n a f o r m a l i n e a r e i n B, a c o e f f i c i e n t i n u m e r i c i:

$$A = a_0 + a_1 B + a_2 B^2 + \dots + a_n B^n.$$

A questo scopo serve la teoria svolta nel Cap. IV. Si consideri infatti l'equazione

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n = o;$$

siano $z_1, z_2, \dots z_s$ le sue radici, degli ordini rispettivi di moltiplicità $r_1, r_2, \dots r_s$. Si avrà

$$f(t) = a_n (t-z_1)^{r_1} (t-z_2)^{r_2} \dots (t-z_s)^{r_s}$$

e di conseguenza

$$A = E^{r_1}_{z_1} E^{r_2}_{z_2} \dots E^{r_s}_{z_s}.$$

Per i teoremi del cap. III (§ 63) lo spazio di radici di A sarà la somma degli spazi di radici di $E^{r_1}_{z_1}$, $E^{r_2}_{z_2}, \dots E^{r_s}_{z_s}$; ma, per quanto si ha dal § 178, la $E^{r_i}_{z_i}$, ha per sole radici linearmente indipendenti le

$$\omega(z_1),\ \frac{d\omega}{dz_1},\ \frac{d^2\omega}{dz_1^2},\ \dots\ \frac{d^{r_1-1}\omega}{dz_1^{r_1-1}} \tag{12}$$

talchè il sistema (12) è (§§ 86 e segg.) il sistema fondamentale dello spazio di radici di A. (1).

179. Il seguente problema:

t r o v a r e l o s p a z i o d e l l e r a d i c i d e l l a f o r m a l i n e a r e i n D a c o e f f i c i e n t i c o s t a n t i

$$A = a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \dots a_n D^n,$$

o, in altri termini, i n t e g r a r e l'e q u a z i o n e d i f f e r e n z i a l e l i n e a r e a c o e f f i c i e n t i c o s t a n t i $A = o$, è evidentemente contenuto come caso particolare nella questione risoluta nel § precedente. Basta notare che la $E_z = D - z$ soddisfa alla condizione del § 176, ammettendo come sola radice la $\omega(z) = e^{zx}$; se dunque sarà:

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n = a_n (t-z_1)^{r_1} (t-z_2)^{r_2} \dots (t-z_s)^{r_s},$$

il sistema fondamentale dello spazio di radici di A sarà dato da

$$e^{z_i x},\ x e^{z_i x},\ x^2 e^{z_i x},\ \dots,\ x^{r_i-1} e^{z_i x}, \qquad (i = 1, 2, \dots, s). \tag{13}$$

180. Lo stesso problema risoluto al § 178 dà anche la risoluzione del sistema di equazioni funzionali simultanee a coefficienti numerici:

$$\begin{cases} B(\varphi_1) = a_{11}\varphi_1 + a_{12}\varphi_2 + \dots + a_{1n}\varphi_n \\ B(\varphi_2) = a_{21}\varphi_1 + a_{22}\varphi_2 + \dots + a_{2n}\varphi_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ B(\varphi_n) = a_{n1}\varphi_1 + a_{n2}\varphi_2 + \dots + a_{nn}\varphi_n \end{cases}$$

(1) Per l'argomento trattato nei precedenti §§ 175-178, v. PINCHERLE, *Sulle operazioni distributive commutabili con una operazione data* (Atti della R. Accademia di Torino. T, XXX, 1895) ed una memoria di C. BOURLET: *Sur certaines équations analogues aux équations différentielles* (Ann. de l'Éc. Norm. Sup., S. III, T. XVI, 1899).

dove B è un'operazione soddisfacente alle ipotesi del § 176; ne lasciamo la facile discussione al lettore. [1].

C. I POLINOMÎ DI APPELL.

181. Definiamo uno speciale sistema di polinomî, che gode di proprietà notevoli e che, oltre ad essere in istretta relazione colle operazioni commutabili colla derivazione, ci servirà anche a definire un'altra classe particolare di operazioni distributive interessanti. Questi polinomî si diranno polinomî di APPELL, per lo studio che ne ha fatto questo autore. [2]

Data una successione di numeri

$$a_0, a_1, a_2, \dots a_n, \dots$$

diremo polinomi di APPELL corrispondenti a questa successione, i polinomî

$$\pi_n(x) = a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} + \binom{n}{2} a_2 x^{n-2} + \dots + n a_{n-1} x + a_n. \tag{14}$$

Si riguarderanno come identicamente nulli gli enti $\pi(x)$ per un valore negativo dell'indice.

Come esempî di polinomî di APPELL possiamo citare:

a) le potenze di x, corrispondenti alla successione

$$1, o, o, \dots, o, \dots;$$

b) le potenze di $1 + x$, corrispondenti alla successione

$$1, 1, 1, \dots, 1, \dots;$$

[1] V. la nota citata *Sulle operazioni distributive commutabili*, ecc.

[2] Annales de l'Éc. Norm., Ser. II, T. IX, 1880.

c) i polinomî $x - nx^{n-1}$, corrispondenti alla successione

$$1, -1, o, o, \dots,$$

d) i polinomî

$$x^n + nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \dots + n!,$$

corrispondenti alla successione

$$1, 1, 1 \cdot 2, \dots, n!, \dots;$$

ecc.

182. I polinomî di APPELL, corrispondenti ad una successione qualsivoglia, soddisfano alla relazione:

$$D\pi_n(x) = n\pi_{n-1}(x). \tag{15}$$

Questa relazione si verifica immediatamente derivando la (14). Essa relazione appartiene alla classe delle equazioni miste differenziali e alle differenze [1]; è differenziale rispetto alla variabile x, alle differenze rispetto alla variabile n.

183. Reciprocamente, la soluzione generale della equazione (15) è data da un sistema arbitrario di polinomî di Appell.

Se infatti si pone, nella relazione (15), $n = o$, facendo la sola ipotesi che $\pi_{n-1}(x)$ sia una funzione analitica, ne viene $D\pi_0 = o$, onde $\pi_0 = a_0$; facendo $n = 1$, si ottiene $\pi_1 = a_0 x + a_1$, poi $\pi_2 = a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2$, e così via; si giunge infine all'espressione (14) per $\pi_n(x)$, e si vede che la successione $a_0, a_1, a_2, \dots$ generatrice del sistema di polinomî $\pi_n(x)$, non è altro che il sistema delle costanti arbitrarie portate dall'integrazione dell'equazione (15).

[1] I francesi dicono: *équations aux différences mêlées.*

184. Ogni operazione, commutabile con D e definita univocamente in $\mathfrak{S}$, ammette come funzioni ξ_n [1] un sistema di polinomî di APPELL.

Infatti, se una tale operazione si suppone regolare in D (§ 69), ed è quindi rappresentata in un'intorno dell'unità da una serie della forma

$$A = a_0 + a_1 D + \frac{a_2}{1\cdot 2} D^2 + \ldots + \frac{a_n}{n!} D^n + \ldots,$$

basta fare l'applicazione di questa operazione all'elemento x^n di $\mathfrak{S}$ per ottenere come risultato

$$\xi_n = a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n,$$
$$(n = o, 1, 2, \ldots)$$

e questo è precisamente il sistema dei polinomî di APPELL corrispondente alla successione $a_0, a_1, a_2, \ldots$ dei coefficienti della serie A. Ma anche senza ammettere per la A l'espressione in forma di serie, si supponga la A stessa univocamente definita in $\mathfrak{S}$ dalle

$$A(x^n) = \xi_n;$$

ne viene, prendendo la derivata e notando che A è commutabile con D:

$$DA(x^n) = ADx^n,$$

cioè

$$D\xi_n = n\xi_{n-1}.$$

Le ξ_n formano dunque un sistema di polinomî di APPELL.

---

[1] Il lettore ricordi che essendo A un'operazione applicabile agli elementi di $\mathfrak{S}$, usiamo indicare con ξ_n l'elemento $A(x^n)$.

185. Ogni operazione A univocamente definita in $\mathfrak{S}$, e per cui le ξ_n sono un sistema di polinomî di APPELL, è regolare (§ 69) in D.

Infatti, dall'essere

$$\xi_n = a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} + \binom{n}{2} a_2 x^{n-2} + \ldots,$$

si deduce con una semplicissima verificazione di calcolo (§ 128, formula (3)), che il coefficiente α_n di $\frac{1}{n!}D^n$ nello sviluppo di A in serie di potenze di D è precisamente la costante a_n. L'operazione A è dunque commutabile con D e regolare in D.

Emerge anche da quanto precede il risultato già ottenuto (§ 169), che ogni operazione commutabile con D e definita univocamente in $\mathfrak{S}$ è regolare in D.

186. Per ogni operazione A regolare in D esiste in $\mathfrak{S}$ uno spazio funzionale di validità, ed in questo, uno spazio ai cui elementi (che sono serie di potenze) l'operazione A è applicabile termine a termine (§§ 134, 166). Ne risulta che, per un elemento di questo spazio, ad esempio $\varphi(x) = \Sigma c_n x^n$, l'operazione $A(\varphi)$ ha per effetto di sostituire ad x^n il polinomio ξ_n di APPELL; una tale operazione è stata considerata dall'APPELL stesso al § 12 della sua Memoria.

187. Siano A, B due operazioni regolari in D, e sia

$$A = a_0 + a_1 D + \frac{a_2}{1\cdot 2} D^2 + \ldots,$$
$$B = a'_0 + a'_1 D + \frac{a'_2}{1\cdot 2} D^2 + \ldots,$$

Il prodotto di queste operazioni gode pure della proprietà di essere regolare in D, ed è rappresentato (§ 167) da

$$AB = a_0 a'_0 + (a_0 a'_1 + a_1 a'_0) D + \frac{1}{1\cdot 2}(a_0 a'_2 + $$
$$+ 2 a_1 a'_1 + a_2 a'_0) D^2 + \ldots$$

Si indichino con $\xi_n^{(1)}$ le $A(x^n)$, con $\xi_n^{(2)}$ le $B(x^n)$, con $\xi_n^{(3)}$ le $AB(x^n)$; si avrà:

$$\xi_n^{(3)} = a_0 a'_0 x^n + n(a_0 a'_1 + a_1 a'_0) x^{n-1} + \binom{n}{2}(a_0 a'_2 + \\ + 2a_1 a'_1 + a_2 a'_0) x^{n-2} + \ldots;$$

e la $\xi_n^{(3)}$, simmetrica nelle a e nelle a', si ottiene sostituendo le $\xi_i^{(2)}$ al posto delle corrispondenti potenze x^i della variabile in $\xi_n^{(1)}$, o le $\xi_i^{(1)}$ al posto delle corrispondenti potenze della variabile in $\xi_n^{(2)}$.

188. Essendo A un' operazione regolare in D e che non ammette la costante come radice:

$$A = a_0 + a_1 D + \frac{a_2}{1 \cdot 2} D^2 + \ldots, \quad (a_0 \neq o),$$

sappiamo (§§ 71, 170) determinare l'inversa A^{-1}, che è pure regolare in D. Le $A^{-1}(x^n)$ saranno polinomî di APPELL, e posto

$$A(x^n) = \xi_n, \quad A^{-1}(x^n) = \xi'_n,$$

l'APPELL chiama le ξ'_n inverse delle ξ_n. Le ξ'_n hanno la proprietà che sostituendovi le ξ_i al posto delle corrispondenti potenze x^i della variabile, si ritrova x^n; in altri termini, dal sistema

$$\xi_n = a_n + n a_{n-1} x + \binom{n}{2} a_{n-2} x^2 + \ldots + a_0 x^n$$
$$(n = o, 1, \ldots)$$

si ricava

$$x^n = b_n \xi_0 + n b_{n-1} \xi_1 + \binom{n}{2} b_{n-2} \xi_2 + \ldots + b_0 \xi_n,$$
$$(n = o, 1, \ldots)$$

dove le $b_0, b_1, \ldots, b_n$ sono i coefficienti dello sviluppo di A^{-1}, cioè la successione cui corrispondono i polinomî ξ'_n, inversi di ξ_n. Come esempi di sistemi di polinomî inversi, citiamo il sistema $(x - 1)^n$ inverso di $(x + 1)^n$, il sistema

$$x^n + n x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} + \ldots + n!$$

inverso di $x^n - n x^{n-1}$, ecc.

189. La teoria delle operazioni regolari in D e la connessa teoria dei polinomî di APPELL dà la soluzione della seguente questione:

Trovare lo sviluppo di un elemento φ di $\mathfrak{S}_0$ in serie ordinate secondo i polinomî di APPELL *di un sistema dato $\pi_n(x)$.*

A tale scopo, sia A l'operazione regolare in D definita nello spazio $\mathfrak{S}$ da

$$A(x_n) = \pi_n(x).$$

Se si determina una serie di potenze $\psi(x) = \sum k_n x^n$, tale che sia $A(\psi) = \varphi$, dove φ è la serie data, il problema sarà formalmente risoluto e lo sviluppo richiesto sarà

$$\varphi = \sum_{n=o}^{\infty} k_n \pi_n(x).$$

La soluzione così ottenuta è però puramente formale; per riconoscerne la validità, occorrerà vedere se la serie ψ, che risolve l'equazione $A(\psi) = \varphi$, appartenga a quella porzione dello spazio $\mathfrak{S}$, indicata al § 186, in cui l'operazione A è applicabile termine a termine.

L'equazione funzionale

$$A(\psi) = \varphi,$$

la cui risoluzione ha risposto al quesito enunciato in principio del presente §, di sviluppare cioè la funzione data φ

in serie di polinomî dati di APPELL, è in sostanza un'equazione differenziale lineare non omogenea, a coefficienti costanti e ad infiniti termini. Questa operazione può ammettere una infinità di soluzioni; ciò è quanto dire che $A^{-1}(\varphi)$ è a determinazione multipla; sappiamo infatti che se ad una soluzione qualunque ψ_1 della detta equazione aggiungiamo una radice arbitraria di A, otteniamo una nuova soluzione dell' equazione stessa. Ma non ogni soluzione sarà una serie soddisfacente alla condizione che l'operazione A le sia applicabile termine a termine, e perciò non servirà sempre a dare uno sviluppo di φ in serie di polinomî di APPELL. Quando accade che due soluzioni distinte

$$\psi = \Sigma k_n x^n, \quad \psi_1 = \Sigma k'_n x^n$$

dell' equazione soddisfanno alla detta condizione, la loro differenza dà

$$A\left(\Sigma(k_n - k'_n)x^n\right) = o$$

e si ha quindi lo sviluppo dello zero in serie di polinomî di APPELL:

$$\Sigma(k_n - k'_n)\pi_n(x) = o.$$

La ricerca di tali sviluppi dello zero è dunque collegata colla ricerca delle soluzioni dell'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti e ad infiniti termini $A = o$.

Per darne un esempio, consideriamo le ξ_n della operazione $A = 1 - D$; essi sono i binomî

$$\xi_n = x^n - nx^{n-1}.$$

Essendo e^x radice dell' operazione A, si avrà lo sviluppo dello zero:

$$o = 1 + (x-1) + \frac{x^2 - 2x}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{x^n - nx^{n-1}}{n!} + \ldots$$

190. Data una successione $a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots$, proponiamoci di trovare il comportamento assintotico (§ 133) del sistema di polinomî di APPELL che essa definisce. A tale scopo, si consideri l' operazione

$$A(\varphi) = \sum \frac{a_n}{n!} D^n\varphi,$$

e si supponga che la serie $\Sigma a_n x^n$ appartenga ad S^o (non sia costantemente divergente). La serie $\sum \frac{a_n}{x^{n+1}}$ definisce allora una funzione analitica $\alpha(x)$, che la serie stessa rappresenta nell' intorno di $x = \infty$; siano u genericamente i punti singolari della funzione; si avrà, eseguendo le derivazioni rispetto alla x,

$$A\left(\frac{1}{z-x}\right) = \sum \frac{a_n}{(z-x)^{n+1}} = \alpha(z-x)$$

i cui punti singolari saranno dati da $z - x = u$. Sia u_x il punto singolare per il quale $x + u$ raggiunge il modulo massimo; per $|z| > |x + u_x|$ la $\alpha(z-x)$ sarà sviluppabile in serie di potenze di $\frac{1}{z}$, e si avrà, come risulta subito dal facile calcolo:

$$A\left(\frac{1}{z-x}\right) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \xi_n(x),$$

dove le $\xi_n(x)$ sono i polinomî di APPELL corrispondenti alla successione data. Ne risulta (§ 133)

$$\xi_n(x) \backsim |x + u_x|^n,$$

e si ha così il comportamento assintotico di $\xi_n(x)$ per $n = \infty$.

In particolare, se $\Sigma a_n x^n$ è una trascendente intera, l' unico valore di u sarà $u = o$, e la condizione precedente diviene

$$\xi_n \backsim x^n.$$

191. Ferme le ipotesi del § precedente, sia $\varphi(x)$ una funzione analitica di cui ci limiteremo a considerare un ramo ad un valore nella stella di MITTAG-LEFFLER corrispondente, di vertice o. Indichiamo con v l'insieme dei punti posti al contorno della stella.

Si ha, per ogni funzione φ appartenente al campo di validità di A:

$$\mathrm{A}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \mathrm{D}^n \varphi\,;$$

indichiamo con $\psi(x)$ la funzione rappresentata da questa serie. Poichè A è commutabile con D, sarà del pari commutabile con θ^z, e si avrà

$$\psi(x+z) = \mathrm{A}\big(\varphi(x+z)\big)\,;$$

ponendo per $\varphi(x+z)$ il suo sviluppo di TAYLOR

$$\varphi(x+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \mathrm{D}^n \varphi(x)$$

verrà, applicando ora la A alle funzioni di z (§ 186)

$$\psi(x+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathrm{D}^n \varphi(x) \cdot \xi_n(z). \tag{16}$$

Questa formula, che dà una notevole generalizzazione della serie del TAYLOR, è dovuta all'HALPHEN. (1)

192. La (16) ci permette intanto di dare della $\mathrm{A}(\varphi)$ una nuova espressione, di cui l'area di convergenza è generalmente più estesa di quella dell'operazione stessa sotto

(1) Comptes rendus de l'Académie des Sciences, T. XCIII, p. 833. Paris, 1881.

la forma (2). Cambiando infatti, nella (16), x in $x - z$, viene:

$$\mathrm{A}(\varphi) = \psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathrm{D}^n \varphi(x-z) \cdot \xi_n(z). \tag{17}$$

È facile dare le condizioni di convergenza di questo sviluppo. Per il § 190 si ha:

$$\xi_n(z) \backsim |z + u_z|^n,$$

per il § 133, si ha:

$$\frac{1}{n!} \mathrm{D}^n \varphi(x-z) \backsim \frac{1}{|x - z - v_x|^n},$$

essendo v_x il punto v per il quale $|x - z - v_x|$ è minimo. Ne viene che, nel piano x, l'area di convergenza dello sviluppo (17) è limitato dai luoghi dei punti x soddisfacenti alle condizioni

$$|z + u| = |x - z - v|$$

condizioni che definiscono i punti delle circonferenze di centro $z + v$ e di raggio $|z + u|$. Su queste circonferenze devono dunque trovarsi i punti singolari nella funzione $\psi(x)$. Ma questi punti sono indipendenti da z; si è quindi condotti a cercare i punti delle predette circonferenze che non variano al variare di z, e si scorge senza difficoltà che tali punti sono quelli rappresentati da $v - u$. (1)

(1) Questa conclusione conduce ad un teorema della teoria delle funzioni stato enunciato recentemente dall'HURWITZ, (Comptes rendus, 6 febbraio 1899); e da lui dimostrato in un caso speciale. Su quel teorema dell'HURWITZ, v. PINCHERLE, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 5 marzo 1899.

D. LE OPERAZIONI CHE TRASFORMANO UNO SPAZIO AD INFINITE DIMENSIONI IN UNO SPAZIO AD UN NUMERO FINITO DI DIMENSIONI.

193. Abbiamo già avuto esempio, al § 132, di una particolare operazione che ha la proprietà di trasformare in una costante ogni funzione dello spazio $\mathfrak{S}^o$. Si può proporre il problema di cercare le operazioni più generali della forma (1) che ammettono questa proprietà: in altri termini, cercare quelle operazioni che ad un insieme lineare ad infinite dimensioni, intorno dell'unità, fanno corrispondere l'insieme ad una dimensione costituito dalla costante arbitraria. A proposito di questa questione, avremo da notare un nuovo ufficio dei polinomî dell'Appell.

194. Sia

$$\mathrm{H}(\varphi) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!} \mathrm{D}^n \varphi$$

un'operazione avente la richiesta proprietà. Per ogni elemento φ di $\mathfrak{S}^o$, appartenente al campo di validità della serie precedente, dovrà essere $\mathrm{H}(\varphi) = c$, essendo c una costante numerica. Ma se φ appartiene al detto campo di validità, la serie $\mathrm{H}(\varphi)$ sarà, per definizione (§ 127), uniformemente convergente in un'area del piano della variabile x, e quindi [1] è ad essa applicabile la derivazione termine a termine. Si avrà quindi, qualunque sia φ:

$$\mathrm{D}\alpha_o \varphi + (\mathrm{D}\alpha_1 + \alpha_o)\mathrm{D}\varphi + \frac{1}{2!}(\mathrm{D}\alpha_2 + 2\alpha_1)\mathrm{D}^2\varphi + \ldots = o.$$

[1] Teorema di Weierstrass, già citato al § 126.

Ciò richiede (§ 129) che tutti i coefficienti di questa uguaglianza siano nulli; cioè

$$\mathrm{D}\alpha_o = o, \quad \mathrm{D}\alpha_1 = -\alpha_o, \quad \mathrm{D}\alpha_2 = -2\alpha_1, \ldots \mathrm{D}\alpha_n = -n\alpha_{n-1}, \ldots$$

Da queste relazioni si deduce

$$\alpha_o = a_o, \quad \alpha_1 = -(a_o x + a_1), \quad \alpha_2 = a_o x^2 + 2a_1 x + a_2, \ldots$$

ed in generale

$$(18) \quad \alpha_n = (-1)^n \left(a_o x^n + n a_1 x^{n-1} + \binom{n}{2} a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n \right)$$

essendo $a_o, a_1, a_2, \ldots$ le costanti arbitrarie successive introdotte dall'integrazione. Si vede cioè che il coefficiente α_n della serie H non differisce dall'n^{simo} polinomio di Appell generato dalla successione $a_o, a_1, a_2, \ldots$, se non per il fattore $(-1)^n$.

195. È poi ovvia la reciproca, cioè se un'operazione A, della forma (1), è tale che le $(-1)^n \alpha_n$ costituiscano un sistema di polinomî di Appell, questa operazione gode della proprietà della H. Basta infatti formare le $\xi_n = \mathrm{A}(x^n)$ mediante le formule (2) del § 128; sostituendo poi alle α_n la loro espressione (18), ordinando per le potenze di x e facendo uso di una elementare proprietà dei coefficienti binomiali, si ottiene senza difficoltà

$$\xi_n = (-1)^n a_n;$$

l'operazione H trasforma dunque in costanti gli elementi $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ e quindi tutti gli elementi di quell'intorno dell'unità in cui la detta operazione è applicabile termine a termine.

È degno di nota il fatto che, mentre per le operazioni commutabili con D, le a_n sono costanti e le ξ_n formano un sistema di polinomî di Appell, per le operazioni H ora considerate le ξ_n sono costanti e le α_n, moltiplicate per $(-1)^n$, formano un sistema dei suddetti polinomi.

196. Ogni successione di tali polinomi fornisce esempio di un'operazione H. Facendo $\alpha_n = (-1)^n x^n$, si ha l'esempio già notato al § 132

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n D^n.$$

Il campo di validità di questa operazione si estende a tutto $\mathfrak{S}^0$, e per un elemento $\varphi(x)$ di questo spazio si ha

$$H(\varphi) = \varphi(o),$$

per tutti i valori di x il cui modulo è minore della metà del raggio di convergenza della serie $\varphi(x)$. Lo spazio di radici di quest'operazione è costituito dall'insieme (lineare ad infinite dimensioni) delle serie di $\mathfrak{S}^0$ in cui manca il termine indipendente da x.

Un secondo esempio si ha da

$$\alpha_n = (-1)^n (x-a)^n;$$

la serie corrispondente definisce un'operazione H che, applicata ad una serie $\varphi(x)$ di $\mathfrak{S}^{|a|}$, rappresenta $\varphi(a)$. I valori di x pei quali è valido lo sviluppo sono definiti dalla disuguaglianza

$$|x| < \frac{r - |a|}{2},$$

essendo r il raggio di convergenza di $\varphi(x)$.

Consideriamo infine l'operazione H definita da

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - \dots + (-1)^n n!\right) D^n.$$

Si vede facilmente che, per questa, il campo di validità è contenuto entro l'insieme $\mathfrak{S}^\infty$ delle funzioni intere; così ad esso campo appartiene e^{ax} per $|a| < 1$, ma non per $|a| \geqq 1$. Entro il detto campo di validità, si ha:

$$H(\varphi) = \varphi(o) + \varphi'(o) + \varphi''(o) + \dots,$$

essendo $\varphi', \varphi'', \dots$ le successive derivate di φ. Lo spazio delle radici di H è data dalle funzioni del campo di validità per le quali è

$$\varphi(o) + \varphi'(o) + \varphi''(o) + \dots = o;$$

tale è, ad esempio, la

$$\varphi(x) = e^{\frac{5}{6}x} - 3e^{\frac{1}{2}x}.$$

197. Dall'operazione H, che ad ogni elemento di $\mathfrak{S}$ fa corrispondere una costante, si deduce immediatamente l'operazione $M_\mu H$, che fa corrispondere ad ogni elemento di $\mathfrak{S}$ un elemento dello spazio ad una dimensione $c\mu$, dove c è una costante arbitraria. (1)

Più generalmente, siano m operazioni $H_1, H_2, \dots, H_m$, ciascuna delle quali ha la proprietà di H, e siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ altrettante funzioni linearmente indipendenti. L'operazione

$$A = \alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 + \dots \alpha_m H_m$$

trasformerà $\mathfrak{S}$ nello spazio ad m dimensioni $\mathfrak{S}_m[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m]$. A proposito di una simile operazione si può osservare che se α è un elemento arbitrario in $\mathfrak{S}_m$, l'equazione $A(\varphi) = \alpha$ ammette sempre soluzioni in $\mathfrak{S}$. Sia infatti

$$\alpha = g_1\alpha_1 + g_2\alpha_2 + \dots + g_m\alpha_m;$$

(1) Si noti invece l'operazione HM_μ^{-1}, la quale fa corrispondere una costante ad ogni elemento dello spazio $\mathfrak{M}$ (§ 124) che si deduce da $\mathfrak{S}$ mediante la moltiplicazione per μ.

è sempre possibile di trovare m elementi $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ in $\mathfrak{S}$ tali che, posto

$$A(\varphi_i) = c_{i1}\alpha_1 + c_{i2}\alpha_2 + \ldots + c_{im}\alpha_m, \ (i = 1, 2, \ldots m)$$

il determinante $\Sigma \pm c_{11}c_{22}\ldots c_{mm}$ sia differente da zero, poichè in caso diverso, lo spazio trasformato di $\mathfrak{S}$ mediante A avrebbe meno di m dimensioni. Sarà allora possibile e determinato il sistema di equazioni lineari nelle m incognite $h_1, h_2, \ldots, h_m$:

$$c_{1j}h_1 + c_{2j}h_2 + \ldots + c_{mj}h_m = g_j, \ (j = 1, 2, \ldots m)$$

e ne verrà

$$A(h_1\varphi_1 + h_2\varphi_2 + \ldots + h_m\varphi_m) = \alpha.$$

Trovata una soluzione dell' equazione $A(\varphi) = \alpha$, se ne ottiene un' altra qualsivoglia aggiungendo a φ una delle radici di A, le quali formano uno spazio ad infinite dimensioni. È infatti chiaro che presi $m + 1$ elementi arbitrarî in $\mathfrak{S}$, esiste una loro combinazione lineare che è radice di A.

Se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ sono elementi di $\mathfrak{S}$, lo spazio

$$\mathfrak{S}_m[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m]$$

è invariante rispetto ad A, e valgono pertanto, circa alla struttura di esso spazio, tutti i risultati del Cap. IV.

E. DETERMINAZIONE DI OPERAZIONI FUNZIONALI MEDIANTE EQUAZIONI SIMBOLICHE.

198. Un' operazione funzionale distributiva è definita in $\mathfrak{S}$ mediante le corrispondenti ξ_n, ed in $\mathfrak{M}_\mu$ mediante la conoscenza degli enti che si ottengono applicando l' operazione stessa agli elementi μ, $x\mu$, $x^2\mu$, ... Essa viene pure definita dalla conoscenza dei coefficienti α_n del suo sviluppo della forma (1). Ma un' operazione si può definire ancora mediante una sua proprietà, od un complesso di proprietà; così abbiamo visto al § 148 come l' operazione che ammette una derivata nulla sia la m o l t i p l i c a z i o n e, e al § 150, come l'operazione che ammette per derivata l'operazione identica, sia la d e r i v a z i o n e (aumentata di una moltiplicazione arbitraria). Indicando, come si è stabilito, con A' la derivata dell' operazione A, si può dunque dire che M_μ è la soluzione più generale dell' equazione $A' = o$, e $D + M_\mu$ la soluzione più generale dell' equazione $A' = 1$, essendo μ una funzione arbitraria. Daremo a simili condizioni il nome di e q u a z i o n i s i m b o l i c h e; e gli esempi precedenti mostrano come equazioni simboliche giovino alla determinazione di un' operazione. Questa determinazione non è però completa; si può renderla tale aggiungendo un' altra condizione: ad esempio, nel caso delle equazioni simboliche $A' = o$ o $A' = 1$, aggiungendo che essendo α e β elementi dati, si abbia $A(\alpha) = \beta$.

199. Come esempio di operazioni definite da equazioni simboliche, ci proponiamo di determinare quelle che soddisfanno all' equazione seguente:

$$(19) \qquad \alpha_0 A^{(m)} + \alpha_1 A^{(m-1)} + \ldots + \alpha_{m-1}A' + \alpha_m A = o, \text{ (1)}$$

dove A è l' operazione da determinarsi, $A', A'', \ldots A^{(m)}$ le sue derivate successive, ed $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m$ sono funzioni date; nel secondo membro, lo zero ha naturalmente il significato dell' operazione nulla, quale è definita al § 25.

Si nota subito che se A è una soluzione dell' equazione (19), è tale anche $M_\mu A$ o μA; e se A, B, ... sono soluzioni,

---

(1) Su questa equazione, v. PINCHERLE, « *Sopra alcune equazioni simboliche* », Mem. della R. Accad. di Bologna, S. V, T. V, 1895, ed il Mém., §§ 65 e seg.

è tale anche $\mu A + \mu_1 B + \dots$, essendo μ, μ_1, ... moltiplicatori arbitrarî. Ciò emerge subito dal fatto che (§ 148)

$$(MA)' = MA'.$$

Date le operazioni A, B, ..., l' operazione $\mu A + \mu_1 A + \dots$ si dirà formata linearmente con A, B, ... o dipendente linearmente da A, B, ... Si dirà pure che m operazioni $A_1, A_2, \dots, A_m$ sono linearmente indipendenti quando non sarà possibile di determinare m funzioni $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ tali che sia identicamente [1]

$$\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 + \dots \mu_m A_m = 0. \tag{20}$$

Così D, D^2 sono linearmente indipendenti; ogni forma differenziale lineare di ordine m è linearmente dipendente da **1**, D, D^2, ... D^m.

200. Condizione necessaria e sufficiente affinchè m operazioni definite in uno spazio $\mathfrak{M}$, intorno di μ, siano linearmente dipendenti in quello spazio, è che, in $\mathfrak{M}$, l' operazione espressa dal determinante

$$R = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ A'_1 & A'_2 & \dots & A'_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1^{(m-1)} & A_2^{(m-1)} & \dots & A_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

rappresenti l'operazione nulla.

a) La condizione è necessaria. Se infatti fra le A_1, $A_2, \dots, A_m$ passa una relazione della forma (20), ne viene, prendendo la derivata funzionale:

$$\mu_1 A'_1 + \mu_2 A'_2 + \dots + \mu_m A'_m = 0,$$

(1) La parola *identicamente* va riferita, bene inteso, allo spazio in cui s'intendono definite le operazioni di cui si tratta.

e così procedendo per $m-1$ volte ed eliminando le μ_1, $\mu_2, \dots, \mu_m$, si ottiene $R = 0$.

b) La condizione è sufficiente. Infatti, il determinante si pone senza difficoltà sotto la forma

$$R = \begin{vmatrix} A_1(\varphi) & A_2(\varphi) & \dots & A_m(\varphi) \\ A_1(x\varphi) & A_2(x\varphi) & \dots & A_m(x\varphi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1(x^{m-1}\varphi) & A_2(x^{m-1}\varphi) & \dots & A_m(x^{m-1}\varphi) \end{vmatrix};$$

se ora in tutto l'intorno $\mathfrak{M}$ di μ, esso rappresenta l'operazione nulla, si avrà identicamente, facendo $\varphi = x^r\mu$, dove $r = o, 1, 2, \dots$:

$$\begin{vmatrix} A_1(x^r\mu) & A_2(x^r\mu) & \dots & A_m(x^r\mu) \\ A_1(x^{r+1}\mu) & A_2 x^{r+1}\mu) & \dots & A_m(x^{r+1}\mu) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1(x^{r+m-1}\mu) & A_2(x^{r+m-1}\mu) & \dots & A_m(x^{r+m-1}\mu) \end{vmatrix} = o.$$

Ne verrà che si potranno determinare m funzioni μ_1, $\mu_2, \dots, \mu_m$ indipendenti da r e tali che sia

$$\mu_1 A_1(x^r\mu) + \mu_2 A_2(x^r\mu) + \dots + \mu_m A_m(x^r\mu) = o,$$
$$(r = o, 1, 2, \dots);$$

donde risulta (§ 139) che in tutto l'intorno $\mathfrak{M}$ di μ, l'operazione

$$\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 + \dots + \mu_m A_m$$

è identicamente nulla.

201. Riprendiamo l' equazione (19); se questa equazione ammette $m+1$ soluzioni, esse sono necessariamente dipendenti linearmente. Basta infatti sostituirle in (19) ed eliminare i coefficienti $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$, per scorgere che il determinante R relativo alle $m+1$ soluzioni è identicamente nullo. Un sistema di m soluzioni, linearmente indipendenti, dell'equazione (19) verrà detto **sistema fondamentale di soluzioni** dell'equazione stessa; se esiste un tale sistema, ogni altra soluzione della (19) si esprimerà mediante una funzione lineare degli elementi del sistema fondamentale.

202. Ogni equazione (19) ammette un sistema fondamentale di soluzioni. Consideriamo all'uopo l'equazione di grado m in z:

$$f(z) = \alpha_0(z-x)^m + \alpha_1(z-x)^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-1}(z-x) + \alpha_m = o$$

e siano $\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots \omega_m(x)$ le sue radici. Indicando genericamente con ω una di esse, sappiamo (§ 154) che l'operazione di sostituzione S_ω soddisfa alla relazione

$$S'_\omega = (\omega - x)S_\omega; \tag{21}$$

applicando nuovamente ai due membri di questa relazione la derivazione funzionale, si ha

$$S''_\omega = (\omega - x)^2 S_\omega, \ \ldots, \ S_\omega^{(m)} = (\omega - x)^m S_\omega,$$

onde, sostituendo nella (19), questa equazione si trova soddisfatta. Otteniamo così per la (19) le m soluzioni

$$S_{\omega_1}, S_{\omega_2}, \ldots S_{\omega_m};$$

ora è facile vedere che esse sono indipendenti. Formando infatti con esse il determinante R e tenendo conto della (21) e delle sue conseguenze, viene

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots 1 \\ \omega_1 - x & \omega_2 - x & \ldots \omega_m - x \\ (\omega_1 - x)^2 & (\omega_2 - x)^2 & \ldots (\omega_m - x)^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (\omega_1 - x)^{m-1} & (\omega_2 - x)^{m-1} & \ldots (\omega_m - x)^{m-1} \end{vmatrix} S_{\omega_1} S_{\omega_2} \ldots S_{\omega_m}.$$

In questa nuova espressione della operazione R il prodotto di sostituzioni $S_{\omega_1}, S_{\omega_2}, \ldots S_{\omega_m}$ certamente non è uguale all'operazione nulla, e il determinante di funzioni è differente da zero se $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_m$ sono m · funzioni distinte. Le $S_{\omega_1}, S_{\omega_2}, \ldots S_{\omega_m}$ costituiscono dunque un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione (19).

203. Il ragionamento precedente sarebbe in difetto se alcune delle funzioni ω fossero fra loro uguali; tratteremo il caso in cui ω_1 ed ω_2 coincidono, e le porremo uguali ad ω, supponendo diverse le altre. L'equazione $f(z) = o$ avrà allora la radice doppia ω.

Come nel caso precedente, S_ω soddisfa all'equazione (19); di più vi soddisfa anche l'equazione $S_\omega D$. Si ha infatti (§ 145)

$$(S_\omega D)' = S'_\omega D + S_\omega D' = (\omega - x)S_\omega D + S_\omega,$$

onde

$$(S_\omega D)'' = (\omega - x)^2 S_\omega D + 2(\omega - x)S_\omega$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(S_\omega D)^{(m)} = (\omega - x)^m S_\omega D + m(\omega - x)^{m-1} S_\omega.$$

Sostituendo nella (19), si otterrà

$$f(\omega) S D + \frac{df(\omega)}{d\omega} S_\omega$$

e questo si trova essere identicamente nullo, poichè ω è radice doppia di $f(z) = o$. Abbiamo dunque per la (19) il sistema di soluzioni

$$S_\omega, \ S_\omega D, \ S_{\omega_3}, \ S_{\omega_4}, \ldots S_{\omega_m}$$

che è fondamentale: formando infatti il relativo determinante R, esso diviene

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \omega - x & 1 & \omega_3 - x & \dots & \omega_m - x \\ (\omega - x)^2 & \omega - x & (\omega_3 - x)^2 & \dots & (\omega_m - x)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\omega - x)^{m-1} & (\omega - x)^{m-2} & (\omega_3 - x)^{m-1} & \dots & (\omega_m - x)^{m-1} \end{vmatrix} S^2_\omega S_{\omega_3} \dots S_{\omega_m}.$$

Anche qui il prodotto di sostituzioni è certamente diverso dall'operazione O e il determinante di funzioni, come è noto dall'algebra, è diverso da zero se le ω, ω_3, ... ω_m sono distinte fra loro.

Analogamente, ad r funzioni coincidenti ed uguali ad ω, corrisponderanno per la (19) le soluzioni

$$S_\omega,\ S_\omega D,\ \dots,\ S_\omega D^{r-1}$$

facenti parte di un sistema fondamentale.

204. Le soluzioni delle equazioni simboliche della forma (19) conducono ad una classe di operazioni che sono somme di termini della forma

$$M_\alpha S_\omega D^r. \tag{22}$$

La somma, il prodotto, la derivazione funzionale di operazioni della classe appartengono alla classe stessa. Come sottogruppo delle operazioni di questa classe si hanno le forme differenziali lineari e le forme lineari alle differenze, nonchè le operazioni che costituiscono il calcolo imaginato da H. Schapira e da lui detto « Cofunzionale ». [1]

205. Per dare un altro esempio di un'operazione definita mediante un'equazione simbolica, cerchiamo l'operazione A tale che

$$A' = (D - x)A. \tag{23}$$

---

[1] Schapira « Theorie allgemeiner Cofunctionen. » Leipzig, Teubner, 1892.

Presi due elementi arbitrari μ, α nell'insieme delle funzioni analitiche, poniamo

$$A(\mu) = \alpha, \tag{24}$$

indi cerchiamo se esiste un'operazione soddisfacente alle condizioni (23) e (24) e che nell'intorno di μ sia sviluppabile in serie della forma

$$A(\mu\varphi) = \alpha_0\varphi + \alpha_1 D\varphi + \frac{\alpha_2}{1 \cdot 2} D^2\varphi + \dots \tag{25}$$

Si sa dal § 147 che sarà

$$\alpha_0 = A(\mu) = \alpha, \quad \alpha_1 = A'(\mu), \quad \alpha_2 = A''(\mu), \dots;$$

ora, derivando le operazioni nei due membri, indicando coll'accento la derivata di α rispetto ad x, e tenendo conto della (23):

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha' - x\alpha, \\ \alpha_2 &= \alpha'_1 - x\alpha_1 + \alpha \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_n &= \alpha'_{n-1} - x\alpha_{n-1} + (n-1)\alpha. \end{aligned}$$

Da queste relazioni si determinano senza difficoltà i successivi coefficienti α_1, α_2, ..., e si verifica col solito metodo di induzione da n ad $n + 1$, che è:

$$\alpha_n = \alpha^{(n)} - nx\alpha^{(n-1)} + \binom{n}{2} x^2 \alpha^{(n-2)} - \dots + (-1)^n x^n \alpha.$$

L'operazione richiesta, la quale in un intorno di μ sodisfa all'equazione (23) insieme alla condizione (24), è dunque data da

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\alpha^{(n)} - nx\alpha^{(n-1)} + \binom{n}{2} x^2 \alpha^{(n-2)} - \dots + (-1)^n x^n \alpha \right) D^n \varphi.$$

CAPITOLO OTTAVO.

Le operazioni normali.

LE OPERAZIONI U.

206. Fra le operazioni che trasformano in sè l'insieme $\mathfrak{S}$ delle serie di potenze, sono da notarsi in modo particolare quelle che ammettono come invarianti gli elementi del sistema

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$$

sistema che abbiamo detto (§ 103) fondamentale in $\mathfrak{S}$. Designeremo le operazioni di questa classe colla lettera U, affetta, ove occorra, da indici. Le operazioni U sono, per definizione, individuate in $\mathfrak{S}$ dalle relazioni

$$\text{(1)} \qquad U(x^n) = a_n x^n, \ (n = o, 1, 2, \ldots)$$

dove $a_o, a_1, a_2, \ldots$ è una data successione di numeri, che si supporranno in generale differenti da zero. Ad ogni tale successione corrisponde un'operazione U, e reciprocamente.

207. Risulta immediatamente dalla definizione delle operazioni U che

a) la somma di due operazioni della classe appartiene alla classe stessa; la classe costituisce un insieme lineare;

b) il prodotto di due operazioni della

classe appartiene alla classe stessa; la classe costituisce pertanto un gruppo;

c) il prodotto di due operazioni U ammette la proprietà commutativa.

Si indichi con $u = (u_1, u_2, \ldots u_r)$ una funzione razionale ed intera delle indeterminate $u_1, u_2, \ldots u_r$; si considerino poi le operazioni della classe delle U, definite da

$$U_i(x^n) = a_{in} x^n, \quad \begin{matrix} (i = 1, 2, 3, \ldots r) \\ (n = o, 1, 2, \ldots). \end{matrix}$$

L'operazione della classe medesima, definita da

$$U(x^n) = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots a_{rn}) x^n,$$

potrà, per le osservazioni del § precedente, riguardarsi formata dalle $U_1, U_2, \ldots U_r$ come l'espressione u è formata da $u_1, u_2, \ldots u_r$, e per conseguenza potrà rappresentarsi con $(U_1, U_2, \ldots U_r)$; si vede che le regole di composizione e scomposizione, per somma e per prodotto, di simili funzioni, saranno quelle stesse che si hanno per le corrispondenti funzioni razionali di variabili numeriche.

208. Riprendiamo l'operazione U definita dalle (1). Quando non v'è alcuno dei numeri a_n che sia uguale a zero, la U non ammette radici entro $\mathfrak{S}$: in tale caso l'inversa dell'operazione U è a determinazione unica in $\mathfrak{S}$ ed essa pure è un'operazione U, definita da

$$U^{-1}(x^n) = \frac{x^n}{a_n}.$$

Quando invece uno dei numeri a_n è nullo, ad esempio a_r, l'operazione U è degenere ed ammette x^r come radice; corrispondentemente la U^{-1} è a determinazione multipla, potendosi ad una qualsivoglia delle sue determinazioni aggiungere cx^r, dove c è una costante arbitraria. Quando sono nulli p dei numeri a_n, come $a_{r_1}, a_{r_2}, \ldots a_{r_p}$, l'operazione U ammette lo spazio di radici a p dimensioni,

$$\mathcal{S}_p[x^{r_1}, x^{r_2}, \ldots x^{r_p}]$$

e la U^{-1} è a determinazione multipla, potendosi aggiungere ad una qualunque delle sue determinazioni, un elemento arbitrario dello spazio $\mathcal{S}_p$.

209. Le formule (1) fanno conoscere, per l'operazione U, quegli elementi che al § 127 si sono chiamati gli ξ_n dell'operazione. Da questi (§ 128) possiamo dedurre le α_n, cioè i coefficienti dello sviluppo di U(φ) secondo le derivate successive della funzione arbitraria φ. Applicando la (3) del citato § 128, troviamo

$$(2) \quad \alpha_n = \left(a_n - na_{n-1} + \binom{n}{2} a_{n-2} - \ldots + (-1)^n a_0\right)x^n;$$

per brevità, indicheremo con b_n l'espressione

$$a_n - na_{n-1} + \binom{n}{2} a_{n-2} - \ldots + (-1)^n a_0.$$

Siccome $b_0 = a_0$, $b_1 = a_1 - a_0$, $b_2 = a_2 - 2a_1 + a_0, \ldots$; così si vede come, facendo uso delle notazioni del calcolo delle differenze, la b_n possa anche rappresentarsi con $\Delta^n a_0$, intendendosi che il simbolo Δ della differenza finita porti sull'indice delle a a partire dal valore zero.

Lo sviluppo di U in serie di potenze di D sarà dunque dato da

$$\mathrm{U}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n x^n}{n!} \mathrm{D}^n\varphi,$$

o, se si vuole, da

$$(3) \qquad \mathrm{U}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \Delta^n a_0 . \mathrm{D}^n \varphi.$$

Reciprocamente, dal § 128, form. (2), si deduce che ogni operazione rappresentata da una serie della forma (3) è un'operazione U; le ξ_n di queste operazioni sono date da $a_n x^n$, in cui

$$(4) \qquad a_n = b_0 + nb_1 + \binom{n}{2} b_2 + \ldots + nb_{n-1} + b_n.$$

210. Lo sviluppo (3) ammette certamente (§ 131) un campo di validità nell'intorno dell'unità. Si può tuttavia dire qualche cosa di più, e precisamente:

Se la serie $\sum a_n x^n$ appartiene ad $\mathcal{S}^0$, ogni elemento φ di $\mathcal{S}^0$ appartiene al campo di validità della serie (3).

Infatti, per l'ipotesi, esisteranno due numeri positivi m e g tali che sia:

$$|a_n| \leq mg^n : \text{(1)}$$

se ne deduce immediatamente:

$$|b_n| \leq m(1+g)^n.$$

Di più, se r è il raggio di convergenza della serie di potenze φ, per tutti i valori di x il cui modulo è minore di $\frac{1}{2}r$ si ha, essendo m' un numero positivo,

$$\left|\frac{1}{n!}\mathrm{D}^n\varphi\right| < \frac{m' 2^n}{r^n};$$

il termine generale della serie (3) è dunque inferiore in modulo a

$$\frac{2^n m m'(1+g)^n |x|^n}{r^n}$$

(1) Come è noto dai teoremi elementari sulla convergenza delle serie di potenze, nell'esistenza dei numeri m e g sta la condizione necessaria e sufficiente perchè $\sum a_n x^n$ appartenga ad $\mathcal{S}^0$.

e qui basta fare
$$|x| < \frac{r}{2(1+g)}$$
per rendere la serie (3) assolutamente ed uniformemente convergente. Si può allora ordinarla in una serie di potenze di x, e si trova, essendo $\varphi = \sum k_n x^n$, che

(5) $$U(\varphi) = \sum a_n k_n x^n.$$

Sotto questa forma si può concludere che

Se l'operazione U è definita dalle (1), dove le a_n sono tali che la serie $\sum a_n x^n$ appartenga ad S^0, l'operazione U è applicabile termine a termine a qualsivoglia serie φ di S^0, e la serie che ne risulta ha per raggio di convergenza per lo meno il prodotto dei raggi di convergenza delle serie $\sum a_n x^n$ e $\varphi = \sum k_n x^n$.

211. Nel caso in cui $\sum a_n x^n$ non appartenga ad S^0, e le a_n si suppongano tutte differenti da zero, uno spazio S^ω costituente un campo di validità per la (3) si può sempre ottenere come segue. Si prenda una successione di numeri h_0, h_1, h_2, ... positivi, decrescenti e soddisfacenti alle disuguaglianze

(6) $$h_n < \frac{mt^n}{|a_n|},$$

essendo m e t numeri positivi arbitrari. Lo spazio S^ω sarà costituito da tutte le serie $\psi = \sum k_n x^n$ tali che sia $|k_n| < h_n$.

Infatti, il termine generale della serie (3) è, per $|x| < r$, inferiore in valore assoluto a
$$\frac{r^n}{n!}\left(|a_n| + n|a_{n-1}| + \binom{n}{2}|a_{n-2}| + \dots + |a_0|\right)\frac{d^n \Sigma h_p r^p}{dr^n}.$$

Ma per essere le h_n decrescenti, si ha per $r < 1$:
$$\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dr^n}\sum h_p r^p = h_n + (n+1)h_{n+1}r +$$
$$+ \frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}h_{n+2}r^2 + \dots < \frac{h_n}{(1-r)^{n+1}}.$$

Inoltre, si ha dalle (6)
$$|a_n| < \frac{mt^n}{h_n},\ |a_{n-1}| < \frac{mt^{n-1}}{h_{n-1}} < \frac{mt^{n-1}}{h_n}, \dots$$
e quindi:
$$|a_n| + n|a_{n-1}| + \dots + |a_0| < \frac{m}{h_n}(1+t)^n.$$

Il termine generale della (3) è dunque inferiore in modulo ad
$$\frac{mr^n(1+t)^n}{(1-r)^{n+1}}$$
e quindi al termine generale di una progressione geometrica, convergente per $r < \frac{1}{2+t}$. Per le serie φ considerate e per $|x| < r$, la serie (3) è dunque convergente assolutamente ed uniformemente, e dà
$$U(\sum k_n x^n) = \sum a_n k_n x^n.$$

212. Fra le operazioni U è da notarsi, come assai semplice, la sostituzione S_{zx}, dove z è un numero arbitrario. Essa è definita da

(7) $$S_{zx}(x^n) = z^n x^n;$$

la corrispondente serie (3), valevole (§ 210) in tutto S^0, è

(8) $$S_{zx}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z-1)^n x^n D^n \varphi.$$

Come altro caso particolare delle operazioni U è ancora da notarsi l'operazione xD, per la quale le (1) divengono

$$xD(1) = o,\quad xD(x^n) = nx^n,\quad (n = 1, 2, \ldots);$$

questa operazione è degenere, ammettendo per radice la costante [1]. Poichè le operazioni U sono fra loro commutabili, si ha che ogni operazione U è commutabile con xD.

Infine, come altro caso particolare, nelle (1) si supponga che le a_n siano funzioni razionali intere dell'indice n e del grado $m - 1$ al più; le loro differenze finite d'ordine m saranno nulle, talchè lo sviluppo (3) si ridurrà ai suoi primi m termini. L'operazione U corrispondente sarà pertanto una forma differenziale lineare d'ordine $m - 1$.

213. Il prodotto dell'operazione U qualsivoglia, definita dalle (1), per la S_{zx}, è dato da

$$US_{zx}(x^n) = a_n z^n x^n,$$

donde

$$US_{zx}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Delta_z^n a_0 \cdot D^n\varphi,$$

dove si è posto

$$\Delta_z^n a_0 = a_n z^n - n a_{n-1} z^{n-1} + \binom{n}{2} a_{n-2} z^{n-2} - \ldots + (-1)^n a_0.$$

Ma poichè U e S_{zx} sono commutabili (§ 207, c), ne viene

$$S_{zx}^{-1} US_{zx} = U,$$

(1) Secondo i concetti del LIE nella teoria dei gruppi di trasformazioni, si vede facilmente che le operazioni S_{zx}, per i diversi valori di z, formano un gruppo ad un parametro, la cui trasformazione infinitesima è precisamente xD.

e quindi si ha per U la nuova espressione [1]

$$(9)\qquad U = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Delta_z^n a_0 \cdot D_x^n \varphi\left(\frac{x}{z}\right);$$

questa espressione contiene l'arbitraria z, la quale può essere scelta in modo da dare, per U, un campo di validità più esteso di quello che viene dato dallo sviluppo (3) dell'operazione medesima.

214. Della formola (9) si può dare un'applicazione interessante. Poniamoci nel caso del § 210, cioè supponiamo che la serie $\sum a_n x^n$ appartenga ad S^o; sia $\alpha(x)$ la funzione analitica definita da questa serie e considerata nella corrispondente stella di MITTAG-LEFFLER; indichiamo genericamente con u i punti del contorno della stella. Essendo

$$U(x^n) = a_n x^n,$$

si ha d'una parte

$$U\left(\frac{1}{1-x}\right) = \alpha(x);$$

d'altra parte, per la (9), si ottiene immediatamente:

$$U\left(\frac{1}{1-x}\right) = z\sum_{n=0}^{\infty} \Delta_z^n a_0 \frac{x^n}{(z-x)^{n+1}};$$

donde si deduce, per l'intorno del punto $x = o$, la espressione

$$(10)\qquad \alpha(x) = z\sum_{n=0}^{\infty} \Delta_z^n a_0 \frac{x^n}{(z-x)^{n+1}}.$$

(1) La notazione D_x sta ad esprimere che la derivata va presa rispetto ad x.

Di questa notevole relazione, generalizzazione di una nota trasformazione dovuta ad EULERO, il sig. E. LINDELÖF si è recentemente giovato [1] per dedurne interessanti applicazioni. È facile vedere entro quale area del piano x il secondo membro della formula (10) dia la continuazione analitica delle serie $\sum a_n x^n$. Se infatti, adottando la notazione introdotta al § 133, si suppone

$$\Delta_z^n a_0 \backsim \frac{1}{r^n}$$

lo sviluppo del secondo membro è convergente sotto la condizione

$$\frac{|x|}{|z-x|} < r. \tag{11}$$

Ora, consideriamo il fascio dei cerchi che hanno i centri sulla congiungente $o \ldots z$ e che dividono armonicamente, nei punti a e b, il segmento $o \ldots z$. È chiaro che la condizione (11) è soddisfatta dai punti dell'area contenente il punto o e limitato da quella fra le circonferenze del fascio, per la quale è $\overline{oa} : \overline{ab} = r$; in quest'area il secondo membro della (10) rappresenta la continuazione analitica della serie $\sum a_n x^n$. L'accennata circonferenza sarà la prima nel fascio, partendo da $r = o$, sulla quale si trova qualche punto u del contorno della stella; codesto punto u sarà dunque tale che

$$\frac{|u|}{|z-u|} = r; \tag{12}$$

ora questa relazione determina il valore di r, cioè il comportamento assintotico delle $\Delta_z^n a_0$, note che siano le singolarità

[1] *Acta Soc. scientiarum Fennicæ*, T. XXIV, 1898.

di $\alpha(x)$. Quando la $\alpha(x)$ è funzione uniforme, non vi ha più luogo a considerare la stella di MITTAG-LEFFLER e le u sono genericamente i punti singolari di $\alpha(x)$.

215. L'osservazione del § precedente permette di ottenere con semplicità le condizioni di convergenza dello sviluppo (9), per una data funzione $\varphi(x)$. Sia infatti

$$\varphi(x) = \sum k_n x^n$$

nell'intorno di $x = o$; la funzione definita da questa serie si continui nella sua stella di MITTAG-LEFFLER e siano v i punti del contorno della stella; vz saranno i punti del contorno della stella relativa a $\varphi\left(\frac{x}{z}\right)$. Essendo vz il più prossimo ad x di codesti punti, si avrà per il § 133

$$\frac{1}{n!} D_x^n \varphi\left(\frac{x}{z}\right) \backsim \frac{1}{|x - vz|^n}.$$

Si ha poi, per la (12):

$$\Delta_z^n a_0 \backsim \left|\frac{z-u}{u}\right|^n;$$

onde la convergenza del secondo membro della (9) ha luogo sotto la condizione

$$\frac{|x|}{|x-vz|} < \frac{|u|}{|z-u|}. \tag{13}$$

Questa disuguaglianza definisce un'area, il cui contorno è quella circonferenza che ha il centro sulla congiungente $o \ldots vz$, che divide armonicamente il segmento $o \ldots vz$, e per i punti x della quale si ha:

$$\frac{|x|}{|x-vz|} = \frac{|u|}{|z-u|}. \tag{14}$$

Si ha dunque, per ogni diversa scelta di z, un'area diversa di convergenza della serie (9), area data dalla (13), ed in cui la serie (9) dà la continuazione analitica della serie di potenze $\sum a_n k_n x^n$, espressione di $U(\varphi)$ nell'intorno di $z = o$. [1]

216. L'operazione U definita dalle (1) dà la serie di potenze $\sum k_n a_n x^n$ quando essa operazione sia applicata alla serie

$$\varphi(x) = \sum k_n x^n.$$

Per effetto dell'operazione U applicata alla serie φ, la successione $k_o, k_1, \dots k_n, \dots$ dei coefficienti della serie viene dunque trasformata in $a_o k_o, a_1 k_1, \dots a_n k_n, \dots$ Ricordiamo ora che, al principio del Cap. V, prendendo le successioni come elementi di uno spazio lineare, abbiamo fatto corrispondere ad ogni successione $\varphi[k_o, k_1, \dots k_n, \dots]$ la serie di potenze $\varphi(x) = \sum k_n x^n$. Questa corrispondenza viene attuata mediante l'operazione, evidentemente distributiva, che indicheremo con C^{-1} e tale che

$$C^{-1}(k_n) = \varphi(x);$$

in altre parole, essa è l'inversa di quella operazione C, applicabile allo spazio $\mathfrak{S}$ delle serie di potenze, la quale eseguita

(1) **La circonferenza rappresentata dall'equazione (14) dipende da z. Invece i punti singolari di $U(\varphi)$, che si possono trovare su di essa ed alla cui presenza è dovuto il fatto che la circonferenza stessa limita l'area di convergenza, sono indipendenti da z. Ora sulla circonferenza (14) si trovano punti indipendenti da z, come si vede facilmente dando a z un incremento infinitesimo: essi sono quelli della forma uv. Con ciò si ottiene un teorema della teoria delle funzioni, recentemente enunciato e dimostrato dal signor HADAMARD (V. Comptes Rendus, T. CXXIV, p. 492, 1897, e Acta Mathematica, T. XXII, p. 55, 1898. Cfr. BOREL, Bulletin de la Société math. de France, T. XXVI, p. 238, 1898).**

sulla serie $\varphi(x)$, produce il coefficiente k_n del termine generale della serie stessa:

$$C\big(\varphi(x)\big) = k_n.$$

Ne viene che $CU(\varphi) = a_n k_n$, e quindi

$$CUC^{-1}(k_n) = a_n k_n.$$

Come è noto (§ 121), la CUC^{-1} si dice trasformata di U mediante C; abbiamo dunque che la trasformata di un'operazione U mediante C è un'operazione di moltiplicazione.

B. LE OPERAZIONI U IN UNO SPAZIO PIÙ ESTESO.

217. Ci proponiamo ora di ricercare se le operazioni U, studiate nelle pagine precedenti, sono suscettibili di interpretazione in uno spazio più esteso di $\mathfrak{S}$, e precisamente nello spazio che si ottiene (§ 125) aggiungendo ad $\mathfrak{S}$ quegli elementi che si hanno dalla moltiplicazione di elementi di $\mathfrak{S}$ per x^a, dove a è un numero qualsivoglia, e per $log x$. Questo spazio verrà indicato con $\mathfrak{W}$. Ogni elemento di $\mathfrak{W}$ sarà pertanto costituito dalla somma di termini, in numero finito od infinito, della forma

$$\varphi(x) x^a log^m x, \tag{15}$$

dove $\varphi(x)$ è un elemento di $\mathfrak{S}$ ed m un numero intero.

Una somma di termini della forma (15) in numero finito e sotto l'ipotesi che $\varphi(x)$ appartenga ad $\mathfrak{S}^o$, si dice *espressione regolare* nell'intorno di $x = o$.

218. Abbiasi un' operazione U definita dalle (1); essa si può esprimere, come si è visto, mediante la serie (3), la quale ammette in $\mathfrak{S}$ un campo di validità. Ora, è facile vedere che la detta serie (3) può avere significato anche per elementi non appartenenti ad $\mathfrak{S}$, bensì a $\mathfrak{W}$. Suppongasi infatti che sia nella (3)

$$b_n \infty c^n, \ |c| < 1; \tag{16}$$

posto $\varphi = x^t$, essendo t un numero qualsivoglia, la serie (3) diviene

$$x^t \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!};$$

ma, per l' ipotesi (16), la serie $\sum b_n \binom{t}{n}$ rappresenta una funzione intera $\bar{\omega}(t)$ di t; pertanto la serie (3) ha significato per ogni elemento di $\mathfrak{W}$ della forma x^t e rappresenta il prodotto $\bar{\omega}(t)x^t$, il quale si riduce ai secondi membri delle (1) per t intero e positivo, come si vede immediatamente dalle espressioni (4) della a_n in funzioni delle b_n.

Nell' ipotesi (16) sarà pertanto ovvio di riguardare l' operazione U come estesa allo spazio che si deduce da $\mathfrak{S}$ mediante aggiunzione della moltiplicazione per x^t; in questo spazio, essa è definita dalla serie (3) o, ciò che è lo stesso, dalle relazioni

$$U(x^t) = \bar{\omega}(t)x^t. \tag{17}$$

219. Nella medesima ipotesi (16), la serie (3) ha anche un significato per $\varphi = \log x$; si ha infatti, come risultato della sostituzione di $\log x$ in quella serie:

$$b_0 \log x + b_1 - \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{3}b_3 - \dots,$$

ora la serie $b_1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}b_3 - \dots$ è convergente per l' ipotesi (16); indicando con b' la costante che essa rappresenta, avremo

$$U(\log x) = b_0 \log x + b'.$$

In tal modo l' operazione U è estesa allo spazio $\mathfrak{W}$.

220. I risultati precedenti, ottenuti sotto l' ipotesi (16), sono suscettibili di generalizzazione. Osserviamo, a quest' uopo, che l' operazione U definita dalle (1), è commutabile (§ 212) colla xD, la quale ha significato in tutto l' insieme delle funzioni analitiche. Se ora si assume la (3) come definizione della U in uno spazio più esteso di $\mathfrak{S}$, si verifica immediatamente su questa serie, in tutto il campo della sua validità, la commutabilità con xD.

Inversamente, se una serie di potenze del simbolo D,

$$A(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!} D^n \varphi$$

deve rappresentare un' operazione A commutabile con xD, la serie sarà della forma (3). Si avrà infatti da una parte, indicando le derivate mediante accenti:

$$AxD = (x\alpha_0 + \alpha_1)\varphi' + (x\alpha_1 + \alpha_2)\varphi'' + \frac{x\alpha_2 + \alpha_3}{1 \cdot 2}\varphi''' + \dots,$$

dall' altra

$$xDA = x\alpha'_0\varphi + x(\alpha_0 + \alpha'_1)\varphi' + x\frac{2\alpha_1 + \alpha'_2}{1 \cdot 2}\varphi'' +$$
$$+ x\frac{3\alpha_2 + \alpha'_3}{3!}\varphi''' + \dots,$$

ed uguagliando (§ 130) si ottengono per le α le equazioni:

$$\alpha'_0 = o, \ x\alpha'_1 = \alpha_1, \ x\alpha'_2 = 2\alpha_2, \dots \ x\alpha'_n = n\alpha_n, \dots$$

da cui, indicando con $b_0, b_1, \ldots b_n, \ldots$ le costanti d'integrazione:

$$\alpha_0 = b_0, \ \alpha_1 = b_1 x, \ \alpha_2 = b_2 x^2, \ldots \ \alpha_n = b_n x^n, \ldots,$$

cioè la serie proposta è della forma (3).

In seguito a ciò, e fondandosi sul noto **principio di permanenza**, sarà naturale di assumere la commutabilità con xD come proprietà caratteristica delle operazioni U. Sia dunque un'operazione U rappresentata da una serie (3), e non accada che x^t entri nel suo campo di validità, come avveniva sotto l'ipotesi (16); ammettiamo però che si sappia, in qualunque modo, che U(x^t) è una funzione analitica $\alpha(x, t)$ di x e di t. Poichè U è commutabile con xD, ne verrà:

$$t\alpha(x, t) = x\frac{\partial \alpha}{\partial x},$$

onde, indicando con $\tilde{\omega}(t)$ una funzione analitica arbitraria di t:

$$\alpha(x, t) = \tilde{\omega}(t) x^t.$$

Si ritrova così, anche in questo caso più generale, l'espressione (17) per U(x^t). La funzione $\tilde{\omega}(t)$ è soggetta alla condizione di prendere per $t = o, 1, 2, \ldots$ i valori rispettivi $a_0, a_1, a_2, \ldots$ che figurano nelle (1); essa può quindi venire assegnata mediante i metodi di interpolazione. Si nota però subito che, fuori di $\mathfrak{S}$, l'operazione U non è univocamente determinata; se infatti $\tilde{\omega}(t)$, $\tilde{\omega}_1(t)$ sono due funzioni soddisfacenti alle medesime condizioni d'interpolazione, si avranno due rami d'operazione, definiti rispettivamente da

$$\mathrm{U}(x^t) = \tilde{\omega}(t) x^t, \quad \mathrm{U}_1(x^t) = \tilde{\omega}_1(t) x^t,$$

i quali provengono da una stessa operazione U di $\mathfrak{S}$; in altre parole, l'operazione U — U$_1$ coincide nello spazio $\mathfrak{S}$ coll'operazione nulla ossia ammette questo spazio come spazio di radici, mentre può non essere nulla identicamente nello spazio che si ottiene da $\mathfrak{S}$ mediante l'aggiunzione della moltiplicazione per x^t. D'ora in avanti, considerando un'operazione U nello spazio $\mathfrak{W}$, supporremo fissata la determinazione della funzione $\tilde{\omega}(t)$. In particolare, se lo sviluppo (3) ha un numero finito $p + 1$ di termini, si prenderà per $\tilde{\omega}(t)$ il polinomio razionale intero

$$b_0 + b_1 t + b_2\binom{t}{2} + \ldots + b_p\binom{t}{p}.$$

221. Supposta così determinata la funzione analitica $\tilde{\omega}(t)$ di t, la formula (17) definisce la U nello spazio che si è ottenuto aggiungendo ad $\mathfrak{S}$ tutti gli elementi che si ottengono eseguendo su di esso la moltiplicazione per x^t. Ora è facile vedere che ciò basta a definire la U anche in tutto lo spazio $\mathfrak{W}$. Sia infatti t un valore della variabile per la quale $\tilde{\omega}(t)$ è regolare, e sia $|t_1 - t|$ abbastanza piccolo. Indicando con accenti le derivate rispetto a t, si avrà

$$\tilde{\omega}(t_1) = \tilde{\omega}(t) + \tilde{\omega}'(t)(t_1 - t) + k(t_1 - t)^2;$$

qui k varia con t_1, ma si mantiene inferiore ad un numero assegnabile per i valori di t_1 considerati. Essendo poi

$$x^{t_1} = x^t\Big(1 + (t_1 - t)\log x + (t_1 - t)^2\eta(x)\Big),$$

dove $\eta(x)$ si mantiene pure inferiore ad un numero assegnabile per i valori di t_1 considerati e per quelli di x contenuti in un'area semplicemente connessa non contenente il punto $x = o$, si ha

$$\mathrm{U}(x^{t_1}) = x^t\tilde{\omega}(t) + (t_1 - t)\Big(x^t\tilde{\omega}'(t) + x^t\tilde{\omega}(t)\log x\Big) + \\ + (t_1 - t)^2\mu(x),$$

essendo $\mu(x)$ inferiore ad un numero assegnabile per i valori considerati di t e t_1. Ne viene

$$U\left(\frac{x^{t_1}-x^t}{t_1-t}\right) = x^t\left(\bar{\omega}'(t)+\bar{\omega}(t)\log x\right) + (t_1-t)\mu(x);$$

ma poichè

$$\frac{x^{t_1}-x^t}{t_1-t} = x^t \log x + (t_1-t)\rho(x)$$

viene, quando t_1 tenda a t:

$$U(x^t \log x) = x^t\left(\bar{\omega}'(t) + \bar{\omega}(t)\log x\right). \tag{18}$$

In modo analogo si trova

$$U(x^t \log^m x) = x^t\left[\bar{\omega}^{(m)}(t) + m\bar{\omega}^{(m-1)}(t)\log x + \right. \\ \left. + \dots + \bar{\omega}(t)\log^m x\right], \tag{19}$$

il che dimostra l'asserto.

222. Poichè l'operazione U è commutabile con xD, la quale nell'insieme delle funzioni analitiche ha la sola radice 1, si avrà per U (§ 68) uno sviluppo della forma

$$U(\varphi) = k_0\varphi + k_1 xD\varphi + k_2(xD)^2 + \dots + k_n(xD)^n\varphi + \dots \tag{20}$$

dove con $(xD)^n$ si è rappresentata la n^{sima} potenza dell'operazione xD. Facendo, nella (20), $\varphi = x^t$, si ottiene

$$U(x^t) = x^t \sum_{n=0}^{\infty} k_n t^n,$$

e quindi, quando sia noto lo sviluppo (20) e la serie $\sum k_n t^n$ sia convergente in un intorno di $t = o$, si ha lo sviluppo di $\bar{\omega}(t)$ (o di un suo ramo) nell'intorno di $t = o$. La conoscenza di $\bar{\omega}(t)$ conduce quindi a quella dello sviluppo (20), e reciprocamente

Inoltre, facendo $\varphi = \log^m x$, si ha

$$U(\log^m x) = k_0 \log^m x + m k_1 \log^{m-1} x + \\ + \binom{m}{2} k_2 \log^{m-2} x + \dots + k_m, \\ (m = o, 1, 2, \dots) \tag{21}$$

e quindi dalla conoscenza delle $k_0, k_1, \dots, k_m, \dots$ si deduce quella delle $U(\log^m x)$ e reciprocamente. [1]

223. Vogliamo ora considerare una classe estesa di operazioni U, aventi la proprietà di trasformare in sè le espressioni regolari. Osserviamo dapprima

a) che la somma ed il prodotto di espressioni regolari sono espressioni regolari. Ciò si verifica immediatamente.

b) che la derivata di un'espressione regolare è pure un'espressione regolare,

c) che se un'espressione

$$\varphi + \varphi_1 \log x + \varphi_2 \log^2 x + \dots + \varphi_m \log^m x \tag{22}$$

dove $\varphi, \varphi_1, \dots \varphi_m$, sono elementi di $S°$, è identicamente nulla in un intorno di $x = o$, sono identicamente nulle le $\varphi, \varphi_1, \dots \varphi_m$. Infatti, supponiamo che si abbia dapprima l'espressione identicamente nulla

$$\varphi + \varphi_1 \log x;$$

si faccia descrivere alla variabile x una circonferenza di centro $x = o$ e di raggio arbitrariamente piccolo. Dopo compiuto il giro, l'espressione diverrà:

$$\varphi + \varphi_1 \log x + 2\pi i \varphi_1,$$

[1] Come le relazioni qui esposte si prestino alla soluzione del problema di interpolazione, è mostrato ai §§ 45 e seguenti della Memoria di S. Pincherle: *Di alcune operazioni atte ad aggiungere o togliere singolarità ad una funzione analitica.* (Ann. di Mat., S. III, T. IV, 1900).

pure identicamente nulla, onde per sottrazione viene $\varphi_1 = o$, e quindi $\varphi = o$.

Suppongasi ora il teorema dimostrato per un'espressione di m termini; esso sarà vero per l'espressione (22) di $m+1$ termini, poichè facendo percorrere alla x lo stesso giro, si ottiene un'espressione della medesima forma e con un termine di meno; da cui segue che φ_m, e quindi $\varphi_{m-1}, \varphi_{m-2}, \ldots \varphi_1, \varphi$, sono pure identicamente nulli. Con procedimento analogo e di cui si tralascia per brevità il facile sviluppo, si dimostra che un' espressione regolare

$$\sum_{j=1}^{p} x^{t_j}(\varphi_{j0} + \varphi_{j1} log\, x + \ldots \varphi_{j,m_j} log^{m_j} x)$$

in cui gli esponenti t_j non differiscono fra loro per numeri interi, non può essere nulla nell' intorno di $x = o$ se non sono identicamente nulle le φ_{ji}.

224. Ciò posto, si riprenda un' operazione U definita in $\mathfrak{W}$ dalle (27), e si faccia l'ipotesi che fra le determinazioni di $\bar{\omega}(t)$ (§ 220) se ne trovi una, tale che per tutti i valori di t di una certa area **a** e per tutti i valori di x di un intorno di $x = o$, la serie

$$\sum_{n=o}^{\infty} \bar{\omega}(t+n)x^n$$

sia uniformemente convergente. Ne viene, per i noti principî della teoria delle funzioni, che sarà pure convergente in quell'area e quindi apparterrà ad $\mathfrak{S}^o$ la serie

$$\sum_{n=o}^{\infty} \bar{\omega}^{(m)}(t+n)x^n,$$

essendo $\bar{\omega}^{(m)}$ la derivata m^{sima} di $\bar{\omega}$ rispetto a t. Sotto questa ipotesi:

a) la U è applicabile termine a termine ad ogni elemento $x^t\varphi$, purchè t appartenga ad **a** e φ appartenga ad $\mathfrak{S}^o$. Ciò segue dal § 210.

b) La trasformata di un'espressione regolare è anche un' espressione regolare. Per dimostrare ciò, abbiasi l'espressione regolare

$$\eta = x^t(\varphi_o + \varphi_1 log x + \varphi_2 log^2 x + \ldots + \varphi_m log^m x), \tag{23}$$

con

$$\varphi_j(x) = \sum_{n=o}^{\infty} h_{jn} x^n, \quad (j = o, 1, 2, \ldots m).$$

Applicando l'operazione U, si otterrà lo sviluppo:

$$U(\eta) = \sum_{j=o}^{m} \sum_{n=o}^{\infty} h_{jn} U(x^{t+n} log^j x),$$

e per la (19):

$$U(\eta) = \sum_{j=o}^{m} \sum_{n=o}^{\infty} h_{jn} x^{t+n}\Big(\bar{\omega}^{(j)}(t+n) + j\bar{\omega}^{(j-1)}(t+n) log x + \\ + \ldots + \bar{\omega}(t+n) log^j x\Big).$$

Ora, poichè per ipotesi la serie

$$\sum \bar{\omega}^{(j)}(t+n)x^n$$

appartiene ad $\mathfrak{S}^o$, vi apparterrà anche la

$$\sum_{n=o}^{\infty} h_{jn}\bar{\omega}^{(j)}(t+n)x^n,$$

e si avrà pertanto per $U(\eta)$ l'espressione regolare

$$U(\eta) = x^t(\psi_o + \psi_1 log x + \psi_2 log^2 x + \ldots + \psi_m log^m x)$$

dove $\psi_o, \psi_1, \ldots \psi_m$ sono elementi di $\mathfrak{S}^o$ dati da

$$
(24)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\psi_m = \sum_{n=o}^{\infty} h_{mn}\tilde{\omega}(t+n)x^n,\\
&\psi_{m-1} = \sum_{n=o}^{\infty} m h_{mn}\tilde{\omega}'(t+n)x_n + \sum_{n=o}^{\infty} h_{m-1\cdot n}\tilde{\omega}(t+n)x^n\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\psi_1 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{n=o}^{\infty} j h_{jn}\tilde{\omega}^{(j-1)}(t+n)x^n,\\
&\psi_o = \sum_{j=o}^{m}\sum_{n=o}^{\infty} h_{jn}\tilde{\omega}^{(j)}(t+n)x^n.
\end{aligned}\right.
$$

225. Supponendo differenti da zero le $a_o, a_1, \ldots a_n, \ldots$ delle formule (1), l'operazione U non ammette radici nello spazio $\mathfrak{S}$ (§ 208). Però, si può chiedere se essa ammetta radici nello spazio $\mathfrak{W}$. Limitandoci al caso delle operazioni U soddisfacenti alla condizione posta nel § precedente, si vede immediatamente che

data in $\mathfrak{W}$, mediante la (17), un' operazione U soddisfacente all' ipotesi del § 224, ad una radice $t = c$ di $\tilde{\omega}(t)$, posta nell'area **a** e multipla dell' ordine m di moltiplicità, corrispondono, in $\mathfrak{W}$, m radici linearmente indipendenti dell' operazione U.

Sia infatti $\tilde{\omega}(c) = o$, essendo c un valore di t appartenente all' area **a**; avremo immediatamente dalla (17) che è $U(x^c) = o$, cioè x^c è una radice dell' operazione U. Se $c_1, c_2, \ldots c_r$, sono r radici distinte di U, poste in **a**, $x^{c_1}, x^{c_2}, \ldots x^{c_r}$ saranno radici linearmente indipendenti della stessa operazione. Infine, se c è una radice multipla di $\tilde{\omega}(t)$ dell' ordine $m+1$ di moltiplicità, basta porre mente alla formula (19) per scorgere come siano radici di U, linearmente indipendenti, le funzioni

$$x^c,\ x^c log\, x,\ \ldots\ x^c log^m x.$$

226. Del teorema precedente vale la reciproca. Si supponga che l' operazione U, per la quale valga la proprietà enunciata al § 224, abbia per radice l' espressione regolare η data alla (23); si supponga poi che l'esponente t sia un punto dell' area **a** di cui si è ammessa l' esistenza al citato § 224. Dal calcolo svolto in quel §, risulta

$$U(\eta) = x^t(\psi_o + \psi_1 log\, x + \ldots + \psi_m log^m x),$$

dove le ψ sono date dalle (24). Se ora η è radice di U, sarà identicamente (§ 223)

$$\psi_o = o,\ \psi_1 = o,\ \ldots\ \psi_m = o,$$

e quindi, per ogni valore di n, le (24) danno:

$$
\begin{aligned}
&h_{m\cdot n}\tilde{\omega}(t+n) = o,\\
&m h_{m\cdot n}\tilde{\omega}'(t+\pi) + h_{m-1\cdot n}\tilde{\omega}(t+n) = o,\\
&\binom{m}{2} h_{m\cdot n}\tilde{\omega}''(t+n) + (m-1)h_{m-1\cdot n}\tilde{\omega}'(t+n) +\\
&\qquad + h_{m-2\cdot n}\tilde{\omega}(t+n) = o\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Ora, la φ_m non essendo, naturalmente, nulla identicamente, il coefficiente $h_{m\cdot n}$ sarà differente da zero, almeno per un valore di n, onde $\tilde{\omega}(t+n) = o$. Sostituendo nella seconda delle relazioni precedenti, verrà $\tilde{\omega}'(t+n) = o$, poi $\tilde{\omega}''(t+n) = o$, ecc., ossia se l' espressione regolare (23) è radice di U, esiste un numero intero n tale che $t+n$ è radice di $\tilde{\omega}$ dell' ordine $m+1$ di moltiplicità.

Ad un risultato simile si giunge, in forza del teorema del § 223, supponendo che U ammetta come radice una espressione che sia somma di quante si vogliono espressioni della forma (23), in numero finito, ed in cui gli esponenti t non differiscano fra loro per numeri interi.

227. L'operazione U è commutabile colla derivazione rispetto a t. Infatti sia, nell'ipotesi del § 224, $\psi(x,t)$ una funzione analitica di t e di x, regolare, per t contenuto in **a** e per x posto in un intorno conveniente di $x = o$, e sia in questo campo

$$\varphi(x, t) = \sum h_n(t) x^n.$$

L'applicazione delle formule (17) e (19) ad $U\big((x^t \varphi(x,t)\big)$ e ad $U\left(\frac{\partial}{\partial t} x^t \varphi(x, t)\right)$ mostra immediatamente che

$$U \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} U.$$

C. OPERAZIONI NORMALI D'ORDINE SUPERIORE.

228. Chiameremo operazione normale d'ordine p un'operazione A le cui ξ_n sono date nella seguente forma:

$$(25) \quad A(x^n) = x^n(a_{no} + a_{n1} x + a_{n2} x^2 + \ldots + a_{np} x^p).$$

Le operazioni U studiate nelle precedenti pagine sono pertanto le operazioni normali d'ordine zero.

La somma di due date operazioni normali è un'operazione normale il cui ordine è, in generale, uguale al maggiore degli ordini delle due operazioni date.

Il prodotto di due date operazioni normali è un'operazione normale il cui ordine è uguale alla somma degli ordini delle due operazioni date. Le operazioni normali, nel loro insieme, formano dunque un gruppo; non formano invece un gruppo le operazioni normali di un dato ordine, eccettuate quelle dell'ordine zero.

229. Poichè la A è data dalle (25) mediante le sue ξ_n, possiamo dedurne lo sviluppo in serie per le potenze di D secondo il § 128; ponendo, come al § 209:

$$(26) \quad \Delta^n a_{oj} = a_{nj} - n a_{n-1.j} + \binom{n}{2} a_{n-2.j} - \ldots + (-1)^n a_{oj} = b_{nj},$$

lo sviluppo stesso viene dato da:

$$(27) \quad A(\varphi) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n (b_{no} + b_{n1} x + b_{n2} x^2 + \ldots + b_{np} x^p) D^n \varphi.$$

Reciprocamente, ogni operazione definita da una serie di questa forma è, in S, un'operazione normale d'ordine p.

Indicando con U_j l'operazione d'ordine zero definita da

$$U_j(\varphi) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!} b_{nj} x^n D^n \varphi,$$

l'operazione A si può scrivere

$$(28) \quad A = U_o + x U_1 + \ldots + x^p U_p;$$

ne viene che le considerazioni del § 210 e del § 211 relative al campo di validità delle operazioni U si estendono senz'altro alle operazioni normali d'ordine qualsivoglia.

230. Dalla medesima forma (28) per l'operazione A segue che, come le operazioni U, anche le A sono suscettibili di essere estese allo spazio $\mathfrak{W}$ (v. §§ 218, 221), e sotto le restrizioni poste in quei §§, si avrà per un numero t qualsivoglia

$$(29)\qquad A(x^t) = x^t\left(\bar\omega_0(t) + \bar\omega_1(t)x + \ldots + \bar\omega_p(t)x^p\right),$$

essendo $\bar\omega_j(t)$ una funzione analitica che, per t uguale al numero intero positivo n, prende il valore a_{nj}. È facile scrivere, per l'operazione A, la formula analoga alla (19). Infine, facendo sulle operazioni U della formula (28) l'ipotesi del § 224, si trova pure che l'operazione normale A trasforma un' espressione regolare in un' espressione regolare.

231. Per brevità di scrittura e per semplicità nelle notazioni, tratteremo più specialmente nei §§ seguenti delle operazioni di prim'ordine; e poichè il passaggio alle operazioni d'ordine qualunque richiede solo una ovvia generalizzazione, ci limiteremo a dare, per quel caso più generale, l'enunciato delle proposizioni più importanti. Abbiasi dunque l'operazione normale di prim'ordine, definita da

$$(25')\qquad A(x_n) = x^n(a_n + a'_n x);$$

se ne ricava lo sviluppo in serie

$$A(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(b_n + b'_n x)x^n D^n\varphi = U + xU_1,$$

dove è:

$$b_n = \Delta^n a_0,\ b'_n = \Delta^n a'_0,$$

e dove porremo:

$$U(x^t) = \bar\omega(t)x^t,\ U_1(x^t) = \bar\omega_1(t)x^t,$$

ricordando le osservazioni fatte al § 220 ed ammettendo per le $\bar\omega(t)$ e $\bar\omega_1(t)$ soddisfatta la condizione del § 224.

Sotto queste ipotesi:

a) La A è applicabile termine a termine ad ogni elemento $x^t\varphi(t)$, t appartenendo ad **a** e $\varphi(x)$ ad S^o.

b) La trasformata di un'espressione regolare

$$\eta = x^t(\varphi_0 + \varphi_1 \log x + \ldots + \varphi_m \log^m x)$$

è pure un'espressione regolare. Si ha, in forza del § 224,

$$A(\eta) = x^t(\chi_0 + \chi_1 \log x + \ldots + \chi_m \log^m x),$$

dove, ritenute le notazioni del detto § 224, è

$$\chi_m = \sum_{n=0}^{\infty} h_{mn}\left(\bar\omega(t+n) + x\bar\omega_1(t+n)\right)x^n,$$

$$\chi_{m-1} = \sum_{n=0}^{\infty} m h_{mn}\left(\bar\omega'(t+n) + x\bar\omega_1'(t+n)\right)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} h_{m-1.n}\left(\bar\omega(t+n) + x\bar\omega_1(t+n)\right)x^n,$$

. . . .

Si osservi come, dalle formole precedenti, risulti:

$$(30)\qquad \begin{cases} A(x^t\varphi_m) = x^t\chi_m \\ A\left(x^t(\varphi_{m-1} + m\varphi_m \log x)\right) = x^t(\chi_{m-1} + m\chi_m \log x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

232. Ammettendo ancora per U ed U_1 le ipotesi del § 224, si ha immediatamente, dal § 227, che l'operazione A è commutabile colla derivazione rispetto al parametro t.

233. Ci proponiamo ora di determinare le radici dell'operazione A contenute nello spazio $\mathfrak{W}$, e a questo effetto ci converrà di cercare anzitutto la soluzione della equazione funzionale (1)

$$A\left(x^t\varphi(x,t)\right) = \lambda(t)x^t, \tag{31}$$

essendo $\lambda(t)$ una data funzione analitica in U. Poniamo

$$\varphi(x.t) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n(t)x^n$$

ed avremo:

$$A\left(x^t\varphi(x,t)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(k_n(t)\tilde{\omega}(t+n) + k_{n-1}(t)\tilde{\omega}_1(t+n-1)\right)x^{t+n};$$

dovremo dunque determinare i coefficienti k_n in modo da soddisfare a

$$k_0(t)\tilde{\omega}(t) = \lambda(t) \tag{32}$$

e a

$$k_n(t)\tilde{\omega}(t+n) + k_{n-1}(t)\tilde{\omega}_1(t+n-1) = 0. \tag{33}$$

Queste equazioni permettono di determinare $k_1, k_2, \ldots k_n$, ogni qualvolta $\tilde{\omega}(t+n)$ non è nullo; k_n viene dato da:

$$k_n = (-1)^n \frac{k_0(t)\tilde{\omega}_1(t)\tilde{\omega}_1(t+1)\ldots\,\tilde{\omega}_1(t+n-1)}{\tilde{\omega}(t+1)\tilde{\omega}(t+2)\ldots\ldots\tilde{\omega}(t+n)}.$$

Si consideri ora t nell'intorno di una radice t_1 della equazione:

$$\tilde{\omega}(t) = o, \tag{34}$$

radice che si suppone contenuta in **a**, e si ammetta che esistano in **a** altre radici di (34) in numero finito, differenti da

(1) Per il procedimento qui seguito, cfr. SCHLESINGER, *Handbuch der linearen Differentialgleichungen*, Bd. I, pag. 161 e seguenti. V. pure le indicazioni bibliografiche a pag. XII dello stesso volume.

t_1 per numeri interi. Ordiniamo queste radici in modo che esse siano

$$t_1,\quad t_2 = t_1 + q_1,\quad t_3 = t_2 + q_2, \ldots\quad t_r = t_{r-1} + q_{r-1},$$

dove q_1, q_2, q_{r-1} sono numeri interi positivi; sia infine s_i l'ordine di moltiplicità di t_i.

Se si considera il prodotto:

$$\rho(t) = \tilde{\omega}(t)\tilde{\omega}(t+1)\ldots\;\tilde{\omega}(t+q_1+q_2+\ldots\,q_{r-1}),$$

a quale potenza conterrà esso il fattore $t - t_i$? È chiaro che $\tilde{\omega}(t)$ lo contiene alla potenza s_i^{ma}; $\tilde{\omega}(t+q_i)$ contiene il fattore $t + q_i - t_{i+1} = t - t_i$ alla potenza s_{i+1}, $\tilde{\omega}(t + q_{i+1} + q_i)$ contiene il fattore $t + q_{i+1} + q_i - t_{i+2} = t - t_i$ alla potenza s_{i+2}, e così via. Onde il prodotto scritto di sopra contiene $t - t_i$ alla potenza $s_i + s_{i+1} + s_{i+2} + \ldots + s_r$.

Ciò premesso, poniamo, nell'equazione (31), $\lambda(t) = k_0\tilde{\omega}(t)$, e facciamo $k_0 = \tilde{\omega}(t+1)\tilde{\omega}(t+2)\ldots\;\tilde{\omega}(t+q_1+q_2+\ldots\,q_{r-1})$; avremo risoluta, mediante la (33), l'equazione:

$$A\left(x^t\varphi(x,t)\right) = \rho(t)x^t.$$

Siccome t_i è radice del secondo membro, così $x^{t_i}\varphi(x,t_i)$ sarà una radice di A, espressa da una serie i cui coefficenti sono tutti finiti; inoltre, essendo t_i radice dell'ordine $s_i + s_{i+1} + \ldots + s_r$ di multiplicità, ed A essendo commutabile con $\frac{\partial}{\partial t}$ (§ 232), così saranno anche radici di A le

$$\frac{\partial^p\, x^t\varphi(x,\,t)}{\partial t^p}$$

per $p = 1, 2, \ldots, s_i + s_{i+1} + \ldots + s_r - 1$. Alla radice t_i dell' equazione (34) corrispondono dunque $s_i + s_{i+1} + \ldots + s_r$ radici dell'operazione A, le quali, come è chiaro, sono linearmente indipendenti (§ 223).

234. Gli sviluppi trovati nel § precedente per le radici di A si sono ottenuti in modo puramente formale; essi non acquisteranno validità effettiva finchè non si sia in grado di fissare le condizioni di convergenza delle serie $\varphi(x,t)$. Tali condizioni sono naturalmente subordinate alle specializzazioni della natura delle funzioni $\bar{\omega}(t)$, $\bar{\omega}_1(t)$. Ad esempio, qualora accada che per tutti i punti di un'area **a**' contenuta in **a**, il rapporto:

$$\bar{\omega}(t+n) : \bar{\omega}_1(t+n-1)$$

tenda, per $n = \infty$, uniformemente ad un limite z, la serie $\varphi(x, t)$ convergerà uniformemente per tutte le coppie di valori di x e t contenute rispettivamente nell'interno del cerchio di centro o e di raggio $|z|$ e nell'area **a**'; le soluzioni dell'equazione $A = o$ hanno in quel campo significato effettivo, essendo, in codesto campo, funzioni analitiche determinate. Questo caso si presenta, in particolare, quando, per tutti i valori di n superiori ad un dato numero $\bar{n}$, sia $\Delta^n a_0 = o$, $\Delta^n a'_0 = o$, nel qual caso la A si riduce ad una forma differenziale lineare (1).

235. Si è osservato, al § 216, che l'operazione U, o operazione d'ordine zero, mediante l'operazione C (definita, in quello stesso §, come quella che applicata ad una serie di potenze dà il coefficiente del termine generale della serie stessa) viene trasformata in una moltiplicazione. Vogliamo mostrare come, analogamente, la trasformata dell'operazione A mediante C sia una forma lineare alle differenze (§ 122). Si noti infatti che se $\varphi = \sum k_n x^n$, si ha:

$$A(\varphi) = A\left(\sum k_n x^n\right) = \sum\left(k_n \bar{\omega}(n) + k_{n-1}\, \bar{\omega}_1(n-1)\right)x^n;$$

(1) V. SCHLESINGER, op. citata, T, I, pag. 164 e seg.

indicata dunque con $\Phi(\psi)$ la forma lineare alle differenze

$$\bar{\omega}(n)\psi(n) + \bar{\omega}_1(n-1)\psi(n-1),$$

(cfr. il primo membro della (33)) si ha:

$$C\varphi = k_n, \qquad CA\varphi = \Phi(k_n),$$

onde:

$$\Phi = CAC^{-1}.$$

236. Supponendo nelle (25') le a_n ed a'_n differenti da zero, possiamo mostrare come l'operazione A da esse definita sia scomponibile in un prodotto della forma $U_q\ M_{1-x}\ U_p$, essendo U_p ed U_q operazioni normali d'ordine zero. Infatti, si ponga:

$$U_p(x^n) = p_n x^n, \qquad U_q(x^n) = q_n x^n$$

e verrà:

$$U_q M_{1-x} U_p(x^n) = q_n p_n x^n - q_{n+1} p_n x^{n+1};$$

se dunque si vuole che il prodotto $U_q\ M_{1-x}\ U_p$ coincida in S colla A, basterà fare:

$$p_n q_n = a_n, \qquad -p_n q_{n+1} = a'_n, \qquad (n = o, 1, 2 \ldots)$$

e quindi:

$$q_n = (-1)^n q_0 \frac{a'_0 a'_1 \ldots a'_{n-1}}{a_0 a_1 \ldots a_{n-1}}, \qquad p_n = (-1)^n \frac{a_0 a_1 \ldots a_{n-1} a_n}{q_0 a'_0 a'_1 \ldots a'_{n-1}}.$$

Le U_q, U_p sono dunque determinate all'infuori del moltiplicatore q_0.

237. La formola

$$A = U_q M_{1-x} U_p \tag{35}$$

permette di ottenere con facilità l'inversa della operazione A. Infatti dalla (35) si deduce subito, se tutte le a_n ed a'_n sono differenti da zero:

$$A^{-1} = U_p^{-1} M_{\frac{1}{1-x}} U_q^{-1}. \tag{36}$$

Sotto semplici condizioni per le p_n e q_n (e quindi per le a_n ed a'_n), condizioni sulle quali non crediamo di insistere qui [1] e che valgono ad assicurare la convergenza del secondo membro per valori opportuni di x, si deduce dalla formula (36):

$$A^{-1}(x^n) = \frac{1}{q_n}\left(\frac{x^n}{p_n} + \frac{x^{n+1}}{p_{n+1}} + \ldots\right)$$

ovvero:

$$(37) \qquad A^{-1}(x^n) = \frac{x^n}{a_n} - \frac{a'_n x^{n+1}}{a_n a_{n+1}} + \frac{a'_n a'_{n+1} x^{n+2}}{a_n a_{n+1} a_{n+2}} - \ldots$$

238. Come abbiamo avvertito più sopra (§ 231), tralasceremo di sviluppare diffusamente le proprietà delle operazioni normali d'ordine qualunque p, in quanto che esse si presentano come non difficile generalizzazione di quelle ora esposte per le operazioni del primo ordine. Ci limiteremo a dare in proposito i seguenti enunciati:

a) Sotto ipotesi analoghe a quelle del § 231, l'operazione A, normale di ordine p, è applicabile termine a termine ad ogni elemento $x^t\varphi(x)$, t appartenendo ad **a** e $\varphi(x)$ ad S^o.

b) Sotto le stesse ipotesi, la trasformata di un'espressione regolare è un'espressione regolare.

c) L'operazione A è commutabile colla derivazione rispetto a t.

d) Il metodo del § 233 serve a determinare le radici di A; sola modificazione consiste in ciò, che le k_n sono determinate dall'equazione alle differenze d'ordine p:

$$\tilde{\omega}(t+n)k_n + \tilde{\omega}_1(t+n-1)k_{n-1} + \ldots + \tilde{\omega}_p(t+n-p)k_{n-p} = o$$

[1] Su questo argomento, v. i §§ 67 e segg. della Memoria di S. PINCHERLE già citata a piè della pag. 169.

anzichè dall'equazione di prim'ordine (33). Fra le condizioni sufficienti di convergenza per gli sviluppi che così si trovano per le radici di A (cfr. § 234) vale la seguente: che per tutti i punti di un'area **a'** del piano t contenuta in **a**, i rapporti:

$$\tilde{\omega}_i(t+n-i) : \tilde{\omega}(t+n), \quad (i = 1, 2, \ldots p)$$

tendano uniformemente a limiti finiti [1] e differenti da zero.

e) La trasformata di A mediante C è una forma lineare alle differenze d'ordine p.

f) L'operazione A è scomponibile in un prodotto della forma:

$$U_0 M_{1-x} U_1 M_{1-x} \ldots U_{p-1} M_{1-x} U_p;$$

basta supporre la proposizione vera per un'operazione d'ordine $p-1$, e si conclude facilmente che essa sussiste per un'operazione d'ordine p. Come al § 237, questa decomposizione di A in fattori permette di dare immediatamente l'espressione dell'operazione inversa di A mediante un prodotto di moltiplicazioni per $\frac{1}{1-x}$ e di operazioni U.

[1] Questa condizione è soddisfatta nel caso che la A si riduca ad una forma differenziale lineare, quando cioè le $b_{nj} = \Delta^n a_{oj}$ delle formule (26) e (27) sono nulle per tutti i valori di n superiori ad un dato numero m. Per la dimostrazione della convergenza in questo caso, V. SCHLESINGER al l. c. a piè della pagina 180.

CAPITOLO NONO.

L' Operazione Aggiunta

239. Indichiamo con $\mathfrak{S}$ l'insieme delle serie di LAURENT, o serie ordinate per le potenze intere, positive e negative, di una variabile x. Una tale serie $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_n x^n$ si può talvolta considerare indipendentemente da ogni condizione di convergenza: essa serve allora unicamente a legare, in un ente unico, la successione indefinita nei due sensi, $\ldots a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots$ [1] Un ente di $\mathfrak{S}$ si dirà nullo se sono nulli tutti i suoi coefficienti; due enti di $\mathfrak{S}$ si diranno uguali se sono uguali i coefficienti delle stesse potenze di x, ciascuno a ciascuno; essi si sommeranno sommando i coefficienti delle stesse potenze di x: posto ciò, si conclude che $\mathfrak{S}$ è un insieme lineare. Ad esso appartiene l'insieme S delle serie di potenze intere positive di x, ed in particolare S^ω, insieme dei polinomi razionali interi in x; vi appartiene pure l'insieme $\bar{S}$ delle serie di potenze intere negative di x, ed in particolare l'insieme dei polinomi razionali interi in x^{-1}, insieme che indicheremo con $\bar{S}^\omega$. Per lo spazio $\mathfrak{S}$, il cui sistema fondamentale è x^n, $(n = -\infty \ldots -2, -1, o, 1, 2, \ldots +\infty)$, valgono le proprietà date per le operazioni elementari nello spazio S al Cap. V e al Cap. VI (§§ 104-120 e 148-152).

(1) V. Cap. V, §§ 97-98.

240. Siano ora:

$$\varphi = \sum_{-\infty}^{\infty} g_n x^n, \qquad \psi = \sum_{-\infty}^{\infty} k_n x^n$$

due elementi di $\mathfrak{S}$, e coi loro coefficienti si costruisca la espressione:

$$\text{(1)} \qquad R(\varphi, \psi) = \sum_{-\infty}^{\infty} g_{-n} k_{n-1}.$$

È chiaro che, data comunque la serie φ, sarà sempre possibile, in infiniti modi, di determinare ψ così che l'espressione (1) risulti assolutamente convergente. L'insieme degli elementi ψ per i quali questa condizione è soddisfatta verrà indicato con $\mathfrak{S}_\varphi$; è manifesto che se ψ e ψ_1 vi appartengono, vi apparterrà anche $\psi + \psi_1$; $\mathfrak{S}_\varphi$ è pertanto un'insieme lineare contenuto in $\mathfrak{S}$. A questo insieme appartiene certamente ogni elemento di S^ω e di $\bar{S}^\omega$.

Come esempio, si supponga che la serie data φ converga entro una corona circolare di centro $x = o$ e soggetta alla condizione di comprendere nel suo interno il punto $x = 1$; si vede immediatamente che ogni serie ψ convergente entro una corona circolare soggetta alla medesima condizione appartiene a $\mathfrak{S}_\varphi$.

Fissata invece ψ, sarà ugualmente possibile in infiniti modi, di determinare φ in guisa che la (1) riesca assolutamente convergente. L'insieme di tali elementi φ, evidentemente lineare, si indicherà con $\mathfrak{S}_\psi$. Due elementi φ e ψ di $\mathfrak{S}$ sono così legati fra loro che se il primo appartiene a $\mathfrak{S}_\psi$, il secondo appartiene necessariamente a $\mathfrak{S}_\varphi$ e vice versa.

241. La $R(\varphi, \psi)$ può riguardarsi come un'operazione applicata ai due enti φ e ψ, variabili n $\mathfrak{S}$; fissato φ, essa è un'operazione applicata agli enti ψ di $\mathfrak{S}_\varphi$, mentre fissato

ψ, essa è un'operazione applicata agli enti φ di $\mathfrak{S}_\psi$. Ci proponiamo di notare le proprietà di questa operazione.

a) Anzitutto, data φ e presa ψ in $\mathfrak{S}_\varphi$, l'operazione è a determinazione unica.

b) Inoltre, se ψ è un elemento dello spazio comune a $\mathfrak{S}_\varphi$ e $\mathfrak{S}_{\varphi_1}$, si ha:

$$R(\varphi + \varphi_1, \psi) = R(\varphi, \psi) + R(\varphi_1, \psi);$$

se ψ e ψ_1 sono due elementi di $\mathfrak{S}_\varphi$, si ha:

$$R(\varphi, \psi + \psi_1) = R(\varphi, \psi) + R(\varphi, \psi_1);$$

infine c essendo un numero qualsivoglia, si ha:

$$R(c\varphi, \psi) = R(\varphi, c\psi) = cR(\varphi, \psi);$$

onde si conclude che R è un'operazione distributiva separatamente rispetto a φ e a ψ.

c) Per ogni elemento dello spazio comune a $\mathfrak{S}_\varphi$ e a $\mathfrak{S}_{\varphi_1}$ si abbia, essendo

$$\varphi = \sum g_n x^n, \quad \varphi_1 = \sum g'_n x^n$$
$$R(\varphi, \psi) = R(\varphi_1, \psi);$$

ne risulta $\varphi = \varphi_1$. Ciò segue immediatamente dal fatto che tanto S^ω che $\overline{S}^\omega$ appartengono a quello spazio comune: ponendo pertanto nell'uguaglianza precedente $\psi = x^{-n}$, dove n è un numero intero arbitrario fra $-\infty$ e $+\infty$, viene $g_{n-1} = g'_{n-1}$.

d) Si muti l'elemento φ in $x\varphi$. Allora per la definizione di R data in principio del § 240, sarà, se ψ appartiene all'insieme comune a $\mathfrak{S}_\varphi$ e a $\mathfrak{S}_{x\varphi}$:

$$R(\varphi, x\psi) = \sum_{-\infty}^{\infty} g_{-n} k_{n-2}.$$

Ma al medesimo risultato si giunge cambiando ψ in $x\psi$; da cui segue:

$$R(x\varphi, \psi) = R(\varphi, x\psi). \tag{2}$$

Da questa proprietà e dalla proprietà *b*) data più sopra, segue che se α è una funzione razionale intera di x o di $\frac{1}{x}$, si ha, presa la ψ opportunamente:

$$R(\alpha\varphi, \psi) = R(\varphi, \alpha\psi). \tag{3}$$

242. Data un'operazione distributiva univoca A che trasformi $\mathfrak{S}$ in sè, chiameremo *operazione aggiunta* di A ed indicheremo con $\overline{A}$, l'operazione definita da:

$$R(A(\varphi), \psi) = R(\varphi, \overline{A}(\psi)). \tag{4}$$

Da questa definizione emergono le seguenti proprietà:

a) L'aggiunta di A, se esiste, è unica.

Infatti, ammesso una volta per sempre che quando scriviamo la $R(\alpha,\beta)$ intendiamo che β appartenga a $\mathfrak{S}_\alpha$, si abbia ad un tempo:

$$R(A(\varphi), \psi) = R(\varphi, \overline{A}(\psi)),$$

ed

$$R(A(\varphi), \psi) = R(\varphi, \overline{A}_1(\psi));$$

ne seguirà, per il § 241, *c*), che in tutto il campo di validità dei secondi membri è $\overline{A}_1 = \overline{A}$.

b) L'aggiunta di A è un'operazione distributiva.

Sia infatti:

$$R(A(\varphi), \psi) = R(\varphi, \overline{A}(\psi)), \qquad R(A(\varphi), \psi_1) = R(\varphi, \overline{A}(\psi_1));$$

si avrà da una parte:

$$R(A(\varphi), \psi + \psi_1) = R(\varphi, \overline{A}(\psi + \psi_1)):$$

dall'altra (§ 241, *b*)

$$R(A(\varphi), \psi + \psi_1) = R(\varphi, \overline{A}(\psi)) + R(\alpha, \overline{A}(\psi_1)) =$$
$$= R(\varphi, \overline{A}(\psi)) + \overline{A}(\psi_1)),$$

onde (§ 241, *c*)

$$\overline{A}(\psi + \psi_1) = \overline{A}(\psi) + \overline{A}(\psi_1).$$

Analogamente si dimostra che per ogni numero c si ha

$$\overline{A}(c\psi) = c\overline{A}(\psi).$$

c) L'aggiunta di una somma è uguale alla somma delle aggiunte.

Siano A, B due operazioni le cui aggiunte siano $\overline{A}$ e $\overline{B}$ (1) rispettivamente; si ha:

$$R((A + B)\varphi, \psi) = R(A(\varphi), \psi) + R(B(\varphi), \psi) =$$
$$= R(\varphi, \overline{A}(\psi)) + R(\varphi, \overline{B}(\psi)) =$$
$$= R(\varphi, (\overline{A} + \overline{B})\psi),$$

il che dimostra l'enunciato.

d) Dalle proposizioni precedenti si ha immediatamente che l'aggiunta di una funzione lineare omogenea di più operazioni è uguale alla stessa funzione lineare omogenea delle aggiunte delle operazioni medesime.

e) Se $\overline{A}$ è aggiunta di A, inversamente A è aggiunta di $\overline{A}$.

243. Se l'operazione X è uguale al prodotto AB, la sua aggiunta $\overline{X}$ è uguale al prodotto $\overline{B}\overline{A}$.

Infatti, si ha per definizione:

$$R(B(\varphi), \psi) = R(\varphi, \overline{B}(\psi));$$

(1) D'ora in avanti l'aggiunta di un'operazione si indicherà sempre sopralineando la lettera che denota quella operazione.

si ha pure, per la stessa definizione:

$$R(AB(\varphi), \psi) = R(B(\varphi), \overline{A}(\psi))$$

ed applicando l'uguaglianza precedente:

$$R(AB(\varphi), \psi) = R(\varphi, \overline{B}\,\overline{A}(\varphi)),$$

che dimostra l'enunciato.

Risulta da ciò che se si ha un'operazione $X = ABC\ldots$, la sua aggiunta sarà $\overline{X} = \ldots \overline{C}\,\overline{B}\,\overline{A}$.

Ne risulta ancora che se un sistema di operazioni forma un gruppo, il sistema delle loro aggiunte forma un gruppo isomorfo.

244. Dalla definizione del § 242 segue che l'aggiunta dell'operazione **1** è l'operazione **1** stessa. Sia ora $AA_1 = \mathbf{1}$; ne verrà, per il § precedente, $\overline{A}_1\overline{A} = \mathbf{1}$, e quindi si ha che l'aggiunta dell'inversa di un'operazione è l'inversa dell'aggiunta dell'operazione medesima.

245. Per definizione si ha:

$$R(A(x\varphi), \psi) = R(x\varphi, \overline{A}(\psi));$$

ma per il § 241, *d*) si ha:

$$R(x\varphi, \overline{A}(\psi)) = R(\varphi, x\overline{A}(\psi)),$$

onde viene:

$$R(A(x\varphi), \psi) = R(\varphi, x\overline{A}(\psi)),$$

ed analogamente:

$$R(xA(\varphi), \psi) = R(\varphi, \overline{A}(x\psi)).$$

Da queste, per sottrazione:

$$R(A(x\varphi) - xA(\varphi), \psi) = R(\varphi, -\overline{A}(x\psi) + x\overline{A}(\psi)),$$

cioè, ricordando (§ 140) che $A(x\varphi) - xA(\varphi)$ è quell'operazione che abbiamo chiamata derivata funzionale di A e che abbiamo indicata con A′, concludiamo dall' uguaglianza precedente che l' **aggiunta di A′** è **la derivata dell' aggiunta di A, presa con segno cambiato.**

246. Dalla proposizione del § precedente si può ricavare come conseguenza:

a) Che se α è un elemento di $\mathfrak{S}$, l'aggiunta di M_α è la M_α stessa. Infatti l'aggiunta dell' operazione nulla è l' operazione nulla; ora la derivata di M_α essendo lo zero, tale sarà la derivata di $\overline{M}_\alpha$, che sarà pertanto (§ 148 e § 239) un' operazione di moltiplicazione. Ma facendo in

$$R(M_\alpha \varphi, \psi) = R(\varphi, \overline{M}_\alpha \psi)$$

$\varphi = x^m$ e $\psi = x^n$, dove m ed n sono numeri interi arbitrari, positivi o negativi, si conclude subito che la $\overline{M}_\alpha$ non differisce da M_α.

b) Che l'aggiunta di D è — D. Infatti, la derivata dell' operazione D è l' operazione **1**; la derivata della sua aggiunta $\overline{D}$ sarà pertanto $-\mathbf{1}$, e quindi (§ 150) $\overline{D}$ sarà della forma $-D + M$, essendo M un' operazione di moltiplicazione. Ma si verifica subito che in questa operazione il moltiplicatore deve essere zero, poichè se è

$$\varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n x^n, \qquad \psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_n x^n,$$

si ha:

$$R(D\varphi, \psi) = -\sum_{-\infty}^{\infty} n g_{-n} k_n = -R(\varphi, D\psi),$$

e quindi $\overline{D} = -D$.

247. Da ciò si conclude intanto che, se n è un intero positivo qualsivoglia, l' aggiunta di D^n è $(-1)^n D^n$. Si conclude pure dal § precedente e dal § 243 che l' aggiunta di $\alpha D^n \varphi$ è $(-1)^n D^n(\alpha\varphi)$.

Di conseguenza (§ 242, *c*) l' aggiunta della forma differenziale lineare:

$$F = \sum_{n=0}^{m} \alpha_n(x) D^n \varphi$$

sarà la forma differenziale lineare:

$$\overline{F} = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n D^n (\alpha_n(x)\varphi).$$

Da lungo tempo, accanto all' equazione $F = o$, si è considerata l' equazione $\overline{F} = o$, che viene comunemente detta l' **aggiunta di** Lagrange della prima.

248. Se un' operazione A è rappresentata sotto la forma, studiata al Cap. VI, di una serie ordinata per le potenze di D,

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \alpha_n D^n \varphi,$$

la sua aggiunta sarà rappresentata da

$$\text{(5)} \qquad \overline{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} D^n(\alpha_n \varphi)$$

sotto condizioni opportune di limitazione per il campo di validità, condizioni che dipendono dalla successione delle α_n.

Se in particolare le α_n si riducono alle costanti numeriche a_n, si avrà:

$$\text{(6)} \qquad A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} D^n, \qquad \overline{A} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} a_n D^n$$

e si conferma facilmente, formando

$$R\left(A\left(\frac{1}{x^n}\right), x^m\right) \quad \text{ed} \quad R\left(\frac{1}{x^n}, \bar{A}(x^m)\right)$$

che la seconda operazione $\bar{A}$ è effettivamente la aggiunta della prima almeno in tutto lo spazio $\mathfrak{S}^\omega + \bar{\mathfrak{S}}^\omega$.

249. Facendo $a_n = z^n$ nella serie (6), e ricordando l'espressione di θ^z del § 132, si giunge alla conclusione che l'aggiunta di θ^z è la θ^{-z}. Applicando questo risultato, unitamente alle proposizioni dei §§ precedenti, alla forma lineare alle differenze:

$$\Phi = \alpha_0\varphi + \alpha_1\theta\varphi + \alpha_2\theta^2\varphi + \ldots + \alpha_m\theta^m\varphi$$

si ottiene la sua aggiunta nella forma:

$$\bar{\Phi} = \alpha_0\varphi + \theta^{-1}(\alpha_1\varphi) + \theta^{-2}(\alpha_2\varphi) + \ldots + \theta^{-m}(\alpha_m\varphi).\ [1]$$

250. Riprendiamo un'operazione A che muti in sè lo spazio $\mathfrak{S}$, ed indichiamo con ξ_n, dove n è un indice che può assumere tutti i valori interi positivi e negativi, la $A(x^n)$. L'aggiunta di A muti pure lo spazio $\mathfrak{S}$ in sè, e si ponga

$$\bar{A}(x^n) = \bar{\xi}_n.$$

Sia infine:

$$\xi_n = \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_{n.p}x^p, \qquad \bar{\xi}_n = \sum_{p=-\infty}^{\infty} b_{n.p}x^p.$$

Per la definizione dell'operazione aggiunta, si avrà:

$$R(\xi_n, x^m) = R(x^n, \bar{\xi}_m):$$

ma (§ 240)

$$R(\xi_n, x^m) = a_{n.-(m+1)}$$

[1] Sulle aggiunte delle forme alle differenze, v. BORTOLOTTI, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, maggio 1896 e maggio 1898.

onde sarà anche:

$$R(x^n, \sum b_{m.p}x^p) = a_{n.-(m+1)}$$

e quindi:

$$b_{m.-(n+1)} = a_{n.-(m+1)}$$

equivalente a

$$b_{m.n} = a_{-(n+1).-(m+1)}.$$

Ne viene dunque che se si definisce l'operazione A mediante lo specchio (cfr. § 136) dei coefficienti delle sue ξ_n, lo specchio corrispondente per la $\bar{A}$ si otterrà cambiando le linee nelle colonne e viceversa, scritte le une e le altre in ordine inverso.

251. Essendo φ un elemento dato in $\mathfrak{S}$ e ψ un elemento variabile in $\mathfrak{S}_\varphi$, può accadere che sia:

$$(7) \qquad R(\varphi, \psi) = o.$$

Questa relazione assoggetta ψ ad una condizione cui è facile di soddisfare in infiniti modi. Se poi ψ e ψ_1 soddisfano entrambi alla (7), vi soddisfarà evidentemente $c\psi + c_1\psi_1$, essendo c e c_1 costanti arbitrarie; se ne conclude che l'insieme degli elementi di $\mathfrak{S}_\varphi$ soddisfacenti alla (7) è lineare. Daremo a questo insieme lineare il nome di *piano* [1] corrispondente a φ.

Dati più elementi $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, si assoggetti contemporaneamente l'elemento ψ alle condizioni:

$$R(\varphi_1, \psi) = o, \qquad R(\varphi_2, \psi) = o, \ldots;$$

ψ apparterrà allora allo spazio comune ai piani corrispondenti a $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$; spazio che è pure evidentemente lineare.

Ciò posto, abbiansi le operazioni A, $\bar{A}$, aggiunte l'una dell'altra e trasformanti entrambe lo spazio $\mathfrak{S}$ in sè; l'ope-

[1] La ragione di questa denominazione è chiarita più avanti, al Cap. XVI.

razione A ammetta la radice ω in questo spazio. Si avrà, poichè $R(o, \psi) = o$ qualunque sia ψ:

$$R(A(\omega), \psi) = R(\omega, \overline{A}(\psi)) = o,$$

e quindi se ω è radice di A, l'operazione $\overline{A}$ trasforma lo spazio $\mathfrak{S}$ nel *piano* corrispondente ad ω.

Più generalmente, se A ammette le radici $\omega_1, \omega_2, \ldots$, l'operazione $\overline{A}$ trasforma lo spazio $\mathfrak{S}$ nello spazio comune ai piani corrispondenti ad $\omega_1, \omega_2, \ldots$

Come esempio, D ha per operazione aggiunta — D ed ha come radice 1; ne viene $R(1, -D\psi) = o$, cioè le $D\psi$ appartengono al piano corrispondente ad 1 (insieme delle serie di potenze in cui manca il termine in x^{-1}).

252. Si ammetta che un'operazione A coincida colla propria aggiunta $\overline{A}$; nel quale caso l'equazione di definizione (4) sarà:

$$R(A(\varphi), \psi) = R(\varphi, A(\psi)).$$

Fra le altre proprietà particolari a questo caso, si può notare:

a) che nello specchio dei coefficienti delle ξ_n, è $a_{m.p} = a_{-(p+1).-(m+1)}$;

b) che se ω è radice di A, A trasforma $\mathfrak{S}$ nel *piano* corrispondente ad ω;

c) che se un'operazione Q è trasformata di P mediante A (§ 121), viceversa l'aggiunta di P sarà trasformata dell'aggiunta di Q mediante A. Infatti sia

$$Q = APA^{-1}$$

ne verrà, poichè $\overline{A} = A$:

$$\overline{Q} = A^{-1}\overline{P}A$$

onde:

$$A\overline{Q}A^{-1} = AA^{-1}\overline{P}AA^{-1} = \overline{P},$$

che dimostra la proposizione.

253. Le proprietà che abbiamo svolte sommariamente nei precedenti §§ per l'operazione aggiunta di una operazione data, riposano, in sostanza, sulle proprietà di quella operazione che abbiamo indicata con R, e che abbiamo definita per due elementi indipendenti φ e ψ appartenenti a $\mathfrak{S}$. Più generalmente, si può partire da un'operazione R che sia definita in qualsivoglia modo, purchè essa abbia le seguenti proprietà:

a) di essere univocamente determinata per i due elementi φ e ψ, presi arbitrariamente negli spazi funzionali rispettivi $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$, distinti o coincidenti.

b) di essere distributiva rispetto a φ e rispetto a ψ;

c) di essere tale che, se per ogni φ di $\mathfrak{A}$ è

$$R(\varphi, \psi) = R(\varphi, \psi_1),$$

se ne possa concludere $\psi = \psi_1$; ed analogamente, se per ogni ψ di $\mathfrak{B}$ è

$$R(\varphi, \psi) = R(\varphi_1, \psi),$$

se ne concluda $\varphi = \varphi_1$;

d) di esser tale che

$$R(x\varphi, \psi) = R(\varphi, x\psi).$$

Ottenuta una R dotata di queste proprietà, e data una operazione A distributiva, se ne definisca l'aggiunta mediante l'uguaglianza (4); ne risulteranno senza difficoltà, per la $\overline{A}$, le proprietà *a*), *b*), *c*), *d*) del § 242, come pure quelle dei §§ 243-245, colle loro conseguenze.

CAPITOLO DECIMO.

Le forme lineari alle differenze.

A. LO SPAZIO $\mathfrak{D}$ DEGLI ELEMENTI DEL CALCOLO DELLE DIFFERENZE.

254. Nel presente Capitolo ci occuperemo della operazione θ, già da noi definita nel Capitolo V (§ 120), per mezzo dell'uguaglianza:

$$\theta\varphi(x) = \varphi(x + 1).$$

Tratteremo specialmente delle forme lineari nella θ, riserbando per gli ultimi §§ un breve cenno sulle serie ordinate secondo le potenze (intere e positive) della θ.

Ricordiamo anzitutto (§ 118) che la θ, come ogni altra operazione S di sostituzione, è distributiva non solo rispetto alla somma ma anche rispetto al prodotto, che cioè si ha:

$$\theta(\varphi\psi) = \theta\varphi \,.\, \theta\psi.$$

Da codesta proprietà abbiamo dedotto (§ 153) l'altra che la derivata funzionale di θ è la θ medesima. Ne discende che la θ ammette nell'intorno di una funzione ψ qualsivoglia lo sviluppo:

$$\theta(\psi)\left[1 + \frac{1}{1!}\,\mathrm{D} + \frac{1}{2!}\,\mathrm{D}^2 + \frac{1}{3!}\,\mathrm{D}^3 + \ldots + \frac{1}{n!}\,\mathrm{D}^n + \ldots,\right]$$

e nell'intorno della unità lo sviluppo:

$$(1)\qquad \theta = \mathbf{1} + \frac{1}{1!}\,\mathrm{D} + \frac{1}{2!}\,\mathrm{D}^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\,\mathrm{D}^n + \ldots,$$

il quale può rappresentarsi simbolicamente con e^{D}.

255. Lo sviluppo (1), considerato in $\mathfrak{S}$, non è valido per l'intero spazio $\mathfrak{S}^0$, ma come si è detto (§ 138), soltanto per lo spazio $\mathfrak{S}^1$, in quanto ivi si riduce all'ordinario sviluppo di Mac-Laurin della funzione arbitraria nell'intorno del punto $x = 1$.

Siccome però importa di poter considerare la θ in casi molto più estesi, così noi, in questo Capitolo, prenderemo a considerare un opportuno spazio lineare di funzioni, diverso da $\mathfrak{S}$, e che indicheremo con $\mathfrak{D}$. Per poterlo definire agevolmente, ci sarà necessario premettere alcune considerazioni.

256. Sia, nel piano della variabile complessa x, una regione $\mathbf{a}_0$, compresa fra l'asse immaginario e la parallela a questo alla distanza 1, e siano $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \ldots$, le regioni congruenti alla $\mathbf{a}_0$, che da questa si deducono per mezzo delle traslazioni parallele all'asse reale nel senso positivo, di ampiezza rispettiva $1, 2, \ldots, n, \ldots$ Siano, similmente, $\mathbf{a}_{-1}$, $\mathbf{a}_{-2}, \ldots, \mathbf{a}_{-n}, \ldots$ le regioni congruenti alla $\mathbf{a}_0$, e che si deducono da questa per mezzo delle traslazioni parallele all'asse reale, nel senso negativo, di ampiezza rispettiva $1, 2, \ldots, n, \ldots$.

Indicheremo con $\mathbf{a}$ il campo, generalmente non connesso, costituito dal complesso delle regioni $\ldots, \mathbf{a}_{-n}, \ldots, \mathbf{a}_{-1}, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \ldots$; e diremo *congruenti* quei punti appartenenti a due regioni $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{a}_j$ qualsivogliano, e che vengono a sovrapporsi quando una delle due regioni si porta a coincidere con l'altra mediante una traslazione parallela all'asse reale, di ampiezza eguale ad un numero intero.

Dalla definizione delle regioni $\mathbf{a}_i$ discende che due tali regioni consecutive $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{a}_{i+1}$ non possono avere in comune se non punti al contorno. Di più non è escluso che la $\mathbf{a}_0$, e quindi ciascuna delle regioni $\mathbf{a}_i$ a quella congruenti, si possa ridurre ad uno o più segmenti di linea e, più in generale, ad un insieme qualsivoglia di punti: in particolare la $\mathbf{a}_0$ potrà essere costituita da un sol punto. Sebbene, per fissare le idee, noi intendiamo di riferirci generalmente al caso, in cui $\mathbf{a}_0$ è un'*area connessa*, tuttavia notiamo sin d'ora che le successive considerazioni sussisteranno, per la massima parte, anche quando il campo $\mathbf{a}_0$ sia particolarizzato come dianzi accennammo. Le lievi modificazioni, che in tal caso dovranno essere introdotte, appariranno di per sè manifeste.

257. Per definizione, abbiamo $\theta x = x + 1$, e più in generale, se m è un intero, positivo o negativo, qualsivoglia, abbiamo $\theta^m x = x + m$.

Ne viene che nei singoli punti x di una qualsivoglia regione $\mathbf{a}_n$ di $\mathbf{a}$, i valori della θx coincidono coi valori che la variabile x assume nei punti rispettivamente congruenti della successiva regione a destra $\mathbf{a}_{n+1}$; così i valori della $\theta^m x$ in $\mathbf{a}_n$ coincidono con quelli che la x assume nei punti rispettivamenti congruenti della regione $\mathbf{a}_{n+m}$. Di qui risulta che tutti i valori che la variabile x assume nell'intero campo $\mathbf{a}$ sono dati dai valori che $\theta^m x$ ($m = \dots, -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n, \dots$) assume in una qualsivoglia determinata regione $\mathbf{a}_n$.

258 Sia $\alpha(x)$ una funzione analitica *meromorfa* (1) in tutto il campo $\mathbf{a}$. Siccome non considereremo siffatta funzione fuori del campo $\mathbf{a}$, così basterà supporre che essa sia definita nell'interno di $\mathbf{a}$.

(1) È noto che è detta meromorfa in un'area connessa una funzione analitica ad un valore, affetta, in quell'area, da sole *singolarità polari*.

Per definizione, la $\theta\alpha$ è la funzione che nei punti x di $\mathbf{a}$ assume i valori dati da $\alpha(\theta x) = \alpha(x+1)$. Più generalmente, se m è un qualsivoglia numero intero, positivo o negativo, la $\theta^m\alpha$ è la funzione che nei punti x di $\mathbf{a}$ assume i valori dati da $\alpha(\theta^m x) = \alpha(x + m)$. In altre parole, la $\theta^m\alpha$, nei singoli punti x di una regione $\mathbf{a}_n$ determinata, assume i valori che la α assume nei rispettivi punti congruenti della regione $\mathbf{a}_{n+m}$. Di qui risulta che la funzione $\alpha(x)$ è data in tutto il campo $\mathbf{a}$, quando sono date in una determinata regione $\mathbf{a}_n$ la α e le $\theta^m\alpha$, per ogni valore intero, positivo e negativo di m.

259. Più generalmente, consideriamo ora una successione di porzioni di funzioni analitiche, in numero infinito:

$$\dots, \alpha^{(-n)}(x), \dots, \alpha^{(-1)}(x), \alpha^{(0)}(x), \alpha^{(1)}(x), \dots, \alpha^{(n)}(x), \dots$$

meromorfe in

$$\dots, \mathbf{a}_{-n}, \dots, \mathbf{a}_{-1}, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, \dots$$

rispettivamente, compreso il contorno.

Non si farà alcuna ipotesi sulla $\alpha^{(n)}$ all'esterno di $\mathbf{a}_n$.

Converremo ora di considerare il complesso suindicato di porzioni di funzioni analitiche come un elemento unico, che rappresenteremo con $\alpha(x)$ (1). Questo elemento è una porzione di funzione analitica, generalmente *poligena* (2) e meromorfa in $\mathbf{a}$. Il valore dell'elemento $\alpha(x)$ in un punto

(1) Se le regioni $\mathbf{a}_i$ hanno a due a due punti del contorno in comune e se le $\alpha^{(n)}(x)$ sono date anche sul contorno dei campi rispettivi, converremo di assumere come valore di $\alpha(x)$ in un punto comune ad $\mathbf{a}_n$, $\mathbf{a}_{n+1}$, il valore che ha in esso la $\alpha^{(n)}(x)$.

(2) Questo vocabolo, col suo contrapposto « monogeno » sono qui usati nel senso ad essi dato dal WEIERSTRASS e dalla sua scuola (V. *Abhandl. aus der Functionenlehre*, p. 102. Berlin, 1886. Cfr. FORSYTH, Theory of functions, § 12, Cambridge, 1893).

x di $\mathbf{a}_n$ sarà il valore che ha in esso punto la $\alpha^{(n)}(x)$. Si dirà $\alpha(x)$ regolare o singolare in un punto di $\mathbf{a}_n$ a seconda che sarà rispettivamente tale la $\alpha^{(n)}(x)$. L'elemento α non è definito all'esterno di $\mathbf{a}$.

260. Dato l'elemento $\alpha(x)$ del § precedente, $\theta\alpha$ sarà un elemento analogo ad α, il quale nei singoli punti x di $\mathbf{a}$ assume i valori che α ha nei rispettivi punti $x+1$. L'elemento $\theta\alpha$ è, come α, una porzione di funzione analitica, generalmente poligena; essa è costituita dalle

$$\ldots \alpha_1^{(-n)}, \quad \ldots \alpha_1^{(-1)}, \quad \alpha_1^{(0)}, \quad \alpha_1^{(1)}, \ldots \quad \alpha_1^{(n)}, \ldots$$

definite rispettivamente in $\ldots \mathbf{a}_{-n}, \ldots \mathbf{a}_{-1}, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots \mathbf{a}_n, \ldots$ in modo che nei punti x di $\mathbf{a}_n$ è:

$$\alpha_1^{(m)}(x) = \alpha^{(m+1)}(x+1), \; (m = \ldots -n, \ldots -1, 0, 1, \ldots n, \ldots)$$

Ad analoghe conseguenze si giunge per l'elemento $\theta^r\alpha$, dove r è un numero intero positivo o negativo arbitrario; il quale elemento sarà pure una porzione di funzione analitica, generalmente poligena, e meromorfa in α. Il suo valore in ogni punto x di $\mathbf{a}_m$ è dato da quello che assume $\alpha^{(m+r)}$ nel punto congruente in $\mathbf{a}_{m+r}$.

È manifesto che l'elemento α è completamente definito nell'intero campo $\mathbf{a}$ quando sono dati in una sola delle regioni $\mathbf{a}_m$ i valori delle funzioni analitiche $\theta^r\alpha$, $(r = \ldots -n, \ldots -1, 0, 1, \ldots n \ldots)$.

261. Dal § prec. risulta che l'elemento $\theta^r\alpha$ ha in $\mathbf{a}_m$ come punti singolari e come punti di zero i punti congruenti rispettivamente ai punti singolari e agli zeri di $\alpha^{(m)}(x)$ in $\mathbf{a}_{m+r}$. Ora per le ipotesi stabilite sulle $\alpha^{(m)}(x)$ abbiamo che ciascuna di esse nella rispettiva regione $\mathbf{a}_m$ ammette un numero finito di punti singolari (poli) e di zeri (d'ordine intero e finito). Se ne conclude che i poli e gli zeri dell'insieme degli elementi $\theta^r\alpha$, $(r = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$, in una determinata regione $\mathbf{a}_m$ di $\mathbf{a}$, costituiscono due classi numerabili.

262. A rendere ancora più chiaro il modo di operare della θ e delle sue potenze sull'elemento analitico α, giova assegnare per questo una immagine concreta. Immaginiamo perciò disteso sopra il piano della variabile complessa x un altro piano e, su questo, deposto al disopra di ogni punto x di $\mathbf{a}$ il valore corrispondente di $\alpha(x)$.

Da codesta immagine dell'elemento $\alpha(x)$ si deduce l'immagine dell'elemento $\theta\alpha$, tenendo fisso il piano della variabile x, e facendo scorrere parallelamente a sè stesso il piano dei valori di $\alpha(x)$ mediante una traslazione di ampiezza 1, parallela all'asse reale e in senso negativo. Questa traslazione permette in particolare di dedurre dall'insieme dei punti singolari dell'elemento α, l'insieme dei punti singolari dell'elemento $\theta\alpha$. Con una traslazione negativa di ampiezza 2, si avrà del pari l'immagine di $\theta^2\alpha$, e così si farà per ogni potenza intera di θ.

263. Indicheremo con $\mathfrak{D}$ l'insieme di tutti gli elementi $\alpha(x)$ (funzioni analitiche, generalmente poligene, meromorfe in $\mathbf{a}$). Codesto insieme è evidentemente uno spazio lineare. Se due funzioni appartengono a $\mathfrak{D}$, vi appartiene non solo la loro somma, ma anche il loro prodotto e il loro quoziente; più in generale, appartiene a $\mathfrak{D}$ ogni funzione razionale di uno o più elementi di $\mathfrak{D}$. Risulta dal § precedente che lo spazio $\mathfrak{D}$ è invariante rispetto all'operazione θ.

Notiamo, che, ove si particolarizzi convenientemente (§ 256) la regione $\mathbf{a}_0$, lo spazio $\mathfrak{D}$ può ridursi ad uno spazio di funzioni di variabile reale, od anche di funzioni di un indice variabile per soli numeri interi.

264. Esistono in $\mathfrak{D}$ elementi α tali che le porzioni $\alpha^{(n)}$ di funzioni analitiche che li costituiscono assumono, nei punti congruenti delle regioni $\mathbf{a}_n$, il medesimo valore, in guisa che sarà per essi $\theta\alpha = \alpha$. Un tale elemento è pertanto *periodico* in $\mathbf{a}$ di periodo 1.

Siffatti elementi hanno rispetto all' operazione θ, lo stesso ufficio che avevano le *costanti numeriche* rispetto alle operazioni funzionali considerate nei Cap. precedenti. Così, se γ è un elemento periodico ed α un elemento arbitrario in $\mathfrak{D}$, si ha:

$$\theta(\gamma\alpha) = \theta\gamma \,.\, \theta\alpha = \gamma\theta\alpha.$$

Questa osservazione ci conduce a dare a tali funzioni per tutto il corso del presente capitolo (come si fa del resto nei trattati di Calcolo delle Differenze) il nome di *costanti*; le rappresenteremo, come si è fatto per le costanti numeriche nei capitoli precedenti, colle lettere minuscole dell' alfabeto latino.

B. LE FORME LINEARI ALLE DIFFERENZE.

265. Nel Cap. V (§ 122) le operazioni del tipo:

$$A = \alpha_0 + \alpha_1\theta + \alpha_2\theta^2 + \ldots + \alpha_m\theta^m \tag{2}$$

si sono chiamate *forme lineari alle differenze*. La forma si dice dell' ordine m se m è il massimo esponente cui figura la θ (1) Nel presente Capitolo ammetteremo costantemente che i coefficienti $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m$ della forma A siano

(1) Si osservi che una forma d' ordine zero non è altro che un' operazione di moltiplicazione.

elementi di $\mathfrak{D}$. La forma si dirà a *coefficienti costanti* se i coefficienti $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ sono costanti numeriche, o più generalmente, secondo il § precedente, se essi sono elementi periodici di $\mathfrak{D}$ col periodo 1; fra queste ultime forme è da notarsi la differenza finita (cfr. § 120)

$$\Delta = -1 + \theta,$$

che si potrebbe assumere al posto di θ come operazione fondamentale del calcolo delle differenze.

Poichè la θ è operazione univoca, tale sarà anche ogni operazione della forma (2). Ne risulta che ognuna di esse ammette come radice lo zero.

Ogni forma lineare alle differenze, i cui coefficienti, come si è supposto, appartengano a $\mathfrak{D}$, ammette codesto spazio $\mathfrak{D}$ come invariante.

266. Valgono per le forme lineari alle differenze le definizioni generali date nei Cap. II e III. La somma di due forme degli ordini m ed n rispettivamente ($m \geq n$) è una forma di ordine m. Ciascuno dei due prodotti, in generale distinti, che si possono formare con due forme degli ordini rispettivi m ed n, è una forma lineare alle differenze di ordine $m + n$.

Risulta di qui in particolare che le forme lineari alle differenze costituiscono un gruppo (§ 41).

267. Siano date due forme:

$$A = \alpha_m\theta^m + \alpha_{m-1}\theta^{m-1} + \ldots + \alpha_1\theta + \alpha_0,$$
$$B = \beta_n\theta^n + \beta_{n-1}\theta^{n-1} + \ldots + \beta_1\theta + \beta_0.$$

Eseguendo il prodotto AB secondo le regole che risultano dalla proprietà distributiva della θ rispetto alla somma e al prodotto, otteniamo:

$$
\begin{aligned}
(3) \qquad \mathbf{AB} = {} & \alpha_m(x)\beta_n(x+m)\theta^{m+n} + \\
& + \big(\alpha_m(x)\beta_{n-1}(x+m) + \alpha_{m-1}(x)\beta_n(x+m-1)\big)\theta^{m+n-1} + \\
& + \big(\alpha_m(x)\beta_{n-2}(x+m) + \alpha_{m-1}(x)\beta_{n-1}(x+m-1) + \\
& + \alpha_{m-2}(x)\beta_n(x+m-2)\big)\theta^{m+n-2} + \dots \\
& + \big(\alpha_1(x)\beta_0(x+1) + \alpha_0(x)\beta_1(x)\big)\theta + \alpha_0(x)\beta_0(x).
\end{aligned}
$$

Da qui segue che il coefficiente di θ^0 nel prodotto di due forme qualsivogliano è eguale al prodotto dei coefficienti di θ^0 nei due fattori e che il coefficiente della massima potenza di θ dipende soltanto dai coefficienti delle massime potenze di θ nei due fattori; esso non può essere nullo se tale non è identicamente o l'uno o l'altro di questi.

268. Date le due forme:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \alpha_m(x)\theta^m + \alpha_{m-1}(x)\theta^{m-1} + \dots + \alpha_1(x)\theta + \alpha_0(x) \\
\mathbf{B} &= \beta_n(x)\theta^n + \beta_{n-1}(x)\theta^{n-1} + \dots + \beta_1(x)\theta + \beta_0(x),
\end{aligned}
$$

degli ordini m, n rispettivamente, $(m \geq n)$ proponiamoci il problema di determinare una terza forma Γ, tale che $\mathbf{A} - \Gamma\mathbf{B}$ sia dell'ordine $n - 1$ al più.

Dall'ultima operazione del § prec. risulta senz'altro che Γ deve essere dell'ordine $m - n$. Posto

$$
\Gamma = \gamma_{m-n}\theta^{m-n} + \gamma_{m-n-1}\theta^{m-n-1} + \dots + \gamma_1\theta + \gamma_0,
$$

il problema consiste nella determinazione dei coefficienti $\gamma_{m-n}, \gamma_{m-n-1}, \dots, \gamma_1, \gamma_0$.

Ma si ha, per la (3):

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} - \Gamma\mathbf{B} = {} & \big(\alpha_m(x) - \gamma_{m-n}(x)\beta_n(x+m-n)\big)\theta^m + \\
& + \big(\alpha_{m-1}(x) - \gamma_{m-n}(x)\beta_{n-1}(x+m-n) + \\
& + \gamma_{m-n-1}\beta_n(x+m-n-1)\big)\theta^{m-1} + \\
& + \big(\alpha_{m-2}(x) - \gamma_{m-n}(x)\beta_{n-2}(x+m-n) - \\
& - \gamma_{m-n-1}(x)\beta_{n-1}(x+m-n-1) - \\
& - \gamma_{m-n-2}(x)\beta_n(x+m-n-2)\big)\theta^{m-2} + \dots \\
\dots & + \big(\alpha_1(x) - \gamma_1(x)\beta_0(x+1) - \gamma_0(x)\beta_1(x)\big)\theta + \alpha_0 - \gamma_0\beta_0.
\end{aligned}
$$

Se la forma $\mathbf{A} - \Gamma\mathbf{B}$ deve essere, come è prescritto, di ordine non superiore ad $n - 1$, devono essere identicamente soddisfatte le $m - n + 1$ relazioni, che si ottengono ponendo uguali a zero i coefficienti di $\theta^m, \theta^{m-1}, \dots, \theta^n$ in $\mathbf{A} - \Gamma\mathbf{B}$, cioè:

$$
(4) \left\{
\begin{aligned}
& \alpha_m(x) - \gamma_{m-n}(x)\beta_n(x+m-n) = o, \\
& \alpha_{m-1}(x) - \gamma_{m-n}(x)\beta_{n-1}(x+m-n) - \\
& \qquad - \gamma_{m-n-1}(x)\beta_n(x+m-n-1) = o, \\
& \alpha_{m-2}(x) - \gamma_{m-n}(x)\beta_{n-2}(x+m-n) - \\
& \qquad - \gamma_{m-n-1}(x)\beta_{n-1}(x+m-n-1) - \\
& \qquad - \gamma_{m-n-2}(x)\beta_n(x+m-n-2) = o, \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\right.
$$

Rispetto alle $m - n + 1$ funzioni $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-n}$, codeste $m - n + 1$ equazioni sono lineari non omogenee; salvo il segno, il determinante dei coefficienti è uguale a

$$
\beta_n(x+m-n)\beta_n(x+m-n-1)\dots\beta_n(x);
$$

supposta la $\beta_n(x)$ non identicamente nulla in nessuna delle regioni $\mathbf{a}_i$, esso è in $\mathbf{a}$ diverso da zero. Se ne conclude che si potranno determinare in modo unico le $m - n + 1$ funzioni γ soddisfacenti al problema.

269. A questo punto si presenta spontaneo un concetto analogo al concetto aritmetico di quoziente intero (o incompleto) di due numeri interi e al concetto algebrico di quoziente di due polinomi interi, ordinati secondo le potenze di una data lettera.

Diremo, cioè, *quoziente* di due forme lineari alle differenze $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, degli ordini m, n $(m \geq n)$ rispettivamente, la forma Γ, unica e determinata, per la quale $\mathbf{A} - \Gamma\mathbf{B}$ è di ordine non superiore ad $n - 1$.

La forma A si dirà *dividendo*, la B *divisore*; e posto

$$A - \Gamma B = P, \tag{5}$$

la forma P si dirà *resto* della divisione di A per B.

Risulta dal modo in cui si sono determinati i coefficienti di Γ e P, che i coefficienti del quoziente e del resto si ottengono dai coefficienti del dividendo e del divisore mediante l'applicazione dell'operazione θ e di operazioni aritmetiche razionali, in numero finito. In particolare i coefficienti del quoziente e del resto sono funzioni razionali intere dei coefficienti del dividendo.

270. Offre speciale interesse il caso in cui la forma $A - \Gamma B = P$ ha tutti i suoi coefficienti identicamente nulli; in tal caso si ha:

$$A = \Gamma B.$$

Si dice allora che la forma A è divisibile per la forma B o che A divide (esattamente) A. È chiaro che in questo caso il quoziente Γ delle due forme A e B coincide col quoziente (a destra) di A per B definito al § 39.

Stabilito così il concetto di *divisibilità* per le forme lineari alle differenze, si possono enunciare immediatamente le seguenti proposizioni:

a) Se la forma A è divisibile per la forma B e B è divisibile per Γ, anche A sarà divisibile per Γ.

b) Se due forme A_1, A_2 sono divisibili per B, sono tali anche la loro somma e la loro differenza; infatti, se è

$$A_1 = \Gamma_1 B, \quad A_2 = \Gamma_2 B,$$

sarà di conseguenza:

$$A_1 + A_2 = (\Gamma_1 + \Gamma_2) B, \quad A_1 - A_2 = (\Gamma_1 - \Gamma_2) B.$$

c) Se le forme A_1 A_2 sono divisibili rispettivamente per B_1, B_2, e danno il medesimo quoziente, la somma (differenza) delle prime è divisibile per la somma (differenza) delle seconde: infatti da $A_1 = \Gamma B_1$, $A_2 = \Gamma B_2$ risulta immediatamente

$$A_1 + A_2 = \Gamma (B_1 + B_2), \; A_1 - A_2 = \Gamma (B_1 - B_2).$$

271. Siano due forme A_1 ed A_2 e l'ordine della prima non sia inferiore a quello della seconda. Dividendo A_1 per A_2 otterremo un determinato quoziente B e un resto P_1; talchè sarà (§ 269):

$$A_1 = BA_2 + P_1.$$

Se A_1 ed A_2 sono divisibili per una medesima forma, per questa saranno divisibili, in virtù della proposizione *a*) del § precedente, la forma BA_2 e, in virtù della *b*) la forma $P_1 = A_1 - BA_2$. In modo analogo si vede, che, reciprocamente, se A_2 e P_1 sono entrambi divisibili per una medesima forma, è divisibile per questa anche A_1.

Da ciò risulta che per determinare, qualora esista, la forma di massimo ordine che divide le due forme date, basta applicare a queste un procedimento perfettamente analogo all'algoritmo euclideo per la determinazione del massimo comun divisore di due numeri interi, o a quello per la ricerca del m. c. d. fra due polinomi interi ordinati secondo le potenze di una lettera. Cioè, dopo di avere ottenuto il resto P_1 della divisione di A_1 per A_2, si determinerà il resto P_2 della divisione di A_2 per P_1, poi il resto della divisione di P_1 per P_2 e così via. Se si giunge a ottenere come resto una forma di ordine zero (operazione di moltiplicazione), vorrà dire che non esiste nessuna forma di ordine uguale o maggiore di uno, che divida entrambe le due forme date.

Queste si diranno allora *prime fra loro*. Se invece si giunge ad ottenere come resto una forma P_p di ordine maggiore o uguale ad uno che divida esattamente il resto P_{p-1} precedente, codesta forma P_p **dividerà** tanto A_1 quanto A_2, e non potrà esistere nessuna altra forma di ordine non inferiore, la quale goda di siffatta proprietà. Questa forma P_p si dirà *massimo comun divisore* di A_1 e A_2.

Discende senz'altro dalle osservazioni del § 269 che i coefficienti di P_p si esprimono per mezzo dell'operazione θ e di operazioni razionali, in numero finito, eseguite sui coefficienti di A_1 e A_2.

272. Cerchiamo il quoziente (§ 269) di una forma di ordine qualunque n

$$A = \alpha_n \theta^n + \alpha_{n-1}\theta^{n-1} + \ldots + \alpha_1\theta + \alpha_0$$

per una forma del primo ordine

$$E = \theta - \gamma$$

Indicando il quoziente con

$$B = \beta_{n-1}\theta^{n-1} + \beta_{n-2}\theta^{n-2} + \ldots + \beta_1\theta + \beta_0,$$

avremo:

$$\begin{aligned} A - BE = {} & \big(\alpha_n(x) - \beta_{n-1}(x)\big)\theta^n + \big(\alpha_{n-1}(x) - \beta_{n-2}(x) + \\ & + \beta_{n-1}(x)\gamma(x+n-1)\big)\theta^{n-1} + \\ & + \big(\alpha_{n-2}(x) - \beta_{n-3}(x) + \beta_{n-2}(x)\gamma(x+n-2)\big)\theta^{n-2} + \ldots \\ & + \big(\alpha_1(x) - \beta_0(x) + \beta_1(x)\gamma(x+1)\big)\theta + \alpha_0(x) + \beta_0(x)\gamma(x). \end{aligned}$$

La forma $A - BE$ dovendo essere di ordine zero, è necessario e sufficiente che siano soddisfatte le relazioni (cfr. le (4) del § 268):

$$(5)\quad \begin{cases} \alpha_n(x) = \beta_{n-1}(x) \\ \alpha_{n-1}(x) = \beta_{n-2}(x) - \beta_{n-1}(x)\gamma(x+n-1) \\ \alpha_{n-2}(x) = \beta_{n-3}(x) - \beta_{n-2}(x)\gamma(x+n-2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1(x) = \beta_0(x) - \beta_1(x)\gamma(x+1). \end{cases}$$

Da queste deduciamo immediatamente le seguenti espressioni delle funzioni β:

$$(6)\quad \begin{cases} \beta_{n-1}(x) = \alpha_n(x) \\ \beta_{n-2}(x) = \alpha_{n-1}(x) + \alpha_n(x)\gamma(x+n-1) \\ \beta_{n-3}(x) = \alpha_{n-2}(x) + \alpha_{n-1}(x)\gamma(x+n-2) + \\ \qquad\qquad + \alpha_n(x)\gamma(x+n-1)\gamma(x+n-2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_0(x) = \alpha_1(x) + \alpha_2(x)\gamma(x+1) + \ldots \\ \qquad\qquad \ldots + \alpha_n(x)\gamma(x+1)\ldots\gamma(x+n-1) \end{cases}$$

In queste formole si osserva: *a*) che il coefficiente della massima potenza di θ è il medesimo nel dividendo A e nel quoziente B; *b*) che il coefficiente di θ^i in B si ottiene moltiplicando per $\gamma\,(x + i + 1)$ il coefficiente di θ^{i+1} nella medesima forma e aggiungendovi il coefficiente di θ^{i+1} in A.

È manifesta l'analogia che corre fra codesta regola e la nota *regola di Ruffini* che si dà nell'algebra per la divisione di un polinomio razionale intero in x per un binomio $x - a$. (1)

(1) La regola da noi enunciata si potrebbe chiamare « *Regola del Ruffini generalizzata* ». Per ogni funzione particolare $\gamma(x)$ che si assume come coefficiente nella forma del primo ordine E, si avrà una regola speciale. Così ad esempio, se la $\gamma(x)$ si fa costante, si avrà tosto che le (6) assumono precisamente la forma che si presenta nell'ordinaria regola di Ruffini, sulla quale senz'altro si ricade se, supposte costanti anche le $\alpha_i(x)$, si pone z^x al posto della funzione arbitraria tanto in E quanto in A. In modo analogo, particolarizzando convenientemente la γ, e precisamente prendendo per essa la funzione *gamma* di GAUSS, si

Il resto della divisione di A per E è dato da:

$$P = \alpha_0(x) + \beta_0(x)\gamma(x).$$

ossia, per l'espressione di $\beta_0(x)$ ottenuta dinanzi nelle (6), da

$$P = \alpha_0(x) + \alpha_1(x)\gamma(x) + \alpha_2(x)\gamma(x)\gamma(x+1) + \\ \dots + \alpha_n(x)\gamma(x)\gamma(x+1)\dots\gamma(x+n-1).$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la A sia divisibile per la E, sarà l'annullarsi identico dell'espressione P.

C. RADICI DELLE FORME. — EQUAZIONI ALLE DIFFERENZE.

273. Abbiasi la forma di ordine n

$$\Phi = \alpha_n\theta^n + \alpha_{n-1}\theta^{n-1} + \dots + \alpha_1\theta + \alpha_0,$$

i cui coefficienti appartengono a $\mathfrak{D}$. Ci proponiamo di dimostrare che in $\mathfrak{D}$ esiste una radice di Φ, vale a dire una funzione $\omega(x)$, per la quale è soddisfatta, per ogni valore x di $\mathbf{a}$, la relazione

$$\alpha_n(x)\theta^n\omega(x) + \alpha_{n-1}(x)\theta^{n-1}\omega(x) + \dots \\ + \alpha_1(x)\theta\omega(x) + \alpha_0(x)\omega(x) = o. \tag{7}$$

Più precisamente, faremo vedere che scelte ad arbitrio n porzioni di funzioni analitiche $\omega^{(0)}(x)$, $\omega^{(1)}(x), \dots$, $\omega^{(n-1)}(x)$, meromorfe in $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$ rispettivamente, rimangono determinate infinite altre porzioni di funzioni analitiche $\omega^{(p)}(x)$, $(p = \dots, -2, -1, n, n+1, \dots)$, meromorfe in $\mathbf{a}_p$ $(p = \dots, -2, -1, n, n+1, \dots)$ rispettivamente, le quali insieme con le $\omega^{(0)}, \omega^{(1)}, \dots, \omega^{(n-1)}$ prefissate, costituiscono un elemento $\omega(x)$ appartenente a $\mathfrak{D}$ e soddisfacente alla (3).

deduce dalla nostra regola quella assegnata dal Capelli (*L'Analisi algebrica e l'interpretazione fattoriale delle potenze*, Giornale di Matematiche, t. XXXI) per la determinazione del quoziente della divisione di un polinomio ordinato per i fattoriali di z, pel binomio $z - a$, quando anche il quoziente si voglia ordinato secondo i fattoriali.

274. Osserviamo anzitutto che insieme con la relazione (7) debbono sussistere tutte le altre che se ne deducono, applicando ad ambo i membri di essa una potenza qualsivoglia (positiva o negativa) di θ, vale a dire le infinite relazioni

$$\alpha_n(x+p)\theta^{n+p}\omega + \alpha_{n-1}(x+p)\theta^{n+p-1}\omega + \dots \\ + \alpha_1(x+p)\theta^{p+1}\omega + \alpha_0(x+p)\theta^p\omega = o \\ (p = \dots, -2, -1, 1, 2, \dots). \tag{8}$$

Ora, supposto che la radice ω di Φ da noi cercata esista, sappiamo (§ 260) che le porzioni di funzioni analitiche, meromorfe in $\mathbf{a}_0$, $\omega^{(0)}(x), \omega^{(1)}(x+1), \dots, \omega^{(n-1)}(x+n-1)$ rappresentano in codesta regione gli elementi $\omega, \theta\omega, \dots, \theta^{n-1}\omega$ rispettivamente. Ma allora la relazione (7), che fatta eccezione pei punti (in numero finito entro $\mathbf{a}_0$) nei quali si annulla $\alpha_n(x)$, si può scrivere:

$$\theta^n\omega = -\frac{\alpha_{n-1}(x)}{\alpha_n(x)}\theta^{n-1}\omega - \frac{\alpha_{n-2}(x)}{\alpha_n(x)}\theta^{n-2}\omega - \dots \\ - \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_n(x)}\theta\omega - \frac{\alpha_0(x)}{\alpha_n(x)}\omega,$$

ci definisce in $\mathbf{a}_0$ l'elemento $\theta^n\omega$ per mezzo degli elementi, già conosciuti in codesta regione, $\omega, \theta\omega, \dots \theta^{n-1}\omega$. E poichè le porzioni di funzioni analitiche $\omega^{(0)}(x)$, $\omega^{(1)}(x+1), \dots$, $\omega^{(n-1)}(x+n-1)$ e gli elementi α_0 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sono meromorfi in $\mathbf{a}_0$, la porzione di funzione analitica che così vi si ottiene per $\theta^n\omega$, è essa pure meromorfa in $\mathbf{a}_0$.

Analogamente, per mezzo della relazione (8), in cui si faccia $p = 1$, relazione che si può scrivere:

$$\theta^{n+1}\omega = -\frac{\alpha_{n-1}(x+1)\theta^n\omega}{\alpha_n(x+1)} - \frac{\alpha_{n-2}(x+1)\theta^{n-1}\omega}{\alpha_n(x+1)} - \dots$$
$$- \frac{\alpha_1(x+1)}{\alpha_n(x+1)}\theta^2\omega - \frac{\alpha_0(x+1)}{\alpha_n(x+1)}\theta\omega,$$

deduciamo dalle porzioni di funzioni analitiche che rappresentano in $\mathbf{a}_0$ gli elementi $\theta\omega, \theta^2\omega, \dots, \theta^n\omega$, quella che rappresenta nella stessa regione l'elemento $\theta^{n+1}\omega$: ed anche codesta porzione di funzione analitica è meromorfa in $\mathbf{a}_0$.

Così, per via ricorrente, dalle relazioni (8) relative a tutti i possibili valori interi, positivi e negativi, dell'indice p, dedurremo le porzioni di funzioni analitiche, che rappresentano entro $\mathbf{a}_0$ gli elementi $\theta^{n+2}\omega, \theta^{n+3}\omega, \dots$ e $\theta^{-1}\omega, \theta^{-2}\omega, \dots$ Ma, come abbiamo osservato al § 260, quando sono determinati nella regione $\mathbf{a}_0$ gli elementi $\theta^r\omega$ per tutti i valori interi, positivi e negativi e nullo, dell'esponente r, resta senz'altro definito l'elemento ω in tutto il campo $\mathbf{a}$. L'elemento ω così definito appartiene a $\mathfrak{D}$, poichè le porzioni di funzioni analitiche che costituiscono l'elemento ω sono meromorfe nelle rispettive regioni $\mathbf{a}_n$ in cui sono definite.

Resta così dimostrata l'esistenza di una radice di Φ, appartenente a $\mathfrak{D}$ e tale che nelle regioni $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$ è rappresentata rispettivamente dalle porzioni di funzioni analitiche, prefissate arbitrariamente, $\omega^{(0)}, \omega^{(1)}, \dots, \omega^{(n-1)}$.

Facciamo notare anche come il procedimento da noi seguito per definire l'elemento ω permetta di determinare agevolmente l'insieme numerabile dei punti singolari di ω nel campo $\mathbf{a}$, noti che siano i punti singolari di $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0$, gli zeri di α_n in $\mathbf{a}$, e i poli delle porzioni di funzioni analitiche $\omega^{(0)}, \omega^{(1)} \dots, \omega^{(n-1)}$ nelle regioni $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$ rispettivamente.

275. L'equazione che si ottiene ponendo uguale a zero una forma lineare alle differenze Φ, d'ordine n, dicesi equazione lineare alle differenze omogenea d'ordine n, e le radici di Φ diconsi pure *soluzioni* o *integrali* dell'equazione.

Nel § preced. abbiamo determinato una di codeste radici della forma Φ, appartenente allo spazio $\mathfrak{D}$: ora l'arbitrarietà delle porzioni di funzioni analitiche, ivi considerate, $\omega^{(0)}, \omega^{(1)}, \dots, \omega^{(n-1)}$, fa già presumere che le radici di Φ, appartenenti a $\mathfrak{D}$, costituiscano tutto uno spazio: la natura di questo sarà chiarita fra poco. Per ora ci limitiamo a far notare che tutte le considerazioni del § prec. si possono ripetere senza mutamento, qualora siano scelte ad arbitrio, anzichè le porzioni di funzioni $\omega^{(0)}, \omega^{(1)}, \dots \omega^{(n-1)}$, altre n porzioni di funzioni analitiche meromorfe in n qualsivogliano regioni consecutive di $\mathbf{a}$.

Se si prendessero le $\omega^{(i)}$, $(i = 0, 1, \dots n-1)$ ciascuna identicamente nulla nella rispettiva regione $\mathbf{a}_i$, sarebbero identicamente nulle tutte le $\omega^{(p)}$, $(p = \dots -2, -1, n, n+1, \dots)$, come risulta dagli sviluppi del § precedente. Ne viene subito la conseguenza che la radice di Φ, che in n regioni consecutive di $\mathbf{a}$ è definita da n porzioni date di funzioni analitiche, è univocamente determinata in $\mathfrak{D}$.

276. Riprendiamo la forma Φ, e sia $\beta(x)$ un elemento qualsivoglia di $\mathfrak{D}$; la relazione:

$$\Phi(\gamma) = \beta, \tag{9}$$

dove γ è una funzione da determinarsi, dicesi equazione lineare alle differenze d'ordine n, non omogenea. Se nelle regioni $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$ si fissano n porzioni arbitrarie di funzioni analitiche meromorfe $\gamma^{(0)}, \gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(n-1)}$, è possibile ed in un sol modo, di determinare un elemento γ di $\mathfrak{D}$, che coincida nella suddetta regione $\mathbf{a}_i$ colla $\gamma^{(i)}$, $(i = 0, 1, 2, \ldots n-1)$, e che soddisfaccia all'equazione (9). Seguendo parola per parola il procedimento del § 274, si giunge ad ottenere questo elemento γ, e l'osservazione del § 275 ne dimostra l'unicità.

Applicando ad ambo i membri della (9) l'operazione Φ^{-1} inversa di Φ, otteniamo:

$$\gamma = \Phi^{-1}(\beta),$$

onde concludiamo che qualunque sia l'elemento β di $\mathfrak{D}$, esiste in $\mathfrak{D}$ una determinazione per $\Phi^{-1}(\beta)$. Questa determinazione è unica se si pongono le condizioni che in $\mathbf{a}_i$, la γ coincida con una $\gamma^{(i)}$ prefissata per $i = o, 1, \ldots n-1$; non ponendo una tale condizione Φ^{-1} è a determinazione multipla, come segue immediatamente dal fatto che Φ ammette radici. Ogni determinazione di Φ^{-1} si ottiene infatti, come sappiamo (§ 52), aggiungendo ad una sua determinazione speciale una radice qualsivoglia di Φ.

277. Applichiamo le cose dette nei due ultimi §§ al caso delle forme del primo ordine. Sia la forma del primo ordine

$$\alpha_1(x)\theta - \alpha_o(x),$$

i cui coefficienti appartengono a $\mathfrak{D}$; posto $\dfrac{\alpha_o(x)}{\alpha_1(x)} = \alpha(x)$, potremo, per quanto riguarda la ricerca delle radici, sostituire alla forma data la forma

$$\mathrm{E} = \theta - \alpha(x).$$

I poli di $\alpha(x)$ saranno dati, in generale, dai poli di $\alpha_o(x)$ e dagli zeri di $\alpha_1(x)$.

Scelta arbitrariamente una porzione $\omega^{(o)}(x)$ di funzione analitica meromorfa in $\mathbf{a}_o$, ci proponiamo di determinare in $\mathbf{a}_p$, $(p = \ldots -2, -1, 1, 2, \ldots)$ le infinite altre porzioni di fun-

zioni analitiche $\omega^{(p)}$ che con la $\omega^{(o)}$ costituiscono una radice di E. Dovranno sussistere identicamente le relazioni

$$\theta^{n+1}\omega - \alpha(x+n)\theta^n\omega = o \tag{10}$$

$$(n = \ldots, -2, -1, o, 1, 2, \ldots)$$

Per $n = o$, abbiamo nei punti x di $\mathbf{a}_o$:

$$\theta\omega = \alpha(x)\omega^{(o)}(x)$$

e quindi nei punti x di $\mathbf{a}_1$:

$$\omega^{(1)}(x) = \alpha(x-1)\omega^{(o)}(x-1).$$

Così, facendo $n = 1$ nella (10), si ha in $\mathbf{a}_o$

$$\theta^2\omega = \alpha(x+1)\theta\omega = \alpha(x+1)\alpha(x)\omega^{(o)}(x)$$

e quindi, se x è un punto di $\mathbf{a}_2$:

$$\omega^{(2)}(x) = \alpha(x-1)\alpha(x-2)\omega^{(o)}(x-2).$$

Dato, in generale un valore p positivo all'indice n della (10), otteniamo analogamente per i punti x di $\mathbf{a}_p$:

$$\omega^{(p)}(x) = \alpha(x-1)\alpha(x-2)\ldots\alpha(x-p)\omega^{(o)}(x-p). \tag{11}$$

Dato invece ad n un valore negativo, sia $-p$, otteniamo:

$$\theta^{-(p-1)}\omega - \alpha(x-p)\theta^{-p}\omega = o$$

onde, per i punti di $\mathbf{a}_{-p}$:

$$\omega^{(-p)}(x) = \frac{\omega^{(o)}(x+p)}{\alpha(x)\alpha(x+1)\ldots\alpha(x+p-1)}. \tag{12}$$

Resta così determinata una radice ω di E in tutto il campo $\mathbf{a}$. È poi facile vedere che essa è meromorfa in $\mathbf{a}$ ed è quindi un elemento di $\mathfrak{D}$; infatti, poichè l'elemento α appartiene a $\mathfrak{D}$ e la $\omega^{(o)}(x)$ è meromorfa in $\mathbf{a}_o$, anche le (11) e (12) danno per $\omega^{(p)}$, $\omega^{(-p)}$ porzioni di funzioni analitiche meromorfe nelle rispettive regioni $\mathbf{a}_p$, $\mathbf{a}_{-p}$ in cui sono definite.

278. Considerando ancora la forma $\mathbf{E} = \theta - \alpha$ del § prec., sia da risolvere l'equazione

$$\mathbf{E} = \beta$$

ossia

$$\theta\varphi - \alpha\varphi = \beta,$$

dove β è un elemento dato in $\mathfrak{S}$.

Sia φ la soluzione rappresentata in $\mathbf{a}_0$ da una porzione arbitraria di funzione analitica $\varphi^{(0)}$, meromorfa in quella regione. Seguendo il procedimento del § precedente, troviamo che φ è determinata in $\mathbf{a}_p$ $(p = 1, 2, \ldots)$ da

$$\varphi^{(p)}(x) = \alpha(x-1)\alpha(x-2)\ldots\alpha(x-p)\varphi^{(0)}(x-p) + \alpha(x-1)\alpha(x-2)\ldots$$
$$\ldots\alpha(x-p+1)\beta(x-p) + \alpha(x-1)\alpha(x-2)\ldots.$$
$$\ldots\alpha(x-p+2)\beta(x-p+1) + \ldots + \alpha(x-1)\beta(x-2) + \beta(x-1)$$

e in $\mathbf{a}_{-p}$ $(p = 1, 2, \ldots)$ da

$$\varphi^{(-p)}(x) = \frac{\varphi^{(0)}(x+p)}{\alpha(x)\alpha(x+1)\ldots\alpha(x+p-1)} -$$
$$- \frac{\beta(x+p)}{\alpha(x)\alpha(x+1)\ldots\alpha(x+p-1)} - \frac{\beta(x+p-1)}{\alpha(x)\alpha(x+1)\ldots\alpha(x+p-2)} - \ldots.$$
$$- \frac{\beta(x+1)}{\alpha(x)\alpha(x+1)} - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}.$$

Poichè per ipotesi gli elementi α e β sono meromorfi in $\mathbf{a}$ e la porzione di funzione analitica $\varphi^{(0)}$ è meromorfa in $\mathbf{a}_0$, ne risulta senz'altro che ciascuna delle porzioni di funzioni analitiche dianzi indicate è meromorfa nella rispettiva regione $\mathbf{a}_m$. Ne concludiamo che la soluzione φ della proposta equazione lineare alle differenze non omogenea appartiene allo spazio $\mathfrak{S}$.

Notiamo che la porzione di funzione analitica arbitraria $\varphi^{(0)}$ compare soltanto nel primo termine della espressione di ciascuna delle altre $\varphi^{(m)}$ e che questo primo termine, preso a sè, rappresenta in $\mathbf{a}_m$ la radice di E che in $\mathbf{a}_0$ è rappresentata da $\varphi^{(0)}$ (§ prec.). Ne risulta che se indichiamo con ω codesta radice di $\mathbf{E}$, l'elemento

$$\bar{\varphi} = \varphi - \omega$$

è in $\mathbf{a}_0$ identicamente nullo; nelle regioni $\mathbf{a}_p$ $(p = 1, 2\ldots)$ di $\mathbf{a}$ esso è rappresentato da

$$\bar{\varphi}^{(p)}(x) = \alpha(x-1)\alpha(x-2)\ldots\alpha(x-p+1)\beta(x-p) + \alpha(x-1)\alpha(x-2)\ldots$$
$$\ldots\alpha(x-p+2)\beta(x-p+1) + \ldots + \alpha(x-1)\beta(x-2) + \beta(x-1)$$

e nelle regioni $\mathbf{a}_{-p}$ $(p = 1, 2, \ldots)$ da

$$\bar{\varphi}^{(-p)}(x) = - \frac{\beta(x+p)}{\alpha(x)\alpha(x+1)\ldots\alpha(x+p-2)} -$$
$$- \frac{\beta(x+p-1)}{\alpha(x)\alpha(x+1)\ldots\alpha(x+p-2)} - \ldots - \frac{\beta(x+1)}{\alpha(x)\alpha(x+1)} - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}.$$

Siccome poi si ha:

$$\mathbf{E}(\bar{\varphi}) = \mathbf{E}(\varphi) - \mathbf{E}(\omega) = \beta,$$

ne viene che l'elemento $\bar{\varphi}$ è una particolare soluzione dell'equazione lineare proposta.

L'elemento φ e l'elemento $\bar{\varphi}$ rappresentano ciascuno una determinazione di $\mathbf{E}^{-1}(\beta)$. Essi differiscono per una radice di $\mathbf{E}$ (§§ 52, 276) e dall'uno o dall'altro di essi possiamo ottenere tutte le determinazioni di $\mathbf{E}^{-1}(\beta)$ mediante l'aggiunta successiva di tutte le radici di E.

D. SISTEMI FONDAMENTALI DI RADICI.

279. Dimostrata l'esistenza di radici delle forme lineari alle differenze Φ d'ordine n, ci proponiamo di determinarne l'intero spazio: ma a questo scopo è necessario che premettiamo il seguente teorema, dovuto al CASORATI.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè fra r elementi $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ di $\mathfrak{D}$ passi una relazione lineare, omogenea, identica, a coefficienti costanti [1], è che si annulli identicamente in **a** il determinante:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \ldots\ldots & \varphi_r \\ \theta\varphi_1 & \theta\varphi_2 & \ldots\ldots & \theta\varphi_r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta^{r-1}\varphi_1 & \theta^{r-1}\varphi_2 & \ldots\ldots & \theta^{r-1}\varphi_r \end{vmatrix}$$

Codesto determinante verrà detto determinante di CASORATI delle r funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$, e sarà da noi rappresentato con

$$C(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r).$$

a) La condizione è necessaria. Se infatti, indicando r costanti non tutte nulle con $c_1, c_2, \ldots, c_r$, abbiamo identicamente

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_r\varphi_r = o,$$

aggiungendo a questa relazione quelle che se ne deducono applicandovi ad ambo i membri le operazioni $\theta, \theta^2, \ldots, \theta^{r-1}$, otterremo r equazioni lineari omogenee fra le $c_1, c_2, \ldots, c_r$, le quali non possono coesistere se non è

$$C(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_r) = o.$$

[1] Sul significato di **costante** vale sempre l'avvertenza del § 264.

b) La condizione è sufficiente. Ciò è vero dapprima per due funzioni φ_1, φ_2: infatti se è

$$C(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \theta\varphi_1 & \theta\varphi_2 \end{vmatrix} = o,$$

ne risulta

$$\frac{\theta\varphi_2}{\theta\varphi_1} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}$$

ossia, in tutto **a**, si ha

$$\theta\,\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}.$$

Dunque $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ è una costante, che possiamo scrivere sotto la forma $-\,c_1 : c_2$: ne risulta

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 = o.$$

Dimostriamo ora che, supposto vero il teorema per $r-1$ funzioni, esso è pur vero per r. Se, infatti, nel determinante $C(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r)$ sottraggliamo dagli elementi della prima, seconda, ..., $(r-2)^{ma}$ linea, moltiplicati rispettivamente per

$$\theta\varphi_1, \quad \theta^2\varphi_1, \ldots, \theta^{r-1}\varphi_1,$$

gli elementi della seconda, terza, ..., r^{ma} linea, moltiplicati rispettivamente per

$$\varphi_1, \theta\varphi_1, \ldots, \theta^{r-2}\varphi_1,$$

il determinante $C(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r)$ si trasforma in

$$\frac{1}{\theta\varphi_1\,\theta^2\varphi_1, \ldots \theta^{r-2}\varphi_1}\begin{vmatrix} \varphi_2\,\theta\varphi_1 - \varphi_1\theta\varphi_2 & \ldots\ldots & \varphi_r\,\theta\varphi_1 - \varphi_1\theta\varphi_r \\ \theta\varphi_2\theta^2\varphi_1 - \theta\varphi_1\theta^2\varphi_2 & \ldots\ldots & \theta\varphi_r\theta^2\varphi_1 - \theta\varphi_1.\theta^2\varphi_r \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta^{r-2}\varphi_2.\theta^{r-1}\varphi_1 - \theta^{r-2}\varphi_1.\theta^{r-1}\varphi_2 & \ldots\ldots & \theta^{r-2}\varphi_r\theta^{r-1}\varphi_1 - \theta^{r-2}\varphi_1.\theta^{r-1}\varphi_r. \end{vmatrix}$$

Se allora supponiamo che in $\mathbf{a}$ sia identicamente nullo $C(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r)$, e che φ_1 non sia dappertutto infinito, dovrà essere identicamente nullo il determinante or ora scritto. Ma esso è il determinante di Casorati relativo alle $r - 1$ funzioni

$$\varphi_2\theta\varphi_1 - \varphi_1\theta\varphi_2, \quad \varphi_3\theta\varphi_1 - \varphi_1\theta\varphi_3, \ldots, \varphi_r\theta\varphi_1 - \varphi_1\theta\varphi_r,$$

onde si conclude che tra codeste funzioni passa una relazione lineare omogenea, identica, a coefficienti costanti

$$c'_1(\varphi_2\theta\varphi_1 - \varphi_1\theta\varphi_2) + c'_2(\varphi_3\theta\varphi_1 - \varphi_1\theta\varphi_3) + \ldots . \\ + c'_{r-1}(\varphi_r\theta\varphi_2 - \varphi_1\theta\varphi_r) = o,$$

la quale si può anche scrivere

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & c'_1\varphi_2 + c'_2\varphi_3 + \ldots + c'_{r-1}\varphi_r \\ \theta\varphi_1 & c'_1\theta\varphi_2 + c'_2\theta\varphi_3 + \ldots + c'_{r-1}\theta\varphi_r \end{vmatrix} = o;$$

ma questo è il determinante di Casorati relativo a φ_1 e $c'_1\varphi_2 + c'_2\varphi_3 +, \ldots + c'_{r-1}\varphi_r$. Quindi fra questi due elementi, e perciò anche fra gli elementi $\varphi_1, \varphi_2 \ldots, \varphi_r$, passerà una relazione lineare omogenea identica a coefficienti costanti.

280. Riprendiamo la forma di ordine n

$$\Phi = \alpha_n\theta^n + \alpha_{n-1}\theta^{n-1} + \ldots + \alpha_1\theta + \alpha_o.$$

Per la definizione stessa, il coefficiente α_n non è identicamente nullo in tutto il campo $\mathbf{a}$. Supporremo ancora che non sia identicamente nullo in $\mathbf{a}$ neppure il coefficiente α_o. Notiamo subito che con questa ipotesi non veniamo, in sostanza, ad introdurre nessuna restrizione: se infatti α_o fosse identicamente nullo in tutto il campo $\mathbf{a}$, la forma Φ si potrebbe esprimere come prodotto $\Phi_1\theta$ della θ per una forma Φ_1, di ordine $n - 1$; e, perchè la θ non ammette radici

(§ 118) all'infuori dello zero, del quale non si tiene conto, condizione necessaria e sufficiente affinchè un elemento ω sia radice di $\Phi_1\theta$ si è che $\theta\omega$ sia radice di Φ_1; talchè se α_o è identicamente nullo in $\mathbf{a}$, la ricerca dello spazio delle radici della forma Φ di ordine n si riconduce immediatamente alla ricerca dello spazio delle radici della forma Φ_1 di ordine $n - 1$.

Premesso questo, ricordiamo (§ 274) che fissate in $\mathbf{a}_o$, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$ rispettivamente, n porzioni di funzioni analitiche meromorfe $\omega^{(o)}, \omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(n-1)}$, resta con ciò determinato un elemento ω di $\mathfrak{D}$, radice di Φ. Si scelgano allora n sistemi di n porzioni di funzioni analitiche $\omega_i^{(o)}, \omega_i^{(1)}, \ldots, \omega_i^{(n-1)}$, $(i = o, 1, 2, \ldots, n - 1)$, meromorfe in $\mathbf{a}_o, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$ rispettivamente, e tali che il determinante

$$C^{(o)} = \begin{vmatrix} \omega_o^{(o)}(x) & \omega_o^{(1)}(x+1) \ldots\ldots\ldots\ldots & \omega_o^{(n-1)}(x+n-1) \\ \omega_1^{(o)}(x) & \omega_1^{(1)}(x+1) \ldots\ldots\ldots\ldots & \omega_1^{(n-1)}(x+n-1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_{n-1}^{(o)}(x) & \omega_{n-1}^{(1)}(x+1) \ldots\ldots & \omega_{n-1}^{(n-1)}(x+n-1) \end{vmatrix}$$

non sia identicamente nullo per tutti i punti x di $\mathbf{a}_o$. Resteranno corrispondentemente determinati, col procedimento del § 274, n elementi di $\mathfrak{D}$ che saranno radici di Φ; sieno essi $\omega_o, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$.

Vogliamo dimostrare che il determinante di Casorati $C(\omega_o, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1})$ relativo alle funzioni $\omega_o, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ non è in $\mathbf{a}$ identicamente nullo. Intanto è di per sè stesso chiaro che $C(\omega_o, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1})$ nei punti x di $\mathbf{a}_o$ si riduce al determinante $C^{(o)}$, che supponemmo già non identicamente nullo. Nei punti x di $\mathbf{a}_1$ il determinante $C(\omega_o, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1})$ è dato da

$$C^{(1)} = \begin{vmatrix} \omega_0^{(1)}(x) & \omega_0^{(2)}(x+1) \ldots\ldots & \omega_0^{(n-1)}(x+n-2) & \omega_0^{(n)}(x+n-1) \\ \omega_1^{(1)}(x) & \omega_1^{(2)}(x+1) \ldots\ldots & \omega_1^{(n-1)}(x+n-2) & \omega_1^{(n)}(x+n-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_{n-1}^{(1)}(x) & \omega_{n-1}^{(2)}(x+1) \ldots & \omega_{n-1}^{(n-1)}(x+n-2) & \omega_{n-1}^{(n)}(x+n-1) \end{vmatrix}$$

Ma poichè le $\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_n$ sono radici di Φ, ne viene che dalle relazioni, valide in ogni punto x di $\mathbf{a}_0$,

$$\alpha_n(x)\omega_i^{(n)}(x+n)+\alpha_{n-1}(x)\omega_i^{(n-1)}(x+n-1)+\ldots$$
$$\ldots+\alpha_1(x)\omega_i^{(1)}(x+1)+\alpha(x)\omega_i^{(0)}(x)=o,$$

possiamo dedurre l'espressione degli elementi dell'ultima colonna. Se ne deduce per ogni punto x di $\mathbf{a}_1$

$$\omega_i^{(n)}(x+n-1) = -\frac{\alpha_{n-1}(x-1)}{\alpha_n(x-1)}\,\omega_i^{(n-1)}(x+n-2) -$$
$$-\frac{\alpha_{n-2}(x-1)}{\alpha_n(x-1)}\,\omega_i^{(n-2)}(x+n-3) - \ldots$$
$$\ldots - \frac{\alpha_1(x-1)}{\alpha_n(x-1)}\,\omega_i^{(1)}(x) - \frac{\alpha_0(x-1)}{\alpha_n(x-1)}\,\omega_i^{(0)}(x-1).$$

Di qui risulta, aggiungendo in $C^{(1)}$ agli elementi dell'ultima colonna gli elementi della prima, seconda, ..., $(n-2)^{ma}$ moltiplicati rispettivamente per

$$\frac{\alpha_1(x-1)}{\alpha_n(x-1)},\ \frac{\alpha_2(x-1)}{\alpha_n(x-1)}, \ldots, \frac{\alpha_{n-1}(x-1)}{\alpha_n(x-1)},$$

che nei punti x di $\mathbf{a}_1$ il determinante $C^{(1)}$ è uguale a

$$-\frac{\alpha_0(x-1)}{\alpha_n(x-1)} \begin{vmatrix} \omega_0^{(1)}(x) & \omega_0^{(2)}(x+1) \ldots\ldots & \omega_0^{(n-1)}(x+n-2) & \omega_0^{(0)}(x-1) \\ \omega_1^{(1)}(x) & \omega_1^{(2)}(x+1) \ldots\ldots & \omega_1^{(n-1)}(x+n-2) & \omega_1^{(0)}(x-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_{n-1}^{(1)}(x) & \omega_{n-1}^{(2)}(x+1) \ldots & \omega_{n-1}^{(n-1)}(x+n-2) & \omega_{n-1}^{(0)}(x-1) \end{vmatrix}$$

e quindi nei punti x di $\mathbf{a}_0$. al determinante

$$(-1)^n \frac{\alpha_0(x)}{\alpha_n(x)} \begin{vmatrix} \omega_0^{(0)}(x) & \omega_0^{(1)}(x+1) \ldots\ldots & \omega_0^{(n-2)}(x+n-2) & \omega_0^{(n-1)}(x+n-1) \\ \omega_1^{(0)}(x) & \omega_1^{(1)}(x+1) \ldots\ldots & \omega_1^{(n-2)}(x+n-2) & \omega_1^{(n-1)}(x+n-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_{n-1}^{(0)}(x) & \omega_{n-1}^{(1)}(x+1) \ldots & \omega_{n-1}^{(n-2)}(x+n-2) & \omega_{n-1}^{(n-1)}(x+n-1) \end{vmatrix}$$

il quale non differisce da $C^{(0)}$ se non per un fattore che non è identicamente nullo. Se ne conclude che $C(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1})$ non è identicamente nullo nemmeno in $\mathbf{a}_1$. Con lo stesso procedimento, cioè tenendo conto dell'equazione cui soddisfanno in $\mathbf{a}$ le $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$, si dimostra che il determinante $C(\omega, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1})$ non è identicamente nullo nè nelle aree $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots$, nè nelle $\mathbf{a}_{-1}, \mathbf{a}_{-2}, \ldots$

Da ciò segue che gli elementi $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ di $\mathfrak{D}$ sono linearmente indipendenti (§ preced.) talchè: Ogni forma lineare alle differenze d'ordine n ammette uno spazio lineare di radici ad n dimensioni $\mathfrak{S}_n[\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}]$.

281. La forma Φ non ammette, in $\mathfrak{D}$, radici fuori dello $\mathfrak{S}_n$ ora determinato. Indichiamo, infatti, genericamente con ω una radice di Φ diversa dalle ω_i; dovrà sussistere in tutto il campo $\mathbf{a}$, insieme con le n relazioni:

$$\alpha_n(x)\theta^n\omega_i+\alpha_{n-1}(x)\theta^{n-1}\omega_i+\ldots+\alpha_1(x)\theta\omega_i+\alpha_0(x)\omega_i=o \quad (13)$$
$$(i=o, 1, \ldots, n-1),$$

anche la relazione

$$\alpha_n(x)\theta^n\omega+\alpha_{n-1}(x)\theta^{n-1}\omega+\ldots+\alpha_1(x)\theta\omega+\alpha_0(x)\omega=o. \quad (14)$$

Ora le funzioni $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0$ non essendo tutte identicamente nulle, codeste $n+1$ relazioni lineari omogenee fra le $n+1$ funzioni $\alpha_n, \alpha_{n-1} \dots, \alpha_0$ non possono coesistere senza che il determinante dei coefficienti sia nullo in ogni punto di **a**. Ma l'annullarsi identico in **a** del determinante

$$C(\omega, \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1})$$

dà la condizione necessaria e sufficiente, affinchè l'elemento ω soddisfi ad una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti (¹) insieme con le $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$, cioè affinchè appartenga allo spazio $\mathfrak{S}_n [\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}]$.

Si conclude che lo spazio delle radici della forma lineare alle differenze Φ, d'ordine n, è uno spazio lineare ad n dimensioni.

Ogni sistema fondamentale di elementi di codesto $\mathfrak{S}_n$ di radici si dirà in seguito sistema fondamentale di radici di Φ.

282. Supponiamo che $n+1$ elementi di $\mathfrak{D}$, $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$, linearmente indipendenti, siano radici di una forma Φ d'ordine n. Dovendo essere soddisfatte le $n+1$ relazioni (13), (14), lineari omogenee fra le $n+1$ funzioni $\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0$, e poichè il determinante dei coefficienti è diverso da zero, si conclude che deve essere:

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} = \dots = \alpha_1 = \alpha_0 = o.$$

Dunque, se una forma Φ di ordine non superiore ad n ammette $n+1$ radici linearmente indipendenti, i coefficienti della forma devono essere tutti identicamente nulli.

283. Si può facilmente scrivere una forma lineare alle differenze di ordine n, i cui coefficienti appartengano a $\mathfrak{D}$ e

(¹) Rammentiamo ancora una volta che in tutto ciò, il vocabolo « costante » va inteso nel senso stabilito al § 264.

che ammetta come spazio di radici un dato $\mathfrak{S}_n [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]$ di elementi appartenenti a $\mathfrak{D}$. Si consideri infatti, indicando con φ la funzione arbitraria, il determinante

$$C(\varphi, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}) = \begin{vmatrix} \theta^n\varphi & \theta^{n-1}\varphi \dots\dots & \theta\varphi & \varphi \\ \theta^n\omega_1 & \theta^{n-1}\omega_1 \dots\dots & \theta\omega_1 & \omega_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta^n\omega_n & \theta^{n-1}\omega_n \dots\dots & \theta\omega_n & \omega_n \end{vmatrix}$$

e si ponga $\Gamma(\varphi) = C(\varphi, \omega_1, \dots, \omega_n)$.

Sviluppando il determinante con le regole solite, e ordinandolo secondo le potenze dell'operazione θ applicata alla funzione arbitraria φ, abbiamo evidentemente che Γ è una forma lineare alle differenze d'ordine n, i cui coefficienti sono esprimibili per mezzo di operazioni razionali e di potenze di θ su elementi di $\mathfrak{D}$ e quindi sono essi stessi elementi di $\mathfrak{D}$. D'altra parte il determinante $C(\varphi, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, esprime col suo annullarsi la condizione necessaria e sufficiente affinchè la funzione φ appartenga allo $\mathfrak{S}_n[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]$; in altre parole esso si annulla per tutte e sole le funzioni appartenenti allo $\mathfrak{S}_n$ prefissato. La $\Gamma(\varphi)$ è pertanto una forma lineare d'ordine n i cui coefficienti sono elementi di $\mathfrak{D}$ e che ammette come spazio delle radici lo spazio $\mathfrak{S}_n$ prefissato.

È chiaro che ammette il medesimo spazio di radici anche ogni forma $\mu(x)\Gamma$, dove μ indica una funzione arbitraria.

284. Condizione necessaria e sufficiente affinchè una forma A di ordine m sia divisibile per una forma B d'ordine n $(m \geq n)$ si è che lo spazio delle radici di A contenga lo spazio delle radici di B.

Infatti, in primo luogo, se A è divisibile per B, esisterà (§ 270) una certa forma Γ di ordine $m-n$ per la quale si avrà

$$A = \Gamma B.$$

Indicando con $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ un sistema fondamentale di radici di B, avremo

$$A(\varphi_i) = \Gamma B(\varphi_i), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ossia:

$$A(\varphi_i) = \Gamma(o) = 0.$$

Dunque A ammette le radici $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ e quindi tutto lo spazio delle radici di B.

Reciprocamente, supponiamo che A ammetta come radici le n radici di B linearmente indipendenti $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Dividendo la A per la B (§ 269) si avrà un quoziente Γ e un resto P d'ordine $n - 1$ al più, per cui sarà:

$$A = \Gamma B + P.$$

Siccome $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sono radici di A e B ed è $\Gamma(o) = 0$ avremo:

$$P(\varphi_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

da ciò si conclude subito (§ 282) che P è identicamente nulla e quindi che A è divisibile per B.

Supponendo ora A e B dello stesso ordine, si deduce dal teorema precedente che se A ammette le radici di B, sarà $A = \Gamma B$, dove Γ è una forma d'ordine zero, ossia un'operazione di moltiplicazione; cioè: *due forme di ordine n, le quali ammettano il medesimo $\mathcal{S}_n$ di radici, non possono differire se non per una moltiplicazione a sinistra.*

Risulta con ciò dimostrata la reciproca del teorema enunciato alla fine del § 283, cioè che tutte le forme d'ordine n che ammettono come spazio di radici l'$\mathcal{S}_n[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]$ delle radici di Γ sono del tipo $\mu\Gamma$.

285. Sviluppando la $\Gamma = C(\varphi, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$, si riconosce tosto che in essa il coefficiente di $\theta^n\omega$ è, all'infuori del fattore $(-1)^n$, il determinante di Casorati $C(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$

relativo ad $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ e che il coefficiente di $\theta^i\omega$ è, all'infuori del fattore $(-1)^i$, il determinante

$$\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \ldots\ldots\ldots & \omega_n \\ \theta\omega_1 & \theta\omega_2 \ldots\ldots\ldots & \theta\omega_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta^{i-1}\omega_1 & \theta^{i-1}\omega_2 \ldots\ldots & \theta^{i-1}\omega_n \\ \theta^{i+1}\omega_1 & \theta^{i+1}\omega_2 \ldots\ldots & \theta^{i+1}\omega_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta^n\omega_1 & \theta^n\omega_2 \ldots\ldots\ldots & \theta^n\omega_n \end{vmatrix}$$

analogo a $C(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ e che noi indicheremo con $C_{(i)}(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$. Da ciò segue che la forma d'ordine n, evidentemente unica e determinata, che ammette come spazio di radici un dato $\mathcal{S}_n[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]$ ed in cui la massima potenza di θ ha come coefficiente una data funzione $\alpha(x)$, si ottiene prendendo il moltiplicatore $\mu(x)$ tale che sia:

$$\mu(x)C(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \alpha(x).$$

In particolare, la forma di ordine n che ammette lo spazio di radici $\mathcal{S}_n[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]$ ed ha il primo coefficiente eguale ad 1 è data da

$$\frac{C(\varphi, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)}{C(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)},$$

Così, per es., la forma del primo ordine che ammette la radice $\omega(x)$ ed ha per coefficiente di θ l'unità è data da

$$E = \theta - \frac{\omega(x+1)}{\omega(x)}.$$

Se

$$\Phi = \alpha_n\theta^n + \alpha_{n-1}\theta^{n-1} + \ldots + \alpha_1\theta + \alpha_o$$

è una forma che ammette lo spazio di radici $\mathcal{S}_n[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]$ abbiamo:

$$\frac{\alpha_r}{\alpha_n} = \frac{(-1)^{n-r}C_{(r)}(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)}{C(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)},$$

e quindi per $r = o$

$$(-1)^n \frac{\alpha_o}{\alpha_n} = \frac{C(\theta\omega_1, \theta\omega_2, \ldots, \theta\omega_n)}{C(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)},$$

ossia (§ 118):

$$(15) \qquad (-1)^n \frac{\alpha_o}{\alpha_n} = \frac{\theta C(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)}{C(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)}.$$

E. SCOMPOSIZIONE DELLE FORME IN FATTORI.

286. La forma A di ordine m sia divisibile per la forma B di ordine n $(m > n)$: avremo

$$A = \Gamma B,$$

dove Γ sarà una forma d'ordine $m - n$. Se $\varphi_1\ \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sono n radici linearmente indipendenti di B, esse sono tali anche per A (§ 54). Ma poichè A è di ordine $m > n$, essa ammetterà altre $m - n$ radici linearmente indipendenti fra loro e da $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Ora è chiaro che sarà radice di ΓB, ossia di A, ogni elemento φ tale che $B(\varphi)$ sia radice di Γ. Indicando $m - n$ radici linearmente indipendenti di Γ, con $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{m-n}$, siamo condotti a cercare $m - n$ elementi $\varphi_{n+1}, \varphi_{n+2}, \ldots, \varphi_m$, tali che sia

$$B(\varphi_{n+i}) = \psi_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m - n);$$

in altre parole siamo condotti a determinare una soluzione per ciascuna delle $m - n$ equazioni lineari non omogenee alle differenze,

$$(16) \qquad B(\varphi) = \psi_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, m - n).$$

Per mostrare come si determini in questo modo l'intero spazio delle radici di A, basterà far vedere che le funzioni φ_1,

$\varphi_2, \ldots, \varphi_n, \varphi_{n+1}, \ldots, \varphi_m$ sono linearmente indipendenti. Poichè tali sono le prime n, basterà far vedere:

a) che lo spazio definito dalle $\varphi_{n+1}, \ldots, \varphi_m$ è ad $m - n$ dimensioni;

b) che esso non ha alcun elemento comune con lo spazio delle radici di B definito da $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Se infatti esistesse una combinazione lineare delle funzioni $\varphi_{n+1}, \varphi_{n+2}, \ldots, \varphi_m$

$$a_1\varphi_{n+1} + a_2\varphi_{n+2} + \ldots + a_{m-n}\varphi_m,$$

la quale fosse identicamente nulla o radice di B, avremmo:

$$B(a_1\varphi_{n+1} + a_2\varphi_{n+2} + \ldots + a_{m-n}\varphi_m) = o,$$

ossia:

$$a_1B(\varphi_{n+1}) + a_2B(\varphi_{n+2}) + \ldots + a_{m-n}B(\varphi_m) = o,$$

e ancora

$$a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \ldots + a_{m-n}\psi_{m-n} = o,$$

il che contraddice all'ipotesi che le $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{m-n}$ siano linearmente indipendenti.

Concludiamo adunque che se una forma A è decomposta nel prodotto ΓB di una forma B d'ordine n per una forma Γ d'ordine $m - n$, la determinazione dello spazio delle radici di A è ricondotta alla determinazione degli spazi delle radici di B e di Γ e alla determinazione di una soluzione per ciascuna delle $m - n$ equazioni lineari alle differenze (16) non omogenee, dell'ordine n.

287. Consideriamo una forma Φ dell'ordine n e sia η_1 una sua radice. Se indichiamo con E_1 la forma lineare del primo ordine che ammette per radice η_1 ed ha il primo coefficiente uguale all'unità, se cioè poniamo:

$$E_1 = \theta - \frac{\eta_1(x + 1)}{\eta_1(x)},$$

la forma Φ sarè divisibile per E_1 (§ 284), onde esisterà una forma Φ_1 dell'ordine $n-1$, tale che

$$\Phi = \Phi_1 E_1.$$

In modo analogo, indichiamo con η_2 una radice di Φ_1; la Φ_1 sarà divisibile per la forma del primo ordine E_2, che ammette la radice η_2 e ha il primo coefficiente uguale all'unità. Avremo, dunque, indicando con Φ_2 una determinata forma lineare alle differenze d'ordine $n-2$,

$$\Phi_1 = \Phi_2 E_2$$

e quindi:

$$\Phi = \Phi_2\, E_2\, E_1.$$

Così possiamo continuare e da ultimo, se α_n è il coefficiente di θ^n nella forma Φ, otterremo la seguente espressione:

$$\Phi = \alpha_n\, E_n\, E_{n-1} \ldots E_2\, E_1,$$

dove $E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}, E_n$ sono n forme lineari alle differenze del primo ordine, aventi tutte come coefficiente di θ la unità.

288. Da ogni sistema fondamentale di radici:

$$\omega_1, \quad \omega_2, \ldots, \quad \omega_n$$

di una forma Φ di ordine n, si può senza difficoltà dedurre una decomposizione in fattori del primo ordine della forma data. In primo luogo Φ è divisibile per

$$E_1 = \theta - \frac{\omega_1(x+1)}{\omega_1(x)}$$

onde risulta:

$$\Phi = \Phi_1\, E_1.$$

Dovendo anche essere:

$$\Phi(\omega_2) = \Phi_1\, E_1(\omega_2) = o,$$

risulta che $E(\omega_2) = \eta_2$ è radice di Φ_1. Allora Φ_1 è divisibile per

$$E_2 = \theta - \frac{\eta_2(x+1)}{\eta_2(x)},$$

dove la E_2 è costruita mediante ω_1, ω_2; sarà allora:

$$\Phi = \Phi_2\, E_2\, E_1,$$

e così via.

289. Supponiamo, inversamente, nota una decomposizione in fattori del primo ordine di una forma Φ di ordine n

$$\Phi = E_n\, E_{n-1} \ldots E_2\, E_1.$$

La determinazione di tutte le soluzioni non solo dell'equazione omogenea $\Phi(\omega) = o$, ma anche dell'equazione non omogenea

$$\Phi(\omega) = \varphi(x),$$

dove $\varphi(x)$ rappresenta una funzione data, si può ricondurre alla determinazione delle soluzioni di sole equazioni del primo ordine. Suppongasi la cosa dimostrata per un prodotto di $r-1$ fattori e, posto

$$\Gamma = E_{r-1}\, E_{r-2} \ldots E_1,$$

si consideri:

$$A = E_r\, \Gamma.$$

Si risolva la

$$E_r(\psi) = \varphi(x),$$

la quale ci darà una soluzione $\psi(x)$ con una costante arbitraria: poi si ponga

$$\Gamma(\chi) = \psi(x):$$

questa dà una soluzione $\chi(x)$ con r costanti arbitrarie ($r-1$ provenienti dalla soluzione dell'equazione ed una contenuta in $\psi(x)$), ottenibile mediante la risoluzione di sole equazioni del primo ordine.

290. Nel § 288 abbiamo assegnato un metodo ricorrente per determinare n forme di primo ordine, fattori di una forma di ordine n, della quale si conosca un sistema fondamentale di radici:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n.$$

Ma il metodo seguente permette di esprimere direttamente i fattori del primo ordine di Φ per mezzo delle radici note. Si ponga perciò:

$$\Phi = E_n E_{n-1} \ldots E_2 E_1, \; \Phi_h = E_h E_{h-1} \ldots E_2 E_1$$
$$E_h = \theta - \lambda_h(x) \quad (h = 1, 2, \ldots, n-1),$$

dove si possono immaginare distribuiti gli indici fra le ω in modo che la forma Φ_h d'ordine h ammetta le radici $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_h$. La Φ_h ha il coefficiente di θ^h eguale ad uno, mentre il coefficiente di θ^0 risulta (§ 267) eguale al prodotto

$$(-1)^h \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_h;$$

risulta allora dalla (15) che sarà

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_h = \frac{\theta C(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_h)}{C(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_h)}.$$

Ragionando analogamente sulla Φ_{h+1}, otterremo

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{h+1} = \frac{\theta C(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{h+1})}{C(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{h+1})}.$$

Avremo quindi, dividendo membro a membro:

$$(16) \qquad \lambda_{h+1} = \frac{\theta C(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{h+1})}{C(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{h+1})} : \frac{\theta C(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_h)}{C(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_h)}.$$

F. FORME DEL PRIMO E DEL SECONDO TIPO. — RIDUCIBILITÀ

291. L'operazione θ, come ogni altra operazione di sostituzione, è a determinazione unica e non ammette radici (§ 118): quindi anche la sua inversa θ^{-1} è a determinazione unica e non degenere (§ 52). Di qui risulta che se Φ è una forma lineare alle differenze di ordine n, il cui spazio delle radici sia $S_n[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]$, l'operazione $\Phi\theta^{-m}$, dove m è un intero positivo qualsivoglia, ammette come spazio di radici lo spazio ad n dimensioni $S_n[\theta^m\omega_1, \theta^m\omega_2, \ldots, \theta^m\omega_n]$. D'altro canto, l'operazione $\Phi\theta^{-m}$ non può avere alcuna radice fuori di codesto spazio, perchè se α è radice di $\Phi\theta^{-m}$, la $\theta^{-m}\alpha$ deve essere radice di Φ.

Questa osservazione permetterebbe di estendere, con lievi modificazioni di forma, buona parte delle considerazioni dei §§ prec., anche alle operazioni $\Phi\theta^{-m}$, cioè alle operazioni

$$\alpha_n\theta^{n-m} + \alpha_{n-1}\theta^{n-m-1} + \ldots + \alpha_1\theta^{-m+1} + \alpha_0\theta^{-m}.$$

Non vi sarebbe quindi alcun inconveniente ad estendere il nome di « forme lineari alle differenze » anche a siffatte operazioni; noi, senza dare alla parola « forma lineare alle differenze » tutta codesta generalità, ci restringeremo a indicare con tale nome, insieme con le operazioni così designate sin qui, anche le forme lineari nella operazione θ^{-1}, a coefficienti appartenenti a $\mathfrak{D}$:

$$(17) \qquad \Phi_1 = \alpha_{-n}(x)\theta^{-n} + \alpha_{-(n-1)}(x)\theta^{-(n-1)} + \ldots$$
$$\ldots + \alpha_{-1}(x)\theta^{-1} + \alpha_0(x).$$

Per potere agevolmente distinguere le forme lineari nella operazione θ^{-1} dalle forme lineari nella operazione θ, chiameremo queste ultime « *forme del primo tipo* » e le altre « *forme del secondo tipo* ».

292. Una forma (17) del secondo tipo si può considerare come il prodotto $\Phi\theta^{-n}$ di una forma del primo tipo, di ordine n,

$$\Phi = \alpha_{-n} + \alpha_{-(n-1)}\theta + \dots + \alpha_{-1}\theta^{n-1} + \alpha_0\theta^n$$

per l'operazione θ^{-n}. Ne discende, per quanto dicemmo dianzi, che la forma Φ_1 ammette uno spazio lineare di radici, ad n dimensioni. Sarà pertanto naturale il dire che la forma (17) del secondo tipo è di ordine n.

È poi manifesto, per la simmetria che intercede fra le proprietà delle operazioni θ e θ^{-1}, che gli sviluppi e i risultati dei §§ prec. valgono senza alcuna eccezione anche per le forme del secondo tipo, quando dappertutto sia sostituita alla θ la θ^{-1}. Così, in particolare, la forma del secondo tipo, del primo ordine, che ammette la radice $\omega(x)$ e il cui primo coefficiente è l'unità, è data da

$$H = \theta^{-1} - \frac{\omega(x-1)}{\omega(x)}.$$

Con considerazioni analoghe a quelle del § 284 si conclude che una forma Φ_1 del secondo tipo, d'ordine n, è divisibile per la forma H relativa ad ogni sua radice, e quindi si può decomporre (§ 287) in più modi nel prodotto di n forme del secondo tipo, del primo ordine.

293. Dati in $\mathfrak{D}$ gli n elementi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, diremo *campo di razionalità definito da* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, l'insieme di tutti gli elementi che si possono ottenere da $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n$ mediante un numero finito di operazioni razionali e di potenze intere, positive o negative, di θ.

Può accadere che alcuni degli elementi α_1, p. es. gli $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \dots, \alpha_n$, siano essi stessi esprimibili per mezzo di

un numero finito di operazioni razionali e di potenze di θ su $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. Allora, naturalmente, a definire il campo di razionalità basterà siano dati gli elementi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$.

Giova supporre che ogni campo di razionalità che entra in considerazione, sia definito dal minimo numero possibile di elementi: gli elementi che bastano alla definizione di un campo di razionalità si diranno *fondamentali* o *caratteristici*.

Così il campo di razionalità, definito dalla variabile scelta come unico elemento caratteristico, è costituito da tutte e sole le funzioni razionali.

294. Data una forma Φ, conviene in generale scegliere come campo di razionalità quello definito dai coefficienti di Φ. A talune osservazioni enunciate in §§ precedenti possiamo ora dare la forma seguente:

a) Date due forme A e B, i cui coefficienti appartengano ad un determinato campo di razionalità, il quoziente e il resto della divisione di A per B sono forme i cui coefficienti appartengono al medesimo campo di razionalità.

b) Il massimo comun divisore di due forme, i cui coefficienti appartengono ad uno stesso campo di razionalità, è una forma i cui coefficienti appartengono a quel medesimo campo.

295. Una forma lineare alle differenze Φ di ordine n, i cui coefficienti appartengono ad un determinato campo di razionalità, si dice *riducibile* in questo campo quando esista una forma, di ordine inferiore ad n, i cui coefficienti appartengano a quel campo, e per la quale Φ sia divisibile. Quando una tal forma non esiste, la forma Φ si dice *irriducibile* nel campo di razionalità considerato.

Quando di una forma si dice che è riducibile o irriducibile senz'altro, si intende che il campo di razionalità scelto sia quello definito dai coefficienti della forma stessa.

296. Sia una forma Φ, d'ordine n, irriducibile in un determinato campo di razionalità, e sia Φ_1 una forma di ordine $m \geq n$, i cui coefficienti appartengano a quel campo, e che abbia una radice φ comune con Φ. La Φ_1 è allora necessariamente divisibile per Φ.

Infatti, poichè Φ_1 e Φ ammettono una radice comune φ, esse non sono prime fra loro; onde applicando a Φ_1 e Φ la ricerca del massimo comun divisore (§ 271), si giungerà da ultimo ad una forma X, di ordine certamente non inferiore al primo, la quale divide insieme Φ e Φ_1. Poichè codesta forma ha i suoi coefficienti appartenenti al campo di razionalità a cui appartengono i coefficienti di Φ e Φ_1 e la Φ è in esso irriducibile, il massimo comun divisore X tra Φ_1 e Φ non può essere distinto da Φ.

La proposizione da noi dimostrata si può anche enunciare, dicendo che se una forma, i cui coefficienti appartengano ad un campo di razionalità, ha una radice comune con una forma irriducibile in esso, la prima forma ammette tutte le radici della seconda.

297. È chiaro che il concetto di *riducibilità* di una forma è in tutto relativo al campo di razionalità, a cui si intende riferirsi. Se Φ è una forma irriducibile in un certo campo di razionalità, può benissimo accadere che ampliando codesto campo mediante l'*aggiunzione* di nuove funzioni fondamentali, si ottenga un campo di razionalità nel quale la forma Φ divenga riducibile.

Ad esempio, sia la forma Φ irriducibile in un dato campo: a questo campo non può appartenere nessuna radice della forma data, poichè se ad esso appartenesse la radice ω, la Φ sarebbe divisibile per la forma

$$H = \theta - \frac{\omega(x+1)}{\omega(x)},$$

i cui coefficienti apparterrebbero al campo considerato; ciò è contro l'ipotesi dell'irriducibilità di Φ. Se supponiamo ora che al dato campo di razionalità si aggiunga la radice ω di Φ, codesta forma, poichè è divisibile per H, diventerà riducibile nel nuovo campo di razionalità.

G. FORMA AGGIUNTA. — MOLTIPLICATORI.

298. Sia data una forma lineare alle differenze, di ordine n, del primo tipo

$$\Phi = \alpha_n(x)\theta^n + \alpha_{n-1}(x)\theta^{n-1} + \ldots + \alpha_1(x)\theta + \alpha_0(x).$$

Possiamo considerare di codesta operazione, come di ogni altra, la operazione *aggiunta* (§§ 242-253). Per assegnarne l'espressione basterà ricordare:

a) che l'aggiunta della operazione θ è la θ^{-1} (§ 249);

b) che l'aggiunta della somma di più operazioni è uguale alla somma delle aggiunte degli addendi (§ 242, *c*);

c) che l'aggiunta del prodotto di più operazioni è uguale al prodotto delle aggiunte dei singoli fattori, prese in ordine inverso (§ 243).

Risulta quindi che l'aggiunta di Φ sarà:

$$(18)\quad \overline{\Phi} = \alpha_n(x-n)\theta^{-n} + \alpha_{n-1}(x-n+1)\theta^{-(n-1)} + \ldots$$
$$\ldots + \alpha_1(x-1)\theta^{-1} + \alpha_0(x).$$

Si ha, cioè, che l'aggiunta $\overline{\Phi}$ di una forma Φ di ordine n del primo tipo è una forma di ordine n, del secondo tipo [1].

---

[1] Sull'aggiunta di una forma lineare alle differenze e su alcune questioni che vi si connettono, cfr. alcune note del BORTOLOTTI nei Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, 1896-1898.

Analogamente si trova che l' aggiunta di una forma d' ordine n, del secondo tipo

$$\Phi_1 = \beta_{-n}(x)\theta^{-n} + \beta_{-(n-1)}(x)\theta^{-(n-1)} + \ldots + \beta_{-1}(x)\theta^{-1} + \beta_0(x)$$

è una forma di ordine n, del primo tipo

$$\overline{\Phi}_1 = \beta_{-n}(x+n)\theta^n + \beta_{-(n-1)}(x+n-1)\theta^{n-1} + \ldots$$
$$\ldots + \beta_{-1}(x+1)\theta + \beta_0(x).$$

Così, p. es., l' aggiunta della forma

$$E = \theta - \frac{\omega(x+1)}{\omega(x)}$$

è la

$$\overline{E} = \theta^{-1} - \frac{\omega(x+1)}{\omega(x)}$$

e l' aggiunta della

$$H = \theta^{-1} - \frac{\omega(x-1)}{\omega(x)}$$

è la

$$\overline{H} = \theta - \frac{\omega(x-1)}{\omega(x)}.$$

In particolare, l' aggiunta della differenza finita

$$\Delta = \theta - 1$$

è data da

$$\overline{\Delta} = \theta^{-1} - 1 = -\theta^{-1}\Delta.$$

Poichè la θ^{-1} è a determinazione unica e non degenere, risulta da quest' ultima uguaglianza che la $\overline{\Delta}$ ammette tutte e sole le radici della Δ; cioè tutte e sole le costanti.

299. L' aggiunta dell' aggiunta di una forma data coincide con la forma primitiva. Ciò risulta immediatamente dalle regole del § precedente; ed è, del resto, un caso particolare della proposizione del § 242, *e*.

Risulta poi dalle espressioni trovate dianzi per $\overline{\Phi}$ e $\overline{\Phi}_1$ che i coefficienti dell' aggiunta appartengono al campo di razionalità dei coefficienti della forma data.

300. Se la forma Φ è decomposta in un modo qualsivoglia in fattori del primo ordine

$$\Phi = E_n E_{n-1} \ldots E_2 E_1,$$

avremo, per un teorema ricordato (§ 298, *c*):

$$\overline{\Phi} = \overline{E}_1 \overline{E}_2 \ldots \overline{E}_{n-1} \overline{E}_n.$$

Più in generale, se la Φ è decomposta nel prodotto di più forme lineari alle differenze A, B, ..., K,

$$\Phi = AB \ldots K,$$

avremo

$$\overline{\Phi} = \overline{K} \ldots \overline{B}\,\overline{A}$$

Da questo teorema e dall' ultima osservazione del § precedente risulta che in un determinato campo di razionalità una forma e la sua aggiunta sono entrambe riducibili o irriducibili.

301. Data una forma lineare alle differenze Φ, del primo tipo, in generale non accadrà che questa forma sia uguale alla differenza finita di un' altra forma, Γ, in guisa che sia

$$\Phi = \Delta\Gamma.$$

Similmente data una forma Φ_1 del secondo tipo non sarà in generale

$$\Phi_1 = (\theta^{-1} - 1)\Gamma_1,$$

dove Γ_1 rappresenta un' altra forma del secondo tipo. Per altro, possiam dimostrare che nell' uno e nell' altro caso, se la forma considerata è di ordine n, esiste uno spazio lineare ad n dimensioni di funzioni $\mu(x)$, $\nu(x)$ rispettivamente, tali che per la forma Φ del primo tipo si abbia:

$$\mu(x)\Phi = (\theta - 1)\Gamma = \Delta\Gamma, \tag{19}$$

e per la forma Φ_1 del secondo tipo:

$$\nu(x)\Phi_1 = (\theta^{-1} - 1)\Gamma_1, \tag{20}$$

dove Γ e Γ_1 rappresentano due forme rispettivamente del primo e del secondo tipo. Codeste funzioni μ, ν, prendono nell'uno e nell'altro caso il nome di *moltiplicatori* della forma considerata.

Consideriamo, per fissare le idee, una forma Φ del primo tipo. Essendo la Δ una forma lineare del primo ordine, affinchè sussista la (19), la Γ dovrà essere una forma di ordine $n - 1$ (§ 269). Ora sia $\mu(x)$ una radice dell'aggiunta $\overline{\Phi}$ di Φ. Posto

$$H = \theta^{-1} - \frac{\mu(x-1)}{\mu(x)},$$

la forma $\overline{\Phi}$ sarà divisibile per H (§ 284) e avremo, indicando con B una forma del secondo tipo d'ordine $n - 1$,

$$\overline{\Phi} = BH = B\left(\theta^{-1} - \frac{\mu(x-1)}{\mu(x)}\right).$$

Ponendo uguali le aggiunte dei due membri di quell'uguaglianza, otteniamo (§ 298, c)

$$\Phi = \left(\theta - \frac{\mu(x-1)}{\mu(x)}\right)\overline{B}$$

e quindi

$$\mu(x)\Phi = \mu(x)\theta\overline{B} - \mu(x-1)\overline{B} = \Delta(\mu(x-1)\overline{B});$$

indicando infine con Γ la forma d'ordine $n - 1$, del primo tipo, $\mu(x-1)\overline{B}$, abbiamo:

$$\mu(x)\Phi = \Delta\Gamma.$$

Abbiamo così dimostrato che ogni radice di $\overline{\Phi}$ è un moltiplicatore di Φ.

Le medesime considerazioni si ripetono, col solo cambiamento di θ in θ^{-1}, per le forme del secondo tipo; onde possiamo concludere che ogni forma lineare alle differenze di ordine n ammette uno spazio lineare ad n dimensioni di moltiplicatori: questo spazio è lo spazio delle radici dell'aggiunta della forma data.

302. Abbiamo veduto che una forma di ordine n ammette certamente n moltiplicatori linearmente indipendenti; vogliamo ora dimostrare che non ne ammette più di n. A tale scopo, basta invertire il teorema del § prec., mostrando che ogni moltiplicatore di una forma è radice dell'aggiunta.

Sia infatti $\mu(x)$ un moltiplicatore della forma lineare Φ del primo tipo; indicando con Γ una forma di ordine $n - 1$, pure del primo tipo, si ha:

$$\mu(x)\Phi(\varphi) = \Delta\Gamma(\varphi).$$

Ponendo uguali le aggiunte dei due membri di questa relazione, avremo:

$$\overline{\Phi}(\mu\varphi) = \overline{\Gamma}\,\overline{\Delta}(\varphi).$$

Ora unica radice di $\overline{\Delta}$ è la costante; quindi si può dire che all'infuori di un fattore costante arbitrario, la radice di $\overline{\Delta}$ è l'unità. Ponendo nella ultima uguaglianza $\varphi = 1$, otteniamo

$$\overline{\Phi}(\mu) = o,$$

e con ciò la proposizione è dimostrata. Essa si dimostra nell'identico modo se Φ è una forma del secondo tipo.

Concludendo, abbiamo che una forma lineare alle differenze di ordine n ammette n, e non più di n, moltiplicatori linearmente indipendenti, i quali sono radici dell'aggiunta della forma data.

Ogni sistema di n moltiplicatori linearmente indipendenti di una forma (sistema fondamentale di radici dell'aggiunta) può dirsi *sistema fondamentale di moltiplicatori*.

303. Passeremo a dare qualche applicazione del teorema precedente, e ci limiteremo per brevità al caso delle forme del primo tipo. Notiamo per altro esplicitamente che le nostre considerazioni valgono senza eccezione anche per le forme del secondo tipo: le formole corrispondenti si otterrebbero da quelle che noi daremo ponendo θ^{-1} al posto di θ, e quindi $\theta^{-1} - 1 = \bar{\Delta}$ al posto di $\theta - 1 = \Delta$.

Data una forma Φ d'ordine n, se μ è un suo moltiplicatore, avremo

$$\mu\Phi = \Delta\,\Gamma,$$

dove Γ è una forma d'ordine $n-1$. Ogni radice ω di Φ deve annullare anche $\Delta\Gamma$; perciò o essa è radice di Γ o è tale che $\Gamma(\omega)$ sia costante.

Ora sia dato un sistema fondamentale

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n$$

di radici di Φ e consideriamo le forme lineari Γ_i d'ordine $n-1$, che soddisfanno al sistema di relazioni

$$(21)\qquad \Gamma_i(\omega_i) = 1,\quad \Gamma_i(\omega_k) = o\ (k \gtrless i)$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Notiamo anzitutto che questo sistema di equazioni determina univocamente ciascuna forma Γ_i. Invero la Γ_i, in quanto deve ammettere le radici

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_{i-1},\ \omega_{i+1},\ldots,\ \omega_n,$$

deve essere uguale a (§ 285)

$$\Gamma_i(\varphi) = \gamma_i(x)\ C(\varphi, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{i-1}, \omega_{i+1}, \ldots, \omega_n),$$

dove $\gamma_i(x)$ è una funzione da determinare convenientemente. Questa funzione si determina poi osservando che deve essere

$$\Gamma_i(\omega_i) = \gamma_i(x) C(\omega_i, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{i-1}, \omega_{i+1}, \ldots, \omega_n) = 1;$$

si ha quindi:

$$\gamma_i(x) = \frac{(-1)^{i-1}}{C(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)}.$$

Si conclude

$$(22)\qquad \Gamma_i(\varphi) = (-1)^{i-1}\frac{C(\varphi, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}, \omega_{i+1}, \ldots, \omega_n)}{C(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)}.$$

Le n forme d'ordine n

$$\Delta\Gamma_i$$

ammettono ciascuna come radici

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n,$$

onde non possono differire fra loro e dalla Φ se non per una moltiplicazione a sinistra, e avremo

$$(23)\qquad \mu_i(x)\Phi = \Delta\Gamma_i\ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

304. Le forme Γ_i, determinate al § prec., servono a risolvere il seguente problema di *interpolazione funzionale*: Determinare una forma di ordine $n-1$, che corrispondentemente ad n date determinazioni linearmente indipendenti dalla funzione arbitraria

$$\varphi = \omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n$$

assuma n determinazioni date, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$.

Evidentemente il problema è risoluto dalla forma

$$(24) \qquad \Gamma = \beta_1\Gamma_1 + \beta_2\Gamma_2 + \ldots, + \beta_n\Gamma_n$$

e non ammette altra soluzione.

Codesta formola è perfettamente analoga alla nota formola d'interpolazione del LAGRANGE, la quale anzi vi è contenuta come caso particolare.

Siccome è

$$\beta_i = \Gamma(\omega_i), \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

e di più si ha (§ prec.)

$$(25) \qquad \Gamma_i = \Delta^{-1}\mu_i\Phi,$$

la (24) si può scrivere

$$\Gamma = \sum_1^n \Gamma(\omega_i)\Delta^{-1}\mu_i\Phi.$$

Applicando i due membri di codesta uguaglianza a $\Phi^{-1}(\varphi)$, otteniamo

$$(26) \qquad \Gamma\Phi^{-1}(\varphi) = \sum_1^n \Gamma(\omega_i)\Delta^{-1}(\mu_i\varphi).$$

Quest'ultima formola presenta una grande analogia con quella, per cui, in Algebra, si decompone una funzione razionale fratta in frazioni razionali semplici.

Ponendo infine nella (26) al posto di Γ l'operazione identica, otteniamo

$$(27) \qquad \Phi^{-1}(\varphi) = \sum_1^n \omega_i\Delta^{-1}(\mu_i\varphi).$$

Questa formola dà l'espressione dell'inversa di una forma lineare per mezzo di un sistema fondamentale di radici e di un sistema fondamentale di moltiplicatori della forma data.

305. Riprendiamo le formole (23) del § 303 per dedurne le espressioni dei moltiplicatori di Φ per mezzo delle radici della forma stessa.

Anzitutto, perchè le formole successive ricevano una forma più semplice, gioverà supporre che la forma Φ abbia come coefficiente di θ^n

$$(-1)^n\frac{C(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)}{\theta C(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)}.$$

Se questa condizione non è già verificata, possiamo facilmente soddisfarvi. Invero sia

$$\Phi = \alpha_n\theta^n + \alpha_{n-1}\theta^{n-1} + \ldots + \alpha_1\theta + \alpha_0$$

la forma data: sappiamo dalle (15) (§ 285) che è

$$\frac{\theta C(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)}{C(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)} = (-1)^n\frac{\alpha_0}{\alpha_n}:$$

perciò a raggiungere il nostro scopo basterà dividere tutti i coefficienti di Φ per α_0.

Indicando oramai con Φ la nostra forma ridotta a soddisfare alla suindicata condizione, ricordiamo le espressioni (22) delle Γ_i come quozienti di determinanti. Uguagliando allora nei due membri delle (23) i coefficienti di θ^n, otteniamo:

$$(-1)^n\mu_i(x)\frac{C(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)}{\theta C(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)} =$$

$$= (-1)^n\frac{C(\theta\omega_1, \theta\omega_2, \ldots, \theta\omega_{i-1}, \theta\omega_{i+1}, \ldots, \theta\omega_n)}{C(\theta\omega_1, \theta\omega_2, \ldots, \theta\omega_n)};$$

di qui, in quanto è

$$\theta C(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = C(\theta\omega_1, \theta\omega_2, \ldots, \theta\omega_n),$$

deduciamo infine

$$(28)\qquad \mu_i(x) = \frac{C(\theta\omega_1, \theta\omega_2 \ldots, \theta\omega_{i-1}, \theta\omega_{i+1}, \ldots, \theta\omega_n)}{C(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)}.$$

306. Dalle espressioni trovate al § prec., per i moltiplicatori, possiamo dedurre alcune notevolissime relazioni tra i moltiplicatori e le radici di una forma. Notiamo infatti che nella formola (28) il numeratore della frazione che comparisce al secondo membro è il complemento algebrico dell' i^{mo} elemento della prima linea nel determinante

$$C(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n).$$

Di qui risultano immediatamente le annunziate relazioni, le quali sono:

$$(29)\qquad \begin{cases} \mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2 + \ldots + \mu_n\omega_n = 1 \\ \mu_1\theta\omega_1 + \mu_2\theta\omega_2 + \ldots + \mu_n\theta\omega_n = o \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mu_1\theta^{n-1}\omega_1 + \mu_2\theta^{n-1}\omega_2 + \ldots + \mu_n\theta^{n-1}\omega_n = o. \end{cases}$$

Un analogo sistema di relazioni si ottiene dal fatto che le radici della forma data sono i moltiplicatori dell' aggiunta.

H. LE FORME LINEARI ALLE DIFFERENZE A COEFFICIENTI NUMERICI.

307. Le proprietà delle forme lineari a coefficienti numerici [1] ed in particolare la ricerca delle loro radici, si ricavano con molta facilità dai principî generali sulla teoria delle operazioni, e specialmente dalle considerazioni dei §§ 175 e seguenti. Risulta dapprima da quei principî che le forme come

$$(30)\qquad \Phi = a_n\theta^n + a_{n-1}\theta^{n-1} + \ldots + a_1\theta + a_o$$

dove $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_o$ sono numeri dati, sono fra loro commutabili, ed in particolare che esse sono commutabili coll' operazione θ; sappiamo ancora che la regola della moltiplicazione di tali forme è quella stessa della moltiplicazione dei polinomî ordinati per le potenze di una lettera, con tutte le conseguenze che ne derivano; infine le proposizioni dei §§ 60 e seguenti danno la formazione delle radici di un prodotto di forme (30), dalla conoscenza delle radici delle forme fattori.

La scomposizione della Φ in fattori del primo ordine, indicata ai §§ 287 e seg., si ha dunque nel modo seguente. Si consideri il polinomio

$$f(z) = a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1z + a_o,$$

e siano z_i le sue radici, dell' ordine rispettivo r_i di moltiplicità, $(i = 1, 2, \ldots s)$; si avrà

$$f(z) = a_n(z - z_1)^{r_1}(z - z_2)^{r_2} \ldots (z - z_s)^{r_s},$$

e per l' osservazione fatta sulla legge formale della moltiplicazione delle forme (30), verrà immediatamente

$$\Phi = a_nE_1^{r_1}E_2^{r_2} \ldots E_s^{r_s},$$

con

$$E_i = \theta - z_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots s).$$

308. La risoluzione generale dell' equazione

$$(30)\qquad \Phi = a_n\theta^n + a_{n-1}\theta^{-1} + \ldots + a_1\theta + a_o = o$$

[1] Con ciò intendiamo che i coefficienti siano effettivamente costanti numeriche e non costanti nel senso lato indicato al § 264.

non è che un caso particolare del problema trattato nel § 178. Le condizioni poste a quel problema nel detto § si trovano tutte verificate; infatti l'equazione $E = o$, ossia

$$\theta(\varphi) - z\varphi = o$$

ammette come unica soluzione, all'infuori di un moltiplicatore costante nel senso del § 265, la funzione z^x analitica e regolare nell'intorno di ogni punto del piano z, eccettuati i punti $z = o$ e $z = \infty$. Dai §§ 176-177 viene dunque che

$$\frac{\partial z^x}{\partial z} = xz^{x-1}, \quad \frac{\partial^2 z^x}{\partial z^2} = x(x-1)z^{x-2}, \ldots$$

sono rispettivamente le radici proprie di $E^2, E^3, \ldots$, e pertanto (§ 178) la soluzione generale dell'equazione (30) sarà data da

$$\sum_{i=1}^{s}\Big(c_{i1} + c_{i2}x + c_{i3}x(x-1) + \ldots + c_{ir_i}x(x-1)\ldots(x-r_i+2)\Big)z_i^x.$$

J. SERIE DI POTENZE DEL SIMBOLO θ.

309. Fin qui abbiamo studiato le forme lineari alle differenze, vale a dire le funzioni razionali intere delle operazioni θ e θ^{-1}. Ora nel calcolo delle differenze si presentano in modo naturale e spontaneo anche le serie di potenze intere e positive della operazione θ o della θ^{-1}. Nei rimanenti §§ del presente Capitolo ci proponiamo appunto di dare un breve cenno dei principî della teoria di codeste serie, limitandoci alla considerazione delle serie di potenze intere e positive della θ. I nostri sviluppi varranno,

con lievi e manifeste modificazioni, anche per le serie di potenze intere e positive di θ^{-1}.

310. Data una successione di elementi

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots,$$

appartenenti a $\mathfrak{D}$, diremo *serie di potenze* della θ l'operazione rappresentata formalmente dalla espressione

$$(31) \qquad A = \alpha_0 + \alpha_1\theta + \alpha_2\theta^2 + \ldots + \alpha_n\theta^n + \ldots,$$

e chiameremo *campo funzionale di convergenza della* A, relativo al punto $x = x_0$ di $\mathbf{a}$ (e per fissare le idee potremo supporre che il punto $x = x_0$ cada in $\mathbf{a}_0$) l'insieme degli elementi $\varphi(x)$ di $\mathfrak{D}$, tali che la serie

$$(32) \quad \alpha_0(x) + \alpha_1(x)\varphi(x+1) + \ldots + \alpha_n(x)\varphi(x+n) + \ldots$$

converga assolutamente nell'intorno del punto $x = x_0$.

Giova notare che ogni serie A ammette certamente in $\mathfrak{D}$ un campo di convergenza, relativo ad un punto $x = x_0$ qualsivoglia in $\mathbf{a}_0$. Si scelga infatti una successione di numeri positivi arbitrari $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ tali che la serie $\sum a_n$ sia convergente: poi si determini in $\mathfrak{D}$ un elemento $\varphi(x)$ che sia in $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \ldots$ uguale rispettivamente ad $\frac{a_0}{\alpha_0}, \frac{a_1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{a_n}{\alpha_n}, \ldots$ Questa $\varphi(x)$ essendo evidentemente meromorfa in $\mathbf{a}$ apparterrà a $\mathfrak{D}$. Per un siffatto elemento $\varphi(x)$ la serie (32) converge assolutamente (ed uniformemente) in tutti i punti x di $\mathbf{a}_0$, talchè $\varphi(x)$ appartiene al campo di validità di A.

311. Indicheremo ora alcuni criteri sufficienti alla convergenza degli sviluppi in serie di potenze della θ, e che si deducono dal noto criterio di convergenza delle serie ordinarie, fondato sulla considerazione del rapporto di un termine al precedente. Non è per altro da tacere che, partendo da criteri di convergenza meno restrittivi, sarebbe possibile di dare una più ampia validità agli sviluppi che considereremo.

a) Se la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x)\lambda_n(x),$$

dove $\lambda_0(x), \lambda_1(x), \ldots, \lambda_n(x), \ldots$ è una successione di funzioni finite entro $\mathbf{a}_0$, è assolutamente convergente, e se l'elemento $\varphi(x)$ è tale che per ogni x di $\mathbf{a}_0$ sia

$$\varphi(x+n) < \gamma(x)\,|\lambda_n(x)|$$

da un indice n in avanti, essendo $\gamma(x)$ una funzione positiva e finita nell'intorno di un punto $x = x_0$ di $\mathbf{a}_0$, l'elemento $\varphi(x)$ apparterrà al campo funzionale di convergenza, relativo al punto $x = x_0$, della

$$\text{(31)} \qquad A = \alpha_0 + \alpha_1\theta + \alpha_2\theta^2 + \ldots + \alpha_n\theta^n + \ldots$$

La dimostrazione è affatto ovvia.

b) Segue di qui che, se $\varphi(x)$ è un elemento regolare nell'intorno di $x = x_0$ in $\mathbf{a}_0$, i cui valori sono ivi soggetti alla condizione

$$\left|\frac{\varphi(x+n)}{\varphi(x+n-1)}\right| < k,$$

dove k è un numero positivo minore di uno, esso apparterrà al campo di validità della

$$A_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n.$$

c) Data la serie (31), se esistono due numeri positivi g ed m ed un elemento $\varphi_1(x)$, finito nell'intorno di $x = x_0$ in $\mathbf{a}_0$, tali che per $n \geq m$ sia

$$\text{(33)} \qquad |\alpha_n(x)\,\varphi_1(x+n)| < g,$$

ogni elemento $\varphi(x)$ tale che sia, per k positivo e minore d'uno,

$$\text{(34)} \qquad \left|\frac{\varphi(x+n-1)}{\varphi(x+n)}\right| < k \left|\frac{\varphi_1(x+n-1)}{\varphi_1(x+n)}\right|$$

apparterrà al campo di validità della (31), relativo al punto $x = x_0$.

Infatti dalla (33) deduciamo

$$|\alpha_n(x)\,\varphi(x+n)| < g\left|\frac{\varphi(x+n)}{\varphi_1(x+n)}\right|$$

e quindi

$$\text{(35)} \qquad \left|\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x)\,\varphi(x+n)\right| < g\sum_{0}^{\infty}\left|\frac{\varphi(x+n)}{\varphi_1(x+n)}\right|.$$

Ma dalla (34) segue

$$\left|\frac{\varphi(x+n)}{\varphi_1(x+n)}\right| < k\left|\frac{\varphi(x+n-1)}{\varphi_1(x+n-1)}\right|$$

e quindi per la *b*) l'elemento $\dfrac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$ appartiene al campo di convergenza relativo ad $x = x_0$ della

$$\sum_{n=0}^{\infty} \theta^n.$$

Poichè la

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{\varphi(x+n)}{\varphi_1(x+n)}$$

converge assolutamente nell'intorno del punto $x = x_0$, convergerà ivi la

$$\sum_0^\infty \left| \frac{\varphi(x+n)}{\varphi_1(x+n)} \right|$$

e quindi ancora, per la (35), convergerà assolutamente la

$$\sum_0^\infty \alpha_n(x)\ \varphi(x+n).$$

d) Se l'elemento $\varphi_1(x)$ è tale che la serie

$$\sum_0^\infty \alpha_n(x)\ \varphi_1(x+n)$$

converga uniformemente nell'intorno di $x = x_0$, ogni elemento $\varphi(x)$, pel quale sia soddisfatta la (34), appartiene al campo di convergenza della A.

Preso infatti ad arbitrio un numero positivo g, si potrà determinare un intero positivo q tale che per ogni $p \geq q$ sia, nell'intorno considerato di $x = x_0$,

$$\left| \sum_{n=p}^\infty \alpha_n(x)\ \varphi_1(x+n) \right| < \frac{g}{2}, \quad \left| \sum_{n=p-1}^\infty \alpha_n(x)\ \varphi_1(x+n) \right| < \frac{g}{2},$$

onde risulta

$$|\alpha_n(x)\ \varphi_1(x+n)| < g,$$

cosicchè si ricade sulla condizione (33) del teorema precedente.

In particolare, l'elemento

$$z^x\ \varphi_1(x),$$

sotto la condizione che z sia in modulo minore di uno, appartiene al campo di convergenza della A.

312. Se $\varphi_1(x)$ è un elemento di $\mathfrak{D}$, il quale appartenga al campo di validità della (31), e se la serie (32) è identicamente nulla per ogni elemento $\varphi(x)$ che rispetto a $\varphi_1(x)$ soddisfi alla condizione (34), saranno identicamente nulli tutti i coefficienti della serie stessa.

Infatti, fra le funzioni $\varphi(x)$ vi è la $z^x\varphi_1(x)$, dove z è un numero qualsivoglia in modulo minore di uno. Si consideri ora la serie

$$A\big(z^x\varphi_1(x)\big) = \sum_{n=0}^\infty \alpha_n(x)\ z^{x+n}\ \varphi_1(x+n) = z^x \sum_{n=0}^\infty \alpha_n(x)\ z^n \varphi_1(x+n).$$

Questa per ogni x dell'intorno di $x = x_0$ è una serie di potenze di z convergente per $z = 1$, e quindi anche per ogni $|z| < 1$. Di più essa sarà identicamente nulla per ogni siffatto valore di z. Dovranno quindi essere nulli tutti i suoi coefficienti

$$\alpha_n(x)\ \varphi_1(x+n) = o \qquad (n = o, 1, 2, \ldots).$$

Ora, poichè $\varphi_1(x)$ appartiene a $\mathfrak{D}$, si può in infiniti modi scegliere x in $\mathbf{a}_0$ per modo che i valori

$$\varphi_1(x+n) \qquad (n = o, 1, 2, \ldots)$$

siano tutti diversi da zero (§ 259). Se ne conclude che ciascuna $\alpha_n(x)$ deve essere nulla infinite volte in $\mathbf{a}_0$; il che, essendo $\alpha_n(x)$ in $\mathbf{a}_0$ funzione analitica meromorfa, non può accadere altro che se $\alpha_n(x)$ è identicamente nulla in $\mathbf{a}_0$. Analogamente in $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \ldots$.

Da ciò risulta che alla determinazione di una operazione A, che si voglia rappresentare sotto forma di una serie $\sum_{n=0}^\infty \alpha_n(x)\ \theta^n$, è applicabile il noto metodo dei coefficienti indeterminati, che noi già dimostrammo applicabile (Cap. VI) alle serie di potenze della operazione D.

313. Applichiamo tale metodo dei coefficienti indeterminati alla rappresentazione, per mezzo di una serie di potenze della θ, della operazione inversa di una forma lineare di prim' ordine.

Data la forma del primo ordine

$$E = \theta - \alpha(x),$$

dove $\alpha(x)$ è un elemento determinato di $\mathfrak{S}$, l'inversa E^{-1} è a determinazione multipla e le sue infinite determinazioni si ottengono, aggiungendo ad una particolare di esse le ∞^1 radici di E.

Ora si vuole mostrare come, fra le determinazioni di E^{-1}, ve ne sia una che è rappresentabile per mezzo di una serie di potenze di θ, almeno in un certo campo funzionale appartenente a $\mathfrak{S}$.

Facciamo per ciò

$$E^{-1} = \beta_0(x) + \beta_1(x)\theta + \beta_2(x)\theta^2 + \ldots . + \beta_n(x)\theta^n + \ldots .$$

dove le $\beta_i(x)$ sono elementi di $\mathfrak{S}$ da determinarsi, ed applichiamo a codesto sviluppo l'operazione E; la condizione

$$EE^{-1} = 1$$

darà

$$\begin{aligned}\beta_0(x+1)\theta + \beta_1(x+1)\theta^2 + \ldots . + \beta_n(x+1)\theta^{n+1} + \ldots .\\ - \alpha(x)(\beta_0 + \beta_1\theta + \ldots . + \beta_n\theta^n + \ldots .) = 1,\end{aligned}$$

onde (§ prec.) risulta il sistema:

$$-\alpha(x)\beta_0 = 1,\ \beta_n(x+1) - \alpha(x)\beta_{n+1}(x) = o,\ (n = 1, 2, \ldots).$$

Di qui si deduce:

$$\beta(x) = -\frac{1}{\alpha_0}, \beta_n = -\frac{1}{\alpha(x)\alpha(x+1)\ldots\alpha(x+n)}, (n=1,2,3,\ldots).$$

Dunque, una delle determinazioni di E^{-1} è rappresentata dallo sviluppo

$$(36)\qquad E^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta^n}{\alpha(x)\alpha(x+1)\ldots\alpha(x+n)},$$

i cui coefficienti, come risulta dalla stessa loro legge di formazione, sono elementi di $\mathfrak{S}$. Anzi è chiaro che essi appartengono al campo di razionalità (§ 293) definito dal coefficiente $\alpha(x)$ della forma E.

Se $\omega(x)$ è una radice di E, si ha (§ 277)

$$\alpha(x)\alpha(x+1)\ldots\alpha(x+n) = \frac{\omega(x+n+1)}{\omega(x)},$$

onde lo sviluppo (36) può anche scriversi

$$E^{-1}(\varphi) = -\omega(x)\sum_{n=0}^{\infty}\theta^n\left(\frac{\varphi(x)}{\omega(x+1)}\right).$$

314. Il procedimento seguito nel § prec. ha una validità effettiva se l'elemento $\varphi(x)$ a cui si intende applicata la E^{-1} appartiene simultaneamente ai campi di convergenza, relativi ad un punto $x = x_0$, di E^{-1} e di θE^{-1}. Ora questa condizione si verifica per ogni elemento $\varphi(x)$ tale che, essendo k un numero positivo compreso fra 0 ed 1, si abbia, nell'intorno di $x = x_0$,

$$(37)\qquad \left|\frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)}\right| < k\ |\alpha(x+1)|.$$

Invero nella serie

$$E^{-1}(\varphi) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi(x+n)}{\alpha(x)\alpha(x+1)\ldots\alpha(x+n)}$$

il rapporto di un termine all'antecedente è dato da

$$\frac{\varphi(x+n)\alpha(x+n)}{\varphi(x+n-1)}$$

e, in forza dell'ipotesi fatta su $\varphi(x)$, codesta espressione è, in modulo, minore di uno.

Analogamente si verifica che se $\varphi(x)$ soddisfa alla condizione (37), essa appartiene al campo di convergenza della $\theta \mathbf{E}^{-1}$.

315. Più generalmente, data una forma lineare d'ordine n i cui coefficienti appartengano a $\mathfrak{D}$:

$$\Phi = \alpha_n\theta^n + \alpha_{n-1}\theta^{n-1} + \ldots + \alpha_1\theta + \alpha_0,$$

proponiamoci di vedere se fra le determinazioni di Φ^{-1} ve n'è una rappresentabile per mezzo di una serie di potenze della θ.

Poniamo perciò

$$\Phi^{-1} = \beta_0 + \beta_1\theta + \beta_2\theta^2 + \ldots + \beta_n\theta^n + \ldots$$

Applicando l'operazione Φ ai due membri, dovremo avere, in virtù della $\Phi\Phi^{-1} = \mathbf{1}$,

$$\begin{aligned}\alpha_0(x)\beta_0(x) + \big(\alpha_0(x)\beta_1(x) + \alpha_1(x)\beta_0(x+1)\big)\theta + \ldots +\\ + \big(\alpha_0(x)\beta_m(x) + \alpha_1(x)\beta_{m-1}(x+1) + \ldots\\ \ldots + \alpha_m(x)\beta_{m-n}(x+n)\big)\theta^m + \ldots = \mathbf{1},\end{aligned}$$

onde risulta (§ 312)

$$(38)\quad \begin{cases}\alpha_0(x)\beta_0(x)=1\\ \alpha_0(x)\beta_1(x)+\alpha_1(x)\beta_0(x+1)=o\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_0(x)\beta_m(x)+\alpha_1(x)\beta_{m-1}(x+1)+\ldots+\alpha_m(x)\beta_{m-n}(x+n)=o\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

Qui potremo supporre che $\alpha_0(x)$ non sia identicamente nullo; se infatti fossero tali $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}$, ma non α_r, potremmo scegliere come elemento indeterminato, anzichè φ, la funzione $\theta^r\varphi$, e saremmo così ricondotti al caso di una forma di ordine $n-r$, in cui il coefficiente di θ^0 non è identicamente nullo.

Sotto l'ipotesi di α_0 diverso da zero, il sistema (38) permetterà di determinare per via ricorrente i coefficienti β_n dello sviluppo di Φ^{-1} in serie di potenze di θ. Notiamo che tali coefficienti si ottengono da $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$, per mezzo di un numero finito di operazioni razionali e di potenze di θ; onde risulta che essi sono elementi dello spazio $\mathfrak{D}$; più precisamente, essi appartengono al campo di razionalità definito da $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

316. Ora passiamo ad occuparci delle condizioni, sotto le quali lo sviluppo di Φ^{-1} determinato al § prec. non vale solo formalmente, ma ha una convergenza effettiva. Perciò dimostriamo dapprima il seguente teorema:

Sieno

$$\mathbf{E}_1 = \theta - \alpha_1(x), \qquad \mathbf{E}_2 = \theta - \alpha_2(x)$$

due forme del primo ordine, tali che in tutto il campo $\mathbf{a}$ *sia*

$$(39)\qquad \left|\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x+1)}\right| < h$$

dove h è un numero positivo. Dicendo rispettivamente $\mathbf{E}_1^{-1}$, $\mathbf{E}_2^{-1}$ le due serie

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta^n}{\alpha_1(x)\alpha_1(x+1)\ldots\alpha_1(x+n)},\; -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta^n}{\alpha_2(x)\alpha_2(x+1)\ldots\alpha_2(x+n)},$$

è possibile trovare un campo funzionale cosiffatto che ogni elemento $\varphi(x)$ di esso appartenga al campo di convergenza di E_1^{-1} e che inoltre l'elemento $\psi(x) = E_1^{-1}(\varphi)$ appartenga al campo di convergenza di E_2^{-1}.

Essendo $\gamma(x)$ una funzione positiva e generalmente finita dei punti x di $\mathbf{a}_0$, consideriamo il campo funzionale $\mathfrak{C}$, costituito dagli elementi $\varphi(x)$ tali che nell'intorno del punto $x = x_0$ di $\mathbf{a}_0$ sia

$$|\varphi(x)| < |\alpha_1(x)|\ \gamma(x)$$

e

$$|\varphi(x+n)| < |\alpha_1(x)\alpha_1(x+1)\ldots\alpha_1(x+n)|\ \gamma(x)k^n$$

dove k è un numero positivo minore di uno.

Per tutti gli elementi di $\mathfrak{C}$ la serie E_1^{-1} ha significato; infatti abbiamo, nell'intorno di $x = x_0$,

$$(40)\qquad \psi(x) = E_1^{-1}(\varphi) = -\frac{\varphi(x)}{\alpha_1(x)} - \frac{\varphi(x+1)}{\alpha_1(x)\alpha_1(x+1)} - \ldots,$$

e prendendo nel secondo membro i moduli dei termini, risulta

$$|\psi(x)| < \frac{\gamma(x)}{1-k}.$$

Applicando ad ambo i membri della (40) l'operazione θ^m, verrà

$$\psi(x+m) = -\frac{\varphi(x+m)}{\alpha_1(x+m)} - \frac{\varphi(x+m+1)}{\alpha_1(x+m)\alpha_1(x+m+1)} + \ldots$$

donde

$$|\psi(x+m)| < |\alpha_1(x)\alpha_1(x+1)\ldots\alpha_1(x+m-1)|\ \frac{k^m\gamma(x)}{1-k}.$$

Ove si tenga conto della ipotesi (39), la precedente disuguaglianza dà

$$|\psi(x)| < |\alpha_2(x)|\ \frac{\gamma(x)}{(1-k)|\alpha_2(x)|},$$

$$|\psi(x+n)| < |\alpha_2(x)\alpha_2(x+1)\ldots\alpha_2(x+n)|\ \frac{\gamma(x)k^nh^n}{(1-k)|\alpha_2(x)|}.$$

Di qui, se prendiamo $k < \frac{1}{h}$, risulta che $\psi(x)$ appartiene ad un campo definito rispetto ad E_2^{-1} nel modo stesso, in cui $\mathfrak{C}$ è definito rispetto ad E_1^{-1}. Così il nostro teorema è dimostrato. Di più, per la convergenza assoluta degli sviluppi considerati, se in $E_2^{-1}(\psi)$ sostituiamo a $\psi(x)$ il suo sviluppo ordinato per le $\theta^m\varphi(x)$, la serie che così si ottiene si potrà pure ordinare per le $\theta^m\varphi(x)$.

Lo stesso ragionamento vale manifestamente a dimostrare che, data una terza forma del primo ordine

$$E_3 = \theta - \alpha_3(x)$$

tale che sia

$$\left|\frac{\alpha_2(x)}{\alpha_3(x+1)}\right| < h',$$

il campo $\mathfrak{C}$ definito come dianzi, ma pel quale sia preso $k < \frac{1}{hh'}$, sarà tale che per ogni elemento $\varphi(x)$ di esso non solo convergerà la serie $E_1^{-1}(\psi) = \psi(x)$, ma anche la $E_2^{-1}(\psi) = \chi(x)$ e la $E_3^{-1}(\chi)$. Di più, $E_3^{-1}(\chi)$ si potrà ordinare secondo le $\theta^m\varphi(x)$.

317. Ciò posto, riprendiamo la forma lineare alle differenze Φ, di ordine n, e decomponiamola in fattori del primo ordine (§ 287)

$$\Phi = E_1\, E_2 \ldots E_{n-1}E_n,$$

dove

$$E_i = \theta - \alpha_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

ricordando che gli $\alpha_i(x)$ si possono determinare ogniqualvolta si conosce un sistema fondamentale di radici di Φ.

Sotto l'ipotesi che gli $\alpha_i(x)$ rendano soddisfatte le condizioni

$$\left|\frac{\alpha_{i-1}(x-1)}{\alpha_i(x)}\right| < h \qquad (i = 2, 3, \ldots, n),$$

dove h è un numero positivo, vale il seguente teorema:

Ogni elemento $\varphi(x)$ di $\mathfrak{D}$, tale che per esso sia in ogni punto x dell' intorno di $x = x_0$ in $\mathbf{a}_0$:

$$|\varphi(x+n)| < |\alpha_1(x+1)\alpha_1(x+2)\ldots \ldots \alpha_1(x+n)|\,\gamma(x)k^n, \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

sarà contenuto nel campo di convergenza relativo ad $x = x_0$ della serie rappresentante Φ^{-1} (§ 313), posto che $\gamma(x)$ sia una funzione positiva in $\mathbf{a}_0$ e k un numero positivo minore di uno se è $h < 1$ e minore di $\frac{1}{h^{n-1}}$ se è $h > 1$.

Infatti, in virtù del teorema precedente, ogni siffatto elemento $\varphi(x)$ apparterrà al campo di convergenza di $\mathbf{E}_1^{-1}$ e, posto $\mathbf{E}_1^{-1}(\varphi) = \varphi_1(x)$, questo apparterrà al campo di convergenza di $\mathbf{E}_2^{-1}$: posto poi $\mathbf{E}_2^{-1}(\varphi_1) = \varphi_2(x)$, questo sarà alla sua volta nel campo di convergenza di $\mathbf{E}_3^{-1}$ e così via. Si avrà quindi

$$(41) \quad \mathbf{E}_1^{-1}(\varphi) = \varphi_1(x),\ \mathbf{E}_2^{-1}(\varphi_1) = \varphi_2(x), \ldots, \mathbf{E}_n^{-1}(\varphi_{n-1}) = \varphi_n(x),$$

onde

$$\varphi(x) = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 \ldots \mathbf{E}_n(\varphi_n)$$

ossia

$$\varphi_n(x) = \Phi^{-1}(\varphi),$$

e sostituendo in ognuna delle equazioni (41) al posto di $\varphi_i(x)$ il suo sviluppo in serie dato dalla formula (40), si ottiene in ultima analisi uno sviluppo che, per il teorema del § prec., può essere ordinato secondo le $\vartheta^m\varphi$ ed è convergente assolutamente in seguito alle poste condizioni.

CAPITOLO UNDECIMO.

Le forme lineari differenziali.

A. ALGEBRA DELLE FORME LINEARI DIFFERENZIALI.

318. Al cap. V abbiamo già definite le forme differenziali lineari, cioè le operazioni:

$$(1) \qquad F = \alpha_n(x)D^n + \alpha_{n-1}(x)D^{n-1} + \ldots + \alpha_1(x)D + \alpha_0(x).$$

In questa espressione si suppone solo che i coefficienti $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ siano funzioni analitiche regolari nell'intorno di un punto x_0 del piano della variabile x. L'operazione F è allora applicabile a tutto l'insieme lineare delle funzioni analitiche regolari nell'intorno di quel punto, insieme che verrà da noi denotato con $\mathfrak{S}^0(x_0)$. Se φ è un elemento di questo insieme, sarà tale anche $F(\varphi)$; in altre parole, l'operazione F ammette $\mathfrak{S}^0(x_0)$ come spazio invariante.

Indicheremo con $\mathfrak{S}^r(x_0)$ l'insieme delle serie di potenze di $x - x_0$ convergenti in un cerchio di centro x_0 e di raggio superiore ad r; è da ricordare che ogni elemento $\alpha(x)$ di questo insieme definisce un ramo uniforme di funzione analitica nella stella di Mittag-Leffler di vertice x_0 (cfr. §§ 99-100), e questo ramo di funzione verrà denotato collo stesso simbolo $\alpha(x)$.

Una forma differenziale lineare, al pari dell'operazione D, delle sue potenze intere positive e dell'operazione di moltiplicazione, colle quali è costruita, è un'operazione a determinazione unica; pertanto ogni tale forma ammette come radice lo zero (§ 51). Anche qui, ogniqualvolta parleremo di radici di una forma, prescinderemo dalla radice zero.

319. *a)* Una forma differenziale lineare si dice *dell' ordine n*, quando il simbolo D vi figura coll' esponente n, e non con esponente maggiore. L' operazione di moltiplicazione può riguardarsi come una forma di ordine zero.

b) La somma di due forme differenziali lineari degli ordini m, n rispettivamente $(m \geq n)$ è una forma differenziale lineare di ordine m.

c) Date due forme differenziali lineari:

$$F = \alpha_m D^m + \alpha_{m-1} D^{m-1} + \ldots + \alpha_1 D + \alpha_0,$$
$$G = \beta_n D^n + \beta_{n-1} D^{n-1} + \ldots + \beta_1 D + \beta_0,$$

abbiamo, indicando cogli accenti le derivate dei coefficienti:

$$\begin{aligned}(2)\quad FG = {} & \alpha_m\beta_n D^{m+n} + \left(\alpha_m\left(\beta_{n-1} + \binom{m}{1}\beta'_n\right) + \alpha_{m-1}\beta_n\right)D^{m+n-1} + \\ & + \left\{\alpha_m\left(\binom{m}{2}\beta''_n + \binom{m}{1}\beta'_{n-1} + \beta_{n-2}\right) + \alpha_{m-1}\left(\binom{m-1}{1}\beta'_n + \beta_{n-1}\right) + \right. \\ & \left. + \alpha_{m-2}\beta_n\right\} D^{m+n-2} + \ldots + \alpha_m\beta_0^{(m)} + \alpha_{m-1}\beta_0^{(m-1)} + \ldots + \alpha_1\beta'_0 + \alpha_0\beta_0.\end{aligned}$$

Il prodotto di due forme differenziali lineari degli ordini m, n rispettivamente è dunque una forma di ordine $m+n$. Il coefficiente del termine di ordine $m+n$ è il prodotto dei coefficienti dei termini di massimo ordine in F e in G; l'ordine di FG non può dunque abbassarsi se α_m e β_n sono differenti da zero. Il termine di ordine zero è $F(\beta_0)$.

È manifesto che i due prodotti FG e GF sono, in generale, distinti.

320. Date le due forme differenziali lineari F e G del § precedente, sia $m \geq n$. S i p u ò s e m p r e d e t e r m i n a r e, i n m o d o u n i c o, u n a f o r m a H t a l e c h e l a f o r m a F — H G s i a d e l l' o r d i n e $n - 1$ a l p i ù.

Notiamo intanto che dalle osservazioni del § precedente discende subito che la forma H deve essere di ordine $m - n$. Si ponga ora

$$H = \gamma_{m-n} D^{m-n} + \gamma_{m-n-1} D^{m-n-1} + \ldots + \gamma_1 D + \gamma_0 D^0,$$

dove le funzioni $\gamma_{m-n}, \gamma_{m-n-1}, \ldots, \gamma_1, \gamma_0$ sono da determinarsi. Troviamo agevolmente, dalla (2):

$$\begin{aligned}F - HG = {} & (\alpha_m - \beta_n\gamma_{m-n})D^m + \\ & + \left(\alpha_{m-1} - \left(\binom{m-n}{1}\beta'_n + \beta_{n-1}\right)\gamma_{m-n} - \beta_n\gamma_{m-n-1}\right)D^{m-1} + \\ & + \left\{\alpha_{m-2} - \left(\binom{m-n}{2}\beta''_n + \binom{m-n}{1}\beta'_{n-1} + \beta_{n-2}\right)\gamma_{m-n} - \right. \\ & \left. - \left(\binom{m-n-1}{1}\beta'_n + \beta_{n-1}\right)\gamma_{m-n-1} - \beta_n\gamma_{m-n-2}\right\} D^{m-2} + \ldots\end{aligned}$$

Volendo che la forma F — HG si riduca all'ordine $n-1$, è necessario e sufficiente che siano identicamente nulli in essa i coefficienti di $D^m, D^{m-1}, D^{m-2}, \ldots, D^n$; scrivendo che queste condizioni sono soddisfatte, otterremo tra le $m-n+1$ funzioni γ_i il sistema delle $m-n+1$ relazioni

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} & \beta_n\gamma_{m-n} = \alpha_m, \\ & \left(\binom{m-n}{1}\beta'_n + \beta_{n-1}\right)\gamma_{m-n} + \beta_n\gamma_{m-n-1} = \alpha_{m-1}, \\ & \left(\binom{m-n}{2}\beta''_n + \binom{m-n}{1}\beta'_{n-1} + \beta_{n-2}\right)\gamma_{m-n} + \\ & \qquad + \left(\binom{m-n-1}{1}\beta'_n + \beta_{n-1}\right)\gamma_{m-n-1} + \beta_n\gamma_{m-n-2} = \alpha_{m-2}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Rispetto alle incognite $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{m-n}$ queste equazioni sono lineari non omogenee; il determinante dei coefficienti è dato da β_n^{m-n+1}, e quindi non è identicamente nullo, se, come abbiamo supposto, la forma G è di ordine n. Talchè è possibile sempre, e in modo unico, di determinare le $m-n+1$ funzioni $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{m-n}$.

Indicando con R la forma $F - HG$, avremo

$$F = HG + R.$$

L'operazione, compendiata nella risoluzione del sistema (3), con cui si determina la H, si dirà *divisione* di F per G; la forma H si dirà *quoziente* e la R *resto* della divisione.

Dal sistema (1) si ottengono le funzioni γ_i, espresse razionalmente per mezzo delle α_i, delle β_i e delle derivate di queste ultime fino all'ordine $m - n$; anzi il denominatore comune di tutte queste espressioni è precisamente β_n^{m-n+1}. Dal fatto che la funzione β_n è regolare nel punto $x = x_0$, non rimane escluso che la reciproca $\frac{1}{\beta_n}$ non possa avere in quel punto una singolarità polare, talchè dal fatto che i coefficienti delle due forme F e G appartengono allo spazio $\mathfrak{S}^0(x_0)$, non si può in generale concludere che allo stesso spazio appartengano anche i coefficienti del quoziente H di F per G. Appartengono per altro in ogni caso ad $\mathfrak{S}^0(x_0)$ i coefficienti di H, moltiplicati per β_n^{m-n+1}. È poi evidente che appartengono sempre ad $\mathfrak{S}^0(x_0)$ i coefficienti del resto R.

321. Può accadere che la forma $F - HG = R$ abbia tutti i suoi coefficienti identicamente nulli: in tal caso si ha

$$F = HG$$

e si dice che la forma F è *divisibile* per la forma G, od anche che G divide F; H si dice allora il quoziente esatto di F per G.

a) Se la forma F è divisibile per la forma G e G è divisibile per K, anche F sarà divisibile per K.

b) Se due forme F_1, F_2 sono divisibili per G, sono tali anche la loro somma e la loro differenza.

c) Se le forme F_1 e F_2 sono divisibili rispettivamente per G_1 e G_2 e danno il medesimo quoziente esatto, la somma (differenza) delle prime è divisibile per la somma (differenza) delle seconde.

Dalle osservazioni precedenti discende che per trovare la forma di massimo ordine che divide due forme date, basta applicare un procedimento analogo all'algoritmo di EUCLIDE per la ricerca del massimo comun divisore di due numeri. Se codesto procedimento conduce ad una ultima forma di ordine maggiore di zero, questa si dirà massimo comun divisore delle due forme date. Se invece esso conduce ad una ultima forma di ordine zero, cioè ad una operazione di moltiplicazione, le due forme date si diranno prime fra loro (cfr. §§ 270, 271).

322. È particolarmente notevole il caso in cui si divide una forma d'ordine n

$$F = \alpha_n D^n + \alpha_{n-1} D^{n-1} + \ldots + \alpha_1 D + \alpha_0$$

per una forma del primo ordine

$$E = D - \beta.$$

Per determinare il quoziente H, che sarà in questo caso dell'ordine $n - 1$, poniamo

$$H = \sum_0^{n-1} \gamma_i D^i.$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} F - HE = {} & (\alpha_n - \gamma_{n-1})D^n + (\alpha_{n-1} - \gamma_{n-2} + \gamma_{n-1}\beta)D^{n-1} + \\ & \left(\alpha_{n-2} - \gamma_{n-3} + \gamma_{n-2}\beta + \binom{n-1}{1}\gamma_{n-1}\beta'\right)D^{n-2} + \ldots \\ & \ldots + \left(\alpha_1 - \gamma_0 + \binom{n-1}{n-2}\gamma_{n-1}\beta^{(n-2)} + \binom{n-2}{n-3}\gamma_{n-2}\beta^{(n-3)} + \ldots + \gamma_1\beta\right)D + \\ & + (\alpha_0 + \gamma_{n-1}\beta^{(n-1)} + \gamma_{n-2}\beta^{(n-2)} + \ldots + \gamma_1\beta' + \gamma_0\beta). \end{aligned}$$

Affinchè la forma F — HE sia di ordine zero, è necessario e sufficiente che si abbia

$$\begin{cases} \alpha_n = \gamma_{n-1} \\ \alpha_{n-1} = \gamma_{n-2} - \gamma_{n-1}\beta \\ \alpha_{n-2} = \gamma_{n-3} - \gamma_{n-2}\beta - \binom{n-1}{1}\gamma_{n-1}\beta' \\ \alpha_{n-3} = \gamma_{n-4} - \gamma_{n-3}\beta - \binom{n-2}{1}\gamma_{n-2}\beta' - \binom{n-1}{2}\gamma_{n-1}\beta'' \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1 = \gamma_0 - \gamma_1\beta - \binom{2}{1}\gamma_2\beta' - \binom{3}{2}\gamma_3\beta'' - \dots - \binom{n-1}{n-2}\gamma_{n-1}\beta^{(n-2)} \end{cases}$$

Da queste relazioni deduciamo immediatamente per le funzioni γ le seguenti espressioni:

$$(4)\quad \begin{cases} \gamma_{n-1} = \alpha_n \\ \gamma_{n-2} = \alpha_n\beta + \alpha_{n-1} \\ \gamma_{n-3} = (\alpha_n\beta + \alpha_{n-1})\beta + \binom{n-1}{1}\alpha_n\beta' + \alpha_{n-2} \\ \gamma_{n-4} = \left((\alpha_n\beta + \alpha_{n-1})\beta + \binom{n-1}{1}\alpha_n\beta' + \alpha_{n-2}\right)\beta + \\ \qquad + \binom{n-2}{1}(\alpha_n\beta + \alpha_{n-1})\beta' + \alpha_n\binom{n-1}{2}\beta'' + \alpha_{n-3}. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

La regola di formazione è palese: nel quoziente di F per E il coefficiente di D^{n-1} è uguale al coefficiente di D^n in F: il coefficiente di D^i si ottiene aggiungendo al coefficiente di D^i in F il coefficiente già determinato di D^{i+1}, moltiplicato per β, il coefficiente di D^{i+2} moltiplicato per $\binom{i+2}{1}\beta'$, il coefficiente di D^{i+3} multiplicato per $\binom{i+3}{2}\beta''$, ..., il coefficiente di D^{n-1} moltiplicato per $\binom{n-i-2}{n-1}\beta^{(n-i-2)}$.

Si confronti questa regola con la regola analoga (regola di RUFFINI generalizzata) al § 272.

B. LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI. (1)

323. Data una forma differenziale lineare F, una radice φ di F dicesi *integrale* o *soluzione della equazione differenziale lineare omogenea*

$$F = o.$$

Vogliamo stabilire l' esistenza di radici per ogni forma differenziale lineare. A questo scopo sarà opportuno di trattare dapprima due casi particolari, e anzitutto ci occuperemo delle forme differenziali lineari a coefficienti numerici.

Lo spazio delle radici di una forma differenziale lineare a coefficienti numerici

$$(5)\qquad F = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_o$$

è già stato determinato al § 179; ivi si è trovato che se l'equazione caratteristica di F

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_o = o$$

ammette le radici distinte

$$z_1,\ z_2, \dots,\ z_s$$

degli ordini di moltiplicità rispettivi

$$r_1, r_2, \dots, r_s, \quad (r_1 + r_2 + \dots + r_s = n),$$

in guisa che si abbia, posto $E_{z_i} = D - z_i$,

$$F = E_{z_1}^{r_1} E_{z_n}^{r_2} \dots E_{z_s}^{r_s};$$

lo spazio di *tutte* le radici di F ammetterà come sistema fondamentale le n funzioni:

$$e^{z_i x},\quad x e^{z_i x}, \dots,\quad x^{r_i - 1} e^{z_i x} \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

(1) V. FUCHS, J. de Crelle, T. LXVI; SCHLESINGER, op. cit., Bd. I, Absch. I e II.

Perciò una radice generica di F sarà data da

$$(6)\qquad \sum_{1}^{s}(c_{i\,0}+c_{i\cdot 1}x+c_{i\cdot 2}x^2+\ldots+c_{i\cdot r_i-1}x^{r_i-1})e^{z_i x},$$

dove le c rappresentano n costanti numeriche arbitrarie.

Codesta espressione, in quanto al variare delle costanti arbitrarie dà tutte le radici di F, è *la soluzione* (o *l'integrale*) generale dell'equazione differenziale lineare (5) a coefficienti numerici.

324. Passiamo ora a considerare un secondo tipo speciale di forme differenziali lineari, cioè le forme

$$(7)\quad G=(1-x)^nD^n-a_1(1-x)^{n-1}D^{n-1}-a_2(1-x)^{n-2}D^{n-2}- \ldots-a_{n-1}(1-x)D-a_n,$$

dove $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono costanti numeriche.

Al § 121 abbiamo indicato, in via di esempio, le proprietà della sostituzione S_μ corrispondente alla funzione $\mu=1-e^x$; essa è tale che per ogni intero positivo r si ha

$$SD^r=e^{-rx}\,F_rS,$$

dove F_r rappresenta una determinata forma differenziale lineare a coefficienti numerici, ottenibile mediante una legge ricorrente di formazione che è stata indicata al detto §: qui torna inutile il rammentarla.

Eseguendo il prodotto di G per S otteniamo, poichè le sostituzioni (§ 118) sono distributive non solo rispetto alla somma, ma anche rispetto al prodotto.

$$SG=S\left(\overline{1-x}^{\,n}\right)SD^n-a_1S\left(\overline{1-x}^{\,n-1}\right)SD^{n-1}- \ldots-a_{n-1}S(1-x)SD-a_nS= =F_nS-a_1F_{n-1}S-\ldots-a_{n-1}F_1S-a_nS;$$

onde rappresentando con G_1 la forma differenziale lineare d'ordine n a coefficienti numerici

$$F_n-a_1F_{n-1}-\ldots-a_{n-1}F_1-a_n,$$

possiamo scrivere

$$(8)\qquad SG=G_1S$$

e quindi

$$SGS^{-1}=G_1.$$

Se è allora ω una radice di G_1, essa sarà anche radice del prodotto SGS^{-1}: ma perchè nessuna delle operazioni S, G, S^{-1}, è identicamente nulla, non può essere

$$SGS^{-1}(\omega)=o$$

senza che si verifichi uno dei tre casi seguenti: o ω è radice di S^{-1}, o $S^{-1}(\omega)$ è radice di G, o $GS^{-1}(\omega)$ è radice di S. Ma poichè le operazioni di sostituzione non ammettono radici, concludiamo che la forma G ammette come radice la funzione $S^{-1}(\omega)$, se ω rappresenta una qualsivoglia radice della forma a coefficienti numerici G_1.

Reciprocamente, poichè dalla (8) discende

$$G=S^{-1}G_1S,$$

abbiamo che se ψ è radice di G, $S(\psi)$ è radice di G_1.

Ne risulta che tutte e sole le radici di G si ottengono eseguendo l'operazione S^{-1} sullo spazio delle radici di G_1.

Ma G_1 essendo a coefficienti numerici, sappiamo assegnare l'intero spazio delle sue radici (§ prec.). Siano $z_1, z_2, \ldots, z_s$ le radici distinte dell'equazione caratteristica di G_1, degli ordini di moltiplicità $r_1, r_2, \ldots, r_s$ rispettivamente. L'elemento generico dello $\mathfrak{S}_n$ delle radici di G_1 è dato da

$$\omega=\sum_{1}^{s}(c_{i0}+c_{i1}x+\ldots+c_{i\cdot r_i-1}x^{r_i-1})e^{z_i x},$$

dove le c rappresentano n costanti arbitrarie; onde lo spazio delle radici di G si otterrà assegnando tutti i possibili valori arbitrari alle costanti c nella espressione

$$S^{-1}\omega = \sum_1^s (c_{i0} + c_{i1}\,log\,(1-x) + c_{i2}\,log^2\,(1-x) + \\ + \dots + c_{ir_i-1}\,log^{r_i-1}(1-x))\,(1-x)^{\varepsilon_i}.$$

Notiamo che tutte codeste funzioni ammettono il solo punto singolare $x = 1$; esse sono quindi regolari entro il cerchio di centro $x = o$ e di raggio 1.

325. Passiamo ora al caso generale, e consideriamo una forma differenziale lineare qualsivoglia, d'ordine n,

$$F = D^n - \alpha_{n-1}D^{n-1} - \alpha_{n-2}D^{n-2} - \dots - \alpha_1 D - \alpha_0,$$

nella quale il coefficiente di D^n sia ridotto all'unità e gli altri $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \dots, \alpha_0$ siano funzioni analitiche regolari nell'intorno del punto $x = x_0$.

Per fissare le idee, supporremo che i coefficienti α_{n-1}, $\alpha_{n-2}, \dots, \alpha_0$ appartengano allo spazio $\mathfrak{S}^r(x_0)$. Indicando allora secondo l'uso con $\alpha_i^{(m)}$ la m^{ma} derivata di α_i e con $(\alpha_i^{(m)})_0$ il valore che essa assume nel punto $x = x_0$ avremo che gli elementi

$$\sum_0^\infty \frac{(\alpha_i^{(m)})_0}{m!}\,(x-x_0)^m$$

convergono nel cerchio di centro $x = x_0$ e di raggio r.

Per un noto teorema sulle serie di potenze, se indichiamo con r_1 un qualsivoglia numero positivo maggiore di r e minore del raggio di convergenza di ciascuno dei coefficienti α_i, e con m_i il massimo valore di $|\alpha_i|$ entro il cerchio di centro x_0 e di raggio r_1, la circonferenza compresa, avremo

$$(9) \qquad \left|(\alpha_i^{(m)})_0\right| < \frac{m_i}{r_1^m}\,m!.$$

Accanto alla funzione α_i consideriamo le

$$\beta_i(x) = \frac{m_i}{\left(1-\frac{x-x_0}{r_1}\right)^{n-i}} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n);$$

ciascuna di queste si può sviluppare in serie di potenze di $x - x_0$ e si ottiene

$$\beta_i(x) = m_i \sum_{m=0}^\infty \frac{(n-i)(n-i+1)\dots(n-i+m-1)}{m!}\left(\frac{x-x_0}{r_1}\right)^m.$$

Risulta di qui

$$\left(\frac{d^m\beta_i}{dx^m}\right)_0 = m_i\,\frac{(n-i)(n-i+1)\dots(n-i+m-1)}{r_1^m}.$$

Avendosi

$$(n-i+1)(n-i+2)\dots(n-i+m-1) \geq m!$$

sarà per la (9),

$$(10) \qquad \left|\frac{d^m\alpha_i}{dx^m}\right|_0 < \left(\frac{d^m\beta_i}{dx^m}\right)_0 \quad \begin{matrix}(i = o, 1, 2, \dots, n-1)\\ (m = 1, 2, \dots)\end{matrix}$$

Ciò premesso, consideriamo accanto alla F la forma

$$(11) \qquad D^n - \beta_{n-1}D^{n-1} - \beta_{n-2}D^{n-2} - \dots - \beta_1 D - \beta_0 D^0,$$

la quale è evidentemente del tipo considerato al § 324; essa ammette pertanto uno spazio di radici ad n dimensioni, costituito di tutte funzioni analitiche regolari nell'intorno del punto $\frac{x-x_0}{r_1} = o$, cioè del punto $x = x_0$: più precisamente, ciascuna di codeste funzioni è sviluppabile in una serie di potenze di $x - x_0$, convergente nel cerchio definito dalla disuguaglianza

$$\left|\frac{x-x_0}{r_1}\right| < 1,$$

cioè nel cerchio di centro $x=x_0$ e di raggio r_1: ne risulta che le funzioni indicate appartengono ad $S^r(x_0)$.

Se ψ è una determinata radice della forma (11), il suo sviluppo nell'intorno del punto $x=x_0$ sarà dato da:

$$\psi=\sum_{m=0}^{\infty}\psi_0^{(m)}\,\frac{(x-x_0)^m}{m!}$$

e questo sviluppo sarà noto quando si conoscano i valori per $x=x_0$ delle successive derivate di ψ. Se fissiamo ad arbitrio i valori $\psi_0, \psi'_0, \ldots \psi_0^{(n-1)}$, gli altri coefficienti saranno determinati in modo ricorrente dalle equazioni lineari che si ottengono ponendo $x=x_0$ nella equazione

$$(12)\qquad \psi^{(n)}=\beta_{n-1}\psi^{(n-1)}-\beta_{n-2}\psi^{(n-2)}-\ldots.-\beta_1\psi'-\beta_0\psi=o$$

e in quelle che da questa si deducono applicando successivamente ad ambo i membri di essa le operazioni $D, D^2, D^3, \ldots$

Notiamo che le operazioni necessarie a questo procedimento sono, oltre le successive derivazioni applicate alla (12), semplici operazioni razionali. Di più, per $x=x_0$ le funzioni β_i e tutte le loro derivate sono reali e positive. Ne risulta che se sceglieremo reali e positivi i valori arbitrari ψ_0, $\psi'_0, \ldots, \psi_0^{(n-1)}$, tali ancora saranno tutti i coefficienti dello sviluppo di ψ, relativo al punto $x=x_0$, e, più in generale, i valori di ψ corrispondenti ai valori di x, appartenenti al cerchio di centro $x=x_0$ e raggio r_1, e tali che $x-x_0$ sia reale e positivo.

Riprendendo la forma F, applichiamo alla corrispondente equazione

$$(13)\qquad \varphi^{(n)}-\alpha_{n-1}\varphi^{(n-1)}-\alpha_{n-2}\varphi^{(n-2)}-\ldots.-\alpha_1\varphi'-\alpha_0\varphi=o$$

il processo ricorrente che dianzi applicammo alla (11). Fissati ad arbitrio i coefficienti

$$\varphi_0,\quad \varphi_0',\quad \ldots,\quad \varphi_0^{(n-1)},$$

otterremo una determinata serie di potenze

$$(14)\qquad \sum_{m=0}^{\infty}\varphi_0^{(m)}\frac{(x-x_0)^m}{m!}$$

la quale *soddisfarà formalmente alla* (13).

In altre parole, si formino le $n+1$ serie che si ottengono dalla (14), applicando ad essa, termine a termine, le operazioni D^i, $(i=o, 1, 2, \ldots, n)$, e si sostituiscano nel primo membro della (12) al posto di $\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots, \varphi^{(n)}$ rispettivamente. Se di ciascuna delle α_i si considera lo sviluppo relativo al punto $x=x_0$, l'espressione che così si ottiene si potrà ordinare in una serie di potenze di $x-x_0$

$$\sum_{0}^{\infty}c_m(x-x)^m,$$

il cui coefficiente c_m si paleserà identicamente nullo. Questo è quanto si intende dire affermando che la serie (14) *soddisfa formalmente alla equazione* (13),

Ma importa inoltre di mostrare come lo sviluppo determinato dianzi abbia un s i g n i f i c a t o e f f e t t i v o, in quanto la serie (14) appartiene ad $S^r(x_0)$. Perciò, cominciamo col supporre che le costanti arbitrarie $\varphi_0, \varphi_0', \ldots, \varphi_0^{(n-1)}$ rendano soddisfatte le disuguaglianze

$$(15)\qquad |\varphi_0|<\psi_0.\ |\varphi'_0|<\psi'_0, \ldots, |\varphi_0^{(n-1)}|<\psi_0^{(n-1)},$$

e notiamo subito che in questa guisa l'arbitrarietà di φ_0, $\varphi'_0, \ldots, \varphi_0^{(n-1)}$ non resta in alcun modo limitata: giacchè le costanti $\psi_0.\ \psi_0', \ldots, \psi_0^{(n-1)}$ sono, nel campo dei numeri reali e positivi, assolutamente arbitrarie. I successivi coefficienti della serie (14) saranno formati mediante le medesime operazioni di somma e moltiplicazione, con cui si sono formati gli omologhi coefficienti dello sviluppo di ψ, con la sola differenza che per la serie (14), al posto delle costanti arbitrarie $\psi_0, \psi'_0, \ldots, \psi_0^{(n-1)}$ compariranno le costanti $\varphi_0, \varphi'_0, \ldots, \varphi_0^{(n-1)}$ soddisfacenti alle disuguaglianze (15), e che al posto dei coefficienti di ciascuna β_i compariranno i coefficienti omologhi della corrispondente α_i soddisfacenti alle disuguaglianze (10).

Ma per un notissimo principio d'Algebra il risultato di un sistema di somme e moltiplicazioni, eseguite sopra i moduli di certi dati numeri complessi, è maggiore o almeno uguale al modulo del risultato dello stesso sistema di operazioni, eseguite sui numeri complessi medesimi. Ne risulta che ciascun coefficiente della serie (14) è, in modulo, minore del corrispondente coefficiente dello sviluppo di ψ, relativo al punto $x = x_0$: il che basta a concludere che la serie (14) converge nel cerchio di centro $x = x_0$ e di raggio $r_1 > r$ e perciò definisce una funzione analitica, appartenente allo spazio $\mathcal{S}^r(x_0)$.

326. Nei §§ prec., presa a considerare una forma F di ordine n, i cui coefficienti appartengano ad $\mathcal{S}^r(x_0)$, abbiamo dimostrato che esiste in $\mathcal{S}^r(x_0)$ una radice di F, la quale assume nel punto $x = x_0$, insieme con le prime $n-1$ sue derivate, valori arbitrarii prefissati. Variando codeste n costanti arbitrarie otterremo tutto uno spazio di radici di F, il quale, poichè F è un'operazione distributiva, sarà necessariamente lineare.

Qui vogliamo dimostrare che codesto spazio è precisamente ad n dimensioni e che al di fuori di esso la F non può ammettere nessuna radice. A tale scopo è necessario che premettiamo il seguente teorema: [1]

Condizione necessaria e sufficiente affinchè

[1] A questo teorema sono state poste dal PEANO (R. c. della R. Acad. dei Lincei, 1897) limitazioni, le quali non hanno però influenza nel nostro caso, in cui $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sono funzioni analitiche.

fra n funzioni analitiche $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, regolari nell'intorno di $x = x_0$, passi una relazione lineare, omogenea, a coefficienti numerici, è che sia identicamente nullo il determinante

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \cdots\cdots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' \cdots\cdots & \varphi_n' \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' \cdots\cdots & \varphi_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Questo determinante si dice *Wronskiano* delle funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, e noi lo indicheremo con $W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$.

a) La condizione enunciata è necessaria.

Se, infatti, si ha identicamente

$$a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \ldots + a_n\varphi_n = o,$$

sarà anche

$$a_1\varphi_1^{(i)} + a_2\varphi_2^{(i)} + \ldots + a_n\varphi_n^{(i)} = o, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1);$$

ora queste $n-1$ relazioni non possono coesistere con la precedente se non è identicamente

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = o.$$

b) La condizione è sufficiente.

Infatti l'annullarsi identico del Wronskiano porta di conseguenza che esistano n funzioni analitiche, regolari nell'intorno di $x = x_0$, $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$, per le quali è

$$(16)\quad \begin{cases} \rho_1\varphi_1 + \rho_2\varphi_2 + \cdots\cdots + \rho_n\varphi_n = o \\ \rho_1\varphi_1' + \rho_2\varphi_n' + \cdots\cdots + \rho_n\varphi_n' = o \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \rho_1\varphi_1^{(n-1)} + \rho_2\varphi_2^{(n-1)} + \ldots + \rho_n\varphi_n^{(n-1)} = o \end{cases}$$

Rimane a dimostrare che all'infuori, al più, di un fattore comune, le ρ_i sono costanti.

Derivando le (16) e riducendo, otteniamo

$$(16')\quad\begin{cases} \rho_1'\varphi_1 + \rho_2'\varphi_2 + \dots\dots\dots + \rho'_n\varphi_n = o \\ \rho_1'\varphi_1' + \rho_2'\varphi'_2 + \dots\dots\dots + \rho_n'\varphi_n' = o \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \rho_1'\varphi_1^{(n-2)} + \rho_2'\varphi_2^{(n-2)} + \dots + \rho'_n\varphi_n^{(n-2)} = o \end{cases}$$

Ora osserviamo che i minori d'ordine $n-1$ del Wronskiano (supposto uguale a zero) si possono supporre non tutti nulli; giacchè in caso contrario saremmo ricondotti a dimostrare il nostro teorema pel caso di $n-1$. Allora dal confronto delle (16) e delle (16') risulta

$$\frac{\rho_1'}{\rho_1} = \frac{\rho'_2}{\rho_1} = \dots = \frac{\rho'_n}{\rho_n} = \sigma(x),$$

e quindi

$$\rho_i = c_i e^{D^{-1}\sigma(x)}$$

dove le c_i rappresentano altrettante costanti. Siccome $e^{D^{-1}\sigma(x)}$ è diverso da zero, dividendo per codesto fattore ambo i membri della prima delle (9) otteniamo la relazione

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_n\varphi_n = o,$$

che dimostra il teorema.

327. Riprendiamo la forma differenziale lineare del § 325. Abbiamo dimostrato che ad ogni sistema di valori assegnati arbitrariamente per $\varphi_o, \varphi_o', \dots, \varphi_o^{(n-1)}$ corrisponde una determinata radice di F. Ora scegliamo n sistemi di costanti numeriche arbitrarie

$$\begin{array}{ccccc} \varphi_{1\cdot o} & \varphi'_{1\cdot o} & \varphi''_{1\cdot o} & \dots & \varphi^{(n-1)}_{1\cdot o} \\ \varphi_{2\cdot o} & \varphi'_{2\cdot o} & \varphi''_{2\cdot o} & \dots & \varphi^{(n-1)}_{2\cdot o} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n\cdot o} & \varphi'_{n\cdot o} & \varphi''_{n\cdot o} & \dots & \varphi^{(n-1)}_{n\cdot o} \end{array}$$

tali che il determinante relativo, che diremo W_o, sia diverso

da zero. Se allora consideriamo le n radici di F, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, tali che φ_i e le sue prime $n-1$ derivate assumano nel punto $x = x_o$, rispettivamente i valori $\varphi_{i\cdot o}, \varphi'_{i\cdot o}, \dots, \varphi^{(n-1)}_{i\cdot o}$, avremo che il $W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, come funzione razionale intera delle funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ appartenenti ad $S^r(x_o)$, appartiene esso stesso ad $S^r(x_o)$ e che nel punto $x = x_o$ esso si riduce al determinante W_o, il quale è per ipotesi diverso da zero. Ne concludiamo che $W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, nell'intorno del punto $x = x_o$ e, quindi, nell'intero suo campo di validità, non è identicamente nullo, e che pertanto (§ prec.), le radici $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ di F sono linearmente indipendenti.

328. Fuori dello $S_n[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n]$ la forma F non può ammettere alcuna radice. Sia infatti φ_{n+1} una $n+1^{ma}$ radice di F, appartenente ad $S^{(r)}(x_o)$. Sussisteranno allora le $n+1$ relazioni

$$\alpha_n\varphi_i^{(n)} + \alpha_{n-1}\varphi_i^{(n-1)} + \dots + \alpha_1\varphi'_i + \alpha_o\varphi_i = o$$
$$(i = 1, 2, \dots, n+1).$$

Poichè, per ipotesi, le funzioni $\alpha_o, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ non sono identicamente nulle, avremo, per un noto teorema sui sistemi di equazioni lineari omogenee, che nell'intorno di $x = x_o$ sarà identicamente nullo il determinante dei coefficienti $W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n+1})$. Ne discende che le funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n+1}$ sono linearmente dipendenti, o, in altri termini, che φ_{n+1} appartiene ad $S_n[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n]$.

I risultati ottenuti in questo e nei precedenti §§, si possono riassumere nel seguente enunciato:

Una forma differenziale lineare, di cui il primo coefficiente è uguale all'unità, mentre gli altri sono elementi qualsivogliano di $S^r(x_o)$, ammette, come spazio di radici, tutto e solo uno spazio lineare ad n dimensioni, contenuto in $S^r(x_o)$.

Ogni sistema fondamentale di $\mathcal{S}^r(x_0)$ si dirà senz'altro *sistema fondamentale di radici* della forma o di *integrali* della equazione (13).

329. Dal § prec. si conchiude che se una forma differenziale lineare di ordine non superiore ad n ammette $n+1$ radici linearmente indipendenti, i suoi coefficienti sono tutti identicamente nulli.

330. Il teorema del § 328 si può, in un certo senso, invertire. Ogni $\mathcal{S}_n$ di funzioni appartenenti ad $\mathcal{S}^r(x_0)$ è lo spazio delle radici di una forma differenziale lineare di ordine n, i cui coefficienti appartengono ad $\mathcal{S}^r(x_0)$.

Se, infatti, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ è un sistema fondamentale dello $\mathcal{S}_n$ prefissato, consideriamo, indicando con φ la funzione arbitraria, il determinante

$$\begin{vmatrix} D^n\varphi & D^{n-1}\varphi & \ldots & D\varphi & \varphi \\ \varphi_1^{(n)} & \varphi_1^{(n-1)} & \ldots & \varphi'_1 & \varphi_1 \\ \varphi_2^{(n)} & \varphi_2^{(n-1)} & \ldots & \varphi'_2 & \varphi_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_n^{(n)} & \varphi_n^{(n-1)} & \ldots & \varphi'_n & \varphi_n \end{vmatrix}$$

Sviluppando questo determinante rispetto agli elementi della prima linea, otteniamo una forma differenziale lineare d'ordine n

$$F(\varphi) = \alpha_n D^n\varphi + \alpha_{n-1}D^{n-1}\varphi + \ldots + \alpha_1 D\varphi + \alpha_0\varphi,$$

dove è

$$\alpha_n = W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$$

ed

$$\alpha_i = (-1)^{n-i} \begin{vmatrix} \varphi_1^{(n)} \ldots \varphi_1^{(i+1)} & \varphi_1^{(i-1)} \ldots \varphi_1 \\ \varphi_2^{(n)} \ldots \varphi_2^{(i+1)} & \varphi_2^{(i-1)} \ldots \varphi_2 \\ \ldots & \ldots \\ \varphi_n^{(n)} \ldots \varphi_n^{(i+1)} & \varphi_n^{(i-1)} \ldots \varphi_n \end{vmatrix};$$

il determinante, analogo al Wronskiano, che compare in quest'ultima formola, sarà da noi rappresentato dalla notazione $W_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$.

Ora è chiaro dapprima che $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sono funzioni appartenenti ad $\mathcal{S}^r(x_0)$, ed oltre a ciò, che la forma differenziale lineare F ammette come radici tutte e sole le funzioni di $\mathcal{S}_n[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n]$.

331. Se $\mu(x)$ è una funzione qualsivoglia, anche μF è una forma differenziale lineare di ordine n, che ammette il medesimo spazio di radici $\mathcal{S}_n[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n]$. È facile vedere che dando a μ tutte le possibili determinazioni, si ottengono tutte le forme d'ordine n che ammettono il dato $\mathcal{S}_n$ di radici. Si ha infatti, come per le forme lineari alle differenze (§ 283) e con dimostrazione analoga, che condizione necessaria e sufficiente affinchè una forma differenziale lineare sia divisibile per un'altra, di ordine non superiore, si è che lo spazio delle radici della prima contenga lo spazio delle radici della seconda. Da ciò risulta che ogni forma G il cui spazio delle radici contenga $\mathcal{S}_n[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n]$, è divisibile per F; se, in particolare, G è di ordine n, il quoziente sarà una forma di ordine zero, cioè, appunto, un'operazione di moltiplicazione.

È quindi univocamente determinata la forma di ordine n che ammette il dato $\mathcal{S}_n[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n]$ come spazio di radici ed ha per coefficiente della massima potenza di D una funzione prefissata $\alpha(x)$: codesta forma è data da μF, dove sia preso

$$\mu = \frac{\alpha}{W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)},$$

ossia, indicando al solito con φ la funzione arbitraria, da

$$\frac{W(\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}.$$

Così in particolare la forma di primo ordine che ammette per radice φ_1 e ha per coefficiente di D la unità è data da

$$E = D - \frac{\varphi'_1}{\varphi_1}.$$

Notiamo che si ha

$$E(\varphi) = \varphi_1 \frac{\varphi_1 D\varphi - \varphi'_1\varphi}{\varphi^2_1} = \varphi_1 D\frac{\varphi}{\varphi_1}.$$

332. Poichè le forme d'ordine n che ammettono come spazio di radici $\mathcal{S}_n[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n]$ non differiscono che per un moltiplicatore a sinistra, se

$$\beta_n D^n + \beta_{n-1}D^{n-1} + \ldots + \beta_1 D + \beta_0$$

è una forma siffatta qualsivoglia, avremo

$$\frac{\beta_i}{\beta_n} = \frac{\alpha_i}{\alpha_n} = (-1)^{n-i}\frac{W_i(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}$$

e in particolare

$$\frac{\beta_{n-1}}{\beta_n} = -\frac{W_{n-1}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}.$$

Ma si ha immediatamente, dalla regola per la derivazione dei determinanti, che

$$DW(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = W_{n-1}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n),$$

onde si deduce, essendo c una costante, che

$$W = ce^{-D^{-1}\frac{\beta_{n-1}}{\beta_n}}.$$

Da questa espressione di W (formula di LIOUVILLE) risulta che dappertutto dove $\beta_{n-1} : \beta_n$ è regolare, il Wronskiano è differente da zero.

333. Passiamo ad esporre un metodo, diverso da quello dato nei §§ precedenti, per costruire lo spazio delle radici di una forma differenziale lineare F.

Sia, all'uopo, φ_0 una radice di F, ed essendo ψ una funzione arbitraria, sviluppiamo $F(\varphi_0\psi)$ colla formola di D'ALEMBERT (§ 152). Essendo nulla la $F(\varphi_0)$, avremo:

$$F(\varphi_0\psi) = F'(\varphi_0)D\psi + \frac{1}{1.2}F''(\varphi_0)D^2\psi + \ldots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(\varphi_0)D^n\psi =$$
$$= \left(F'(\varphi_0) + \frac{1}{2}F''(\varphi_0)D + \ldots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(\varphi_0)D^{n-1}\right)D\psi = F_1 D\psi,$$

dove F_1 è una nuova forma differenziale lineare d'ordine $n-1$, i cui coefficienti

$$F'(\varphi_0),\ \frac{F''(\varphi_0)}{2!},\ \ldots,\ \frac{F^{(n)}(\varphi_0)}{n!}$$

sono funzioni note, regolari nell'intorno di ogni punto $x = x_0$, in cui sono regolari i coefficienti della F.

Nell'intorno di un siffatto punto $x = x_0$, sappiamo determinare una funzione ψ_1, radice della forma F_1. È chiaro allora che la funzione $D^{-1}\psi_1$ sarà radice della forma FM_{φ_0}: ne discende che $\varphi_0 D^{-1}\psi_1$ sarà una nuova radice di F.

Ora, conoscendo la radice ψ_1 di F_1, potremo operare su F_1 come abbiamo operato su F; la forma F_1, nell'intorno della funzione ψ_1, si può rappresentare come prodotto della D per una determinata forma F_2 d'ordine $n-2$, a coefficienti regolari nell'intorno del punto $x = x_0$: sarà cioè, indicando ancora con ψ la funzione arbitraria,

$$F_1(\psi_1\psi) = F_2 D\psi.$$

Se ψ_2 rappresenta una radice di F_2 la funzione

$$\psi_1 D^{-1}\psi_2$$

sarà radice di F_1, e quindi la funzione

$$\varphi_0 D^{-1}\psi_1 D^{-1}\psi_2$$

sarà radice di F.

Così possiamo continuare ancora, se $n > 2$, determinando successivamente un sistema di forme $F_3, F_4, \ldots, F_{n-1}$, degli ordini $n-3$, $n-4, \ldots, 1$ rispettivamente, tali che se ψ_i è una radice determinata della forma F_i, la funzione

$$\varphi_0 D^{-1}\psi_1 D^{-1}\psi_2 \ldots D^{-1}\psi_i$$
$$(i = 1, 2, \ldots n-1)$$

sarà radice della forma F.

Nell'intorno di ψ_{n-1} la forma F_{n-1} del primo ordine si potrà esprimere come prodotto di D per una forma di ordine zero, cioè per una operazione di moltiplicazione. Ora, come si sa, le moltiplicazioni non ammettono radici: perciò il procedimento a questo punto si arresta.

Poniamo

$$\varphi_0 D^{-1}\psi_1 D^{-1}\psi_2 \ldots D^{-n}\psi_{n-1} = \varphi_i \quad (i = 1, 2, \ldots n-1). \tag{17}$$

È facile verificare che le radici $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ che abbiamo determinato per la F costituiscono un sistema fondamentale. Supponiamo, infatti, che fra esse sussista una relazione lineare a coefficienti costanti

$$a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \ldots + a_{n-1}\varphi_{n-1} = o. \tag{18}$$

La funzione φ_0 non è identicamente nulla. Allora, ricordando le espressioni (17) delle φ_i, dividiamo ambo i membri della (18) per φ_0 e quindi applichiamo ad essi l'operazione D: otterremo

$$a_1\psi_1 + a_2\psi_1 D^{-1}\psi_2 + a_3\psi_1 D^{-1}\psi_2 D^{-1}\psi_3 + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1}\psi_1 D^{-1}\psi_2 \ldots D^{-1}\psi_{n-1} = o.$$

Dividendo ambo i membri di questa eguaglianza per ψ_1 e derivando, otteniamo

$$a_2\psi_2 + a_3\psi_2 D^{-1}\psi_3 + \ldots + a_{n-1}\psi_2 D^{-1}\psi_3 \ldots D^{-1}\psi_{n-1} = o.$$

Così continuando, otterremo da ultimo

$$a_{n-1}\psi_{n-1} = o,$$

onde risulta

$$a_{n-1} = o.$$

In modo simile si dimostra successivamente che deve essere

$$a_{n-2} = o,\ a_{n-3} = o, \ldots, a_1 = o,\ a_0 = o,$$

come appunto volevamo dimostrare.

Da quanto precede concludiamo che la determinazione dello spazio delle radici di una forma differenziale lineare d'ordine n, di cui già si conosca una radice, si riconduce alla determinazione dello spazio delle radici di una forma di ordine $n-1$, coll'aggiunta di operazioni D^{-1}.

334. L'equazione

$$G(\varphi) = \psi, \tag{19}$$

dove G è una forma d'ordine n, ψ una funzione data e φ una funzione da determinarsi, dicesi *equazione differenziale lineare non omogenea di ordine n*. Ogni funzione φ soddisfacente all'equazione dicesi *soluzione o integrale* di essa.

È manifesto che determinare una soluzione dell'equazione (19) equivale ad assegnare una determinazione di $G^{-1}(\psi)$; sappiamo che, conosciuta una di tali determinazioni, si ottengono tutte le altre aggiungendo a quella tutte le radici di G. Noi dimostreremo più innanzi, che se i coefficienti di G e la funzione ψ appartengono ad $\mathfrak{S}^r(x_0)$, esiste e si può effettivamente assegnare una determinazione di $G^{-1}(\psi)$, appartenente al medesimo spazio.

Premesso questo, supponiamo che la forma F di ordine

m sia divisibile per la forma G di ordine $n \leqq m$, in modo che

$$F = HG,$$

dove H rappresenta una forma di ordine $m - n$.

Siano $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, n radici linearmente indipendenti di G e $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{m-n}$, $m - n$ radici linearmente indipendenti di H. Si vede allora, con ragionamento analogo a quello del § 286, che per avere lo spazio delle radici di F basta sommare allo spazio $S_n[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n]$ delle radici di G lo spazio ad $m - n$ dimensioni, definito da $m - n$ soluzioni delle equazioni non omogenee

$$G(\varphi) = \psi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m - n)$$

rispettivamente.

335. Riprendiamo la forma F e sia η_1 una sua radice. Se indichiamo con E_1 la forma lineare del primo ordine che ammette per radice la η_1 e ha il primo coefficiente uguale all'unità, se, cioè, poniamo

$$E_1 = D - \frac{\eta'_1}{\eta_1} D^0,$$

la forma F sarà divisibile (§ 331) per E_1; esisterà cioè una determinata forma F_1 dell'ordine $n - 1$, tale che

$$F = F_1 E_1.$$

In modo analogo indichiamo con η_2 una radice di F_1: la F_1 sarà divisibile per la forma differenziale lineare del primo ordine E_2, che ammette la radice η_2 e ha il primo coefficiente uguale ad uno. Avremo dunque

$$F_1 = F_2 E_2$$

dove F_2 è una forma dell'ordine $n - 2$, e quindi

$$F = F_2 E_2 E_1.$$

Così possiamo continuare e da ultimo, se α_n è il coefficiente di D_n nella forma F, otterremo la seguente espressione

$$F = \alpha_n E_n E_{n-1} E_{n-2} \ldots E_2 E_1,$$

dove $E_1, E_2 \ldots, E_n$ sono n forme differenziali lineari del primo ordine, aventi tutte come coefficienti di D la unità.

Ricordando che si ha (§ 331)

$$E_1(\varphi) = \eta_1 D \frac{\varphi}{\eta_1} = M_{\eta_1} D M^{-1}_{\eta_1}(\varphi),$$

avremo

$$F(\varphi) = \alpha_n \eta_n D \frac{\eta_{n-1}}{\eta_n} D \frac{\eta_{n-2}}{\eta_{n-1}} \ldots D \frac{\eta_1}{\eta_2} D \frac{\varphi}{\eta_1}$$

ossia

$$\text{(20)} \qquad F = M_{\alpha_n} M_{\eta_n} D M^{-1}_{\eta_n} M_{\eta_{n-1}} D M^{-1}_{\eta_{n-1}} \ldots M_{\eta_1} D M^{-1}_{\eta_1}.$$

Possiamo osservare che, in generale, la F non ammette un'unica decomposizione in fattori lineari.

336. Consideriamo una determinata decomposizione della forma F d'ordine n in fattori del primo ordine

$$E = \alpha_n E_n E_{n-1} \ldots E_2 E_1,$$

e, come dianzi, indichiamo con η_i la radice di E_i. Note le funzioni $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, è facile assegnare un sistema fondamentale di radici di F.

Considerando, dapprima, la forma

$$E_2 E_1,$$

risulta dal § 334 che un suo sistema fondamentale di radici sarà determinato aggiungendo alla radice η_1 di E_1 una soluzione dell'equazione differenziale lineare non omogenea

$$E_1(\varphi) = \eta_2.$$

Ora, essendo

$$E_1 \varphi = \eta_1 D \frac{\varphi}{\eta_1},$$

dall' uguaglianza

$$\eta_1 D \frac{\varphi}{\eta_1} = \eta_2$$

risulta

$$\varphi = \eta_1 D^{-1} \frac{\eta_2}{\eta_1}.$$

Le due funzioni

$$\omega_1 = \eta_1, \quad \omega_2 = \eta_1 D^{-1} \frac{\eta_2}{\eta_1}$$

come radici di $E_2 E_1$ sono radici di $E_3 E_2 E_1$, e dalle osservazioni del § 334 discende pure che esse sono linearmente indipendenti.

Per avere una terza radice di

$$E_3 E_2 E_1$$

basterà considerare una soluzione dell' equazione differenziale lineare

$$E_2 E_1(\varphi) = \eta_3,$$

cioè

$$\eta_2 D \frac{\eta_1}{\eta_2} D \frac{\varphi}{\eta_1} = \eta_3,$$

da cui

$$\varphi = \omega_3 = \eta_1 D_1^{-1} \frac{\eta_2}{\eta_1} D^{-1} \frac{\eta_3}{\eta_2}.$$

Le funzioni $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, linearmente indipendenti, sono radici di $E_4 E_3 E_2 E_1$.

Così continuando, otterremo infine il sistema di n funzioni

$$\left\{\begin{array}{l}
\omega_1 = \eta_1 \\
\omega_2 = \eta_1 D^{-1} \frac{\eta_2}{\eta_1} \\
\omega_3 = \eta_1 D^{-1} \frac{\eta_2}{\eta_1} D^{-1} \frac{\eta_3}{\eta_2} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\omega_n = \eta_1 D^{-1} \frac{\eta_2}{\eta_1} D^{-1} \frac{\eta_3}{\eta_2} \dots D^{-1} \frac{\eta_n}{\eta_{n-1}},
\end{array}\right.$$

ciascuna delle quali è radice di F.

L' indipendenza lineare di codeste n funzioni risulta, pel modo in cui furono ottenute, dalla osservazione del § 334: ma si può anche assodare direttamente, seguendo il procedimento tenuto alla fine del § 333.

C. CAMPI DI RAZIONALITÀ — RIDUCIBILITÀ — INVARIANTI.

337. Nello studio delle forme differenziali lineari, s' intenderà con *campo di razionalità* ogni insieme di funzioni analitiche tale che ad esso appartenga ogni funzione, ottenuta mediante l' applicazione di un numero finito di operazioni razionali e di derivazioni sopra un numero finito di funzioni appartenenti all' insieme stesso. Se esistono, in un campo di razionalità, p funzioni $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, tali che ogni altra funzione del campo si ottenga da quelle per mezzo di un numero finito di operazioni razionali e di derivazioni, codeste funzioni diconsi costituire la *base* del campo.

Date due forme, i cui coefficienti appartengano a un determinato campo di razionalità, il quoziente e il resto della divisione dell' una per l' altra e il massimo comun divisore delle due forme date (§§ 320-321) sono forme, i cui coefficienti appartengono al medesimo campo di razionalità.

338. Una forma F di ordine n si dice *irriducibile* in un determinato campo di razionalità se non esiste nessuna forma G di ordine inferiore ad n, i cui coefficienti appartengano al detto campo di razionalità e per la quale la F sia divisibile. La forma F si dice invece *riducibile* quando una tal forma G esiste. In modo analogo a quello tenuto al § 296, si dimostra che se una forma, i cui coefficienti appartengono a un dato campo di razionalità, ha una radice comune con una forma

irriducibile in esso, la prima forma ammetterà tutte le radici della seconda, e sarà quindi divisibile per la seconda.

339. Data una forma differenziale lineare F di ordine n, sia $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ un suo sistema fondamentale di radici. Ogni sostituzione lineare non degenere sugli elementi $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$

$$A(\varphi_i) = \psi_i = a_{i1}\varphi_1 + a_{i2}\varphi_2 + \ldots + a_{in}\varphi_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{21}$$

con

$$a = |a_{ij}| \neq o,$$

rappresenta una operazione che trasforma in sè stesso lo spazio S_n delle radici di F, e in particolare fa corrispondere al sistema fondamentale $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ un nuovo sistema fondamentale $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$.

Una espressione $R(\varphi_i, \varphi'_i, \ldots)$, formata razionalmente con gli elementi di un sistema fondamentale di F e con le loro derivate fino a un determinato ordine si dice *invariante* quando, eseguita una sostituzione lineare non degenere su gli elementi del sistema fondamentale, la R non si altera, o viene al più moltiplicata per una espressione dipendente soltanto dai coefficienti della sostituzione. Ogni invariante soddisfa dunque alla seguente equazione

$$R(\varphi_i, \varphi'_i, \ldots) = g(a_{ij})R(\psi_i, \psi'_i, \ldots). \tag{22}$$

Se, in particolare, la espressione $g(a_{ij})$ è uguale all'unità, si ha

$$R(\varphi_i, \varphi_i', \ldots) = R(\psi_i, \psi'_i \ldots),$$

e la $R(\varphi_i, \varphi'_i, \ldots)$ dicesi *invariante assoluto.*

Consideriamo ad esempio il Wronskiano

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n).$$

Dalle (21) risulta, per ogni valore intero positivo di m,

$$\psi^{(m)} = a_{i1}\varphi_1^{(m)} + a_{i2}\varphi_2^{(m)} + \ldots + a_{in}\varphi_n^{(m)};$$

se ne conclude che il termine appartenente alla m^{ma} linea ed alla i^{ma} colonna nel determinante $W(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ è dato da

$$a_{i1}\varphi_1^{(m-1)} + a_{i2}\varphi_2^{(m-1)} + \ldots + a_{in}\varphi_n^{(m-1)},$$

onde si ha

$$W(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) = aW(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n);$$

talchè il Wronskiano è un invariante.

Analogamente si vede che sono invarianti tutti i determinanti, analoghi al Wronskiano, che abbiamo designato (§ 330) con $W_i(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$; e precisamente si ha

$$W_i(\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n) = aW(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n).$$

Ora sappiamo che i rapporti dei coefficienti di una forma al primo fra essi, si esprimono come quozienti di determinanti W_i per il Wronskiano: ne risulta che codesti rapporti di coefficienti sono *invarianti assoluti.*

340. È senz'altro manifesta l'analogia che corre tra gli *invarianti* nella teoria delle forme differenziali lineari e le funzioni simmetriche nella teoria delle equazioni algebriche. Codesta analogia è messa ancor meglio in luce dal seguente teorema, dovuto all'APPELL.

Ogni funzione razionale delle radici di una forma differenziale lineare e delle loro derivate, la quale sia invariante, è esprimibile per mezzo di una funzione razionale dei coefficienti della forma considerata e delle loro derivate, moltiplicata per una potenza intera del Wronskiano. Per la facile dimostrazione di questo teorema, rimandiamo il lettore all'opera citata dello SCHLESINGER, T. I, pag. 38.

341. Accanto ad una forma differenziale lineare

$$F = \alpha_n D^n + \alpha_{n-1} D^{n-1} + \alpha_{n-2} D^{n-2} + \ldots + \alpha_1 D + \alpha_0 D^0,$$

come accanto ad ogni altra operazione distributiva, si può, considerare l'operazione $\overline{F}$, *aggiunta* di F (V. il Cap. IX). Varrà anzitutto per l'aggiunta di una tale forma il teorema generale che l'aggiunta dell' aggiunta è la forma primitiva.

Ricordiamo poi le seguenti proposizioni stabilite nel citato capitolo:

a) l'aggiunta di una somma di operazioni è uguale alla somma delle aggiunte (§ 242, *c*);

b) l'aggiunta di un prodotto è eguale al prodotto, in ordine inverso, delle aggiunte dei fattori (§ 243);

c) la moltiplicazione è aggiunta di sè stessa, mentre l'aggiunta della derivazione è la derivazione stessa, moltiplicata per il fattore numerico -1 (§ 246).

Avremo perciò (§ 248) che l'operazione aggiunta di F, applicata ad una funzione arbitraria φ, sarà data da

$$\overline{F}(\varphi) = (-1)^n [D^n \alpha_n \varphi - D^{n-1} \alpha_{n-1} \varphi + D^{n-2} \alpha_{n-2} \varphi - \ldots + (-1)^n \alpha_0 \varphi].$$

Dunque l'aggiunta di una forma differenziale lineare d'ordine n è ancora una forma differenziale lineare di ordine n.

I coefficienti di $\overline{F}$ si deducono da quelli di F per mezzo di operazioni razionali e di derivazione; onde si può dire che i coefficienti della forma aggiunta appartengono al medesimo campo di razionalità dei coefficienti della forma primitiva. Di più, nella espressione dei coefficienti di $\overline{F}$ per mezzo di quelli di F non compaiono operazioni di divisione: onde risulta che i coefficienti di $\overline{F}$ non possono avere altri punti singolari all'infuori di quelli dei coefficienti di F.

342. La forma F sia decomposta in un certo numero di fattori

$$F = F_r F_{r-1} \ldots F_2 F_1.$$

Pel teorema sull'aggiunta di un prodotto di operazioni, avremo

$$\overline{F} = \overline{F}_1 \overline{F}_2 \ldots \overline{F}_{r-1} \overline{F}_r.$$

La relazione tra F ed $\overline{F}$, espressa dalle due precedenti uguaglianze, è nota sotto il nome di *principio di reciprocità* (*Reciprocitätssatz*) di Thomé e Frobenius. (1)

In particolare consideriamo la decomposizione in fattori lineari della forma F data al § 335

$$F = E_n E_{n-1} \ldots E_2 E_1.$$

Avremo

$$\overline{F} = \overline{E}_1 \overline{E}_2 \ldots \overline{E}_{n-1} \overline{E}_n.$$

Poichè $\overline{E}_i$ è una forma del primo ordine, abbiamo che ad ogni decomposizione in fattori del primo ordine della F corrisponde una decomposizione in fattori del primo ordine della forma $\overline{F}$ e viceversa. Risulta di qui e dal § 336 che, quando sia determinato un sistema fondamentale di radici di una forma F, si sa, con sole operazioni D^{-1} (quadrature), determinare un sistema fondamentale di radici della $\overline{F}$. Infatti, conoscendo un sistema fondamentale di radici di F, si può assegnare una decomposizione di questa forma in fattori del primo ordine. Se ne deduce tosto, anche per la $\overline{F}$, una decomposizione in fattori del primo ordine e quindi ancora, per le formule del § 336, un sistema fondamentale di radici di F.

Possiamo infine osservare che dal principio di reciprocità e dal fatto che i coefficienti della forma aggiunta appartengono al medesimo campo di razionalità dei coefficienti

(1) Schlesinger, op. cit., T. I, pag. 55.

della forma primitiva, discende che in uno stesso campo di razionalità, p. es. in quello dei coefficienti della forma primitiva, una forma e la sua aggiunta sono insieme *riducibili* o *irriducibili*.

343. Si dice *moltiplicatore* di una forma differenziale lineare F, d'ordine n, una funzione μ tale che sia

$$M_\mu F = \mu F = DG,$$

dove G è una forma differenziale lineare d'ordine $n-1$. Dalla definizione stessa di *moltiplicatore* di una data forma F, risulta che, se μ_1, μ_2 sono due moltiplicatori di F, è tale ancora ogni loro combinazione lineare a coefficienti costanti. Si ha dunque che i moltiplicatori di una forma differenziale lineare costituiscono uno *spazio lineare*. Codesto spazio è ad un numero finito di dimensioni, come risulta dal seguente teorema:

Le radici e i moltiplicatori di una forma sono, rispettivamente, moltiplicatori e radici della forma aggiunta.

Sia infatti ω una radice di F; avremo (§ 335) essendo F_1 una determinata forma differenziale lineare d'ordine $n-1$,

$$F = F_1 M_\omega D M_\omega^{-1};$$

prendendo l'*aggiunta* di ambo i membri otterremo (§ 341)

$$\overline{F} = - M_\omega^{-1} D M_\omega \overline{F}_1$$

ossia

$$M_\omega \overline{F} = - D M_\omega \overline{F}_1.$$

Quest'ultima uguaglianza ci dice appunto che ω è un moltiplicatore di $\overline{F}$.

Reciprocamente, indichiamo con μ un *moltiplicatore* di F: avremo

$$M_\mu F = DG,$$

ossia

$$F = M_\mu^{-1} DG;$$

ne viene, prendendo l'aggiunta,

$$\overline{F} = - \overline{G} D M_\mu^{-1};$$

ora, poichè $M_\mu^{-1}(\mu) = 1$, risulta senz'altro che μ è radice di $\overline{F}$, come appunto volevamo dimostrare.

Come corollario del teorema dimostrato, abbiamo che i *moltiplicatori* di una forma differenziale lineare F di ordine n costituiscono uno spazio lineare ad n dimensioni (*spazio delle radici* di $\overline{F}$).

344. È facile di assegnare le effettive espressioni dei moltiplicatori per mezzo delle radici. Supponiamo che la forma F abbia il coefficiente di D^n uguale all'unità: sia precisamente

$$F = D^n + \alpha_{n-1} D^{n-1} + \ldots + \alpha_1 D + \alpha_0 D^0.$$

Ogni moltiplicatore μ di F è, per definizione, tale che sussiste l'uguaglianza

$$\mu F = DG,$$

dove G rappresenta una forma differenziale lineare dell'ordine $n-1$.

Scegliamo un determinato sistema fondamentale di radici

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$$

della forma F. In virtù dell'uguaglianza sopra scritta, φ_1, φ_2, ..., φ_n dovranno essere radici del prodotto d'operazioni DG. Questa condizione sarà soddisfatta se G è una forma differenziale lineare d'ordine $n-1$, che ammetta come radici $n-1$ delle funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ e trasformi la n^{ma} in una costante, p. es. nella unità. È facile vedere che le condizioni

$$G_i(\varphi_m) = o \quad (m = 1, 2 \ldots\ i-1, i+1, \ldots\ n)$$
$$G_i(\varphi_i) = 1$$

determinano in modo unico la forma G_i.

Infatti ogni forma differenziale lineare d'ordine $n-1$, che ammetta le radici $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{i-1}, \varphi_{i+1}, \ldots, \varphi_n$, differisce solo per una funzione moltiplicatrice arbitraria dalla forma differenziale lineare

$$\begin{vmatrix} D^n\varphi & D^{n-1}\varphi & \ldots & D\varphi & \varphi^0 \\ \varphi_1^{(n)} & \varphi_1^{(n-1)} & \ldots & \varphi'_1 & \varphi_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{i-1}^{(n)} & \varphi_{i-1}^{(n-1)} & \ldots & \varphi'_{i-1} & \varphi_{i-1} \\ \varphi_{i+1}^{(n)} & \varphi_{i+1}^{(n-1)} & \ldots & \varphi'_{i+1} & \varphi_{i+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_n^{(n)} & \varphi_n^{(n-1)} & \ldots & \varphi'_n & \varphi_n \end{vmatrix},$$

e fra queste si otterrà quella che a φ_i fa corrispondere l'unità, assumendo come funzione moltiplicatrice la

$$(-1)^{i-1} W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n).$$

La forma G_i richiesta è data pertanto da

$$G_i(\varphi) = (-1)^{i-1} \frac{W(\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{i-1}, \varphi_{i+1}, \ldots, \varphi_n)}{W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}.$$

La forma DG_i, che ammette come radici le funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ non può differire da F se non per una funzione moltiplicatrice. Poichè in F il coefficiente di D^n è l'unità, codesta funzione moltiplicatrice sarà data dal coefficiente di D^n in DG_i.

Ora abbiamo

$$DG_i(\varphi) \frac{(-1)^{i-1}}{W^2(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)} = \begin{matrix} (W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) DW(\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}, \varphi_{i+1}, \ldots, \varphi_n) - \\ - W(\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}, \varphi_{i+1}, \ldots, \varphi_n) DW(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) \end{matrix}$$

Nello sviluppo del secondo membro il coefficiente di $\varphi^{(n)}$ è dato da

$$(-1)^{i-1} \frac{W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{i-1}, \varphi_{i+1}, \ldots, \varphi_n)}{W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}.$$

Indicando con μ_i codesta funzione, si ha

$$DG_i = \mu_i F,$$

donde risulta che μ_i è un *moltiplicatore* della forma F.

In tale modo, corrispondentemente alle n radici di F considerate

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n,$$

abbiamo determinato gli n moltiplicatori di F:

$$\mu_i = (-1)^{i-1} \frac{W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{i-1}, \varphi_{i+1}, \ldots, \varphi_n)}{W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)},$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

345. Notiamo che le espressioni di $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ da noi ottenute non sono altro se non i quozienti dei complementi algebrici di $\varphi_1^{(n)}, \varphi_2^{(n)}, \ldots, \varphi_n^{(n)}$ rispettivamente nel Wronskiano $W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$, divisi per il Wronskiano stesso. Ne risultano le seguenti relazioni:

$$(23) \quad \begin{cases} \mu_1\varphi_1 + \mu_2\varphi_2 + \ldots + \mu_n\varphi_n = o \\ \mu_1\varphi_1' + \mu_2\varphi_2' + \ldots + \mu_n\varphi_n' = o \\ \ldots \\ \mu_1\varphi_1^{(n-2)} + \mu_2\varphi_2^{(n-2)} + \ldots + \mu_n\varphi_n^{(n-2)} = o \\ \mu_1\varphi_1^{(n-1)} + \mu_2\varphi_2^{(n-1)} + \ldots + \mu_n\varphi_n^{(n-1)} = 1 \end{cases}$$

346. I moltiplicatori $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ dianzi determinati sono linearmente indipendenti.

Poniamo infatti

$$\sigma_{lk} = \mu_1^{(l)}\varphi_1^{(k)} + \mu_2^{(l)}\varphi_2^{(k)} + \ldots + \mu_n^{(l)}\varphi_n^{(k)}.$$

Le relazioni del § precedente si potranno scrivere

$$(24) \qquad \sigma_{00} = o, \; \sigma_{01} = o, \ldots, \sigma_{0.n-2} = o, \; \sigma_{0.n-1} = 1.$$

Ora si ha:

$$D\sigma_{0\cdot k-1} = \sigma_{0\cdot k} + \sigma_{1\cdot k-1},$$
$$D^2\sigma_{0\cdot k-2} = \sigma_{0\cdot k} + 2\sigma_{1\cdot k-1} + \sigma_{2\cdot k-2},$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$D^k\sigma_{0\cdot 0} = \sigma_{0\cdot k} + \tbinom{k}{1}\sigma_{1\cdot k-1} + \tbinom{k}{2}\sigma_{2\cdot k-2} + \dots + \sigma_{k\cdot 0}.$$

Applicando queste uguaglianze per i valori $k < n-1$ e ricordando le uguaglianze (23), otteniamo il nuovo sistema di uguaglianze

$$\sigma_{l\cdot k} = 0,$$

valide per $\qquad l + k < n - 1.$

Posto $k = n - 1$, otteniamo invece per $\sigma_{0.n-1}$, $\sigma_{1.n-1}$, $\sigma_{2.n-2}, \dots, \sigma_{n-1.0}$ alternativamente i valori $+1$ e -1.

Avremo in particolare le uguaglianze

$$\sigma_{00} = 0,\ \sigma_{1.0} = 0, \dots,\ \sigma_{n-2.0} = 0,\ \sigma_{n-1.0} = (-1)^{n-1},$$

ossia

$$(23')\quad \begin{cases} \mu_1\varphi_1 + \mu_2\varphi_2 + \dots\dots + \mu_n\varphi_n = 0 \\ \mu'_1\varphi_1 + \mu'_2\varphi_2 + \dots\dots + \mu'_n\varphi_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \overset{(n-2)}{\mu_1}\varphi_1 + \overset{(n-2)}{\mu_2}\varphi_2 + \dots + \overset{(n-2)}{\mu_n}\varphi_n = 0 \\ \overset{(n-1)}{\mu_1}\varphi_1 + \overset{(n-1)}{\mu_2}\varphi_2 + \dots + \overset{(n-1)}{\mu_n}\varphi_n = (-1)^{n-1}. \end{cases}$$

Risulta di qui che il Wronskiano W $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ non è identicamente nullo e che, quindi, i moltiplicatori

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$$

sono linearmente indipendenti.

Ad un tale sistema di moltiplicatori daremo il nome di *sistema fondamentale di moltiplicatori*. Esso non è se non un sistema fondamentale di radici della forma $\overline{F}$ *ag-*

giunta di F. Possiamo allora osservare che alle relazioni (23') saremmo potuti giungere, partendo dalla considerazione del sistema di radici di $\overline{F}$

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n,$$

come già arrivammo alle (23), partendo dalle radici di F.

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n.$$

347. Un sistema fondamentale di radici e un sistema fondamentale di moltiplicatori di F, legati dalle relazioni (23), e quindi dalle (23'), si dicono *aggiunti*.

Immaginiamo di eseguire sullo spazio delle radici di F l'omografia non degenere, che fa corrispondere a $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ le radici $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ rispettivamente, legate a $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ dalle relazioni

$$(25)\qquad \psi_i = a_{i1}\varphi_1 + a_{i2}\varphi_2 + \dots + a_{in}\varphi_n$$
$$(i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Cerchiamo ora di determinare l'omografia che al sistema fondamentale $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, aggiunto a $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, fa corrispondere il sistema aggiunto a $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$. Indicando con $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ i moltiplicatori di quest'ultimo sistema, avremo

$$\psi_1\nu_1 + \psi_2\nu_2 + \dots \psi_n\nu_n = 0.$$

Se indichiamo con $\overline{a}_{ij}$ il quoziente del complemento algebrico dell'elemento a_{ij}, nel determinante $|a_{ij}|$, per il determinante stesso, deduciamo dalle (25)

$$\varphi_i = \overline{a}_{1i}\psi_1 + \overline{a}_{2i}\psi_2 + \dots + \overline{a}_{ni}\psi_n.$$

Allora la relazione che lega i moltiplicatori $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ alle radici $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ si può scrivere

$$\sum(\overline{a}_{1i}\psi_1 + \overline{a}_{2i}\psi_2 + \dots + \overline{a}_{ni}\psi_n)\mu_i = 0$$

ossia

$$\sum \psi_i(\bar{a}_{1i}\mu_1 + \bar{a}_{i2}\mu_2 + \ldots + \bar{a}_{ni}\mu_n) = o,$$

onde risulta

$$\nu_i = \bar{a}_{i1}\mu_1 + \bar{a}_{i2}\mu_2 + \ldots + \bar{a}_{in}\mu_n$$
$$(i = 1, 2, 3 \ldots n).$$

Concludiamo, dunque, che se facciamo corrispondere ad ogni sistema fondamentale di radici il rispettivo sistema *aggiunto* di moltiplicatori, ad ogni omografia eseguita nello spazio delle radici di una forma corrisponde nello spazio dei moltiplicatori l'omografia *contraria*; onde, usando una nota denominazione della teoria delle forme algebriche, potremo dire che le radici e i moltiplicatori di una forma differenziale lineare sono elementi contragredienti.

E. — INVERSIONE DI UNA FORMA DIFFERENZIALE LINEARE MEDIANTE SERIE DI D^{-1}.

348. Date n funzioni linearmente indipendenti $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, abbiamo già determinato al § 344 le n forme differenziali lineari d'ordine $n-1$ $G_1, G_2, \ldots, G_n$, che godono le proprietà.

$$\begin{matrix} G_i(\varphi_m) = o \\ G_i(\varphi_i) = 1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} m = 1, 2 \ldots i-1, i+1, \ldots n \\ i = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

Codeste forme permettono di risolvere immediatamente il seguente problema di interpolazione: Costruire una forma differenziale lineare d'ordine $n-1$ che faccia corrispondere ad n funzioni date, linearmente indipendenti $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, le funzioni date $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ rispettivamente.

Invero, tale problema è risoluto senz'altro dalla forma

$$G = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i G_i = \sum_{i=1}^{n} G(\varphi_i) G_i. \tag{26}$$

Notiamo l'analogia palese di questa formola, che si può dire di interpolazione funzionale, con la nota formola di interpolazione algebrica del LAGRANGE.

Le funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sono radici di una forma differenziale lineare F, d'ordine n, perfettamente determinata, quando in essa il coefficiente di D^n si prenda uguale all'unità. Rappresentiamo con $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ il sistema di moltiplicatori di codesta forma, aggiunto al sistema di radici $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$; abbiamo allora

$$\mu_i F = DG_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

donde risulta:

$$G_i = D^{-1} M_{\mu_i} F.$$

La (26) si può allora scrivere

$$G = \sum_{1}^{n} G(\varphi_i) D^{-1} M_{\mu_i} F. \tag{27}$$

Applicando le due operazioni, tra loro uguali, che compaiono nei due membri della (27), all'operazione F^{-1} inversa di F, otteniamo

$$GF^{-1} = \sum_{1}^{n} G(\varphi_i) D^{-1} M_{\mu_i}. \tag{28}$$

349. La formola (28) ora determinata, fa riscontro alla nota formola d'Algebra che dà la decomposizione di una funzione razionale fratta nella somma di un numero finito di frazioni semplici, nel caso in cui il denominatore ha sole radici semplici.

Essa dà, in particolare, un'espressione per la operazione F^{-1}, inversa di F. Si ponga, invero, nella (28) al posto della forma G l'operazione identica; risulta

$$F^{-1} = \sum_1^n \varphi_i D^{-1} M_{\mu_i}. \tag{29}$$

Questa formola dà, per mezzo d'operazioni note applicate alla funzione ψ, la soluzione dell'equazione differenziale lineare non omogenea

$$F(\varphi) = \psi.$$

Sappiamo che questa equazione ammette infinite soluzioni, le quali si ottengono aggiungendo ad una qualsivoglia di esse successivamente tutte le radici di F. Ora ciò è reso manifesto dall'espressione (29) stessa che, applicata a ψ, si può scrivere:

$$F^{-1}(\psi) = \sum_1^n \varphi_i D^{-1}(\mu_i \psi); \tag{29'}$$

infatti ogni suo termine $D^{-1}(\mu_i\psi)$ ha infinite determinazioni, diverse tra loro per una costante addittiva arbitraria. Avuto riguardo a ciò, possiamo dire che l'espressione (29'), ci dà la *soluzione generale* dell'equazione differenziale lineare non omogenea. Essa non differisce dalla nota espressione a cui si giunge applicando il *metodo della variazione delle costanti arbitrarie* del LAGRANGE.

350. Sia $x = x_0$ un punto del piano, nel cui intorno siano regolari la funzione ψ e ciascuno dei coefficienti della forma F, il primo dei quali si suppone sempre uguale all'unità. Allora nell'intorno del punto $x = x_0$ sono regolari tutte le funzioni φ_i che compaiono nella (29'), come risulta

dal teorema del FUCHS. Tali ancora sono le funzioni μ_i, come si vede, sia ricordando le espressioni (§ 344) dei moltiplicatori in funzione delle radici, sia riflettendo che i moltiplicatori sono radici della forma $\overline{F}$, i cui coefficienti sono regolari dappertutto dove sono regolari quelli di F. Avremo dunque che ciascuna delle funzioni

$$\psi,\ \varphi_1,\ \varphi_2, \ldots,\ \varphi_n,\ \mu_1,\ \mu_2, \ldots,\ \mu_n$$

appartiene ad $S^0(x_0)$ (§ 318).

Premesso questo, ci proponiamo di individuare, nell'intorno del punto $x = x_0$, una soluzione particolare dell'equazione differenziale lineare non omogenea, indipendentemente dalla scelta fatta del sistema fondamentale di radici di F.

A questo scopo togliamo la moltiplicità di determinazioni della D^{-1} assumendone la determinazione principale (§ 114), cioè stabilendo che se α è una funzione di $S^0(x_0)$ avente per $x = x_0$ uno zero d'ordine r, $D^{-1}(\alpha)$ abbia per $x = x_0$ uno zero d'ordine $r + 1$. Con ciò la (29') ci dà per l'equazione differenziale lineare non omogenea, una soluzione particolare determinata:

$$\overline{\varphi} = \sum_1^n \varphi_i D^{-1}(\mu_i \psi). \tag{29'}$$

Codesta soluzione, per $x = x_0$, si annulla insieme con le sue prime $n - 1$ derivate. Infatti, si consideri uno qualsivoglia dei termini della sommatoria del secondo membro della (29'). Esso, ove si tralascino per semplicità gli indici, sarà:

$$\varphi D^{-1}(\mu\varphi),$$

ossia, per la formola (29) del § 157 (¹),

$$\varphi\,[\mu D^{-1}\psi - \mu' D^{-2}\psi + \mu'' D^{-3}\psi - \ldots$$
$$+ (-1)^{n-2}\mu^{(n-2)} D^{-(n-1)}\psi + (-1)^{n-1} D^{-1}(\mu^{(n-1)} D^{-(n-1)}\psi)].$$

(¹) Formola che si è chiamata dell'*integrazione per parti*.

Sommando per i valori 1, 2, 3,..., n dell'indice e ricordando le formole del § 345, che legano il sistema fondamentale di radici $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ al sistema aggiunto di moltiplicatori, otteniamo

$$(30) \qquad \bar{\varphi} = (-1)^{n-1} \sum_1^n \varphi_i D^{-1}(\mu_i^{(n-1)} D^{-(n-1)}\psi).$$

Se ora della D^{-1} consideriamo, come si è detto, la determinazione principale, la (30) dà una determinata soluzione particolare dell'equazione differenziale lineare non omogenea, la quale evidentemente ha nel punto $x = x_0$ uno zero dell'ordine n almeno. Di qui risulta, come appunto volevamo dimostrare, che la funzione $\bar{\varphi}$ per $x = x_0$ si annulla insieme con le sue prime $n-1$ derivate.

La (30) dà sempre una medesima funzione, qualunque sia il sistema fondamentale di radici di F che si ponga al posto di $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, purchè per $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ si assuma il corrispondente sistema aggiunto di moltiplicatori. Immaginiamo infatti di prendere, al posto del sistema fondamentale di radici di F, già considerato $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, il sistema

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_n,$$

legato al primo dalla sostituzione lineare a determinante $|a_{ij}|$ diverso da zero

$$(31) \qquad \psi_i = a_{i1}\varphi_1 + a_{i2}\varphi_2 + \ldots + a_{in}\varphi_n \quad (i = 1.2.3 \ldots n).$$

Rappresentiamo al solito con $\bar{a}_{ij}$ il quoziente per $|a_{ij}|$ del complemento algebrico in codesto determinante dell'elemento a_{ij}. Poichè radici e moltiplicatori di due sistemi tra loro aggiunti sono elementi contragredienti, i moltiplicatori $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ del sistema aggiunto a $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ si otterranno dai moltiplicatori $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ del sistema aggiunto a $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$

φ_n per mezzo della sostituzione lineare contraria a quella data dalle (31); avremo cioè:

$$\nu_i = \bar{a}_{i1}\mu_1 + \bar{a}_{i2}\mu_2 + \ldots + \bar{a}_{in}\mu_n, \quad (i = 1, 2, 3 \ldots n);$$

di qui discende:

$$(32) \qquad \mu_i = a_{1i}\nu_1 + a_{2i}\nu_2 + a_{3i}\nu_3 + \ldots + a_{ni}\nu_n \quad (i = 1, 2, 3 \ldots n).$$

La (30), ove si parta dai due sistemi aggiunti $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ e $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$, dà

$$(-1)^{n-1} \sum_1^n \psi_i D^{-1}(\nu_i^{(n-1)} D^{-(n-1)}\psi);$$

di qui, sostituendo a ψ_i l'espressione datane dalla (31), otteniamo

$$(-1)^{n-1} \sum_{i=j}^n \sum_{i=j}^n a_{ij}\varphi_j D^{-1}(\nu_i^{(n-1)} D^{-(n-1)}\psi)$$

ossia

$$(-1)^{n-1} \sum_{j=1}^n \varphi_i D^{-1}\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}\nu_i^{(n-1)} . D^{-(n-1)}\psi\right),$$

la quale, per le (32), si può scrivere

$$(-1)^{n-1} \sum_{j=1}^n \varphi_j D^{-1}(\mu_j^{(n-1)} . D^{-(n-1)}\psi);$$

così si è dimostrato che la funzione $\bar{\varphi}$ non dipende dal sistema fondamentale di radici di F, che compare nella sua espressione. La $\bar{\varphi}$ dà pertanto una soluzione particolare dell'equazione differenziale lineare non omogenea, soluzione che è quindi perfettamente determinata quando è assegnato il punto $x = x_0$, nel quale deve annullarsi insieme con le sue prime $n-1$ derivate; essa viene detta soluzione od integrale principale (*Hauptintegral*), relativo al punto $x = x_0$, dell'equazione medesima.

Dall'esistenza e dall'unicità della soluzione principale relativa ad un qualsivoglia punto $x = x_0$, nel cui intorno siano regolari la ψ e i coefficienti della forma F, supposto il primo uguale all'unità, segue senza difficoltà che esiste una soluzione particolare ed una sola la quale nel punto $x = x_0$ assuma insieme con le sue prime $n - 1$ derivate n valori prefissati arbitrari.

351. L'espressione data al § precedente per l'operazione F^{-1} ha l'inconveniente di richiedere la conoscenza delle radici di F. Vogliamo mostrare come sia possibile assegnare per F^{-1} un'espressione, costituita da una serie di potenze di D^{-1}, i cui coefficienti appartengono invece al campo di razionalità dei coefficienti di F.

A tale scopo, riprendiamo la formola

$$F^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i D^{-1} M_{\mu_i}; \tag{29}$$

qui, applicando la formola (27) del § 157 per lo sviluppo in serie delle $D^{-1}M_{\mu_i}$ nell'intorno della funzione arbitraria otteniamo:

$$F^{-1} = \sum_{n-1}^{\infty} (-1)^m (\varphi_1 \mu_1^{(m)} + \varphi_2 \mu_2^{(m)} + \ldots + \varphi_n \mu_n^{(m)}) D^{-(m+1)}$$

Ora notiamo che i coefficienti delle successive potenze di D^{-1}

$$\varphi_1 \mu_1^{(m)} + \varphi_2 \mu_2^{(m)} + \ldots + \varphi_n \mu_n^{(m)} \quad (m = n - 1, n, \ldots)$$

sono funzioni razionali delle radici $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ di F e delle loro derivate, e di più (poichè radici e moltiplicatori sono elementi contragredienti) sono funzioni *invarianti* nel senso voluto dal teorema dell'APPELL (§ 340); anzi, precisamente sono *invarianti assoluti*. Quindi essi sono esprimibili in funzione razionale dei coefficienti di F e delle loro derivate.

Ad ottenere effettivamente questa espressione (poichè il metodo indicato dal teorema dell'APPELL riescirebbe troppo laborioso) si presta facilmente il metodo dei coefficienti indeterminati (§ 164).

Supposto

$$F = D^n + \alpha_{n-1} D^{n-1} + \ldots + \alpha_1 D + \alpha_0 D^0,$$

poniamo

$$F^{-1} = \sum_0^{\infty} \lambda_m D^{-m},$$

dove $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sono funzioni da determinarsi convenientemente. Se dimostreremo che lo sviluppo che avremo determinato converge in un certo campo funzionale, potremo concludere, per la unicità dello sviluppo di un'operazione in serie di potenze della D^{-1} (§ 163) che codesto sviluppo è identico al primitivo, che, cioè, sussistono le uguaglianze

$$\lambda_m = \varphi_1 \mu_1^{(m-1)} + \varphi_2 \mu_2^{(m-1)} + \ldots + \varphi_n \mu_n^{(m-1)}.$$
$$(m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Dovendosi avere, indicando al solito con **1** l'operazione identica,

$$FF^{-1} = \mathbf{1},$$

cioè

$$F\left(\sum_0^{\infty} \lambda_m D^m\right) = \sum_0^{\infty} F(\lambda_m D^{-m}) = \mathbf{1}, \tag{33}$$

verrà, per la formola del D'ALEMBERT (Cap. VI),

$$\sum_0^{\infty} [F(\lambda_m) D^{-m} + F'(\lambda_m) D^{-m+1} + \frac{F''(\lambda_m)}{2!} D^{-m+2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{F^{(n)}(\lambda_m)}{n!} D^{-m+n}] = \mathbf{1}.$$

Il primo membro è uguale alla somma di una forma differenziale lineare d' ordine n e di una serie di potenze di D^{-1}; ora, pei teoremi dei §§ 163-165, dovremo identificare nei due membri i coefficienti delle varie potenze di D e di D^{-1}. Uguagliando dapprima i coefficienti di D^n, D^{n-1}, ..., D^2, D, otteniamo

$$\frac{1}{n!}F^{(n)}(\lambda_0) = o,$$

$$\frac{1}{(n-1)!}F^{(n-1)}(\lambda_0) + \frac{1}{n!}F^{(n)}(\lambda_1) = o,$$

$$\frac{1}{(n-2)!}F^{(n-2)}(\lambda_0) + \frac{1}{(n-1)!}F^{(n-1)}(\lambda_1) + \frac{1}{n!}F^{(n)}(\lambda_2) = o,$$

. . . .

$$F'(\lambda_0) + \frac{1}{2!}F''(\lambda_1) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}F^{(n-1)}(\lambda_{n-2}) + \\ + \frac{1}{n!}F^{(n)}(\lambda_{n-1}) = o,$$

ossia

$$\lambda_0 = o,$$

$$\frac{1}{(n-1)!}F^{(n-1)}(\lambda_0) + \lambda_1 = o,$$

$$\frac{1}{(n-2)!}F^{(n-2)}(\lambda_0) + \frac{1}{(n-1)!}F^{(n-1)}(\lambda_1) + \lambda_2 = o,$$

. . . .

$$F'(\lambda_0) + \frac{1}{2!}F''(\lambda_1) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}F^{(n-2)}(\lambda_{n-2}) + \lambda_{n-1} = o.$$

da cui risulta, in modo ricorrente,

$$\lambda_0 = o, \quad \lambda_1 = o, \quad \lambda_2 = o, \ldots, \lambda_{n-1} = o.$$

Continuando, poniamo uguale all' unità il coefficiente di D^0

$$F(\lambda_0) + F'(\lambda_1) + \frac{1}{2!}F''(\lambda_2) + \ldots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(\lambda_n) = 1:$$

di qui risulta, ove si tenga conto delle uguaglianze precedenti,

$$\lambda_n = 1.$$

Ponendo, infine, uguale a zero il coefficiente di D^{-m} per $m > n$, otteniamo:

$$F(\lambda_m) + F'(\lambda_{m+1}) + \frac{1}{2!}F''(\lambda_{m+2}) + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{(n-1)!}F^{(n-1)}(\lambda_{m+n-1}) + \frac{1}{n!}F^{(n)}(\lambda_{m+n}) = o$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots)$$

ossia

$$(34) \quad \lambda_{m+n} = -\Big(F(\lambda_m) + F'(\lambda_{m+1}) + \frac{1}{2!}F''(\lambda_{m+2}) + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{(n-1)!}F^{(n-1)}(\lambda_{m+n-1})\Big).$$

Quest' equazione ci permette di esprimere il coefficiente λ_{m+n} in funzione razionale (intera) dei coefficienti di F, delle funzioni λ_m, λ_{m+1}, ..., λ_{m+n-1} e delle derivate di queste ultime n funzioni. Discende di qui che ogni coefficiente λ_m è esprimibile, per mezzo di sole operazioni razionali e di derivazione, in funzione dei coefficienti di F: ciò è quanto dire che i coefficienti dello sviluppo in serie di potenze di D^{-1}, da noi determinato, appartengono allo stesso campo di razionalità dei coefficienti della forma F. Se introduciamo il simbolo θ rispetto all' indice intero m, la (34) si può scrivere

$$(35) \quad \theta^n\lambda_m = -\Big(F(\lambda_m) + F'\theta(\lambda_m) + \frac{1}{2!}F''\theta^2(\lambda_m) + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{(n-1)!}F^{(n-1)}\theta^{n-1}(\lambda_m)\Big);$$

essa è dunque un' equazione lineare mista alle derivate e alle differenze.

352. Lo sviluppo

$$\sum_{n}^{\infty}\lambda_m D^{-m},$$

del quale abbiamo così determinato, per via ricorrente, i successivi coefficienti, soddisfarà *formalmente* alla relazione

$$F(\Sigma\lambda_m D^{-m}) = 1.$$

Ma questo sviluppo ha pure una validità effettiva; precisamente, se le funzioni $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0$ appartengono ad $\mathfrak{S}^r$, lo sviluppo precedente converge nello spazio $\mathfrak{S}$ per valori di r abbastanza piccoli.

Infatti, le funzioni λ_{n+m} determinate per mezzo della (34) appartengono ad $\mathfrak{S}^r$, come quelle che sono ottenute da funzioni appartenenti ad $\mathfrak{S}^r$ con sole operazioni di somma, di moltiplicazione e derivazione. Sviluppata ciascuna λ_{n+m} in serie di potenze di x, consideriamo le serie che da queste si deducono sostituendo ad ogni singolo coefficiente il rispettivo modulo, ed indichiamo con $\overline{\lambda}_{n+m}$ le funzioni che restano così definite. Risulta dalle proprietà elementari delle serie di potenze che le funzioni $\overline{\lambda}_{n+m}$ appartengono pure ad $\mathfrak{S}^r$. Indichiamo con $\overline{\alpha}_{n-1}, \overline{\alpha}_{n-2}, \ldots, \overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_0$ le funzioni dedotte in modo analogo da $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0$ rispettivamente. Se Φ rappresenta la forma che si ottiene dalla F quando si sostituiscano ad $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0$ le funzioni $\overline{\alpha}_{n-1}, \overline{\alpha}_{n-2}, \ldots, \overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_0$ rispettivamente, e se poniamo, essendo u un numero positivo,

$$|x| \leq u < r,$$

avremo immediatamente, dalla formula (34),

$$\overline{\lambda}_{n+m}(u) \leq \Phi\big(\overline{\lambda}_m(u)\big) + \Phi'\big((\overline{\lambda}_{m+1}(u)\big) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{(n-1)!}\Phi^{(n-1)}(\overline{\lambda}_{n+m-1}).$$

Ora, sia g_m il valore assoluto massimo di $\lambda_n, \lambda_{n-1}, \lambda_{n-2}, \ldots, \lambda_{n+m-1}$ nel cerchio che ha centro nell'origine e raggio uguale ad r. Si avrà, come è noto,

$$\overline{\lambda}_{n+p} < g_m \frac{r}{r-u} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$$

e quindi

$$(36) \quad \overline{\lambda}_{n+p}(u) < g_m\left(\Phi\left(\frac{r}{r-u}\right) + \Phi'\left(\frac{r}{r-u}\right) + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \frac{1}{(n-1)!}\Phi^{(n-1)}\left(\frac{r}{r-u}\right)\right).$$

Ma, indicando con φ una funzione qualsivoglia, abbiamo immediatamente dal § 152:

$$e^{-x}\Phi(e^x\varphi) = \Phi(\varphi) + \Phi'(\varphi) + \frac{1}{2!}\Phi''(\varphi) + \ldots + \frac{1}{n!}\Phi^{(n)}(\varphi):$$

onde, aggiungendo al secondo membro della (36) il termine certamente positivo

$$g_m \frac{1}{n!}\Phi^{(n)}\left(\frac{r}{r-u}\right) = g_m \frac{r}{r-u},$$

otteniamo

$$\overline{\lambda}_{n+m} < g_m e^{-u}\Phi\left(\frac{re^u}{r-u}\right).$$

Se l'espressione

$$e^{-u}\Phi\left(\frac{re^u}{r-u}\right),$$

indipendente dall'indice m, avrà un valore maggiore di 1, indicheremo questo valore con k; se ha un valore non maggiore di 1, indicheremo con k un numero positivo qualsivoglia maggiore di 1; avremo in ogni caso

$$\overline{\lambda}_{n+p}(u) < g_m k, \qquad (p = o, 1, \ldots m-1).$$

Il ragionamento dianzi applicato a $\overline{\lambda}_m, \overline{\lambda}_{m+1}, \ldots, \overline{\lambda}_{m+n-1}$ si applicherà a $\overline{\lambda}_{m+1}, \overline{\lambda}_{m+2}, \ldots, \overline{\lambda}_{m+n}$: nulla sarà variato, solo al posto di g_m comparirà $g_m k$, e concluderemo

$$\overline{\lambda}_{n+m+1}(u) < g_m k^2.$$

In generale sarà

$$\overline{\lambda}_{m+q}(u) < g_m k^{q-n+1}, \qquad (q \overline{>} n);$$

cioè le funzioni $\overline{\lambda}_m(u)$ soddisfanno ad una condizione che include quella data al § 161 come sufficiente alla convergenza della serie

$$\sum_n^\infty \overline{\lambda}_m D^{-m}.$$

Abbiamo dunque che nello spazio $\mathfrak{S}$, per valori di x abbastanza piccoli in modulo, codesto sviluppo converge. Ma dal modo in cui abbiamo definito le funzioni $\overline{\lambda}_m$ risulta, per $|x| < u$,

$$|\lambda_m(x)| < \overline{\lambda}_m(u);$$

converge perciò anche lo sviluppo

$$\sum_n^\infty \lambda_m D^{-m},$$

come appunto volevamo dimostrare.

È manifesto che quanto abbiamo detto rispetto a sviluppi in serie di potenze nell' intorno dell' origine, si ripete con ovvia modificazione rispetto a serie di potenze di $x - x_0$, se x_0 è un punto arbitrario nel campo comune di validità dei coefficienti $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$.

Notiamo da ultimo l' intima analogia che intercede tra i procedimenti e i risultati del presente e del precedente § ed il noto sviluppo in serie di potenze delle funzioni razionali fratte. Tali sviluppi danno origine, come è noto, alle serie r i c o r r e n t i e l' ufficio che ha in tal caso la *scala di relazione* è, nelle precedenti nostre considerazioni, assunto dalla equazione mista alle derivate e alle differenze (35) del § prec. Come i coefficienti della serie ricorrente sono esprimibili razionalmente per mezzo dei coefficienti del denominatore della funzione razionale data, così i coefficienti dello sviluppo in serie di potenze di D^{-1}, da noi ottenuto per F^{-1}, appartengono al *campo* di razionalità dei coefficienti della forma F.

CAPITOLO DODICESIMO.

Forme differenziali lineari normali (1)

A. EQUAZIONE FONDAMENTALE — GRUPPO DI MONODROMIA.

353. Sia data una forma differenziale lineare d'ordine n

$$F = D^n + \alpha_{n-1}D^{n-1} + \alpha_{n-2}D^{n-2} + \ldots + \alpha_1 D + \alpha_0 D^0$$

e indichiamo con **a**, la regione di piano in cui sono simultaneamente regolari le funzioni $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$.

Se $x = x_0$ è un punto di **a**, sappiamo (§ 328) che lo spazio delle radici di F è tutto costituito di funzioni regolari nell'intorno del punto $x = x_0$.

Si assegni nel piano una linea l (chiusa), che partendo dal punto $x = x_0$ vi ritorni senza mai uscire da **a** e mantenendosi ad una distanza costantemente finita dal contorno di codesta regione. Continuando analiticamente lungo la linea l, in un determinato senso, un elemento qualsivoglia φ dello spazio delle radici relativo al punto $x = x_0$, della forma F, otterremo, dopo un numero finito di passaggi, un elemento ψ, relativo al punto $x = x_0$, distinto in generale da φ, ma appartenente sempre, pel noto *principio della conservazione delle proprietà analitiche*, allo spazio delle radici considerato.

(1) Per questo capitolo, cfr. SCHLESINGER, op. cit., T. I.

Indicheremo con Θ quell'operazione, evidentemente distributiva, che consiste nell'eseguire sopra una data funzione regolare, la continuazione analitica dal punto $x = x_0$ al punto $x = x_0$ medesimo, lungo la linea l, nel senso prefissato. Tale operazione fa dunque corrispondere ad ogni elemento dello spazio ad n dimensioni delle radici di F, relativo al punto $x = x_0$, un elemento dello spazio stesso.

354. L'operazione Θ, siccome distributiva, potrà rappresentarsi in codesto spazio ad n dimensioni, riferito ad un determinato sistema fondamentale, mediante una sostituzione lineare (§ 76).

Questa operazione, o ciò che è lo stesso, la sostituzione lineare che la rappresenta nello spazio delle radici di F, non è degenere in questo spazio. Infatti, siano

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$$

gli elementi di un sistema fondamentale di radici della F, considerati nell'intorno del punto $x = x_0$: per fissare le idee possiamo supporre che essi siano presi come elementi del sistema fondamentale di riferimento. Per continuazione analitica, dopo percorsa la linea l nel senso prefissato, si otterranno, corrispondentemente, n elementi

$$\Theta\varphi_1 = \psi_1, \Theta\varphi_2 = \psi_2, \ldots, \Theta\varphi_n = \psi_n,$$

relativi al punto $x = x_0$, appartenenti allo spazio delle radici di F, ma in generale distinti da

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$$

rispettivamente. Se tra le funzioni $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ intercedesse una relazione lineare a coefficienti costanti

$$a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \ldots + a_n\psi_n = o,$$

ad essa, per il *principio della conservazione delle proprietà analitiche*, dovrebbero pur soddisfare (contrariamente all'ipotesi) le radici $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, deducibili dalle $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ mediante l'operazione Θ^{-1}, cioè mediante la continuazione analitica lungo la linea l, percorsa in senso opposto a quello prefissato.

La Θ fa dunque corrispondere ad un sistema fondamentale di radici un sistema fondamentale, e perciò, nello spazio delle radici di F, è rappresentata per mezzo di una sostituzione lineare non degenere.

355. Come alla l, così ad ogni altra linea l', passante pel punto $x = x_0$ e soddisfacente alle condizioni imposte dianzi alla l, corrisponderà un'altra operazione Θ' ben determinata nello spazio delle radici di F relativo al punto $x = x_0$.

Discende da elementari proposizioni sulle funzioni analitiche che due operazioni Θ_1 e Θ_2, corrispondenti a due linee l_1, l_2 rispettivamente, sono o no identiche a seconda che le linee l_1 ed l_2 sono o no riducibili l'una all'altra per deformazione continua, senza che sia necessario uscire da **a**. Consideriamo, allora, un insieme di linee chiuse, passanti pel punto $x = x_0$, soddisfacenti alle solite restrizioni, e tali che a due a due siano tra loro irriducibili, mentre ogni altra linea chiusa, passante pel punto $x = x_0$ e interna ad **a**, sia riducibile ad una delle linee del sistema. Corrispondentemente avremo un determinato insieme di operazioni Θ, le quali formano *un gruppo* (§ 41).

Siano infatti Θ_1, Θ_2 due operazioni dell'insieme indicato, corrispondenti alle linee l_1, l_2 rispettivamente. Tra le linee del piano, passanti pel punto $x = x_0$ e interne ad **a**, vi è anche la linea l_3, costituita dalla linea l_1 e dalla linea l_2 considerata come continuazione della prima. Alla linea l_3 corrisponde un' operazione Θ_3, manifestamente uguale al prodotto $\Theta_2\Theta_1$. Si ha dunque, come appunto volevamo dimostrare, che l'insieme considerato di operazioni Θ costituisce

un gruppo. A codesto gruppo di operazioni, che indicheremo con G, si dà il nome di *gruppo di monodromia* della forma F, o dell'equazione differenziale $F = o$.

356. Nello spazio delle radici di F, relativo al punto $x = x_0$, si fissi un sistema fondamentale $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Rispetto a codesto sistema, ciascuna operazione Θ è rappresentata da una sostituzione lineare non degenere. Discende dalle precedenti considerazioni che le sostituzioni lineari, che rappresentano le singole operazioni Θ del sistema considerato, costituiscono esse stesse *un gruppo*, che indicheremo con G_φ e che, al pari del gruppo G delle operazioni Θ, al quale esso serve di rappresentante, potremo chiamare gruppo della forma F.

Si prenda ora come sistema di riferimento un sistema fondamentale di radici

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$$

distinto da $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, e sia T la trasformazione di coordinate (§ 17) nello spazio delle radici di F, che cambia il sistema $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ nel sistema $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$. Essa sarà rappresentata da una certa sostituzione lineare non degenere. Avremo

$$\psi_i = T(\varphi_i) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Sia allora S la sostituzione lineare non degenere del gruppo G_φ, che rappresenta una determinata operazione Θ. È facile dedurne la sostituzione lineare S', che rappresenta la medesima Θ, rispetto al sistema fondamentale $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$. Se l è la linea, che corrisponde all'operazione Θ dianzi considerata, ciascuna funzione φ_i si trasforma, per effetto della continuazione analitica lungo l, nella $S(\varphi_i)$: nello stesso tempo ogni funzione $\psi_i = T(\varphi_i)$ passerà nella $TS(\varphi_i)$, e, poichè $\varphi_i = T^{-1}(\psi_i)$, l'operazione Θ rispetto al sistema $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ sarà rappresentata dalla sostituzione lineare

$$TST^{-1},$$

trasformata di S per mezzo di T.

Questo risultato si suole esprimere colla scrittura

$$G_\psi = TG_\varphi T^{-1}.$$

357. Supponiamo che i coefficienti della forma F ammettano soltanto r punti singolari a distanza finita $a_1, a_2, \ldots, a_r$, oltre al punto all'infinito, che chiameremo a.

Indichiamo con

$$\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_r, \Theta_\infty,$$

le operazioni definite (§ 353) relativamente ad $r+1$ linee chiuse $l_1, l_2, \ldots, l_r, l$, passanti pel punto $x = x_0$, ciascuna delle quali abbracci uno ed uno solo dei punti $a_1, a_2, \ldots, a_r, a$. È manifesto che ogni operazione Θ del gruppo G si può esprimere come prodotto di operazioni scelte fra le

$$\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_\infty.$$

Ora fra queste $r+1$ operazioni intercede una ovvia relazione. Invero, per fissare le idee, immaginiamo che ciascuna linea l_i sia costituita:

1° di una parte rettilinea s_i, che, uscendo dal punto $x = x_0$ giunga ad un punto $x = c_i$ dell'intorno del corrispondente punto $x = a_i$;

2° della circonferenza γ_i di centro $x = a_i$, passante per il punto $x = c_i$ e tale che lasci all'esterno ogni altro punto singolare dell'equazione:

3° del segmento di retta s_i considerato a partire dal punto $x = c_i$ fino al punto $x = x_0$.

La linea l sia costituita di un segmento s di retta, maggiore delle distanze da $x = x_0$ di ciascun punto $x = a_i$ e di un cerchio γ, contenente nel suo interno tutti i punti $x = a_i$.

Lungo la circonferenza γ si dovrà naturalmente assumere come senso positivo quello che lungo le γ_i è negativo (da sinistra a destra in alto). È evidente che si può scegliere nell'intorno di ciascun punto $x = a_i$ il corrispondente punto $x = c_i$, in guisa che i segmenti $s_1, s_2, \ldots, s_r, s$ siano tutti distinti. Infine possiamo supporre che nel fascio di centro $x = x_0$ i segmenti $s_1, s_2, \ldots, s_r, s$ si susseguano attorno al punto $x = x_0$ nell'ordine in cui li abbiamo ora scritti e nel senso positivo.

È allora senz'altro chiaro che la linea costituita dallo insieme delle linee elementari $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_r$ percorse in senso positivo l'una di seguito all'altra, si può, per deformazione continua e senza oltrepassare alcun punto singolare della forma data, trasformare nella linea l, considerata in senso negativo. Risulta di qui tra le operazioni $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \ldots, \Theta_r, \Theta_\infty$ la relazione annunziata:

$$\Theta_1\Theta_2\Theta_3, \ldots \Theta_r = \Theta_\infty^{-1}$$

ossia

$$\Theta_1\Theta_2\Theta_3 \ldots \Theta_r\Theta_\infty = 1.$$

358. Data una forma differenziale lineare d'ordine n

$$F = D^n + \alpha_{n-1}D^{n-1} + \alpha_{n-2}D^{n-2} + \ldots + \alpha_1 D + \alpha_0 D^0,$$

sia $x = x_0$ un punto s i n g o l a r e i s o l a t o della forma, cioè un punto singolare di alcune o di tutte le funzioni $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \ldots, \alpha_0$, tale che sia finita la sua distanza r_1 dal punto singolare delle medesime funzioni che è ad esso più vicino.

Preso nell'intorno del punto $x = x_0$ un punto $\bar{x}$, tale che sia

$$|\bar{x} - x_0| = r < r_1,$$

prendiamo a studiare l'operazione Θ corrispondente alla circonferenza (r) di centro $x = x_0$ e di raggio r, percorsa nel senso positivo. Sappiamo già che lo spazio $\mathfrak{S}_n$ delle radici di F nell' intorno di $x = x_0$ è *invariante* rispetto all' operazione Θ.

Ora precisamente ci proponiamo di determinare gli spazi lineari contenuti in $\mathfrak{S}_n$, *invarianti* rispetto all' operazione Θ e, in particolare, gli *elementi invarianti*. A questi ultimi elementi, o radici di F le quali rendono soddisfatte relazioni della forma (§ 58)

$$\Theta(\varphi) = k\varphi,$$

dove k è una costante numerica, fu dato il nome di *integrali canonici* della equazione differenziale lineare omogenea $F = o$; noi le diremo anche *radici canoniche* di F. Per ottenere la classificazione di codesti spazi invarianti di radici non abbiamo se non da applicare a questo caso particolare i risultati ottenuti al Cap. IV sulla struttura di uno spazio ad un numero finito di dimensioni, *invariante* rispetto ad una operazione distributiva qualsivoglia.

Nello spazio $\mathfrak{S}_n$ fissiamo come sistema di riferimento un determinato sistema fondamentale

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n;$$

come sappiamo (§ 327), per individuare questo sistema basta assegnare la matrice dei valori che nel punto $x = \overline{x}$ fissato nell' intorno di $x = x_0$, assumono le funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ e le prime $n - 1$ loro derivate, sotto la condizione che il determinante di tale matrice sia diverso da zero.

Rispetto al sistema fondamentale prefissato, l' operazione Θ relativa alla circonferenza (r) è rappresentata da una determinata sostituzione lineare non degenere

$$\Theta(\varphi_i) = a_{i1}\varphi_1 + a_{i2}\varphi_2 + \ldots + a_{in}\varphi_n$$
$$(i = 1, 2, 3 \ldots n).$$

Ora si consideri la corrispondente equazione fondamentale

$$f(z) = \begin{vmatrix} a_{11} - z & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - z & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - z & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} - z \end{vmatrix} = o;$$

che dicesi *equazione fondamentale*, relativa al punto $x = x_0$, della forma F.

Se $c_1, c_2, \ldots, c_q$ sono le radici distinte, degli ordini di moltiplicità $r_1, r_2, \ldots, r_q$ rispettivamente $(r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_q = n)$ di questa equazione (§§ 83-90) lo spazio $\mathfrak{S}_n$ potrà considerarsi come somma di q spazi

$$\mathfrak{S}_{r_1}, \mathfrak{S}_{r_2}, \ldots, \mathfrak{S}_{r_q}$$

ad $r_1, r_2, \ldots, r_q$ dimensioni rispettivamente, ciascuno dei quali è *invariante* rispetto a Θ. Ogni spazio $\mathfrak{S}_{r_i}$ è alla sua volta somma di un certo numero di spazi invarianti, i quali corrispondono alle diverse radici proprie linearmente indipendenti delle successive potenze dell' operazione

$$E_{c_i} = \Theta - c_i.$$

Ognuno di codesti ultimi spazi invarianti (§ 85) è caratterizzato da ciò, che contiene un sistema fondamentale $\omega, \omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots, \omega^{(p-1)}$, rispetto al quale l'operazione Θ è rappresentata dalla sostituzione lineare

$$(1) \quad \begin{cases} \Theta(\omega) = c_i\omega \\ \Theta(\omega^{(1)}) = \omega + c_i\omega^{(1)} \\ \Theta(\omega^{(2)}) = \qquad \omega^{(1)} + c_i\omega^{(2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Theta(\omega^{(p-1)}) = \qquad \omega^{(p-2)} + c_i\omega^{(p-1)}. \end{cases}$$

A ciascuno dei sistemi di radici $\omega, \omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots, \omega^{(p-1)}$, che sono trasformati dalla nostra operazione Θ nel modo indicato dalla (1), si dà il nome di sottogruppo dello HAMBURGER, relativo al punto $x = x_0$. Il sistema fondamentale di radici, formato dall'insieme di tutti i sottogruppi dello HAMBURGER relativi al punto $x = x_0$, dicesi *sistema canonico* di radici relativo al punto $x = x_0$. Dicesi infine *sostituzione lineare canonica* la sostituzione lineare che rappresenta la Θ quando si prende come sistema di riferimento il sistema canonico.

Ogni sottogruppo dello HAMBURGER contiene una radice canonica ed una soltanto: cosicchè il numero delle radici canoniche di una forma dell'ordine n è in generale minore di n. Nel caso particolare in cui l'equazione fondamentale ammette n radici distinte

$$c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n,$$

il *sistema canonico* si compone di n radici $\omega_1, \omega_2 \ldots, \omega_n$, tali che è

$$\Theta(\omega_i) = c_i\omega_i \qquad (i = 1 . 2 \ldots n);$$

si hanno cioè n *radici canoniche* linearmente distinte [1].

359. I risultati del § precedente permettono di assegnare le espressioni analitiche delle radici di un sottogruppo dello HAMBURGER nell'intorno del punto $x = x_0$.

La Θ, che in sostanza, consiste nel far eseguire alla variabile x un giro lungo la circonferenza (r) a partire dal punto $x = \bar{x}$, si riconduce con una operazione di sostituzione (cambiamento di variabile) alla operazione θ di *differenza finita* [2]. Si ponga, invero, $x - x_0 = re^{2\pi i y}$, donde risulta

$$y = \frac{1}{2\pi i} \log \frac{x - x_0}{r}.$$

(1) Giova notare come l'ipotesi che la linea cui corrisponde l'operazione Θ, sia la circonferenza (r), non sia essenziale per le considerazioni esposte in questo §. Una analoga struttura dello spazio invariante varrà dunque per l'operazione corrispondente ad una linea chiusa qualsiasi racchiudente quanti si vogliano punti singolari.

(2) V. CASORATI, Annali di Matematica S. II, T. X, p. 10 e segg.

Se è $\bar{x} - x_0 = re^{2\pi i \bar{y}}$, l'eseguire l'operazione Θ equivale al tener costante il modulo di $\bar{x} - x_0$ e all'aumentarne di 2π l'argomento, cioè, rispetto alla variabile y, al passare dal valore $\bar{y}$ al valore $\bar{y} + 1$. Se dunque $\varphi(x)$ si muta in $f(y)$ per l'accennata trasformazione di variabile, avremo

$$\Theta(\varphi(x)) = f(y + 1) = \theta f(y).$$

Il caso più semplice che una funzione può presentare riguardo all'operazione Θ è di essere tale che

$$\Theta(\varphi) = \varphi,$$

ossia

$$\theta f(y) = f(y).$$

Una tale funzione, che, rispetto alla variabile y è periodica di periodo 1 (*costante* rispetto alla θ (§ 264)) ha, rispetto alla variabile x la proprietà di essere uniforme nell'intorno del punto $x = x_0$.

Premesso questo, prendiamo a considerare le radici di F appartenenti ad un sottogruppo dello HAMBURGER: siano $\omega, \omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots, \omega^{(p-1)}$.

Avremo

$$\begin{cases} \Theta(\omega) = c\omega \\ \Theta(\omega^{(i)}) = \omega^{(i-1)} + c\omega^{(i)} \quad (i = 1, 2, \ldots, p-1). \end{cases}$$

Eseguiamo ora il cambiamento di variabile indicato sopra: e indichiamo con $\bar{\omega}^{(i)}$ quello che, dopo tale cambiamento diventa la funzione $\omega^{(i)}$.

Avremo in primo luogo

$$\theta\bar{\omega} = c\bar{\omega},$$

equazione lineare omogenea alle differenze, del primo ordine, a coefficienti numerici, la cui soluzione generale (§ 308) è data da

$$\gamma c^y,$$

dove γ è una qualsivoglia costante rispetto a θ. La funzione $\bar{\omega}(y)$ si dedurrà da questa soluzione generale, assegnando a γ una conveniente determinazione.

Ripassando ora dalla variabile y alla variabile x, la γ, costante rispetto a Θ, diventerà una determinata funzione η_{oo}, uniforme nell'intorno del punto $x = x$. Inoltre indicando con a la costante $c^{-\frac{\log r}{2\pi i}}$ e ponendo

$$\frac{\log c}{2\pi i} = t$$

avremo con un calcolo semplicissimo

$$c^y = a(x - x_o)^t,$$

onde, includendo in η_{oo} la costante a,

$$\omega(x) = \eta_{oo}(x)(x - x_o)^t.$$

Passiamo a considerare un'altra qualsiasi delle radici di F appartenente al medesimo sottogruppo, per es. la $\omega^{(s-1)}(x)$. Essa è radice propria dell'operazione

$$E_c^s = (\Theta - c)^s.$$

Se quindi passiamo dalla variabile x alla variabile y, la funzione $\omega^{(s-1)}(x)$ diventa una funzione $\bar{\omega}^{(s-1)}(y)$, radice propria della forma lineare alle differenze, a coefficienti costanti, d'ordine s

$$(\theta - c)^s = \theta - sc\theta^{s-1} + \binom{s}{2}c^2\theta^{s-2} - \binom{s}{3}c^3\theta^{s-2} + \ldots + (-1)^s c^s.$$

Ora, poichè la equazione caratteristica di codesta forma è, se z indica l'incognita,

$$(z - c)^s = o,$$

la radice più generale della forma stessa è data da

$$c^y[\gamma_{o \cdot s-1} + \gamma_{1 \cdot s-1}y + \gamma_{2 \cdot s-1}y^2 + \ldots + \gamma_{s-1 \cdot s-1}y^{s-1}],$$

dove al solito $\gamma_{o.s-1}, \gamma_{1.s-1}, \ldots, \gamma_{s-1,s-1}$ rappresentano s funzioni arbitrarie, costanti rispetto a θ. Codesta espressione, per una particolare scelta delle funzioni $\gamma_{i,s-1}$, rappresenterà la funzione $\bar{\omega}^{(s-1)}(y)$.

Ripassando dalla variabile y alla variabile x, ogni funzione $\gamma_{i,s-1}$ si trasformerà in una determinata funzione uniforme nell'intorno del punto $x = x_o$: indicando con $\eta_{i,s-1}$ questa funzione, all'infuori di una costante numerica, otterremo, con considerazioni analoghe di quelle svolte per il caso precedente, l'espressione

$$\omega^{(s-1)}(x) = (x - x_o)^t[\eta_{o.s-1} + \eta_{1.s-1} \log (x - x_o) + \\ + \eta_{2.s-1} \log^2(x - x_o) + \ldots + \eta_{s-1.s-1} \log^{s-1} (x - x_o)].$$

Concludendo, le radici di un sottogruppo dello HAMBURGER, relativo al punto singolare isolato $x = x_o$, ammettono nell'intorno di questo punto espressioni analitiche della forma seguente:

$$(2) \quad \begin{cases} \omega(x) = (x - x_o)^t \eta_{oo} \\ \omega^{(1)}(x) = (x - x_o)^t[\eta_{o1} + \eta_{11} \log (x - x_o)] \\ \omega^{(2)}(x) = (x - x_o)^t[\eta_{o2} + \eta_{12} \log(x - x_o) + \eta_{22} \log^2(x - x_o)] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega^{(p-1)}(x) = (x - x_o)^t[\eta_{o.p-1} + \eta_{1.p-1} \log(x - x_o) + \\ \quad + \eta_{2.p-1} \log^2(x - x_o) + \ldots + \eta_{p-1.p-1} \log^{p-1}(x - x_o)]. \end{cases}$$

Le funzioni $\eta_{j.i}$, come già abbiamo notato, sono uniformi nell'intorno del punto $x = x_o$, in quanto sono *costanti* rispetto alla operazione Θ. D'altra parte, nell'intorno del punto $x = x_o$, al quale abbiamo qui ristretto le nostre considerazioni, le funzioni $\eta_{j,i}$ non possono avere alcuna singolarità fuori che nel punto $x = x_o$ stesso, come consegue dal teorema del Fuchs (§ 325).

Essendo pertanto r_1 la distanza di x_o dal punto singolare di F più vicino ad esso, ed $r < r_1$, ciascuna delle funzioni $\eta_{j,i}$, nella corona circolare comune ai due cerchi di centro nel punto $x = x_0$ e di raggio r ed r_1 rispettivamente, sarà rappresentabile per mezzo di una serie di LAURENT. In generale, ogni funzione $\eta_{j,i}$ avrà nel punto $x = x_0$ un punto singolare essenziale; si può dunque dire che in un punto singolare isolato di una forma differenziale lineare, ogni sua radice canonica presenta, in generale, la sovrapposizione di una diramazione (singolarità *algebroide*) e di una singolarità essenziale; mentre per ogni altra radice di un sottogruppo dello HAMBURGER vi si sovvrapone ancora una singolarità logaritmica.

B. PUNTI SINGOLARI NORMALI. — EQUAZIONE DETERMINANTE.

360. Al § 217 abbiamo definito le espressioni regolari nell'intorno del punto $x = o$. Similmente, si dicono regolari nell'intorno di un punto $x = x_0$ qualsivoglia le espressioni η tali che $S_{x+x_0}(\eta)$ sia regolare nell'intorno di $x = o$: e si dicono regolari nell'intorno del punto $x = \infty$ le espressioni η tali che $S_{\frac{1}{x}}(\eta)$ sia regolare nell'intorno del punto $x = o$. Discende di qui che le espressioni regolari nell'intorno del punto $x = x_0$ saranno combinazioni lineari a coefficienti numerici di un numero finito di funzioni della forma

$$\varphi(x)(x - x_0)^a \, log^m(x - x_0),$$

dove $\varphi(x)$ appartiene ad $\mathfrak{S}(x_0)$ ed m è un intero positivo. Similmente le espressioni regolari nel punto $x = \infty$ saranno combinazioni lineari di funzioni della forma

$$\varphi(x)x^a \, log^m x,$$

dove $\varphi(x)$ è una funzione sviluppabile in serie di potenze intere e positive di $\frac{1}{x}$.

361. Ciò premesso, osserviamo che le espressioni (2) delle radici ω di F (§ 358), quando tutte le funzioni $\eta_{i,j}$ non abbiano nel punto $x = x_0$ una singolarità essenziale, cioè vi siano affette al più da un polo, diventano espressioni regolari (§ 217) nell'intorno del punto $x = x_0$. Ora si può assegnare per i coefficienti della F una condizione necessaria e sufficiente affinchè le radici della forma, nell'intorno di un loro punto singolare determinato, siano tutte rappresentabili per mezzo di espressioni regolari.

La condizione necessaria è data dal seguente teorema:

Se le radici di F *sono tutte rappresentabili nell'intorno di $x = x_0$ per mezzo di espressioni regolari, i coefficienti della forma*

$$F = D^n + \alpha_{n-1}D^{n-1} + \ldots + \alpha_1 D + \alpha_0$$

non possono avere per $x = x_0$ se non singolarità polari: precisamente il coefficiente α_i per $x = x_0$ può avere al più un polo di ordine $n - i$.

Per semplificare le notazioni porremo $x_0 = o$.

a) Consideriamo dapprima un'equazione del primo ordine

$$D\varphi + \alpha\varphi = o.$$

Se la sua unica soluzione nell'intorno del punto singolare $x = o$ è rappresentabile per mezzo di una espressione regolare, essa avrà la forma

$$x^t\eta(x),$$

dove $\eta(x)$ appartiene ad $\mathfrak{S}^o$ e si può supporre $\eta(o) \neq o$. Sarà allora, posto $D\eta = \eta'$,

$$tx^{t-1}\eta + x^t\eta' + \alpha x^t\eta = o,$$

e quindi

$$\alpha = -\frac{t\eta + x\eta'}{x\eta}.$$

Risulta di qui che α ha nel punto $x = o$ un polo del primo ordine, salvo il caso di $t = o$, nel quale α appartiene ad $\mathfrak{S}^o$.

b) Indicando con ω un'espressione regolare $x^t\eta$, dove η appartiene ad $\mathfrak{S}^o$ ed è $\eta(o) \neq o$, avremo per la formola del D'ALEMBERT (§ 152)

$$F M_\omega = \frac{F^{(n)}(\omega)}{n!} D^n + \frac{F^{(n-1)}(\omega)}{(n-1)} D^{n-1} + \ldots + F'(\omega) D + F(\omega),$$

ossia sviluppando e dividendo pel coefficiente di D^n, certamente non nullo,

$$F_1 = D^n + \left(n \frac{\omega'}{\omega} + \alpha_{n-1}\right) D^{n-1} +$$
$$+ \left(\binom{n}{1}\frac{\omega''}{\omega} + (n-1)\, \alpha_{n-1} \frac{\omega'}{\omega} + \alpha_{n-2}\right) D^{n-1} + \ldots$$
$$\ldots + \left(\frac{\omega^{(n)}}{\omega} + \alpha_{n-1} \frac{\omega^{(n-1)}}{\omega} + \ldots + \alpha_1 \frac{\omega'}{\omega} + \alpha_o\right) D^o.$$

Risulta manifesto di qui che se i coefficienti della F soddisfanno alla condizione enunciata sopra, vi soddisfanno anche i coefficienti di F_1. Reciprocamente, se alla detta condizione soddisfa la F_1, vi soddisfa altresì la F, giacchè questa, all'infuori di una moltiplicazione a sinistra, si ottiene dalla F eseguendo a destra di questa la moltiplicazione per la funzione

$$\frac{1}{\omega} = x^{-t} \frac{1}{\eta},$$

la quale è della stessa natura della $\omega = x^t\eta$, se come abbiamo supposto, η non è nulla nel punto $x = o$.

c) Premessa questa osservazione, dimostriamo che il teorema enunciato in principio di questo § vale per una forma d'ordine qualsivoglia.

Supponiamo perciò il teorema già dimostrato per le forme di ordine $n-1$, e, per dimostrarlo nel caso delle forme di ordine n, supponiamo che nell'intorno del punto $x = o$ tutte le radici della forma F, di ordine n, siano rappresentate da espressioni regolari. Codeste radici daranno luogo almeno ad un sottogruppo di HAMBURGER, al quale apparterrà una radice canonica

$$\omega = x^t\eta,$$

dove η è una funzione di $\mathfrak{S}^o$, non-nulla per $x = o$.

Dedotta dalla F, come dianzi indicammo, la F_1, questa avrà come radici i quozienti per ω delle radici di F. Ma se φ è rappresentata nell'intorno di $x = o$ da una espressione regolare, tale è ancora la $\frac{\varphi}{\omega}$; cosicchè tutte le radici di F_1 ammetteranno in quell'intorno un'espressione regolare.

Ora, siccome ω è radice di F, la F_1 ammetterà come radice la costante, onde risulta che la $F_1 D^{-1}$ è una forma differenziale lineare d'ordine $n-1$, le cui radici, come derivate di funzioni rappresentabili nell'intorno di $x = o$ mediante espressioni regolari, sono esse stesse tali (§ 223 *b*)). Ma per le forme d'ordine $n-1$ il teorema si è supposto dimostrato; quindi in $F_1 D^{-1}$ il coefficiente di D^i ha, per $x = o$, al più un polo di ordine $n - 1 - i$ e, di conseguenza, in F_1 il coefficiente di D^i ha al più un polo di ordine $n - i$. Ma all'infuori di una moltiplicazione a sinistra la F è data da $F_1 M_{\frac{1}{\omega}}$: per l'osservazione *b*) premessa a questo ragionamento avremo quindi che i coefficienti di F soddisfaranno alla medesima condizione cui soddisfanno quelli di F_1. Il teorema, già verificato direttamente per le forme del primo ordine, è così stabilito in tutta la sua generalità.

Concludiamo da ciò che ogni forma, le cui radici nell'intorno di un punto $x = x_o$ siano tutte rappresentabili per mezzo di espressioni regolari, si riduce mediante una conveniente moltiplicazione a sinistra, al tipo

$$(3) \qquad (x-x_o)^n D^n + (x-x_o)^{n-1}\alpha_{n-1}D^{n-1} + \dots + (x-x_o)\alpha_1 D + \alpha_o$$

dove $\alpha_o, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ sono funzioni di $S^o(x_o)$. Si vede che se $\alpha_o, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ sono polinomi in x, il cui massimo grado sia p, codesta operazione è una operazione normale di ordine p.

362. La condizione sufficiente è data dal teorema reciproco del precedente, cioè:

S e l'a F s i p u ò p o r r e s o t t o l a f o r m a (3), d o v e $\alpha_{n-1}, \dots \alpha_1, \alpha_o$ s o n o e l e m e n t i d i $S^o(x_o)$ l e r a d i c i d i F, n e l l' i n t o r n o d i $x = x_o$, s o n o r a p p r e s e n t a b i l i m e d i a n t e e s p r e s s i o n i r e g o l a r i.

Ciò si dimostra, cercando effettivamente le espressioni delle radici di una forma normale F del tipo (3) nell'intorno del punto $x = x_o$; e a tale scopo valgono considerazioni perfettamente analoghe a quelle svolte nei §§ 225, 233, 238 per le operazioni normali.

Trasportando il punto singolare nell'origine, consideriamo la forma

$$F = x^n \alpha_n D^n + x^{n-1}\alpha_{n-1}D^{n-1} + \dots + x\alpha_1 D + \alpha_o,$$

dove le $\alpha_o, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ sono funzioni di S^o, ed $\alpha_n(x)$ è nell'origine diversa da zero. Sia precisamente

$$\alpha_i = \sum_o^\infty a_{i,j}x^j \quad (i = o, 1, \dots, n); \quad a_{n.o} \neq o.$$

Avremo, prescindendo per ora dalla questione della convergenza:

$$F(x^t) = x^t \sum_{j=o}^\infty x^j \bar{\omega}_j(t),$$

dove

$$\bar{\omega}_j(t) = \sum_{i=o}^n a_{ij}\frac{t(t-1)\dots(t-i+1)}{i!}$$

e in particolare

$$\bar{\omega}_o(t) = \sum_{i=o}^n a_{i\,o}\frac{t(t-1)\dots(t-i+1)}{i!}.$$

Posto, come al § 233,

$$\varphi(x,t) = \sum_{m=o}^\infty k_m(t)x^m$$

consideriamo l'equazione differenziale lineare non omogenea

$$F(x^t\varphi(x,t)) = \lambda(t)x^t,$$

dove $\lambda(t)$ è una funzione analitica, che supponiamo prefissata. Siccome formalmente si ha

$$F(x^t\varphi(x,t)) = x^t \sum_{m=o}^\infty (k_o(t)\bar{\omega}_m(t) + k_1(t)\bar{\omega}_{m-1}(t+1) + \dots + k_m(t)\bar{\omega}_o(t+m))x^m,$$

ne risulta che i coefficienti k_m dovranno soddisfare alle relazioni

$$(4) \qquad k_o(t)\bar{\omega}_o(t) = \lambda(t)$$

e

$$(5) \qquad k_o(t)\bar{\omega}_m(t) + k_1(t)\bar{\omega}_{m-1}(t+1) + \dots + k_m(t)\bar{\omega}_o(t+m) = o.$$

Se $\bar{\omega}_o(t), \bar{\omega}_o(t+1), \dots, \bar{\omega}_o(t+m)$ sono diversi da zero, $k_m(t)$ è univocamente determinato dalle precedenti equazioni

(4) e (5), quando sia dato $\lambda(t)$. Se dunque $\bar{\omega}_0(t+m)$ non è identicamente nullo per nessun valore intero positivo di m, si può sempre assegnare per $F^{-1}(\lambda(t)x^t)$ una determinazione appartenente allo spazio indicato al § 217 con $\mathfrak{W}$.

Ora, come fu dimostrato già dal FROBENIUS [1], la serie $\varphi(x, t)$ converge uniformemente tanto rispetto a t che rispetto ad x nell'intorno di $x = o$ e di ogni valore $\bar{t}$ di t, in cui $\lambda(t)$ sia regolare e $\bar{\omega}_0(\bar{t}+m)$ sia diverso da zero per ogni qualsivoglia intero positivo m.

La

$$\bar{\omega}_0(t) = o$$

è una equazione algebrica di grado n, che dal FUCHS fu chiamata **equazione fondamentale determinante** della forma F (o dell'equazione omogenea corrispondente) rispetto al punto singolare $x = o$, e che di solito è semplicemente detta *equazione determinante*. Distribuiamo le n radici dell'equazione determinante in gruppi, assegnando ad uno stesso gruppo tutte e sole quelle che differiscono, da una qualsivoglia di esse, per numeri interi. Uno di codesti gruppi sia costituito dalle radici

$$t_1,\ t_2 = t_1 + q_1, \ldots,\ t_r = t_{r-1} + q_{r-1}$$

degli ordini di moltiplicità $s_1, s_2, \ldots, s_r$ rispettivamente: e supponiamo di avere distribuito gli indici in modo che i numeri interi $q_1, q_2, \ldots, q_r$ siano positivi. Si trova come a pag. 179 che l'espressione

$$\rho(t) = \bar{\omega}_0(t)\bar{\omega}_0(t+1)\ldots\ \bar{\omega}_0(t + q_1 + q_2 + \ldots + q_{r-1})$$

ammette la t_i come radice multipla dell'ordine $s_i + s_{i-1} + \ldots \ldots + s_r$ di moltiplicità.

---

[1] Per la dimostrazione, si veda il luogo dello SCHLESINGER già cit. a pag. 180.

Scelto allora

$$\lambda(t) = k_0(t)\bar{\omega}_0(t) \tag{6}$$

e

$$k_0(t) = \bar{\omega}_0(t+1)\bar{\omega}_0(t+2)\ldots\bar{\omega}_0(t + q_1 + q_2 + \ldots + q_{r-1}), \tag{7}$$

avremo determinato nella $x^t\varphi(x, t)$ una soluzione dell'equazione

$$F(x^t\varphi(x, t)) = \rho(t)x^t,$$

e, come al ricordato § 233, si concluderà senz'altro che saranno radici di F le funzioni

$$x^{t_i}\varphi(x, t_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r) \tag{8}$$

e le funzioni

$$\frac{\partial^p}{\partial t^p}\, x^{t_i}\varphi(x, t_i) \tag{9}$$

$$(p = 1, 2, \ldots, s_i + s_{i+1} + \ldots + s_r - 1).$$

Per compiere la dimostrazione del teorema, ci rimane a far vedere anzitutto che le radici trovate sono espressioni regolari nell'intorno di $x = o$ e in secondo luogo che nel modo suindicato si ottengono n radici di F linearmente indipendenti.

363. È anzitutto manifesto che le (8) sono, nell'intorno di $x = o$, espressioni regolari. In quanto alle (9), ciò risulta subito dall'essere

$$\frac{\partial^p}{\partial t^p} x^t\varphi(x, t) = x^t \sum_{m=o}^{\infty} \Big(k_m log^p x + pk'_m log^{p-1} x + \ldots + \binom{p}{p-1} k_m^{(p-1)} log\, x + k_m^{(p)}\Big) x^m, \tag{10}$$

dove con apici abbiamo designato le derivate di k_m rispetto a t. Rimane da vedere quali e quante fra le radici di F dianzi determinate siano distinte.

Data una espressione regolare nell'intorno di $x = x_0$, avente la forma

$$\eta = (x = x_0)^t(\eta_0 + \eta_1 \log(x - x_0) + \ldots + \eta_p \log^p(x - x_0)),$$

si dice che essa *appartiene all'esponente* t se fra le funzioni $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_p$, regolari nell'intorno di $x = x_0$, una *almeno* è per $x = x_0$ diversa da zero.

Ora ci proponiamo di far vedere che non tutte le radici di F che si hanno dalla (9) dando a t il valore t_i e a p successivamente i valori

$$0, 1, 2, \ldots, s_i + s_{i+1} + \ldots + s_r - 1,$$

appartengono all'esponente t_i

Infatti, per $t = t_i$ il termine indipendente dai logaritmi nella (10) si riduce ad

$$x^{t_i} \sum_{m=0}^{\infty} k_m^{(p)}(t_i) x^m$$

e in questa serie il primo coefficiente è $k_0^{(p)}(t_i)$. Ma abbiamo scelto

$$k_0(t) = \bar{\omega}_0(t+1)\bar{\omega}(t+2) \ldots \bar{\omega}_0(t + q_1 + \ldots + q_{r-1});$$

onde risulta che t_i è radice di $k_0(t)$, multipla dell'ordine $s_{i+1} + s_{i+2} + \ldots + s_r$; sarà quindi

$$k_0^{(p)}(t_i) \neq o$$

sempre e solo quando p sia tale che

$$p \geq s_{i+1} + s_{i+2} + \ldots + s_r;$$

d'altro canto, affinchè $\frac{\partial^p}{\partial t_i^p} x_{t_i} \varphi(x, t_i)$ sia radice di F, si richiede (§ prec.) che sia:

$$p < s_i + s_{i+1} + \ldots + s_r.$$

Ne deduciamo che la (10), ove sia posto $t = t_i$, ci fornirà radici di F appartenenti all'esponente t_i, in corrispondenza ai seguenti valori di p:

$$s_{i+1} + s_{i+2} + \ldots + s_r, \quad s_{i+1} + s_{i+2} + \ldots + s_r + 1, \ldots,$$
$$s_i + s_{i+1} + \ldots + s_r - 1,$$

i quali sono precisamente in numero di s_i.

Concludiamo dunque che ad ogni radice t_i dell'equazione determinante, multipla dell'ordine s_i, corrispondono per la forma F s_i radici, rappresentate ciascuna, nell'intorno di $x = x_0$, da una espressione regolare in codesto intorno e appartenente all'esponente t_i. Si ottengono in tal guisa n radici in tutto per la forma F; e la loro indipendenza lineare si dimostra assai facilmente, ricorrendo alle proprietà delle espressioni regolari (§ 223).

Riassumendo i risultati ottenuti dal § 361 in avanti, concludiamo che condizione necessaria e sufficiente affinchè tutte le radici di una forma differenziale lineare F di ordine n siano, nell'intorno di un punto singolare $x = x_0$, rappresentabili mediante espressioni regolari, si è che, per mezzo di una conveniente moltiplicazione a sinistra la F sia riducibile al tipo

$$F = (x - x_0)^n \alpha_n D^n + (x - x)^{n-1} \alpha_{n-1} D^{n-1} + \ldots$$
$$\ldots + (x - x_0)\alpha_1 D + \alpha_0$$

dove $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sono funzioni di $\mathfrak{S}^o(x_0)$, l'ultima delle quali nel punto $x = x_0$ è diversa da zero.

364. Dal teorema precedente possiamo dedurre immediatamente la condizione necessaria e sufficiente affinchè una forma F abbia tutte le sue radici rappresentabili nell'intorno di $x = \infty$, mediante espressioni regolari.

Bisogna che la forma differenziale lineare $S_{\frac{1}{x}} F S_{\frac{1}{x}} = F_1$

abbia tutte le radici rappresentabili mediante espressioni regolari nell'intorno del punto $x = o$ (§ 360), che cioè, sia (§ preced.).

$$F_1 = x^n \alpha_n D^n + x^{n-1}\alpha_{n-1}D^{n-1} + \ldots + x\alpha_1 D + \alpha_0,$$

dove $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sono funzioni di $\mathfrak{S}$ ed è $\alpha_n(o) \neq o$.

Ora si ha (cfr. Cap. XIII, § 371)

$$S_{\frac{1}{x}} D S_{\frac{1}{x}} = - x^2 D$$

e quindi

$$S_{\frac{1}{x}} D^2 S_{\frac{1}{x}} = (x^2 D)^2 = x^3(xD^2 + D)$$
$$S_{\frac{1}{x}} D^3 S_{\frac{1}{x}} = -(x^2 D)^3 = - x^4(x^2 D^3 + 6xD^2 + 6D)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ne concludiamo che la forma $F = S_{\frac{1}{x}} F_1 S_{\frac{1}{x}}$ è data da

$$F = \alpha_0\left(\tfrac{1}{x}\right) - x\alpha_1\left(\tfrac{1}{x}\right)D + x\alpha_2\left(\tfrac{1}{x}\right)(xD^2 + 2D) - x\alpha_3\left(\tfrac{1}{x}\right)(x^2 D + 6xD^2 + 6D) + \ldots,$$

ossia ordinando nel solito modo, da

$$F = x^n \beta_n D^n + x^{n-1}\beta_{n-1}D^{n-1} + \ldots + x\beta_1 D + \beta_0,$$

dove $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ sono funzioni regolari nell'intorno di $x = \infty$ ed è $\beta_n(\infty) \neq o$.

365. Tra l'equazione determinante di una forma F rispetto ad un punto singolare $x = x_0$, e l'equazione fondamentale relativa al medesimo punto, passa una relazione essenziale. Se t_j è una radice dell'equazione determinante, la forma F ammette una radice della forma

$$\omega = x^{t_j}\eta,$$

dove η è una funzione uniforme nell'intorno del punto $x = x_0$. Riprendendo l'operazione Θ del § 353, avremo

$$\Theta(\omega) = e^{2\pi i t_j}\omega;$$

onde risulta che ω è una radice canonica di F nell'intorno di $x = x_0$, e che il moltiplicatore corrispondente

$$e^{2\pi i t_j}$$

è radice dell'equazione fondamentale di F relativa al punto $x = x_0$. L'equazione determinante $\bar{\omega}_0(t) = o$, relativa al punto $x = x_0$ è dunque la trasformata dell'equazione fondamentale $f(z) = o$, relativa al medesimo punto, per mezzo della trasformazione

$$t = \frac{1}{2\pi i} \log z.$$

Ad ognuno dei gruppi di radici t_i di $\bar{\omega}_0(t) = o$, definiti al § 362, corrisponde per $f(z) = o$ un'unica radice il cui ordine di moltiplicità è la somma degli ordini di moltiplicità delle t_i.

C. FORME ED EQUAZIONI DEL FUCHS.

366. Cerchiamo a quali condizioni debbano soddisfare i coefficienti, supposti ad un valore in tutto il piano, di una forma differenziale lineare

$$F = D^n + \alpha_{n-1}D^{n-1} + \ldots + \alpha_1 D + \alpha$$

affinchè le radici di F siano rappresentabili nell'intorno di ogni punto singolare (a distanza finita o infinita) mediante espressioni regolari.

Per il teorema del § 361 le funzioni α_i non possono avere se non delle singolarità polari; la teoria delle funzioni permette dunque di concludere che i punti singolari delle α_i devono essere in numero finito e che le α_i sono necessariamente funzioni razionali.

Indichiamo con

$$a_1, a_2, \ldots, a_r$$

i punti singolari a distanza finita. Dal teorema del § 363, discende immediatamente che deve essere

$$\alpha_i = \frac{\pi_i}{\gamma(x)^{n-i}},$$

dove abbiamo posto

$$\gamma(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_r),$$

e i π_i sono polinomii. Di più, anche per $x = \infty$, le radici di F devono essere rappresentabili mediante espressioni regolari. Affinchè ciò accada, è necessario e sufficiente che la F sia riducibile alla forma (§ 364)

$$D^n + \frac{\beta_{n-1}}{x} D^{n-1} + \ldots + \frac{\beta_1}{x^{n-1}} D + \frac{\beta_0}{x^n},$$

dove $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ rappresentano funzioni regolari nell'intorno di $x = \infty$. Ne discende che π_{n-1} deve essere un polinomio di grado $r - 1$ e, in generale, π_i di grado $(n - i)(r - 1)$. I coefficienti della F, ridotta alla forma

$$\gamma^n D^n + \gamma^{n-1}\pi_{n-1} D^{n-1} + \ldots + \gamma\pi_1 D + \pi_0$$

sono pertanto polinomi interi in x, di grado decrescente di un'unità da termine a termine, a partire da rn.

Le forme differenziali lineari studiate in questo § e le corrispondenti equazioni omogenee prendono il nome di **forme e di equazioni differenziali lineari del** FUCHS.

367. Una qualsivoglia forma a coefficienti razionali interi, di grado decrescente di un'unità da termine a termine, appartiene, *in generale*, alla classe del FUCHS.

Sia infatti

$$F = \alpha_n D^n + \alpha_{n-1} D^{n-1} + \ldots + \alpha_1 D + \alpha_0$$

una forma siffatta: precisamente $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_0$ siano polinomi in x di grado m, $m - 1$, ... $m - n$ rispettivamente, con $m \geq n$. Moltiplicando la F a sinistra per α_n^{n-1} otteniamo la forma

$$\alpha_n^n D^n + \alpha_n^{n-1}\beta_{n-1} D^{n-1} + \ldots + \alpha_n\beta_1 D + \beta_0,$$

dove abbiamo posto

$$\beta_i = \alpha_n^{n-i-1} . \alpha_i;$$

e poichè β_i è un polinomio di grado

$$(n - i - 1)m + m - n + i = (m - 1)(n - i),$$

è reso manifesto che la F appartiene alla classe del FUCHS.

Giova notare che al § 365 la funzione razionale $\gamma(x)$ di grado r ammetteva, per ipotesi necessaria, r radici distinte: perciò l'osservazione fatta or ora vale senza restrizione nel caso in cui $\alpha_n(x)$ abbia sole radici semplici; quando invece $\alpha_n(x)$ abbia una radice multipla a_i dell'ordine r_i, si vede agevolmente che condizione necessaria e sufficiente affinchè la F appartenga alla classe del FUCHS, si è che la a_i sia radice di $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \ldots, \alpha_{n-r_i+1}$, multipla degli ordini $r_i - 1$, $r_i - 2, \ldots, 1$ rispettivamente.

368. Sia data la forma differenziale lineare F, d'ordine n, appartenente alla classe del FUCHS e avente come punti singolari, oltre il punto all'infinito, i punti

$$a_1, a_2, \ldots, a_r$$

Pel gruppo di monodromia della F varranno le osservazioni del § 357: qui ne aggiungeremo qualche altra, che ci condurrà a stabilire una notevole relazione fra le radici delle $r+1$ equazioni determinanti, relative ai diversi punti singolari di F.

Conserveremo le notazioni e le convenzioni dei §§ 354-357. Indichiamo con $[\varphi]$ il sistema canonico di radici di F, relativo al punto singolare $x=\infty$, e con $[\varphi_i]$ il sistema canonico relativo al punto singolare $x=a_i$: di più rappresentiamo con S ed S_i le sostituzioni canoniche di $[\varphi]$ e di $[\varphi_i]$ rispettivamente. È manifesto che queste $r+1$ sostituzioni lineari non bastano a determinare tutte le operazioni $\Theta_1\ldots,\Theta_r$, rispetto al sistema canonico $[\varphi]$. È necessario, per ottenere l'intento, che siano assegnate anche le sostituzioni lineari che fanno passare dal sistema canonico $[\varphi]$ a ciascuno dei sistemi canonici $[\varphi_i]$. Siano queste

$$[\varphi_i]=A_i[\varphi].$$

Le $2r+1$ sostituzioni lineari S, S_i, A_i non sono tutte indipendenti. Ricordiamo, infatti, la relazione

$$\Theta_1\Theta_2\ldots.\ \Theta_r\Theta_\infty=\mathbf{1},$$

trovata al § 357. Rispetto al sistema fondamentale $[\varphi]$, la Θ_∞ è rappresentata dalla sostituzione lineare S. Quanto alla Θ_i, osserviamo che essa è rappresentata dalla S_i rispetto al sistema $[\varphi_i]$, per cui è

$$[\varphi_i]=A_i[\varphi].$$

Ne discende (§ 356) che, rispetto al sistema fondamentale $[\varphi]$, la Θ_i sarà rappresentata da

$$A_i^{-1}S_iA_i.$$

La relazione del § 357, ricordata sopra, diventa allora,

$$A_1^{-1}S_1A_1A_2^{-1}S_2A_2\ldots A_r^{-1}S_rA_rS=\mathbf{1};$$

e questa equazione tra operazioni ci conduce tosto alla accennata relazione fra le radici delle equazioni determinanti di F.

Si ha infatti:

a) che il determinante di un prodotto di sostituzioni lineari è uguale al prodotto dei determinanti delle singole sostituzioni lineari date;

b) che il determinante della inversa di una data sostituzione lineare è uguale all'inversa aritmetica del determinante della sostituzione data;

c) che il determinante della sostituzione identica $\mathbf{1}$ è uguale ad 1.

Se quindi indichiamo con s_i ed s i valori dei determinanti delle sostituzioni lineari S_i ed S rispettivamente, avremo

$$ss_1s_2\ldots s_r=1.$$

D'altra parte si vede subito che il determinante della sostituzione canonica, relativa ad un dato punto singolare, non è altro che il prodotto delle radici della corrispondente equazione fondamentale. Dunque il prodotto di tutte le radici delle $r+1$ equazioni fondamentali di F è uguale all'unità.

Ma se

$$t_{j.1},\ t_{j.2},\ldots,\ t_{j.n}$$

sono le radici, distinte o coincidenti in parte o tutte, dell'equazione determinante relativa al punto $x=x_j$, e se

$$t_1,\ t_2,\ldots,\ t_n$$

sono quelle dell'equazione determinante relativa al punto $x=\infty$, le radici delle corrispondenti equazioni fondamentali sono

$$e^{2\pi i t_{j.1}},\ e^{2\pi i t_{j.2}},\ldots,\ e^{2\pi i t_{j.n}}$$

ed

$$e^{2\pi i t_1},\ e^{2\pi i t_2}, \ldots,\ e^{2\pi i t_n}.$$

Se dunque poniamo

$$\sum t_{j\cdot i} + \sum t_i = k, \qquad \binom{j = 1, 2, \ldots r}{i = 1, 2, \ldots n}$$

avremo

$$e^{2\pi i k} = 1;$$

onde risulta che la somma

$$\sum_{j.i} t_{j.i} + \sum t_i$$

è un numero intero.

Concludiamo che la somma delle radici delle $r+1$ equazioni determinanti di F è uguale ad un numero intero.

Mediante il calcolo diretto si trova senza difficoltà che questo numero è uguale ad

$$\frac{n(n-1)(r-1)}{2} \text{ [1]}.$$

369. Consideriamo, come caso particolare, una forma differenziale lineare della classe del Fuchs del secondo ordine e avente due punti singolari a distanza finita $x = a_1$ ed $x = a_2$. Essa sarà del tipo

$$F = (x-a_1)^2(x-a_2)^2 D^2 + (x-a_1)(x-a_2)(b_1 x + b_0)D + \\ + (c_2 x^2 + c_1 x + c_0)D^o.$$

È sempre possibile trovare una tale operazione di sostituzione S_φ che la forma FS_φ abbia come coefficienti di D^2, D, D^o tre polinomi dei gradi 2, 1, o rispettivamente. Un cal-

[1] Cfr. Schlesinger: Bd. I, pag. 241.

colo semplice dimostra che basta formare perciò la trasformata di F per mezzo della moltiplicazione M_ω, dove

$$\omega = (x-a_1)^{t_1}(x-a_2)^{t_2},$$

e t_1 e t_2 sono radici delle equazioni determinanti di F relative ad a_1 ed a_2 rispettivamente. Si trova così:

$$M_\omega^{-1} F M_\omega = (x-a_1)^2(x-a_2)^2 D^2 + \\ (x-a_1)(x-a_2)(2t_1(x-a_2) + 2t_2(x-a_1) + b_1 x + b_0)D + \pi_2(x)$$

dove π_2 è il polinomio di secondo grado in x:

$$t_1(t_1-1)^2(x-a)^2 + t_2(t_2-1)(x-a_1)^2 + 2t_1 t_2(x-a_1)(x-a)_2 + \\ + (b_1 x + b_0)(t_1(x-a_2) + t_2(x-a_1)) + c_2 x^2 + c_1 x + c_0.$$

Dal modo in cui abbiamo scelto t_1 e t_2 è manifesto che le equazioni determinanti di $M_\omega^{-1} F M_\omega$, relative ad $x = a_1$ $x = a_2$ devono avere ciascuna una radice nulla; in ciascuna di esse, cioè, deve esser nullo il termine noto.

Ora sappiamo (§ 362) che, a meno di un fattore numerico diverso da zero, il termine noto dell'equazione determinante relativa al punto singolare $x = a_i$ è il valore per $x = a_i$ del coefficiente di D^o nella forma che si considera. Avremo, dunque, nel nostro caso

$$\pi_2(a_1) = o, \quad \pi_2(a_2) = o;$$

cioè il polinomio di secondo grado $\pi_2(x)$ sarà uguale, a meno di un fattere numerico, al prodotto $(x-a_1)(x-a_2)$. Dividendo per questo prodotto i coefficienti della forma $M_\omega^{-1} F M_\omega$ otteniamo la forma

$$F_1 = (x-a_1)(x-a_2)D^2 + [2t_1(x-a_2) + 2t_2(x-a_1) + \\ + b_1 x + b_0]D + c,$$

che è appunto del tipo indicato sopra.

L'equazione $F_1 = o$ è nota sotto il nome di equazione *ipergeometrica*, o equazione di Gauss. Il Gauss dimostrò che nell'intorno di ciascun punto singolare le soluzioni di codesta equazione sono rappresentabili, a meno di potenze della variabile, per mezzo della serie ipergeometrica che contiene, come casi particolari, la maggior parte delle trascendenti elementari. Daremo nel Capitolo seguente (§ 403) la integrazione dell'equazione ipergeometrica.

CAPITOLO TREDICESIMO.

Trasformazione delle operazioni.

A. GENERALITÀ.

370. Siano A, B due operazioni funzionali distributive, a determinazione unica in un dato spazio lineare. Si dice che B è *trasformata* di A mediante un'operazione X, o che X *trasforma* A in B, quando sia

$$XAX^{-1} = B. \tag{1}$$

La (1) equivale, in ogni spazio funzionale in cui X sia a determinazione unica, alla

$$XA = BX$$

e alla

$$X^{-1}BX = A.$$

Risulta di qui che se la A è trasformata in sè stessa dall'operazione X, la A è commutabile con la X; e, reciprocamente, se A ed X sono commutabili, la A è trasformata in sè stessa da X.

Risulta ancora dalla definizione che, se la X trasforma A in B, la X^{-1} trasforma la B in A.

371. Esempi di operazioni trasformate di un'altra furono già incontrati, per incidenza, ai §§ 121 e 216.

In particolare, al § 121, abbiamo trovato che l'operazione di sostituzione S_{1-e}^x soddisfa all'equazione

$$DS = -e^x SD.$$

Qui possiamo indicare una equazione analoga che vale per un'operazione di sostituzione qualsivoglia S_μ e di cui faremo uso nel Capitolo seguente. Dalla regola di derivazione delle funzioni di funzioni risulta immediatamente, se indichiamo con μ' la derivata di μ, che è

$$DS_\mu = M_{\mu'} S_\mu D;$$

questa è la generalizzazione della formula del § 121. Ne viene ancora

$$S_\mu D^{-1} = D^{-1} M_{\mu'} S_\mu .$$

372. Per vedere quale grado di indeterminazione presenti la ricerca di X quando siano date A e B, si ammetta che B sia trasformata di A mediante le due operazioni X e Y. Si avrà allora:

$$XAX^{-1} = B, \quad YAY^{-1} = B.$$

Si ponga ora $X = KY$, onde $X^{-1} = Y^{-1}K^{-1}$. Verrà

$$B = KYAY^{-1}K^{-1},$$

onde

$$B = KBK^{-1}.$$

Risulta di qui (§ 370) che K è un'operazione commutabile con B. Inversamente, se K è una qualsivoglia operazione commutabile con la B, e la Y trasforma A in B, anche KY trasforma A in B. Nello stesso modo si dimostra che, in ogni spazio in cui Y sia a determinazione unica, se B è trasformata di A mediante Y, è tale anche mediante YH, dove H è commutabile con A; e, reciprocamente, se X ed Y trasformano A in B e si pone $X = YH$, H è commutabile con A.

373. Se la operazione X trasforma le operazioni A_1, A_2 nelle operazioni B_1, B_2 rispettivamente, essa trasforma il prodotto A_1A_2 nel prodotto B_1B_2.

Invero, dalle

$$B_1 = XA_1X^{-1}, \quad B_2 = XA_2X^{-1}$$

risulta

$$B_1B_2 = XA_1X^{-1}XA_2X^{-1}$$

ossia

$$B_1B_2 = XA_1A_2X^{-1}.$$

Di qui discende:

a) che se le operazioni A_1, A_2, ... formano un gruppo (§ 41), e la X trasforma codeste operazioni nelle B_1, B_2, ... rispettivamente, anche queste ultime operazioni formano un gruppo.

Quest'ultimo gruppo si dice *trasformato* del primitivo mediante la X.

b) che se due operazioni A_1, A_2 sono commutabili, sono commutabili anche le rispettive trasformate B_1, B_2 mediante una medesima operazione.

Si ha, infatti,

$$B_1B_2 = XA_1A_2X^{-1} = XA_2A_1X^{-1}$$

e quindi

$$B_1B_2 = B_2B_1.$$

374. Se a_0, a_1, a_2, ... è una successione, finita o no, di numeri, sappiamo (§ 47) che l'operazione

$$a_0 + a_1A + a_2A^2 + \dots, \tag{2}$$

per la quale esiste, in generale, un campo funzionale di validità, è in questo campo commutabile con A (*operazione regolare in* A, § 69).

Ponendo

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

la (2) si può dire **funzione di A** e rappresentare con $f(A)$. Ora, se la X trasforma A in B, si ha

$$XA = BX,$$

onde

$$XA^2 = BXA = B^2X,$$

ed in generale, per n intero e positivo qualsivoglia,

$$XA^n = B^nX;$$

da ciò

$$X(a_0 + a_1A + a_2A^2 + \dots) = (a_0 + a_1B + a_2B^2 + \dots)X;$$

formula sempre valida nel caso di una somma di un numero finito di termini, e da adoprarsi colle dovute restrizioni (cfr. § 134) nel caso che il numero dei termini sia infinito.

Questa formula può anche scriversi

$$Xf(A)X^{-1} = f(B).$$

La definizione di funzione di un'operazione A e l'ultima relazione si estendono senza difficoltà al caso che $f(A)$ contenga potenze negative di A. Intendendo in questo modo le *funzioni* di una operazione, si conclude che, **se la X trasforma la A in B, essa trasforma anche ogni data funzione di A nella medesima funzione di B.**

375. **Se X trasforma A in B, ed Y trasforma B in C, YX trasformerà A in C.**

Infatti dalle

$$XAX^{-1} = B, \quad YBY^{-1} = C$$

risulta immediatamente

$$YXAX^{-1}Y^{-1} = C.$$

Discende da questo teorema che, se si ha una classe di operazioni A, B, C, ... e si conoscono le operazioni che trasformano una data operazione P nelle singole operazioni della classe, si conosceranno di conseguenza quelle che trasformano le operazioni della classe l'una nell'altra. Infatti, se

$$XPX^{-1} = A, \quad KPK^{-1} = B, \dots$$

sarà

$$P = X^{-1}AX, \dots$$

e quindi, X^{-1} trasformando A in P, ed Y trasformando P in B, YX^{-1} trasformerà A in B.

376. Supponendo che la X trasformi A in B, riferiamoci ad uno spazio funzionale in cui X sia univoca o sia resa tale nel modo accennato al § 53. Avremo (§ 374)

$$XA = BX, \quad XA^2 = B^2X, \dots, XA^n = B^nX.$$

Se ora, nello spazio considerato, A non ha radici, e se ω è una radice di B, $AX^{-1}(\omega)$, $A^2X^{-1}(\omega), \dots, A^nX^{-1}(\omega), \dots$, saranno radici di X. Reciprocamente, se $A(\omega)$ è radice di X senza che sia tale α, $X(\alpha)$ sarà radice di B, ed $A^2(\alpha)$, $A^3(\alpha)$, $\dots$, $A^n(\alpha)$, ... saranno radici di X.

B. LE OPERAZIONI TRASFORMATRICI.

377. Essendo M_x l'operazione di moltiplicazione per x, chiameremo *trasformatrice* di un'operazione data A, ogni operazione X che trasforma M_x in A. Per questa operazione sarà dunque

$$XM_xX^{-1} = A. \tag{3}$$

In altri termini, se φ è un elemento del campo funzionale che si considera, sarà

$$(4) \qquad X(x\varphi) = AX(\varphi);$$

ed ancora, ricordando la definizione di derivata funzionale (§ 140), si avrà che ogni trasformatrice di A soddisfa all'equazione differenziale simbolica

$$(5) \qquad X' = (A - x)X.$$

378. Ogni operazione H commutabile con M_x è una moltiplicazione: infatti la $HM_x = M_xH$ equivale alla $H' = o$ e l'annullarsi della derivata caratterizza (§§ 148, 239) le operazioni di moltiplicazione. Reciprocamente, ogni moltiplicazione è commutabile con M_x.

Ciò posto, sia X una trasformatrice di A. Se allora trasformiamo mediante la X tutte le operazioni di moltiplicazione, poichè queste formano un gruppo, le rispettive trasformate formeranno esse pure un gruppo (§ 373). Ma le moltiplicazioni sono fra loro commutabili: saranno quindi fra loro commutabili anche le operazioni del gruppo trasformato, fra le quali, come trasformata della M_x, compare anche la A. Quindi le operazioni del gruppo trasformato sono commutabili con A. Concludiamo, dunque, che il gruppo trasformato mediante una trasformatrice di A del gruppo delle moltiplicazioni è un gruppo di operazioni commutabili con la A.

Osserviamo che qui non è lecito asserire che codesto gruppo coincida in ogni caso col gruppo totale delle operazioni commutabili con A.

379. Sia $\mu(x)$ una funzione sviluppabile o in serie di potenze nell'intorno dell'origine o in serie di LAURENT in una corona circolare di centro nell'origine. Per una tale funzione abbiamo già definito l'operazione $\mu(A)$ (§ 374).

Dal citato § risulta che codesta operazione gode della proprietà espressa dall'uguaglianza

$$(6) \qquad XM_\mu X^{-1} = \mu(A).$$

Ora, uniformandoci anche in questo caso al noto *principio di permanenza*, ci varremo della (6) per dare al concetto di funzione di una operazione A tutta la sua generalità. Se cioè $\mu(x)$ è una funzione qualsivoglia, chiameremo funzione μ di A e designeremo con $\mu(A)$ ogni operazione trasformata di M_μ mediante X, ove X rappresenti una trasformatrice di A. Avremo, dunque, che, qualunque sia la funzione $\mu(x)$, l'operazione $\mu(A)$ gode, o in virtù del teorema del § 374 o per la definizione, della proprietà espressa dalla (6).

In particolare, la potenza A^m ad esponente m qualsivoglia sarà definita dalla relazione

$$(7) \qquad Xx^mX^{-1} = A^m.$$

Notiamo subito che, se l'operazione A ammette più di una trasformatrice (e ben tosto dimostreremo che appunto ciò accade in generale) possono esistere corrispondentemente più operazioni, a cui, secondo la data definizione, converrà il nome di funzione $\mu(A)$. In ogni singolo caso particolare converrà definire come tale una determinata fra codeste operazioni (1).

380. Dall'ultima osservazione del § 372 risulta che se X è una trasformatrice di A, è tale ancora il prodotto per X di ogni operazione commutabile con la M_x, cioè (§ 378) di

(1) Le discrepanze che si notano nei risultati di quelli Autori che hanno trattato della derivazione ad indici qualsivogliano (V. Nota I alla fine del volume) derivano appunto dalla moltiplicità di determinazioni ora accennata.

ogni moltiplicazione e che, reciprocamente, tutte le trasformatrici di A hanno la forma XM_μ.

Ora sia β una qualsivoglia funzione, appartenente al campo di validità di X^{-1}, e sia precisamente α la funzione per cui è

$$X(\alpha) = \beta.$$

L'arbitrarietà dianzi accennata della moltiplicazione M_μ permette di assegnare una trasformatrice X_1 di A tale che sia

$$X_1(\gamma) = \beta,$$

dove γ è una funzione arbitrariamente scelta; basta, all'uopo, porre

$$X_1 = XM_\mu$$

dove

$$\mu = \frac{\alpha}{\gamma}.$$

Possiamo pertanto concludere che, *se un'operazione A ammette una trasformatrice X, ne ammette infinite, che sono date, tutte e sole, da XM_μ, dove M_μ è una moltiplicazione arbitraria. Scelte arbitrariamente due funzioni β e γ, con la sola condizione che la prima appartenga al campo funzionale di validità di X^{-1}, esiste una trasformatrice che fa corrispondere la β alla γ.*

381. Passiamo ora alla determinazione effettiva della trasformatrice X della operazione data A. Applicando ad ambo i membri dell'equazione (5) la derivazione funzionale, otteniamo senza difficoltà

$$X'' = (A^2 - 2xA + x^2)X,$$

quindi

$$X''' = (A^3 - 3xA^2 + 3x^2A - x^3)X,$$

ed in generale

$$X^{(m)} = (A - x)_m X, \tag{8}$$

dove abbiamo posto [1]

$$(A - x)_m = A^m - mxA^{m-1} + \binom{m}{2}xA^{m-2} - \ldots + (-1)^m x^m.$$

Posto allora $X(1) = \alpha$, onde

$$X^{(m)}(1) = A^m(\alpha) - mxA^{m-1}(\alpha) + \binom{m}{2}x^2A^{m-2}(\alpha) - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^m x^m \alpha,$$

viene, per la formola che dà lo sviluppo di un'operazione distributiva in serie procedente secondo le potenze della derivazione (§ 147),

$$X(\varphi) = X(1)\varphi + X'(1)\varphi' + \frac{1}{1.2}X''(1)\varphi'' + \ldots,$$

ossia

$$X = \alpha + (A - x)\alpha . D + \frac{1}{1.2}(A - x)_2\alpha . D^2 + \ldots \tag{9}$$

Resta così dimostrata l'esistenza delle trasformatrici di ogni operazione A, e la moltiplicità di esse è rivelata dalla posizione $X(1) = \alpha$, dove è arbitraria la funzione α. Ciò è in accordo con quanto è stato avvertito al § precedente [2].

382. *Le operazioni trasformatrici ammettono, in generale, elementi singolari* (§ 139).

Sia infatti X la trasformatrice di un'operazione A e sia ω una radice di A, appartenente al campo funzionale di

---

[1] S'intende che non è da confondersi l'operazione qui designata con $(A - x)_m$ con la potenza m^{ma} della forma lineare $A - x$.

[2] Fu già osservato che le trasformatrici di una data operazione soddisfanno ad una equazione differenziale simbolica del primo ordine (§ 377); al lettore non sarà sfuggita l'analogia tra il fatto osservato al § prec. e qui direttamente verificato e la proprietà delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, per le quali esiste una funzione integrale che, per un valore arbitrario assegnato alla variabile, assume un valore parimente arbitrario.

validità di X^{-1}, per modo che sia $X^{-1}(\omega) = \alpha$. Si avrà allora

$$X(x\alpha) = AX(\alpha) = o, \quad X(x^2\alpha) = AX(x\alpha) = o, \ldots$$

e, per m intero positivo qualsivoglia,

$$X(x^m\alpha) = AX(x^{m-1}\alpha) = o.$$

L'elemento $x\alpha$ è dunque singolare per X.

In quanto ad α stesso, si ha dalle (8)

$$X(\alpha) = \omega, \quad X'(\alpha) = -x\omega, \ldots, X^{(m)}(\alpha) = (-1)^m x^m \omega,$$

da cui, essendo φ un elemento di $\mathcal{S}$,

$$X(\alpha\varphi) = \omega(\varphi - x\varphi' + \frac{x^2}{1.2}\varphi'' - \ldots) = \omega\varphi(o).$$

La XM_α fa dunque corrispondere ad $\mathcal{S}$ uno spazio ad una dimensione ed è pertanto una delle operazioni considerate ai §§ 193 e segg.

Reciprocamente, se X è una trasformatrice di A ed α non è radice di X, ma è tale αx, $X(\alpha)$ sarà radice di A, ed αx sarà elemento singolare di X.

Infatti, dall'equazione di definizione della trasformatrice

$$X(x\varphi) = AX(\varphi),$$

segue, per $\varphi = \alpha$, $AX(\alpha) = o$, onde $X(\alpha)$ è radice di A e si ricade sul caso precedentemente considerato.

C. TRASFORMATRICI DELLE MOLTIPLICAZIONI E DELLA DERIVAZIONE. — TRASFORMAZIONE DI LAPLACE.

383. Passando a considerare alcune trasformatrici particolarmente notevoli, notiamo anzitutto la trasformatrice X della operazione di moltiplicazione. Deve essere

$$XM_xX^{-1} = M_\mu$$

ossia (§ 377)

(10) $$X' = (\mu(x) - x)X.$$

Ora questa relazione ci porge un caso semplicissimo di quelle equazioni simboliche, che abbiamo studiate e risolute nel Cap. VII (§§ 198 e segg.). Di là risulta che la soluzione generale della (10) è data da λS_μ, dove λ è una funzione arbitraria.

Ne discende che la trasformatrice di una moltiplicazione M_μ è, all'infuori di una moltiplicazione arbitraria (§ 380) la sostituzione corrispondente alla medesima funzione μ.

Reciprocamente, ogni sostituzione è trasformatrice della moltiplicazione corrispondente.

384. Studiamo in secondo luogo la trasformatrice della derivazione D.

Essa sarà definita da

$$XM_xX^{-1} = D,$$

ossia da

(11) $$X(x\varphi) = DX(\varphi).$$

Ne viene che, posto $X(\varphi) = \psi$, ed indicando le derivate per mezzo di accenti, secondo l'usuale notazione, sarà

$$X(\varphi) = \psi, \quad X(x\varphi) = \psi', \quad X(x^2\varphi) = \psi'', \ldots$$

In particolare, se poniamo $X(1) = \alpha$, verrà

(12) $$X(1) = \alpha, \quad X(x) = \alpha', \ldots, \quad X(x_n) = \alpha^{(n)}, \ldots$$

e quindi

$$X(e^{ax}) = \alpha(x + a) \text{ (}^1\text{)}.$$

385. Lo sviluppo in serie della operazione X del precedente § si deduce subito dalla formola (9). Possiamo anche osservare che la X deve soddisfare all'equazione differenziale simbolica

$$X' = (D - x)X,$$

che abbiamo risoluto direttamente al § 205. Ad ogni modo, posto $X(\mu) = \alpha$, risulta

(13) $$X(\mu\varphi) = \alpha\varphi + (\alpha' - x\alpha)\varphi' + \frac{1}{1.2}(\alpha'' - 2x\alpha' + x^2\alpha)\varphi'' + \ldots$$

Ogni particolare determinazione di μ e di α darà una diversa trasformatrice di D. Consideriamone alcune.

a) Poniamo dapprima $\mu = 1$, $\alpha = e^{ax}$. Viene dalla (13)

$$X(\varphi) = e^{ax}\left(\varphi + (a - x)\varphi' + \frac{(a-x)^2}{1.2}\varphi'' + \ldots\right)$$

e quindi, nello spazio $\mathfrak{S}^{|a|}$,

$$X(\varphi) = e^{ax}\varphi(a).$$

Abbiamo così determinato un ramo dell'operazione X, il quale fa corrispondere a tutte le funzioni di uno spazio funzionale una stessa funzione e^{ax}, moltiplicata per una costante, cioè uno spazio ad una sola dimensione. Essa ammette uno spazio (ad infinite dimensioni) di radici formato da tutte le funzioni di $\mathfrak{S}^{|a|}$, per le quali è $\varphi(a) = o$ (§ 196).

(1) Queste operazioni hanno un ufficio principalissimo nel cosidetto « Calcul de généralisation » dell'OLTRAMARE. (V. Nota I).

b) Lasciando μ arbitraria, poniamo $\alpha = 1$; avremo dalle (12)

$$X(\mu) = 1, \quad X(x\mu) = X(x^2\mu) = \ldots = o.$$

La $x\mu$ sarà dunque per la trasformatrice X così determinata un elemento singolare; ciò dipende dal fatto che codesta X fa corrispondere a μ la radice 1 di D.

Applicando ancora a questa trasformazione l'equazione di definizione (11), otteniamo

$$X\left(\frac{\mu}{x}\right) = x + a_0, \qquad X\left(\frac{\mu}{x^2}\right) = \frac{x^2}{1.2} + a_0 x + a_1, \ldots,$$

ed in generale,

(14) $$X\left(\frac{\mu}{x^n}\right) = \frac{x^n}{n!} + a_0\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + a_1\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots$$
$$\cdots + a_{n-2}x + a_{n-1},$$

dove le a, $a_1, \ldots, a_{n-1}$ sono costanti arbitrarie, introdotte dalle successive integrazioni.

386. Abbiamo visto nei §§ precedenti come per definire univocamente, in uno spazio funzionale assegnato, una trasformatrice X di D, basta scegliere ad arbitrio in quello spazio funzionale due funzioni, all'una delle quali quella trasformatrice debba far corrispondere l'altra.

Ma si può individuare *a priori* una X, qualunque sia lo spazio funzionale a cui intendiamo riferirci, assoggettandola ad una ulteriore condizione. Noi qui considereremo, come quella che è particolarmente notevole, la trasformatrice di D, la cui aggiunta è pur essa trasformatrice di D.

Indicando, per ora, con X codesta operazione, e, secondo il solito con $\overline{X}$ la sua aggiunta, dovremo avere accanto all'equazione

(15) $$XM_x = DX$$

anche la

$$\overline{X}M_x = D\overline{X};$$

da quest' ultima deduciamo, prendendo l' aggiunta dei due membri (§§ 243, 246)

$$XD = -M_xX. \tag{16}$$

Siamo dunque condotti a considerare un' operazione, che soddisfa alle due equazioni simboliche (15) e (16); a codesta operazione daremo il nome di *trasformazione di* LAPLACE [1] e la designeremo col simbolo L, cosicchè le due equazioni di definizione si scriveranno

$$LM_x = DL \tag{15'}$$
$$LD = -M_xL. \tag{16'}$$

Osserviamo che la (16'), come quella che si puó scrivere

$$L^{-1}M_xL = -D,$$

esprime che la inversa di L è trasformatrice di —D.

387. Se in uno spazio funzionale esiste una operazione univoca soddisfacente alle (15'), (16') essa è unica.

Indicando, infatti, secondo la nostra convenzione, con L una operazione soddisfacente alle (15'), (16') vediamo se possa esistere una operazione Y, tale che anche la YL renda soddisfatte le (15'), (16'). Risulta immediatamente che deve essere

$$YM_x = M_xY, \quad YD = DY.$$

[1] La operazione funzionale, espressa per mezzo di un integrale definito, che è conosciuta nell' Analisi sotto il nome di *trasformazione di* LAPLACE, gode appunto delle due proprietà (15'), (16') che caratterizzano la nostra operazione L. Per la bibliografia v. la Nota I.

Dalla prima di queste equazioni risulta che la Y deve essere una operazione di moltiplicazione; ora la sola moltiplicazione che sia commutabile con la D è la moltiplicazione per una costante numerica (§ 163); pertanto, ove si prescinda da un moltiplicatore numerico arbitrario, la Y è l' operazione identica.

388. Supponiamo che sia già dimostrato che in un certo spazio lineare di funzioni la L esista insieme alla sua inversa: di più codesto spazio, al quale riferiamo le nostre considerazioni, sia dalla L trasformato in sè stesso. Allora, iterando e successivamente combinando le (15'), (16'), otteniamo i tre sistemi di equazioni simboliche

$$L^2M_x = -M_xL^2, \quad L^2D = -DL^2, \tag{17}$$
$$L^3M_x = -DL^2, \quad L^3D = M_xL^3, \tag{18}$$
$$L^4M_x = M_xL^4, \quad L^4D = DL^4. \tag{19}$$

Le (19) dicono (§ prec.) che la L^4 è, nello spazio considerato, uguale all' operazione identica.

Se, quindi, chiamiamo *ciclica di ordine m* ogni operazione A, tale che

$$A^m = \mathbf{1},$$

abbiamo che la trasformazione di LAPLACE è ciclica dell' ordine quattro.

Discende di qui che

$$L^3 = L^{-1},$$

onde le (18) definiscono l' inversa della L, per la quale si ha, cioè,

$$L^{-1}M_x = -DL^{-1}, \quad L^{-1}D = M_xL^{-1}. \tag{18'}$$

È infine manifesto che le (17) definiscono la operazione di sostituzione S_{-x}, definita da

$$S_{-x}(\varphi(x)) = \varphi(-x).$$

Avremo quindi fra la trasformazione di LAPLACE e la sua inversa, per ogni spazio in cui esse siano definite entrambe, la seguente semplicissima relazione

$$L^{-1} = S_{-x}L. \tag{20}$$

Ciò vuol dire che da ogni determinazione di L se ne deduce una di L^{-1}, eseguendo sulla prima la S_{-x}.

389. La questione dell'esistenza della L va partitamente risoluta per ogni singolo spazio lineare di funzioni, al quale essa voglia applicarsi.

Noi qui considereremo lo spazio $\mathfrak{W}_c$ delle funzioni che si ottengono per combinazione lineare delle

$$(x - c)^{r+n} log^m (x - c)$$

dove r è un numero qualunque, m è un numero intero positivo ed n un numero intero qualsivoglia: considereremo poi, in modo particolare, lo spazio $\mathfrak{S}_c$ delle serie di LAURENT

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n (x - c)^n$$

relativo al punto $x = c$ qualsiasi. Prescinderemo dalle questioni di convergenza, per le quali rimandiamo al Cap. V. Per riconoscere se esista nello spazio $\mathfrak{W}_c$ una operazione soddisfacente alle (15'), (16'), cercheremo di costruirla effettivamente. A tale scopo limitandoci al caso di $m = o$, vediamo dapprima se dalle (15'), (16') possano ricavarsi quelle funzioni che la L fa corrispondere alle funzioni

$$(x - c)^{r+n} \qquad (n = -\infty, \dots, +\infty)$$

che costituiscono il sistema fondamentale o di riferimento dello spazio che consideriamo.

Supponendo r non intero, poniamo

$$L[(x - c)^{r+n}] = \xi_{r+n}.$$

Dalle (15'), (16') risulta allora per le funzioni ξ_{r+n} il sistema di equazioni lineari miste ai differenziali e alle differenze del primo ordine:

$$\left\{ \begin{aligned} &\xi_{r+n+1} + c\xi_{r+n} = \xi'_{r+n} \\ &x\xi_{r+n+1} = -(r + n + 1)\xi_{r+n}, \end{aligned} \right. \tag{21}$$

il quale dà immediatamente, all'infuori di un fattore indipendente da x e da n,

$$\xi_{r+n} = \Gamma(r + n + 1) e^{\pi i (r+n+1)} e^{cx} x^{-(r+n+1)}, \tag{22}$$

dove secondo la usuale notazione, Γ rappresenta l'*integrale euleriano di seconda specie.*

Venendo al caso di un intero $m > o$, si trova con un calcolo analogo

$$\begin{aligned} L[x - c)^{r+n} log^m (x - c)] = \\ = \frac{1}{m!} e^{\pi i (r+n+1)} e^{cx} x^{-(r+n+1)} \Big(\Gamma(r + n + 1) log^m x - \\ - \Gamma'(r + n + 1)\binom{m}{1} log^{m-1} x + \dots + (-1)^m \Gamma^{(m)}(r + n + 1) \Big). \end{aligned}$$

390. Se il parametro r ha un valore intero, e si tiene ferma l'ipotesi $m = o$, già fatta al § precedente, lo spazio $\mathfrak{W}_c$ non è se non lo spazio $\mathfrak{S}_c$ delle serie di LAURENT, relative al punto $x = c$. Anche in tal caso le funzioni ξ_{r+n} devono soddisfare al sistema (21). Ma poichè l'integrale euleriano di seconda specie ammette come punti singolari l'origine e tutti i punti dell'asse reale di ascissa intera e negativa, la soluzione (22) trovata dianzi per codesto sistema cade allora in difetto per infinite funzioni del nostro spazio.

Se r è intero, manifestamente possiamo supporlo, senz'altro, uguale a zero. Il sistema (21) diventa allora

$$\left\{ \begin{aligned} &\xi_{r+n} + c\xi_n = \xi'_n \qquad (n = -\infty, \dots, +\infty) \\ &x\xi_{n+1} = -(n + 1)\xi_n \qquad (n = -\infty, \dots, -2, 0, 1, \dots, +\infty) \\ &L(o) = -x\xi_o. \end{aligned} \right. \tag{21'}$$

Se alla L imponiamo la condizione di essere univoca nello spazio $\mathfrak{T}_c$. se cioè chiediamo che sia $L(o) = o$, troviamo immediatamente

$$\xi_n = o \qquad (n = 0, 1, \ldots, +\infty)$$

e

$$\xi_{-n} = e^{cx}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \qquad (n = 1, 2, \ldots, +\infty).$$

Esiste, dunque, nello spazio $\mathfrak{T}_c$ delle serie di Laurent, un ramo univoco della L che ammette come spazio di radici lo spazio delle serie di potenze intere e positive di $x - c$. La costante è pertanto (§ 139) un elemento singolare per codesto ramo dell' operazione L.

Questo ramo di L coincide con quello determinato al § 385, *b*), ove si ponga $\mu = \frac{1}{x}$ e si prendano le costanti di integrazione tutte uguali a zero. Il ramo di L^{-1} corrispondente al ramo di L or ora determinato sarà ad infinite determinazioni, differenti fra loro per serie di potenze intere e positive di $x - c$ arbitrarie.

Quest' ultima osservazione e la relazione (20) che intercede tra L ed L^{-1}, fanno presumere l' esistenza di un ramo di L ad infinite determinazioni. Se infatti, riprendendo il sistema (21'), lasciamo cadere la condizione di univocità, otteniamo dalle (15'), (16') per $L(o)$ le due condizioni

$$L(o) = DL(o), \quad L(o) = -xL(o).$$

Ne risulta che se $L(o)$ non è identicamente nulla, essa è uguale ad un elemento arbitrario di uno spazio lineare trasformato in sè dalle operazioni M_x e D. Se si stabilisce che fra le determinazioni di $L(o)$ vi sia la costante, $L(o)$ dovrà es-

sere uguale ad un elemento arbitrario in $\mathfrak{S}$. Allora dal sistema (21') si deduce

$$\xi_n = (-1)^n n! e^{cx} x^{-(n+1)} + \pi, \quad (n = 0, 1, \ldots, +\infty)$$
$$\xi_{-n} = \frac{1}{(n-1)!} e^{cx} x^{n-1} \log x + \pi, \quad (n = 1, 2, \ldots, +\infty),$$

dove abbiamo voluto indicare con π un elemento arbitrario di $\mathfrak{S}$.

391. Combinando le (15') e le (16'), risulta per ogni coppia m, n di numeri interi e positivi,

(23) $$Lx^m D^n = (-1)^n D^m x^n L.$$

Ora ogni forma differenziale lineare a coefficienti razionali interi è appunto una combinazione lineare, a coefficienti numerici, di un numero finito di operazioni del tipo $x^m D^n$

$$F = \sum_{m,n} c_{m,n} x^m D^n.$$

Avremo quindi

$$LFL^{-1} = \sum_{m,n} c_{m,n} L x^m D^n L^{-1} = \sum_{m,n} (-1)^n D^m x^n.$$

Si ha dunque che la trasformata di Laplace di ogni forma differenziale lineare a coefficienti razionali, è una forma differenziale lineare a coefficienti razionali.

D' altro canto la L^{-1} gode delle proprietà indicate dalle (18), onde risulta

$$L^{-1} x^m D^n = (-1)^m D^m x^n L^{-1};$$

quindi anche la L^{-1} trasforma ogni forma differenziale lineare a coefficienti razionali in una forma dello stesso tipo. Se ne conclude che ogni forma differenziale lineare a coefficienti razionali si può considerare come la trasformata per mezzo della L di una determinata forma differenziale lineare a coefficienti razionali.

Queste osservazioni rendono manifesta l'importanza che la trasformazione di Laplace ha nella teoria delle equazioni differenziali lineari a coefficienti razionali.

392. Da quanto precede risulta immediatamente un'osservazione dovuta, in un caso particolare, allo Schlesinger [1]. Data la forma differenziale lineare a coefficienti razionali F, sia F_1 la sua trasformata di Laplace; sia, cioè:

$$\mathrm{LFL}^{-1} = \mathrm{F}_1.$$

Uguagliando le aggiunte dei due membri otteniamo

$$\overline{\mathrm{L}}\,\overline{\mathrm{F}}\,\overline{\mathrm{L}}^{-1} = \overline{\mathrm{F}}_1.$$

Ma abbiamo veduto che è

$$\mathrm{L} = \overline{\mathrm{L}}$$

e quindi

$$\overline{\mathrm{L}}\mathrm{L}^{-1} = \mathbf{1},\quad \mathrm{L}\overline{\mathrm{L}}^{-1} = \mathbf{1}.$$

Ne risulta

$$\mathrm{L}\overline{\mathrm{F}}_1\mathrm{L}^{-1} = \overline{\mathrm{F}}:$$

cioè, l'aggiunta della trasformata di Laplace di una forma differenziale lineare F, a coefficienti razionali, è tale, che la sua trasformata di Laplace coincide con l'aggiunta di F.

È manifesto che, considerando, al posto di $\overline{\mathrm{F}}$, un'operazione distributiva qualsivoglia e la sua aggiunta, il teorema si mantiene valido e si dimostra allo stesso modo.

(1) Handbuch, Bd. I, pag. 426.

393. Fra le varie applicazioni che della proposizione del § 391 si sono fatte alla teoria delle equazioni differenziali lineari, ci limiteremo a dare qui la più semplice, cioè la determinazione delle radici delle forme differenziali lineari a coefficienti numerici. Poichè tale determinazione si è già compiuta con altro metodo al § 179, ci basterà il seguente brevissimo cenno. Data la forma a coefficienti numerici

$$\mathrm{F} = a_n\mathrm{D}^n + a_{n-1}\mathrm{D}^{n-1} + \ldots + a_1\mathrm{D} + a_0,$$

poniamo

$$\psi(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Indicando allora con φ una funzione indeterminata, avremo

$$\mathrm{FL}(\varphi) = \sum_0^n a_m \mathrm{D}^m \mathrm{L}(\varphi)$$

ossia, per la (15'),

$$\mathrm{FL}(\varphi) = \mathrm{L}(\psi\varphi).$$

Risulta di qui che, affinchè $\mathrm{L}(\varphi)$ sia radice, non identicamente nulla, della F, è necessario e sufficiente che la funzione $\psi\varphi$ sia radice di L senza che sia tale la φ. Se il polinomio ψ ammette le q radici distinte $c_1, c_2, \ldots, c_q$, multiple degli ordini $r_1, r_2, \ldots, r_q$ rispettivamente, basta scegliere successivamente per φ le n funzioni

$$\frac{1}{(x - c_i)^h} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q;\ h = 1, 2, \ldots, r_i).$$

Otteniamo così per F le n radici (§ 390)

$$\mathrm{L}[(x - c_i)^h] = \frac{1}{(h-1)!}x^{h-1}e^{c_i x},$$
$$(i = 1, 2, \ldots, q;\ h = 1, 2, \ldots, r_i),$$

che sappiamo essere linearmente indipendenti.

D. OPERAZIONI ANALOGHE ALLA TRASFORMAZIONE DI LAPLACE.

394. Determinate le trasformatrici della D, se ne possono dedurre le trasformatrici di ogni operazione commutabile con la D. Sia in generale X la trasformatrice di A; si ha

$$XM_xX^{-1} = A;$$

ma dal § 383

$$S_\mu M_x S_\mu^{-1} = M_\mu,$$

onde

$$XS_\mu M_x S_\mu^{-1} X^{-1} = \mu(A),$$

ossia XS_μ è la trasformatrice di $\mu(A)$. Se dunque X é una trasformatrice della derivazione e $\mu(D)$ un' operazione commutabile con la derivazione, XS_μ ne sarà la trasformatrice. Applichiamo l' osservazione precedente a quella particolare trasformatrice della D, che è la trasformazione di LAPLACE. Essa soddisfa alle (15'), (16'), che si possono scrivere

$$LM_xL^{-1} = D, \quad L^{-1}M_xL = -D.$$

L' operazione $LS_\mu = K$ soddisfarà a due equazioni, che si deducono rispettivamente da quelle. La prima è

$$KM_xK^{-1} = LS_\mu M_x S_\mu^{-1} L^{-1} = \mu(D),$$

ed esprime che K è una trasformatrice di $\mu(D)$.

Per ottenere la seconda equazione, osserviamo dapprima che la trasformata di D mediante S_μ^{-1} non è se non il prodotto di D per il moltiplicatore $\nu(x) = \mu'(\mu_{-1}(x))$, dove $\mu_{-1}(x)$ rappresenta al solito l' inversa della funzione $\mu(x)$. Si ha cioè

$$S_\mu^{-1} D S_\mu = M_\nu D.$$

Ciò posto, si deduce dalla seconda delle equazioni a cui soddisfa la L,

$$S_\mu^{-1} D S_\mu = -S_\mu^{-1} L^{-1} M_x L S_\mu = -K^{-1} M_x K,$$

e quindi

$$K^{-1}M_xK = -M_\nu D.$$

L' operazione K^{-1} è dunque la trasformatrice dell' operazione $-M_\nu D$.

395. Consideriamo due casi particolari notevoli.

Anzitutto prendiamo $\mu(x) = x^{-1}$: sarà

$$\mu(D) = D^{-1}$$

e

$$\nu(x) = \mu'(\mu_{-1}(x)) = -x^2.$$

Allora, indicando con B l' operazione $LS_{\frac{1}{x}}$, avremo per essa le due seguenti equazioni simboliche (§ prec.)

$$BM_xB^{-1} = D^{-1}, \quad B^{-1}M_xB = x^2D, \tag{24}$$

le quali esprimono che B è trasformatrice della D^{-1} e che B^{-1} è trasformatrice della x^2D [1].

La relazione

$$B = LS_{\frac{1}{x}},$$

che lega le operazioni L e B, ci assicura che ad ogni ramo di L corrisponde un ramo di B, e reciprocamente, e ci permette di dedurre l' uno dall' altro. Così, p. es., nello spazio $\mathfrak{S}$ delle serie di LAURENT, relative all' intorno del punto

[1] Di un ramo di codesta operazione il BOREL fece un uso sistematico per trasformare serie di potenze sempre divergenti in serie aventi un raggio di convergenza non nullo, o serie convergenti in un cerchio di raggio finito in serie sempre convergenti (v., p. es., *Acta Math.*, T. XXI, p. 243).

$x = o$, esisteranno due rami di B, il primo univoco e tale che sia

$$B(x^n) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty)$$
$$B(x^{-n}) = o \qquad (n = o, 1, 2, \ldots, \infty),$$

l'altro ad infinite determinazioni, differenti per serie arbitrarie di potenze di x, pel quale è

$$B(x^n) = \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}log x + \pi, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots, \infty)$$
$$B(x^{-n}) = (-1)^{n+1}n!x^{-(n+1)} + \pi, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty).$$

Non insistiamo sulla teoria della trasformazione B; ci basti di osservare che, come è reso manifesto dalle (24), anche la B^{-1} trasforma ogni forma differenziale lineare in una forma differenziale lineare.

396. Applichiamo in secondo luogo le considerazioni del § 394, al caso in cui è $\mu(x) = e^{-x}$. Risulta allora

$$\nu(x) = \mu'(\mu_{-1}(x)) = -x.$$

Se, quindi, poniamo

$$LSe^{-x} = C,$$

l'operazione C soddisfarà alle due equazioni

$$(25) \qquad CM_xC^{-1} = e^{-D}, \quad C^{-1}M_xC = xD.$$

L'operazione e^{-D} non è altro se non l'operazione fondamentale del calcolo delle differenze, che abbiamo indicato con θ (§ 120). Sarà dunque $e^{-D} = \theta^{-1}$, cosicchè le (25) si potranno scrivere

$$(25') \qquad CM_xC^{-1} = \theta^{-1}, \quad C^{-1}M_xC = xD.$$

L'operazione C è dunque trasformatrice di θ^{-1}, mentre la sua inversa è una trasformatrice di xD.

Le equazioni (25') si possono scrivere

$$CM_x = \theta^{-1}C, \quad CM_xD = M_xC$$

od anche

$$(26) \qquad CM_x = \theta^{-1}C, \quad CD = M_{x+1}\theta C.$$

Iterando e combinando queste due ultime equazioni, otteniamo, per ogni coppia m, n di numeri interi e positivi,

$$Cx^mD^n = (x-m+1)(x-m+2)\ldots(x-m+n)\theta^{n-m}C.$$

Questa equazione mostra come l'operazione C trasformi ogni forma differenziale lineare a coefficienti razionali in una forma lineare alle differenze a coefficienti razionali, di prima o di seconda specie o anche del tipo più generale indicato al § 291. Se infatti è data la forma

$$F = \sum_{m,n} a_{m,n}x^mD^n,$$

si vede subito che la sua trasformata mediante C sarà

$$CFC^{-1} = \sum_{m,n} a_{m,n}(x-m+1)(x-m+2)\ldots(x-m+n)\theta^{n-m}.$$

397. Ora possiamo mostrare agevolmente come siasi già incontrato un ramo della operazione C. Si ricordi infatti l'operazione, già rappresentata con C al § 216 (e che qui per un momento, a evitare confusioni, indicheremo con X) la quale, applicata ad un qualsivoglia elemento di $\mathfrak{S}$, cioè ad una serie di potenze di x

$$\varphi = \sum_{n=o}^{\infty} a_nx^n,$$

dà come risultato il coefficiente a_n, considerato come funzione dell'indice n.

Codesta operazione è anzitutto, com'è ben chiaro, distributiva. In secondo luogo si ha dalla definizione stessa di X:

$$X(x\varphi) = a_{n-1} = \theta^{-1} a_n,$$

ossia

$$XM_x = \theta^{-1}X,$$

ed

$$X(\varphi') = (n+1)a_{n+1} = (n+1)\theta a_n,$$

ossia

$$XD = \theta M_x X.$$

Abbiamo così verificato che la X è, in $\mathfrak{S}$, un ramo della C.

D'altro canto, considerazioni in tutte analoghe a quelle del § 387 mostrano che negli spazi dove esiste un ramo univoco della C, questo, come tale, è unico. Se ne conclude che nello spazio $\mathfrak{S}$ la C è veramente l'operazione considerata al § 216, la quale, applicata ad una serie di potenze, dà il coefficiente di essa come funzione dell'indice.

398. Riprendiamo una forma differenziale a coefficienti razionali F e indichiamo con Φ la forma lineare alle differenze, nella quale la C trasforma la F, tale, cioè, che sia

$$CFC^{-1} = \Phi,$$

ossia

$$CF = \Phi C.$$

Supponiamo che per la F l'origine non sia punto singolare. Indicando allora con

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

lo sviluppo, relativo al punto $x = o$, della radice generale di F (dipendente linearmente da n costanti arbitrarie), avremo

$$CF(\varphi) = C(o) = o,$$

e quindi

$$\Phi C(\varphi) = \Phi(a_n) = o.$$

Si ha dunque che la C trasforma l'equazione differenziale lineare $F = o$ nella equazione lineare alle differenze, a cui deve soddisfare il coefficiente dello sviluppo della radice generale di F, considerato come funzione dell'indice. Con una semplice sostituzione si riconduce al caso or ora considerato, il caso in cui il punto regolare di F che si considera, è diverso dall'origine.

Nella relazione $C\varphi = \alpha$, la φ venne detta, da Laplace e Abel, funzione *generatrice* di α, la α funzione *determinante* di φ.

E. La derivazione d'indice qualsivoglia. — La trasformazione di Eulero.

399. Al § 379 abbiamo definito la potenza ad esponente qualsivoglia di ogni operazione di cui si conosca una trasformatrice. Applicando questa definizione alla operazione D, chiameremo potenza di D ad esponente s qualsivoglia, o derivazione di indice s, l'operazione

$$Xx^sX^{-1},$$

dove X rappresenti una trasformatrice di D. Però, in codesta operazione si è già notata (§ 379) una arbitrarietà, dipendente dalla scelta della trasformatrice di D che si pone al posto di X. Indicheremo con E_s quella potenza di D che si ottiene quando, per la X, si assuma la trasformazione di Laplace: porremo, cioè,

$$E_s = Lx^sL^{-1}.$$

Servendoci delle (15'), (16') e delle analoghe equazioni a cui soddisfa la L^{-1}, deduciamo subito due equazioni cui soddisfa la E_s. Abbiamo anzitutto, dalla (15'):

$$DE_s = DLx^sL^{-1} = Lx^{s+1}L^{-1}$$

ossia

(27) $$DE_s = E_{s+1}.$$

A questa equazione possiamo dare un'altra forma, ricordando la seconda delle (18'), a cui soddisfa la L^{-1}. Si ha infatti, per essa,

$$DE_s = Lx^sL^{-1}D,$$

ossia

$$DE_s = E_sD. \tag{28}$$

Donde segue che l a E_s è c o m m u t a b i l e c o n l a D.

In secondo luogo consideriamo la derivata funzionale di E_s. Sarà

$$E'_s = Lx^sL^{-1}x - xLx^sL^{-1}$$

ossia, per la prima delle (18) e per la (16'),

$$E'_s = -Lx^sDL^{-1} + LDx^sL^{-1},$$

o infine

$$E'_s = sLx^{s-1}L^{-1} = sE_{s-1}.$$

Ma dalla (27) risulta

$$E_{s-1} = D^{-1}E_s$$

e quindi

$$E'_s = sD^{-1}E_s,$$

o da ultimo

$$DE'_s = sE_s. \tag{29}$$

All'operazione E_s definita dalle due equazioni simboliche (28), (29) daremo il nome di *trasformazione di* EULERO [1].

400. L e i n f i n i t e o p e r a z i o n i E_s, c h e s i o t t e n g o n o a l v a r i a r e d i s, f o r m a n o u n g r u p p o [2] c o m m u t a b i l e.

[1] L'operazione funzionale, espressa per mezzo di un integrale definito, alla quale lo SCHLESINGER (op. cit., Bd. II, Absch. 12) dà il nome di *trasformazione di* EULERO, ammette precisamente le proprietà (28), (29) che caratterizzano la nostra operazione E_s.

[2] Questo gruppo, secondo la nomenclatura del LIE, sarebbe un gruppo ad un parametro (*eingliedrig*).

Considerando, infatti, le due operazioni E_s, E_t, dove s e t rappresentano due valori, non necessariamente distinti, del parametro, avremo

$$E_sD = DE_s, \quad DE'_s = sE_s$$

ed

$$E_tD = DE_t, \quad DE'_t = tE_t.$$

Per il prodotto E_sE_t, avremo anzitutto

$$E_sE_tD = E_sDE_t = DE_sE_t;$$

e in secondo luogo (§ 145)

$$D(E_sE_t)' = DE'_sE_t + E_sDE'_t = sE_sE_t + tE_sE_t$$

ossia

$$D(E_sE_t) = (s+t)E_sE_t.$$

Risulta di qui che l'operazione E_sE_t soddisfa alle equazioni (28), (29): essa è quindi una delle operazioni E_s e si ha precisamente

$$E_sE_t = E_{s+t},$$

il che prova l'asserto.

401. Poichè la E_s è commutabile con D, il suo sviluppo ordinato secondo le potenze di D, posto che esista, dovrà essere a coefficienti costanti (§ 169). Ma, se applichiamo il metodo dei coefficienti indeterminati, servendoci della (29), troviamo immediatamente che tutti i coefficienti sono nulli. Si può quindi dire, secondo il citato § 169, che l a E_s n o n è r e g o l a r e, r i s p e t t o a l l a D, n e l l' i n t o r n o d e l l a c o s t a n t e. La costante viene pertanto a presentare per l'operazione E_s una *singolarità*, la quale è peraltro di natura assolutamente diversa da quella che presentano gli elementi singolari delle trasformatrici, considerati al § 382. La E_s è regolare nell' intorno di e^x; nel suo intorno si trova, applicando il metodo dei coefficienti indeterminati,

$$E_s(e^x\varphi) = e^x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} D^n\varphi.$$

402. Iterando e combinando le (28) e (29), otteniamo per ogni coppia di numeri interi o positivi m, n

$$(30)\quad E_s^{(n)}D^m = D^m E_s^{(n)} = (s-n+1)(s-n+2)\ldots \ldots (s-n+m)E_s^{(n-m)}.$$

Ciò posto, sia data una forma differenziale lineare della classe del FUCHS

$$F = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i(x)D^i.$$

Potremo senz' altro supporre che in codesta forma il coefficiente α_i sia di grado i; perchè, quando ciò non fosse, basterebbe considerare al posto di F l'altra forma FD^r, dove r rappresenta un numero intero, opportunamente scelto.

Avremo allora

$$E_sF = \sum_{i=0}^{n} E_s(\alpha_i D^i).$$

Ma si ha

$$E_s(\alpha_i D^i) = \alpha_i E_s D^i + \frac{\alpha'_i}{1!}E'_s D^i + \frac{\alpha''_i}{2!}E''_s D^i + \ldots + \frac{\alpha_i^{(i)}}{i!}E_s^{(i)}D^i,$$

e, applicando la formola (30),

$$E_s(\alpha_i D^i) = \alpha_i D^i E_s + s\alpha'_i D^{i-1}E_s + \binom{s}{2}\alpha''_i D^{i-2}E_s + \ldots + \binom{s}{i}\alpha_i^{(i)}E_s.$$

Se quindi poniamo

$$(31)\qquad F_s = \sum_{i=0}^{m}\left(\alpha_i D^i + s\alpha'_i D^{i-1} + \ldots + \binom{s}{i}\alpha_i^{(i)}\right),$$

avremo

$$E_s F E_s^{-1} = F_s.$$

L' esame della (31) ci permette di concludere che la E_s trasforma ogni forma differenziale lineare F della classe del FUCHS, in cui il coefficiente di ogni singola potenza D^i sia del grado i rispettivo, in una forma E_s del medesimo ordine, della medesima classe e del medesimo tipo. I punti singolari di F_s coincidono con quelli di F.

403. La trasformazione di EULERO coincide con la sua aggiunta.

Infatti, uguagliando le aggiunte dei due membri di ciascuna delle (28) e (29), otteniamo

$$\overline{D}\,\overline{E}_s = \overline{E}_s\overline{D},\quad \overline{D}\,\overline{E}'_s = s\overline{E}_s;$$

ne risulta che E_s coincide con $\overline{E}_s$.

Come al § 391, si dimostra immediatamente che se F_s è la trasformata mediante E_s di una forma F del FUCHS, l' aggiunta di F_s è la trasformata mediante E_s della aggiunta di F [1].

404. L' operazione E_s trova applicazione nello studio delle equazioni differenziali lineari della classe del FUCHS. Noi qui ci limiteremo ad applicarla alla equazione ipergeometrica, usando un metodo che è, in sostanza, quello stesso che può servire nel caso più generale.

Sappiamo (§ 369) che la forma ipergeometrica è del tipo

$$F = \alpha_2 D^2 + \alpha_1 D + a,$$

dove α_2 è un polinomio in x di secondo grado a radici distinte, α_1 è un polinomio del primo grado e a è una costante numerica. Avremo (§ 402)

$$E_s F E_s^{-1} = F_s = \alpha_2 D^2 + (\alpha_1 + s\alpha'_2)D + \left(a + \alpha'_1 s + \alpha''_2\frac{s(s-1)}{1.2}\right).$$

---

[1] SCHLESINGER, Op. cit., Bd. II, Abschnitt XII, § 233.

Nella F_s il coefficiente di D^0 è un polinomio di secondo grado in s, a coefficienti numerici. Prendiamo per s un valore c che sia una radice di questo polinomio: avremo come trasformata di F mediante E_c, la forma

$$F_c = \alpha_2 D^2 + (\alpha_1 + c\alpha'_2)D.$$

Poichè $F_c D^{-1}$ è una forma del primo ordine, abbiamo subito per F_s la radice

$$D^{-1} e^{-D^{-1} \frac{\alpha_1 + c\alpha'_2}{\alpha_2}}.$$

Risulta allora dall' uguaglianza

$$F_c = E_c F E_c^{-1}$$

che la funzione

$$E_c D^{-1} e^{-D^{-1} \frac{\alpha_1 + c\alpha'_2}{\alpha_2}} = E_{c-1} e^{-D^{-1} \frac{\alpha_1 + c\alpha'_2}{\alpha_2}}$$

è radice della forma ipergeometrica.

CAPITOLO QUATTORDICESIMO

Le forme lineari alle sostituzioni (¹)

A. — GENERALITÀ.

405. Al § 122 abbiamo definito le forme lineari alle sostituzioni, e il Cap. X è stato dedicato ad una classe particolare di queste operazioni, le forme lineari alle differenze. Le definizioni e le considerazioni svolte per queste ultime forme nei §§ 265-272 si estendono senz' altro alle forme lineari alle sostituzioni; in particolare possiamo ammettere per esse la teoria della divisibilità, come pure le osservazioni del § 286 relativamente alle radici di una forma decomposta in fattori.

406. Accanto ad ogni operazione di sostituzione S_μ considereremo la forma lineare, a coefficienti numerici, del primo ordine

$$E = S_\mu - 1. \tag{1}$$

Se γ è una radice di E (²) e φ una funzione arbitraria, si ha (§ 118)

$$S_\mu(\gamma\varphi) = S_\mu(\gamma)\, S_\mu(\varphi) = \gamma\, S_\mu(\varphi).$$

(¹) V. KOENIGS, « Recherches sur les intégrales de quelques équations fonctionnelles, » Ann. de l'École Normale Sup., S. II, T. I, 1884, e, « Nouvelles recherches etc. » ibid, S. III, T. II, 1885; GRÉVY, « Études sur les équations fonctionnelles » ibid., S. III, T. XI, 1894.

(²) L'esistenza di tali radici è dimostrata più avanti (§ 418).

Le radici di E godono dunque, rispetto ad S_μ, della proprietà espressa dalla (5) del § 42, di cui godono le costanti numeriche rispetto ad ogni operazione distributiva. Perciò, nel presente capitolo, daremo loro il nome di *costanti rispetto* ad S_μ. Fra queste, figurano naturalmente le costanti numeriche.

Se F è una forma lineare in S_μ, e γ è costante rispetto ad S_μ, si ha

$$F(\gamma\varphi) = \gamma F(\varphi).$$

407. Dalla (1) si deduce per ogni n intero positivo:

$$E^n = S^n - \binom{n}{1} E^{n-1} + \ldots + (-1)^n,$$

e

$$S^n = E^n + \binom{n}{1} E^{n-1} + \ldots + 1$$

che permettono di trasformare ogni forma lineare in S_μ in una forma lineare in E del medesimo ordine, e viceversa.

Precisamente, se è

$$F = \alpha_n S^n + \alpha_{n-1} S^{n-1} + \ldots + \alpha_1 S + \alpha_0,$$

si ottiene

$$F = \bar{\alpha}_n E^n + \bar{\alpha}_{n-1} E^{n-1} + \ldots + \bar{\alpha}_1 E + \bar{\alpha}_0,$$

dove

$$(2)\quad \begin{cases} \bar{\alpha}_n = \alpha_n \\ \bar{\alpha}_{n-1} = \alpha_{n-1} + \binom{n}{1} \alpha_n \\ \bar{\alpha}_{n-2} = \alpha_{n-2} + \binom{n-1}{1} \alpha_{n-1} + \binom{n}{2} \alpha_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{\alpha}_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n; \end{cases}$$

e analogamente si esprimono le α_i in funzione delle $\bar{\alpha}_i$.

408. Data la forma F, si consideri il prodotto per F di un'operazione di moltiplicazione M_ω; posto

$$S^i{}_\mu(\omega) = \omega_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

avremo, tenendo conto che la S è distributiva anche rispetto alla moltiplicazione,

$$FM_\omega = \beta_n E^n + \beta_{n-1} E^{n-1} + \ldots + \beta_1 E + \beta_0,$$

dove, per le (2), è:

$$(3)\quad \begin{cases} \beta_n = \alpha_n \omega_n \\ \beta_{n-1} = \alpha_{n-1}\omega_{n-1} + \binom{n}{1}\alpha_n\omega_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_0 = \alpha_0\omega + \alpha_1\omega_1 + \ldots + \alpha_n\omega_n. \end{cases}$$

Sia ω radice di F; ne viene $\beta_0 = o$, e quindi FM_ω è divisibile per E, e precisamente

$$FM_\omega = F_1 E,$$

dove

$$F_1 = \beta_n E^{n-1} + \beta_{n-1} E^{n-2} + \ldots + \beta_1.$$

Sia ora ψ una radice della forma F_1 d'ordine $n-1$; $E^{-1}(\psi)$ sarà radice di FM_ω, cioè

$$\omega E^{-1}(\psi)$$

sarà radice della F. Applicando alla F_1 il procedimento già applicato alla F, si otterrà

$$F_1 M_\psi = F_2 E,$$

dove F_2 è una forma determinata dall'ordine $n-2$, e se χ è una radice di F_2,

$$\omega E^{-1}\psi E^{-1}\chi$$

sarà radice di F, e così via. Così continuando si giungerà per F ad una n^{sima} radice:

$$\omega E^{-1}\psi E^{-1}\chi \ldots E^{-1}\sigma;$$

talchè si vede come **ammessa, per ora, l'esistenza** (¹) **di una radice per una forma lineare alle sostituzioni, risulta la possibilità di determinare per essa un sistema di n radici.**

409. Le radici ottenute col metodo del § precedente **sono linearmente indipendenti**, intendendo con ciò che fra esse non passa una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti rispetto ad S_μ (§ 406).

Se, infatti, fosse

$$(4)\qquad c_1\omega + c_2\omega E^{-1}\psi + c_3\omega E^{-1}\psi E^{-1}\chi + \ldots \\ \ldots + c_n\omega E^{-1}\psi \ldots E^{-1}\sigma = o,$$

dove $c_1, c_2, c_3, \ldots c_n$ sono costanti rispetto ad S_μ non tutte nulle, ne verrebbe, dividendo per ω,

$$c_1 + c_2 E^{-1}\psi + c_3 E^{-1}\psi E^{-1}\chi + \ldots = o,$$

ed applicando la E ad ambo i membri e dividendo per ψ

$$c_1 + c_2 E^{-1}\chi + \ldots = o;$$

ripetendo altre $n-2$ volte il medesimo procedimento, si giungerebbe a

$$c_n\sigma = o.$$

Siccome σ è supposta non identica a zero, ne viene $c_n = o$, onde, risalendo, $c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots c_1$ devono essere uguali a zero, contro il supposto; con ciò è dimostrato che fra le radici ω, $\omega E^{-1}\psi, \ldots$, determinate per F, non può passare una relazione della forma (4).

410. Fissata l'operazione S_μ, diremo **spazio lineare** $\mathfrak{S}_n[\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n]$ **di funzioni, ad n dimensioni, rispetto ad S_μ**, l'insieme delle combinazioni lineari delle $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ a coefficienti costanti rispetto ad S_μ, ammesso che fra le $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ non passi alcuna relazione della forma

$$c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \ldots c_n\omega_n = o,$$

dove $c_1, c_2, \ldots c_n$ sono pure costanti rispetto ad S_μ.

(¹) **Quest'esistenza verrà dimostrata più avanti (§ 433) indipendentemente dalle considerazioni del presente §.**

Ottenute (§ 408) le n radici ω, $\omega E^{-1}\psi, \ldots$ di F, è pure radice di F ogni elemento dello $\mathfrak{S}_n[\omega, \omega E^{-1}\psi, \ldots]$ da esse determinato.

411. Essendo ρ e σ due funzioni qualsivogliano, si ha

$$E(\rho\sigma) = S(\rho)S(\sigma) - \rho\sigma.$$

Sostituendo per $S(\rho)$, $S(\sigma)$ le espressioni $E(\rho)+\rho$, $E(\sigma)+\sigma$, viene:

$$(5)\qquad E(\rho\sigma) = E(\rho)E(\sigma) + \rho E(\sigma) + \sigma E(\rho).$$

Questa formola esprime $E(\rho\sigma)$ in funzione bilineare di ρ, σ, $E(\rho)$, $E(\sigma)$, e si può dire che essa fornisce un **teorema di moltiplicazione** per l'operazione E.

B. I PUNTI LIMITI.

412. Consideriamo la sostituzione S_μ, che indicheremo semplicemente con S, definita dalla funzione analitica $\mu(x)$. Essendo $\bar{x}$ un punto nel cui intorno la $\mu(x)$ si mantiene regolare, formiamo la successione

$$\bar{x},\quad S(\bar{x}),\quad S^2(\bar{x}), \ldots$$

e supponiamo che questa successione ammetta **il limite** k, **in cui** $\mu(x)$ **sia pure regolare**. Un tale punto k si dirà *punto limite* della S.

Posto

$$S^p(\bar{x}) = k + y_p, \qquad (p = 1, 2, \ldots),$$

la successione y_p tende a zero; si potrà dunque, da un valore dell'indice p in avanti, sviluppare

$$S^{p+1}(\bar{x}) = \mu(k + y_p)$$

nella serie convergente

$$(6) \qquad S^{p+1}(\bar{x}) = \mu(k) + \mu'(k)y_p + \ldots + \frac{\mu^{(n)}(k)}{n!} y^n_p + \ldots$$

Passando al limite per $p = \infty$, poichè $\lim y_p = o$, verrà

$$k = \mu(k).$$

Questo risultato, sostituito nella (6) e tenendo conto che

$$S^{p+1}(\bar{x}) = k + y_{p+1},$$

darà

$$\lim_{p=\infty} \frac{y_{p+1}}{y_p} = \mu'(k)$$

e siccome il limite di y_p è zero, ne viene

$$(7) \qquad |\mu'(k)| \leq 1.$$

Abbiamo così ottenuto il seguente teorema: (1)
Ogni punto limite della S è radice dell'equazione

$$(8) \qquad \mu(x) = x$$

e soddisfa alla condizione (7).

413. In tutto quanto segue, verrà escluso il caso di $|\mu'(k)| = 1$, che richiederebbe considerazioni particolari. Nell'ipotesi $|\mu'(k)| < 1$, il teorema precedente si inverte: cioè, se k, punto in cui $\mu(x)$ è regolare, è radice dell'equazione (8) ed è $|\mu'(k)| < 1$, esiste

(1) KOENIGS, loc. cit., e Bulletin des Sciences Mathématiques, 1883, p. 343.

un cerchio di centro k per ogni punto $\bar{x}$ dell'interno del quale è

$$\lim_{p=\infty} S^p(\bar{x}) = k.$$

Infatti sarà in un intorno conveniente di k:

$$\mu(x) = k + (x-k)\,\mu'(k) + (x-k)^2\,\nu(x),$$

dove $\nu(x)$ è una serie convergente di potenze di $x - k$. Ne viene

$$\frac{\mu(x) - k}{x - k} = \mu'(k) + (x - k)\,\nu(x);$$

ma, per essere $|\mu'(k)| < 1$, si può assegnare un cerchio di centro k e di raggio r_k abbastanza piccolo perchè in esso, circonferenza compresa, sia

$$|\mu'(k) + (x - k)\,\nu(x)| < h,$$

dove h indica un numero positivo compreso fra $|\mu'(k)|$ è l'unità. Per ogni punto $\bar{x}$ interno a questo cerchio, che diremo per brevità cerchio (k), avremo allora

$$\left|\frac{S(\bar{x}) - k}{\bar{x} - k}\right| < h < 1$$

Il punto $S(\bar{x})$ sarà dunque più vicino a k di quello che non sia il punto $\bar{x}$, e perciò ancora interno al cerchio (k). Applicando quindi ad esso il ragionamento precedente, sarà

$$\left|\frac{S^2(\bar{x}) - k}{S(\bar{x}) - k}\right| < h,$$

e così via; onde per moltiplicazione,

$$\left|\frac{S^p(\bar{x}) - k}{\bar{x} - k}\right| < h^p,$$

ossia

$$|S^p(\bar{x}) - k| < h^p\,|\bar{x} - k|,$$

e poichè $\bar{x}$ è interno al cerchio (k), a maggiore ragione

$$|S^p(\bar{x}) - k| < h^p r_k.$$

Passando al limite per $p = \infty$, viene

$$\lim_{p=\infty} S^p(\bar{x}) = k,$$

cioè k è effettivamente punto limite di S.

414. Sia $\mathbf{a}$ un'area presa nella parte del piano x in cui la funzione analitica $\mu(x)$ si mantiene regolare. Mentre il punto x si muove entro l'area $\mathbf{a}$, le $S(x)$, $S^2(x)$, ... descriveranno determinate aree $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ... Se, ferme le ipotesi del § precedente, l'area $\mathbf{a}$ è il cerchio (k), la regione $\mathbf{a}_p$ sarà per il detto §, interna a questo cerchio e alle regioni precedenti $\mathbf{a}_{p-1}$, $\mathbf{a}_{p-2}$, ... Di qui risulta che lo spazio $\mathfrak{S}^{r_k}(k)$ (1) è trasformato in sè stesso dall'operazione S.

Ma se r_1 è un numero positivo minore di r_k, anche dal cerchio di centro $x = k$ e di raggio r_1, preso come regione $\mathbf{a}$, l'operazione S deduce una successione di regioni $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ... interne ad esso cerchio; ne risulta che ogni spazio $\mathfrak{S}^r(k)$ con $r < r_k$, è invariante rispetto ad S, e quindi è tale l'intero spazio $\mathfrak{S}^o(k)$.

415. *a*) Poichè k soddisfa all'equazione (8), sarà per ogni valore intero di p:

$$S^p(k) = k. \tag{9}$$

b) Se φ è un elemento qualsivoglia di $\mathfrak{S}^o(k)$, si ha per ogni valore intero di p

$$S^p(\varphi(k)) = \varphi(k). \tag{10}$$

(1) Secondo la notazione introdotta al § 318.

c) Indicando per brevità $S^p(x)$ con x_p, si ha

$$\frac{d^i x_{p+1}}{dx^i} = \mu^{(i)}(x_p),$$

onde, per ogni coppia di numeri interi positivi i, p:

$$\left(\frac{d^i x_{p+1}}{dx^i_p}\right)_k = \mu^{(i)}(k).$$

Analogamente si ha, per ogni elemento φ di $\mathfrak{S}^o(k)$:

$$\left(\frac{d^i S^p(\varphi)}{dx^i_p}\right)_k = \varphi^{(i)}(k).$$

d) Se due funzioni μ e ν differiscono per una costante additiva, le sostituzioni S_μ, S_ν hanno i medesimi punti limiti.

416. Come esempio, si faccia

$$\bar{\mu}(x) = \frac{bx}{1 - \frac{x}{r}},$$

dove r è un numero positivo, e $|b| < 1$. Questa funzione è regolare entro il cerchio r. I punti limiti, dovendo essere radici della (8), potranno essere soltanto $x = o$ ed $x = r(1 - b)$; la $\bar{\mu}(x)$ è regolare in entrambi, ma

$$\bar{\mu}'(o) = b, \quad \bar{\mu}'(r(1-b)) = \frac{1}{b}$$

perciò il solo punto $x = o$ soddisfa alla condizione (7) ed è pertanto il solo punto limite.

È facile determinare il raggio del cerchio di centro $x = o$ che S rappresenta in un'area interna; basta infatti porre

$$\left|\frac{bx}{1 - \frac{x}{r}}\right| < |x|$$

onde

$$|r - x| > |b|\, r;$$

il raggio del cerchio richiesto è dunque $r - r|b|$.

Infine è pure facile di calcolare le $S^p(x)$; si trova immediatamente

$$S^2(x) = \frac{b^2 x}{1 - \frac{1-b^2}{1-b}\frac{x}{r}}, \ldots, S^p(x) = \frac{b^p x}{1 - \frac{1-b^p}{1-b}\frac{x}{r}}.$$

C. LE FUNZIONI ELEMENTARI DEL CALCOLO DELLE SOSTITUZIONI.

417. Rimanendo ferme le notazioni dei §§ 412 e segg., poniamo $\mu'(k) = a$, $o < |a| < 1$, e consideriamo il prodotto infinito

$$\alpha(x) = \prod_{p=1}^{\infty} \frac{S^p(x) - k}{a(S^{p-1}(x) - k)} \tag{11}$$

La funzione $\mu(x)$ ammette nell'intorno di $x = k$ una espressione della forma

$$\mu(x) = k + a(x-k)\,(1 + (x-k)^n \nu(x))$$

dove n è un intero positivo non inferiore ad uno, e $\nu(x)$ è una funzione regolare nel cerchio (k), compresa la circonferenza. Applicando la S^{p-1} ad ambo i membri della precedente uguaglianza, abbiamo

$$S^p(x) = k + a(S^{p-1}(x) - k) \left\{ 1 + (S^{p-1}(x) - k)^n S^{p-1}(\nu) \right\};$$

quindi il fattore generale del prodotto $\alpha(x)$ si scrive:

$$\frac{S^p(x) - k}{a(S^{p-1}(x) - k)} = 1 + (S^{p-1}(x) - k)\, S^{p-1}(\nu).$$

Per un noto teorema della teorica delle funzioni, il prodotto $\alpha(x)$ convergerà assolutamente ed uniformemente se converge uniformemente la serie

$$\sigma = \sum_{p=1}^{\infty} |(S^{p-1}(x) - k)\, S^{p-1}(\nu)|.$$

Ora se m è un numero positivo maggiore del massimo modulo di $\nu(x)$ entro (k), sarà $|S^{p-1}(\nu)| < m$; essendo poi (§ 413)

$$|S^{p-1}(x) - k| < h^p r_k, \quad h < 1,$$

verrà

$$|(S^{p-1}(x) - k)\, S^{p-1}(\nu)| < m h^p r_k$$

il che dimostra la convergenza assoluta ed uniforme della serie σ e quindi del prodotto $\alpha(x)$. Per il teorema della teoria delle funzioni ricordato dianzi, la $\alpha(x)$ *definisce una funzione analitica determinata entro il cerchio* (k).

Questa funzione ha per $x = k$, *uno zero del primo ordine*. Infatti, si ha

$$\prod_{p=1}^{q} \frac{S^p(x) - k)}{a(S^{p-1}(x) - k)} = \frac{S^q(x) - k}{a^q},$$

onde

$$\alpha(x) = \lim_{q=\infty} \frac{S^q(x) - k}{a^q}. \tag{12}$$

Ma

$$S^q(x) - k = (x-k)\,(a + (x-k)\nu_q(x)),$$

dove $\nu_q(x)$ è regolare entro (k); onde, per essere $|a| > o$, la funzione $\alpha(x)$ ha, per $x = k$, uno zero del primo ordine.

418. *La funzione* $\alpha(x)$ *è radice della forma lineare del primo ordine, a coefficienti numerici,* $S - a$.

Si ha infatti identicamente

$$a\frac{S^q(x)-k}{a^q}=S\left(\frac{S^{q-1}(x)-k}{a^{q-1}}\right),$$

onde ricordando l'espressione (12) della $\alpha(x)$ e passando al limite per $q=\infty$, viene effettivamente

$$S(\alpha)-a\alpha=o.$$

419. Applichiamo le considerazioni precedenti al caso speciale della funzione $\overline{\mu}(x)$ esaminata nel § 416. Si ha in questo caso $k=o$, $\mu'(o)=b$, e quindi, dall' espressione trovata per S^p, si ha subito

$$\overline{\alpha}(x)=\frac{bx}{1-\frac{x}{r(1-b)}}.$$

Questa funzione soddisfa all' equazione lineare alle sostituzioni, del primo ordine

$$S_{\overline{\mu}}(\varphi)-b\varphi=o.$$

Di qui possiamo trarre una conseguenza che tornerà utile in seguito. Poichè la $\overline{\alpha}$ soddisfa ad

$$S(\overline{\alpha})=b\overline{\alpha},$$

onde

$$S^p(\overline{\alpha})=b^p\overline{\alpha},$$

posto

$$\alpha(x)=bx\overline{\omega}(x)$$

avremo

$$bS^n(x)S^n(\overline{\omega})=b^{n+1}x\overline{\omega}. \tag{13}$$

Ma si è trovato

$$S^n(x)=\frac{b^nx}{1-\frac{1-b^n}{1-b}\cdot\frac{x}{r}},$$

onde la (13) diviene

$$\frac{1}{1-\frac{1-b^n}{1-b}\cdot\frac{x}{r}}S^n(\overline{\omega})=\overline{\omega}.$$

Sostituendo ad n successivamente i valori $n-1$, $n-2,\ldots$ 2, 1 e sommando, dopo di avere moltiplicato per le costanti numeriche a_n, $a_{n-1},\ldots a_1$, prese in modo che la loro somma sia uguale ad uno, otteniamo

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1-\frac{1-b^i}{1-b}\cdot\frac{x}{r}}S^i\overline{\omega}=\overline{\omega}. \tag{14}$$

420. Nel § 417 si è esaminato il caso in cui $\mu'(k)$ è differente da zero. Supongasi ora

$$\mu'(k)=\mu''(k)=\ldots=\mu^{(m-1)}(k)=o,\ \mu^{(m)}(k)=b\neq o.$$

Sarà allora

$$\mu(x)=k+b(x-k^m)\{1+(x-k)^n\nu(x)\}, \tag{15}$$

dove n è un numero intero non minore di uno, e $\nu(x)$ è regolare entro (k); da cui, applicando ad ambo i membri la S^{p-1}, si deduce:

$$S^p(x)=k+b(S^{p-1}(x)-k^m)\{1+(S^{p-1}(x)-k)^nS^{p-1}(\nu)\}. \tag{15'}$$

Con procedimento analogo a quello del § 417, si dimostra che il prodotto infinito

$$\alpha_1(x)=\prod_{p=1}^{\infty}\frac{S^p(x)k}{b(S^{p-1}(x)-k)^m}$$

è convergente uniformemente in (k), e rappresenta ivi una funzione analitica regolare, radice della forma del primo ordine $S-b(x-k)^{m-1}$.

421. Di più, si può dimostrare che $\alpha_1(x)$ ammette per $x = k$ uno zero del primo ordine, e che il coefficiente di $x - k$ nel suo sviluppo in serie di potenze è dato da b.

Dalla (15) si ha infatti che $S(x) - k$ ammette nel punto limite k uno zero d'ordine m, e dalla (15'), applicata successivamente pei valori $1, 2, \ldots, p, \ldots$ dell'indice, risulta che $S^p(x) - k$ ha per $x = k$ uno zero d'ordine m^p. Possiamo perciò porre

$$S^p(x) - k = (x - k)^{m^p}\nu_p(x),$$

dove $\nu_p(x)$ rappresenta una funzione regolare nell'intorno del punto limite e in questo diversa da zero.

Considerando allora il rapporto

$$(16) \qquad \frac{S^q(x) - k}{b^q\{(x - k)(S(x) - k)\ldots(S^{q-1}(x) - k)\}^{m-1}}$$

che al limite per $q = \infty$ dà la funzione α_1, vediamo che mentre il numeratore ha per $x = k$ uno zero di ordine m^q, il denominatore ha uno zero di ordine

$$(1 + m + m^2 + \ldots + m^{q-1})(m - 1) = m^q - 1.$$

Ne discende che quel rapporto ha nel punto limite uno zero del primo ordine.

Anche la funzione limite α_1, che già sappiamo essere regolare nell'intorno del punto limite, ha per $x = k$ uno zero del primo ordine; basta mostrare perciò che il coefficiente di $x - k$ nello sviluppo in serie di potenze di $x - k$ del rapporto (16) tende, al crescere indefinito di q, ad un limite finito e diverso da zero. Noi dimostreremo precisamente che codesto coefficiente è indipendente da q.

Perciò cominciamo dal calcolare il coefficiente di $(x - k)^{m^p}$ nella funzione $\mu_p - k$, cioè il valore per $x = k$ di ciascuna funzione $\nu_p(x)$.

Dalla (15) risulta senz'altro che il coefficiente di $(x - k)^m$ in $\mu - x$ è b e dalla (15') discende che i coefficienti $\nu_{p-1}(k)$ e $\nu_p(k)$ sono legati dalla relazione

$$\nu_p(k) = b\nu^m_{p-1}(k).$$

Si ha quindi per via ricorrente che $\nu^p(k)$ è uguale alla potenza di b di esponente

$$1 + m + m^2 + \ldots + m^{p-1} = \frac{m^p - 1}{m - 1}.$$

Sviluppando allora numeratore e denominatore del rapporto (16) in serie di potenze di $x - k$, avremo che il primo coefficiente del numeratore è dato dalla potenza di b di esponente

$$\frac{m^q - 1}{m - 1},$$

mentre il primo coefficiente del denominatore è dato dalla potenza di b di esponente

$$q + m - 1 + m^2 - 1 + \ldots + m^{q-1} - 1 = m\,\frac{m^{q-1} - 1}{m - 1}.$$

Se ne conclude che il primo coefficiente dello sviluppo di (16) in serie di potenze di $x - k$ è dato dalla potenza di b di esponente $\frac{m^q - 1}{m - 1} - m\,\frac{m^{q-1} - 1}{m - 1} = 1$, cioè da b stesso, e che α_1 ha, in $x = k$, uno zero del primo ordine.

422. Derivando la (15), otteniamo

$$(17) \qquad \mu'(x) = mb(x - k)^{m-1}(1 + \rho(x)),$$

dove ρ è una funzione regolare in (k) che si annulla per $x = k$. Applicando la S^{p-1} a codesta uguaglianza, viene:

$$(17') \qquad S^{p-1}(\mu') = mb(S^{p-1}(x) - k)^{m-1}(1 + S^{p-1}(\rho))$$

e quindi

$$\frac{S^{p-1}(\mu')}{mb\,(S^{p-1}(x)-k)^{m-1}} = 1 + S^{p-1}(\rho).$$

Col ragionamento già usato al § 417, si dimostra che il prodotto infinito

$$(18) \qquad \alpha_2(x) = \prod_{p=1}^{\infty} \frac{S^{p-1}}{mb(S^{p-1}(x)-k)^{m-1}} = \prod_{p=1}^{\infty}(1+S^{p-1}(\rho))$$

converge assolutamente ed uniformemente in (k) e rappresenta ivi una funzione analitica regolare. Per definizione, sarà

$$(19) \qquad \alpha_2(x) = \lim_{q=\infty} \frac{\mu' S(\mu') S^2(\mu') \ldots S^{q-1}(\mu')}{\{(x-k)(S(x)-k)\ldots(S^{q-1}(x)-k)\}^{m-1} m^q b^q}$$

ma, per le proprietà del simbolo S date al § 118, si ha:

$$\frac{\mu' S(\mu') \ldots S^q(\mu')}{\{(x-k)(S(x)-k)\ldots(S^q(x)-k)\}^{m-1} m^{q+1} b^{q+1}} \cdot \frac{mb(x-k)^{m-1}}{\mu'} =$$

$$= S\,\frac{\mu' S(\mu') \ldots S^{q-1}(\mu')}{\{(x-k)(S(x)-k)\ldots(S^{q-1}(x)-k)\}^{m-1} m^q b^q},$$

onde passando al limite per $q=\infty$, otteniamo

$$S(\alpha_2) = \frac{mb(x-k)^{m-1}}{\mu'(x)}\,\alpha_2.$$

La funzione $\alpha_2(x)$ è dunque radice della forma lineare alle sostituzioni del primo ordine:

$$S - \frac{mb(x-k)^{m-1}}{\mu'(x)}.$$

Il valore di $\alpha_2(x)$ per $x=k$ è differente da zero. Si ha infatti (§ 421) che il denominatore dell'espressione sotto il segno *lim* nella (19) ha per $x=k$ uno zero dell'ordine m^q-1 e che il coefficiente del suo primo termine è $m^q b^s$, dove

$$s = m\,\frac{m^{q-1}-1}{m-1}$$

Esaminando ora il numeratore della espressione stessa, risulta che $\mu'(x)$ ha per $x=k$ uno zero d'ordine m e per primo coefficiente mb; così dalla (17') segue che l'ordine dello zero di $S^{p-1}(\mu')$ è uguale a quello di $S^{p-1}(\mu)-k$, moltiplicato per $m-1$, e che il primo coefficiente è dato, secondo le notazioni del § 421, da

$$mb\nu_{p-1}^{m-1}(k)$$

Ma per lo stesso § 421 la $S^{p-1}(x)-k$ ha per $x=k$ uno zero d'ordine m^{p-1}, e $\nu_{p-1}(k)$ è dato dalla potenza di b di esponente $\frac{m^{p-1}-1}{m-1}$. Ne viene che $(m-1)m^p$ è l'ordine dello zero di $S^{p-1}(\mu')$, e che il suo primo coeffficiente è $mb^{m^{p-1}}$. Il numeratore considerato ha dunque, per $x=k$, un zero d'ordine

$$(m-1)(1+m+m^2+\ldots+m^{q-1}) = m^q-1$$

uguale all'ordine del denominatore; il valore di $\alpha_2(x)$, per $x=k$, è dunque diverso da zero. Questo valore è precisamente uguale a b.

423. Abbiamo determinato nei §§ precedenti le funzioni $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, regolari nel cerchio (k) e tali che

$$S(\alpha_1) = b\,(x-k)^{m-1}\alpha_1,$$

$$S(\alpha_2) = \frac{mb(x-k)^{m-1}}{\mu'(x)}\,\alpha_2.$$

Dividendo membro a membro, viene (§ 118)

$$S\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = \frac{m}{\mu'(x)}\,\frac{\alpha_2}{\alpha_1};$$

il quoziente $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ è dunque radice della forma $S - \frac{m}{\mu'}$.
Questo quoziente è espresso da

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \prod_{p=1}^{\infty} \frac{S^{p-1}(\mu')(S^{p-1}(x) - k)}{m(S^p(x) - k)} = \lim_{q=\infty} \frac{\mu' S(\mu') \dots S^{q-1}(\mu')}{m^q(S^q(x) - k)},$$

ed in forza delle proprietà di α_1 ed α_2 sviluppate nei §§ precedenti, vediamo che esso ha per $x = k$ un polo di primo ordine con residuo uguale ad 1.

424. La funzione $\beta = D^{-1}\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ è radice della forma di primo ordine $S - m$. Si ha infatti (§ 394):

$$DS = M_{\mu'} SD,$$

onde, prendendo per D^{-1} la determinazione principale,

$$SD^{-1} = D^{-1} M_{\mu'} S.$$

Pertanto

$$SD^{-1}\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = D^{-1} M_{\mu'} S \frac{\alpha_2}{\alpha_1},$$

e per il § precedente

$$SD^{-1}\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = mD^{-1}\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad \text{o} \quad S\beta = m\beta,$$

che dimostra l'asserto.

Si vede che la funzione β è una funzione analitica che per $x = k$ ha una singolarità logaritmica.

425. Riassumendo, abbiamo studiato nel § 417 il caso in cui è $\mu'(k) = a \neq o$, e nei §§ 420 e segg. il caso in cui è $\mu'(k) = o$. Nel primo caso, abbiamo ottenuto una funzione analitica $\alpha(x)$ regolare nell'intorno di $x = o$, e radice della forma $S - a$; nel secondo, una funzione β, avente per $x = k$ una singolarità logaritmica e radice della forma

$S - m$, dove $m - 1$ è l'ordine dello zero di $\mu'(x)$ per $x = k$. Convenendo di porre

$$a = \mu'(k), \quad \text{se è } \mu'(k) \neq o,$$

$$a = m, \quad \text{se } \mu'(k) = o \text{ d'ordine } m - 1,$$

possiamo dire che in ogni caso, sappiamo trovare una radice della forma speciale del primo ordine $S - a$. Questa radice, funzione analitica in (k), che nell'intorno di $x = o$ o è regolare od ammette in quel punto una singolarità logaritmica isolata, verrà detta funzione fondamentale ed indicata in ogni caso con $\alpha(x)$.

426. La funzione fondamentale permette di risolvere le equazioni funzionali

$$S(\varphi) = z\varphi, \tag{20}$$

$$S(\varphi) = \varphi + 1, \tag{21}$$

essendo z una costante numerica diversa da zero.

a) Per risolvere la prima equazione, si ponga $z = a^u$; viene, da $S(\alpha) = a\alpha$,

$$S(\alpha^u) = a^u \alpha^u$$

ossia

$$S(\alpha^u) = z\alpha^u.$$

Soluzione dell'equazione (20) è dunque la $\varphi = \alpha^u$, dove, indicando con c l'inversa di $log\, a$, è $u = c \log z$.

b) Per risolvere la seconda equazione, si consideri

$$\lambda(x) = c \log \alpha(x);$$

viene

$$S(\lambda) = c \log S(\alpha),$$

ma

$$\log S(\alpha) = \log a + \log \alpha,$$

onde

$$S(\lambda) = \lambda + 1.$$

Soluzione dell'equazione (21) è dunque la $\lambda = c \log \alpha$.

c) La funzione λ ora determinata permette di dimostrare l'esistenza di costanti rispetto all'operazione S, all'infuori delle costanti numeriche. Sia infatti $\pi(x)$ una funzione periodica di periodo 1; si avrà

$$S(\pi(\lambda)) = \pi(S(\lambda)) = \pi(\lambda + 1) = \pi(\lambda),$$

e quindi $\pi(\lambda)$ è una costante rispetto ad S.

D. EQUAZIONI LINEARI OMOGENEE ALLE SOSTITUZIONI.

(EQUAZIONI A COEFFICIENTI NUMERICI).

427. Ci proponiamo, nei §§ seguenti, di trovare le radici di una forma lineare F alle sostituzioni, d'ordine n, o in altre parole di risolvere l'equazione lineare omogenea d'ordine n alle sostituzioni $F = o$: e tratteremo dapprima il caso in cui i coefficienti della forma F sono costanti numeriche.

Data l'equazione lineare alle sostituzioni,

$$F = a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \ldots + a_1 S + a_0, \tag{22}$$

dove $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sono costanti numeriche, consideriamo l'equazione (§ 178)

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = o, \tag{23}$$

e siano $z_1, z_2, \ldots z_s$ le sue radici, degli ordini rispettivi di

moltiplicità $r_1, r_2, \ldots r_s$.[1] Posto $S - z_i = E_i$, la forma F si può scrivere (§ 178)

$$F = a_n E_1^{r_1} E_2^{r_2} \ldots E_s^{r_s}$$

ed ammette come spazio di radici la somma degli spazi di radici delle singole forme $E_i^{r_i}$. Il § 176 permette di assegnare l'espressione di tali spazi. Infatti, essendo z un parametro arbitrario, la forma $E = S - z$ ammette (§ 426) per ogni valore non nullo di z la radice

$$\omega(x, z) = \alpha^u, \quad \left(u = \frac{\log z}{\log a} = c \log z\right)$$

funzione analitica regolare di z per ogni z diverso da zero. Di più, la radice generale di E è (come si vedrà al § 448) $\mathbf{c}\omega(x, z)$, essendo $\mathbf{c}$ una costante arbitraria rispetto ad S. Sono pertanto soddisfatte le condizioni poste al § 176, talchè lo spazio delle radici di E^r (r intero positivo) sarà definito dal sistema fondamentale

$$\omega, \frac{\partial \omega}{\partial z}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}, \ldots, \frac{\partial^{r-1} \omega}{\partial z^{r-1}}.$$

Ricordando che si è posto $\lambda = c \log \alpha$, viene, indicando con $b_{i \cdot j}$ coefficienti numerici dipendenti da z:

$$\frac{\partial^i \omega}{\partial z^i} = \alpha^u (b_{i \cdot 0} + b_{i \cdot 1} \lambda + \ldots + b_{i \cdot i} \lambda^i)$$

$$(i = 1, 2, \ldots r - 1).$$

Come sistema fondamentale di radici della E^r si può dunque scegliere il sistema delle r funzioni

$$\alpha^u, \alpha^u \lambda, \ldots \alpha^u \lambda^{r-1}.$$

---

[1] Qui si può supporre che a_0 sia diverso da zero, cioè che non sia nulla alcuna delle radici z. Se fosse $a_0 = o$, la F si ridurrebbe al prodotto $F_1 S$, dove F_1 è d'ordine $n - 1$ e la ricerca delle radici di F si ricondurrebbe immediatamente a quella delle radici di F_1

Se ne conclude che la F ammette uno spazio di radici ad n dimensioni, definito dal sistema fondamentale

$$\alpha^{u_i},\ \alpha^{u_i}\lambda, \ldots \alpha^{u_i}\lambda^{r_i-1}, \qquad (u_i = c \log z_i)$$
$$(i = 1, 2, \ldots s).$$

E. EQUAZIONI LINEARI OMOGENEE ALLE SOSTITUZIONI.

(EQUAZIONI A COEFFICIENTI QUALSIVOGLIANO)

428. Sia S_μ una sostituzione avente il punto $x = k$ come punto limite. Se si cambia x in $x + k$, $\mu(x)$ in $\mu_1(x) = \mu(x+k) - k$, si scorge senza difficoltà come alla sostituzione S_μ, col punto limite $x = k$, si sostituisca la S_{μ_1} col punto limite $x = o$; mentre ogni funzione regolare nell'intorno di $x = k$ si muta in una funzione regolare nell'intorno di $x = o$, ed una forma lineare in S_μ si trasforma in una forma lineare in S_{μ_1}. Potremo dunque senza danno della generalità, occuparci d'ora innanzi di sostituzioni per le quali il punto limite che verrà preso in considerazione sia $x = o$.

Ciò premesso, si vuole dimostrare il seguente LEMMA:

Abbiasi la forma lineare nella sostituzione S_μ,

$$F = \alpha_n S^n + \alpha_{n-1} S^{n-1} + \ldots + \alpha_1 S + \alpha_0, \tag{24}$$

dove $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots \alpha_1, \alpha_0$ sono funzioni analitiche regolari per $x = o$, punto limite di S, $\alpha_n(o)$ ed $\alpha_0(o)$ essendo differenti da zero.

Se è

$$\alpha_n(o) + \alpha_{n-1}(o) + \ldots + \alpha_0(o) = o,$$

mentre non esiste nessun numero intero positivo i pel quale sia

$$\alpha_n(o)\mu'(o)^{ni} + \alpha_{n-1}(o)\mu'(o)^{(n-1)i} + \ldots + \alpha_1(o)\mu'(o)^i + \alpha_0(o) = o,$$

la F ammetterà una radice regolare nell'intorno di $x = o$ ed avente in quel punto un valore prefissato arbitrario.

Poniamo $\pi_k = -\frac{\alpha_k}{\alpha_0}$; le π_k saranno regolari per $x = o$. Se ω è una radice di F, dovrà essere identicamente

$$\omega = \pi_1 S(\omega) + \pi_2 S^2(\omega) + \ldots + \pi_n S^n(\omega), \tag{24'}$$

o, posto $S_k(x) = x_k$,

$$\omega(x) = \pi_1 \omega(x_1) + \pi_2 \omega(x_2) + \ldots + \pi_n \omega(x_n). \tag{24''}$$

Derivando i volte rispetto ad x e indicando le derivate rispetto ad x mediante apici, otteniamo

$$\omega^{(i)}(x) = \sum_{k=1}^{n} (\pi_k \omega^{(i)}(x_k) + i\pi'_k \omega^{(i-1)}(x_k) + \ldots + \pi_k^{(i)} \omega(x_k)). \tag{25}$$

Qui

$$\omega^{(i)}(x_k) = \frac{d^i \omega(x_k)}{dx_k^i}\left(\frac{dx_k}{dx_{k-1}} \cdots \frac{dx_1}{dx}\right)^i + \ldots \tag{26}$$

dove i termini non scritti costituiscono una espressione lineare nelle derivate di $\omega(x_k)$ rispetto ad x_k, di ordine inferiore ad i. I coefficienti sono funzioni note, indipendenti da ω, razionali intere nelle derivate di $x_k, x_{k-1}, \ldots$ rispetto ad $x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots$, a coefficienti numerici positivi, Ma, essendo $x = o$ punto limite, si ha (§ 415, c))

$$\left(\frac{d^i x_k}{dx^i_{k-1}}\right)_0 = \left(\frac{d^i x_{k-1}}{dx^i_{k-2}}\right)_0 = \ldots \left(\frac{d^i x_1}{dx^i}\right)_0 = \mu_0^{(i)},$$

e (ibid.)

$$\left(\frac{d^i\omega(x_k)}{dx^i_k}\right)_o = \left(\frac{d^i\omega(x_{k-1})}{dx^i_{k-1}}\right)_o = \ldots = \left(\frac{d^i\omega(x_1)}{dx^i_1}\right)_o = \omega_o^{(i)}$$

dove abbiamo posto per brevità $\omega_o^{(i)}$, $\mu_o^{(i)}$ al posto di $\omega^{(i)}(o)$, $\mu^{(i)}(o)$. Si sostituisca nella (26); essa diviene:

$$\omega^{(i)}(x_k)_o = \omega_o^{(i)}\mu_o^{(i)} + \ldots \tag{27}$$

dove i termini non scritti costituiscono un'espressione lineare nelle $\omega_o^{(i-1)}$, $\omega_o^{(i-2)}, \ldots \omega_o$, e razionale intera nelle $\mu_o^{(i)}$, $\mu_o^{(i-1)}, \ldots, \mu'_o$, a coefficienti numerici positivi. Sostituendo nella (25), in cui è fatto $x = o$, viene una relazione lineare omogenea, a coefficienti noti, fra le ω_o, ω_o', $\ldots$ $\omega_o^{(i)}$, non certamente identica, poichè in essa $\omega^{(i)}$ ha per coefficiente

$$1 - \pi_1(o)\mu'^{\,i}_o - \pi_2(o)\mu_o'^{\,2i} - \ldots - \pi_n(o)\mu'^{\,ni}_o,$$

che per ipotesi è, per ogni intero i, differente da zero. Risolvendo rispetto ad $\omega_o^{(i)}$ questa relazione, si ottiene

$$\omega_o^{(i)} = \frac{g_{i\cdot o}\omega_o + g_{i\cdot 1}\omega'_o + \ldots + g_{i\cdot i-1}\omega_o^{(i-1)}}{1 - \pi_1(o)\mu_o'^{\,i} - \ldots - \pi_n(o)\mu_o'^{\,ni}}, \tag{28}$$

dove le $g_{i\cdot o}, \ldots g_{i\cdot i-1}$ sono funzioni razionali intere delle $\mu'_o, \ldots \mu_o^{(i-1)}$ e delle $\pi_k(o)$, $\pi'_k(o), \ldots \pi_k^{(i)}(o)$; queste ultime compaiono solo al primo grado, e i coefficienti numerici, come risulta dalle (25) e (26), sono interi positivi.

La relazione (28) permette di determinare in via ricorrente le $\omega_o^{(i)}$, $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ quando sia nota ω_o. Ma questa è arbitraria, perchè per $x = o$ la (24″) ci dà

$$\omega_o(1 - \pi_1(o) - \pi_2(o) - \ldots - \pi_n(o)) = o$$

e qui la parentesi è nulla per ipotesi. Inoltre se si prende $\omega_o = o$, per le (28) vengono $\omega'_o = \omega_o'' = \ldots = o$. Se ne con-

clude che esiste una serie di potenze ed una sola

$$\sum \frac{\omega_o^{(i)}}{i!}\,x^i \tag{29}$$

che soddisfa *formalmente* all'equazione e che ammette come primo coefficente un valore ω_o arbitrariamente prefissato e diverso da zero.

Per completare la dimostrazione del Lemma enunciato in principio di questo §, occorre dimostrare la convergenza dello sviluppo (29) in un intorno di $x = o$.

429. A tale scopo ci gioverà il risultato del § 419. La operazione S relativa alla funzione

$$\bar{\mu}(x) = \frac{bx}{1 - \frac{x}{r}},$$

che abbiamo ivi considerata, ammette come punto limite $x = o$, ed abbiamo veduto che la funzione

$$\bar{\omega}(x) = \frac{1}{1 - \frac{x}{r(1-b)}},$$

regolare per $x = o$ ed ivi uguale ad uno, soddisfa all'equazione

$$\bar{\omega} = \bar{\pi}_1 S\bar{\omega} + \bar{\pi}_2 S^2\bar{\omega} + \ldots + \bar{\pi}_n S^n\bar{\omega}, \tag{14}$$

dove si è posto

$$\bar{\pi}_i = \frac{a_i}{1 - \frac{1-b^i}{1-b}\,\frac{x}{r}},$$

e si è ammesso

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1.$$

Ora supporremo le costanti a_i reali e positive.

La soluzione della equazione (14), regolare per $x = o$ e che ivi assume il valore uno, se esiste, ammette uno sviluppo in serie di potenze di x, che si può determinare col procedimento del § precedente, e che per quello stesso procedimento è unica. Siccome essa esiste ed è data dalla $\bar{\omega}$, regolare entro il cerchio di centro $x = o$ e di raggio $r(1-b)$, i coefficienti del suo sviluppo in serie di potenze di x non possono differire da quelli che sarebbero determinati dal ricordato procedimento del § precedente. Si avrà dunque (cfr. la (28)) perchè $\bar{\pi}_p(o) = a_i$, $\mu'(o) = b$, e $\bar{\omega}_o = 1$:

$$(30) \qquad \bar{\omega}_o^{(i)} = \frac{h_{io} + h_{i1}\bar{\omega}'_o + \ldots + h_{i\cdot i-1}\bar{\omega}_o^{(i-1)}}{1 - a_1 b^i - a_2 b^{2i} - \ldots - a_n b^{ni}},$$

dove h_{ij} rappresenta ciò che diviene la g_{ij} della (28) quando si sostituiscano ad ω, π, μ e alle loro derivate le rispettive $\bar{\omega}$, $\bar{\pi}$, $\bar{\mu}$ e le loro derivate.

Si tratta ora di paragonare le $\omega_o^{(i)}$ alle $\bar{\omega}_o^{(i)}$.

430. Paragoniamo dapprima i denominatori delle espressioni (28) e (30). Nel primo, preso un numero h positivo minore d'uno, si può determinare un indice i' tale che per $i > i'$ sia

$$| 1 - \pi_1(o)\mu_o'^i - \ldots - \pi_n(o)\mu'^{ni} | > h.$$

Nel secondo, essendo le a, b positive e minori d'uno, si ha da un indice i in avanti

$$1 - a_1 b^i - a_2 b^{2i} - \ldots - a_n b^{ni} < 1,$$

da cui

$$(31) \quad |1 - \pi_1(o)\mu_o'^i - \ldots - \pi_n(o)\mu_o'^{ni}| > h(1 - a_1 b^i - \ldots - a_n b^{ni}).$$

431. Paragoniamo poi i numeratori delle espressioni (28) e (30).

Essendo r_o il raggio del cerchio considerato al § 411 e da cui S_μ non fa uscire, sia r_1 un numero positivo e tale che nel cerchio (r_1), circonferenza compresa, le π_i siano regolari. Se m è il massimo dei moduli di $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_n$ in (r_1), si avrà

$$| \pi_i^{(p)}(o) | \leq p!\ \frac{m}{r_1^p}$$

D'altra parte, dalle espressioni della $\bar{\pi}_i$ risulta

$$\bar{\pi}_i^{(p)}(o) = \frac{p!\, a_i}{r^p \left(\frac{1-b}{1-b^i}\right)^p}$$

Preso allora r in modo che sia

$$(32) \qquad r_1 > \frac{r}{b},$$

risulterà subito

$$(33) \qquad | \pi_i^{(p)}(o) | < \frac{m}{a_i}\, \bar{\pi}_i^{(p)}(o).$$

Inoltre per essere $r_1 < r_o$, si ha

$$| \mu(x) | < r_1 \quad \text{per} \quad | x | < r_1,$$

onde

$$| \mu_o^{(p)} | < \frac{p!}{r_1^{p-1}};$$

ma si ha

$$\bar{\mu}_o^{(p)} = p!\, \frac{b}{r^{p-1}},$$

onde per la (32)

$$| \mu_o^{(p)} | < \bar{\mu}_o^{(p)}.$$

Questa disuguaglianza si applica anche al caso di $p = 1$, quando b, il quale è sinora soggetto solo alla condizione $b < 1$, si prenda maggiore di $| \mu'(o) |$ che è pure minore d'uno.

Indichiamo ora con m' il maggiore fra i numeri h ed $\frac{m}{a_1}$; si ha dalla (33)

$$|\pi_1^{(p)}(o)| < m'\pi_1^{(p)}(o);$$

si ha pure, per il modo stesso con cui sono formate le g_{ij}, h_{ij}, che è

$$|g_{ij}| < m'h_{ij}.$$

Venendo ora al confronto delle espressioni stesse (28) e (30), abbiamo per $i = 1$, purchè si faccia $|\omega_o| < \overline{\omega}_o = 1$:

$$|g_{1 \cdot o}\omega_o| < m'h_{1o}$$

e quindi, per la (31)

$$|\omega'_o| < \frac{m'}{h}\overline{\omega}_o.$$

Facendo $i = 2$, abbiamo, poichè è $|\omega_o| < \overline{\omega}_o < \frac{m}{h}\overline{\omega}_o$, che sarà

$$|g_{2o}\omega_o + g_{2 \cdot 1}\omega'_o| < \frac{m^2}{h}(h_{2 \cdot o}\overline{\omega}_o + h_{2 \cdot 1}\overline{\omega}'_o)$$

e quindi, pure per la (31)

$$|\omega_o''| < \frac{m'^2}{h^2}\overline{\omega}''_o.$$

Così, argomentando da $i - 1$ ad i, si trova in generale

(34) $$|\omega_o^{(i)}| < \frac{m'^i}{h^i}\overline{\omega}_o^{(i)}.$$

432. La convergenza della serie (29) risulta ora immediata. Infatti, la serie

$$\sum \frac{\overline{\omega}^{(i)}}{i!} x^i$$

converge nel cerchio di centro $x = o$ e di raggio $r(1 - b)$; la (29) convergerà quindi, in forza della (34), per

$$\frac{m'}{h}|x| < r(1 - b),$$

cioè, per la condizione (32), entro il cerchio di centro $x = o$ e di raggio $\frac{1}{m'} br_1 h(1 - b)$. Il Lemma enunciato al § 428 è così pienamente dimostrato.

433. Data ancora la sostituzione S col punto limite $x = o$, consideriamo la forma lineare in S

(35) $$G = \beta_n S^n + \beta_{n-1}S^{n-1} + \ldots + \beta_o;$$

in essa si suppongano le $\beta_o, \beta_1, \ldots \beta_n$ regolari per $x = o$, e di più $\beta_n(o)$ e $\beta_o(o)$ siano differenti da zero.

L' equazione algebrica

(36) $$\beta_n(o)z^n + \beta^{n-1}(o)z^{n-1} + \ldots + \beta_o(o) = o$$

si dirà *equazione caratteristica* della G. Sia z una radice generica dell' equazione caratteristica, e poniamo

$$u = c \log z;$$

qui, come ai §§ 425-426, a è uguale a $\mu'(o)$ se è $\mu'(o) \neq o$, e ad $m + 1$ se m è l' ordine dello zero di $\mu'(x)$ per $x = o$ e con c rappresentiamo $\log a$; supponiamo ancora la radice $z = a^u$ tale che per nessun numero intero positivo s sia anche $a^u\mu'(o)^s$ radice dell' equazione [1].

Riprendiamo ora la funzione $\alpha(x)$ definita al § 425 come radice della forma S — a; sostituendo in $G(\varphi)$ la funzione $\alpha^u\psi$ al posto di φ, si vede subito che l' equazione $G = o$ è soddisfatta se ψ è radice della forma lineare

$$F = \beta_n a^{nu}S^n + \beta_{n-1}a^{(n-1)u}S^{n-1} + \ldots + \beta_1 a^u S + \beta_o.$$

Ora, per le ipotesi, la somma dei valori dei coefficienti di questa equazione per $x = o$ è nulla poichè $a^u = z$ è ra-

---

[1] Questa ipotesi è sempre soddisfatta se è $\mu'(o) = o$.

dice della (36), e non esiste alcun numero intero positivo s tale che sia

$$\beta_n(o)a^{nu}\mu'(o)^{su} + \ldots + \beta_1(o)a^u\mu'(o)^s + \beta_0(o) = o.$$

La F si trova dunque nelle condizioni volute dal Lemma del § 428; essa ammetterà pertanto una radice ψ regolare nell'intorno di $x = o$ ed avente in questo punto un valore arbitrario differente da zero. Corrispondentemente la G ammetterà una radice

$$(37) \qquad \varphi = a^u\psi = a^u(p_0 + p_1x + p_2x^2 + \ldots)$$

dove p_0 è arbitrario e $p_1, p_2, \ldots$ sono numericamente determinati in funzione di p_0.

434. Ad ogni radice z dell'equazione caratteristica (36) corrisponde adunque una radice di G, purchè $z\mu'(o)^s$ non sia per nessun numero intero positivo $s > o$ radice della (36). È facile vedere che in ogni caso esiste almeno una z soddisfacente a questa condizione.

Distribuiamo infatti le radici di (36) in gruppi, assegnando ad un medesimo gruppo, insieme con una determinata radice, tutte e sole quelle che se ne ottengono moltiplicandola per una potenza intera di $\mu'(o)$, ogni radice essendo contata tante volte quante sono le unità del suo ordine di moltiplicità. Sia un tale gruppo costituito da una sola radice $z = a^u$: ad essa corrisponderà una radice φ di G della forma (37). Sia invece un gruppo costituito dalle radici

$$z,\ za^{s_1},\ za^{s_2}, \ldots,\ za^{s_p} \qquad (o \leq s_1 \leq \ldots \leq s_p),$$

dove $a = \mu'(o) \neq o$, ed $s_1, s_2, \ldots s_p$ sono numeri interi non tutti nulli; è chiaro che alla radice za^{s_p}, perchè soddisfa alla posta condizione, corrisponde una radice φ di G.

Resta così stabilita l'e s i s t e n z a d i t a n t e r a d i c i d i G q u a n t i s o n o i g r u p p i d i r a d i c i d e l l a (36) che si possono formare nel modo indicato. Si può dimostrare di più che la G h a p r e c i s a m e n t e n r a d i c i, cioè tante quante sono le radici dell'equazione (36). Ma per giungere a questo risultato sarà necessario di premettere alcune considerazioni sulla operazione inversa della $E = S - \mathbf{1}$.

F. L'OPERAZIONE INVERSA DELLA E.

435. Considereremo, in ciò che segue, alcune equazioni

$$E(\varphi) = \psi,$$

dove le ψ saranno funzioni date, particolarmente semplici; in altre parole ci occuperemo di determinare la $E^{-1}(\psi)$ per determinate forme delle funzioni ψ.

I. Sia dapprima $\psi = 1$. Abbiamo trovato al § 426, *b*) una funzione $\lambda(x)$ tale che

$$S(\lambda) = \lambda + 1, \quad \text{cioè} \quad E(\lambda) = 1.$$

Siccome le radici di E sono tutte e sole le costanti rispetto ad S, costanti che indicheremo genericamente con $\mathbf{c}$, così si ha

$$(38) \qquad E^{-1}(1) = \lambda + \mathbf{c}.$$

436. II. Sia poi ψ una funzione analitica regolare nell'intorno del punto limite $x = k$ della S. Posto $\varphi = log\, \chi$, l'equazione

$$S(\varphi) - \varphi = \psi$$

equivale a

$$log\, \frac{S(\chi)}{\chi} = \psi,$$

onde

$$S(\chi) = \chi e^{\psi}.$$

Siamo così ricondotti alla ricerca di una radice della forma del primo ordine $E_1 = S - e^{\psi}$. La sua equazione caratteristica è

$$z - e^{\psi(k)} = o.$$

a) Se $\psi(k) = o$, siamo nelle condizioni del § 428; esiste quindi per E_1 una radice χ regolare per $x = k$ ed avente in questo punto un valore non nullo prefissato arbitrariamente L'equazione $E = \psi$ sarà dunque soddisfatta da una delle determinazioni di $\log \chi$, ed avrà così una soluzione regolare per $x = k$.

b) Se è $\psi(k) \neq o$, applicheremo il metodo del § 433; porremo cioè $u = c \log z = c\psi(k)$, e la radice della E_1 sarà della forma $\alpha^u \chi$, dove χ è regolare per $x = k$ ed ha in questo punto un valore non nullo prefissato arbitrariamente. L'equazione $E(\varphi) = \psi$ sarà dunque soddisfatta da

$$u \log \alpha + \log \chi = \psi(k)\lambda + \log \chi.$$

I due risultati si raccolgono nella formula

$$E^{-1}(\psi) = \psi(k)\lambda + \xi + \mathbf{c}, \tag{39}$$

dove ξ è una funzione regolare per $x = k$ (1).

437. III. Sia $\psi = \lambda^{n-1}$, per n intero positivo. Se in

$$S(\varphi) - \varphi$$

poniamo

$$\varphi = a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda,$$

viene

$$S(\varphi) - \varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i((\lambda + 1)^i - \lambda^i);$$

---

(1) Tenendo presente l'osservazione fatta in principio del § 428, si potrà senz'altro, come faremo in seguito, applicare i risultati dei §§ 428-432 al caso che il punto limite considerato sia un punto qualsivoglia, $x = k$.

basta dunque determinare le a_i per mezzo del sistema

$$n a_n = 1, \quad \binom{n}{2} a_n + (n-1)\, a_{n-1} = o, \ldots$$
$$\ldots, a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 = o,$$

per soddisfare all'equazione $E = \lambda^{n-1}$.

438. IV. Sia $\psi = \psi_1 \lambda^{n-1}$, essendo ψ_1 una funzione regolare per $x = k$. Se ai due membri della formula (5) del § 411 applichiamo l'operazione E^{-1}, ne viene

$$\rho\sigma = E^{-1}(\rho E(\sigma)) + E^{-1}(\sigma E(\rho)) + E^{-1}(E(\rho)E(\sigma)) + \mathbf{c}\ (1). \tag{40}$$

Facendo $\sigma = E^{-1}(\psi_1)$, $\rho = \lambda^n$, viene

$$\lambda^n E^{-1}(\psi_1) = E^{-1}(\lambda^n \psi_1) + E^{-1}(E^{-1}(\psi_1)E(\lambda^n)) + \\ + E^{-1}(\psi_1 E(\lambda^n)) + \mathbf{c}. \tag{41}$$

Ma si ha manifestamente

$$E(\lambda^n) = n\lambda^{n-1} + \binom{n}{2} \lambda^{n-2} + \ldots . + n\lambda + 1;$$

di più (§ 436) $E^{-1}(\psi_1)$ è dato da $\psi_1(k)\lambda + \xi$; infine (§ 437) abbiamo visto che $E^{-1}(\lambda^n)$ è un polinomio di grado $n + 1$ in λ, a coefficienti numerici, il primo dei quali è $\frac{1}{n+1}$. Se ne conclude che

$$E^{-1}(\lambda^n \psi_1) = \frac{\psi_1(k)}{n+1}\lambda^{n+1} + \xi\lambda^n + E^{-1}(\pi_1),$$

dove π_1 indica un polinomio in λ, di grado $n - 1$, a coefficienti regolari per $x = k$. Con ciò la determinazione di $E^{-1}(\lambda^n \psi_1)$ è ricondotta a quella di espressioni analoghe corrispondenti agli esponenti $n - 1$, $n - 2, \ldots 1$ di λ. Basta dunque trovare $E^{-1}(\lambda\psi_1)$. In questo caso l'equazione (41) dà:

$$\lambda E^{-1}(\psi_1) = E^{-1}(\lambda\psi_1) + E^{-1}(E^{-1}(\psi_1)E(\lambda)) + E^{-1}(\psi_1 E(\lambda)) + \mathbf{c},$$

---

(1) Questa formula non è senza analogia con quella dell'integrazione per parti.

onde, sostituendo le espressioni già trovate per $E^{-1}(\psi_1)$ ed $E^{-1}(\lambda)$, si conclude

$$E^{-1}(\lambda\psi_1) = \frac{1}{2}\psi_1(k)\lambda^2 + \xi\lambda + \bar{\xi} + c$$

dove ξ e $\bar{\xi}$ sono funzioni determinate, regolari per $x = k$.

Risalendo ad $E^{-1}(\lambda^n\psi_1)$, si ha analogamente

$$(42)\quad E^{-1}(\lambda^n\psi_1) = \frac{1}{n+1}\psi_1(k)\lambda^{n+1} + \xi_n\lambda^n + \ldots + \xi_1\lambda + \xi_0 + c.$$

439. V. Sia ora

$$\psi = \frac{a_1}{\alpha} + \frac{a_2}{\alpha^2} + \ldots + \frac{a_n}{\alpha^n}.$$

Tentiamo di soddisfare alla $E(\varphi) = \psi$ con una espressione

$$\varphi = \frac{b_1}{\alpha} + \frac{b_2}{\alpha^2} + \ldots + \frac{b_n}{\alpha^n}.$$

Sarà (§ 426):

$$S(\varphi) = \frac{b_1}{a\alpha} + \frac{b_2}{a^2\alpha^2} + \ldots + \frac{b_n}{a^n\alpha^n},$$

e quindi

$$E(\varphi) = \left(\frac{1}{a} - 1\right)\frac{b_1}{\alpha} + \left(\frac{1}{a^2} - 1\right)\frac{b^2}{\alpha^2} + \ldots + \left(\frac{1}{a^n} - 1\right)\frac{b_n}{\alpha^n}.$$

Basta dunque prendere le b_i tali che sia

$$\left(\frac{1}{a^i} - 1\right)b_i = a_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots n);$$

il che è sempre possibile, poichè in ogni caso la a è differente dall'unità.

440. VI. Sia $\psi = \frac{1}{\alpha^n}\psi_1$, essendo ψ_1 regolare per $x = k$, e limitiamoci al caso di $\mu'(k) \neq o$. In questa ipotesi, la $\alpha(x)$ ha in $x = k$ uno zero del prim'ordine, onde

$$\frac{\psi_1}{\alpha^n} = \frac{\psi_2}{(x-k)^n},$$

essendo ψ_2 una nuova funzione regolare per $x = k$; sia

$$\psi_2 = p_0 + p_1(x-k) + p_2(x-k)^2 + \ldots$$

Poniamo

$$\varphi = \varphi_1 + \frac{h_1}{\alpha} + \frac{h_2}{\alpha^2} + \ldots + \frac{h_n}{\alpha^n};$$

verrà

$$E(\varphi) = E(\varphi_1) + \frac{h_1}{\alpha}\left(\frac{1}{a} - 1\right) + \frac{h^2}{\alpha^2}\left(\frac{1}{a^2} - 1\right) + \ldots + \frac{h^n}{\alpha^n}\left(\frac{1}{a^n} - 1\right)$$

e la questione è ricondotta a determinare φ_1 e le costanti $h_1, h_2, \ldots h_n$ in modo che sia

$$(43)\quad E(\varphi_1) + \frac{h_1}{\alpha}\left(\frac{1}{a} - 1\right) + \ldots + \frac{h_n}{\alpha^n}\left(\frac{1}{a^n} - 1\right) = \frac{\psi_2}{(x-k)^n} =$$

$$= \frac{p_0}{(x-k)^n} + \frac{p_1}{(x-k)^{n-1}} + \ldots + \frac{p_{n-1}}{x-k} + p_n + \ldots$$

Ma per le proprietà delle α nell'ipotesi $\mu'(k) \neq o$, si ha

$$\frac{1}{\alpha^i} = \frac{a_{i.0}}{(x-k)^i} + \frac{a_{i.1}}{(x-k)^{i-1}} + \ldots + a_{i.i} + \ldots \quad (i = 1, 2 \ldots n);$$

scegliendo allora le $h_1, h_2, \ldots h_n$ in modo da soddisfare al sistema, evidentemente determinato,

$$\left(\frac{1}{a^n} - 1\right)h_n a_{n.0} = p_0$$

$$\left(\frac{1}{a^{n-1}} - 1\right)h_n a_{n.1} + \left(\frac{1}{a^n} - 1\right)h_{n-1}a_{n-1.0} = p_1$$

. . . .

spariranno nell'equazione (43) le potenze negative di $x - k$, e l'equazione in φ_1 sarà del tipo II (§ 436); la sua soluzione sarà pertanto della forma $h\lambda + \eta$, con $h = p_n$, ed η regolare nel punto limite. Onde

$$E^{-1}\left(\frac{\psi_1}{\alpha^n}\right) = h\lambda + \frac{\xi}{\alpha^n} + c,$$

ξ essendo regolare per $x = k$ ed in quel punto diversa da zero.

441. VII. Sia da ultimo $\psi = \frac{\lambda}{\alpha^n}\psi_1$, essendo sempre ψ_1 una funzione regolare per $x = k$; sia ancora $\mu'(k) \neq o$.

Applichiamo la formula (40) in cui sia fatto

$$\rho = E^{-1}\left(\frac{\psi_1}{\alpha^n}\right), \quad \sigma = \lambda,$$

e ricordiamo che $E(\lambda) = 1$; siccome per il § precedente

$$E^{-1}\left(\frac{\psi_1}{\alpha^n}\right) = h\lambda + \frac{\xi}{\alpha^n},$$

e quindi

$$E^{-2}\left(\frac{\psi_1}{\alpha^n}\right) = h_2\lambda^2 + h_1\lambda + \frac{\xi_1}{\alpha^n},$$

dove ξ_1 è regolare per $x = k$ ed ivi diversa da zero, avremo

$$E^{-1}\left(\frac{\psi_1\lambda}{\alpha^n}\right) = \frac{\overline{\xi} + \overline{\xi}_1\lambda}{\alpha^n} + g\lambda^2 + \mathbf{c}.$$

Collo stesso procedimento, e argomentando da $m - 1$ ad m, si trova

$$E^{-1}\left(\frac{\psi_1\lambda^m}{\alpha^n}\right) = \frac{\xi_o + \xi\lambda + \ldots + \xi_m\lambda^m}{\alpha^n} + \overline{g}\lambda^{m+1} + \mathbf{c},$$

dove $\xi_o, \ldots \xi_m$ sono regolari per $x = k$, $\xi_m(k)$ è diverso da zero e $\overline{g}$ è una costante numerica che può anche essere nulla.

G. I GRUPPI DI RADICI DI UNA FORMA.

442. Torniamo ora alla questione indicata alla fine del § 434. Abbiamo visto come ad ogni gruppo (§ 434) di

radici dell'equazione caratteristica corrisponda una radice della forma G; ora vogliamo mostrare come ad ogni singola radice del gruppo corrisponda una radice di G.

Consideriamo dapprima un gruppo formato da una sola radice z_1 dell'equazione caratteristica, radice che supporremo dell'ordine m di moltiplicità. Posto $z_1 = a^u$, sappiamo che G ammette una radice della forma $\alpha^u\varphi$, dove φ è radice della forma $F = GM_{\alpha^u}$ (§ 433), la cui equazione caratteristica è, essendo $x = k$ il punto limite,

$$(44) \quad \beta_n(k)z_1^n z^n + \beta_{n-1}(k)z_1^{n-1}z^{n-1} + \ldots + \beta_1(k)z_1 z + \beta_o(k) = o,$$

equazione che ammette l'unità come radice multipla dell'ordine m.

Essendo φ radice di F, si ha (§ 408)

$$FM_\varphi = F_1E,$$

dove F_1 è una forma d'ordine $n - 1$, a coefficienti regolari nell'intorno di $x = k$; la sua equazione caratteristica è

$$(45) \quad \begin{aligned} &\beta_n(k)z_1^n z^{n-1} + (\beta_n(k)z_1 + \beta_{n-1}(k))z_1^{n-1}z^{n-2} + \ldots \\ &\ldots + (\beta_n(k)z_1^{n-1} + \beta_{n-1}(k)z_1^{n-2} + \ldots + \beta_1(k))z_1 = o. \end{aligned}$$

In questa equazione, il primo e l'ultimo coefficiente sono differenti da zero; di più il suo primo membro è evidentemente il quoziente della divisione per $z - 1$ del primo membro della (44); se ne conclude che la (44) e la (45) hanno le stesse radici, soltanto la $z = 1$ è, per l'ultima, multipla dell'ordine $m - 1$. La F_1 è dunque perfettamente analoga alla F, e le è applicabile il Lemma del § 428; esiste quindi per essa una radice ψ_1, regolare per $x = k$ ed ivi differente da zero. Per le relazioni che passano fra G ed F, F ed F_1, si ha

$$F_1 = GM_{\alpha^u\varphi}E^{-1},$$

onde risulta che

$$\alpha^u \varphi E^{-1}(\psi_1)$$

è radice di G. Ma si è visto (§ 436) che

$$E^{-1}(\psi_1) = \psi_1(k)\lambda + \xi + c,$$

onde si conclude che, oltre alla radice $\alpha^u \varphi$, la G ammette una radice della forma

$$\alpha^u \varphi(h_1\lambda + \xi).$$

φ e ξ essendo regolari per $x = k$. Così continuando, se è $m > 2$, si porrà analogamente, per il § 408

$$F_1 M_\psi = F_2 E,$$

onde

$$F_2 = G M_{\alpha^u \varphi} E^{-1} M_\psi E^{-1}$$

dove F_2 è dell'ordine $m - 2$, e così via. Continuando così, fino ad una forma F_{m-1} dell'ordine $n - m + 1$, ed includendo nelle parentesi la funzione φ, che è regolare per $x = k$, si conclude che al gruppo costituito dalla radice multipla z_1 d'ordine m corrispondono, per G, m radici della forma:

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha^u \xi_{00} \\ \alpha^u(\xi_{10} + \xi_{11}\lambda) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha^u(\xi_{m-1.0} + \xi_{m-1.1}\lambda + \dots \xi_{m-1.m-1}\lambda^{m-1}) \end{array} \right.$$

dove le $\xi_{00}, \xi_{11}, \dots \xi_{m-1.m-1}$ sono, per $x = k$, diverse da zero e non differiscono fra loro se non per un fattore numerico.

Questo risultato, relativo al caso in cui un gruppo è costituito solo da una radice multipla, esaurisce lo studio del caso in cui è $\mu'(k) = o$, poichè in codesto caso non possono presentarsi gruppi di altra specie.

443. Consideriamo ora il caso di un gruppo qualsivoglia di radici dell'equazione caratteristica della forma G (§ 434); siano esse,

$$a^{u_1}, a^{u_2}, a^{u_3}, \dots \qquad (a = \mu'(k) \neq o)$$

dei rispettivi ordini di moltiplicità m_1 m_2, m_3, ... Per la definizione stessa del gruppo, le differenze

$$u_1 - u_2, u_2 - u_3, \dots$$

sono numeri interi; ordineremo le radici in modo che queste differenze siano tutte positive. Siccome il risultato del § precedente si è ottenuto in forza della sola ipotesi che, essendo $z = a^u$ radice dell'equazione caratteristica, non esistesse nessun numero positivo intero s pel quale anche a^{u+s} fosse radice della equazione medesima, così, nel caso presente, la detta ipotesi è verificata per a^{u_1}. Pertanto, come nel § precedente, la G ammetterà, corrispondentemente a questa radice di (36), le m_1 radici

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^{u_1} \xi_{00} \\ \alpha^{u_1}(\xi_{10} + \xi_{11}\lambda) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha^{u_1}(\xi_{m_1-1.0} + \xi_{m_1-1.1}\lambda + \dots + \xi_{m_1-1.m_1-1}\lambda^{m-1}) \end{array} \right.$$

Queste radici si determinano considerando le m_1 forme ausiliari F, $F_1 \dots F_{m_1-1}$ degli ordini $n, n-1, \dots n - m_1 + 1$ e soddisfacenti tutte alle condizioni del Lemma del § 428.

Prendiamo le mosse dall'ultima di esse. Per il § precedente, essa è data da

$$F_{m_1-1} = G\alpha^u \xi_{00} E^{-1}\psi_1 E^{-1} \dots \psi_{m_1-2}E^{-1}.$$

L'equazione caratteristica di F_{m_1-1} ammette l'unità come radice semplice; le altre sue radici si ottengono dividendo per a^{u_1} le radici diverse da a^{u_1} della (36). Se dunque distribuiamo in gruppi le radici dell'equazione caratteristica di F_{m_1-1} nel modo indicato al § 434, uno di questi gruppi sarà composto delle radici

$$1,\ a^{u_2-u_1},\ a^{u_3-u_1},\ \ldots$$

degli ordini di moltiplicità $1, m_2, m_3, \ldots$ rispettivamente. Indicando allora con ψ_{m_1-1} la radice di F_{m_1-1} regolare e diversa da zero per $x = k$, si formi la

$$F_{m_1} = F_{m_1-1}\psi_{m_1-1}E^{-1},$$

di ordine $n - m_1$. La equazione caratteristica, nel passaggio da F_{m_1-1} ad F_{m_1}, perde la radice 1; cosicchè uno dei gruppi di radici dell'equazione caratteristica relativa ad F_{m_1} sarà costituito da

$$a^{u_2-u_1},\ a^{u_3-u_1},\ \ldots$$

degli ordini $m_2, m_3 \ldots$ Ora il numero intero negativo $u_2 - a_1$ è maggiore dei seguenti $u_3 - u_1, \ldots$; di più, la F_{m_1} è tale che i suoi coefficienti soddisfanno alle condizioni del teorema del § 433: essa ammetterà quindi una radice ω_0 della forme

$$\omega_0 = \alpha^{u_2-u_1}\chi_0,$$

dove χ_0 è regolare e diversa da zero per $x = k$. Applichiamo allora ad F_{m_1} un procedimento analogo a quello applicato a G nel § precedente: mediante m_2 forme ausiliari

$$F_{m_1 0},\ F_{m_1 1},\ \ldots\ F_{m_1 m_2-1}$$

otterremo altre $m_2 - 1$ radici di F_{m_2}, della forma

$$\omega_i = \alpha^u(\chi_{i0} + \chi_{i1}\lambda + \ldots \chi_{ii}\lambda^i), \qquad (i = 1, 2, \ldots m_2 - 1),$$

le χ_{ij} essendo regolari per $x = k$ e le $\chi_{i.i}$ ivi diverse da zero. E poichè F_{m_1} è legata alla G da

$$F_{m_1} = G\alpha^u\xi_{00}E^{-1} \ldots \psi_{m_1-1}E^{-1}$$

così le m_2 funzioni

$$(47)\quad \pi_i = \alpha^{u_2-u_1}\xi_{00}E^{-1}\psi_1 \ldots \psi_{m_1-1}E^{-1}(\omega_i),\ (i = o, 1, 2, \ldots m_2 - 1)$$

forniranno altrettante radici di G.

Applicando il medesimo metodo alla F_{m_1, m_2-1}, si otterranno altre m_3 radici di G, e così via. È dunque intanto dimostrato che la G ammette tante radici quante sono le radici del gruppo considerato nell'equazione caratteristica, ognuna contata tante volte quante sono le unità del suo ordine di moltiplicità.

444. Ricerchiamo ora in modo più preciso l'espressione delle radici π_i, di cui abbiamo dimostrata l'esistenza. Nell'espressione (47) ci si presenta dapprima da calcolare la $E^{-1}(\omega_i)$, cioè una somma di termini della forma

$$E^{-1}\left(\frac{1}{\alpha^{u_1-u_2}}\chi_j\lambda^j\right).$$

Ora, essendo $u_1 - u_2$ un intero positivo, una tale espressione ci è data dal § 441: abbiamo ivi trovato

$$E^{-1}\left(\frac{1}{\alpha^{u_1-u_2}}\chi_j\lambda^j\right) = \frac{\eta_0 + \eta_1\lambda + \ldots + \eta_j\lambda^j}{\alpha^{u_1-u_2}} + g\lambda^{j+1},$$

dove le η sono funzioni regolari per $x = k$, l'ultima essendo ivi diversa da zero.

Risulta di qui

$$(48)\qquad E^{-1}(\omega_i) = \frac{\bar\eta_0 + \bar\eta_1\lambda + \ldots + \bar\eta_i\lambda^i}{\alpha^{u_1-u_2}} + \sum_0^i g_j\lambda^{j+1},$$

dove i numeri g_j possono essere o in parte o tutti uguali a zero e le $\bar\eta_j$ sono regolari nell'intorno del punto limite; la $\bar\eta_i$ è per $x = k$ diversa da zero. Siccome a quest'ultima condizione soddisfa anche la ψ_{m_1-1}, avremo che $\psi_{m_1-1}E^{-1}(\omega_1)$ ammette una espressione analoga alla (48), salvo che il polinomio che vi comparirà come secondo termine non sarà a coefficienti numerici. Allora pel § 441 avremo che

$$E^{-1}\psi_{m_1-1}E^{-1}(\omega_1)$$

ammette una espressione della forma

$$\frac{\overline{\overline{\eta}}_o + \overline{\overline{\eta}}_1\lambda + \ldots \overline{\overline{\eta}}_i\lambda^i}{\alpha^{u_1-u_2}} + \pi_i \tag{49}$$

dove le $\overline{\overline{\eta}}_j$ sono al solito funzioni regolari nell'intorno di $x = k$ e si ha $\overline{\overline{\eta}}_i(k) \neq o$; con π_i abbiamo per brevità indicato un polinomio in λ di grado non superiore ad $i + 2$, in cui i coefficienti sono funzioni regolari nell'intorno di $x = k$, non essendo escluso che essi siano o in parte o tutti identicamente nulli.

Vediamo dunque che ogni operazione $E^{-1}M_\psi$, dove $\psi(k) \neq o$, eseguita sopra una espressione della forma (49) dà luogo ad una espressione della medesima natura: solo resta aumentato di un'unità il massimo grado cui può giungere in λ il polinomio secondo termine.

Argomentando allora da n ad $n + 1$ e ricordando che ξ_{oo} è regolare nell'intorno del punto limite, e che è $\xi_{oo}(k) \neq o$, possiamo concludere che la funzione π_i ammette una espressione della forma

$$\alpha^{u_2}(\psi_{i.o} + \psi_{i.1}\lambda + \ldots + \psi_{i.i}\lambda^i) +$$
$$+ \alpha^{u_1}(\varphi_{m_1+i.o} + \varphi_{m_1+i.1}\lambda + \ldots + \varphi_{m_1+i.m_1+i}\lambda^{m_1+i})$$
$$(i = o, 1, 2, \ldots, m_2 - 1),$$

dove le $\psi_{i.j}$ e le $\varphi_{m_1+i.j}$ sono funzioni regolari nell'intorno del punto limite: le $\varphi_{m+i.j}$ possono o tutte o in parte essere

identicamente nulle, ma la $\varphi_{i.j}$ è per $x = k$ necessariamente diversa da zero.

A questo punto è manifesto il risultato a cui, continuando il procedimento, giungeremo da ultimo, e che si raccoglie nel seguente enunciato:

S i a

$$G = \alpha_n S^n + \alpha_{n-1}S^{n-1} + \ldots + \alpha_1 S + \alpha_o$$

u n a f o r m a l i n e a r e a l l e s o s t i t u z i o n i, a c o e f f i c i e n t i r e g o l a r i n e l l' i n t o r n o d i u n p u n t o l i m i t e $x = k$, n e l q u a l e l a d e r i v a t a d e l l a f u n z i o n e d a s o s t i t u i r e a b b i a u n v a l o r e a d i v e r s o d a z e r o; d i p i ù α_n e d α_o p e r $x = k$ n o n s i a n n u l l i n o. C o n s i d e r a t a l' e q u a z i o n e c a r a t t e r i s t i c a d e l l a F

$$\alpha_n(k)t^n + \alpha_{n-1}(k)t^{n-1} + \ldots + \alpha_1(k)t + \alpha_o(k) = o,$$

d i s t r i b u i a m o n e l e n r a d i c i i n g r u p p i, a s s e g n a n d o a d u n m e d e s i m o g r u p p o, i n s i e m e c o n u n a d e t e r m i n a t a r a d i c e, t u t t e e s o l e q u e l l e c h e s o n o u g u a l i a d e s s a o s e n e p o s s o n o d e d u r r e m o l t i p l i c a n d o l a p e r u n a p o t e n z a d i a a d e s p o n e n t e i n t e r o. U n o d i c o d e s t i g r u p p i s i a c o s t i t u i t o d a l l e r a d i c i

$$a^{u_1},\quad a^{u_2},\ \ldots,\ a^{u_q},$$

m u l t i p l e d e g l i o r d i n i $m_1, m_2, \ldots, m_q$, r i s p e t t i v a m e n t e, e s u p p o n i a m o c h e e s s e s i a n o o r d i n a t e i n m o d o c h e i n u m e r i i n t e r i $u_1 - u_2,\ u_2 - u_3,\ \ldots,\ u_{q-1} - u_q$ s i e n o t u t t i p o s i t i v i. A l l o r a a c o d e s t o g r u p p o d i $m_1 + m_2 + \ldots + m_q$ r a d i c i d e l l' e q u a z i o n e c a r a t t e r i s t i c a c o r r i s p o n d e u n g r u p p o d i altrettante radici di F, aventi espressioni della forma

$$\alpha^{u_1}\pi_{1.i} \qquad (i = o, 1, \ldots, m_1 - 1)$$
$$\alpha^{u_2}\pi_{2.i} + \alpha^{u_1}\pi_{1.m_1+i} \qquad (i = o, 1, \ldots, m_2 - 1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha^{u_q}\pi_{q.i} + \alpha^{u_{q-1}}\pi_{q-1,\, m_{q-1}+i} + \ldots + \alpha^{u_1}\pi_{1,\, m_1+m_2+\ldots+m_{q-1}+i}$$
$$(i = o, 1, \ldots m_q - 1),$$

dove i $\pi_{i.j}$ rappresentano polinomi in λ di grado non superiore al rispettivo secondo indice, aventi per coefficienti funzioni regolari nell' intorno del punto $x = k$. In particolare ciascuno dei polinomi

$$\pi_{1.o}, \pi_{1.1}, \ldots, \pi_{1.m_1-1}, \pi_{2.o}, \ldots, \pi_{2.m_2-1}, \ldots, \pi_{q.o}, \ldots, \pi_{q.m_q-1}$$

è di grado precisamente uguale al suo secondo indice, e in ognuno di essi il coefficiente della massima potenza di λ è una funzione che per $x = k$ è diverso da zero.

H. SISTEMI FONDAMENTALI DI RADICI.

445. Nei §§ precedenti, abbiamo provata l'esistenza e determinata la forma di n radici per ogni forma lineare alle sostituzioni dell'ordine n. Ma, per una proprietà fondamentale delle operazioni distributive, la forma considerata ammette come radici tutte le funzioni appartenenti allo spazio lineare definito dalle n radici suaccennate. Ci proponiamo di dimostrare che codesto spazio è precisamente ad n dimensioni (nel senso del § 410) e che la forma lineare considerata non può ammettere, fuori di esso, alcuna radice.

Perciò sarà necessario di premettere il seguente teorema, dovuto al GRÉVY: Condizione necessaria e sufficiente affinchè fra n funzioni analitiche $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ aventi un'area comune di regolarità, passi una relazione lineare, omogenea, a coefficienti costanti rispetto ad una sostituzione S, si è che sia identicamente nullo il determinante

$$\Gamma(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \ldots\ldots & \varphi_n \\ S(\varphi_1) & S(\varphi_2) & \ldots\ldots & S(\varphi_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S^{n-1}(\varphi_1) & S^{n-1}(\varphi_2) & \ldots & S^{n-1}(\varphi_n) \end{vmatrix}$$

che chiameremo *determinante del* GRÉVY relativo alle funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

a) La condizione è necessaria. Infatti, se sussiste fra le funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ una relazione della forma

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_n\varphi_n = o,$$

insieme con essa sussisteranno le altre $n - 1$

$$c_1 S^i(\varphi_1) + c_2 S^i(\varphi_2) + \ldots + c_n S^i(\varphi_n) = o \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

le quali non sono compatibili con la prima se non è identicamente nullo il determinante

$$\Gamma(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n).$$

b) La condizione è evidentemente sufficiente nel caso di due funzioni; perchè se è

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ S(\varphi_1) & S(\varphi_2) \end{vmatrix} = o,$$

risulta

$$S\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right) = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}.$$

Ciò esprime che $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ è una costante (rispetto ad S); indicata questa costante con $-\mathbf{c}_2 : \mathbf{c}_1$, viene

$$\mathbf{c}_1\varphi_1 + \mathbf{c}_2\varphi_2 = o.$$

c) Dimostriamo ora che, se la condizione è sufficiente per $n-1$ funzioni, è tale anche per n.

Perciò, nel determinante Γ relativo a $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, dagli elementi della prima, seconda, ..., $(n-1)^{ma}$ linea, moltiplicati rispettivamente per

$$S(\varphi_1),\ S^2(\varphi_1), \ldots,\ S^{n-1}(\varphi_1),$$

sottragghiamo quelli della seconda, terza, ..., n^{ma} moltiplicati rispettivamente per

$$\varphi_1,\ S(\varphi_1), \ldots,\ S^{n-2}(\varphi_1).$$

Così il determinante, all'infuori del fattore esterno

$$\frac{1}{S(\varphi_1)S^2(\varphi_1)\ldots S^{n-1}(\varphi_1)},$$

diventa

$$(50)\quad \begin{vmatrix} \varphi_2 S(\varphi_1) - \varphi_1 S(\varphi_2) & \ldots & \varphi_n S(\varphi_1) - \varphi_1 S(\varphi_n) \\ S(\varphi_2)S^2(\varphi_1) - S(\varphi_1)S^2(\varphi_2) & \ldots & S(\varphi_n)S^2(\varphi_1) - S(\varphi_1)S^2(\varphi_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ S^{n-2}(\varphi_2)S^{n-1}(\varphi_1) - S^{n-2}(\varphi_1)S^{n-1}(\varphi_2) & \ldots & S^{n-2}(\varphi_n)S^{n-1}(\varphi_1) - S^{n-2}(\varphi_1)S^{n-2}(\varphi_n) \end{vmatrix}.$$

Se allora supponiamo che il determinante $\Gamma(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ sia identicamente nullo, poichè non è tale il fattore esterno, dovrà essere nullo identicamente il determinante (50). Ora questo non è se non il determinante del GRÉVY, relativo alle $n-1$ funzioni

$$\varphi_2 S(\varphi_1) - \varphi_1 S(\varphi_2),\ \varphi_3 S(\varphi_1) - \varphi_1 S(\varphi_3), \ldots, \varphi_n S(\varphi_1) - \varphi_1 S(\varphi_n);$$

cosicchè esisteranno $n-1$ costanti $\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \ldots, \mathbf{c}_n$, tali che per esse sia

$$\mathbf{c}_2(\varphi_2 S(\varphi_1) - \varphi_1 S(\varphi_2)) + \mathbf{c}_3(\varphi_3 S(\varphi_1) - \varphi_1 S(\varphi_3)) + \ldots$$
$$\ldots + \mathbf{c}_n(\varphi_n S(\varphi_1) - \varphi_1 S(\varphi_n)) = o.$$

Questa relazione si può anche scrivere

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \sum_{i=2}^{n} \mathbf{c}_i\varphi_i \\ S(\varphi_1) & S\left(\sum_{i=2}^{n} \mathbf{c}_i\varphi_i\right) \end{vmatrix} = o;$$

sotto questa forma essa ci dice che tra le due funzioni

$$\varphi_1 \text{ e } \sum_{i=2}^{n} \mathbf{c}_i\varphi_i$$

passa una relazione lineare a coefficienti costanti rispetto ad S: esisteranno dunque infine n costanti $\bar{\mathbf{c}}_1, \bar{\mathbf{c}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{c}}_n$, per le quali varrà la relazione

$$\bar{\mathbf{c}}_1\varphi_1 + \bar{\mathbf{c}}_2\varphi_2 + \ldots + \bar{\mathbf{c}}_n\varphi_n = o.$$

446. Il teorema precedente permette di dimostrare che le n radici determinate nei §§ 442-444 per una forma lineare G, d'ordine n, sono linearmente indipendenti.

Cominciamo perciò dal considerare il caso, in cui ciascun gruppo di radici dell'equazione caratteristica di G è costituito da una sola radice, multipla di un certo ordine. Sappiamo che questo caso si verifica in particolare quando è $\mu'(k) = o$.

Allora ad ogni radice $z_i = \alpha^{u_i}$ dell'equazione caratteristica, multipla dell'ordine m_i, corrispondono m_i radici di G, aventi la forma

$$\omega_{i.j} = \alpha^{u_i}(\xi_{j.0} + \xi_{j.1}\lambda + \ldots + \xi_{j.j}\lambda^j) \quad (j = o, 1, \ldots, m_i - 1),$$

dove le $\xi_{j.l}$ sono regolari nell'intorno del punto limite ed è $\xi_{j.j}(k) \neq o$.

Ricordando che è

$$S(\alpha) = a\alpha, \quad S(\gamma) = \gamma + 1,$$

formiamo il determinante Γ del GRÉVY relativo alle funzioni $\omega_{i.j}$: avremo che esso è uguale ad una espressione della forma

$$\Gamma = \alpha^u(\gamma_o + \gamma_1\lambda + \ldots + \gamma_m\lambda^m),$$

dove

$$u = \Sigma m_i u_i;$$

m è un determinato numero intero positivo e $\gamma_o, \gamma_1, \ldots, \gamma_m$ sono funzioni regolari nell'intorno del punto limite. Dobbiamo dimostrare che codesta espressione non è identicamente nulla. Poichè tale non è certamente α^u, basterà che proviamo che non si annulla per identità la espressione fra parentesi. Ora si dimostra tosto, con considerazioni (§ 223) analoghe a quelle usate per le espressioni regolari, che

$$\gamma_o + \gamma_1\lambda + \ldots + \gamma_m\lambda^m$$

non può essere identicamente nulla, se tale non è ciascuna delle funzioni $\gamma_o, \gamma_1, \ldots, \gamma_m$. Basterà dunque dimostrare che codeste funzioni non sono tutte nulle: precisamente noi faremo vedere che γ_o ha nel punto $x = k$ un valore diverso da zero.

Ogni singola colonna di Γ è costituita da una radice $\omega_{i.j}$ della G e dalle funzioni

$$S(\omega_{i.j}),\ S^2(\omega_{i.j}), \ldots,\ S^{n-1}(\omega_{i.j}).$$

Ora abbiamo

$$S^p(\omega_{i.j}) = a^{pu_i}\alpha^{u_i}(\xi_{j.o}(x_p) + \xi_{j.1}(x_p)(\lambda+p) + \ldots + \xi_{j.j}(x_p)(\lambda+p)^j).$$

Perciò, quando avremo raccolto a fattore comune dalle n colonne di Γ la funzione α^u, il determinante $\overline{\Gamma}$ d'ordine n che ne risulterà, avrà come termini altrettanti polinomi in λ a coefficienti regolari nell'intorno del punto $x = k$. Le funzioni $\gamma_o, \gamma_1, \ldots, \gamma_m$ saranno quindi esprimibili ciascuna sotto forma di determinante; in particolare γ_o si otterrà prendendo in ciascun polinomio in λ, elemento di $\overline{\Gamma}$, il termine indipendente da λ. Risulta di qui che le m_i colonne di γ_o, corrispondenti alle funzioni $\omega_{i.o}, \omega_{i.1}, \ldots, \omega_{i.m_i-1}$, avranno la forma:

$$(51)\quad \left\{\begin{array}{l}
\xi_{0.0}(x) \quad \ldots\ldots \xi_{m_i-1}(x) \\
a^{u_i}\xi_{0.0}(x_1) \ldots\ldots a^{u_i}(\xi_{m_i-1.o}(x_1) + \xi_{m_i-1.1}(x_1) + \ldots \\
\qquad \ldots + \xi_{m_i-1.m_i-1}(x_1)) \\
a^{2u_i}\xi_{0.0}(x_2) \ldots\ldots a^{2u_i}(\xi_{m_i-1.o}(x_2) + 2\xi_{m_i-1.1}(x_2) + \ldots \\
\qquad \ldots + 2^{m_i-1}\xi_{m_i-1.m_i-1}(x_2)) \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
a^{(n-1)u_i}\xi_{0.0}(x_{n-1}) \ldots\ldots a^{(n-1)u_i}(\xi_{m_i-1.o}(x_{-1}) + \\
+(n-1)\xi_{m_i-1.1}(x_{n-1}) + \ldots + (n-1)^{m_i-1}\xi_{m_i-1.m_i-1}(x_{n-1})).
\end{array}\right.$$

Ciò premesso, nel determinante γ_o poniamo $x = k$, e anzitutto vediamo quali valori assumano gli elementi delle m_i colonne (51). Perciò ricordiamo (§ 442) che, qualunque sia la funzione ξ_{ij}, le funzioni

$$\xi_{j.1}(x_1),\ \xi_{j.1}(x_2), \ldots,\ \xi_{j.1}(x_{n-1})$$

nel punto $x = k$ assumono tutte il valore di $\xi_{j.1}(k)$. È allora manifesto che, per $x = k$, i primi termini degli elementi della seconda, terza, ..., m_i^{ma} colonna (51) sono proporzionali ai primi termini degli elementi omologhi della prima. Non si altera quindi il valore del determinante $\gamma_o(k)$ sopprimendo in ciascun elemento della seconda, terza,..., m_i^{ma} colonna (51) il primo termine. Ma nel nuovo determinante i primi termini degli elementi della terza, quarta, ..., m_i^{ma}

colonna sono proporzionali ai primi termini degli elementi omologhi della seconda; potremo quindi senza alterare il valore di $\gamma_0(k)$ sopprimere il primo termine in ciascun elemento della terza, quarta, ..., m_1^{ma} colonna (51). Così continuando troveremo da ultimo che $\gamma_0(k)$ è dato dal determinante che al posto delle m_i colonne (51) ha le colonne

$$\begin{array}{lll}
\xi_{0.0}(k) & o & \dots o \\
a^{u_i}\xi_{0.0}(k) & a^{u_i}\xi_{1.1}(k) & \dots a^{u_i}\xi_{m_i-1 \cdot m_i-1}(k) \\
a^{2u_i}\xi_{0.0}(k) & 2a^{2u_i}\xi_{1.1}(k) & \dots 2^{m_i-1}a^{2u_i}\xi_{m_i-1 \cdot m_i-1}(k) \\
a^{(n-1)u_i}\xi_{0.0}(k) & (n-1)a^{(n-1)u_i}\xi_{1.1}(k) & \dots (n-1)^{m_i-1}a^{(n-1)u_i}\xi_{m_i-1 \cdot m_i-1}(k),
\end{array}$$

ossia, ove si porti a fattore esterno il prodotto certamente diverso da zero

$$\xi_{0.0}(k)\xi_{1.1}(k)\dots\xi_{m_i-1 \cdot m_i-1}(k)$$

e si ricordi che è $a^{u_i} = z_i$, le colonne

$$\begin{array}{lll}
1 & o & \dots o \\
z_i & z_i & \dots z_i \\
z_i^2 & 2z_i^2 & \dots 2^{m_i-1}z_i \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
z_i^{n-1} & (n-1)z_i^{n-1} & \dots (n-1)^{m_i-1}z_i^{n-1}.
\end{array}$$

Quello che noi abbiamo detto per le m_1 colonne di $\gamma_0(x)$ dovute alle funzioni $\omega_{i.j}$ corrispondenti alla radice $z_1 = a^{u_1}$ dell'equazione caratteristica, si può ripetere per ciascun gruppo analogo di colonne: così da ultimo avremo che, all'infuori di un fattore numerico certamente diverso da zero, $\gamma_0(k)$ è dato dal determinante

$$\begin{vmatrix}
1 & o & \dots o & 1 & o \dots & o \dots \\
z_1 & z_1 & \dots z_1 & z_2 & z_2 \dots & z_2 \dots \\
z_1^2 & 2z_1^2 & \dots 2^{m_1-1}z_1^2 & z_2^2 & 2z_2^2 \dots & 2^{m_2-1}z_2^2 \dots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
z_1^{n-1} & (n-1)z_1^{n-1} \dots & (n-1)^{m_1-1}z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & (n-1)z_2^{n-1} \dots & \dots (n-1)^{m_2-1}z_2^{n-1} \dots
\end{vmatrix}.$$

Ora questo determinante, generalizzazione di quello del Vandermonde, al quale si riduce quando tutte le radici dell'equazione caratteristica sono semplici, è notoriamente diverso da zero.

Concludiamo, quindi, che il determinante del Grévy relativo alle funzioni $\omega_{i \cdot j}$ non è identicamente nullo. Così la indipendenza lineare delle n radici di G da noi determinate, è stabilita nel caso, in cui ciascun gruppo di radici dell'equazione caratteristica è costituito da una sola radice di un determinato ordine di moltiplicità; ciò accade in particolare nel caso in cui è $\mu'(k) = o$.

447. Passiamo ora a trattare il caso in cui, avendosi $\mu'(k) \neq o$, qualche gruppo di radici dell'equazione caratteristica contiene più radici distinte, ottenibili moltiplicando una di esse per una potenza ad esponente intero di $a = \mu'(k)$. Allora la forma generica di una radice di G è (§ 444)

$$\bar{\omega}_{j.i} = \alpha^{u_j}\pi_{j.i} + \alpha^{u_{j-1}}\pi_{j-1 \cdot m_{j-1}+i} + \dots$$
$$\dots + \alpha^{u_2}\pi_{2 \cdot m_2+\dots+m_{j-1}+i} + \alpha^{u_1}\pi_{1 \cdot m_1+\dots+m_{j-1}+i},$$

dove le differenze

$$u_{j-1} - u_j,\ u_{j-2} - u_{j-1}, \dots, u_1 - u_2$$

sono numeri interi positivi e i $\pi_{l \cdot m}$ rappresentano polinomi in λ a coefficienti regolari nell'intorno del punto limite; $\pi_{j \cdot i}$, in particolare, è di grado i e in esso il coefficiente di λ^i è una funzione che per $x = k$ assume un valore diverso da zero.

Sotto l'ipotesi $\mu'(k) \neq o$, la funzione α è una funzione regolare nell'intorno del punto limite, la quale ha in codesto punto uno zero del primo ordine. Scriviamo allora

$$\bar{\omega}_{j \cdot i} = \alpha^{u_j}(\pi_{ji} + \alpha^{u_{j-1}-u_j}\pi_{j-1 \cdot m_{j-1}+i} + \dots$$
$$\dots + \alpha^{u_2-u_j}\pi_{2 \cdot m_2+\dots+m_{j-1}+i} + \alpha^{u_1-u_j}\pi_{m_1+\dots+m_{j-1}+i});$$

poichè i numeri

$$u_{j-1} - u_j, \ldots, u_2 - u_j, u_1 - u_j$$

sono interi positivi, avremo così messo in evidenza che anche le radici $\overline{\omega}_{j.i}$, come le $\omega_{j.i}$ del § precedente, sono uguali ciascuna ad una potenza (ad esponente generalmente complesso) di α, moltiplicata per un polinomio in λ a coefficienti regolari nell'intorno del punto limite. Anche in questo caso, quindi, il determinante del GRÉVY, relativo alle funzioni $\overline{\omega}_{j.i}$, sarà uguale ad una espressione della forma

$$\alpha^u(\gamma_0 + \gamma_1\lambda + \ldots + \gamma_m\lambda^m),$$

dove le $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_m$ sono funzioni regolari nell'intorno del punto $x = k$. Per vedere che la funzione $\gamma_0(x)$ non è nulla nel punto limite, basterà che osserviamo che per $x = k$ le funzioni

$$\alpha^{u_{j-1}-u_j}, \alpha^{u_{j-2}-u_j}, \ldots, \alpha^{u_1-u_j}$$

si annullano; cosicchè a formare $\gamma_0(x)$ la funzione $\overline{\omega}_{j.i}$ contribuisce soltanto col termine

$$\alpha^{u_j}\pi_{j.i},$$

il quale ha precisamente le medesime proprietà delle radici $\omega_{j.i}$ considerate al § precedente, in quanto $\pi_{j.i}$ è un polinomio in λ a coefficienti regolari nell'intorno di $x = k$ e in esso il coefficiente della massima potenza di λ è per $x = k$ diversa da zero. Si possono quindi ripetere qui, punto per punto, le considerazioni del § precedente, e dedurne infine che il determinante del GRÉVY relativo alle funzioni $\overline{\omega}_{j.i}$ non è identicamente nullo.

Concludiamo che le n radici, determinate nei §§ 442-444 per una qualsivoglia forma lineare alle sostituzioni, nell'intorno di un punto limite, sono linearmente indipendenti.

448. Data una qualsivoglia forma lineare alle sostituzioni d'ordine n,

$$G = \alpha_n S^n + \alpha_{n-1}S^{n-1} + \ldots + \alpha_1 S + \alpha_0,$$

indichiamo genericamente con $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ le n sue radici linearmente indipendenti, che abbiamo imparato a determinare nell'intorno di un punto limite della S. Per una proprietà fondamentale delle operazioni distributive (§ 50) la G, come abbiamo osservato, ammette come radice ogni elemento dello spazio lineare ad n dimensioni definito dalle funzioni $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Qui vogliamo dimostrare che la G non può ammettere, nell'intorno del punto limite considerato, nessuna radice che non appartenga a codesto S_n.

Se, infatti, ω è una radice generica di G, dovremo avere

$$\alpha_n S^n(\omega) + \alpha_{n-1}S^{n-1}(\omega) + \ldots + \alpha_1 S(\omega) + \alpha_0\omega = o.$$

Ora, poichè le funzioni α_i non sono tutte identicamente nulle, questa relazione non può coesistere con le altre n relazioni

$$\alpha_n S^n(\omega_i) + \alpha_{n-1}S^{n-1}(\omega_i) + \ldots + \alpha_1 S(\omega_i) + \alpha_0\omega_i = o$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

se non è identicamente nullo il determinante $\Gamma(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$. L'annullarsi identico di questo determinante ci dice appunto (§ 445) che esistono n costanti $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$, per le quali è

$$\omega = \mathbf{c}_1\omega_1 + \mathbf{c}_2\omega_2 + \ldots + \mathbf{c}_n\omega_n;$$

in altre parole ω, appartiene allo S_n definito da $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Abbiamo dunque che lo spazio delle radici di una forma lineare alle sostituzioni d'ordine n, nell'intorno di un suo punto limite, è uno spazio lineare ad n dimensioni.

Ricordiamo per altro che allo spazio delle radici di G conviene codesto nome di spazio lineare *ad n dimen-*

sioni in forza della definizione del § 410, dove si sono assunte come costanti (rispetto ad S) le funzioni tali che

$$S_\mu (\varphi) = \varphi,$$

cioè le funzioni periodiche di λ di periodo 1. Dal punto di vista, invece, dell'ordinaria teoria delle funzioni (quel calcolo, che, potrebbe dirsi, ammette come operazione fondamentale la D), codesto spazio è ancora lineare, poichè insieme a quanti si vogliano suoi elementi contiene anche ogni loro combinazione lineare a coefficienti numerici (costanti rispetto a D); ma non ammette più, in generale, un numero finito di dimensioni.

CAPITOLO QUINDICESIMO

Generalizzazione della proprietà del Wronskiano.

449. Sappiamo (§ 326) che condizione necessaria e sufficiente affinchè fra n funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ passi una relazione lineare omogenea a coefficienti numerici

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_n\varphi_n = o$$

si è l'annullarsi del Wronskiano delle n funzioni

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \ldots & \varphi_n \\ D\varphi_1 & D\varphi_2 & \ldots & D_n\varphi_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ D^{n-1}\varphi_1 & D^{n-1}\varphi_2 & \ldots & D^{n-1}\varphi_n \end{vmatrix}. \text{ (1)}$$

Così (§ 279) condizione necessaria e sufficiente affinchè fra n funzioni $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ passi una relazione lineare omogenea a coefficienti periodici di periodo 1, o come si è stabilito al § 264, costanti rispetto a θ

$$\bar{c}_1\psi_1 + \bar{c}_2\psi_2 + \ldots + \bar{c}_n\,\psi_n = o$$

si è l'annullarsi identico del determinante del Casorati delle funzioni date

$$C(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) = \begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \ldots & \psi_n \\ \theta\psi_1 & \theta\psi_2 & \ldots & \theta\psi_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta^{n-1}\psi_1 & \theta^{n-1}\psi_2 & \ldots & \theta^{n-1}\psi_n \end{vmatrix}.$$

(1) V. la nota a piè di pagina 274.

Infine, più generalmente, condizione necessaria e sufficiente affinchè fra n funzioni $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ passi una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti rispetto ad una sostituzione S_μ (§ 445)

$$\mathbf{c}_1\chi_1 + \mathbf{c}_2\chi_2 + \ldots + \mathbf{c}_n\chi_n = o,$$

si è l'annullarsi identico del determinante del Grévy relativo alle n funzioni date

$$\Gamma(\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_n) = \begin{vmatrix} \chi_1 & \chi_2 & \ldots & \chi_n \\ S_\mu\chi_1 & S_\mu\chi_2 & \ldots & S_\mu\chi_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_\mu^{n-1}\chi_1 & S_\mu^{n-1}\chi_2 & \ldots & S_\mu^{n-1}\chi_n \end{vmatrix}.$$

L'analogia che corre fra codesti tre teoremi, i quali si riducono in sostanza a due poichè la θ non è se non una particolare sostituzione, fa nascere spontaneamente l'idea di ricercare se esistano classi più ampie di operazioni, per le quali sussista un teorema analogo a quello del Wronskiano.

Esaminando le dimostrazioni, sostanzialmente identiche, dei tre teoremi suindicati, troviamo che esse poggiano in ultima analisi

α) sulle proprietà dei coefficienti c_i, $\bar{c}_i$, $\mathbf{c}_i$ per cui è

$$Dc_i = o,\ \theta\bar{c}_i = \bar{c}_i,\ S_\mu\mathbf{c}_i = \mathbf{c}_i;$$

β) sul teorema di moltiplicazione di D, θ ed S_μ, pel quale, se φ e ψ sono funzioni qualsiansi, è

$$(1)\quad \begin{cases} D(\varphi\psi) = \varphi D\psi + \psi D\varphi \\ \theta(\varphi\psi) = \theta\varphi.\theta\psi \\ S_\mu(\varphi\psi) = S_\mu\varphi.S_\mu\psi \end{cases}$$

e quindi

$$Dc\varphi = cD\varphi,\ \theta\bar{c}\varphi = \bar{c}\theta\varphi,\ S_\mu\mathbf{c}\varphi = \mathbf{c}S_\mu\varphi;$$

γ) sui teoremi relativi alle radici delle forme lineari differenziali (§ 328), alle differenze (§ 281), alle sostituzioni (§ 448), dai quali segue che il rapporto di due radici di una forma del primo ordine è rispettivamente una costante numerica, una costante rispetto a θ, una costante rispetto ad S_μ.

Ora noi qui non intendiamo tentare la generalizzazione più ampia possibile; solo, generalizzando la proprietà dei secondi membri delle (1), di essere cioè bilineari in φ, ψ e nelle trasformate di φ e ψ per mezzo di D, θ od S_μ, considereremo la classe delle operazioni A più generali che ammettono una formula bilineare di moltiplicazione; intendendo con ciò che la $A(\varphi\psi)$ si esprima bilinearmente per mezzo di φ, ψ, $A(\varphi)$, $A(\psi)$, essendo φ e ψ funzioni (analitiche) qualsivogliano. Dimostreremo che per le operazioni di codesta classe vale un teorema analogo a quello del Wronskiano.

450. Sia A un'operazione distributiva, univoca che ammetta una formula bilineare di moltiplicazione. Essendo cioè φ e ψ due funzioni qualsivogliano, si abbia, indicando con α_{00}, α_{01}, α_{10}, α_{11}, β_1, β_2 funzioni determinate;

$$(2)\quad A(\varphi\psi) = \alpha_{00}\varphi\psi + \alpha_{01}\varphi A(\psi) + \alpha_{10}\psi A(\varphi) + \alpha_{11}A(\varphi)A(\psi) + \\ + \beta_1\varphi A(\varphi) + \beta_2\psi A(\psi).$$

Supporremo ancora, ad evitare discussioni troppo minute, che la A trasformi lo spazio $\mathfrak{S}$ delle funzioni analitiche in uno spazio ad infinite dimensioni. Si vede allora senza difficoltà che le funzioni α_{ij}, β_1, β_2 non sono tutte indipendenti. Anzitutto, dovendo essere $A(\varphi\psi) = A(\psi\varphi)$, risulta

$$\alpha_{01} = \alpha_{10} \text{ e } \beta_1 = \beta_2.$$

In secondo luogo, tenendo conto di codeste relazioni e indicando A(1) con ξ, poniamo nella (2) $\psi = 1$; otterremo:

$$A(\varphi) = \beta_1\xi + (\alpha_{00} + \alpha_{01}\xi)\varphi + (\alpha_{01} + \alpha_{11}\xi)A(\varphi) + \beta_1\varphi A(\varphi).$$

Dovendo questa essere una identità, ne risulta evidentemente

$$\beta_1 = o$$

e

$$\begin{cases} \alpha_{00} + \alpha_{01}\xi = o \\ \alpha_{01} + \alpha_{11}\xi = 1. \end{cases}$$

Indicando allora con α la funzione α_{11}, abbiamo che la (2) si riduce alla forma

$$(3) \quad A(\varphi\psi) = \xi(\alpha\xi - 1)\varphi\psi + (1 - \alpha\xi)(\varphi A(\psi) + \psi A(\varphi)) + \\ + \alpha A(\varphi)A(\psi).$$

Le due funzioni α e ξ sono fra di loro indipendenti.

451. Possiamo determinare subito la natura delle operazioni che ammettono un teorema di moltiplicazione della forma (3). Perciò distinguiamo due casi, a seconda che α è o no identicamente nullo; e anzitutto supponiamo $\alpha = o$. In tal caso la (3) diventa

$$A(\varphi\psi) = \varphi A(\psi) + \psi A(\varphi) - \xi\varphi\psi.$$

Se in questa equazione poniamo $\psi = x$ e indichiamo $A(x)$ con ξ_1, otteniamo

$$A(x\varphi) - xA(\varphi) = (\xi_1 - \xi x)\varphi;$$

cioè la derivata funzionale di A è la moltiplicazione per $\xi_1 - \xi x$. Ne risulta che la A è una forma differenziale lineare del primo ordine; poichè $\xi = A(1)$, avremo precisamente

$$A = (\xi_1 - \xi x)D + M_\xi.$$

Notiamo che le funzioni ξ_1 e ξ sono indipendenti ed arbitrarie: sono quindi tali anche i due coefficienti della forma A. Se è $\xi = o$, si ottengono operazioni della forma $\xi_1 D$, per le quali sussiste manifestamente il teorema stesso che vale per la D (§ 116): potremo quindi, nel seguito, supporre che ξ non sia identicamente nullo.

452. Supponiamo in secondo luogo $\alpha \neq o$. Allora la (3) si può scrivere, dopo averne moltiplicato i due membri per α,

$$\alpha A(\varphi\psi) = \big(\alpha A(\varphi) + (1 - \alpha\xi)\varphi\big)\big(\alpha A(\psi) + (1 - \alpha\xi)\psi\big) + \\ + \alpha\xi(\alpha\xi - 1)\varphi\psi,$$

ossia, posto $\alpha A + M_{1-\alpha\xi} = B$,

$$B(\varphi\psi) = B(\varphi)B(\psi).$$

La B, essendo distributiva anche rispetto al prodotto, è una operazione di sostituzione S_μ (§ 118), onde risulta:

$$A = \frac{1}{\alpha}S_\mu + M_{\xi - \frac{1}{\alpha}}.$$

La A è dunque una forma lineare alle sostituzioni del primo ordine: essendo indipendenti e arbitrarie le α e ξ, sono tali anche i due coefficienti della forma A.

Concludendo: la classe delle operazioni distributive univoche, le quali ammettono un teorema di moltiplicazione della forma (3), è costituita da tutte e sole le forme lineari differenziali e alle sostituzioni del primo ordine.

453. Ciò premesso, chiameremo *costante rispetto ad un' operazione* A ogni funzione γ tale che sia

$$A(\gamma) = \xi\gamma,$$

dove ξ rappresenta, come dianzi abbiamo convenuto, A(1). Nella teoria di ogni determinata operazione A, rappresenteremo le costanti rispetto ad A con la lettera c, affetta o no da indici.

Dalla definizione stessa delle operazioni distributive, risulta che fra le costanti rispetto ad una qualsivoglia operazione A, compaiono le ordinarie costanti numeriche. Ora se a è un numero e φ una funzione qualsiansi, abbiamo (§ 42) per ogni operazione distributiva A

$$A(a\varphi) = aA(\varphi).$$

Si vede subito che, se A ammette un teorema di moltiplicazione della forma (3), codesta equazione sussiste anche quando, prendendo sempre per φ una funzione qualsivoglia, si metta al posto di a una costante rispetto ad A, non numerica. Ponendo infatti nella (3) $\psi = c$ e ricordando che $A(c) = c\xi$, risulta, con riduzioni immediate, che

$$A(c\varphi) = cA(\varphi). \tag{4}$$

Si noti che dalla definizione data in principio del presente § segue che le costanti rispetto a D sono date da tutti e soli i numeri.

454. Essendo ancora A un'operazione distributiva univoca, la quale ammetta un teorema di moltiplicazione della forma (3), supponiamo che esistano tre funzioni determinate φ_1, φ_2 e λ, tali che sia

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} A(\varphi_1) &= \lambda\varphi_1 \\ A(\varphi_2) &= \lambda\varphi_2. \end{aligned} \right.$$

Sappiamo (§§ 452) che sotto le poste ipotesi la A è una forma lineare del primo ordine nella D o in una determinata sostituzione S_μ. Abbiamo dunque che φ_1 e φ_2 sono radici di una medesima forma lineare del primo ordine

$$A - M_\lambda$$

o differenziale o alle sostituzioni. Ma si ricordino i teoremi relativi alle radici delle forme lineari differenziali e alle sostituzioni (§§ 328 e 448). Se A è una forma differenziale ne discende che $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ è una costante numerica: ma (§ prec.) le

costanti numeriche sono costanti rispetto ad ogni operazione distributiva, onde avremo che $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ è costante rispetto ad A.

Se poi A è una forma in S_μ, avremo similmente che $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ è costante rispetto ad S_μ: le costanti rispetto ad una S_μ sono tali anche rispetto ad ogni forma lineare in S_μ, come risulta dall'osservazione fatta alla fine del § 406; possiamo quindi affermare che anche in questo caso $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ è costante rispetto ad A. Concludendo: se A è un'operazione univoca soddisfacente alla (3), dalle equazioni (5) discende che $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ è costante rispetto ad A.

455. Ciò premesso, dimostriamo il seguente

TEOREMA. Se A è un'operazione distributiva, univoca, la quale ammetta un teorema di moltiplicazione (bilineare) della forma (3), condizione necessaria e sufficiente affinchè fra n funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sussista una relazione lineare omogenea, a coefficienti costanti rispetto ad A,

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_n\varphi_n = o,$$

si è l'annullarsi identico del determinante

$$D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \ldots & \varphi_n \\ A(\varphi_1) & A(\varphi_2) & \ldots & A(\varphi_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A^{n-1}(\varphi_1) & A^{n-1}(\varphi_2) & \ldots & A^{n-1}(\varphi_n) \end{vmatrix}.$$

α) La condizione è manifestamente necessaria, poichè insieme con la relazione

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_n\varphi_n = o$$

sussistono, per la (4), le altre $n-1$

$$c_1 A^i(\varphi_1) + c_2 A^i(\varphi_2) + \ldots + c_n A^i(\varphi_n) = o$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

β) La condizione si dimostra subito sufficiente per $n = 2$: infatti dalla identità

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ A(\varphi_1) & A(\varphi_2) \end{vmatrix} = o,$$

che si può scrivere

$$\frac{A(\varphi_1)}{\varphi_1} = \frac{A(\varphi_2)}{\varphi_2}$$

risulta (§ preced.) che $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ è costante rispetto ad A; indicando codesta costante con $-\frac{c_1}{c_2}$, dove c_1, c_2 rappresentano ciascuna una costante rispetto ad A, avremo appunto

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 = o.$$

Ciò premesso, supponiamo dimostrata la condizione sufficiente nel caso di $n-1$ funzioni. Se il determinante $D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ è identicamente nullo, esisteranno n funzioni $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, tali che sarà:

$$\gamma_1 A^i(\varphi_1) + \gamma_2 A^i(\varphi_2) + \ldots + \gamma_n A^i(\varphi_n) = o. \tag{6}$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Queste funzioni $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ sono ordinatamente proporzionali ai complementi degli elementi dell'ultima linea del determinante $D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$, ciascuno dei quali è un determinante analogo a $D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ relativo ad $n-1$ fra le n funzioni φ_j. Si ha precisamente

$$\gamma_j = \rho(x) D(\varphi_1, \ldots, \varphi_{j-1}, \varphi_{j+1}, \ldots, \varphi_n)$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n).$$

Poichè, naturalmente, ρ non può supporsi identicamente nullo, avremo che γ_j non può annullarsi identicamente se non si annulla $D(\varphi_1, \ldots, \varphi_{j-1}, \varphi_{j+1}, \ldots, \varphi_n)$. Quando ciò accada, esisteranno $n-1$ costanti rispetto ad A, $c_1, \ldots, c_{j-1}, c_{j+1}, \ldots, c_n$, per cui varrà la relazione

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_{j-1}\varphi_{j-1} + c_{j+1}\varphi_{j+1} + \ldots + c_n\varphi_n = o.$$

Ma questa è une relazione lineare omogenea, a coefficienti costanti, fra le n funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, con la sola particolarità che il coefficiente di φ_j è nullo; il teorema è dimostrato dunque in questo caso particolare. Quando invece si presenti il caso in cui nessuna delle γ_j è identicamente nulla, eseguendo la A sui due membri di ciascuna delle prime $n-1$ equazioni (6), otterremo, per la (3),

$$\sum_{j=1}^{n} \Big\{ A(\gamma_j)(\alpha A^{i+1}(\varphi_j) + (1-\alpha\xi)A^i(\varphi_j)) +$$
$$+ \gamma_j(1-\alpha\xi)(A^{i+1}(\varphi_j) - \xi A^i(\varphi_j)) \Big\} = o,$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n-2)$$

ossia, tenendo conto della (6),

$$\sum_{j=1}^{n} A(\gamma_j)(\alpha A^{i+1}(\varphi_j) + (1-\alpha\xi)A^i(\varphi_j)) = o. \tag{7}$$

Ma, moltiplicando ciascuna delle ultime $n-1$ equazioni (6) per α e la precedente per $1-\alpha\xi$, e sommando membro a membro, otteniamo

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_j(\alpha A^{i+1}(\varphi_j) + (1-\alpha\xi)A^i(\varphi_j)) = o \tag{8}$$
$$(i = o, 1, \ldots, n-2).$$

Le (7) e le (8) ci mostrano pertanto che le γ_j e le $A(\varphi_j)$, sono soluzioni di un medesimo sistema di equazioni lineari omogenee; esse devono dunque essere proporzionali. Si ha quindi

$$\frac{A(\gamma_1)}{\gamma_1} = \frac{A(\gamma_2)}{\gamma_2} = \ldots = \frac{A(\gamma_n)}{\gamma_n},$$

e da queste relazioni deduciamo appunto (§ prec.) che i rapporti $\frac{\gamma_2}{\gamma_1}, \frac{\gamma_3}{\gamma_1}, \ldots, \frac{\gamma_n}{\gamma_1}$ sono costanti rispetto ad A: indicandoli con $\frac{c_2}{c_1}, \frac{c_3}{c_1}, \ldots, \frac{c_n}{c_1}$ rispettivamente, dove c_1, $c_2, \ldots, c_n$ siano costanti rispetto ad A, avremo che la prima delle (6) dà la relazione lineare omogenea fra le φ_j, a coefficienti costanti rispetto ad A,

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_n\varphi_n = o \text{ (}^1\text{)}.$$

---

(1) **In relazione al presente Capitolo, v. Bourlet, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Juin 1897; Bortolotti, Rendiconti della R. Acad. dei Lincei, gennaio 1898.**

CAPITOLO SEDICESIMO.

Cenno sulla geometria degli spazi lineari di funzioni.

A. COORDINATE OMOGENEE. — OMOGRAFIE DI PRIMA E DI SECONDA CLASSE.

456. Consideriamo lo spazio, indicato al § 125 con $\mathfrak{S}$, e costituito dall'insieme delle serie di Laurent

$$\alpha = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n,$$

astrazione fatta dalla loro convergenza. Analogamente a quanto si è detto al § 97, la serie servirà a rappresentare la successione, cui corrisponde univocamente,

$$\ldots a_{-n}, \ldots a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots,$$

ora indefinita nei due sensi.

457. Scostandoci alquanto dalla definizione del § 92, diremo *uguali* due elementi di $\mathfrak{S}$ quando i coefficienti delle stesse potenze di x siano in essi proporzionali; un elemento di $\mathfrak{S}$ viene dunque definito dalla successione

$$ka_n, \qquad (n = -\infty, \ldots o, 1, \ldots + \infty)$$

dove k è un numero arbitrario differente da zero; l'elemento verrà indicato colla medesima lettera (greca) qualunque sia questo numero.

I numeri ka_n si diranno *coordinate omogenee* dell'elemento α nello spazio $\mathfrak{S}$; questo elemento verrà detto anche *punto* dello spazio medesimo, e per ricordare l'arbitrarietà del fattore k che diremo fattore di proporzionalità, scriveremo:

$$\alpha \equiv \sum_{-\infty}^{\infty} a_n x^n.$$

Il punto individuato dalle coordinate ka_n si rappresenterà, sottintendendo anche qui il fattore arbitrario, con

$$\alpha[\ldots a_{-1}, a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots]$$

o semplicemente con

$$\alpha[a_n].$$

Se si fissa in qualsivoglia modo il fattore di proporzionalità nei due elementi $\alpha[a_n]$, $\beta[b_n]$ dello spazio $\mathfrak{S}$ [1] si potrà definire, come ai §§ 93, 94, la somma $\alpha+\beta$ dei due punti, si avrà cioè

$$\alpha+\beta \equiv \sum_{-\infty}^{\infty}(a_n+b_n)x^n.$$

Analogamente si definirà la loro combinazione lineare $c\alpha + c'\beta$, dove c, c' sono numeri dati.

Ma se quel fattore non si fissa, la espressione $\alpha+\beta$ equivarrà a $c\alpha + c'\beta$, c e c' essendo arbitrarie, e rappresenterà non più un punto determinato di $\mathfrak{S}$, bensì un'infinità di punti, qualora α e β non siano uguali (§ 10). Con c o m b i n a z i o n e l i n e a r e di α e β intenderemo appunto, in ciò che segue, l'infinità di punti dati da $c\alpha + c'\beta$, dove c e c', o, ciò che è lo stesso, i fattori di proporzionalità in α e β, assumono tutti i possibili valori.

---

[1] **Per esempio, facendo uguale ad 1 il coefficiente di una determinata potenza di x.**

458. Siano dati $m+1$ punti di $\mathfrak{S}$:

$$\alpha_0[a_{0n}],\quad \alpha_1[a_{1n}], \ldots \alpha_m[a_{1n}],$$

e consideriamo il sistema di infinite equazioni lineari

$$(1)\qquad c_0a_{0j} + c_1a_{1j} + \ldots + c_m a_{mj} = 0,\quad (j = -\infty, \ldots 0, 1, \ldots +\infty)$$

In generale, non esisteranno $m+1$ numeri soddisfacenti a questo sistema; i p u n t i $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m$ s i d i r a n n o a l l o r a l i n e a r m e n t e i n d i p e n d e n t i. Quando accade invece che esistano numeri a_i soddisfacenti al sistema (1), diremo che fra g l i e l e m e n t i $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ p a s s a u n a r e l a z i o n e l i n e a r e, o c h e g l i e l e m e n t i s t e s s i sono l i n e a r m e n t e d i p e n d e n t i.

È chiaro che se nelle coordinate a_{ij} degli $m+1$ punti dati si mutano comunque i fattori arbitrari (§ 457), non ne verrà per nulla alterata la dipendenza o indipendenza lineare dei punti stessi, un cambiamento di a_{ij} in ka_{ij} nella (1) equivalendo al cambiamento di c_i in $\frac{c_i}{k}$.

459. Siano $m+1$ punti di $\mathfrak{S}$ linearmente indipendenti $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m$; lo spazio lineare costituito da tutti i punti

$$c_0\alpha_0 + c_1\alpha_1 + \ldots + c_m\alpha_m,$$

dove per $c_0, c_1, \ldots c_m$ si assumono tutti i possibili sistemi di $m+1$ valori, determinati a meno di un fattore comune arbitrario, contiene gli $m+1$ punti linearmente indipendenti $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m$; ma, presi in esso $m+2$ punti qualsivogliano, fra questi passa evidentemente una relazione lineare. Per la convenzione accennata al § 457 vi è corrispondenza biunivoca fra i punti di codesto spazio e i gruppi di $m+1$ numeri, determinati a meno di un fattore comune arbitrario diverso da zero, o, in altre parole, fra quei punti e i gruppi di m numeri. Perciò diremo che quello spazio è ad m dimensioni. Più in generale diremo ad m dimensioni e rappresenteremo con $\mathfrak{S}_m$ ogni spazio lineare in cui esistano $m+1$ punti linearmente indipendenti, ma non più. Ogni $\mathfrak{S}_m$ contiene infiniti sistemi di $m+1$ punti linearmente indipendenti (sistemi fondamentali) ed è costituito da tutte e sole le combinazioni lineari dei punti di un suo qualsivoglia sistema fondamentale.

Se

$$\alpha \equiv c_0\alpha_0 + c_1\alpha_1 + \ldots + c_m\alpha_m$$

è un punto dello $\mathfrak{S}_m$, definito dal sistema fondamentale α_0, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, i numeri $c_0, c_1, \ldots c_m$ determinati a meno di un fattore comune arbitrario, diverso da zero, si diranno coordinate (omogenee) di α rispetto al sistema di riferimento $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m$.

460. Le considerazioni dei §§ 16-21 si ripetono qui con modificazioni affatto accessorie ed evidenti. Così p. es. la *somma* di due spazi $\mathfrak{S}_p$ ed $\mathfrak{S}_q$, non aventi in comune nessun punto, è un determinato $\mathfrak{S}_{p+q+1}$.

461. Una operazione distributiva A è definita in $\mathfrak{T}$ quando sono assegnate le funzioni ξ_i, in cui essa trasforma le potenze intere (positive e negative) x^i della variabile. Supponiamo che A trasformi $\mathfrak{T}$ in sè stesso, o, in altre parole, supponiamo che le ξ_i siano elementi di $\mathfrak{T}$. Avremo allora

$$A(x^i) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{in}x^n \qquad (i = -\infty, \ldots 0, 1, \ldots +\infty).$$

Generalizzando un nome usato solitamente solo per gli $\mathfrak{S}_m$, diremo che la A è una *omografia* che trasforma in sè stesso lo spazio $\mathfrak{T}$. Sono dunque omografie che trasformano $\mathfrak{T}$ in sè stesso tutte le moltiplicazioni M_μ per funzioni μ di $\mathfrak{T}$, la D con la sua inversa, la θ e, più in generale, tutte le

sostituzioni $\mathfrak{S}_\mu$ dove μ appartiene a $\mathfrak{T}$, e tutte le operazioni normali (di ordine finito o infinito). Tale sarà pure il ramo univoco della L definito al § 390.

Analogamente si potrà parlare di omografie fra $\mathfrak{T}$ e uno spazio qualsivoglia diverso da $\mathfrak{T}$ o fra due altri qualsiansi spazi ad infinite dimensioni.

462. Una operazione A, che trasformi $\mathfrak{T}$ in sè stesso, può trasformare in sè anche uno o più spazi lineari, ad un numero finito o infinito di dimensioni, contenuti in $\mathfrak{T}$. In ogni $\mathfrak{S}_m$, invariante rispetto ad A, questa operazione sarà una omografia nel senso usuale della parola. e si potranno ripetere per essa le considerazioni del Cap. IV. Qui, essendosi convenuto di considerare coincidenti i punti α e $c\alpha$, qualunque sia il numero c, designeremo i punti invarianti, cioè i punti per cui sussiste una relazione della forma

$$A(\alpha) = c\alpha,$$

col nome di *punti uniti* della A.

Così, p. es., l'operazione D ammette come spazio invariante contenuto in $\mathfrak{T}$ ogni $\mathfrak{S}_m$ che abbia un sistema fondamentale della forma

$$e^{ax}, \quad xe^{ax}, \ldots, x^m e^{ax},$$

dove a è un numero qualsivoglia. Il punto e^{ax} è, in particolare, unito per D.

Similmente, se consideriamo le operazioni U, normali di ordine zero (§ 206), per le quali si ha

$$U(x^n) = a_n x^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

le possiamo definire come le omografie che trasformano $\mathfrak{S}$ in sè stesso e che ammettono come punti uniti tutti i punti

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$$

del sistema di riferimento.

463. Possiamo qui ripetere, tenendo conto della omogeneità delle coordinate, le osservazioni del § 50, e concludiamo che se un' operazione distributiva A ammette in un determinato $\mathfrak{S}_n$, $r \leq n$ radici linearmente indipendenti e non più, la A trasforma $\mathfrak{S}_n$ in un $\mathfrak{S}_{n-r}$. Reciprocamente, se la A trasforma un $\mathfrak{S}_n$ in un $\mathfrak{S}_{n-r}$, la A ammette, in $\mathfrak{S}_n$, r radici linearmente indipendenti. Abbiamo dunque, come già osservammo al § 50, che per un' omografia A, degenere in un determinato $\mathfrak{S}_n$, sono in modo necessario legati i due fatti:

a) esistono in $\mathfrak{S}_n$ r radici linearmente indipendenti;

b) ad $\mathfrak{S}_n$ corrisponde uno spazio ad $n - r$ dimensioni.

Ora è facile convincersi mediante esempi che codesti due fatti, nel caso di spazi ad infinite dimensioni, si possono verificare separatamente l' uno dall' altro.

Si consideri, come primo esempio, l' operazione D: questa operazione in $\mathfrak{S}$ ammette come radice (unica) il punto 1, mentre poi trasforma $\mathfrak{S}$ in sè stesso e non in uno spazio contenuto in $\mathfrak{S}$ e diverso da esso.

In secondo luogo si consideri la determinazione principale della D^{-1} (§ 115): essa non ammette in $\mathfrak{S}$ nessuna radice, mentre d'altro canto trasforma codesto spazio nello spazio, contenuto nel primo, ma non coincidente con esso, che ammette come sistema fondamentale il sistema di punti

$$x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots$$

Perciò, nel caso dello spazio ad infinite dimensioni, si è condotti a distinguere due classi di omografie degeneri: si può chiamare *degenere della prima classe* in un determinato spazio ogni omografia che in questo spazio ammetta radici, e dire invece *degenere della seconda classe* quelle omografie che trasformano uno spazio ad infinite dimensioni in uno spazio qualsivoglia ad un numero finito di dimensioni o in un qualsiasi spazio contenuto nel primo, ma non coincidente con esso.

Diremo, dunque, che in $\mathfrak{S}$ la D è degenere di prima classe e che la determinazione principale di D^{-1} è degenere di seconda classe.

Vi sono poi operazioni che in uno spazio ad infinite dimensioni sono a un tempo degeneri di prima e seconda classe: tale è, p. es., il ramo univoco di L (§ 390).

B. PIANI DI $\mathfrak{T}$ E SPAZI LINEARI DI PIANI.

464. Dato nello spazio $\mathfrak{T}$ un punto qualsiasi

$$\varphi \equiv \sum_{-\infty}^{\infty} g_n x^n,$$

abbiamo chiamato (§ 251) *piano* (*di* $\mathfrak{T}$) *corrispondente a* φ e abbiamo indicato con $\mathfrak{T}_\varphi$ l' insieme lineare dei punti

$$\psi \equiv \sum_{-\infty}^{\infty} k_n x^n,$$

per i quali è

$$R(\varphi, \psi) = \sum_{-\infty}^{\infty} g_{-n} k_{n-1} = o.$$

Il piano $\mathfrak{T}_\varphi$ di $\mathfrak{T}$ si può anche definire come luogo dei punti radici di una determinata operazione distributiva. Si consideri, infatti, l' operazione H (cfr. § 134) definita in $\mathfrak{T}$ dalle uguaglianze

$$H(x^n) = g_{-(n+1)} \qquad (n = -\infty, \ldots, +\infty):$$

essa ad ogni punto

$$\alpha \equiv \sum_{-\infty}^{\infty} a_n x^n$$

di $\mathfrak{S}$ fa corrispondere una costante numerica

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n g_{-(n+1)}$$

onde risulta che H ammette come radici tutti e soli i punti del piano $\mathfrak{S}_\varphi$.

465. L'osservazione precedente ci permette di dimostrare agevolmente che ogni piano di $\mathfrak{S}$ ha in comune con ogni S_m di $\mathfrak{S}$ un S_{m-1} determinato.

Si consideri infatti il piano $\mathfrak{S}_\varphi$ del § prec. e l'operazione H, della quale $\mathfrak{S}_\varphi$ contiene tutti e soli i punti radici. Dato in $\mathfrak{S}$ lo spazio $S_m[\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_m]$, si ponga, poichè H fa corrispondere ad ogni punto di $\mathfrak{S}$ una costante numerica,

$$H(\gamma_i) = c_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, m).$$

Allora la condizione necessaria e sufficiente affinchè un punto generico di S_m

$$\gamma \equiv h_0\gamma_0 + h_1\gamma_1 + \ldots + h_m\gamma_m$$

appartenga a $\mathfrak{S}_\varphi$, cioè sia radice di H, è data dall'equazione

$$c_0h_0 + c_1h_1 + \ldots + c_mh_m = o,$$

la quale, appunto, definisce entro S_m un S_{m-1} ben determinato.

466. Come coordinate (omogenee) del piano $\mathfrak{S}_\varphi$ assumeremo le coordinate

$$\ldots, g_n, \ldots, g_1, g_0, g_{-1}, \ldots, g_{-n}, \ldots$$

del punto φ di $\mathfrak{S}$.

È manifesto che l'insieme di tutti i piani di $\mathfrak{S}$ è uno spazio lineare: noi lo indicheremo con Σ.

Dati più piani, mediante le loro coordinate, si può, in modo analogo a quello tenuto per i punti (§ 458), definire la loro dipendenza o indipendenza lineare; e si vede tosto

che più piani di $\mathfrak{S}$ sono linearmente indipendenti sempre e solo quando sono tali i punti di $\mathfrak{S}$, a cui quelli rispettivamente corrispondono.

467. Siano dati $m + 1$ piani di coordinate

$$\ldots g_{i.n}, \ldots, g_{i0}, \ldots, g_{i.-n}, \ldots \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, m)$$

rispettivamente e supponiamo che essi siano linearmente indipendenti. Saranno allora linearmente indipendenti gli $m + 1$ punti di $\mathfrak{S}$

$$\varphi_i = \sum_{-\infty}^{\infty} g_{i.n}x^n, \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, m).$$

L'insieme di tutti i piani che si ottengono per combinazione lineare dei piani

$$\mathfrak{S}_{\varphi_0}, \mathfrak{S}_{\varphi_1}, \ldots, \mathfrak{S}_{\varphi_n},$$

cioè dei piani di coordinate

$$c_0g_{0\cdot j} + c_1g_{1\cdot j} + \ldots + c_mg_{m\cdot j}$$
$$(j = -\infty, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, +\infty)$$

è uno spazio lineare di piani ad m dimensioni, che indicheremo con Σ_m.

Tutti i piani di Σ_m hanno a comune tutti e soli i punti di $\mathfrak{S}$, che sono comuni ai piani $\mathfrak{S}_{\varphi_0}, \mathfrak{S}_{\varphi_1}, \ldots, \mathfrak{S}_{\varphi_n}$, cioè dei punti di coordinate k_n soddisfacenti alle $m + 1$ relazioni

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{i.-n}k_{n-1} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, m).$$

Codesti punti formano uno spazio lineare di punti ad infinite dimensioni, che si può chiamare il sostegno di Σ_m: lo indicheremo con $\mathfrak{S}^{(m)}$.

Lo spazio $\mathfrak{S}^{(m)}$ di punti si può definire anche come il luogo dei punti radici di una operazione distributiva.

Sia infatti H_1 la operazione, le cui radici sono date da tutti e soli i punti di $\mathfrak{S}_{?1}$. Se allora $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sono $m+1$ punti di $\mathfrak{S}$, linearmente indipendenti, l'operazione

$$H = \alpha_0 H_0 + \alpha_1 H_1 + \ldots + \alpha_m H_m$$

ammette come radici tutti e soli i punti di $\mathfrak{S}^{(m)}$. Infatti, per la supposta indipendenza lineare di $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ non può essere per un punto ψ di $\mathfrak{S}$

$$H(\psi) = o,$$

se non è

$$H_0(\psi) = o,\ H_1(\psi) = o, \ldots, H_m(\psi) = o.$$

C. CURVE DI $\mathfrak{S}$.

468. Supponiamo che un elemento α di $\mathfrak{S}$ sia funzione analitica uniforme, oltrecchè di x, anche di altre m variabili $z_1, z_2, \ldots, z_m$, e che, per ogni sistema di valori z_i appartenenti ad un determinato campo (di validità per α) ammetta per $x = o$ al più una singolarità isolata. Allora per ogni sistema di m valori assegnati, entro il campo accennato, a $z_1, z_2, \ldots, z_m$, la α ci dà un punto di $\mathfrak{S}$, cosicchè, quando si facciano variare $z_1, z_2, \ldots, z_m$ si ottiene una varietà di punti appartenenti a $\mathfrak{S}$, la quale, in generale, non è lineare.

In particolare, per $m = 1$ avremo una varietà di punti semplicemente infinita, che diremo *curva di* $\mathfrak{S}$.

469. Data la curva $\alpha(x, z)$, ogni valore di z appartenente al rispettivo campo di validità ci dà un punto della curva. Se z_1, z_2 sono due valori di z, lo S_1

$$c_1\alpha(x, z_1) + c_2(\alpha, z_2)$$

si può dire una corda della curva: più in generale, se $z_1, z_2, \ldots, z_m$ sono m valori di z, la

$$c_1\alpha(x, z_1) + c_2\alpha(x, z_2) + \ldots + c_m\alpha(x, z_m)$$

ci dà uno S_{m-1} segante la curva negli m punti $\alpha(x, z_1)$, $\alpha(x, z_2), \ldots, \alpha(x, z_m)$. Codesti punti si possono anche supporre infinitamente vicini, e così, indicando con accenti le derivate di α rispetto a z, otteniamo gli spazi lineari

$$c_0\alpha(x, z_1) + c_1\alpha'(x, z_1)$$
$$c_0\alpha(x, z_1) + c_1\alpha'(x, z_1) + c_2\alpha''(x, z_1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_0\alpha(x,z_1) + c_1\alpha'(x, z_1) + \ldots + c_m\alpha^{(m)}(x, z_1),$$

che sono, rispettivamente, la tangente, il piano osculatore, ..., lo S_{m-1} osculatore alla curva nel punto $\alpha(x, z_1)$.

L'espressione

$$c_0\alpha(x, z) + c_1\alpha'(x, z),$$

in cui tanto $c_1 : c_0$, quanto z si considerino variabili, rappresenta la sviluppabile generata dalle tangenti alla curva.

470. È facile vedere sotto quale condizione una curva è contenuta in uno spazio ad m dimensioni, il quale dovrà quindi essere il suo S_m osculatore.

Sarà perciò necessario che, per ogni valore di z, $\alpha^{(m+1)}(x, z)$ si esprima linearmente per mezzo di $\alpha, \alpha', \ldots, \alpha^{(m)}$, cioè che α renda soddisfatta una equazione differenziale lineare in z d'ordine $m+1$, a coefficienti dipendenti dalla sola z. Ora la soluzione di una tale equazione è della forma

$$\alpha(x, z) = \sum_0^m \alpha_i(x)\beta_i(z).$$

Reciprocamente, ogni funzione di due variabili, la quale abbia codesta forma, ci rappresenta una curva tutta contenuta nello spazio lineare definito da $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

471. Si consideri una operazione distributiva A, rappresentabile per mezzo di una serie ordinata secondo le potenze di D (§ 126) e sia, precisamente,

$$A = \sum_0^\infty \alpha_n(x) D^n,$$

dove i coefficienti α_n appartengano ad $\mathfrak{S}$.

Allora, data la curva $\alpha(x, z)$, ad ogni suo punto l'operazione A fa corrispondere un punto determinato e il luogo di questi punti è una curva, rappresentata dalla funzione

$$\alpha_1(x, z) = \sum_0^\infty \alpha_n(x) D_x^n(\alpha).$$

La curva $\alpha_1(x, z)$ si può dire *trasformata* della $\alpha(x, z)$ per mezzo della A.

472. Può accadere che l'operazione A faccia corrispondere ad ogni punto della curva $\alpha(x, z)$ un punto della curva medesima, che, cioè, sussista un'equazione della forma

$$A(\alpha(x, z)) = \mu(x)\alpha(x, \mu_1(z)).$$

In tal caso la curva è una *curva unita* rispetto ad A.

473. Se in particolare nella relazione precedente è $\mu_1(z) = z$, se, cioè, sussiste la relazione

$$A(\alpha(x, z)) = \mu(z)\alpha(x, z),$$

la A trasforma ogni punto di α in sè stesso e la $\alpha(x, z)$ è una *curva di punti uniti* rispetto ad A.

Alla relazione precedente, che definisce una curva di punti uniti rispetto ad una data operazione A, se ne può sostituire una analoga, ma più semplice. Da quella ricaviamo, per ogni intero n,

$$A^n(\alpha(x, z)) = \mu^n(z)\alpha(x, z).$$

Risulta di qui che se una curva è curva di punti uniti rispetto ad un'operazione A, è pure tale rispetto ad ogni potenza di A, e quindi ad ogni operazione regolare in A (§ 69).

Posto allora che $\mu(z)$ sia funzione analitica di z, regolare ed invertibile nell'intorno di $z = o$, si sviluppi z in serie di potenze di μ e sia

$$z = \Sigma k_n \mu^n(z),$$

e poi si formi l'operazione

$$B = \Sigma k_n A^n.$$

Sarà per essa

$$B(\alpha(x, z)) = z\alpha(x, z), \tag{2}$$

forma più semplice sotto cui si può esprimere la proprietà di una curva di essere curva di punti uniti rispetto ad una operazione A e quindi rispetto all'altra operazione determinata B.

474. Se un'operazione B lascia invariante la curva $\alpha(x, z)$ in modo che sia verificata la (2), lascierà pure invarianti le tangenti, i piani osculatori..., gli spazi $\mathfrak{S}_m$ osculatori alla curva, in modo che ogni spazio

$$\mathfrak{S}_m[\alpha(x, z_1), \alpha'(x, z_1), \ldots, \alpha^{(m)}(x, z_1)]$$

sarà trasformato in sè da quella operazione. L'insieme di questi spazi costituirà uno spazio ad infinite dimensioni, i cui punti daranno (§ 176) tutte e sole le radici delle forme in B a coefficienti numerici e d'ordine arbitrario, cioè tutte e sole le soluzioni delle equazioni funzionali a coefficienti numerici

$$b_0 + b_1 B + \ldots + b_m B^m = o.$$

Se il valore $z = o$ appartiene al campo di valori di z nel quale è applicabile la (2), la $\alpha(x, z)$ ci dà una radice della B e le $\alpha'(x, o)$, $\alpha''(x, o)$,... ci danno le radici delle potenze successive di B; esse fanno pure parte dello spazio ad infinite dimensioni or ora ricordato.

D. GRUPPI CONTINUI ∞^1 DI OPERAZIONI.

475. Data un'operazione A che trasformi $\mathfrak{S}$ in sè stesso, le operazioni della forma

$$(3) \qquad G = \mathbf{1} + tA + \frac{t^2}{1.2} A^2 + \ldots + \frac{t^n}{n!} A^n + \ldots,$$

dove t rappresenta un parametro arbitrario, costituiscono un gruppo continuo ∞^1 (*ad un termine* nella nomenclatura del LIE) di operazioni che trasformano $\mathfrak{S}$ in sè stesso. La A si può dire *operazione infinitesima* del gruppo.

Applicando il gruppo di operazioni G ad un punto qualsivoglia $\alpha(x)$ di $\mathfrak{S}$, si ottiene una curva

$$\alpha(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n(\alpha),$$

che può dirsi la *traiettoria* del punto $\alpha(x)$ rispetto al gruppo delle G. Essa è anche traiettoria di ogni altro suo punto $\alpha(x, t_1)$.

476. La tangente alla traiettoria in un punto qualsivoglia di essa si ottiene facilmente per mezzo della operazione infinitesima: si ha infatti che la tangente alla curva $\alpha(x, t)$ nel punto $t = t_1$ è data da

$$c_0\alpha(x, t_1) + c_1 A(\alpha(x, t_1)),$$

il che equivale a

$$(4) \qquad \frac{\partial\alpha(x, t)}{\partial t} = A(\alpha(x, t)).$$

Analogamente si determina lo $\mathfrak{S}_m$ osculatore alla traiettoria in un suo punto.

477. Oltre le traiettorie, curve che sono trasformate in sè stesse dalle operazioni del gruppo (3), ma i cui punti si spostano lungo le curve medesime, possono esistere in $\mathfrak{S}$ curve di punti uniti (§ 472) rispetto a tutte le operazioni G.

Se l'operazione infinitesima A ammette in $\mathfrak{S}$ una radice α_0, si determini una successione di funzioni $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \ldots$ tali che sia

$$(5) \qquad A(\alpha_n) = n\alpha_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Allora la curva

$$\alpha(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) \frac{z^n}{n!}$$

è una curva di punti uniti rispetto a tutte le G. Si ha infatti dalle (5)

$$A(\alpha(x, z)) = z\alpha(x, z)$$

e quindi per ogni G

$$G(\alpha(xz)) = e^{tz}\alpha(x, z).$$

478. Si risolvono facilmente i problemi inversi di quelli risoluti ai §§ 476, 477.

Data una curva $\alpha(x, z)$, volendosi determinare un gruppo continuo ∞^1 di operazioni pel quale la $\alpha(x, z)$ sia una traiettoria, basterà determinare l'operazione infinitesima A del gruppo.

Posto

$$\alpha(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) \frac{z^n}{n!},$$

codesta operazione infinitesima è definita dalle condizioni

$$A(\alpha_0) = \alpha_1, \quad A(\alpha_1) = \alpha_2, \ldots, \quad A(\alpha_{n-1}) = \alpha_n, \ldots$$

Ottenuta la A, si ha dalla (3) l'operazione generica del gruppo, il quale ammette la traiettoria $\alpha(x, z)$.

479. Volendosi determinare un gruppo (3), per il quale una curva data $\alpha(x, z)$ sia luogo di punti uniti, poniamo anzitutto

$$\alpha(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) \frac{z^n}{n!}.$$

Se allora determiniamo un'operazione A per mezzo delle condizioni

$$A(\alpha_0) = o, \quad A(\alpha_1) = \alpha_0, \ldots, \quad A(\alpha_n) = n\alpha_{n-1}, \ldots$$

se ne ricaverà immediatamente

$$A(\alpha(x, z)) = z\alpha(x, z),$$

onde (§ 477) si concluderà che la $\alpha(x, z)$ è curva di punti uniti per tutte le operazioni del gruppo generato da A.

480. Possono esistere gruppi (3) tali che ogni loro traiettoria sia tutta contenuta in uno spazio lineare ad un numero finito determinato $m - 1$ di dimensioni, il quale naturalmente dovrà essere lo $\mathfrak{S}_{m-1}$ osculatore della curva stessa.

Se indichiamo con α un punto qualsivoglia della traiettoria, lo $\mathfrak{S}_{m-1}$ osculatore in quel punto è definito (§§ 476) dai punti

$$\alpha, \quad A(\alpha), \ldots, \quad A^{m-1}(\alpha).$$

Se quindi la traiettoria è tutta contenuta in codesto $\mathfrak{S}^{m-1}$, dovrà appartenervi anche il punto $A^m(\alpha)$: onde risulta che l'operazione A soddisfarà ad una equazione

$$c_0\alpha + c_1 A(\alpha) + \ldots + c_m A^m(\alpha) = o$$

a coefficienti indipendenti da x, ed ogni operazione del gruppo generato da A soddisfarà pure ad un'equazione siffatta.

Ogni operazione ciclica (§ 388) è, ad esempio, di codesta natura.

481. Per accennare a qualche applicazione delle più semplici, consideriamo dapprima il gruppo generato dalla D. Le operazioni.

$$(6) \qquad 1 + tD + \frac{t^2}{2!} D^2 + \ldots + \frac{t^n}{n!} D^n + \ldots,$$

sono le sostituzioni S_{x+t}. Le traiettorie sono le $\varphi(x+z)$: la loro tangente sarà data dalla (4), che nel nostro caso si riduce a

$$\frac{\partial \alpha(x, z)}{\partial x} = \frac{\partial \alpha(x, z)}{\partial z},$$

equazione il cui integrale generale è appunto $\varphi(x + z)$. Cercando la curva di punti uniti rispetto alla (6), che corrisponde alla unica radice della D, si trova la e^{zx}; lo $\mathfrak{S}_m$ osculatore di questa curva è

$$\mathfrak{S}_m [e^{zx}, xe^{zx}, \ldots, x^m e^{zx}]$$

e lo spazio ad infinite dimensioni costituito da tutti codesti $\mathfrak{S}_m$ contiene tutte e sole le radici delle forme lineari differenziali a coefficienti numerici.

482. In secondo luogo, consideriamo il gruppo generato dalla operazione infinitesima $A = xD$, per la quale è

$$A^m(x^n) = n^m x^n.$$

Si trova allora immediatamente che le operazioni generate dalla xD sono le sostituzioni $S_{t_{ex}}$.

Le traiettorie sono dunque della forma $\varphi(^t{}_{ex})$ o, posto $z = e^t$, della forma $\varphi(zx)$; la (4) dà, per le tangenti a queste curve, la condizione

$$z \frac{\partial \alpha}{\partial z} = x \frac{\partial \alpha}{\partial x},$$

il cui integrale generale è appunto $\varphi(zx)$.

Volendo la curva luogo dei punti uniti, corrispondente all'unica radice della xD, si ottiene (§ 477) la

$$\alpha(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) z^n$$

dove

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = log\, x, \ldots, \quad \alpha_n = \frac{1}{n!}\, log^n\, x, \ldots$$

onde

$$\alpha(x, z) = x^z.$$

Lo S_m osculatore di questa curva è lo spazio

$$S_m[x^z, x^z\, log\, x, \ldots, x^z\, log^m\, x].$$

Lo spazio ad infinite dimensioni, somma di tutti codesti S_m, contiene tutte e sole le radici delle forme a coefficienti numerici

$$a_0 + a_1 xD + a_2(xD)^2 + \ldots + a_m(xD)^m,$$

le quali possono porsi sotto la forma di operazioni normali

$$b_0 + b_1 xD + b_2 x^2 D^2 + \ldots + b_m x^m D^m.$$

483. Consideriamo da ultimo il caso in cui l'operazione infinitesima è una forma differenziale lineare d'ordine p:

$$A = \pi_0 + \pi_1 D + \ldots + \pi_p D^p.$$

La traiettoria del gruppo passante pel punto qualsivoglia α è la

$$\alpha(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n(\alpha(x))\, \frac{z^n}{n!},$$

e questo, se la α si riguarda come funzione arbitraria, è l'integrale generale dell'equazione a derivate parziali che ne dà le tangenti, la quale è per la (4)

$$\frac{\partial \alpha}{\partial z} = \sum_{i=0}^{p} \pi_i\, \frac{\partial^i \alpha}{\partial x^i}$$

Volendo le curve dei punti uniti del gruppo, o ciò che è lo stesso, dell'operazione A, si avrà da risolvere l'equazione

$$A(\alpha(x, z)) = z\alpha(x, z),$$

la quale è un'equazione differenziale lineare omogenea d'ordine p, le cui soluzioni sono funzioni analitiche del parametro z. Scelto un sistema fondamentale di soluzioni, gli elementi di questo si potranno porre sotto la forma

$$\alpha_i(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{i\cdot n}(x) z^n \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

dove

$$A(\alpha_{i\cdot 0}) = o, \quad A(\alpha_{i\cdot 1}) = \alpha_{i\cdot 0}, \ldots, \quad A(\alpha_{i\cdot n}) = \alpha_{i\cdot n-1}, \ldots$$

Si otterranno così p curve di punti uniti, e saranno tali anche tutte quelle della forma

$$\sum_{i=1}^{p} c_i \alpha_i(x, z);$$

saranno ancora invarianti gli spazi, di cui è ovvia l'interpretazione geometrica,

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{h=0}^{m} c_{i\cdot h}\, \frac{\partial^h \alpha_i(x, z)}{\partial z^h}.$$

484. Le condizioni affinchè la curva

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) z^n$$

sia *invariante* rispetto ad una forma differenziale lineare d'ordine p, sono espresse dalle

$$\begin{vmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_n & \alpha'_n \ldots & \overset{(p)}{\alpha_n} \\ \alpha_n & \alpha_{n+1} & \alpha'_{n+1} \ldots & \overset{(p)}{\alpha_{n+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n+p} & \alpha_{n+p-1} & \alpha'_{n+p+1} \ldots & \overset{(p)}{\alpha_{n+p+1}} \end{vmatrix} = o \quad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

dove cogli apici si sono indicate le derivazioni rispetto ad x.

NOTE.

NOTA I.

Per la bibliografia della teoria delle operazioni distributive. [1]

La compilazione di un elenco completo dei lavori che, più o meno direttamente, hanno attinenza colla teoria delle operazioni distributive, sarebbe certamente di non poco interesse, ma richiederebbe molto tempo e un grande numero di ricerche. Collo scopo di facilitarle, diamo qui alcune indicazioni sopra la bibliografia dell' argomento.

Il calcolo simbolico, studiato fino dai primordî della scoperta del Calcolo differenziale, costituisce un primo ramo della teoria delle operazioni distributive. In questo calcolo, i segni di derivazione, di differenziazione finita ed altri analoghi vengono trattati come quantità algebriche. LEIBNIZ (vedi *Leibnitii et Joh. Bernoullii commercium philosophicum et mathematicum* [Lausanne et Genève 1745] e *Symbolismus memorabilis calculi algebraici et infinitesimalis;* Miscellanea Berolinensia 1, 1710) è stato il creatore di questo calcolo, perfezionato da numerosi autori, quali LAGRANGE (*Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables;* Nouv. Mém. de l'acad. de Berlin 1772), LAPLACE (*Mémoire sur l'inclinaison moyenne des orbites des comètes, sur la figure dr la terre et sur les fonctions;* Mém. prés. par divers savants 7 [1773]), LORGNA (*Théorie d' une nouvelle espèce de calcul fini et infinitésimal;* Mém. de l'acad. de Berlin 1786-1787), GRÜSON (*Le calcul d' exposition;* Mém. de l'acad. de Berlin 1798-1799), ARBOGAST (*Du calcul des dérivations*, Strasbourg an VIII [= 1800]), FRANÇAIS

[1] Questa Nota riproduce, per la massima parte, una comunicazione inserita sullo stesso titolo nella « Bibliotheca mathematica » diretta da G. ENESTRÖM (1899, pag. 13).

(*Mémoire tendant à démontrer la légitimité de la séparation des échelles* etc.; Ann. de mathèm. 3, 1812), SERVOIS (*Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel;* Ann. de mathém. 5, 1814).

I simboli operativi avevano ricevuto, dagli autori ora citati, nomi oggidì abbandonati; ricordiamo quello di *caratteristiche*, usato da LORGNA, LAPLACE ed altri (cfr. LACROIX, *Traité du calcul différentiel et de calcul intégral*, T. III, § 970) e quello di *scale* (échelles) usato nei lavori di ARBOGAST e di FRANÇAIS. La memoria citata del SERVOIS è quella che pone meglio in luce il fatto fondamentale, che il calcolo simbolico risiede tutto nelle leggi formali delle operazioni e non su analogie più o meno intuitive, come presso gli autori anteriori; vi si trovano pure, crediamo per la prima volta, le espressioni ora così volgari di *proprietà distributiva* o *proprietà commutativa* nelle operazioni. È da notarsi il doppio impiego, fatto da codesto autore, del vocabolo « funzione », il quale è usato anche invece di « operazione »; ciò che nuoce talvolta alla chiarezza.

Nelle *Philosophical transactions* per l'anno 1837, si trova una importante memoria di MURPHY (*On the theory of analytical operations*) in cui si riscontra per la prima volta il concetto, diventato poi così usuale, specie nella teoria delle sostituzioni, di *trasformata* di un'operazione mediante un'altra. Dopo la Memoria del MURPHY, il calcolo delle operazioni in generale, ed in particolare quello delle distributive, quasi abbandonato dai matematici del continente, formava l'oggetto di buon numero di lavori per parte dei dotti inglesi; fra i principali conviene ricordare la memoria fondamentale di BOOLE (*On a general method in analysis,* Philos. transact. London, 1844), numerosi brani negli *Examples on the differential calculus* di GREGORY (London, 1846); il *Treatise on the calculus of operations* di CARMICHAEL (London, 1855); infine, nelle Philos. transact. dal 1848 al 1870, nel Cambridge and Dublin math. journal e nel Philosophical Magazine dal 1860 in poi, lavori di HARGREAVE, JELLETT, RUSSELL, SPOTTIWOODE, SYLVESTER, GRAVES, ecc. Nel Giornale di Matematiche, T, 20, 1882, si trova una esposizione riassuntiva del calcolo delle operazioni, di P. GAZZANIGA.

Fra le applicazioni del calcolo delle operazioni, considerato sempre in modo puramente formale, si possono citare quelle di

LIBRI (*Mémoire sur la résolution des équations algébriques dont les racines ont entre elles un rapport donné, et sur l'intégration des équations différentielles linéaires dont les intégrales particulières peuvent s'exprimer les unes par les autres;* Journ. für Mathem. 10, 1833), BOOLE (*Treatise on differential equations*), BRASSINE (Note au *Cours d'analyse* de STURM, Paris 1868), HEFFTER (*Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen*, Leipzig 1894), FORSYTH (*Theory of differential equations, Part. I*, Cambridge, 1896), THOMÉ (*Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen*, Journ. für Mathem., 76, 1873), CASORATI (*Il calcolo delle differenze finite interpretato ed accresciuto di nuovi teoremi*, Ann. di matem. 10_2, 1880, e Mem. della r. accad. dei Lincei 5_3, 1880); VASCHY (*Intégration des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants;* Journ. de l'école polytechn., cah. 63, 1893), SCHLESINGER (*Handbuch der linearen Differentialgleichungen* Bd I, Leipzig 1895); LUCAS (*Théorie des nombres*, chap. XIII, Paris 1891); CESARO (*Analisi algebrica* § XI, Torino, 1894); infine, in un certo senso, le applicazioni di FROBENIUS (*Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen;* Journ. für Mathem. 84, 1878), STUDY (*Recurrirende Reihen und bilineare Formen;* Monatshefte für Mathem. 2, 1891), SFORZA (*Sulle forme bilineari simili;* Giorn. di matem. 34, 1896) e PINCHERLE (*Sulle omografie*, Rendic. dell'Istituto Lombardo, 28, 1895), nelle quali il calcolo delle operazioni si trova applicato alla teoria delle forme bilineari o delle omografie.

Accanto alle ricerche generali sulle operazioni distributive, prendono posto quei lavori che hanno come scopo lo studio di operazioni particolari. Fra queste, si ha anzitutto la derivazione ad indice qualsivoglia, di cui si è occupato per primo il LEIBNIZ (*Opera*, ed. DUTENS, T. III, p. 105 e *Commercium philos. et mathem.*, passim); poi EULER (*De progressionibus trascendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt;* Comment. Petropol. 5 [1730-1731]), FOURIER (*Théorie de la chaleur*, p. 564), LACROIX (*Calcul différentiel*, 2e édition, T. III, p. 409), LIOUVILLE (*Mémoire sur le calcul des différentielles à indices quelconques;* Journ. de l'éc. polytechn. T. 13, 1832), SPITZER (*Note über Differenz. und Differential-Quotienten von allgemeiner Ordnungszahl;* Arch. der Mathem. 33, 1859), RIEMANN (*Werke*, p. 331), HOLMGREN (*Om differentialkalkylen med indices of hvad natur som helst;* Svenska vetenskapsakademiens handlingar 5, 1866) TARDY (Annali di Matematica, S. 1 T. 1 1858), OLTRAMARE (*Essai sur le calcul de généralisation*, Genève 1896), BOURLET (*Les opérations en géneral* etc. Ann. de l'éc. normale, 14_3 1897; *Sur certaines équations analogues aux équations différentielles*, ibid., 16_3, 1899), PINCHERLE (*Sur le calcul fonctionnel distributif*, ch. IV, Math. Ann., 49, 1897).

Altre operazioni particolari hanno destato l'interesse degli analisti; tali sono la trasformazione di LAPLACE e quella di EULERO (Cap. XIV). Sulla prima e sulle sue applicazioni sono da ricordarsi LAPLACE (*Sur les suites;* Mém. de l'acad. des sciences de Paris 1779 et *Théorie analytique des probabilités*, Paris 1812), LACROIX (*Traité de calcul différentiel*, T. III, ch. IV), ABEL (*Oeuvres*, 2ᵉ édition, T. II, mem. XI), MELLIN (*Zur Theorie der Gammafunction;* Acta Mathem. 8, 1886; *Uber einen Zusammenhang zwischen gewissen linearen Differential- und Differenzengleichungen;* Acta Mathem. 9, 1886), POINCARÉ (*Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies:* Americ. journ. of mathem. 7, 1885; *Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires;* Acta Mathem. 8, 1886), PINCHERLE (*Della trasformazione di Laplace e di alcune sue applicazioni;* Mem. dell'accad. di Bologna 8_4, 1887), SCHLESINGER (*Handbuch der linearen Differentialgleichungen*, Abschn. VII, 1895), HORN (*Verwendung asymptotischer Darstellung zur Untersuchung der Integrale einer speciellen linearen Differentialgleichung;* Mathem. Ann. 49, 1897; *Ueber eine Classe linearer Differentialgleichungen;* ibid. 50, 1898), AMALDI (*Sulla trasformazione di Laplace;* Rendic. della r. accad. dei Lincei 5_7, 1898). Sulla seconda, si può vedere una dettagliata bibliografia nelle « Litteraturnachweise » del già citato *Handbuch* dello SCHLESINGER (Bd. II, p. xv-xvj, 1897).

Ogni operazione distributiva può, almeno formalmente, porsi sotto forma di un integrale definito della forma

$$A(\varphi) = \int \sigma(x,\ y)\varphi(y)dy,$$

estesa ad una linea d'integrazione opportuna del piano y; la funzione $\sigma(x, y)$, che definisce la specie dell'operazione, è detta *funzione caratteristica.* Su tali operazioni, v. PINCHERLE (*Studi sopra alcune operazioni funzionali*, Mem. dell'Accad. di Bologna. 7_4, 1886, e *Sur certaines opérations fonctionnelles* etc., Acta Math. 10, 1887). Questi integrali danno luogo al problema detto dell'inversione degli integrali definiti, o risoluzione dell'equazione

$$f(x) = \int \alpha(x,y)\varphi(y)dy$$

rispetto alla funzione incognita $\varphi(y)$, dati che siano $f(x)$, $\alpha(x,y)$ e la linea d'integrazione. Su questo problema, si può consultare ABEL (*Oeuvres*, T. II, Mém. XI), RIEMANN (*Werke*, p. 140), BELTRAMI (*La teoria delle funzioni potenziali simmetriche;* Mem. dell'accad. di Bologna 2_4, 1881), LAURENT (*Calcul inverse des intégrales définies;* Journ. de mathém. 4_3, 1878); PINCHERLE (Memorie citate, e *Sur la génération de systèmes récurrents au moyen d'une équation linéaire différentielle;* Acta Mathem. 16 1893), LEVI-CIVITA (*I gruppi di operazioni funzionali e l'inversione degli integrali definiti;* Rendic. dell'Istituto Lombardo 28, 1895).

Nel caso in cui i limiti dell'integrazione dipendono dalla x, problemi particolari sono stati trattati da ABEL (*Auflösung einer mechanischen Aufgabe;* Jour. für Mathem. 1, 1826) BELTRAMI (*Intorno ad un teorema di Abel e ad alcune sue applicazioni;* Rendic. dell'Istituto Lombardo 13, 1880), SONINE (*Sur la généralisation d'une formule d'Abel;* Acta Mathem. 4, 1884) e LEVI-CIVITA (*Sull'inversione degli integrali definiti nel campo reale*, Atti dell'accad. di Torino 31, 1895), mentre il caso generale è stato risoluto dal VOLTERRA (*Sulla inversione degli integrali definiti;* Rend. della r. accad. dei Lincei 5_5, 1896 e Atti dell'accad. di Torino 31, 1896; *Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti;* Annali di matem. 25_2, 1897).

I concetti del calcolo dei vettori si possono applicare alla teoria delle operazioni, in particolare a quella delle operazioni distributive. Al punto di vista vettoriale appartengono i lavori di LAGUERRE (*Sur le calcul des systèmes linéaires;* Journ. de l'éc. polytech. cah. 42, 1867), PEANO (*Calcolo geometrico;* cap. IX, Torino 1888), CARVALLO (*Sur les systèmes linéaires;* Monatshefte für Mathem. 1891), che trattano delle operazioni distributive (sostituzioni lineari) in uno spazio ad un numero finito di dimensioni; mentre nella presente opera si è data la teoria delle dette operazioni eseguite sulle funzioni analitiche, le quali sono riguardate come elementi o vettori in uno spazio ad un numero infinito (numerabile) di dimensioni.

Infine, fra i sistemi particolari di calcoli operativi che si connettono più o meno direttamente con quelli che abbiamo menzionati fin qui, sono ancora da ricordare il « Cofunctional-Rechnung » dello Schapira (*Grundlage zu einer Theorie allgemeiner Cofunctionen*, Wien 1881; *Theorie allgemeiner Cofunctionen* u. s. w., Leipzig 1892) ed il « Calcul de généralisation » d'Oltramare (*Sur la généralisation des identités*, Mém. de l'Institut genévois 16, 1886; *Essai sur le calcul de généralisation*, Genève, 1896).

NOTA II.

L'equazione funzionale $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

1. Dal complesso della teoria delle operazioni distributive che abbiamo svolta nella presente opera, emerge che ogni siffatta operazione può, in sostanza, riguardarsi come rappresentante di un sistema di equazioni lineari omogenee ad un numero generalmente infinito (sempre però numerabile) di variabili; queste variabili sono, ad esempio (§ 97), i coefficienti dello sviluppo in serie di potenze della funzione arbitraria cui è applicabile l'operazione stessa. Le ordinarie sostituzioni lineari rappresentano operazioni distributive in un campo ad un numero finito di variabili. Il caso più semplice è rappresentato dalla funzione lineare omogenea di una sola variabile, $f(x) = kx$; questa soddisfa evidentemente all'equazione funzionale

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \tag{1}$$

o, in altre parole, ammette la proprietà distributiva rispetto alla variabile x.

2. La questione di risolvere l'equazione (1) nel modo più generale, si è presentata da tempo: propriamente, si tratta di vedere quale è il minimo di condizioni da imporre alla $f(x)$ per concludere, dal fatto che essa soddisfa alla (1), che non può differire da kx.

Riassumeremo brevemente, in questa nota, i principali risultati ottenuti in proposito.

3. Anzitutto noteremo che, come è naturale, le ricerche sono state limitate al caso in cui $f(x)$ sia univoca. Segue allora dalla (1) che è

$$f(o) = o.$$

Si supponga ora x arbitrariamente variabile nel campo dei numeri reali. Posto $f(1) = k$, si ha immediatamente che per ogni numero razionale a, è $f(a) = ka$. Cosa si può dire per valori irrazionali di x? Perciò, sono state considerate varie ipotesi.

a) Dapprima, si è ammessa per $f(x)$ la continuità [1]. Dalle proprietà fondamentali delle funzioni continue si deduce subito che sarà ancora $f(x) = kx$ per ogni valore irrazionale di x, in guisa che la kx è la funzione continua più generale che soddisfa alla (1).

b) Senza supporre la continuità per $f(x)$, si è ammesso che in un intervallo finito $a < x < b$ la funzione $f(x)$ si mantenga reale e inferiore in valore assoluto ad un numero positivo assegnabile [2]. Si consideri in tal caso la funzione

$$\varphi(x) = f(x) - kx, \tag{2}$$

nulla per ogni valore razionale di x e che soddisfa pure alla equazione (1). Si vede come essa riprenda uno stesso valore per due valori di x la cui differenza è razionale e quindi prenda nell' intervallo $a \dots b$ tutti i valori di cui è suscettibile. Ma se per $x = c$ la $\varphi(x)$ ha un valore $\varphi(c) \gtrless o$, essa sarà suscettibile anche del valore $m\varphi(c)$, dove m è un numero intero arbitrariamente grande, contrariamente all' ipotesi fatta; perciò è $\varphi(x) = o$, e $f(x) = kx$ anche in questo caso.

c) Si giunge al medesimo risultato, e con un ragionamento analogo fondato sulla considerazione della funzione (2), supponendo che $\varphi(x)$ possa essere complessa, ma in un dato intervallo $a < x < b$, inferiore in modulo ad un numero positivo assegnabile.

d) Se indichiamo con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \dots$ una successione di numeri irrazionali tali che il rapporto di due qualunque fra essi non sia razionale, il VOLPI [3] ha mostrato come sia possibile di costruire una funzione, definita per tutto l' insieme E dei numeri della forma

$$x = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_r\alpha_r,$$

(dove $c_1, c_2, \dots, c_r$ sono razionali) e che soddisfi all' equazione (1) senza essere una funzione della forma kx in tutto l' insieme. Precisamente essa è data da $k_i x$, dove il coefficiente k_i assume valori diversi quando x è preso in diverse classi appartenenti all' insieme E. Ma, contrariamente a quanto afferma l' A., non risulta dalla sua costruzione che la definizione di una simile funzione possa essere estesa a tutto l' insieme dei numeri reali.

e) Il LEVI (Beppo) [1] asserisce, al contrario, che se la $f(x)$, essendo univocamente definita in tutto il campo dei valori reali di x, deve soddisfare all' equazione (1), se ne può concludere senz' altro che essa è continua e quindi (*a*) della forma kx. Egli dà questa asserzione come corollario di un teorema generale sulle equazioni funzionali, il quale discende alla sua volta da proposizioni più generali sulla teoria degli insiemi, di cui per altro l' A. non ha ancora pubblicate le dimostrazioni.

4. Riprendiamo ancora l' equazione (1), ma supponiamo ora x arbitrariamente variabile nel campo complesso. In tale caso, se si ammette la continuità, si trova senza difficoltà che, posto $f(1) = k$ ed $x = u + iv$, risulta

$$f(x) = ku + f(i)v.$$

Facendo $f(i) = ki$, la $f(x)$ prende la forma kx. In luogo di questa ipotesi $f(i) = ki$, si può, come accade in ricerche geometriche relative al teorema fondamentale della proiettività, aggiungere all' equazione (1) l' altra

$$f(x^2) = f^2(x) \tag{3}$$

e si ha allora immediatamente

$$f(i) = \pm ki,$$

(1) CAUCHY, Analyse Algébrique, pag. 104 (Paris 1821).

(2) DARBOUX, Math. Annalen, Bd. XVII, 1880, p. 55. Di questo teorema del DARBOUX, il VOLPI ha dato un' elegante dimostrazione fondata su una considerazione diversa (Giorn. di Matem., T. XXXIV, 1896).

(3) Loc. cit.

(1) Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, S. V. T. V. pag. 72, (agosto 1900).

talchè all'equazione (1) soddisfanno le due funzioni

$$f(x) = k(u + iv) = kx, \quad \bar{f}(x) = k(u - iv) \text{ [1]}.$$

Infine, ammesso il teorema del LEVI sulle equazioni funzionali, l'esistenza di una funzione definita in tutto il campo complesso e soddisfacente alla (1), basta a portare con sè la continuità, colle sue conseguenze.

---

(1) SEGRE, Atti della R. Accad. di Torino, T. XXV. Gennaio 1890.

NOTA III.

Sulla teoria dei divisori elementari.

A fondamento di numerose questioni di Analisi e di Geometria sta la considerazione di due forme bilineari in $2n$ variabili. o quadratiche in n variabili. Per es. la base analitica dello studio delle omografie tra due spazi ad n dimensioni sovrapposti, sta nella considerazione di due forme bilineari simultanee: la forma, cioè, che uguagliata a zero rappresenta effettivamente la data corrispondenza omografica, e la forma che uguagliata a zero dà la condizione perchè un punto ed un piano dello spazio considerato si appartengano [1].

Il problema di ridurre simultaneamente, per mezzo di sostituzioni lineari sulle variabili, due forme bilineari al tipo più semplice o *canonico*, conduce allo studio delle condizioni sotto cui due forme simultanee sono trasformabili, per mezzo di sostituzioni lineari, in due altre prefissate, cioè allo studio degli invarianti di una coppia di forme bilineari rispetto alle sostituzioni lineari sulle due serie di variabili.

Date la due coppie di forme bilineari

$$F_1 = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j, \qquad F_2 = \sum_{i,j} b_{ij} x_i y_j$$

ed

$$F_1' = \sum_{i,j} a'_{ij} x_i y_j, \qquad F_2' = \sum_{i,j} b'_{ij} x_i y_j,$$

si considerino i determinanti

$$|a_{ij} - b_{ij} t|, \qquad |a'_{ij} - b'_{ij} t|$$

---

(1) La prima forma è del tipo generale $\sum_{j,i} a_{ij} \, x^i y^j$ e la seconda del tipo $\sum_i x_i y_i$.

dove t è un parametro: i determinanti $|a_{ij}|$, $|b_{ij}|$, $|a'_{ij}|$, $b'_{ij}|$ siano diversi da zero, cosicchè le equazioni

$$|a_{ij} - b_{ij}\, t| = o, \qquad |a'_{ij} - b'_{ij}\, t| = o$$

saranno di grado n e non avranno radici nulle.

È già da gran tempo noto che se l'equazione $|a_{ij} - b_{ij}\, t| = o$ ammette n radici distinte, condizione necessaria e sufficiente affinchè esistano due sostituzioni lineari sulle variabili x_i e y_i, tali che trasformino le due forme F_1, F_2 nelle F'_1, F'_2 rispettivamente, si è che l'equazione $|a'_{ij} - b'_{ij}\, t| = o$ ammetta le medesime radici della $|a_{ij} - b_{ij}\, t| = o$ [1]. In questo caso particolare si può dire che un sistema completo di invarianti della coppia di forme bilineari F_1, F_2 rispetto alle sostituzioni lineari è dato dalle n radici, *per ipotesi distinte*, della equazione

$$|a_{ij} - b_{ij} t| = o.$$

Nel caso generale il problema analogo fu risoluto dal Weierstrass nel suo lavoro: *Ueber Schaaren bilinearer und quadratischer Formen* (Berl. Monatsb. 1868, pag. 310; Ges Werke, Bd. II, pag. 19).

Egli dimostrò che in ogni caso un sistema completo di invarianti di una coppia di forme bilineari F_1, F_2, rispetto alle sostituzioni lineari, è dato dall'insieme di quelle espressioni che egli chiamò *divisori elementari* del determinante

$$\Delta(t) = |a_{ij} - b_{ij}\, t|$$

corrispondente alla data coppia di forme.

Se $c_1, c_2, \ldots, c_q$ sono le radici distinte dell'equazione di n^{simo} grado $\Delta(t) = o$, le espressioni $c_i - t$ diconsi *divisori* lineari del determinante $\Delta(t)$. Supposto che la radice c_i sia multipla dell'ordine $l_{i\cdot o}$ di moltiplicità, indichiamo successivamente con $l_{i\cdot 1}, l_{i\cdot 2}, \ldots, l_{i\cdot s_i}$ l'esponente col quale il divisore lineare $c_i - t$ compare nel massimo comun divisore dei minori di $\Delta(t)$ dell'ordine $n-1$, $n-2, \ldots, n-s_i$ rispettivamente; e supponiamo che i minori di ordine $n - s_i - 1$ non ammettano più a fattor comune alcuna potenza $c_i - t$, il che equivale a supporre che il determinante $\Delta(c_i)$ sia di caratteristica $n - s_i - 1$. Si vede facilmente che è

$$l_{i\cdot o} > l_{i\cdot 1} > \ldots > l_{i\cdot s_i - 1} > l_{i\, s_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q),$$

onde, se si pone

$$l_{i\cdot o} - l_{i\cdot 1} = e_{i\cdot o}, \quad l_{i\cdot 1} - l_{i\cdot 2} = e_{i\cdot 1}, \ldots,$$
$$l_{i\cdot s_i - 1} - l_{i\cdot s_i} = e_{i\cdot s_i - 1}, \quad l_{i\cdot s_i} = e_{i\cdot s_i}$$

i numeri interi e_{ij} saranno positivi.

Il Weierstrass chiama divisori elementari del determinante $\Delta(t)$ le espressioni, razionali intere in t,

$$(c_i - t)^{e_{ij}} \quad (i = 1, 2, \ldots, q; \; j = o, 1, \ldots, s_i),$$

e nella Nota citata dimostra il seguente

Teorema: Siano date due coppie di forme bilineari nelle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $y_1\, y_2, \ldots, y_n$

$$F_1 = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j, \qquad F_2 = \sum_{i,j} b_{ij} x_i y_j$$

ed

$$F'_1 = \sum_{i\,j} a'_{ij} x_i y_j, \qquad F'_2 = \sum_{i,j} b'_{ij} x_i y_j,$$

tali che i determinanti $|a_{ij}|$, $|b_{ij}|$, $|a'_{ij}|$, $|b'_{ij}|$ siano diversi da zero. Condizione necessaria e sufficiente affinchè esistano due sostituzioni lineari a determinante diverso da zero, le quali, eseguite la prima sulle variabili x_i, la seconda sulle y_i, trasformino le F_1, F_2 nelle F'_1, F'_2, rispettivamente, si è che i due determinati:

$$|a_{ij} - b_{ij}\, t|, \quad |a'_{ij} - b'_{ij}\, t|$$

abbiano i medesimi divisori elementari.

Questo teorema esauriva sostanzialmente il problema. Tuttavia sull'argomento si raccolse ancora una ricca letteratura.

Anzitutto un numeroso gruppo di lavori fu determinato dallo scopo di colmare una lacuna, riscontrata nel procedimento del

[1] Cfr. pel caso non essenzialmente diverso delle forme quadratiche: Cauchy, Ex. de math. IV, pag. 140; Jacobi: Crelle 's Journal: Bd. 12.

WEIERSTRASS. Lo STICKELBERGER (1), il DARBOUX (2) il GUNDELFINGER (3) riuscirono per via indiretta a dare un assetto rigoroso alla teoria e il KRONECKER diede una dimostrazione soddisfacente, però non estendibile al caso delle forme quadratiche (4). Fu il FROBENIUS (5) che, generalizzando un teorema dello SMITH su determinanti numerici superò direttamente la difficoltà che potevasi opporre al ragionamento del WEIERSTRASS.

Il KRONECKER (6) e il FROBENIUS (7) medesimi studiarono e risolsero l' analogo problema per le schiere *singolari* di forme bilineari e quadratiche e posero le basi di generalizzazioni in vario senso continuate poi da HENSEL (8) FISCHER (9), LANDSBERG (10), per cui la teoria dei divisori elementari fu estesa a determinanti in cui gli elementi siano numeri interi o funzioni intere di qualsivoglia grado di una o più variabili, o grandezze intere appartenenti ad un determinato corpo di numeri o di funzioni algebriche.

Fra le applicazioni della teoria dei divisori elementari va anzitutto ricordata quella già indicata dal WEIERSTRASS (11) stesso alle equazioni differenziali lineari e generalizzata in varie direzioni dallo HORN (12) e dal SAUVAGE (13) e l' applicazione alla teoria dell' *equazione fondamentale* (14).

Si hanno poi le numerose applicazioni geometriche: fra queste ci basterà ricordare la classificazione dei complessi di se-

(1) Crelle 's Journal, Bd. 86.
(2) Journal de Liouville: II Série, t. XIX.
(3) Cfr. in HESSE. Vorles. über analyt. Geom. des Raumes: 3. Aufl. Suppl. IV.
(4) Berl. Monatsb 1874.
(5) Crelle 's Journal, Bd. 88.
(6) Sitzb. der Berl. Akad. 1890, 1891.
(7) Sitzb. der Berl. Akad. 1896.
(8) Crelle 's Journal, Bdn. 114, 115, 117; Sitzb. d. Berl. Akad. 1895.
(9) Crelle 's Journal, Bdn. 117, 118.
(10) Ibidem.
(11) Ges. W, Bd. II. pag. 75.
(12) Acta math. t. 12, 14; Math. Ann. Bdn. 39, 40, 42; Crelle 's Journal. Bdn. 116, 117.
(13) V. i lavori di questo Autore negli Ann. de l' Ec. norm. sup., 1889, 1891, 1893.
(14) cfr. p. es. SCHLESINGER: Handbuch u. s. w. Bd. I, III Absch.

condo grado del KLEIN (1) e la classificazione delle omografie in uno spazio a quante si vogliono dimensioni del SEGRE (2), e del PREDELLA (3).

Per la bibliografia completa e per una sistematica esposizione della teoria dei divisori elementari, rimandiamo alla importante ed estesa monografia del D.r P. MUTH: « *Theorie und Anwendung der Elementartheiler* » Leipzig, 1899, che noi abbiamo tenuta presente nella redazione di questa Nota.

A questo punto ci rimane da porre brevemente in relazione la teoria dei divisori elementari con le considerazioni del nostro Capitolo IV. Precisamente, supponendo data una operazione distributiva A che trasforma in sè un determinato S_n, vogliamo indicare quale significato abbiano rispetto agli spazi invarianti contenuti in S_n i divisori elementari del primo membro dell' equazione fondamentale di A rispetto ad S_n (4).

Usando le notazioni del Cap. IV, osserviamo anzitutto che i divisori elementari del determinante $f(t)$ sono, pel teorema del WEIERSTRASS, invarianti rispetto ad ogni coppia di sostituzioni lineari non degeneri sulle due serie di variabili che compaiono nelle due forme bilineari, cui corrisponde il determinante $f(t)$: sono quindi anche invarianti rispetto ad ogni sostituzione lineare, non degenere, sul sistema fondamentale di riferimento scelto in S_n. Possiamo allora immaginare di aver scelto come sistema fondamentale in ciascuno degli spazi, l' uno all' altro esterni,

$$S_{r_1}\ S_{r_2}, \ldots, S_{r_q},$$

dei quali S_n è somma (§ 90), un sistema analogo al sistema (8) del § 86, in cui come sappiamo, ogni colonna definisce a sua volta uno spazio invariante rispetto ad A. Ricordando come la A operi sugli elementi di ciascuna di codeste colonne (§ 85), si ottiene il determinante $f(t)$ sotto una forma particolarmente

(1) Inauguraldiss 1868; ristamp. nei Math. Ann., Bd. 23.
(2) Mem. della r. Acc. dei Lincei, serie 3a, t. XIX, 1884.
(3) Ann. di Mat. S. II, t. XVII, 1890.
(4) Il determinante corrispondente ad una coppia di forme bilineari assume la forma del primo membro della (5) di pag. 53 sempre e solo quando le due forme date siano del tipo indicato al principio di questa Nota

semplice, la quale permette di calcolarne direttamente i divisori elementari [1].

Si trova così, che se $c_1 - t$ è un divisore lineare generico di $f(t)$ e il sistema (8) del § 86 è il sistema fondamentale scelto nello spazio invariante S_{r_1} corrispondente alla radice c_1, i divisori elementari di $f(t)$, contenenti il divisore lineare $c_1 - t_1$ sono tutti e soli i primi membri delle equazioni fondamentali di A rispetto ai $k_1 + k_2 + \ldots + k_p$ spazi invarianti, definiti dalle singole colonne del quadro (8). In altre parole il divisore lineare $c_1 - t$ compare in $k_1 + k_2 + \ldots + k_p$ divisori elementari dei quali k_1 sono uguali a $(c_1 - t)^p$, k_2 a $(c_1 - t)^{p-1}, \ldots$, k_{p-1} a $(c_1 - t)^2$ e k_p a $c_1 - t$. Lo stesso si ripete per ciascuno dei divisori lineari di $f(t)$.

---

(1) Le semplici considerazioni a ciò necessarie, si troveranno estesamente sviluppate nei lavori già citati del SAUVAGE.

NOTA IV.

Le operazioni distributive di più funzioni, o di una funzione di più variabili.

Nella presente opera abbiamo studiate le operazioni distributive in quanto si applicano ad una funzione arbitrariamente variabile. Si presenta naturalmente l' idea da una generalizzazione: di cercare cioè le analoghe proprietà, d' una parte per le operazioni applicabili a più funzioni e distributive rispetto a ciascuna; d' altra parte, per le operazioni distributive applicate a funzioni di più variabili. Esempi di operazioni di quest' ultima specie sono forniti dai primi membri delle equazioni lineari a derivate parziali o alle differenze parziali, o miste differenziali e alle differenze.

La doppia generalizzazione che abbiamo ora indicata è stata considerata dal CALÒ [1], che ha ottenuto per le operazioni dell' una e dell'altra specie un' espressione analitica formale, estensione delle serie di potenze di D considerate al Cap. VI e che danno, come abbiamo visto (§ 147), la rappresentazione generale di un' operazione definita univocamente nell' intorno di un elemento funzionale dato. Esponiamo qui brevemente i risultati ottenuti dal CALÒ.

Sia dapprima un' operazione applicabile a più funzioni di una variabile, e per brevità, limitiamoci al caso di due funzioni. Essendo A quest' operazione eseguita sulle funzioni, $\varphi(x)$, $\psi(y)$ [2], la proprietà distributiva sarà espressa da

$$A(\varphi + \varphi_1, \psi) = A(\varphi, \psi) + A(\varphi_1, \psi),$$
$$A(\varphi, \psi + \psi_1) = A(\varphi, \psi) + A(\varphi, \psi_1).$$

---

(1) *Sulle operazioni funzionali distributive.* (Rendic. della R. Accad. dei Lincei, secondo semestre 1895, fasc. 3°).

(2) Le φ, ψ si possono indifferentemente supporre funzioni della stessa variabile, o di variabili diverse.

L'espressione

$$A(x\varphi, \psi) - xA(\varphi, \psi)$$

si dice **derivata funzionale parziale** di A rispetto a φ, e si può indicare con $\frac{\partial A}{\partial \varphi}$; l'espressione

$$A(\varphi, y\psi) - yA(\varphi, \psi)$$

è la derivata funzionale parziale $\frac{\partial A}{\partial \psi}$ di A rispetto a ψ. È manifesta la invertibilità delle derivazioni funzionali; si ha cioè:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial A}{\partial \psi}\right) = \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{\partial A}{\partial \varphi}\right).$$

Si trova facilmente

$$\frac{\partial^{m+n} A}{\partial \varphi^m \partial \psi^n} = \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{n} (-1)^{r+s} \binom{m}{r}\binom{n}{s} x^r y^s A(x^{m-r}\varphi, y^{n-s}\psi).$$

Lo sviluppo (18) del § 146 viene generalizzato nella formula

$$A(\pi\varphi, \chi\psi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{(m)}}{m!} \frac{\chi^{(n)}}{n!} \frac{\partial^{m+n} A(\varphi, \psi)}{\partial \varphi^m \partial \psi^n},$$

data dal CALÒ in via puramente formale, ma circa alla cui validità effettiva si possono fare considerazioni analoghe a quelle dei §§ 127-130.

Sia poi un' operazione A applicabile alle funzioni di più variabili, ed anche qui, per brevità, limitiamoci al caso in A sia applicata ad una funzione φ delle due variabili x, y. Per questa operazione si possono definire le due derivate funzionali

$$A_{10} = A(x\varphi) - xA(\varphi), \quad A_{01} = A(y\varphi) - yA(\varphi);$$

vale anche qui l'invertibilità della derivazione, talchè si ha la derivata seconda mista

$$A_{11} = A(xy\varphi) - xA(y\varphi) - yA(x\varphi) + xyA(\varphi).$$

In generale è

$$A_{mn} = \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{n} (-1)^{r+s} \binom{m}{r}\binom{n}{s} x^r y^s A(x^{m-r} y^{n-s}\varphi).$$

Questa formola serve a calcolare in via ricorrente $A(x^m y^n \varphi)$ in funzione lineare delle derivate, ottenendosi la formola analoga alle (2) del § 128

$$A(x^m y^n \varphi) = \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{n} \binom{m}{r}\binom{n}{s} A_{rs}(\varphi) x^{m-r} y^{n-s},$$

e con questa lo sviluppo (18) del § 146 viene generalizzato mediante la formula

$$A(\varphi\psi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m!\, n!} A_{mn}(\varphi) \frac{\partial^{m+n}\varphi}{\partial x^m \partial y^n}.$$

NOTA V.

Cenno sulle operazioni non distributive.

Nella Nota I abbiamo indicato varii lavori che si riferiscono alle operazioni in generale e anche nella presente opera (§§ 24-41) si sono date alcune proposizioni generali sulle operazioni o sui sistemi di operazioni per cui si ammette la proprietà associativa, ma non la distributiva. Ma astrazione fatta da quelle proposizioni e da altre analoghe, parimente generali ed ovvie e discendenti dal concetto generale di operazione, pochi lavori si riferiscono a classi di operazioni funzionali non distributive, e pochi risultati si sono ottenuti in proposito. Tuttavia, si può notare come sia facile dedurre dalle operazioni distributive, altre che non godono di codesta proprietà; basta considerare p. es. un' operazione $A(\varphi, \psi)$ distributiva separatamente rispetto alle due funzioni arbitrarie indipendenti φ e ψ, e considerare poi l' operazione B su una sola funzione arbitraria, definita da

$$B(\varphi) = A(\varphi, \varphi).$$

Questa sarà in generale un' operazione funzionale determinata, ma non distributiva.

Fra i risultati che, come dicevamo, sono scarsi di numero, in ordine a quelle operazioni per le quali non si ammette a priori la proprietà distributiva, vogliamo nella presente nota accennare a due dei più notevoli, sebbene d' importanza diversa; l' uno ottenuto dal Volterra, l' altro dal Bourlet.

Il primo autore [1] considera operazioni funzionali definite come segue. Sia φ una funzione della variabile reale x — nel

(1) Nel lavoro « *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni* » Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, secondo semestre 1887, fasc. 4, 6 e 7.

senso generale del Dirichlet — data arbitrariamente nell' intervallo $a < x < b$. Si considereranno quelle operazioni che eseguite su φ, generano un numero y, il quale viene pertanto a dipendere da tutti i valori che assume φ entro l' intervallo considerato e muta in generale al mutare della funzione [1]. Importa appena di notare che questo modo di concepire l' operazione funzionale si discosta essenzialmente dal nostro, prima perchè per noi primeggiava il concetto della natura analitica della funzione φ soggetta all' operazione [2], ed inoltre perchè il risultato dell' operazione era in generale pure una funzione di determinata natura analitica, e solo eccezionalmente [3] si riduceva ad un numero.

La dipendenza fra il numero y e la funzione $\varphi(x)$ data nell' intervallo $a \ldots b$ si scriverà

$$y = A(\varphi). \tag{1}$$

Più generalmente, si possono pensare analoghe dipendenze fra un numero y e più funzioni, anche di più variabili, definite ciascuna in un conveniente intervallo, ed inoltre numeri $t_1, t_2, \ldots$ variabili indipendentemente: esse si scriveranno

$$y = A(\varphi_1(x_1, x_2, \ldots), \varphi_2(x_1, x_2, \ldots), \ldots\ t_1, t_2, \ldots). \tag{2}$$

Ciò posto, il Volterra pone per la dipendenza stabilita dalla (1) fra il numero y e la funzione $\varphi(x)$, alcune restrizioni, di cui l' una è analoga alla continuità nelle funzioni, le altre conducono ad un concetto simile a quello della derivata. Precisamente, essendo $\theta(x)$ una funzione soggetta entro l' intervallo $m \ldots n$, che diremo intervallo h, contenuto in $a \ldots b$, alla con-

(1) L' A. osserva che y si potrebbe dire *funzione* della funzione φ, espressione da non confondersi bene inteso con quella di *funzione di funzione* usualmente adoperata nei trattati di Calcolo. Come esempio di simili dipendenze egli cita la temperatura in un punto di una lastra conduttrice, temperatura che dipende dall' insieme dei valori delle temperature al contorno della lastra.

(2) Basta ricordare che un' operazione A veniva definita dalle sue ξ_n (V. il Cap. VI).

(3) Per esempio, le operazioni H (§§ 132, 193).

NOTA V.

Cenno sulle operazioni non distributive.

Nella Nota I abbiamo indicato varii lavori che si riferiscono alle operazioni in generale e anche nella presente opera (§§ 24-41) si sono date alcune proposizioni generali sulle operazioni o sui sistemi di operazioni per cui si ammette la proprietà associativa, ma non la distributiva. Ma astrazione fatta da quelle proposizioni e da altre analoghe, parimente generali ed ovvie e discendenti dal concetto generale di operazione, pochi lavori si riferiscono a classi di operazioni funzionali non distributive, e pochi risultati si sono ottenuti in proposito. Tuttavia, si può notare come sia facile dedurre dalle operazioni distributive, altre che non godono di codesta proprietà; basta considerare p. es. un' operazione $A(\varphi, \psi)$ distributiva separatamente rispetto alle due funzioni arbitrarie indipendenti φ e ψ, e considerare poi l' operazione B su una sola funzione arbitraria, definita da

$$B(\varphi) = A(\varphi, \varphi).$$

Questa sarà in generale un' operazione funzionale determinata, ma non distributiva.

Fra i risultati che, come dicevamo, sono scarsi di numero, in ordine a quelle operazioni per le quali non si ammette a priori la proprietà distributiva, vogliamo nella presente nota accennare a due dei più notevoli, sebbene d' importanza diversa; l' uno ottenuto dal Volterra, l' altro dal Bourlet.

Il primo autore [1] considera operazioni funzionali definite come segue. Sia φ una funzione della variabile reale x — nel

[1] Nel lavoro « *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni* » Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, secondo semestre 1887, fasc. 4, 6 e 7.

senso generale del Dirichlet — data arbitrariamente nell' intervallo $a < x < b$. Si considereranno quelle operazioni che eseguite su φ, generano un numero y, il quale viene pertanto a dipendere da tutti i valori che assume φ entro l' intervallo considerato e muta in generale al mutare della funzione [1]. Importa appena di notare che questo modo di concepire l' operazione funzionale si discosta essenzialmente dal nostro, prima perchè per noi primeggiava il concetto della natura analitica della funzione φ soggetta all' operazione [2], ed inoltre perchè il risultato dell' operazione era in generale pure una funzione di determinata natura analitica, e solo eccezionalmente [3] si riduceva ad un numero.

La dipendenza fra il numero y e la funzione $\varphi(x)$ data nell' intervallo $a \dots b$ si scriverà

$$(1) \qquad y = A(\varphi).$$

Più generalmente, si possono pensare analoghe dipendenze fra un numero y e più funzioni, anche di più variabili, definite ciascuna in un conveniente intervallo, ed inoltre numeri $t_1, t_2, \dots$ variabili indipendentemente: esse si scriveranno

$$(2) \qquad y = A(\varphi_1(x_1, x_2, \dots), \varphi_2(x_1, x_2, \dots), \dots\, t_1, t_2, \dots).$$

Ciò posto, il Volterra pone per la dipendenza stabilita dalla (1) fra il numero y e la funzione $\varphi(x)$, alcune restrizioni, di cui l' una è analoga alla continuità nelle funzioni, le altre conducono ad un concetto simile a quello della derivata. Precisamente, essendo $\theta(x)$ una funzione soggetta entro l' intervallo $m \dots n$, che diremo intervallo h, contenuto in $a \dots b$, alla con-

[1] L' A. osserva che y si potrebbe dire *funzione* della funzione φ, espressione da non confondersi bene inteso con quella di *funzione di funzione* usualmente adoperata nei trattati di Calcolo. Come esempio di simili dipendenze egli cita la temperatura in un punto di una lastra conduttrice, temperatura che dipende dall' insieme dei valori delle temperature al contorno della lastra.

[2] Basta ricordare che un' operazione A veniva definita dalle sue ξ_n (V. il Cap. VI).

[3] Per esempio, le operazioni H (§§ 132, 193).

dizione di essere sempre dello stesso segno, ed inferiore ad un numero positivo ε in valore assoluto, ed essendo δy la variazione di y per la variazione θ di φ; e t_1 essendo un punto sempre compreso in h, egli suppone, posto

$$\int_m^n \theta(x)dx = \sigma,$$

che $\dfrac{\delta y}{\sigma}$ abbia per h e per θ tendenti a zero un limite finito e determinato cui esso rapporto tende uniformemente rispetto *a tutte le possibili funzioni* $\varphi(x)$ (1) e a tutti i punti t_1; questo limite, detto dall'A. *derivata prima* di y, si può indicare con

$$y' = A'(\varphi;\ t_1).$$

Sottoponendo y' a condizioni dello stesso genere, si definisce in modo analogo una derivata seconda di y

$$y'' = A''(\varphi;\ t_1,\ t_2)$$

poi, con restrizioni simili per y'', una derivata terza e così via. Si dimostra che la derivata i^{sima}

$$y^{(i)} = A^{(i)}(\varphi;\ t_1,\ t_2, \ldots, t_i)$$

è simmetrica rispetto ai parametri $t, t_1, \ldots, t_{i-1}$, e si giunge, applicando una nota proposizione del Calcolo differenziale, ad uno sviluppo della forma

$$(3)\qquad A(\varphi+\psi) = A(\varphi) + \int_a^b A'(\varphi;\ t_1)\psi(t_1)dt_1 + \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b A''(\varphi;\ t_1,\ t_2)\psi(t_1)\psi(t_2)dt_1\, dt_2 + \ldots \ldots + \frac{1}{n!}\int_a^b \ldots \int_a^b A^{(n)}(\varphi;\ t_1, t_2, \ldots, t_n)\psi(t_1)\ldots\psi(t_n)dt_1 \ldots dt_n + R_n,$$

e quando il limite dell'ultimo termine sia nullo per $n = \infty$ si ottiene per la A uno sviluppo in serie analogo a quello del TAYLOR

(1) Si potrebbe rendere questa condizione meno restrittiva limitando la variabilità di φ ad un determinato *campo funzionale*.

per le funzioni. Facendo φ costante od anche nulla si ha dalla (3) una espressione analitica per l'operazione funzionale $A(\psi)$.

Nel lavoro citato nella Nota IV, il CALÒ considera le operazioni che si hanno sulla funzione ψ nei singoli termini dello sviluppo precedente; nota che il primo termine, detto $I_1(\psi)$, gode della proprietà distributiva, mentre il secondo I_2, il terzo I_3 ecc. danno per $I_2(\psi+\chi)$, $I_3(\psi+\chi), \ldots$ leggi di formazione di mano in mano più complesse.

Del risultato del VOLTERRA ora accennato una generalizzazione è stata data dalla Sig.na FABBRI (1).

Il risultato ottenuto dal BOURLET riguarda una questione più elementare. Egli si propone (2) di trovare le operazioni funzionali A tali che sia

$$(4)\qquad A(\varphi+\psi) = F(A(\varphi),\ A(\psi)),$$

essendo F una funzione data di due variabili. Egli trova dapprima che la funzione $F(u, v)$ deve essere simmetrica, come pure le

$$F(u,\ F(v,\ w)),\qquad F(u,\ F(v,\ F(w,\ t))), \ldots;$$

ora le funzioni che godono di questa proprietà, e che l'A. chiama *indefinitamente simmetriche*, si ottengono mediante un teorema di ABEL, e con ciò si vengono a costruire le operazioni soddisfacenti alla (4).

Date due operazioni A, B soddisfacenti alla (4), è facile vedere che il loro quoziente (nel senso della teoria delle operazioni) è una operazione distributiva. Sia infatti

$$B(\varphi+\psi) = F(B(\varphi),\ B(\psi)),$$

e si ponga $B = AR$; verrà

$$AR(\varphi+\psi) = F(AR(\varphi),\ AR(\psi))$$

e per la (4),

$$AR(\varphi+\psi) = A(R(\varphi)+R(\psi));$$

l'operazione R è dunque distributiva. Lo studio delle opera-

(1) Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, T. XXV, 1889.
(2) Ann. de l'Éc. Norm., S. III, T. XIV, 1897.

zioni A soddisfacenti alla relazione generale (4) è dunque ricondotto a quello delle operazioni distributive.

Infine l'A. considera le operazioni soddisfacenti alla relazione più generale

$$(5) \qquad A(G(\varphi + \psi)) = F(A(\varphi) + A(\psi)),$$

essendo G una funzione di due variabili che ha le stesse proprietà di simmetria delle F, e trova ancora che queste operazioni si riconducono, in modo analogo, alle distributive

INDICE ALFABETICO

I numeri si riferiscono alle pagine.

A

B

C

CORREZIONI

Pag. 84	lin. 10	al terzo termine della formula invece di θ leggi θ^2.
„ 128	„ 3 risalendo,	invece di 178 leggi 177.
„ 170	„ 17	invece di (27) leggi (17).